Дифференцируемые отображения

Пусть X, Y - нормированные пространства, точка $a \in U \subset X$, функция $f\colon U \to Y$.

Опр: 1. Функция f дифференцируема в точке a, если существует линейный непрерывный оператор L и функция $\alpha\colon X \to Y$ такие, что:

$$f(a+h) - f(a) = L(h) + \alpha(h)\cdot\|h\|,\ \alpha(h)\colon \lim_{h\to 0}\alpha(h) = 0$$

Опр: 2. Линейный оператор L из определения дифференцируемости f называется дифференциалом f. Обозначается, как $df(a,h)$ или $df(h)$, если понимаем в какой точке все происходит.

Опр: 3. Предел $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(a+tv)-f(a)}{t}$ называют производной функции f по вектору v и обозначают следующим образом:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \lim_{t\to 0}\frac{f(a+tv)-f(a)}{t}$$

Rm: 1. Установили в прошлый раз, что если функция f дифференцируема, то линейная часть $L(v)$ определяется следующим образом: $L(v) = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(a+tv)-f(a)}{t} = \dfrac{\partial f}{\partial v}(a)$ - производная по вектору v и сказали, что $L(v) = df(a,v)$ - это дифференциал функции v.

Частные случаи дифференцируемости функций

(I) Отображения из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$

Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $a = (a_1, \ldots, a_n)$. Если f дифференцируема, то:

$$df(a,h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\cdot h_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\cdot h_n$$

Опр: 4. Производная вдоль вектора e_k: $\dfrac{\partial f}{\partial e_k}(a)$ называется частной производной функции f по переменной x_k в точке a и обозначается следующим образом:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = \frac{\partial f}{\partial e_k}(a) = \lim_{t\to 0}\frac{f(a+te_k)-f(a)}{t}$$

Опр: 5. Вектор состоящий из частных производных $\Big(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(a)\Big)$ в точке a называется градиентом функции f и обозначается следующим образом:

$$\operatorname{grad} f(a) = \nabla f(a) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\Big)$$

Поскольку дифференциал выражается через частные производные, то теперь несложно в некоторых случаях этот дифференциал найти.

Пример: $f(x_1, \dots, x_n) = x_k$ - линейная функция. У линейной функции дифференциал это она сама же. Чему будет равен $df(h)$?

$$df(h) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) \cdot h_k = 1 \cdot h_k = h_k = dx_k(h)$$

Отметим, что $dx_1, \dots, dx_n$ - базис в сопряженном пространстве $(\mathbb{R}^n)^*$. Дифференциал df в точке a по вектору приращения - линейная функция $\Rightarrow$ раскладывается по базисным линейным функциям. Либо мы просто заменяем h_i на $dx_i(h)$. Используя полученный результат, мы можем переписать произвольный дифференциал в следующем виде:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

Rm: 2. Обычно могут объяснять, что dx_i - малые приращения. Действительно, если подставить приращение h, то dx_i даст компонент этого приращения. Но нельзя отождествлять функционал и его значение от вектора (вектор и ковектор).

Дифференцирование не есть существование частных производных.

Пример: $f(x_1, x_2) = \begin{cases} 0, & x_1 = 0 \lor x_2 = 0 \\ 1, & x_1 \neq 0 \land x_2 \neq 0 \end{cases};$

У этой функции $f(x_1, 0) \equiv 0 \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(0,0) = 0,\ f(0, x_2) \equiv 0 \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(0,0) = 0.$

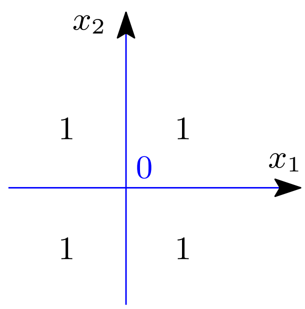

Рис. 1: Пример недифференцируемой функции $f(x_1, x_2)$, имеющей частные производные.

