Метод Остроградского

Задача 1. (**Д1898**) Выделить алгебраическую часть интеграла:

$$\int \frac{x^2+1}{(x^4+x^2+1)^2}dx$$

□

$$\int \frac{x^2+1}{(x^4+x^2+1)^2}dx = \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} + \int \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}dx,\ P(x) = x^2+1,\ Q(x) = (x^4+x^2+1)^2$$

У квадратного трехчлена действительных корней нет, только комплексные. Как их найти в явном виде? Домножим на (z^2-1), тогда по формуле разности кубов:

$$(z^2-1)(z^4+z^2+1) = z^6-1$$

Надо взять корни многочлена справа и выбросить корни многочлена z^2-1:

$$z_i = e^{2\pi i \cdot \frac{k}{6}},\ k = 0,1,2,3,4,5$$

Следовательно, остаются только $k = 1,2,4,5$:

$$e^{\frac{\pi i}{3}},\ e^{\frac{2\pi i}{3}},\ e^{\frac{4\pi i}{3}},\ e^{\frac{5\pi i}{3}}$$

Графически делим окружность на 6 равных частей, выбрасываем корни для z^2-1. Видно, что кратных корней нет.

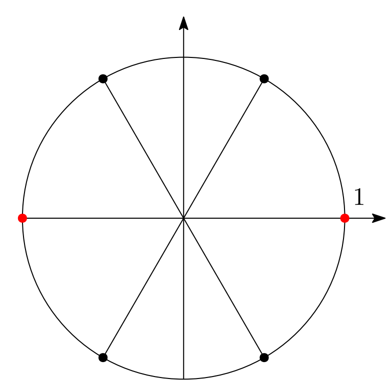

Рис. 1: Корни многочлена z^6-1 и z^2-1.

Можно было действовать по-другому. Проверим кратность корней у квадратного трехчлена:

$$G(x) = x^4+x^2+1 = 0,\ G'(x) = 4x^3+2x = 0 \Rightarrow x(4x^2+2) = 0 \Rightarrow x = 0, x = \pm\sqrt{-\tfrac{1}{2}} = \pm i\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

$$G(0) = 1 \neq 0,\ G\left(\pm i\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{4} \neq 0$$

Следовательно кратных корней нет. Тогда:

$$Q_1(x) = Q_2(x) = x^4+x^2+1,\ P_2(x) = Ax^3+Bx^2+Cx+D,\ \deg P_1, P_2 \leq 3$$

$$(x^2+1)Q_2(x) = (3Ax^2+2Bx+C)Q_2^2(x) - (Ax^3+Bx^2+Cx+D)(4x^3+2x)Q_2(x) + P_1(x)Q_2^2(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+1=(3Ax^2+2Bx+C)Q_2(x)-(Ax^3+Bx^2+Cx+D)(4x^3+2x)+P_1(x)Q_2(x)$$

Нам необходимо получить уравнения на коэффициенты A, B, C, D, минуя $P_1(x)$. Для этого будем подставлять значения z такие, чтобы $Q_2(x)=0$:

$$z\in\mathbb{C}\colon z^4+z^2+1=0\Rightarrow z_1=e^{\frac{\pi i}{3}},\ z_2=e^{\frac{2\pi i}{3}},\ z_3=e^{\frac{4\pi i}{3}},\ z_4=e^{\frac{5\pi i}{3}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q_2(z)=0\Rightarrow z^2+1=-(Az^3+Bz^2+Cz+D)(4z^3+2z)\Rightarrow$$

Поскольку у нас возникают слагаемые степени выше 3, то избавимся от них:

$$z^4=-z^2-1\Rightarrow z^5=-z^3-z,\ z^6=-z^4-z^2=1$$

Следовательно мы получим систему уравнений:

$$z^2+1=-(Az^3+Bz^2+Cz+D)(4z^3+2z)=$$

$$=-4A-4B(-z^3-z)-4C(-z^2-1)-4Dz^3-2A(-z^2-1)-2Bz^3-2Cz^2+2Dz=$$
$$=z^3(4B-4D-2B)+z^2(4C+2A-2C)+z(4B-2D)-4A+4C+2A$$

