Интегрирование рациональных функций

В прошлый раз мы рассмотрели многочлены вида:

$$\deg P < n,\ \frac{P(x)}{(x-z_1)(x-z_2)\dots(x-z_n)} = \frac{P(z_1)}{Q'(z_1)}\cdot\frac{1}{x-z_1} + \ldots + \frac{P(z_n)}{Q'(z_n)}\cdot\frac{1}{x-z_n}$$

где $Q(x) = (x-z_1)(x-z_2)\dots(x-z_n)$ и все корни различны. Также, возник вопрос, умеем ли мы интегрировать функции вида:

$$\frac{1}{x-z_j},\ z_j \in \mathbb{C}$$

Это можно сделать. Попробуем понять принцип:

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C,\ \int \frac{1}{x-a}dx = \ln|x-a| + C,\ \int \frac{1}{x-ai}dx = ? = \ln|x-ai| + C$$

Что такое модуль: $|x-ai| = \sqrt{x^2+a^2}$. Рассмотрим логарифм этого модуля:

$$\left(\ln\left(\sqrt{x^2+a^2}\right)\right)' = \left(\frac{1}{2}\ln\left(x^2+a^2\right)\right)' = \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+a^2} = \frac{x}{x^2+a^2} \neq \frac{1}{x-ai} = \frac{x+ai}{x^2+a^2}$$

$$\frac{ai}{x^2+a^2} = i\cdot\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)\right)' = i\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1+\frac{x^2}{a^2}} = \frac{ai}{x^2+a^2}$$

$$\int \frac{1}{x-ai}dx = \ln|x-ai| + i\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

Rm: 1. Логарифм для комплексных переменных это многозначная функция, она принимает сразу бесконечно много разных значений. Поэтому мы будем ими пользоваться, только если нам это будет выгодно.

Задача 1. (**Д1884**)

$$\int \frac{dx}{x^4+1}$$

□ У этого многочлена нет действительных корней. Попробуем разложить этот многочлен используя формулу суммы квадратов:

$$a^2+b^2 = a^2+b^2+2ab-2ab = (a+b)^2-2ab = (a+b+\sqrt{2ab})(a+b-\sqrt{2ab}),\ ab>0$$

$$x^4+1 = (x^2+1+\sqrt{2x^2})(x^2+1-\sqrt{2x^2}) =$$
$$= (x^2+1+\sqrt{2}|x|)(x^2+1-\sqrt{2}|x|) = (x^2+1+x\sqrt{2})(x^2+1-x\sqrt{2})$$

Поскольку при раскрытии модуля, слагаемые просто поменяются местами в случае $x<0$. Попробуем проинтегрировать методом неопределенных коэффициентов:

$$\frac{1}{(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}x+1}$$

$$(Ax+B)(x^2-\sqrt{2}x+1) + (Cx+D)(x^2+\sqrt{2}x+1) = 1$$

Рассмотрим коэффициенты по степеням:

$$\begin{cases} x^3: & & & & & A & + & C & = & 0 \\ x^2: & B & + & D & - & \sqrt{2}A & + & \sqrt{2}C & = & 0 \\ x: & A & - & B\sqrt{2} & + & C & + & D\sqrt{2} & = & 0 \\ 1: & & & & & B & + & D & = & 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A & + & C & = & 0 \\ \sqrt{2}C & - & \sqrt{2}A & = & -1 \\ & & D & = & B \\ B & + & D & = & 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A & = & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ C & = & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ B & = & \frac{1}{2} \\ D & = & \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\int \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx + \int \frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx$$

Как считать такие интегралы? Очень легко, если пользоваться следующей схемой:

$$\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$$

Отношение под интегралом называется логарифмической производной. Рассмотрим наши функции:

$$(x^2 \pm \sqrt{x}+1)' = 2x \pm \sqrt{2} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{2} = \frac{1}{4\sqrt{2}}(2x+\sqrt{2}) + \frac{1}{4}$$

Поскольку наше соотношение не является логарифмической производной, то мы хотим их разложить на отношения вида:

$$\frac{af'(x)+b}{f(x)} \Rightarrow \int \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx = \frac{1}{4\sqrt{2}}\int \frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx + \frac{1}{4}\int \frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln(x^2+\sqrt{2}x+1) + \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln(x^2+\sqrt{2}x+1) + \frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}x+1\right) + C$$

где в логарифме не нужен модуль, поскольку квадратный трехчлен всегда положителен. Со вторым интегралом всё аналогично:

$$T(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} \Rightarrow T(-x) = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1},\ F'(x) = T(x) \Rightarrow T(-x) = -F'(-x)$$

Тогда мы просто перепишем ответ:

$$\int \frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx = -\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln(x^2-\sqrt{2}x+1) - \frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{2}x+1\right) + C$$

■

Упр. 1. (**Задача из теории чисел**) Доказать, что число $4^p + p^4$ - составное, где p - простое число.

□ Необходимо использовать формулу суммы квадратов. ■

Что будет, если степень числителя больше степени знаменателя?

