Отношение порядка

Опр: 1. Подмножество $R \subset X \times X$, где $X \neq \varnothing$, называется отношением частичного порядка на X, если выполняются:

(1) $(x, x) \in R, \forall x \in X \Leftrightarrow x \leq x, \forall x \in X$;

(2) Если $(x, y) \in R$ и $(y, x) \in R$, то $x = y \Leftrightarrow x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y, \forall x, y \in X$;

(3) Если $(x, y) \in R$ и $(y, z) \in Z$, то $(x, z) \in R \Leftrightarrow x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z, \forall x, y, z \in X$;

Далее вместо $(x, y) \in R$ будем писать $x \leq y$.

Подмножества

A - множество, 2^A - множество всех подмножеств A.
Пример: $A = \{1, 2\} \Rightarrow 2^A = \big\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\big\}$;

$A \leq B$, если $A \subset B$. Частичный порядок - ?
$A \subset A$, $A \subset B \wedge B \subset A \Rightarrow A = B$, $A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A = C \Rightarrow$ да, частичный порядок.
Но если множества не пересекаются, то их нельзя сравнить, поэтому частичный порядок.

Лексикографический порядок

Лексикографический порядок $=$ порядок слов в словаре $\Rightarrow$ это частичный порядок, но здесь любые два слова в словаре могут быть сравнимы $\Rightarrow$ не совсем частичный.

Опр: 2. Если $\forall x, y \in X$ можно утверждать, что $x \leq y$ или $y \leq x$, то порядок называется линейным, а множество X - линейно-упорядоченным.

$\mathbb{N} : n \leq m \Leftrightarrow n = m \vee m = n + k$, для некоторого $k \in \mathbb{N}$.
Строгие проверки можно посмотреть в книге Э. Ландау: основы анализа.

Утв. 1. (без доказательства) На $\mathbb{N}$ $\exists!$ линейный порядок, при котором $n \leq n + 1$, $n < m$, если $n \neq m$ и $n \leq m$.

Rm: 1. Обычно строгие отношения не вводят, поскольку свойство (2) может перестать работать.

Полная математическая индукция

$$\left.\begin{array}{l}\text{Пусть есть серия утверждений: } A_1, A_2, A_3, \ldots \\ \text{База: } A_1 \text{ - истина; Шаг: } (A_1, \ldots, A_n) \Rightarrow A_{n+1}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{ все } A_n \text{ - истинные.}$$

Пример

$n \geq 6 \Rightarrow$ любой квадрат можно разрезать на n квадратиков.

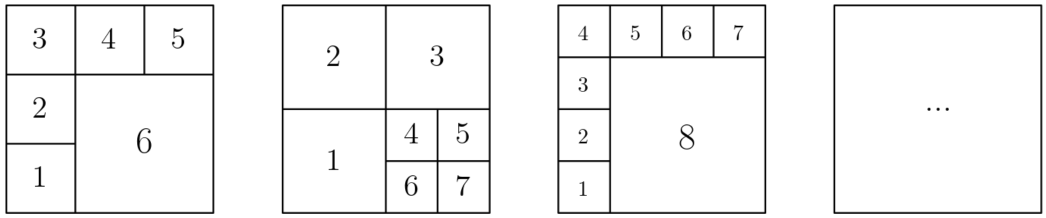


Рис. 1: Разделение квадратов на n более маленьких квадратиков

□ Пусть $\leq n$ - уже доказано $\Rightarrow$

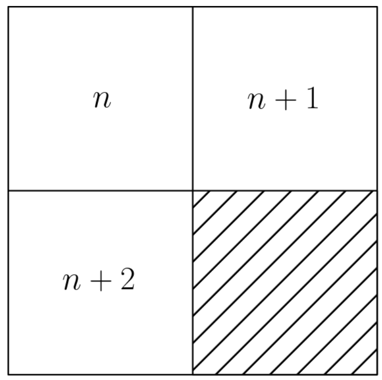


Рис. 2: Разбиение квадрата на $n+1$ часть

По рисунку: для закрашенной части как $n-2$ уже доказано $\Rightarrow$ разделили по индукции на $n+1$ часть. ■

Основная теорема арифметики

Теорема 1. Всякое натуральное число > 1 либо является простым, либо раскладывается в произведение простых, единственным образо с точностью до порядка множителей.

