Теорема 1. (Принцип полноты Вейрштрасса): Если $A \neq \varnothing$ и ограниченно сверху, то $\exists \sup A$. Если $A \neq \varnothing$ и ограниченно снизу, то $\exists \inf A$.

Доказательство смотри в прошлой лекции.

Аксиома Архимеда

Для нас аксиома Архимеда - это теорема, так как она следует из аксиомы полноты. Будем доказывать её как теорему.

Аксиомы полноты. Если $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$, $B \subset \mathbb{R}$, $B \neq \varnothing$ и "$A \leq B$" (то есть $a \leq b$, $\forall a \in A$, $b \in B$), то $\exists c \in \mathbb{R}$, которое разделяет A и B, то есть $a \leq c \leq b$, $\forall a \in A$, $b \in B$.

Аксиома Архимеда. Множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ - не ограниченно сверху в $\mathbb{R}$.

□ Предположим противное, что $\mathbb{N}$ - ограниченно сверху, тогда по принципу полноты Вейрштрасса $\exists\, a = \sup \mathbb{N}$. Посмотрим на $a - 1 \Rightarrow (a-1) < \sup \mathbb{N} \Rightarrow (a-1)$ - не является верхней гранью $\Rightarrow$
$\exists\, n \in \mathbb{N}\colon (a-1) < n$. Добавляем 1 справа и слева, получаем $a < n+1$ - противоречит тому, что $a = \sup \mathbb{N}$. ■

Следствие 1. Если $0 < a < b \Rightarrow \exists\, n \in \mathbb{N}\colon an = b$

□ Поделим на $a \Rightarrow n > \dfrac{b}{a} \Rightarrow$ по аксиоме Архимеда такое n найдется всегда, так как множество не ограниченно. ■

Применение Аксиомы Архимеда

Когда говорим про вещественные числа - используем геометрическую модель. Будем изображать вещественные числа в виде прямой.

Опр: 1. Прямая - геометрическое место точек, равноудаленное от двух данных.

Как построить соответствие между вещественными числами и точкой на прямой? Надо выбрать начало координат, единичный отрезок. Возьмем вещественное число a. В a сколько-то раз умещается едениц. То есть по аксиоме Архимеда $\exists\, n\colon n \leq a < n+1$.

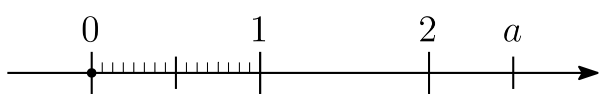

Рис. 1: Соответствие между прямой и точками

Далее берем отрезок от 0 до 1 и делим на 10, опять $\exists m\colon \frac{m}{10} \leq a < \frac{m+1}{10}, \ldots$.
Таким образом можно отождествить то что делается на прямой с десятичными дробями: $a_0{,}a_1a_2\ldots$ и так выписать для каждой точки десятичную дробь и наоборот. То есть аксиома Архимеда позволяет измерять отрезки и указывает процедуру сопоставления точек прямой и вещественных чисел.

Опр: 2. Отрезок $[a,b] = \{\, x \in \mathbb{R}\colon a \leq x \leq b \,\}$

Опр: 3. Интервал $(a,b) = \{\, x \in \mathbb{R}\colon a < x < b \,\}$

Опр: 4. Полуинтервал $(a,b] = \{\, x \in \mathbb{R}\colon a < x \leq b \,\}$

Опр: 5. Полуинтервал $[a, b) = \{\in \mathbb{R}\colon a \le x < b\}$

Опр: 6. Модуль $|x| = \max\{x, -x\}$

Можно проверить, что $|x-y| = \begin{cases} x-y, & x \ge y \\ y-x, & x < y \end{cases}$

Опр: 7. Величина $|x-y|$ называется расстоянием от x до y. А для отрезков, интервалов, полуинтервалов с концами $\{a, b\}$ число $b-a$ называется длиной интервала.

Утв. 1. Неравенство треугольника: $\big||x|-|y|\big| \le |x \pm y| \le |x|+|y|$

□ Поскольку $|x| = \max\{x, -x\}$, то $\pm x \le |x| \Rightarrow$

$$x + y \le |x| + y \le |x| + |y|$$

$$-x - y \le |x| - y \le |x| + |y|$$

Таким образом получим: $|x+y| \le |x|+|y|$, аналогично

$$x - y \le |x| - y \le |x| + |y|$$

$$-x + y \le |x| + y \le |x| + |y|$$

Таким образом получим: $|x-y| \le |x|+|y| \Rightarrow |x \pm y| \le |x|+|y|$.

$$|x+y-x| = |y| \le |x| + |y-x| \Rightarrow |y| - |x| \le |y-x|$$
$$|y+x-y| = |x| \le |y| + |x-y| \Rightarrow |x| - |y| \le |x-y| = |y-x|$$

Таким образом получим: $\big||x|-|y|\big| \le |x-y|$, аналогично

$$|x-(y+x)| = |-y| = |y| \le |x| + |y+x| \Rightarrow |y| - |x| \le |y+x|$$

$$|y-(x+y)| = |-x| = |x| \le |y| + |x+y| \Rightarrow |x| - |y| \le |x+y|$$

Таким образом получим: $\big||x|-|y|\big| \le |x \pm y|$.

