Сходимость в метрических пространствах

Пусть (X, ρ) - метрическое пространство.

Опр: 1. Последовательность $\{x_n\}$ сходится к x: $x_n \to x$, если $\rho(x_n, x) \to 0$.

Утв. 1. Предел определен единственным образом, то есть $x_n \to x$ и $x_n \to y \Rightarrow x = y$.

□ $\rho(x, y) \le \rho(x, x_n) + \rho(x_n, y) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow 0 \le \rho(x, y) \le 0 \Rightarrow \rho(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$. ■

Утв. 2. Если последовательность сходится, то она ограниченна, то есть лежит в некотором шаре.

□ $x_n \to x \Leftrightarrow \rho(x_n, x) \to 0 \Rightarrow \exists\, N\colon \forall n > N,\ \rho(x_n, x) < 1$. Возьмем

$$R = \max\{1, \rho(x_1, x), \rho(x_2, x), \ldots, \rho(x_N, x)\}$$

Ясно, что $\forall x_n,\ x_n \in \overline{B}(x, R)$, то есть последовательность ограниченна. ■

Лемма 1. $|\rho(x, u) - \rho(x, v)| \le \rho(u, v)$.

□

$$\rho(x, u) - \rho(x, v) \le \rho(u, v) \Leftrightarrow \rho(x, u) \le \rho(x, v) + \rho(v, u)$$

верно по неравенству треугольника.

$$\rho(x, v) - \rho(x, u) \le \rho(u, v) \Leftrightarrow \rho(x, v) \le \rho(x, u) + \rho(u, v)$$

верно по неравенству треугольника.

Тогда

$$-\rho(u, v) \le \rho(x, u) - \rho(x, v) \le \rho(u, v) \Rightarrow |\rho(x, u) - \rho(x, v)| \le \rho(u, v)$$

■

Утв. 3. (непрерывность ρ) Если $x_n \to x$ и $y_n \to y$, то $\rho(x_n, y_n) \to \rho(x, y)$.

□ Используя неравенство $|\rho(x, u) - \rho(x, v)| \le \rho(u, v)$, рассмотрим следующую разность:

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x, y)| = |\rho(x_n, y_n) - \rho(x_n, y) + \rho(x_n, y) - \rho(x, y)| \le$$

$$\le |\rho(x_n, y_n) - \rho(x_n, y)| + |\rho(x_n, y) - \rho(x, y)| \le \rho(y_n, y) + \rho(x_n, x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

■

Метрическое пространство $\mathbb{R}^n$

Рассмотрим следующее метрическое пространство: $\mathbb{R}^n$, $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}$.

Лемма 2. Верно неравенство $\max\limits_{1\le k\le n} |x_k| \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \le \sqrt{n} \max\limits_{1\le k\le n} |x_k|$.

Пример: Очевидно, что $\max\{|a|,|b|\} \leq \sqrt{a^2+b^2} \leq \sqrt{2}\max\{|a|,|b|\}$.

Теорема 1. Последовательность $x^m \in \mathbb{R}^n$, $x^m = (x_1^m, \dots x_n^m)$ сходится к $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n)$ по метрике $\rho = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2} \Leftrightarrow \forall k = \overline{1,n}$, $x_k^m \to x_k$. То есть сходимость в пространстве $\mathbb{R}^n$ равносильна покоординатной сходимости.

Rm: 1. В зависимости от контекста, мы рассматриваем элементы в $\mathbb{R}^n$ как точки или вектора, показывающие эти точки. Если складываем что-то, то считаем элементы векторами, а если рассматриваем метрические пространства, то видим за этим точки.

$\square$

1) Если $|x_k^m - x_k| \leq \rho(x^m, x) \to 0 \Rightarrow x_k^m \to x_k$, по первому неравенству из леммы;
2) Если $\forall k$, $x_k^m \to x_k \Rightarrow \max\limits_k |x_k^m - x^k| \to 0 \Rightarrow$ из 2-го неравенства леммы $\rho(x^m, x) \to 0$;

$\blacksquare$

Теорема 2. (Больцано) Из ограниченной последовательности элементов $\mathbb{R}^n$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

Rm: 2. Если не указывается метрика $\mathbb{R}^n$ в явном виде, то подразумевается Евклидова метрика.

