Правила дифференцирования

Дифференциал композиции функций

Теорема 1. (Дифф. сложной функции) Пусть f - дифференцируема в точке a, g - дифференцируема в точке $f(a)$. Тогда $g(f(x))$ - дифференцируема в точке a и

$$\big(g(f(x))\big)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

Перепишем этот результат в терминах дифференциала (по определению = производная$\cdot h$):

$$d(g \circ f)(h) = g'\big(f(a)\big) \underbrace{f'(a) \cdot h}_{=df(h)} = g'\big(f(a)\big) df(h) = dg(df(h))$$

где $df(h)$ это результат действия линейной функции df на приращение h, который в свою очередь также можно трактовать как приращение $\Rightarrow$ $dg(df(h))$ это результат действия линейной функции dg на приращение $df(h)$.

Rm: 1. Полезно трактовать h как вектор перемещения для аргумента функции $\Rightarrow$ взяли вектор h, применили линейную функцию, получили вектор $f(h)$ и подставили этот вектор в дифференциал функции g $\Rightarrow$ поэтому верно всегда

$$d(g \circ f) = dg \circ df$$

Данный результат согласуется с нашим пониманием дифференциала, как линейной функции:
$dg(t) = g'(f(a))t \Leftrightarrow z = k_1 \cdot t$ - линейная функция. $df(h) = f'(a) \cdot h \Leftrightarrow t = k_2 \cdot h$ - линейная функция. Композиция этих двух линейных функций $z = k_1(k_2 h) = (k_1 k_2)h$ - линейная функция, коэффициент которой равен произведению коэффициентов линейных функций, которые брали до этого.

Инвариантность I-го дифференциала

Рассмотрим запись

$$dg(f(x)) = g'(f(x))df \Rightarrow dg(f) = g'(f)df$$

Дописав x получим правило дифференцирования сложной функции. Тогда

1. если считать, что f это переменная, то мы получим здесь определение дифференциала.

2. если считать, что f это функция - это также верно.

То есть в этой записи не важно, считаем f функцией или свободной переменной. Это называется инвариантностью I-го дифференциала, что его вид не зависит от трактования f.

Пусть $\mathbb{R}_x \xrightarrow{f} \mathbb{R}_y$, функция $g(y)$ определена на $\mathbb{R}_y$ $\Rightarrow$ возникает новая функция $g(y) \to g(f(x))$ которая определена на $\mathbb{R}_x$ $\Rightarrow$ поменяли систему координат. Если бы f была взаимно-однозначной, эта была бы честная замена координат.

Пусть все функции дифференцируемы и у $g(y)$ дифференциал был бы равен $dg = g'(y)dy$. Оказывается, что для новой функции вместо y надо просто подставить $f \Rightarrow dg(f) = g'(f)df \Rightarrow$ форма дифференциала остается неизменной, то есть его вид не зависит от замены координат.

Rm: 2. Для дифференциалов более высоких порядков это совершенно не так.

Инвариантность I-го дифференицала: Вид дифференциала не зависит от выбора системы координат или в равенстве $dg = g'(y)dy$, y можно считать свободной переменной или функцией и ответ в любом случае правильный.

Дифференцирование обратной функции

Теорема 2. (О существовании обратной функции) Пусть f непрерывна и строго монотонна на промежутке I. Тогда $f(\mathrm{I})$ - промежуток и определена обратная функция $f^{-1}\colon f(\mathrm{I}) \to \mathrm{I}$, причем f^{-1} строго монотонна и непрерывна.

Утв. 1. Если f дифференцируема в точке $a \in \mathrm{I}$ - внутренняя точка промежутка I и $f'(a) \neq 0$, то f^{-1} дифференцируема в точке $f(a)$ - внутренняя точка промежутка $f(I)$ и

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)} \vee d(f^{-1})(h) = \frac{1}{f'(a)} \cdot h$$

Rm: 3. Дифференциал функции f, $df(h) = f'(a) \cdot h$, то есть линейная функция $y = kx \Rightarrow$ обратная функция к ней $x = \frac{1}{k}y \Rightarrow$ дифференциал обратной функции это обратная функция к дифференциалу $\Rightarrow df^{-1} = (df)^{-1}$

Rm: 4. Доказательство будет проще, чем в случае со сложными функциями, так как f это биекция этих промежутков. Поэтому никогда не может случиться, что при $x \neq a \Rightarrow f(x) = f(a)$.

