Дифференциальное исчисление

Опр: 1. Функция f, определенная в окрестности точки a, называется дифференцируемой в точке a, если $f(a+h) - f(a) = Ah + \alpha(h)h \wedge \lim\limits_{h\to 0} \alpha(h) = 0$, $\forall h$ из проколотой окрестности 0.

Опр: 2. Предел $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a) = A$ называется производной функции f в точке a.

Функция дифференцируема $\Leftrightarrow$ у функции есть производная (см. утв. прошлой лекции).

Геометрический смысл: Приращение функции хорошо приближается линейной функцией в малой окрестности конкретной точки.

Опр: 3. Дифференциал f это линейная функция $df(h)\colon h \mapsto f'(a)h$, $df(h) = f'(a)h$.

Смещая аргумент на h: $a \mapsto a+h$, значение функции тоже изменяется $f(a) \mapsto f(a+h)$. Дифференцируемость означает, что смещение $f(a+h) - f(a) \approx f'(a)h$.

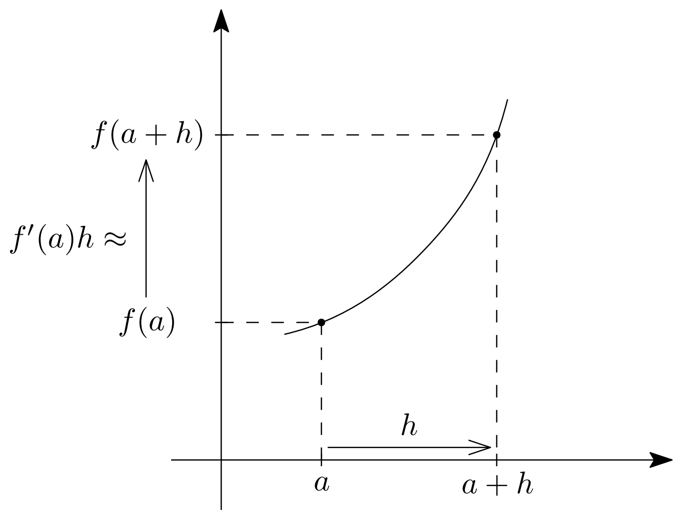

Рис. 1: Геометрический смысл дифференцируемости.

На числовой прямой h представляется как число, в пространстве это будет вектор.

Функция $f(x) = x$

$f(x) = x \Rightarrow a + h - a = 1\cdot h + 0\cdot h \Rightarrow dx(h) = h$

$df(h) = f'(a)\cdot h \wedge dx(h) = h \Rightarrow df(h) = f'(a)\cdot dx(h) \Rightarrow$ отбросим $h \Rightarrow df = f'(a)dx$ - дифференциал в точке a, но чтобы не говорить про конкретную точку пишут просто $df = f'(x)dx$.

Поделим дифференциал f на дифференциал $x \Rightarrow \dfrac{df(h)}{dx(h)} = \dfrac{f'(a)\cdot h}{h} = f'(a)$. Можно воспринимать $\dfrac{df}{dx}$ как единый символ или как отношение двух линейных функций.

Утв. 1. Если f дифференцируема в точке a, то f непрерывна в точке a.

$\square$ $f(a+h) - f(a) = Ah + \alpha(h)h \xrightarrow[h\to 0]{} 0 \Rightarrow x = a+h \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a) \Rightarrow$ непрерывна в точке a. $\blacksquare$

Rm: 1. Обратное утверждение - не верно.

Пример: $f(x) = |x|$ всюда непрерывна и не дифференцируема в точке $x = 0$: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|-|0|}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$, но этого предела нет, поскольку пределы справа и слева отличаются.

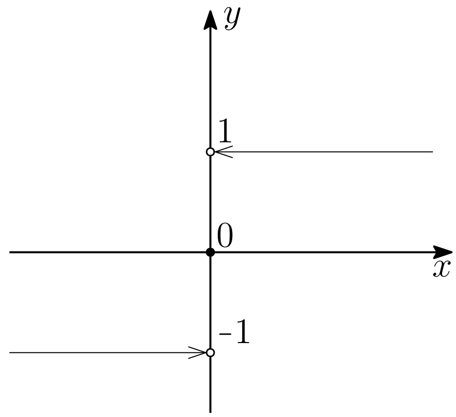

Рис. 2: Пределы справа и слева у $\frac{|x|}{x}$ различаются.

