Теорема о неявной функции

Замечания к теореме о неявной функции

Rm: 1. Пусть есть функция $F(x_1, \ldots, x_n, y)\colon \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_y \to \mathbb{R}$. Пусть для неё выполняются условия теоремы о неявной функции и $\exists\, y = f(x)$, тогда теорема утверждает следующее:

$$y = f(x) \Leftrightarrow F(x, y) = 0$$

где $f(x)$ непрерывно дифференцируема. Как находить производные функции $f(x)$?

Чтобы найти производную функции $f\colon \mathcal{U}(x_0) \to \mathcal{V}(y_0)$ рассмотрим следующее выражение:

$$\forall x \in \mathcal{U}(x_0),\ F(x, f(x)) = 0$$

это дифференцируемая функция как композиция двух дифференцируемых функций (одна по условию, другая по теореме). Вычислим частную производную у этого выражения:

$$0 = \frac{\partial}{\partial x_k} F(x, f(x)) = \frac{\partial F}{\partial x_k}(x, f(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$$

таким образом, мы можем выразить производную функции f по переменной x_k:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_k}(x, f(x))}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))}$$

Rm: 2. По теореме о неявной функции найдутся окрестности $\mathcal{U}(x_0)$, $\mathcal{V}(y_0)$ и непрерывно дифференцируемая функция $f\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ такие, что в окрестности $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ верно $y = f(x) \Leftrightarrow F(x, y) = 0$.

Предположим, что есть другая функция $f_1\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ такая, что $y = f_1(x) \Leftrightarrow F(x, y) = 0 \Rightarrow f_1(x) = f(x)$. Почему так? Пусть $x \in \mathcal{U}(x_0)$, рассмотрим $y = f(x) \Rightarrow F(x, y) = 0 \Rightarrow y = f_1(x) \Rightarrow f_1(x) = f(x)$. Важно отметить, что другая функция определена в тех же окрестностях, причем она может быть любой.

Теорема о неявной функции описывает множество $F = 0$. Пусть мы выбрали в нём точку (x_0, y_0) и мы утверждаем, что существует прямоугольник в котором это множество есть график функции, причем эта функция определена однозначно. Данное утверждение верно только локально, но не верно глобально. Это неправда что такая функция одна, если не требовать, чтобы y лежал в $\mathcal{V}(y_0)$.

Например, рассмотрим окружность: $x^2 + y^2 = 1$. На ней есть прямоугольник $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$, где уравнение равносильно $y = \sqrt{1 - x^2}$. Но если будем говорить только про $\mathcal{U}$, то таких функций может быть много.

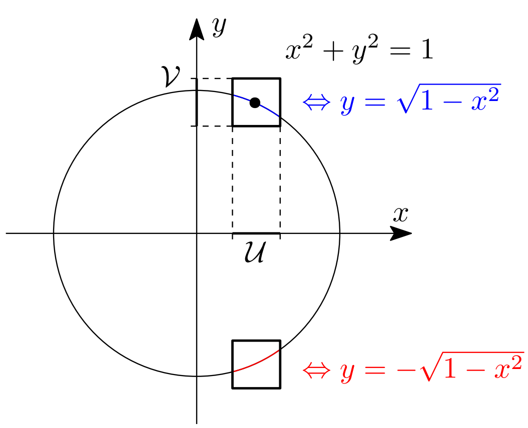

Рис. 1: Неоднозначность функции f на $\mathcal{U}$.

Производные высоких порядков

Опр: 1. Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Предположим, что в окрестности точки a существует $\frac{\partial f}{\partial x_k}$. Если функция $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$ имеет частную производную по x_m в точке a, то выражение

$$\frac{\partial}{\partial x_m}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)\right)\Big|_{x=a}$$

называют частной производной второго порядка по x_k, x_m в точке a и обозначают:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_k}(a)$$

Аналогичным образом определяются производные любого порядка:

$$\frac{\partial^l f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\ldots\partial x_{i_l}}(a) = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_2}}\left(\ldots\left(\frac{\partial f}{\partial x_{i_l}}(x)\right)\ldots\right)\right)\Big|_{x=a}$$

