Интегрирование трансцендентных функций

Задача 1. (**Д2066**)

$$\int P(x)e^{ax}dx$$

□ Поскольку функции разнородные, то будем интегрировать по частям.

$$e^{ax} = \left(\frac{e^{ax}}{a}\right)' \Rightarrow \int P(x)e^{ax}dx = e^{ax}\cdot\frac{P(x)}{a} - \frac{1}{a}\int P'(x)e^{ax}dx$$

То есть, мы получили шаг индукции. Тогда можем получить общую формулу:

$$\int P(x)e^{ax}dx = e^{ax}\cdot\left(\frac{P(x)}{a} - \frac{P'(x)}{a^2} + \frac{P''(x)}{a^3} - \ldots + \frac{(-1)^n P^{(n)}(x)}{a^{n+1}}\right) + C$$

■

Нам удобно интегрировать функции, зависящие от действительной переменной, но принимающая значения в комплексной плоскости:

$$F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ F(x) = f(x) + ig(x) \Rightarrow F'(x) = f'(x) + ig'(x)$$

$$\int F(x)dx = \int f(x)dx + i\int g(x)dx$$

Мы проверяли следующее:

$$e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}\cdot e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}\left(e^{(\alpha+i\beta)x}\right) = e^{\alpha x}\cos\beta x,\ \operatorname{Im}\left(e^{(\alpha+i\beta)x}\right) = e^{\alpha x}\sin\beta x$$

Посчитаем производную у каждой части экспоненты:

$$\left(\operatorname{Re}\left(e^{(\alpha+i\beta)x}\right)\right)' = e^{\alpha x}\left(\alpha\cos\beta x - \beta\sin\beta x\right),$$

$$\left(\operatorname{Im}\left(e^{(\alpha+i\beta)x}\right)\right)' = e^{\alpha x}\left(\alpha\sin\beta x + \beta\cos\beta x\right)$$

тогда:

$$\left(e^{(\alpha+i\beta)x}\right)' = e^{\alpha x}\left(\alpha\cos\beta x - \beta\sin\beta x\right) + ie^{\alpha x}\left(\alpha\sin\beta x + \beta\cos\beta x\right) = (\alpha + i\beta)\cdot e^{(\alpha+i\beta)x}$$

Таким образом, для интеграла эти же правила будут работать $\Rightarrow$ формула из задачи 2066 будет работать и тогда, когда число a - комплексное.

Задача 2. (**Д2067**) (только одна часть)

$$\int P(x)\cos(ax)dx$$

□ Снова будем интегрировать по частям:

$$\int P(x)\cos(ax)dx = \sin(ax)\cdot\frac{P(x)}{a} - \frac{1}{a}\int P'(x)\cdot\sin(ax)dx$$

Проинтегрируем по частям ещё раз:

$$\sin(ax)\cdot\frac{P(x)}{a}-\frac{1}{a}\int P'(x)\cdot\sin(ax)dx=\sin(ax)\cdot\frac{P(x)}{a}+\cos(ax)\cdot\frac{P'(x)}{a^2}-\frac{1}{a^2}\int P''(x)\cos(ax)dx$$

Таким образом, мы получили шаг индукции и формула итоговая будет выглядеть так:

$$\int P(x)\cos(ax)dx=\frac{\sin(ax)}{a}\cdot\left(P(x)-\frac{P''(x)}{a^2}+\frac{P^{(4)}(x)}{a^4}-\ldots+(-1)^k\frac{P^{(2k)}(x)}{a^{2k}}\right)+$$

$$+\frac{\cos(ax)}{a^2}\left(P'(x)-\frac{P'''(x)}{a^2}+\ldots+\frac{(-1)^mP^{(2m+1)}(x)}{a^{2m}}\right)+C$$

где $k=\left[\frac{n}{2}\right]$ и $m=\left[\frac{n-1}{2}\right]$ - такое, чтобы $2m+1<n$. Также заметим, что:

$$\int P(x)\cos(ax)dx=\operatorname{Re}\left(\int P(x)e^{iax}dx\right)$$

поскольку косинус можно связать с комплексными экспонентами следующим образом:

$$\cos(ax)=\operatorname{Re}(e^{iax})\vee\cos(ax)=\frac{1}{2}(e^{iax}+e^{-iax})$$