□ $\lim\limits_{y \to f(a)} \dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(a))}{y - a} = \lim\limits_{y \to f(a)} \mathrm{H}(f^{-1}(y))$, где $\mathrm{H}(x) = \dfrac{x - a}{f(x) - f(a)}$. Про функцию $\mathrm{H}(x)$ мы знаем, что $\lim\limits_{x \to a} \mathrm{H}(x) = \frac{1}{f'(a)}$ по определению. С другой стороны, мы знаем, что $\lim\limits_{y \to f(a)} f^{-1}(y) = a$ из-за непрерывности функции f^{-1}. Так как f биекция, то $f^{-1}(y) \neq a$ при $y \neq f(a) \Rightarrow$ по теореме о пределе композиций:

$$\lim_{y \to f(a)} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(a))}{y - a} = \lim_{y \to f(a)} \mathrm{H}(f^{-1}(y)) = \frac{1}{f'(a)}$$

■

Rm: 5. Другая запись теоремы о производной обратной функции ($f(a) = b$):

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

Перед тем, как составлять таблицу производных, вспомним замечательные пределы:

Лемма 1.

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + x)}{x} = 1;$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1;$

□

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + x)}{x} \underset{x = \frac{1}{t}}{=} \lim\limits_{t \to \infty} \dfrac{\ln(1 + \frac{1}{t})}{\frac{1}{t}} = \lim\limits_{t \to \infty} \ln(1 + \frac{1}{t})^t \Rightarrow$ по непрерывности $\ln x \Rightarrow \lim\limits_{t \to \infty} \ln(1 + \frac{1}{t})^t = \ln e = 1;$

2) Так как e^x - непрерывна и $x \to 0 \Rightarrow e^x - 1 \to 1 - 1 = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} \underset{e^x - 1 = t}{=} \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{t}{\ln(1 + t)} = 1;$

■

Таблица производных

(1) $(\mathrm{const})' = 0$;

$\square$ $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{c-c}{x-a} = 0$, где $c = \mathrm{const}$; $\blacksquare$

(2) $(x^n)' = nx^{n-1}$, где $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N} \vee x \neq 0$, $n \in \mathbb{Z}$;

$\square$ $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^n - a^n}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{(x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + \ldots + a^{n-1})}{x-a} = \lim\limits_{x\to a}(x^{n-1}+ax^{n-2}+\ldots+a^{n-1}) = na^{n-1}$; $\blacksquare$

(3) $(e^x)' = e^x$;

$\square$ $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{e^x - e^a}{x-a} = e^a \lim\limits_{x\to a} \dfrac{e^{(x-a)} - 1}{(x-a)} = e^a$; $\blacksquare$

(4) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;

$\square$ Хотим найти производную функции $\ln x$ в точке $x = a$, тогда обратная фуннкция в этой точке $e^y = a \Rightarrow y = \ln a \Rightarrow$ по теореме о дифференцировании обратной функции $\Rightarrow$

$$(\ln x)'(a) = \frac{1}{(e^y)'(\ln a)} = \frac{1}{a}$$

$\blacksquare$

Следствие 1. $x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow (x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}$.

$\square$ $x^\alpha = e^{\alpha \ln x} \Rightarrow$ дифференцируем как сложную функцию

$$(x^\alpha)' = e^{\alpha \ln x} \cdot (\alpha \ln x)' = e^{\alpha \ln x} \cdot \frac{\alpha}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$$

$\blacksquare$

Упр. 1. Доказать, что функция $\cos x$ - непрерывная функция.

