Формула Тейлора. Ряды Тейлора

Формула Тейлора с остаточным членом:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!} + r_n(x,a)$$

Опр: 1. Если функция f бесконечное число раз дифференцируема в окрестности точки a, то ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!}$$

называется рядом Тейлора в точке a функции f.

Пример Коши: $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \end{cases}$

f бесконечное число раз дифференцируема (в том числе в 0) и $f^{(n)}(0) = 0$.

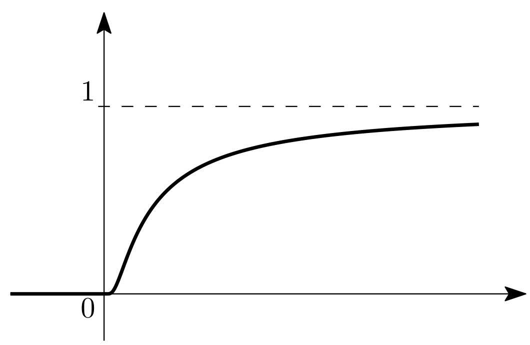

Рис. 1: Пример Коши.

Посчитаем её производную:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} \underset{t=\frac{1}{x}}{=} \lim_{x\to+\infty} te^{-t} = \lim_{x\to+\infty} \frac{t}{e^t} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^t} = 0$$

Ряд Тейлора для этой функции равен $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{0\cdot x^k}{k!} \equiv 0$, но она ни в какой окрестности нуля не является тождественно нулевой. Таким образом, ни на каком интервале вокруг точки 0 эта сумма не сходится к нашей функции.

Теорема 1. (Борель): Для всякой числовой последовательности $\{c_n\}$ существует бесконечно дифференцируемая в окрестности $x = 0$ функция $f\colon f^{(n)}(0) = c_n$.

Пример: $c_n = (n!)^2 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} k!x^k$ - ряд Тейлора, сходится только в одной точке: $x = 0$.

Теорема 2. Пусть f бесконечно дифференцируема на интервале $(a-r, a+r)$ и $\sup\limits_{x \in (a-r,a+r)} |f^{(n)}(x)| \le C{\cdot}q^n{\cdot}n!$, где $C > 0$, $0 < q < \frac{1}{r}$. Тогда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!}$$

сходится равномерно к $f(x)$ для всякого $x \in (a-r, a+r)$

☐ Используем остаточный член в форме Лагранжа:

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!} \right| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right|, \ c \in (a,x) \vee c \in (x,a)$$

Так как $|x-a| < r$, $c \in (a,x) \vee c \in (x,a) \Rightarrow c \in (a-r, a+r) \Rightarrow$

$$\left| \frac{f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right| \le \frac{Cq^{n+1}{\cdot}(n+1)!{\cdot}r^{n+1}}{(n+1)!} = C(qr)^{n+1}, \ 0 < q < \frac{1}{r} \Rightarrow (qr) < 1 \Rightarrow (qr)^{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

■

Пример: e^x, $a = 0 \Rightarrow |e^x| \le Cq^n n!$, $0 < q < \frac{1}{r}$. Но на любом интервале e^x - ограниченна, r - любое, а $\forall q$, $q^n n! \to \infty \Rightarrow$ после выбора C данная оценка будет верна на каждом интервале.

Опр: 2. Функция f называется аналитической в окрестности $\mathcal{U}(a)$ точки a, если она бесконечно дифференцируема и её ряд Тейлора сходится к f на окрестности $\mathcal{U}(a)$.

Пример: $\dfrac{1}{1+x^2}$ - бесконечно дифференцируемая функция. Напишем её ряд Тейлора в 0:

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$$

Ряд сходится при $x \in (-1, 1)$, но при этом значения функции в точках $|x| \ge 1$ определены. По оси вещественных чисел x нет проблем, но на комплексной плоскости есть две плохие точки $i, -i$.

Rm: 1. (Метод неопределенных коэффициентов) Пусть $f(x) = c_0 + c_1(x-a) + \ldots + c_n(x-a)^n + \bar{o}((x-a)^n)_{x\to a} \Rightarrow$ коэффициенты c_k определены однозначно. $c_0 = \lim\limits_{x\to a} f(x)$, $c_1 = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-c_0}{x-a}, \ldots \Rightarrow$ так как предел определен единственным образом, то на каждом шаге предыдущие коэффициенты найдены, поэтому нет никакой неопределенности в выборе коэффициентов.

