Неопределенный интеграл

Замена переменных

Задача 1. (**Д1790**)

$$\int \sqrt{(x+a)(x+b)}dx, \quad x+a=(b-a)\operatorname{sh}^2 t$$

$\square$ Под корнем у нас находится квадратный трехчлен с корнями $-a$ и $-b$, чтобы корень выражения был определен нам необходимо верность неравенства: $(x+a)(x+b) \geq 0$. Без ограничения общности, пусть $-a < -b \Rightarrow x \in (-\infty, -a) \cup (-b, +\infty)$.

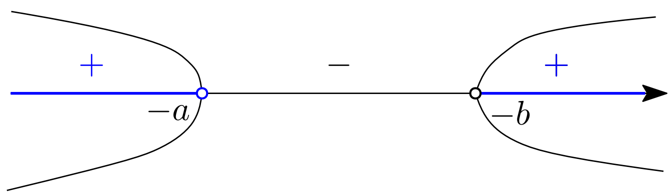

Рис. 1: Значения квадратного трехчлена $(x+a)(b+x)$ на $\mathbb{R}$.

Сделаем замену:

$$x+a=(b-a)\operatorname{sh}^2 t \Rightarrow \operatorname{sh}^2 t = \frac{x+a}{b-a} \Rightarrow t = \operatorname{sh}^{-1}\left(\sqrt{\frac{x+a}{b-a}}\right) = \ln\left(\sqrt{\frac{x+a}{b-a}} + \sqrt{\frac{x+b}{b-a}}\right)$$

Будем выбирать $t \geq 0 \Rightarrow \operatorname{sh} t > 0$, $\operatorname{ch} t > 0$. Мы уже знаем, что $-a < -b \Rightarrow a > b \Rightarrow x+a < 0$, тогда выражение под корнем будет положительным. На промежутке $(-b, +\infty)$ надо просто поменять b и a местами. Заметим, что:

$$x+b = x+a+(b-a) = (b-a)\operatorname{sh}^2 t + (b-a) = (b-a)\cdot(\operatorname{sh}^2 t + 1) = (b-a)\cdot \operatorname{ch}^2 t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x+a)(x+b)} = \sqrt{(b-a)^2 \operatorname{sh}^2 t \operatorname{sh}^2 t} = -(b-a)\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t, \quad dx = d(x+a) = (b-a)2\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \sqrt{(x+a)(x+b)}dx = -2\int (b-a)^2 \operatorname{sh}^2 t \operatorname{ch}^2 t dt$$

Воспользуемся здесь формулой: $\operatorname{sh}(2t) = 2\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t$, тогда:

$$-2\int (b-a)^2 \operatorname{sh}^2 t \operatorname{ch}^2 t dt = -\frac{(b-a)^2}{2}\int \operatorname{sh}^2(2t)dt$$

$$\operatorname{ch}(4t) = \frac{e^{4t}+e^{-4t}}{2}, \operatorname{sh}(2t) = \frac{e^{2t}-e^{-2t}}{2} \Rightarrow \operatorname{sh}^2(2t) = \frac{e^{4t}-2+e^{-4t}}{4} = \frac{\operatorname{ch}(4t)-1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{(b-a)^2}{2}\int \operatorname{sh}^2(2t)dt = -\frac{(b-a)^2}{4}\int \operatorname{ch}(4t) - 1dt = -\frac{(b-a)^2}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\operatorname{sh}(4t) - t\right) + C =$$

$$= \frac{(b-a)^2}{4}\cdot\left(-\frac{1}{2}\operatorname{sh}(2t)\operatorname{ch}(2t) + t\right) + C = \frac{(b-a)^2}{4}\cdot(-\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t \operatorname{ch}(2t) + t) + C$$

$$\operatorname{ch}(2t) = \frac{e^{2t}+e^{-2t}}{2} = 2\operatorname{sh}^2 t + 1 \Rightarrow$$

$$\frac{(b-a)^2}{4}\cdot(-\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t\cdot \operatorname{ch}(2t)+t)+C=\frac{(b-a)^2}{4}\left(-\sqrt{\frac{x+a}{b-a}}\cdot\sqrt{\frac{x+b}{b-a}}\cdot\left(2\cdot\frac{x+a}{b-a}+1\right)+t\right)+C=$$

$$=\frac{\sqrt{(x+a)(x+b)}}{4}\cdot(2x+a+b)+\frac{(b-a)^2}{4}\ln\left(\sqrt{\frac{x+a}{b-a}}+\sqrt{\frac{x+b}{b-a}}\right)+C$$