(5) $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$;

$\square$ $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sin x - \sin a}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sin \frac{x-a}{2} \cos \frac{x+a}{2}}{\frac{x-a}{2}} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sin \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} \cdot \cos \frac{x+a}{2} = \cos a$;

$(\cos x)' = (\sin(\frac{\pi}{2} - x))' = \cos(\frac{\pi}{2} - x) \cdot (-1) = -\sin x$; $\blacksquare$

(6) $(\mathrm{tg}\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $(\mathrm{ctg}\, x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;

$\square$ Используем правило Лейбница $\Rightarrow$

$$\Rightarrow (\mathrm{tg}\, x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x}{\cos x} + \sin x \cdot \left(\frac{1}{\cos x}\right)' = 1 + \sin x \cdot \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x}\right) = 1 + \mathrm{tg}^2\, x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow (\mathrm{ctg}\, x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = -\frac{\sin x}{\sin x} + \cos x \cdot \left(\frac{1}{\sin x}\right)' = -1 - \cos x \cdot \left(\frac{\cos x}{\sin^2 x}\right) = -1 - \mathrm{ctg}^2\, x = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$\blacksquare$

(7) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

□

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'}\Big|_{y=\arcsin x} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\pm\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\pm\sqrt{1-x^2}}$$

Поскольку $\arcsin x$ определен на $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, то $\cos x \geq 0, \forall x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow (\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Поскольку $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow (\arccos x)' = (\frac{\pi}{2} - \arcsin x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. ■

(8) $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$, $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$;

□

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)}\Big|_{y=arctgx} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{1+x^2}$$

Поскольку $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow (\operatorname{arcctg} x)' = (\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$. ■

(9) $(\operatorname{ch} x)' = \left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right)' = \operatorname{sh} x$, $(\operatorname{sh} x)' = \left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\right)' = \operatorname{ch} x$, $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$;

□

$$(\operatorname{ch} x)' = \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)' = \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right) = \operatorname{sh} x,\ (\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)' = \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right) = \operatorname{ch} x$$

Воспользуемся правилом Лейбница

$$(\operatorname{th} x)' = \left(\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)' = \frac{e^x+e^{-x}}{e^x+e^{-x}} + (e^x-e^{-x})\cdot\left(\frac{1}{e^x+e^{-x}}\right)' = 1 + (e^x-e^{-x})\cdot\frac{e^x-e^{-x}}{(e^x+e^{-x})^2} = 1+\operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$$

■

Основные теоремы дифференциального исчисления

Теорема 3. (Ферма) Пусть f определена в окрестности $\mathcal{U}(a)$ точки a и $\forall x \in \mathcal{U}(a),\ f(x) \leq f(a)$ (или $\forall x \in \mathcal{U}(a),\ f(x) \geq f(a)$). Если f дифференцируема в точке a, то $f'(a) = 0$.

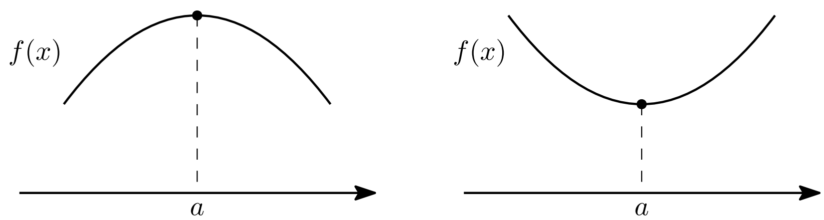

Рис. 1: $\forall x \in \mathcal{U}(a),\ f(x) \leq f(a) \vee f(x) \geq f(a)$.

□ Пусть $\forall x \in \mathcal{U}(a),\ f(x) \geq f(a) \Rightarrow f(x) - f(a) \geq 0$, тогда рассмотрим следующие пределы

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0,\ \lim_{x\to a-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0$$

Поскольку f дифференцируема в точке $a \Rightarrow f$ неперерывна в точке $a \Rightarrow$

$$\Rightarrow 0 \leq \lim_{x\to a+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) = \lim_{x\to a-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0 \Rightarrow f'(a) = 0$$

■

<u>**Геометрический смысл теоремы Ферма**</u>: $f'(a) = 0$ означает, что касательная в точке $(a, f(a))$ паралелльна оси x.