Rm: 2. У функции $f(x) = |x|$ нет дифференцируемости только в точке 0.

Теорема 1. (Вейрштрасс) Функция $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\sin(8^n x)$ - непрерывна на $\mathbb{R}$, но нигде не дифференцируема.

$\square$ При каждом фиксированном x этот ряд сходится, так как он будет ограничен рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n}$.

Непрерывность: Рассмотрим частичные суммы: $S_N(x) = \sum\limits_{n=1}^{N} 2^{-n}\sin(8^n x)$. Оценим разность

$$\Bigg|f(x) - S_N(x)\Bigg| = \Bigg|\sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n}\sin(8^n x)\Bigg| \le \sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n} = \frac{2^{-N-1}}{\frac{1}{2}} = 2^{-N}, \forall x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sup_x |f(x) - S_N(x)| \le 2^{-N} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

А посколbу S_N это сумма синусов $\Rightarrow S_N$ это непрерывные функции и S_N равномерно сходится к $f \Rightarrow$
$\Rightarrow f$ - непрерывная функция.

Недифференцируемость: Пусть x - фиксированное, рассмотрим следующее приращение: $f(x \pm 2^{-3N-1}\pi) - f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\Bigg(\sin(8^n(x \pm \frac{\pi}{2\cdot 8^N})) - \sin(8^n x)\Bigg) \Rightarrow$ как только $n > N \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin(8^n(x \pm \frac{\pi}{2\cdot 8^N})) - \sin(8^n x) = 0 \Rightarrow f(x \pm 2^{-3N-1}\pi) - f(x) = \sum\limits_{n=1}^{N} 2^{-n}\Bigg(\sin(8^n(x \pm \frac{\pi}{2\cdot 8^N})) - \sin(8^n x)\Bigg) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ поделим на приращение и получим: $\dfrac{f(x \pm 2^{-3N-1}\pi) - f(x)}{\pm 2^{-3N-1}\pi} = \dfrac{\sum\limits_{n=1}^{N} 2^{-n}\Bigg(\sin(8^n(x \pm \frac{\pi}{2\cdot 8^N})) - \sin(8^n x)\Bigg)}{\pm 2^{-3N-1}\pi}$.

Оценим последнее слагаемое

$$|D_N| = 2^{-N}\Bigg|\sin(8^N x \pm \tfrac{\pi}{2}) - \sin(8^N x)\Bigg| = 2^{-N}\cdot 2\cdot\Bigg|\sin\tfrac{\pi}{4}\Bigg|\cdot\Bigg|\cos(8^N x \pm \tfrac{\pi}{4})\Bigg| = 2^{-N}\cdot 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\Bigg|\cos(8^N x \pm \tfrac{\pi}{4})\Bigg|$$

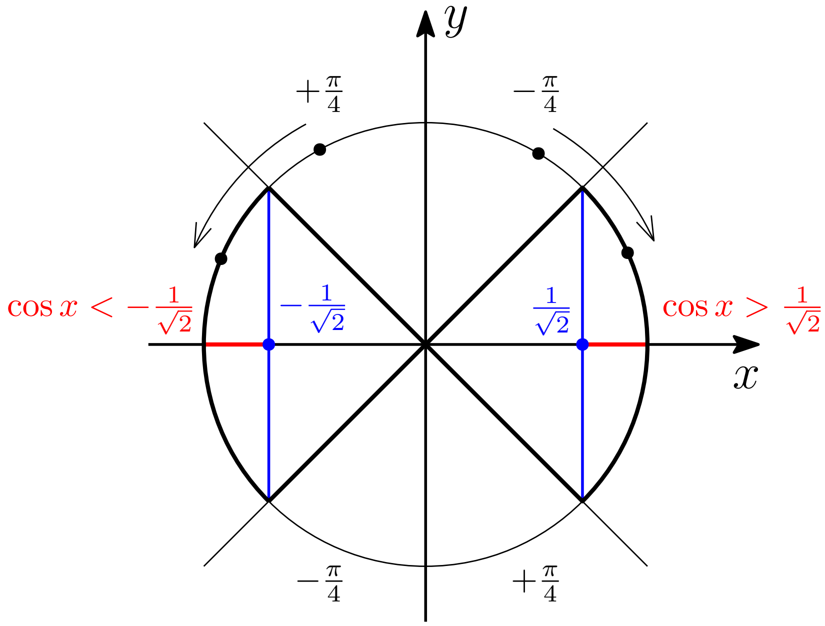

Рис. 3: Сдвиг по окружности.

