Множества

Опр: 1. Множество - это набор, совокупность, собрание объектов, которые называются элементами множества.

A - множество, $a \in A$ - "a принадлежит A", $a \notin A$ - "a не принадлежит A".

Как задавать множества? Есть несколько способов:

(1) Перечисление: $\{a_1, a_2, a_3, ...\}$;

(2) Указание свойства: $\{\, x \colon x^2 = 1 \,\}$ - задавать так, не очень безопасно;

Парадок Рассела

Пусть K - набор множеств, которые **не** содержат себя в качестве элемента. Например, $\{1, 3\} \in \{1, 3, \{1, 3\}\}$. Верно ли, что $K \in K$?

Предположим, что да $\Rightarrow$ это будет противоречить определению набору множеств K - получили противоречие.

Предположим, что нет $\Rightarrow K \notin K \Rightarrow$, но по определению $K \in K$ - получили противоречие.

Таким образом, корректно выделять часть множества. Множество всех множеств будет противоречить аксиоматике ZF.

Для детей обычно дают парадокс брадобрея: брать только тех, кто себя не бреет.

Аксиоматика Цермело-Френкеля (ZF)

Более подробно - см. Зорич В.А. (I-II том).

Опр: 2. $\varnothing$ - пустое множество: про всякий объект можно утверждать, что он этому множеству не принадлежит.

$\{\, x \colon x \neq x \,\}$, может есть несколько $\varnothing$? Используя $ZF \Rightarrow \varnothing$ - единственно.

Опр: 3. Включение $A \subset B$, A является подмножеством B, если $\forall a \in A \Rightarrow a \in B$

Свойства:

(1) $A \subset A$;

(2) $A \subset B$, $B \subset C \Rightarrow A \subset C$;

Опр: 4. Равенство множеств $A = B$ выполняется, если одновременно $A \subset B$ и $B \subset A$.

Утв. 1. $\varnothing \subset A$, $\forall A$

$\square$ (От противного): Пусть не выполняется $(a \in \varnothing \Rightarrow a \in A) \Rightarrow \exists a \in \varnothing$ и $a \notin A$ это невозможно, так как в $\varnothing$ нет элементов. $\blacksquare$

Множество натуральных чисел

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ - не знаем как получается, пока берем аксиоматически.

Аксиомы Пеано:

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists!$ элемент, который называется следующим и обозначается $n+1$;
2. $\exists!$ элемент, который ни за кем не следует и называется единицей и обозначается 1;
3. $\forall$ элемента отличного от 1, $\exists!$ элемент за которым он следует (единственный предыдущий);
4. **(Аксиома индукции)**: Если $M \subset \mathbb{N}$: $1 \in M$ и $\forall n \in M \Rightarrow (n+1) \in M$, то $M = \mathbb{N}$;

Следует заметить, что аксиомы 1-3 запрещают следующее поведение натуральных чисел:

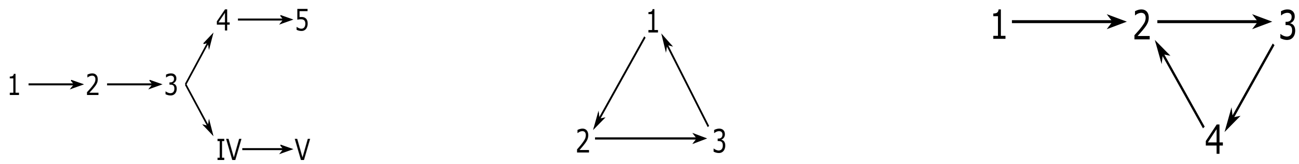

Рис. 1: Последовательности не удовлетворяющие аксиомам 1-3

Но при этом, если не использовать аксиому 4, то возможна следующая последовательность:

$$\{1, 2, 3, \dots; \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{I}, \dots\}$$

таким образом, 4-ая аксиома делает данное множество - наименьшим.

