Пространство ограниченных функций

Линейное пространство ограниченных функций $B(X) = \{\, f\colon X \to \mathbb{R} \mid \sup\limits_{x\in X} |f(x)| < \infty \,\}$, $\|f\| = \sup\limits_{x\in X} |f(x)|$.

Утв. 1. Не существует метрики ρ на $B([0,1])$ такой, что $f_n \to f$ поточечно $\Leftrightarrow \rho(f_n, f) \to 0$, где поточечная сходимость означает: $\forall x \in [0,1],\ f_n(x) \to f(x)$.

$\square$ (От противного): Пусть такая метрика ρ есть. Мы построим последовательность функций f_n:

(1) $\rho(f_n, 0) \to 0$;

(2) $f_n \nrightarrow 0$ поточечно;

Что будет противоречить тому, что метрика задает поточечную сходимость.

Возьмем шар $B(0,1) = \{\, f \mid \rho(f,0) < 1 \,\}$, $\exists$ отрезок $\Delta_1 \subset [0,1]$, $f_1(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Delta_1 \\ 0, & x \notin \Delta_1 \end{cases}$: $f_1(x) \in B(0,1)$.

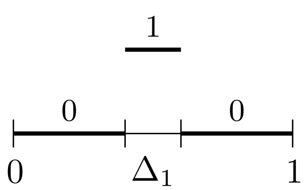

Рис. 1: Отрезок Δ_1 и функция f_1 на нём.

Найдем такой отрезок: на отрезке $[0,1]$ возьмем бесконечную последовательность отрезков $\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \ldots, \mathrm{I}_n, \ldots$, не достигающих правой части отрезка, но стремящихся к ней (например, выделим отрезки $\left[1-\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n+1}\right]$ и возьмем из них только четные отрезки $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$ или отрезки через одного).

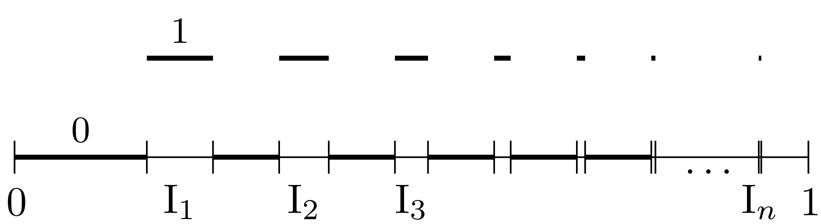

Рис. 2: Выбор последовательности отрезков для $B(0,1)$.

На них возьмем последовательность функций $\{g_n\}$: $g_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathrm{I}_n \\ 0, & x \notin \mathrm{I}_n \end{cases}$. Эта последовательность поточечно стремится к нулю: $\forall x \in [0,1],\ g_n(x) \to 0$ (так как после определенного номера n, значение в любой точке x становится равным 0, например, $x \in \mathrm{I}_3 \Rightarrow g_1(x) = 0$; $g_2(x) = 0$; $g_3(x) = 1$; $\forall n > 3,\ g_n(x) = 0$). Так как метрика задает поточечную сходимость, то для этой последовательности функций:

$$\rho(g_n, 0) \to 0 \Rightarrow \exists\, N\colon g_N \in B(0,1)$$

Тогда, в качестве отрезка Δ_1 возьмем I_N и в качестве функции f_1 возьмем g_N.

Такое построение можно выполнить на любом отрезке $\Rightarrow$ продолжим построение внутри построенных отрезков.

Возьмем шар $B(0,\frac{1}{n}) = \{\, f \mid \rho(f,0) < \frac{1}{n}\,\}$, $\exists$ отрезок $\Delta_n \subset \Delta_{n-1}$, $f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Delta_n \\ 0, & x \notin \Delta_n \end{cases}$: $f_n(x) \in B(0,\frac{1}{n})$.

