Исследование функций

Опр: 1. Точка a называется точкой внутреннего локального минимума (максимума) функции f, если f определена в некоторой окрестности $\mathcal{U}(a)$ точки a и $\forall x \in \mathcal{U}(a)$, $f(x) \geq f(a)$ $(f(x) \leq f(a))$.

Опр: 2. Точка a называется точкой строгого внутреннего локального минимума (максимума) функции f, если f определена в некоторой окрестности $\mathcal{U}(a)$ точки a и $\forall x \in \mathcal{U}'(a)$, $f(x) > f(a)$ $(f(x) < f(a))$.

Опр: 3. Точки локального минимума или максимума называются точками локального (внутреннего) экстремума f.

Теорема 1. (Ферма) Необходимое условия локального экстремума: Если функция f дифференцируема в точке a и точка a это точка внутреннего локального экстремума, то $f'(a) = 0$.

Утв. 1. После теоремы Лагранжа было доказано, что

(1) Если f дифференцируема на (a,b), то $f' \geq 0$ $(f' \leq 0) \Leftrightarrow f$ не убывает (не возрастает) на (a,b);

(2) Если f дифференцируема на (a,b), то $f' > 0$ $(f' < 0) \Leftrightarrow f$ возрастает (убывает) на (a,b);

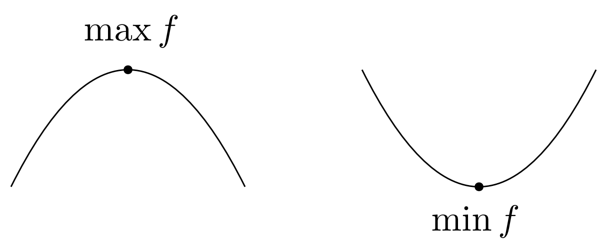


Рис. 1: Внутренние локальные точки экстремума.

$\square$ Докажем для случая, когда функция неубывающая, для невозрастающей - аналогично, для строгой монотонности - аналогично.
$(\Leftarrow)$ Пусть функция f - не убывает, тогда

$$\forall x_1, x_2 \in (a,b),\ \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \geq 0 \Rightarrow \lim_{x_1 \to x_2} \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = f'(x_2) \geq 0$$

$(\Rightarrow)$ По теореме Лагранжа

$$\forall x_1, x_2 \in (a,b),\ x_1 > x_2, \exists\, c \in (x_2, x_1) \colon f(x_1) - f(x_2) = f'(c)(x_1 - x_2) \geq 0 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

Таким образом при $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \Rightarrow$ функция f неубывающая. $\blacksquare$

Утв. 2. Пусть f непрерывна в $\mathcal{U}(a)$ и дифференцируема в $\mathcal{U}'(a)$, тогда:

1) Если $\forall x \in \mathcal{U}'(a) \colon f'(x) \geq 0,\ x < a \wedge f'(x) \leq 0,\ x > a$, то a - точка локального максимума;

2) Если $\forall x \in \mathcal{U}'(a) \colon f'(x) \leq 0,\ x < a \wedge f'(x) \geq 0,\ x > a$, то a - точка локального минимума;

3) Если $\forall x \in \mathcal{U}'(a) \colon f'(x) > 0,\ x < a \wedge f'(x) < 0,\ x > a$, то a - точка строгого локального максимума;

4) Если $\forall x \in \mathcal{U}'(a) \colon f'(x) < 0,\ x < a \wedge f'(x) > 0,\ x > a$, то a - точка строгого локального минимума;

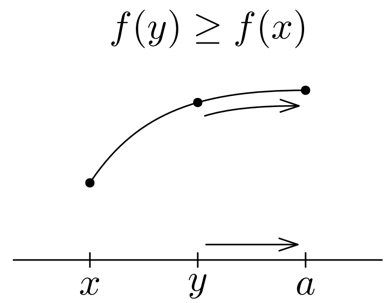


Рис. 2: Идея доказательства утверждения: $\lim\limits_{y\to a-} f(y) = f(a) \geq f(x)$.

