Определенный интеграл

Начнем с интеграла Римана. Пусть есть отрезок $[a, b]$ и какая-то функция $f(x)$ (пусть пока непрерывная). Мы хотим определить понятие площади подграфика функции.

Опр: 1. Подграфик функции - фигура заключенная между графиком функции и осью Ox. Если график выше оси Ox - то будем считать её со знаком $+$, если ниже, то со знаком $-$.

Подход Римана: порежем отрезок $[a, b]$ на части другими отрезками - зададим набор точек:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < b = x_n$$

То есть, мы задали разбинеие отрезка и хотим приблизить площадь подграфика прямоугольниками и задали их горизонтальные стороны, но пока не хватает высоты. Возникает вопрос на какой высоте её проводить, чтобы это было разумно?

Разумно было бы выбрать какую-то точку ξ_j на отрезках $[x_{j-1}, x_j]$ и высоту планки задать значением функции в этой точке. Разбиение обычно обозначают как $\mathbb{T}$, набор отмеченных точек как $\{\xi_j\}$.

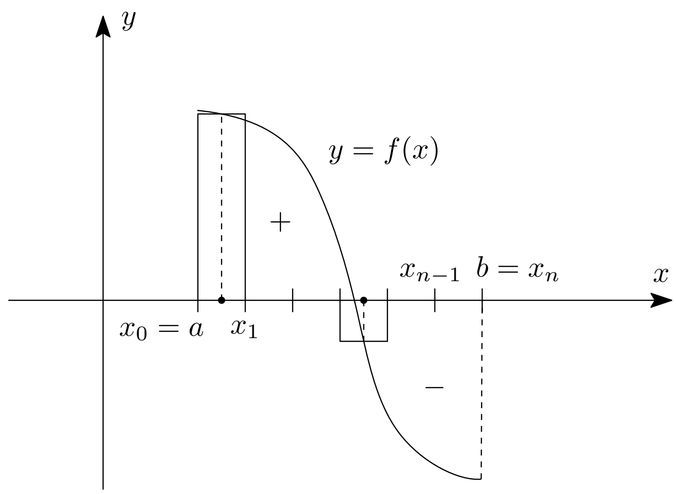

Рис. 1: Поиск площади подграфика функции $f(x)$.

Таким образом, у нас получается некая “подмена” площади в виде суммы площадей прямоугольников, которые образуются на графике функции:

$$\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)\cdot(x_j - x_{j-1})$$

Опр: 2. База $\mathcal{B}$ это набор множеств таких, что:

1) $B \in \mathcal{B} \Rightarrow B \neq \varnothing$;

2) $B_1, B_2 \in \mathcal{B} \Rightarrow B_1 \cap B_2 \neq \varnothing$, $\exists\, B_3 \colon B_3 \subset B_1 \cap B_2$;

На лекциях проходили, что предел по базе обладает теми привичными свойствами, которые обсуждали для пределов последовательностей и функций.

Мы задаем базу на разбиениях $\mathbb{T}$ и вводим понятие $\lambda(\mathbb{T})$ - диаметр $\mathbb{T}$:

$$\lambda(\mathbb{T}) = \max_j |x_j - x_{j-1}|$$

Тогда у нас появляются элементы базы:

$$B_\varepsilon = \{\mathbb{T} \colon \lambda(\mathbb{T}) < \varepsilon\}$$

Понятно, что можно придумать какое-то разбиение, которое будет меньше наперед заданного $\varepsilon > 0$. Понятно, что с уменьшением ε множество B_ε тоже уменьшается, но остается непустым $\Rightarrow$ множество таких B_ε является базой. Следовательно, можно рассматривать предел по базе:

$$\lim_{\lambda(\mathbb{T})\to 0} \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) = \mathrm{I}$$

Бросается в глаза то, что накладывается ограничение на ξ_j: требуется $\xi_j \in [x_j - x_{j-1}] = \Delta_j$. При этом эти ξ_j не фигурируют в определениях для B_ε и для I. Оказывается, не для всех функций мы можем посчитать такой интеграл. Если мы уже выбрали разбиение $\mathbb{T}$, какова свобода для интегральной суммы? В каких пределах она может меняться?