Опр: 2. Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Предположим, что в окрестности точки a существует $\frac{\partial^{m-1} f}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_{m-1}}}$. Если функция

$$x \mapsto \frac{\partial^{m-1} f}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_{m-1}}}(x)$$

имеет частную производную по x_{i_m} в точке a, то выражение

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_2}}\left(\ldots\left(\frac{\partial f}{\partial x_{i_m}}(x)\right)\ldots\right)\right)\Big|_{x=a}$$

называют частной производной m-го порядка по $x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}$ в точке a и обозначают:

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\ldots\partial x_{i_m}}(a)$$

Зависит ли производная от порядка переменных $i_1, \ldots, i_l$? Например, для функции $xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$. В общем случае - зависит, но чаще всего нет и на это есть две теоремы.

Теорема 1. (Юнг) Пусть $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ и в окрестности точки a существуют $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$. Если эти производные $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ как функции дифференцируемы в точке a, то:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)$$

Rm: 3. Частные производные дифференцируемы в точке $a \Rightarrow$ они непрерывны в точке $a \Rightarrow$ эта функция в точке a - дифференцируема (по теореме о достаточном условии дифференцируемости).

□ Удобно считать что $a = (0,0)$. Составим следующее выражение (второе разностное соотношение):

$$\Delta(t) = f(t,t) - f(t,0) - f(0,t) + f(0,0)$$

Оно имеет такой вид из следующего соображения:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \approx \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x+\Delta x) - \frac{\partial f}{\partial y}(x)}{\Delta x} \approx \frac{\big(f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y)\big) - \big(f(x, y+\Delta y) - f(x,y)\big)}{\Delta x \Delta y}$$

подставив в него значения $x = y = 0$, $\Delta x = \Delta y = t$ получим:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \approx \frac{f(t,t) - f(t,0) - f(0,t) + f(0,0)}{t^2} = \frac{\Delta(t)}{t^2}$$

Если заменить x и y местами в смешанной производной, то получим такое же выражение, поскольку оно симметрично по x и y (берем сначала разность по x, а затем по $y \Leftrightarrow$ сначала взять разность по y, а затем по x). Этому выражению приближенно равны смешанные производные, тогда отсюда должно бы следовать что они тоже симметричны по x и y.

Проблема состоит в том, чтобы показать что при стремлении Δx, Δy к нулю, в пределе мы действительно получим равенство вместо приближенного равенства. Это затрудняется тем, что каждая из разностей ведет себя по-разному в зависимости от значения Δy.

Перепишем выражение $\Delta(t)$ в другом виде и воспользуемся теоремой Лагранжа:

$$\Delta(t) = \Big(f(x,t) - f(x,0)\Big)\Big|_0^t = \varphi(x)\Big|_0^t = \varphi(t) - \varphi(0) = \varphi'(c)\cdot t = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(c,t) - \frac{\partial f}{\partial x}(c,0)\right)\cdot t,\ c \in (0,t)$$

Мы знаем, что $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ дифференцируем в $(0,0)$, по определению это означает:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(b_1,b_2) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0)\cdot b_1 + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0)\cdot b_2 + \overline{o}\Big(\sqrt{b_1^2 + b_2^2}\Big)$$

где $\overline{o}$ стремится к нулю, когда b_1, b_2 стремятся к нулю. Применим это разложение к $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ в точке (c,t):

$$\frac{\partial f}{\partial x}(c,t) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)\cdot c + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)\cdot t + \overline{o}\Big(\sqrt{c^2+t^2}\Big)$$

Аналогично применим разложение к $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ в точке $(c,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(c,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)\cdot c + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)\cdot 0 + \overline{o}\Big(\sqrt{c^2+0}\Big)$$

Подставим оба выражения в записанную ранее разность $\Delta(t)$:

$$\Delta(t) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)\cdot t + \overline{o}\Big(\sqrt{c^2+t^2}\Big) - \overline{o}\big(|c|\big)\right)\cdot t = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)\cdot t^2 + \overline{o}\Big(\sqrt{c^2+t^2}\Big)\cdot t - \overline{o}\big(|c|\cdot t\big)$$

