Свойства счетных множеств

(1) $B \subset A$ и A - счетно, то B не более, чем счетно (н.б.ч.с);

(2) Если A - счетно и B - счетно, то $A \times B$ - счетно;

(3) Объединение не более, чем счетного набора не более, чем счетных множеств - не более, чем счетно;

(4) Если A - бесконечно, то $\exists$ счетное $B\colon B \subset A$;

Утв. 1. Если A - счетно, то:
1) если существует инъекция $f\colon B \to A$, то B - н.б.ч.с.;
2) если существует сюръекция $f\colon A \to B$, то B - н.б.ч.с.;

$\square$ 1) $f\colon B \to \underbrace{f(B)}_{\text{обл. знач f}}$ - биекция и $f(B) \subset A$ - счетно $\Rightarrow f(B)$ - н.б.ч.с. $\Rightarrow B$ - н.б.ч.с. по определению.
2) Опредлим отображение $g\colon B \to A$ следующим образом:

$$\forall b \in B,\ \exists k \in K = \{\, a\colon f(a) = b \,\} \neq \varnothing\colon g(b) = k,$$

где множество K непустое, так как у нас сюръекция. Так как f - функция, то g - инъекция. Применяя пункт 1) получим, что B - н.б.ч.с. $\blacksquare$

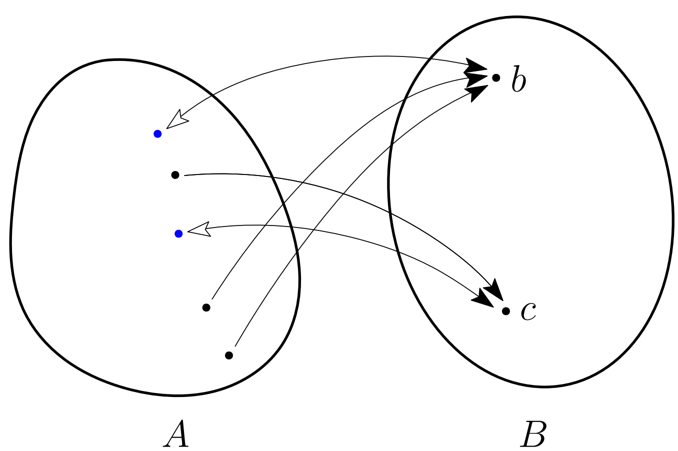

Рис. 1: Сюръекция

Rm: 1. Комментарий к доказательству:
$B \neq \varnothing$ и на B есть сюръекция $\Leftrightarrow$ у каждого элемента B есть прообраз, но он может быть не один (не инъективно). $\forall b \in B$ укажем тот a (выделено синим на рисунке), куда будем возвращаться.
Разным элементам из B, точно не будут соответствовать одни и те же элементы из прообраза, иначе f могло бы отображать один элемент в несколько, а f - это функция и каждому сопостовляет ровно 1 элемент $\Rightarrow$ разным b и c будут соответствовать разные элементы из A. Поэтому из B в A установили инъекцию $\Rightarrow$ по первому пункту B - н.б.ч.с.

Счетность декартовых произведений

(2) Если A - счетно и B - счетно, то $A \times B$ - счетно.

$\square$ Можно пересчитывать по диагонали: справа - налево, сверху - вниз.
Пусть стоит клетка на пересечении k-ой строки и l-го столбца. Она стоит на диагонали с номером $k+l-1$. Последняя клетка на n-ой диагонали имеет номер: $1+2+3+\ldots+(n-1)+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

2-ая диагональ $\Rightarrow$ последний элемент $= 1+2 = 3$, 3-ья диагональ $\Rightarrow$ последний элемент $= 1+2+3 = 6$.

