Сходимость в нормированных пространствах

X - линейное (над $\mathbb{R}$) пространство. На нем определена функция $\|\cdot\|\colon X \to [0, +\infty)$, удовлетворяющая свойствам:

1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$;
3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$;

Полезное неравенство: $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\|$.

Опр: 1. На нормированном пространстве $x_n \to x \Leftrightarrow \|x_n - x\| \to 0$.

Нормы в $\mathbb{R}^n$

С точки зрения сходимости последовательностей, все нормы в $\mathbb{R}^n$ эквивалентны.

Теорема 1. Если $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ - произвольные нормы на $\mathbb{R}^n$, то $\exists$ числа $c_1, c_2 > 0$:

$$c_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2\|x\|_1,\ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$\square$ Достаточно доказать для случая, когда $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$, поскольку, если можем доказать, что $\|x\|_1 \leq c_2\|x\|_2 \wedge \|x\|_1 \geq c_1\|x\|_2$, то можем оценить любые две нормы:

$$\|x\|_1 \leq c_2\|x\|_2 \leq c_2 \cdot c_3\|x\|_3 \wedge \|x\|_1 \geq c_1\|x\|_2 \geq c_1 \cdot c_4\|x\|_3$$

Напомним, что в $\mathbb{R}^n$ есть базис $e_k = (0, \ldots, 0, \underset{k}{1}, 0, \ldots, 0)$ и $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$. Возьмем первую норму $\|x\|_1 = \|x_1e_1 + \ldots + x_ne_n\|_1$, тогда:

$$\|x_1e_1 + \ldots + x_ne_n\|_1 \leq \|x_1e_1\|_1 + \ldots + \|x_ne_n\|_1 = |x_1| \cdot \|e_1\|_1 + \ldots + |x_n| \cdot \|e_n\|_1 \leq \|x\|_2(\|e_1\|_1 + \ldots + \|e_n\|_1)$$

где последнее неравенство верно в силу леммы. И таким образом:

$$\|x\|_1 \leq \|x\|_2(\|e_1\|_1 + \ldots + \|e_n\|_1) = \|x\|_2 c_1$$

Таким образом, используя $0 \leq \|x_n - x\|_1 \leq c_2\|x_n - x\|_2 \to 0$ получим:

$$\|x\|_1 \leq c_1\|x\|_2 \wedge x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} x \Rightarrow x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} x$$

то есть сходимость по Евклидовой норме дает сходимость по норме 1.

Предположим, что $\nexists C > 0\colon \|x\|_2 \leq C\|x\|_1 \Rightarrow \forall N \in \mathbb{N}, \exists x_N \neq 0\colon \|x_N\|_2 > N \cdot \|x_N\|_1$. От умножения на положительный скаляр, неравенство не изменится $\Rightarrow$ возьмем $y_N = \frac{x_N}{\|x_N\|_2} \Rightarrow \|y_N\|_2 > N \cdot \|y_N\|_1$, тогда последовательность y_N обладает следующими свойствами:

1) $\|y_N\|_2 = 1$;
2) $\dfrac{1}{N} = \dfrac{\|y_N\|_2}{N} > \|y_N\|_1 \Rightarrow \|y_N\|_1 \xrightarrow{N \to \infty} 0$;

Поскольку $\|y_N\|_2 = 1 \Rightarrow$ эта последовательность ограничена $\Rightarrow$ по теореме Больцано $\exists\, y_{N_k} \xrightarrow{\|\cdot\|_2} y$, тогда $\|y_{N_k}\|_2 = 1 \to \|y\|_2 = 1$. Но если есть сходимость по Евклидовой норме $\|\cdot\|_2$, то обязательно $y_{N_k} \xrightarrow{\|\cdot\|_1} y$, но $y_{N_k} \xrightarrow{\|\cdot\|_1} 0$ и $y = 0 \Rightarrow y = 0 \wedge \|y\|_2 = 1 \Rightarrow$ противоречие. $\blacksquare$

Таким образом, на $\mathbb{R}^n$ все нормы эквивалентнты $\Rightarrow$ с точки зрения сходимости, все что верно для Евклидовой нормы, будет верно и для других норм, например, что $\mathbb{R}^n$ - полное пространство.

Опр: 2. Если нормированное пространство полно, то его называют Банаховым пространством.

