ДЗ: 1966 (замена второго типа), 1996, 2011 а) и посчитать $\int \sin^6 x dx$, 2025 (тангенс половинного угла), 2029 (обычный тангенс), 2043, 2046.

Подстановки Эйлера

Задача 1. (**Д1966**)

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}$$

$\square$ См. в семинаре 6. $\blacksquare$

Интегрирование тригонометрических функций

Использование формул понижения степени

Задача 2. (**Д1996**)

$$\int \sin^5 x \cos^5 x dx$$

$\square$

$$\int \sin^5 x \cos^5 x dx = \int \sin^5 x \cos^4 x d(\sin x) = \int t^5 (1 - t^2)^2 dt = \frac{t^6}{6} - 2\frac{t^8}{8} + \frac{t^{10}}{10} + C =$$
$$= \sin^6 x \cdot \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4} \sin^2 x + \frac{1}{10} \sin^4 x \right) + C$$

Либо можно решить через формулы понижения:

$$2 \sin x \cos x = \sin 2x \Rightarrow \int \sin^5 x \cos^5 x dx = \frac{1}{2^5} \int \sin^5 2x dx = \frac{1}{32} \int (1 - \cos^2 2x)^2 \sin 2x dx =$$
$$= -\frac{1}{64} \int (1 - \cos^2 2x)^2 d(\cos 2x) = -\frac{1}{64} \left(\int dy - 2 \int y^2 dy + \int y^4 dy \right) =$$
$$= -\frac{\cos 2x}{64} + \frac{\cos^3 2x}{96} - \frac{\cos^5 2x}{320} + C$$

$\blacksquare$

Интегрирование по частям

Задача 3. (**Д2011 а)**) Вывести формулу понижения для интеграла:

$$\mathrm{I}_n = \int \sin^n x dx$$

и с помощью формулы вычислить:

$$\int \sin^6 x dx$$

□

$$\int \sin^n x dx = -\int \sin^{n-1} x d(\cos x) = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\cdot \int \sin^{n-2} x \cos^2 x dx =$$

$$= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)(\mathrm{I}_{n-2} - \mathrm{I}_n) \Rightarrow n\mathrm{I}_n = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\mathrm{I}_{n-2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{I}_n = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x \cos x + \frac{(n-1)}{n}\mathrm{I}_{n-2}$$

Посчитаем конкретный пример при $n = 6$:

$$\mathrm{I}_6 = -\frac{1}{6}\sin^5 x \cos x + \frac{5}{6}\cdot \left(-\frac{1}{4}\sin^3 x \cos x + \frac{3}{4}\cdot \int \sin^2 x dx\right)$$

$$\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}\int (1 - \cos 2x) dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

■

Интегрирование рациональных тригонометрических функций

Задача 4. (**Д2025**)

$$\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5}$$

□ Ни один из описанных случаев нам не подходит, поэтому воспользуемся заменой тангенса половинного угла:

$$t = \operatorname{tg}\tfrac{x}{2} \Rightarrow \sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Это верно, поскольку:

$$\sin x = 2\sin\tfrac{x}{2}\cos\tfrac{x}{2} = 2\operatorname{tg}\tfrac{x}{2}\cos^2\tfrac{x}{2} = 2\operatorname{tg}\tfrac{x}{2}\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\tfrac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = 2\cos^2\tfrac{x}{2} - 1 = 2\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\tfrac{x}{2}} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$t = \operatorname{tg}\tfrac{x}{2} \Rightarrow x = 2\operatorname{arctg} t \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Таким образом:

$$\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5} = \int \frac{2dt}{1+t^2}\cdot\frac{1}{\frac{4t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} = \int \frac{2dt}{4t - 1 + t^2 + 5 + 5t^2} =$$

$$= \int \frac{2dt}{6t^2 + 4t + 4} = \int \frac{dt}{3t^2 + 2t + 2} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^2 + \frac{2}{3}t + \frac{1}{9} + \frac{5}{9}} = \frac{1}{3}\int \frac{d\left(t + \frac{1}{3}\right)}{\left(t + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{5}{9}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\left(\frac{3t+1}{\sqrt{5}}\right) + C = \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\left(\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}}\right) + C$$

■

Задача 5. (**Д2029**)

$$\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x} dx$$

□ Здесь подходят замены второго типа: $t = \operatorname{tg} x$, тогда:

$$x = \operatorname{arctg} t,\ dx = \frac{1}{1+t^2}dt,\ \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \Rightarrow \int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}dx = \int dx - \int \frac{dx}{1+\sin^2 x} =$$

$$= x - \int \frac{dt}{(1+t^2)\cdot\left(1+\frac{t^2}{1+t^2}\right)} = x - \int \frac{dt}{1+2t^2} = x - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+\frac{1}{2}} = x - \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot \operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}t\right) + C =$$

$$= x - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg} x\right) + C$$

■

Задача 6. (**Д2043**)

$$\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + 2\cos x} dx$$

□ Применим формулу из задачи 2042:

$$\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{a \sin x + b\cos x}dx = \int \frac{pf(x)+qf'(x)}{f(x)}dx = px + q\ln|f(x)| + C$$

$$f(x) = 1\cdot\sin x + 2\cdot\cos x,\ f'(x) = 1\cdot\cos x - 2\cdot\sin x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p\sin x + 2p\cos x + q\cos x - 2q\sin x = \sin x - \cos x \Rightarrow p - 2q = 1,\ 2p+q = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p = -\frac{1}{5},\ q = -\frac{3}{5} \Rightarrow \int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + 2\cos x}dx = -\frac{x}{5} - \frac{3}{5}\ln|\sin x + 2\cos x| + C$$

■

Задача 7. (**Д2046**) Доказать, что:

$$\int \frac{a_1 \sin x + b_1\cos x + c_1}{a\sin x + b\cos x + c}dx = Ax + B\ln|a\sin x + b\cos x + c| + C\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x + c}$$

где A, B, C - некоторые постоянные коэффициенты

□ По аналогии с задачей 2042, введём обозначения:

$$f(x) = a\sin x + b\cos x + c,\ f'(x) = -b\sin x + a\cos x$$

Векторы $f(x), f'(x)$ и $1 \in \mathbb{R}$ - линейно независимы и образуют базис:

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a^2 + 0 + 0 - 0 - (-b)b - 0 = a^2 + b^2 \Rightarrow a \neq 0 \vee b \neq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 > 0$$

Тогда, вектор написанный сверху можно выразить через $f(x), f'(x)$ и 1 с некоторыми коэффициентами:

$$\int \frac{a_1\sin x + b_1\cos x + c_1}{a\sin x + b\cos x + c}dx = \int \frac{A\cdot f(x) + B\cdot f'(x) + C\cdot 1}{f(x)}dx = A\int dx + B\int \frac{d(f(x))}{f(x)} + C\int \frac{dx}{f(x)} =$$

$$= Ax + B\ln|f(x)| + C\int dx f(x) = Ax + B\ln|a\sin x + b\cos x + c| + C\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x + c}$$

■