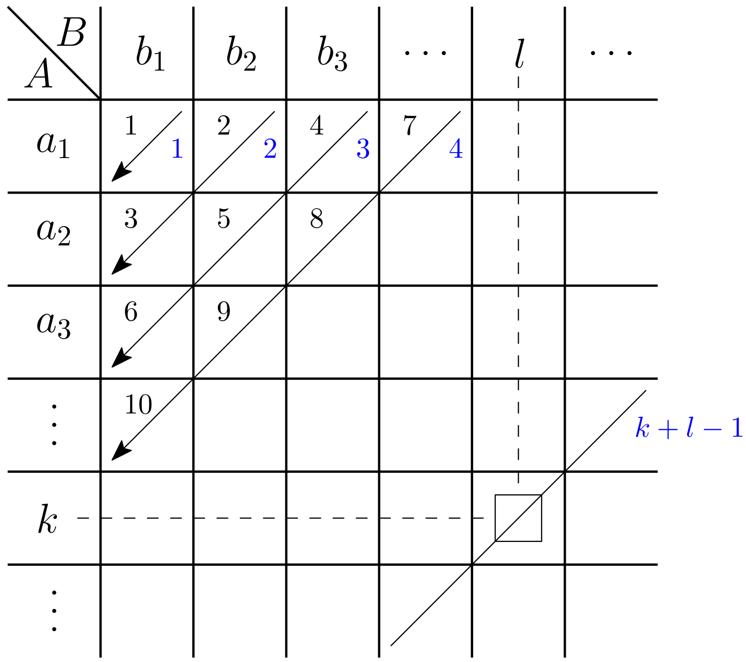

Рис. 2: Метод пересчета по диагонали

Если считать по столбцам, то (k,l) элемент отстоит от 1-го столбца на $(l-1)$ шаг $\Rightarrow$ присвоим номер клетке

$$(k,l) \mapsto \frac{(k+l-1)(k+l)}{2} - (l-1),$$

как число шагов вправо от последнего номера на диагонали $\Rightarrow$ получили явную формулу, устанавливающую биекцию $A \times B \mapsto \mathbb{N}$. $\blacksquare$

Следствие 1. $A_1, \ldots, A_n$ - счетные множества, то $A_1 \times \ldots \times A_n$ - счетное множество (доказательство по индукции).

Счетность объединения множеств

(3) Объединение н.б.ч.с. набора н.б.ч.с. множеств - н.б.ч.с.

$\square$ Пусть есть множество $A_\alpha = \{\, a_{\alpha\beta} \mid \beta \in \mathrm{J}_\alpha$ - н.б.ч.с.$\,\}$, где $\alpha \in \mathrm{I}$ - н.б.ч.с. множество. Покажем, что $\bigcup\limits_{\alpha \in \mathrm{I}} A_\alpha$ - не более, чем счетно. Если множество н.б.ч.с., то существует сюръекция из $\mathbb{N}$ в это множество:
(a) Если множество счетное, то существует биекция.

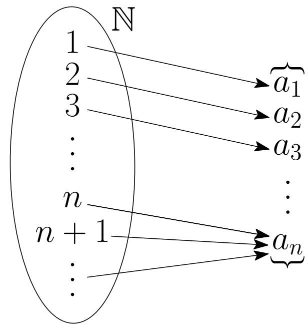

Рис. 3: Сопоставление $\mathbb{N}$ конечному множеству

(b) Если множество конечное, то отображение на первые n элементов - биекция, оставшиеся куда-то переводятся $\Rightarrow$ получается сюръекция.

Тогда есть сюръекция $f\colon \underset{\text{сюръекция}}{\mathbb{N} \to \mathrm{I}}$. Также $\forall \alpha$, $A_\alpha = \{\, a_{\alpha\beta} \mid \beta \in \mathrm{J}_\alpha$ - н.б.ч.с.$\,\}$ поэтому для каждой α сюръекция будет своя $g_\alpha\colon \underset{\text{сюръекция}}{\mathbb{N} \to \mathrm{J}_\alpha}$.

Установим отображение

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \mapsto \bigcup_{\alpha \in \mathrm{I}} A_\alpha,$$

как $(n, m) \mapsto a_{f(n) g_{f(n)}(n)}$ - сюръекция $\Rightarrow$ объединение - н.б.ч.с. по утверждению выше. ■

Объяснение для детей: пересчитываем по диагонали, если элемент был посчитан - не считаем, если считать нечего - то тоже не считаем.

