Метод Остроградского

ДЗ: решить методом Остроградского: $1873, 1892, 1894, 1898$ (только нужно алгебраическую часть); без метода Остроградского: 1883.

Задача 1. (**Д1873**)

$$\int \frac{x^2}{(x^2-3x+2)^2}dx$$

□

$$P(x) = x^2,\ Q(x) = (x-1)^2(x-2)^2,\ Q_1(x) = (x-1)(x-2) = Q_2(x)$$

$$Q_2'(x) = x - 2 + x - 1 = 2x - 3$$

$$\int \frac{x^2}{(x^2-3x+2)^2}dx = \frac{Ax+B}{(x-1)(x-2)} + \int \frac{Cx+D}{(x-1)(x-2)}dx$$

$$x^2(x-1)(x-2) = A(x-1)^2(x-2)^2 - (Ax+B)(2x-3)(x-1)(x-2) + (Cx+D)(x-1)^2(x-2)^2$$

$$x^2 = A(x-1)(x-2) - (Ax+B)(2x-3) + (Cx+D)(x-1)(x-2)$$

$$\begin{cases} x^3: & C = 0 \\ x^2: & 1 = A - 2A + D \\ x: & 0 = -3A + 3A - 2B - 3D \\ 1: & 0 = 2A + 3B + 2D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = 0 \\ D = 1 + A \\ B = -\frac{3}{2}D \\ 0 = 2A - \frac{9}{2}D + 2D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -5 \\ B = 6 \\ C = 0 \\ D = -4 \end{cases}$$

$$\int \frac{x^2}{(x^2-3x+2)^2}dx = \frac{-5x+6}{(x-1)(x-2)} - 4\int \frac{1}{(x-1)(x-2)}dx$$

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{x^2}{(x^2-3x+2)^2}dx = \frac{-5x+6}{(x-1)(x-2)} - 4\ln|x-2| + 4\ln|x-1| + C$$

■

Задача 2. (**Д1892**)

$$\int \frac{dx}{(x^3+1)^2}$$

□

$$P(x) = 1,\ Q(x) = (x^3+1)^2$$

Заметим, что у x^3+1 нет кратных корней, это обычно можно понять так:

$$G(x) = (x-x_1)^k \ldots \Rightarrow G'(x) = n(x-x_1)^{k-1}\ldots$$

то есть надо посмотреть, есть ли у многочлена и его производной общие корни, поскольку кратные корни понижаются в степени, но остаются. В нашем случае:

$$G(x) = x^3 + 1 = 0,\ G'(x) = 3x^2 = 0$$

То есть система не имеет решений $\Rightarrow$ кратных корней нет. Тогда:

$$Q_1(x) = x^3+1,\ Q_2(x) = x^3+1$$

$$\int \frac{dx}{(x^3+1)^2} = \frac{Ax^2+Bx+C}{x^3+1} + \int \frac{Dx^2+Ex+F}{x^3+1}dx$$

$$1(x^3+1) = (2Ax+B)(x^3+1)^2 - (Ax^2+Bx+C)3x^2(x^3+1) + (Dx^2+Ex+F)(x^3+1)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = (2Ax+B)(x^3+1) - (Ax^2+Bx+C)3x^2 + (Dx^2+Ex+F)(x^3+1)$$

Как можно быстро получить коэффициенты в левой и правой частях? Рассмотрим ещё один метод:

$$z \in \mathbb{C}\colon z^3+1=0 \Rightarrow z_1=-1,\ z_2=e^{\frac{\pi i}{3}},\ z_3=e^{-\frac{\pi i}{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = -(Az^2+Bz+C)3z^2 = 3Az+3B-3Cz^2 = 0$$

Многочлен степени не выше 2 в трёх точках равен 1 $\Rightarrow$ этот многочлен $\equiv 1$, тогда:

$$A=0,\ C=0,\ B=\frac{1}{3}$$

Таким образом, мы посчитали алгебраическую часть не считая трансцендентную. Можем досчитать остальные коэффициенты и найти исходный интеграл.

$$1 = \frac{1}{3}(x^3+1) - x^3 + (Dx^2+Ex+F)(x^3+1)$$

$$\begin{cases} x^5\colon & D = 0 \\ x^4\colon & E = 0 \\ x^3\colon & 0 = \frac{1}{3} - 1 + F \end{cases} \Rightarrow F = \frac{2}{3}$$

$$\int \frac{dx}{(x^3+1)^2} = \frac{1}{3}\frac{x}{x^3+1} + \frac{2}{3}\int \frac{1}{x^3+1}dx$$

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{G}{x+1} + \frac{Hx+I}{x^2-x+1} = \frac{Gx^2-Gx+G+Hx^2+Hx+Ix+I}{x^3+1}$$

$$G+H=0,\ -G+H+I=0,\ G+I=1 \Rightarrow G=-H,\ 2H+I=0,\ -H+I=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I=\frac{2}{3},\ H=-\frac{1}{3},\ G=\frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\frac{2}{3}\int \frac{1}{x^3+1}dx = \frac{2}{9}\int \frac{1}{x+1}dx + \frac{2}{9}\int \frac{-x+2}{x^2-x+1}dx = \frac{1}{9}\ln(x+1)^2 - \frac{1}{9}\int \frac{d(x^2-x+1)}{x^2-x+1} +$$

$$+\frac{1}{3}\int \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx = \frac{1}{9}\ln(x+1)^2 - \frac{1}{9}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{3}\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{(x^3+1)^2} = \frac{1}{3}\frac{x}{x^3+1} + \frac{1}{9}\ln\left(\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}\right) + \frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