Заметим, что поскольку $0 < c < t$, то из $t \to 0 \Rightarrow c \to 0$, также отметим, что $\lim\limits_{t\to 0} \overline{o}(1) = 0$. Тогда:

$$\frac{|c|\cdot|t|}{t^2} = \frac{|c|}{|t|} < 1 \Rightarrow 0 \le \overline{o}\left(\frac{|c|\cdot|t|}{t^2}\right) = \overline{o}\left(1\cdot\frac{|c|}{|t|}\right) = \overline{o}(1)\cdot\frac{|c|}{|t|} < \overline{o}(1) \to 0 \Rightarrow \lim_{t\to 0}\overline{o}\left(\frac{|c|\cdot|t|}{t^2}\right) = 0$$

$$\frac{\sqrt{c^2+t^2}\cdot|t|}{t^2} = \sqrt{1+\frac{c^2}{t^2}} < \sqrt{2} \Rightarrow 0 \le \overline{o}\left(\frac{\sqrt{c^2+t^2}\cdot|t|}{t^2}\right) < \overline{o}(1)\cdot\sqrt{2} \to 0 \Rightarrow \lim_{t\to 0}\overline{o}\left(\frac{\sqrt{c^2+t^2}\cdot|t|}{t^2}\right) = 0$$

Следовательно, рассмотрим, куда стремится отношение $\dfrac{\Delta(t)}{t^2}$ при $t \to 0$:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\Delta(t)}{t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) + \lim_{t\to 0}\overline{o}\left(\frac{\sqrt{c^2+t^2}\cdot|t|}{t^2}\right) - \lim_{t\to 0}\overline{o}\left(\frac{|c|\cdot|t|}{t^2}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$$

Аналогичным образом, поменяв местами x и y, проделываем те же шаги, выражение $\Delta(t)$ от этого не поменяется и следовательно мы получим:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\Delta(t)}{t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$$

Вспоминая что предел у нас единственный, мы приходим к выводу:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\Delta(t)}{t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$$

■

Теорема 2. (Шварц) Пусть $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ и в окрестности точки a существуют $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Если эти производные непрерывны в точке a, то они в этой точке совпадают:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)$$

Rm: 4. Теоремы Шварца и Юнга отличаются друг от дргуа:

(1) В теореме Юнга предполагается, что частные производные дифференцируемы$\Leftrightarrow$ $\exists$ как вторые производные, так и смешанные производные. Заметим что, если функция дифференцируема, то её производная не обязана быть непрерывной;

(2) В теореме Шварца не утверждается существование второй производной, при этом требуется непрерывность смешанных производных;

□ Доказательство похоже на доказательство теоремы Юнга. Удобно считать что $a = (0,0)$. Составим функцию $\Delta(t,s)$ вида:

$$\Delta(t,s) = f(t,s) - f(t,0) - f(0,s) + f(0,0)$$

Она имеет такой вид из следующего соображения:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \approx \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x+\Delta x) - \frac{\partial f}{\partial y}(x)}{\Delta x} \approx \frac{\big(f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y)\big) - \big(f(x, y+\Delta y) - f(x,y)\big)}{\Delta x \Delta y}$$

подставив в него значения $x = y = 0$, $\Delta x = t$, $\Delta y = s$ получим:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \approx \frac{f(t,s) - f(t,0) - f(0,s) + f(0,0)}{ts} = \frac{\Delta(t,s)}{ts}$$

Если заменить x и y местами в смешанной производной, то получим такое же выражение, поскольку оно симметрично по x и y (берем сначала разность по x, а затем по y $\Leftrightarrow$ сначала взять разность по y, а затем по x). Этому выражению приближенно равны смешанные производные, тогда отсюда должно бы следовать что они тоже симметричны по x и y.

Проблема состоит в том, чтобы показать что при стремлении Δx, Δy к нулю, в пределе мы действительно получим равенство вместо приближенного равенства.