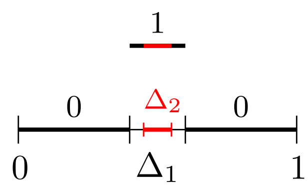

Рис. 3: Отрезок Δ_2 внутри отрезка Δ_1 и функция f_2 на нём.

Поскольку эти отрезки вложенные, то у них есть общая точка: $c \in \bigcap\limits_n \Delta_n$, в этой точке $\forall n$, $f_n(c) = 1$. Таким образом, получили последовательность функций такую, что:

(1) $\rho(f_n, 0) < \dfrac{1}{n} \to 0$, по предположению это задает поточечную сходимость $\Rightarrow$ функция должна сходится к нулю в каждой точке $x \in [0,1]$;

(2) $f_n(c) = 1 \nrightarrow 0$, то есть $\exists$ точка в которой последовательность функций к нулю не стремится;

Получили противоречие $\Rightarrow$ такой метрики не существует. ■

Теорема 1. $B(X)$ - банахово пространство (т.е. $B(X)$ - полное $\Rightarrow$ на нем выполняется критерий Коши).

□ Пусть f_n - фундаментальна:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N\colon \forall n, m > N,\ \rho(f_n, f_m) = \sup_{x\in X} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

то есть $\forall x \in X$, $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$, тогда при фиксированном x числовая последовательность $\{f_n(x)\}$ будет фундаментальной $\Rightarrow$ по критерию Коши для числовых последовательностей:

$$\forall x \in X, \exists \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

Обозначаем этот предел $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Таким образом, последовательность сходится в каждой точке.

По условию:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N\colon \forall n, m > N,\ \forall x \in X,\ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Устремим $m \to \infty$, $\forall x \in X$, тогда:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N\colon \forall n > N,\ \forall x \in X,\ |f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$$

Поскольку $f_n(x)$ - ограничена, то отсюда следует, что и $f(x)$ тоже ограничена, так как отличается от ограниченной на $\varepsilon \Rightarrow f(x) \in B(X)$. Поскольку $\forall x \in X$, $|f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$, то $\sup\limits_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$, тогда:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N\colon \forall n > N,\ \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$$

то есть $\sup\limits_{x\in X}$ стремится к 0, как только $n \to \infty \Rightarrow \|f_n - f\| \to 0$. ■

В полном нормированном пространстве $(X, \|\cdot\|)$: если $\sum\limits_n \|x_n\|$ - сходится $\Rightarrow \sum\limits_n x_n$ - сходится.

Следствие 1. (**Признак Вейрштрасса**) Пусть $f_n \in B(X)$ и $\exists\,\{a_n\}\colon |f_n(x)| \le a_n,\ \forall x, n$ и ряд $\sum\limits_n a_n$ - сходится. Тогда ряд $\sum\limits_n f_n(x)$ - сходится в $B(X)$, то есть сходится равномерно.

□ По условию $\sup\limits_{x\in X}|f_n(x)| \le a_n \Leftrightarrow \|f_n\| \le a_n \Rightarrow \sum\limits_n \|f_n\| \le \sum\limits_n a_n < \infty \Rightarrow \sum\limits_n f_n(x)$ - сходится. ■

Пример: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}$ сходится ли на $x \in \mathbb{R}$? $\left|\frac{\sin nx}{2^n}\right| \le \frac{1}{2^n} \wedge \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty \Rightarrow$ ряд сходится равномерно.

Обозначение: $f_n \xrightarrow{B(X)} f \Leftrightarrow \sup\limits_{x\in X}|f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n\to\infty} 0$ это называется равномерной сходимостью f_n к f на множестве X и обозначается $f_n \overset{X}{\rightrightarrows} f$ или $f_n \rightrightarrows f$.

Теорема 2. Если f_n непрерывна на $[a, b]$ и $f_n \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$, то f - непрерывна на $[a, b]$.

