Связные множества в метрическом пространстве

Опр: 1. Метрическое пространство (X, ρ) несвязно, если $\exists$ открытые множества U, V такие, что

$$U \neq \varnothing,\, V \neq \varnothing,\, U \cap V = \varnothing,\, X = U \cup V$$

Опр: 2. Метрическое пространство, которое не является несвязным - связно.

Опр: 3. Множество E в метрическом пространстве (X, ρ) несвязно, если существуют открытые множества $U, V\colon E \cap U \neq \varnothing$, $E \cap V \neq \varnothing$, $U \cap V = \varnothing$ и $E \subset U \cup V$.

Если рассматривать $E \subset X$, то оно может быть несвязно либо как метрическое пространство, либо как множество в метрическом пространстве (X, ρ). Мы доказали в прошлый раз, что это одно и то же.

Теорема 1. Метрическое пространство (X, ρ) несвязно $\Leftrightarrow$ $\exists$ непрерывная функция $X \to \mathbb{R}$, принимающая ровно два значения 0 и 1.

□
($\Rightarrow$) Пусть $X = U \cup V$, где $U \neq \varnothing$, $V \neq \varnothing$, $U \cap V = \varnothing$, где U, V - открытые множества. Тогда рассмотрим следующую функцию:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in U \\ 0, & x \in V \end{cases}$$

Проверим, что она непрерывна. Пусть $a \in U \Rightarrow f(a) = 1$, тогда $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta\colon B(a, \delta) \subset U$. Такой шар найдется поскольку U - открыто. Получим, что $\forall x \in B(a, \delta)$, $f(x) = 1$, тогда:

$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists \delta\colon B(a, \delta) \subset U,\, \forall x \in B(a, \delta),\, |f(x) - f(a)| = 0 < \varepsilon$$

То есть функция непрерывна на U. Аналогично для $a \in V$.

($\Leftarrow$) Пусть $f\colon X \to \mathbb{R}$ - непрерывная функция, которая имеет всего два значения: 0 и 1. Тогда рассмотрим следующие множества:

$$U_0 = \{\, x\colon f(x) < \tfrac{1}{2} \,\} = \{\, x\colon f(x) = 0 \,\}$$
$$U_1 = \{\, x\colon f(x) > \tfrac{1}{2} \,\} = \{\, x\colon f(x) = 1 \,\}$$

Тогда верно следующее:

$$U_0 = f^{-1}\big((-\infty, \tfrac{1}{2})\big),\, U_1 = f^{-1}\big((\tfrac{1}{2}, +\infty)\big)$$

Поскольку функция f - непрерывна, то U_0, U_1 - открытые множества, $U_0 \cap U_1 = \varnothing$, $U_0 \neq \varnothing$, $U_1 \neq \varnothing$. Поскольку функция f принимает два значения, то все $x \in X$ либо в U_0, либо в $U_1 \Rightarrow X = U_0 \cup U_1$. Таким образом множество X - несвязно. ■

Теорема 2. Пусть X и Y - метрические пространства и $f\colon X \to Y$ - непрерывна. Тогда, если X - связно, то $f(X)$ - связно.

□ **(I) способ**: (От противного) Предположим противное: $f(X)$ несвязно, тогда $\exists$ открытые U, V:

$$U \cap f(X) \neq \varnothing,\, V \cap f(X) \neq \varnothing,\, f(X) \subset U \cup V$$

Возьмем прообразы этих множеств: $f^{-1}(U)$, $f^{-1}(V)$ - открытые множества. Поскольку $f(X) \subset U \cup V$, то $X \subset f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$.

Эти множества не пересекаются $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \varnothing$, иначе был бы элемет, чей образ лежал бы одновременно и в U, и в V, то есть: $\exists\, x \in X\colon f(x) \in U \cap V$, что не верно по предположению о несвязности.

Также $f^{-1}(U) \neq \varnothing$, поскольку $U \cap f(X) \neq \varnothing$, то есть $\exists\, x \in X\colon f(x) \in U$. Аналогично для $f^{-1}(V) \neq \varnothing$.

Таким образом поулчили, что X - несвязно $\Rightarrow$ противоречие.

