Теорема 1. Бэра: Пусть F - не пустое, замкнутое подмножество $\mathbb{R}$ и $F = \bigcup\limits_n F_n$ - не более, чем счетное объединение замкнутых множеств F_n, тогда $\exists\, N$ и $(\alpha, \beta)\colon F \cap (\alpha, \beta) \neq \varnothing \wedge F \cap (\alpha, \beta) \subset F_N$.

В частности, если $\mathbb{R} = \bigcup\limits_n F_n$, то хотя бы одно из F_n содержит интервал.

Пример: $[a, b]$, $a < b$ - не является счетным.

$\square$ От противного: пусть он является счетным $\Rightarrow [a, b] = \bigcup\limits_n \{x_n\}$, точка - замкнута $\Rightarrow$ получили счетное объединение замкнутых множеств. По теореме $\exists\, (\alpha, \beta)\colon [a, b] \cap (\alpha, \beta) \neq \varnothing \wedge [a, b] \cap (\alpha, \beta) \subset \{x_n\}$, но пересечение интервала с отрезком - всегда не одноточечное множество. $\blacksquare$

Пример: С помощью теоремы Бэра также можно показать, что $\mathbb{R}$ - не является счетным.

Пример: Множество иррациональных чисел нельзя представить в виде не более, чем счетного набора замкнутых множеств. Иначе, множество рациональных чисел - счетно, множество иррациональных чисел - счетно $\Rightarrow \mathbb{R}$ - объединение счетного набора замкнутых множеств (точки - замкнуты).

$\square$ **Доказательство теоремы Бэра**

От противного: Ни для какого N не найдется требуемого интервала (α, β).

I-ый шаг:

Возьмем $F \cap (\mathbb{R} \setminus F_1) \neq \varnothing$, иначе $F = F_1 \Rightarrow a \in F \Rightarrow (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap F \subset F_1$.

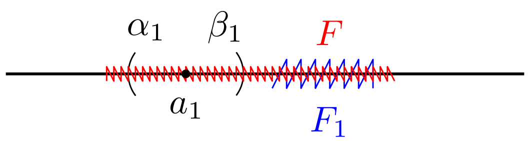

Рис. 1: Точка $a_1 \in F \cap (\mathbb{R} \setminus F_1)$.

Возьмем точку $a_1 \in F \cap (\mathbb{R} \setminus F_1)$, тогда $\exists\, (\alpha_1, \beta_1)\colon a_1 \in (\alpha_1, \beta_1) \wedge (\alpha_1, \beta_1) \subset (\mathbb{R} \setminus F_1)$. Более того, можно взять отрезок $[\alpha_1, \beta_1]$ внутри заданного интервала: ужать интервал, взять отрезок и переименовать его, как $[\alpha_1, \beta_1]$:

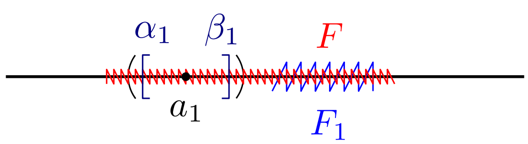

Рис. 2: Ужатие интервала до отрезка.

Можно его ужать так, что $\beta_1 - \alpha_1 < 1$. Итог I-го шага - построен отрезок $[\alpha_1, \beta_1]$:

1) $\beta_1 - \alpha_1 < 1$;
2) $(\alpha_1, \beta_1) \cap F \neq \varnothing$ (там точно есть a_1);
3) $[\alpha_1, \beta_1] \subset \mathbb{R} \setminus F_1$ (значит у этого отрезка нет точек из F_1);

<u>II-ый шаг</u>:

Посмотрим на интервал: $(\alpha_1, \beta_1) \cap F \neq \varnothing \Rightarrow (\alpha_1, \beta_1) \cap F \not\subset F_2$, иначе предположение от противного было бы не верно и требуемое $N = 2$. Тогда $\exists\, a_2 \in (\alpha_1, \beta_1) \cap F \wedge a_2 \notin F_2$.

