Компакты в нормированном пространстве

Теорема 1. Если в нормированном пространстве, замкнутый шар (положительного радиуса) является компактом, то это пространство конечномерно.

Идея: Пусть у нас есть интервал длины 2, сколько нужно интервалов длины 1, чтобы закрыть его полностью? Точно ≥ 2.

Аналогичный вопрос про шары в плоскости. Чтобы покрыть шар радиуса 2 шарами радиуса 1 понадобится ≥ 4 шаров (площадь 4π нужно покрыть шарами площадью π).

Аналогичный вопрос про шары в пространстве. Чтобы покрыть шар радиуса 2 шарами радиуса 1 понадобится ≥ 8 шаров. Таким образом видно, что с увеличением размерности пространства увеличивается число шаров радиуса 1, чтобы закрыть шар радиуса 2.

В конечномером случае, шар это компакт и его всегда можно закрыть конечным числом единичных шаров. Но чем больше размерность, тем больше шаров требуется. Увеличивая размерность до бесконечности, шаров не должно хватать, чтобы закрыть шар радиуса 2.

□ Рассмотрим шар $\overline{B}(0,2)$ - компакт $\Rightarrow$ рассмотрим покрытие $\bigcup\limits_{a\in\overline{B}(0,2)} B(a,1)$, очевидно, что

$$\overline{B}(0,2) \subset \bigcup_{a\in\overline{B}(0,2)} B(a,1)$$

Поскольку это компакт, то можно выбрать конечное подпокрытие, которое покрывает $\overline{B}(0,2)$:

$$B(a_1,1),\ldots,B(a_N,1)\colon \overline{B}(0,2) \subset \bigcup_{j=1}^{N} B(a_j,1)$$

Рассмотрим пространство $L = \langle a_1,\ldots,a_N\rangle$ - линейная оболочка центров этих шаров. Докажем, что линейная оболочка L - это все пространство $\Rightarrow$ оно конечномерно. Будем доказывать в несколько этапов:

1) До любой точки пространства можно дотянутся элементом пространства L, причем расстояние потребуется не больше 1.

   Пусть $B(0,r) \subset \bigcup\limits_{a\in L} B(a,1)$, тогда $B(0,2r) \subset \bigcup\limits_{a\in L} B(a,1)$.

   □ Пусть $x \in B(0,2r)$, тогда:

$$\|x\| < 2r \Rightarrow \left\|\frac{x}{2}\right\| < r \Rightarrow \frac{x}{2} \in B(0,r) \subset \bigcup_{a\in L} B(a,1) \Rightarrow \exists\, a \in L\colon \left\|\frac{x}{2} - a\right\| < 1 \Rightarrow \|x - 2a\| < 2$$

   Получаем, что $x \in B(2a,2)$, $2a \in L$, так как L - это линейное пространство. Сдвинем этот шар:

$$B(2a,2) - 2a = B(0,2) \subset \bigcup_{c\in L} B(c,1)$$

   где последнее верно по построению L. Тогда:

$$B(2a,2) \subset \bigcup_{c\in L} B(\underbrace{c+2a}_{\in L},1) \Rightarrow B(2a,2) \subset \bigcup_{b\in L} B(b,1)$$

   где $\forall c, a \in L \Rightarrow c + 2a \in L$, так как L - линейное пространство. Таким образом

$$\forall x \in B(0,2r) \Rightarrow x \in \bigcup_{a\in L} B(a,1) \Rightarrow B(0,2r) \subset \bigcup_{a\in L} B(a,1)$$

■

Если закрыт шар радиуса 2, то из утверждения выше следует, что закрыт шар радиуса 4:

$$B(0,2) \subset \bigcup_{a \in L} B(a,1) \Rightarrow B(0,4) \subset \bigcup_{a \in L} B(a,1) \Rightarrow B(0,8) \subset \bigcup_{a \in L} B(a,1) \Rightarrow \ldots$$

Получаем, что

$$\forall n \in \mathbb{N},\, B(0,2^n) \subset \bigcup_{a \in L} B(a,1) \Rightarrow X \subset \bigcup_{a \in L} B(a,1)$$

так как любая точка пространства X лежит в каком-то шаре $B(0,2^n)$. Итого получаем:

$$\forall x \in X,\, \exists\, a \in L\colon \|x-a\| < 1$$

2) Покажем, что из 1) следует, что $X = L$.

