Неопределенный интеграл

Пусть функция f определена на интервале (a, b).

Опр: 1. Дифференцируемая функция F на интервале (a, b) называется первообразной функции f, если:

$$F'(x) = f(x),\, \forall x \in (a, b)$$

Утв. 1. $F' \equiv 0$ на $(a, b) \Leftrightarrow F = \text{const}$.

$\square$
($\Leftarrow$) Очевидно, $F = \text{const} \Rightarrow F' = 0$.

($\Rightarrow$) По теореме Лагранжа:

$$F(x_1) - F(x_2) = F'(c)(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow \forall x_1, x_2 \in (a, b),\; F(x_1) = F(x_2) \Rightarrow F(x) = \text{const}$$

$\blacksquare$

Rm: 1. Важно, что определение идет на неразрывном интервале, в противном случае функция может быть кусочной и утверждение не будет верным.

Следствие 1. Если F_1 и F_2 - первообразные f на (a, b), то $F_1 - F_2 = \text{const}$.

$\square$ $(F_1 - F_2)' = f - f = 0 \Rightarrow$ используем предыдущее утверждение. $\blacksquare$

Произвольную первообразную функции f на (a, b) обозначаем через $\displaystyle\int f(x)\,dx$.

Если $F' = f$, то $\displaystyle\int f(x)\,dx = F + C$, где $C = \text{const}$.

Опр: 2. Интеграл $\displaystyle\int f(x)\,dx = F + C$, где $C = \text{const}$ называется неопределенным интегралом.

Опр: 3. Процедура поиска первообразных называется интегрированием.

Rm: 2. Почему такое обозначение? От английской буквы S (square).

Пусть дана функция f, хотим найти $F\colon F' = f$. По определению производной:

$$F(a + h) - F(a) = f(a)\cdot h + \underset{h \to 0}{\bar{o}(h)}, \quad \underset{h \to 0}{\bar{o}(h)} = \alpha(a, h)h,\; \lim_{h \to 0} \alpha(a, h) = 0$$

Имея производную, мы знаем приращение функции при маленьких h:

$$F(a + h) - F(a) \approx f(a)\cdot h$$

Поскольку мы ищем функцию F с точностью до константы, возьмем точку x_0, зафиксируем там значение $F\colon F(x_0) = 0$, необходимо найти значение функции в точке x. Но x расположен относительно далеко, а связь установлена на маленьких отрезках $\Rightarrow$ дробим отрезок $[x_0, x]$ на более мелкие отрезки.

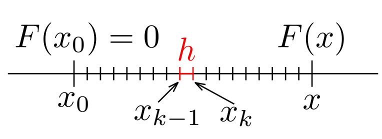

Рис. 1: Нахождение значения в точке x функции F.

Таким образом на каждом маленьком отрезке мы можем написать:

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) \approx f(x_k)h,\ h = dx(h) \Rightarrow F(x_k) - F(x_{k-1}) \approx f(x_{k-1})h = f(x_{k-1})dx(h)$$

Тогда выразим $F(x)$:

$$F(x) = \sum_k \Big(F(x_k) - F(x_{k-1})\Big) \approx \sum_k f(x_{k-1})dx(h)$$

Поскольку равенство примерное, то оно становится точнее при $h \to 0 \Rightarrow$ сумма конечная превращается в сумму бесконечную:

$$F(x) \approx \sum_k f(x_{k-1})dx(h) \xrightarrow[h\to 0]{} \int f(x)\,dx$$

Rm: 3. Первообразная дифференциала $\neq$ дифференциал первообразной:

(1) $\displaystyle\int F'(x)\,dx = \int dF = F + C;$

(2) $\displaystyle d\bigg(\int f(x)\,dx\bigg) = \bigg(\int f(x)\,dx\bigg)' dx = f(x)dx;$

Свойства неопределнного интеграла

Свойства неопределенных интегралов должны быть унаследованы от производных. Сравним свойства между ними:

(1) **Линейность**:

Дифференцирование: $(\alpha F + \beta G)' = \alpha F' + \beta G'$;

Интегрирование: Пусть F и G - первообразные для f и g на (a, b). Тогда $\alpha F + \beta G$ - первообразная для $\alpha f + \beta g$ на (a, b), что записывается так:

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx + C$$

(2) **Правило Лейбница/Интегрирование по частям**

Дифференцирование: $(F{\cdot}G)' = F'G + FG'$;