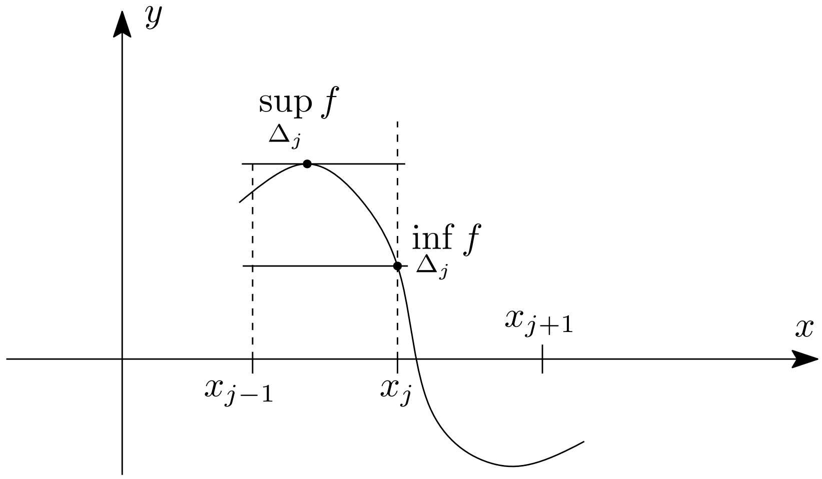

Рис. 2: Верхняя и нижняя сумма Дарбу для $f(x)$.

На отрезке Δ_j планку, которую мы можем провести колеблется от $\inf\limits_{\Delta_j} f(x)$ до $\sup\limits_{\Delta_j} f(x)$. Таким образом, интегральная сумма колеблется между нижней и верхней суммой Дарбу:

Опр: 3. Нижняя сумма Дарбу:

$$s(f, \mathbb{T}) = \sum_{j=1}^{n} \inf_{\Delta_j} f \cdot \Delta_j$$

Опр: 4. Верхняя сумма Дарбу:

$$S(f, \mathbb{T}) = \sum_{j=1}^{n} \sup_{\Delta_j} f \cdot \Delta_j$$

Всегда выполняется неравенство:

$$S(f, \mathbb{T}) \geq \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) \geq s(f, \mathbb{T})$$

Если мы будем брать разные разбиения $\mathbb{T}$ и будем отмечать на действительной прямой значения верхней и нижней суммы Дарбу, то они будут образовывать множества, которые отделены друг от друга:

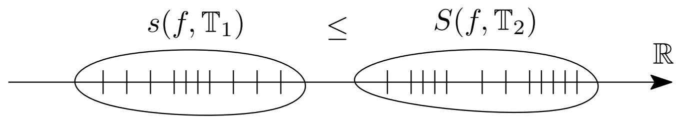

Рис. 3: Отделение множеств верхних и нижних сумм Дарбу для разных разбиений $\mathbb{T}_1$ и $\mathbb{T}_2$.

Оказывается, что функцию мы можем проинтегрировать тогда и только тогда, когда такие множества соприкасаются по точке, которая и будет являться искомым интегралом:

$$\inf_{\mathbb{T}} S(f, \mathbb{T}) = \sup_{\mathbb{T}} s(f, \mathbb{T}) = \int_a^b f(x)dx$$

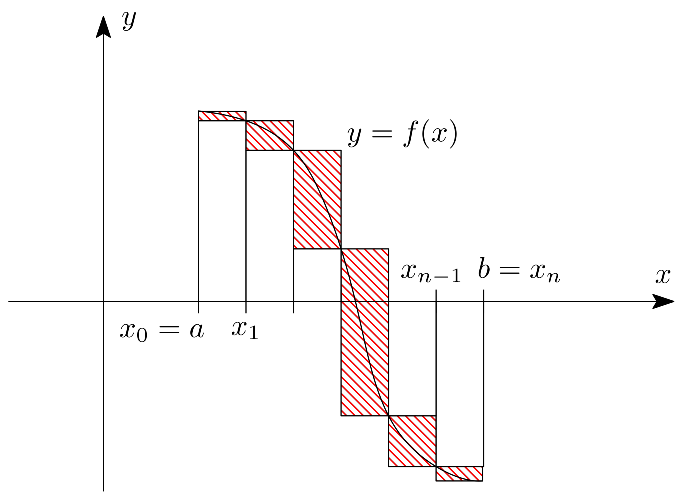

Рис. 4: Зазор между верхними и нижними суммами Дарбу.

