Свойства непрерывных функций на промежутках

Опр: 1. Множество $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$ называется промежутком, если из того, что $x_1, x_2 \in \mathrm{I}$, $x_1 \leq x_2 \Rightarrow [x_1, x_2] \subset \mathrm{I}$.

Примеры: $\mathbb{R}$, $\varnothing$, точка, отрезок, полуинтервал - промежутки.

Утв. 1. Если I - промежуток, то I - это интервал или отрезок или полуинтервал (допускаются бесконечные концы).

$\square$ Пусть $\mathrm{I} \neq \varnothing$ и ограничен, по принципу полноты Вейрштрасса $\exists\, B = \sup \mathrm{I}$, $A = \inf \mathrm{I}$. Очевидно, что $\mathrm{I} \subset [A, B]$. Покажем, что интервал $(A, B) \subset \mathrm{I}$.
Если $(A, B) = \varnothing$, то $A = B$ и множество I - просто одна точка $= \{A\}$.
Пусть $x \in (A, B) \Rightarrow A < x < B \Rightarrow x > A \Rightarrow x$ - не является нижней гранью $\mathrm{I} \Rightarrow \exists\, x_1 \in \mathrm{I}\colon x_1 < x$. Аналогично, $x < B \Rightarrow x$ - не является верхней гранью $\mathrm{I} \Rightarrow \exists\, x_2 \in \mathrm{I}\colon x < x_2$.
Получаем, что $x \in [x_1, x_2] \subset \mathrm{I}$ - по определению промежутка $\Rightarrow x \in \mathrm{I}$. Таким образом $\forall x \in (A, B) \Rightarrow$ $\Rightarrow x \in \mathrm{I} \Rightarrow (A, B) \subset \mathrm{I}$. ■

Упр. 1. Разобрать случай, когда I не является ограниченным множеством.

$\square$ Пусть $\mathrm{I} \neq \varnothing$ и не ограничен снизу и сверху. Очевидно, что $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists\, x_1, x_2 \in \mathrm{I}\colon x \in [x_1, x_2] \Rightarrow$ $x \in \mathrm{I} \Rightarrow \mathbb{R} \subset \mathrm{I} \Rightarrow \mathrm{I} = \mathbb{R}$.

Пусть $\mathrm{I} \neq \varnothing$ и не ограничен сверху, но ограничен снизу $\Rightarrow$ по принципу полноты Вейрштрасса $\exists\, A = \inf \mathrm{I}$. Очевидно, что $\mathrm{I} \subset [A, +\infty)$. Покажем, что полуинтервал $(A, +\infty) \subset \mathrm{I}$. Пусть $x \in (A, +\infty) \Rightarrow A < x \Rightarrow$ $x > A \Rightarrow x$ - не является нижней гранью $\mathrm{I} \Rightarrow \exists\, x_1 \in \mathrm{I}\colon x_1 < x$. Так как I не ограничен сверху, то $\exists\, x_2 \in \mathrm{I}\colon x < x_2$. Получаем, что $x \in [x_1, x_2] \subset \mathrm{I}$ - по определению промежутка $\Rightarrow x \in \mathrm{I}$. Таким образом $\forall x \in (A, +\infty) \Rightarrow x \in \mathrm{I} \Rightarrow (A, +\infty) \subset \mathrm{I}$. ■

Следствие 1. (Из теоремы о промежуточном значении) Если $\mathrm{I} \neq \varnothing$ - промежуток и $f\colon \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ - непрерывная функция, то образ $f(\mathrm{I}) = \{\, y\colon \exists\, x \in \mathrm{I}, f(x) = y \,\}$ является промежутком.

$\square$ Если I - это точка, то утверждение очевидно. Пусть в I более одной точки. Надо проверить:
$\forall y_1, y_2 \in f(\mathrm{I})$, $y_1 \leq y_2$ верно, что $[y_1, y_2] \subset f(\mathrm{I})$. Возьмем $x_1 \in \mathrm{I}\colon f(x_1) = y_1$, $x_2 \in \mathrm{I}\colon f(x_2) = y_2$. Пусть $x_1 \leq x_2$. Если $x_1 = x_2 \Rightarrow y_1 = y_2$ и все доказано.

