Сходимость функций

Опр: 1. $f_n \to f$ поточечно на множестве D, если $\forall x \in D$, $f_n(x) \to f(x)$.

При поточечной сходимости теряется свойство непрерывности. Но точек разрыва не может быть слишком много.

Теорема 1. Если f_n - непрерывны на $\mathbb{R} \wedge \forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) \to f(x)$, то у функции f есть хотя бы одна точка непрерывности.

Идея: Будем доказывать от противного, что точек непрерывности вообще нет. Тогда найдется промежуток на котором функция будет вести себя, как функция Дирихле (то есть в каждой точке имеет положительный скачок). С другой стороны, на этом же промежутке можно найти интервал, где f_n достаточно близко подойдут к функции f, но f_n - непрерывные функции, а f имеет множественные скачки $\Rightarrow$ получим противоречие.

□ Предположим противное, что точки разрыва это вся числовая ось.

1) Тогда $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \underbrace{\{\, x \colon \omega(f,x) \geq \frac{1}{k} \,\}}_{\text{замкнутые}}$. По теореме Бэра $\exists\, k \wedge (\alpha, \beta) \colon (\alpha, \beta) \subset \{\, x \colon \omega(f,x) \geq \frac{1}{k} \,\}$.

Уменьшая интервал, считаем, что $\alpha < \beta$ и $[\alpha, \beta] \subset \{\, x \colon \omega(f,x) \geq \frac{1}{k} \,\}$.

2) Пусть $\varepsilon > 0 \Rightarrow$ в каждой точке $x, \exists\, N_x \colon \forall n, m > N_x$, $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$, так как $f_n(x)$ в каждой точке x сходится и выполняется условие Коши $\forall x \Rightarrow$

$$\Rightarrow [\alpha, \beta] = \bigcup_N \bigcap_{n,m>N} \Big\{ x \in [\alpha, \beta] \colon |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon \Big\}$$

Множество $\{x \in [\alpha, \beta] \colon |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon\}$ - замкнуто (n и m - фиксированы). Действительно, пусть $x_k \in \{x \in [\alpha, \beta] \colon |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon\} \wedge x_k \to x_0 \Rightarrow |f_n(x_k) - f_m(x_k)| \leq \varepsilon$, так как функции $f_n(x), f_m(x)$ - непрерывные, то $f_n(x_k) \to f_n(x_0) \wedge f_m(x_k) \to f_m(x_0) \Rightarrow |f_n(x_k) - f_m(x_k)| \to |f_n(x_0) - f_m(x_0)| \leq \varepsilon \Rightarrow$
$\Rightarrow x_0 \in \{x \in [\alpha, \beta] \colon |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon\} \Rightarrow$ множество замкнутое.
Таким образом $\bigcap\limits_{n,m>N} \{x \in [\alpha, \beta] \colon |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon\}$ - замкнутое множество, как пересечение замкнутых множеств (любое пересечение замкнутых множеств - замкнутое).

3) По теореме Бэра $\exists\, N \wedge (\alpha_1, \beta_1) \subset \bigcap\limits_{n,m>N} \{x \in [\alpha, \beta] \colon |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon\}$. На интервале (α_1, β_1) выполняются следующие свойства:

(1) $\forall x \in (\alpha_1, \beta_1)$, $\omega(f, x) \geq \frac{1}{k}$;

(2) $\forall x \in (\alpha_1, \beta_1)$, $\forall n, m > N$, $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$;

Фиксируем $n > N$, устремляем m в бесконечность $m \to \infty \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.

