# Формула Тейлора. Ряды Тейлора

**Теорема 1.** Если $f$ $n$-раз дифференцируема в точке $a$, то

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!} + \alpha(x)\cdot(x-a)^n \wedge \lim_{x\to a} \alpha(x) = 0$$

$\square$ Рассмотрим функцию $g(x) = f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!}$, $g(a) = g'(a) = \ldots = g^{(n)}(a) = 0$. Надо доказать, что $\lim\limits_{x\to a} \frac{g(x)}{(x-a)^n} = 0$. В пределе неопределенность $\frac{0}{0}$ $\Rightarrow$ поскольку функция $f$ $n$-раз дифференцируема, то $(n-1)$ производная будет определена в некоторой окрестности точки $a$ и мы используем теорему Лопиталя до порядка $(n-1)$, а затем обычное определение производной в точке $a$:

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{g'(x)}{n(x-a)^{n-1}} = \ldots = \lim_{x\to a} \frac{g^{(n-1)}(x)}{n!(x-a)} = \lim_{x\to a} \frac{g^{(n-1)}(x) - g^{(n-1)}(a)}{n!(x-a)} = \frac{1}{n!} g^{(n)}(a) = 0$$

$\blacksquare$

**Rm: 1.** Функция $n$ раз дифференцируема в точке $a \Leftrightarrow$ в окрестности точки $a$ существуют все производные до $(n-1)$-го порядка и $(n-1)$-ая производная в точке $a$ - дифференцируема.

## $O$-символика и $o$-символика

Пусть функции $f$ и $g$ определены в проколотой окрестности точки $a$ ($\mathcal{U}'(a)$).

**Опр: 1.** $\bar{o}$**-малое**: Если $f(x) = h(x)\cdot g(x)$, $\forall x \in \mathcal{U}'(a) \wedge \lim\limits_{x\to a} h(x) = 0 \Rightarrow f(x) = \bar{o}(g(x))$, при $x \to a$.

**Опр: 2.** $\underline{O}$**-большое**: Если $f(x) = h(x)\cdot g(x)$, $\forall x \in \mathcal{U}'(a) \wedge \exists C > 0\colon |h(x)| \le C$, $\forall x \in \mathcal{U}'(a) \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x) = \underline{O}(g(x))$, при $x \to a$.

**Rm: 2.** Если хотим сказать, что функция $f$ получилась из функции $g$, умножением на ограниченную функцию $\Rightarrow$ используем $\underline{O}$-символику.

Если хотим сказать, что функция $f$ получилась из функции $g$, умножением на функцию стремящуюся к нулю $\Rightarrow$ используем $\bar{o}$-символику.

**Пример**: $f(x) = x^3$, $g(x) = x^2$, $a = 0 \Rightarrow f = \bar{o}(g)$ при $x \to 0$, так как $f(x) = x\cdot g(x)$, где $x \to 0$. Надо заметить, что $g \neq \bar{o}(f)$.

**Опр: 3.** Утверждение последней теоремы записывается так:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!} + \bar{o}(\underset{x\to a}{(x-a)^n})$$

этот вид называется формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

**Пример**: $f(x) = e^x$, $a = 0$; Производные экспоненты
$(e^x)^{(n)} = e^x \Rightarrow$

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \underset{x\to 0}{\bar{o}(x^n)}$$

**Пример**: $f(x) = \sin x$, $a = 0$; Производные синуса:
$(\sin x)^{(0)} = \sin x$, $(\sin x)' = \cos x$, $(\sin x)'' = -\sin x$, $(\sin x)^{(3)} = -\cos x$, $(\sin x)^{(4)} = \sin x \Rightarrow$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \underset{x\to 0}{\bar{o}}(x^{2n+2})$$

**Пример**: $f(x) = \cos x$, $a = 0$; Производные косинуса:
$(\cos x)^{(0)} = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(\cos x)'' = -\cos x$, $(\cos x)^{(3)} = \sin x$, $(\cos x)^{(4)} = \cos x \Rightarrow$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + \underset{x\to 0}{\bar{o}}(x^{2n+1})$$

