Степень бинома не обязательно должна быть натуральным числом:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\alpha} C_\alpha^k x^k 1^{\alpha-k} = 1+\alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)}{k!}x^k+\ldots+0+0+\ldots;$$

$$\alpha=-1 \quad \Rightarrow \frac{1}{1+x}=\frac{1}{1-(-x)}, \frac{1}{1-q}=1+q+q^2+q^3+\ldots;$$

$$\alpha=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \sqrt{1+x}=1+c_1x+c_2x^2+\ldots;\ c_i=\ ?\ \Rightarrow$$

$(1+x)=(1+c_1x+c_2x^2+\ldots)(1+c_1x+c_2x^2+\ldots)=1+2c_1x+(c_1^2+2c_2)x^2+\ldots \Rightarrow c_1=\frac{1}{2}$, $c_2=\frac{1}{2}\cdot(-c_1^2)=-\frac{1}{8}$

Коэффициент при биноме: $\frac{1}{2}$, $\dfrac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2}=-\frac{1}{8}$ дальше то же будут совпадения (см. ряд Тейлора).

Функции

Опр: 1. Функцией f из множества X в множество Y, $f\colon X\to Y$, называется правило/соответствие/сопоставление, сопоставляющее $\forall x\in X$ ровно один $y\in Y: y=f(x)$.

$$\begin{cases} x\to y & : y^2=x \text{ - не функция, так как } 1\to\{-1,1\};\\ x\to x^2 & : y=x^2 \text{ - функция;}\end{cases}$$

Опр: 2. Множество $\{x,y\}$ - называется неупорядоченной парой элементов x и y.

Опр: 3. Множество $\{x,\{x,y\}\}$ - называется упорядоченной парой элементов, x - 1-ый элемент пары, а саму пару обозначают (x,y).

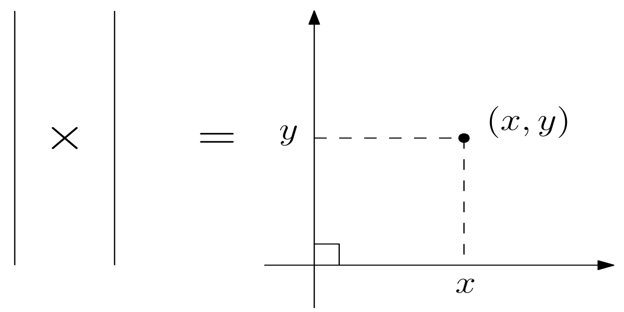
Опр: 4. Декартовым произведением двух множеств $X\times Y$ называется множество упорядоченных пар (x,y), где $x\in X$ и $y\in Y$.

Обозначение $X\times Y=\{\,(x,y)\mid x\in X, y\in Y\,\}$

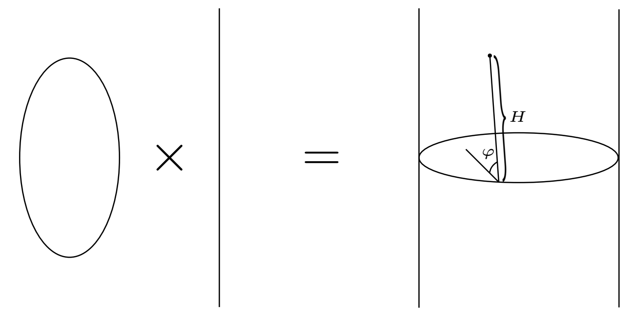
$X \backslash Y$	$\cdots$	y	$\cdots$
$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$
x	$\cdots$	(x,y)	$\cdots$
$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$

Рис. 1: Декартово произведение

Примеры:

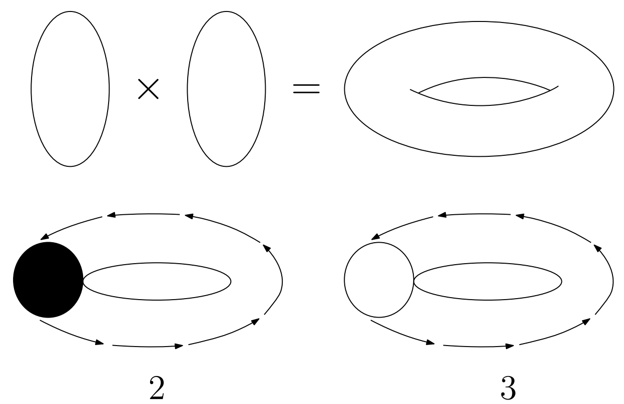


(a) Прямая на прямую

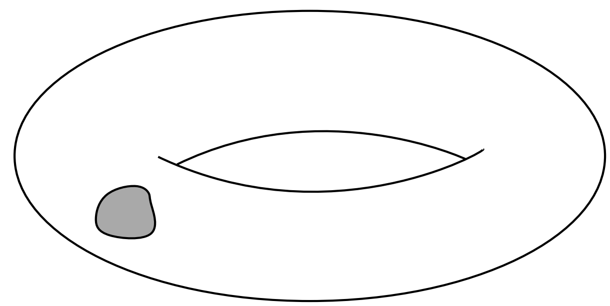


(b) Эллипс на прямую

1



(c) 1: Эллипс на эллипс, 2: Полноторие, 3: Тор



(d) Выворачивая наизнанку снова получим тор

Рис. 2: Примеры Декартовых произведений

Опр: 5. Если задана $f\colon X \to Y$, то в $X \times Y$ определим подмножество $\Gamma_f = \{\,(x, y) \mid y = f(x)\,\}$ - график функции:

(1) $\forall x \in X$, $\exists (x, y) \in \Gamma_f$ - каждому x соотносится y;

(2) Если $(x, y) \in \Gamma_f$ и $(x, z) \in \Gamma_f$, то $y = z$;

На языке теории множеств говорят, что задана функция из X в Y, если задано подмножество $\Gamma \subset X \times Y$, удовлетворяющее свойствам (1)-(2).

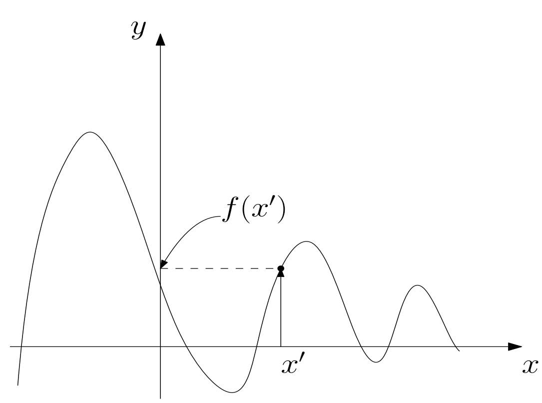


Рис. 3: График функции

$$\left.\begin{array}{l} X \text{ - область определения функции } f \\ Y \text{ - область значения функции } f \end{array}\right\} f\colon X \to Y$$

Опр: 6. Говорят, что на множестве X задана операция $\circ$, если задана функция из $X \times X$ в X, $\circ\colon X \times X \to X$.

$$(x_1, x_2) \mapsto x_1 \circ x_2$$

Операция $\circ$ на множестве X:

1) **коммутативна**, если $x_1 \circ x_2 = x_2 \circ x_1$, $\forall x_1, x_2 \in X$;
2) **ассоциативна**, если $(x_1 \circ x_2) \circ x_3 = x_1 \circ (x_2 \circ x_3)$, $\forall x_1, x_2, x_3 \in X$;

Опр: 7. На множестве функций определена операция композиций $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

$F(X) = \{f \mid f\colon X \to X\}$, $\circ$ - операция на F.

Сама операция определена для любых функций: $g\colon X \to Y$, $f\colon Y \to Z \Rightarrow f \circ g\colon X \to Z \Rightarrow$ каждому элементу из X сопоставили какой-то элемент из Z.

