Непрерывность функций

Пусть (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) - метрические пространства, $a \in X$. Пусть $f\colon X \to Y$.

Опр: 1. Функция f непрерывна в точке $a \in X$, если

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0\colon \rho_X(x, a) < \delta \Rightarrow \rho_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$$

Теорема 1. Следующие утверждения равносильны:

(1) f - непрерывна в точке a;

(2) $\forall \{x_n\} \in X$, $x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to f(a)$;

(3) Или a - это изолированная точка, или a - это предельная точка X и $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$;

Пусть $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Пусть $a = (a_1, a_2)$, $\rho_X(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ - стандартная Евклидова метрика, $\rho_Y(u, v) = |u - v|$. Тогда, f непрерывна в точке a будет обозначать, что:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0\colon \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2} < \delta \Rightarrow |f(x_1, x_2) - f(a_1, a_1)| < \varepsilon$$

Исходя из того, что

- $x \to f(x, y)$ - непрерывна в точке a_1, $\forall y$;
- $y \to f(x, y)$ - непрерывна в точке a_2, $\forall x$;

можно ли сделать вывод что f непрерывна в точке (a_1, a_2)?

В данном случае, функция непрерывна вдоль горизонтальных и вертикальных прямых.

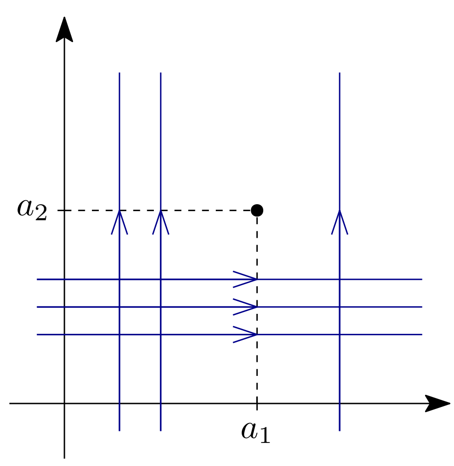

Рис. 1: Функция непрерывна в точке (a_1, a_2) по каждой из переменных.

В заданном нами определении, функция может подходить к проверяемой точке каким угодно способом. Поэтому если функция непрерывна по каждой из переменных, то это не означает, что она непрерывна в точке (a_1, a_2).

Пример: Возьмем точку $a = (a_1, a_2) = (0, 0)$. Рассмотрим функцию $f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & x_2 = x_1^2 \wedge x_1 \geq 0 \\ 0, & x_2 \neq x_1^2 \vee x_1 < 0 \end{cases}$.

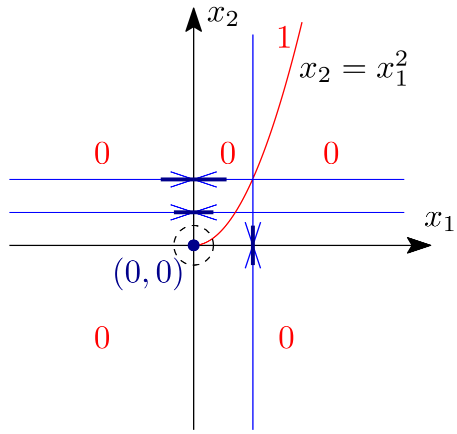

Рис. 2: Функция непрерывна в точке $(0, 0)$ по каждой из переменных, но разрывная в $(0, 0)$.

Эта функция непрерывна по каждой из переменных в точке $(0, 0)$:

При подходе к $x_2 = 0$ она в целой окрестности будет тождественным нулем. Чем ближе к $x_2 = 0$, тем меньше окрестность, но в ней функция все равно будет тождественно нулевая, а при $x_2 = 0$ функция $f(x_1, 0) \equiv 0$.

При подходе к $x_1 = 0$ ситуация аналогичная. Функция в целой окрестности будет тождественным нулем. Чем ближе к $x_1 = 0$, тем меньше окрестность, но в ней функция все равно будет тождественно нулевая, а при $x_1 = 0$ функция $f(0, x_2) \equiv 0$.

