Формула замены переменных

Лемма 1. Пусть функция φ на отрезке $[a, b]$ удовлетворяет условию Липшица:

$$\forall x_1, x_2 \in [a, b],\ \exists\, M > 0\colon |\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leq M\cdot|x_1 - x_2|$$

Тогда $\forall$ множества $E \subset [a, b]$ меры ноль по Лебегу, его образ $\varphi(E)$ также будет множеством меры ноль.

$\square$ Рассмотрим интервал $\mathrm{I} = (c-\delta, c+\delta)$ и его образ под действием функции φ. Можно сразу сказать, что из $c \in \mathrm{I} \Rightarrow \varphi(c) \in \varphi(\mathrm{I})$. Если $y \in \varphi(\mathrm{I})$, то $\exists\, x \in \mathrm{I}\colon y = \varphi(x)$. Измерим расстояние между y и $\varphi(c)$:

$$|y - \varphi(c)| = |\varphi(x) - \varphi(c)| \leq M\cdot|x - c| < M\delta$$

где последнее неравенство верно в силу того, что $x \in \mathrm{I}$. Таким образом, получаем:

$$\varphi(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J} = (\varphi(c) - M\delta, \varphi(c) + M\delta),\ |\mathrm{I}| = 2\delta \Rightarrow |\mathrm{J}| = M\cdot|\mathrm{I}| = 2M\delta$$

Возьмем E - множество меры ноль по Лебегу, тогда:

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\,\mathrm{I}_n\colon E \subset \bigcup_n \mathrm{I}_n \wedge \sum_n |\mathrm{I}_n| < \varepsilon$$

Следовательно, $\forall\,\mathrm{I}_n$ мы можем подобрать интервалы J_n и рассмотреть образ множества меры ноль:

$$\varphi(\mathrm{I}_n) \subset \mathrm{J}_n,\ |\mathrm{J}_n| = M\cdot|\mathrm{I}_n| \Rightarrow \varphi(E) \subset \varphi\left(\bigcup_n \mathrm{I}_n\right) \subset \bigcup_n \varphi(\mathrm{I}_n) \subset \bigcup_n \mathrm{J}_n$$

где второе включение верно в силу следующего:

$$y \in \varphi\left(\bigcup_n \mathrm{I}_n\right) \Rightarrow \exists\, x \in \bigcup_n \mathrm{I}_n\colon \varphi(x) = y \Rightarrow \exists\, j\colon x \in \mathrm{I}_j \Rightarrow y \in \varphi(\mathrm{I}_j) \Rightarrow y \in \bigcup_n \varphi(\mathrm{I}_n)$$

Заметим, что сумма длин J_n будет маленькой:

$$\sum_n |\mathrm{J}_n| = \sum_n M\cdot|\mathrm{I}_n| = M\cdot\sum_n |\mathrm{I}_n| < M\cdot\varepsilon$$

Поскольку $M > 0$ - константа, то значение в правой части можно сделать сколь угодно маленьким, следовательно, $\varphi(E)$ это множество меры ноль по Лебегу. $\blacksquare$

Rm: 1. Для просто непрерывных функций утверждение выше - не верно.

Пример: Рассмотрим лестницу Кантора: $C(0) = 0$, $C(1) = 1$, далее на центральном выбрасываемом интервале $C(x) = \frac{1}{2}$, на следующих выбрасываемых интервалах $C(x) = \frac{1}{4}$ на левом промежутке и $C(x) = \frac{3}{4}$ на правом, и так далее. Получим монотонную функцию, определенную всюду вне Канторовского множества. Доопределяем её до непрерывной функции $C(x)$ на всем промежутке $[0, 1]$, это и будет лестницей Кантора. Таким образом, $C(x)$ - непрерывная и не убывает на $[0, 1]$, тогда рассмотрим следующую функцию:

$$f(x) = \frac{C(x) + x}{2}\colon [0, 1] \to [0, 1]$$

Функция $f(x)$ - строго монотонна и является гомеоморфизмом. Что эта функция делает с дополнением множества Кантора $= C_A$? Отображает в интервалы, длина которых равна длине интервалов дополнения множества Кантора на коэффициент наклона:

$$f(C_A) = \bigcup_n \mathrm{I}_n \colon \ \sum_n |\mathrm{I}_n| = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

Следовательно, множество Кантора $= A$ не может перейти в множество меры ноль $\Rightarrow f(A)$ - не является множеством меры ноль. Лестница Кантора - не Липшецева функция.