Если $x_1 < x_2 \Rightarrow [x_1, x_2] \subset \mathrm{I}$. Поскольку f - непрерывна на $[x_1, x_2] \Rightarrow$ по теореме о промежуточном значении $\forall y \in [y_1, y_2]$, $\exists\, x \in [x_1, x_2]\colon y = f(x) \Rightarrow [y_1, y_2] \subset f(\mathrm{I})$. ■

Rm: 1. Если $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ всякий промежуток отображает в промежуток, то это не означает, что f - непрерывная функция.

Пример:

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Данная функция определена на всей числовой прямой и отображает промежутки в промежутки.

Если 0 попадет в промежуток, то образом будет отрезок $[-1, 1]$. Но при этом функция не является непрерывной.

Теорема 1. Если f - монотонна на промежутке $\mathrm{I} \neq \varnothing$ и $f(\mathrm{I})$ - промежуток, то f - непрерывна на I.

Если функция монотонна (пусть она не убывает), тогда она имеет пределы слева, справа и какое-то значение в точке x_0.

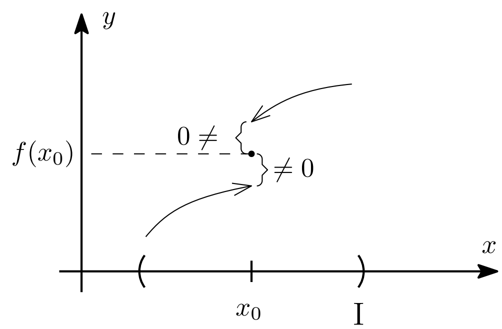
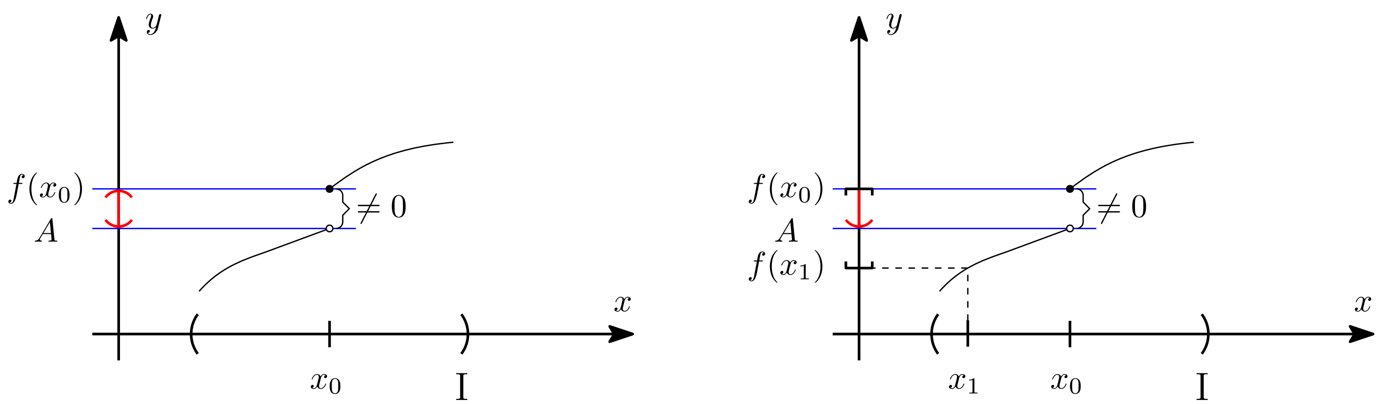


Рис. 1: Монотонная функция не убывает на I, имеет пределы слева и справа.

