Интегрирование некоторых иррациональных функций

Задача 1. (Д1935)

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$$

□ Предложим следующую замену (пусть $u>0$):

$$x=\left(\frac{u^2-1}{2u}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{x}=\frac{u^2-1}{2u},\ \sqrt{x+1}=\sqrt{\frac{u^4-2u^2+1}{4u^2}+1}=\sqrt{\frac{(u^2+1)^2}{4u^2}}=\frac{u^2+1}{2u}\Rightarrow$$

$$dx=2\cdot\frac{u^2-1}{2u}\cdot\frac{2u2u-2(u^2-1)}{4u^2}du=\left(\frac{u^2-1}{u}\right)\cdot\frac{2u^2+2}{4u^2}du=\frac{u^4-1}{2u^3}du\Rightarrow$$

$$\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}=\int\frac{u^4-1}{2u^3}\cdot\frac{2u}{2u+u^2-1+u^2+1}du=\int\frac{u^4-1}{2u^3\cdot(u+1)}du=\int\frac{(u-1)(u^2+1)}{2u^3}du=$$

$$=\int\frac{u^3-u^2+u-1}{2u^3}du=\int\frac{1}{2}-\frac{1}{2u}+\frac{1}{2u^2}-\frac{1}{2u^3}du=\frac{1}{2}\cdot\left(u-\ln u-\frac{1}{u}+\frac{1}{2u^2}\right)+C$$

Найдем выражение u через x:

$$u^2-2\sqrt{x}u-1=0\Rightarrow D=4x+4=4(x+1),\ u_{1,2}=\frac{2\sqrt{x}\pm2\sqrt{x+1}}{2}$$

$$u>0\Rightarrow u=\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\Rightarrow\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}=-\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)+$$

$$+\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{x}+2\sqrt{x+1}}+\frac{1}{4\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)^2}+C$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{x}+2\sqrt{x+1}}=-\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{2(x-x-1)}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{2}$$

$$\frac{1}{4\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)^2}=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})^2}{4}=\frac{x-2\sqrt{x(1+x)}+1+x}{4}=\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{x(1+x)}}{2}+\frac{1}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}=-\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)+\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{x(1+x)}}{2}+\sqrt{x}+C$$

■

Rm: 1. Заметим, что если у нас выражения вида $\sqrt{x+a}$ и $\sqrt{x+b}$, то заменой можно свести к похожей по типу задаче с радикалами: $\sqrt{t}$ и $\sqrt{t+(b-a)}$ и далее подобрать замену аналогичную задаче 1935 просто с другими коэффициентами. Даже можно сделать замену $u=\frac{t}{b-a}$, чтобы задача была максимально идентичной и всё превратилось в рациональную функцию.

Также задачу можно было решать гиперболической заменой: $x=\operatorname{sh}^2 t$, $x+1=\operatorname{ch}^2 t$, тогда бы выразилось всё через экспоненту $\Rightarrow$ обозначим её за новую переменную и получим рациональную функцию.

Задача 2. (**Д1949**)

$$\int \frac{1}{(x-1)^3\sqrt{x^2+3x+1}}dx$$

□ Воспользуемся модификацией метода Остроградского и сделаем замену:

$$x-1=\frac{1}{t},\ x=\frac{t+1}{t},\ dx=\frac{t-t-1}{t^2}dt=-\frac{1}{t^2}dt,\ (x-1)^3=\frac{1}{t^3}$$

$$x^2+3x+1=\frac{t^2+2t+1}{t^2}+3\frac{t+1}{t}+1=\frac{t^2+2t+1+3t^2+3t+t^2}{t^2}=\frac{5t^2+5t+1}{t^2}$$

$$\int \frac{1}{(x-1)^3\sqrt{x^2+3x+1}}dx=\int \frac{t^3\cdot t}{\sqrt{5t^2+5t+1}}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt=-\int \frac{t^2}{\sqrt{5t^2+5t+1}}dt$$

$$y=\sqrt{5t^2+5t+1},\ \int \frac{P_2(t)}{y}dt=Q_1(t)\cdot y+\lambda\cdot\int\frac{dt}{y}$$

$$\deg P_2=2,\ \deg Q_1\le 1,\ \lambda\in\mathbb{R}\Rightarrow Q_1(t)=At+B$$

$$-\int \frac{t^2}{\sqrt{5t^2+5t+1}}dt=(At+B)\sqrt{5t^2+5t+1}+\lambda\int\frac{dt}{\sqrt{5t^2+5t+1}}$$