(II) способ: Если $f(X)$ - несвязно, то $\exists\, g\colon f(X) \to \mathbb{R}$ - непрерывна и принимает два значения 0 и 1. Тогда $g(f(x))$ - непрерывна и принимает значения 0 и 1 $\Rightarrow$ метрическое пространство X - несвязно $\Rightarrow$ противоречие. ■

Опр: 4. Множество $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$ называется промежутком, если из того, что $x_1, x_2 \in \mathrm{I}$, $x_1 \leq x_2 \Rightarrow [x_1, x_2] \subset \mathrm{I}$.

Утв. 1. На $\mathbb{R}$ связными множествами являются только промежутки (множества содержащие вместе с двумя точками отрезок их соединяющий).

□
($\Leftarrow$) Промежуток - связное множество, так как выполнена теорема о промежуточном значении и никаких непрерывных двухзначных функций на нем быть не может.

($\Rightarrow$) Пусть, мы взяли связное множество $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$, которое не удовлетворяет свойству промежутка, то есть $\exists\, x_1, x_2 \in \mathrm{I}$, $x_1 \leq x_2$, $c \in \mathbb{R}\colon x_1 \leq c \leq x_2$, $c \notin \mathrm{I}$. Тогда можно разделить множество I на две части непустыми открытыми множествами $(-\infty, c)$ и $(c, +\infty)$ $\Rightarrow$ противоречие с тем, что множество связное. ■

Следствие 1. Если (X, ρ) - связно и $f\colon X \to \mathbb{R}$ - непрерывна, то $f(X)$ - промежуток, то есть:

$$\exists\, A, B \in f(X)\colon A \leq B \Rightarrow \forall C \in \mathbb{R}\colon A \leq C \leq B,\ C \in f(X)$$

□ Следует из предыдущего утверждения и предыдущей теоремы. ■

Rm: 1. Метрическое пространство (X, ρ) - несвязно $\Leftrightarrow$

(1) $\exists\, F_1 \neq \varnothing, F_2 \neq \varnothing$ - замкнуты ($X \setminus F_1 = F_2 \Rightarrow$ открыты) такие, что $F_1 \cap F_2 = \varnothing$, $F_1 \cup F_2 = X$;

(2) $\exists\, E \subset X\colon E \neq \varnothing$, $E \neq X$ и E - открыто и замкнуто ($U = E$, $V = X \setminus E$);

Rm: 2. По замечанию выше, то что в прошлом семестре доказали, что единственными открытыми и замкнутыми множествами являются $\varnothing$ и $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ мы доказали, что числовая прямая - это связное множество.

Линейно связные множества

Как понять, является ли множество связным или нет? Каждый раз искать функцию или строить хитрые открытые множества?

Опр: 5. Пусть (X, ρ) - метрическое пространство. Непрерывное отображение $x\colon [0,1] \to X$ называется кривой, обозначение $x(t)$, $t \in [0,1]$.

Опр: 6. Метрическое пространство X (или его подмножество E) называется линейно связным, если $\forall x_0, x_1 \in X$ ($\forall x_0, x_1 \in E$), $\exists$ кривая $x(t)$ в X (в E), такая что $x(0) = x_0$ и $x(1) = x_1$.

Rm: 3. По определению, множество линейно связно, если любые две его точки можно соединить кривой.

Теорема 3. Если (X,ρ) - линейно связно, то оно связно. Обратное не верно.

□ (От противного) Предположим, что это не верно, тогда $\exists$ непрерывная функция $g\colon X \to \{0,1\}$ и существуют точки $x_0, x_1\colon g(x_0) = 0$, $g(x_1) = 1$. Соеденим эти точки $\Rightarrow$ $x\colon [0,1] \to X$ - непрерывное отображение. Тогда на отрезке $[0,1]$ определим функцию $g(x(t))$ - непрерывна, но принимает только два значения 0 и 1 $\Rightarrow$ противоречие с тем, что отрезок - связное множество. ■

Почему обратное не верно?

Пример: Возьмем отрезок $[-1,1]$ на оси y и возьмем функцию $y = \sin\frac{1}{x}$.