☐ (От противного): Пусть $X \neq L \Rightarrow L$ - замкнутое подмножество в X (так как мы доказывали, что конечномерные подпространства являются замкнутым множеством), тогда существует точка, в дополнении к L вместе с некоторой своей окрестностью:

$$\exists\, b \in (X \setminus L) \wedge \delta > 0\colon B(b,\delta) \cap L = \varnothing$$

Пустое пересечение открытого шар $B(b,\delta)$ с подмножеством L означает, что:

$$\forall a \in L,\, \|b-a\| \geq \delta \Leftrightarrow \forall a \in L,\, \left\|\frac{2b}{\delta} - \frac{2a}{\delta}\right\| \geq 2$$

Поскольку L - линейное пространство, то $\forall a \in L \Leftrightarrow \forall \frac{2a}{\delta} \in L$ - произвольный элемент $L \Rightarrow$

$$\exists\, \frac{2b}{\delta} \in X,\, \forall a \in L\colon \left\|\frac{2b}{\delta} - a\right\| \geq 2$$

получили противоречие с тем, что $\forall x \in X,\, \exists\, a \in L\colon \|x-a\| < 1$. ■

Получили, что $X = L$, пространство L - конечномерно (размерность пространства $\dim L = N$) $\Rightarrow$ пространство X - конечномерно. ■

Предел функций

Пусть (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) - метрические пространства, точка $a \in X$ - предельная точка X.
Пусть $f\colon X \setminus \{a\} \to Y$.

Опр: 1. (Гейне): Элемент $b \in Y$ называется пределом функции f при $x \to a$, если

$$\forall \{x_n\} \in X\colon x_n \neq a \wedge x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to b$$

где $x_n \to a \Leftrightarrow \rho_X(x_n, a) \to 0$ и $f(x_n) \to b \Leftrightarrow \rho_Y(f(x_n), b) \to 0$. Обозначение: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.

Теорема 2. Предел определен единственным образом.

□ Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$. Возьмем последовательность точек $\{x_n\}\colon x_n \neq a \wedge x_n \to a \Rightarrow$ одновременно $f(x_n) \to b$, $f(x_n) \to c \Rightarrow b = c$ по единственности предела последовательности. ■

Теорема 3. (Арифметика пределов): Пусть $f, g\colon X \setminus \{a\} \to Y$, $\alpha\colon X \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ и (Y, ρ_Y) - нормированное пространство, где $\rho_Y(u, v) = \|u - v\|$. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$ и $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = \alpha_0$, то

(1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x) = b + c$;

(2) $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x)\cdot f(x) = \alpha_0\cdot b$;

□ Пусть $x_n \to a \wedge x_n \neq a \Rightarrow f(x_n) \to b$, $g(x_n) \to c$, $\alpha(x_n) \to \alpha_0$. По свойствам предела последовательности в нормированном пространстве получим, что

(1) $f(x_n) + g(x_n) \to b + c$;

(2) $\alpha(x_n)\cdot f(x_n) \to \alpha_0\cdot b$;

■

Теорема 4. (Предел композиций) Пусть X, Y, Z - метрические пространства (каждый со своей метрикой). Пусть $a \in X$ - предельная точка X, $b \in Y$ - предельная точка Y. Пусть

$$f\colon X \setminus \{a\} \to Y \setminus \{b\} \wedge g\colon Y \setminus \{b\} \to Z$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \wedge \lim_{y\to b} g(y) = c$$

Тогда предел композиции функций равен $\lim\limits_{x\to a} g\big(f(x)\big) = c$.

□ Пусть $x_n \to a \wedge x_n \neq a \Rightarrow f(x_n) \to b$ и по условию $f(x_n) \neq b \Rightarrow g\big(f(x_n)\big) \to c$. ■

Опр: 2. (Коши): Число b называется пределом функции f при $x \to a$, если

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0\colon \forall x \in X \setminus \{a\},\ 0 < \rho_X(x, a) < \delta \Rightarrow \rho_Y(f(x), b) < \varepsilon$$

Теорема 5. Определения Гейне и Коши - равносильны.

