Теорема об обратной функции

Теорема 1. (Банаха) Пусть (X, ρ) - полное метрическое пространство и $F\colon X \to X$ - сжимающее отображение с коэффициентом сжатия $0 < q < 1$, то есть:

$$\rho(F(x_1), F(x_2)) \leq q{\cdot}\rho(x_1, x_2),\ \forall x_1, x_2$$

Тогда $\exists!\, x_0 \in X\colon F(x_0) = x_0$, где x_0 называется неподвижной точкой F.

Одномерный случай: $\mathbb{R}$

Опр: 1. Если функция $f\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ - биекция, такая что f, f^{-1} - непрерывно дифференцируемы, то говорят, что задан диффеоморфизм.

Теорема 2. (Об обратной функции) Пусть f - непрерывно дифференцируема в окрестности точки a и $f'(a) \neq 0$. Тогда существует интервалы $\mathcal{U}(a)$ и $\mathcal{V}\big(f(a)\big)$ такие, что $f\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ - диффеоморфизм.

В прошлый раз мы доказали эту теорему используя строгую монотонность, но как уже отметили в многомерном случае нет такого понятия, поэтому докажем теорему ещё раз без его использования. Далее, мы увидим что эти идеи хорошо переносятся на многомерный случай.

□ Докажем теорему без использования строгой монотонности.

(1) Мы хотим для $y = f(x)$ построить обратную функцию $\Leftrightarrow$ решить это уравнение относительно x для каждого y. Пусть $q \neq 0$. Тогда:

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = x + q(y - f(x))$$

Таким образом задача о решении уравнения превратилась в задачу о поиске неподвижной точки у отображения:

$$G_y(x) = x + q(y - f(x))$$

Поскольку мы ищем обратную функцию, то неподвижная точка $x = G_y(x)$ для каждого y должна быть единственной;

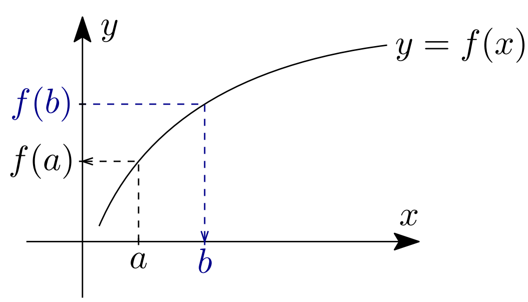

Рис. 1: Построение обратной функции к $y = f(x)$, $f\colon a \to f(a)$, $f^{-1}\colon f(b) \to b$.

(2) Возьмем $\overline{B}(a, \alpha) = [a - \alpha, a + \alpha]$ и $B\big(f(a), \beta\big) = \big(f(a) - \beta, f(a) + \beta\big)$, найдем α и β такие, что:

$$\forall y \in B\big(f(a), \beta\big),\ \exists!\, x \in B(a, \alpha)\colon G_y(x) = x$$

Следовательно, найдем α и β такие, что: $\forall y \in B\big(f(a), \beta\big)$, $G_y\colon \overline{B}(a, \alpha) \to \overline{B}(a, \alpha)$ - сжимающее отображение: $|G_y(x_1) - G_y(x_2)| \leq p{\cdot}|x_1 - x_2|$, $0 < p < 1$. Возьмем производную $G_y(x)$:

$$\tfrac{d}{dx} G_y(x) = 1 - q{\cdot}f'(x)$$

Поскольку q не был изначально задан (кроме того, что $q \neq 0$), то в качестве q возьмем $\frac{1}{f'(a)}$, в этом случае $\frac{d}{dx}G_y(a) = 0$. Заметим, что производная $G_y(x)$ не зависит от y (только от x). Более того, поскольку f - непрерывно дифференцируема в окрестности точки a, то $\frac{d}{dx}G_y(x)$ - непрерывна. Тогда в малой окрестности точки a эта производная мало отличается от 0 и следовательно будет верно следующее:

$$\exists\, \alpha > 0\colon \forall x \in [a-\alpha, a+\alpha],\ \left|\tfrac{d}{dx}G_y(x)\right| < \tfrac{1}{2}$$

Используя теорему Лагранжа, на отрезке $[a-\alpha, a+\alpha]$ мы получим следующее:

$$G_y(x_1) - G_y(x_2) = \tfrac{d}{dx}G_y(c)\cdot(x_1 - x_2) \Rightarrow |G_y(x_1) - G_y(x_2)| = \left|\tfrac{d}{dx}G_y(c)\right|\cdot|x_1 - x_2| \leq \tfrac{1}{2}\cdot|x_1 - x_2|$$