$\square$ x^m - ограничена $\Rightarrow x^m \in B(x^0, R) \Rightarrow |x_k^m - x_k^0| \leq \rho(x^m, x^0) \leq R$, $\forall k = \overline{1,n} \Rightarrow x_k^m$ - ограниченная последовательность $\Rightarrow$ по теореме Больцано для одномерного случая $\exists$ сходящаяся подпоследовательность, но номера могут оказаться разными $\Rightarrow$ нужно делать выбор внутри выбранной последовательности.

Первые координаты x_1^m в последовательности x^m $\Rightarrow$ возьмем сходящуюся подпоследовательность $\Rightarrow$ среди последовательности x^m возьмем те номера, по которым сходится подпоследовательность первой координаты $\Rightarrow x^{m_s}$.

Вторые координаты $x_2^{m_s}$ в подпоследовательности x^{m_s} $\Rightarrow$ выделим сходящуюся подпоследовательность, при этом сходимость по первой координате сохранится в силу того, что всякая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится к одному и тому же пределу.

Продолжим процедуру до координаты n и в результате получим некоторую подпоследовательность последовательности x^m, сходящуюся по каждой из координат.

Случай $n = 2 \Rightarrow x_1^m$ - ограничена $\Rightarrow$ по теореме Больцано $\exists$ сходящаяся подпоследовательность: $x_1^{m_s} \to a_1$. Рассмотрим последовательность $x_2^{m_s}$ - ограничена $\Rightarrow$ по теореме Больцано $\exists$ сходящаяся подпоследовательность: $x_2^{m_{s_t}} \to a_2$. Если взяли сходящуюся последовательность и в ней возьмем подпоследовательность, то она будет сходиться к тому же самому $\Rightarrow x^{m_{s_t}} = (x_1^{m_{s_t}}, x_2^{m_{s_t}})$: $x^{m_{s_t}} \xrightarrow{t\to\infty} (a_1, a_2)$ $\blacksquare$

Полные метрические пространства

Опр: 2. Метрическое пространство (X, ρ) называется полным, если в нем выполняется критерий Коши, то есть: последовательность x_n - сходится $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists\, N\colon \forall n, m > N,\ \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$. Такие последовательности называются фундаментальными или последовательностями Коши.

Rm: 3. Из сходимости всегда следует фундаментальность:

$$x_n \to x \Rightarrow \rho(x_n, x_m) \le \rho(x_n, x) + \rho(x, x_m),\ \forall \varepsilon > 0, \exists\, N\colon \forall n > N,\ \rho(x_n, x) < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall n, m > N \Rightarrow \rho(x_n, x) + \rho(x, x_m) < 2\varepsilon$$

Пример: $\mathbb{R}$, $\rho(x, y) = |x - y|$ - полное пространство (см. первый семестр).

Пример: $\mathbb{Q}$, $\rho(x, y) = |x - y|$ - неполное пространство (на примере про $\sqrt{2}$ или e: последовательность будет сходится к числу не из этого пространства $\Rightarrow$ не будет сходиться).

Пример: $X \neq \varnothing$, $\rho(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$, это дискретная метрика, тогда

$$x_n \to x \Leftrightarrow \rho(x_n, x) \to 0, \exists\, N\colon \forall n > N,\ \rho(x_n, x) < 1 \Rightarrow \rho(x_n, x) = 0$$

По этой метрике сходятся только те последовательности, которые начиная с некоторого номера становятся постоянными. Будет ли это пространство полным? Возьмем $\varepsilon = \frac{1}{2} \Rightarrow$ фундаментальность означает следующее:

$$\exists\, N\colon \forall n, m > N,\ \rho(x_n, x_m) < \varepsilon \Rightarrow x_n = x_m$$

в частности $\forall n > N$, $x_n = x_{N+1}$ и сходятся к x_{N+1}. Таким образом, это полное пространство.

Rm: 4. Полнота пространства зависит не только от множества, но и от метрики пространства. Пространство $\mathbb{Q}$ с дискретной метрикой будет полным пространством.

Пример: $\mathbb{R}$, $\rho(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$. В этом случае, $x_n = n$ - фундаментальна с указанной метрикой:

$$x_n \to +\infty \Rightarrow \arctan x_n \to \frac{\pi}{2} \Rightarrow \rho(x_n, x_m) \to 0$$

но при этом последовательность не сходится (например, зафиксировали x, а вместо y взяли $n \Rightarrow$ получим $\arctan x - \frac{\pi}{2}) \Rightarrow$ нет сходимости (метрика не стремится к 0) $\Rightarrow$ неполное пространство.