Но тем не менее f не является дифференцируемой, поскольку она даже не является непрерывной в точке $(0, 0)$.

Можно ли в терминах частных производных что-то говорить о дифференцируемости? Да, есть достаточное условие дифференцируемости в терминах частных производных.

Теорема 1. (Достаточное условие дифференцируемости) Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ определена в окрестности точки a и имеет в этой окрестности частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$, где $k = \overline{1, n}$. Если частные производные непрерывны в точке a, то f дифференцируема в точке a.

$\square$ Докажем для случая $n = 2$, оно ничем не будет отличаться от доказательства в общем, но будет нагляднее. Пусть $n = 2$.

Рассмотрим приращение функции, вычтем и добавим слагаемое $f(a_1, a_2 + h_2)$:

$$f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2) = f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2 + h_2) + f(a_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2)$$

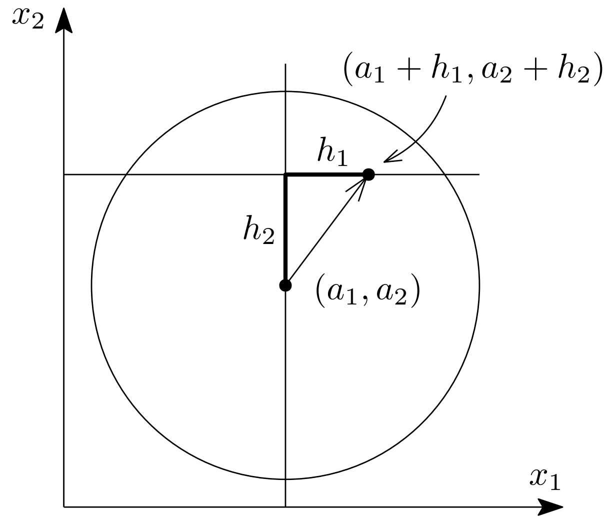

Рис. 2: Выбор h_1, h_2 в шаре, лежащем в $\mathcal{U}$.

Необходимо, чтобы функция $x_1 \mapsto f(x_1, a_2 + h_2)$ была непрерывной на отрезке и дифференцируемой на интервале. Тогда предположим, что на всём отрезке $[a_1, a_1 + h_1]$ эта функция дифференцируема: предположим, что $h = (h_1, h_2)$ достаточно мал так, что на отрезке $x_1 \in [a_1, a_1 + h_1]$ и $x_2 = a_2 + h_2$, а также на отрезке $x_2 \in [a_2, a_2 + h_2]$ и $x_1 = a_1$ в каждой точке существуют частные производные. Таким образом, на отрезках мы получим непрерывность и дифференцируемость.

Используя теорему Лагранжа, применим её к функциям $x_1 \mapsto f(x_1, a_2 + h_2)$ и к $x_2 \mapsto f(a_1, x_2)$:

$$f(a_1+h_1, a_2+h_2) - f(a_1, a_2+h_2) + f(a_1, a_2+h_2) - f(a_1, a_2) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(c_1, a_2+h_2)\cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, c_2)\cdot h_2$$

где c_1 лежит между a_1 и $a_1 + h_1$, а c_2 лежит между a_2 и $a_2 + h_2$. Тогда, если $h_1 \to 0$ и $h_2 \to 0$, то $c_1 \to a_1$ и $c_2 \to a_2$.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(c_1, a_2+h_2)\cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, c_2)\cdot h_2 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2)\cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2)\cdot h_2 +$$
$$+\|h\|\cdot\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(c_1, a_2+h_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2)\right)\cdot\frac{h_1}{\|h\|} + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, c_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2)\right)\cdot\frac{h_2}{\|h\|}\right)$$

где $\|h\| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$ и как следствие $\left|\frac{h_2}{\|h\|}\right| \le 1$, $\left|\frac{h_2}{\|h\|}\right| \le 1 \Rightarrow$ ограничены. Частные производные f по условию непрерывны $\Rightarrow$ при $h_1 \to 0, h_2 \to 0$ получим $c_2 \to a_2$, $c_1 \to a_1$ и $a_2 + h_2 \to a_2$ тогда:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(c_1, a_2+h_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2)\right) \to 0,\ \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, c_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2)\right) \to 0$$