Следовательно $G_y(x)$ - сжимающее отображение. Теперь найдем β такое, что:

$$\forall y \in \big(f(a) - \beta, f(a) + \beta\big),\ G_y\colon [a-\alpha, a+\alpha] \to [a-\alpha, a+\alpha]$$

Возьмем $x \in [a-\alpha, a+\alpha]$ и оценим расстояние $|G_y(x) - a|$. Для этого заметим, что $G_{f(a)}(a) = a$, значит $|G_y(x) - a| = |G_y(x) - G_{f(a)}(a)|$. Вычтем, добавим $G_y(a)$, воспользуемся неравенством треугольника и применим свойство сжимающего отображения, тогда:

$$|G_y(x) - G_{f(a)}(a)| = |G_y(x) - G_y(a) + G_y(a) - G_{f(a)}(a)| \leq |G_y(x) - G_y(a)| + |G_y(a) - G_{f(a)}(a)| \leq$$
$$\leq \tfrac{1}{2}\cdot|x-a| + |q|\cdot|y - f(a)| \leq \tfrac{1}{2}\cdot\alpha + |q|\cdot\beta$$

где последнее неравенство верно, поскольку взяли $x \in [a-\alpha, a+\alpha]$, а y мы взяли из интервала радиуса β с центром в $f(a)$. Тогда выберем β таким, чтобы сумма $\frac{1}{2}\cdot\alpha + |q|\cdot\beta$ была меньше $\frac{3\alpha}{4}$, что в свою очередь меньше α. Получим, что:

$$|G_y(x) - a| = |G_y(x) - G_{f(a)}(a)| \leq \tfrac{1}{2}\cdot\alpha + |q|\cdot\beta \leq \tfrac{3\alpha}{4} < \alpha$$

то есть, при таком выборе β, будет справедливо следующее:

$$\forall y \in \big(f(a) - \beta, f(a) + \beta\big),\ G_y\colon [a-\alpha, a+\alpha] \to (a-\alpha, a+\alpha)$$

Отрезок $[a-\alpha, a+\alpha]$ - это полное метрическое пространство. Таким образом, мы подобрали отрезок $\overline{B}(a,\alpha) = [a-\alpha, a+\alpha]$ и интервал $B\big(f(a),\beta\big) = \big(f(a)-\beta, f(a)+\beta\big)$ такие, что по теореме Банаха:

$$\forall y \in B\big(f(a),\beta\big),\ \exists!\, x \in B(a,\alpha)\colon G_y(x) = x \Leftrightarrow y = f(x)$$

то есть построили однозначную обратную функцию из интервала $B\big(f(a),\beta\big)$ внутрь отрезка $\overline{B}(a,\alpha)$;

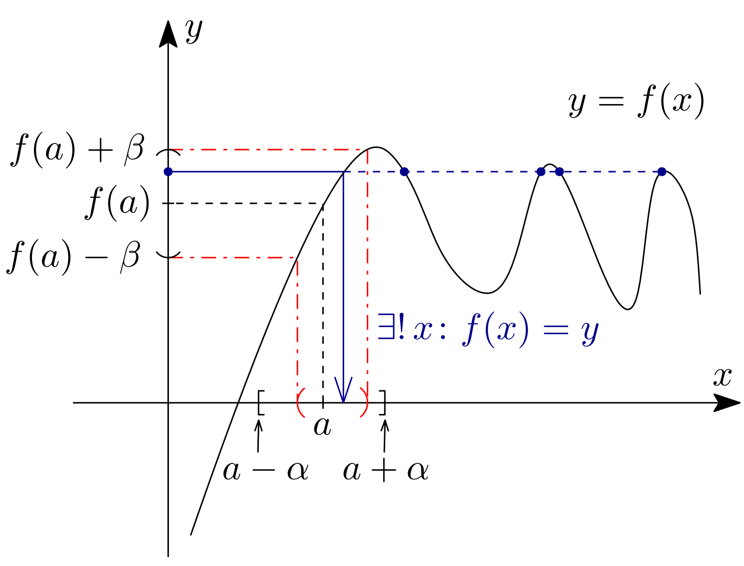

Рис. 2: Существование единственного x для каждого $y \in B\big(f(a),\beta\big)$.

Rm: 1. Поскольку $G_y\colon [a-\alpha, a+\alpha] \to (a-\alpha, a+\alpha)$, то неподвижная точка $x = G_y(x)$ может находится только внутри интервала (области значений G_y).