■

Задача 3. (**Д1894**)

$$\int \frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2}dx$$

□

$$P(x) = x^2,\ Q(x) = (x^2+2x+2)^2$$

Проверим кратность корней у квадратного трехчлена:

$$G(x) = x^2+2x+2 = 0,\ G'(x) = 2x+2 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow 1-2+2 \neq 0$$

Следовательно кратных корней нет. Тогда:

$$Q_1(x) = x^2+2x+2 = Q_2(x),\ Q_2'(x) = 2x+2$$

$$\int \frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2}dx = \frac{Ax+B}{x^2+2x+2} + \int \frac{Cx+D}{x^2+2x+2}dx$$

$$x^2(x^2+2x+2) = A(x^2+2x+2)^2 - (Ax+B)(2x+2)(x^2+2x+2) + (Cx+D)(x^2+2x+2)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = A(x^2+2x+2) - (Ax+B)(2x+2) + (Cx+D)(x^2+2x+2)$$

$$\begin{cases} x^3\colon & 0 & = & C \\ x^2\colon & 1 & = & A-2A+D \\ x\colon & 0 & = & 2A-2A-2B+2D \\ 1\colon & 0 & = & A-2B+2D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 & = & C \\ 1 & = & D-A \\ B & = & D \\ A & = & 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A & = & 0 \\ B & = & 1 \\ C & = & 0 \\ D & = & 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2}dx = \frac{1}{x^2+2x+2} + \int \frac{1}{(x+1)^2+1}dx = \frac{1}{x^2+2x+2} + \operatorname{arctg}(x+1) + C$$

■

Задача 4. (**Д1898**) Выделить алгебраическую часть интеграла:

$$\int \frac{x^2+1}{(x^4+x^2+1)^2}dx$$

□

$$P(x) = x^2+1,\ Q(x) = (x^4+x^2+1)^2$$

Проверим кратность корней у квадратного трехчлена:

$$G(x) = x^4+x^2+1 = 0,\ G'(x) = 4x^3+2x = 0 \Rightarrow x(4x^2+2) = 0 \Rightarrow x = 0, x = \pm\sqrt{-\tfrac{1}{2}} = \pm i\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

$$G(0) = 1 \neq 0,\ G\left(\pm i\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{4} \neq 0$$

Следовательно кратных корней нет. Тогда:

$$Q_1(x) = Q_2(x) = x^4+x^2+1,\ P_2(x) = Ax^3+Bx^2+Cx+D$$

$$(x^2+1)Q_2(x) = (3Ax^2+2Bx+C)Q_2^2(x) - (Ax^3+Bx^2+Cx+D)(4x^3+2x)Q_2(x) + P_1(x)Q_2^2(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+1 = (3Ax^2+2Bx+C)Q_2(x) - (Ax^3+Bx^2+Cx+D)(4x^3+2x) + P_1(x)Q_2(x)$$

$$z \in \mathbb{C}\colon z^4+z^2+1 = 0 \Rightarrow Q_2(z) = 0 \Rightarrow z^2+1 = -(Az^3+Bz^2+Cz+D)(4z^3+2z) \Rightarrow$$

Поскольку у нас возникают слагаемые степени выше 3, то избавимся от них:

$$z^4 = -z^2 - 1 \Rightarrow z^5 = -z^3 - z,\ z^6 = -z^4 - z^2 = 1$$

Следовательно мы получим систему уравнений:

$$-z^2 - 1 = 2Az^4 + 2Bz^3 + 2Cz^2 + 2Dz + 4Az^6 + 4Bz^5 + 4Cz^4 + 4Dz^3 =$$

$$= (2A + 4C)z^4 + (2B + 4D - 4B)z^3 + 2Cz^2 + (2D - 4B)z + 4A =$$
$$= (4D - 2B)z^3 + (2C - 2A - 4C)z^2 + (2D - 4B)z + (4A - 2A - 4C)$$

$$\begin{cases} z^3: & 0 & = & 4D - 2B \\ z^2: & -1 & = & -2C - 2A \\ z: & 0 & = & 2D - 4B \\ 1: & -1 & = & 2A - 4C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A & = & \frac{1}{2} - C \\ B & = & 2D = 0 \\ D & = & 2B = 0 \\ A & = & 2C - \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A & = & \frac{1}{6} \\ B & = & 0 \\ C & = & \frac{1}{3} \\ D & = & 0 \end{cases}$$

Следовательно, алгебраическая часть будет иметь вид:

$$\frac{P_2(x)}{Q_2(x)} = \frac{1}{6} \cdot \frac{x^3 + 2x}{x^4 + x^2 + 1}$$

$\blacksquare$

Задача 5. (**Д1883**)

$$\int \frac{dx}{x^4 - 1}$$

$\square$

$$\frac{1}{x^4 - 1} = \frac{1}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)} = \frac{1}{(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{(Ax + A)(x^2 + 1) + (Bx - B)(x^2 + 1) + (Cx + D)(x^2 - 1)}{x^4 - 1} = \frac{1}{x^4 - 1}$$

$$\begin{cases} x^3: & 0 & = & A + B + C \\ x^2: & 0 & = & A - B + D \\ x: & 0 & = & A + B - C \\ 1: & 1 & = & A - B - D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A & = & -B \\ C & = & 0 \\ D & = & -2A \\ D & = & 2A - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A & = & \frac{1}{4} \\ B & = & -\frac{1}{4} \\ C & = & 0 \\ D & = & -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{x^4 - 1} = \frac{1}{4} \ln|x - 1| - \frac{1}{4} \ln|x + 1| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C = \frac{1}{4} \ln\left|\frac{x - 1}{x + 1}\right| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C$$

$\blacksquare$