Опр: 5. Колебания функции на отрезке разбиения Δ_j:

$$\omega_j = \sup_{\Delta_j} f - \inf_{\Delta_j} f$$

Опр: 6. Омега-сумма это сумма колебаний функций, умноженных на длину отрезка:

$$\Omega(\mathbb{T}) = \sum_{j=1}^{n} \omega_j(\mathbb{T}) \cdot \Delta_j = S(\mathbb{T}) - s(\mathbb{T})$$

Критерий интегрируемости Дарбу:

$$\exists \lim_{\lambda(\mathbb{T}) \to 0} \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) = \mathrm{I} = \int_a^b f(x)dx \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \mathbb{T} \colon \Omega(\mathbb{T}) < \varepsilon$$

В частности отсюда следует, что интегрируемыми по Риману являются непрерывные функции, ограниченные функции у которых конечно количество точек разрыва или монотонные функции. Если же функций неограничена, то она не интегрируема по Риману (если функция неограничена $\Rightarrow$ неограничена на каком-то отрезке $\Rightarrow$ не сможем покрыть прямоугольником конечной площади этот график $\Rightarrow$ омега-сумма будет больше ε.)

Рассмотрим ограниченную функцию у которой очень много точек разрыва:

Задача 1. (**Д2197**) Рассмотрим функцию Дирихле:

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

□ Как бы мы ни резали отрезок $[a, b]$ на части у нас в любом маленьком отрезке есть как рациональная точка, так и иррациональная точка, поэтому:

$$\forall j = \overline{1, n}, \sup_{\Delta_j} \chi = 1, \inf_{\Delta_j} \chi = 0 \Rightarrow \Omega(\mathbb{T}) = (b-a) \cdot 1 > 0$$

Таким образом, эта функция не интегрируема. ■

Задача 2. (**Д2182 а)**) Написать верхнюю и нижнюю интегральные суммы для $f(x) = x^3$ на отрезке $[-2, 3]$ с разбиением на n равных частей.

□ Берем отрезок $[-2, 3]$, выбираем некоторое натуральное n и делим этот отрезок на n равных частей, каждый длины: $\frac{3-(-2)}{n} = \frac{5}{n}$, отмеченные точки выглядят следующим образом:

$$x_0 = -2, x_1 = -2 + \frac{5}{n}, \ldots, x_j = -2 + \frac{5}{n} j, \ldots, x_n = 3 \Rightarrow \lambda(\mathbb{T}) = \frac{5}{n}$$

Посчитаем суммы Дарбу:

$$S(f, \mathbb{T}) = f(x_1) \cdot \frac{5}{n} + f(x_2) \cdot \frac{5}{n} + \ldots + f(x_n) \cdot \frac{5}{n}$$

$$s(f, \mathbb{T}) = f(x_0) \cdot \frac{5}{n} + f(x_1) \cdot \frac{5}{n} + \ldots + f(x_{n-1}) \cdot \frac{5}{n}$$

$$\Omega(\mathbb{T}) = S(f, \mathbb{T}) - s(f, \mathbb{T}) = (f(x_n) - f(x_0)) \cdot \frac{5}{n} = (f(b) - f(a)) \cdot \frac{5}{n} \to 0$$

Таким образом, верхняя и нижняя суммы Дарбу смыкаются друг с другом $\Rightarrow$ для любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать верхнюю/нижнюю сумму, которые будут отличатсья меньше, чем на $\varepsilon \Rightarrow$ функция интегрируема. Мы даже сможем посчитать интеграл, поскольку к нему будет стремиться как нижняя сумма Дарбу, так и верхняя (в данном случае они будут также интегральными суммами). Рассмотрим к примеру нижнюю сумму:

$$s(f, \mathbb{T}) = \frac{5}{n} \cdot \left((-2)^3 + \left(-2 + \frac{5}{n}\right)^3 + \ldots + \left(-2 + \frac{5(n-1)}{n}\right)^3 \right) =$$

$$= \frac{5}{n} \cdot \left((-2)^3 \cdot n + 3 \cdot (-2)^2 \cdot \left(\frac{5}{n} + 2 \cdot \frac{5}{n} + \ldots + (n-1) \cdot \frac{5}{n} \right) + 3 \cdot (-2) \cdot \left(\left(\frac{5}{n}\right)^2 + \ldots + \left((n-1) \cdot \frac{5}{n}\right)^2 \right) + \ldots \right)$$

где справа - сумма кубов. Поскольку мы знаем:

$$1^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}, \, 1^3 + \ldots + k^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2$$

то мы можем в явном виде посчитать интеграл, воспользовавшись формулами выше и найдя отношение двух многочленов $\Rightarrow$ можно будет найти его предел. ■

Задача 3. (**Д2193.1**) $f(x)$ - монотонна на $[0,1]$, тогда:

$$\int\limits_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

☐ Пусть $f(x)$ - неубывающая. Поделим отрезок $[0,1]$ на n равных частей.