(3) Обозначим через $\mathcal{V} = \big(f(a)-\beta, f(a)+\beta\big)$, а в качестве $\mathcal{U}$ возьмем $f^{-1}(\mathcal{V}) \cap (a-\alpha, a+\alpha)$ - прообраз пересеченный с интервалом $B(a,\alpha)$, поскольку прообраз сам по себе может быть неоднозначным. Очевидно, что $f\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$, поскольку в качестве $\mathcal{U}$ берутся только точки из прообраза $\mathcal{V}$. Проверим, что f это биекция:

1) **Сюръекция**: По построению $\forall y \in \mathcal{V},\ \exists\, x \in \mathcal{U}\colon y = f(x)$;

2) **Инъекция**: По построению $\forall y \in \mathcal{V},\ \exists!\, x \in \mathcal{U}\colon y = f(x)$;

Таким образом, $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ - открытые множества и $f\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ - биекция;

(4) Проверим, что $f^{-1}\colon \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ является непрерывной: пусть $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$, где $y_1, y_2 \in \mathcal{V}$. Оценим следующую разность $|x_1 - x_2| = |G_{y_1}(x_1) - G_{y_2}(x_2)|$, по построению:

$$|G_{y_1}(x_1) - G_{y_2}(x_2)| \leq |G_{y_1}(x_1) - G_{y_1}(x_2)| + |G_{y_1}(x_2) - G_{y_2}(x_2)| \leq \tfrac{1}{2}|x_1 - x_2| + |q|\cdot|y_1 - y_2|$$

Перенесем $|x_1 - x_2|$ в левую часть и домножим на 2, тогда получим следующее неравенство:

$$|x_1 - x_2| - \tfrac{1}{2}|x_1 - x_2| \leq |q|\cdot|y_1 - y_2| \Rightarrow |x_1 - x_2| \leq 2|q|\cdot|y_1 - y_2|$$

И таким образом мы получили не просто непрерывность, а Липшевость $\Rightarrow f^{-1}$ - Липшицево отображение. Следовательно функция f это гомеоморфизм (f - биекция, f, f^{-1} - непрерывны);

(5) Так как $f'(a) \neq 0$ и f' - непрерывная функция, то по теореме отделимости $f' \neq 0$ в целой окрестности точки a. Пусть мы выбирали α таким образом, что:

$$f'(x) \neq 0,\ \forall x \in [a-\alpha, a+\alpha]$$

Отсюда следует, что $\forall x \in \mathcal{U},\ f'(x) \neq 0$, следовательно по теореме о дифференцируемости обратной функции f^{-1} - дифференцируема и $(f^{-1})' = \frac{1}{f'}$. Вспомним, что верно следующее:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(y)\big)}$$

где f' - непрерывная функция по условию, f^{-1} - непрерывная по построению, тогда $(f^{-1})'$ - непрерывная функция;

■

Rm: 2. Мы выбрали способ доказательства, который работает не только в $\mathbb{R}^n$, но и в любых разумных пространствах и который одновременно с этим насыщен идеями, которые работают не только в этой теореме, но и во многих других разделах математики.

Общий случай: $\mathbb{R}^n$

Нам теперь предстоит обобщить одномерное доказательство на многомерный случай. В одномерном случае мы пользовались теоремой о среднем, следовательно для обобщения нам необходимо получить аналог этой теоремы.

Лемма 1. Пусть $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ - дифференцируема в шаре $B(a,r)$ и $\|J_g(x)\| \leq q$, $\forall x \in B(a,r)$. Тогда $\forall x_1, x_2 \in B(a,r)$ верно неравенство:

$$\|g(x_1) - g(x_2)\| \leq q \cdot \|x_1 - x_2\|$$

Rm: 3. В одномерном случае это был бы очевидный факт, как следствие теоремы Лагранжа.

☐ Пусть $x_1, x_2 \in B(a,r)$.

Рассмотрим случай $n = 1$, тогда $J_g(x) = g'(x) \Rightarrow$ по теореме Лагранжа верно следующее:

$$g(x_1) - g(x_2) = g'(c)(x_1 - x_2) \Rightarrow |g(x_1) - g(x_2)| \leq q|x_1 - x_2|$$

Рассмотрим случай $n > 1$, пусть $\varphi(t) = \Big\langle g\big(x_1 + t(x_2 - x_1)\big), g(x_2) - g(x_1)\Big\rangle$, найдем $\frac{d\varphi}{dt}$. Для этого важно понять, что $\varphi(t)$ это композиция трех отображений:

(1) $L(v) = \langle v, g(x_2) - g(x_1)\rangle$ - линейное отображение $\Rightarrow dL(a,h) = L(h)$;

(2) $g(x) \Rightarrow dg(x,h) = J_g(x) \cdot h$;

(3) $x(t) = x_1 + t(x_2 - x_1) \Rightarrow dx(t,h) = (x_2 - x_1) \cdot h$;