Перепишем выражение $\Delta(t,s)$ в другом виде и воспользуемся теоремой Лагранжа:

$$\Delta(t,s) = \Big(f(x,s) - f(x,0)\Big)\Big|_0^t = \varphi(x)\Big|_0^t = \varphi(t) - \varphi(0) = \varphi'(c)\cdot t = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(c,s) - \frac{\partial f}{\partial x}(c,0)\right)\cdot t,\ c \in (0,t)$$

Рассмотрим следующую функцию $\psi(u) = \frac{\partial f}{\partial x}(c,u)$, тогда выражение выше перепишется следующим образом:

$$\varphi'(c) = \frac{\partial f}{\partial x}(c,s) - \frac{\partial f}{\partial x}(c,0) = \psi(s) - \psi(0)$$

Снова воспользуемся теоремой Лагранжа и получим следующий результат:

$$\psi(s) - \psi(0) = \psi'(d)\cdot s = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(c,u)\right)\Big|_{u=d} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(c,d),\ 0 < c < t,\ 0 < d < s$$

Таким образом мы получили, что наша функция $\Delta(t,s)$ выражается в виде смешанной производной:

$$\Delta(t,s) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(c,d),\ 0 < c < t,\ 0 < d < s$$

Сделаем группировку в другом порядке и получим аналогичный результат:

$$\Delta(t,s) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\widetilde{c},\widetilde{d}),\ 0 < \widetilde{c} < t,\ 0 < \widetilde{d} < s$$

Заметим, что из теореме Лагранжа верно следующее:

$$t \to 0 \Rightarrow c \to 0 \wedge \widetilde{c} \to 0$$

$$s \to 0 \Rightarrow d \to 0 \wedge \widetilde{d} \to 0$$

Тогда в силу непрерывности смешанных производных мы получим:

$$\lim_{t\to 0}\lim_{s\to 0}\Delta(t,s) = \lim_{t\to 0}\lim_{s\to 0}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(c,d) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$$

$$\lim_{t\to 0}\lim_{s\to 0}\Delta(t,s) = \lim_{t\to 0}\lim_{s\to 0}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\widetilde{c},\widetilde{d}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$$

В силу единственности предела мы получим, что:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$$

■

Пример: Рассмотрим функцию $f(x,y) = g(x) + h(y)$, где функции g, h - один раз дифференцируемы (функции одной переменной). Найдем её частные производные:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = g'(x),\ \frac{\partial f}{\partial y} = h'(y)$$

Эти функции не обязаны быть непрерывными, теорема Юнга сюда неприменима. Рассмотрим смешанные производные:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

Таким образом теорема Шварца в этом примере выполнена, а теорема Юнга - нет.

Опр: 3. Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дифференцируема в окрестности точки a $\big($тогда в этой окрестности $\exists$ все частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_k}\big)$. Если все функции $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_k}$ дифференцируемы в точке a $(\forall k)$, то говорят, что f дважды дифференцируема в точке a.

Опр: 4. Пусть уже определено, что значит f m-раз дифференцируема. Если f m-раз дифференцируема в окрестности точки a и все её частные производные m-го порядка дифференцируемы в точке a, то говорят, что f $(m+1)$-раз дифференцируема в точке a.

Следствие 1. Если f m-раз дифференцируема в точке a, то значение выражения $\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_m}}(a)$ не зависит от порядка переменных (индексы среди $i_1, \ldots, i_m$ могут повторяться).

$\square$ Поскольку функция f дифференцируема m-раз $\Rightarrow$ она дифференцируема два раза $\Rightarrow$ по теореме Юнга будет верно:

$$\ldots\left(\frac{\partial^2}{\partial x_{i_k}\partial x_{i_{k+1}}}\Big(\ldots\Big)\right)\ldots = \ldots\left(\frac{\partial^2}{\partial x_{i_{k+1}}\partial x_{i_k}}\Big(\ldots\Big)\right)\ldots$$

Таким образом, если умеем перестовлять два соседних элемента, то можем переставить любые два элемента.

Также можно доказать по индукции: пусть мы умеем делать перестановку любых элементов в $\frac{\partial^{m-1} f}{\partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_m}}$. Тогда в m-ой производной:

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\ldots\partial x_{i_m}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\left(\frac{\partial^{m-1} f}{\partial x_{i_2}\ldots\partial x_{i_m}}\right)$$

применяем теорему Юнга и получаем требуемый результат. $\blacksquare$

Дифференциалы высоких порядков

Второй дифференциал

Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дважды дифференцируема в точке a. То есть f один раз дифференцируема в окрестности точки a и все функции $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_k}$ дифференцируемы в точке a. Рассмотрим у этой функции первый дифференциал:

$$df(x,h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\cdot h_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\cdot h_n$$