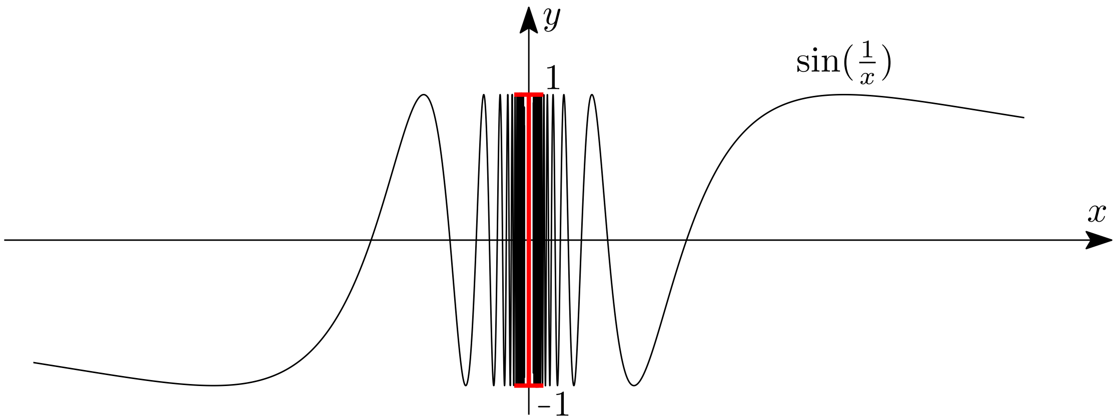


Рис. 1: Связное множество X, которое не является линейно связным.

Рассмотрим следующее множество

$$X = \{\, (x, \sin\tfrac{1}{x}) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0 \,\} \cup \{\, (0,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq y \leq 1 \,\}$$

Упр. 1. Проверить, что это множество X на плоскости $\mathbb{R}^2$ связно, но не является линейно связным.

□ Для начала рассмотрим следующую лемму.

Лемма 1. Пусть X, Y - связные подмножества, $X \cap Y \neq \varnothing$, тогда $X \cup Y$ - связное подмножество того же пространства.

□ (От противного) Пусть $Z = X \cup Y$ - несвязное множество, тогда $\exists$ открытые множества U, V такие, что:

$$Z \cap U \neq \varnothing,\ Z \cap V \neq \varnothing,\ U \cap V = \varnothing,\ Z \subset U \cup V$$

Пусть $x \in X \cap Y \Rightarrow x \in U \vee x \in V$, пусть $x \in U$, поскольку множество $Z \cap V \neq \varnothing \Rightarrow \exists y \in V\colon y \in X \cup Y$. При этом $x \in X \wedge x \in Y \Rightarrow$ пусть $y \in Y$, тогда $y \in V \cap Y$ и одновременно с этим $x \in U \cap Y$. Получаем, что:

$$Y \cap U \neq \varnothing,\ Y \cap V \neq \varnothing,\ U \cap V = \varnothing,\ Y \subset U \cup V$$

противоречие с тем, что Y - связное множество. Аналогично, если $x \in V$ и аналогично для $y \in X$. ■

Рассмотрим X как составленное из следующих множеств:

$$V = \{\, (0,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq y \leq 1 \,\},\ U_+ = \{\, (x, \sin\tfrac{1}{x}) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \,\},\ U_- = \{\, (x, \sin\tfrac{1}{x}) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0 \,\}$$

$$X = V \cup U_+ \cup U_- \subset \mathbb{R}^2$$

Утв. 2. Множество $V \cup U_+$ является связным подмножеством $\mathbb{R}^2$.

$\square$ Каждое множество по отдельности V и U_+ являются линейно связным множеством $\Rightarrow$ это связные множества. Предположим, что $Y = V \cup U_+$ - не является связным, тогда $\exists$ открытые множества S, P такие, что:

$$S \neq \varnothing,\, P \neq \varnothing,\, S \cap P = \varnothing,\, Y = S \cup P$$

Поскольку несвязность как подмножества, так и метрического пространства это одно и то же. По замечаниию выше S, P - являются одновременно открытыми и замкнутыми множествами, тогда множества $S \cap U_+$, $P \cap U_+$ - также являются открытыми в U_+, по утверждению доказанному ранее. Тогда:

$$U_+ = Y \cap U_+ = (S \cup P) \cap U_+ = (S \cap U_+) \cup (P \cap U_+),\, (S \cap U_+) \cap (P \cap U_+) = \varnothing$$

Тогда U_+ лежит в одном из множеств S или P, иначе оно несвязно $\Rightarrow$ пусть $U_+ \subset S$. По аналогичным рассуждениям, V лежит в P, в противном случае оно несвязно или $Y \cap P = \varnothing \Rightarrow P = \varnothing$.