Выбирая + или − можем считать (в зависимости от N), что $\left|\cos(8^N x \pm \frac{\pi}{4})\right| \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2^{-N}\left|\sin(8^N x \pm \tfrac{\pi}{2}) - \sin(8^N x)\right| \geq 2^{-N}$$

Оценим остальные слагаемые

$$\left|\sum_{n=1}^{N-1} D_n\right| = \left|\sum_{n=1}^{N-1} 2^{-n}\left(\sin(8^n(x \pm \tfrac{\pi}{2\cdot 8^N})) - \sin(8^n x)\right)\right| \leq \sum_{n=1}^{N-1} 2^{-n}2\left|\sin(\tfrac{\pi 8^n}{4\cdot 8^N})\right|\cdot 1 \underset{|\sin x| \leq |x|}{\leq} \sum_{n=1}^{N-1} 2^{-n}2\frac{\pi 8^n}{4\cdot 8^N} =$$

$$= \frac{\pi}{2\cdot 8^N}\sum_{n=1}^{N-1} 4^n = \frac{\pi}{2\cdot 8^N}\cdot\frac{4(4^{N-1}-1)}{4-1} \leq \frac{\pi 4^N}{2\cdot 8^N\cdot 3} = \frac{\pi}{6}2^{-N} < 2^{-N}$$

Таким образом, используя неравенство треугольника $|x| + |y| \geq |x - y|$ получим

$$\left|\frac{f(x \pm 2^{-3N-1}\pi) - f(x)}{\pm 2^{-3N-1}\pi}\right| \geq \frac{|D_N| - \left|\sum\limits_{n=1}^{N-1} D_n\right|}{2^{-3N-1}\pi} \geq \frac{2^{-N} - \frac{\pi}{6}2^{-N}}{2^{-3N-1}\pi} = \frac{(1-\frac{\pi}{6})}{\pi}2^{2N+1} \xrightarrow[N\to\infty]{} \infty$$

Поскольку это верно для любого x, то функция нигде не дифференцируема. ■

Rm: 3. При разных N выбирается правильный знак, то есть $\pm$ зависит от N. Это нужно чтобы отношение приращения функции к отношению аргумента стремилось к бесконечности.

Есть понятие обобщенной производной, там все функции дифференцируемы. Чтобы функция стала недифференцируемой, в текущем понимании, достаточно добавить к ней узкую недифференцируемую $\Rightarrow$ получим недифференцируемую функцию.

Правила дифференцирования

1) Если f и g дифференцируемы в точке a, то $f+g$ дифференцируема в точке a;

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$

$$d(f+g) = df + dg$$

2) **(Правило Лейбница)**: Если f и g дифф-мы в точке a, то $f{\cdot}g$ дифференцируемо в точке a;

$$(f{\cdot}g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

$$d(f{\cdot}g)(a,h) = g(a)df(a,h) + f(a)dg(a,h) \Leftrightarrow d(fg) = gdf + fdg$$

3) Если f дифференцируема в точке a и $f(a) \neq 0$, то $\dfrac{1}{f}$ дифференцируема в точке a

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{f'(a)}{f(a)^2}$$

$$d\frac{1}{f} = -\frac{1}{f(a)^2}df$$

□

1)

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)+g(x)-(f(a)+g(a))}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a} = f'(a)+g'(a)$$

для дифференциалов аналогично, из определения дифференциалов.

