Неопределенный интеграл

Пусть $F(x)$ определена на промежутке $\langle a, b \rangle$, где $\langle \in \{\, (, [\, \}$, $\rangle \in \{\,),]\, \}$ и a, b могут принимать бесконечные значения: $\pm\infty$.

Опр: 1. $F(x)$ называется первообразной для $f(x)$ (на $\langle a, b \rangle$), если $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in \langle a, b \rangle$.

Первообразная не обязательна существует, но для многих она есть.

Теорема 1. Пусть $F_1(x)$ и $F_2(x)$ - две первообразные для f на $< a, b >$, тогда:

$$F_1(x) - F_2(x) = \text{const}, \ \forall x \in \langle a, b \rangle$$

□ Рассмотрим разность как функцию: $F(x) = F_1(x) - F_2(x) \Rightarrow F'(x) = f(x) - f(x) = 0$. Рассмотрим разность этой функции в разных точках: $F(x_2) - F(x_1)$, где $x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle$. Пусть $x_2 > x_1$, тогда по теореме Лагранжа:

$$F(x_2) - F(x_1) = F'(c)(x_2 - x_1),\ c \in (x_1, x_2) \Rightarrow F'(x) = 0 \Rightarrow F(x_2) - F(x_1) = 0 \Rightarrow F(x) = \text{const}$$

■

Пусть $M = \{F(x)\colon F$ - первообразная для f на $\langle a, b \rangle\}$, тогда оно имеет следующий вид:

$$M = \{F_0(x) + C\colon C \in \mathbb{R}\} = \int f(x)dx$$

Опр: 2. Множество M всех первообразных функции f называется неопределенным интегралом f.

Стилизованное обозначение интеграла идёт от буквы S (square). В таком выражении есть большой недостаток: нигде не фигурирует промежуток $\langle a, b \rangle$ и он как бы подразумевается из контекста.

Таблица неопределенных интегралов

Степенные функции

1) $(x^n)' = nx^{n-1} \Rightarrow \displaystyle\int nx^{n-1}dx = x^n + C \Rightarrow \int x^{n-1}dx = \frac{x^n}{n} + C$.

При $n = 1$ мы получаем следующий интеграл:

$$\int 1 \cdot dx = x + C$$

При $p \in \mathbb{R}$, $x \in (0, +\infty)$ мы получим:

$$\int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C$$

При $p \in \mathbb{N}$ равенство будет верно $\forall x \in \mathbb{R}$.

Rm: 1. Отметим, что здесь обязательно $p \neq -1$.

Можно заметить, что у нас множество недоговорок и при решении задач будем опускать конкретные детали на каком промежутке мы отыскали ту или иную первообразную. Рассмотрим также один исключительный случай, когда $p = -1$.

2) $(\ln(x))' = \dfrac{1}{x} \Rightarrow x > 0$, $\displaystyle\int \frac{1}{x}dx = \ln(x) + C$. $(\ln(-x))' = \dfrac{-1}{-x} = \dfrac{1}{x} \Rightarrow x < 0$, $\displaystyle\int \frac{1}{x}dx = \ln(x) + C$.

Часто пишут:

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C,\ x \neq 0$$

В этой записи собраны две записи выше для первого промежутка и для второго. Но неверно утверждать, что множество всех первообразных для $\frac{1}{x}$ на объединении $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ будет тем, что обозначено выше. Дело в том, что можно взять $\ln(x)$ и двигать её вверх/вниз, прибавляя свою константу C_1. Тоже самое можно делать для $\ln(-x)$, прибавляя свою константу C_2.

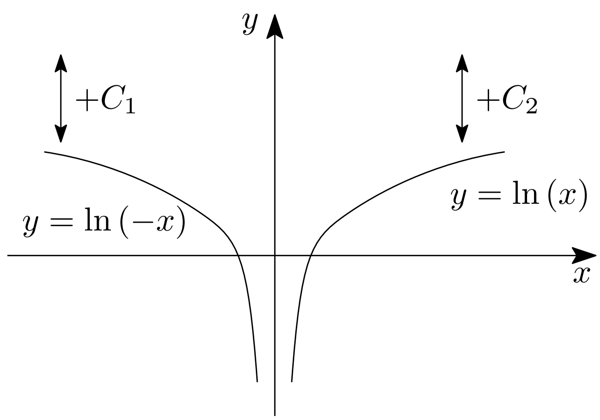

Рис. 1: Множество $y = \ln|x| + C$.

