Построение функции a^x

Утв. 1. Если $f\colon \mathbb{Q}\cap[a,b]\to\mathbb{R}$ удовлетворяет неравенству $|f(x)-f(y)|\le C|x-y|$, $\forall x,y\in\mathbb{Q}\cap[a,b]$, то $\exists!\,\tilde{f}$ - непрерывная на $[a,b]$ и такая, что $\tilde{f}=f$ на $\mathbb{Q}\cap[a,b]$.

Утв. 2. Пусть $a>1$, тогда $\forall N, \exists\, C(N)\colon |a^x-a^y|\le C(N)|x-y|, \forall x,y\in\mathbb{Q}\cap[-N,N]$.

Утв. 3. Для всякого $a>1, \exists$ непрерывная на $\mathbb{R}$ функция $f(x)\colon f(x)=a^x$ при $x\in\mathbb{Q}$.

Rm: 1. Знаем что такое a^x только для $x\in\mathbb{Q}$.

□ Возьмем отрезок $[-N,N]$, по утверждениям 1 и 2, $\exists!\, f_N\colon f_N(x)$ - непрерывна на $[-N,N]$ и $f_N(x)=a^x$ при $x\in\mathbb{Q}\cap[-N,N]$. Проверим, что такие функции согласуются на общих кусочках, в силу единственности таких функций на отрезках.

Пусть $N<M\Rightarrow$ на отрезке $[-N,N]$ получилась функция f_N, на отрезке $[-M,M]$ получилась f_M. По построению $[-N,N]\subset[-M,M]\Rightarrow$ хотели бы $f_N=f_M$ на $[-N,N]$. f_M - непрерывна на $[-M,M]\Rightarrow$ непрерывна на $[-N,N]$, f_M совпадает с a^x на $[-M,M]\Rightarrow$ совпадает и на $[-N,N]$, но на $[-N,N]$ единственная непрерывная функция совпадающая с a^x это $f_N\Rightarrow f_N$ и f_M совпадают на общем отрезке из-за единственности.

<u>Искомая функция</u>: $f(x)=f_N(x)$, при $x\in[-N,N]$. Не важно какое N возьмем, важно, чтобы x лежал в этом отрезке, поскольку на общем отрезке все эти функции - совпадают. Так как на каждом из отрезков функция непрерывна, то и искомая функция будет непрерывной. На каждом из отрезков она будет совпадать с a^x на всех рациональных числах. ■

Пусть $a^x=f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Надо проверить, что это нужная нам функция:

1) $a^{x+y}=a^x{\cdot}a^y$;

2) a^x - строго возрастает и >0;

□
1) Пусть, $x,y\in\mathbb{R}$, возьмем последовательности $r_n\to x, s_n\to y$, $r_n,s_n\in\mathbb{Q}\Rightarrow$ по непрерывности $a^{r_n}\to a^x, a^{s_n}\to a^y$, а для $\mathbb{Q}$ мы знаем это свойство: $a^{r_n}\cdot a^{s_n}=a^{r_n+s_n}\to a^{x+y}, a^{r_n}\to a^x$, $a^{s_n}\to a^y\Rightarrow$ по арифметике пределов $a^x{\cdot}a^y=a^{x+y}$;

2) Пусть, $x,y\in\mathbb{R}$, $x<y$, возьмем последовательности $r_n,s_n\in\mathbb{Q}\colon r_n\to x\wedge r_n\le x$, $s_n\to y\wedge y\le s_n\Rightarrow$ $\Rightarrow$ так как $x<y\Rightarrow\exists\, r,q\in\mathbb{Q}\colon x\le r<q\le y\Rightarrow r_n\le r<q\le s_n\Rightarrow a^{r_n}\le a^r<a^q\le a^{s_n}\Rightarrow$ переходим к пределу $\Rightarrow a^x\le a^r<a^q\le a^y\Rightarrow a^x<a^y$; ■

Таким образом получили непрерывную функцию, которая в 0 равна 1, удовлетворяет свойствам $1)-2)$ и принимает сколь угодно большие положительные значения и сколь угодно маленькие положительные значения.

Область определения a^x: $\mathbb{R}$, область значений a^x: $(0,+\infty)$, возрастает и непрерывна $\Rightarrow$ по теореме об обратной функции существут $f^{-1}\colon(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ - непрерывна и возрастает.

Эту функцию называем логарифмом по основанию a от y: $f^{-1}(y)=\log_a y$.

