Неопределенный интеграл

Замена переменных и интегрирование по частям

ДЗ: 1690, 1695, 1703 (перейти к половинному углу: $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$, замена $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$).

ДЗ: подстановки: 1777, 1780, 1785, 1790, 1829.

Задача 1. (**Д1690**)

$$\int \frac{e^x dx}{2+e^x}$$

□

$$\int \frac{e^x dx}{2+e^x} = \int \frac{du}{u} = \ln u + C = \ln\left(2+e^x\right) + C$$

■

Задача 2. (**Д1695**)

$$\int \sin^5 x \cos x dx$$

□

$$\int \sin^5 x \cos x dx = \int u^5 du = \frac{u^6}{6} + C = \frac{\sin^6 x}{6} + C$$

■

Задача 3. (**Д1703**)

$$\int \frac{dx}{\sin x}$$

□

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{du}{\sin u \cos u} = \int \frac{du}{\operatorname{tg} u \cos^2 u} = \int \frac{d(\operatorname{tg} u)}{\operatorname{tg} u} = \ln|\operatorname{tg} u| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$$

■

Задача 4. (**Д1777**)

$$\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{dx}{1+x}$$

□

$$\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{dx}{1+x} = \int \operatorname{arctg}\sqrt{x} \cdot \frac{2d(\sqrt{x})}{1+x} = 2\int \operatorname{arctg} u \frac{du}{1+u^2} = 2\int w dw = w^2 + C = (\operatorname{arctg}\sqrt{x})^2 + C$$

■

Задача 5. (**Д1780**)

$$\int \sqrt{1-x^2}dx$$

□

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = |x = \sin t| = \int \sqrt{\cos^2 t}\cos t dt$$

Пусть $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, тогда $|\cos t| = \cos t$ и $\sin t \in [-1,1]$. Следовательно мы получим:

$$\int \sqrt{\cos^2 t}\cos t dt = \int \cos^2 t dt = \int \left(\frac{1+\cos(2t)}{2}\right) dt = \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\int \cos u du =$$

$$= \frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} + C = \frac{\arcsin x}{2} + \frac{2\sin t\cos t}{4} + C = \frac{\arcsin x}{2} + \sqrt{1-x^2}\cdot\frac{x}{2} + C$$

■

Задача 6. (**Д1785**)

$$\int \sqrt{(x-a)(b-x)}dx$$

□ Сделаем замену: $x - a = (b-a)\cdot\sin^2 t$.

$$b - x = (b-a) - (x-a) = (b-a) - (b-a)\cdot\sin^2 t = (b-a)\cdot\cos^2 t$$

Без потери общности будем считать, что $a < b$. Поскольку наш трехчлен имеет вид: $(x-a)(b-x)$, то он положителен только на интервале $(a,b) \Rightarrow$ подразумевается, что мы работаем на этом интервале. Выберем значения $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, тогда:

$$t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \sin^2 t \in (0,1) \Rightarrow (b-a)\sin^2 t \in (0, b-a) \Rightarrow x = a + (b-a)\sin^2 t \in (a,b)$$

Таким образом, из замены мы получим:

$$x - a = (b-a)\cdot\sin^2 t \Rightarrow t = \arcsin\left(\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}\right), \quad dx = 2(b-a)\sin t\cos t dt$$

$$\int \sqrt{(x-a)(b-x)}dx = \int (b-a)\cdot\sin t\cdot\cos t\cdot 2(b-a)\cdot\sin t\cdot\cos t dt = 2(b-a)^2\int \sin^2 t\cos^2 t dt =$$

$$= \frac{(b-a)^2}{2}\int \sin^2(2t)dt = \frac{(b-a)^2}{2}\int \frac{1-\cos(4t)}{2}dt = \frac{(b-a)^2}{4}t - \frac{(b-a)^2}{4\cdot 4}\sin(4t) + C$$

Поскольку $t \in (0, \frac{\pi}{2})$, то $\cos t > 0$ и будет верно равенство:

$$\sin(4t) = 2\sin(2t)\cdot\cos(2t) = 2\sin(2t)\cdot(1-2\sin^2 t) = 4\sin t\cdot\cos t\cdot(1-2\sin^2 t) =$$

$$= 4\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}\cdot\sqrt{1-\frac{x-a}{b-a}}\cdot\left(\frac{b-a-2x+2a}{b-a}\right) = 4\sqrt{(x-a)(b-x)}\cdot\frac{(a+b)-2x}{(b-a)^2}$$

$$\int \sqrt{(x-a)(b-x)}dx = \frac{(b-a)^2}{4}\arcsin\left(\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}\right) + \frac{2x-(a+b)}{4}\cdot\sqrt{(x-a)(b-x)} + C$$