Пусть $(0, y_0) \in V\colon\ \sin(u) = y_0$. Поскольку $\sin(u + 2\pi n) = y_0$, то мы можем предположить, что $u > 0$ и пусть $x_n = \frac{1}{u+2\pi n}$, тогда:

$$(x_n, y_n) = (x_n, \sin(\tfrac{1}{x_n})) = (\tfrac{1}{u+2\pi n}, y_0) \in U_+,\, (x_n, y_n) \to (0, y_0) \in V$$

Поскольку S это замкнутое множество в Y, то оно должно содержать все пределы последовательностей в S, в том числе и для $U_+ \subset S \Rightarrow V \subset S$, в силу произвольности $(0, y_0) \in V$. Таким образом получили, что множество $P = \varnothing \Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow Y = V \cup U_+$ - связное. $\blacksquare$

Аналогично $V \cup U_-$ - связное множество и пересечение не пусто: $(U_- \cup V) \cap (U_+ \cup V) = V$, так как $U_- \cap U_+ = \varnothing$. По лемме выше, объединение этих двух множеств $X = (U_- \cup V) \cup (U_+ \cup V) = U_- \cup U_+ \cup V$ даст связное множество. Покажем, что $V \cup U_+$ не является линейно связным множеством.

Утв. 3. Множество $Z = V \cup U_+$ не является линейно связным множеством.

$\square$ (От противного) Пусть множество Z является линейно связным, тогда $\forall (x_0, y_0), (x_1, y_1) \in Z$, $\exists$ кривая:

$$g\colon [0, 1] \to Z\colon g(0) = (x_0, y_0), g(1) = (x_1, y_1)$$

Пусть $g(0) \in V, g(1) \in U_+$, поскольку множество V - замкнуто, то $g^{-1}(V)$ - также будет замкнуто по непрерывности g, а поскольку оно еще и ограниченно, то по теореме Вейрштрасса:

$$\exists c \in g^{-1}(V)\colon \forall t \in g^{-1}(V) \subset [0, 1],\, c \geq t$$

Переопределим функцию так, чтобы $f(t) = g(c+t(1-c))$, тогда $f(0) \in V,\ f(t) \in U_+,\ \forall t \in (0, 1]$. Очевидно, что $x(0) = 0$ и поскольку $f(t) = (x(t), y(t))$ - непрерывная функция $\Rightarrow x(t), y(t)$ - непрерывные функции. Для любого $n \geq 1$ выберем значение $u_2\colon u_2 > \frac{1}{x(\frac{1}{n})}$ так, чтобы $\sin(u_2) = (-1)^n$.

Пусть $x_2 = \frac{1}{u_2} \Rightarrow 0 = x(0) < x_2 < x(\frac{1}{n})$ и при этом $\sin(\frac{1}{x_2}) = \sin(u_2) = (-1)^n$. По теореме о промежуточном значении $\exists t_n \in (0, \frac{1}{n})\colon x(t_n) = x_2$. Тогда получим:

$$0 < t_n < \tfrac{1}{n} \Rightarrow t_n \to 0 \Rightarrow x(t_n) \to x(0) = 0,\, y(t_n) = \sin(\tfrac{1}{x_n}) = (-1)^n \nrightarrow y(0)$$

Получили противоречие с непрерывностью $y(t)$. $\blacksquare$

Вместо множества V мы можем взять множество $U_- \cup V$, и проделать аналогичные рассуждения, что в любом случае приведет к тому, что X - линейно несвязное множество. ■

В общем случае условие линейной связности в метрическом пространстве - достаточное, но не необходимое. В нормированном пространстве возможна равносильность при наличии открытости множества.

Утв. 4. Если E - открытое и связное множество в нормированном пространстве $(X, \|\cdot\|)$, то E - линейно связно.

□ Введем на E отношение эквивалентности: $x \sim y$, $x, y \in E$, если x можно соединить с y кривой, содержащейся в E. Проверим выполнение свойств эквивалентности:

(1) $\forall x_0 \in E$, $x_0 \sim x_0 \Leftrightarrow x(t) \equiv x_0$ (рефлексивность);

(2) $\forall x_0, x_1 \in E$, $x_0 \sim x_1 \Leftrightarrow \exists\, x(t)\colon x(0) = x_0$, $x(1) = x_1 \Leftrightarrow \exists\, x(1-t)\colon x(1) = x_0$, $x(0) = x_1 \Leftrightarrow x_1 \sim x_0$, таким образом $\forall x_0, x_1 \in E$, $x_0 \sim x_1 \Leftrightarrow x_1 \sim x_0$ (симметричность);