Но делать такие сдвиги мы можем только независимо. Мы же все рассуждения делаем только для промежутков и запись выше лишь означает, что содержит в себе два равенства для сокращения:

$$\int \frac{1}{x}dx = \begin{cases} \ln(x) + C_1, & x > 0 \\ \ln(-x) + C_2, & x < 0 \end{cases}$$

Показательные функции

3) $\displaystyle\int e^x dx = e^x + C$, $x \in \mathbb{R}$.

4) $\displaystyle\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, $x \in \mathbb{R}$.

Тригонометрические функции

5) $\displaystyle\int \sin x dx = -\cos x + C$, $x \in \mathbb{R}$.

6) $\displaystyle\int \cos x dx = \sin x + C$, $x \in \mathbb{R}$.

Rm: 2. Когда пишут неопределенный интеграл, то обычно опускают скобочки подразумевающие что интеграл это множество, а не одна какая-то функция.

7) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x) dx = \operatorname{tg} x + C.$

И опять, равенство выше подразумевается для тех промежутков, где $\frac{1}{\cos^2 x}$ определена: то есть для любого промежутка, который лёг между точками $\frac{(2k-1)\pi}{2}$ и $\frac{(2k+1)\pi}{2}$:

$$x \in \langle a, b\rangle \subset \left(\frac{(2k-1)\pi}{2}, \frac{(2k+1)\pi}{2}\right),\ k \in \mathbb{Z}$$

8) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int (1 + \operatorname{ctg}^2 x) dx = -\operatorname{ctg} x + C.$

И опять же, равенство подразумевается для промежутков, где $\frac{1}{\sin^2 x}$ определена.

Обратные тригонометрические функции

9) $\displaystyle(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$, $x \in (-1, 1)$.

10) $\displaystyle(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\arccos x + C$, $x \in (-1, 1)$.

Отсюда можем утверждать, что множества первообразных выше равны:

$$\{\arcsin x + C \colon C \in \mathbb{R}\} = \{-\arccos x + C \colon C \in \mathbb{R}\}$$

Но сами представители этих множеств не равны между собой. По теореме выше, эти два представления отличаются на константу и действительно:

$$\arcsin x + \arccos x \equiv \frac{\pi}{2}$$

11) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2} dx = \left[\begin{array}{c} \operatorname{arctg} x + C \\ -\operatorname{arcctg} x + C \end{array}\right.$, $x \in \mathbb{R}$.

Аналогично предыдущему случаю:

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x \equiv \frac{\pi}{2}$$

Гиперболические функции

$$\operatorname{sh} x = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\ \operatorname{ch} x = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},\ \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$$

12) $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x \Rightarrow \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C.$

13) $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x \Rightarrow \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C.$

14) $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \Rightarrow \int \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x} dx = \operatorname{th} x + C.$

15) $(\operatorname{cth} x)' = \dfrac{\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x} \Rightarrow \int \dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x} dx = -\operatorname{cth} x + C.$

Обратные гиперболические функции

Рассмотрим гиперболические функции и попробуем понять, как устроены обратные гиперболические функции. Для этого нужно понимать, а где это вообще можно сделать.

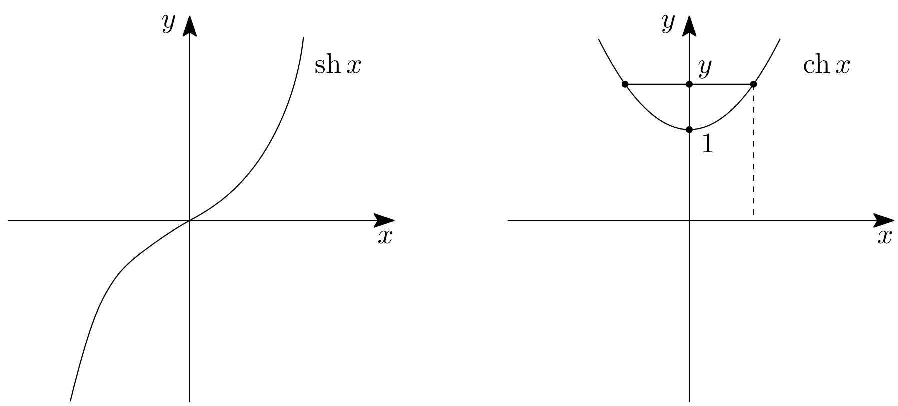

Рис. 2: Гиперболические функции.

