Опр: 1. $K \subset \mathbb{R}$ называется компактом, если $\forall \underset{\text{откр. мн-ва}}{\{\mathcal{U}_\alpha\}} : \bigcup\limits_\alpha \mathcal{U}_\alpha \supset K, \exists \mathcal{U}_{\alpha_1}, \ldots, \mathcal{U}_{\alpha_N} : K \subset \bigcup\limits_{n=1}^{N} \mathcal{U}_{\alpha_n}$.

Утв. 1. K - компакт $\Leftrightarrow$ K - ограничено и замкнуто.

Теорема 1. K - компакт $\Leftrightarrow \forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in K$, $\exists$ подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$: $x_{n_k} \to x \in K$.

□

($\Rightarrow$) Пусть K - компакт. Так как K - ограничено, то $\exists\, [a,b] \supset K$. Пусть $\{x_n\} \in K$, тогда $x_n \in [a,b]$. По теореме Больцано $\exists\, x_{n_k} \to x$. Так как K - замкнутое множество, то $x \in K$.

($\Leftarrow$) Пусть $\forall \{x_n\} \in K$, $\exists\, x_{n_k} \to x \in K$. Докажем, что K - компакт.

Если K не ограниченно сверху, то $\exists\, x_n \in K \colon x_n \to +\infty$. Из этой последовательности нельзя выбрать сходящуюся подпоследовательность (так как все ее подпоследовательности будут уходить в $+\infty$).

Если K не ограниченно снизу, то $\exists\, x_n \in K \colon x_n \to -\infty$. Из этой последовательности нельзя выбрать сходящуюся подпоследовательность (так как все ее подпоследовательности будут уходить в $-\infty$).

Следовательно K - ограниченно. Проверим, что K - замкнуто.

Пусть $x_n \in K$ и $x_n \to x$, покажем, что $x \in K$. По условию $\exists\, x_{n_k} \to x_0 \in K$, но $x_0 = x$, так как предел подпоследовательности обязательно совпадает с пределом сходящейся последовательности. ■

Множество Кантора

Построение Множества Кантора:

F_1: Отрезок $[0,1]$, делится на три равные части и выбрасывается середина $\Rightarrow F_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$.

Рис. 1: Множество $F_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$.

F_2: Каждый из отрезков F_1 делится также на три части и в каждом из них выбрасывается середина.

Рис. 2: Множество F_2.

Далее по аналогии. Таким образом, любое F_n - конечное объединение отрезков $\Rightarrow F_n$ - замкнутые. Также важно отметить, что: $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \ldots \supset F_n \supset \ldots$ - множества вложенные.

Рассмотрим длины отрезков: $|F_1| = \frac{2}{3}$, $|F_2| = \frac{4}{9}$, $|F_n| = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ = сумма длин, составляющих их отрезков. Видно, что

$$|F_n| = \left(\frac{2}{3}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Тогда сумма длин выбрасываемых интервалов стремится к 1. Но это не весь интервал.

Опр: 2. Множество Кантора $C = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$.

В множестве Кантора точно будут концы выбрасываемых интервалов, так как дополнение к этому множеству это набор интервалов, куда эти концы никогда не входят.

Рис. 3: Множество Кантора.

На самом деле, там останется континуум точек.

Утв. 2. Справедливы следующие утверждения, относительно множества Кантора:

(1) C - замкнуто и ограниченно (компакт);

(2) C - континуально;

(3) "По длине" (при $n \to \infty$) остался 0;

□

(1) Ограниченно - по условию, поскольку все производилось внутри отрезка $[0, 1]$. Множество ограниченно, поскольку любое пересечение замкнутых множеств - замкнуто ⇒ получим компакт.

(2) Будем кодировать точки, которые останутся в Канторовском множестве. Взяли отрезок, выбросили середину. Левой части сопоставили 0, правой части - 2.

Рис. 4: Кодирование множества Кантора.