□ Возьмем $x_0 \in [a, b]$, покажем, что $f(x)$ непрерывна в точке x_0:

$$|f(x) - f(x_0)| \le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|$$

Возьмем $\forall \varepsilon > 0$, используя равномерную сходимость $\exists\, n\colon |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,\ \forall x \in [a, b]$. Тогда

$$|f(x) - f_n(x)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < 2\varepsilon$$

Фиксируем $n \Rightarrow \exists\, \delta > 0\colon |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon$ по непрерывности f_n. Тогда

$$|f(x) - f(x_0)| \le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < 3\varepsilon$$

■

Теорема 3. $C[a, b]$ - пространство непрерывных функций с $\|f\| = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$ является банаховым пространством.

Rm: 1. Вместо $\|f\| = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$ можно написать $\|f\| = \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$, поскольку точная верхняя грань у непрерывных функций обязательно достигается, далее для непрерывных функций будем использовать максимум.

□ По теореме Вейрштрасса функция непрерывна на отрезке $\Rightarrow$ на нем ограничена $\Rightarrow C[a, b] \subset B([a, b])$. Нормы в них одинаковы и задают равномерную сходимость. Возьмем $\{f_n\}$, $f_n \in C[a, b]\colon f_n$ - фундаментальна, то есть:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, N\colon \forall n, m > N,\ \|f_n - f_m\| < \varepsilon$$

поскольку последовательность фундаментальна по одинаковым нормам и $B([a, b])$ - банахово пространство, то $\exists\, f\colon f_n \to f \in B([a, b])$. Поскольку равномерный предел непрерывных функций - непрерывная функция, то $f \in C[a, b]$. ■

Будет ли равномерная сходимость сохранять дифференцируемость? Нет, равномерная сходимость не сохраняет дифференцируемость.

Пример: $f_n(x) = x\arctan nx$, $x \in [-1,1]$, $f_n(x) \rightrightarrows \frac{\pi}{2}|x|$. Покажем, что сходимость равномерная: $\forall\varepsilon > 0$ найдем такое большое n, что $\left|x\arctan nx - \frac{\pi}{2}|x|\right| < \varepsilon$ сразу для всех $x \in [-1,1]$.

При $x \in [-\varepsilon, \varepsilon] \Rightarrow$ отходим от 0 на отрезок длины 2ε, тогда:

$$\forall x \in [-\varepsilon,\varepsilon],\ \frac{\pi}{2}|x| \le \pi\varepsilon \wedge x\arctan nx \le \frac{\pi}{2}|x| \Rightarrow \left|x\arctan nx - \frac{\pi}{2}|x|\right| \le \pi\varepsilon$$

то есть, на этом отрезке разница маленькая независимо от n.

При $x > 0$, $\left|\arctan nx - \frac{\pi}{2}\right| \le \left|\arctan n\varepsilon - \frac{\pi}{2}\right| \to 0 \Rightarrow$ выбирая n сразу для всех x мы можем получить $\left|x\arctan nx - \frac{\pi}{2}|x|\right| \le \pi\varepsilon$. Для $x < 0$ - аналогично.

Пример: $f_n(x) = (1-x)x^n$, $x \in [0,1]$. Поточечно сходится к 0. Будет ли сходится равномерно? Пусть $0 < \varepsilon < 1$, тогда:

При $x \in [1-\varepsilon, 1]$, $(1-x)x^n < (1-x) < 1-(1-\varepsilon) = \varepsilon$.

При $x \in [0, 1-\varepsilon]$, $(1-x)x^n < x^n < (1-\varepsilon)^n \Rightarrow$ выбором n можно это сделать сколь угодно маленьким, например, выбором n сделать $(1-\varepsilon)^n < \varepsilon$. Таким образом, получили равномерную сходимость.

Пример: $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$, будет ли $f_n(x) \rightrightarrows |x|$?

$$\sqrt{x^2+\frac{1}{n}} - \sqrt{x^2} = \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n}} + \sqrt{x^2}} \le \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n}}} = \sqrt{\frac{1}{n}}$$

таким образом, оценка не зависит от x и есть равномерная сходимость.

