Предел функции и его свойства

Говорят, что при $x \to a$ предел $f(x) = b$ или $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, если $f\colon D \to \mathbb{R}$, a - предельная точка D, $\forall \{x_n\} \in D$, $x_n \to a$, $x \neq a$, $f(x_n) \to b$.

Опр: 1. (Коши) Пусть $f\colon D \to \mathbb{R}$, a - предельная точка D. Число b называется пределом f при $x \to a$, если

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0\colon \forall x \in D,\ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

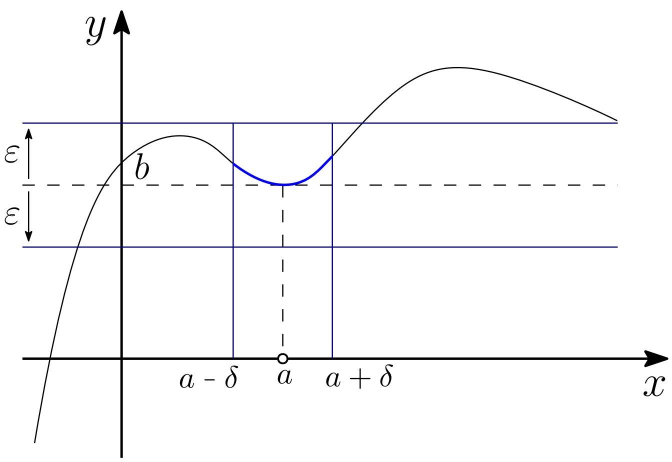

Рис. 1: Определение предела функции $f(x)$.

Rm: 1. $|x - a| > 0$ - то же самое, что и сказать $x \neq a$.

Rm: 2. Если D - не ограничено сверху, то в качестве a можно взять $+\infty$ и определение Коши переписывается так:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, M > 0\colon \forall x \in D,\ x > M \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

Rm: 3. Если D - не ограничено снизу, то в качестве a можно взять $-\infty$ и определение Коши переписывается так:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, M > 0\colon \forall x \in D,\ x < -M \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

Теорема 1. Определения Гейне и Коши - равносильны.

□ Рассмотрим случай, когда a - число. На бесконечности - аналогично
(К) $\Rightarrow$ (Г): $\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0\colon \forall x \in D,\ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$. Пусть $x_n \in D$, $x_n \to a$ и $x_n \neq a$. По определению предела последовательности $\exists\, N\colon \forall n > N,\ 0 < |x_n - a| < \delta \Rightarrow |f(x_n) - b| < \varepsilon \Rightarrow f(x_n) \to b$ и выполняется определение Гейне.

(Г) $\Rightarrow$ (К): $\forall \{x_n\} \in D$, $x_n \to a \wedge x_n \neq a$ верно, что $f(x_n) \to b$. Предположим, что определение Коши не выполняется $\Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0,\ \forall \delta > 0,\ \exists\, x \in D\colon 0 < |x - a| < \delta \wedge |f(x) - b| \geq \varepsilon$. Пусть $\delta = \dfrac{1}{n}$, тогда найдется $x_n\colon 0 < |x_n - a| < \dfrac{1}{n} \wedge |f(x_n) - b| \geq \varepsilon$. Тогда $x_n \to a \wedge x_n \neq a$, но $|f(x_n) - b| \geq \varepsilon$, то есть $f(x_n) \nrightarrow b \Rightarrow$ противоречие. ■

Теорема 2. (Ограниченность): Пусть $x \in D$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$. Тогда $\exists\, \mathcal{U}'(a) \wedge C > 0\colon |f(x)| \le C$, $\forall x \in \mathcal{U}'(a) \cap D$. Если у функции в точке есть предел, то в некоторой проколотой окрестности эта функция должна быть ограничена.

$\square$ Используем определение Коши, пусть $\varepsilon = 1 \Rightarrow \exists\, \delta > 0\colon \forall x \in D$, $\underbrace{0 < |x-a| < \delta}_{x \in \mathcal{U}'_\delta(a)} \Rightarrow |f(x) - b| < 1$.

Тогда получим следующее:

$$\forall x \in \mathcal{U}'_\delta(a) \cap D,\ |f(x)| \le |f(x) - b| + |b| < 1 + |b| = C$$

$\blacksquare$

Упр. 1. Доказать с помощью определения Гейне.