Продолжаем нумеровать интервалы. Получится, что всякая точка $x \in C$ Канторовского множества записалась в виде последовательности 0 и 2: $0222\ldots$.

Рис. 5: Кодирование множества Кантора.

Такая запись однозначна, так как если две точки отличаются, то поскольку длины отрезков стремятся к 0, то рано или поздно одна точка окажется в одной трети, другая - в другой.

Для каждой такой записи существует точка Канторовского множества по теореме о вложенных отрезках.

Таким образом, точки C взаимно однозначно соответствуют последовательностям 0 и 2. Значит этих точек столько же, сколько последовательностей 0 и 2, а их столько же, сколько последовательностей 0 и 1, а значит их континуум.

(3) Длина интервалов множества Кантора: $|F_n| = \left(\frac{2}{3}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

$\blacksquare$

Упр. 1.

1) Показать $\frac{1}{4} \in C$ (разложить в троичной системе);
2) Множество предельных точек $C =$ (это совершенные множества - привести примеры);
3) Доказать $C + C = [0, 2]$

Предел функции и его свойства

Пусть $D \subset \mathbb{R}$, $f\colon D \to \mathbb{R}$ - функция. Предположим, что a - предельная точка D ($a \notin D$ или $a \in D$).

Опр: 3. (Гейне): Число b называется пределом функции f при $x \to a$ (по множеству D), если $\forall \{x_n\} \in D$, $x_n \to a \wedge x_n \neq a$ верно, что $f(x_n) \to b$.

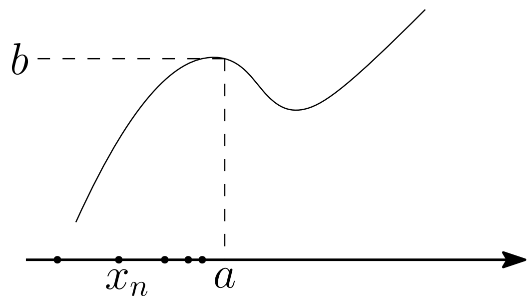


Рис. 6: Предел функции при $x \to a$.

Зачем есть требование $x_n \neq a$? Рассмотрим следующий пример.

Пример:

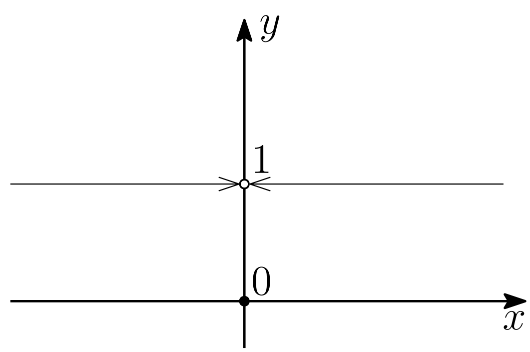


Рис. 7: Предел функции при $x \to 0$.

При $x \to 0$, функция стремится к 1. Но если не поставить $x \neq a$, то у такой функции вообще может не быть предела. Взяв, к примеру, последовательность $x_n\colon 1, 0, \frac{1}{2}, 0, \ldots$.

Требуем, чтобы a была предельной точкой, так как иначе таких последовательностей может вообще не оказаться. Если a - не предельная точка, то у неё есть окрестность в которой отличной от неё точек лишь конечный набор.

Rm: 1. Как установить расходящуюся последовательность? Можно либо взять последовательность при которой $x_n \to a$, но $f(x_n) \not\to b$, либо предъявить несколько последовательностей $x_n \to a$, $y_n \to a$ и $f(x_n) \to b \wedge f(y_n) \to c$, где $b \neq c$.

Обозначение: Пишут

$$b = \lim_{D \ni x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)$$

Rm: 2. Ничего не поменяется в определении предела функции, если в качестве a взять $\pm\infty$. Только необходимо, чтобы они оказались предельными точками.

(1) Если D не ограниченно сверху, то в качестве a можно взять $+\infty$.

