# Неопределенный интеграл

Напомним, что изучаем объект неопределенного интеграла: $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$.

**<u>Правила интегрирования</u>**:

(1) $\int (\alpha f + \beta g)\,dx = \alpha \int f\,dx + \beta \int g\,dx$;

(2) $\int fg'\,dx = fg - \int f'g\,dx$;

(3) $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dx \underset{x=\varphi(t)}{=} \int f(x)\,dx$;

Таблица интегралов $\Leftrightarrow$ таблица производных + длинный/высокий логарифм.

# Интегрирование рациональных функций

Рациональная функция - отношение многочлена на многочлен: $\frac{P(x)}{Q(x)}$. Пусть $P, Q$ - многочлены, необходимо проинтегрировать рациональную функцию $\frac{P(x)}{Q(x)}$, тогда:

(1) Делим с остатком:

$$P = Q{\cdot}q + r \Rightarrow \frac{P}{Q} = q + \frac{r}{Q},\ \deg r < \deg Q$$

(2) В силу линейности интеграла:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int q(x)\,dx + \int \frac{r(x)}{Q(x)}\,dx$$

(3) Интеграл от многочлена $q(x)$ это сумма табличных интегралов от $x^k \Rightarrow$ знаем их вид;

(4) Из алгебры известно, что если:

$$Q(x) = (x-\alpha_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_m)^{k_m}\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\cdot\ldots\cdot(x^2+p_nx+q_n)^{l_n}$$

где $x^2 + p_ix - q_i$ - неприводимые многочлены, то можем разложить остаточный многочлен:

$$\frac{r(x)}{Q(x)} = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{u=1}^{k_j}\frac{\varkappa_{j,u}}{(x-\alpha_j)^u}\right) + \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{v=1}^{l_j}\frac{\Delta_{j,v}x+\Theta_{j,v}}{(x^2+p_jx+q_j)^v}\right)$$

(5) В силу линейности, интегрирование $\frac{r(x)}{Q(x)}$ сводится к интегрированию следующих выражений:

(I) $\dfrac{1}{(x-\alpha)^u} \Rightarrow \displaystyle\int \frac{1}{(x-\alpha)^u}\,dx = \begin{cases} \ln|x-\alpha|, & u = 1 \\ -\dfrac{1}{(u-1)}\cdot\dfrac{1}{(x-\alpha)^{u-1}}, & u \neq 1 \end{cases}$;

(II) $\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^v} \Rightarrow$ выделим полный квадрат:

$$x^2+px+q=(x+\lambda)^2+\mu^2=\mu^2\left(\left(\tfrac{x}{\mu}+\tfrac{\lambda}{\mu}\right)^2+1\right)$$

Сделаем замену:

$$t=\frac{x}{\mu}+\frac{\lambda}{\mu},\ x=\mu t-\lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^v}\,dx=\int \frac{A(\mu t-\lambda)+B}{\mu^{2v}(t^2+1)^v}\,d(\mu t-\lambda)=\int \frac{A(\mu^2 t)-A\lambda\mu+B\mu}{\mu^{2v}(t^2+1)^v}\,dt$$

Следовательно, надо научиться интегрировать следующие функции:

(A) $\dfrac{t}{(t^2+1)^v} \Rightarrow$ уже умеем интегрировать после замены переменной под интегралом:

$$t^2=s \Rightarrow 2t\,dt=\,dt^2=ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{\overbrace{2t\,dt}^{dt^2=ds}}{(t^2+1)^v}=\int \frac{ds}{(s+1)^v}=\begin{cases}\ln|s+1|, & v=1\\ -\dfrac{1}{(v-1)}\cdot\dfrac{1}{(s+1)^{v-1}}, & v\neq 1\end{cases}$$

(B) $\dfrac{1}{(t^2+1)^v} \Rightarrow$ если $v=1$, то:

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)}=\operatorname{arctg} t+C$$

Если $v>1$, то интегрировать напрямую не получится, поэтому будем понижать степень, интегрируя по частям:

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^v}=\int \frac{1}{(t^2+1)^v}\underbrace{(t)'}_{1}\,dt=\frac{t}{(t^2+1)^v}-\int t\left(\frac{1}{(t^2+1)^v}\right)'dt=$$

$$=\frac{t}{(t^2+1)^v}+2v\int \frac{t^2}{(t^2+1)^{v+1}}\,dt=\frac{t}{(t^2+1)^v}+2v\int \frac{(t^2+1)}{(t^2+1)^{v+1}}\,dt-2v\int \frac{1}{(t^2+1)^{v+1}}\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2v\int \frac{dt}{(t^2+1)^{v+1}}=\frac{t}{(t^2+1)^v}+(2v-1)\int \frac{dt}{(1+t^2)^v}+C$$

**Rm: 1.** Чтобы представить $Q(x)$ в виде:

$$Q(x)=(x-\alpha_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_m)^{k_m}\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\cdot\ldots\cdot(x^2+p_nx+q_n)^{l_n}$$

где $x^2+p_ix-q_i$ - неприводимые многочлены, необходимо найти его корни, а это сложная задача.

На семинарах разбирается метод неопределенных коэффициентов Остраградского.

# Замены, приводящие к интегрированию рациональных функций

Рассмотрим интегралы вида:

$$\int R(x, y(x))\,dx$$

где $R(x,y) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ и $P, Q$ - многочлены от $x, y$. Вместо $y$ подставили функцию, например:

$$y(x) = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}} \vee y(x) = \sqrt{ax^2+bx+c}$$

Как интегрировать такие функции?

<u>**Идея**</u>: Найти рациональную параметризацию графика функции: $y = y(x)$, то есть найти рациональные функции $x(t), y(t)$ такие, что $y(t) = y(x(t))$, где $x(t)$ - обратимая, дифференцируемая функция на интересующем нас промежутке $\Rightarrow$ можно получить $t = t(x)$ и продифференцировать $x(t)$. Тогда

$$\int R(x, y(x))\,dx \underset{x=x(t)}{=} \int R(x(t), y(t))x'(t)\,dt$$

Теперь, если: $x(t), y(t)$ - рациональные функции $\Rightarrow R(x(t), y(t))$ - рациональная функция и $x'(t)$ - рациональная функция $\Rightarrow R(x(t), y(t))x'(t)$ - рациональная функция от $t \Rightarrow$ знаем как интегрировать.

## Интегрирование дробно-линейных функций

$$\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\,dx$$

где $\frac{ax+b}{cx+d}$ - невырожденная дробь $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$. Сделаем замену:

$$t = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}} \Rightarrow t^m = \frac{ax+b}{cx+d}$$

Таким образом, $x$ выражается через $t$ рациональным образом $\Rightarrow$ из-под дифференциала $x$ получится рациональная функция и $R(x,t)$ - рациональная функция.

## Интегрирование функций с квадратным корнем

$$\int R(x, \sqrt{x^2+1})\,dx, \int R(x, \sqrt{x^2-1})\,dx, \int R(x, \sqrt{1-x^2})\,dx$$

Под корнем может стоять квадратичный трехчлен общего вида, но после выделения полного квадрата и подходящей линейной замены, все сведется к одному из этих трех вариантов. Найдем рациональную параметризацию для таких функций:

(I) Интеграл вида:

$$\int R(x, \sqrt{x^2+1})\,dx \Rightarrow y = \sqrt{x^2+1}$$

Это верхняя ветка гиперболы, то есть возведя в квадрат получим: $y^2 - x^2 = 1$.

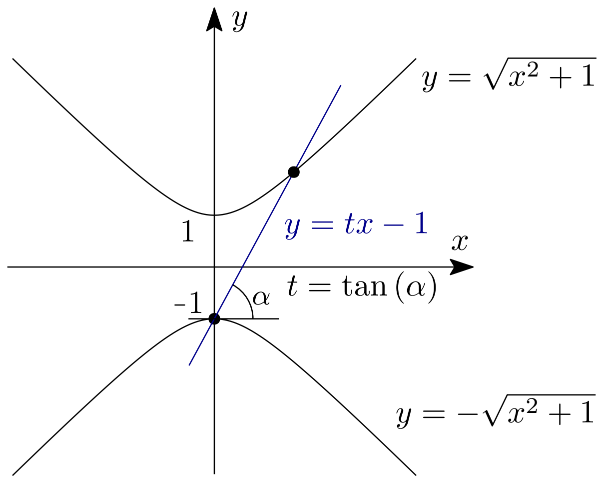


Рис. 1: Параметризация верхней части гиперболы.

