Пример последовательности без предела:

$a_n = (-1)^n$ - нет предела.

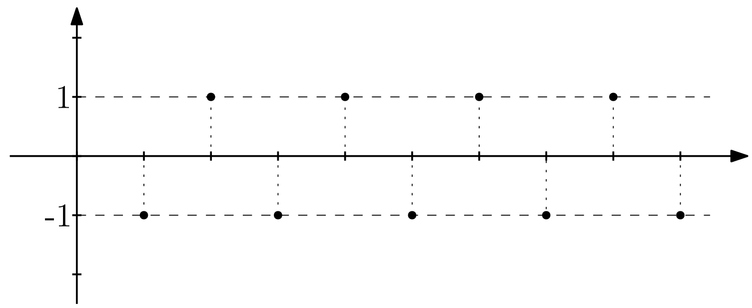

Рис. 1: Последовательность $a_n = (-1)^n$

Докажем, что нет предела: в окрестностях 1 и -1 какую бы точку не взяли 1 или -1 и окрестность от нее, какой бы далекий N не взяли, найдется точка, которая в этой последовательности не лежит. Для каждой точки прямой проверили, что нет предела. Но перебирать все точки последовательности и проверять это предел или нет - не очень удобное занятие.

Свойства пределов последовательностей

Теорема 1. Об ограниченности: Если последовательность a_n - сходится (есть такое a, которое является пределом этой последовательности), то a_n - ограничена, то есть существует отрезок, содержащий все члены последовательности.

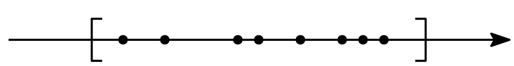

Рис. 2: Ограниченность сходящейся последовательности

Rm: 1. В качестве такого отрезка всегда можно выбрать отрезок $[-c, c]$, где $|a_n| \leq c$.

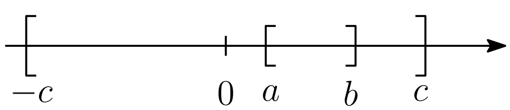

Рис. 3: Интервал, ограничивающий последовательность

Примеры

1) $\dfrac{1}{n}$ - лежит в отрезке $[0, 1]$ - ограниченная последовательность;
2) n - не лежит ни в каком отрезке, по аксиоме Архимеда - неограниченная последовательность;

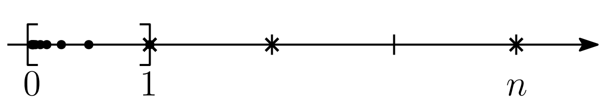

Рис. 4: Примеры последовательностей: $\frac{1}{n}$ - ограниченная, n - неограниченная

□ Пусть $a_n \to a$. Начиная с некоторого номера $n > N$ вся последовательность будет находится в интервале $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ по определению. Обозначим его как $(\alpha, \beta) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Вне этого интервала может быть только конечное число точек $a_1, a_2, \ldots, a_N$.

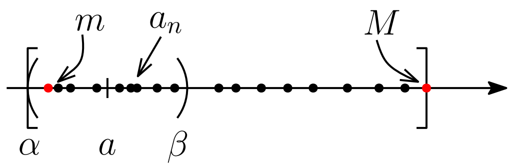

Рис. 5: Ограниченность, сходящейся последовательности

Обозначим $m = \min\{a_1, a_2, \ldots, a_N\}$, $M = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_N\}$. Возьмем следующий интервал:

$$\Big[\min\{\alpha, m\}, \max\{\beta, M\}\Big]$$

- в него должны попадать все члены последовательности. Таким образом, последовательность - ограничена. ■

Теорема 2. Об отделимости: Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $a > 0$, то $\exists\, N\colon\ \forall n > N,\ a_n > \dfrac{a}{2} > 0$ - отделены от нуля.

□ По определению предела, $\varepsilon = \dfrac{a}{2} \Rightarrow \exists\, N\colon \forall n > N,\ |a_n - a| < \dfrac{a}{2} \Rightarrow 0 < \dfrac{a}{2} < a_n < \dfrac{3a}{2}$.

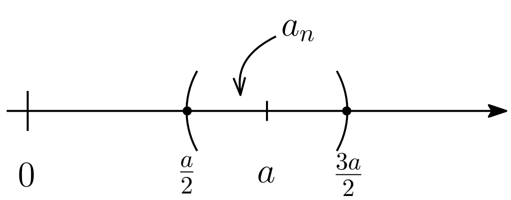

Рис. 6: Отделимость членов последовательности

Таким образом, начиная с некоторого номера N все элементы последовательности будут отделены от нуля. ■

Теорема 3. Предел в неравенствах: Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ и $\exists\, N\colon \forall n > N,\ a_n \le b_n$, то $a \le b$

□ От противного, пусть $b < a$. Тогда $\exists\, N_b\colon \forall n > N_b,\ b_n \in I_b$, $\exists\, N_a\colon \forall n > N_a,\ a_n \in I_a$.