Теорема 3. $\mathbb{R}^n$ - полное метрическое пространство.

□ Пусть x^m - фундаментальная $\Rightarrow$ по лемме $|x_k^m - x_k^l| \le \rho(x^m, x^l) \Rightarrow \forall k = \overline{1, n}$, x_k^m - фундаментальна $\Rightarrow x_k^m \to a_k$. То есть каждая координата сходится к какому-то пределу. Сходимость по координатам $\Leftrightarrow$ сходимости по метрике. ■

Пополнение метрического пространства

Можно ли из неполного пространства сделать полное? Например, каким-то образом дополнить исходное неполное пространство.

Пусть $X \subset Y$, так что на обоих пространствах одинаковая метрика. Напрямую это обычно сделать не получается, поэтому рассмотрим $f\colon X \to Y$, $\rho_Y(f(x_1), f(x_2)) = \rho_X(x_1, x_2)$, в этом случае говорят, что сделано изометрическое вложение.

Хотим, чтобы Y было самым маленьким полным пространством, содержащем X и тогда $\overline{X} = Y$, то есть замыкание множества X совпало бы с полным пространством $Y \Rightarrow Y$ - это пополнение X.

Способ пополнения пространств: хотим, чтобы фундаментальные последовательности $\{x_n\}$ сходились $\Rightarrow$ вместо X будем рассматривать всевозможные фундаментальные последовательности:

$$Y = \{\text{фундаментальные последовательности}\{x_n\}\}$$

Мы рассматриваем фундаментальные последовательности, поскольку так мы можем разделять последовательности, которые что-то приближают и которые должны бы сходится от всех остальных последовательностей. Когда одно и то же число можно представить разными последовательностями, то

$$\{x_n\} \sim \{y_n\} \Leftrightarrow \rho(x_n, y_n) \to 0$$

Таким образом, элементы Y - это классы эквивалентности. Как ввести метрику? Например

$$\rho(\{x_n\}, \{y_n\}) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n)$$

Если бы последовательности сходились, то $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n)$ сходилось бы к расстоянию между их пределами. Можно доказать, что из фундаментальности этих последовательностей, такой предел существует, можно показать, что он не зависит от выбора представителя класса эквивалентности и удовлетворяет свойствам метрики $\Rightarrow$ появилось метрическое пространство (Y, ρ).

В этом пространстве хотим найти $X \Rightarrow x \in X \mapsto \{x_n \equiv x\}$. Можно показать, что в силу определения это изометрическое вложение. Осталось проверить:

1. Получившееся пространство - полное;
2. Любой элемент Y приближается "постоянной" последовательностью $(\{x_n \equiv x_N\})$;

Это как раз и означает, что $\overline{X} = Y$. Таким образом добавлено лишь то, что можно приблизить элементами из X.

Пример: Таким способом можно получить вещественные числа: Есть рациональные числа $\Rightarrow$ объявляем вещественным числом - класс эквивалентности фундаментальной последовательности.

Rm: 5. Описанный способ пополнения не единственный, но если были какие-то свойства на X помимо метрики, то они переносятся естественным способом на Y.

Упр. 1. Проверить эту процедуру пополнения и дополнить $\mathbb{Q}$ до $\mathbb{R}$ (см. книгу Львовский: Математический анализ).

Сходимость в нормированных пространствах

Опр: 3. Линейное пространство X (над $\mathbb{R}$) называется нормированным, если задана функция $\|\cdot\|: X \to [0, +\infty)$, удовлетворяющая свойствам:

1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$;
3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника);

На нормированном пространстве есть метрика $\rho(x, y) = \|x - y\|$, где $\|\cdot\|$ называется нормой.

Поскольку это метрическое пространство, то на нем можно определить сходимость. Но перед этим убедимся, что нормированные пространства немного лучше, чем метрические.

Утв. 4. В нормированном пространстве шар $B(a, R) \supset B(b, r) \Rightarrow R > r$.