Если есть разрыв в этой точке, то хотя бы с одной из сторон будет ненулевое расстояние между значением в точке и односторонним пределом. Пусть предел слева $= A$ отличается от значения в x_0: $A \neq f(x_0)$. Все точки левее x_0 будут меньше предела слева. Все точки правее x_0 будут больше или равны $f(x_0)$.



(a) Предел слева $\neq f(x_0)$. Интервал $(A, f(x_0)) \not\subset f(\mathrm{I})$.

(b) $x_1 < x_0$, $[f(x_1), f(x_0)] \subset f(\mathrm{I})$.

Рис. 2: Непрерывность монотонной функции отображающей промежутки в промежутки.

В этом случае, интервала $(A, f(x_0))$ точно нет в $f(\mathrm{I})$. Возьмем точку $x_1 < x_0 \Rightarrow [f(x_1), f(x_0)] \subset f(\mathrm{I})$, так как образ по условию это промежуток. Таким образом, у монотонной функции разрывы выбивают в области значения дырки, что запрещено тем, что образ это промежуток.

□ (От противного) Пусть x_0 - внутренняя точка I (если x_0 - граничная точка, то будет аналогично). Пусть f - не убывает, тогда

$$\exists \lim_{x \to x_0-} f(x) = \sup_{x<x_0} f = A, \exists \lim_{x \to x_0+} f(x) = \inf_{x>x_0} f = B$$

Если x_0 - точка разрыва f, то хотя бы одно из неравенств $A < f(x_0) \vee f(x_0) < B$ - верно, иначе это была бы точка непрерывности. Пусть $A < f(x_0)$, тогда $\forall x < x_0$, $f(x) \leq A$, $\forall x \geq x_0$, $f(x) \geq f(x_0)$ и $(A, f(x_0)) \cap f(\mathrm{I}) = \varnothing$. С другой стороны $\forall x_1 < x_0$, $[f(x_1), f(x_0)] \subset f(\mathrm{I})$ и $(A, f(x_0)) \subset [f(x_1), f(x_0)]$, так как $f(x_1) \leq A \Rightarrow$ получили противоречие. ■

Упр. 2. Доказать в случае, если x_0 - граничная точка.

$\square$ (От противного) Пусть x_0 - граничная точка I справа. Пусть f - не убывает, тогда

$$\exists \lim_{x\to x_0-} f(x) = \sup_{x<x_0} f = A$$

Если x_0 - точка разрыва f, то $A < f(x_0)$, иначе это была бы точка непрерывности. В этом случае $\forall x < x_0$, $f(x) \leq A$ и $(A, f(x_0)) \cap f(\mathrm{I}) = \varnothing$. С другой стороны $\forall x_1 < x_0$, $[f(x_1), f(x_0)] \subset f(\mathrm{I})$ и $(A, f(x_0)) \subset [f(x_1), f(x_0)]$, так как $f(x_1) \leq A \Rightarrow$ получили противоречие. Аналогично для граничной точки слева. $\blacksquare$

Теорема 2. (Об обратной функции) Пусть $\mathrm{I} \neq \varnothing$ промежуток и $f\colon \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ - непрерывная, строго монотонная функция. Тогда

1) $f(\mathrm{I}) = \mathrm{J} = \{\, y\colon \exists\, x \in \mathrm{I}, f(x) = y \,\}$ - непустой промежуток;
2) $f\colon \mathrm{I} \to \mathrm{J}$ - биекция;
3) $f^{-1}\colon \mathrm{J} \to \mathrm{I}$ - строго монотонна и непрерывна;

$\square$

1) При непрерывном отображении, образ промежутка это промежуток;
2) Из строгой монотонности следует, что функция инъективна. Отображение на свой образ всегда сюръективно. Поэтому функция f - биекция;
3) Если f^{-1} - строго монотонна на промежутке J, то f^{-1} - непрерывна на нем, так как образ промежутка - промежуток;