Таким образом, можно взять разложение экспоненты и взять действительную часть:

$$\int P(x)e^{iax}dx=e^{iax}\cdot\left(\frac{P(x)}{ia}+\frac{P'(x)}{a^2}-\frac{P''(x)}{ia^3}-\ldots+\frac{(-1)^nP^{(n)}(x)}{(ia)^{n+1}}\right)+C=$$

$$=(\cos(ax)+i\sin(ax))\cdot\left(\frac{P(x)}{ia}+\frac{P'(x)}{a^2}-\frac{P''(x)}{ia^3}-\ldots+\frac{(-1)^nP^{(n)}(x)}{(ia)^{n+1}}\right)+C$$

■

Применим результаты теоретических задач, решенных выше.

Задача 3. (**Д2068**)

$$\int x^3e^{3x}dx$$

□

$$\int x^3e^{3x}dx=e^{3x}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{3^2}+\frac{6x}{3^3}-\frac{6}{3^4}\right)+C$$

■

Задача 4. (**Д2076**)

$$\int xe^x\sin x dx$$

□ Заметим, что $e^x\sin x=\operatorname{Im}(e^x(\cos x+i\sin x))=\operatorname{Im}(e^{(1+i)x})$, следовательно:

$$\int xe^x\sin xdx=\operatorname{Im}\left(\int xe^{(1+i)x}dx\right)=\operatorname{Im}\left(e^{(1+i)x}\left(\frac{x}{1+i}-\frac{1}{(1+i)^2}\right)+C\right)$$

$$e^{(1+i)x}\left(\frac{x}{1+i}-\frac{1}{(1+i)^2}\right)=(e^x\cos x+ie^x\sin x)\cdot\left(\frac{x(1-i)}{2}-\frac{(1-i)^2}{4}\right)=$$
$$=(e^x\cos x+ie^x\sin x)\cdot\left(\frac{x-xi}{2}-\frac{1-2i-1}{4}\right)=(e^x\cos x+ie^x\sin x)\cdot\left(\frac{x-xi}{2}+\frac{i}{2}\right)=$$
$$=e^x\cos x\cdot\frac{x}{2}+e^x\sin x\cdot\frac{(x-1)}{2}+i\cdot\left(e^x\cos x\cdot\frac{(1-x)}{2}+e^x\sin x\cdot\frac{x}{2}\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mathrm{Im}\left(\int xe^{(1+i)x}dx\right)=e^x\cos x\cdot\frac{(1-x)}{2}+e^x\sin x\cdot\frac{x}{2}+C$$

■

Rm: 1. Заметим, что задачу можно было решить только методом интегрирования по частям, но это было бы сложнее.

Короткое напоминание про комплексные числа

$$z=x+iy=r\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)=r\cdot e^{i\varphi},\ \mathrm{Re}\,(z)=x,\ \mathrm{Im}\,(z)=y$$

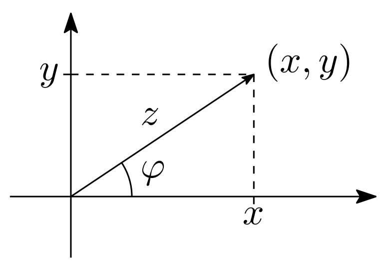

Рис. 1: Визуализация комплексного числа.

$$e^{\alpha+i\beta}=e^{\alpha}\cdot(e^{i\beta})=e^{\alpha}\cdot(\cos\beta+i\sin\beta)$$
$$e^{i\beta_1}\cdot e^{i\beta_2}=e^{i(\beta_1+\beta_2)}$$

В следующем семестре мы докажем:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

Обобщение для комплексных чисел будет выглядеть так:

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots$$

Если записать ряды для косинуса и синуса, то мы будем иметь:

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots$$

Если мы просуммируем ряд косинуса и ряд синуса, умноженный на i, то мы получим ряд e^{ix}:

$$\cos x+i\sin x=1+ix-\frac{x^2}{2!}-i\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+i\frac{x^5}{5!}-\ldots=e^{ix}=1+ix+\frac{(ix)^2}{2!}+\frac{(ix)^3}{3!}+\ldots$$

Задача 5. (**Д2073**)

$$\int x^2 e^{\sqrt{x}} dx$$

□ Сделаем замену $t = \sqrt{x}$, тогда:

$$x = t^2,\ dx = 2tdt$$

$$\int x^2 e^{\sqrt{x}} dx = \int t^4 e^t 2tdt = 2\int e^t t^5 = 2e^t \left(t^5 - 5t^4 + 20t^3 - 60t^2 + 120t - 120\right) + C,\ t = \sqrt{x}$$

■

Заметим, в похожих задачах с синусами или косинусами надо понижать степень, например:

$$\cos^2 bx = \frac{1 + \cos 2bx}{2},\ \sin(3x) = 3\sin x - 4\sin^3 x \Rightarrow \sin^3 x = \frac{3\sin x - \sin(3x)}{4}$$

Таким образом, похожие задачи решаются одними формулами с многочленами выше, но чтобы к ним свести надо либо использовать комплексные числа, либо интегрировать по частям, либо делать замены переменной, либо тригонометрические преобразования.

Интегралы с экспонентами

Задача 6. (**Д2082**)

$$\int \frac{dx}{(1 + e^x)^2}$$

□ Сделаем замену переменных:

$$t = e^x,\ x = \ln t,\ dx = \frac{dt}{t}$$

$$\int \frac{dx}{(1 + e^x)^2} = \int \frac{dt}{t(1+t)^2} = \int \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} + \frac{C}{(t+1)^2} dt = \int \frac{A(t+1)^2 + Bt(t+1) + Ct}{t(t+1)^2} dt$$

Заметим, что если снизу линейные множители, то сверху просто константа, поскольку ориентация на степень множителя, а не на общую степень.

$$A = 1,\ A + B = 0 \Rightarrow B = -1,\ 2A + B + C = 0 \Rightarrow C = -1$$

$$\int \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} + \frac{C}{(t+1)^2} dt = \ln t - \ln(t+1) - \frac{1}{t+1} + C = x - \ln(e^x + 1) - \frac{1}{e^x + 1} + C$$

■

Задача 7. (**Д2087**)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}$$

□ Сделаем замену переменных (уберем то, что не очень нравится):

$$t = \sqrt{e^x - 1} \Rightarrow t^2 = e^x - 1 \Rightarrow x = \ln(1 + t^2),\ dx = \frac{2t}{1 + t^2} dt$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}} = \int \frac{2t}{1 + t^2} \cdot \frac{1}{t} dt = 2\operatorname{arctg} t + C = 2\operatorname{arctg}\left(\sqrt{e^x - 1}\right) + C$$

■

В таких задачах часто надо сделать просто правильную замену. Но оказывается, что могут появляться и неберущиеся интегралы, то есть они не выражаются через элементарные функции. Введём функцию интегрального логарифма:

$$\operatorname{li}(x) = \int \frac{dx}{\ln x}$$

с той поправкой, что справа стоит множество функций и мы берём конкретного представителя. Рассмотрим следующую задачу.

Задача 8. (**Д2091**)

$$\int R(x)e^{ax}dx,\ R(x) = \frac{P(x)}{(x-x_1)^{k_1} \cdot \ldots (x-x_m)^{k_m}}$$

$R(x)$ - рациональная функция, знаменатель которой имеет лишь действительные корни. Необходимо показать, что такой интеграл выражается через элементарные функции и $\operatorname{li}(e^{ax})$.