Задача 2. (**Д1868**)

$$\int \frac{x^{10}dx}{x^2+x-2}$$

□ Поскольку $\deg x^{10} > \deg x^2+x-2$, то сначала надо поделить многочлен в числителе на многочлен в знаменателе с остатком. Можно это сделать двумя способами, первый из них - в столбик:

$$\cdot x^8: x^{10} - x^{10} - x^9 + 2x^8 = -x^9 + 2x^8$$

$$\cdot(-x^7):\ -x^9 + 2x^8 + x^9 + x^8 - 2x^7 = 3x^8 - 2x^7$$

И так далее. Попробуем сделать это по-другому. Трехчлен в знаменателе легко раскладывается на множители:

$$x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$$

На линейные множители делить гораздо проще. Воспользуемся схемой Горнера (первая ячейка умножается на ячейку степени и складываются с пониженной степенью выше):

	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Таким образом, мы получаем:

$$(x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x-1) + 1 = x^{10}$$

Это по сути частный случай формулы сокращенного умножения:

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1)$$

Поделим полученный многочлен на $(x+2)$:

	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
-2	1	-1	3	$-6+1=-5$	$10+1$	$-22+1$	43	-85	171	-341

Тогда:

$$x^{10} = 1 + (x-1)((x+2)(x^8 - x^7 + 3x^6 - 5x^5 + 11x^4 - 21x^3 + 43x^2 - 85x + 171) - 341)$$

Поделим полученный многочлен в нашей дроби:

$$\frac{x^{10}}{x^2+x-2} = \frac{1}{(x-1)(x+2)} + x^8 - x^7 + 3x^6 - 5x^5 + 11x^4 - 21x^3 + 43x^2 - 85x + 171 - \frac{341}{x+2}$$

Отсюда, каждое слагаемое в отдельности легко интегрируется:

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{3}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{3}\frac{1}{x+2} \Rightarrow \int \frac{x^{10}dx}{x^2+x-2} = \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\ln|x+2| +$$

$$+\frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{8}x^8 + \frac{3}{7}x^7 - \frac{5}{6}x^6 + \frac{11}{5}x^5 - \frac{21}{4}x^4 + \frac{43}{3}x^3 - \frac{85}{2}x^2 + 171x - 341\ln|x+2| + C$$

■

Метод Остроградского

Он применяется тогда, когда у знаменателя рациональной дроби есть кратные корни. Пусть мы хотим посчитать интеграл:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx,\ Q(x) = \prod_j (x-a_j)^{k_j}\cdot \prod_m (x^2+p_m x+q_m)^{l_m}$$

Пусть у $Q(x)$ есть рациональные корни, построим вспомогательные многочлены:

$$Q_1(x) = \prod_j (x-a_j)\cdot \prod_m (x^2+p_m x+q_m),\ Q_2(x) = \prod_j (x-a_j)^{k_j-1}\cdot \prod_m (x^2+p_m x+q_m)^{l_m-1}$$

$$Q(x) = Q_1(x)\cdot Q_2(x)$$

Тогда найдутся многочлены $P_1(x)$ и $P_2(x)$ такие, что:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} + \int \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}dx,\ \deg P_2 < \deg Q_2,\ \deg P_1 < \deg Q_1$$

Теорема 1. (**метод Остроградского**) Существуют $P_1(x), P_2(x)$ такие, что верно равенство:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} + \int \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}dx,\ \deg P_2 < \deg Q_2,\ \deg P_1 < \deg Q_1$$

Возьмем производные от обеих частей:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_2'(x)Q_2(x) - P_2(x)Q_2'(x)}{Q_2^2(x)} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$$

Умножим левую и правую части на $Q_1\cdot Q_2^2$, тогда мы получим:

$$\frac{P(x)\cdot Q_1(x)\cdot Q_2^2(x)}{Q_1(x)\cdot Q_2(x)} = Q_1(x)\cdot Q_2^2(x)\cdot \left(\frac{P_2'(x)Q_2(x) - P_2(x)Q_2'(x)}{Q_2^2(x)} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(x)\cdot Q_2(x) = P_2'(x)\cdot Q(x) - P_2(x)\cdot Q_2'(x)\cdot Q_1(x) + P_1(x)\cdot Q_2^2(x)$$

Оказывается, что из этого равенства всегда можно восстановить многочлены $P_1(x)$ и $P_2(x)$.

