Критерий Коши

Пусть $f\colon D \to \mathbb{R}$, a - предельная точка D.

Теорема 1. Существует конечный предел функции $f(x)$: $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\,\delta > 0\colon \forall x, y \in D$, $0 < |x-a| < \delta \wedge 0 < |y-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

$\square$
$(\Rightarrow)$ Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, по определению $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\,\delta > 0\colon \forall x \in D$, $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$. Пусть $0 < |x-a| < \delta \wedge 0 < |y-a| < \delta$, оценим разность $|f(x) - f(y)|$:

$$|f(x) - f(y)| = |f(x) - A + A - f(y)| \le |f(x) - A| + |f(y) - A| < 2\varepsilon$$

Таким образом, условие Коши проверено.

$(\Leftarrow)$ Пусть $x_n \to a \wedge x_n \ne a$. Докажем, что $f(x_n)$ - сходится:
$\forall\varepsilon > 0, \exists\,\delta > 0\colon \forall x, y \in D$, $0 < |x-a| < \delta \wedge 0 < |y-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Поскольку $x_n \to a \Rightarrow$ $\Rightarrow \exists\,N\colon \forall n > N$, $0 < |x_n - a| < \delta$. Тогда по условию Коши, если взять $n, m > N \Rightarrow |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$. Следовательно, последовательность $f(x_n)$ сходится.

Проверим, что выбор x_n не влияет на значение предела:
Пусть $y_n \to a \wedge y_n \ne a$. Составим новую последовательность $z_n\colon x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots \Rightarrow z_n \to a \wedge z_n \ne a$. Доказали, что $f(z_n)$ - сходится, $f(x_n)$ и $f(y_n)$ - подпоследовательности.

Знаем, что пределы подпоследовательностей совпадают с пределом последовательности, если эта последовательность сходится $\Rightarrow \lim\limits_{x_n\to a} f(x_n) = \lim\limits_{y_n\to a} f(y_n) = \lim\limits_{z_n\to a} f(z_n) \Rightarrow$ предел не зависит от выбора x_n. $\blacksquare$

Предел по базе

Пусть $X \ne \varnothing$.

Опр: 1. Базой называется такой непустой набор $\mathfrak{B}$ подмножеств X, что

(1) $\varnothing \notin \mathfrak{B}$;

(2) $\forall U, V \in \mathfrak{B}$, $\exists\,W \in \mathfrak{B}\colon W \subset U \cap V$;

Примеры

1) Пусть $X = \mathbb{N}$, $\mathfrak{B} = \{\,\{n\colon n > N\}\,\}$. $\{n\colon n > N_1\} \cap \{n\colon n > N_2\} = \{n\colon n > \max\{N_1, N_2\}\}$;
2) Пусть $X = \mathbb{R}$, зафиксируем точку a, $\mathfrak{B} = \{(a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\},\ \delta > 0\} = \{\mathcal{U}'_\delta(a),\ \delta > 0\}$ - проколотая окрестность точки a. $\mathcal{U}'_{\delta_1}(a) \cap \mathcal{U}'_{\delta_2}(a) = \mathcal{U}'_{\min\{\delta_1,\delta_2\}}(a)$;
3) Пусть $X = \mathbb{R}$, зафиксируем точку a, $\mathfrak{B} = \{(a-\delta, a+\delta),\ \delta > 0\}$ - легко проверяется, что это база;
4) Пусть $X \ne \varnothing$, зафиксируем точку a, все множества содержащие a - $\mathfrak{B} = \{B\colon a \in B\}$ - база.

Упр. 1. Доказать последний пример.

Пусть $f\colon X \to \mathbb{R}$.

Опр: 2. Число A называется пределом f по базе $\mathfrak{B}$, если:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists U \in \mathfrak{B}\colon \forall x \in U,\ |f(x) - A| < \varepsilon$$

Обозначение $A = \lim\limits_{\mathfrak{B}} f$.

Примеры

1) $X = \mathbb{N}$, $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f(n) = a_n$, $\mathfrak{B} = \{\,\{n\colon n > N\}\,\}$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \{n\colon n > N\} \Leftrightarrow \exists N\colon \forall n \in \{n\colon n > N\} \Leftrightarrow \forall n > N \Rightarrow |a_n - A| < \varepsilon$$

Получили в точности определение предела последовательности.

2) $X = \mathbb{R}$, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathfrak{B} = \{\mathcal{U}'_\delta(a),\ \delta > 0\}$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \mathcal{U}'_\delta(a) \Leftrightarrow 0 < |x - a| < \delta\colon \forall x \in \mathcal{U}'_\delta(a) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

Получили в точности определение предела функции по Коши.

Упр. 2. Что даст пример 3) и 4).

Утв. 1. Если $\lim\limits_{\mathfrak{B}} f = A \wedge \lim\limits_{\mathfrak{B}} f = B \Rightarrow A = B$.

$\square$ $\forall \varepsilon > 0, \exists U \in \mathfrak{B}\colon \forall x \in U \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$ и $\forall \varepsilon > 0, \exists V \in \mathfrak{B}\colon \forall x \in V \Rightarrow |f(x) - B| < \varepsilon$. По условию

$$\exists W \neq \varnothing\colon W \subset U \cap V \Rightarrow \forall x \in W \Rightarrow |A - B| \leq |A - f(x)| + |f(x) - B| < 2\varepsilon$$

Если $A \neq B$, то при $\varepsilon = \frac{A-B}{2}$ получаем противоречие: $|A - B| < |A - B|$. $\blacksquare$

Утв. 2. Пусть $\lim\limits_{\mathfrak{B}} f = A \wedge \lim\limits_{\mathfrak{B}} g = B$. Тогда $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{\mathfrak{B}}(\alpha f + \beta g) = \alpha A + \beta B$.

