$f\colon X \to Y$ - функция: $\forall x \in X$, $\exists!\, y = f(x) \in Y$, где
X - <u>область определения</u> f, $\{\, y \mid \exists x\colon f(x) = y \,\}$ - <u>область значений</u> f;
$\Gamma_f = \{\, (x,y) \mid y = f(x) \,\} \subset X \times Y$ - <u>график</u>;

Опр: 1. функция $f\colon X \to Y$ называется инъекцией, если $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, то есть не склеивает точки.

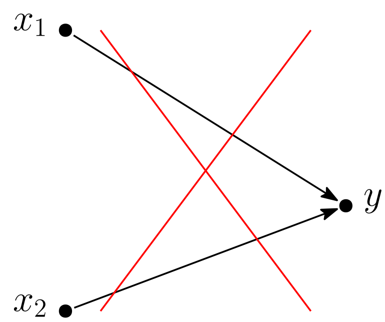

Рис. 1: Не инъекция

Пример: $x \mapsto x^2$ - не инъекция для всех чисел из $\mathbb{R}$, тогда как $x \mapsto x^3$ - инъекция

Опр: 2. функция $f\colon X \to Y$ называется сюръекцией, если область значений функции f совпадает с Y, то есть $\forall y \in Y, \exists\, x \in X : y = f(x)$.

$x \mapsto x^2$, $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}$ - не сюръекция так как нет отрицательной части;
$x \mapsto x^2$, $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}_+$ - сюръекция;

(a) Не сюръекция (b) Сюръекция

Рис. 2: Примеры сюръективности

Опр: 3. Функция $f\colon X \to Y$ называется биекцией, если f - инъекция и сюръекция одновременно, еще говорят - взаимно-однозначное соответствие.

Опр: 4. Если $\exists$ биекция $X \to Y$, то говорят, что X и Y - равномощны.

Утв. 1. композиция биекций является биекцией:
$f\colon X \xrightarrow{\text{1-1}} Y$, $g\colon Y \xrightarrow{\text{1-1}} Z \Rightarrow g \circ f\colon X \xrightarrow{\text{1-1}} Z$

$\square$ $\forall x_1 \neq x_2,\ x_1, x_2 \in X \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \iff y_1 = f(x_1) \neq f(x_2) = y_2 \Rightarrow g(y_1) \neq g(y_2)$
$\Rightarrow g \circ f$ - инъективна.
Так как f - биъективна, то весь Y - покрывается. Всеми элементами Y покрывается множество Z, так как g - биекция $\Rightarrow g \circ f$ - сюръекция. $\blacksquare$

Утв. 2. (существование) Если $f\colon X \to Y$ - биекция, то определяется функция из Y в X, сопостовляющая $\forall y \in Y$ такой элемент $x \in X\colon y = f(x)$, эта функция называется обратной к f, обозначается f^{-1} и является биекцией.

☐ Поскольку f - сюръекция, то $\forall y \in Y$, $\exists x \in X$, так как f - инъекция, то $\forall y \in Y$, $\exists! x \in X \Rightarrow$ указанное сопостовление является функцией.
f^{-1} - сюръекция, так как $\forall x \in X$ функция f сопостовляет $y \in Y$, то есть: $\forall x \in X$, $\exists y \in Y\colon x = f^{-1}(y)$
f^{-1} - инъекция, так как $\forall x \in X$ функция f сопостовляет ровно один $y \in Y$, то есть:
$\forall y_1, y_2 \in Y\colon y_1 \neq y_2$, $\exists x_1, x_2 \in X\colon x_1 = f^{-1}(y_1) \neq f^{-1}(y_2) = x_2$. ■

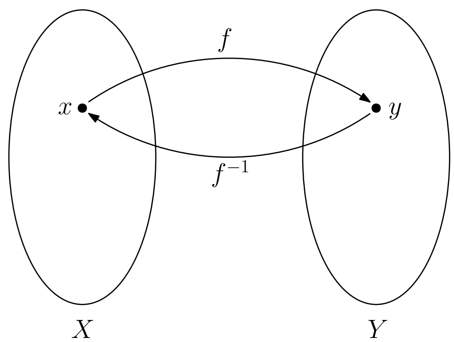

Рис. 3: Обратная функция

$x \to y\colon y^2 = x$ - это не функция.

Взаимосвязь между функцией и обратной функцией:

1. f^{-1} существует так как f - биекция;
2. f^{-1} инъективна так как f - функция;
3. f^{-1} сюръективна по определению f как функции;

Построение обратной функции

Рассмотрим функцию $y = x^2$ - у неё нет обратной функции, так как это не биекция. Одному y сопостовляется несколько x.