Но при всем этом, эта функция не является непрерывной в точке $(0, 0)$, поскольку как бы близко не взяли точку к началу координат, там будет значение функции 0 и значение функции 1:

$$\forall\, 1 > \varepsilon > 0,\ \nexists\, \delta > 0\colon \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2} < \delta \Rightarrow |f(x_1, x_2) - f(a_1, a_1)| < \varepsilon$$

Чего не хватает, чтобы функция была непрерывной по совокупности переменных?
Рассмотрим следующее неравенство:

$$|f(x_1, x_2) - f(a_1, a_2)| \le |f(x_1, x_2) - f(a_1, x_2)| + |f(a_1, x_2) - f(a_1, a_2)|$$

Выбираем δ для первого слагаемого, начинаем выбирать δ для второго, тогда x_2 начнет приближаться к a_2 и тем самым δ в первом слагаемом могло испортиться. Такой эффект возникает поскольку не хватает равномерности.

Утв. 1. Пусть $x_1 \to f(x_1, x_2)$ - непрерывна в точке a_1 равномерно по x_2, то есть:

$$\sup_{x_2} |f(x_1, x_2) - f(a_1, x_2)| \xrightarrow[x_1 \to a_1]{} 0$$

или по-другому $f(x_1, x_2) \underset{x_1 \to a_1}{\overset{x_2}{\rightrightarrows}} f(a_1, x_2)$. Пусть $x_2 \to f(x_1, x_2)$ - непрерывна в точке a_2. Тогда f - непрерывна в точке (a_1, a_2).

□ Рассмотрим неравенство $|f(x_1, x_2) - f(a_1, a_2)| \le |f(x_1, x_2) - f(a_1, x_2)| + |f(a_1, x_2) - f(a_1, a_2)|$, тогда:

$$|f(x_1, x_2) - f(a_1, x_2)| + |f(a_1, x_2) - f(a_1, a_2)| \le \sup_{x_2} |f(x_1, x_2) - f(a_1, x_2)| + |f(a_1, x_2) - f(a_1, a_2)|$$

Пусть задан $\varepsilon > 0$, найдем $\delta > 0$:

$$|x_1 - a_1| < \delta \Rightarrow \sup_{x_2} |f(x_1, x_2) - f(a_1, x_2)| < \varepsilon$$

$$|x_2 - a_2| < \delta \Rightarrow |f(a_1, x_2) - f(a_1, a_2)| < \varepsilon$$

Тогда, если $\rho_X(x, a) = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2} < \delta$, то $|x_1 - a_1| < \delta \wedge |x_2 - a_2| < \delta$, следовательно :

$$|f(x_1, x_2) - f(a_1, a_2)| \leq \sup_{x_2} |f(x_1, x_2) - f(a_1, x_2)| + |f(a_1, x_2) - f(a_1, a_2)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

■

Rm: 1. Если функция непрерывна в любой точке по каждой переменной в отдельности, то из этого следует, что непрерывность по совокупности не пропадает вовсе.

Утв. 2. Пусть (X, ρ) - метрическое пространство, $(Y, \|\cdot\|)$ - нормированное пространство ($\rho_Y = \|\cdot\|$). Пусть $f, g\colon X \to Y$, $\alpha\colon X \to \mathbb{R}$ - непрерывны в точке a, тогда $f + g$ и $\alpha \cdot f$ - непрерывны в точке a.

□ Пусть $x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to f(a)$, $g(x_n) \to g(a)$, $\alpha(x_n) \to \alpha(a)$. Все следует из свойств предела последовательности для нормированных пространств. ■

Утв. 3. Пусть (X, ρ_X), (Y, ρ_Y), (Z, ρ_Z) - метрические пространства. $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$. Если f непрерывна в точке a и g непрерывна в точке $f(a)$, то $g(f)$ - непрерывна в точке a.

□ Пусть $x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to f(a) \Rightarrow g(f(x_n)) \to g(f(a))$. ■

Опр: 2. Функция $f\colon X \to Y$ непрерывна, если f непрерывна в каждой точке X.

Опр: 3. Прообраз множества $V \subset Y$ для отображения $f\colon X \to Y$ это множество

$$f^{-1}(V) = \{\, x \in X \mid f(x) \in V \,\}$$

Теорема 2. $f\colon X \to Y$ - непрерывна $\Leftrightarrow \forall$ открытого $V \subset Y$ множество $f^{-1}(V)$ - открыто в X.