4) Возьмем $\varepsilon = \frac{1}{10k}$, тогда используя неравенство треугольника получим $\forall x, y \in (\alpha_1, \beta_1)$

$$|f_n(x) - f_n(y)| \geq |f(x) - f(y)| - |f_n(x) - f(x)| - |f_n(y) - f(y)| \geq |f(x) - f(y)| - \tfrac{1}{5k}$$

Пусть $x_0 \in (\alpha_1, \beta_1)$, возьмем $\delta > 0 \colon \mathcal{U}_\delta(x_0) \subset (\alpha_1, \beta_1)$. Тогда $\forall x, y \in \mathcal{U}_\delta(x_0) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \omega(f_n, \mathcal{U}_\delta(x_0)) = \sup_{x,y \in \mathcal{U}_\delta(x_0)} |f_n(x) - f_n(y)| \geq |f_n(x) - f_n(y)| \geq |f(x) - f(y)| - \tfrac{1}{5k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega(f_n,\mathcal{U}_\delta(x_0)) \geq \sup_{x,y\in\mathcal{U}_\delta(x_0)} |f(x)-f(y)| - \tfrac{1}{5k} = \omega(f,\mathcal{U}_\delta(x_0)) - \tfrac{1}{5k} \Rightarrow$$

Устремим $\delta \to 0 \Rightarrow$ так как f_n - непрерывная, то $\omega(f_n,\mathcal{U}_\delta(x_0)) \to 0$, $\omega(f,\mathcal{U}_\delta(x_0)) \to \omega(f,x_0) \Rightarrow$

$$\Rightarrow 0 \geq \omega(f,x_0) - \tfrac{1}{5k} \geq \tfrac{1}{k} - \tfrac{1}{5k} > 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ получили противоречие. ■

Следствие 1. Множество точек непрерывности f - всюду плотно, то есть во всяком интервале есть точка непрерывности.

Идея: Превратить интервал в прямую, так чтобы свойства непрерывности и поточечной сходимости не исчезло.

□ Пусть есть интервал (α,β), на нем есть функции $f_n(x)$ и $f(x)$. Пусть мы построили непрерывные отображения $g\colon \mathbb{R}\to(\alpha,\beta) \wedge g^{-1}\colon (\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$.
К примеру, $g(x)=\tan(x)\colon (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R} \wedge g^{-1}(x) = \arctan(x)\colon \mathbb{R}\to(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

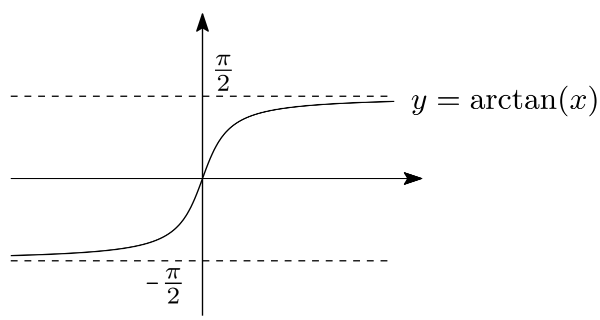

Рис. 1: $y=\arctan(x)$.

Любой интервал можно превратить в $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ линейным отображением. Составим новые функции $\tilde{f}_n(y) = f_n(g(y)) \wedge \tilde{f}(y) = f(g(y))$ - непрерывные, как композиции непрерывных функций. Поточечная сходимость есть, так как зафиксировав y фиксируется и $g(y) \Rightarrow f_n(g(y)) \to f(g(y)) \Rightarrow \exists\, y_0\in\mathbb{R}\colon f(g(y))$ - непрерывна в точке y_0 по теореме выше.

Возьмем $x_0 = g(y_0)$, $f(x) = f(g(g^{-1}(x))) \Rightarrow f(g(y))$ - непрерывна в точке y_0, а $g^{-1}(x)$ - непрерывна в точке $x_0 \Rightarrow$ композиция непрерывных функций - непрерывна $\Rightarrow f$ - непрерывна в точке x_0. ■

Rm: 1. Не любую функцию можно получить, как поточечный предел непрервных фнукций (например, нельзя получит функцию Дирихле).

Теорема 2. Пусть $f_n\colon D\to\mathbb{R}$, $f\colon D\to\mathbb{R}$, $a\in D$ - точка непрерывности f_n, $\forall n$ и f_n сходятся к f равномерно на D. Тогда f непрерывна в точке a.