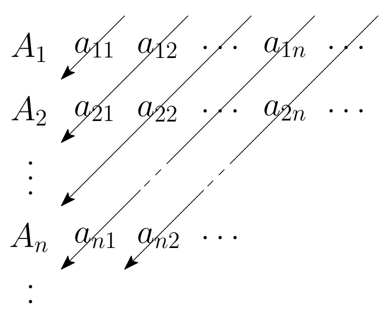

Рис. 4: Пересчет объединения н.б.ч.с набора н.б.ч.с. множеств

Либо все элементы закончатся, либо будуте считать бесконечно долго и получим бесконечно долгий пересчет. Формальное доказательство - то же самое что и здесь.

Пример: Множество рациональных чисел $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ - счетно, так как: $\mathbb{Z}$ - счетное множество, $\mathbb{N}$ - счетное множество $\Rightarrow$ декартово произведение - счетно $\Rightarrow$ $\mathbb{Q}$ - н.б.ч.с. Так как $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q} \Rightarrow \mathbb{Q}$ - счетно.

(4) Если A - бесконечно, то $\exists$ счетное $B\colon B \subset A$.

□ Поскольку A - не является конечным, то $A \neq \varnothing$, $a_1 \in A$. $A \setminus \{a_1\} \neq \varnothing$ - поскольку A не является конечным $\Rightarrow a_2 \in A \setminus \{a_1\}, \ldots, a_{n+1} \in A \setminus \{a_1, ..., a_n\} \Rightarrow$ получили набор $\{a_n\} \subset A$: для разных номеров - это различные элементы $\Rightarrow$ установлена биекция между этим набором и $\mathbb{N}$. ■

Упр. 1. Если A - бесконечное и C - счетное, то $A \cup C \sim A$.

Пример Кантора

$\{0,1\}^\infty$ - множество всех бесконечных последовательностей из 0 и 1.

Утв. 2. Множество $\{0,1\}^\infty$ - не является счетным.

$\square$ (От противного): Предположим, что можно занумеровать эти последовательности натруальными числами: I: $0110\ldots$; II: $1110\ldots$;, $\ldots$, n: $\ldots$;. Возьмем такую последовательность: 1-ый элемент из 1-ой последовательности, 2-ой элемент из 2-ой последовательности, $\ldots$, n-ый элемент из n-ой последовательности и так далее.

Возьмем отрицание данной последовательности, то есть: $0 \to 1$ и $1 \to 0$.
Этой последовательности в списке нет, поскольку на 1-ом месте у нее находится не то, что у 1-ой последовательности, на 2-ом месте - не то, что у 2-ой, на n-ом месте - не то, что у n-ой и так далее $\Rightarrow$ от каждой в списке отличается в диагональном элементе $\Rightarrow$ такой последовательности нет $\Rightarrow$ для любого пересчета будет указана последовательность, которая там не находится. $\blacksquare$

Теорема Кантора-Берштейна

Теорема 1. (Кантора Берштейна): Если $A \sim B' \subset B$ и $B \sim A' \subset A \Rightarrow A \sim B$.

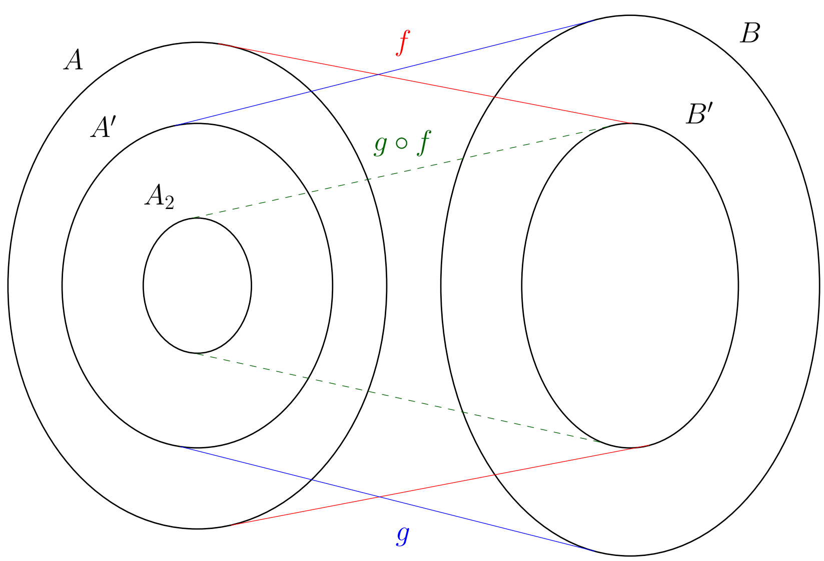

Рис. 5: Отображения множеств: $f\colon A \to B'$, $g\colon B \to A'$, $g \circ f\colon A \to A_2$

