Непрерывность функций

Опр: 1. $f\colon D \to \mathbb{R}$, $a \in D$, f - непрерывна в точке a по множеству D, если
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0\colon \forall x \in D$, $|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Теорема 1. Следующие утверждения равносильны:

(1) f - непрерывна в точке a (по множеству D);

(2) $\forall x_n \in D$, $x_n \to a$ верно, что $f(x_n) \to f(a)$;

(3) a - изолированная точка $D \vee (a$ - предельная $\wedge \lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a))$;

Утв. 1. Если f и g - непрервны в точке a по множеству D, то $f+g$, $f\cdot g$ и если $g \neq 0$ на D, то $\dfrac{f}{g}$ - все непрерывны в точке a по множеству D.

$\square$ Пусть $x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to f(a) \wedge g(x_n) \to g(a)$ и по свойству предела последовательности $f(x_n) + g(x_n) \to f(a) + g(a)$, $f(x_n)\cdot g(x_n) \to f(a)\cdot g(a)$ и если $g \neq 0$ на D (в частности, в точке a), $\dfrac{f(x_n)}{g(x_n)} \to \dfrac{f(a)}{g(a)}$. $\blacksquare$

Утв. 2. Пусть $f\colon D \to E$, $g\colon E \to \mathbb{R}$, $a \in D$, f - непрерывна в точке a (по множеству D) и g - непрерывна в точке $f(a)$ (по множеству E). Тогда $g(f(x))$ - непрерывна в точке a (по множеству D).

$\square$ $x_n \to a \Rightarrow$ по непрерывности $f \Rightarrow f(x_n) \to f(a) \Rightarrow$ по непрерывности $g \Rightarrow g(f(x_n)) \to g(f(a))$. $\blacksquare$

Утв. 3.

(1) Если f - непрерывна в точке a по множеству D, то $\exists\, \mathcal{U}(a) \wedge C > 0\colon |f(x)| \le C$, $\forall x \in \mathcal{U}(a) \cap D$;

(2) Если f - непрерывна в точка a по множеству D и $f(a) > 0$, то $\exists\, \mathcal{U}(a)\colon f(x) \ge \frac{f(a)}{2} > 0$, $\forall x \in \mathcal{U}(a) \cap D$;

$\square$

(1) Пусть $\varepsilon = 1 \Rightarrow \exists\, \delta > 0\colon \forall x \in D$, $|x-a| < \delta \Leftrightarrow x \in \mathcal{U}_\delta(a) \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \Rightarrow$
$\Rightarrow |f(x)| \le |f(x) - f(a)| + |f(a)| < 1 + |f(a)| = C$, $\forall x \in \mathcal{U}(a)_\delta \cap D$;

(2) Пусть $\varepsilon = \frac{f(a)}{2} \Rightarrow \exists\, \delta > 0\colon \forall x \in \mathcal{U}_\delta(a) \cap D \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \frac{f(a)}{2} \Rightarrow f(x) > \frac{f(a)}{2}$;

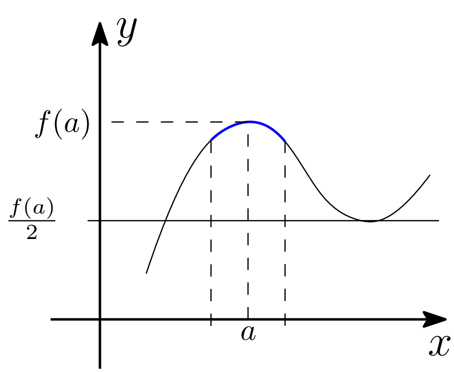


Рис. 1: $f(x) \ge \frac{f(a)}{2} > 0$.