Теорема 3. (Отделимость): Пусть $x \in D$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b > 0 \Rightarrow \exists\, \mathcal{U}'(a)\colon \forall x \in \mathcal{U}'(a) \cap D,\ f(x) \ge \dfrac{b}{2} > 0$.

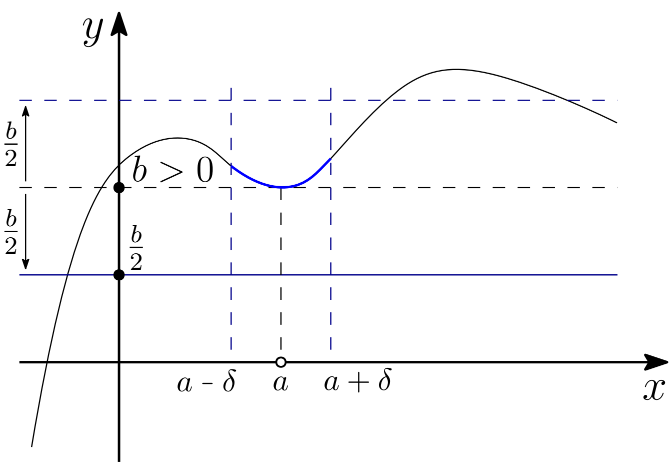

Рис. 2: Доказательство теоремы отделимости.

$\square$ Возьмем $\varepsilon = \dfrac{b}{2}$, $\exists\, \delta > 0\colon \forall x \in D,\ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \dfrac{b}{2}$. Тогда

$$\forall x \in \mathcal{U}'_\delta(a) \cap D,\ f(x) = f(x) - b + b \ge -\frac{b}{2} + b = \frac{b}{2}$$

$\blacksquare$

Упр. 2. Доказать с помощью определения Гейне.

Замечательные пределы

(I) Первый замечательный предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

Rm: 4. Множество $D = \mathbb{R}\setminus 0$. Но будем рассматривать только $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\setminus\{0\}$, так как нас интересует поведение функции около 0.

Заметим также, что $\dfrac{\sin x}{x}$ - четная функция, поэтому будем рассматривать $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.

$\square$ Заметим, что $2\sin x \le 2x$, то есть хорда не длиннее дуги. Тогда $\sin x \le x \Rightarrow \dfrac{\sin x}{x} \le 1$.

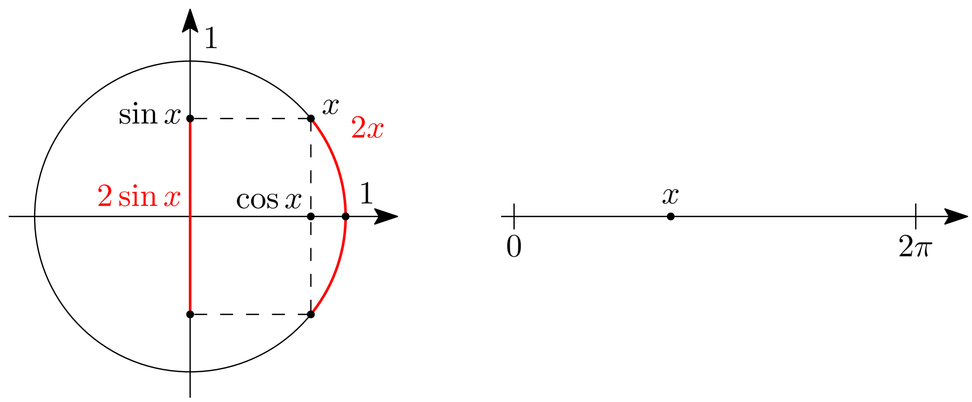

Рис. 3: Хорда не длиннее дуги.

Найдем $\tan x$ и обозначим вершины соответствующего сектора и треугольника:

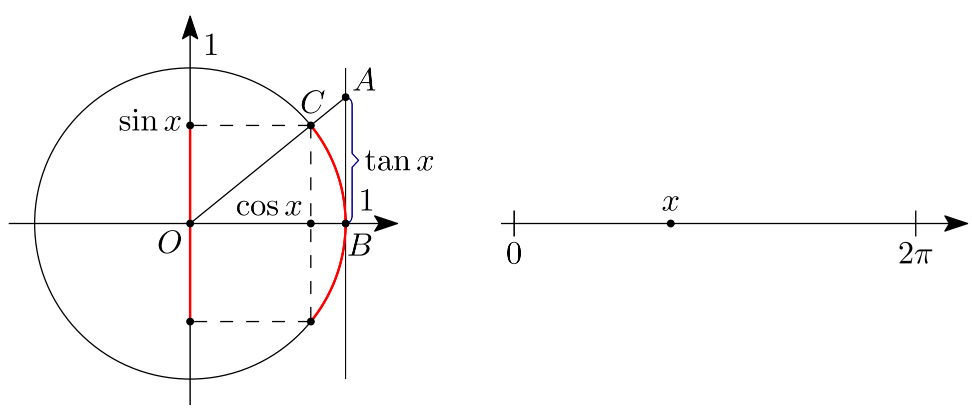

Рис. 4: Треугольник OAB содержит сектор OCB.

Сектор $OCB \subset OAB \Rightarrow S_{OCB} \le S_{OAB}$. Площадь сектора = доля сектора от всего круга на площадь круга. Доля сектора = доля дуги от длины всей окружности. Доля дуги = $\dfrac{x}{2\pi}$, площадь круга = $\pi r^2 = \pi\cdot 1^2 = \pi \Rightarrow S_{OCB} = \pi\cdot\dfrac{x}{2\pi} = \dfrac{x}{2} \le S_{OAB} = \dfrac{\tan x}{2} \Rightarrow \cos x \le \dfrac{\sin x}{x}$.

Так как $|\sin x| \leq |x|$, то по теореме о двух полицейских $\lim\limits_{x\to 0}\sin x = 0$. $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = \lim\limits_{x\to 0}\left(1 - 2\sin^2\frac{x}{2}\right) = 1$.

По теореме о двух полицейских, из того, что $\cos x \leq \dfrac{\sin x}{x} \leq 1$ в интервале $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \setminus \{0\} \Rightarrow$

$$\lim_{x\to 0}\cos x = 1 = \lim_{x\to 0} 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

■

Rm: 5. Важно заметить, что понятия площади круга, площади сектора, длины дуги в данном случае не определены строго и доказательство первого замечательного предела становится циклическим.

(II) Второй замечательный предел

$$\lim_{x\to +\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Знаем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$. Используя это знание докажем второй замечательный предел.

□ Пусть $n \leq x < n + 1 \Rightarrow$

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$
$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = e$, то

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N\colon \forall n > N,\ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} < e + \varepsilon \wedge \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n > e - \varepsilon$$

Пусть $x > N + 1$, тогда x точно заключен между n и $n + 1$: $n > N$. Получим

$$e - \varepsilon < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} < e + \varepsilon \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left|\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x - e\right| < \varepsilon$$

■

Упр. 3. Докажите, что:

(1) $\lim\limits_{x\to -\infty}(1 + \frac{1}{x})^x = e$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$;

Как узнать, есть ли у последовательности предел или нет? Аналогично пределам последовательности есть теорема Вейрштрасса и критерий Коши.

Опр: 2. Пусть $D^- = (-\infty, a) \cap D$, $D^+ = (a, +\infty) \cap D$.

Если a - предельная точка D^-, то предел функции f по множеству D^-, при $x \to a$ называется пределом слева и обозначается, через $\lim\limits_{x \to a-} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to (a-0)} f(x)$ или $f(a-0)$.

Если a - предельная точка D^+, то предел функции f по множеству D^+, при $x \to a$ называется пределом справа и обозначается, через $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to (a+0)} f(x)$ или $f(a+0)$.

Распишем с точки зрения Гейне и Коши: для $\lim\limits_{x \to a-} f(x)$

Гейне: $\forall \{x_n\} \in D$, $x_n \to a \wedge x_n < a$ верно, что $f(x_n) \to b$.

Коши: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0\colon \forall x \in D$, $a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$.

Пример: Рассмотрим следующую функцию $f(x)$:

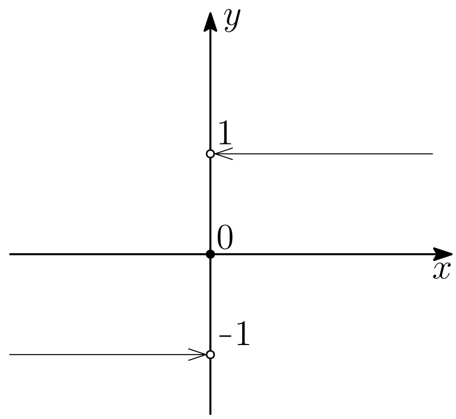

Рис. 5: Пример разных частичных пределов слева и справа.