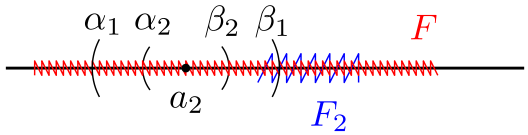

Рис. 3: Построение второго интервала на II-ом шаге.

Дополнение к F_2 - открытое множество $\Rightarrow a_2$ в него входит с некоторым интервалом ((α_1, β_1) не обязательно полностью лежит в F) $\Rightarrow$ аналогично I-му шагу, $\exists$ интервал (α_2, β_2):

1) $\beta_2 - \alpha_2 < \dfrac{1}{2}$;
2) $(\alpha_2, \beta_2) \cap F \neq \varnothing$ (там точно есть a_2);
3) $[\alpha_2, \beta_2] \subset \mathbb{R} \setminus F_2$ (значит у этого отрезка нет точек из F_2);
4) $[\alpha_2, \beta_2] \subset [\alpha_1, \beta_1]$;

<u>III-ий шаг</u>:

Рассмотрим интервал: $(\alpha_2, \beta_2) \cap F \neq \varnothing \Rightarrow (\alpha_2, \beta_2) \cap F \not\subset F_3$, иначе предположение от противного было бы не верно и требуемое $N = 3$. Тогда $\exists\, a_3 \in (\alpha_2, \beta_2) \cap F \wedge a_3 \notin F_3$.

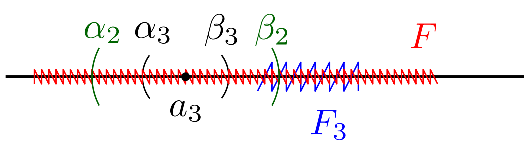

Рис. 4: Построение второго интервала на III-ем шаге.

Дополнение к F_3 - открытое множество $\Rightarrow a_3$ в него входит с некоторым интервалом ((α_2, β_2) не обязательно полностью лежит в F) $\Rightarrow$ аналогично II-му шагу, $\exists$ интервал (α_3, β_3):

1) $\beta_3 - \alpha_3 < \dfrac{1}{3}$;
2) $(\alpha_3, \beta_3) \cap F \neq \varnothing$ (там точно есть a_3);
3) $[\alpha_3, \beta_3] \subset \mathbb{R} \setminus F_3$ (значит у этого отрезка нет точек из F_3);
4) $[\alpha_3, \beta_3] \subset [\alpha_2, \beta_2] \subset [\alpha_1, \beta_1]$;

И так далее, пока не получим систему вложенных отрезков $[\alpha_1, \beta_1] \supset [\alpha_2, \beta_2] \supset \dots$ таких, что $[\alpha_n, \beta_n] \cap F \neq \varnothing$, $\beta_n - \alpha_n < \dfrac{1}{n}$ и $[\alpha_n, \beta_n] \cap F_n = \varnothing$. По теореме о вложенных отрезках $\exists\, c \in \bigcap\limits_n [\alpha_n, \beta_n]$. Очевидно, что $c \notin F_n$, $\forall n$ по построению. Если $c \notin F \Rightarrow c \in \mathbb{R} \setminus F \Rightarrow \exists\, (\alpha, \beta)\colon c \in (\alpha, \beta) \wedge (\alpha, \beta) \cap F = \varnothing$.

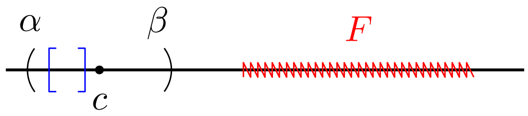

Рис. 5: Точка c, принадлежащая пересечению всех вложенных отрезков.