Задача 3. (**Д1891**)

$$\int \frac{xdx}{(x-1)^2(x+1)^3}$$

□

$$Q(x) = (x-1)^2(x+1)^3,\ Q_1(x) = (x-1)(x+1),\ Q_2(x) = (x-1)(x+1)^2$$

$$Q_2'(x) = (x+1)^2 + 2(x+1)(x-1) = (x+1)(3x-1)$$

$$\int \frac{xdx}{(x-1)^2(x+1)^3} = \frac{Ax^2+Bx+C}{(x-1)(x+1)^2} + \int \frac{Dx+E}{(x-1)(x+1)}dx$$

Запишем формулу выше для нашего случая:

$$x(x-1)(x+1)^2 = (2Ax+B)(x-1)^2(x+1)^3 - (Ax^2+Bx+C)(x+1)^2(3x-1)(x-1) +$$

$$+(Dx+E)(x-1)^2(x+1)^4 \Rightarrow /(x-1)(x+1)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = (2Ax+B)(x-1)(x+1) - (Ax^2+Bx+C)(3x-1) + (Dx+E)(x-1)(x+1)^2$$

Иногда удобнее находить коэффициенты, подставив в левую/правую части 1:

$$x = 1 \Rightarrow 1 = -(A+B+C)2,\ x = -1 \Rightarrow -1 = -(A-B+C)(-4)$$

$$x = 0 \Rightarrow 0 = -B + C - E$$

Не хватает ещё двух уравнений $\Rightarrow$ возьмем их из старших степеней:

$$x^4\colon 0 = D,\ x^3\colon 0 = 2A - 3A + E$$

Таким образом, мы получаем систему:

$$\begin{cases} A + B + C = -\frac{1}{2} \\ A - B + C = -\frac{1}{4} \\ -B + C - E = 0 \\ E = A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = -\frac{1}{8} \\ A + C = -\frac{3}{8} \\ C - A = -\frac{1}{8} \\ A = E \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{8} \\ B = -\frac{1}{8} \\ C = -\frac{1}{4} \\ E = -\frac{1}{8} \end{cases}$$

$$\int \frac{xdx}{(x-1)^2(x+1)^3} = \frac{-\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{8}x - \frac{1}{4}}{(x-1)(x+1)^2} + \int \frac{-\frac{1}{8}}{(x-1)(x+1)}dx$$

$$\frac{-\frac{1}{8}}{(x-1)(x+1)} = -\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{xdx}{(x-1)^2(x+1)^3} = -\frac{1}{8}\frac{x^2+x+2}{(x-1)(x+1)^2} - \frac{1}{16}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$$

■

Отметим, что в методе Остроградского:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} + \int \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}dx,\ \deg P_2 < \deg Q_2,\ \deg P_1 < \deg Q_1$$

Часть $\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$ называется алгебраической, а часть $\int \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}dx$ называется трансцендентной. Интегрирование трансцендентной части обычно дает сумму логарифмов и арктангенсов: логарифмы - если есть линейные множители в знаменателе Q_1, арктангенсы - если есть квадратичные множители.

Rm: 2. Иногда можно найти алгебраическую часть, не разбирая трансцендентную, поскольку на бесконечности трансцендентная часть, состоящая из логарифмов и арктангенсов это o-малое от алгебраической части.

Задача 4. (**Д1892**)

$$\int \frac{dx}{(x^3+1)^2}$$

□

$$Q(x) = (x^3+1)^2$$

Заметим, что у x^3+1 нет кратных корней, это обычно можно понять так:

$$G(x) = (x-x_1)^k \ldots \Rightarrow G'(x) = n(x-x_1)^{k-1} \ldots$$

то есть надо посмотреть, есть ли у многочлена и его производной общие корни, поскольку кратные корни понижаются в степени, но остаются. В нашем случае:

$$G(x) = x^3 + 1 = 0,\ G'(x) = 3x^2 = 0$$

То есть система не имеет решений $\Rightarrow$ кратных корней нет. Тогда:

$$Q_1(x) = x^3 + 1,\ Q_2(x) = x^3 + 1$$

$$\int \frac{dx}{(x^3+1)^2} = \frac{Ax^2 + Bx + C}{x^3 + 1} + \int \frac{Dx^2 + Ex + F}{x^3 + 1} dx$$

$$1(x^3 + 1) = (2Ax + B)(x^3 + 1)^2 - (Ax^2 + Bx + C)3x^2(x^3 + 1) + (Dx^2 + Ex + F)(x^3 + 1)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = (2Ax + B)(x^3 + 1) - (Ax^2 + Bx + C)3x^2 + (Dx^2 + Ex + F)(x^3 + 1)$$

Как можно быстро получить коэффициенты в левой и правой частях? Рассмотрим ещё один метод:

$$z \in \mathbb{C}\colon z^3 + 1 = 0 \Rightarrow z_1 = -1,\ z_2 = e^{\frac{\pi i}{3}},\ z_3 = e^{-\frac{\pi i}{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = -(Az^2 + Bz + C)3z^2 = 3Az + 3B - 3Cz^2 = 0$$

Многочлен степени не выше 2 в трёх точках равен 1 $\Rightarrow$ этот многочлен $\equiv 1$, тогда:

$$A = 0,\ C = 0,\ B = \frac{1}{3}$$

Таким образом, мы посчитали алгебраическую часть не считая трансцендентную. Можем досчитать остальные коэффициенты и найти исходный интеграл. ■

ДЗ: решить методом Остроградского: $1873, 1892, 1894, 1898$ (только нужно алгебраическую часть); без метода Остроградского: 1883.