Тогда исходная функция и её дифференциал будут иметь следующий вид:

$$\varphi(t) = L\Big(g\big(x(t)\big)\Big) \Rightarrow d\varphi(h) = \big(dL \circ dg \circ dx\big)(t,h) = dL\Big(g\big(x(t)\big), dg\big(x(t), dx(t,h)\big)\Big) =$$

$$= L\Big(dg\big(x(t), dx(t,h)\big)\Big) = L\Big(J_g\big(x(t)\big) \cdot dx(t,h)\Big) = L\Big(J_g\big(x(t)\big) \cdot (x_2 - x_1) \cdot h\Big) = L\Big(J_g\big(x(t)\big) \cdot (x_2 - x_1)\Big) \cdot h =$$

$$= \Big\langle J_g\big(x_1 + t(x_2 - x_1)\big) \cdot (x_2 - x_1), g(x_2) - g(x_1)\Big\rangle \cdot h = \varphi'(t) \cdot h$$

Таким образом, по определению производной получим следующее:

$$\tfrac{d\varphi}{dt} = \Big\langle J_g\big(x_1 + t(x_2 - x_1)\big) \cdot (x_2 - x_1), g(x_2) - g(x_1)\Big\rangle = \Big\langle J_g \cdot (x_2 - x_1), g(x_2) - g(x_1)\Big\rangle$$

Поскольку для норм матриц верно следующее: $\forall x$, $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$, то используя неравенство Коши-Буняковского получим следующее:

$$\Big|\tfrac{d\varphi}{dt}\Big| \leq \|J_g \cdot (x_2 - x_1)\| \cdot \|g(x_2) - g(x_1)\| \leq \|J_g\| \cdot \|x_2 - x_1\| \cdot \|g(x_2) - g(x_1)\| \leq q \cdot \|x_2 - x_1\| \cdot \|g(x_2) - g(x_1)\|$$

где последнее неравенство верно в силу того, что $x_1, x_2 \in B(a,r)$ следовательно $x(t) \in B(a,r)$. Поскольку $\varphi(t)$, $t \in [0,1]$ это функция одной переменной, то по теореме Лагранжа получим следующее:

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(c) = \Big\langle g(x_2), g(x_2) - g(x_1)\Big\rangle - \Big\langle g(x_1), g(x_2) - g(x_1)\Big\rangle = \Big\langle g(x_2) - g(x_1), g(x_2) - g(x_1)\Big\rangle =$$

$$= \|g(x_2) - g(x_1)\|^2 = \varphi'(c) \leq q \cdot \|x_2 - x_1\| \cdot \|g(x_2) - g(x_1)\|$$

Сократим на норму $\|g(x_2) - g(x_1)\|$ и получим требуемый результат:

$$\|g(x_2) - g(x_1)\| \leq q \cdot \|x_2 - x_1\|$$

■

Теорема 3. (Об обратной функции) Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ непрерывно дифференцируема в окрестности точки a (то есть все функции $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ - непрерывны в окрестности точки a), причем матрица Якоби J_f в точке a - обратима (т.е. существует обратная матрица $J_f^{-1}(a)$ в точке a). Тогда существуют открытые множества $\mathcal{U}\colon a \in \mathcal{U}$ и $\mathcal{V}\colon f(a) \in \mathcal{V}$ такие, что $f\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ это диффеоморфизм.

□ Докажем теорему по аналогии с одномерным случаем.

(1) Заметим, что равенство $y = f(x) \Leftrightarrow x = x + Q(y - f(x))$, где Q - невырожденная матрица. Эта идея приводит к тому, что нужно рассмотреть отображение:

$$F_y(x) = x + Q(y - f(x))$$

Тем самым выразить x через $y \Leftrightarrow$ найти неподвижную точку $F_y\colon F_y(x) = x$. Чтобы найти такие точки хотелось бы применить теорему Банаха, которая помимо существования обеспечит их единственность для каждого y, но для этого требуется сжимаемость отображения и отображение полного метрического пространства в себя;

(2) Пусть $Q = J_f(a)^{-1}$. Рассмотрим отображение $F_y(x) = x + Q(y - f(x))$. В окрестности точки a это дифференцируемое отображение:

1) $x \to x$ - дифференцируемо;
2) y - фиксирован $\Rightarrow y - f(x)$ - дифференцируемо;
3) $Q(y - f(x))$ - линейное отображение $\Rightarrow$ композиция дифференцируема;

Найдем матрицу Якоби этого отображения:

$$dF_y(h) = dx(h) + d\big(Q \circ \big(y - f(x)\big)\big)(h) = h + dQ\big(d(y - f(x))(h)\big) = h + Q\big(d(y - f(x))(h)\big) =$$
$$= h - Qdf(h) = h - Q{\cdot}J_f{\cdot}h = (\mathrm{I} - Q{\cdot}J_f){\cdot}h \Rightarrow J_{F_y}(x) = \mathrm{I} - Q{\cdot}J_f(x)$$