□ Рассмотрим один случай, остальные доказываются по аналогии:

Пусть $\forall x \in \mathcal{U}'(a)\colon f'(x) \geq 0,\ x < a \wedge f'(x) \leq 0,\ x > a$, тогда, по предыдущему утверждению

$$\lim_{y\to a-} f(y) = f(a) \geq f(x), \forall x \in \mathcal{U}'(a)\colon x < a \wedge \lim_{y\to a+} f(y) = f(a) \leq f(x), \forall x \in \mathcal{U}'(a)\colon x > a$$

По непрерывности f на $\mathcal{U}(a) \Rightarrow f$ непрерывна в точке $a \Rightarrow a$ - точка локального максимума. ■

Теорема 2. Достаточное условие локального экстремума в терминах производных высокого порядка: Пусть f n-раз $(n \geq 2)$ дифференцируема в точке a (f определена в $\mathcal{U}(a)$):

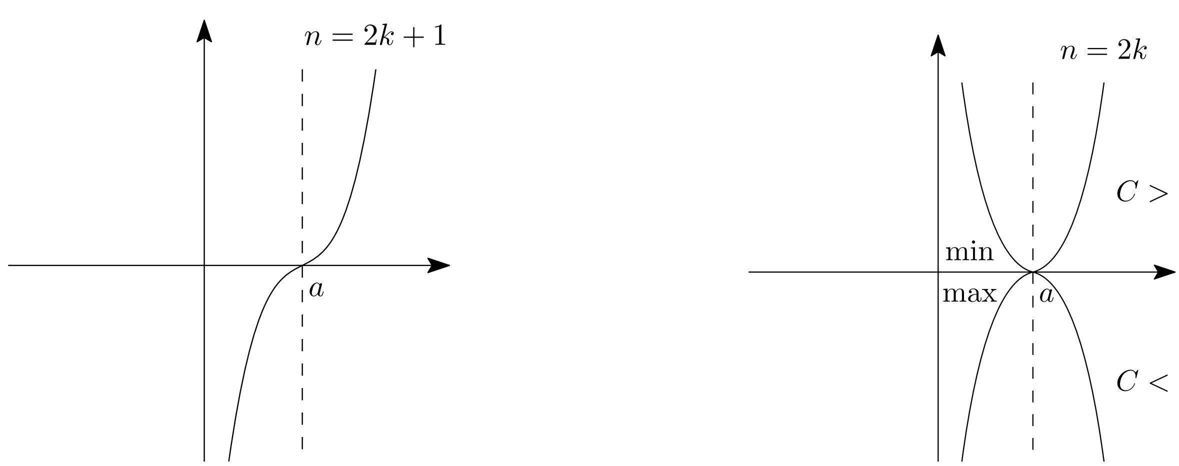
$$f'(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0 \wedge f^{(n)}(a) \neq 0$$

Если $n = 2k+1$, то a - не является точкой локального экстремума.

Если $n = 2k$, то

1) $f^{(n)}(a) > 0 \Rightarrow a$ - точка строгого локального минимума;
2) $f^{(n)}(a) < 0 \Rightarrow a$ - точка строгого локального максимума;

Идея: равенство нулю производных в точке a означает, что разложение Тейлора в точке a начнется со степени $n \Rightarrow f$ рядом с точкой a выглядит как функция $C\cdot(x-a)^n$, где $C = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$.



(a) $n = 2k+1$: нет экстремума. (b) $n = 2k$: (1) $C > 0$ минимум, (2) $C < 0$ максимум.

Рис. 3: Общий вид функций $C\cdot(x-a)^n$ и их экстремумы.