□

($\Leftarrow$) Возьмем $\varepsilon > 0$, $a \in X$, покажем, что в точке a функция будет непрерывна. Рассмотрим множество $V = B(f(a), \varepsilon)$. Тогда по условию $f^{-1}\big(B(f(a), \varepsilon)\big)$ - открытое множество и оно содержит точку a (по определению). Из-за открытости $\exists\, B(a, \delta) \subset f^{-1}\big(B(f(a), \varepsilon)\big)$, то есть все его точки переходят в шар радиуса ε с центром $f(a)$:

$$\rho_X(a, x) < \delta \Rightarrow \rho_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$$

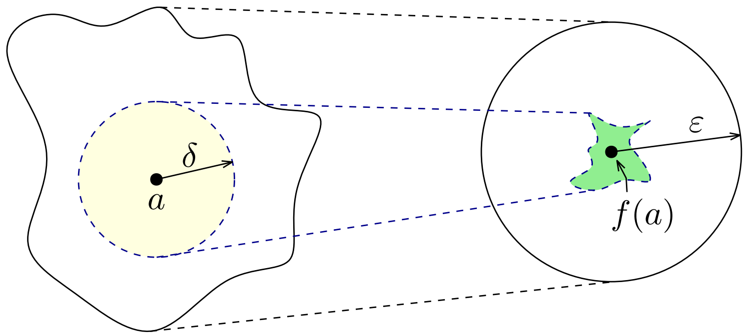

Рис. 3: Открытый прообраз ⇒ непрерывность.

($\Rightarrow$) Пусть $V \subset Y$ - открытое множество, возьмем его прообраз $f^{-1}(V) = \{x \in X \mid f(x) \in V\}$. Рассмотрим точку $a \in f^{-1}(V)$ этого множества $\Rightarrow$ по определению $\exists\, f(a) \in V$.

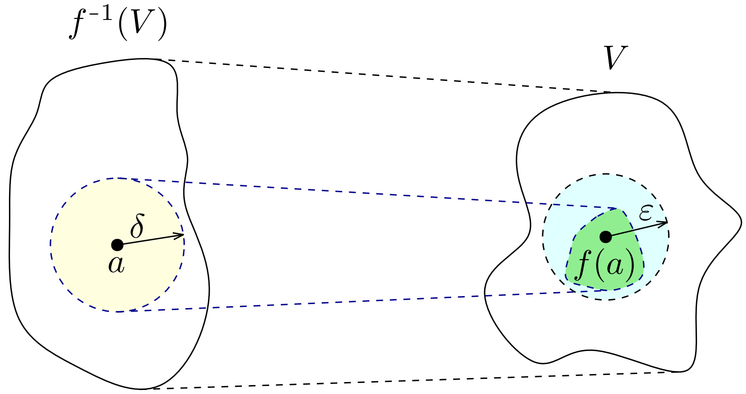

Рис. 4: Непрерывность $\Rightarrow$ открытый прообраз.

Поскольку $V \subset Y$ - открытое множество $\Rightarrow \exists\, B(f(a), \varepsilon) \subset V$. По определению непрерывности:

$$\exists\, \delta > 0\colon \rho_X(a, x) < \delta \Rightarrow \rho_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$$

это означает, что $f\big(B(a,\delta)\big) \subset B(f(a), \varepsilon) \Rightarrow B(a,\delta) \subset f^{-1}\big(B(f(a),\varepsilon)\big) \Rightarrow B(a,\delta) \subset f^{-1}(V)$. ■

Упр. 1. Доказать, что:

(1) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$;

(2) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$;

(3) $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$;

(4) $f^{-1}\Big(\bigcup\limits_{\alpha \in \mathrm{I}} \mathcal{U}_\alpha\Big) = \bigcup\limits_{\alpha \in \mathrm{I}} f^{-1}(\mathcal{U}_\alpha)$;

(5) $f^{-1}\Big(\bigcap\limits_{\alpha \in \mathrm{I}} \mathcal{U}_\alpha\Big) = \bigcap\limits_{\alpha \in \mathrm{I}} f^{-1}(\mathcal{U}_\alpha)$;