□ По неравенству треугольника $|f(x)-f(a)| \leq |f(x)-f_n(x)| + |f_n(x)-f_n(a)| + |f_n(a)-f(a)|$.

$\forall\varepsilon>0$, $\exists\, N\colon \forall n>N$, $\forall x\in D$, $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ - из-за равномерной сходимости. Фиксируем $n>N$, так как f_n - непрерывна в точке a, то $\exists\,\delta>0\colon \forall x\in D$, $|x-a|<\delta \Rightarrow |f_n(x)-f_n(a)|<\varepsilon \Rightarrow |f(x)-f(a)|<3\varepsilon$. ■

Дифференциальное исчисление

Пусть f определена в окрестности точки a.

Опр: 2. Функция f дифференцируема в точке a, если $f(a+h)-f(a)=A{\cdot}h+\alpha(h){\cdot}h$, где A - число, $\alpha(h)$ - функция, определенная в проколотой окрестности $h=0$ и $\lim\limits_{h\to 0}\alpha(h)=0$,

$f(a+h)-f(a)$ - приращение функций и h - произвольное число из некоторой проколотой окрестности точки 0 - приращение аргумента.

Опр: 3. Линейная функция $h\mapsto A{\cdot}h$ называется дифференциалом функции f в точке a и обозначается $df(a,h)$ или $df(h)$.

Пример: $f(x)=x\Rightarrow f(a+h)-f(a)=a+h-a=h=1{\cdot}h+0{\cdot}h\Rightarrow A=1$, $\alpha(h)=0$. Таким образом, получили, что дифференциал линейной функции $df(h)=h$.

Пример: $f(x)=x^2\Rightarrow f(a+h)-f(a)=(a+h)^2-a^2=a^2+2ah+h^2-a^2=2a{\cdot}h+h{\cdot}h\Rightarrow A=2a$, $\alpha(h)=h$ и дифференциал функции $df(h)=2a{\cdot}h$.

Утв. 1. Дифференциал определен однозначно, то есть, если $f(a+h)-f(a)=A_1h+\alpha_1(h)h$
$f(a+h)-f(a)=A_2h+\alpha_2(h)h\Rightarrow A_1=A_2$.

□ Вычтем одну строчку из другой $\Rightarrow (A_1-A_2)h+(\alpha_1(h)-\alpha_2(h))h=0$, $\forall h\neq 0\Rightarrow$ поделим на $h\Rightarrow$ $A_1-A_2=\alpha_2(h)-\alpha_1(h)\xrightarrow[h\to 0]{}0$, но так как слева стоят числа, которые не зависят от $h\Rightarrow A_1=A_2$. ■

Утв. 2. Функция f дифференцируема в точке $a\Leftrightarrow\exists$ конечный $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$. Этот предел называется производной функции f в точке a и обозначается $f'(a)$ и $\dfrac{df}{dx}(a)$. Кроме того, $df(a,h)=f'(a){\cdot}h$.

□
($\Rightarrow$) $f(a+h)-f(a)=A{\cdot}h+\alpha(h){\cdot}h$ это верно $\forall h$ из некоторой проколотой окрестности 0.
Делим на $h\Rightarrow\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=A+\alpha(h)\xrightarrow[h\to 0]{}A$.

($\Leftarrow$) Пусть существует $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, обозначим его как A, тогда положим: $\alpha(h)=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-A\Rightarrow$
$\Rightarrow\lim\limits_{h\to 0}\alpha(h)=0\Rightarrow$ умножаем на $h\Rightarrow f(a+h)-f(a)=Ah+\alpha(h)h\Rightarrow df(a,h)=Ah=f'(a)h$. ■

