Основные теоремы дифференциального исчисления

Теорема 1. (Ролль) Пусть f непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема на интервале (a,b). Если $f(a)=f(b)$, то $\exists\, c\in(a,b)\colon f'(c)=0$.

Теорема 2. (Коши) Пусть f,g непрерывны на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема на интервале (a,b). Тогда $\exists\, c\in(a,b)\colon (f(b)-f(a))\cdot g'(c)=(g(b)-g(a))\cdot f'(c)$. Если $g'(c)\neq 0 \Rightarrow \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Физический смысл теоремы Коши: Если для функции f, $f(x)$ это координата материальной точки, то $f'(x)$ это ее скорость в этой точке и $f(b)-f(a)$ это путь пройденный точкой за время от a до b. Аналогично для функции g. Тогда $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ это отношение пройденных путей и $\frac{f'(c)}{g'(c)}$ это отношение скоростей. Таким образом, если одна точка преодолела путь за то же самое время в три раза больше, чем другая, то обязательно был момент времени, где скорость этой точки была в три раза выше, чем скорость другой.

Геометрический смысл теоремы Коши: Перепишем результат теоремы в другом виде:

$$(f(b)-f(a))\cdot g'(c)-(g(b)-g(a))\cdot f'(c)=0$$

Таким образом, результат теоремы Коши представляется в виде равенства следующего определителя нулю:

$$\begin{vmatrix} f(b)-f(a) & f'(c)\\ g(b)-g(a) & g'(c)\end{vmatrix}=0$$

Пусть движение на плоскости описывается координатами $(f(x),g(x))$.

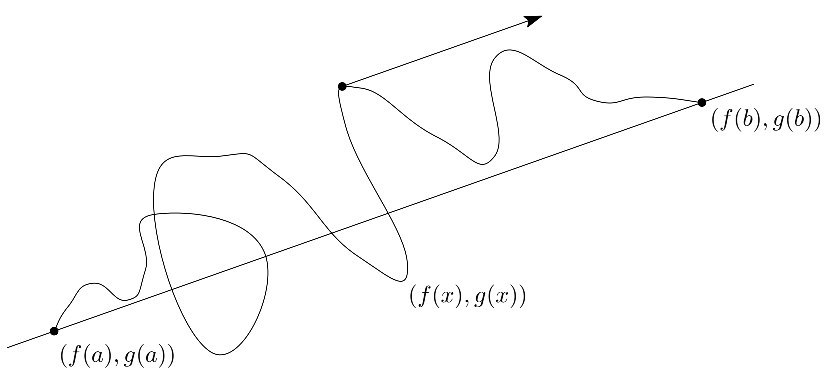

Рис. 1: Геометрический смысл теоремы Коши.

Вектор $(f(b)-f(a),g(b)-g(a))$ соединяет начало и конец маршрута, то есть это перемещение (насколько мы переместились), $(f'(c),g'(c))$ это вектор скорости. Таким образом был момент, когда вектор скорости коллинеарен вектору перемещения.

□ Рассмотрим функцию $F(x)=\begin{vmatrix} f(b)-f(a) & f(x)\\ g(b)-g(a) & g(x)\end{vmatrix}=(f(b)-f(a))\cdot g(x)-(g(b)-g(a))\cdot f(x)$. По свойству определителя $F(a)=\begin{vmatrix} f(b)-f(a) & f(a)\\ g(b)-g(a) & g(a)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} f(b) & f(a)\\ g(b) & g(a)\end{vmatrix}$, $F(b)=\begin{vmatrix} -f(a) & f(b)\\ -g(a) & g(b)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} f(b) & f(a)\\ g(b) & g(a)\end{vmatrix}=F(a)\Rightarrow$ по теореме Ролля $\exists\, c\in(a,b)\colon F'(c)=0\Rightarrow$

$$F'(c)=(f(b)-f(a))\cdot g'(c)-(g(b)-g(a))\cdot f'(c)=0\Rightarrow (f(b)-f(a))\cdot g'(c)=(g(b)-g(a))\cdot f'(c)$$