**Пример**: $f(x) = \ln(1+x)$, $a = 0$; Производные логарифма:
$(\ln(1+x))^{(0)} = \ln(1+x)$, $(\ln(1+x))' = \dfrac{1}{1+x}$, $(\ln(1+x))^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+x)^n} \Rightarrow$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!x^k}{k!} + \underset{x\to 0}{\bar{o}}(x^n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}x^k}{k} + \underset{x\to 0}{\bar{o}}(x^n)$$

**Пример**: $f(x) = (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $a = 0$; Производные логарифма:
$((1+x)^\alpha)^{(0)} = (1+x)^\alpha$, $((1+x)^\alpha)' = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$, $((1+x)^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n} \Rightarrow$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \tfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \ldots + \tfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \underset{x\to 0}{\bar{o}}(x^n),\ \alpha \in \mathbb{R}$$

Мы пока мало, что знаем про остаточный член в формуле Тейлора. Хотелось бы выяснить его более понятный вид.

**Теорема 2. (формула Тейлора с остаточным членом в общей форме)** Пусть $f$ $n$-раз дифференцируема в каждой точке отрезка $[a,x]$. Функция $f^{(n)}$ - непрерывна на $[a,x]$ и дифференцируема на интервале $(a,x)$. Пусть функция $g$ - непрерывна на отрезке $[a,x]$ и дифференцируема на интервале $(a,x)$, причем $g' \neq 0$ на $(a,x)$. Тогда $\exists\, c \in (a,x)$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!} + r_n(x,a),\ \text{где}\ r_n(x,a) = \frac{f^{(n+1)}(c)(g(x)-g(a))(x-c)^n}{n!g'(c)}$$

**Rm: 3.** Порядок $[a,x]$ здесь не важен, то есть возможно как $[a,x]$, так и $[x,a]$.

**<u>Идея</u>**: Применить теорему Коши к функциям $g(x)$ и $F(t) = f(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)(x-t)^k}{k!}$.

$\square$ Пусть $a$, $x$ - зафиксированы, $t \in [a,x] \vee t \in (a,x)$ - меняется. $F(t) = f(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)(x-t)^k}{k!}$.

Функция $f(x)$ $n$ раз дифференцируема и её производная, вплоть до $n$-го порядка, непрерывна на отрезке $[a,x] \Rightarrow F(t)$ - непрерывна на отрезке $[a,x]$. Внутри, на интервале $(a,x)$, у функции $f$ есть производная до $(n+1)$-го порядка $\Rightarrow$ можно продифференцировать $F(t)$ по $t$. Тогда по теореме Коши:

$$\exists\, c \in (a,x)\colon \frac{F(x)-F(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{F'(c)}{g'(c)}$$

Заметим, что $F(x) = f(x) - f(x) = 0$, $F(a) = f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!}$, тогда:

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!} = -\frac{F'(c)(g(x)-g(a))}{g'(c)}$$

Найдем $F'(c)$:

$$F'(t) = -f'(t) - f''(t)(x-t) + f'(t) - \frac{f'''(t)(x-t)^2}{2!} + f''(t)(x-t) - \ldots = -\frac{f^{(n+1)}(t)(x-t)^n}{n!}$$

Подставляя полученный результат, получим требуемое:

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!} = -\frac{F'(c)(g(x)-g(a))}{g'(c)} = \frac{f^{(n+1)}(c)(x-c)^n(g(x)-g(a))}{n!g'(c)}$$

■

Получив формулу Тейлора с остаточным членом в общей форме, хочется поподставлять разные функции $g(x)$. Рассмотрим конкретные случаи функции $g(x)$.