Геометрический смысл дифференцируемости

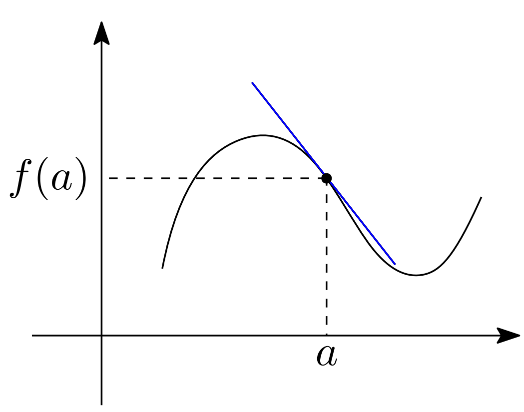

Рис. 2: График функции хорошо приближается прямой в точке a.

$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \alpha(h)h$, будем писать $x = a + h \Rightarrow f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \alpha(x-a)(x-a)$, Знаем, что $\alpha(x-a) \xrightarrow[x\to a]{} 0 \Rightarrow$ при x близких к $a \Rightarrow f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)$.

$y = f(a) + f'(a)(x-a)$ - это прямая, приближающая функцию f в окрестности точки a.

Опр: 4. Прямая $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ называется касательной к графику $y = f(x)$ в точке $(a, f(a))$.

Пример: $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$, $x \neq 0 \wedge f(x) = 0$, $x = 0$ - дифференцируемая в 0 функция:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$$

Таким образом, касательная в точке $(0,0)$ это просто $y = 0$. И может пересекать f сколь угодно много раз.

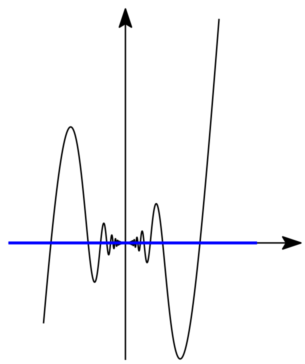

Рис. 3: Касательная функции $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$ в точке $(0,0)$ пересекает график функции.

Утв. 3. Касательная - это предельное положение секущей, то есть секущая: $y = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$. Наклон секущей $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \to f'(a)$, при $b \to a$.

□ Очевидно из определения производной. ■

Rm: 2. Когда $b \to a$, то наклон секущей стремится к наклону касательной. Приращение функции состоит из дифференциала, приближающего это приращение и погрешности этого приближения, которая ведет себя как $\alpha(h)h$.

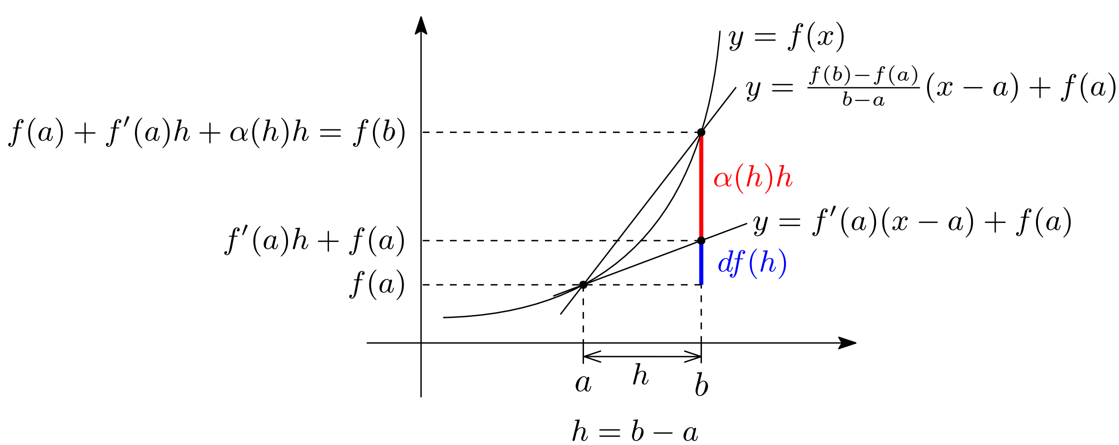

Рис. 4: Приращение функции состоит из дифференциала и погрешности приближения.