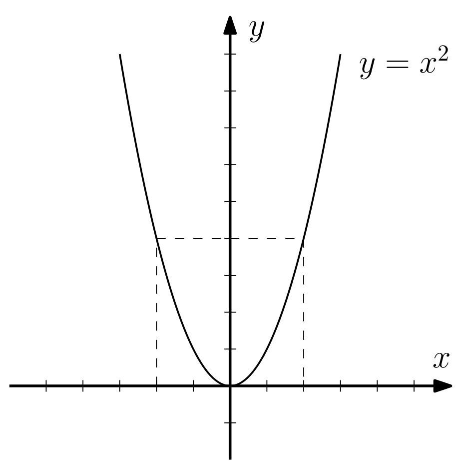

Рис. 4: Функция без обратной функции

Как сделать так, чтобы была обратная функция? Можно договорится какой x берем для каждого y, например так:

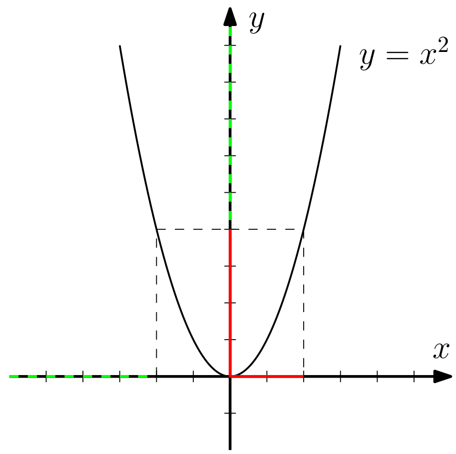

Рис. 5: Способ выбора обратной функции

С точки зрения сопоставления $y \to x\colon x^2 = y$ - все хорошо.
Рассмотрим немного другую функцию $y = x^2\colon \{x \geq 0\} \to \{y \geq 0\}$.

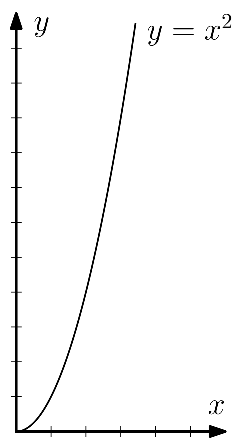

Рис. 6: Функция с обратной функцией

У этой функции есть биекция $\Rightarrow$ по утверждению существует обратная функция $x = \sqrt{y}$ - обратная функция. Непонятно, сюръекция ли эта функция или нет? Очевидно, что это инъекция.
Аналогично предыдущему примеру появился $\arcsin(.)$;

Построение обратной функции: либо функция сразу биекция, либо берется участок, где функция - биекция, а также должна проходится вся область значений, после этого строится обратная функция.

Группы

Пусть $X \neq \varnothing$, $G(X) = \{\,\text{все биекции } f\colon X \to X\,\}$ на $G(X)$ определена операция композиции $f \circ g$ - биекция, такая что:

(1) $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$;

(2) $e(x) = x$, $e \circ f = f \circ e = f$;

(3) $\forall f$, $\exists f^{-1}\colon f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = e$;

тогда говорят, что задана группа биекций.

Опр: 5. Если на множестве задана бинарная операция, удовлетворяющая условиям (1)-(3), то говорят, что задана группа.

Пример

Возьмем $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$, знаем что:

1. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, $\forall a, b, c \in \mathbb{Q}$;
2. $\exists 1\colon 1 \cdot a = a \cdot 1 = a$, $\forall a \in \mathbb{Q}$;
3. $\forall a \in \mathbb{Q}$, $\exists! a^{-1}\colon a^{-1} \cdot a = a \cdot a^{-1} = 1$;

следовательно это группа по умножению.

Группа биекций - это универсальная группа, то есть любую группу можно представить как группу биекций (Теорема Кэли). Также существует дополнительно свойство коммутативности:

4. $a \cdot b = b \cdot a$;

Оно не выполняется для группы биекций.

Упр. 1. Доказать, что $G(X)$ - коммутативна $\Leftrightarrow$ в X - не более 2-х элементов. (В общем случае $G(X)$ не является абелевой группой).

Мощность множества

См. выше определение.

Утв. 3. Пусть $\{a, b\} \subset A$ тогда $A \setminus \{a\}$ равномощно $A \setminus \{b\}$.