■

Опр: 8. Последовательность элементов множества A - это функция $f\colon \mathbb{N} \to A$. Только вместо записи $f(n)$ пишем a_n.

Теорема 2. Принцип полноты Кантора (теорема о вложенных отрезках): Пусть $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}] \supset \ldots$ - последовательность (не строго) вложенных отрезков. Тогда:

1. $\bigcap\limits_n [a_n, b_n] \ne \varnothing$;
2. Если $\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, n\colon b_n - a_n < \varepsilon \Rightarrow \bigcap\limits_n [a_n, b_n]$ - состоит ровно из одной точки;

□ Выводим из принципа полноты Вейрштрасса: $A = \{a_n\}$ - множество левых концов, любой правый конец b_n - является верхней гранью A. Предположим противное: $\exists\, b_m \colon b_m < a_n$

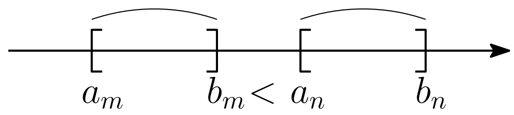

Рис. 2: Непересекающиеся отрезки

Тогда мы получим непересекающиеся отрезки $[a_m, b_m]$ и $[a_n, b_n]$, а это противоречит вложенности. Следовательно, все a_n могут быть только меньше или равны b_m. Так как A - не пусто, ограниченно сверху $\Rightarrow$ по принципу полноты Вейрштрасса $\exists\, c = \sup A$. По определению точной верхней грани: $\forall m, c \leq b_m$. По определению верхней грани $\forall n, a_n \leq c \Rightarrow \forall n, m,\ a_n \leq c \leq b_m$. В частности для случая, когда $m = n \Rightarrow \forall n, c \in [a_n, b_n] \Rightarrow 1$ - доказано.

Пусть $\exists\, c_1, c_2$ удовлетворяющие условиям выше, но тогда обе эти точки лежат в каждом отрезке $[a_n, b_n]$.

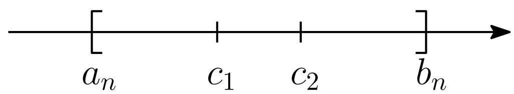

Рис. 3

Это означает, что $b_n - a_n \geq c_2 - c_1$, но согласно второму пункту для $\varepsilon = \dfrac{c_2 - c_1}{2}$ нет такого отрезка $[a_n, b_n] \Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow 2$ - доказано. ■

Следствие 2. $a < b \Rightarrow [a, b]$ - не является счетным множеством.

□ (От противного): пусть $[a, b]$ - счетно и $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ - все его элементы. Делим отрезок на три части и берем тот, где нет x_1. Затем этот отрезок делим на три части и берем тот, где нет x_2. Затем этот отрезок делим на три части и берем тот, где нет x_3, … и так далее $\Rightarrow$ получили систему вложенных отрезков.

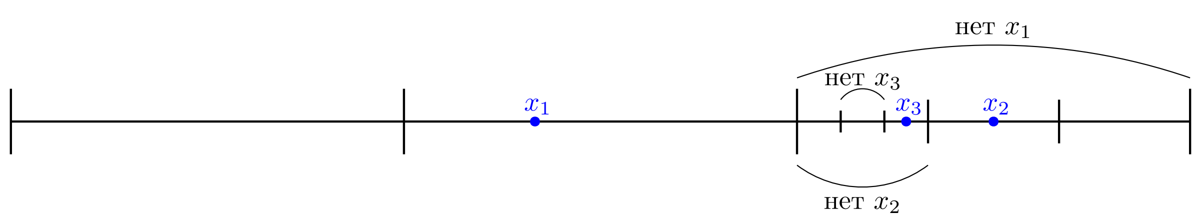

Рис. 4: Система вложенных отрезков

По теореме Кантора внутри $\exists\, c$, какой номер у этой точки? Может ли $c = x_n$ - нет, так как на шаге n взяли отрезок в котором нет $x_n \Rightarrow$ такая точка не была пересчитана $\Rightarrow$ противоречие. ■

Упр. 1. $a < b$, доказать, что $[a, b] \sim [a, b) \sim (a, b) \sim \mathbb{R}$ (множества равномощны).

Опр: 9. Множества равномощные отрезку $[a, b]$ с $a < b$ или $\mathbb{R}$ называются континуальными.

Rm: 1. Из принципа полноты Кантора и аксиомы Архимеда следует аксиома полноты. (Доказать как упражнение).

Предел последовательности

Пусть $\{a_n\}$ - последовательность вещественных чисел.

Опр: 10. Число a называется пределом последовательности $\{a_n\}$ при $n \to \infty$, если

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N} \colon \forall n > N,\ |a_n - a| < \varepsilon$$

Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, или $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$, или просто $a_n \to a$.