При $0<a<1$, $a^x=\left(\dfrac{1}{a}\right)^{-x}$, $\dfrac{1}{a}>1\Rightarrow$ знаем как определять и получаем убывающую, непрерывную функцию на $\mathbb{R}$, которая также имеет обратную.

Аналогичным образом определяется логарифм: $\log_a y=-\log_{\frac{1}{a}} y$.

Упр. 1. Доказать, что:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1;$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1;$

$\square$

(1) Заменим $1+t=e^x \Rightarrow t=e^x-1$, $x\to 0\Rightarrow t\to 0$, $x=\ln(1+t)\Rightarrow$ воспользуемся пунктом (2) $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\ln(1+t)}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{\frac{\ln(1+t)}{t}};$

(2) Знаем, что $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e \Rightarrow$ по непрерывности $\ln x \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1;$

$\blacksquare$

Равномерная непрерывность и равномерная сходимость

Опр: 1. Функция f - непрерывна в точке a по множеству D, если

$$\forall\varepsilon>0, \exists\,\delta>0\colon \forall x\in D,\ |x-a|<\delta\Rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon$$

Опр: 2. Функция $f\colon D\to\mathbb{R}$ равномерно непрерывна на D, если

$$\forall\varepsilon>0, \exists\,\delta>0\colon \forall x,y\in D,\ |x-y|<\delta\Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$$

Для сравнения: функция f непрерывна на $D\Leftrightarrow \forall x\in D$, f - непрерывна в точке $x\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\forall x\in D,\ \forall\varepsilon>0}, \exists\,\delta>0\colon \forall y\in D,\ |x-y|<\delta\Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$$

В равномерной непрерывности, δ зависит только от ε, тогда как в обычной непрерывности δ зависит еще и от конкретной точки x.

Пример: $f(x)=x$ на $\mathbb{R}\Rightarrow |f(x)-f(y)|=|x-y|\Rightarrow$ возьмем $\delta<\varepsilon\Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon\Rightarrow$ функция равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$.

Пример: $f(x)=x^2$ на $\mathbb{R}\Rightarrow |f(x)-f(y)|=|x-y|\cdot|x+y|\Rightarrow$ возьмем $|x-y|<\delta$, но это не будет означать, что $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$, она может быть сколь угодно большой $\Rightarrow$ не равномерно непрерывна.

Rm: 2. Из равномерной непрерывности $\Rightarrow$ непрерывность. Но из непрерывности $\not\Rightarrow$ равномерная непрерывность.

Теорема 1. (Кантора) Если f непрерывна на компакте K, то f равномерно непрерывна на K.

Упр. 2. Верно ли, что если для множества E эта теорема выполнена, то E - компакт.

$\square$

(I) способ: (От противного) $\exists\,\varepsilon>0$, $\forall\delta>0\colon \exists\,x,y\in K$, $|x-y|<\delta\wedge|f(x)-f(y)|\geq\varepsilon$. Возьмем

$$\delta=\frac{1}{n},\ x_n,y_n\in K\colon |x_n-y_n|<\frac{1}{n}\wedge|f(x)-f(y)|\geq\varepsilon$$

Так как K - компакт, то $\exists\, x_{n_k} \to x_0 \in K$. В силу того, что $|x_{n_k} - y_{n_k}| < \frac{1}{n_k} \Rightarrow y_{n_k} \to x_0$.

Из-за непрерывности $f(x_{n_k}) \to f(x_0) \wedge f(y_{n_k}) \to f(x_0) \Rightarrow 0 < \varepsilon \leq |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \to 0 \Rightarrow$ противоречие.

(II) способ: $\forall x \in K, \exists \mathcal{U}_{\delta(x)}(x)\colon \omega(f, \mathcal{U}_{\delta(x)}(x)) < \varepsilon$, то есть $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$, $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{U}_{\delta(x)}(x)$. Это утверждение верно, так как f - непрерывна в точке $x \Rightarrow$ колебания в окрестности неё стягиваются к 0.

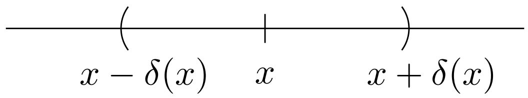

Рис. 1: Окрестность зависит от точки x.

Окрестности $\mathcal{U}_{\frac{\delta(x)}{2}}(x)$ - покрывают K, когда x пробегает всё K.

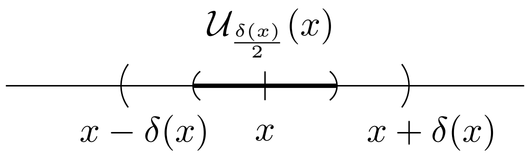

Рис. 2: Окрестность $\mathcal{U}_{\frac{\delta(x)}{2}}(x)$.

