Структура множества точек разрыва

f - ограничена и определена на $\mathbb{R}$. Мы ввели понятия колебания и колебания функции в точке a:

$$\omega(f, E) = \sup_{x,y \in E} |f(x) - f(y)|,\ \omega(f, a) = \lim_{\delta \to 0+} \omega(f, \mathcal{U}_\delta(a))$$

Утв. 1. f непрерывна в точке $a \Leftrightarrow \omega(f, a) = 0$.

Следствие 1. Множество точек разрыва $= \bigcup\limits_n \{\, a \colon \omega(f, a) \geq \frac{1}{n}\,\}$.

Утв. 2. Множество $\bigcup\limits_n \{\, a \colon \omega(f, a) \geq \frac{1}{n}\,\}$ - замкнуто.

□ Покажем, что дополнение - открыто.

Пусть $b \in \mathbb{R} \backslash \{\, a \colon \omega(f, a) \geq \frac{1}{n}\,\} = \{\, a \colon \omega(f, a) < \frac{1}{n}\,\} \Rightarrow$ надо показать, что b принадлежит этому множеству с некоторой окрестностью. Знаем, что $\omega(f, b) < \frac{1}{n} \Rightarrow \lim\limits_{\delta \to 0+} \omega(f, \mathcal{U}_\delta(b)) < \frac{1}{n}$. По теореме отделимости при значениях δ близких к нулю, значения функции $\omega(f, \mathcal{U}_\delta(b)) < \frac{1}{n}$.

Рассмотрим по определению: $\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \hat{\delta} > 0 \colon \forall \delta \in (0, \hat{\delta}) \Rightarrow |\omega(f, \mathcal{U}_\delta(b)) - \omega(f, b)| < \varepsilon \Rightarrow$
$\Rightarrow \omega(f, \mathcal{U}_\delta(b)) < \omega(f, b) + \varepsilon$. Возьмем $\varepsilon = \frac{1}{n} - \omega(f, b) > 0 \Rightarrow$

$$\omega(f, \mathcal{U}_\delta(b)) < \frac{1}{n} - \omega(f, b) + \omega(f, b) = \frac{1}{n}$$

Таким образом, $\exists\, \delta > 0 \colon \omega(f, \mathcal{U}_\delta(b)) < \frac{1}{n}$.

Возьмем точку c из этого интервала $\mathcal{U}_\delta(b)$ и возьмем окрестность вокруг этой точки: $\mathcal{U}_\gamma(c)$ так, чтобы $\mathcal{U}_\gamma(c) \subset \mathcal{U}_\delta(b)$.

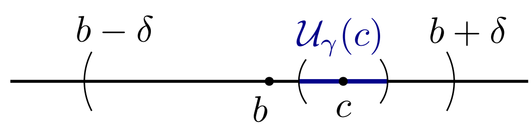


Рис. 1: Колебания функции на интервале $\omega(f, \mathcal{U}_\gamma(c)) \leq \omega(f, \mathcal{U}_\delta(b))$.

Точная верхняя грань на большем множестве не меньше, чем точная верхняя грань на меньшем $\Rightarrow$ $\omega(f, \mathcal{U}_\gamma(c)) \leq \omega(f, \mathcal{U}_\delta(b)) < \frac{1}{n} \Rightarrow \lim\limits_{\gamma \to 0+} \omega(f, \mathcal{U}_\gamma(c)) = \omega(f, c) < \frac{1}{n}$ поскольку величины $\omega(f, \mathcal{U}_\gamma(c))$ убывают при стремлении γ к нулю. Следовательно интервал $(b - \delta, b + \delta) \subset \mathbb{R} \setminus \{\, a \colon \omega(f, a) \geq \frac{1}{n}\,\} \Rightarrow$ дополнение открыто $\Rightarrow$ исходное множество замкнуто. ■

Теорема выше говорит о том, что множество точек разрыва f - это объединение не более чем счетного набора замкнутых множеств.

Пример: множество иррациональных чисел не является множеством точек разрыва.

Глобальные свойства непрерывных функций

Опр: 1. Функция f непрерывна на множестве D, если функция f непрерывна в каждой точке D по множеству D.

