Теорема 1. (Критерий Коши для рядов):
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится $\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\, N\colon \forall n, m > N,\ |S_n - S_m| = \left|\sum\limits_{k=m+1}^{n} a_k\right| < \varepsilon$.
Без доказательства, так как сходимость S_n - есть сходимость ряда.

Следствие 1. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

□ Для $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ выполняется условие Коши $\Rightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\, N\colon \forall n, m > N,\ \left|\sum\limits_{k=m+1}^{n} |a_k|\right| < \varepsilon \Rightarrow$ по неравенству треугольника $\left|\sum\limits_{k=m+1}^{n} a_k\right| \le \sum\limits_{k=m+1}^{n} |a_k| = \left|\sum\limits_{k=m+1}^{n} |a_k|\right| < \varepsilon \Rightarrow$ для $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ выполняется условие Коши. ■

Rm: 1. Обратное утверждение - не верно.

Пример: (Ряд Лейбница) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$ - знакопеременный ряд. Он сходится, проверим сходимость с помощью критерия Коши, пусть $m \le n$:

$$\left|\frac{(-1)^{m+1}}{m+1} + \frac{(-1)^{m+2}}{m+2} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n}\right| \le \left|\frac{(-1)^{m+1}}{m+1} + \frac{(-1)^{m+2}}{m+2}\right| + \left|\frac{(-1)^{m+3}}{m+3} + \frac{(-1)^{m+4}}{m+4}\right| + \ldots + \left(\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2} + \frac{1}{m+3} - \frac{1}{m+4} + \ldots \left(\pm\frac{1}{n}\right) \le \frac{1}{m+1}$$

Если нечетное число слагаемых, то $\frac{1}{n}$ идет со знаком $+$, если четное число слагаемых, то со знаком $-$. Группируем следующие слагаемые:

$$\frac{1}{m+1} \underbrace{- \frac{1}{m+2} + \frac{1}{m+3}}_{\le 0} \underbrace{- \frac{1}{m+4} + \frac{1}{m+5}}_{\le 0} + \ldots \left(\pm\frac{1}{n}\right) \le \frac{1}{m+1}$$

Если количество нечетное, то все разобьется по парам. Если количество четное, то будет $-\frac{1}{n} < 0$ и можно слагаемое не рассматривать.

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\, N, (N > \frac{1}{\varepsilon}), \forall n, m > N, \left|\frac{(-1)^{m+1}}{m+1} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n}\right| < \varepsilon$$

.

Rm: 2. $x_n = (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \ldots + (x_2 - x_1) + x_1 = a_n + a_{n-1} \ldots + a_2 + a_1$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Таким образом, все что умеем для рядов - умеем делать и для последовательностей и наоборот.

Пример: $|x_n - x_{n-1}| \le \frac{1}{2^n} \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Тогда, если $x_n = a_n + a_{n-1} \ldots + a_2 + a_1$, то $|a_n| \le \dfrac{1}{2^n} \Rightarrow$
$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ - сходится $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Топология вещественной прямой $\mathbb{R}$

Опр: 1. Окрестность точки a - это произвольный интервал, содержащий a, пишут $\mathcal{U}(a)$.

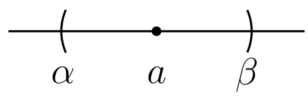

Рис. 1: Окрестность точки a.

Опр: 2. Проколотая окрестность $\mathcal{U}'(a) = \mathcal{U}(a) \setminus \{a\}$.

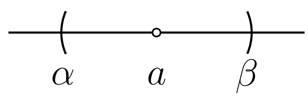

Рис. 2: Проколотая окрестность точки a.

Будем использовать обозначение $\mathcal{U}_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ и $\mathcal{U}'_\varepsilon(a) = \mathcal{U}_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$.

В любом интервале, можно найти симметричный интервал.

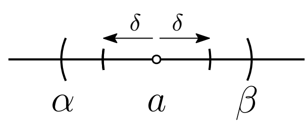

Рис. 3: Симметричная окрестность точки a.

Опр: 3. Множество $V \subset \mathbb{R}$ называется открытым, если $\forall a \in V, \exists \mathcal{U}(a) \subset V$.

Примеры: интервал, вещественная прямая, пустое множество - открытые множества.