Поэтому достаточно проверить, что функция f^{-1} - строго монотонна. Возьмем $y_1 < y_2 \Rightarrow$ сравним $f^{-1}(y_1)$ и $f^{-1}(y_2)$. Пусть для определенности f - возрастает $\Rightarrow x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$. $x_1 \neq x_2$, иначе $y_1 = f(x_1) = f(x_2) = y_2$. Пусть $x_1 > x_2 \Rightarrow y_1 = f(x_1) > f(x_2) = y_2$, но по условию $y_1 < y_2 \Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow x_1 < x_2 \Rightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$. $\blacksquare$

Rm: 2. Направление монотонности у f^{-1} будет такое же, как и у f (по доказательству теоремы).

Пример: $y = x^{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$;
f всюду определена на $\mathbb{R}$. f - непрерывная функция $\Rightarrow$ её область значений это промежуток, он не ограничен сверху и снизу: $m^{2n+1} \xrightarrow[m\to\infty]{} +\infty$, $(-m)^{2n+1} \xrightarrow[m\to\infty]{} -\infty \Rightarrow$ область значений $\mathbb{R}$. Эта функция возрастает $\Rightarrow$ по теореме об обратной функции $\exists\, f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - непрерывна и возрастает.

$$f^{-1}(y) = y^{\frac{1}{2n+1}} = \sqrt[2n+1]{y}$$

Пример: $y = x^{2n}$, $n \in \mathbb{N}$;
f всюду определена на $\mathbb{R}$. f - непрерывная функция $\Rightarrow$ её область значений это промежуток, он не ограничен сверху: $m^{2n} \xrightarrow[m\to\infty]{} +\infty \Rightarrow$ область значений $[0, +\infty)$. Эта функция имеет два промежутка монотонности. Выберем $[0, +\infty)$, на нем она возрастает и отображает его на $[0, +\infty) \Rightarrow$ по теореме об обратной функции $\exists\, f^{-1}\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ - непрерывна и возрастает.

$$f^{-1}(y) = y^{\frac{1}{2n}} = \sqrt[2n]{y}$$

Rm: 3. Аналогично строятся другие обратные функции: берется промежуток, где функция непрерывна и строго монотонна и применяется теорема об обратной функции.

Построение функции a^x

Пусть $a > 1$. В школе:

1. $a^n = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$;
2. $a^0 = a^{1-1} = \dfrac{a}{a} = 1$;
3. $a^{-n} = (a^n)^{-1} = \dfrac{1}{a^n}$;
4. $a^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p$ определили выше функции в степени $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$;

Таким образом, возникает функция $y = a^x$, $x \in \mathbb{Q}$. У нее есть следующие свойства:

1. $a^0 = 1$;
2. $a^{x+y} = a^x a^y$;
3. $x < y \Rightarrow a^x < a^y$ (строгая монотонность);
4. $a^n \to +\infty$, $a^{-n} \to 0$ (доказывается так, например: $a^n = (1 + a - 1)^n \geq 1 + n(a-1)$);

Как определить a^x для $x \notin \mathbb{Q}$?

Идея: возьмем $r_n \in \mathbb{Q}$: $r_n \to x$, $a^x = \lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}$. Будут ли эти числа сходится? Почему они будут сходится к одному и тому же? $r_n \to r \in \mathbb{Q} \Rightarrow a^r = \lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}$?

Утв. 2. Предположим, что f определена на $\mathbb{Q} \cap [a,b]$ и удовлетворяет условию:

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|, \, \forall x, y \in \mathbb{Q} \cap [a,b]$$

Тогда $\exists!\, \tilde{f}$ - непрерывная функция на $[a,b]$: $f = \tilde{f}$ на $\mathbb{Q} \cap [a,b]$.

$\square$ Пусть $r_n \to x$, $r_n \in \mathbb{Q}$, положим, что $\tilde{f}(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(r_n)$. Проверим, что этот предел существует, не зависит от выбора r_n и совпадает со значением функции f, если приближаемся к рациональной точке.