В итоге получаем:

$$\|h\|\cdot\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(c_1, a_2+h_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2)\right)\cdot\frac{h_1}{\|h\|} + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, c_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2)\right)\cdot\frac{h_2}{\|h\|}\right) = \|h\|\cdot\alpha(h),\ \lim_{h\to 0}\alpha(h) = 0$$

$$f(a_1+h_1, a_2+h_2) - f(a_1, a_2) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2)\cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2)\cdot h_2 + \alpha(h)\cdot\|h\|,\ \lim_{h\to 0}\alpha(h) = 0$$

■

(II) Отображения из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$

Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Функция f устроена следующим образом: $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$. Если f дифференцируема, то это значит, что каждая из компонент $f_i(x)$ дифференцируема или нет?

Утв. 1. Функция f дифференцируема в точке $a \Leftrightarrow f_k$ дифференцируемы в точке a. Если f дифференцируема в точке a, то $df(h) = J_f{\cdot}h$, где J_f - матрица следующего вида:

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_1 \\ \nabla f_2 \\ \vdots \\ \nabla f_m \end{pmatrix}$$

Опр: 6. Матрица J_f, определенная выше, называется матрицей Якоби.

Rm: 3. Если f дифференцируема, то при $x \approx a$ мы имеем $f(x) \approx f(a) + J_f{\cdot}(x-a)$ - аффинное отображение.

$\square$ f дифференцируема в точке $a \Leftrightarrow f(a+h) - f(a) = L(h) + \alpha(h)\|h\|$, $\lim\limits_{h\to 0}\alpha(h) = 0$. В векторной форме это запишется, как:

$$\begin{pmatrix} f_1(a+h) - f_1(a) \\ f_2(a+h) - f_2(a) \\ \vdots \\ f_m(a+h) - f_m(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1(h) \\ L_2(h) \\ \vdots \\ L_m(h) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1(h)\|h\| \\ \alpha_2(h)\|h\| \\ \vdots \\ \alpha_m(h)\|h\| \end{pmatrix}$$

что есть то же самое, что и следующее:

$$\forall k = \overline{1,m},\ f_k(a+h) - f_k(a) = L_k(h) + \alpha_k(h)\|h\|,\ \lim_{h\to 0}\alpha_k(h) = 0$$

Поскольку каждая f_k отображает $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, то мы знаем, что $L_k(h) = df_k(h) = \dfrac{\partial f_k}{\partial x_1}h_1 + \ldots + \dfrac{\partial f_k}{\partial x_n}h_n$. Тем самым, мы получаем, что:

$$L(h) = \begin{pmatrix} L_1(h) \\ L_2(h) \\ \vdots \\ L_m(h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_1 \\ \nabla f_2 \\ \vdots \\ \nabla f_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

$\blacksquare$

Правила дифференцирования

(1) **Линейность**: Пусть X, Y - нормированные пространства, $f, g\colon X \to Y$ - дифференцируемы в точке a. Тогда $\alpha f + \beta g$ - дифференцируема в точке a и верно следующее:

$$d(\alpha f + \beta g) = \alpha{\cdot}df + \beta{\cdot}dg$$

□ По определению:

$$\alpha f(a+h) + \beta g(a+h) - \alpha f(a) - \beta g(a) = \alpha(f(a+h) - f(a)) + \beta(g(a+h) - g(a)) =$$

$$= \alpha{\cdot}\big(df(h) + \gamma_1(h){\cdot}\|h\|\big) + \beta{\cdot}\big(dg(h) + \gamma_2(h){\cdot}\|h\|\big),\ \lim_{h\to 0}\gamma_1(h) = 0,\ \lim_{h\to 0}\gamma_2(h) = 0$$