(2) Если D не ограниченно снизу, то в качестве a можно взять $-\infty$.

Все свелось к последовательностям. Поэтому будем переносить свойства с пределов последовательностей на пределы функций.

Теорема 2. Количество пределов функции при $x \to a \leq 1$.

$\square$ Предположим, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$. По определению для всякой последовательности $x_n\colon x_n \to a \land x_n \neq a$ верно $f(x_n) \to b \land f(x_n) \to c$. Пределов последовательности $\leq 1 \Rightarrow b = c$. $\blacksquare$

Rm: 3. В доказательстве данной теоремы важно, что такая последовательность x_n вообще есть. Но это условие выполнено, так как a - предельная точка D, то есть всегда можно выбрать последовательность, которая к ней сходится.

Пример: У данной функции:

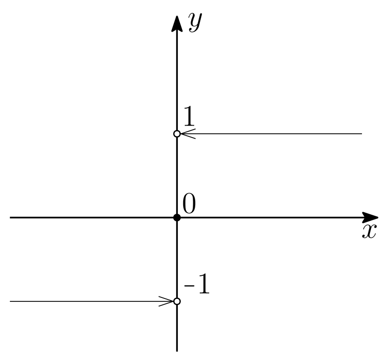


Рис. 8: Не существование предела функции $f(x)$ при $x \to 0$.

предела $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$не существует. Возьмем $x_n = \frac{1}{n}$, $f(x_n) \to 1$, а потом возьмем $x_n = -\frac{1}{n}$, $f(x_n) \to -1$. Если бы предел был, то он бы совпадал.

Теорема 3. (Переход к пределу в неравенствах): Пусть $f\colon D \to \mathbb{R}$, $g\colon D \to \mathbb{R}$ и a - предельная точка D. Предположим, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$ и $\exists \mathcal{U}'(a)\colon f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in \mathcal{U}'(a) \cap D$ (пересечение не пусто, так как a - предельная точка D), тогда $b \leq c$.

$\square$ Пусть $x_n \to a \land x_n \neq a$, $x_n \in D$. По определению предела функции: $f(x_n) \to b$, $g(x_n) \to c$. По определению предела последовательности $\exists\, N\colon \forall n > N$, $x_n \in \mathcal{U}'(a)$ и так как $x_n \in D \Rightarrow x_n \in \mathcal{U}'(a) \cap D \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x_n) \leq g(x_n)$, $\forall n > N$. По свойству предела последовательности $b \leq c$. $\blacksquare$

Точно также, как и для последовательностей пределы всегда переводят неравенства в нестрогие.

Теорема 4. (О двух полицейских): Пусть $f\colon D \to \mathbb{R}$, $g\colon D \to \mathbb{R}$, $h\colon D \to \mathbb{R}$ и a - предельная точка D. Предположим, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = b$ и $\exists \mathcal{U}'(a)\colon f(x) \leq h(x) \leq g(x)$, $\forall x \in \mathcal{U}'(a) \cap D$, тогда $\exists \lim\limits_{x\to a} h(x) = b$.

$\square$ Для всякой последовательности $x_n \in D\colon x_n \to a \land x_n \neq a$ верно, что $f(x_n) \to b$, $g(x_n) \to b$ и $\exists\, N\colon \forall n > N$, $x_n \in \mathcal{U}'(a) \cap D$ и значит $f(x_n) \leq h(x_n) \leq g(x_n)$. По теореме о двух полицейских для последовательностей $h(x_n) \to b$. $\blacksquare$

Теорема 5. (Арифметика пределов): Пусть $f\colon D \to \mathbb{R}$, $g\colon D \to \mathbb{R}$ и a - предельная точка D. Предположим, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$, тогда:

(1) $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x) + g(x)\big) = b + c$;

(2) $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x) \cdot g(x)\big) = b \cdot c$;

(3) Если $g \neq 0$ на множестве D и $c \neq 0$, то $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{b}{c}$;

$\square$

(1) Для всякой последовательности $x_n \in D\colon x_n \to a \wedge x_n \neq a$ верно, что $f(x_n) \to b$, $g(x_n) \to c$. По арифметике пределов последовательности $f(x_n) + g(x_n) \to b + c$.