□
(К) ⇒ (Г): Пусть $x_n \to a \wedge x_n \neq a$, по определению Коши:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0\colon 0 < \rho_X(x, a) < \delta \Rightarrow \rho_Y(f(x), b) < \varepsilon$$

Поскольку $x_n \to a \Rightarrow \exists\, N\colon \forall n > N$, $0 < \rho_X(x_n, a) < \delta$, где $\rho_X(x_n, a) > 0$, так как $x_n \neq a$, тогда получим, что $\rho_Y(f(x_n), b) < \varepsilon$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, N\colon \forall n > N,\ \rho_Y(f(x_n), b) < \varepsilon \Rightarrow f(x_n) \to b$$

(Г) ⇒ (К): (От противного): Предположим, что определение по Гейне выполняется, а определение по Коши не выполняется, тогда

$$\exists\, \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists\, x\colon 0 < \rho_X(x, a) < \delta \wedge \rho_Y(f(x), b) \geq \varepsilon$$

Возьмем $\delta = \frac{1}{n}$ и построим последовательность $x_n\colon 0 < \rho_X(x_n, a) < \frac{1}{n}$, то есть $x_n \to a \wedge x_n \neq a$. Но по предположению получаем, что $\rho_Y(f(x_n), b) \geq \varepsilon$ - противоречие, поскольку по определению Гейне, справедливо следующее:

$$x_n \to a \wedge x_n \neq a \Leftrightarrow \rho_X(x_n, a) \to 0 \wedge \rho_X(x_n, a) > 0 \Rightarrow f(x_n) \to b \Leftrightarrow \rho_Y(f(x_n), b) \to 0$$

■

Теорема 6. (Об ограниченности): Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, тогда

$$\exists\, B(a, \delta), B(b, \varepsilon)\colon f(x) \in B(b, \varepsilon),\ \forall x \in B(a, \delta) \setminus \{a\}$$

□ В определении Коши задаем $\varepsilon > 0$, получаем $\delta > 0$ и приходим к требуемому результату. ■

Теорема 7. (Об отделимости): Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, $c \neq b$ и $r = \rho_Y(c, b)$, тогда

$$\exists\, B(a, \delta)\colon \forall x \in B(a, \delta) \setminus \{a\},\ f(x) \notin B(c, \tfrac{r}{2})$$

□ В определении Коши задаем $\varepsilon = \frac{r}{2}$. Тогда $\forall x \in B(a, \delta) \setminus \{a\}$:

$$r = \rho_Y(c, b) \leq \rho_Y(c, f(x)) + \rho_Y(f(x), b) < \rho_Y(c, f(x)) + \frac{r}{2} \Rightarrow \frac{r}{2} < \rho_Y(c, f(x)) \Rightarrow f(x) \notin B(c, \tfrac{r}{2})$$

■

Теорема 8. (Критерий Коши): Пусть (X, ρ_X) - метрическое пространство, a - предельная точка X, (Y, ρ_Y) - полное метрическое пространство и $f\colon X \setminus \{a\} \to Y$. Тогда $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) \Leftrightarrow$ для f выполнено условие Коши:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0\colon 0 < \rho_X(x_1, a) < \delta \wedge 0 < \rho_X(x_2, a) < \delta \Rightarrow \rho_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$$

□
(⇒) Пусть предел $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ существует, тогда по определению Коши верно следующее:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0\colon 0 < \rho_X(x, a) < \delta \Rightarrow \rho_Y(f(x), b) < \varepsilon$$

Возьмем $\dfrac{\varepsilon}{2}$ и найдем $\delta > 0$: $0 < \rho_X(x_1, a) < \delta \wedge 0 < \rho_X(x_2, a) < \delta$, тогда:

$$\rho_Y(f(x_1), b) < \frac{\varepsilon}{2} \wedge \rho_Y(f(x_2), b) < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \rho_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq \rho_Y(f(x_1), b) + \rho_Y(b, f(x_2)) =$$

$$= \rho_Y(f(x_1), b) + \rho_Y(f(x_2), b) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow \rho_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$$

($\Leftarrow$) Проверяем определение Гейне. Пусть $\varepsilon > 0$ и выполняется условие Коши с $\delta > 0$:

$$0 < \rho_X(x_1, a) < \delta \wedge 0 < \rho_X(x_2, a) < \delta \Rightarrow \rho_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$$

Пусть $x_n \to a \wedge x_n \neq a$, тогда $\exists\, N\colon \forall n > N,\ 0 < \rho_X(x_n, a) < \delta$. По условию Коши это означает, что

$$\forall n, m > N,\ \rho_Y(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$$

Это означает, что последовательность $\{f(x_n)\}$ - фундаментальна. Так как Y - полное, то $f(x_n) \to b$. Получилось, что какую последовательность x_n ни возьми (которая $x_n \to a \wedge x_n \neq a$), $f(x_n)$ будет сходится к некоторому b.

Проверим единственность b. Пусть $y_n \to a \wedge y_n \neq a$, рассмотрим новую последовательность

$$z_n\colon x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots$$

ясно, что $z_n \to a \wedge z_n \neq a \Rightarrow f(z_n)$ имеет предел. Предел подпоследовательности совпадает с пределом последовательности $\Rightarrow \lim f(x_n) = \lim f(y_n) = \lim f(z_n)$. ■

Повторные пределы

Данная секция была добавлена отдельно от курса лекций, ради логичности повествования.

