# Определенный интеграл

**ДЗ**: 2182 б), 2189 с подсказкой, 2192* - необязательная и трудная, 2193.2 (картинкой решается легко), 2200, 2205, 2207, 2209, 2216 в).

**Задача 1.** (**Д2182** б)) Найти нижнюю и верхнюю интегральные суммы на соответствующих сегментах, деля их на $n$ равных частей:

$$f(x) = \sqrt{x},\ 0 \leq x \leq 1$$

□ Делим отрезок на $n$ равных частей длины $\frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$, выберем отмеченные точки слева, тогда:

$$x_0 = 0, x_1 = 0 + \frac{1}{n}, \ldots, x_j = 0 + \frac{j}{n}, \ldots, x_n = 1 \Rightarrow \lambda(\mathbb{T}) = \frac{1}{n}$$

Посчитаем суммы Дарбу:

$$S(f, \mathbb{T}) = f(x_1)\frac{1}{n} + f(x_2)\frac{1}{n} + \ldots + f(x_n)\frac{1}{n}$$

$$s(f, \mathbb{T}) = f(x_0)\frac{1}{n} + f(x_1)\frac{1}{n} + \ldots + f(x_{n-1})\frac{1}{n}$$

$$\Omega(\mathbb{T}) = S(f, \mathbb{T}) - s(f, \mathbb{T}) = (f(x_n) - f(x_0))\cdot\frac{1}{n} = (f(1) - f(0))\frac{1}{n} = \frac{1}{n} \to 0$$

$$s(f, \mathbb{T}) = \frac{1}{n}\cdot\left(\sqrt{0} + \sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{2}{n}} + \ldots + \sqrt{\frac{n-1}{n}}\right)$$

$$S(f, \mathbb{T}) = \frac{1}{n}\cdot\left(\sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{2}{n}} + \ldots + \sqrt{\frac{n-1}{n}} + 1\right)$$

■

**Задача 2.** (**Д2189**) Вычислить определенные интегралы, рассматривая их как пределы соответствующих интегральных сумм и производя разбиение промежутка интеграции надлежащим образом:

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{x^2},\ 0 < a < b$$

Положить $\xi_i = \sqrt{x_i x_{i+1}}$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

□ Делим отрезок на $n$ равных частей длины $\frac{b-a}{n}$, тогда:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

$$\xi_i = \sqrt{x_i x_{i+1}},\ i = 0, 1, \ldots, n,\ \xi_i \in (x_i, x_{i+1})$$

Посчитаем интегральную сумму:

$$\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\cdot(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{x_i x_{i+1}}(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{1}{x_i} - \frac{1}{x_{i+1}}\right) = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_n} = \frac{b-a}{ab}$$

■

**Задача 3.** (**Д2192**) Вычислить интеграл Пуассона:

$$\int_0^{\pi} \ln(1 - 2\alpha\cos(x) + \alpha^2)dx$$

При а) $|\alpha| < 1$; б) $|\alpha| > 1$;

$\square$ Делим отрезок на $n$ равных частей длины $\frac{\pi-0}{n} = \frac{\pi}{n}$, тогда:

$$0 = x_0, x_1 = 0 + \frac{\pi}{n}, x_2 = \frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{n}, \ldots, x_j = j\cdot\frac{\pi}{n}, \ldots, x_n = \pi \Rightarrow \lambda(\mathbb{T}) = \frac{\pi}{n}$$

Используем формулу Эйлера:

$$z = e^{ix} = \cos x + i\sin x,\ \overline{z} = \cos x - i\sin x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\alpha - z)(\alpha - \overline{z}) = \alpha^2 - \alpha(z + \overline{z}) + z\overline{z} = \alpha^2 - 2\alpha\cos x + 1$$

Выберем отмеченные точки слева, тогда интегральная сумма будет равна:

$$\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) = \sum_{j=0}^{n-1} \ln\left(\alpha - e^{\frac{i\pi}{n}j}\right)\cdot\left(\alpha - e^{\frac{-i\pi}{n}j}\right)\cdot\frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{n}\cdot\ln\prod_{j=0}^{n-1}\left(\alpha - e^{\frac{i\pi}{n}j}\right)\cdot\left(\alpha - e^{\frac{-i\pi}{n}j}\right)$$

Заметим, что в произведении находятся единичные корни уравнения $\alpha^{2n} - 1 = 0$, два корня 1 и отсутствует корень $-1$, тогда:

$$\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) = \frac{\pi}{n}\cdot\ln\prod_{j=0}^{n-1}\left(\alpha - e^{\frac{i\pi}{n}j}\right)\cdot\left(\alpha - e^{\frac{-i\pi}{n}j}\right) = \frac{\pi}{n}\cdot\ln\frac{(\alpha-1)(\alpha^{2n}-1)}{\alpha+1}$$

Тогда, если $|\alpha| < 1$, то $\alpha^{2n} \to 0$ при $n \to \infty$:

$$\frac{(\alpha-1)(\alpha^{2n}-1)}{\alpha+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1-\alpha}{1+\alpha} > 0 \Rightarrow \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) \to 0$$

Если $|\alpha| > 1$, то тогда:

$$\frac{\pi}{n}\cdot\ln\frac{(\alpha-1)(\alpha^{2n}-1)}{\alpha+1} = \frac{\pi}{n}\cdot\left(2n\ln(\alpha) + \ln\frac{(\alpha-1)(1-\alpha^{-2n})}{\alpha+1}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 2\pi\ln(\alpha)$$

$\blacksquare$

**Задача 4.** (**Д2193.2**) Пусть функция $f(x)$ выпукла сверху на сегменте $[a, b]$. Доказать, что:

$$(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} \leq \int_a^b f(x)dx \leq (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$\square$ Функция $f(x)$ выпукла сверху на $[a, b]$ означает:

$$\forall\lambda \in [0, 1],\ \forall x_1, x_2 \in [a, b],\ f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

Покажем, что $f(x)$ - непрерывна на $(a,b)$. Пусть $x_0 \in (a,b)$ и $0 < h < h_0$ и $x_1 = x_0$, $x_2 = x_0 + h_0$, тогда:

$$x = x_0 + h = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \Rightarrow \lambda = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} = \frac{h_0 - h}{h_0} \in (0,1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x_0 + h) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) = \frac{h_0 - h}{h_0} f(x_0) + \frac{h}{h_0} f(x_0 + h_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x_0 + h) - f(x_0) \geq h \frac{f(x_0 + h_0) - f(x_0)}{h_0}$$

Функция выпукла сверху на сегменте $[a,b]$, тогда верно:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

■

**Задача 5.** (**Д2209**)

$$\int\limits_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

□ Функция непрерывна на всем интервале $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, воспользуемся формулой Ньютона-Лейбница:

$$\int\limits_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin\left(\tfrac{1}{2}\right) - \arcsin\left(-\tfrac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

■

**Задача 6.** (**Д2216** в)) Объяснить, почему формальное применение формулы Ньютона-Лейбница приводит к неверным результатам, если:

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{d}{dx}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right) dx$$

□ Функция $F(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$ ■