■

Задача 2. (Разбор интеграла (I))

$$\int\frac{dx}{x^2+a^2}$$

□

$$\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}=\frac{1}{a}\int\frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)+C$$

■

Задача 3. (Разбор интеграла (VII))

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx$$

□ Сделаем замену $x=a\sin t$, причем возьмем $t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow\cos t\geq 0$. Тогда:

$$a^2-x^2=a^2-a^2\sin^2 t=a^2\cos^2 t\Rightarrow\sqrt{a^2-x^2}=a\cos t,\quad dx=a\cos t dt$$

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\int a^2\cos^2 t dt=a^2\int\frac{\cos(2t)+1}{2}dt=\frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{2}\sin(2t)+t\right)+C$$

$$\sin(2t)=2\sin t\cos t=2\frac{x}{a}\cdot\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}\Rightarrow\frac{a^2}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin(2t)=\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}$$

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+C$$

■

Остальные задачи либо разбирали, либо были похожие. Но таблица этих интегралов из Демидовича очень важна.

Задача 4. (Разбор интеграла (II))

$$\int\frac{dx}{a^2-x^2},\quad a\neq 0$$

□

$$\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\int\frac{dx}{(a-x)(a+x)}=\int\frac{A}{a-x}dx+\int\frac{B}{a+x}dx$$

$$\frac{1}{(a-x)(a+x)}=\frac{A}{(a-x)}+\frac{B}{(a+x)}=\frac{A(a+x)+B(a-x)}{(a-x)(a+x)}=\frac{(A+B)a+(A-B)x}{(a-x)(a+x)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A+B=1\wedge A-B=0\Rightarrow A=B=\frac{1}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int \frac{1}{a-x}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{a+x}dx = \frac{1}{2}\left(-\ln|a-x| + \ln|a+x|\right) + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$$

■

Задача 5. (Разбор интеграла (III))

$$\int \frac{xdx}{a^2 \pm x^2}$$

□

$$\int \frac{xdx}{a^2 \pm x^2} = \int \frac{d(x^2)}{2(a^2 \pm x^2)} = \pm\frac{1}{2}\int \frac{d(a^2 \pm x^2)}{(a^2 \pm x^2)} = \pm\frac{1}{2}\ln|a^2 \pm x^2| + C$$

■

Задача 6. (Разбор интеграла (IV))

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad a > 0$$

□

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{dx}{a\cdot\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

■

Задача 7. (Разбор интеграла (V))

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}, \quad a > 0$$

□ Табличный интеграл, разбирался на первой лекции. ■

Задача 8. (Разбор интеграла (VI))

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}}, \quad a > 0$$

□

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \int \frac{d(x^2)}{2\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm\frac{1}{2}\int \frac{d(a^2 \pm x^2)}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm\sqrt{a^2 \pm x^2} + C$$

■

Задача 9. (Разбор интеграла (VIII))

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}dx, \quad a > 0$$

□ Для случая $\sqrt{x^2 + a^2}$ разбиралась задача 1786, результат:

$$\int \sqrt{x^2 + a^2}dx = \frac{x}{2}\cdot\sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + C$$

Случай $\sqrt{x^2-a^2}$ будет частным случаем задачи 1790 при $b=-a$ и $a>0$, результат:

$$\int\sqrt{x^2-a^2}dx=\int\sqrt{(x-a)(x+a)}dx=\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{2}\cdot x+\frac{4a^2}{4}\ln\left(\sqrt{\frac{x+a}{-2a}}+\sqrt{\frac{x-a}{-2a}}\right)+C=$$

$$=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}+a^2\ln\left(\sqrt{-x-a}+\sqrt{-x+a}\right)+C=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln\left(\sqrt{-x-a}+\sqrt{-x+a}\right)^{-2}+C=$$

$$=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln\left(\frac{1}{-2x+2\sqrt{x^2-a^2}}\right)+C=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{x^2-a^2}+x}{-a^2}\right)+C=$$

$$=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln\left(-\sqrt{x^2-a^2}-x\right)+C=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C$$