Первая теорема Вейрштрасса

Теорема 1. (Первая теорема Вейрштрасса) Если f непрерывна на компакте K, то f ограниченна на K, то есть

$$\exists\, C > 0\colon |f(x)| \leq C,\ \forall x \in K$$

$\square$

(I) способ: (От противного) Пусть $\forall n,\ \exists\, x_n \in K\colon |f(x_n)| > n \Rightarrow$ получили последовательность по которой $|f(x_n)|$ уходит в бесконечность. Так как K - компакт, то $\exists\, x_{n_k}\colon x_{n_k} \to x_0 \in K \Rightarrow$ из-за непрерывности $f \Rightarrow f(x_{n_k}) \to f(x_0)$, то есть, последовательность сходится к $f(x_0)$.

Но $|f(x_{n_k})| > n_k \to \infty$ что невозможно, так как если последовательность сходится, то она ограниченна $\Rightarrow$ противоречие.

(II) способ: $\forall a \in K,\ f$ - непрерывна в точке $a \Rightarrow \exists\, C_a > 0 \wedge \mathcal{U}(a)\colon |f(x)| \leq C_a,\ \forall x \in \mathcal{U}(a)$. Заметим, что $K \subset \bigcup\limits_{a \in K} \mathcal{U}(a) \Rightarrow$ по определению компакта $\exists \mathcal{U}(a_1), \ldots, \mathcal{U}(a_N)\colon K \subset \mathcal{U}(a_1) \cup \ldots \cup \mathcal{U}(a_N)$. Тогда

$$C = \max\{C_{a_1}, \ldots, C_{a_N}\} \Rightarrow |f(x)| \leq C,\ \forall x \in K$$

таким образом, f ограниченна на K. $\blacksquare$

Rm: 1. В данной теореме невозможно отказаться от компактности.

Пример: $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \in (0, 1)$ - непрерывна, но не является ограниченной $\Rightarrow$ теорема не верна.

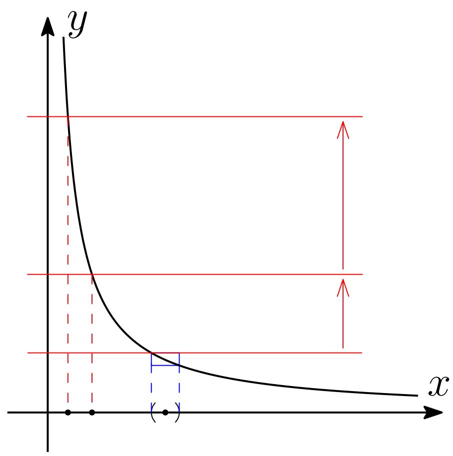


Рис. 2: При приближении к 0, у функции $\frac{1}{x}$ ограничивающая константа будет расти.

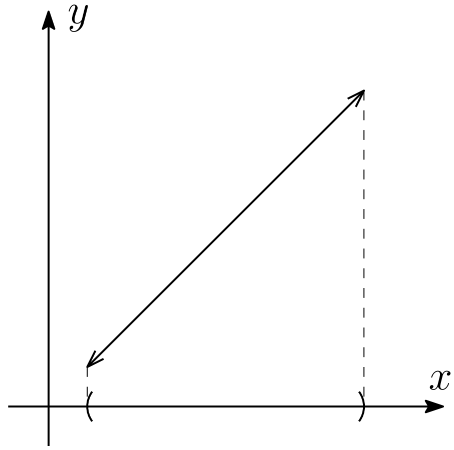
Пример: $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0 \wedge f(0) = 0$, $x \in [0, 1]$ - множество является компактом, но функция разрывна в точке 0 $\Rightarrow$ теорема не верна.

Вторая теорема Вейрштрасса

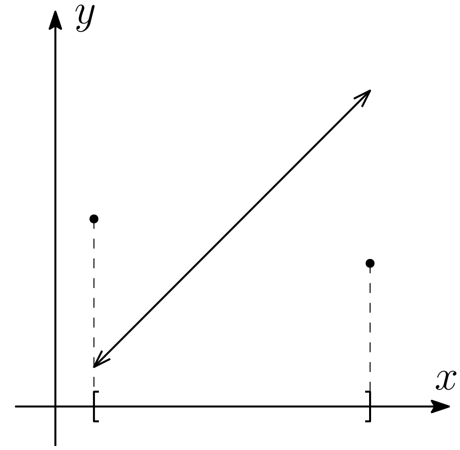
Теорема 2. (Вторая теорема Вейрштрасса) Если f непрерывна на компакте K, то она принимает свои наибольшие и наименьшие значения на нем, то есть

$$\exists\, x_m, x_M \in K\colon\ f(x_m) = \inf_{x\in K} f(x),\ f(x_M) = \sup_{x\in K} f(x)$$

Rm: 2. Нарушение любого из условий также влечет нарушение теоремы.