Метод математической индукции

$A_1, A_2, A_3, \dots$ - утверждения. Хотим доказать, что все A_k - истинны.

$$\left.\begin{array}{l} A_1 \text{ - истина (База)} \\ \forall n,\ A_n \Rightarrow A_{n+1} \text{(Шаг)} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ все } A_n \text{ - истинные.}$$

Теорема 1. Аксиома индукции $\Rightarrow$ Метод математической индукции

$\square$ Пусть $M = \{\, n\colon A_n \text{ - истина} \,\}$.
База: $1 \in M$
Шаг: $\forall n$, $n \in M \Rightarrow (n+1) \in M \Rightarrow$ по АИ $M = \mathbb{N} \Rightarrow$ все A_n - истинные $\Rightarrow$ ММИ выполняется. $\blacksquare$

Теорема 2. (Неравенство Бернулли): $\forall n \in \mathbb{N}$, $x \geq -1 \Rightarrow (1+x)^n \geq 1 + nx$

$\square$ Используя метод математической индукции:
База: $n = 1$, $(1+x) \geq 1 + x$ - верно.
Шаг: предположим, что для n - верно, $(1+x)^n \geq 1 + nx$, тогда

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \underset{\text{т.к. } (1+x)\geq 0}{\geq} (1+nx)(1+x) = 1 + x + nx + \underbrace{nx^2}_{\geq 0} \geq (1 + (n+1)x) \quad \blacksquare$$

Rm: 1. Можно доказать и для $x \geq -2$, но не через индукцию.

Бином Ньютона

Определим число сочетаний C_n^k - количество способов выбрать из n объектов - k объектов или выбрать из n - элементного множества k - элементное.
n человек, сколькими способами можно назначить k человек ? $\Rightarrow C_n^k$: 1-ый человек - n способов, 2-ой человек - $(n-1)$ способ, $\dots$, k-ый человек - $(n-k+1)$ способ $\Rightarrow n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$, но так как порядок не важен, то делим это число на число перестановок $\Rightarrow \dfrac{1}{k!}\cdot n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$, где $k!$ - число перестановок на k элементов.

Теорема 3. (Бином Ньютона): $(a+b)^n=\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$, где $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, $n!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n$, $0!=1$.

$\square$

(I) способ: $(a+b)^n=\overbrace{(a+b)\dots(a+b)}^{n\text{ штук}}=\dots a^kb^{n-k}$ так как идет перемножение скобок, то $k+(n-k)=n$, выбираем скобки, где будет a, из оставшихся берем $b \Rightarrow C_n^ka^kb^{n-k} \Rightarrow (a+b)^n=\dots C_n^ka^kb^{n-k}$. Индукция в таком способе - в перемножении.

(II) способ: используем ММИ
База: $n=1$, $(a+b)=C_1^0b+C_1^1a=a+b$ - верно.
Шаг: предположим, что для n - верно $\Rightarrow$

$$(a+b)^{n+1}=(a+b)^n(a+b)=\Big(\sum_{k=0}^{n}C_n^ka^kb^{n-k}\Big)(a+b)$$

таким образом получим слагаемые вида:

$a\cdot\big(\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^ka^kb^{n-k}\big)=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^ka^{k+1}b^{n-k}$ и $b\cdot\big(\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^ka^kb^{n-k}\big)\big)=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^ka^kb^{n-k+1}$, все они будут иметь вид

$$\dots a^mb^{n+1-m},\text{ где } m=0,\dots,n+1\Rightarrow$$

$C_n^ka^{k+1}b^{n-k}=(C_n^{m-1}a^{m-1})ab^{n-m+1}, m=1,\dots,n+1$ и $C_n^ka^kb^{n-k+1}=C_n^ma^m(b^{n-m}b), m=0,\dots,n\Rightarrow$

Поскольку $\frac{n!}{(m-1)!(n-m+1)!}+\frac{n!}{m!(n-m)!}=n!\cdot\frac{m+n-m+1}{m!(n-m+1)!}=\frac{(n+1)!}{m!(n-m+1)!}=C_{n+1}^m$, то

$C_n^{m-1}a^mb^{n-m+1}+C_n^ma^mb^{n-m+1}=C_{n+1}^ma^mb^{n-m+1}$, где $m=0,1,\dots,n+1\Rightarrow (a+b)^{n+1}=\sum\limits_{m=0}^{n+1}C_{n+1}^ma^mb^{n-m+1}$

$\blacksquare$