■

Задача 10. (**Д1803**)

$$\int\arcsin x dx$$

□ Поскольку у нас обратная функция, воспользуемся интегрированием по частям:

$$\int\arcsin x dx=\int 1\cdot\arcsin x dx=x\cdot\arcsin x-\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$$

■

Задача 11. (**Д1834**)

$$\int\frac{xdx}{\cos^2 x}$$

□

$$\int\frac{xdx}{\cos^2 x}=\int x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx=|v(x)=x,u(x)=\operatorname{tg}x|=x\cdot\operatorname{tg}x-\int\operatorname{tg}x dx=x\cdot\operatorname{tg}x+\ln|\cos x|+C$$

■

Интегрирование рациональных функций

Не все интегралы можно взять. Вспомним что такое элементарные функции.

Опр: 1. Элементарные функции это функции полученные операциями: $+, -, \cdot, /, \circ$ над функциями:

$$\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x, e^x, \mathrm{const}, x, \ln x, \arcsin x, , \arccos x, \operatorname{arctg} x$$

Когда мы пользовались производными, то у элементарных функций производные тоже были элементарными - то есть мы не выходили за класс этих функций. По-другому на это можно посмотреть как на перевод оператором дифференцирования множества элементарных функций в подмножество элементырнах функций. При этом обратный оператор - оператор интегрирования может вывести за предел пространства элементарных функций. Оказывается, существуют элементарные функции интеграл от которых не выражается через элементарные функции.

Примеры: $\int e^{-x^2}dx$, $\int \frac{dx}{\ln x}, \int \frac{\sin x}{x}dx$. Такие интегралы называются неберущимися.

При этом, есть класс функций интеграл которых всегда считается и это рациональные функции:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Пусть $P(z)$ - многочлен, в который можно подставлять комплексные переменные и он может быть с комплексными коэффициентами. Известно, что $\deg P < n$. Число корней у этого многочлена равна его степени. Рассмотрим n различных комплексных чисел и построим многочлен $P_1(z)$:

$$z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C} \Rightarrow P_1(z) = \frac{(z-z_2)\cdot(z-z_3)\cdot\ldots\cdot(z-z_n)}{(z_1-z_2)\cdot(z_1-z_3)\cdot\ldots\cdot(z_1-z_n)}, \deg P_1 = n-1$$

$$P_1(z_1) = 1,\ P_1(z_i) = 0,\ \forall i \neq 1$$

Аналогично, мы можем построить многочлен $P_2(z)$:

$$P_2(z) = \frac{(z-z_1)\cdot(z-z_3)\cdot\ldots\cdot(z-z_n)}{(z_2-z_1)\cdot(z_2-z_3)\cdot\ldots\cdot(z_2-z_n)},\ P_2(z_2) = 1,\ P_2(z_i) = 0,\ \forall i \neq 2$$

И так далее, построим всего n многочленов: $P_1(z), \ldots, P_n(z)$, $\forall i = \overline{1,n}$, $\deg P_i = n-1$. По сути эти многочлены образуют базис среди всех многочленов степени меньше, чем n: $\{P\colon \deg P < n\}$.

$$\forall P \in \{P\colon \deg P < n\},\ P(z) = P(z_1)\cdot P_1(z) + P(z_2)\cdot P_2(z) + \ldots + P(z_n)\cdot P_n(z) = \widetilde{P}(z)$$

$$\widetilde{P}(z_1) = P(z_1)\cdot 1 + 0 + \ldots + 0 = P(z_1)$$

$$\widetilde{P}(z_2) = 0 + P(z_2)\cdot 1 + \ldots + 0 = P(z_2)$$

$$\ldots$$

$$\widetilde{P}(z_n) = 0 + \ldots + 0 + P(z_n)\cdot 1 = P(z_n)$$

В точках $z_1, \ldots, z_n$ многочлены $P(z)$ и $\widetilde{P}(z)$ совпадают $\Rightarrow P - \widetilde{P} = 0$ в n различных точках, но степень разности этих многочленов $\deg\left(P - \widetilde{P}\right) < n$, значит по следствию из ОТА: $P - \widetilde{P} \equiv 0$.