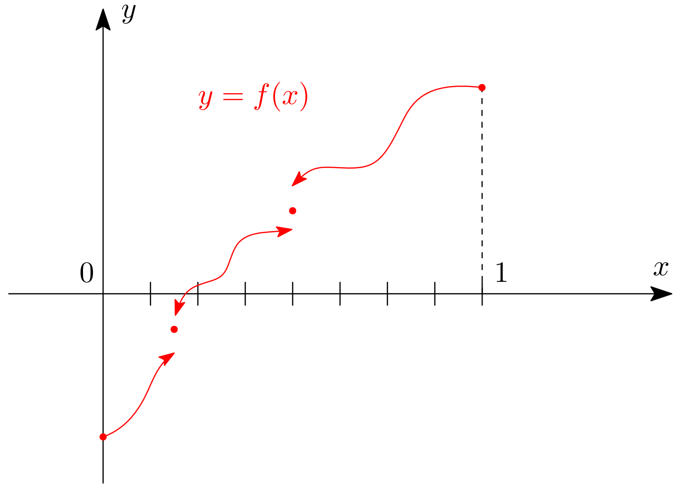

Рис. 5: Монотонная неубывающая функция $f(x)$ на $[0,1]$.

То, что мы вычитаем из функции на самом деле это верхняя сумма Дарбу:

$$S(f,\mathbb{T}) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Это так, поскольку супремум монотонно неубывающей функции совпадает со значением в крайней правой точке на отрезке. Построим зазор между верхней и нижней суммой Дарбу.

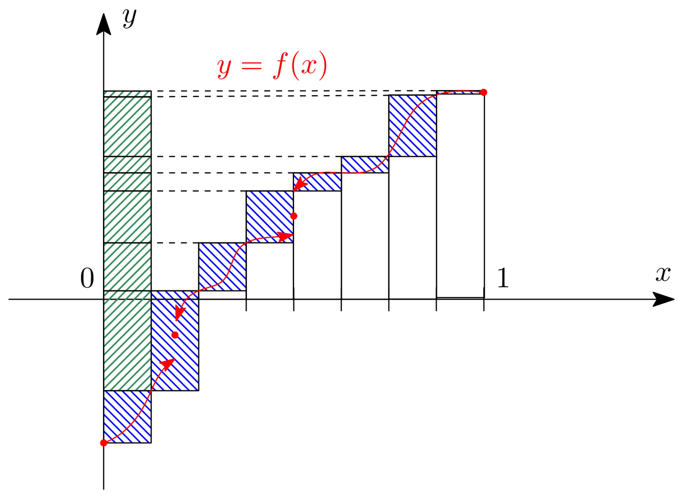

Рис. 6: Суммы Дарбу для $f(x)$, разность между ними (зазор между суммами) и перенесенная разность.

Перенесем эти разности параллелльно в крайний левый прямоугольник. Все такие перенесенные части не будут пересекать друг друга (только по верхним и нижним краям). Площадь полученного прямоугольника будет равна:

$$S(f,\mathbb{T}) - s(f,\mathbb{T}) = (f(1) - f(0))\cdot\frac{1}{n}$$

Отсюда мы видим, что интеграл существует, поскольку нижняя и верхняя суммы сколь угодно близко приближаются друг к другу. Заметим, что поскольку $s(f,\mathbb{T}) \leq \sigma(f,\mathbb{T},\xi) \leq S(f,\mathbb{T})$, то:

$$|\mathrm{I} - S(f,\mathbb{T})| \leq S(f,\mathbb{T}) - s(f,\mathbb{T}) = (f(1) - f(0))\cdot\frac{1}{n}$$

$$0 \leq n\cdot|\mathrm{I} - S(f,\mathbb{T})| \leq f(1) - f(0) \Rightarrow \text{ограниченная} \Rightarrow |\mathrm{I} - S(f,\mathbb{T})| = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

■

Rm: 1. К примеру, если попросят посчитать интеграл от монотонной функции и мы посчитаем его с точностью до $0,01$, то мы смотрим насколько функция меняется: $f(1) - f(0)$ и подбираем n так, чтобы:

$$\frac{f(1) - f(0)}{n} \leq \frac{1}{100}$$

Формула Ньютона-Лейбница

Теорема 1. (**формула Ньютона-Лейбница**) Если $f(x)$ - непрерывна, то у неё есть первообразная такая, что:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \quad F'(x) \equiv f(x)$$