$\blacksquare$

Разрывность функций

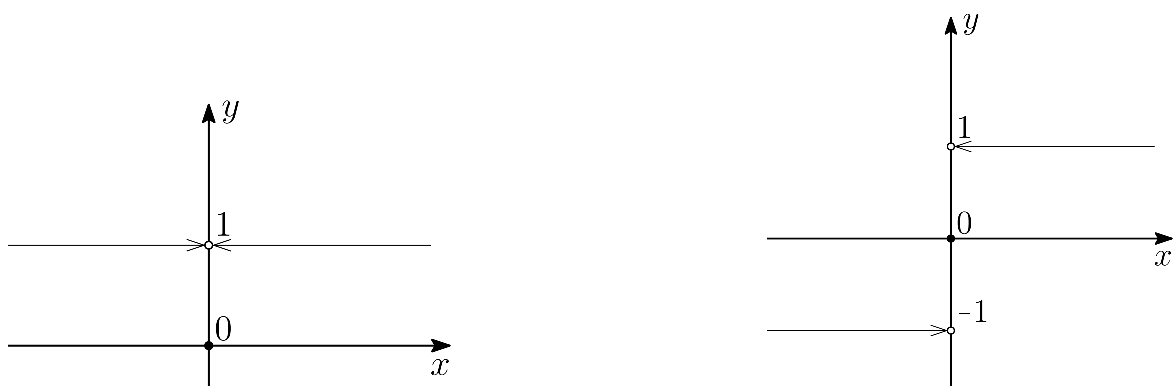
Опр: 2. Функция $f\colon D \to \mathbb{R}$ разрывна в точке a, если f не является непрерывной в точке a.

Rm: 1. Если f разрывна в точке a, то a - предельная точка D.

Функция f разрывна в точке $a \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x)$ или не существует или существует, но $\neq f(a)$.

Опр: 3. Функция f разрывна в точке $a \Leftrightarrow \nexists \lim\limits_{x\to a} f(x) \vee \exists \lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$.

Опр: 4. Если в точке разрыва a, $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$, то такую точку называют точкой устранимого разрыва.



(a) Пример точки устранимого разрыва.

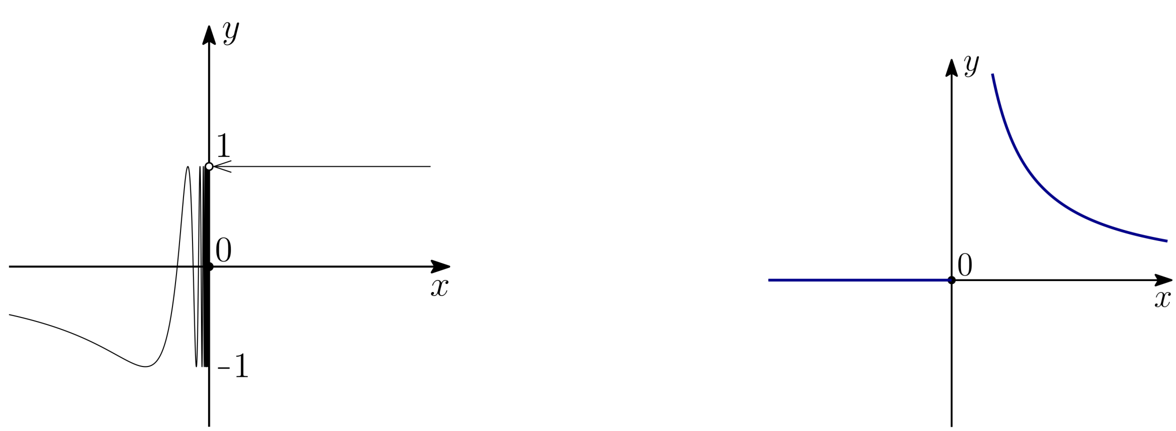
(b) Пример точки разрыва I-го рода.

Рис. 2: Примеры точек разрыва.

Опр: 5. Пусть a - предельная точка $D^- = (-\infty, a) \cap D$ и $D^+ = (a, +\infty) \cap D$. Если $\exists$ конечные пределы $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) \wedge \lim\limits_{x\to a+0} f(x)$, но они различны, то говорят, что a - точка разрыва I-го рода.

Rm: 2. Точки разрыва I-го рода - неустранимые.

Опр: 6. Если хотя бы одного из односторонних пределов не существует (или этот предел $= \pm\infty$), то a называется точкой разрыва II-го рода.



(a) $\sin\frac{1}{x}$, $x < 0$; 0, $x = 0$; 1, $x > 0$.

(b) 0, $x \leq 0$; $\frac{1}{x}$, $x > 0$.

Рис. 3: Пример точек разрыва II-го рода.

Теорема 2. Пусть f - определена на интервале (α,β) и монотонна. Тогда у f могут быть разрывы только I-го рода и множество точек разрыва не более, чем счетно.

☐ Пусть функция f не убывает. Пусть $a\in(\alpha,\beta)$. По теореме Вейрштрасса $\exists \lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\sup\limits_{x<a} f = A$ и $\exists \lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\inf\limits_{x>a} f = B$. Из-за монотонности $A\le f(a)\le B$.

