Это ДЗ без спецификации задач.

Интегрирование трансцендентных функций

Задача 1. (**Д2067**) (только одна часть)

$$\int P(x)\sin{(ax)}dx$$

☐ Снова будем интегрировать по частям:

$$\int P(x)\sin{(ax)}dx = -\cos{(ax)}\cdot\frac{P(x)}{a} + \frac{1}{a}\int P'(x)\cdot\cos{(ax)}dx$$

Проинтегрируем по частям ещё раз:

$$-\cos{(ax)}\cdot\frac{P(x)}{a} + \frac{1}{a}\int P'(x)\cdot\cos{(ax)}dx = -\cos{(ax)}\cdot\frac{P(x)}{a} + \sin{(ax)}\cdot\frac{P'(x)}{a^2} - \frac{1}{a^2}\int P''(x)\sin{(ax)}dx$$

Таким образом, мы получили шаг индукции и формула итоговая будет выглядеть так:

$$\int P(x)\sin{(ax)}dx = -\frac{\cos{(ax)}}{a}\cdot\left(P(x) - \frac{P''(x)}{a^2} + \frac{P^{(4)}(x)}{a^4} - \ldots + (-1)^k\frac{P^{(2k)}(x)}{a^{2k}}\right) +$$

$$+\frac{\sin{(ax)}}{a^2}\left(P'(x) - \frac{P'''(x)}{a^2} + \ldots + \frac{(-1)^m P^{(2m+1)}(x)}{a^{2m}}\right) + C$$

где $k = \left[\frac{n}{2}\right]$ и $m = \left[\frac{n-1}{2}\right]$ - такое, чтобы $2m+1 < n$. Также заметим, что:

$$\int P(x)\sin{(ax)}dx = \mathrm{Im}\left(\int P(x)e^{iax}dx\right)$$

поскольку синус можно связать с комплексными экспонентами следующим образом:

$$\sin{(ax)} = \mathrm{Im}(e^{iax}) \vee \sin{(ax)} = \frac{1}{2i}(e^{iax} - e^{-iax})$$

Таким образом, можно взять разложение экспоненты и взять действительную часть:

$$\int P(x)e^{iax}dx = e^{iax}\cdot\left(\frac{P(x)}{ia} + \frac{P'(x)}{a^2} - \frac{P''(x)}{ia^3} - \ldots + \frac{(-1)^n P^{(n)}(x)}{(ia)^{n+1}}\right) + C =$$

$$= (\cos{(ax)} + i\sin{(ax)})\cdot\left(\frac{P(x)}{ia} + \frac{P'(x)}{a^2} - \frac{P''(x)}{ia^3} - \ldots + \frac{(-1)^n P^{(n)}(x)}{(ia)^{n+1}}\right) + C$$

Тогда:

$$a = -ib,\, b\in\mathbb{R} \Rightarrow \int P(x)e^{bx}dx = e^{bx}\cdot\left(\frac{P(x)}{b} - \frac{P'(x)}{b^2} + \frac{P''(x)}{b^3} - \ldots + \frac{(-1)^n P^{(n)}(x)}{b^{n+1}}\right) + C$$

■

Задача 2. (**Д2069**)

$$\int (x^2-2x+2)e^{-x}dx$$

□

$$\int (x^2-2x+2)e^{-x}dx = e^{-x}\left(-x^2+2x-2-2x+2+2\right) = e^{-x}(-x^2+4x-2)+C = e^{-x}(x^2+2)+C$$

■

Задача 3. (**Д2070**)

$$\int x^5\sin 5x dx$$

□

$$\int x^5\sin 5x dx = -\frac{\cos 5x}{5}\left(x^5-\frac{20x^3}{25}+\frac{120x}{625}\right)+\frac{\sin 5x}{25}\left(5x^4-\frac{60x^2}{25}+\frac{120}{625}\right)+C$$

■

Задача 4. (**Д2071**)

$$\int (1+2x^2+x^4)\cos x dx$$

□

$$\int (1+2x^2+x^4)\cos x dx = \sin x + 2\int x^2\cos x dx + \int x^4\cos x dx$$

$$\int x^2\cos x dx = \sin x\cdot(x^2-2)+2x\cdot\cos x + C$$

$$\int x^4\cos x dx = \sin x(x^4-12x^2+24)+\cos x(4x^3-24x)+C$$

$$\int (1+2x^2+x^4)\cos x dx = \sin x\cdot(1+2x^2-4+x^4-12x^2+24)+\cos x\cdot(4x+4x^3-24x)+C =$$

$$= (21-10x^2+x^4)\sin x - (20x-4x^4)\cos x + C$$

■

Задача 5. (**Д2072**)

$$\int x^7e^{-x^2}dx$$

□ Сделаем замену:

$$t=x^2 \Rightarrow dt = 2xdx \Rightarrow \int x^7e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\int x^6e^{-x^2}d(x^2) = \frac{1}{2}\int t^3e^{-t}dt =$$

$$= \frac{1}{2}e^{-t}(-t^3-3t^2-6t-6)+C = -\frac{1}{2}e^{-x^2}(x^6+3x^4+6x^2+6)+C$$

■

Задача 6. (**Д2074**)

$$\int e^{ax}\cos^2 bx dx$$

□

$$\cos bx = \frac{e^{ibx}+e^{-ibx}}{2} \Rightarrow \cos^2 bx = \frac{e^{2ibx}+2+e^{-2ibx}}{4} \Rightarrow$$

$$\int e^{ax}\cos^2 bx dx = \frac{1}{2}\int e^{ax}dx + \frac{1}{4}\left(\int e^{(a+2ib)x}+e^{(a-2ib)x}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2a}e^{ax} + \frac{1}{4(a+2ib)}e^{(a+2ib)x} + \frac{1}{4(a-2ib)}e^{(a-2ib)x} + C = \frac{e^{ax}}{2a} + e^{ax}\cdot\frac{e^{2ibx}(a-2ib)+e^{-2ibx}(a+2ib)}{4(a+2ib)(a-2ib)} + C =$$

$$= e^{ax}\cdot\left(\frac{1}{2a}+\frac{a\cos 2bx}{2(a^2+4b^2)} - \frac{2ib(e^{2ibx}-e^{-2ibx})}{4(a^2+4b^2)}\right) + C = e^{ax}\cdot\left(\frac{1}{2a}+\frac{a\cos 2bx + 2b\sin 2bx}{2(a^2+4b^2)}\right)+C$$

■

Задача 7. (**Д2075**)

$$\int e^{ax}\sin^3 bx dx$$

□

$$\int e^{ax}\sin^3 bx dx = \int e^{ax}\sin bx\cdot\frac{1-\cos 2bx}{2}dx = \frac{1}{2}\int e^{ax}\sin bx dx + \frac{1}{4}\int e^{ax}(\sin bx - \sin 3bx)dx$$

$$\int e^{ax}\sin bx dx = \int e^{ax}\frac{e^{ibx}-e^{-ibx}}{2i}dx = \frac{1}{2i}\int e^{(a+ib)x} - e^{(a-ib)x}dx = \frac{1}{2i}\cdot\left(\frac{1}{a+ib}e^{(a+ib)x} - \frac{1}{a-ib}e^{(a-ib)x}\right)+C =$$

$$= \frac{e^{ax}}{2i}\left(\frac{(a-ib)e^{ibx}-(a+ib)e^{-ibx}}{a^2+b^2}\right)+C = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(a\frac{e^{ibx}-e^{-ibx}}{2i} - b\frac{e^{ibx}+e^{-ibx}}{2}\right)+C =$$

$$= \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx)+C \Rightarrow$$

$$\int e^{ax}\sin^3 bx dx = \frac{3e^{ax}}{4(a^2+b^2)}(a\sin bx - b\cos bx) - \frac{e^{ax}}{4(a^2+9b^2)}(a\sin 3bx - 3b\cos 3bx)+C$$