Продифференцируем и умножим на y:

$$-t^2=A(5t^2+5t+1)+(At+B)\cdot\left(5t+\frac{5}{2}\right)+\lambda$$

$$\begin{cases} t^2: & -1 & = & 5A+5A \\ t: & 0 & = & 5A+\frac{5}{2}A+5B \\ 1: & 0 & = & A+\frac{5}{2}B+\lambda \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} A & = & -\frac{1}{10} \\ B & = & \frac{3}{20} \\ \lambda & = & \frac{1}{10} & -\frac{15}{40}=-\frac{11}{40} \end{cases}$$

$$\int\frac{dt}{\sqrt{5t^2+5t+1}}=\int\frac{dt}{\sqrt{5\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}}\Rightarrow 5\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\cdot\left(20\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-1\right)$$

$$2\sqrt{5}\left(t+\frac{1}{2}\right)=\operatorname{ch}u\Rightarrow 20\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-1=\operatorname{sh}^2u,\ dt=\frac{1}{2\sqrt{5}}\operatorname{sh}udu$$

$$\int\frac{dt}{\sqrt{5\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{2}}}=\int\frac{1}{2\sqrt{5}}\frac{\operatorname{sh}udu}{\frac{1}{2}\operatorname{sh}u}=\frac{1}{\sqrt{5}}u+C=\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left(2\sqrt{5}\left(t+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{20\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-1}\right)$$

$$2\sqrt{5}\left(t+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{20\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-1}=2\sqrt{5}\frac{x+1}{2(x-1)}+\sqrt{\frac{5(x^2+2x+1)}{(x-1)^2}-1}=$$

$$=\sqrt{5}\frac{x+1}{x-1}+\sqrt{\frac{5(x^2+2x+1)-x^2+2x-1}{(x-1)^2}}=\sqrt{5}\frac{x+1}{x-1}+\frac{2}{x-1}\sqrt{x^2+3x+1}$$

$$\sqrt{5t^2+5t+1}=\frac{\sqrt{x^2+3x+1}}{(x-1)}\Rightarrow(At+B)\sqrt{5t^2+5t+1}=\left(-\frac{1}{10(x-1)}+\frac{3}{20}\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2+3x+1}}{(x-1)}=$$

$$= \frac{3x-3-2}{20(x-1)^2}\cdot\sqrt{x^2+3x+1} = \frac{3x-5}{20(x-1)^2}\cdot\sqrt{x^2+3x+1}$$

Следовательно:

$$\int \frac{1}{(x-1)^3\sqrt{x^2+3x+1}}dx = \frac{3x-5}{20(x-1)^2}\cdot\sqrt{x^2+3x+1} - \frac{11}{40\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}(x+1)+2\sqrt{x^2+3x+1}}{x-1}\right| + C$$

■

Задача 3. (**Д1980**) Доказать, что если есть интеграл вида:

$$\int R\left(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d}\right) dx$$

то его всегда можно свести к интегрированию рациональной функции. Где под R понимаются функции для которых разрешены операции: $+, -, \cdot, \div$ над аргументами.