Ряды в нормированных пространствах

В линейных нормированных пространствах можем складывать $\Rightarrow$ можем сказать, что такое сумма ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} x_n = \lim_{N\to\infty} S_N$$

Если ряд сходится, то $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k - \sum\limits_{k=1}^{n-1} x_k \to 0$ (необходимое условие выполнено).

Утв. 1. Если нормированное пространство полно, то если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ - сходится $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ - сходится.

□ Пространство полно $\Rightarrow$ будем проверять критерий Коши, пусть $M < N$:

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} x_n - \sum_{n=1}^{M} x_n \right\| = \left\| \sum_{n=M+1}^{N} x_n \right\| \leq \sum_{n=M+1}^{N} \|x_n\| \xrightarrow{N,M\to\infty} 0$$

по критерию Коши для числового ряда. Таким образом, последовательность частичных сумм - фундаментальна $\Rightarrow$ эта последовательность сходится. ■

Матрицы в нормированных пространствах

Линейное пространство матриц размера $n \times n$, M_n (элементы из $\mathbb{R}$). С точки зрения пространств этот объект это $\mathbb{R}^{n^2} = M_n$. Зададим норму следующим образом:

$$\|A\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}, \text{ где } \|x\| = \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$$

Случай $n = 1$: $\|a\| = \sup\limits_{x\neq 0} \dfrac{|ax|}{|x|} = |a|$. $x \mapsto ax$ - растяжение, a - это коэффициент гомотетии.

Случай $n = 2$: $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \Rightarrow x^T = (x_1, x_2) \Rightarrow Ax = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 \\ bx_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \|Ax\| = \sqrt{a^2x_1^2 + b^2x_2^2}$, таким образом получим:

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \frac{\sqrt{a^2x_1^2 + b^2x_2^2}}{\|x\|} = \sqrt{a^2\frac{x_1^2}{\|x\|^2} + b^2\frac{x_2^2}{\|x\|^2}} = \left\|A\tfrac{x}{\|x\|}\right\|, \text{ где } \frac{x_1^2}{\|x\|^2} + \frac{x_2^2}{\|x\|^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} = 1 \Rightarrow y_i^2 = \frac{x_i^2}{\|x\|^2}$$

Сделав замену хотим $a^2y_1^2 + b^2y_2^2 \to \max$ при условии, что $y_1^2 + y_2^2 = 1$.

Пусть $b^2 \geq a^2$. Выразим y_1^2:

$$y_1^2 = 1 - y_2^2 \Rightarrow a^2(1 - y_2^2) + b^2y_2^2 = a^2 + (b^2 - a^2)y_2^2,\ y_2 \in [0, 1]$$

Тогда $\Rightarrow y_2^2 = 1 \Rightarrow a^2 + (b^2 - a^2)y_2^2 = b^2$. Таким образом, получим $\|A\| = \max\{|a|, |b|\}$.

Что делает это преобразование? Геометрически, оно в a раз вытягивает x_1 и в b раз вытягивает x_2. Получилось, что норма равна максимальному коэффициенту растяжения.

Смысл нормы: измеряет во сколько раз максимально вытягиваются вектора.

Очевидно, что $\|A\|$ - это конечное число, поскольку вычисления производятся на единичных векторах с использованием матрицы с фиксированными числами.

Пусть $x_1^2 + x_2^2 = 1$, рассмотрим общий случай:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{pmatrix} \Rightarrow ax_1 + bx_2 \le |a| + |b| \wedge cx_1 + dx_2 \le |c| + |d|$$

Координаты вектора ограничены конкретными числами $\Rightarrow$ ограниченный вектор $\Rightarrow$ длина этого вектора также ограничена $\left(\le \sqrt{(|a|+|b|)^2 + (|c|+|d|)^2}\right) \Rightarrow \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}$ - ограничено $\Rightarrow$ разумно брать точную верехнюю грань. Точная верхняя грань $\sup\limits_{x \ne 0} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}$ - это наименьшее из чисел $C\colon \|Ax\| \le C\|x\| \Rightarrow$ нормой A мы смотрим самую точную границу этого растяжения: в какое наименьшее число раз вектор может удлиниться.

Остается вопрос: почему это норма?