Теорема 1. (**Формула замены переменных**) Пусть $\varphi\colon [\alpha, \beta] \to [a, b]$ - диффеоморфизм (непрерывно дифференцируемая биекция и её обратная функция) и функция f - интегрируема по Риману на $[a, b]$. Тогда функция $f(\varphi(t)) \cdot |\varphi'(t)|$ интегрируема на отрезке $[\alpha, \beta]$ и выполнено следующее:

$$\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot |\varphi'(t)| dt = \int\limits_a^b f(x) dx$$

Rm: 2. Модуль в функции не должен смущать, поскольку φ - диффеоморфизм $\Rightarrow$ производная нигде не ноль, значит она везде либо > 0, либо < 0 и тем самым модуль раскрывается либо с плюсом, либо с минусом, но раскрытие модуля с минусом согласуется с обычной формулой, когда α и β расставляем в другом порядке (или a и b).

☐ Пусть E - множество точек разрыва функции f, по критерию Лебега E - это множество меры ноль. Рассмотрим прообраз этого множества $\varphi^{-1}(E)$. φ^{-1} - непрерывно дифференцируемая функция, производная ограничена поскольку она непрерывна на отрезке $\Rightarrow$ она Липшицева по теореме Лагранжа:

$$\forall x_1, x_2 \in [a, b],\ |\varphi^{-1}(x_1) - \varphi^{-1}(x_2)| = |(\varphi^{-1})'(c)| \cdot |x_1 - x_2| \le M \cdot |x_1 - x_2|,\ M = \max_{x \in [a,b]} |(\varphi^{-1})'(x)|$$

Тогда образ множества меры ноль $\varphi^{-1}(E)$ это множество меры ноль на отрезке $[\alpha, \beta]$ по лемме выше. Пусть $t_0 \notin \varphi^{-1}(E)$, тогда $\varphi(t_0)$ - точка непрерывности функции f и $f(\varphi(t)) \cdot |\varphi'(t)|$ непрерывна в t_0. Следовательно, $f(\varphi(t)) \cdot |\varphi'(t)|$ почти всюду непрерывна, f - ограничена, а φ - непрерывная функция на отрезке, то есть тоже ограничена $\Rightarrow$ по критерию Лебега $f(\varphi(t)) \cdot |\varphi'(t)|$ - интегрируема.

Для доказательства равенства, рассмотрим Римановы суммы. Пусть $\varphi' > 0$ (для $\varphi' < 0$ доказывается аналогично). Возьмем отрезок $[\alpha, \beta]$ и его любое разбиение $\mathbb{T}_t$, тогда:

$$\sigma(f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t), \mathbb{T}_t, \xi) = \sum_k f(\varphi(\xi_k)) \cdot \varphi'(\xi_k) \cdot (t_k - t_{k-1})$$

Выбираем ξ_k таким образом, чтобы $\varphi'(\xi_k) \cdot (t_k - t_{k-1}) = \varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})$ по теореме Лагранжа. Тогда:

$$\sum_k f(\varphi(\xi_k)) \cdot \varphi'(\xi_k) \cdot (t_k - t_{k-1}) = \sum_k f(\varphi(\xi_k)) \cdot (\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}))$$

Поскольку $\varphi' > 0$, то $\varphi(t_k) > \varphi(t_{k-1})$ и точка $\varphi(\xi_k) \in [\varphi(t_{k-1}), \varphi(t_k)]$. Таким образом, мы получаем набор точек, которые формируют разбиение $\mathbb{T}_x$ отрезка $[a, b]$ и отмеченные точки $\varphi(\xi)$. Заметим, что:

$$|\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})| \le \overline{M} \cdot |t_k - t_{k-1}|,\ \overline{M} = \max_{x \in [\alpha, \beta]} |\varphi'(x)| \Rightarrow \lambda(\mathbb{T}_t) \to 0 \Rightarrow \lambda(\mathbb{T}_x) \to 0$$