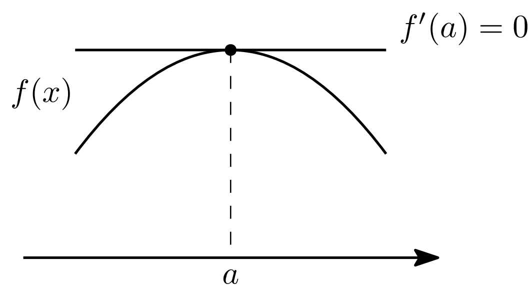

Рис. 2: Геометрический смысл теоремы Ферма.

<u>**Физический смысл теоремы Ферма**</u>: По прямой двигается точка, её координата x меняется со временем $x(t)$ (меняется так, что скорость есть, в каждой точке t дифференцируема). Тогда в момент времени $t = a$ мы находимся на максимальном удалении. Дальше мы будем находится к началу движения ближе или не дальше.

Теорема 4. (Ролль) Пусть f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b). Если $f(a) = f(b)$, то $\exists\, c \in (a, b)\colon\ f'(c) = 0$.

<u>**Геометрический смысл теоремы Ролля**</u>: Если значения на концах отрезка равны, обязательно в какой-то момент касательная обязана быть параллельной оси x.

<u>**Физический смысл теоремы Ферма**</u>: Если вы вернулись туда же, откуда выехали по прямой, то обязательно был момент, когда вы остановились (перемещение нулевое, значит был момент, когда мгновенная скорость тоже была нулевой).

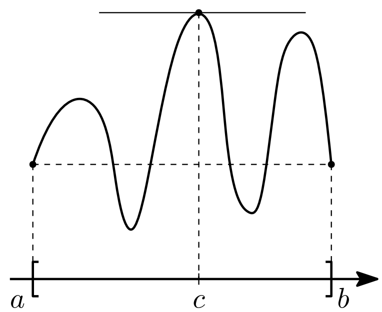

Рис. 3: Геометрический смысл теоремы Ролля.

□ Функция f непрерывна на отрезке, тогда по теореме Вейрштрасса

$$\exists\, x_m, x_M \in [a,b]\colon\ f(x_m) = \min_{[a,b]} f,\, f(x_M) = \max_{[a,b]} f$$

Если хотя бы одна из этих точек x_m и x_M лежит внутри интервала (a,b), то по теореме Ферма в этой точке производная $= 0$. Если x_m и x_M совпадают с a или b, то $\min\limits_{[a,b]} f = \max\limits_{[a,b]} f \Rightarrow f = \mathrm{const} \Rightarrow c$ - любая точка интервала. ■

Теорема 5. (Лагранжа о среднем) Пусть f непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема на интервале (a,b). Тогда $\exists\, c \in (a,b)\colon\ f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$ или аналогично

$$\exists\, c \in (a,b)\colon\ \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

Геометрический смысл теоремы Лагранжа: существует точка c на интервале (a,b) в которой касательная функции f параллельна её хорде на отрезке.

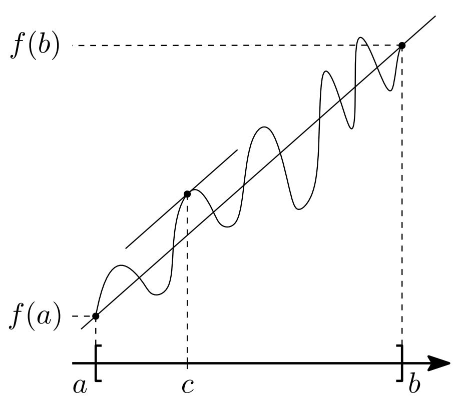

Рис. 4: Геометрический смысл теоремы Лагранжа: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ - наклон хорды и $f'(c)$ - наклон касательной совпадают в точе c. Уравнение хорды: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$.

Физический смысл теоремы Лагранжа: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ - средняя скорость, $f'(c)$ - мгновенная скорость $\Rightarrow$ есть точка, где мгновенная скорость совпадала со средней.

□ Возьмем $F(x) = f(x) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)\right) \Rightarrow F(b) = F(a) = 0 \Rightarrow$ применяем теорему Ролля $\Rightarrow \exists\, c \in (a,b)\colon\ F'(c) = 0 \Rightarrow F'(c) = f'(c) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \Rightarrow f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. ■