Так как K это компакт, то можно выделить конечное подпокрытие: $\exists \mathcal{U}_{\frac{\delta(x_1)}{2}}(x_1), \ldots, \mathcal{U}_{\frac{\delta(x_N)}{2}}(x_N)$ - покрытие K. Возьмем $\delta = \min\left\{\frac{\delta(x_1)}{2}, \ldots, \frac{\delta(x_N)}{2}\right\}$. Пусть $|x - y| < \delta$, так как $x, y \in K \Rightarrow \exists \mathcal{U}_{\frac{\delta(x_k)}{2}}(x_k) \ni x$

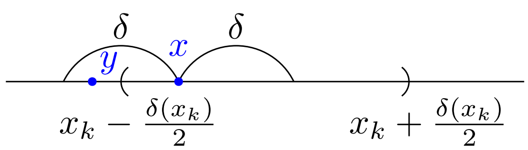

Рис. 3: $|x - y| < \delta$.

Поскольку $\delta \leq \frac{\delta(x_k)}{2}$, то получается что $x, y \in \mathcal{U}_{\delta(x_k)}(x_k)$.

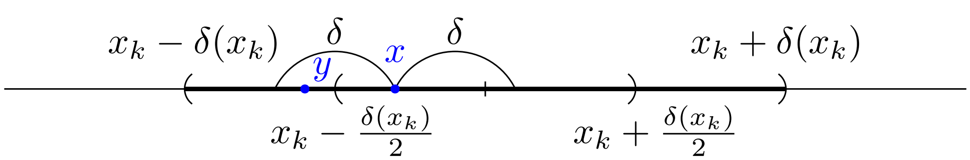

Рис. 4: $x, y \in \mathcal{U}_{\delta(x_k)}(x_k)$.

Поскольку $x, y \in \mathcal{U}_{\delta(x_k)}(x_k) \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

$\blacksquare$

Посмотрим на определение равномерной непрерывности и попробуем записать его в терминах колебания функций.

Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, рассматриваем непрерывность и равномерную непрерывность на всей $\mathbb{R}$.

Непрерывность: $\forall a \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{\delta \to 0+} \omega(f, \mathcal{U}_\delta(a)) = 0$;

Равномерная непрерывность: $\lim\limits_{\delta \to 0+} \sup\limits_a \omega(f, \mathcal{U}_\delta(a)) = 0$;

По определению равномерной непрерывности $\forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0\colon \forall x, y \in D,\ |x - y| < \delta \Rightarrow$
$\Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \Rightarrow \omega(f, \mathcal{U}_{\frac{\delta}{2}}(a)) < \varepsilon$ и это не будет зависеть от $a \Rightarrow$ это сразу для всех $a \Rightarrow$
$\Rightarrow \sup\limits_a \omega(f, \mathcal{U}_{\frac{\delta}{2}}(a)) < \varepsilon$.

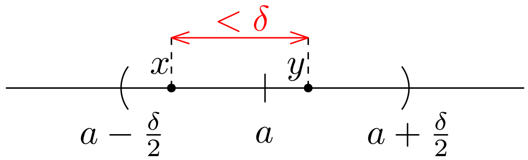

Рис. 5: Равномерная непрерывность в терминах колебания функции.

Можно и в обратную сторону, пусть $\lim\limits_{\delta \to 0+} \sup\limits_a \omega(f, \mathcal{U}_\delta(a)) = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0\colon \sup\limits_a \omega(f, \mathcal{U}_\delta(a)) < \varepsilon \Rightarrow$ возьмем две точки $x, y \in D\colon |x - y| < \delta \Rightarrow$ возьмем середину и будем смотреть колебания функции на окрестности радиуса δ. На всякой такой окрестности, колебания функции будут $< \varepsilon \Rightarrow$ равномерно непрерывна.

В равномерной непрерывности в терминах колебаний записано, что предел приближается к 0 одновременно во всех точках a.

Сходимость функций

Пусть задана последовательность функций $f_n\colon D \to \mathbb{R}$.

Опр: 3. Последовательность f_n сходится к f поточечно, если $\forall x \in D$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

Опр: 4. Последовательность f_n сходится к f равномерно на D, если $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_D |f_n(x) - f(x)| = 0$.