Раскроем скобки и получим линейную комбинацию линейных функций, то есть линейную функцию:

$$\big(\alpha{\cdot}df(h) + \beta{\cdot}dg(h)\big) + \big(\alpha\gamma_1(h) + \beta\gamma_2(h)\big){\cdot}\|h\|,\ \lim_{h\to 0}\big(\alpha\gamma_1(h) + \beta\gamma_2(h)\big) = 0$$

где $\big(\alpha{\cdot}df(h) + \beta{\cdot}dg(h)\big)$ - линейная часть. ■

(2) **Правило Лейбница**: Пусть X - нормированное пространство, $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ - дифференцируемы в точке a. Тогда fg - дифференцируема в точке a и верно следующее:

$$d(fg)(h) = f(a)dg(h) + g(a)df(h)$$

□ По определению дифференцируемости:

$$f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a) = \big(f(a+h) - f(a)\big){\cdot}g(a+h) + f(a){\cdot}\big(g(a+h) - g(a)\big) =$$

$$= \big(df(h) + \gamma_1(h)\|h\|\big){\cdot}\Big(g(a) + \big(g(a+h) - g(a)\big)\Big) + f(a){\cdot}\big(dg(h) + \gamma_2(h)\|h\|\big) =$$

$$= g(a){\cdot}df(h) + f(a){\cdot}dg(h) + \Big(g(a)\gamma_1(h) + \big(g(a+h) - g(a)\big)\big(\tfrac{df(h)}{\|h\|} + \gamma_1(h)\big) + f(a)\gamma_2(h)\Big){\cdot}\|h\|$$

Получили линейную часть: $g(a)df(h) + f(a)dg(h)$. Поскольку g - дифференцируема в точке $a \Rightarrow$ она непрерывна в этой точке, тогда:

$$\lim_{h\to 0}\big(g(a+h) - g(a)\big) = 0$$

Рассмотрим оставшуюся часть, поскольку по определению $\forall i = 1, 2,\ \lim\limits_{h\to 0}\gamma_i(h) = 0$, тогда:

$$\lim_{h\to 0} g(a)\gamma_1(h) = 0,\ \lim_{h\to 0} f(a)\gamma_2(h) = 0,\ \lim_{h\to 0}\big(g(a+h) - g(a)\big)\gamma_1(h) = 0$$

По определению df - непрерывный линейный оператор, следовательно $\|df(h)\| \leq C\|h\|$, тогда получим:

$$\left\|\big(g(a+h) - g(a)\big){\cdot}\tfrac{df(h)}{\|h\|}\right\| = \Big|\big(g(a+h) - g(a)\big)\Big|{\cdot}\frac{1}{\|h\|}{\cdot}\|df(h)\| \leq C\Big|\big(g(a+h) - g(a)\big)\Big| \to 0$$

То есть получили что-то стремящееся к нуля, умноженное на что-то ограниченное. Таким образом остаточная часть выражения стремится к нулю при $h \to 0$:

$$\lim_{h\to 0}\Big(g(a)\gamma_1(h) + \big(g(a+h) - g(a)\big)\big(\tfrac{df(h)}{\|h\|} + \gamma_1(h)\big) + f(a)\gamma_2(h)\Big) = 0$$

■

(3) **Дифференцирование сложной функции**: Пусть X, Y, Z - нормированные пространства, функция $f\colon X \to Y$ - дифференцируема в точке $a \in X$, $g\colon Y \to Z$ - дифференцируема в точке $f(a)$. Тогда $g(f(x))$ - дифференцируема в точке a и верно следующее:

$$dg(f) = dg(df)$$

Rm: 4. $dg(f) = dg(df)$ это то же самое, что и $dg(f)(h) = dg\big(df(h)\big)$, а также $dg \circ f = dg \circ df$;