Интегрирование (I-ый способ): Пусть f и g дифференцируемы на (a, b) и у $f'g$ есть первообразная, то у fg' тоже есть первообразная и верно равенство:

$$\int (fg)'\,dx = fg + C = \int f'g\,dx + \int fg'\,dx + C$$

Интегрирование (II-ый способ):

$$\int f'g\,dx = fg - \int fg'\,dx + C$$

$\square$ Поскольку f и g дифференцируемы, то по правилу Лейбница дифференцируемо их произведение $fg \Rightarrow$ первообразная $(fg)'$ равна $fg \Rightarrow$ существует первообразная функции fg', так как эта функция равна: $(fg)' - f'g$ по правилу Лейбница. По свойству линейности у $(fg)' - f'g$ есть первообразная:

$$\int fg'\,dx = \int (fg)'\,dx - \int f'g\,dx + C = fg - \int f'g\,dx + C$$

$\blacksquare$

(3) **Дифференцирование сложной функции/Замена переменной под интегралом**

Дифференцирование: $(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$;

Интегрирование: Пусть F - первообразная f на (a,b) и $\varphi\colon (\alpha,\beta) \to (a,b)$ - дифференцируема. Тогда $F(\varphi(t))$ - первообразная функции $f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$:

$$\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt = \int f(x)\,dx\Big|_{x=\varphi(t)} + C = F(\varphi(t)) + C$$

Мы знаем, что:

$$\int f(\varphi(t))\cdot \underbrace{\varphi'(t)\,dt}_{d\varphi} = \int f(\varphi)\,d\varphi$$

Таблица интегралов

Рассматриваем те области определения, где функции определены и дифференцируемы.

Производные	**Интегралы**
1) $f(x) = \mathrm{const}$; $(C)' = (\mathrm{const})' = 0$;	1) $F(x) \equiv 0$; $\displaystyle\int 0 \cdot dx = \mathrm{const} = C$;
2) $f(x) = x^\alpha$; $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$;	2) $F(x) = x^\alpha$, $\alpha \neq -1$; $\displaystyle\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $\alpha \neq -1$;
3) $f(x) = \ln\|x\|$; $(\ln\|x\|)' = \dfrac{1}{x}$;	3) $F(x) = \dfrac{1}{x}$; $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\|x\| + C$;
4) $f(x) = e^x$; $(e^x)' = e^x$;	4) $F(x) = e^x$; $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C$;
5) $f(x) = \sin x$; $(\sin x)' = \cos x$;	5) $F(x) = \cos x$; $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C$;
6) $f(x) = \cos x$; $(\cos x)' = -\sin x$;	6) $F(x) = \sin x$; $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C$;
7) $f(x) = \operatorname{tg} x$; $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;	7) $F(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$; $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C$;
8) $f(x) = \operatorname{ctg} x$; $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;	8) $F(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x}$; $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x + C$;
9) $f(x) = \arcsin x$; $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;	9) $F(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C$;
10) $f(x) = \arccos x$; $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;	10) $F(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\arccos x + C$;
11) $f(x) = \operatorname{arctg} x$; $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;	11) $F(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$; $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + C$;
12) $f(x) = \operatorname{arcctg} x$; $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$;	12) $F(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$; $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = -\operatorname{arcctg} x + C$;
13) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right)$; $\left(\ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right)\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}}$;	13) $F(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}}$; $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}}\,dx = \ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right) + C$;
14) $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left\|\dfrac{x-1}{x+1}\right\|$; $\left(\dfrac{1}{2}\ln\left\|\dfrac{x-1}{x+1}\right\|\right)' = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1}\right) = \dfrac{1}{x^2-1}$;	14) $F(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$; $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left\|\frac{x-1}{x+1}\right\| + C$;

Опр: 4. Назовем следующую функцию: $\ln\left(x+\sqrt{x^2\pm 1}\right)$ длинным логарифмом.

Опр: 5. Назовем следующую функцию: $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$ высоким логарифмом.

В некоторой степени можно сказать, что таблица интегралов $\Leftrightarrow$ таблица производных.

Rm: 4. Если область определения разбивается на несколько частей, то на каждой из них, при интегрировании, константа выбирается своя.

Пример: $f(x) = x^{-2}$, для первообразной константы в положительной полуоси и в отрицательной - будут разными.

Упр. 1. Решить уравнение $t = \operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ (найти x).

$\square$

$$t = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \geq 0 \Rightarrow 2t = e^x + e^{-x} \Rightarrow 2te^x = e^{2x} + 1 \Rightarrow e^{2x} - 2te^x + 1 = 0 \Rightarrow e^x = \frac{2t \pm \sqrt{4t^2-4}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^x = t \pm \sqrt{t^2-1},\ t \geq 0 \Rightarrow t^2 \geq 1 \Rightarrow t \geq 1 \Rightarrow t \pm \sqrt{t^2-1} > 0 \Rightarrow x = \ln\left(t \pm \sqrt{t^2-1}\right)$$

$\blacksquare$