□

(1) Пусть $x \in f^{-1}(A \cup B) \Leftrightarrow f(x) \in A \cup B \Leftrightarrow f(x) \in A \vee f(x) \in B \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \vee x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \Rightarrow f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$;

(2) Пусть $x \in f^{-1}(A \cap B) \Leftrightarrow f(x) \in A \cap B \Leftrightarrow f(x) \in A \wedge f(x) \in B \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \wedge x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \Rightarrow f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$;

(3) Пусть $x \in f^{-1}(A \setminus B) \Leftrightarrow f(x) \in A \setminus B \Leftrightarrow f(x) \in A \wedge f(x) \notin B \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \wedge x \notin f^{-1}(B) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B) \Rightarrow f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$;

(4) Пусть $x \in f^{-1}\Big(\bigcup\limits_{\alpha \in \mathrm{I}} \mathcal{U}_\alpha\Big) \Leftrightarrow f(x) \in \bigcup\limits_{\alpha \in \mathrm{I}} \mathcal{U}_\alpha \Leftrightarrow \exists\, \alpha \in \mathrm{I}\colon f(x) \in \mathcal{U}_\alpha \Leftrightarrow \exists\, \alpha \in \mathrm{I}\colon x \in f^{-1}(\mathcal{U}_\alpha) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \in \bigcup\limits_{\alpha \in \mathrm{I}} f^{-1}(\mathcal{U}_\alpha) \Rightarrow f^{-1}\Big(\bigcup\limits_{\alpha \in \mathrm{I}} \mathcal{U}_\alpha\Big) = \bigcup\limits_{\alpha \in \mathrm{I}} f^{-1}(\mathcal{U}_\alpha)$;

(5) Пусть $x \in f^{-1}\Big(\bigcap\limits_{\alpha\in \mathrm{I}} \mathcal{U}_\alpha\Big) \Leftrightarrow f(x) \in \bigcap\limits_{\alpha\in \mathrm{I}} \mathcal{U}_\alpha \Leftrightarrow \forall\alpha \in \mathrm{I},\ f(x) \in \mathcal{U}_\alpha \Leftrightarrow \forall\alpha \in \mathrm{I},\ x \in f^{-1}(\mathcal{U}_\alpha) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \in \bigcap\limits_{\alpha\in \mathrm{I}} f^{-1}(\mathcal{U}_\alpha) \Rightarrow f^{-1}\Big(\bigcap\limits_{\alpha\in \mathrm{I}} \mathcal{U}_\alpha\Big) = \bigcap\limits_{\alpha\in \mathrm{I}} f^{-1}(\mathcal{U}_\alpha)$;

■

Упр. 2. Верно ли, что $f\colon X \to Y$ - непрерывно $\Leftrightarrow$ прообраз замкнутого множества - замкнут.

□ ($\Rightarrow$) Пусть f - непрерывно, $V \subset Y$ - замкнуто $\Rightarrow Y \setminus V$ - открыто $\Rightarrow f^{-1}(Y \setminus V)$ - тоже открыто по теореме выше $\Rightarrow f^{-1}(Y \setminus V) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(V)$ - открыто. По определению $f^{-1}(Y) = X \Rightarrow X \setminus f^{-1}(V)$ - открыто $\Rightarrow f^{-1}(V)$ - замкнутое множество.

($\Leftarrow$) Пусть $\forall$ замкнутого множества $V \subset Y$, его прообраз $f^{-1}(V)$ - тоже замкнут. Пусть $U \subset Y$ - открытое множество $\Rightarrow Y \setminus U$ - замкнуто $\Rightarrow f^{-1}(Y \setminus U) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(U) = X \setminus f^{-1}(U)$ - замкнутое множество $\Rightarrow f^{-1}(U)$ - открытое множество, таким образом любое прообраз открытого множества - открытое множество $\Rightarrow$ по теореме выше функция f - непрерывная. ■

Следствие 1. Пусть (X, ρ_X), (Y, ρ_Y) - метрические пространства. Если $f\colon X \to Y$ - непрерывная функция и множество $K \subset X$ - компакт, то $f(K)$ - компакт.