(3) $\forall x_0, x_1, x_2 \in E\colon x_0 \sim x_1 \wedge x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow \exists\, x(t)\colon x(0) = x_0$, $x(1) = x_1 \wedge \exists\, \widetilde{x}(t)\colon \widetilde{x}(0) = x_1$, $\widetilde{x}(1) = x_2 \Rightarrow$ возьмем следующую кривую $g(t) = x(2t)$, $t \in [0, \frac{1}{2}]$, $g(t) = \widetilde{x}(2t-1)$, $t \in [\frac{1}{2}, 1]$, она непрерывна, поскольку она непрерывна на отрезках $[0, \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}, 1]$ и верно следующее:

$$x(2\cdot\tfrac{1}{2}) = x(1) = x_1 = \widetilde{x}(2\cdot\tfrac{1}{2} - 1) = \widetilde{x}(0) = g(\tfrac{1}{2})$$

Одновременно с этим:

$$g(0) = x(2\cdot 0) = x_0,\ g(1) = \widetilde{x}(2\cdot 1 - 1) = \widetilde{x}(1) = x_2$$

Как результат, мы получили непрерывную кривую в E, соединяющую x_0 и $x_2 \Rightarrow$ таким образом верно, что $\forall x_0, x_1, x_2 \in E\colon x_0 \sim x_1 \wedge x_1 \sim x_2 \Rightarrow x_0 \sim x_2$ (транзитивность);

Тогда множество $E =$ объединению попарно непересекающихся классов эквивалентности. Класс эквивалентности множества E с представителем x_0 это $E_{x_0} = \{\, x \in X \mid x \sim x_0 \,\}$.

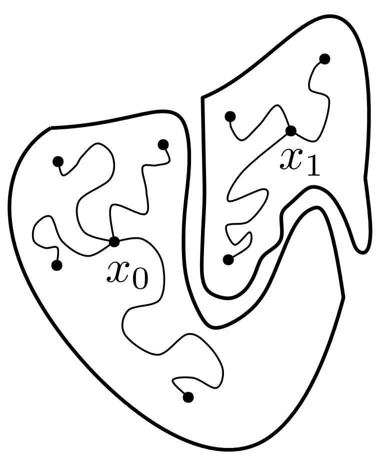


Рис. 2: Классы эквивалентностей точек x_0 и x_1.

Если число классов эквивалентности равно 1, то E - линейно связно. E_{x_0} - открытое множество, покажем это. Пусть $x \in E_{x_0} \Rightarrow$ существует непрерывная кривая из x_0 в точку x.

Поскольку E - открытое, то $\forall x \in E, \exists B(x,r) \subset E$. Тогда из точки x до любой точки $y \in B(x,r)$ существует прямая $x(t) = x + t(y-x)$, $t \in [0,1]$ все точки которой принадлежат шару $B(x,r)$, поскольку пространство нормированное:

$$\forall y \in B(x,r),\, \exists\, x(t) = x + t(y-x) \colon \forall t \in [0,1],\, x(t) \in B(x,r)$$

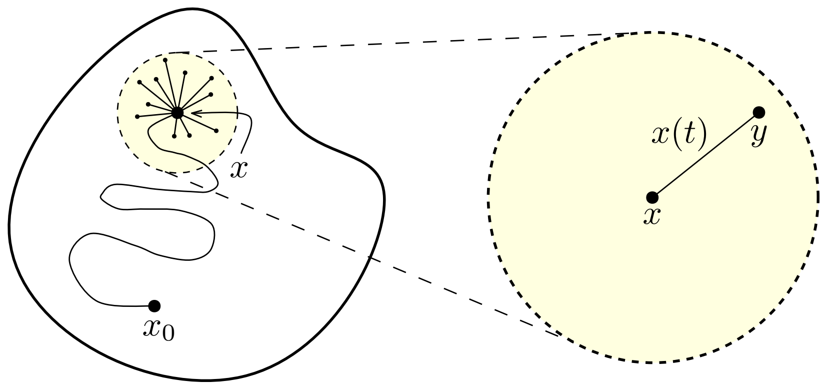


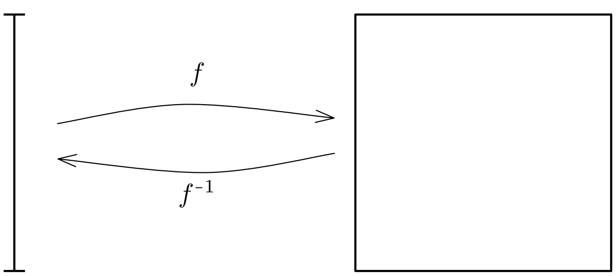
Рис. 3: Соединение точек шара $B(x,r)$ и точки x через прямую $x(t) = x + t(y-x) \in B(x,r)$.