Опр: 2. Интерполяционным многочленом Лагранжа называется многочлен:

$$\widetilde{P}(z) = P(z_1)\cdot P_1(z) + P(z_2)\cdot P_2(z) + \ldots + P(z_n)\cdot P_n(z)$$

Вместо исходного многочлена P мы можем брать любую функцию f и тогда интерполяционный многочлен будет совпадать с функцией в точках z_j:

$$f(z_j) = \widetilde{P}(z_j),\ \forall j = \overline{1, n}$$

То есть многочлен решает задачу интерполяции.

Rm: 1. Отметим, что набор многочленов тесно связан с набором точек $z_1, \ldots, z_n$.

Пусть $Q(z) = (z - z_1) \ldots (z - z_n)$ (это частный случай, когда $Q(z)$ не имеет кратных корней), тогда:

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{P(z_1)}{(z_1 - z_2)\cdot(z_1 - z_3)\cdot\ldots\cdot(z_1 - z_n)}\cdot\frac{1}{z - z_1} + \frac{P(z_2)}{(z_2 - z_1)\cdot(z_2 - z_3)\cdot\ldots\cdot(z_2 - z_n)}\cdot\frac{1}{z - z_2} + \ldots +$$

$$+\frac{P(z_n)}{(z_n - z_1)\cdot(z_n - z_2)\cdot\ldots\cdot(z_n - z_{n-1})}\cdot\frac{1}{z - z_n}$$

Таким образом, мы разобрали частный случай, когда $Q(z)$ не имеет кратных корней.

Пусть $\deg P < \deg Q = n$ и тогда мы доказали теорему о разложении отношения $P(z)$ и $Q(z)$ в простейшие дроби, с указанием явных коэффициентов:

$$\frac{1}{z - z_j} : \frac{P(z_j)}{(z_j - z_1) \ldots (z_j - z_{j-1})(z_j - z_{j+1}) \ldots (z_j - z_n)}$$

Как искать эти коэффициенты? Производные по z мы не будем находить, но легко найдем производные по x, даже для функций $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, поскольку: $f(x) = g(x) + ih(x)$. Рассмотрим производную:

$$f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + i \lim_{x \to x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = g'(x) + ih'(x)$$

Все правила для производной будут продолжать работать. Например:

$$(f_1(x)\cdot f_2(x))' = f_1'(x)\cdot f_2(x) + f_1(x)\cdot f_2'(x)$$

Если мы возьмем многочлен $Q(x)$, $x \in \mathbb{R}$, то мы можем его разложить на множители комплексные:

$$Q(x) = (x - z_1)\cdot(x - z_2)\cdot\ldots\cdot(x - z_n)$$

то есть нет кратных корней и все числа разные. Про производную такого многочлена мы можем сказать следующее:

$$Q'(x) = (x - z_2)\cdot\ldots\cdot(x - z_n) + (x - z_1)\cdot(x - z_3)\cdot\ldots\cdot(x - z_n) + \ldots + (x - z_1)\cdot\ldots\cdot(x - z_{n-1})$$

Тогда мы можем упростить знаменатель интересующей нас дроби:

$$Q'(z_j) = (z_j - z_1)\cdot\ldots\cdot(z_j - z_{j-1})\cdot(z_j - z_{j+1})\cdot\ldots\cdot(z_j - z_n)$$

Таким образом, мы доказали следующее равенство:

$$\frac{P(x)}{(x - z_1)\cdot\ldots\cdot(x - z_n)} = \frac{P(z_1)}{Q'(z_1)}\cdot\frac{1}{x - z_1} + \frac{P(z_2)}{Q'(z_2)}\cdot\frac{1}{x - z_2} + \ldots + \frac{P(z_n)}{Q'(z_n)}\cdot\frac{1}{x - z_n}$$

Задача 12. (**Д1866**)

$$\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}dx$$

□ Проверим, что степень числителя меньше степени знаменателя:

$$P(x) = 2x+3,\ Q(x) = (x-2)(x+5)$$

$$\deg P = 1,\ \deg Q = 2 \Rightarrow \deg P < \deg Q$$

$$Q'(x) = (x+5) + (x-2) = 2x+3$$

$$z_1 = 2,\ z_2 = -5 \Rightarrow P(z_1) = P(2) = 2(2)+3 = 7,\ Q'(z_1) = 7,\ P(z_2) = -7,\ Q(z_2) = -7$$

Тогда раскладывая отношение многочленов, мы получим:

$$\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}dx = \int \frac{7}{7}\cdot\frac{1}{x-2} + \frac{-7}{-7}\cdot\frac{1}{x+5}dx = \ln|x-2| + \ln|x+5| + C$$

■

Уравнения с дробями обычно можно решать методом неопределенных коэффициентов. Но когда все корни различны, то не нужно заниматься решением системы, так как уже есть готовые ответы. Дополнительно, когда число слагаемых растёт, то сложность растёт нелинейно, в отличие от того метода, который рассматриваем мы и который растёт линейно. То есть, алгоритмически он более простой.