Rm: 2. Обратное утверждение не верно, смотри, например, функцию Дирихле (отображает всё в две точки, две точки это всегда компакт).

□ Пусть $f(K) \subset \bigcup\limits_\alpha \mathcal{U}_\alpha$, где $\mathcal{U}_\alpha$ - открыты. Пусть $x \in K$, тогда:

$$f(x) \in \bigcup_\alpha \mathcal{U}_\alpha \Rightarrow x \in f^{-1}\Big(\bigcup_\alpha \mathcal{U}_\alpha\Big)$$

Таким образом $K \subset f^{-1}\Big(\bigcup\limits_\alpha \mathcal{U}_\alpha\Big) = \bigcup\limits_\alpha f^{-1}(\mathcal{U}_\alpha)$. Прообразы открытых множеств - открыты, а K - компакт, тогда:

$$\exists\, \alpha_1, \ldots \alpha_N \colon K \subset f^{-1}(\mathcal{U}_{\alpha_1}) \cup \ldots \cup f^{-1}(\mathcal{U}_{\alpha_N}) = f^{-1}(\mathcal{U}_{\alpha_1} \cup \ldots \cup \mathcal{U}_{\alpha_N})$$

Пусть $x \in K \Rightarrow x \in f^{-1}(\mathcal{U}_{\alpha_1} \cup \ldots \cup \mathcal{U}_{\alpha_N})$, тогда по определению:

$$\forall x \in K \Rightarrow x \in f^{-1}(\mathcal{U}_{\alpha_1} \cup \ldots \cup \mathcal{U}_{\alpha_N}) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}_{\alpha_1} \cup \ldots \cup \mathcal{U}_{\alpha_N} \Rightarrow f(K) \subset \mathcal{U}_{\alpha_1} \cup \ldots \cup \mathcal{U}_{\alpha_N}$$

Таким образом $f(K)$ - компакт. ■

Упр. 3. Пусть $f\colon X \to Y$ - непрерывна, верно ли что:

(1) Образ ограниченного множества является ограниченным множеством;

(2) Образ замкнутого множества является замкнутым множеством;

□

(1) Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{x}$, $V = (0, 1]$ - ограниченное множество, но $f(V) = [1, +\infty)$ - не является ограниченным множеством;

(2) Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow V = \mathbb{R}$ - замкнутое множество, но $f(V) = (0, 1]$ - не является замкнутым множеством;

■

Следствие 2. (Теорема Вейрштрасса): Пусть K - компакт и $f\colon K \to \mathbb{R}$ - непрерывная функция. Тогда f - ограничена и $\exists\, x_m, x_M \in K$:

$$f(x_m) = \inf_K f(x),\ f(x_M) = \sup_K f(x)$$

$\square$ $f(K)$ - компакт в $\mathbb{R}$, то есть ограниченное и замкнутое множество. По определению точной верхней грани

$$\forall y \in f(K)\colon \sup_K f(x) \geq y \Rightarrow \forall z \in \mathbb{R}\colon z > \sup_K f(x) \Rightarrow z \notin f(K)$$

С другой стороны, точная верхняя грань - самая маленькая среди всех верхних граней, тогда

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, y \in f(K)\colon (\sup_K f(x) - \varepsilon) < y$$

иначе нашелся бы ε_0 такой, что $\forall y \in f(K),\ y \leq (\sup_K f(x) - \varepsilon_0) < \sup_K f(x) \Rightarrow (\sup_K f(x) - \varepsilon_0)$ - точная верхняя грань и получили бы противоречие. Аналогичные рассуждения справделивы для точной нижней грани. Таким образом, какую бы окрестность точной грани не взяли, то в ней всегда будут как точки из множества $f(K)$, так и точки не из этого множества $\Rightarrow$ это граничные точки.