Таким образом, любая точка $y \in B(x,r)$ соединяется отрезком с точкой $x \Rightarrow B(x,r) \subset E_{x_0}$, следовательно множество E_{x_0} - открыто.

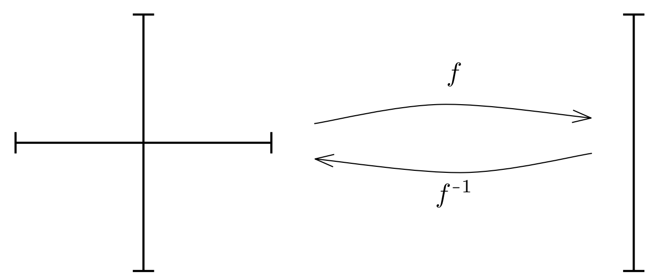
Если число классов эквивалентностей больше 1, то E распадается в объединение двух непустых, непересекающихся открытых множеств, что противоречит связности E. ■

Опр: 7. Функция $f\colon X \to Y$ - гомеоморфизм, если f - биекция и f, f^{-1} - непрерывны.

Упр. 2. Существует ли гомеоморфизм:



(a) Отрезка и квадрата.



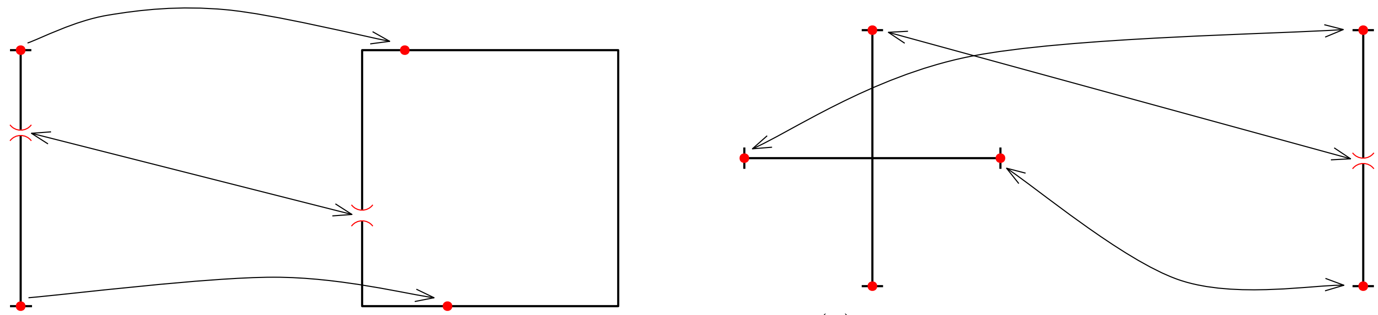
(b) Пересечения отрезков и отрезка.

Рис. 4: Существование гомеоморфизмов.

1) Отрезка и квадрата?

2) Двух пересекающихся отрезков и отрезка?

□ В обоих случаях предположим, что гомеоморфизм существует. По определению гомеоморфизм это непрерывная биекция с непрерывной обратной функцией. Таким образом функция инъективна и если мы выбросим одну точку из области определения и области значения, гомеоморфзим сохранится. Функция и обратная функция останутся непрерывными, проверим свойства связности у данных множеств.



(a) Отрезка и квадрата.

(b) Пересечения отрезков и отрезка.

Рис. 5: Отсутствие гомеоморфизмов.

1) Очевидно, если убрать концевые точки отрезка, он останется линейно связным множеством. Квадрат это линейно связное множество $\Rightarrow$ связное множество. Если убрать из квадрата любую точку, он все равно останется связным множеством.

   Уберем точку a из середины отрезка и уберем соответствующую ей точку $f(a)$ из квадрата. Квадрат остался связным множеством, тогда как отрезок стал несвязным. Поскольку f^{-1} - непрерывная функция и $Y \setminus \{f(a)\}$ - связное множество, то $f^{-1}(Y \setminus \{f(a)\}) = X \setminus \{a\}$ должно быть связным, но это не так $\Rightarrow$ получили противоречие.