Рациональная параметризация: возьмем точку $-1$ и проведем через нее прямую, пересекающую верхнюю часть гиперболы. Тангенс угла равен $t$, одна точка пересечения это $(0,\text{-}1)$, найдем вторую:

$$y = tx - 1 \Rightarrow (tx-1)^2 - x^2 = 1 \Rightarrow t^2x^2 - 2tx + 1 - x^2 = 1 \Rightarrow x((t^2-1)x - 2t) = 0$$

Случай $x = 0$ - отбрасываем, так как это точка $(0,\text{-}1)$, а нас интересует точка пересечения с верхней гиперболой, следовательно:

$$x(t) = \frac{2t}{t^2-1},\ y(t) = \frac{t^2+1}{t^2-1}$$

Таким образом, получили рациональную параметризацию, которая однозначна за исключением одной точки, когда подходим к $\frac{\pi}{2}$ и $t \to \infty$;

(II) Интеграл вида:

$$\int R(x, \sqrt{1-x^2})\,dx \Rightarrow y = \sqrt{1-x^2}$$

Это верхняя половина окружности, то есть возведя в квадрат получим: $y^2 + x^2 = 1$.

**Rm: 2.** Одну параметризацию мы знаем - через $\cos x$ и $\sin x$ (если рассматривать через заметание секторов, то при рассмотрение гиперболы также появляются гиперболические: $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$. Как косинусы/синусы задают повороты, так и гиперболические синусы/косинусы будут задавать гиперболические повороты).

Рациональная параметризация: возьмем точку $(\text{-}1, 0)$ и проведем через нее прямую, пересекающую верхнюю часть окружности. Снова параметризуем через тангенс:

$$y = (x+1)t \Rightarrow ((x+1)t)^2 + x^2 = 1 \Rightarrow (x+1)^2t^2 = (1-x)(1+x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+1)t^2 = (1-x) \Rightarrow x(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Случай $x = -1$ - отбрасываем, так как это $(\text{-}1, 0)$, а нас интересует 2-ая точка пересечения, тогда:

$$x(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \Rightarrow y(t) = (x(t)+1)t = \frac{2t}{1+t^2}$$

Следовательно, мы получили запись косинуса и синуса через тангенс половинчатого угла.

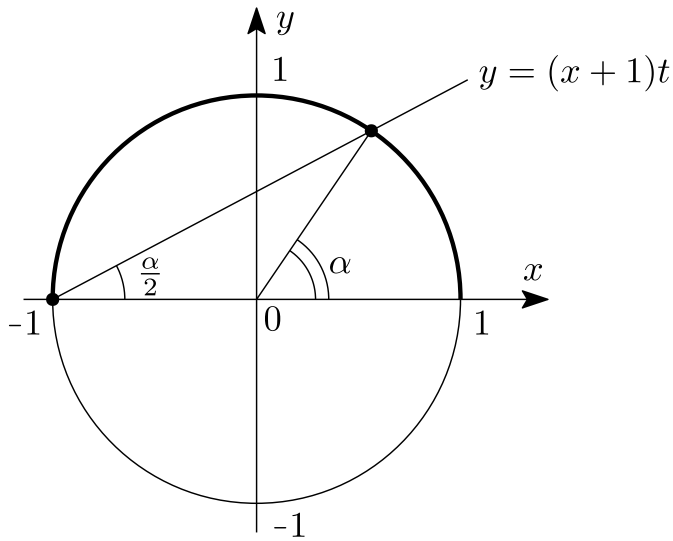


Рис. 2: Параметризация верхней половины окружности.

Таким образом, получили рациональную параметризацию, которая однозначна за исключением одной точки, когда подходим к $\pi$ и $t \to \infty$;

(III) Интеграл вида:

$$\int R(x, \sqrt{x^2-1})\, dx \Rightarrow y = \sqrt{x^2-1}$$

Это правая ветвь гиперболы: возведя в квадрат получим $x^2 - y^2 = 1$.