Поточечная сходимость: $\forall x$, $\forall \varepsilon > 0, \exists N\colon \forall n > N$, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Равномерная сходимость: $\forall \varepsilon > 0, \exists N\colon \forall n > N$, $\sup\limits_D |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \Leftrightarrow \forall x \in D$, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, то есть $\forall \varepsilon > 0, \exists N\colon \forall n > N$, $\forall x \in D$, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Пример: $D = [0, 1]$, последовательность функций f_n имеют следующий вид:

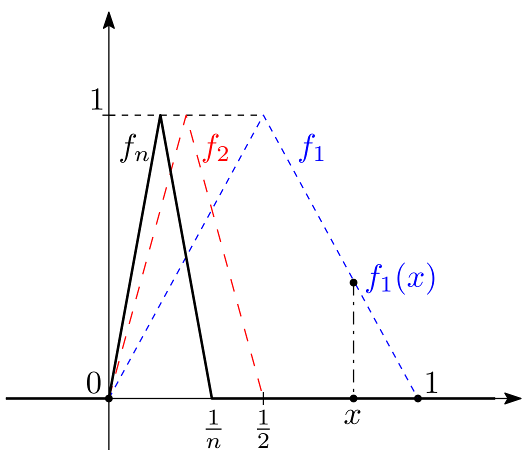

Рис. 6: Пример поточечной сходимости функций.

Рассмотрим точку x, сначала функция f_1 равна какому-то значению в этой точке, затем значения следующих функций равны 0 в этой точке $\Rightarrow f_n(x) \to 0$. Таким образом, поточечно, в каждой точке x последовательность $f_n(x)$ стремится к 0.

Будет ли эта сходимость равномерной? $\sup\limits_D |f_n(x) - 0| = 1 \nrightarrow 0$. Если бы равномерно сходилась, то можно было бы указать номер, после которого все значения были бы маленькие. А здесь такой номер указать невозможно.

Пример: $f_n(x) = \frac{\sin x}{n}$, $D = \mathbb{R}$, $f_n(x) \to 0$, $|f_n(x)| \le \frac{1}{n} \Rightarrow \sup\limits_D |f_n(x)| \le \frac{1}{n} \to 0 \Rightarrow$ есть равномерная сходимость.

Какие свойства сохраняются при приближении известными функциями неизвестной? В том числе интересуют непрерывность. При поточечной сходимости свойство непрерывности исчезнет, но не совсем, а при равномерной сходимости, непрерывность обязательно сохранится.

Пример: $D = [0, 1]$, последовательность функций f_n имеют следующий вид:

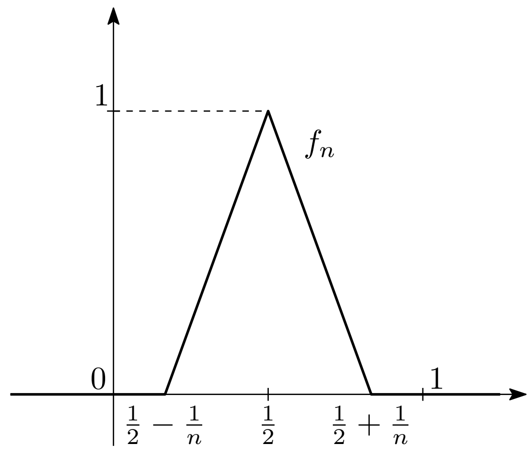

Рис. 7: Исчезновение непрерывности, при поточечной сходимости функций.

Такая последовательность сходится поточечно к функции следующего вида:
$f_n(x) \to 0$, $x \neq \frac{1}{2}$ и $f_n(x) \to 1$, $x = \frac{1}{2}$. Более того, данная сходимость не была равномерной.

Может ли последовательность непрерывных функций сходится к функции Дирихле? Нет и для этого есть следующая теорема.

Теорема 2. Пусть f_n - непрерывна на $\mathbb{R}$ и поточечно сходится к $f(x)$: $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) \to f(x)$. Тогда $\exists\, x_0 \in \mathbb{R}$: f - непрерывна в точке x_0.

Rm: 3. В каждом интервале найдется такая точка. Данное доказательство можно проделать для любого интервала, поэтому в каждом интервале будет точка непрерывности.

Идея: Доказываем от противного, если функция f не является непрерывной в точке $x_0 \Rightarrow$ она всюду разрывна $\Rightarrow$ у нее есть точки в которых колебания положительны, то есть рядом с которыми функция ведет себя как функция Дирихле. Так как f_n сходится поточечно, то в каждом интервале найдется интервал, где f_n будет ее хорошо приближать (лучше, чем колебания функции).

С одной стороны f скачет, с другой стороны не отличается от функций у которых колебания $= 0 \Rightarrow$ так не может быть, противоречие.