$\square$ Пусть $D = A \setminus \{a, b\} \Rightarrow A \setminus \{a\} = D \cup \{b\}$, $A \setminus \{b\} = D \cup \{a\}$, $f\colon A \setminus \{a\} = D \cup \{b\} \to A \setminus \{b\} = D \cup \{a\}$

Рассмотрим следующую функцию

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in D \\ a, & x = b \end{cases}$$

Легко заметить, что это наша искомая биекция. Проверим это: $y \in D \vee y = a \Rightarrow$ вся область значения покрывается $\Rightarrow$ функция - сюръекция. $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) = x_1 \neq x_2 = f(x_2)$, $\forall x_i \in D$. $x \neq a \Rightarrow f(x) = x \neq a = f(b)$, $\forall x \in D \Rightarrow$ получаем инъекцию $\Rightarrow$ заданная функция является биекцией. $\blacksquare$

Свойства равномощных множеств

Обозначение A равномощно $B \Leftrightarrow A \sim B$. Свойства равномощных множеств:

(1) $A \sim A$ (тождественная биекция);

(2) $A \sim B \Rightarrow B \sim A$ (так как обратная функция - биекция);

(3) $A \sim B \wedge B \sim C \Rightarrow A \sim C$ (так как композиция биекций - биекция);

Обычно “мощность” не употребляют в контексте просто множества, так как это ведет к понятию множества всех множеств. Употребляют обычно “равномощно”, поскольку мощность можно интерпретировать как класс эквивалентности “среди всех множест” - что не есть хорошо (получается множество все множеств).

Утв. 4. $\{\, k \in \mathbb{N} \mid k \leq n \,\} \sim \{\, k \in \mathbb{N} \mid k \leq m \,\}$, то $n = m$.

Интуитивно хочется поставить стрелочки и потом сказать “и так далее” - плохое объяснение.

$$\begin{array}{ccccccc} 1, & 2, & 3, & \dots, & n, & \dots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ 1, & 2, & 3, & \dots, & n, & \dots \end{array}$$

Рис. 7: Сопоставление множеств

$\square$ Индукцией по n:
База: $n = 1 \Rightarrow$ пусть $m \neq 1$, f - биекция $f\colon \{\, k \leq n \,\} \to \{\, k \leq m \,\}$. Так как $n = 1$, то $\{k \leq n\} = \{1\}$. Тогда $f(1) \neq m \vee f(1) \neq 1$, иначе они между собой равнялись бы $(m = 1) \Rightarrow f$ - не сюръекция, так как область значений состоит из $f(1)$ которая не равна m или $1 \Rightarrow$ не все элементы в образе - заметаются, то есть в $\{\, k \in \mathbb{N} | k \leq m \,\}$ будут элементы меньше $m \Rightarrow$ противоречие с тем, что f - биекция $\Rightarrow m = 1$.
Шаг: Пусть доказано для n, докажем для $n + 1$. Есть биекция $\{1, 2, ..., n, n+1\} \xrightarrow{f} \{1, 2, ..., m\}$.
Если $m = 1$, то все доказано (см. базу): в этом случае возьмем обратную функцию, обратная функция - биекция и по утверждению из базы будет следовать, что $n + 1 = 1$, но такое невозможно, так как 1 не является ни для кого следующей, поэтому $m \neq 1$ по утверждению в базе.
$\{1, 2, \dots, n\} \xrightarrow{f} \{1, 2, \dots, m\} \setminus \{f(n+1)\}$ - убираем образ $n + 1$.

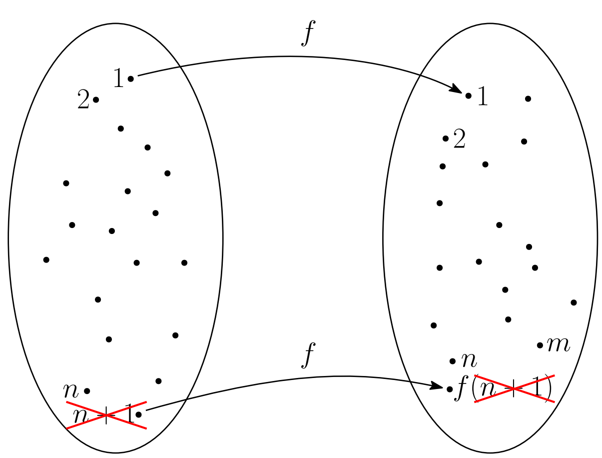

Рис. 8: Убираем образ $n + 1$

Не важно, что выбрасывать с точки зрения равномощности:
$\{1, 2, \ldots, n\} \xrightarrow{f} \{1, 2, \ldots, m\} \setminus \{f(n+1)\} \sim \{1, 2, \ldots, m-1\}$ по утверждению выше. Таким образом получим: $\{1, 2, \ldots, n\} \sim \{1, 2, \ldots, m-1\} \Rightarrow$ по предположению индукции получим, что $n = m - 1$, добавляем единичку, получаем $n + 1 = m$ ■

Опр: 6. Пустое множество $\varnothing$ - является конечным и состоит из 0 элементов. Множество A является конечным и состоит из n элементов, если $A \sim \{1, 2, ..., n\}$.