■

Задача 8. (**Д2077**)

$$\int x^2 e^x \cos x dx$$

□

$$\int x^2 e^x\cos x dx = \frac{1}{2}\int x^2\left(e^{(1+i)x}+e^{(1-i)x}\right)dx$$

$$\int x^2 e^{(1+i)x}dx = e^{(1+i)x}\left(\frac{x^2}{1+i} - \frac{2x}{(1+i)^2} + \frac{2}{(1+i)^3}\right)+C$$

$$\int x^2 e^{(1-i)x}dx = e^{(1-i)x}\left(\frac{x^2}{1-i} - \frac{2x}{(1-i)^2} + \frac{2}{(1-i)^3}\right)+C$$

$$\frac{e^{ix}(1-i)+e^{-ix}(1+i)}{1+1}=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}-\frac{i(e^{ix}-e^{-ix})}{2}=\cos x+\sin x$$

$$\frac{e^{ix}(1-i)^2+e^{-ix}(1+i)^2}{4}=\frac{e^{ix}-2ie^{ix}-e^{ix}+e^{-ix}+2ie^{-ix}-e^{-ix}}{4}=\sin x$$

$$\frac{e^{ix}(1-i)^3+e^{-ix}(1+i)^3}{8}=\frac{e^{ix}-3ie^{ix}-3e^{ix}+ie^{ix}+e^{-ix}+3ie^{-ix}-3e^{-ix}-ie^{-ix}}{8}=$$

$$=\frac{-e^{ix}-ie^{ix}+ie^{-ix}-e^{-ix}}{4}=-\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int x^2e^x\cos x dx=\frac{e^x}{2}x^2(\cos x+\sin x)-xe^x\sin x+\frac{e^x}{2}(\sin x-\cos x)+C$$

Можно решить эту задачу немного по-другому:

$$\int x^2e^x\cos x dx=\mathrm{Re}\left(\int x^2e^{(1+i)x}dx\right)=\mathrm{Re}\left(e^{(1+i)x}\left(\frac{x^2}{1+i}-\frac{2x}{(1+i)^2}+\frac{2}{(1+i)^3}\right)\right)+C=$$

$$=\mathrm{Re}\left(e^x(\cos x+i\sin x)\left(\frac{1}{2}x^2(1-i)-\frac{1}{2}x(1-i)^2+\frac{1}{4}(1-i)^3\right)\right)+C=$$

$$=\mathrm{Re}\left(e^x(\cos x+i\sin x)\left(\frac{1}{2}x^2(1-i)-xi-\frac{1}{2}(1+i)\right)\right)+C=$$

$$=e^x\frac{1}{2}x^2\cos x-\frac{1}{2}e^x\cos x+e^x\frac{1}{2}x^2\sin x+e^xx\sin x+e^x\frac{1}{2}\sin x+C=$$

$$=\frac{e^x}{2}(x^2(\cos x+\sin x)+x\sin x+\sin x-\cos x)+C$$

■

Задача 9. (Д2078)

$$\int xe^x\sin^2 x dx$$

□

$$\int xe^x\sin^2 x dx=\frac{1}{2}\int xe^x(1-\cos 2x)dx=\frac{1}{2}\int xe^x dx-\frac{1}{2}\int xe^x\cos 2x dx$$

$$\frac{1}{2}\int xe^x dx=\frac{1}{2}e^x(x-1)+C$$

$$\int xe^x\cos 2x dx=\int xe^x\frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{2}dx=\frac{1}{2}\int xe^{(1+2i)x}dx+\frac{1}{2}\int xe^{(1-2i)x}dx$$

$$\int xe^{(1+2i)x}dx=e^{(1+2i)x}\cdot\left(\frac{x}{1+2i}-\frac{1}{(1+2i)^2}\right)+C=e^x\cdot\left(\frac{xe^{2ix}}{1+2i}-\frac{e^{2ix}}{(1+2i)^2}\right)+C$$

$$\int xe^{(1-2i)x}dx=e^{(1-2i)x}\cdot\left(\frac{x}{1-2i}-\frac{1}{(1-2i)^2}\right)+C=e^x\cdot\left(\frac{xe^{-2ix}}{1-2i}-\frac{e^{-2ix}}{(1-2i)^2}\right)+C$$

$$\int xe^x\cos 2x dx=\frac{1}{2}e^x\cdot\left(x\cdot\frac{e^{2ix}(1-2i)+(1+2i)e^{-2ix}}{1+4}-\frac{e^{2ix}(1-2i)^2+e^{-2ix}(1+2i)^2}{25}\right)+C=$$

$$=\frac{e^x}{2}\cdot\left(x\frac{e^{2ix}+e^{-2ix}-2i(e^{2ix}-e^{-2ix})}{5}-\frac{e^{2ix}(-3-4i)+e^{-2ix}(-3+4i)}{25}\right)+C=$$

$$= \frac{e^x x}{5}(\cos 2x + 2\sin 2x) + \frac{3e^x}{25}\cos 2x - \frac{4e^x}{25}\sin 2x + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int xe^x \sin^2 x dx = e^x\left(\frac{x-1}{2} - \frac{x}{10}(\cos 2x + 2\sin 2x) - \frac{3}{50}\cos 2x + \frac{2}{25}\sin 2x\right) + C$$

■

Задача 10. (**Д2079**)

$$\int (x - \sin x)^3 dx$$

□

$$\int (x-\sin x)^3 dx = \int (x^3 - 3x^2\sin x + 3x\sin^2 x - \sin^3 x)dx =$$

$$= \frac{x^4}{4} - 3\int x^2 \sin x dx + 3\int x\sin^2 x dx - \int \sin^3 x dx$$

$$\int \sin^3 x dx = -\int (1-\cos^2 x) d(\cos x) = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C$$

$$\int x^2 \sin x dx = -\cos x(x^2 - 2) + 2x\sin x + C$$

$$\int x\sin^2 x dx = \frac{1}{2}\int x - x\cos 2x dx = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\int x\cos 2x dx = \frac{x^2}{4} - \frac{x\sin 2x}{4} + \frac{1}{4}\int \sin 2x dx =$$

$$= \frac{x^2}{4} - \frac{x\sin 2x}{4} - \frac{1}{8}\cos 2x + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int (x-\sin x)^3 dx = \frac{x^4}{4} + 3\cos x(x^2-2) - 6x\sin x + \frac{3x^2}{4} - \frac{3x\sin 2x}{4} - \frac{3}{8}\cos 2x + \cos x - \frac{\cos^3 x}{3} + C =$$

$$= \frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{4} + 3x^2\cos x - x\cdot\left(6\sin x + \frac{3}{4}\sin 2x\right) - \left(5\cos x + \frac{3}{8}\cos 2x\right) - \frac{\cos^3 x}{3} + C$$

■

Задача 11. (**Д2080**)

$$\int \cos^2 \sqrt{x} dx$$

□ Сделаем замену $t = \sqrt{x} \Rightarrow dt = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx \Rightarrow 2tdt = dx$:

$$\int \cos^2\sqrt{x}dx = \int 2t\cos^2 t dt = \int t(1+\cos 2t)dt = \frac{t^2}{2} + \int t\cos 2t dt =$$

$$= \frac{x}{2} + t\frac{\sin 2t}{2} + \frac{\cos 2t}{4} + C = \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{x}}{2}\sin 2\sqrt{x} + \frac{\cos 2\sqrt{x}}{4} + C$$

■

Задача 12. (**Д2081**) Доказать, что если R - рациональная функция и числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ - соизмеримы, то интеграл:

$$\int R(e^{a_1 x}, e^{a_2 x}, \ldots, e^{a_n x})dx$$

есть элементарная функция.