□ Ключевые задачи: 1785 и 1790 в этих задачах рассказывалось как сделать замену с помощью тригонометрической подстановки или гиперболической подстановки, чтобы либо в паре $\sqrt{x+a}$, $\sqrt{x+b}$, либо в паре $\sqrt{x-a}$, $\sqrt{b-x}$ корни одновременно исчезали. Если знаки одинаковые: $\operatorname{sgn} a = \operatorname{sgn} c$, то поможет гиперболическая замена, в противном случае - тригонометрическая. Таким образом мы получим рациональные выражение с тригонометрическими или гиперболическими функциями. Как с ними разбираться - разбираем дальше. ■

Подстановки Эйлера

Подстановки Эйлера - это классические подстановки, позволяющие избавиться от корня квадратного трехчлена:

$$P(x) = \sqrt{ax^2+bx+c}$$

(1) Если $a > 0$, то выберем новую переменную z: $P(x) = \pm\sqrt{a}x + z$;

(2) Если $c > 0$, то выберем новую переменную z: $P(x) = xz \pm \sqrt{c}$;

(3) Если $P(x) = \sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}$, то выберем новую переменную z: $P(x) = z(x-x_1)$;

Rm: 2. Может быть пересечение случаев и тогда каждая подстановка может быть применима.

Rm: 3. Заметим, что помимо подстановок Эйлера есть подстановки Абеля, а также заметим, что эти подстановки не всегда оптимальны для нахождения неопределенного интеграла. При этом, с помощью таких подстановок мы всегда будем получать рациональную функцию.

Если $a < 0$, $c < 0$ и нет корней, то этот квадратный трехчлен будет отрицательным всюду и нигде не будет определен $\Rightarrow$ нет смысла считать интеграл.

Задача 4. (**Д1966**)

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$$

□ $a > 0 \wedge c > 0 \Rightarrow$ возможны обе подстановки. Рассмотрим каждую из них.

(1) $\sqrt{x^2+x+1} = \pm x + z$, выразим x через z:

$$x^2+x+1 = x^2 \pm 2xz + z^2 \Rightarrow x(1 \mp 2z) = z^2 - 1 \Rightarrow x = \frac{z^2-1}{1 \mp 2z}$$

$$dx = \frac{2z(1 \mp 2z) - (z^2-1)\cdot(\mp 2)}{(1 \mp 2z)^2}dz = \frac{2z \mp 4z^2 \pm 2z^2 \mp 2}{(1 \mp 2z)^2}dz = \frac{2z \mp 2z^2 \mp 2}{(1 \mp 2z)^2}dz$$

Выберем нижний знак в подстановке:

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}} = \int \frac{1}{z}\cdot\frac{2z^2+2z+2}{(2z+1)^2}dz = 2\int \frac{z^2+z+1}{z(2z+1)^2}dz$$

$$\frac{z^2+z+1}{z(2z+1)^2} = \frac{A}{z} + \frac{B}{2z+1} + \frac{C}{(2z+1)^2} \Rightarrow z^2+z+1 = A(2z+1)^2 + Bz(2z+1) + Cz \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z^2+z+1 = A(4z^2+4z+1) + B(2z^2+z) + Cz \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z^2, & 1 = 4A+2B \\ z, & 1 = 4A+B+C \\ 1, & 1 = A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -\frac{3}{2} \\ C = -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$2\int \frac{z^2+z+1}{z(2z+1)^2}dz = 2\ln|z| - \frac{3}{2}\ln|2z+1| - \frac{3}{2}\int\frac{d(2z+1)}{(2z+1)^2} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{z^4}{|2z+1|^3}\right) + \frac{3}{2(2z+1)} + C$$

(2) $\sqrt{x^2+x+1} = xz \pm \sqrt{1}$, выразим x через z:

$$x^2+x+1 = (xz)^2 \pm 2xz + 1 \Rightarrow x(x+1) = xz(xz \pm 2) \Rightarrow x+1 = xz^2 \pm 2z,\ z \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(1-z^2) = \pm 2z - 1 \Rightarrow x = \frac{\pm 2z - 1}{1-z^2} \Rightarrow dx = \frac{\pm 2(1-z^2) + 2z(\pm 2z - 1)}{(1-z^2)^2}dz$$

Выберем верхний знак в подстановке:

$$x = \frac{2z-1}{1-z^2},\ dx = \frac{2-2z^2+4z^2-2z}{(1-z^2)^2}dz = 2\frac{z^2-z+1}{(1-z^2)^2}dz \Rightarrow \int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}} =$$

$$= \int \frac{2\frac{z^2-z+1}{(1-z^2)^2}dz}{\frac{2z-1}{1-z^2} + \frac{2z^2-z}{1-z^2} + 1} = 2\int\frac{z^2-z+1}{(1-z^2)(2z-1+2z^2-z+1-z^2)}dz = 2\int\frac{z^2-z+1}{(1-z^2)z(z+1)}dz$$

Далее уравнение решается обычным способом. Разница между решениями будет находится в C.