$\square$ По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано:

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{(n)}(a)\cdot(x-a)^n}{n!} + \underset{x\to a}{\bar{o}((x-a)^n)} \Rightarrow f(x) - f(a) = (x-a)^n\left(\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \underset{x\to a}{\bar{o}(1)}\right)$$

Так как $\underset{x\to a}{\bar{o}(1)}$ это функция, которая стремится к 0 при $x \to a$, тогда

$$\exists\,\mathcal{U}'(a)\colon\ \operatorname{sgn}\left(\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \underset{x\to a}{\bar{o}(1)}\right) = \operatorname{sgn}\left(f^{(n)}(a)\right)$$

Рассмотрим следующие случаи:

(1) Если $n = 2k+1 \Rightarrow (x-a)^n$ меняет знак при переходе x через $a \Rightarrow$ меняет знак выражение $f(x) - f(a) \Rightarrow$ точка a - не является точкой экстремума;

(2) Если $n = 2k \Rightarrow \forall x \in \mathcal{U}'(a),\ (x-a)^n > 0 \Rightarrow \operatorname{sgn}\left(f(x) - f(a)\right) = \operatorname{sgn}\left(f^{(n)}(a)\right)$. Тогда:

   (a) Если $f^{(n)}(a) > 0$, то $f(x) - f(a) > 0$ и a - это строгий минимум;

   (b) Если $f^{(n)}(a) < 0$, то $f(x) - f(a) < 0$ и a - это строгий максимум;

$\blacksquare$

Выпуклость функций

Пусть f определена на интервале (a, b)

Опр: 4. Функция f называется выпуклой на (a, b), если

$$\forall x_1, x_2 \in (a, b) \wedge \forall \alpha \in [0, 1],\ f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$$

Перепишем точку $\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 = x_2 - \alpha(x_2 - x_1) \Rightarrow$ отрезок $[x_1, x_2]$ делится в отношении $(1-\alpha) : \alpha$.

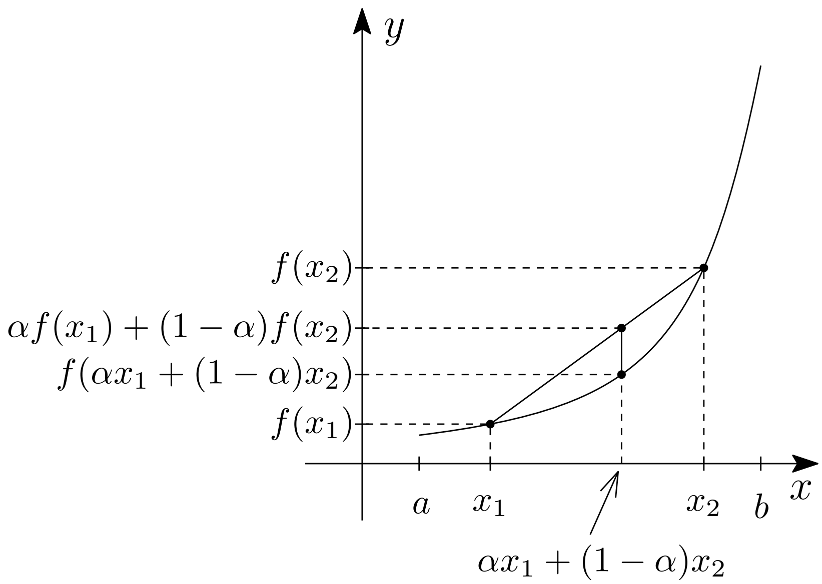


Рис. 4: Геометрический смысл выпуклости функции.

Мы знаем, что в каком отношении делится хорда, в таком же будет делиться её проекция на ось y, но хорда делится в таком же отношении, в каком делится её проекция на ось x, $(1-\alpha) : \alpha$.

Геометрический смысл: хорда не ниже дуги графика, который она стягивает.

Утв. 3. Функция f выпукла на $(a, b) \Leftrightarrow \forall x_1, x, x_2 \in (a, b)\colon x_1 < x < x_2,\ \dfrac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \dfrac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$.