□ По определению:

$$f(a+h) - f(a) = df(h) + \alpha(h)\|h\|,\ \lim_{h\to 0}\alpha(h) = 0$$

$$g\big(f(a)+v\big) - g\big(f(a)\big) = dg(v) + \beta(v)\|v\|,\ \lim_{v\to 0}\beta(v) = 0$$

Доопределим функцию β в нуле: $\beta(0) = 0$, тогда β - непрерывная в нуле функция. Подставим вместо v разность $f(a+h) - f(a)$:

$$g\big(f(a+h)\big) - g\big(f(a)\big) = dg\big(df(h) + \alpha(h)\|h\|\big) + \beta\big(df(h) + \alpha(h)\|h\|\big)\cdot\big\|df(h) + \alpha(h)\|h\|\big\|$$

Поскольку $dg(v)$ - линейный непрерывный оператор, то:

$$dg\big(df(h) + \alpha(h)\|h\|\big) = dg\big(df(h)\big) + \|h\|\cdot dg\big(\alpha(h)\big)$$

Так как, dg непрерывна в нуле, то $\lim\limits_{h\to 0} dg\big(\alpha(h)\big) = 0$. Поскольку $\beta(v)$ непрерывна в нуле, то:

$$\lim_{h\to 0}\beta\big(df(h) + \alpha(h)\|h\|\big) = \lim_{h\to 0}\beta\big(f(a+h) - f(a)\big) = 0$$

Таким образом, получим:

$$g\big(f(a+h)\big) - g\big(f(a)\big) = dg\big(df(h)\big) + \|h\|\cdot\Big(dg\big(\alpha(h)\big) + \beta\big(f(a+h) - f(a)\big)\cdot\Big\|\tfrac{df(h)}{\|h\|} + \alpha(h)\Big\|\Big)$$

По определению df - непрерывный линейный оператор, следовательно $\|df(h)\| \le C\|h\|$, тогда по неравенству треугольника:

$$\Big\|\tfrac{df(h)}{\|h\|} + \alpha(h)\Big\| \le \frac{\|df(h)\|}{\|h\|} + \|\alpha(h)\| \le C + \|\alpha(h)\|$$

Поскольку $\alpha(h)$ стремится к нулю, при $h \to 0$, то она ограничена, тогда получаем, что все выражение $\Big\|\tfrac{df(h)}{\|h\|} + \alpha(h)\Big\|$ - ограничено и умножается на что-то стремящееся к нулю, тогда:

$$\lim_{h\to 0}\Big(dg\big(\alpha(h)\big) + \beta\big(f(a+h) - f(a)\big)\cdot\Big\|\tfrac{df(h)}{\|h\|} + \alpha(h)\Big\|\Big) = 0$$

■

(4) **Дифференцирование обратной функции**: Пусть X, Y - нормированные пространства, множества $\mathcal{U} \subset X$, $\mathcal{V} \subset Y$ - открытые. Если функция $f\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ - гомеоморфизм (биекция, отображение и обратное к нему - непрерывны), f - дифференцируема в точке $a \in \mathcal{U}$ и $df\colon X \to Y$ имеет обратный оператор $(df)^{-1}\colon Y \to X$ - непрерывный линейный оператор. Тогда функция $f^{-1}\colon \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ является дифференцируемой в точке $f(a)$ и верно следующее:

$$df^{-1} = (df)^{-1}$$

Rm: 5. Не вдаваясь в детали, требуем существование непрерывного обратного оператора.