$\square$ Множество A биективно отображается на B', множество B биективно отображается на A'. Возьмем композицию этих отображений. Композиция биекций - это биекция, поэтому мы можем заключить, что $A \sim A_2$.

$$f\colon A \to B',\ g\colon B \to A',\ g \circ f\colon A \to A_2$$

Перерисуем картинку следующим образом: множества $A_0 = A$, $A_1 = A'$ и $A_2 = A_2$.

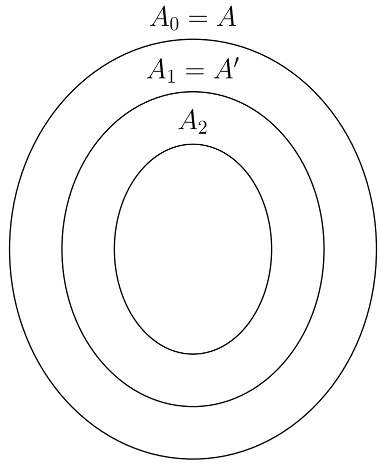

Рис. 6: Разбиение исходного множества A

Идея: $A_2 \subset A_0$ и $A_2 \sim A_0$ значит все, что находится между ними также должно быть равномощно $A_0 = A$. Зная, что $A_0 \sim A_2$ хотим показать, что $A_0 \sim A_2 \Rightarrow A_0 \sim A_1$, тогда $A \sim A' \sim B \Rightarrow A \sim B$.

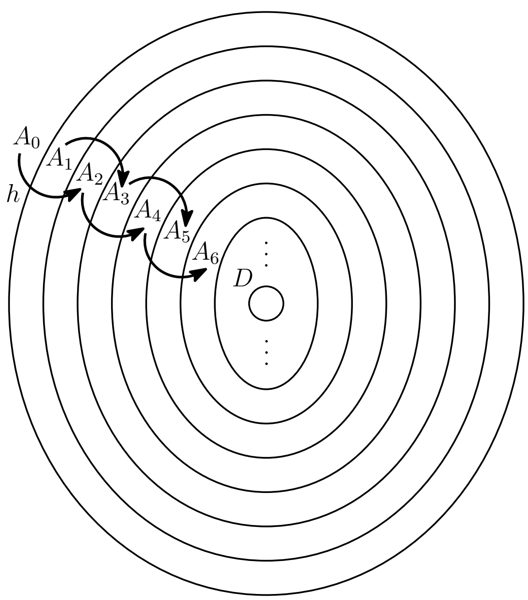

Рис. 7: Построение множеств A_{2n+1} и A_{2n}

Есть биекция $h\colon A_0 \to A_2$. Она же переводит A_1 в некое множество, пусть: $A_3 = h(A_1)$.
В множестве A_1 есть $A_2 \Rightarrow A_2 \subset A_0 \Rightarrow$ биекция переводит A_2 в некое множество $A_4 = h(A_2)$.
Продолжаем по аналогии и получаем: $A_5 = h(A_3)$, $A_6 = h(A_4), \ldots,$ и так далее. Обозначим центр, как D он может быть пустым. Получим:

$$A_{2n+1} = h(A_{2n-1}),\ A_{2n} = h(A_{2n-2})$$

Построим следующие множества: $C_0 = A_0 \setminus A_1$, $C_1 = A_2 \setminus A_3$.

Проверим, что $C_0 \sim C_1$: $A_0 \xrightarrow{h} A_2$ - биекция, $A_0 \supset A_1 \xrightarrow{h} A_3 \subset A_2$ - биекция $\Rightarrow$ поскольку h - биекция, то $h\colon A_0 \setminus A_1 \to A_2 \setminus A_3 \Rightarrow C_0 \sim C_1$.