□ Поскольку все указанные числа соизмеримы, то они делятся на наибольший общий делитель a:

$$a_1 = k_1 \cdot a, a_2 = k_2 \cdot a, \ldots, a_n = k_n \cdot a,\ \forall i = \overline{1, n},\ k_i \in \mathbb{Z}$$

Сделаем замену:

$$e^{ax} = t,\ x = \frac{1}{a}\ln t,\ t > 0,\ dx = \frac{1}{at}dt$$

$$\int R(e^{a_1 x}, e^{a_2 x}, \ldots, e^{a_n x})dx = \int R\left((e^{ax})^{k_1}, (e^{ax})^{k_2}, \ldots, (e^{ax})^{k_n}\right)dx = \int R(t^{k_1}, t^{k_2}, \ldots, t^{k_n})\frac{dt}{at} = \int R'(t)dt$$

Таким образом, мы получили интеграл от рациональной функции $R'(t)$, которую мы умеем интегрировать и интеграл от которой есть элементарная функция. ■

Задача 13. (**Д2083**)

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}dx$$

□

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}dx = |e^x = t,\ dt = e^x dx| = \int \frac{t}{1+t}dt = e^x - \ln(1+e^x) + C$$

■

Задача 14. (**Д2084**)

$$\int \frac{dx}{e^{2x}+e^x-2}$$

□ Сделаем замену:

$$t = e^x,\ dt = e^x dx$$

$$\int \frac{dx}{e^{2x}+e^x-2} = \int \frac{dt}{t(t^2+t-2)} = \int \frac{dt}{t(t-1)(t+2)} = \int \frac{A}{t} + \frac{B}{t-1} + \frac{C}{t+2}dt$$

$$A(t^2+t-2) + B(t^2+2t) + C(t^2-t) = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{2},\ A+B+C = 0 \Rightarrow B = \frac{1}{2} - C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A + 2B - C = 0 \Rightarrow 2B = \frac{1}{2} + C \Rightarrow B = \frac{1}{3},\ C = \frac{1}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{A}{t} + \frac{B}{t-1} + \frac{C}{t+2}dt = -\frac{1}{2}\ln e^x + \frac{1}{3}\ln|e^x-1| + \frac{1}{6}\ln(e^x+2) + C$$

■

Задача 15. (**Д2085**)

$$\int \frac{dx}{1+e^{x/2}+e^{x/3}+e^{x/6}}$$

□ Сделаем замену:

$$e^{x/6}=t,\ dt=\frac{1}{6}e^{x/6}dx$$

$$\int \frac{dx}{1+e^{x/2}+e^{x/3}+e^{x/6}}=\int \frac{6dt}{t(1+t^3+t^2+t)}=\int \frac{6dt}{t(t+1)(t^2+1)}=\int \frac{A}{t}+\frac{B}{t+1}+\frac{Ct+D}{t^2+1}dt$$

$$A(t^3+t^2+t+1)+B(t^3+t)+(Ct^3+Dt^2+Ct^2+Dt)=6$$

$$A=6,\ 6+B+C=0,\ 6+D+C=0,\ 6+B+D=0\Rightarrow C=D\Rightarrow C=D=-3,\ B=-3$$

$$\int \frac{A}{t}+\frac{B}{t+1}+\frac{Ct+D}{t^2+1}dt=6\ln t-3\ln{(t+1)}-3\int \frac{t+1}{t^2+1}dt$$

$$\int \frac{t+1}{t^2+1}dt=\frac{1}{2}\int \frac{d(t^2)}{t^2+1}+\operatorname{arctg} t+C=\frac{1}{2}\ln{(t^2+1)}+\operatorname{arctg} t+C\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int \frac{dx}{1+e^{x/2}+e^{x/3}+e^{x/6}}=x-3\ln{(e^{x/6}+1)}-\frac{3}{2}\ln{(e^{x/3}+1)}-3\operatorname{arctg} e^{x/6}+C=$$

$$=x-3\ln{(1+e^{x/6})}\sqrt{1+e^{x/3}}-3\operatorname{arctg} e^{x/6}+C$$

■

Задача 16. (**Д2086**)

$$\int \frac{1+e^{x/2}}{(1+e^{x/4})^2}dx$$

□ Сделаем замену:

$$t=e^{x/4},\ dt=\frac{1}{4}e^{x/4}dx$$

$$\int \frac{1+e^{x/2}}{(1+e^{x/4})^2}dx=\int \frac{1+t^2}{(1+t)^2}\frac{4dt}{t}=4\int \frac{A}{t}+\frac{B}{1+t}+\frac{C}{(1+t)^2}dt$$

$$A(1+t)^2+Bt(1+t)+Ct=1+t^2\Rightarrow\begin{cases} t^2, & 1 &= & A+B\\ t, & 0 &= & 2A+B+C\\ 1, & 1 &= & A\end{cases}\Rightarrow A=1,\ B=0,\ C=-2$$

$$4\int \frac{A}{t}+\frac{B}{1+t}+\frac{C}{(1+t)^2}dt=4\int \frac{1}{t}dt-8\int \frac{dt}{(1+t)^2}=4\ln e^{x/4}+8\frac{1}{1+e^{x/4}}+C=x+\frac{8}{1+e^{x/4}}+C$$

■

Задача 17. (**Д2088**)

$$\int \sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}dx$$

□ Сделаем замену:

$$t = e^x,\ dt = e^x dx$$

$$\int \sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}dx = \int \sqrt{\frac{t-1}{t+1}}\cdot\frac{dt}{t} = \int \frac{t-1}{t\sqrt{t^2-1}}dt = \int \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}dt - \int \frac{1}{t\sqrt{t^2-1}}dt =$$

$$= \ln|t+\sqrt{t^2-1}| - \int \frac{1}{t^2\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}}dt = \ln|t+\sqrt{t^2-1}| + \int \frac{d\left(\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}} = \ln|t+\sqrt{t^2-1}| + \arcsin\left(\frac{1}{t}\right) + C =$$

$$= \ln|e^x+\sqrt{e^{2x}-1}| + \arcsin\left(\frac{1}{e^x}\right) + C$$

■

Задача 18. (**Д2089**)

$$\int \sqrt{e^{2x}+4e^x-1}dx$$

□ Сделаем замену:

$$t = e^x,\ dt = e^x dx$$

$$\int \sqrt{e^{2x}+4e^x-1}dx = \int \sqrt{t^2+4t-1}\frac{dt}{t} = \int \frac{t^2+4t-1}{t\sqrt{t^2+4t-1}}dt = \int \frac{t+4}{\sqrt{t^2+4t-1}} - \int \frac{1}{t\sqrt{t^2+4t-1}}dt =$$

$$= \int \frac{2t+4}{2\sqrt{t^2+4t-1}}dt + 2\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+4t-1}} - \int \frac{1}{t\sqrt{t^2+4t-1}}dt =$$

$$= \sqrt{t^2+4t-1} + 2\int \frac{dt}{\sqrt{(t+2)^2-5}} - \int \frac{dt}{t^2\sqrt{1+\frac{4}{t}-\frac{1}{t^2}}}$$

$$2\int \frac{dt}{\sqrt{(t+2)^2-5}} = 2\ln|t+2+\sqrt{(t+2)^2-5}| + C = 2\ln\left(e^x+2+\sqrt{e^{2x}+4e^x-1}\right) + C$$

$$-\int \frac{dt}{t^2\sqrt{1+\frac{4}{t}-\frac{1}{t^2}}} = \left|u = \frac{1}{t},\ du = -\frac{1}{t^2}dt\right| = \int \frac{du}{\sqrt{1+4u-u^2}} = \int \frac{du}{\sqrt{5-(u-2)^2}} =$$

$$= \arcsin\left(\frac{u-2}{\sqrt{5}}\right) + C = \arcsin\left(\frac{e^{-x}-2}{\sqrt{5}}\right) + C = -\arcsin\left(\frac{2e^x-1}{e^x\sqrt{5}}\right) + C$$

$$\int \sqrt{e^{2x}+4e^x-1}dx = \sqrt{e^{2x}+4e^x-1} + 2\ln\left(e^x+2+\sqrt{e^{2x}+4e^x-1}\right) - \arcsin\left(\frac{2e^x-1}{e^x\sqrt{5}}\right) + C$$

■

Задача 19. (**Д2090**)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}+\sqrt{1-e^x}}$$

□

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}+\sqrt{1-e^x}} = \int \frac{\sqrt{1+e^x}-\sqrt{1-e^x}}{1+e^x-1+e^x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{1+e^x}-\sqrt{1-e^x}}{e^x}dx$$