■

ДЗ: доделать 1966 и попробовать одну из других замен.

Интегрирование тригонометрических функций

В данном направлении также есть несколько разных подходов, которые зависят от того, какой у вас будет вид тригонометрической функции, которую вы хотите проинтегрировать.

Использование формул понижения степени

Рассмотрим простую ситуацию, которую можно разобрать без специальных методов.

Задача 5. (**Д1994**)

$$\int \sin^2 x \cos^4 x dx$$

□ Заметим, что если можно понизить степень под интегралом, то лучше всегда это делать, поскольку поделить на коэффициент в аргументе - всегда просто, тогда как работать со степенью гораздо сложнее. Вспомним формулы понижения:

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

Тогда понизим степень под интегралом:

$$\int \sin^2 x \cos^4 x dx = \int \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)\left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{8}\int (1-\cos^2(2x)) \cdot (1+\cos(2x)) dx$$

$$\sin^2(2x) \cdot (1+\cos(2x)) = \frac{1}{2}(1-\cos(4x)) + \sin^2(2x) \cdot \cos(2x)$$

$$\frac{1}{8}\int \sin^2(2x) \cdot (1+\cos(2x)) dx = \frac{x}{16} - \frac{1}{64}\sin(4x) + \frac{1}{8}\int \sin^2(2x) \cdot \cos(2x) dx$$

$$\int \sin^2(2x) \cdot \cos(2x) dx = |y = \sin(2x),\ dy = 2\cos(2x)dx| = \frac{1}{2}\int y^2 dy = \frac{y^3}{6} + C = \frac{\sin^3(2x)}{6} + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \sin^2 x \cos^4 x dx = \frac{x}{16} - \frac{1}{64}\sin(4x) - \frac{\sin^3(2x)}{48} + C$$

■

Интегрирование по частям

В более общем виде, придется интегрировать по частям.

Задача 6. (**Д2011 б)**)

$$K_n = \int \cos^n(x),\ n > 2$$

□ Получим реккурентное соотношение, чтобы сводить задачу к такой же, но с меньшей степенью. Воспользуемся интегрированием по частям:

$$\int \cos^n(x) = \int \cos^{n-1} x \cdot \underbrace{\cos x}_{\sin' x} dx = \cos^{n-1} x \cdot \sin x + (n-1) \cdot \int \cos^{n-2} x \cdot \sin^2 x dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x \Rightarrow \int \cos^{n-2} x \cdot \sin^2 x dx = \int \cos^{n-2} x dx - \int \cos^n x dx = K_{n-2} - K_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_n = \cos^{n-1} x \cdot \sin x + (n-1) \cdot (K_{n-2} - K_n)$$

Заметим, что это соотношение на множества функций. Всякий элемент множества $\{K_n\}$ представляется в указанном выше виде и наоборот. Выразим K_n:

$$K_n = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \cdot \sin x + \frac{n-1}{n} K_{n-2}$$

Посчитаем конкретный пример, при $n = 8$:

$$\int \cos^8 (x) = \frac{1}{8} \cos^7 x \cdot \sin x + \frac{7}{8} \left(\frac{1}{6} \cos^5 x \cdot \sin x + \frac{5}{6} \left(\frac{1}{4} \cos^3 x \cdot \sin x + \frac{3}{4} K_2 \right) \right)$$

$$K_2 = \int \cos^2 x dx = \int \frac{1 + \cos (2x)}{2} dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin (2x) + C$$

$$\int \cos^8 (x) = \frac{1}{8} \cos^7 x \cdot \sin x + \frac{7}{8} \left(\frac{1}{6} \cos^5 x \cdot \sin x + \frac{5}{6} \left(\frac{1}{4} \cos^3 x \cdot \sin x + \frac{3}{4} \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin (2x) \right) \right) \right) + C$$