Таким образом, мы получили что два многочлена один не выше 3-ой степени, второй не выше 3-ей совпадают в 4 точках $\Rightarrow$ совпадают всюду $\Rightarrow$ коэффициенты у них должны быть равны:

$$\left\{\begin{array}{rrcl} z^3\colon & 0 & = & 2B-4D\\ z^2\colon & 1 & = & 2C+2A\\ z\colon & 0 & = & 4B-2D\\ 1\colon & 1 & = & 4C-2A\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{rcl} A & = & \frac{1}{2}-C\\ B & = & 2D=0\\ D & = & 2B=0\\ A & = & 2C-\frac{1}{2}\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{rcl} A & = & \frac{1}{6}\\ B & = & 0\\ C & = & \frac{1}{3}\\ D & = & 0\end{array}\right.$$

Следовательно, алгебраическая часть будет иметь вид:

$$\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}=\frac{1}{6}\cdot\frac{x^3+2x}{x^4+x^2+1}$$

■

Rm: 1. Заметим, что функция $\dfrac{x^2+1}{x^4+x^2+1}$ - это четная функция, тогда её производная - нечетная и наоборот, если функция четная, то её первообразная нечетная:

$$f(z)=f(-z)\Rightarrow f'(z)=-f'(-z)$$

$$f(z)=-f(-z)\Rightarrow\int f(z)dz=\int f(-z)d(-z)=F(z)=F(-z)+C$$

Тогда, если раскладывать нечетную функцию на алгебраическую и трансцендентную части, то алгебраическая часть будет нечетной $\Rightarrow$ можно понять что B и D будут равны нулю, поскольку стоят при четных степенях. Это возможно обсудим далее.

Интегрирование некоторых иррациональных функций

Пусть помимо операций вычитания, сложения, умножения и деления над многочленами ещё добавили операцию извлечения корня n-ой степени $\Rightarrow$ мы получаем иррациональные функции. При интегрировании иррациональных функций не всегда интеграл можно посчитать, но иногда это получается. Рассмотрим сначала ситуации, когда иррациональная функция может быть сведена к рациональной.

Задача 2. (**Д1929**)

$$\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx$$

□ Можно сообразить, что оба иррациональных выражения в отношении являются степенями корня 6-ой степени:

$$\sqrt{x+1} = (\sqrt[6]{x+1})^3,\ \sqrt[3]{x+1} = (\sqrt[6]{x+1})^2$$

Сделаем замену:

$$t = \sqrt[6]{x+1} \Rightarrow x = t^6 - 1,\ dx = 6t^5dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx = \int \frac{1-t^3}{1+t^2}\cdot 6t^5dt = \int \frac{6t^5-6t^8}{1+t^2}dt = -6\int \frac{t^8-t^5}{1+t^2}dt$$

Степень числителя выше степени знаменателя $\Rightarrow$ поделим в столбик:

$$t^8 - t^5 = (t^2+1)(t^6 - t^4 - t^3 + t^2 + t - 1) - t + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -6\int \frac{t^8-t^5}{1+t^2}dt = -6\left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} - \frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} - t\right) - 6\int \frac{1-t}{1+t^2}dt$$

$$-6\int \frac{1-t}{1+t^2}dt = 6\int \frac{t}{1+t^2}dt - 6\int \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{6}{2}\ln(t^2+1) - 6\operatorname{arctg} t + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -6\int \frac{t^8-t^5}{1+t^2}dt = -6\left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} - \frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} - t\right) + \frac{6}{2}\ln(t^2+1) - 6\operatorname{arctg} t + C,\ t = \sqrt[6]{x+1}$$

■

Задача 3. (**Д1931**)

$$\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}dx$$

□ В таких задачах часто помогает домножение на сопряженное слагаемое, чтобы избавиться от рациональности в знаменателе:

$$\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}dx = \int \frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)^2}{(x+1)-(x-1)}dx = \frac{1}{2}\int \left(x+1+x-1+2\sqrt{x^2-1}\right)dx$$