Сделаем замену:

$$t = e^{-x},\ dt = -e^{-x}dx$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{1+e^x}-\sqrt{1-e^x}}{e^x}dx = \frac{1}{2}\int e^{-x}(\sqrt{1+e^x}-\sqrt{1-e^x})dx = \frac{1}{2}\int t\cdot\frac{-1}{t}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{t}}-\sqrt{1-\frac{1}{t}}\right)dt$$

$$\int \sqrt{1+\frac{1}{t}}dt = t\sqrt{1+\frac{1}{t}} - \int \frac{t\cdot\frac{-1}{t^2}}{2\sqrt{1+\frac{1}{t}}}dt = \sqrt{t(t+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+t+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}}} =$$

$$= \sqrt{t(t+1)} + \frac{1}{2}\ln\left|t+\frac{1}{2}+\sqrt{t(t+1)}\right| + C = e^{-x}\sqrt{1+e^x} + \frac{1}{2}\ln\left(e^{-x}+\frac{1}{2}+e^{-x}\sqrt{1+e^x}\right) + C$$

$$\int \sqrt{1-\frac{1}{t}}dt = t\sqrt{1-\frac{1}{t}} - \int \frac{t\cdot\frac{1}{t^2}}{2\sqrt{1-\frac{1}{t}}}dt = \sqrt{t(t-1)} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-t+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}}} =$$

$$= \sqrt{t(t-1)} - \frac{1}{2}\ln\left|t-\frac{1}{2}+\sqrt{t(t-1)}\right| + C = e^{-x}\sqrt{1-e^x} - \frac{1}{2}\ln\left(e^{-x}-\frac{1}{2}+e^{-x}\sqrt{1-e^x}\right) + C$$

$$e^{-x}-\frac{1}{2}+e^{-x}\sqrt{1-e^x} = \frac{(1+\sqrt{1-e^x})^2}{e^x} = \frac{(1+\sqrt{1-e^x})(1+\sqrt{1-e^x})}{(1+\sqrt{1-e^x})(1-\sqrt{1-e^x})} = \frac{(1+\sqrt{1-e^x})}{(1-\sqrt{1-e^x})}$$

$$e^{-x}+\frac{1}{2}+e^{-x}\sqrt{1+e^x} = \frac{(1+\sqrt{1+e^x})^2}{e^x} = \frac{(1+\sqrt{1+e^x})(1+\sqrt{1+e^x})}{(1+\sqrt{1+e^x})(\sqrt{1+e^x}-1)} = \frac{(1+\sqrt{1+e^x})}{(\sqrt{1+e^x}-1)}$$

$$\frac{1}{2}\int\left(\sqrt{1-\frac{1}{t}}-\sqrt{1+\frac{1}{t}}\right)dt = \frac{e^{-x}}{2}(\sqrt{1-e^x}-\sqrt{1+e^x}) - \frac{1}{4}\ln\frac{(\sqrt{1+e^x}-1)(1-\sqrt{1-e^x})}{(1+\sqrt{1+e^x})(1+\sqrt{1-e^x})} + C$$

■

Задача 20. (**Д2092**) В каком случае интеграл:

$$\int P\left(\frac{1}{x}\right)e^x dx,\ P\left(\frac{1}{x}\right) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ - постоянны, представляет собой элементарную функцию?

□

$$\int P\left(\frac{1}{x}\right)e^x dx = \sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{x^k}e^x dx$$

$$\int \frac{a_k}{x^k}e^x dx = -\frac{a_k}{(k-1)x^{k-1}}\cdot e^x + \frac{a_k}{k-1}\cdot\int\frac{e^x}{x^{k-1}}dx = \ldots =$$

$$= -\frac{a_k}{(k-1)x^{k-1}}\cdot e^x - \frac{a_k}{(k-1)(k-2)x^{k-2}}\cdot e^x - \frac{a_k}{(k-1)!}\cdot\frac{e^x}{x} + \frac{a_k}{(k-1)!}\int\frac{e^x}{x}dx$$

Соответственно, чтобы получить интеграл от элементарных функций необходимо, чтобы коэффициенты при $\mathrm{li}(e^x)$ были равны нулю, тогда:

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{x^k}e^x dx = a_0e^x - \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k-1}\frac{a_k}{(k-1)\cdot\ldots\cdot(k-j)} + \sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{(k-1)!}\,\mathrm{li}(e^x),\ \int\frac{e^x}{x}dx = \mathrm{li}(e^x)+C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{(k-1)!}\,\mathrm{li}(e^x) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{(k-1)!} = 0$$

■

Задача 21. (**Д2093**)

$$\int\left(1-\frac{2}{x}\right)^2 e^x dx$$

□

$$\int\left(1-\frac{2}{x}\right)^2 e^x dx = \int e^x dx - \int\frac{4e^x}{x}dx + \int\frac{4e^x}{x^2}dx = e^x - 4\int\frac{e^x}{x}dx - 4\frac{e^x}{x} + 4\int\frac{e^x}{x}dx = e^x - \frac{4e^x}{x} + C$$

■

Задача 22. (**Д2094**)

$$\int\left(1-\frac{1}{x}\right)e^{-x}dx$$

□

$$\int\left(1-\frac{1}{x}\right)e^{-x}dx = -e^{-x} - \int\frac{e^{-x}}{x}dx = -e^{-x} - \mathrm{li}(e^{-x}) + C$$

■

Задача 23. (**Д2095**)

$$\int\frac{e^{2x}}{x^2-3x+2}dx$$

□

$$\int\frac{e^{2x}}{x^2-3x+2}dx = \int\frac{e^{2x}}{(x-1)(x-2)}dx$$

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{Ax-2A+Bx-B}{(x-1)(x-2)} \Rightarrow A=-B,\ A=-1,\ B=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int\frac{e^{2x}}{(x-1)(x-2)}dx = \int\frac{e^{2x}}{x-2}dx - \int\frac{e^{2x}}{x-1}dx = e^4\int\frac{e^{2(x-2)}}{x-2}d(x-2) - e^2\frac{e^{2(x-1)}}{x-1}d(x-1) =$$

$$= e^4\,\mathrm{li}(e^{2(x-2)}) - e^2\,\mathrm{li}(e^{2(x-1)}) + C$$

■

Задача 24. (**Д2096**)

$$\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx$$

□

$$\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx = \int \frac{(x+1)e^x}{(x+1)^2}dx - \int \frac{e^x}{(x+1)^2}dx = \frac{1}{e}\int \frac{e^{x+1}}{x+1}d(x+1) + \frac{e^x}{x+1} - \int \frac{e^x}{x+1}dx =$$

$$= e^{-1}\operatorname{li}(e^{x+1}) + \frac{e^x}{x+1} - e^{-1}\operatorname{li}(e^{x+1}) + C = \frac{e^x}{x+1} + C$$

■

Задача 25. (**Д2097**)

$$\int \frac{x^4e^{2x}}{(x-2)^2}dx$$

□ Разделим в столбик x^4 на $(x-2)^2$, тогда получим:

$$x^4 = (x^2+4x+12)(x-2)^2 + 32x - 48 = (x^2+4x+12)(x-2)^2 + 32(x-2) + 16 \Rightarrow$$

$$\int \frac{x^4e^{2x}}{(x-2)^2}dx = \int (x^2+4x+12)e^{2x}dx + 32\int \frac{e^{2x}}{x-2}dx + 16\int \frac{e^{2x}}{(x-2)^2}dx =$$

$$= e^{2x}\left(\frac{x^2+4x+12}{2} - \frac{2x+4}{4} + \frac{2}{8}\right) + 32e^4\operatorname{li}\left(e^{2x-4}\right) + 16\int \frac{e^{2x}}{(x-2)^2}dx =$$

$$= e^{2x}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{3x}{2} + \frac{21}{4}\right) + 32e^4\operatorname{li}\left(e^{2x-4}\right) - 16\frac{e^{2x}}{x-2} + 32\int \frac{e^{2x}dx}{x-2} =$$

$$= \frac{e^{2x}}{2}\left(x^2 + 3x + \frac{21}{2}\right) + 64e^4\operatorname{li}\left(e^{2x-4}\right) - 16\frac{e^{2x}}{x-2} + C$$

■

Задача 26. (**Д2098**)

$$\int \ln^n(x)dx$$

□

$$\int \ln^n(x)dx = x\ln^n(x) - n\int \ln^{n-1}(x)dx = x\ln^n(x) - nx\ln^{n-1}(x) + n(n-1)\int \ln^{n-2}(x)dx =$$

$$= \ldots = x(\ln^n(x) - n\ln^{n-1}(x) + n(n-1)\ln^{n-2}(x) - \ldots + (-1)^{n-1}n!\ln(x) + (-1)^n n!) + C$$

■

Задача 27. (**Д2099**)

$$\int x^3\ln^3(x)dx$$

□

$$\int x^3\ln^3(x)dx = \frac{x^4}{4}\ln^3(x) - \frac{3}{4}\int x^3\ln^2(x)dx = \frac{x^4}{4}\ln^3(x) - \frac{3}{16}x^4\ln^2(x) + \frac{6}{16}\int x^3\ln(x)dx =$$
$$= \frac{x^4}{4}\ln^3(x) - \frac{3}{16}x^4\ln^2(x) + \frac{6}{64}x^4\ln(x) - \frac{6}{64}\int x^3dx = \frac{x^4}{4}\left(\ln^3(x) - \frac{3}{4}\ln^2(x) + \frac{3}{8}\ln(x) - \frac{3}{32}\right) + C$$