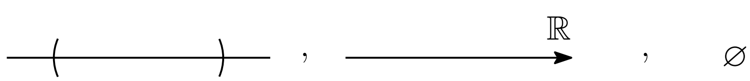

Рис. 4: Примеры открытых множеств: интервал, вещественная прямая, пустое множество.

Опр: 4. Множество $F \subset \mathbb{R}$ называется замкнутым, если $\mathbb{R} \setminus F$ - открытое.

Примеры: точка, вещественная прямая, пустое множество, отрезок - замкнутые множества.

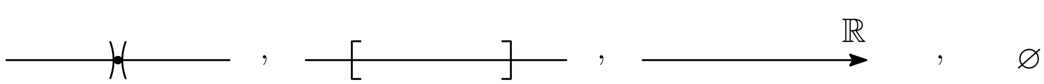

Рис. 5: Примеры замкнутых множеств: точка, отрезок, вещественная прямая, пустое множество.

$\mathbb{R}$ - замкнутое, потому что оно дополнение к пустому множеству.
$\varnothing$ - замкнутое, так как оно дополняет числовую прямую.

Пример ни замкнутого, ни открытого множества - полуинтервал.

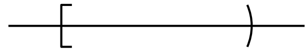

Рис. 6: Полуинтервал

Теорема 2.

1) Объединение всякого набора открытых множеств и пересечение конечного набора открытых множеств является открытым множеством.

2) Объединение конечного набора замкнутых множеств и пересечениие всякого набора замкнутых множеств является замкнутым множеством.

□

1) Пусть $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ - открытые множества. Пусть $a \in \bigcup\limits_\alpha V_\alpha \Rightarrow \exists\, \alpha\colon a \in V_\alpha$, но по условию V_α - открытое множество $\Rightarrow \exists \mathcal{U}(a)\colon \mathcal{U}(a) \subset V_\alpha \Rightarrow \mathcal{U}(a) \subset \bigcup\limits_\alpha V_\alpha \Rightarrow \bigcup\limits_\alpha V_\alpha$ - открытое множество по определению.

   $V_1, \ldots, V_N$ - открытые множества. Пусть $a \in \bigcap\limits_{n=1}^N V_n \Rightarrow a \in V_n,\ \forall n = 1, \ldots, N \Rightarrow$ $\Rightarrow\ \exists \mathcal{U}_{\varepsilon_1}(a) \subset V_1, \exists \mathcal{U}_{\varepsilon_2}(a) \subset V_2, \ldots, \exists \mathcal{U}_{\varepsilon_N}(a) \subset V_N$. Пусть $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_N\} \Rightarrow \mathcal{U}_\varepsilon(a) \subset \mathcal{U}_{\varepsilon_n}(a),\ \forall n = 1, \ldots, N$. Тогда $\mathcal{U}_\varepsilon(a) \subset V_n,\ \forall n = 1, \ldots, N \Rightarrow \mathcal{U}_\varepsilon(a) \subset \bigcap\limits_{n=1}^N V_n$. Пересечение конечного набора необходимо, чтобы можно было найти минимум из ε_n.

2) Выводится из 1) формулами Моргана: $\mathbb{R} \setminus (\bigcap\limits_\alpha F_\alpha) = \bigcup\limits_\alpha \underbrace{(\mathbb{R} \setminus F_\alpha)}_{\text{откр.}}$ - открытое, как объединение открытых множеств $\Rightarrow \bigcap\limits_\alpha F_\alpha$ - замкнутое множество.

   Выводится из 1) формулами Моргана: $\mathbb{R} \setminus (\bigcup\limits_{n=1}^N F_n) = \bigcap\limits_\alpha \underbrace{(\mathbb{R} \setminus F_\alpha)}_{\text{откр.}}$ - открытое, как конечное пересечение открытых множеств $\Rightarrow \bigcup\limits_{n=1}^N F_n$ - замкнутое множество.

■

Опр: 5. Если в некотором непустом множестве X выделен набор подмножеств τ:

(1) $X, \varnothing \in \tau$;

(2) $V_\alpha \in \tau \Rightarrow \bigcup\limits_\alpha V_\alpha \in \tau$;

(3) $V_1, \ldots, V_n \in \tau,\ \bigcap\limits_{n=1}^N \in \tau$;

то говорят, что на X задана топология τ. А элементы этого набора называют открытыми множествами.