□ **(существование)** База: $n = 2$ - доказано.
Шаг: пусть для $\leq n$ - доказано, докажем для $n+1$: $n+1$ - простое $\Rightarrow$ ok, $n+1$ - составное $\Rightarrow n+1 = n_1 \cdot n_2, n+1 > n_1 > 1$, $n+1 > n_2 > 1 \Rightarrow n_1 \leq n$, $n_2 \leq n \Rightarrow$ по индукции, либо $n_1 \cdot n_2$ - простые, либо раскладываются на простые множители $\Rightarrow$ ok. ■

Утв. 2. Полная математическая индукция $\Leftrightarrow$ обычная математическая индукция.

□ обычная МИ $\Rightarrow$ полная МИ: очевидно, ok.
полная МИ $\Rightarrow$ обычная МИ: A_1 - истина, $(A_1, \ldots, A_n)$ - истина $\Rightarrow A_{n+1}$ - истина.
Пусть $B_n = \{\, A_1, \ldots, A_n$ - все истины $\} \Rightarrow A_1$ - истина $\Leftrightarrow B_1$ - истина.
$\big((A_1, \ldots, A_n) \Rightarrow A_{n+1}\big) \Leftrightarrow (B_n \Rightarrow B_{n+1})$, то есть к B_n применяем обычную индукцию и B_{n+1} - истина, получаем, что все B_n - истинные и все A_n - истинные $\Rightarrow$ ok. ■

Запись полной индукции на языке теории множеств

Пусть $M \subset \mathbb{N}$. Если $1 \in M$ и $\{\, k \colon k \leq n \,\} \subset M \Rightarrow n+1 \in M$, то $M = \mathbb{N}$.
Далее используем это как аксиому индукции (АИ).

Теорема 2. Пусть множество $\mathbb{N}$ удовлетворяет аксиомам Пеано (1)-(3) и на $\mathbb{N}$ задано отношение линейного порядка, причем $n \le n+1$. Тогда (АИ) равносильна существованию в каждом непустом подмножестве наименьшего элемента.

$\square$ $(\Rightarrow)$ Пусть $B \subset \mathbb{N}$, $B \neq \varnothing$, предположим противное, что в B не существует такого элемента. $M = \mathbb{N} \setminus B \Rightarrow 1 \in M$, так как если $1 \in B \Rightarrow$ наименьшее, $\{\, k \colon k \le n \,\} \subset M \Rightarrow n+1 \in M$, иначе оно - наименьшее в B, так как все остальное, что меньше в $M \Rightarrow$ по АИ $M = \mathbb{N} \Rightarrow$ поскольку $B \neq \varnothing$ получаем противоречие.

$(\Leftarrow)$ Пусть $M \subset \mathbb{N} \colon 1 \in M$, $\{\, k \colon k \le n \,\} \subset M \Rightarrow n+1 \in M$, хотим $M = \mathbb{N}$. Пусть $\mathbb{N} \setminus M \neq \varnothing$, $n \in \mathbb{N} \setminus M$, n - наименьшее. $n \neq 1$ так как $1 \in M \Rightarrow$ по АП $n = m+1$, $\{\, k \colon k \le m \,\} \subset M \Rightarrow m+1 \in M$ по условию на M и поскольку n - наименьшее, все что меньше не лежат в $\mathbb{N} \setminus M \Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow \mathbb{N} \setminus M = \varnothing \Rightarrow \mathbb{N} = M$. $\blacksquare$

Все переносится на $\mathbb{Z}$, после установки для $\mathbb{N}$, точно также они переносятся с $\mathbb{Z}$ на $\mathbb{Q}$:
$\dfrac{m}{n} \le \dfrac{p}{q} \Leftrightarrow mq \le np$; $n, q \in \mathbb{N}$, $m, p \in \mathbb{Z}$.

Операции со множествами

(1) Объединение: $A \cup B = \{\, x \mid x \in A \vee x \in B \,\}$;

(2) Пересечение: $A \cap B = \{\, x \mid x \in A \wedge x \in B \,\}$;

(3) Объединение произвольного набора множеств: $\bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha = \{\, x \mid \exists \alpha \colon x \in A_\alpha \,\}$;

(4) Пересечение произвольного набора множеств: $\bigcap\limits_{\alpha} A_\alpha = \{\, x \mid x \in A_\alpha, \forall \alpha \,\}$;

(5) Разность множеств: $A \setminus B = \{\, x \mid x \in A \wedge x \notin B \,\}$;

Множества удобно визуализировать с помощью диаграмм Эйлера.