■

Задача 28. (**Д2100**)

$$\int\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^3dx$$

□

$$\int\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^3dx = -\frac{1}{2}\frac{\ln^3(x)}{x^2} + \frac{1}{2}\int 3\frac{\ln^2(x)}{x^3}dx = -\frac{\ln^3(x)}{2x^2} - \frac{3}{4}\frac{\ln^2(x)}{x^2} + \frac{3}{2}\int\frac{\ln(x)}{x^3}dx =$$
$$= -\frac{\ln^3(x)}{2x^2} - \frac{3}{4}\frac{\ln^2(x)}{x^2} - \frac{3}{4}\frac{\ln(x)}{x^2} + \frac{3}{4}\int\frac{1}{x^3}dx = -\frac{\ln^3(x)}{2x^2} - \frac{3}{4}\frac{\ln^2(x)}{x^2} - \frac{3}{4}\frac{\ln(x)}{x^2} - \frac{3}{8x^2} + C$$

■

Задача 29. (**Д2101**)

$$\int\ln\left[(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}\right]\cdot\frac{dx}{(x+a)(x+b)}$$

□

$$\int\ln\left[(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}\right]\cdot\frac{dx}{(x+a)(x+b)} = \int\frac{\ln(x+a)dx}{x+b} + \int\frac{\ln(x+b)dx}{x+a}$$
$$\int\frac{\ln(x+a)dx}{x+b} = \ln(x+a)\ln(x+b) - \int\frac{\ln(x+b)dx}{x+a} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int\ln\left[(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}\right]\cdot\frac{dx}{(x+a)(x+b)} = \ln(x+a)\ln(x+b) + C$$

■

Задача 30. (**Д2102**)

$$\int\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})dx$$

□

$$\int\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})dx = x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2}) - \int 2\frac{x\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\ln(x+\sqrt{1+x^2})dx$$
$$\int 2\frac{x\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\ln(x+\sqrt{1+x^2})dx = 2\int\frac{x\left(\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}\right)}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\ln(x+\sqrt{1+x^2})dx =$$
$$= 2\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ln(x+\sqrt{1+x^2})dx = 2\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - 2\int\frac{\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}dx =$$
$$= 2\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - 2x + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \ln^2(x+\sqrt{1+x^2})dx = x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2}) - 2\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2}) + 2x + C$$

■

Задача 31. (**Д2103**)

$$\int \ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})dx$$

□

$$\int \ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})dx = x\ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}) - \int \frac{x}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}} \cdot \left(-\frac{1}{2\sqrt{1-x}} + \frac{1}{2\sqrt{1+x}}\right)dx$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}} \cdot \left(-\frac{1}{2\sqrt{1-x}} + \frac{1}{2\sqrt{1+x}}\right)dx = \int x\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{2(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})\sqrt{1-x^2}}dx =$$

$$= \int x\frac{1-x-2\sqrt{1-x^2}+1+x}{2(1-x-1-x)\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{2(1-\sqrt{1-x^2})}{-4\sqrt{1-x^2}}dx = -\frac{1}{2}\arcsin(x) + \frac{1}{2}x + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})dx = x\ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}) + \frac{1}{2}\arcsin(x) - \frac{1}{2}x + C$$

■

Задача 32. (**Д2104**)

$$\int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{3/2}}dx$$

□ Для начала рассмотрим интеграл:

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow 1+x^2 = \frac{1}{t} \Rightarrow t = \frac{1}{1+x^2} \in (0,1],\ x = \sqrt{\frac{1}{t}-1} \Rightarrow dx = \frac{-\frac{1}{t^2}dt}{2\sqrt{\frac{1}{t}-1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{-t\sqrt{t}dt}{2t^2\sqrt{\frac{1}{t}-1}} = \int \frac{d(1-t)}{2\sqrt{1-t}} = \sqrt{1-t} + C = \sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}} + C = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C$$

Где мы возьмем $x > 0$, поскольку исходный интеграл определён при $x > 0$.

$$\int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{3/2}}dx = \frac{x \cdot \ln x}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \frac{x \cdot \ln x}{\sqrt{1+x^2}} - \ln(x+\sqrt{x^2+1}) + C$$

■

Задача 33. (**Д2105**)

$$\int x\,\mathrm{arctg}(x+1)dx$$

□

$$\int x\,\mathrm{arctg}(x+1)dx = \frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}(1+x) - \int \frac{x^2}{2(1+(1+x)^2)}dx$$

$$\int \frac{x^2}{2(1+(1+x)^2)}dx = \int \frac{x^2+2x+2}{2(2+2x+x^2)}dx - \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+2x+2)}{x^2+2x+2}dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) + C$$

■

Задача 34. (**Д2106**)

$$\int \sqrt{x}\operatorname{arctg}\sqrt{x}dx$$

□

$$\int \sqrt{x}\operatorname{arctg}\sqrt{x}dx = \frac{2x^{3/2}}{3}\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \int \frac{2x^{3/2}}{3}\cdot\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+x}dx = \frac{2x^{3/2}}{3}\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \frac{1}{3}\int\frac{x}{1+x}dx$$

$$\frac{1}{3}\int\frac{x}{1+x}dx = \frac{1}{3}\int dx - \frac{1}{3}\int\frac{1}{1+x}dx = \frac{x}{3} - \frac{\ln(1+x)}{3} + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \sqrt{x}\operatorname{arctg}\sqrt{x}dx = \frac{2x^{3/2}}{3}\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \frac{x}{3} + \frac{\ln(1+x)}{3} + C$$

■

Задача 35. (**Д2107**)

$$\int x\arcsin(1-x)dx$$

□

$$\int x\arcsin(1-x)dx = \frac{x^2}{2}\arcsin(1-x) + \frac{1}{2}\int\frac{x^2}{\sqrt{1-(1-x)^2}}dx$$

Сделаем замену $t = 1-x$, тогда:

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{1-(1-x)^2}}dx = -\int\frac{1-2t+t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int\frac{1-t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt - 2\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + 2\int\frac{tdt}{\sqrt{1-t^2}} =$$

$$= \int\sqrt{1-t^2}dt - 2\arcsin(t) - 2\sqrt{1-t^2} = \frac{t}{2}\sqrt{1-t^2} + \frac{1}{2}\arcsin(t) - 2\arcsin(t) - 2\sqrt{1-t^2} + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int x\arcsin(1-x)dx = \frac{3-x}{4}\sqrt{2x-x^2} + \frac{2x^2-3}{4}\arcsin(1-x) + C$$

■

Задача 36. (**Д2108**)

$$\int \arcsin(\sqrt{x})dx$$

□

$$\int \arcsin(\sqrt{x})dx = x\arcsin(\sqrt{x}) - \int\frac{x}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}dx$$

$$\int\frac{x}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}dx = \int\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{1-x}}dx = |t=\sqrt{x},\ x=t^2,\ dx=2tdt| = \int\frac{t2tdt}{2\sqrt{1-t^2}} = \int\frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt =$$

$$= -\int\frac{1-t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt + \int\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = -\frac{1}{2}t\sqrt{1-t^2} - \frac{1}{2}\arcsin(t) + \arcsin(t) + C =$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{x-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin(\sqrt{x}) + C \Rightarrow \int\arcsin(\sqrt{x})dx = \left(x-\frac{1}{2}\right)\arcsin(\sqrt{x}) - \frac{1}{2} + C$$

■

Задача 37. (**Д2109**)

$$\int x\arccos\frac{1}{x}dx$$

□

$$\int x\arccos\frac{1}{x}dx=\frac{x^2}{2}\arccos\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\int\frac{x^2\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}dx$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{x^2\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}dx=\operatorname{sgn}(x)\frac{1}{2}\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}}=\operatorname{sgn}(x)\frac{1}{4}\int\frac{d(x^2-1)}{\sqrt{x^2-1}}=\operatorname{sgn}(x)\frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}+C\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int x\arccos\frac{1}{x}dx=\frac{x^2}{2}\arccos\frac{1}{x}-\operatorname{sgn}(x)\frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}+C$$