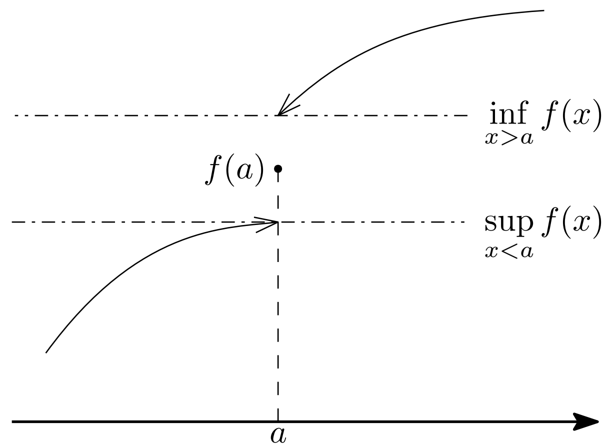


Рис. 4: $\sup\limits_{x<a} f = A\le f(a)\le B=\inf\limits_{x>a} f$.

Если $A=f(a)=B$, то f - непрерывна в точке a. Если a - точка разрыва, то $A<f(a)\vee f(a)<B$, в частности $A\ne B$ и как следствие a - точка разрыва I-го рода.

Сопоставим каждой точке разрыва $a\mapsto(A,B)$ - непустой интервал. Пусть $a<c$ - точки разрыва и (A,B), (C,D) - соответствующие им интервалы.

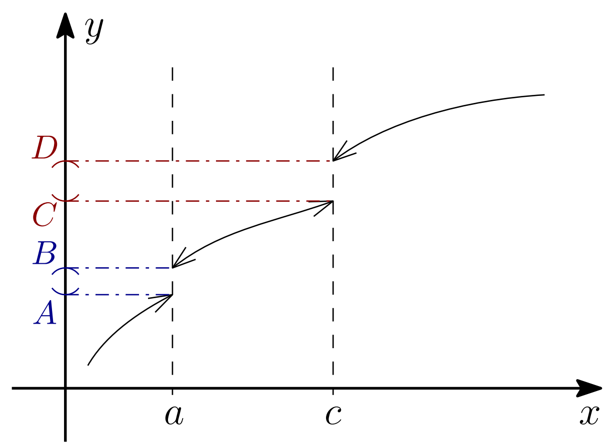


Рис. 5: Интервалы точек разрыва.

Пусть x_0: $a<x_0<c\Rightarrow B\le f(x_0)\le C$ по определению B и C, значит $(A,B)\cap(C,D)=\varnothing$. Таким образом, разным точкам разрывы сопоставляются разные непересекающиеся интервалы. Так как на прямой можно расположить не более чем счетный набор попарно не пересекающихся интервалов, то точек разрыва - не более чем счетно. ∎

Важные примеры

1) Функция Дирихле:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

эта функция всюду разрывна.

2) Функция Римана:

$$R(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x = \frac{m}{n} \text{ - нескоратимая дробь} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

эта функция разрывна в рациональных точках. Но она непрерывна в иррациональных точках.

Можно ли придумать функцию, которая была бы разрывна во всех иррациональных точках и только в них?

Структура множества точек разрыва

Опр: 7. Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - ограниченна и $E \subset \mathbb{R}$, функция $\omega(f, E) = \sup\limits_{x,y \in E} |f(x) - f(y)|$ называется колебанием функции f на множестве E.

Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - ограниченна.

Утв. 4. $\omega(f, E) = \sup\limits_E f - \inf\limits_E f$.

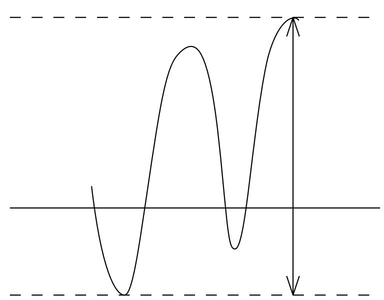


Рис. 6: Колебание функции.