Утв. 2. Пусть
$$\|A\| = \sup_{x \ne 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}, \text{ где } \|x\| = \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$$
тогда справедливо следующее:

(1) $\|A\|$ - норма;

(2) $\|A \cdot B\| \le \|A\| \cdot \|B\|$;

$\square$

1) Рассмотрим свойства нормы:

   (1) $\|A\| \ge 0$ - очевидно, $\|A\| = 0 \Rightarrow \forall x,\ Ax = 0 \Leftrightarrow A = 0$ (подставляем базисные вектора, получаем нулевые столбцы);

   (2) $\|\alpha A\| = \sup\limits_{x \ne 0} \dfrac{\|\alpha Ax\|}{\|x\|} = \sup\limits_{x \ne 0} \dfrac{|\alpha|\|Ax\|}{\|x\|} = |\alpha| \sup\limits_{x \ne 0} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} = |\alpha|\|A\|$;

   (3) $\dfrac{\|(A+B)x\|}{\|x\|} = \dfrac{\|Ax + Bx\|}{\|x\|} \le \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} + \dfrac{\|Bx\|}{\|x\|} \le \|A\| + \|B\| \Rightarrow \sup\limits_{x \ne 0} \dfrac{\|(A+B)x\|}{\|x\|} \le \|A\| + \|B\| \Rightarrow$
   $\Rightarrow \|A+B\| = \sup\limits_{x \ne 0} \dfrac{\|(A+B)x\|}{\|x\|} \le \|A\| + \|B\|$;

2) Заметим, что $\forall x,\ \|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\|$, так как $\dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} \le \|A\|$. Тогда

$$\frac{\|(A \cdot B)x\|}{\|x\|} = \frac{\|A(Bx)\|}{\|x\|} \le \|A\| \cdot \frac{\|Bx\|}{\|x\|} \le \|A\| \cdot \|B\| \cdot \frac{\|x\|}{\|x\|} = \|A\| \cdot \|B\| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sup_{x\neq 0} \frac{\|(A\cdot B)x\|}{\|x\|} = \|A\cdot B\| \leq \|A\|\cdot\|B\|$$

■

Rm: 1. В общем случае, равенство не будет достигнуто.

Упр. 1.

1) Привести пример, когда $\|AB\| < \|A\|\cdot\|B\|$;

2) Попробовать найти норму $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$;

Пространство $(M_n, \|\cdot\|)$ - нормированное и зная, что $M_n = \mathbb{R}^{n^2} \Rightarrow$ все нормы эквивалентны $\Rightarrow$ относительно всех норм это полное пространство $\Rightarrow (M_n, \|\cdot\|)$ - банахово пространство.

Опр: 3. $e^A = \mathrm{I} + A + \dfrac{A^2}{2!} + \ldots + \dfrac{A^n}{n!} + \ldots$.

Rm: 2. Чтобы это стало корректным определением, надо понять, почему этот ряд сходится.

В полном пространстве, для сходимости достаточно проверить, что сходится ряд из норм: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left\| \dfrac{A^n}{n!} \right\|$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{A^n}{n!} \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \|A\|^n = e^{\|A\|}$$

Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left\| \dfrac{A^n}{n!} \right\|$ - сходится $\Rightarrow e^A = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{A^n}{n!}$ - сходится.

Rm: 3. Верно ли, что $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$? Ответ: нет.

Упр. 2. Если $[A, B] = AB - BA = 0$, то $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$. Верно ли будет обратное? (да, но при дополнительном условии).

Упр. 3. Найти e^A, где $\underset{n\times n}{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$.

Пространство ограниченных функций

Пусть $X \neq \varnothing$. Обозначаем пространство ограниченных функций:

$$B(X) = \{\, f\colon X \to \mathbb{R} \mid \sup_{x\in X} |f(x)| < \infty \,\}$$

это линейное пространство и на нем есть метрика, зададим её сразу нормой:

$$\|f\| = \sup_{x\in X} |f(x)|$$

Упр. 4. Проверить, что $\|f\|$ это действительно норма.

$(B(x), \|\cdot\|)$ - нормированное пространство, рассмотрим сходимость на этом пространстве:

$$f_n \to f \Leftrightarrow \|f_n - f\| \to 0 \Leftrightarrow \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| \to 0$$

то есть:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, N\colon \forall n > N,\ \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

это равномерная сходимость.

Пример: $f_n(x) = \dfrac{x}{n}$, $X = [0,1]$.