■

Задача 38. (**Д2111**)

$$\int\frac{\arccos x}{(1-x^2)^{3/2}}dx$$

□

$$\int\frac{\arccos x}{(1-x^2)^{3/2}}dx=\frac{x\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}+\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x^2}}=\frac{x\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{2}\int\frac{d(1-x^2)}{1-x^2}=$$

$$=\frac{x\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{2}\ln(1-x^2)+C=\frac{x\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}-\ln(\sqrt{1-x^2})+C$$

■

Задача 39. (**Д2112**)

$$\int\frac{x\arccos x}{(1-x^2)^{3/2}}dx$$

□

$$\int\frac{x\arccos x}{(1-x^2)^{3/2}}dx=\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}+\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x^2}}=\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}+\int\frac{dx}{1-x^2}=\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+C$$

■

Задача 40. (**Д2114**)

$$\int x\ln\frac{1+x}{1-x}dx$$

□

$$\int x\ln\frac{1+x}{1-x}dx=\frac{x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{2}{1-x^2}dx$$

$$\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{2}{1-x^2}dx=-\int dx+\int\frac{1}{1-x^2}dx=-x+\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+C\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int x\ln\frac{1+x}{1-x}dx=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\right)\ln\frac{1+x}{1-x}+x+C$$

■

Задача 41. (Д2115)

$$\int \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})dx}{(1+x^2)^{3/2}}$$

□

$$\int \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})dx}{(1+x^2)^{3/2}} = \frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx =$$

$$= \frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{1+x^2} = \frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$$

■

Задача 42. (Д2116)

$$\int \operatorname{sh}^2(x)\operatorname{ch}^2(x)dx$$

□

$$\int \operatorname{sh}^2(x)\operatorname{ch}^2(x)dx = \frac{1}{8}\int \operatorname{sh}^2(2x)d(2x) = \frac{1}{8}\int\frac{e^{2u}-2+e^{-2u}}{4}du = \frac{e^{2u}}{64}-\frac{u}{16}-\frac{e^{-2u}}{64}+C=$$

$$= \frac{e^{4x}}{64}-\frac{2x}{16}-\frac{e^{-4x}}{64}+C = \frac{\operatorname{sh}(4x)}{32}-\frac{x}{8}+C$$

■

Задача 43. (Д2117)

$$\int \operatorname{ch}^4 x dx$$

□

$$\int \operatorname{ch}^4 xdx = \int\frac{(1+\operatorname{ch}(2x))^2}{4}dx = \int \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\operatorname{ch}(2x)+\frac{1}{4}\operatorname{ch}^2(2x)dx = \frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\operatorname{sh}(2x)+\frac{1}{4}\int\operatorname{ch}^2(2x)dx$$

$$\int\operatorname{ch}^2(2x)dx = \frac{1}{2}\int(1+\operatorname{ch}(4x))dx = \frac{x}{2}+\frac{1}{8}\operatorname{sh}(4x)+C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int\operatorname{ch}^4 xdx = \frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\operatorname{sh}(2x)+\frac{1}{32}\operatorname{sh}(4x)+C$$

■

Задача 44. (Д2118)

$$\int \operatorname{sh}^3 xdx$$

□

$$\int\operatorname{sh}^3 xdx = \int\operatorname{sh}^2(x)d(\operatorname{ch}(x)) = \int(\operatorname{ch}^2 x-1)d\operatorname{ch}(x) = \frac{\operatorname{ch}^3 x}{3}-\operatorname{ch}x+C$$

■

Задача 45. (Д2119)

$$\int \operatorname{sh}x\operatorname{sh}2x\operatorname{sh}3xdx$$

□ Рассмотрим произведение $\operatorname{sh} x \operatorname{sh} 3x$:

$$\operatorname{sh} x \operatorname{sh} 3x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^{3x} - e^{-3x}}{2} = \frac{1}{4}(e^{4x} - e^{2x} - e^{-2x} + e^{-4x}) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 4x - \operatorname{ch} 2x)$$

$$\int \operatorname{sh} x \operatorname{sh} 2x \operatorname{sh} 3x dx = \int \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 4x - \operatorname{ch} 2x) \operatorname{sh} 2x dx = \frac{1}{2} \int \operatorname{ch} 4x \operatorname{sh} 2x dx - \frac{1}{2} \int \operatorname{ch} 2x \operatorname{sh} 2x dx$$

Рассмотрим произведение $\operatorname{ch} 4x \operatorname{sh} 2x$:

$$\operatorname{ch} 4x \operatorname{sh} 2x = \frac{e^{4x} + e^{-4x}}{2} \cdot \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \frac{1}{4}(e^{6x} - e^{2x} + e^{-2x} - e^{-6x}) = \frac{1}{2}(\operatorname{sh} 6x - \operatorname{sh} 2x)$$

$$\frac{1}{2} \int \operatorname{ch} 4x \operatorname{sh} 2x dx = \frac{1}{4} \int \operatorname{sh} 6x - \operatorname{sh} 2x dx = \frac{1}{24} \operatorname{ch} 6x - \frac{1}{8} \operatorname{ch} 2x + C$$

$$\frac{1}{2} \int \operatorname{ch} 2x \operatorname{sh} 2x d = \frac{1}{4} \int \operatorname{sh} 4x dx = \frac{1}{16} \operatorname{ch} 4x + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \operatorname{sh} x \operatorname{sh} 2x \operatorname{sh} 3x dx = \frac{1}{24} \operatorname{ch} 6x - \frac{1}{8} \operatorname{ch} 2x - \frac{1}{16} \operatorname{ch} 4x + C$$

■

Задача 46. (**Д2120**)

$$\int \operatorname{th} x dx$$

□

$$\int \operatorname{th} x dx = \int \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} dx = \int \frac{d(\operatorname{ch} x)}{\operatorname{ch} x} = \ln(\operatorname{ch} x) + C$$

■

Задача 47. (**Д2121**)

$$\int \operatorname{cth}^2 x dx$$

□

$$\int \operatorname{cth}^2 x dx = \int \frac{\operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} dx = \int \frac{1 + \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} dx = x + \int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} dx = x - \operatorname{cth} x + C$$

■

Задача 48. (**Д2122**)

$$\int \sqrt{\operatorname{th} x} dx$$

□

$$\int \sqrt{\operatorname{th} x} dx = \int \sqrt{\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}} dx = \int \frac{e^x - e^{-x}}{\sqrt{e^{2x} - e^{-2x}}} dx = \int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt{e^{4x} - 1}} - \int \frac{e^{-2x} dx}{\sqrt{1 - e^{-4x}}}$$

$$\int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt{e^{4x} - 1}} = |u = e^{2x},\, du = 2e^{2x} dx| = \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}} = \frac{1}{2} \ln(e^{2x} + \sqrt{e^{4x} - 1}) + C$$

$$\int \frac{e^{-2x} dx}{\sqrt{1 - e^{-4x}}} = |u = e^{-2x},\, du = -2e^{-2x} dx| = -\frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = -\frac{1}{2} \arcsin(e^{-2x}) + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \sqrt{\operatorname{th} x}dx = \frac{1}{2}\left(\ln(e^{2x} + \sqrt{e^{4x} - 1}) + \arcsin(e^{-2x})\right) + C$$

■

Задача 49. (**Д2123**)

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x + 2\operatorname{ch} x}$$

□

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x + 2\operatorname{ch} x} = \int \frac{2dx}{e^x - e^{-x} + 2e^x + 2e^{-x}} = \int \frac{2e^x dx}{3e^{2x} + 1} = |t = e^x,\, dt = e^x dx| =$$
$$= \int \frac{2dt}{3t^2 + 1} = \frac{2}{3}\int \frac{dt}{t^2 + \frac{1}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(e^x\sqrt{3}\right) + C$$

Преобразуем, чтобы получить ответ:

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(e^x\sqrt{3}\right) + C = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(e^x\sqrt{3}\right) + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + C =$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}e^x - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \sqrt{3}e^x\frac{-1}{\sqrt{3}}}\right) + C = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{3e^x - 1}{\sqrt{3}(1 + e^x)}\right) + C = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{1 + 2\operatorname{th}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right) + C$$

Другой способ, через замену $t = \operatorname{th}\frac{x}{2}$, смотри в семинаре 6. ■

Задача 50. (**Д2123.1**)

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x - 4\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x + 9\operatorname{ch}^2 x}$$