Мы уже считали такой интеграл с радикалом:

$$\int \sqrt{x^2-a^2}dx = \frac{x}{2}\cdot\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int \left(x+1+x-1+2\sqrt{x^2-1}\right)dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}\cdot\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| + C$$

■

Rm: 2. Снова вспомним, что когда у нас есть простые корни, то мы можем делать замены для избавления от них:

$$\sqrt{x^2+a^2} \Rightarrow x = a\,\mathrm{sh}\,t$$

$$\sqrt{x^2-a^2} \Rightarrow x = a\,\mathrm{ch}\,t$$

$$\sqrt{a^2-x^2} \Rightarrow x = a\sin t \vee x = a\cos t$$

Задачи 1937-1942 могут быть сведены с помощью замен выше к интегрированию выражений от $\sin x$, $\cos x$, $\mathrm{sh}\,x$, $\mathrm{ch}\,x$. Интегрирование таких задач мы обсудим позже.

Аналог метода Остроградского

Рассмотрим аналог формулы Остроградского для конкретного выражения с корнями.

Теорема 1.

$$y = \sqrt{ax^2+bx+c},\ \int \frac{P_n(x)}{y}dx = Q_{n-1}(x)\cdot y + \lambda\cdot \int \frac{dx}{y}$$

$$\deg P_n = n,\ \deg Q_{n-1} \le n-1,\ \lambda \in \mathbb{R}$$

Задача 4. (**Д1946**)

$$\int \frac{x^3-6x^2+11x-6}{\sqrt{x^2+4x+3}}dx$$

□

$$y = \sqrt{x^2+4x+3},\ P_3(x) = x^3-6x^2+11x-6,\ \deg P_3 = 3$$

Тогда по формуле выше, мы получим:

$$\int \frac{x^3-6x^2+11x-6}{\sqrt{x^2+4x+3}}dx = (Ax^2+Bx+C)\cdot y + \lambda \int \frac{dx}{y}$$

Продифференцируем левую и правую части и посмотрим какое уравнение получится:

$$\frac{x^3-6x^2+11x-6}{y} = (2Ax+B)\cdot y + (Ax^2+Bx+C)\cdot \frac{1}{2}\cdot \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + \frac{\lambda}{y}$$

Умножим обе части на y, тогда:

$$x^3-6x^2+11x-6 = (2Ax+B)\cdot(x^2+4x+3) + (Ax^2+Bx+C)\cdot(x+2) + \lambda$$

Здесь можно идти несколькими путями: просто приравнять коэффициенты перед степенями, либо подставлять конкретные точки и смотреть значения в них, можно комбинированный метод использовать. Нам важно получить A, B, C, а существование таких коэффициентов гарантирует теорема выше.

Рассмотрим коэффициент при x^3:

$$x^3\colon 1 = 3A \Rightarrow A = \frac{1}{3}$$

Далее, подставим точки $x = 0, x = -1, x = -2$:

$$x = -1 \Rightarrow -1-6-11-6 = -24 = A - B + C + \lambda$$

$$x = -2 \Rightarrow -8-24-22-6 = -60 = (-4A+B)\cdot(-1) + \lambda$$

$$x = 0 \Rightarrow -6 = 3B + 2C + \lambda$$

Теперь решим систему из полученных уравнений:

$$B = 60 + \frac{4}{3} + \lambda \Rightarrow \frac{1}{3} - 60 - \frac{4}{3} + C = -24 \Rightarrow C = 61 - 24 = 37$$

$$3\left(60 + \frac{4}{3} + \lambda\right) + 74 + \lambda = -6 \Rightarrow 4\lambda = -6 - 180 - 4 - 74 = -264 \Rightarrow \lambda = -66$$

$$B = 60 + \frac{4}{3} - 66 = -\frac{14}{3}$$

Таким образом, мы получаем:

$$Q_2(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{14}{3}x + 37$$

Посчитаем оставшийся интеграл:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2-1}} = \left|x+2 = \operatorname{ch} t,\ (x+2)^2 - 1 = \operatorname{ch}^2 t - 1 = \operatorname{sh}^2 t,\ dx = \operatorname{sh} t dt\right| =$$

$$= \int 1 \cdot dt = t + C = \operatorname{ch}^{-1}(x+2) + C = \ln\left|x + 2 + \sqrt{x^2+4x+3}\right| + C$$

$$\int \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{\sqrt{x^2+4x+3}} dx = \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{14}{3}x + 37\right) \cdot \sqrt{x^2+4x+3} - 66 \ln\left|x + 2 + \sqrt{x^2+4x+3}\right| + C$$

■

Есть модификация этого метода, если многочлен проступает вниз тоже. Рассмотрим следующий пример.

Задача 5. (**Д1948**)

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}}$$

□ Пусть $x > 1$, тогда сделаем замену $t = \frac{1}{x} \in (0, 1)$, тогда:

$$x = \frac{1}{t},\ \sqrt{x^2-1} = \frac{\sqrt{1-t^2}}{t},\ dx = -\frac{1}{t^2}dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}} = \int t^4 \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right) \cdot t \cdot \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = -\int \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

Теперь можем воспользоваться теоремой:

$$-\int \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}} dt = (At^2 + Bt + C) \cdot y + \lambda \int \frac{dt}{y}$$

Продифференцируем это равенство:

$$-t^3 = (2At + B) \cdot (1 - t^2) + (At^2 + Bt + C) \cdot (-t) + \lambda$$

$$\begin{cases} t^3: & -1 & = & -2A & - & A \\ t^2: & 0 & = & -B & - & B \\ t: & 0 & = & 2A & - & C \\ 1: & 0 & = & B & + & \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A & = & \frac{1}{3} \\ B & = & 0 \\ C & = & 2A & = & \frac{2}{3} \\ \lambda & = & -B & = & 0 \end{cases}$$

Таким образом, мы получим:

$$-\int \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}}dt = \left(\frac{1}{3}t^2 + \frac{2}{3}\right)\cdot\sqrt{1-t^2} + C,\; t = \frac{1}{x}$$

$\blacksquare$

Задача 6. (**Д1951**)

$$\int \frac{a_1x^2 + b_1x + c}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

Когда этот интеграл представляет собой алгебраическую функцию?

$\square$ Нам необходимо понять, когда выполнено следующее:

$$\int \frac{a_1x^2 + b_1x + c_1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = (Ax+B)\cdot y + C$$

То есть, когда $\lambda = 0$ в формуле выше. Продифференцируем и умножим на корень:

$$a_1x^2 + b_1x + c_1 = A\cdot y^2 + (Ax+B)\cdot\left(ax + \tfrac{b}{2}\right) = A(ax^2+bx+c) + (Ax+B)\left(ax+\tfrac{b}{2}\right)$$

Нужно чтобы существовали A и B так, чтобы выполнялось равенство выше. Найдем коэффициенты:

$$\begin{cases} x^2: & a_1 & = & 2aA \\ x: & b_1 & = & A\cdot b + B\cdot a + A\cdot\dfrac{b}{2} \\ 1: & c_1 & = & Ac + B\cdot\dfrac{b}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A & = & \dfrac{a_1}{2a} \\ B & = & \dfrac{\left(c_1 - \dfrac{a_1}{2a}\cdot c\right)\cdot 2}{b} \\ b_1 & = & \dfrac{3}{2}b\cdot\dfrac{a_1}{2a} + \dfrac{a}{b}\left(2c_1 - \dfrac{a_1c}{a}\right) \end{cases}$$

Таким образом, получим соотношение:

$$4abb_1 = 3b^2a_1 + 8a^2c_1 - 4aa_1c \Rightarrow 4a\cdot(bb_1 + a_1c) = 3b^2a_1 + 8a^2c_1,\; a \neq 0$$

$\blacksquare$

ДЗ: 1927, 1928, 1935 (см. указания), 1943, 1947, 1949.