Подпоследовательности

Опр: 1. Если задана последовательность $\{a_n\}$ и последовательность возрастающих номеров $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_k < n_{k+1} < \ldots$ - натуральные числа, то последовательность $\{a_{n_k}\}$ называется подпоследовательностью последовательности $\{a_n\}$.

Примеры

$a_n\colon 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, \ldots;\ n_k = 2k \Rightarrow a_{n_k}\colon 2, 1, 3, \ldots$ - подпоследовательность.
$n_1 = 2, a_{n_1} = 2; n_2 = 1, a_{n_2} = 1; \ldots$ - не будет подпоследовательностью.

$a_n\colon 1, 1, 1, 5, 5, 5, \ldots;\ a_{n_k}\colon 5, 5, 1, 5, 5, \ldots$ - не будет подпоследовательностью.

Теорема 1. Если последовательность a_n сходится к a, то всякая ее подпоследовательность a_{n_k} будет сходится к a.

□ Докажем сначала вспомогательное утверждение:

(1) $n_k \geq k$ - по индукции: $k = 1$ - верно, так как n_1 - натуральное. Предположим, что для k - верно, докажем для $k+1$: значем, что $n_{k+1} > n_k \geq k \Rightarrow$ так как числа - натуральные, то $n_{k+1} \geq n_k + 1 \geq k + 1$.

(2) Тогда по опр.: $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N\colon \forall n > N,\ |a_n - a| < \varepsilon$. Пусть $k > N$, тогда $n_k \geq k > N \Rightarrow |a_{n_k} - a| < \varepsilon$.

■

Теорема 2. (Больцано): Если последовательность a_n - ограничена, то в ней есть сходящаяся подпоследовательность.

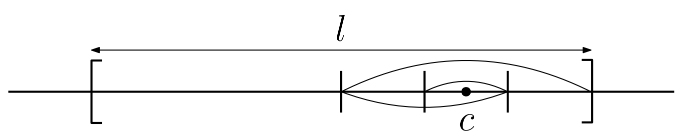

Рис. 1: Идея доказательства

□ Пусть $a_n \in [\alpha_1, \beta_1]$, $l = \beta_1 - \alpha_1$ (так, как a_n - ограниченно). Делим отрезок $[\alpha_1, \beta_1]$ пополам и берем в качестве отрезка $[\alpha_2, \beta_2]$ ту половину в которой бесконечно много членов последовательности a_n. Замечаем, что $\beta_2 - \alpha_2 = \dfrac{l}{2}$. Продолжая построение, получаем последовательность вложенных отрезков: $[\alpha_1, \beta_1] \supset [\alpha_2, \beta_2] \supset \ldots \supset [\alpha_k, \beta_k] \supset \ldots$ таких, что:

1) в каждом $[\alpha_k, \beta_k]$ бесконечно много членов последовательности a_n;

2) $\beta_k - \alpha_k = \dfrac{l}{2^{k-1}} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$;

$\forall k$ находим $a_{n_k} \in [\alpha_k, \beta_k]$ так, что $n_1 < n_2 < \ldots$ - это возможно по 1)-ому свойству отрезков.

По теореме о вложенных отрезках существует $c \in \bigcap\limits_k [\alpha_k, \beta_k]$. Так как $a_{n_k} \in [\alpha_k, \beta_k]$ и $c \in [\alpha_k, \beta_k]$, то $|a_{n_k} - c| \leq \dfrac{l}{2^{k-1}} \to 0$, то есть $a_{n_k} \to c$. ■

Опр: 2. Предел подпоследовательности называется частичным пределом.

Задача: описать множество частичных подпределов.

Теорема 3. Пусть a_n - ограниченная последовательность. Тогда:

(1) Последовательность $M_n = \sup\limits_{k>n} a_k$ не возрастает, ограничена и сходится к некоторому числу M;

(2) Последовательность $m_n = \inf\limits_{k>n} a_k$ не убывает, ограничена и сходится к некоторому числу m;

(3) M и m - частичные пределы последовательности a_n и $\forall$ частичный предел лежит в отрезке $[m, M]$;

Пример: $a_n\colon 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, \dots$; все подпоследовательности которые к чему-то сходятся? Множество частичных пределов $\{1, 2, 3\}$. Самый большой - 3, самый маленький - 1.

$\square$ a_n - ограниченная последовательность, тогда:

(1) Покажем, что $M_n \geq M_{n+1}$: $M_n = \sup\{a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\}$, $M_{n+1} = \sup\{a_{n+2}, a_{n+3}, \dots\}$.
Ясно, что $\{a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\} \supset \{a_{n+2}, a_{n+3}, \dots\} \Rightarrow$ так как M_n - верхняя грань для $\{a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\}$, то M_n - верхняя грань для $\{a_{n+2}, a_{n+3}, \dots\}$. Следовательно $M_n \geq M_{n+1}$.