□

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x - 4\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x + 9\operatorname{ch}^2 x} = \int \frac{dx}{(\operatorname{sh} x - 2\operatorname{ch} x)^2 + 5\operatorname{ch}^2 x} = \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x((\operatorname{th} x - 2)^2 + 5)} =$$
$$= |t = \operatorname{th} x,\, dt = \operatorname{ch}^{-2} x dx| = \int \frac{dt}{(t-2)^2 + 5} = \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg}\left(\frac{t-2}{\sqrt{5}}\right) + C = \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{th} x - 2}{\sqrt{5}}\right) + C$$

■

Задача 51. (**Д2123.2**)

$$\int \frac{dx}{0.1 + \operatorname{ch} x}$$

□ Сделаем замену $t = \operatorname{th}\frac{x}{2}$, тогда:

$$\operatorname{sh} x = \frac{2t}{1 - t^2},\, \operatorname{ch} x = \frac{1 + t^2}{1 - t^2},\, dx = \frac{2dt}{1 - t^2}$$

$$\int \frac{dx}{0.1 + \operatorname{ch} x} = \int \frac{2dt}{(1 - t^2)0.1 + 1 + t^2} = 2\int \frac{dt}{0.9t^2 + 1.1} = \frac{2}{0.9}\int \frac{dt}{t^2 + \frac{1.1}{0.9}} =$$
$$= \frac{20}{9}\cdot\frac{3}{\sqrt{11}} \operatorname{arctg}\left(\frac{3t}{\sqrt{11}}\right) + C = \frac{20}{3\sqrt{11}} \operatorname{arctg}\left(\frac{3\operatorname{th}\frac{x}{2}}{\sqrt{11}}\right) + C$$

■

Задача 52. (**Д2123.3**)

$$\int \frac{\operatorname{ch} x dx}{3\operatorname{sh} x - 4\operatorname{ch} x}$$

□ По аналогии с задачей 2042, пусть $f(x) = a\operatorname{sh} x + b\operatorname{ch} x \Rightarrow f'(x) = a\operatorname{ch} x + b\operatorname{sh} x$.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - b^2$$

Если $a^2 \neq b^2$, то $f(x)$ и $f'(x)$ будут линейно независимы. Тогда:

$$\int \frac{a_1\operatorname{sh} x + b_1\operatorname{ch} x}{a\operatorname{sh} x + b\operatorname{ch} x}dx = \int \frac{pf(x) + qf'(x)}{f(x)}dx = px + q\ln|f(x)| + C$$

В нашем случае, $a = 3$, $b = -4$, $a_1 = 0$, $b_1 = 1$, тогда:

$$\begin{cases} pa + qb = a_1 \\ pb + qa = b_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p3 - 4q = 0 \\ -4p + 3q = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = \frac{4}{3}q \\ p = q - \frac{1}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = -\frac{4}{7} \\ q = -\frac{3}{7} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{\operatorname{ch} x dx}{3\operatorname{sh} x - 4\operatorname{ch} x} = -\frac{4x}{7} - \frac{3}{7}\ln|3\operatorname{sh} x - 4\operatorname{ch} x| + C$$

■

Задача 53. (**Д2124**)

$$\int \operatorname{sh} ax \sin(bx)dx$$

□

$$\int \operatorname{sh} ax \sin(bx)dx = \frac{1}{2}\int e^{ax}\sin(bx)dx - \frac{1}{2}\int e^{-ax}\sin(bx)dx$$

Воспользуемся результатом ДЗ2:

$$\int e^{ax}\sin(bx)dx = \frac{a}{a^2+b^2}e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a^2+b^2}e^{ax}\cos(bx) + C$$

Тогда:

$$\frac{1}{2}\int e^{ax}\sin(bx)dx - \frac{1}{2}\int e^{-ax}\sin(bx)dx =$$

$$= \frac{a}{2(a^2+b^2)}e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{2(a^2+b^2)}e^{ax}\cos(bx) - \frac{-a}{2(a^2+b^2)}e^{-ax}\sin(bx) + \frac{b}{2(a^2+b^2)}e^{-ax}\cos(bx) + C =$$

$$= \frac{a\operatorname{ch} ax}{a^2+b^2}\sin(bx) - \frac{b\operatorname{sh} ax}{a^2+b^2}\cos(bx) + C$$

■

Задача 54. (**Д2125**)

$$\int \operatorname{sh} ax \cos(bx)dx$$

□ По аналогии с предыдущей задачей:

$$\int \operatorname{sh} ax \cos(bx)dx = \frac{1}{2}\int e^{ax}\cos(bx)dx - \frac{1}{2}\int e^{-ax}\cos(bx)dx$$

Воспользуемся результатом семинара 2:

$$\int e^{ax}\cos(bx)dx = \frac{a}{a^2+b^2}e^{ax}\cos(bx) + \frac{b}{a^2+b^2}e^{ax}\sin(bx) + C$$

Тогда:

$$\frac{1}{2}\int e^{ax}\cos(bx)dx - \frac{1}{2}\int e^{-ax}\cos(bx)dx =$$

$$= \frac{a}{2(a^2+b^2)}e^{ax}\cos(bx) + \frac{b}{2(a^2+b^2)}e^{ax}\sin(bx) - \frac{-a}{2(a^2+b^2)}e^{-ax}\cos(bx) - \frac{b}{2(a^2+b^2)}e^{-ax}\sin(bx) + C =$$

$$= \frac{a\operatorname{ch} ax}{a^2+b^2}\cos(bx) + \frac{b\operatorname{sh} ax}{a^2+b^2}\sin(bx) + C$$

■

Задача 55. (**Д2126**)

$$\int \frac{dx}{x^6(1+x^2)}$$

□

$$\int \frac{dx}{x^6(1+x^2)} = \int \frac{(x^2+1)-x^2}{x^6(1+x^2)}dx = \int \frac{dx}{x^6} - \int \frac{dx}{x^4(1+x^2)} = -\frac{1}{5x^5} - \int \frac{dx}{x^4} + \int \frac{x^2dx}{x^4(1+x^2)} =$$

$$= -\frac{1}{5x^5} + \frac{1}{3x^3} + \int \frac{dx}{x^2(1+x^2)} = -\frac{1}{5x^5} + \frac{1}{3x^3} + \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= -\frac{1}{5x^5} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{x} - \operatorname{arctg}(x) + C$$

■

Задача 56. (**Д2127**)

$$\int \frac{x^2dx}{(1-x^2)^3}$$

□

$$\int \frac{x^2dx}{(1-x^2)^3} = \int \frac{1-1+x^2}{(1-x^2)^3}dx = \int \frac{dx}{(1-x^2)^3} - \int \frac{dx}{(1-x^2)^2}$$

$$= -\frac{1}{5x^5} + \frac{1}{3x^3} + \int \frac{dx}{x^2(1+x^2)} = -\frac{1}{5x^5} + \frac{1}{3x^3} + \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= -\frac{1}{5x^5} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{x} - \operatorname{arctg}(x) + C$$

■

Задача 57. (**Д2128**)