Примеры

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$

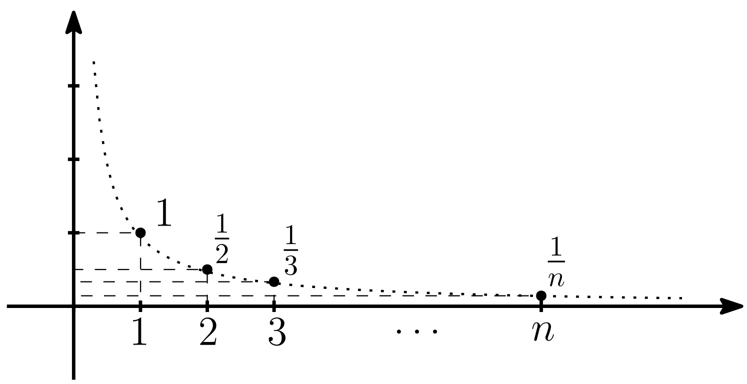

Рис. 5: Предел последовательности $\frac{1}{n}$

Формально, нужно проверить, что $\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N} \colon \forall n > N,\ |\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$, какое N взять? $\frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$. Подойдет $N > \frac{1}{\varepsilon}$ - такое N найдется по аксиоме Архимеда.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$

Формально, нужно проверить, что $\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N} \colon \forall n > N,\ |\frac{1}{2^n} - 0| < \varepsilon$, значит $2^n > \frac{1}{\varepsilon}$.

По неравенству Бернулли $2^n = (1+1)^n \geq 1+n$. Подойдет $N > \frac{1}{\varepsilon}$ и для $n > N \Rightarrow 2^n \geq n+1 > N > \frac{1}{\varepsilon}$ - такое N найдется по аксиоме Архимеда.

Отрицание предела последовательности

Число a не является пределом последовательности $\{a_n\}$? Построим отрицание определения:

Опр: 10. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N} \colon \forall n > N,\ |a_n - a| < \varepsilon$

Тогда отрицание:

$$\exists\, \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N} \colon \exists\, n > N \colon |a_n - a| \geq \varepsilon$$

Утв. 2. Следующие утверждения эквивалентны:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$;

2) Для всякого интервала, содержащего a, в нем лежат все члены последовательности, начиная с некоторого номера $N \Leftrightarrow \forall(\alpha,\beta) \ni a,\ \exists\, N\colon \forall n > N,\ a_n \in (\alpha,\beta)$;

3) Во всяком интервале, содержащим a, лежат все члены последовательности, кроме конечного числа $\Leftrightarrow \forall(\alpha,\beta) \ni a,\ \exists\, n_1,\dots,n_N\colon a_n \in (\alpha,\beta),\ \forall n \notin \{n_1,\dots,n_N\}$;

□ Докажем утверждения циклично:
1) $\Rightarrow$ 2)
$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N}\colon \forall n > N,\ |a_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ начиная с некоторого номера n. Пусть $a \in (\alpha,\beta) \Rightarrow \varepsilon = \min\{a-\alpha, \beta-a\} \Rightarrow$ возьмем наименьший симметричный интервал внутри (α,β). По пункту 1) следует $\exists\, N\colon\ \forall n > N,\ a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset (\alpha,\beta)$.

2) $\Rightarrow$ 3)
$\forall(\alpha,\beta) \ni a,\ \exists\, N\colon \forall n > N,\ a_n \in (\alpha,\beta) \Rightarrow a_n \notin (\alpha,\beta)$ возможно только для $n \in \{1,\dots,N\}$.

3) $\Rightarrow$ 1)
$\forall\varepsilon > 0$ рассмотрим интервал $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. По пункту 3) $\exists n_1,\dots,n_N\colon \forall n \notin \{n_1,\dots,n_N\},\ a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Возьмем $\tilde{N} = \max\{n_1,\dots,n_N\}$, тогда $\forall n > \tilde{N},\ n \notin \{n_1,\dots,n_N\} \Rightarrow a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \Leftrightarrow |a_n - a| < \varepsilon$. ■

Следствие 3. Отбрасывание или добавление конечного числа элементов - не влияет на сходимость и значения предела последовательности (по 3-му свойству).

Теорема 3. У последовательности число пределов ≤ 1.

□ Предположим, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$ такие, что $a \neq b$. Для определенности пусть $a < b$. Тогда рисуем прямую и берем два непересекающихся интервала:

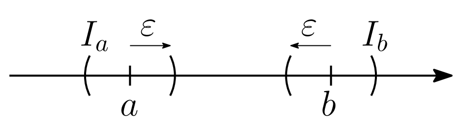

Рис. 6: Разные пределы последовательностей

Берем $0 < \varepsilon < \frac{b-a}{2}$ - чтобы точно не пересекались. Тогда $\exists\, N_1\colon\ \forall n > N_1,\ a_n \in I_a,\ \exists\, N_2\colon\ \forall n > N_2,\ a_n \in I_b$. Пусть $n > \max\{N_1, N_2\} \Rightarrow a_n \in I_a \cap I_b = \varnothing \Rightarrow$ противоречие. Значит предел определен единственным образом. ■