Пример: $(\operatorname{tg} x)' = 1 + \operatorname{tg}^2 x$. Найдем разложение $\operatorname{tg} x$: понимаем, что эта функция нечетная $\Rightarrow$ разложение не будет содержать коэффициенты четной степени, поскольку все четные производные будут равны $0 \Rightarrow$ $\operatorname{tg} x = c_1 x + c_3 x^3 + c_5 x^5 + \ldots$. Предположим мы знаем, что эту сумму можно почленно дифференцировать $\Rightarrow$

$$c_1 + 3c_3x^2 + 5c_5x^4 + \ldots = 1 + (c_1x + c_3x^3 + c_5x^5 + \ldots)^2 \Rightarrow c_1 = 1,\ 3c_3 = c_1^2 \Rightarrow c_3 = \frac{1}{3}, \ \ldots$$

Свойства производной. Непрерывность f'

Пусть f дифференцируема всюду на $\mathbb{R} \Leftrightarrow \exists\, f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$. По определению Гейне, если такой предел есть, его можно брать по любой последовательности, подходящей к x.

Рассмотрим $f_n(x) = n(f(x+\frac{1}{n}) - f(x)) \Rightarrow f_n(x)$ поточечно сходится к f'. Функция всюду дифференцируема $\Rightarrow$ она всюду непрерывна $\Rightarrow$ f_n - непрерывные функции. Поточечный предел непрерывных функций имеет всюду плотное множество точек непрерывности $\Rightarrow$ у f' всюду плотное множество точек непрерывности.

Тогда f' не может оказаться, например, функцией Дирихле или функцией у которой только одна точка непрерывности, но при этом f' может иметь разрыв.

Пример: $f(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x = 0\end{cases}$.

Если $x \neq 0 \Rightarrow f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$. Если $x = 0 \Rightarrow f'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-0}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x} = 0$.

Функция всюду дифференцируема, но f' имеет разрыв II-го рода в точке $x = 0$.

Возможны ли устранимые разрывы или разрывы I-го рода? Рассмотрим следующую теорему.

Теорема 3. (Дарбу) Пусть f дифференцируема в каждой точке отрезка $[a,b]$ и $f'(a)\cdot f'(b) < 0$. Тогда $\exists\, c \in [a,b]\colon f'(c) = 0$.

$\square$ Пусть $f'(a) < 0 \wedge f'(b) > 0 \Rightarrow 0 > f'(a) = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \Rightarrow$ в окрестности точки a данное отношение будет меньше $0 \Rightarrow \exists\,\delta > 0\colon \forall x \in (a, a+\delta)$, $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} < 0 \wedge x > a \Rightarrow f(x) < f(a)$.

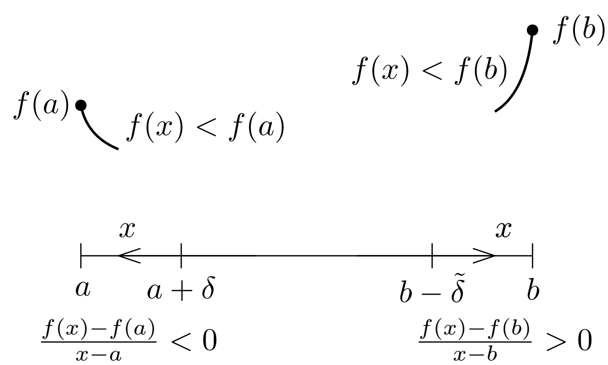

Рис. 2: Доказательство теоремы Дарбу.

Поскольку $0 < f'(b) = \lim\limits_{x\to b}\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b} \Rightarrow \exists\,\tilde{\delta} > 0\colon \forall x \in (b-\tilde{\delta}, b)$, $\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b} > 0 \wedge x < b \Rightarrow f(x) < f(b)$.