■

Задача 7. (**Д1790**)

$$\int \sqrt{(x+a)(x+b)}dx, \quad x+a=(b-a)\operatorname{sh}^2 t$$

□ Под корнем у нас находится квадратный трехчлен с корнями $-a$ и $-b$, чтобы корень выражения был определен нам необходимо верность неравенства: $(x+a)(x+b) \geq 0$. Без ограничения общности, пусть $-a < -b \Rightarrow x \in (-\infty, -a) \cup (-b, +\infty)$. Сделаем замену:

$$x+a=(b-a)\operatorname{sh}^2 t \Rightarrow \operatorname{sh}^2 t = \frac{x+a}{b-a} \Rightarrow t = \operatorname{sh}^{-1}\left(\sqrt{\frac{x+a}{b-a}}\right) = \ln\left(\sqrt{\frac{x+a}{b-a}} + \sqrt{\frac{x+b}{b-a}}\right)$$

Будем выбирать $t \geq 0 \Rightarrow \operatorname{sh} t > 0$, $\operatorname{ch} t > 0$. Мы уже знаем, что $-a < -b \Rightarrow a > b \Rightarrow x + a < 0$, тогда выражение под корнем будет положительным. На промежутке $(-b, +\infty)$ надо просто поменять b и a местами. Заметим, что:

$$x+b = x+a+(b-a) = (b-a)\operatorname{sh}^2 t + (b-a) = (b-a)\cdot(\operatorname{sh}^2 t + 1) = (b-a)\cdot \operatorname{ch}^2 t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x+a)(x+b)} = \sqrt{(b-a)^2 \operatorname{sh}^2 t \operatorname{sh}^2 t} = -(b-a)\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t, \quad dx = d(x+a) = (b-a)2\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \sqrt{(x+a)(x+b)}dx = -2\int (b-a)^2 \operatorname{sh}^2 t \operatorname{ch}^2 t dt$$

Воспользуемся здесь формулой: $\operatorname{sh}(2t) = 2\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t$, тогда:

$$-2\int (b-a)^2 \operatorname{sh}^2 t \operatorname{ch}^2 t dt = -\frac{(b-a)^2}{2}\int \operatorname{sh}^2(2t)dt$$

$$\operatorname{ch}(4t) = \frac{e^{4t}+e^{-4t}}{2}, \operatorname{sh}(2t) = \frac{e^{2t}-e^{-2t}}{2} \Rightarrow \operatorname{sh}^2(2t) = \frac{e^{4t}-2+e^{-4t}}{4} = \frac{\operatorname{ch}(4t)-1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{(b-a)^2}{2}\int \operatorname{sh}^2(2t)dt = -\frac{(b-a)^2}{4}\int \operatorname{ch}(4t) - 1dt = -\frac{(b-a)^2}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\operatorname{sh}(4t) - t\right) + C =$$

$$= \frac{(b-a)^2}{4}\cdot\left(-\frac{1}{2}\operatorname{sh}(2t)\operatorname{ch}(2t) + t\right) + C = \frac{(b-a)^2}{4}\cdot(-\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t \operatorname{ch}(2t) + t) + C$$

$$\operatorname{ch}(2t) = \frac{e^{2t}+e^{-2t}}{2} = 2\operatorname{sh}^2 t + 1 \Rightarrow$$

$$\frac{(b-a)^2}{4}\cdot(-\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t\cdot \operatorname{ch}(2t) + t) + C = \frac{(b-a)^2}{4}\left(-\sqrt{\frac{x+a}{b-a}}\cdot\sqrt{\frac{x+b}{b-a}}\cdot\left(2\cdot\frac{x+a}{b-a}+1\right) + t\right) + C =$$

$$= \frac{\sqrt{(x+a)(x+b)}}{4}\cdot(2x+a+b) + \frac{(b-a)^2}{4}\ln\left(\sqrt{\frac{x+a}{b-a}} + \sqrt{\frac{x+b}{b-a}}\right) + C$$

■

Задача 8. (**Д1829**)

$$\int e^{ax}\sin(bx)dx$$

□

$$\mathrm{I} = \int e^{ax}\sin(bx)dx = \frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos(bx)dx =$$

$$= \frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a^2}e^{ax}\cos(bx) - \frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\sin(bx)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)\mathrm{I} = \frac{1}{a}e^{\alpha x}\sin(bx) - \frac{b}{a^2}e^{ax}\cos(bx) + C \Rightarrow \mathrm{I} = \frac{a}{a^2+b^2}e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a^2+b^2}e^{ax}\cos(bx) + C$$

■