Так как a_n - ограничена, то и M_n - ограничена. Тогда по теореме Вейрштрасса существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = M$.

(2) Покажем, что $m_n \leq m_{n+1}$: $m_n = \inf\{a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\}$, $m_{n+1} = \inf\{a_{n+2}, a_{n+3}, \dots\}$.
Ясно, что $\{a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\} \supset \{a_{n+2}, a_{n+3}, \dots\} \Rightarrow$ так как m_n - нижняя грань для $\{a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\}$, то m_n - нижняя грань для $\{a_{n+2}, a_{n+3}, \dots\}$. Следовательно $m_n \leq m_{n+1}$.

Так как a_n - ограничена, то и m_n - ограничена. Тогда по теореме Вейрштрасса существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} m_n = m$.

(3) Докажем, что M - частичный предел: надо предъявить подпоследовательность $a_{n_k}\colon a_{n_k} \to M$.

$n_1\colon 0 \leq M_1 - a_{n_1} < 1$, $M_1 - 1$ - не верхняя грань для $\{a_2, a_3, \dots\} \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists\, a_{n_1} \in \{a_2, a_3, \dots\}\colon M_1 \geq a_{n_1} > M_1 - 1$.

$n_2\colon 0 \leq M_{n_1} - a_{n_2} < \frac{1}{2}$, $n_2 > n_1$, $n_2 \geq n_1 + 1$, $M_{n_1} - \dfrac{1}{2}$ - не верхняя грань для $\{a_{n_1+1}, a_{n_1+2}, \dots\} \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists\, a_{n_2} \in \{a_{n_1+1}, a_{n_1+2}, \dots\}\ \colon M_{n_1} - \frac{1}{2} < a_{n_2} \leq M_{n_1}$.

Если уже построено n_k, то $n_{k+1}\colon 0 \leq M_{n_k} - a_{n_{k+1}} < \frac{1}{k+1}$ и $n_{k+1} > n_k$. Получаем подпоследовательность a_{n_k}, где $M_{n_{k-1}} - \frac{1}{k} \leq a_{n_k} \leq M_{n_k}$. M_{n_k} - подпоследовательность в M_n и $M_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} M$, $M_{n_{k-1}} - \frac{1}{k} \xrightarrow[k\to\infty]{} M$, так как $M_n \xrightarrow[n\to\infty]{} M \Rightarrow a_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} M$.

Для m - упражнение.

Покажем, что если произвольная подпоследовательность $a_{n_k} \to a$, то $a \in [m, M]$. По определению $m_{n_{k-1}} \leq a_{n_k} \leq M_{n_{k-1}}$, $M_{n_{k-1}} \to M$, $m_{n_{k-1}} \to m$, $a_{n_k} \to a$. По правилу перехода к пределу в неравенствах получим: $m \leq a \leq M$. Значит всякий частичный предел лежит в этих границах.

$\blacksquare$

Опр: 3. Число $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{k>n} a_k$ называется верхним пределом последовательности a_n. Это самый большой из частичных пределов. Обозначение: $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

Опр: 4. Число $\lim\limits_{n\to\infty}\inf\limits_{k>n} a_k$ называется нижним пределом последовательности a_n. Это самый маленький из частичных пределов. Обозначение: $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n$.

Следствие 1. Пусть a_n - ограниченная последовательность. a_n сходится $\Leftrightarrow$ $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n = \varliminf\limits_{n\to\infty} a_n$. В случае сходимости, верхний и нижний предел равны пределу последовательности.

$\square$
($\Rightarrow$) очевидно: если всякая последовательность сходится, то и всякая её подпоследовательность сходится и совпадает с пределом последовательности.

($\Leftarrow$) $\inf\limits_{k>n-1} a_k \leq a_n \leq \sup\limits_{k>n-1} a_k$, где по определению $\inf\limits_{k>n-1} a_k \to \varliminf\limits_{n\to\infty} a_n = \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n \leftarrow \sup\limits_{k>n-1} a_k \Rightarrow a_n$ - сходится по теореме о двух полицейских. $\blacksquare$

Упр. 1. Построить последовательность множество частичных пределов которой - это $[0,1]$.
(Указание: эта последовательность - известна).

Пример: Последовательность

$$a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$$

не убывает и она меньше 2 (можно доказать по индукции). Тогда по теореме Вейрштрасса $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\limits_n a_n$. Но найти руками этот предел пока нет возможности.

Последовательность

$$a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$$

у нее тоже сложно найти предел. Как понять сходится или нет? Она не монотонна, поэтому теорему Вейрштрасса не получится применить.

Можно ли сказать: сходится ли последовательность, не находя к чему она сходится? Можно, используя условие Коши.

Опр: 5. Последовательность a_n фундаментальна или удовлетворяет условию Коши, если

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\colon \forall n, m > N,\ |a_n - a_m| < \varepsilon$$