2) Пересечение отрезков - связное множество, если хотя бы одна концевая точка пересекающихся отрезков отображается внутрь отрезка, то убрав такую точку и её отображение, пересечение отрезков останется связным множеством, тогда как отрезок станет несвязным.

   Поскольку f - биекция, то она инъективна и значит, что хотя бы две концевые точки пересекающихся отрезков будут отображаться внутрь отрезка. Мы получили противоречие поскольку f непрерывная, а образ связного множества должен быть связным.

■

Упр. 3. Доказать, что, если в $\mathbb{R}^n$ есть два базиса с матрицей перехода A, $\det A > 0$, то существует непрерывное преобразование одного базиса в другой.

□ Будем использовать метод исключения переменных (метод Гаусса), чтобы связать любую матрицу перехода A, $\det A > 0$ с единичной матрицей I_n. Рассмотрим следующую матрицу, элементы которой совпадают с единичной матрицей, за исключением одного (i,j)-го элемента, расположенного вне диагонали:

$$I_{i,j}(r) = I_n + rP_{i,j},\ r \in \mathbb{R}$$

$$P_{i,j} = (\delta_{kl}(i,j)),\ 1 \le i \ne j \le n,\ \delta_{kl}(i,j) = \begin{cases} 1, & k = i \wedge l = j \\ 0, & k \ne i \vee l \ne j \end{cases}$$

Таким образом, домножение матрицы $I_{i,j}(r)$ на любую матрицу A слева даст сложение домноженной на скаляр r строки j матрицы A к строке i. Следовательно, следующее отображение:

$$f\colon [0,1] \to \mathbb{R}^{n^2},\ f(t) = I_{i,j}(tr)A,\ t \in [0,1]$$

определеяет непрерывный путь из матрицы A к матрице $I_{i,j}(r)A$. Используя эту операцию можно определить операцию перестановки строк с изменением знака:

$$I_{j,i}(1) \cdot I_{i,j}(-1) \cdot I_{j,i}(1)$$

Если рассматривать пересечение i, j-ых столбцов и i, j-ых строк этого выражения, то получим следующие подматрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Следовательно, если матрица B получена из матрицы A перестановкой строк с изменением знака, то между ними существует непрерывное преобразование.

Используя операции выше, мы можем создать непрерывный путь, который будет соединить любую обратимую матрицу A и диагональную матрицу D вида:

$$D = \operatorname{diag}\{d_1, d_2, \ldots, d_n\} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & d_n \end{pmatrix},\ d_i \neq 0,\ \forall i = \overline{1, n}$$

Если d_i и d_j отрицательны для $i \neq j$, тогда можно переставить строки i и j дважды (каждый раз меняя знак: $d_i \to -d_i$, $d_j \to -d_j$). Таким образом, мы получим таблицу, где отрицательным может быть только один элемент. Также заметим, что $\det D = d_1 d_2 \ldots d_n$ и если он положителен, то все элементы также будут положительными. Но поскольку приведение к такому виду не изменяло определитель (перестановка строк со сменой знака, прибавление к строке другой строки, умноженной на скаляр), то $\det A = \det D > 0 \Rightarrow$ все элементы положительные.

Последняя операция, которую мы определим - домножение на ненулевой скаляр $r \in (0, \infty)$ строки i. Эта операция в матричном виде выражается в домножении слева на диагональную матрицу:

$$S(i, r) = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1, r, 1, \ldots, 1)$$

которая отличается от I_n только элементом в i-ой строчке, равному r. И таким образом для $r > 0$ следующий путь:

$$g\colon [0,1] \to \mathbb{R}^{n^2},\ g(t) = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1, (1-t) + tr, 1, \ldots, 1)A = S(i, (1-t) + tr)A,\ t \in [0, 1]$$

непрерывно соединяет матрицу A с матрицей $S(i, r)A$. Применяя последовательно эту операцию к полученной матрице D с коэффициентами $r = \dfrac{1}{d_i}$ для каждой строки $1 \leq i \leq n$, мы получим непрерывный путь, соединяющий исходную матрицу A, $\det A > 0$ с единичной матрицей I_n. Таким образом, получили непрерывное преобразование из одного базиса в другой. ■

Упр. 4. $GL(n, \mathbb{R}) = \{\, A \mid \det A \neq 0 \,\} \subset \mathbb{R}^{n^2}$ - полная линейная группа, состоит из всех обратимых матриц. Доказать, что $GL_+(n, \mathbb{R}) = \{\, A \mid \det A > 0 \,\}$ - линейно связное множество.