Упр. 1. Доказать, что таких диаграмм нет для 4-ех и более множеств (кругов).

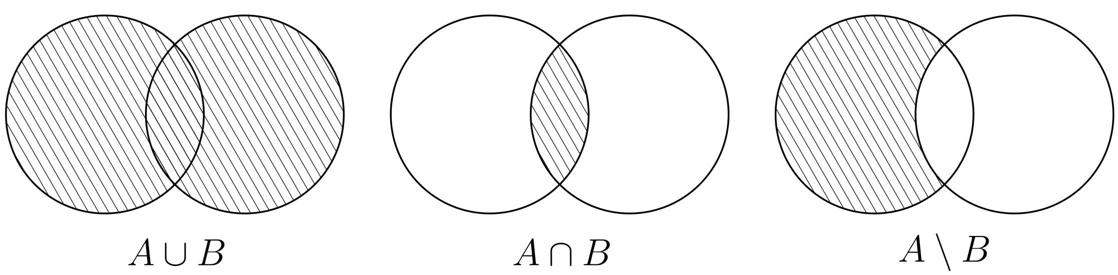


Рис. 3: Диаграммы Эйлера (круги Эйлера)

Свойства операций:

(I) $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$;

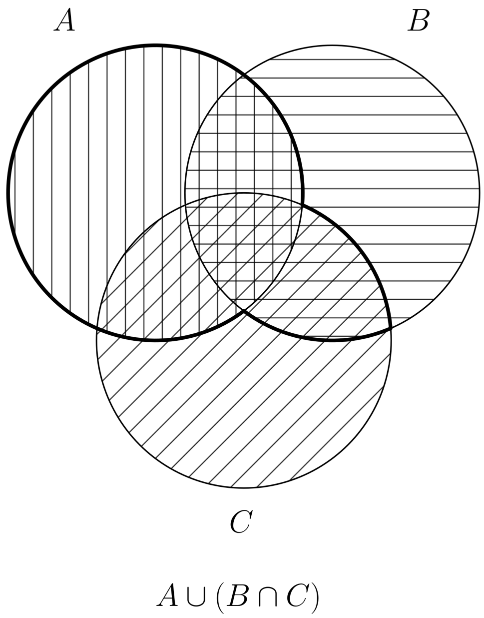
(II) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$, $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;

(III) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

(IV) Формулы Моргана: $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$, $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$;

(V) Формулы Моргана в общем случае: $C \setminus \bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha = \bigcap\limits_{\alpha} (C \setminus A_\alpha)$, $C \setminus \bigcap\limits_{\alpha} A_\alpha = \bigcup\limits_{\alpha} (C \setminus A_\alpha)$;

□ (III) (Графический способ) - используем диаграмы Эйлера, чтобы убедиться в справедливости формул.



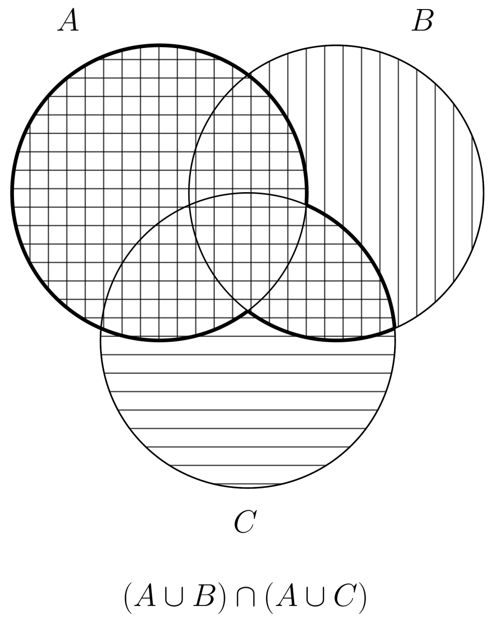


Рис. 4: Диаграммы Эйлера для свойства (III)

Формально: $x \in A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A \vee x \in (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C) \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \wedge x \in (A \cup C) \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

(V): $x \in C \setminus \bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha \Leftrightarrow x \in C \wedge x \notin \bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha \Leftrightarrow x \in C \wedge (x \notin A_\alpha, \forall \alpha) \Leftrightarrow x \in C \setminus A_\alpha, \forall \alpha \Leftrightarrow x \in \bigcap\limits_{\alpha} (C \setminus A_\alpha)$. ■