Опр: 7. Бесконечное множество - множество, которое не является конечным множеством.

Rm: 1. Конечные множества - те, которые можно посчитать.

Примеры бесконечных множеств

Утв. 5. Множество натруальных чисел $\mathbb{N}$ - бесконечно (не является конечным).

□ (От противного): Пусть $\mathbb{N}$ - конечно $\Rightarrow \exists f$ - биекция $f\colon \{1, 2, \ldots, m\} \to \mathbb{N}$.
Возьмем натуральное число $f(1) + \ldots + f(m) + 1 > f(k)$, $\forall k = 1, \ldots, m \Rightarrow f$ - не сюръекция. Значит множество натуральных чисел - бесконечно. ■

Утв. 6. Множество простых чисел - бесконечно.

□ Пусть есть биекция $f\colon \{1, \ldots, m\} \to \text{prime}$. Пусть $p_1, p_2, ..., p_m$ - все простые числа.
Составляем новое $p_1 p_2 \ldots p_m + 1$ - больше любого из выписанных $\Rightarrow$ это составное число $\Rightarrow$ делится на какое-то простое, но это невозможно, так как оно не может делится ни на одно простое число $\Rightarrow$ противоречие. ■

Опр: 8. Множество A - счетно, если $A \sim \mathbb{N}$. То есть элементы множества можно пересчитать.

Примеры счетных множеств

1. $\mathbb{N}$, биекция: $n \to n$;
2. $\mathbb{N} \setminus \{1\}$, биекция: $n \to n + 1$;
3. $\mathbb{Z}$, данное множество состоит из $\{\, -n \mid n \in \mathbb{N}\,\}$, $\{0\}$, $\mathbb{N}$.
   Сопоставление: $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots \Leftrightarrow 1 \to 0, 2 \to 1, 3 \to -2, \ldots;$

Свойства счетных множеств

(1) Если A счетно и $B \subset A$, то B - конечно или счетно $\Leftrightarrow$ не более, чем счетно (н.б.ч.с.).

□ Все элементы A - пересчитаны: $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$.

Если $B = \varnothing$ - все ок, так как пустое множество является конечным и состоит из 0 элементов.

Пусть $B \neq \varnothing$, положим, что $k_1 = \min\{\, k\colon a_k \in B\,\}$. Такое существует, так как в любом непустом подмножестве натуральных чисел есть наименьший элемент (аксиома индукции). Пусть $b_1 = a_{k_1} \Rightarrow$ если $B \setminus \{b_1\} = \varnothing$, то B - конечно $\Rightarrow$ ok.
Если $B \setminus \{b_1\} \neq \varnothing$, то берем $k_2 = \min\big\{\, k\colon a_k \in B \setminus \{b_1\}\,\big\}$ и полагаем $b_2 = a_{k_2}$ и далее по аналогии.

Если уже построили $\{b_1, \ldots, b_n\}$, то либо $B \setminus \{b_1, \ldots, b_n\} = \varnothing$ и тогда построение закончено, или $B \setminus \{b_1, \ldots, b_n\} \neq \varnothing$ и определяем $k_{n+1} = \min\big\{k \colon a_k \in B \setminus \{b_1, \ldots, b_n\}\big\}$, полагая $b_{n+1} = a_{k_{n+1}}$ продолжаем по аналогии. Получаем набор $\{b_n\}$. Верно ли что $B = \{b_n\}$? (все ли элементы так прошли?)

Покажем, что $k_n \geq n$:
$k_1 \geq 1$ - очевидно, так как берем натуральные числа. $k_{n+1} > k_n$ - так как берем каждый раз минимальный номер. По индукции, $k_n \geq n \Rightarrow k_{n+1} \geq n + 1$ поскольку $k_{n+1} > k_n \geq n$ - строго больше n, то есть больше или равно $n + 1$.

Если процедура закончилась, то по построению B - полностью перенумерован.

Предположим, что построение не прерывалось на конечном шаге (продолжалось бесконечно долго) и какой-то $a_m \in B$ не получил номера. Но так как мы выбирали каждый раз наименьшие номера $\Rightarrow k_n < m, \forall n$, но $k_{m+1} \geq m + 1$ (Если какое-то число просмотрели $\Rightarrow$ все выбираемые номера - меньше него, но меньше него есть только конечный набор чисел, а построение никогда не обрывалось $\Leftrightarrow$ бесконечный набор чисел.) $\Rightarrow$ противоречие. ■