Rm: 1. Если рассмотрим функции из множества в себя, то эта операция будет на множестве F.

Утв. 1. Операция композиции ассоциативна: $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

$\square$ $(f \circ g) \circ h(x) = \big(f \circ g\big)\big(h(x)\big) = f\Big(g\big(h(x)\big)\Big) = f\big((g \circ h)(x)\big) = f \circ (g \circ h)(x)$ $\blacksquare$

При этом, $f \circ g \neq g \circ f$, например $f(x) = 3, g(x) = -3$.

Индуктивные определения на $\mathbb{N}$

Сначала необходимо определить $n+m, \forall n, m \in \mathbb{N}$ - это можно посмотреть в Э. Ландау: Основы/Основания математического анализа.

$n + 1 = \text{след}(n) \Rightarrow \forall m \in \mathbb{N}$, зная $n + m$ имеем следующее: $n + (m + 1) = (n + m) + 1$.

Утв. 2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists!$ функция $f_n\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, такая что:

(1) $f_n(1) = n + 1$;
(2) $f_n(m + 1) = f_n(m) + 1$;

Опр: 8. $n + m = f_n(m)$

$\square$ **(единственность)** пусть таких функций 2: f_n и g, $f_n(1) = g(1) = n + 1$, $f_n(m + 1) = f_n(m) + 1$, $g(m + 1) = g(m) + 1$. Докажем по индукции, что $f_n = g\colon f_n(m) = g(m)$, $\forall m$.
База: $m = 1 \Rightarrow$ ok.
Шаг: пусть $g(m) = f_n(m)$, то $f_n(m + 1) = f_n(m) + 1 = g(m) + 1 = g(m + 1) \Rightarrow$ ok.

(существование) по индукции относительно n:

База: $n = 1 \Rightarrow$ возьмем $f_1(m) = m + 1 \Rightarrow f_1(1) = 1 + 1 = 2$, $f_1(m + 1) = \overbrace{m + 1}^{f_1(m)} + 1 = f_1(m) + 1$, отсюда вместе с этим получим и $m + 1 = 1 + m$, поскольку $1 + m = f_1(m)$ - по определению, а также по

единственности фукнции.
Шаг: пусть для n такая функция f_n уже есть, построим ее для $n+1$:
Возьмем $f_{n+1}(m) = f_n(m) + 1 \Rightarrow f_{n+1}(1) = f_n(1) + 1 = (n+1) + 1$ - следующий за $n+1 \Rightarrow$ ok.
$f_{n+1}(m+1) = f_n(m+1) + 1 = (f_n(m) + 1) + 1 \overset{\text{по опр.}}{=} f_{n+1}(m) + 1 \Rightarrow f_n$ - существует для любого n. ■

Упр. 1. Доказать, что

(1) $n + (m+k) = (n+m) + k$ - индукцией по k;

(2) $n + m = m + n$ - индукцией по m;

Утв. 3. $\forall n, m, k \in \mathbb{N}$ справедливо:

(1) $(n+m) + k = n + (m+k)$;

(2) $n + m = m + n$;

□ (1) индукцией по k:
База: $(n+m) + 1 = f_n(m) + 1 = f_n(m+1) = n + (m+1) \Rightarrow$ ok.
Шаг: Пусть верно для k, то есть $(n+m) + k = n + (m+k) \Rightarrow (n+m) + (k+1) = f_{n+m}(k+1) = f_{n+m}(k) + 1 = \big((n+m)+k\big) + 1 = \big(n+(m+k)\big) + 1 = f_n\big((m+k)\big) + 1 = f_n\big((m+k)+1\big) = n + \big((m+k)+1\big) = n + \big(f_m(k) + 1\big) \overset{\text{по инд.}}{=} n + \big(f_m(k+1)\big) = n + \big(m + (k+1)\big) \Rightarrow$ ok.