Отрезки стягиваются к точке c: как только $\beta_n - \alpha_n < \min\{\beta - c, c - \alpha\}$, то этот отрезок целиком будет лежать в (α, β), то есть $[\alpha_n, \beta_n] \subset (\alpha, \beta)$, что невозможно, так как в (α, β) нет точек из F.
Тогда $c \in F = \bigcup\limits_n F_n \wedge c \notin F_n$, $\forall n \Rightarrow$ противоречие. ■

Компакты

Опр: 1. Множество $K \subset \mathbb{R}$ называется компактом, если для всякого набора открытых множеств $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ такого, что $K \subset \bigcup\limits_\alpha \mathcal{U}_\alpha$, найдется конечный поднабор $\mathcal{U}_{\alpha_1}, \ldots, \mathcal{U}_{\alpha_N} \colon K \subset \bigcup\limits_{k=1}^{N} \mathcal{U}_{\alpha_k}$. То есть, из всякого покрытия K открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие.

Пример (не компакт): рассмотрим интервал $(0, 1)$ и возьмем другой интервал $(\frac{1}{n}, 1)$ очевидно, что $(0, 1) = \bigcup\limits_n (\frac{1}{n}, 1) \Rightarrow$ нет конечного набора, который покрыл бы $(0, 1) \Rightarrow$ не компакт.

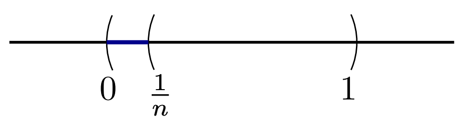

Рис. 6: Пример не компакта.

Пример (компакт): точка является компактом. $a \in \bigcup\limits_\alpha \mathcal{U}_\alpha \Leftrightarrow \exists \mathcal{U}_\alpha \colon a \in \mathcal{U}_\alpha$.

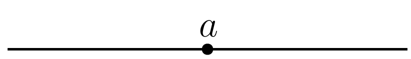

Рис. 7: Точка a - пример компакта.

Лемма 1. (Бореля-Гейне-Лебега): Отрезок - это компакт.

□ От противного: Пусть у отрезка $[a, b]$, $a < b$, $\exists$ покрытие $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ из которого нельзя выбрать конечное подпокрытие. Делим отрезок $[a, b]$ пополам и выбираем в качестве отрезка $[a_1, b_1]$ ту половину у которой нет конечного подпокрытия в покрытии $\{\mathcal{U}_\alpha\}$.
Такая половина есть, так как иначе у исходного отрезка было бы конечное подпокрытие.

Повторяем то же самое с $[a_1, b_1]$: делим $[a_1, b_1]$ пополам и выбираем в качестве отрезка $[a_2, b_2]$ ту половину у которой нет конечного подпокрытия в покрытии $\{\mathcal{U}_\alpha\}$.

И так далее, по аналогии получаем систему вложенных отрезков, которые нельзя покрыть конечным набором подпокрытий:

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots$$

причем $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0$ (длины стремятся к нулю).

По теореме о вложенных отрезках $\exists\, c\colon c \in \bigcap\limits_n [a_n, b_n]$. Кроме того, $c \in [a,b] \subset \bigcup\limits_\alpha \mathcal{U}_\alpha \Rightarrow \exists\, \alpha\colon c \in \mathcal{U}_\alpha$. Так как $\mathcal{U}_\alpha$ - открыто, то $\exists$ интервал $\mathcal{U}(c) = (s,t) \subset \mathcal{U}_\alpha$. В этом случае

$$\exists\, n\colon b_n - a_n < \min\{c-s, t-c\} \Rightarrow [a_n, b_n] \subset \mathcal{U}(c) \subset \mathcal{U}_\alpha$$

То есть отрезок $[a_n, b_n]$ покрыт одним множеством $\mathcal{U}_\alpha$ - это противоречит построению. ■

Свойства компактов

(1) Компакт - ограниченное множество, то есть лежит в некотором отрезке;

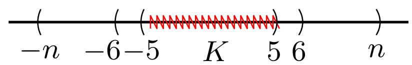

Рис. 8: Ограниченность компакта.