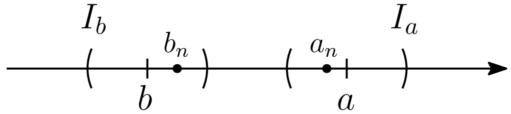

Рис. 7: Отрезки, содержащие пределы

Пусть $n > N, N_a, N_b$, тогда по условию $a_n \le b_n$, но по построению I_a, $I_b \Rightarrow a_n > b_n \Rightarrow$ противоречие. ■

Rm: 2. Если в условии будет $a_n < b_n$ в заключении ничего не поменяется, то есть $a \leq b$, пример $\{a_n\} = \dfrac{1}{n}$, $\{b_n\} = 0 \Rightarrow b_n < a_n$, но $b = a \Rightarrow b \leq a$.

Теорема 4. О двух полицейских: Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$ и $\exists\, N\colon \forall n > N$, $a_n \leq c_n \leq b_n$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.

☐ $\forall(\alpha, \beta)\colon a \in (\alpha, \beta)$, $\exists\, N_a\colon \forall n > N_a$, $a_n \in (\alpha, \beta)$, $\exists\, N_b\colon \forall n > N_b$, $b_n \in (\alpha, \beta)$.

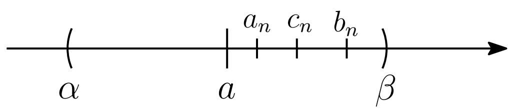

Рис. 8: Теорема о трех милиционерах

Возьмем $\tilde{N} = \max\{N, N_a, N_b\} \Rightarrow \forall n > \tilde{N}$, $\alpha < a_n \leq c_n \leq b_n < \beta \Rightarrow c_n \in (\alpha, \beta)$. Начиная с какого-то номера все c_n лежат в интервале (α, β). А это означает $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$. ■

Пример: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1$? Рассмотрим $2 = 1 + 1$, $\sqrt[n]{2} > 1$, $(1+x)^n > 1 + \underbrace{nx}_{y} \Rightarrow 1 + \dfrac{y}{n} \geq \sqrt[n]{1+y} \Rightarrow$
$\Rightarrow 1 + \dfrac{1}{n} \geq \sqrt[n]{2} > 1$. Рассмотрим последовательности:

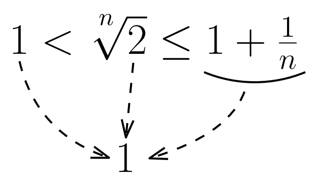

Рис. 9: Применение теоремы о трех милиционерах

$a_n = 1 \to a = 1$, $b_n = 1 + \dfrac{1}{n} \to a = 1 \Rightarrow c_n = \sqrt[n]{2} \to a = 1$.

Теорема 5. Арифметика пределов: Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$. Тогда:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$;
2) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$;
3) Если $b_n \neq 0$ и $b \neq 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$;

☐ 1) По условию $\forall \varepsilon > 0, \exists\, N_a\colon \forall n > N_a$, $|a_n - a| < \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0, \exists\, N_b\colon \forall n > N_b$, $|b_n - b| < \varepsilon$ Пусть $N = \max\{N_a, N_b\}$, тогда по неравеству треугольника:

$$\forall n > N,\ \big|(a_n + b_n) - (a + b)\big| = \big|(a_n - a) + (b_n - b)\big| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < 2\varepsilon.$$

Домножение константы на ε не имеет значения, поскольку в определении идет $\forall \varepsilon$.

2) $|a_nb_n - ab| = |a_nb_n - ab_n + ab_n - ab| \le |b_n||a_n - a| + |a||b_n - b|$. По условию $\forall\varepsilon > 0, \exists N_a\colon \forall n > N_a,\ |a_n - a| < \varepsilon,\ \forall\varepsilon > 0, \exists N_b\colon \forall n > N_b,\ |b_n - b| < \varepsilon$. Если последовательность сходится, то она ограниченна $\Rightarrow \{b_n\}$ - ограниченная последовательность $\Rightarrow \exists C\colon |b_n| \le C$. Пусть $\tilde{N} = \max\{N_a, N_b\}$, тогда
$$\forall n > \tilde{N},\ |a_nb_n - ab| \le |b_n||a_n - a| + |a||b_n - b| < C\varepsilon + |a|\varepsilon = (C + |a|)\varepsilon.$$
Константа роли не играет, поэтому утверждение верно.