**Следствие 1. (остаточный член в форме Коши)**

$$g(t) = x - t \Rightarrow r_n(a,x) = \frac{f^{(n+1)}(c)(x-c)^n(x-a)}{n!}$$

□ $g'(t) = -1$, $g(x) = 0$, $g(a) = x - a \Rightarrow$

$$r_n(a,x) = \frac{f^{(n+1)}(c)(x-c)^n(0-(x-a))}{-n!} = \frac{f^{(n+1)}(c)(x-c)^n(x-a)}{n!}$$

■

**Следствие 2. (остаточный член в форме Лагранжа)**

$$g(t) = (x-t)^{n+1} \Rightarrow r_n(a,x) = \frac{f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

□ $g'(t) = (n+1)(x-t)^n(-1)$, $g(x) = 0$, $g(a) = (x-a)^{n+1} \Rightarrow$

$$r_n(a,x) = \frac{f^{(n+1)}(c)(x-c)^n(0-(x-a)^{n+1})}{-n!(n+1)(x-c)^n} = \frac{f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

■

**Пример**: $f(x) = e^x$, $a = 0$, Рассмотрим остаточный член в форме Лагранжа:

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!},\ c \in (0,x) \vee c \in (x,0)$$

где $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!}$ - частичная сумма. Как себя ведет остаточное слагаемое, при $n \to \infty$?

$\forall x$, $\left|\dfrac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!}\right| \leq \dfrac{e^{|x|}|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$. Тогда $\forall x$ ряд $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!}$ сходится к $e^x$ (то есть сумма этого ряда в точности равна $e^x$).

Более того, на всяком отрезке это стремление будет равномерным:

$$x \in [-A, A] \Rightarrow \left|\frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!}\right| \leq \frac{e^A A^{n+1}}{(n+1)!} \Rightarrow \sup_{x\in[-A,A]} \left|e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right| \leq \frac{e^A A^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Таким образом $e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^k}{k!}$ и ряд сходится равномерно на всяком отрезке $[-A, A]$.

**Пример**: $f(x) = \ln(1+x)$, $a = 0$, Рассмотрим остаточный член в форме Лагранжа:

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}x^k}{k} + \frac{(-1)^{n+2}n!x^{n+1}}{(n+1)!(1+c)^{n+1}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}x^k}{k} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+c)^{n+1}},\ c \in (0,x) \vee c \in (x,0)$$

Если $x > 1$, то ряд $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^{k+1}x^k}{k}$ расходится.

Если $0 < x \leq 1$, тогда $c \in (0, x)$, $c > 0$, $(1+c) > 1 \Rightarrow \left|\dfrac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+c)^{n+1}}\right| \leq \dfrac{1}{n+1} \to 0$. Тогда $\forall x$ ряд $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^{k+1}x^k}{k}$ сходится к $\ln(1+x)$ (то есть сумма этого ряда в точности равна $\ln(1+x)$).

Если $-1 < x < 0$, тогда $c \in (x, 0)$, $c < 0$, но мы не можем сказать как соотносится $x$ и $c - (-1) = 1 + c \Rightarrow$ также не можем ничего сказать про остаточный член $\dfrac{(-1)^n}{n+1}\left(\dfrac{x}{1+c}\right)^{n+1} \Rightarrow$ рассмотрим остаточный член в форме Коши:

$$\frac{(-1)^n n!}{(1+c)^{n+1}} \frac{(x-c)^n x}{n!} = \frac{(-1)^n (x-c)^n x}{(1+c)^{n+1}} = \frac{(-1)^n (x-c)^n}{(1+c)^n} \cdot \frac{x}{(1+c)}$$

$c > x \Rightarrow 1 + c > 1 + x \Rightarrow \dfrac{x}{1+c} \leq \dfrac{|x|}{|1+x|}$, так как $c < 0 \wedge x < 0 \wedge 1 > |x| > |c| \Rightarrow \left|\dfrac{x-c}{1+c}\right| = \dfrac{|x|-|c|}{1-|c|} = 1 - \dfrac{1-|x|}{1-|c|} \leq 1 - (1 - |x|) = |x| \Rightarrow$ оценим остаточный член:

$$\left|\frac{(-1)^n (x-c)^n x}{(1+c)^{n+1}}\right| = \left|\frac{(-1)^n (x-c)^n}{(1+c)^n} \cdot \frac{x}{(1+c)}\right| \leq \frac{|x|}{|1+x|}|x|^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Таким образом $\forall x \in (-1, 1]$, $\ln(1+x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^{k+1}x^k}{k}$

**Rm: 4.** Ряд Лейбница: $\ln 2 = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k}$. Ряд сходится, но не сходится ряд из его модулей.