Если подставить a, то получим следующее:

$$J_{F_y}(a) = \mathrm{I} - J_f(a)^{-1}{\cdot}J_f(a) = \mathrm{I} - \mathrm{I} = 0$$

Так как f непрерывно дифференцируема $\Leftrightarrow$ её частные производные $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ - непрерывные функции, то отображение $x \to J_f(x)$ - непрерывно (отображение из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^{n^2}$), поскольку элементы этой матрицы это $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$. Следовательно, отображение $x \to J_{F_y}(x)$ - непрерывно, тогда верно следующее:

$$\exists\, \alpha > 0\colon \forall x \in \overline{B}(a, \alpha),\ \forall y,\ \|J_{F_y}(x) - J_{F_y}(a)\| = \|J_{F_y}(x)\| \leq \tfrac{1}{2}$$

где нам не важно, какая норма $\|\cdot\|$ указана, поскольку в $\mathbb{R}^{n^2}$ все нормы эквивалентны при покоординатной сходимости. По лемме-аналогу теоремы о среднем будет верно следующее:

$$\|F_y(x_1) - F_y(x_2)\| \leq \tfrac{1}{2}{\cdot}\|x_1 - x_2\|,\ \forall x_1, x_2 \in \overline{B}(a, \alpha)$$

То есть F_y это сжимающее отображение с коэффициентом сжатия $\frac{1}{2}$. Для выполнения теоремы Банаха нам не хватает, чтобы замкнутый шар отображался в себя же:

$$F_y\colon \overline{B}(a, \alpha) \to \overline{B}(a, \alpha)$$

Чтобы понять это, нужно рассмотреть насколько образ x из шара отличается от точки a. Оценим расстояние $\|F_y(x) - a\| = \|F_y(x) - F_{f(a)}(a)\|$, когда $x \in \overline{B}(a, \alpha)$. Если это расстояние будет $\leq \alpha$, тогда элементы этого шара будут переходить обратно в него же. Вычтем, добавим $F_y(a)$ и воспользуемся неравенством треугольника:

$$\|F_y(x) - F_{f(a)}(a)\| = \|F_y(x) - F_y(a) + F_y(a) - F_{f(a)}(a)\| \leq \|F_y(x) - F_y(a)\| + \|F_y(a) - F_{f(a)}(a)\|$$

Используем лемму-аналог теоремы о среднем и подставим значение функции $F_y(a)$ в неравенство выше, тогда получим следующее:

$$\|F_y(x) - F_y(a)\| + \|F_y(a) - F_{f(a)}(a)\| \leq \tfrac{1}{2}\cdot\|x-a\| + \|Q\big(y - f(a)\big)\| \leq \tfrac{1}{2}\cdot\|x-a\| + \|Q\|\cdot\|y - f(a)\|$$

Пусть $y \in B\big(f(a), \beta\big)$, где выбираем β так, чтобы $\|Q\|\cdot\beta < \frac{\alpha}{4}$, тогда будет выполнено следующее:

$$\forall x \in \overline{B}(a,\alpha),\ \|F_y(x) - a\| = \|F_y(x) - F_{f(a)}(a)\| < \tfrac{1}{2}\cdot\alpha + \tfrac{\alpha}{4} = \tfrac{3\alpha}{4} < \alpha$$

Следовательно, для каждого $y \in B\big(f(a), \beta\big)$ мы получили отображение $F_y(x)$, которое отображает замкнутый шар внутрь себя:

$$\forall y \in B\big(f(a), \beta\big),\ F_y\colon \overline{B}(a,\alpha) \to B(a, \tfrac{3\alpha}{4}) \subset B(a,\alpha)$$

Заметим, что $\overline{B}(a,\alpha)$ - полное метрическое пространство:

1) **Метрическое**: как подмножество метрического пространства;
2) **Полное**: исходное пространство полное $\Rightarrow$ любая фундаментальная последовательность в этом шаре сходится, а поскольку шар замкнутый, то предел такой последовательности должен лежать в нём же;

Таким образом, мы подобрали замкнутый шар $\overline{B}(a,\alpha)$ и открытый шар $B\big(f(a),\beta\big)$ такими, что:

$$\forall y \in B\big(f(a), \beta\big),\ F_y\colon \overline{B}(a,\alpha) \to B(a,\alpha)$$

это сжимающее отображине с коэффициентом сжатия $\frac{1}{2}$ и по теореме Банаха будет выполнено:

$$\exists!\, x \in B(a,\alpha)\colon F_y(x) = x$$

где $x = x + Q\big(y - f(x)\big) \Leftrightarrow y = f(x)$. Или по-другому:

$$\forall y \in B\big(f(a), \beta\big),\ \exists!\, x \in B(a,\alpha)\colon y = f(x)$$