□ Мы знаем, что для вида $R(x)$ есть разложение на простейшие дроби:

$$R(x) = \frac{P(x)}{(x-x_1)^{k_1} \cdot \ldots (x-x_m)^{k_m}} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \ldots + \frac{A_{k_1}}{(x-x_1)^{k_1}} + \ldots$$

Если мы научимся интегрировать $e^{ax}\dfrac{A_k}{(x-x_i)^k}$, то тогда мы сможем интегрировать всё выражение.

$$\forall k \geq 2,\ \frac{1}{(x-b)^k} = \left(\frac{1}{(x-b)^{k-1}(1-k)}\right)' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{e^{ax}}{(x-b)^k}dx = \frac{1}{1-k} \cdot \frac{e^{ax}}{(x-b)^{k-1}} - \frac{1}{1-k}\int \frac{e^{ax}}{(x-b)^{k-1}}dx$$

Следовательно, можно интегрировать по индукции до тех пор, пока не остановимся на функции:

$$\int \frac{e^{ax}}{x-b}dx = |t = x-b| = \int \frac{e^{a(t+b)}}{t}dt = e^{ab}\int \frac{e^{at}}{t}dt = \left| y = e^{at},\ t = \frac{1}{a}\ln y,\ dt = \frac{1}{y}dy \right| =$$

$$= e^{ab}\int \frac{y}{\frac{1}{a}\ln y} \cdot \frac{1}{ay}dy = e^{ab}\int \frac{dy}{\ln y} = e^{ab}\operatorname{li}(y) + C = e^{ab}\operatorname{li}\left(e^{a(x-b)}\right) + C$$

■

Интегрирование по частям

Задача 9. (**Д2098**)

$$\int \ln^n x dx$$

□ Вспомним, что мы считали такой интеграл для $n = 1$:

$$\int \ln x dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}dx = x\ln x - x + C$$

В общем случае:

$$\mathrm{I}_n = \int \ln^n x dx = \int 1 \cdot \ln^n x dx = x\ln^n x - \int x \cdot n \cdot \ln^{n-1} x \cdot \frac{1}{x}dx =$$

$$= x\ln^n x - \int n\cdot \ln^{n-1} x dx = x\ln^n x - n\cdot \mathrm{I}_{n-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{I}_n = x\ln^n x - n\left(x\ln^{n-1} x - (n-1)\cdot \left(x\ln^{n-2} x - \dots\right)\right) =$$

$$= x\ln^n x - nx\ln^{n-1} x + n(n-1)x\ln^{n-2} x - \dots + (-1)^n n! x + C$$

Далее можно проверить это выражение по индукции. Базу уже проверяли, сделать шаг индукции и проверить, что выполняется реккурентное соотношение. ■

Задача 10. (**Д2110**)

$$\int \arcsin\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)dx$$

□ Проинтегрируем выражение по частям:

$$\int 1\cdot \arcsin\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)dx = x\cdot \arcsin\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right) - \int x\cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4x}{(1+x)^2}}}\cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}(1+x) - 2\sqrt{x}}{(1+x)^2}dx =$$

$$= x\cdot \arcsin\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right) - \int \frac{1+x}{|1-x|}\cdot \frac{(1-x)\sqrt{x}}{(1+x)^2}dx = x\cdot \arcsin\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right) - \int \frac{\pm\sqrt{x}}{(1+x)}dx$$

Если $x \in [0,1) \Rightarrow +$, $x \in [1,+\infty) \Rightarrow -$. Сделаем замену:

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{1+x} = \left|\sqrt{x} = t,\, x = t^2,\, dx = 2tdt\right| = \int \frac{2t^2}{1+t^2}dt = 2t - 2\int \frac{1}{1+t^2}dt = 2\sqrt{x} - 2\operatorname{arctg}\sqrt{x} + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \arcsin\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)dx = x\cdot \arcsin\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right) \mp 2\left(\sqrt{x} - \operatorname{arctg}\sqrt{x}\right) + C$$

Также можно было сделать немного другое интегрирование по частям:

$$\int 1\cdot \arcsin\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)dx = (x+1)\cdot \arcsin\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right) - \int (x+1)\cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4x}{(1+x)^2}}}\cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}(1+x) - 2\sqrt{x}}{(1+x)^2}dx =$$

$$= (x+1)\cdot \arcsin\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right) - \int \frac{1+x}{|1-x|}\cdot \frac{(1-x)}{\sqrt{x}(1+x)}dx = (x+1)\cdot \arcsin\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right) \mp \int \frac{1}{\sqrt{x}}dx =$$

$$= (x+1)\cdot \arcsin\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right) \mp 2\sqrt{x} + C$$