Рациональная параметризация: Используем аналогичную предыдущему виду:

$$y = (x+1)t \Rightarrow x^2 - (x+1)^2t^2 = 1 \Rightarrow (x-1)(x+1) = (x+1)^2t^2 \Rightarrow x - 1 = t^2(x+1)$$

Таким образом, мы получим следующий результат:

$$x(t) = \frac{1+t^2}{1-t^2},\ y(t) = \frac{2t}{1-t^2}$$

**Опр: 1.** Подстановки, приводящие интегралы описанного выше вида к интегралам от рациональных функций называются заменами Эйлера.

**Упр. 1.**

(a) Доказать, что $x^3 + y^3 = 1$ не имеет рациональной параметризации;

(b) Обобщить на случай: $x^n + y^n = 1$, $n \geq 3$;

(c) Найти рациональную параметризацию у уравнения: $x^3 + y^3 = xy$;

$\square$

(a) Предположим, что такая рационализация существует:

$$x(t) = \frac{p(t)}{r(t)},\ y(t) = \frac{q(t)}{r(t)}$$

где $p(t), q(t), r(t)$ не имеют общего делителя отличного от единицы и следовательно дроби - несократимые. Любую рациональную дробь можно привести к несократимой с точностью до константы. В таком случае, домножив выражение на $r(t)^3$ мы получим следующее:

$$\left(\frac{p(t)}{r(t)}\right)^3 + \left(\frac{q(t)}{r(t)}\right)^3 = 1 \Rightarrow p(t)^3 + q(t)^3 = r(t)^3$$

тогда $p(t), q(t), r(t)$ будут взаимно простыми, иначе был бы общий делитель отличный от единицы. Продифференцируем это уравнение, получим:

$$p^2p' + q^2q' - r^2r' = 0$$

Можем предположить, что $\deg p \geq \deg q \wedge \deg p \geq \deg r$. Домножим выражение на $r$ и получим:

$$p^2p'r + q^2q'r - r^3r' = p^2(rp' - pr') + q^2(qr' - rq') = 0 \Leftrightarrow p^2(rp' - pr') = q^2(rq' - qr')$$

Если хотя бы одна из частей равенства равна 0, то $\frac{p(t)}{r(t)}$ и $\frac{q(t)}{r(t)}$ будут равны константам, поскольку:

$$\left(\frac{p}{r}\right)' = \frac{rp' - pr'}{r^2} = 0 \Leftrightarrow rp' - pr' = 0,\ \left(\frac{q}{r}\right)' = \frac{rq' - qr'}{r^2} = 0 \Leftrightarrow rq' - qr' = 0$$

и тогда $q(t) = kr(t)$ и $p(t) = mr(t)$, что будет противоречить несократимости дроби.

Поскольку $p(t)$ и $q(t)$ взаимно просты и при делении выражения $q^2(rq' - qr')$ на $p^2$ мы получаем многочлен, то $(rq' - qr')$ делится на $p^2$, то есть:

$$2\deg p \leq \max\{\deg r + \deg q - 1, \deg r - 1 + \deg q\} = \deg r + \deg q - 1$$

что невозможно, поскольку:

$$2\deg p \geq \deg q + \deg r$$

тогда: $\deg p < \deg r \vee \deg p < \deg q$, аналогично получим, что:

$$\deg r < \deg q \vee \deg r < \deg p,\ \deg q < \deg r \vee \deg q < \deg p$$

что невозможно $\Rightarrow$ приходим к противоречию с тем, что такая рациональная параметризация существует. Случаи, когда одно из слагаемых равно константе входят в этот случай. Если отношение хотя бы двух слагаемых равно константе, тогда это не является параметризацией, поскольку получаем одну точку;

(b) В общем случае, рассуждения аналогичные, выражение полученное при дифференцировании будет следующим:

$$p^{n-1}p' + q^{n-1}q' - r^{n-1}r\prime = 0 \Leftrightarrow p^{n-1}(rp' - pr') = q^{n-1}(qr' - rq')$$

И при аналогичных рассуждения про степень многочленов мы придем к противоречию;