■

Интегрирование рациональных тригонометрических функций

Рассмотрим рациональное выражение вида:

$$R(\sin x, \cos x)$$

где под R понимаются функции для которых разрешены операции: $+, -, \cdot, \div$ над аргументами. Обычно с такими выражениями работает ряд подстановок:

(1) Универсальная тригонометрическая замена: $t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$. Такая подстановка всегда поможет. но её желательно избегать, потому что идёт переход к тангенсу половинного угла $\Rightarrow$ будет удваиваться степень выражения;

(2) Если $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ или $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то тогда помогут замены $t = \cos x$ или $t = \sin x$ соответственно;

(3) Если $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то тогда помогут замены $t = \operatorname{tg} x$ и $t = \operatorname{ctg} x$;

Рассмотрим применение этого подхода на задачах.

Задача 7. (**Д2026**)

$$\int \frac{dx}{(2x + \cos x) \cdot \sin x}$$

□

$$(2x + \cos x)(-\sin x) = -(2x + \cos x) \sin x \Rightarrow t = \cos x,\ dt = -\sin x dx$$

$$\int \frac{dx}{(2x + \cos x) \cdot \sin x} = \int \frac{-\sin x dx}{(2 + \cos x)(1 - \cos^2 x)} = -\int \frac{dt}{(2+t)(1-t^2)} =$$

$$= \int \frac{dt}{(t-1)(t+1)(t+2)} = \int \frac{1}{t-1} \cdot \frac{1}{(1+1)(1+2)} dt + \int \frac{1}{t+1} \cdot \frac{1}{(-1-1)(-1+2)} dt +$$

$$+ \int \frac{1}{t+2} \cdot \frac{1}{(-2-1)(-2+1)} dt = \frac{1}{6} \ln |t-1| - \frac{1}{2} \ln |t+1| + \frac{1}{3} \ln |t+2| + C = \ln \frac{(1-t)(2+t)^2}{(1+t)^3} + C$$

где последнее равенство верно, поскольку выражение имеет смысл при $\sin x \neq 0 \Rightarrow \cos x \in (-1, 1)$, тогда:

$$\int \frac{dx}{(2x+\cos x)\cdot \sin x} = \ln \frac{(1-\cos x)(2+\cos x)^2}{(1+\cos x)^3} + C$$

■

Задача 8. (**Д2028**)

$$\int \frac{dx}{1+\varepsilon \cos x}$$

□ Если мы будем здесь менять по пунктам (2), (3), то ничего не получим $\Rightarrow$ воспользуемся тангенсом половинного угла $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$:

$$\sin x = 2\sin\tfrac{x}{2}\cos\tfrac{x}{2} = 2\operatorname{tg}\tfrac{x}{2}\cdot\cos^2\tfrac{x}{2} = 2\operatorname{tg}\tfrac{x}{2}\cdot\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = 2\cos^2\tfrac{x}{2} - 1 = 2\cdot\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$t = \operatorname{tg}\tfrac{x}{2},\ x = 2\operatorname{arctg} t,\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$\int \frac{dx}{1+\varepsilon\cos x} = \int \frac{1}{1+\varepsilon\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2dt}{1+t^2} = 2\int\frac{dt}{1+t^2+\varepsilon\cdot(1-t^2)} = 2\int\frac{dt}{(1+\varepsilon)+(1-\varepsilon)t^2}$$

Рассмотрим разные случаи для разных ε:

$$\varepsilon = 1 \Rightarrow 2\int\frac{dt}{(1+\varepsilon)+(1-\varepsilon)t^2} = t + C = \operatorname{tg}\tfrac{x}{2} + C$$

$$0<\varepsilon<1 \Rightarrow 2\int\frac{dt}{(1+\varepsilon)+(1-\varepsilon)t^2} = \frac{2}{1-\varepsilon}\int\frac{dt}{t^2+\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} = \frac{2}{1-\varepsilon}\cdot\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\cdot\operatorname{arctg}\left(t\cdot\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\right) + C =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\cdot\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\tfrac{x}{2}\cdot\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\right) + C$$