Опр: 3. Пределы вида: $\lim\limits_{x\to a}\left(\lim\limits_{y\to b} f(x,y)\right)$ или $\lim\limits_{y\to b}\left(\lim\limits_{x\to a} f(x,y)\right)$ называют повторными.

Повторные пределы обычно не связаны друг с другом и не связаны с двойными (тройными и так далее) пределами, в общем случае.

Пример: $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$, тогда повторные пределы не совпадают:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x}{x} = 1 \neq -1 = \lim_{y\to 0}\frac{-y}{y} = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right)$$

Двойного предела не существует.

Пример: $f(x,y) = x\sin\dfrac{1}{y}$, тогда существует один повторный предел, но не существует второй:

$$\nexists \lim_{y\to 0} f(x,y) \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right),\ \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

Двойной предел существует, так как: $\left|x\sin\dfrac{1}{y}\right| \leq |x|$.

Конечно, интересны случаи, когда повторные пределы совпадают между собой и одновременно совпадают с двойным пределом. На этот вопрос отвечает следующая теорема:

Теорема 9. Если существует двойной предел: $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y) = S$ и одновременно с этим $\forall y \in Y$ существует предел по x: $\forall y \in Y$, $\exists\, \varphi(y) = \lim\limits_{x\to a} f(x,y)$, то существует повторный предел и он равен двойному:

$$\lim_{y\to b}\varphi(y) = \lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y) = S$$

Если же ещё $\forall x \in X$ существует простой предел по y, то существут другой повторный предел, который будет равен двойному пределу и первому повторному:

$$\lim_{x\to a}\lim_{y\to b} f(x,y) = \lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y)$$

□ Пусть $a, b, S < \infty$. По определению:

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\,\delta > 0\colon \forall x \in X,\ y \in Y,\ 0 < |x-a| < \delta \wedge 0 < |y-b| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - S| < \varepsilon$$

Зафиксируем y и перейдем в неравенстве к пределу по x, тогда получим:

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\,\delta > 0\colon \forall y \in Y,\ 0 < |y-b| < \delta \Rightarrow |\varphi(y) - S| \leq \varepsilon$$

Это есть ничто иное, как:

$$S = \lim_{y\to b}\varphi(y) = \lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x,y)$$

Аналогичное равенство получаем, при существовании повторного предела по x. В этом случае двойной и два повторных предела будут совпадать. ■

Непрерывность функций

Пусть (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) - метрические пространства, $a \in X$. Пусть $f\colon X \to Y$.

Опр: 4. Функция f непрерывна в точке a, если

$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists\, \delta > 0\colon \rho_X(x, a) < \delta \Rightarrow \rho_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$$

Теорема 10. Следующие утверждения равносильны:

(1) f - непрерывна в точке a;

(2) $\forall \{x_n\} \in X,\, x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to f(a)$;

(3) a - это изолированная точка или a - это предельная точка X и $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$;

$\square$

(1) $\Rightarrow$ (2): $\forall \varepsilon > 0$, $\rho_X(x, a) < \delta \Rightarrow \rho_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$. Пусть $x_n \to a \Rightarrow$ по определению предела $\exists\, N\colon \forall n > N$, $\rho_X(x_n, a) < \delta \Rightarrow \rho_Y(f(x_n), f(a)) < \varepsilon \Rightarrow f(x_n) \to f(a)$.

(2) $\Rightarrow$ (3): a - изолированная точка $\Rightarrow$ ничего доказывать не нужно (см. замечание в первом семестре). Если a - предельная точка, то надо показать, что $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a) \Rightarrow$ распишем определение по Гейне:

$$\forall x_n\colon x_n \to a \wedge x_n \neq a \Rightarrow f(x_n) \to f(a)$$

но во втором пункте дано больше, чем нужно доказать:

$$\forall x_n\colon x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to f(a)$$

следовательно (3) - верно.

(3) $\Rightarrow$ (1): Если a - изолированная точка, то f - непрерывна в ней. Пусть a - предельная точка, тогда по определению Коши:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0\colon 0 < \rho_X(x, a) < \delta \Rightarrow \rho_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$$

Хотим доказать, что

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0\colon \rho_X(x, a) < \delta \Rightarrow \rho_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$$

Если $x = a \Rightarrow \rho_Y(f(x), f(a)) = 0 < \varepsilon$. $\blacksquare$