☐ Достаточно показать, что:

$$\lim_{v\to 0}\frac{\|f^{-1}\big(f(a)+v\big)-f^{-1}\big(f(a)\big)-(df)^{-1}(v)\|}{\|v\|}=0$$

Сделаем замену:

$$v=f(a+h)-f(a),\, v\colon f(a)+v\in\mathcal{V},\, h\to 0\Rightarrow v\to 0$$

или же через h:

$$h=f^{-1}\big(f(a)+v\big)-a,\, v\to 0\Rightarrow h\to 0$$

что по сути является одним и тем же. Такая замена в пределе возможна поскольку по условию функция f это гомеоморфизм $\Rightarrow$ биекция $\Rightarrow$ пока $h\neq 0$ такое v не будет нулем $\Rightarrow$ можно применять теорему о пределе композиции функций (внутренняя функция не должна заходить в предельную точку). То есть берем $v\neq 0\Leftrightarrow h\neq 0$ и таким образом:

$$\lim_{v\to 0}\frac{\Big\|f^{-1}\big(f(a)+v\big)-f^{-1}\big(f(a)\big)-(df)^{-1}(v)\Big\|}{\|v\|}=\lim_{h\to 0}\frac{\Big\|a+h-a-(df)^{-1}\big(df(h)+\alpha(h)\|h\|\big)\Big\|}{\Big\|df(h)+\alpha(h)\|h\|\Big\|}$$

Поскольку $(df)^{-1}$ - линейное отображение (обратное к линейному - линейно), то

$$h-(df)^{-1}\big(df(h)+\alpha(h)\|h\|\big)=h-(df)^{-1}\big(df(h)\big)-(df)^{-1}\big(\alpha(h)\|h\|\big)=h-h-(df)^{-1}\big(\alpha(h)\big)\cdot\|h\|$$

и в итоге получим следующее:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Big\|h-(df)^{-1}\big(df(h)+\alpha(h)\|h\|\big)\Big\|}{\Big\|df(h)+\alpha(h)\|h\|\Big\|}=\lim_{h\to 0}\frac{\Big\|-(df)^{-1}\big(\alpha(h)\big)\cdot\|h\|\Big\|}{\Big\|\frac{df(h)}{\|h\|}+\alpha(h)\Big\|\cdot\|h\|}=\lim_{h\to 0}\frac{\Big\|-(df)^{-1}\big(\alpha(h)\big)\Big\|}{\Big\|\frac{df(h)}{\|h\|}+\alpha(h)\Big\|}$$

Поскольку $(df)^{-1}$ - линейный непрерывный оператор, то $\|(df)^{-1}(y)\|\leq C^{-1}\|y\|$, подставим $y=df(h)$ и получим $\|h\|\leq C^{-1}\|df(h)\|$, тогда по неравенству треугольника:

$$\Big\|\frac{df(h)}{\|h\|}+\alpha(h)\Big\|\geq\frac{\|df(h)\|}{\|h\|}-\|-\alpha(h)\|=\frac{\|df(h)\|}{\|h\|}-|-1|\cdot\|\alpha(h)\|=\frac{\|df(h)\|}{\|h\|}-\|\alpha(h)\|\geq C-\|\alpha(h)\|$$

Таким образом, при достаточно малых h, знаменатель будет больше, чем $C-\|\alpha(h)\|\geq\frac{C}{2}$, поскольку при малых h верно $\|\alpha(h)\|\approx 0$ по определению. Тогда:

$$0\leq\frac{\Big\|-(df)^{-1}\big(\alpha(h)\big)\Big\|}{\Big\|\frac{df(h)}{\|h\|}+\alpha(h)\Big\|}\leq-\frac{2}{C}\Big\|(df)^{-1}\big(\alpha(h)\big)\Big\|\xrightarrow[h\to 0]{}0\Rightarrow\lim_{h\to 0}\frac{\Big\|-(df)^{-1}\big(\alpha(h)\big)\Big\|}{\Big\|\frac{df(h)}{\|h\|}+\alpha(h)\Big\|}=0$$

■

Rm: 6. Заметим, что формулировки и доказательства для нормированных пространств повторяют те же самые формулировки и доказательства в одномерном случае. И таким образом, сложность для понимания будет заключаться в том, чтобы перейти от нормированных пространств к $\mathbb{R}^n$.

Rm: 7. В одномерном случае утверждение о том, что можно продифференцировать обратную функцию состоит в том, что $f'\neq 0$. Аналогом этого здесь является обратимость дифференциала.