3) Достаточно проверить, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$. По условию $b_n \ne 0$, пусть $b > 0$. По теореме отделимости $\exists N_0\colon \forall n > N_0,\ b_n > \frac{b}{2} > 0$. По условию $\forall\varepsilon > 0, \exists N_b\colon \forall n > N_b,\ |b_n - b| < \varepsilon$. Пусть $\tilde{N} = \max\{N_0, N_b\},\ \forall n > \tilde{N},\ \left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b_n - b|}{b_n \cdot b} \underset{b_n > \frac{b}{2}}{\le} \frac{|b_n - b|}{\frac{b^2}{2}} < \frac{2\varepsilon}{b^2} = \frac{2}{b^2}\varepsilon$

Константа роли не играет, поэтому утверждение верно.

■

Rm: 3. Почему константа не важна? По определению $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N\colon \forall n > N,\ |a_n - a| < \varepsilon$. Тогда если возьмем $\varepsilon = \tilde{\varepsilon}c$, где $c > 0$, получим: $\forall\tilde{\varepsilon} > 0, \exists N(\tilde{\varepsilon}c)\colon \forall n > N,\ |a_n - a| < \tilde{\varepsilon}c$.

Пример: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{2018} + n^{2017} + 1}{n^{2018} + n^{2015} + 2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{n} + (\frac{1}{n})^{2018}}{1 + (\frac{1}{n})^3 + (\frac{2}{n})^{2018}} = 1.$

Существование пределов

Теорема 6. (Вейрштрасса): Если последовательность $\{a_n\}$ не убывает и ограниченна сверху, то существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ и этот предел равен $\sup\{a_n\}$.

Если последовательность $\{a_n\}$ не возрастает и ограниченна снизу, то существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ и этот предел равен $\inf\{a_n\}$.

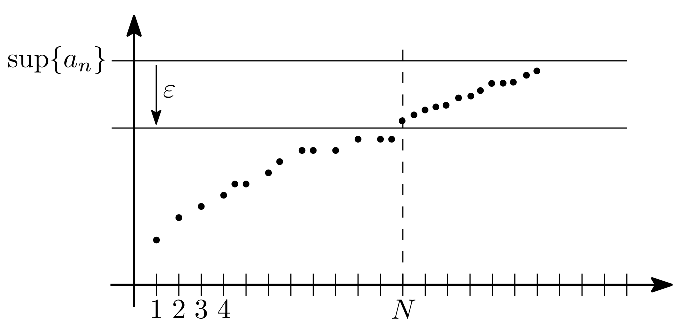

Рис. 10: Теорема Вейрштрасса

□ Так как множество значенией $\{a_n\}$ ограниченно сверху, то по принципу полноты Вейрштрасса существует $\sup\{a_n\} = A$. $\forall\varepsilon > 0,\ A - \varepsilon$ - не является верхней гранью. Следовательно $\exists N\colon a_N > A - \varepsilon$. Из-за монотонности $\{a_n\}$ видно, что $A - \varepsilon < a_N \le a_n,\ \forall n > N$. Поэтому $\forall n > N,\ A - \varepsilon < a_n \le A$ (так как A - верхняя грань) $\Rightarrow |a_n - A| < \varepsilon$.

Так как множество значенией $\{a_n\}$ ограниченно снизу, то по принципу полноты Вейрштрасса существует $\inf\{a_n\} = B$. $\forall\varepsilon > 0,\ B + \varepsilon$ - не является нижней гранью. Следовательно $\exists N\colon a_N < B + \varepsilon$.

Из-за монотонности $\{a_n\}$ видно, что $a_n \leq a_N < B + \varepsilon$, $\forall n > N$. Поэтому $\forall n > N$, $B \leq a_n < B + \varepsilon$ (так как B - нижняя грань) $\Rightarrow |a_n - B| < \varepsilon$. ■

Пример: $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$, проверим, что a_n возрастает и ограниченна сверху.

По биному Ньютона:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{1}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n\big(n-1\big)...\big(n-(k-1)\big)}{k!n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n\big(1-\frac{1}{n}\big)...\big(1-\frac{k-1}{n}\big)}{k!}$$

так как k скобочек и в каждую внесем n. n растет $\Rightarrow 1 - \frac{m}{n}$ - увеличивается .Следовательно, каждое слагаемое растет и число слагаемых тоже растет, поэтому эта последовательность растет $\Rightarrow$
$\Rightarrow \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ - возрастает.

Заметим, что каждое слагаемое меньше или равно $\dfrac{1}{k!} \Rightarrow \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \leq \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!} = 1+1+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\ldots+\dfrac{1}{n!}$.

Упр. 1. $k! \geq 2^{k-1}$ - доказать по индукции.

Следовательно

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} \leq 1 + 1 + \overbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots}^{\leq 1} < 3.$$

Доказали, что последовательность строго возрастает и ограниченна, а значит сходится.

Опр: 1. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$ - число e. $2 < e < 3$, $e = 2.718281828\ldots$.