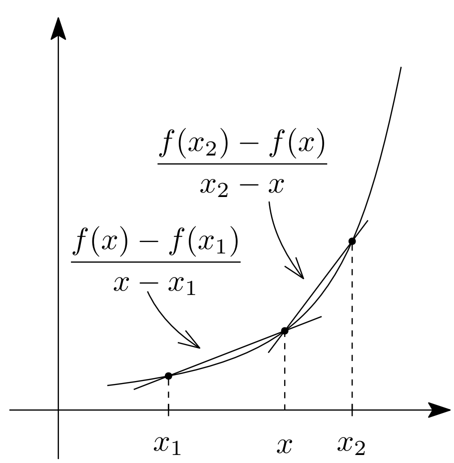


Рис. 5: Наклоны хорд не убывают: $\dfrac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \dfrac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$.

Rm: 1. Выпуклая функция - это функция у которой наклоны хорд, если их располагать вдоль графика, не убывают.

□ Пусть $\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 = x$, тогда перепишем веса в следующем виде:

$$\alpha = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1},\ 1 - \alpha = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Подставим такой вид весов в определение выпуклой функции:

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) = f(x) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2) \Rightarrow f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}f(x_2)$$

Поскольку $x_2 > x_1 \Rightarrow$ домножаем полученное неравенство на $(x_2 - x_1)$:

$$(x_2 - x_1)f(x) \leq (x_2 - x)f(x_1) + (x - x_1)f(x_2)$$

Заметим, что $(x_2 - x_1) = (x_2 - x) + (x - x_1)$, тогда получим:

$$(x_2 - x)(f(x) - f(x_1)) \leq (x - x_1)(f(x_2) - f(x))$$

Поскольку $x_2 > x > x_1 \Rightarrow$ разделим неравенство на $(x - x_1)$ и $(x_2 - x)$:

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

Поскольку преобразования были тождественны, то они будут справедливы и в обратную сторону. ■

Rm: 2. Данное утверждение не эквивалентно определению выпуклости, поскольку в определении неравенство будет справедливо и в граничных случаях: $x_1 = x = x_2 \vee \alpha = 0 \vee \alpha = 1$.

(1) $x_1 = x_2 = x \Rightarrow f(\alpha x + (1-\alpha)x) = f(x) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(x) = f(x)$;

(2) $\alpha = 0 \Rightarrow f(0 \cdot x_1 + (1-0) \cdot x_2) = f(x_2) \leq 0 \cdot f(x_1) + (1-0) \cdot f(x_2) = f(x_2)$;

(3) $\alpha = 1 \Rightarrow f(1 \cdot x_1 + (1-1) \cdot x_2) = f(x_1) \leq 1 \cdot f(x_1) + (1-1) \cdot f(x_2) = f(x_1)$;

Теорема 3. (Липшицево условие) Пусть f выпукла на (a, b). Тогда

$$\forall\, [c, d] \subset (a, b), \exists\, M > 0 \colon |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|,\ \forall x, y \in [c, d]$$

В частности, выпуклая функция на интервале (a, b) непрерывна.

Rm: 3. Определение выпуклости можно дать без изменения на отрезке. Но в теореме интервал нельзя заменить отрезком, поскольку на концах отрезка функция может быть разрывной, но при этом она останется выпуклой на самом отрезке.

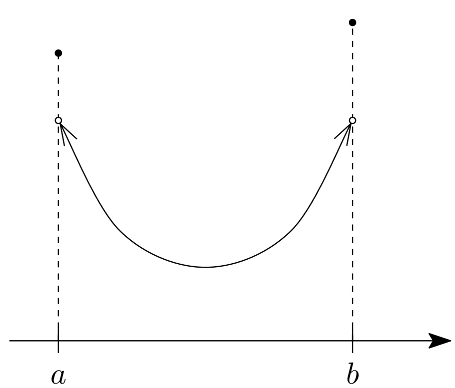


Рис. 6: Выпуклая на отрезке $[a, b]$ функция, с разрывами на концах отрезка.

□ Пусть $u \in (a,c) \wedge v \in (d,b)$.

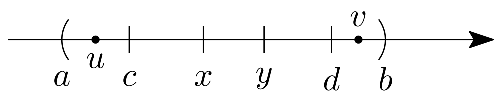


Рис. 7: Фиксируем точки u и v.