$\square$
Пусть $b = a \Rightarrow \{\, x \mid \rho(a, x) < R \,\} \supset \{\, x \mid \rho(a, x) < r \,\}$, тогда $\forall x \in B(a, r)$

$$\rho(a, x) = \|x - a\| < R \Rightarrow \forall x \in B(a, R) \wedge x \notin B(a, r),\, r \leq \rho(a, x) = \|x - a\| < R \Rightarrow r < R$$

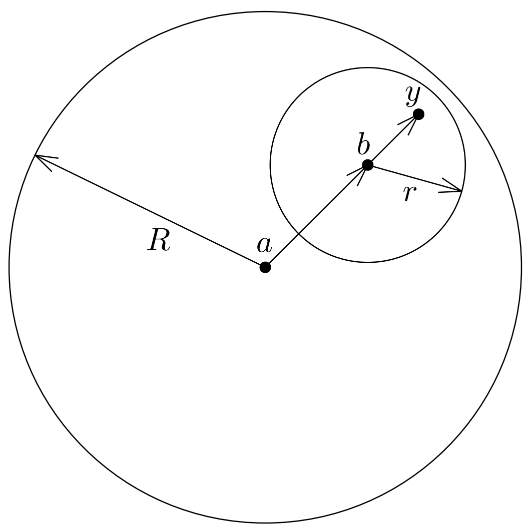

Рис. 1: Шары в нормированном пространстве.

Пусть $b \neq a \Rightarrow$ если $y = t\dfrac{(b - a)}{\|b - a\|} + (b - a) \in B(b, r)$, где $0 < t < r$, то получим следующее

$$\left\| t\frac{b - a}{\|b - a\|} + (b - a) \right\| < R \Rightarrow \left\| t\frac{(b - a)}{\|b - a\|} + (b - a) \right\| = \left\| \left(1 + \frac{t}{\|b - a\|}\right)(b - a) \right\| =$$

$$= \left(1 + \frac{t}{\|b - a\|}\right)\|b - a\| = t + \|b - a\| < R,\, \forall\, 0 < t < r$$

Устремляем $t \to r \Rightarrow t + \|b - a\| < R \to r + \|b - a\| \leq R \Rightarrow r < R$, так как $\|b - a\| > 0$. $\blacksquare$

Утв. 5. Если в нормированном пространстве $x_n \to x$, $y_n \to y$, $\alpha_n \in \mathbb{R}$: $\alpha_n \to \alpha$, то

(1) $x_n + y_n \to x + y$;

(2) $\alpha_n \cdot x_n \to \alpha \cdot x$;

□ Пусть $x_n \to x$, $y_n \to y$, $\alpha_n \in \mathbb{R}$: $\alpha_n \to \alpha$, тогда

(1) По определению:

$$\|(x+y) - (x_n + y_n)\| = \|(x - x_n) + (y - y_n)\| \leq \|x - x_n\| + \|y - y_n\| \to 0$$

(2) По определению:

$$\|\alpha_n x_n - \alpha x\| = \|(\alpha_n x_n - \alpha_n x) + (\alpha_n x - \alpha x)\| \leq |\alpha_n| \cdot \|x_n - x\| + |x| \cdot \|\alpha_n - \alpha\|$$

Поскольку $\alpha_n \to \alpha \Rightarrow$ это ограниченная последовательность и $x_n \to x$, то

$$|\alpha_n| \cdot \|x_n - x\| + |\alpha_n - \alpha| \cdot \|x\| \to |\alpha| \cdot 0 + 0 \cdot \|x\| = 0$$

■

Упр. 2. Доказать:

1) $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\|$

□ Используем лемму: $|\rho(z,x) - \rho(z,y)| \leq \rho(x,y) \Rightarrow z = x + y \Rightarrow$

$$|\rho(z,x) - \rho(z,y)| = \big|\|x + y - x\| - \|x + y - y\|\big| = \big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\|;$$

■

2) $x_n \to x \Rightarrow \|x_n\| \to \|x\|$

□ По определению $x_n \to x \Leftrightarrow \rho(x_n, x) \to 0 \Rightarrow \|x_n - x\| \to 0 \Rightarrow$ используя утверждение выше:

$$0 \leq \big|\|x_n\| - \|x\|\big| \leq \|x_n - x\| \to 0 \Rightarrow \|x_n\| \to \|x\|;$$

■

Нормы в $\mathbb{R}^n$

Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, тогда можно рассматривать следующие нормы:

(1) $\|x\|_{l_2} = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2}$ (Евклидова норма);

(2) $\|x\|_{l_\infty} = \max\limits_{1 \leq k \leq n} |x_k|$;

(3) $\|x\|_{l_1} = \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|$

Теорема 4. Если $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ - произвольные нормы на $\mathbb{R}^n$, то существуют числа $c_1, c_2 > 0$: $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$c_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1$$