Теорема 3. Непустое открытое множество в $\mathbb{R}$ является объединением не более, чем счетного набора попарно непересекающихся интервалов (возможно с бесконечными концами).

□ Пусть V - открыто, $V \neq \varnothing$. Пусть $a \in V$, рассмотрим множество $E^+ = \{\, x > a\colon (a, x) \subset V \,\}$. $E^+ \neq \varnothing$, так как $\exists\, (\alpha, \beta) \subset V : a \in (\alpha, \beta),\ \beta \in E^+$. Тогда

1) E^+ не ограничено сверху $\Rightarrow$ пусть $x_0 > a$, так как E^+ - не ограничено сверху, то $\exists\, x \in E^+ \colon x > x_0 \Rightarrow (a,x) \subset V \Rightarrow x_0 \in V$. Таким образом, любая точка справа от a лежит в $V \Rightarrow (a,+\infty) \subset V$.

2) E^+ ограничено сверху $\Rightarrow$ по принципу полноты Вейрштрасса $B = \sup E^+ \Rightarrow (a,B) \subset V$ и $B \notin V$. $\forall \varepsilon > 0$, $B-\varepsilon$ - не является верхней гранью E^+, то есть $\exists\, x \in E^+ \colon x > B-\varepsilon \Rightarrow B-\varepsilon \in (a,x) \subset V$, если $B-\varepsilon > a$. Все такие $B-\varepsilon > a$ элементы находятся в интервале (a,B). Если $B \in V$, то $\exists\, \varepsilon > 0 \colon (B-\varepsilon, B+\varepsilon) \subset V \Rightarrow (a, B+\varepsilon) \subset V \Rightarrow B+\varepsilon \in E^+$ - а это противоречит тому, что $B = \sup E^+$.

Получили $(a,B) \subset V$, $B = +\infty$ или $B \notin V$. Аналогично строим $(C,a) \subset V$, $C = -\infty$ или $C \notin V$.

Таким образом, для всякой точки $a \in V$ построен интервал $a \in (C,B) \subset V$ и $C, B \notin V$ или $\pm\infty$.

Пусть (C_1,B_1) и (C_2,B_2) - два таких интервала. Предположим, что они не совпадают, но пересекаются: конец одного из них принедлежит другому. Пусть $C_1 \in (C_2,B_2)$, тогда (остальные случаи - аналогично) $C_1 \in V$, но по построению $C_1 \notin V \Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow$ интервалы либо не пересекаются, либо совпадают.

Покажем, что на $\mathbb{R}$ можно расположить не более чем счетный набор попарно не пересекающихся интвервалов. Пусть есть такой набор интервалов $\{I_\alpha\} \colon I_\alpha \cap I_\beta = \varnothing$, где $\alpha \neq \beta$.

$$\forall \alpha, \exists\, r_\alpha \in \mathbb{Q} \colon r_\alpha \in I_\alpha$$

Идея: есть интервал (пусть лежит справа от нуля) длины l. По аксиоме Архимеда возьмем такое $n \colon \frac{1}{n} < l$ и начнем идти от 0 в сторону интервала с шагом $\frac{1}{n}$. По аксиоме Архимеда мы должны перепрыгнуть левую точку интервала: обязательно найдется такое m, что $\frac{m}{n} >$ левая точка интервала, но при этом $\frac{m}{n} <$ правой точки интервала, так как шаг с которым идем короче этого интервала. Получим r - искомое рациональное число. В каждом интервале есть рациональная точка.

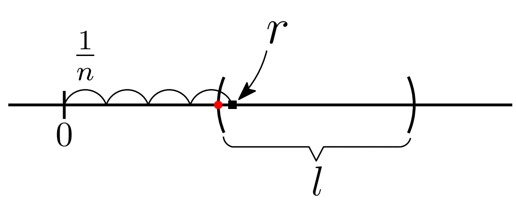

Рис. 7: Существование рационального числа.

Заметим, что если $\alpha \neq \beta \Rightarrow r_\alpha \neq r_\beta$, т.к. $I_\alpha \cap I_\beta = \varnothing$. Таким образом, есть отображение $I_\alpha \mapsto r_\alpha \in \mathbb{Q}$ - инъекция $\Rightarrow$ т.к. это инъекция в счетное множество, то $\{I_\alpha\}$ - не более, чем счетен. $\blacksquare$