(a) Непрерывная функция $y = x$ на интервале.



(b) Функция разрывна на компакте.

Рис. 3: Примеры нарушения условий теоремы Вейрштрасса.

$\square$

(I) способ: $\forall n,\ \inf\limits_{x\in K} f(x) + \frac{1}{n}$ - не нижняя грань $\Rightarrow \exists\, x_n \in K\colon\ f(x_n) < \inf\limits_{x\in K} f(x) + \frac{1}{n} \Rightarrow$ получили последовательность точек компакта. Так как K - компакт, то $\exists\, x_{n_k} \to x_0 \in K$. Для этой подподпоследовательности выполнено

$$\inf_{x\in K} f(x) \le f(x_{n_k}) < \inf_{x\in K} f(x) + \frac{1}{n_k}$$

Пусть $k \to \infty \Rightarrow$ так как f - непрерывна на компакте, то

$$f(x_{n_k}) \to f(x_0) \Rightarrow \inf_{x\in K} f(x) \le f(x_0) \le \inf_{x\in K} f(x) \Rightarrow f(x_0) = \inf_{x\in K} f(x)$$

Аналогично для точной верхней грани.

(II) способ: (От противного) $\forall x \in K,\ f(x) > \inf\limits_{K} f(x)$. Рассмотрим новую функцию

$$g(x) = \frac{1}{f(x) - \inf\limits_{K} f(x)}$$

По условию $f(x) - \inf\limits_{K} f(x) \ne 0,\ \forall x \in K$ - непрерывная функцию не обращающаяся в 0 на компакте $K \Rightarrow$ $\Rightarrow g(x)$ - тоже непрерывная функция на компакте K. По первой теореме Вейрштрасса, непрерывная на компакте функция - ограниченна $\Rightarrow \exists\, C > 0\colon\ g(x) < C,\ \forall x \in K \Rightarrow$

$$\frac{1}{f(x) - \inf\limits_{K} f(x)} < C \Rightarrow \frac{1}{C} < f(x) - \inf_{K} f(x) \Rightarrow \frac{1}{C} + \inf_{K} f(x) < f(x),\ \forall x \in K$$

Таким образом, получаем, что $\frac{1}{C} + \inf\limits_{K} f(x)$ - нижняя грань, но это невозможно, так как $\inf\limits_{K} f(x)$ - точная нижняя грань $\Rightarrow$ противоречие. $\blacksquare$

Теорема Коши о промежуточном значении

Теорема 3. (Коши) Если f непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $f(a)f(b) < 0$ (на концах значения разных знаков), то $\exists\, c \in [a,b]\colon f(c) = 0$.

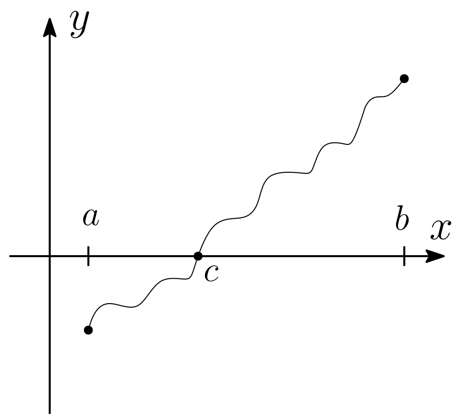


Рис. 4: Функция, непрерывная на отрезка $[a,b]$ с разными значениями на концах.

□

(I) способ: Делим отрезок $[a,b]$ пополам, если $f(\frac{a+b}{2}) = 0$, то $c = \frac{a+b}{2}$. Если $f(\frac{a+b}{2}) \neq 0$, то

$$f(\tfrac{a+b}{2})f(a) < 0 \vee f(\tfrac{a+b}{2})f(b) < 0$$

Пусть $[a_1,b_1]$ - та половина на концах которой разные знаки, $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$.

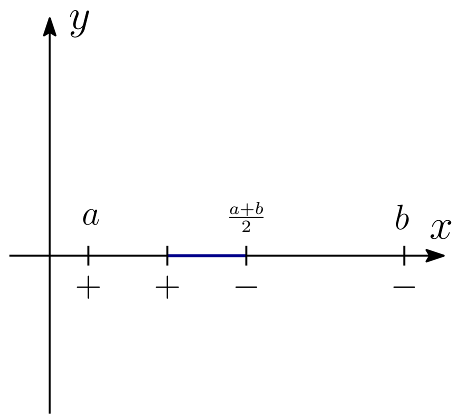


Рис. 5: Поиск отрезка со значениями разных знаков на концах.