то есть построили обратное отображение;

(3) Обозначим шар $\mathcal{V} = B\big(f(a), \beta\big)$, а в качестве $\mathcal{U}$ возьмем прообраз шара $B\big(f(a),\beta\big)$ пересеченный с шаром $B(a,\alpha)$ то есть $\mathcal{U} = f^{-1}\Big(B\big(f(a),\beta\big)\Big) \cap B(a,\alpha)$. Пересечение необходимо, чтобы построить обратную функцию локально, поскольку возможны ситуации, когда прообраз будет соответствовать множеству точек.

Отображение $f\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ - биекция:

1) **Сюръекция**: По построению $\forall y \in \mathcal{V},\ \exists\, x \in \mathcal{U}\colon y = f(x)$;
2) **Инъекция**: По построению $\forall y \in \mathcal{V},\ \exists!\, x \in \mathcal{U}\colon y = f(x)$;

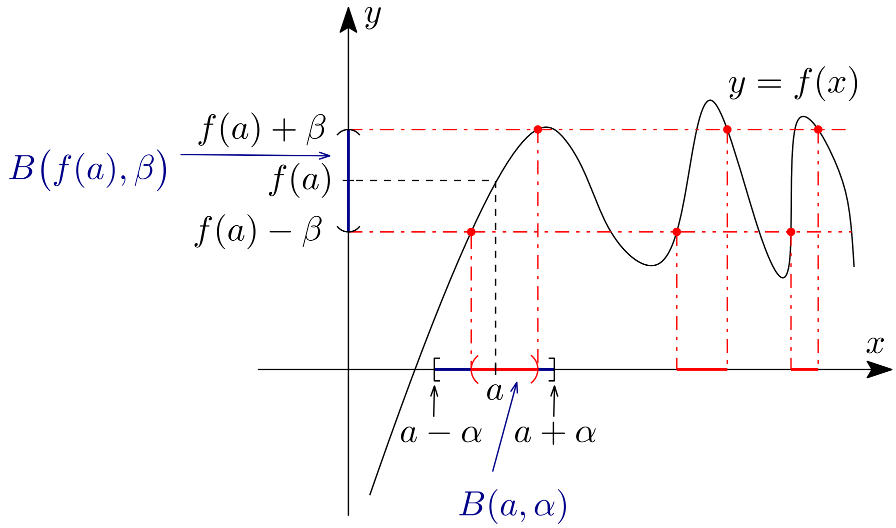

Рис. 3: Локальный прообраз шара $B\big(f(a),\beta\big)$: $f^{-1}\Big(B\big(f(a),\beta\big)\Big)\cap B(a,\alpha)$.

По условию, f - дифференцируема $\Rightarrow$ непрерывна, $B\big(f(a),\beta\big)$ - открытое множество $\Rightarrow$ прообраз открытого множества - открытое множество и оно пересекается с открытым множеством $B(a,\alpha)$. Следовательно, $\mathcal{U}$ - открытое множество. $\mathcal{V}$ - открытое множество по определению;

(4) Проверим, что $f^{-1}\colon \mathcal{V}\to\mathcal{U}$ является непрерывной: пусть $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$, где $y_1, y_2 \in \mathcal{V}$. Очевидно, что x_1 - неподвижная точка для F_{y_1}, x_2 - неподвижная точка для F_{y_2}. Оценим следующую разность $\|x_1 - x_2\| = \|F_{y_1}(x_1) - F_{y_2}(x_2)\|$, по построению:

$$\|F_{y_1}(x_1) - F_{y_2}(x_2)\| \le \|F_{y_1}(x_1) - F_{y_1}(x_2)\| + \|F_{y_1}(x_2) - F_{y_2}(x_2)\| \le \tfrac{1}{2}\cdot\|x_1 - x_2\| + \|Q\|\cdot\|y_1 - y_2\|$$

Перенесем $\|x_1 - x_2\|$ в левую часть и домножим на 2, тогда получим следующее неравенство:

$$\|x_1 - x_2\| - \tfrac{1}{2}\cdot\|x_1 - x_2\| \le \|Q\|\cdot\|y_1 - y_2\| \Rightarrow \|x_1 - x_2\| \le 2\cdot\|Q\|\cdot\|y_1 - y_2\|$$

Таким образом, если $y_1 \to y_2 \Rightarrow x_1 \to x_2$ и следовательно f^{-1} - непрерывное отображение. Но на самом деле, мы получили не просто непрерывность, а Липшевость $\Rightarrow$ f^{-1} - Липшицево отображение. Следовательно функция f это гомеоморфизм (f - биекция, f, f^{-1} - непрерывны);