■

Задача 11. (**Д2113**)

$$\int x\operatorname{arctg} x\cdot \ln(1+x^2)dx$$

□ Вспомним, как решать следующую задачу:

$$\int x\operatorname{arctg} x dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C$$

Проинтегрируем по частям исходное выражение:

$$\int x \operatorname{arctg} x \cdot \ln(1+x^2)dx = \left(\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x\right)\cdot \ln(1+x^2) -$$

$$-\frac{1}{2}\int \left((x^2+1)\operatorname{arctg} x - x\right)\frac{2x}{1+x^2}dx$$

$$\frac{1}{2}\int \left((x^2+1)\operatorname{arctg} x - x\right)\frac{2x}{1+x^2}dx = \int x\operatorname{arctg} x dx - \int \frac{x^2}{1+x^2}dx$$

То есть интегралы, которые только что посчитали. ■

Задача 12. (**Д2165**)

$$\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}e^x dx$$

□ Попробуем упростить дробь с помощью формул половинного угла:

$$\sin x = 2\sin\tfrac{x}{2}\cos\tfrac{x}{2} \Rightarrow 1+\sin x = \sin^2\tfrac{x}{2} + \cos^2\tfrac{x}{2} + 2\sin\tfrac{x}{2}\cos\tfrac{x}{2} = \left(\sin\tfrac{x}{2}+\cos\tfrac{x}{2}\right)^2$$

$$\cos x = 2\cos^2\tfrac{x}{2} - 1 \Rightarrow 1+\cos x = 2\cos^2\tfrac{x}{2}$$

Похоже, что это не сильно поможет и надо интегрировать по частям (решение со следующего семинара):

$$\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}e^x dx = \frac{1+\sin x}{1+\cos x}e^x - \int e^x\frac{\cos x(1+\cos x)+(1+\sin x)\sin x}{(1+\cos x)^2}dx$$

$$\int e^x\frac{\cos x(1+\cos x)+(1+\sin x)\sin x}{(1+\cos x)^2}dx = \int e^x\frac{1+\cos x+\sin x}{(1+\cos x)^2}dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1+\cos x+\sin x}{(1+\cos x)^2} = \frac{1}{1+\cos x} + \frac{\sin x}{(1+\cos x)^2} = \frac{1}{1+\cos x} + \left(\frac{1}{1+\cos x}\right)' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(e^x\frac{1+\cos x+\sin x}{(1+\cos x)^2}\right)' = \frac{e^x}{1+\cos x} + e^x\left(\frac{1}{1+\cos x}\right)' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}e^x dx = e^x\frac{\sin x}{1+\cos x} + C$$

■

Rm: 2. Как получилось додуматься до решения? Заметели следующее:

$$\frac{1+\cos x+\sin x+\sin x\cos x}{(1+\cos x)^2} = \frac{(1+\cos x)(1+\sin x)}{(1+\cos x)^2}$$

Обозначим:

$$\mathrm{I} = \int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}e^x dx \Rightarrow \int e^x\frac{\cos x(1+\cos x)+(1+\sin x)\sin x}{(1+\cos x)^2}dx = \mathrm{I} - \int \frac{\sin x\cos x}{(1+\cos x)}e^x dx$$

А дальше накидывать производную на дробь - не очень хорошая идея, поскольку будет нарастать знаменатель, поэтому логично было бы убрать производную отсюда. Тогда выделяя множитель:

$$\frac{\sin x}{(1+\cos x)^2} = \left(\frac{1}{1+\cos x}\right)'$$

Следовательно, производная перебрасывается на $e^x\cos x$, тогда снова появляется I и сокращается.

ДЗ: В этот раз без конкретики, но были заданы упражнения 2077, 2093.