□ Пусть K - компакт, тогда $K \subset \bigcup\limits_n (-n, n)$ (потому, что там лежит все $\mathbb{R}$). Но по определению компакта $\exists\, n_1, \ldots, n_N\colon K \subset \bigcup\limits_{s=1}^{N} (-n_s, n_s)$. Предположим, что $C = \max\limits_{1 \le s \le N} n_s$, тогда $K \subset (-C, C)$. ■

(2) Компат - замкнутое множество;

□ Необходимо доказать, что дополнение к этому множеству - открыто. Пусть K - компакт, возьмем $a \in \mathbb{R} \setminus K$.

Как доказать, что дополнение открыто? Надо доказать, что всякая такая точка a входит в дополнение с некоторым интервалом. Возьмем отрезок $[a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}]$

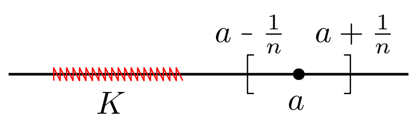

Рис. 9: Точка из дополнения компакта в отрезке: $a \in \mathbb{R} \setminus K$.

и будем брать дополнение к этому отрезку: $\mathcal{U}_n = \mathbb{R} \setminus [a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}]$.

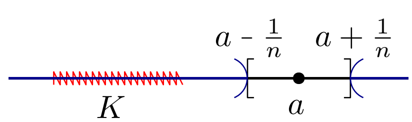

Рис. 10: Стягивание множества $\mathcal{U}_n$ к точке a.

Если взять объединение всех таких множеств, то получим всю прямую без точки a: $\bigcup\limits_n \mathcal{U}_n = \mathbb{R} \setminus \{a\}$.

Но это содержит компакт K: $K \subset \mathbb{R} \setminus \{a\} \Rightarrow$ объединение лучей (откр. множеств) содержит K.

По определению $\exists$ конечное подпокрытие $\mathcal{U}_{n_1}, \ldots, \mathcal{U}_{n_N} \Rightarrow$ возьмем $M = \max\limits_{1 \le s \le N} \{n_s\}$.

Тогда $\mathbb{R} \setminus [a - \frac{1}{M}, a + \frac{1}{M}] \supset K \Rightarrow$ взяли из этого набора лучей тот, который наиболее близко подошел к точке $a \Rightarrow (a - \frac{1}{M}, a + \frac{1}{M}) \subset \mathbb{R} \setminus K$, то есть $\mathbb{R} \setminus K$ - открыто. ■

(3) Если замкнутое множество F является подмножеством компакта K, то F - компакт;

$\square$ Пусть $F \subset \bigcup\limits_{\alpha} \mathcal{U}_\alpha \Rightarrow K \subset \bigcup\limits_{\alpha} \mathcal{U}_\alpha \cup (\mathbb{R} \setminus F)$. По определению существует конечное подпокрытие: $\mathcal{U}_{\alpha_1}, \ldots, \mathcal{U}_{\alpha_N}$ и может быть $(\mathbb{R} \setminus F)$ - они будут покрывать $K \Rightarrow$

$$F \subset \mathcal{U}_{\alpha_1} \cup \ldots \cup \mathcal{U}_{\alpha_N} \cup (\mathbb{R} \setminus F) = \mathcal{U}_{\alpha_1} \cup \ldots \cup \mathcal{U}_{\alpha_N}$$

$\Rightarrow$ у F есть конечное подпокрытие. $\blacksquare$

Следствие 1. (Критерий компактности): $K \subset \mathbb{R}$ - компакт $\Leftrightarrow K$ - ограничено и замкнуто.

$\square$
$(\Rightarrow)$ очевидно по свойствам компакта.

$(\Leftarrow)$ K - ограниченно $\Rightarrow \exists\,[a,b]\colon K \subset [a,b]$. Отрезок $[a,b]$ - компакт, K - замкнуто, тогда по свойству (3) $\Rightarrow K$ - компакт. $\blacksquare$