Можно немного ослабить условие, тогда будет существовать обобщенная первообразная, то есть существует конечное множество E такое, что $\forall x \in [a,b] \setminus E$ верно:

$$F'(x) \equiv f(x),\ F(x) \in C[a,b]$$

Пример когда формула не работает: у лестница Кантора $F'(x)$ существует всюду за исключением точек множества Кантора и производная $F'(x) = 0$, поскольку эта функция на любом интервале вне точек множества Кантора постоянная и растёт только в этих точках. $F'(x)$ существует всюда за исключением точек множества Кантора. Функция при этом будет непрерывной, но тем не менее:

$$\int\limits_0^1 0\,dx \neq 1 = F(1) - F(0) = 1 - 0$$

Задача 4. Проинтегрируем функцию из задачи **Д2182 а)**:

$$\int\limits_{-2}^{3} x^3 dx$$

□

$$\int_{-2}^{3} x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_{x=-2}^{3} = \frac{81-16}{4} = \frac{65}{4}$$

■

Отметим, что формула Ньютона-Лейбница не всегда нормально работает. Для этого рассмотрим следующую задачу.

Задача 5. (**Д2216 а)**)

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$$

□ Сначала рассмотрим неправильное решение:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_{x=-1}^{1} = 0$$

Это не так, потому что надо проверять условия формулы Ньютона-Лейбница. Помимо того, что у логарифма производная есть всюду за исключением точки 0, необходимо чтобы $F(x) \in C[-1,1]$, а она разрывна в 0 и как-то склеить её, доопределить, до непрерывной не получится. Более того, $\frac{1}{x}$ - не ограничена $\Rightarrow$ интеграла Римана не существует. ■

Задача 6. (**Д2216 б)**) Найти значение:

$$\int_{0}^{2\pi} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{2+\operatorname{tg}^2 x} dx$$

□ Сначала рассмотрим неправильное решение, мы либо можем пользоваться формулой замены переменных, либо можем угадать первообразную. Рассмотрим первообразную функции:

$$\int \frac{1}{a+t^2} = \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{a}}\right) + C \Rightarrow t = \operatorname{tg} x \Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right)\right)' = \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{2+\operatorname{tg}^2 x}$$

Сделаем подстановку:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right)\Bigg|_{x=0}^{2\pi} = 0 - 0 = 0$$

Смущает что подинтегральная функция - положительна, почему площадь подграфика положительной функции равна нулю? Например, $\frac{1}{\cos^2 x}$ определён не везде, тогда рассмотрим функцию в виде:

$$\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{2+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{2\cos^2 x + \sin^2 x} > 0$$

Полученная функция ограниченна и положительна, её производная будет совпадать с производной исходной функции и равна нулю. В чем подвох? Есть точки разрыва у $F(x)$. Рассмотрим их:

$$x \to \frac{\pi}{2}- \Rightarrow \operatorname{tg} x \to +\infty \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right) \to \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

$$x \to \frac{\pi}{2}+ \Rightarrow \operatorname{tg} x \to -\infty \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right) \to -\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

Поскольку арктангенс это π-периодическая функция, то аналогичная картина будет и для $\frac{3\pi}{2}$. Следовательно, функция не является непрерывной и формулу Ньютона-Лейбница к ней применить нельзя.

Но на интервале $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ мы можем прибавить $\frac{\pi}{\sqrt{2}} \Rightarrow$ это поднимет график функции арктангенса и склеит две точки $\Rightarrow$ предел слева и справа будут одинаковыми. Аналогично проделывая прибавление $\pi\sqrt{2}$ для второго интервала $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ мы также получим подъем функции и равенство пределов слева и справа. И таким образом, первообразная будет иметь вид:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right), & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right) + \dfrac{\pi}{\sqrt{2}}, & x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right) + \pi\sqrt{2}, & x \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right] \\ \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}, & x = \frac{\pi}{2} \\ \pi\sqrt{2}, & x = \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

таким образом, мы получили функцию, которая является обобщенной первообразной. Следовательно:

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{2 + \operatorname{tg}^2 x} dx = F(2\pi) - F(0) = \sqrt{2}\pi - 0 = \sqrt{2}\pi$$

■

ДЗ: 2182 б), 2189 с подсказкой, 2192* - необязательная и трудная, 2193.2 (картинкой решается легко), 2200, 2205, 2207, 2209, 2216 в).