Пример: $f_n(x) = \frac{\sin(n^2x)}{n} \rightrightarrows 0$, при дифференцировании получим $f_n'(x) = n\cos(n^2x)$ и эта последовательность никуда не сходится (даже поточечно).

Rm: 2. $f \in C^1[a,b] \Leftrightarrow f$ - непрерывно дифференцируемая функция на отрезке $[a,b]$:

(1) f - дифференцируема на $[a,b]$;

(2) f' - непрерывна на $[a,b]$;

Теорема 4. Если $f_n \in C^1[a,b]$, $f_n \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$ и $f_n' \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} g$, тогда $g = f'$.

Rm: 3. Требование равномерной сходимости функций нельзя убрать, поскольку можно взять последовательность констант $f_n(x) \equiv c_n \Rightarrow$ производные будут равномерно сходится к нулю, но при этом сама последовательность функций не будет сходится. В будущих курсах, можно будет ослабить данное требование.

□ Фиксируем $y \in [a,b]$ и введем функцию

$$h_n(x) = \begin{cases} \dfrac{f_n(x)-f_n(y)}{x-y}, & x \ne y \\ f_n'(y), & x = y \end{cases}$$

Про эту функцию можно сказать следующее:

(1) $h_n(x)$ - непрерывные на $[a,b]$ функции:

При $x \neq y$: f_n - непрерывные $\Rightarrow$ это очевидно.

В точке y: устремим x к $y \Rightarrow \lim\limits_{x\to y} h_n(x) = \lim\limits_{x\to y} \dfrac{f_n(x)-f_n(y)}{x-y} = f_n'(y) = h_n(y) \Rightarrow$ непрерывны.

(2) Рассмотрим к чему функция сходится поточечно. Пусть $x \in [a,b]$, тогда:

$$h_n(x) \to h(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}, & x \neq y \\ g(y), & x = y \end{cases}$$

Если докажем, что $h(x)$ - непрерывна, то $\lim\limits_{x\to y} h(x) = h(y) \Leftrightarrow f'(y) = g(y)$.

Чтобы доказать непрерывность $h(x)$ достаточно доказать, что предел непрерывных функций - равномерный: $h_n \rightrightarrows h$. Поскольку ни у функции g, ни у функции f мы не знаем конкретных хороших свойств, то будем доказывать не напрямую.

Докажем, что h_n - фундаментальна: $\sup\limits_{x\in[a,b]} |h_n(x) - h_m(x)| \xrightarrow{n,m\to\infty} 0$.

$$x = y \Rightarrow h_n(x) - h_m(x) = f_n'(y) - f_m'(y) \xrightarrow{n,m\to\infty} g(y) - g(y) = 0$$

$$x \neq y \Rightarrow h_n(x) - h_m(x) = \frac{f_n(x)-f_n(y)}{x-y} - \frac{f_m(x)-f_m(y)}{x-y} = \frac{(f_n(x)-f_m(x)) - (f_n(y)-f_m(y))}{x-y}$$

поскольку f_i - дифференцируемы, то используя теорему Лагранжа получим:

$$\frac{(f_n(x)-f_m(x)) - (f_n(y)-f_m(y))}{x-y} = f_n'(c) - f_m'(c) \leq \sup_{x\in[a,b]} |f_n'(x) - f_m'(x)| \xrightarrow{n,m\to\infty} 0$$

так как производные сходятся равномерно. Таким образом

$$|h_n(x) - h_m(x)| \leq \sup_{x\in[a,b]} |f_n'(x) - f_m'(x)| \to 0$$

Значит последовательность $\{h_n\}$ - фундаментальна $\Rightarrow$ сходится равномерно (а значит и поточечно) $\Rightarrow h_n(x)$ сходится равномерно к $h(x) \Rightarrow h(x)$ - непрерывная функция $\Rightarrow f$ - дифференцируема и её производная в точности равна g. ∎