Существование: Возьмем r_n, r_m, по условию $|f(r_n) - f(r_m)| \leq C|r_n - r_m|$, r_n - сходится $\Rightarrow$ последовательность фундаментальна $\Rightarrow$ выполняется условие Коши $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N\colon \forall n, m > N \Rightarrow |r_n - r_m| < \varepsilon \Rightarrow |f(r_n) - f(r_m)| < C\varepsilon$, то есть $f(r_n)$ - фундаментальна и значит $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f(r_n)$.

Независимость от выбора r_n: Пусть $r_n \to x \wedge s_n \to x \Rightarrow |f(r_n) - f(s_n)| \leq C|r_n - s_n| \to 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(r_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(s_n)$.

Совпадение в рациональных точках: Если $x \in \mathbb{Q} \Rightarrow r_n \equiv x \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(r_n) = f(x)$.

Следовательно, такое определение $\tilde{f}(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(r_n)$ - корректно и $\tilde{f} = f$ на $\mathbb{Q}$.

Возьмем x, y и возьмем $r_n \to x$, $s_n \to y$. Знаем, что $|f(r_n) - f(s_n)| \leq C|r_n - s_n| \Rightarrow$
$\Rightarrow |f(r_n) - f(s_n)| \to |\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)|$, $C|r_n - s_n| \to C|x - y| \Rightarrow |\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)| \leq C|x - y| \Rightarrow \tilde{f}$ - непрерывна.

Единственность: Пусть есть две $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2$ - непрерывные функции: $\tilde{f}_1 = f = \tilde{f}_2$ на $\mathbb{Q} \Rightarrow \tilde{f}_1(x) = f = \tilde{f}_2(x)$, $\forall x$ по непрерывности: $r_n \in Q$, $r_n \to x$, $\tilde{f}_1(r_n) \to \tilde{f}_1(x)$, $\tilde{f}_2(r_n) \to \tilde{f}_2(x)$, но $\tilde{f}_1(r_n) = \tilde{f}_2(r_n) \Rightarrow$ равны их пределы $\Rightarrow \tilde{f}_1(x) = \tilde{f}_2(x)$. $\blacksquare$

Утв. 3. $\forall\,[-N,N], \exists\, C(N)\colon |a^x - a^y| \le C(N)|x-y|, \forall x,y \in \mathbb{Q}\cap[-N,N]$.

$\square$

(1) $1 < a^{\frac{1}{n}} = (1+a-1)^{\frac{1}{n}} \le 1 + \dfrac{a-1}{n}$ (нер-во Бернулли) $\Rightarrow a^{\frac{1}{n}} - 1 \le \dfrac{a-1}{n}$. Пусть $0 < x \le 1$, $x \in \mathbb{Q} \Rightarrow$

$$\frac{1}{n+1} < x \le \frac{1}{n} \Rightarrow a^x - 1 \le a^{\frac{1}{n}} - 1 \le \frac{a-1}{n} = (a-1)\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{n+1} \le 2(a-1)x,\ \forall x \in (0,1]\cap\mathbb{Q}$$

$\Rightarrow a^x - 1 \le 2(a-1)x$;

(2) $\forall x, y, \in [-N,N]\cap\mathbb{Q}$. Если $x = y \Rightarrow$ утверждение очевидно: $0 \le 0$. Пусть $x > y \Rightarrow$

$$|a^x - a^y| = a^y(a^{x-y} - 1) \le a^N(a^{x-y} - 1)$$

так как функция монотонная. Если $0 < x - y \le 1 \Rightarrow |a^x - a^y| \le a^N 2(a-1)(x-y)$. Если $1 < x - y \Rightarrow$ $|a^x - a^y| \le a^{3N}(x-y)$, так как $x, y \in [-N,N] \Rightarrow \max\{x-y\} = N - (-N) = 2N$.

(3) Таким образом $C(N) = \max\{a^N 2(a-1), a^{3N}\}$;

$\blacksquare$