Повторяем рассуждения для $[a_1,b_1]$: либо $f(\frac{a_1+b_1}{2}) = 0 \Rightarrow c = \frac{a_1+b_1}{2}$, либо $f(\frac{a_1+b_1}{2}) \neq 0$ и $[a_2,b_2]$ - та половина $[a_1,b_1]$, на концах которой f принимает значения разных знаков. И так далее.

В итоге, либо на каком-то шаге найдена точка c, либо построена последовательность вложенных отрезков $[a_1,b_1] \supset [a_2,b_2] \supset \ldots \supset [a_n,b_n] \supset \ldots$ такая, что их длины $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0$ и $f(a_n)f(b_n) < 0$.

По теореме о вложенных отрезках $\exists\, c \in \bigcap\limits_n [a_n,b_n]$. Так как c лежит внутри отрезков, то

$$|c - a_n| \leq \tfrac{b-a}{2^n} \wedge |c - b_n| \leq \tfrac{b-a}{2^n} \Rightarrow a_n \to c \wedge b_n \to c$$

Так как f - непрерывна в точке c, то

$$f(a_n) \to f(c) \wedge f(b_n) \to f(c) \Rightarrow f(c)^2 = \lim_{n\to\infty} f(a_n)f(b_n) \leq 0 \Rightarrow f(c) = 0$$

(II) способ: (От противного) Пусть $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ и $f(x) \neq 0$ на отрезке $[a, b]$. Рассмотрим множество $F^- = \{\, x \in [a, b] \colon f(x) \leq 0 \,\}$ и множество $F^+ = \{\, x \in [a, b] \colon f(x) \geq 0 \,\}$. Очевидно, что

1) $F^- \cap F^+ = \varnothing$, $F^- \cup F^+ = [a, b]$;
2) $a \in F^-$, $b \in F^+$, то есть эти множества не пусты;
3) $F^- \wedge F^+$ - замкнуты;

Доказав 3), мы представим отрезок в виде двух непересекающихся и непустых замкнутых множеств. Добавим к одному из них $(-\infty, a]$, а к другому $[b, +\infty)$ $\Rightarrow$ получится, что всю числовую прямую представили в виде объединения двух непересекающихся, непустых, замкнутых множеств $\Rightarrow$ противоречие.

Пусть $x_n \in F^- \wedge x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \leq 0$, из-за непрерывности $f(x_n) \to f(x_0) \Rightarrow f(x_0) \leq 0 \wedge x_0 \in F \Rightarrow$ это множество замкнуто. Аналогично для F^+.

Вся числовая прямая представляется, как $\mathbb{R} = \big((-\infty, a] \cup F^-\big) \cup \big(F^+ \cup [b, +\infty)\big)$. Эти два множества - не пересекаются, так как $F^- \cap F^+ = \varnothing$ и $a \in F^-$, $b \in F^+$. Также эти множества не пустые и замкнутые, что невозможно $\Rightarrow$ противоречие со связностью прямой (числовую прямую нельзя представить в виде объединения двух замкнутых множеств). ■

Rm: 3. Замкнутость множества нулей непрерывной функции доказывается аналогично доказательству замкнутости множеств F^- и F^+.

Упр. 1. Доказать, что всякое замкнутое множество является множеством нулей некоторой непрерывной функции.

Следствие 2. (Теорема о промежуточном значении) Пусть f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $A = f(a)$, $B = f(b)$. Тогда $\forall C \colon A \leq C \leq B$, $\exists\, c \in [a, b] \colon f(c) = C$.

□ Рассмотрим функцию $g(x) = f(x) - C$. Если $C \neq A \wedge C \neq B \Rightarrow g(a)g(b) = (A - C)(B - C) < 0 \Rightarrow$ по предыдущей теореме $\exists\, c \in [a, b] \colon g(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) - C = 0 \Leftrightarrow f(c) = C$. ■

Пример: $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ - обязательно $\exists$ корень $\in \mathbb{R}$. $f(x) = x^3\big(1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3}\big) \Rightarrow \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3} \to 0$ при больших $x \Rightarrow$ знак определяется по x^3. Возьмем отрезок с большим отрицательным значением на левом конце и большим положительным значением на правом, x^3 будет разных знаков на этих концах $\Rightarrow$ по теореме о промежуточном значении существует точка в которой функция обращается в 0.