2)

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)g(x)+f(a)g(x)-f(a)g(x)-f(a)g(a)}{x-a} =$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}{\cdot}g(x) + \lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}{\cdot}f(x) = f'(a)g(a)+g'(a)f(a)$$

поскольку f и g дифференцируемы $\Rightarrow$ они непрерывны. Для дифференциалов аналогично, из определения дифференциалов.

3)

$$\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{f(a)}}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{-1}{f(x)f(a)}{\cdot}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\frac{1}{f(a)^2}{\cdot}f'(a)$$

поскольку $f(a) \neq 0 \Rightarrow \dfrac{1}{f}$ непрерывна в точке a.

■

Теорема 2. (Дифф. сложной функции) Пусть $f\colon \mathcal{U}(a) \to \mathcal{V}(f(a))$, $g\colon \mathcal{V}(f(a)) \to \mathbb{R}$, где $\mathcal{U}(a)$ - окрестность точки a, $\mathcal{V}(f(a))$ - окрестность точки $f(a)$ и f - дифференцируема в точке a, g - дифференцируема в точке $f(a)$. Тогда $(g\circ f)(x) = g(f(x))$ - дифференцируема в точке a и

$$\big(g(f(x))\big)'(a) = g'(f(a)){\cdot}f'(a)$$

□ **(Неверное доказательство)**

$$\lim_{x\to a}\frac{g(f(x))-g(f(a))}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{g(f(x))-g(f(a))}{f(x)-f(a)}\cdot\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Функция f - непрерывная $\Rightarrow f(x)\to f(a)$ при $x\to a \Rightarrow$

$$\lim_{x\to a}\frac{g(f(x))-g(f(a))}{f(x)-f(a)}\cdot\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=g'(f(a))\cdot f'(a)$$

это не верное доказательство, поскольку мы должны быть уверены, что внутренняя функция не будет заходить в предельную точку для предела композиций двух функций. Необходимо этот момент учитывать, если только это не комбинация двух непрерывных функций, а здесь это не так, поскольку делим на что-то что в точке a обращается в 0. Например, $f(x)$ в точках сколь угодно близких к a может принимать значения равные $f(a)$. ■

□ **(Верное доказательство)** Так как функция f дифференцируема в точке a, то

$$f(a+h)-f(a)=f'(a)h+\alpha(h)h\wedge\lim_{h\to 0}\alpha(h)=0$$

Так как g дифференцируема в точке $f(a)$, то

$$g(f(a)+t)-g(f(a))=g'(f(a))t+\beta(t)t\wedge\lim_{t\to 0}\beta(t)=0$$

Определим $\beta(0)=0\Rightarrow$ равенство теперь верно $\forall t$ из окрестности 0, а функция β - непрерывна в 0. Подставим $t=f(a+h)-f(a)$ (раньше не могли, так как раньше можно было подставлять только $t\neq 0$, а это выражение могло оказаться равным 0) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow g(f(a+h))-g(f(a))=g'(f(a))\cdot(f(a+h)-f(a))+\beta(f(a+h)-f(a))\cdot(f(a+h)-f(a))=$$

$$=g'(f(a))\cdot(f'(a)\cdot h+\alpha(h)\cdot h)+\beta(f(a+h)-f(a))\cdot(f'(a)\cdot h+\alpha(h)\cdot h)=$$
$$=g'(f(a))f'(a)\cdot h+\big(g'(f(a))\alpha(h)+\beta(f(a+h)-f(a))\cdot(f'(a)+\alpha(h))\big)\cdot h$$

Заметим, что $\lim\limits_{h\to 0}g'(f(a))\alpha(h)=0$, $\lim\limits_{h\to 0}(f'(a)+\alpha(h))=f'(a)$ и $\beta(f(a+h)-f(a))$ - композиция двух непрерывных функций $\Rightarrow$ это непрерывная функция и в точке $h=0$ она будет равна $\beta(0)=0\Rightarrow$
$\Rightarrow \lim\limits_{h\to 0}\big(g'(f(a))\alpha(h)+\beta(f(a+h)-f(a))\cdot(f'(a)+\alpha(h))\big)=0$, таким образом

$$g(f(a+h))-g(f(a))=g'(f(a))f'(a)\cdot h+\gamma(h)\cdot h\wedge\lim_{h\to 0}\gamma(h)=0$$

■