Зафиксируем h и будем смотреть на функцию $df(x,h)$ как на функцию от x. Поскольку дано, что $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ это дифференцируемые в точке a функции, то $x \mapsto df(x,h)$ дифференцируема в точке $a \Rightarrow$ можно найти её дифференциал в точке a от вектора v:

$$d\big(d(f,h)\big)(a,v) = \frac{\partial}{\partial x_1}\big(df(x,h)\big)(a)\cdot v_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}\big(df(x,h)\big)(a)\cdot v_n =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a)\cdot h_1\cdot v_1 + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a)\cdot h_n\cdot v_1 + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a)\cdot h_1\cdot v_n + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a)\cdot h_n\cdot v_n =$$

$$= \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\cdot h_j\cdot v_i = B(h,v)$$

Из формулы выше очевидно, что это выражение линейно по h и по v, то есть $B(h,v)$ - билинейная форма. По теореме Юнга: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) \Rightarrow$ можно поменять местами индексы или, что то же самое, поменять местами h и v. Тогда:

$$B(h,v) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\cdot h_j\cdot v_i = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)\cdot v_i\cdot h_j = B(v,h)$$

Таким образом, $B(h,v)$ - симметричная билинейная форма. Из линейной алгебры мы знаем, что такая форма однозначно задается квадратичной, то есть $B(h,h) = Q(h) \Rightarrow$ вся информация про эту симметричную билинейную форму содержится в квадратичной форме.

Опр: 5. Второй дифференциал это $d^2 f(a,h) = B(h,h) = d\big(df(x,h)\big)(a,h) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\cdot h_j\cdot h_i$.

Rm: 5. Мы обсуждали, что есть функции $dx_i(h) = h_i$, если мы их используем, то $d^2 f(a,h)$ запишется следующим образом:

$$d^2 f(a,h) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\cdot\big(dx_j(a,h)\big)\cdot\big(dx_i(a,h)\big) \Leftrightarrow d^2 f = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\cdot(dx_j)\cdot(dx_i)$$

Отсюда необходимо иметь в виду, что $dx^2 = (dx)^2$.

Rm: 6. При решении задач обычно первый дифференциал записывается следующим образом:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)dx_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)dx_n$$

Затем, чтобы взять второй дифференциал, мы вычисляем дифференциалы каждой из функций $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, считая при этом что dx_i - константы. Это ровно то, что мы проделали выше зафиксировав h и считая дифференциал. Но при дифференцировании $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ мы используем те же самые $dx_1, \ldots, dx_n$ и получаем:

$$d^2 f = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \cdot (dx_j) \cdot (dx_i)$$

Это происходит по причине перехода от билинейной формы к квадратичной и тем самым мы выписываем не значения на векторе h и затем на векторе v, а значения на одном и том же векторе h.

Rm: 7. При замене переменных, в выражениях содержащих вторые производные, необходимо учитывать, что нельзя вычислять второй дифференциал композиции просто подставляя dx_i, dx_j поскольку не выполняется инвариантность и приходится дифференцировать еще раз функции, которые заменяют переменные.

Дифференциалы m-го порядка

Опр: 6. Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ m-раз дифференцируема в точке a, тогда выражение:

$$d^m f(a,h) = \sum_{i_1 \ldots i_m} \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_m}}(a) \cdot h_{i_1} \cdot \ldots \cdot h_{i_m},\ i_j \in \{1, \ldots, n\},\ \forall j = \overline{1, m}$$

называется дифференциалом m-го порядка в точке a на векторе h.

Rm: 8. Естественное определение дифференциалов m-го порядка это полилинейная форма m-го порядка. Стоит также отметить, что один из естественных способов получения полилинейных форм это вычисление дифференциалов высокого порядка у отображений. Тогда на месте каждого из h_{i_j} должны стоять координаты своего вектора. Но так устоялось, что у линейного объекта получилась нелинейная структура.

Утв. 1. Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(m+1)$-раз дифференцируема в точке a, тогда верно следующее равенство:

$$d^{m+1} f(a,h) = d\big(d^m f(x,h)\big)(a,h)$$