$\square$ $f(x) - f(y) \leq \sup\limits_E f - \inf\limits_E f,\ \forall x, y \in E \Rightarrow f(y) - f(x) \leq \sup\limits_E f - \inf\limits_E f,\ \forall x, y \in E \Rightarrow$

$$|f(x) - f(y)| \leq \sup_E f - \inf_E f,\ \forall x, y \in E \Rightarrow \omega(f, E) \leq \sup_E f - \inf_E f$$

Пусть $\varepsilon > 0 \Rightarrow$ по определению $\exists\, x\colon \sup\limits_E f - \varepsilon < f(x)$. С другой стороны $\exists\, y\colon \inf\limits_E f + \varepsilon > f(y) \Rightarrow$ $\sup\limits_E f - \varepsilon - (\inf\limits_E f + \varepsilon) = \sup\limits_E f - \inf\limits_E f - 2\varepsilon < f(x) - f(y) \leq \omega(f, E) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \sup\limits_E f - \inf\limits_E f < 2\varepsilon + \omega(f, E)$. Устремим $\varepsilon \to 0$, по правилу перехода к пределу неравенства получим $\sup\limits_E f - \inf\limits_E f \leq \omega(f, E)$. $\blacksquare$

Пусть $a \in \mathbb{R}$ и рассмотрим функцию $\delta \mapsto \omega(f, \mathcal{U}_\delta(a))$, $\delta > 0$. Эта функция не убывает: Чем больше $\delta \Rightarrow$ тем больше окрестность $\Rightarrow$ точная верхняя грань может только возрастать. Если δ уменьшать, то к нулю эта функция будет лишь не возрастать.

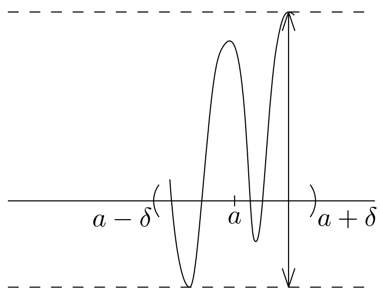


Рис. 7: $\delta \mapsto \omega(f, \mathcal{U}_\delta(a))$, $\delta > 0$.

Снизу эта функция ограниченна: $\omega(f, \mathcal{U}_\delta(a)) \geq 0 \Rightarrow$ для не убывающей, ограниченной снизу функции мы знаем, что $\exists \lim\limits_{\delta \to 0+} \omega(f, \mathcal{U}_\delta(a))$. Обозначаем этот предел $\omega(f, a)$ и называем колебанием f в точке a.

Опр: 8. Предел $\lim\limits_{\delta \to 0+} \omega(f, \mathcal{U}_\delta(a)) = \omega(f, a)$ называется колебанием в точке a.

Утв. 5. f непрерывна в точке $a \Leftrightarrow \omega(f, a) = 0$.

□

($\Rightarrow$) Пусть f - непрерывна в точке $a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists \mathcal{U}_\delta(a)\colon \forall x \in \mathcal{U}_\delta(a) \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \Rightarrow \omega(f, \mathcal{U}_\delta(a)) \leq 2\varepsilon$ $\Rightarrow$ при устремлении $\delta \to 0+$ такие выражения монотонно убывают $\Rightarrow \omega(f, a) \leq \omega(f, \mathcal{U}_\delta(a)) \leq 2\varepsilon$, а так как ε - любое, то $\omega(f, a) = 0$.

Формальнее: $\omega(f, \mathcal{U}_\delta(a)) \leq 2\varepsilon \Rightarrow \hat{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \exists \hat{\delta} > 0\colon \omega(f, \mathcal{U}_{\hat{\delta}}(a)) \leq 2\hat{\varepsilon} = \varepsilon \wedge \omega(f, a) \leq \omega(f, \mathcal{U}_{\hat{\delta}}(a)) \leq \varepsilon$. И так как ε - любое, то $\omega(f, a) = 0$.

($\Leftarrow$) Пусть $\omega(f, a) = 0$ - это означает, что $\lim\limits_{\delta \to 0+} \omega(f, \mathcal{U}_\delta(a)) = 0$. Знаем, что $\omega(f, \mathcal{U}_\delta(a))$ - монотонно убывает, при $\delta \to 0+ \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0\colon \omega(f, \mathcal{U}_\delta(a)) < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$, $\forall x \in \mathcal{U}_\delta(a)$. ■

Следствие 1. Множество точек разрыва $= \bigcup\limits_n \{\, a\colon \omega(f, a) \geq \frac{1}{n} \,\}$.

Утв. 6. Множество $\bigcup\limits_n \{\, a\colon \omega(f, a) \geq \frac{1}{n} \,\}$ - замкнуто.

Таким образом, множество точек разрывов это не более чем счетное объединение замкнутых множеств.