$$\int \frac{dx}{1+x^4+x^8}$$

□

$$1+x^4+x^8 = x^8+2x^4+1-x^4 = (x^4+1)^2-x^4 = (x^4+1-x^2)(x^4+x^2+1)$$
$$x^4+x^2+1 = x^4+2x^2+1-x^2 = (x^2+1)^2-x^2 = (x^2-x+1)(x^2+x+1)$$
$$x^4-x^2+1 = x^4+2x^2+1-3x^2 = (x^2+1)^2-3x^2 = (x^2-\sqrt{3}x+1)(x^2+\sqrt{3}x+1)$$
$$\frac{1}{(x^4+1-x^2)(x^4+x^2+1)} = \frac{Ax^2+B}{x^4+1-x^2}+\frac{Cx^2+D}{x^4+1+x^2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1\colon B+D=1,\ x^2\colon A+C-D+B=0,\ x^4\colon A+B-C+D=0,\ x^6\colon A+C=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow B=D=\frac{1}{2},\ A=-C=-\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{1+x^4+x^8} = -\frac{1}{2}\frac{x^2-1}{x^4+1-x^2}+\frac{1}{2}\frac{x^2+1}{x^4+1+x^2}$$
$$\frac{x^2-1}{x^4+1-x^2} = \frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{3}x+1}+\frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{3}x+1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1\colon B+D=-1,\ x\colon A+C-\sqrt{3}B+\sqrt{3}D=0,\ x^2\colon -\sqrt{3}A+B+\sqrt{3}C+D=1,\ x^3\colon A+C=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow B=D=-\frac{1}{2},\ A=-C=-\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{x^2-1}{x^4+1-x^2} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{2}}{x^2+\sqrt{3}x+1}+\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{2}}{x^2-\sqrt{3}x+1}$$
$$\frac{x^2+1}{x^4+1+x^2} = \frac{Ax+B}{x^2+x+1}+\frac{Cx+D}{x^2-x+1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1\colon B+D=1,\ x\colon A+C-B+D=0,\ x^2\colon -A+B+C+D=1,\ x^3\colon A+C=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow B=D=\frac{1}{2},\ A=-C=C=0 \Rightarrow \frac{x^2+1}{x^4+1+x^2} = \frac{\frac{1}{2}}{x^2+x+1}+\frac{\frac{1}{2}}{x^2-x+1}$$
$$\int \frac{dx}{1+x^4+x^8} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2+x+1}+\frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2-x+1}-\frac{1}{4\sqrt{3}}\int \frac{2x+\sqrt{3}}{x^2+\sqrt{3}x+1}dx+\frac{1}{4\sqrt{3}}\int \frac{2x-\sqrt{3}}{x^2-\sqrt{3}x+1}dx$$
$$\frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C$$
$$\frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2-x+1} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+C \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2+x+1}+\frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2-x+1} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{4x}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{1-\frac{4x^2-1}{3}}\right)+C =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{4x}{\sqrt{3}}\cdot\frac{3}{4(1-x^2)}\right)+C = -\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1-x^2}{\sqrt{3}x}\right)+C$$
$$\frac{1}{4\sqrt{3}}\int \frac{2x+\sqrt{3}}{x^2+\sqrt{3}x+1}dx = \frac{1}{4\sqrt{3}}\int \frac{d(x^2+\sqrt{3}x+1)}{x^2+\sqrt{3}x+1} = \frac{1}{4\sqrt{3}}\ln|x^2+\sqrt{3}x+1|+C$$
$$\frac{1}{4\sqrt{3}}\int \frac{2x-\sqrt{3}}{x^2-\sqrt{3}x+1}dx = \frac{1}{4\sqrt{3}}\int \frac{d(x^2-\sqrt{3}x+1)}{x^2-\sqrt{3}x+1} = \frac{1}{4\sqrt{3}}\ln|x^2-\sqrt{3}x+1|+C$$

Поскольку корней нет, то можно опустить модули. Тогда:

$$\int \frac{dx}{1+x^4+x^8} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1-x^2}{\sqrt{3}x}\right)+\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{3}+1}{x^2-x\sqrt{3}+1}+C$$

■

Задача 58. (**Д2129**)
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$$

□

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = \left| t=\sqrt[6]{x},\ x>0,\ t>0,\ dt=\frac{dx}{6\sqrt[6]{x^5}} \right| = \int \frac{6t^5 dt}{t^3+t^2}$$
$$6t^5 \vdots\, t^3+t^2 \Rightarrow 6t^5-6t^2(t^3+t^2) = -6t^4-(-6t)(t^3+t^2) = 6t^3-6(t^3+t^2) = -6t^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{6t^5}{t^3+t^2} = 6\left(t^2-t+1-\frac{t^2}{t^2(t+1)}\right) = 6\left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int \frac{6t^5dt}{t^3+t^2} = 2t^3-3t^2+6t-6\int\frac{dt}{1+t} = 2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln(1+\sqrt[6]{x})+C$$

■

Задача 59. (**Д2137**)
$$\int \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}dx$$

□

$$\int \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{1+2\sqrt{1-x^2}+1-x^2}{1-1+x^2}dx = \int \frac{2}{x^2}dx - x + \int \frac{2\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx =$$
$$= -x-\frac{2}{x}-\frac{2\sqrt{1-x^2}}{x}+\int\frac{-2x}{x\sqrt{1-x^2}}dx = -x-\frac{2}{x}-\frac{2\sqrt{1-x^2}}{x}-2\arcsin x + C$$

При $|x|<1$. ■

Задача 60. (**Д2140**)
$$\int (2x+3)\arccos(2x-3)dx$$

□

$$\int (2x+3)\arccos(2x-3)dx = (x^2+3x)\arccos(2x-3) + \int \frac{x^2+3x}{\sqrt{1-(2x-3)^2}}dx$$
$$\int \frac{x^2+3x}{\sqrt{1-(2x-3)^2}}dx = \int \frac{x^2+3x}{\sqrt{1-4x^2+12x-9}}dx = \int \frac{x^2+3x}{\sqrt{4(3x-x^2-2)}}dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{x^2+6x-3x+2-2}{\sqrt{-x^2+3x-2}}dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{-x^2+3x-2}dx + \int \frac{3x+2}{\sqrt{-x^2+3x-2}}dx$$

■

Задача 61. (**Д2141**)
$$\int x\ln(4+x^4)dx$$

$\square$

$$\int x\ln(4+x^4)dx = \frac{1}{2}x^2\ln(4+x^4) - 2\int\frac{x^5}{4+x^4}dx$$

$$x^5 \vdots 4+x^4 \Rightarrow x^5 - x^5 - 4x = 4x \Rightarrow \frac{x^5}{4+x^4} = -x + \frac{4x}{4+x^4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int\frac{x^5}{4+x^4}dx = -\frac{x^2}{2} + 2\int\frac{d(x^2)}{x^4+4} = -\frac{x^2}{2} + \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{2}\right) + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int x\ln(4+x^4)dx = \frac{1}{2}x^2\ln(4+x^4) - x^2 + 2\operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{2}\right) + C$$

$\blacksquare$

Задача 62. (**Д2142**)

$$\int\frac{\arcsin x}{x^2}\cdot\frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$\square$

$$\int\frac{\arcsin x}{x^2}\cdot\frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int$$

$\blacksquare$

Задача 63. (**Д2158**)

$$\int\sqrt{1-x^2}\arcsin x dx$$

$\square$

$$\int\sqrt{1-x^2}\arcsin x dx = x\sqrt{1-x^2}\arcsin x - \int x\left(1 - \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx =$$

$$= x\sqrt{1-x^2}\arcsin x - \frac{x^2}{2} - \int\sqrt{1-x^2}\arcsin x dx + \int\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx =$$

$$= x\sqrt{1-x^2}\arcsin x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\arcsin^2 x - \int\sqrt{1-x^2}\arcsin x dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int\sqrt{1-x^2}\arcsin x dx = \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}\arcsin x - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}\arcsin^2 x + C$$

$\blacksquare$

Задача 64. (**Д2161**)

$$\int\frac{\arcsin(e^x)}{e^x}dx$$

$\square$

$$\int\frac{\arcsin(e^x)}{e^x}dx = -e^{-x}\arcsin(e^x) + \int\frac{e^x dx}{e^x\sqrt{1-e^{2x}}}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-e^{2x}}} = |t = e^x,\ dt = e^x dx| = \int\frac{dt}{t\sqrt{1-t^2}} = \int\frac{dt}{t^2\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}} =$$

$$= \left|u = \tfrac{1}{t}, du = -\tfrac{1}{t^2}dt\right| = -\int \frac{du}{\sqrt{u^2-1}} = -\ln\left|\frac{1}{t} + \sqrt{\frac{1}{t^2}-1}\right| + C = -\ln(e^{-x} + \sqrt{e^{-2x}-1}) + C$$

$$\int \frac{\arcsin(e^x)}{e^x}dx = -e^{-x}\arcsin(e^x) - \ln\left(e^{-x}\cdot(1+\sqrt{1-e^{2x}}\right) + C = x - e^{-x}\arcsin(e^x) - \ln(1+\sqrt{1-e^{2x}}) + C$$

■

Задача 65. (**Д2165**)

$$\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}e^x dx$$

□

$$\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}e^x dx = \int \frac{1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}e^x dx = \int \frac{e^x}{2\cos^2\frac{x}{2}} + e^x \operatorname{tg}\tfrac{x}{2}dx =$$

$$= e^x \operatorname{tg}\tfrac{x}{2} - \int e^x \operatorname{tg}\tfrac{x}{2}dx + \int e^x \operatorname{tg}\tfrac{x}{2}dx = e^x \operatorname{tg}\tfrac{x}{2} + C$$

■