(5) Так как f непрерывно дифференцируема (элементы $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ это непрерывные функции) в окрестности точки a, то $x \to \det\big(J_f(x)\big)$ - непрерывная функция в ней. Тогда из условия $\det\big(J_f(a)\big) \ne 0$ следует, что по теореме отделимости $\exists$ окрестность точки a такая, что в этой окрестности определитель не ноль $\Rightarrow$ выбираем α таким образом, что:

$$\det\big(J_f(x)\big) \ne 0,\ \forall x \in B(a,\alpha)$$

То есть матрица Якоби обратима в окрестности $B(a,\alpha)$ точки a. Поскольку функция f это гомеоморфизм, она дифференцируема в $\mathcal{U}$ и дифференциал обратим (в силу того, что матрица Якоби обратима $\Leftrightarrow$ обратим df), то по теореме о дифференцируемости обратной функции f^{-1} - дифференцируема в каждой точке $\mathcal{V}$ и $(df)^{-1} = df^{-1}$ или, что то же самое, в матрицах Якоби:

$$J_{f^{-1}}(y) = \Big(J_f\big(f^{-1}(y)\big)\Big)^{-1}$$

Поскольку J_f - непрерывная функция по условию, f^{-1} - непрерывная по построению, вычисление обратной матрицы $\Leftrightarrow$ непрерывное преобразование от элементов матрицы, тогда $J_{f^{-1}}(y)$ - непрерывная функция по y. Следовательно, f^{-1} - непрерывно дифференцируема;

$\blacksquare$

Теорема о неявной функции

С помощью теоремы об обратной функции, мы сможем менять локально координаты и приводить их к таким, которые нам удобны. Самое интересное, что хотелось бы изучить у функций многих переменных это то, как устроены их линии уровней.

Множество уровня гладких функций

Опр: 2. Линией (множеством) уровня функции F называется множество точек на котором значение этой функции равно константе: $\{x \mid F(x) = \text{const}\}$.

Рассмотрим случай $\mathbb{R}^2$. Пусть есть функция $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Как её нарисовать? Нарисуем линии уровня этой функции $F(x,y) = c$ для разных c. Например, для функции $F(x,y) = x^2 + y^2$. Соответственно, изучив линии уровня мы начнем представлять как устроена функция F.

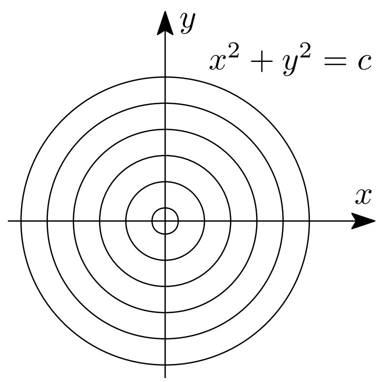

Рис. 4: Линии уровня функции $F(x,y) = x^2 + y^2$.

Функцию многих переменных нарисовать обычно затруднительно, но линии уровня всегда можно нарисовать и хотелось бы выяснить, как эти функции выглядят. Например, нас заинтересовало множество уровня нуля $F(x,y) = 0$, оно может быть:

(1) пустым $\big(F(x,y) = x^2 + y^2 + 1 = 0\big)$;

(2) состоящим из одной точки $\big(F(x,y) = x^2 + y^2 = 0\big)$;

(3) всем $\mathbb{R}^2$ $\big(F(x,y) \equiv 0\big)$;

Видно, что множеством уровня может быть практически всё что угодно. Аналогично, у функции

$$F(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in A \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

линией уровня $F(x,y) = 1$ является всё множество A. Но это вовсе не линия. Следовательно, хочется немного сузить класс функций, например до непрерывных.

Утв. 1. Если F - непрерывна, то множество $\{(x,y) \mid F(x,y) = \text{const}\}$ замкнуто.

$\square$ Возьмем последовательность $(x_n, y_n)\colon (x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$. По непрерывности F получим, что:

$$(x_n, y_n) \to (x_0, y_0) \Rightarrow F(x_n, y_n) \to F(x_0, y_0),\ \forall n \in \mathbb{N},\ F(x_n, y_n) = c \Rightarrow F(x_0, y_0) = \lim_{n\to\infty} F(x_n, y_n) = c$$

$\blacksquare$

Чуть позже мы докажем, что любое замкнутое множество может являться множеством уровня гладкой функции. Как мы уже убедились: если функция - "любая", то и множество уровня у неё любое. Но интуитивно кажется, что множество линий уровня это линии, это в целом верно и об этом говорит теорема о неявной функции.