□ Следует сразу из предыдущей задачи. Поскольку любая матрица внутри множества $GL_+(n, \mathbb{R})$ может быть приведена к единичной $\Rightarrow$ можно через неё связать все остальные матрицы $\Rightarrow$ множество линейно связно. ■

Упр. 5. Доказать, что $SL(n, \mathbb{R}) = \{\, A \mid \det A = 1 \,\}$ является линейно связным множеством.

□ Используя следующее непрерывное преобразование для всех матриц $A, \det A > 0$:

$$h\colon \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}^{n^2},\ h(A) = \frac{1}{\sqrt[n]{\det A}} A,\ \det\left(h(A)\right) = \left(\frac{1}{\sqrt[n]{\det A}}\right)^n \cdot \det A = 1$$

и используя результат упражнения выше, получаем, что любые матрицы в $SL(n, \mathbb{R})$ могут быть непрерывно преобразованы в $I_n \Rightarrow$ множество является линейно связным. ■

Линейные функции

Пусть X и Y - нормированные пространства.

Опр: 8. Отображение $L\colon X \to Y$ называется линейным (или еще говорят линейным оператор), если выполнено следующее:

$$L(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 L(x_1) + \alpha_2 L(x_2)$$

Конечномерные линейные отображения

Пример: Возникает вопрос, как например устроено $L\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$? Возьмем базисный вектор $e_1 = 1$, тогда:

$$x = x_1 e_1 = x_1 \Rightarrow L(x) = L(x_1 e_1) = x_1 L(e_1) = xL(e_1) = kx$$

Пример: Как устроено линейное отображение $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (линейный функционал)? Возьмем базис пространства $\mathbb{R}^n$: $e_1, \dots e_n \Rightarrow$ любой элемент x представится в виде $x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$, тогда:

$$L(x) = x_1 L(e_1) + \ldots + x_n L(e_n) = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n$$

Пример: Как устроено линейное отображение $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$? Возьмем базис пространства $\mathbb{R}^n$: $e_1, \dots e_n \Rightarrow$ любой элемент x представится в виде $x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$, тогда:

$$L(x) = x_1 L(e_1) + \ldots + x_n L(e_n),\ L(e_1) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, L(e_n) = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(x) = x_1 L(e_1) + \ldots + x_n L(e_n) = \overbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}^{A} \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}^{X} = A \cdot X$$

Очевидно, что L - непрерывное отображение, поскольку везде это арифметические операции с непрерывными функциями $x_1, \dots, x_n$. Но в общем случае, линейное отображение может быть разрывной функцией.

Бесконечномерные линейные отображения

Пример: Возьмем пространство непрерывных дифференцируемых функций $C^1[0,1]$ с нормой максимума функции: $\|f\| = \max\limits_t |f(t)|$. Рассмотрим следующее линейное отображение:

$$L\colon C^1[0,1] \to \mathbb{R},\ L(f) = f'(0)$$

Легко проверить, что оно действительно является линейным:

$$L(\alpha f + \beta g) = (\alpha f + \beta g)'(0) = \alpha f'(0) + \beta g'(0) = \alpha L(f) + \beta L(g)$$

Но при этом, оно не является непрерывным. Например, $f_n(x) = \frac{1}{n} \sin(n^2 x)$, тогда:

$$0 \le f_n \le \tfrac{1}{n},\ f_n \rightrightarrows 0,\ L(f_n) = f_n'(0) = n \to \infty,\ L(f_n) \nrightarrow L(0)$$

В конечномерном пространстве линейный функционал всегда непрерывен, но в бесконечномерном пространстве всегда найдется линейный функционал, который будет разрывным.

Rm: 4. Пример на полном пространстве придумать сложнее, но там можно воспользоваться базисом Гамеля и аксиомой выбора.

С точки зрения анализа полезно понять, какие достаточные условия непрерывности на линейные функции надо накладывать.

Теорема 4. Пусть $L\colon X \to Y$ - линейная функция, тогда следующие утверждения равносильны:

(1) L - непрерывна;

(2) L - непрерывна в 0;

(3) $\exists\, C > 0\colon \|L(x)\|_Y \le C\|x\|_X$, $\forall x$;