Видим, что обратная функция для гиперболического синуса: $x = \operatorname{sh}^{-1}(y)$ существует везде и называется ариасинус. Обратная функция для гиперболического косинуса: $x = \operatorname{ch}^{-1}(y)$ существует только при $y \geq 1$ и при этом надо выбирать какой-то конкретный x, как правило это: $x > 0$, называется обратная функция ариакосинус. Решим уравнения:

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Rightarrow t = e^x \neq 0 \Rightarrow t - \frac{1}{t} = 2y \Rightarrow t^2 - 2yt - 1 = 0 \Rightarrow \frac{D}{4} = y^2 + 1,\ t = y \pm \sqrt{y^2+1}$$

Заметим, что $\sqrt{y^2+1} > |y|$ и если взять отрицательную часть , то $t < 0 \Rightarrow t = y + \sqrt{y^2+1}$. Тогда:

$$e^x = y + \sqrt{y^2+1} \Rightarrow x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$$

это ариасинус. Такое выражение называют “длинным логарифмом”. Для косинуса похожая ситуация:

$$t = e^x \Rightarrow t + \frac{1}{t} = 2y \Rightarrow t^2 - 2yt + 1 = 0 \Rightarrow \frac{D}{4} = y^2 - 1 \Rightarrow t = y \pm \sqrt{y^2-1}$$

Если договорились на $x \geq 0$, то берём корень: $t = y + \sqrt{y^2 - 1}$. Ариакосинус будет равен:

$$e^x = t = y + \sqrt{y^2 - 1} \Rightarrow x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right)$$

16) $\left(\ln\left(y + \sqrt{y^2 + p}\right)\right)' = \dfrac{1 + \frac{y}{\sqrt{y^2+p}}}{y + \sqrt{y^2 + p}} = \dfrac{1}{\sqrt{y^2 + p}} \Rightarrow \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + p}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + p}\right| + C.$

Заметим, что выражение выше верно при $y^2 + p > 0$.

Способы приведения интегралов к табличным

1) **<u>Замена переменной</u>**: всегда можно менять обозначение у буквы:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \Leftrightarrow \int f(u)du = F(u) + C$$

2) **<u>Линейность</u>**: по аналогии со свойством линейности для производных:

$$F'(x) = f(x),\ G'(x) = g(x) \Rightarrow (A{\cdot}F(x) + B{\cdot}G(x))' = Af(x) + Bg(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int Af(x) + Bg(x)dx = A\int f(x)dx + B\int g(x)dx$$

3) **<u>Подстановка линейной функции</u>**: подставим вместо аргумента линейную функцию:

$$F'(x) = f(x) \Rightarrow (F(at + b))' = af(at + b) \Rightarrow \int af(at + b)dt = F(at + b) + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int f(at + b)dt = \frac{1}{a}F(at + b) + C$$

Задача 1. (**Д1633**)

$$\int \frac{x + 1}{\sqrt{x}}dx$$

□ Поскольку деление на корень из x, то промежуток подразумевается $(0, +\infty)$. Запишем $x = \sqrt{x}\sqrt{x}$:

$$\int \frac{x + 1}{\sqrt{x}}dx = \int \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int \sqrt{x}dx + \int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx + \int x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + 2x^{\frac{1}{2}} + C$$

■

Задача 2. (**Д1642**)

$$\int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx$$

□ Поскольку деление на корень из $1-x^4$, то промежуток подразумевается $(-1,1)$:

$$\sqrt{1-x^4}=\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1+x^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx+\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx=\arcsin x+\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C$$

■

Задача 3. (**Д1648**)

$$\int\sqrt{1-\sin 2x}dx,\ 0\le x\le\pi$$

□

$$\int\sqrt{1-\sin 2x}dx=\int\sqrt{\sin^2 x+\cos^2 x-2\sin x\cos x}dx=\int\sqrt{(\cos x-\sin x)^2}dx=\int|\cos x-\sin x|dx$$

На разных промежутках модуль раскрывается по-разному $\Rightarrow$ нам будет важен промежуток.

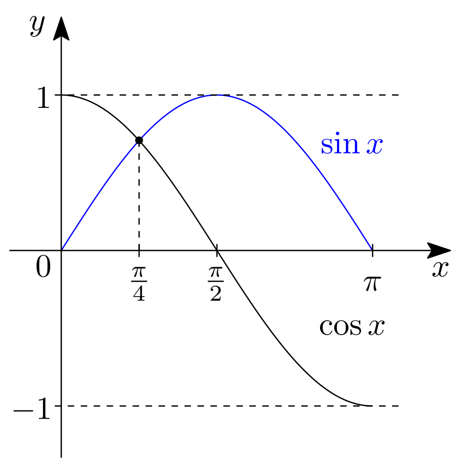

Рис. 3: $\sin x$, $\cos x$ на отрезке $[0,\pi]$.