Теорема 4. (О неявной функции для $\mathbb{R}^2$) Пусть $F(x, y)$ непрерывно дифференцируема в окрестности точки (x_0, y_0). Если выполнены следующие условия:

1) $F(x_0, y_0) = 0$;

2) $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$;

то $\exists \mathcal{U}(x_0)$, $\mathcal{V}(y_0)$ и $f \colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ - непрерывно дифференцируемая такие, что в окрестности $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ справедливо следующее:

$$F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$$

Геометрический смысл: Взяли некую точку (x_0, y_0). Известно, что в этой точке $F(x_0, y_0) = 0$ и нас интересует, как в окрестности этой точки выглядит множество уровня $F(x, y) = 0$, по теореме - как график функции. То есть, локально множество уровня это кривая $y = f(x)$ (график функции).

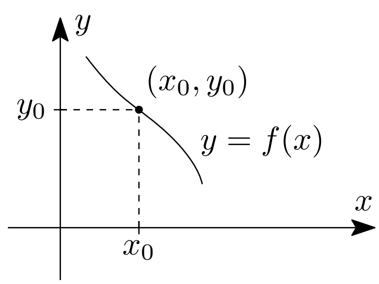

Рис. 5: Геометрический смысл теоремы о неявной функции.

Такое представление соответствует интуиции, что множество линий уровня это линии. В сумме из таких локальных графиков можно составить множество уровня.

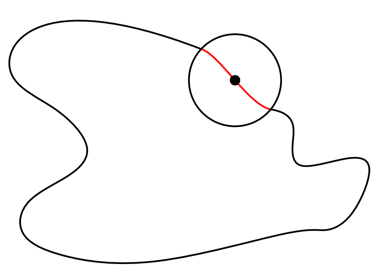

Рис. 6: Линии уровня составлены из множества локальных графиков.

Алгебраический смысл: Равносильность $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$ означает, что изучая множество уровня, мы фактически решиаем уравнение и выражаем y через $f(x)$ (или по-другому хотим выразить y через x). Когда хотим решить уравнение хотелось бы:

1) Чтобы какие-то решения были, иначе нет смысла искать что-то;

2) Чтобы от y что-то зависело, иначе никакую функцию из уравнения уровня мы не найдем $\big($из второго условия теоремы $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0 \Rightarrow$ от y есть зависимость$\big)$;

Идея доказательства: Сделаем замену переменных: $\Psi\colon u = x,\ v = F(x,y)$. Рассмотрим матрицу Якоби такого отображения:

$$J_\Psi = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Но мы находимся в точке, где $\det\left(J_\Psi\right) = \frac{\partial F}{\partial y} \neq 0 \Rightarrow$ это невырожденная матрица (определитель не ноль). Тогда локально отображение Ψ это диффеоморфизм по теореме об обратной функции. Осталось понять откуда и куда производится это отображение. Рассмотрим следующее множество:

$$\big\{(x,y)\colon F(x,y) = 0\big\}$$

Отображение Ψ переводит его в множество точек на оси Ou. Таким образом, заменой переменных мы выпрямили линии уровня:

$$\Psi\Big(\big\{(x,y)\colon F(x,y) = 0\big\}\Big) = \big\{(u,0)\big\}$$

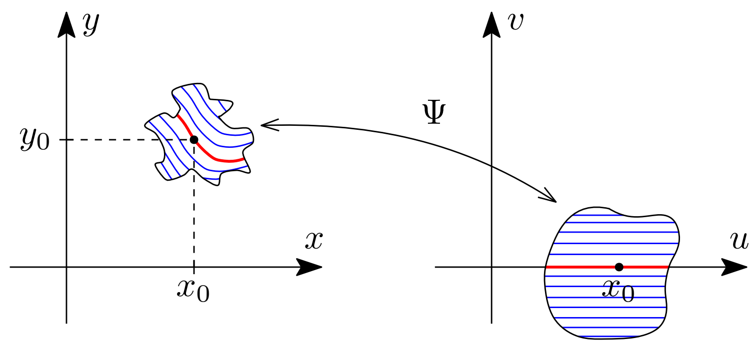

Рис. 7: Диффеоморфизм замены координат в теореме о неявной функции.

Построим обратную функцию к $\Psi \Rightarrow \Psi^{-1}\colon x = u,\ y = g(u,v)$. Тогда при обратном отображении точки вида $(u,0)$ перейдут в точки $x = u,\ y = g(u,0) = g(x,0)$:

$$\Psi^{-1}\Big(\big\{(u,0)\big\}\Big) \to \Big\{\big(x, g(x,0)\big)\Big\}$$

Таким образом, обратное отображение выпрямленные линии отображает в графики функций. То есть, $y = g(x,0)$ - это график функции.