Так как $\inf_K f,\ \sup_K f$ - граничные точки $f(K)$, то они принадлежат $f(K) \Rightarrow \exists\, x_m, x_M \in K$:

$$f(x_m) = \inf_K f(x),\ f(x_M) = \sup_K f(x)$$

$\blacksquare$

Теорема 3. (Кантора): Пусть K - компакт, Y - метрическое пространство. Если $f\colon K \to Y$ - непрерывна. Тогда f - равномерно непрерывна, то есть:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0\colon \forall x, y \in K,\ \rho_K(x, y) < \delta \Rightarrow \rho_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

$\square$

(I) способ: (От противного) Пусть f - непрерывно, но не является равномерно непрерывной, тогда:

$$\exists\, \varepsilon > 0,\ \forall \delta > 0\colon \exists\, x, y \in K, \rho_K(x, y) < \delta \wedge \rho_Y(f(x), f(y)) \geq \varepsilon > 0$$

Пусть $\delta = \dfrac{1}{n}$, $x_n, y_n \in K\colon \rho_K(x_n, y_n) < \dfrac{1}{n}$. Так как K - компакт, то $\exists\, x_{n_k} \to x_0 \in K \Rightarrow y_{n_k} \to x_0$. По непрерывности $f(x_{n_k}) \to f(x_0) \wedge f(y_{n_k}) \to f(x_0) \Rightarrow 0 < \varepsilon \leq \rho_Y(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \to 0 \Rightarrow$ противоречие.

(II) способ: Пусть $\varepsilon > 0$, тогда по непрерывности функции f получим:

$$\forall a \in K,\ \exists\, B(a, \delta_a)\colon \forall x, y \in B(a, \delta_a),\ \rho_Y(f(x), f(a)) < \frac{\varepsilon}{2},\ \rho_Y(f(y), f(a)) < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \rho_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Очевидно, что компакт есть подмножество $K \subset \bigcup\limits_{a \in K} B\big(a, \frac{\delta_a}{3}\big)$. Из-за компактности $\exists$ конечное подпокрытие K: $B\big(a_1, \frac{\delta_{a_1}}{3}\big), \ldots, B\big(a_N, \frac{\delta_{a_N}}{3}\big)$. Пусть $\delta = \min\{\frac{\delta_{a_1}}{3}, \ldots, \frac{\delta_{a_N}}{3}\}$. Пусть $\rho_K(x, y) < \delta$, поскольку компакт покрыт, то $\exists\, B\big(a_j, \frac{\delta_{a_j}}{3}\big)\colon x \in B\big(a_j, \frac{\delta_{a_j}}{3}\big)$, тогда:

$$\rho_K(y, a_j) \leq \rho_K(y, x) + \rho_K(x, a_j) < \frac{2\delta_{a_j}}{3} \Rightarrow x, y \in B(a_j, \delta_{a_j}) \Rightarrow \rho_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Таким образом, мы нашли $\delta > 0$ такой, что:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0\colon \forall x, y \in K,\ \rho_K(x, y) < \delta \Rightarrow \rho_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

$\blacksquare$

Связные множества в метрическом пространстве

Опр: 4. Метрическое пространство (X, ρ) несвязно, если существуют непустые открытые множества $U, V : U \cap V = \varnothing \wedge X = U \cup V$.

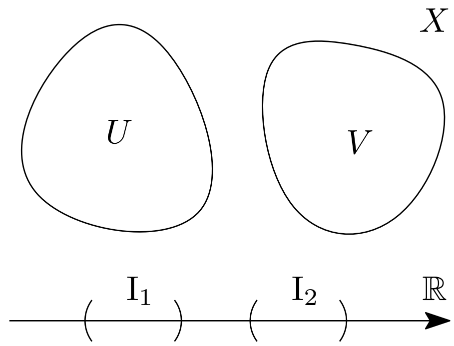

Рис. 5: Несвязные множества: метрическое пространство $X = U \cup V$; на $\mathbb{R}$ - интервалы I_1 и I_2.

Опр: 5. Множество E в метрическом пространстве (X, ρ) несвязно, если существуют открытые множества $U, V : E \cap U \neq \varnothing$, $E \cap V \neq \varnothing$, $U \cap V = \varnothing$ и $E \subset U \cup V$.