$$|\cos x-\sin x|=\begin{cases}\cos x-\sin x, & x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\\ \sin x-\cos x, & x\in\left[\frac{\pi}{4},\pi\right]\end{cases}\Rightarrow\int|\cos x-\sin x|dx=\begin{cases}\sin x+\cos x+C_1, & x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\\ -\cos x-\sin x+C_2, & x\in\left[\frac{\pi}{4},\pi\right]\end{cases}$$

При $x=\frac{\pi}{4}$ мы получим $\sqrt{2}+C_1=-\sqrt{2}+C_2\Rightarrow C_2=2\sqrt{2}+C_1$. То есть только одна константа может быть свободной. Итого:

$$F(x)=\begin{cases}\sin x+\cos x+C, & x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\\ -\cos x-\sin x+2\sqrt{2}+C, & x\in\left[\frac{\pi}{4},\pi\right]\end{cases}$$

Будет ли эта функция дифференцируема в точке $\frac{\pi}{4}$? По следствию 1 лекции 25 семестра 1 у дифференцируемой функции могут быть только разрывы II-го рода. Поскольку $F(x)$ - непрерывна в этой точке, то если у этой функции есть левые/правые пределы, то они должны быть равны:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}+} F'(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}-} F'(x) \Rightarrow \exists\, F'\left(\frac{\pi}{4}\right) = f\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\cos x - \sin x \xrightarrow[x\to\frac{\pi}{4}+]{} 0,\ \sin x - \cos x \xrightarrow[x\to\frac{\pi}{4}-]{} 0 \Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{4}+} F'(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}-} F'(x) \Rightarrow F'\left(\frac{\pi}{4}\right) = f\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Таким образом, мы корректно нашли первообразную, поскольку на “склейке” функций, наша функция интегрируема. ■

Обобщенная первообразная

Рассмотрим функцию $y = |x|$. Её производная выглядит как $\operatorname{sgn} x$, если мы доопределим эту функцию в нуле нулём. Для неё не существует первообразной в окрестности точки 0. Иначе, пределфункции слева и справа: $F'(0+) = 1$ и $F'(0-) = -1 \Rightarrow$ функция была бы недифференцируемой в 0.

Опр: 3. Пусть есть $\langle a, b\rangle$ и функция $f(x)$ на нем. $F(x)$ называется обобщенной первообразной, если:

1) $F(x) \in C(\langle a, b\rangle)$;
2) $\exists$ конечное множество точек $\mathrm{E} = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset \langle a, b\rangle = \mathrm{I}$ такое, что:

$$\forall x \in \mathrm{I} \setminus \mathrm{E},\ F'(x) = f(x)$$

То есть мы не отказываемся от условий непрерывности, но при этом этой функции разрешается некоторое количество нарушений: в точках $x_1, \ldots, x_n$ либо производная может не существовать, либо она может не совпадать с $f(x)$. Когда найти первообразную будет невозможно, мы будем искать обобщенную первообразную.

Rm: 3. Иногда разрешают счетное число точек.

Rm: 4. Если функция - первообразная, то она - обобщенная первообразная. Обратно не верно.

Пример: Примером обобщенной первообразной может быть $y = |x|$ на $\mathbb{R}$ для функции $f(x) = \operatorname{sgn} x$ с точкой $x = 0$ из свойства 2). Для обобщенных первообразных также работает теорема 1:

$$\int \operatorname{sgn} x dx = |x| + C$$

Задача 4.

$$\int \frac{1}{x^2-1}dx$$

□

$$\int \frac{1}{x^2-1}dx = \int \frac{1}{(x-1)(x+1)}dx = \int \frac{A}{x-1}dx + \int \frac{B}{x+1}dx$$

Данный метод решения называется методом неопределенных коэффициентов:

$$\frac{Ax+A+Bx-B}{x^2-1}=\frac{1}{x^2-1}\Rightarrow A+B=0\wedge A-B=1\Rightarrow 2A=1\Rightarrow A=\frac{1}{2},\ B=-\frac{1}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int\frac{A}{x-1}dx+\int\frac{B}{x+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{x-1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x+1}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x+1|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$$

$\blacksquare$

ДЗ: 1635, 1643, 1646 (вспомнить сумму кубов), 1650, 1656, 1659, 1667, 1672.

ДЗ: найти $\operatorname{th}^{-1}(y)$, $\operatorname{cth}^{-1}(y)$ и посчитать их производные.