■

Правило Лопиталя

Теорема 3. (Бернулли-Лопиталь) Пусть f и g дифференцируемы на интервале (a, b) и $g' \neq 0$. Предположим, что выполняется одно из следующих двух условий:

(I) $\lim\limits_{x\to b-} f(x) = \lim\limits_{x\to b-} g(x) = 0$;

(II) $\lim\limits_{x\to b-} g(x) = \infty$;

Тогда, если $\lim\limits_{x\to b-} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$, то существует предел $\lim\limits_{x\to b-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$.

Условие (II)

<u>**Идея**</u>: В этом случае $\lim\limits_{x\to b-} g(x) = \infty$. Возьмем интервал (a, b), возьмем на нём точки $y, x\colon x > y$. Применим к ним теорему Коши:

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}\left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) + \frac{f(y)}{g(x)}$$

Мы знаем, что $\lim\limits_{x\to b-} g(x) = \infty \wedge \lim\limits_{x\to b-} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A \Rightarrow$ возьмем y столь близко к b, что $\dfrac{f'}{g'} \approx A$, зафиксируем его.

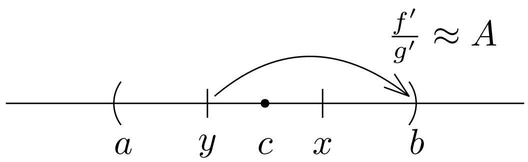

Рис. 2: Идея доказательства теоремы Бернули-Лопиталя.

Будем двигать x к $b \Rightarrow$ будет изменяться c, но c как бы не менялось будет лежать еще ближе к $b \Rightarrow$ в точке c выражение $\dfrac{f'}{g'} \approx A$. Двигая x к b получим: $\left(1 - \dfrac{g(y)}{g(x)}\right) \approx 1$, $\dfrac{f(y)}{g(x)} \approx 0 \Rightarrow \dfrac{f(x)}{g(x)} \approx \dfrac{f'(c)}{g'(c)} \approx A$.

$\square$ Пусть $\varepsilon > 0, \exists\, y\colon \forall z \in (y, b)$, $\left|\dfrac{f'(z)}{g'(z)} - A\right| < \varepsilon$, $\left|\dfrac{f'(z)}{g'(z)}\right| < C$, поскольку если предел есть, то функция ограничена в некоторой окрестности предельной точки.

Фиксируем y, $\exists\, \delta > 0\colon y < b - \delta \wedge \forall x \in (b - \delta, b)$, $\left|\dfrac{g(y)}{g(x)}\right| < \varepsilon \wedge \left|\dfrac{f(y)}{g(x)}\right| < \varepsilon$, поскольку $f(y), g(y)$ - константы и $\lim\limits_{x\to b-} g(x) = \infty$. Таким образом, применяя теорему Коши и неравенство треугольника получим

$$\forall x \in (b - \delta, b),\ \left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| = \left|\frac{f'(c)}{g'(c)} - \frac{f'(c)}{g'(c)}\cdot\frac{g(y)}{g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)} - A\right| \leq \left|\frac{f'(c)}{g'(c)} - A\right| + \left|\frac{f'(c)}{g'(c)}\right|\cdot\left|\frac{g(y)}{g(x)}\right| + \left|\frac{f(y)}{g(x)}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| < \varepsilon + C\cdot\left|\frac{g(y)}{g(x)}\right| + \left|\frac{f(y)}{g(x)}\right| < \varepsilon + C\cdot\varepsilon + \varepsilon = (C + 2)\varepsilon$$

$\blacksquare$

Rm: 1. Точка b не обязательно должна быть конечной и в этом случае, доказательство будет аналогичным.