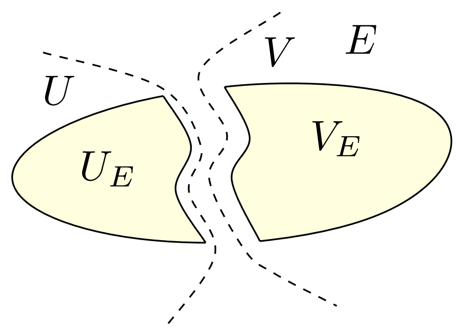

Рис. 6: Несвязные множества можно разделить открытыми множествами

Пусть $E \subset X$ несвязно в E, будет ли оно также несвязно при продолжении на пространство X? Вдруг множество $E = U \cup V$ несвязно, но как ни дополнишь до метрического пространства, множества U и V будут пересекаться?

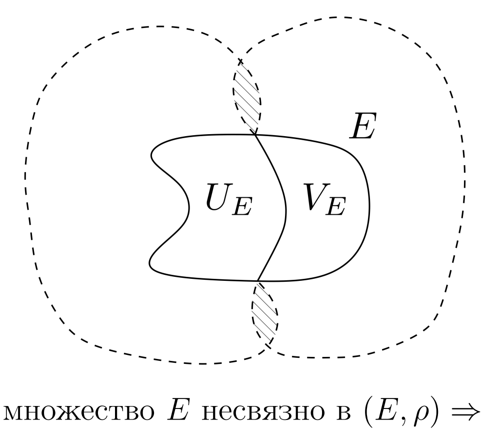

Рис. 7: Несвязное множество E несвязно в $(E, \rho) \Rightarrow$ несвязно в (X, ρ)?

На самом деле такая ситуация невозможна и ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 4. Пусть (X, ρ) - метрическое пространство. $E \subset X$ несвязно $\Leftrightarrow$ E несвязно в метрическом пространстве (E, ρ).

$\square$
($\Rightarrow$) Если $\exists$ открытые U, V такие, что:

$$U \cap V = \varnothing,\ E \cap U \neq \varnothing,\ E \cap V \neq \varnothing,\ E \subset U \cup V$$

то $U_E = U \cap E$, $V_E = V \cap E$ - открыты в E, непусты, $U_E \cap V_E = \varnothing$ и $E = U_E \cup V_E$.

($\Leftarrow$) Пусть $E = U_E \cup V_E$, где U_E, V_E - открыты и непусты в E и $U_E \cap V_E = \varnothing$. Тогда, в каждом из множеств можно взять точку и некоторую окрестность вокруг неё:

$$\forall a \in U_E,\ \exists\, B(a, \delta_a)\colon B(a, \delta_a) \cap E \subset U_E \wedge \big(B(a, \delta_a) \cap E\big) \cap V_E = \varnothing$$

$$\forall b \in V_E,\ \exists\, B(b, \delta_b)\colon B(b, \delta_b) \cap E \subset V_E \wedge \big(B(b, \delta_b) \cap E\big) \cap U_E = \varnothing$$

Рассмотрим множества:

$$U = \bigcup_{a \in U_E} B\big(a, \tfrac{\delta_a}{2}\big),\ V = \bigcup_{a \in V_E} B\big(b, \tfrac{\delta_b}{2}\big)$$

проверим, что $U \cap V = \varnothing$. Пусть это не так и $\exists\, x \in U \cap V$, тогда

$$\exists\, a \in U_E,\ b \in V_E\colon x \in B\big(a, \tfrac{\delta_a}{2}\big) \wedge x \in B\big(b, \tfrac{\delta_b}{2}\big)$$

Это озчачает, что

$$\rho(a, x) < \frac{\delta_a}{2} \wedge \rho(b, x) < \frac{\delta_b}{2} \Rightarrow \rho(a, b) < \frac{\delta_a + \delta_b}{2} < \max\{\delta_a, \delta_b\}$$

Пусть $\delta_a \geq \delta_b \Rightarrow \rho(a, b) < \delta_a \Rightarrow b \in B(a, \delta_a) \Rightarrow$ так как $b \in V_E$, но $\big(B(a, \delta_a) \cap E\big) \cap V_E = \varnothing$, то получаем противоречие. Получили, что $U \cap V = \varnothing$.

Остальные свойства очевидно выполнены: $E \cap U \neq \varnothing$, $E \cap V \neq \varnothing$, $E \subset U \cup V$. $\blacksquare$