Поскольку функция дифференцируема на отрезке $\Rightarrow$ она непрерывна на нем и принимает свое наименьшее и наибольшее значения. Таким образом, $\min\limits_{[a,b]} f \neq f(a) \wedge \min\limits_{[a,b]} f \neq f(b) \Rightarrow$ минимум достигается в некоторой точке c внутри отрезка и по теореме Ферма $f'(c) = 0$. $\blacksquare$

Следствие 1. Если f дифференцируема в каждой точке отрезка $[a,b]$ и $A = f'(a)$, $B = f'(b)$, то $\forall C$ между A и B найдется $c \in [a,b]$: $f'(c) = C$.

□ Рассмотрим функцию $g(x) = f(x) - Cx \Rightarrow$ проверяется сразу, что $g'(a)g'(b) = (A-C)(B-C) \leq 0$.

Если $g'(a)g'(b) = 0 \Rightarrow$ производная совпала со значением или в точке a, или в точке b.

Если $g'(a)g'(b) < 0 \Rightarrow$ по теореме Дарбу $\exists\, c \in [a,b]$: $g'(c) = 0 \Rightarrow f'(c) - C = 0 \Rightarrow f'(c) = C$. ■

Таким образом, производная обладает свойством промежуточного значения $\Rightarrow$ не может быть разрывов ни I-го рода, ни устранимых, а возможны лишь разрывы II-го рода

Правило Лейбница для производных высокого порядка

Теорема 4. Пусть f и g n-раз дифференцируемы в точке a. Тогда $f{\cdot}g$ n-раз дифференцируема и верно равенство:

$$(fg)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k{\cdot}f^{(k)}(a){\cdot}g^{(n-k)}(a)$$

□ Докажем по индукции:
__База__: обычное правило Лейбница $(fg)' = f'g + fg' = C_1^0 f^{(0)}g^{(1)} + C_1^1 f^{(1)}g^{(0)}$. Рассмотрим вторую производную, как производную от прозводной первого порядка: $(fg)'' = (f'g + fg')' = f''g + 2f'g' + g''f$.

__Шаг__: пусть доказано для n, докажем для $n+1$:

$$(fg)^{(n+1)} = ((fg)^{(n)})' = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \big(f^{(k+1)}g^{(n-k)} + f^{(k)}g^{(n+1-k)}\big) =$$

$$= fg^{(n+1)} + f^{(n+1)}g + \sum_{m=1}^{n} \big(C_n^{m-1} + C_n^m\big) f^{(m)}g^{(n+1-m)} = \sum_{m=0}^{n+1} C_{n+1}^m f^{(m)}g^{(n+1-m)}$$

■

Пример: $(xe^x)^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k{\cdot}(x)^{(k)}{\cdot}(e^x)^{(n-k)} = C_n^0{\cdot}xe^x + C_n^1{\cdot}e^x = xe^x + ne^x$.

Исследование функций

Опр: 3. Точка a называется точкой локального (внутреннего) минимума (максимума) функции f, если f определена в окрестности $\mathcal{U}(a)$ точки a и $\forall x \in \mathcal{U}(a)$, $f(x) \geq f(a)$ $(f(x) \leq f(a))$.

Опр: 4. Точка a называется точкой строгого локального (внутреннего) минимума (максимума) функции f, если f определена в окрестности $\mathcal{U}(a)$ точки a и $\forall x \in \mathcal{U}'(a)$, $f(x) > f(a)$ $(f(x) < f(a))$.

Опр: 5. Точки локального минимума или максимума называются точками локального (внутреннего) экстремума f.

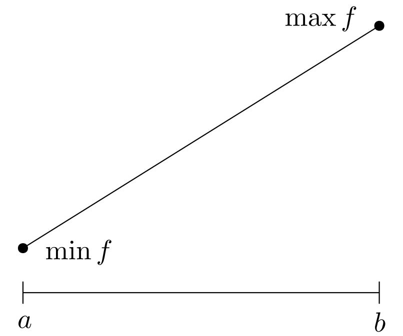

Рис. 3: Не внутренние максимумы и минимумы.

Теорема 5. (Ферма) Необходимое условия локального экстремума: Если функция f дифференцируема в точке a и точка a это точка внутреннего локального экстремума, то $f'(a) = 0$.