Существуют пределы справа и слева: $\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = -1$, $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = 1$, но в точке 0 предела $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ не существует.

Теорема 4. Пусть a - предельная точка D^- и D^+. Тогда

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \Leftrightarrow \lim_{x \to a-} f(x) = b \wedge \lim_{x \to a+} f(x) = b$$

$\square$
($\Rightarrow$) По определению Коши $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0\colon \forall x \in D$, $a - \delta < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$. Тогда
$\forall x \in D$, $a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon \wedge \forall x \in D$, $a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon \Rightarrow$
$\Rightarrow \lim\limits_{x \to a-} f(x) = b \wedge \lim\limits_{x \to a+} f(x) = b$.

($\Leftarrow$) По определению Коши $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta_1 > 0\colon \forall x \in D$, $a - \delta_1 < x < a \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$,
$\exists\, \delta_2 > 0\colon \forall x \in D$, $a < x < a + \delta_2 \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$. Пусть $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, тогда как только
$a - \delta < x < a + \delta$, $x \neq a \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$. $\blacksquare$

Теорема 5. (Вейрштрасса) Пусть $f\colon D \to \mathbb{R}$ не убывает и ограничена сверху. Пусть a - предельная точка D^-. Тогда существует $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = \sup\limits_{x \in D^-} f(x)$.

Rm: 6. $D^- = (-\infty, a)$, тогда из $x \in D^- \Rightarrow x < a$.

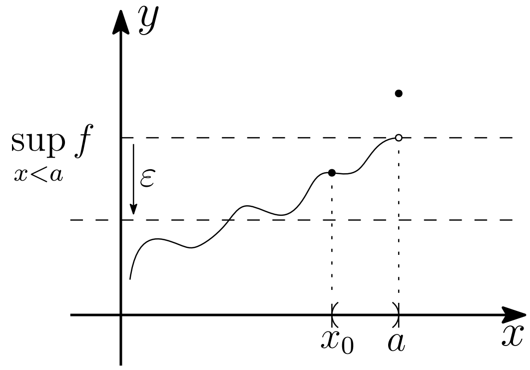

Рис. 6: Доказательство теоремы Вейрштрасса.

$\square$ $\forall \varepsilon > 0$ число $\sup\limits_{D^-} f - \varepsilon$ не является верхней гранью значений f на множестве D^-. Следовательно, $\exists\, x_0 \in D^- \colon f(x_0) > \sup\limits_{D^-} f - \varepsilon$. Из-за монотонности f, $\forall x \in (x_0, a) \cap D \Rightarrow f(x) \geq f(x_0) \Rightarrow$

$$\sup_{D^-} f - \varepsilon < f(x) \leq \sup_{D^-} f,\ \forall x \in (x_0, a) \cap D$$

Дельту можно взять, как $\delta = a - x_0$. $\blacksquare$

Rm: 7. Аналогично доказываются следующие утверждения:

(a) Не убывает и ограничена снизу. (b) Не возрастает и ограничена снизу.

1) Если f не убывает на D, ограничена снизу и a - предельная точка D^+, то $\lim\limits_{x \to a+} f = \inf\limits_{D^+} f$;

2) Если f не возрастает на D, ограничена снизу и a - предельная точка D^-, то $\lim\limits_{x \to a-} f = \inf\limits_{D^-} f$;

3) Если f не возрастает на D, ограничена сверху и a - предельная точка D^+, то $\lim\limits_{x \to a+} f = \sup\limits_{D^+} f$;

Следствие 1. Если f - монотонная функция на интервале (α, β), то в каждой точке интервала существуют пределы f слева и справа.

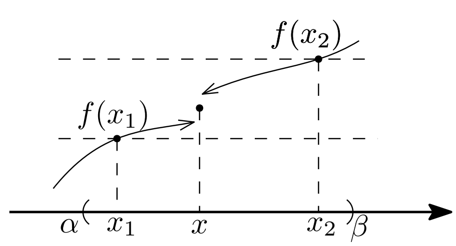

Рис. 8: Следствие теоремы Вейрштрасса.

$f(x_1)$ и $f(x_2)$ - ограничивают значения функции f снизу и сверху. По теореме Вейрштрасса есть предел слева и справа.