$$\varepsilon>1 \Rightarrow 2\int\frac{dt}{(1+\varepsilon)+(1-\varepsilon)t^2} = 2\int\frac{dt}{(1+\varepsilon)-(\varepsilon-1)t^2} = 2\frac{1}{\varepsilon-1}\int\frac{dt}{\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1}-t^2} =$$

$$= 2\frac{1}{\varepsilon-1}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1}}}\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1}}+t}{\sqrt{\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1}}-t}\right| + C = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}\cdot\ln\left|\frac{\sqrt{\varepsilon+1}+t\sqrt{\varepsilon-1}}{\sqrt{\varepsilon+1}-t\sqrt{\varepsilon-1}}\right| + C$$

$$\frac{\sqrt{\varepsilon+1}+t\sqrt{\varepsilon-1}}{\sqrt{\varepsilon+1}-t\sqrt{\varepsilon-1}} = \frac{(\sqrt{\varepsilon+1}+t\sqrt{\varepsilon-1})^2}{\varepsilon+1-t^2(\varepsilon-1)} = \frac{\varepsilon+1+2t\sqrt{\varepsilon^2-1}+t^2(\varepsilon-1)}{\varepsilon(1-t^2)+1+t^2} =$$

$$= \frac{\varepsilon(1+t^2)+1-t^2+2t\sqrt{\varepsilon^2-1}}{\varepsilon\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}+1}\cdot\frac{1}{1+t^2} = \frac{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}\sqrt{\varepsilon^2-1}}{\varepsilon\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}+1} = \frac{\varepsilon+\cos x+\sin x\sqrt{\varepsilon^2-1}}{\varepsilon\cos x+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int\frac{dx}{1+\varepsilon\cos x} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}\cdot\ln\left|\frac{\varepsilon+\cos x+\sin x\sqrt{\varepsilon^2-1}}{\varepsilon\cos x+1}\right| + C$$

■

Задача 9. (**Д2035**)

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$$

□

$$R(\sin x, \cos x) = \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} \Rightarrow R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$$

Поскольку $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то будем делать замену $t = \operatorname{tg} x$:

$$x = \operatorname{arctg} t,\ dt = \frac{1}{\cos^2 x}dx \Rightarrow \int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\cdot \sin^2 x + \cos^2 x}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+t^2},\ \sin^2 x = 1 - \frac{1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2}$$

$$\int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\cdot \sin^2 x + \cos^2 x} = \int \frac{dt}{t^2\cdot\frac{t^2}{1+t^2} + \frac{1}{1+t^2}} = \int \frac{t^2+1}{t^4+1}dt = \int \frac{t^2+1}{(t^4+2t^2+1) - 2t^2}dt =$$

$$= \int \frac{t^2+1}{(t^2+1-\sqrt{2}t)\cdot(t^2+1+\sqrt{2}t)} = \int \frac{At+B}{t^2+\sqrt{2}t+1} + \frac{Ct+D}{t^2-\sqrt{2}t+1}dt$$

Опять же заметим, что раскрыли корень без учета знака, поскольку в обоих случаях получится та же самая формула. Также, можно заметить симметрию в исходной дроби:

$$\frac{t^2+1}{t^4+1} = \frac{(-t)^2+1}{(-t)^4+1} \Rightarrow \frac{At+B}{t^2+\sqrt{2}t+1} + \frac{Ct+D}{t^2-\sqrt{2}t+1} = \frac{-At+B}{t^2-\sqrt{2}t+1} + \frac{-Ct+D}{t^2+\sqrt{2}t+1} \Rightarrow \begin{cases} C = -A \\ B = D \end{cases}$$

$$(At+B)(t^2-\sqrt{2}t+1) + (Ct+D)(t^2+\sqrt{2}t+1) = t^2+1 \Rightarrow \begin{cases} B + D = 1 \Rightarrow B = D = \frac{1}{2} \\ B - \sqrt{2}A + D + \sqrt{2}C = 1 \Rightarrow A = C \end{cases}$$