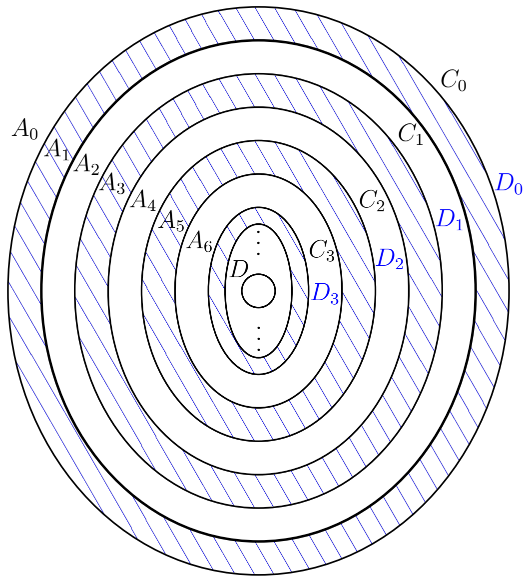

Рис. 8: Построение множеств C_m и D_k

Далее построим следующие множества: $C_1 = A_2 \setminus A_3$, $C_2 = A_4 \setminus A_5$.
Покажем, что $C_1 \sim C_2$, аналогично проверенному: $A_2 \xrightarrow{h} A_4$ - биекция, $A_2 \supset A_3 \xrightarrow{h} A_5 \subset A_4$ - биекция $\Rightarrow$ поскольку h - биекция, то $h\colon A_2 \setminus A_3 \to A_4 \setminus A_5 \Rightarrow C_1 \sim C_2$.

И так далее по аналогии. Получим биекцию h которая переводит эти слои друг в друга:

$$C_1 \xrightarrow{h} C_2 \xrightarrow{h} C_3 \xrightarrow{h} \ldots$$

Поскольку слоев бесконечно много, то первый слой биективно перекладываем внутрь. Таким образом - все закрашенные круги сдвигаются внутрь, а все незакрашенные (обозначим их, как D_k) остаются на месте:

$$A_0 = C_0 \cup D_0 \cup C_1 \cup D_1 \cup \ldots \cup D$$

$$A_1 = D_0 \cup C_1 \cup D_1 \cup \ldots \cup D$$

Устанавливаем биекцию $F\colon D_i \to D_i$, $F\colon C_i \to C_{i+1}$. Множества попарно не пересекаются и для каждого установлен переход $\Rightarrow A_0 \to A_1$ - биекция. ■

Теорема Кантора

Теорема 2. $A \nsim 2^A$

□ Предположим противное, что $\exists f\colon A \to 2^A$ - биекция. Тогда по этому отображению $a \to f(a)$, где $f(a)$ - множество. Рассмотрим множество $C = \{\, a\colon a \notin f(a) \,\} \subset A$ - это те элементы a, образ которых их не содержит. Так как $C \subset A$, то по построению $\exists b \in A\colon f(b) = C$, поскольку у нас биекция.
В случае $b \in f(b) = C \Rightarrow b \notin f(b)$ - противоречие. В случае $b \notin f(b) \Rightarrow b \in C = f(b)$ - противоречие.
Поэтому не существует такой биекции $\Rightarrow$ множества не равномощны. ■

Упр. 2. Сравнить с парадоксом Рассела.

В 2^A есть набор подмножеств, вида $\{a\}$ - одноэлементные подмножества, где $a \in A$. Этот набор отождествляется с A или равномощен A. Таким образом $A \sim C \subset 2^A$, но $A \nsim 2^A \Leftrightarrow A$ - меньше по мощности, чем множество всех подмножеств 2^A.

Rm: 2. Множество всех подмножеств $\mathbb{N}$ не может быть счетным по теореме Кантора: $2^{\mathbb{N}} \nsim \mathbb{N}$.

Данный пример ничем не отличается от предыдущего примера про несчетные множества:
Возьмем последовательность $B \in 2^{\mathbb{N}}$, состоящую из 0 и 1. Выпишем последовательность натуральных чисел $1, 2, \ldots, n, \ldots$ и будем ставить 1 если $n \in B$ и 0 если $n \notin B$. Таким образом напротив каждого натурального числа будет 0 или 1. Следовательно есть биекция: $2^{\mathbb{N}} \sim \{0, 1\}^{\infty}$.

Упр. 3. Сравнить обоснование примера Кантора и доказательства теоремы Кантора.