Задача 13. (**Д1869**)

$$\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}dx$$

□ Здесь степень числителя равна степени знаменателя $\Rightarrow$ понизим степень:

$$\deg(x^3+1) = \deg(x^3-5x^2+6x) = 3$$

$$\frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x} = \frac{x^3+1-x^3+5x^2-6x}{x^3-5x^2+6x} + 1 = \frac{5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x} + 1 = \frac{P(x)}{Q(x)} + 1$$

$$Q(x) = x^3-5x^2+6x = x\cdot(x^2-5x+6) = (x-2)(x-3)x$$

$$Q'(x) = 3x^2-10x+6$$

$$P(x) = 5x^2-6x+1,\ z_1 = 0, z_2 = 2, z_3 = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{P(z_1)}{Q'(z_1)} = \frac{1}{6},\ \frac{P(z_2)}{Q'(z_2)} = \frac{9}{-2},\ \frac{P(z_3)}{Q'(z_3)} = \frac{28}{3}$$

$$\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}dx = x + \frac{1}{6}\int\frac{dx}{x} - \frac{9}{2}\int\frac{dx}{x-2} + \frac{28}{3}\int\frac{dx}{x-3} =$$

$$= x + \frac{1}{6}\ln|x| - \frac{9}{2}\ln|x-2| + \frac{28}{3}\ln|x-3| + C$$

■

Задача 14. (**Д1877**)

$$\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$$

□ Степень числителя нулевая, а в знаменателе 3-ья степень. Следовательно, можно разложить на множители:

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{1}{(x+1)(x+i)(x-i)} \Rightarrow z_1 = -1,\ z_2 = -i,\ z_3 = i$$

$$P(x) = 1,\ Q(x) = (x+1)(x+i)(x-i)$$

$$Q'(x) = (x^2+1) + 2x(x+1) = 3x^2 + 2x + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{P(z_1)}{Q'(z_1)} = \frac{1}{2},\ \frac{P(z_2)}{Q'(z_2)} = \frac{1}{-2-2i},\ \frac{P(z_3)}{Q'(z_3)} = \frac{1}{-2+2i} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(x+1)(x+i)(x-i)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1} + \frac{1}{-2-2i}\cdot\frac{1}{x+i} + \frac{1}{-2+2i}\cdot\frac{1}{x-i}$$

В таком виде мы не можем проинтегрировать функции, поскольку не знаем интегралов от логарифма комплексного переменного. Поэтому превратим два сопряженных корня в одно слагаемое:

$$\frac{1}{-2-2i}\cdot\frac{1}{x+i} + \frac{1}{-2+2i}\cdot\frac{1}{x-i} = \frac{(-2+2i)(x-i) + (-2-2i)(x+i)}{(x+i)(x-i)(-2-2i)(-2+2i)} = \frac{2(-2x+2)}{(x^2+1)\cdot 8} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1-x}{x^2+1}$$

где мы воспользовались тем, что в числителе у нас сумма произведений сопряженных чисел и она будет равна удвоенной действительной части.

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1-x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{4}\ln|x^2+1| + C$$

Для сравнения решим методом неопределенных коэффициентов:

$$\frac{dx}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1) + (Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2+1)}$$

$$\begin{cases} 1 & : & 1 & = & A + C \\ x & : & 0 & = & B + C \\ x^2 & : & 0 & = A + B \end{cases}$$

$$C = -B = -(-A) = A \Rightarrow A = C = \frac{1}{2},\ B = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1} + \frac{-x+1}{2(x^2+1)}$$

Видно, что этот метод проще применять для комплексной переменной. ■

ДЗ: 1808, 1822, 1837, 1842, 1867, 1870 (можно разложить квадратный трехчлен), 1882.