(c) Предположим, что $y = xt$, подставив в исходное выражение мы получим следующее:

$$x^3 + t^3x^3 = tx^2 \Leftrightarrow x^3(1 + t^3) = x^2t \Leftrightarrow x(t) = \frac{t}{1 + t^3},\ y(t) = \frac{t^2}{1 + t^3}$$

Пусть $x(t) = \dfrac{t}{1 + t^3}$, $y(t) = \dfrac{t^2}{1 + t^3}$, тогда подставляя это в уравнение получим:

$$x(t)^3 + y(t)^3 = \frac{t^3}{(1 + t^3)^3} + \frac{t^6}{(1 + t^3)^3} = \frac{t^3(1 + t^3)}{(1 + t^3)^3} = \frac{t^3}{(1 + t^3)^2} = x(t){\cdot}y(t)$$

■

# Интегрирование тригонометрических функций

$$\int R(\cos x, \sin x)\,dx$$

В интегралах подобного типа есть универсальная замена:

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \Rightarrow \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \Rightarrow x = 2\arctan t \Rightarrow\ dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$$

Таким образом, все что получится после подстановки будет рациональной функцией от $t$.

**Rm: 3.** Всегда нужно смотреть, а нужна ли вообще такая замена? Как в случаях:

$$\int \sin x\,dx \vee \int R(\cos^2 x, \sin x)\cos x\,dx$$

где нужна замена всего на $\sin x$.

## Примеры интегралов, которые не выражаются в элементарных функциях

Типичные примеры интегралов, которые не выражаются в элементарных функциях:

$$\int e^{x^2}\,dx,\ \int \frac{\sin x}{x}\,dx,\ \int \frac{e^x}{x}\,dx$$

Как выяснить берется интеграл или нет? Ответ на этот вопрос базируется на теореме Лиувилля. В данном курсе её рассматривать не будем, но упомянем про её суть.

Элементарные функции: $x^n$, $e^x$, $\ln x$, $\cos x$, $\sin x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$, $\sqrt[m]{x}$. При интегрировании ответ получается составлен из элементарных функций, алгебраических операций: $+$, $-$, $\cdot$, $/$ и композиции этих функций.

Было сделано несколько наблюдений:

(1) Полезно перейти к комплексным числам и оставить очень короткий список функций: рациональные функции, $e^z$ и $\ln z$. Например:

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$$

Если захотим найти обратную функцию, то:

$$\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = t \Rightarrow (e^{ix})^2 - 2e^{ix}t + 1 = 0$$

Решаем квадратное уравнение. Корни можно искать, как $x^p = e^{p\ln x}$;

(2) Операцию композиции можно выразить алгебраически: поскольку список функций стал меньше, то необходимо научиться брать композицию какой-нибудь полученной на предыдущем шаге функции с экспонентой и какой-нибудь полученной на предыдущем шаге функции с логарифмом;

Как брать композиции? Сложную операцию подстановки одной функции в другую можно рассматривать как решение уравнения в элементарных функциях.

Были рациональные функции $\Rightarrow$ расширяем на решения алгебраических уравнений - алгебраическое расширение: были решения в $\mathbb{Q}$ добавили квадратный корень $\Rightarrow a\sqrt{2}+b$ - расширение; или было $\mathbb{R}$, расширяем на решения $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow ai + b$ - расширение. То есть, с помощью дифференциальных уравнений умеем добавлять экспоненту и логарифм. Например:

$$f = e^g \Leftrightarrow f' = f{\cdot}g'$$

Таким образом, экспоненту и логарифм функции можно определить как решение дифференциального уравнения;

**Опр: 2.** Будем говорить, что функция элементарна, если мы можем за конечное число шагов, используя решения алгебраических уравнений и операции композиции с экспонентами и логарифмами, получить эту функцию из рациональной функции.

**Пример**: $e^{P(x)}$ - это элементарная функция, где $P(x)$ - многочлен.

Сама теорема говорит о том, что интеграл возьмется, только если подинтегральная функция имеет специальный вид. И проверка, что какие-то интегралы не берутся в элементарных функциях происходит с помощью доказательства того, что подинтегральное выражение такого вида иметь не может.