(2) Для всякой последовательности $x_n \in D\colon x_n \to a \wedge x_n \neq a$ верно, что $f(x_n) \to b$, $g(x_n) \to c$. По арифметике пределов последовательности $f(x_n) \cdot g(x_n) \to b \cdot c$.

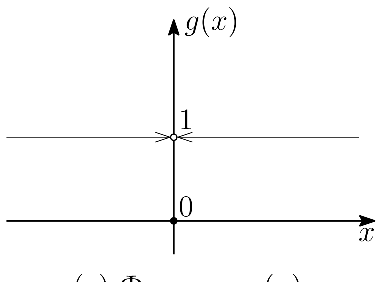
(3) Для всякой последовательности $x_n \in D\colon x_n \to a \wedge x_n \neq a$ верно, что $f(x_n) \to b$, $g(x_n) \to c$ и $g(x_n) \neq 0$, $c \neq 0$. По арифметике пределов последовательности $\dfrac{f(x_n)}{g(x_n)} \to \dfrac{b}{c}$.

$\blacksquare$

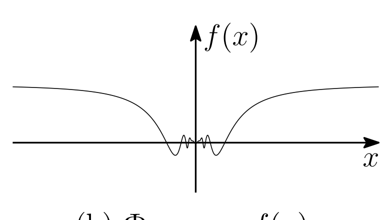
Теорема 6. (Предел сложной функции): Пусть $D \subset \mathbb{R}$ и $E \subset \mathbb{R}$, $f\colon D \to E$, $g\colon E \to \mathbb{R}$. Пусть a - предельная точка D и b - предельная точка E и $\exists \mathcal{U}'(a)\colon \forall x \in \mathcal{U}'(a) \cap D,\ f(x) \neq b$. Предположим, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ и $\lim\limits_{y\to b} g(y) = c$, тогда $\lim\limits_{x\to a} g\big(f(x)\big) = c$.

$\square$ $\forall x_n \to a \wedge x_n \neq a$, $f(x_n) \to b$, кроме того $\exists\, N\colon \forall n > N,\ f(x_n) \neq b$. Таким образом последовательность $f(x_{N+1}), \ldots, f(x_n), \ldots$ - сходится к b и никакой из её элементов $\neq b \Rightarrow$
последовательность $\Rightarrow g\big(f(x_{N+1})\big), \ldots, g\big(f(x_n)\big), \ldots \to c \Rightarrow g\big(f(x_n)\big) \to c$. $\blacksquare$

Rm: 4. Важно, что есть условие $\exists \mathcal{U}'(a)\colon \forall x \in \mathcal{U}'(a) \cap D,\ f(x) \neq b$. Рассмотрим к примеру функцию $f(x) = x \sin\frac{1}{x}$, $f(0) = 0$. $\lim\limits_{x\to 0} f(x_n) = 0$, так как $|f(x)| \leq |x|$, $x_n \to 0 \Rightarrow |x_n| \to 0 \Rightarrow f(x_n) \to 0$ и $\lim\limits_{y\to 0} g(y) = 1$, но у композиции предела нет: $\nexists \lim\limits_{x\to 0} g\big(f(x)\big)$.



(a) Функция $g(x)$.



(b) Функция $f(x)$.

Возьмем последовательность нулей функции $f(x)$: $x_n = \frac{1}{\pi n}$, $f(x_n) = 0$, $g\big(f(x_n)\big) = 0$.
Возьмем последовательность положительных значенией $f(x)$: $x_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$, $f(x_n) = 0$, $g\big(f(x_n)\big) = 1 \Rightarrow$ нет предела. Так получилось, поскольку $f(x)$ принимала предельные значения b.