По свойству хорд выпуклой функции

$$\frac{f(c)-f(u)}{c-u} \le \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \le \frac{f(v)-f(d)}{v-d}$$

c, u - фиксированные точки $\Rightarrow \dfrac{f(c)-f(u)}{c-u}$ - число и v, d - фиксированные точки $\Rightarrow \dfrac{f(v)-f(d)}{v-d}$ - число, а точки x, y - любые внутри (c,d). Берем $M>0$ таким, что:

$$-M \le \frac{f(c)-f(u)}{c-u} \wedge M \ge \frac{f(v)-f(d)}{v-d} \Rightarrow \forall x,y \in [c,d],\ -M \le \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \le M \Rightarrow$$

$$\forall x,y \in [c,d],\ |f(x)-f(y)| \le M|x-y|$$

На каждом отрезке функция непрерывна, поскольку модуль разности значений функции оцениваются через модуль разницы аргументов. Поскольку отрезок произвольный $\Rightarrow$ любая точка интервала включается в какой-то из таких отрезков $\Rightarrow$ функция f там непрерывна. ■

Теорема 4. Пусть f - дифференцируема на интервале (a,b), тогда следующие утверждения эквивалентны:

(1) f - выпукла на (a,b);

(2) f' - не убывает на (a,b);

(3) $f(x) \ge f(y)+f'(y)(x-y)$, $\forall x,y,\in (a,b)$, то есть график функции лежит не ниже своей касательной;

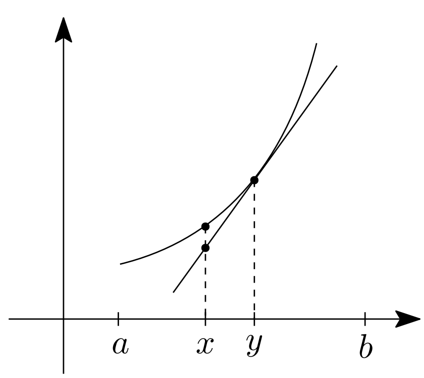


Рис. 8: (3) Во всех точках $x \in (a,b)$ график дифференцируемой функции лежит не ниже касательной.

□
(1) $\Rightarrow$ (2): Возьмем две точки $x_1, x_2 \in (a,b)\colon x_1 < x_2$. Возьмем также точку $u \in (a,b)\colon u < x_1$ и точку $v \in (a,b)\colon v > x_2$.

Рис. 9: Доказательство (1) $\Rightarrow$ (2).

Тогда
$$\frac{f(x_1)-f(u)}{x_1-u} \le \frac{f(v)-f(x_2)}{v-x_2} \Rightarrow \lim_{v\to x_2}\frac{f(v)-f(x_2)}{v-x_2} = f'(x_2) \Rightarrow \frac{f(x_1)-f(u)}{x_1-u} \le f'(x_2)$$
$$\lim_{u\to x_1}\frac{f(x_1)-f(u)}{x_1-u} = f'(x_1) \Rightarrow f'(x_1) \le f'(x_2),\ \forall x_1, x_2 \in (a,b)\colon x_1 < x_2$$

(2) $\Rightarrow$ (3): Рассмотрим несколько случаев:

1) Пусть $x > y \Rightarrow$ по теореме Лагранжа: $\exists\, c \in (y,x)\colon \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(c)$, по пункту (2):
$$c > y \Rightarrow f'(c) \ge f'(y) \Rightarrow f(x)-f(y) \ge f'(y)(x-y) \Rightarrow f(x) \ge f(y) + f'(y)(x-y)$$

2) Пусть $y > x \Rightarrow$ по теореме Лагранжа: $\exists\, c \in (x,y)\colon \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(c)$, по пункту (2):
$$c < y \Rightarrow f'(c) \le f'(y) \Rightarrow f(y)-f(x) \le f'(y)(y-x) \Rightarrow f(x) \ge f(y) + f'(y)(x-y)$$

$\blacksquare$