(2) индукцией по m:
База: $n + 1 = f_n(1)$, вместе с этим $1 + n = f_1(n) = n + 1 \Rightarrow 1 + n = n + 1 \Rightarrow$ ok.
Шаг: Пусть верно для m: $n + m = m + n \Rightarrow n + (m+1) = f_n(m+1) = f_n(m) + 1 = (n+m) + 1 \overset{\text{по инд.}}{=} (m+n) + 1 = f_m(n) + 1 = f_{m+1}(n) = (m+1) + n \Rightarrow$ ok. ■

Аналогично вводится умножение (используя индукцию).

$$\begin{cases} n \cdot 1 = n \\ n \cdot (m+1) = n \cdot m + n \end{cases}, \Rightarrow \text{ далее проверяется ассоциативность и коммутативность.}$$

Опр: 9. Множество целых чисел $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{\, -n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$.

Rm: 2. Операция “+” и “·” переносятся с множества $\mathbb{N}$, как в школе.

Опр: 10. Подмножество $R \subset X \times X$ называется отношением эквивалентности, если выполняются следующие свойства:

(1) $\forall x \in X$, $(x, x) \in R$ (рефлексивность);

(2) Если $(x, y) \in R$, то $(y, x) \in R$ (симметричность);

(3) Если $(x, y) \in R$, $(y, z) \in R$, то $(x, z) \in R$ (транзитивность);

Примеры: (1) подобие треугольников; (2) $m > 1, n \sim k; n, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n - k \,\vdots\, m$.

Классы эквивалентностей

Опр: 11. $R(a) = \{\, x \mid x \sim a \,\}$ - называется классом эквивалентностей с представителем a.

Утв. 4. Если $R(a) \cap R(b) \neq \varnothing \Rightarrow R(a) = R(b)$.

$\square$ Пусть $c \in R(a) \cap R(b) \Rightarrow a \sim c \wedge b \sim c \Leftrightarrow a \sim c \wedge c \sim b \Rightarrow a \sim b \Rightarrow \forall x \sim b \Rightarrow x \sim a$
$\forall x \sim a \Rightarrow x \sim b \Rightarrow R(a) = R(b)$. $\blacksquare$

Опр: 12. Разбиение множества A - набор непустых подмножеств множества A, таких что объединение этих подмножеств дает A, причем подмножества попарно не пересекаются.

Теорема 1. Пусть R - отношение эквивалентности на множестве X. Множество $\{\, R(x) \mid x \in X \,\}$ - классов эквивалентности формируют разбиение множества X.

$\square$ $R(x) \neq R(y) \Rightarrow R(x) \cap R(y) = \varnothing \Leftrightarrow \big(R(x) \cap R(y) \neq \varnothing \Rightarrow R(x) = R(y)\big)$.
Пусть $\tilde{x} \in \bigcup\limits_{x \in X} R(x) \Rightarrow \exists y \in X : \tilde{x} \in R(y); R(y) \subseteq X \Rightarrow \tilde{x} \in X \Rightarrow \bigcup\limits_{x \in X} R(x) \subseteq X$.
Пусть $z \in X, z \in R(z) \Rightarrow z \in R(y)$, для некоторых $y \in X \Rightarrow z \in \bigcup\limits_{x \in X} R(x) \Rightarrow X \subseteq \bigcup\limits_{x \in X} R(x)$.
$\Rightarrow X = \bigcup\limits_{x \in X} R(x)$. $\blacksquare$

Таким образом $\{\, R(x) \mid x \in X \,\}$ - разбиение множества X.

Опр: 13. Набор классов эквивалентности называется фактор-множеством $X/\sim$.

Рассмотрим $\mathbb{Z} \times \mathbb{N} : (m, n) \sim (p, q) \Leftrightarrow mq = pn, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$. В данном контексте (m, n) и (p, q) можно рассматривать, как $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$.

Опр: 14. Множество классов эквивалентностей, заданных таким образом, называется множеством рациональных чисел или дробей и обозначается $\mathbb{Q}$.