Условие (I)

<u>Идея</u>: В этом случае $\lim\limits_{x\to b-} f(x) = \lim\limits_{x\to b-} g(x) = 0$. Возьмем интервал (a,b), возьмем на нём точки $x, y\colon x < y$. Применим к ним теорему Коши:

$$\frac{f(y)-f(x)}{g(y)-g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}\left(1-\frac{g(y)}{g(x)}\right) + \frac{f(y)}{g(x)}$$

Есть окрестность точки b, $(b-\delta, b)$ в которой $\dfrac{f'}{g'} \approx A$, зафиксируем в этой окрестности точку x, а точку y будем менять. Тогда, точка c будет лежать в этой же окрестности $\Rightarrow \dfrac{f'}{g'} \approx A \wedge x$ - зафиксирована $\Rightarrow$ $\Rightarrow g(x) = \mathrm{const} \wedge \lim\limits_{y\to b-} g(y) = \lim\limits_{y\to b-} f(y) = 0 \Rightarrow \left(1-\dfrac{g(y)}{g(x)}\right) \to 1,\ \dfrac{f(y)}{g(x)} \to 0 \Rightarrow \dfrac{f(x)}{g(x)} \approx \dfrac{f'(c)}{g'(c)} \approx A$ в окрестности b.

□ Пусть $\varepsilon > 0, \exists\, x\colon \forall z \in (x,b),\ \left|\dfrac{f'(z)}{g'(z)} - A\right| < \varepsilon,\ \left|\dfrac{f'(z)}{g'(z)}\right| < C$, поскольку если предел есть, то функция ограничена в некоторой окрестности предельной точки.

Фиксируем $x, \exists\, \delta > 0\colon x < b-\delta \wedge \forall y \in (b-\delta, b),\ \left|\dfrac{g(y)}{g(x)}\right| < \varepsilon \wedge \left|\dfrac{f(y)}{g(x)}\right| < \varepsilon$, поскольку $f(x), g(x)$ - константы и $\lim\limits_{y\to b-} g(y) = \lim\limits_{y\to b-} f(y) = 0$. Таким образом, применяя теорему Коши и неравенство треугольника получим

$$\forall y \in (b-\delta, b),\ \left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| = \left|\frac{f'(c)}{g'(c)} - \frac{f'(c)}{g'(c)}\cdot\frac{g(y)}{g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)} - A\right| \leq \left|\frac{f'(c)}{g'(c)} - A\right| + \left|\frac{f'(c)}{g'(c)}\right|\cdot\left|\frac{g(y)}{g(x)}\right| + \left|\frac{f(y)}{g(x)}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| < \varepsilon + C\cdot\left|\frac{g(y)}{g(x)}\right| + \left|\frac{f(y)}{g(x)}\right| < \varepsilon + C\cdot\varepsilon + \varepsilon = (C+2)\varepsilon$$

■

□ **Случай** $A = +\infty$:

Пусть $M > 0, \exists\, x\colon \forall z \in (x,b),\ \dfrac{f'(z)}{g'(z)} > M$. То есть для любого наперед фиксированного числа, найдется большее значение функции $\dfrac{f'}{g'}$.

Фиксируем x, пусть $M > \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0\colon x < b-\delta \wedge \forall y \in (b-\delta, b),\ \left|\dfrac{g(y)}{g(x)}\right| < \varepsilon \wedge \left|\dfrac{f(y)}{g(x)}\right| < \varepsilon$, поскольку $f(x), g(x)$ - константы и $\lim\limits_{y\to b-} g(y) = \lim\limits_{y\to b-} f(y) = 0$. Таким образом, применяя теорему Коши получим

$$\forall y \in (b-\delta, b),\ \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}\left(1-\frac{g(y)}{g(x)}\right) + \frac{f(y)}{g(x)} > M(1+\varepsilon) - \varepsilon > M - \varepsilon = \tilde{M} > 0$$

■

Многочлен Тейлора

Многочлен $\Rightarrow$ коэффициенты

Возьмем многочлен $P(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots + c_n(x-a)^n$ (разложение многочлена P в точке a по степеням $(x-a)$). Как найти коэффициенты такого разложения?