$$A = C = -C = 0 \Rightarrow \frac{At+B}{t^2+\sqrt{2}t+1} + \frac{Ct+D}{t^2-\sqrt{2}t+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t^2+\sqrt{2}t+1} + \frac{1}{t^2-\sqrt{2}t+1}\right)$$

$$\int \frac{1}{t^2 \pm \sqrt{2}t+1}dt = \int \frac{1}{\left(t \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}dt = \sqrt{2}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}t \pm 1\right) + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg} x + 1\right) + \operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg} x - 1\right)\right) + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}\operatorname{tg} x}{2(1+\operatorname{tg}^2 x)}\right) + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}(2x)}{\sqrt{2}}\right) + C$$

■

Похожим образом работают замены и с гиперболическими функциями.

Задача 10. (**Д2123**)

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x + 2\operatorname{ch} x}$$

□ Задачу можно решить выделив экспоненту, но ради демонстрации единообразия подходов, сделаем замену на тангенс половинного угла:

$$t = \operatorname{th}\tfrac{x}{2} = \frac{\operatorname{sh}\frac{x}{2}}{\operatorname{ch}\frac{x}{2}} \Rightarrow 1 - \operatorname{th}^2\tfrac{x}{2} = 1 - \frac{\operatorname{sh}^2\frac{x}{2}}{\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}}$$

$$\operatorname{sh} x = 2\operatorname{sh}\tfrac{x}{2}\operatorname{ch}\tfrac{x}{2} = 2\operatorname{th}\tfrac{x}{2}\cdot\operatorname{ch}^2\tfrac{x}{2} = \frac{2t}{1-t^2}$$

$$\operatorname{ch} x = 2\operatorname{ch}^2\tfrac{x}{2} - 1 = \frac{2}{1-t^2} - 1 = \frac{1+t^2}{1-t^2}$$

$$dt = \frac{\frac{1}{2}\operatorname{ch}^2\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{sh}^2\frac{x}{2}}{\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}}dx = \frac{1}{2}\operatorname{th}^2\tfrac{x}{2}dx \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1-t^2}$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x + 2\operatorname{ch} x} = \int \frac{1}{\frac{2t}{1-t^2} + 2\frac{1+t^2}{1-t^2}}\cdot\frac{2}{1-t^2}dt = \int \frac{dt}{t^2+t+1}$$

Далее интеграл решается, как обычный.

$$\int \frac{dt}{t^2+t+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = \int \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2(t+\frac{1}{2})}{\sqrt{3}}\right) + C = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\operatorname{th}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

■

Rm: 4. Опять же заметим, что эту задачу можно было решить и переходя к экспонентам.

Для тригонометрических интегралов есть аналог метода неопределенных коэффициентов. Рассмотрим следующую задачу.

Задача 11. (**Д2042**)

$$\int \frac{a_1\sin x + b_1\cos x}{a\sin x + b\cos x}dx$$

□ Эту задачу можно решить с помощью формул половинного угла, но есть более простой способ.

$$f(x) = a\sin x + b\cos x \Rightarrow f'(x) = -b\sin x + a\cos x$$

Таким образом, $f(x)$ и $f'(x)$ можно воспринимать как элементы одного и того же векторного пространства, где $\sin x$ и $\cos x$ - векторы этого пространства (линейное двумерное пространство). Более того, векторы $f(x)$ и $f'(x)$ линейно независимы, поэтому образуют базис:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2,\ a \neq 0 \vee b \neq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 > 0$$

Тогда, вектор написанный сверху можно выразить через векторы $f(x)$ и $f'(x)$ с некоторыми коэффициентами:

$$\int \frac{a_1\sin x + b_1\cos x}{a\sin x + b\cos x}dx = \int \frac{p\cdot f(x) + q\cdot f'(x)}{f(x)}dx = px + q\ln|f(x)| + C$$

■

ДЗ: 1966 (замена второго типа), 1996, 2011 а) и посчитать $\int \sin^6 x dx$, 2025 (тангенс половинного угла), 2029 (обычный тангенс), 2043, 2046.