$\square$ $\forall \varepsilon > 0, \exists U \in \mathfrak{B}\colon \forall x \in U \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$ и $\exists V \in \mathfrak{B}\colon \forall x \in V \Rightarrow |g(x) - B| < \varepsilon$. По свойству базы $\exists W \neq \varnothing\colon W \subset U \cap V \Rightarrow \forall x \in W \Rightarrow |\alpha f(x) + \beta g(x) - (\alpha A + \beta B)| \leq |\alpha||f(x) - A| + |\beta||g(x) - B| \leq (|\alpha| + |\beta|)\varepsilon$ $\blacksquare$

Утв. 3. (Монотонность): Пусть $\lim\limits_{\mathfrak{B}} f = A \wedge \lim\limits_{\mathfrak{B}} g = B$ и $\exists U \in \mathfrak{B}\colon \forall x \in U,\ f(x) \leq g(x) \Rightarrow A \leq B$.

$\square$ $\forall \varepsilon > 0, \exists U_1 \in \mathfrak{B}\colon \forall x_1 \in U_1 \Rightarrow |f(x_1) - A| < \varepsilon \wedge \exists U_2 \in \mathfrak{B}\colon \forall x_2 \in U_2 \Rightarrow |g(x_2) - A| < \varepsilon$. По свойству базы: $\exists W \subset U_1 \cap U_2 \cap U$ (для трех множеств можно получить утверждение циклически: найти элемент базы в пересечении двух множеств, затем пересечь этот элемент с третьим множеством).

$$\forall x \in W \Rightarrow A - \varepsilon < f(x) \leq g(x) < B + \varepsilon \Rightarrow A < B + 2\varepsilon$$

Если $A > B$, то при $\varepsilon = \frac{A-B}{2} > 0$ мы получаем $A < B + 2\varepsilon = B + A - B \Rightarrow A < A \Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow A < B$. $\blacksquare$

Упр. 3. Записать с помощью определения по базе предел: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$. Подсказка: рассмотреть в качестве элементов базы $\{x\colon x > a\}$ и выписать определение предела по базе.

Упр. 4. Записать с помощью определения по базе предел: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$.

Упр. 5. Записать с помощью определения по базе предел: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$.

Непрерывность

Пусть $f\colon D \to \mathbb{R}$, $a \in D$, то есть f определена в точке a.

Опр: 3. Функция f - непрерывна в точке a по множеству D, если

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0\colon \forall x \in D,\ |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Выбор множества D имеет решающее значение, если например рассмотрим функцию Дирихле:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

она не является непрерывной в 0 (всюду разрывна). Но если рассматривать её на множестве рациональных чисел - это будет всюду непрерывная функция. Аналогично, на множестве иррациональных чисел.

Rm: 1. Если a - изолированная точка D (т.е. в некоторой окрестности, других точек кроме точки a там нет) и f - определена в a, то f - непрерывна в точке a.

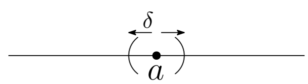

Рис. 1: a - изолированная точка.

Пример: У функции в области определения могут быть изолированные точки $f(x) = \sqrt{x^2(x^2-1)}$. Она определена на множестве $(-\infty, -1) \cup \{0\} \cup (1, +\infty) \Rightarrow 0$ - изолированная точка.

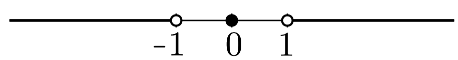

Рис. 2: Область определения функции $f(x) = \sqrt{x^2(x^2-1)}$. 0 - изолированная точка.

В изолированной точке a верно $|f(a) - f(a)| = 0 < \varepsilon$.

Теорема 2. Следующие утверждения равносильны:

(1) f - непрерывна в точке a множества D;

(2) $\forall x_n \in D$, $x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to f(a)$;

(3) a - изолированная точка или a - предельная точка D и $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$;

□

(1) ⇒ (2): $\forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0\colon \forall x \in D$, $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Пусть $x_n \to a \Rightarrow$ по определению предела $\exists\, N\colon \forall n > N$, $|x_n - a| < \delta \Rightarrow |f(x_n) - f(a)| < \varepsilon \Rightarrow f(x_n) \to f(a)$.

(2) ⇒ (3): a - изолированная точка ⇒ ничего доказывать не нужно. Если a - предельная точка, то надо показать, что $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$: Распишем определение по Гейне $\Rightarrow \forall x_n\colon x_n \to a \wedge x_n \neq a \Rightarrow$
$f(x_n) \to f(a) \Rightarrow$ (2) - более общее, чем (3) ⇒ верно.

(3) ⇒ (1): Если a - изолированная точка, то f - непрерывна в ней. Пусть a - предельная точка, тогда по определению Коши: $\forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0\colon \forall x \in D$, $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Хотим доказать, что $\forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0\colon \forall x \in D$, $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Если $x = a \Rightarrow |f(a) - f(a)| = 0 < \varepsilon$. ■