c_0: Ясно, что $c_0 = P(a)$;

c_1: Продифференцируем многочлен $\Rightarrow P'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + \ldots + nc_n(x-a)^{n-1} \Rightarrow c_1 = P'(a)$;

c_2: Продифференцируем $P'(x) \Rightarrow P''(x) = 2c_2 + 3{\cdot}2c_3(x-a) + \ldots \Rightarrow c_2 = \dfrac{P''(a)}{2}$;

Продолжая эти рассуждения мы получаем, что k-ый коэффициент

$$c_k = \frac{P^{(k)}(a)}{k!}$$

Теперь вместо коэффициентов в $P(x)$ мы можем написать их выражение через производные в точке и получим следующий вид многочлена:

$$P(x) = P(a) + P'(a)(x-a) + \ldots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Rm: 2. Отметим, что такое производная k-го порядка: Если мы уже знаем, что такое производная k-го порядка и эта производная есть в окрестности точки a, тем самым в окрестности точки a определена функция $f^{(k)}(x)$ и если она оказалась дифференцируемой в точке a, то её производная в точке a и будет производной следующего порядка: $(f^{(k)}(a))' = f^{(k+1)}(a)$.

Пример: $f(x) = x^m \Rightarrow f^{(k)}(x) = (x^m)^{(k)} = \begin{cases} 0 & k > m \\ m! & k = m \\ m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-k+1)x^{m-k} & k < m \end{cases}$

Упр. 1. Обобщенное правило Лейбница: Доказать $(fg)^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}{\cdot}g^{(n-k)}$.

□ Докажем по индукции:
<u>**База**</u>: обычное правило Лейбница $(fg)' = f'g + fg'$.

<u>**Шаг**</u>: пусть доказано для n, докажем для $n+1$:

$$(fg)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k+1)} g^{(n-k)} = C_n^0 f g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} f^{(k)} g^{(n+1-k)} =$$

$$= fg^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \sum_{k=1}^{n} C_n^{k-1} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + C_n^n f^{(n+1)} g = fg^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \left(C_n^k + C_n^{k-1}\right) f^{(k)} g^{(n+1-k)} +$$

$$+ f^{(n+1)} g = fg^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^k f^{(k)} g^{(n+1-k)} + f^{(n+1)} g = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k f^{(k)} g^{(n+1-k)}$$

■

Коэффициенты $\Rightarrow$ многочлен

Теперь посмотрим на обратную задачу: выписать многочлен, если заданы производные в точке a. Если нужен многочлен с заданными первыми n производными, то он будет следующего вида:

$$P(x) = P(a) + P'(a)(x-a) + \ldots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Пусть f это n-раз дифференцируемая функция в точке a.

Опр: 1. Многочлен у которого производные такие же, как у функции f называется многочленом Тейлора:

$$\mathrm{T}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k,\ f^{(k)}(a) = \big(\mathrm{T}_n(x)\big)^{(k)}\Big|_{x=a},\ \forall k = \overline{0,n}$$

Рассмотрим функцию

$$g(x) = f(x) - \mathrm{T}_n(x),\ g^{(k)}(a) = 0,\ \forall k = \overline{0,n}$$

У какой функции все производные до n-го порядка в точке a равны нулю? Например, у $(x-a)^{n+1}$.

Теорема 4. Если f n-раз дифференцируема в точке a, то $f(x) - T_n(x) = \alpha(x) \cdot (x-a)^n$, где $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$

Это утверждение можно записать короче, использяу $\bar{o}$-символику:

$$h(x) = \alpha(x) \cdot g(x),\ x \neq a \wedge \lim_{x\to a} \alpha(x) = 0 \Rightarrow h = \bar{o}(g),\ \text{при } x \to a$$

Тогда теорему перепишем в виде **формулы Тейлора с остаточным членом в форме Пеано**:

$$f(x) = T_n(x) + \bar{o}((x-a)^n),\ \text{при } x \to a$$