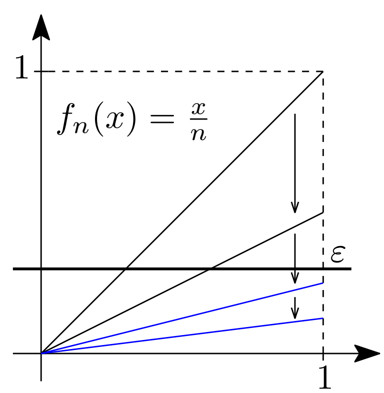

Рис. 1: Пример функции с равномерной сходимостью.

Все функции равномерно приближаются к нулю: для всякого уровня ε можно указать номер, когда все функции целиком лежат ниже этого уровня ε. В этом случае, если мы возьмем супремум:

$$\sup_{x\in X} |f_n| = \frac{1}{n} \to 0$$

Пример: $f_n(x) = x^n$, $X = (0,1)$. В этом случае, указать единый номер, когда все функции ниже уровня ε не получится, поскольку функции сколь угодно близко к 1 стремятся к значению выше изначально заданного ε. Таким образом, есть поточечная сходимость, но нет равномерной сходимости.

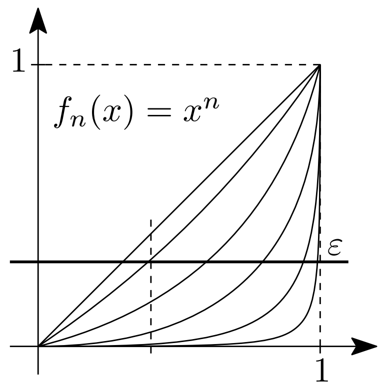

Рис. 2: Пример функции без равномерной сходимости.

Действительно, рассмотрим супремум:

$$\sup_{x\in X} |f_n| = 1 \nrightarrow 0$$

хотя в каждой отдельно взятой точке есть стремление к 0.

Можно ли придумать метрику, которая задавала бы поточечную сходимость?

Утв. 3. На $B([0,1])$ не существует метрики ρ: $\rho(f_n, f) \to 0 \Leftrightarrow f_n(x) \to f(x)$, $\forall x$ (поточечная сходимость).

□ (От противного): предположим, что такая ρ существует. Рассмотрим шар $B(0,r)$ по этой метрике. Возьмем последовательность отрезков: каждый следующий меньше предыдущего, их бесконечное число, стремящихся к точке 1, но не доходящих до неё.

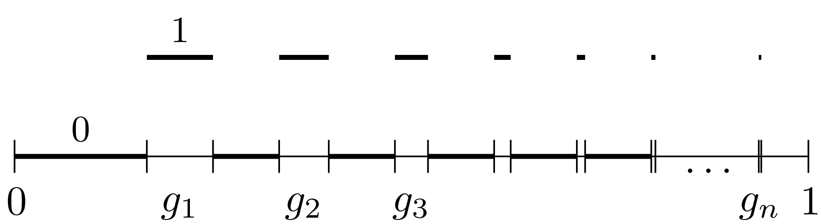

Рис. 3: Доказательство несуществования метрики с поточечной сходимостью.

Возьмем последовательность функций $\{g_n\}$, такую что на этих отрезках она принимает значения 1, вне этих отрезков значения 0. Понятно, что $g_n(x) \to 0$, $\forall x \in [0,1]$ (поточечно), тогда

$$\exists\, n\colon g_n \in B(0,r) = \{g \mid \rho(0,g) < r\}$$

Таким образом, для любого шара мы научились находить такой отрезок, что функция равна 1 на этом отрезке и 0 вне него, лежит в этом шаре.

Возьмем отрезок $[0,1]$, на нем возьмем шар $B(0,1)$, найдем отрезок и функцию f_1 на нем, такую что она лежит в этом шаре. Затем возьмем шар $B(0,\frac{1}{2})$ и внутри предыдущего отрезка, аналогичным построением последовательности функций, найдем другой отрезок и функцию f_2 на нем, которая лежит в шаре $B(0,\frac{1}{2})$.

Продолжим построение, получим последовательность вложенных отрезков и последовательность функций $\{f_n\}$, которые лежат в этих шарах: $f_n \in B(0,\frac{1}{n})$. У вложенной системы отрезков есть общая точка c: $f_n(c) = 1$, $\forall n$. С другой стороны $\forall n$, $f_n \in B(0,\frac{1}{n}) \Rightarrow \rho(f_n, 0) < \frac{1}{n} \Rightarrow f_n \to 0$, но $f_n(c) = 1 \Rightarrow$ противоречие. ■