Поскольку мы знаем, что интегралы существуют, то выбор отмеченных точек не важен ($\varphi(\xi)$ - не любые, но масштаб $\lambda(\mathbb{T}_x)$ стремится к нулю). Таким образом:

$$\lim_{\lambda(\mathbb{T}_t)\to 0}\sum_k f\left(\varphi(\xi_k)\right)\cdot\varphi'(\xi_k)\cdot(t_k-t_{k-1})=\int\limits_\alpha^\beta f\left(\varphi(t)\right)\cdot\varphi'(t)dt=$$

$$=\lim_{\lambda(\mathbb{T}_x)\to 0}\sum_k f\left(\varphi(\xi_k)\right)\cdot\left(\varphi(t_k)-\varphi(t_{k-1})\right)=\int\limits_a^b f(x)dx$$

Если бы φ' было бы меньше ноля, то во второй строчке мы получили бы минус интеграл и учли бы его справа, поставив модуль . ■

Формула интегрирования по частям

Ранее мы предполагали, что f и g - непрерывно дифференцируемы, на самом деле формула интегрирования по частям верна в менее обременительных предположениях.

Утв. 1. Пусть f, g - дифференцируемые функции на отрезке $[a, b]$. Если $f'g$ и fg' интегрируемы по Риману на отрезке $[a, b]$, то верно следующее:

$$\int\limits_a^b f'(x)g(x)dx=f(b)g(b)-f(a)g(a)-\int\limits_a^b f(x)g'(x)dx$$

□ Из условия, по правилу Лейбница будет верно:

$$(fg)'=f'g+fg'$$

Значит $(fg)'$ будет интегрируема по Риману. По формуле Ньютона-Лейбница получим:

$$\int\limits_a^b (f(x)g(x))'dx=f(b)g(b)-f(a)g(a)$$

Раскрыв функцию под интегралом, получим требуемое. ■

Интеграл с переменным верхним пределом

Пусть f - интегрируема на $[a, b]$, тогда мы можем рассмотреть:

$$F(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$$

Если f - непрерывна, то $F(x)$ - дифференцируема и её производная совпадает с f. В общем случае, никакой дифференцируемости может не быть, например, если функция f не будет непрерывной, то $F(x)$ не обязана быть дифференцируемой в каждой точке x.

Утв. 2. Если $M = \sup\limits_{[a,b]} |f|$, то функция $F(x)$ будет удовлетворять условию Липшица:

$$\forall x, y \in [a,b],\ |F(x) - F(y)| \le M \cdot |x - y|$$

☐ Рассмотрим разность функции F в точках $x, y \in [a,b]$ и воспользуемся аддитивностью интеграла:

$$F(x) - F(y) = \int\limits_a^x f(t)dt - \int\limits_a^y f(t)dt = \int\limits_y^x f(t)dt \le \int\limits_y^x M dt = M \cdot \int\limits_y^x dt = M \cdot (x - y)$$

где последнее неравенство верно по монотонности интеграла. Следовательно, требуемое выполнено:

$$\forall x, y \in [a,b],\ |F(x) - F(y)| \le M \cdot |x - y|$$

■

Утв. 3. Если f непрерывна в точке $c \in [a,b]$, то $F(x)$ - дифференцируема в точке c и $F'(c) = f(c)$.

☐ Чтобы показать, что $F'(c) = f(c)$, рассмотрим следующий предел:

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c) \right) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{1}{h} \cdot \int\limits_c^{c+h} f(t)dt - f(c) \right) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \int\limits_c^{c+h} (f(t) - f(c))\, dt$$

Оценим полученное выражение по модулю:

$$\left| \frac{1}{h} \int\limits_c^{c+h} (f(t) - f(c))\, dt \right| \le \frac{1}{h} \cdot \sup_{t \in [c, c+h]} |f(t) - f(c)| \cdot \int\limits_c^{c+h} dt = \sup_{t \in [c, c+h]} |f(t) - f(c)| \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

где последнее верно по непрерывности функции f в точке c. Тогда:

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c) \right) = 0 \Rightarrow F'(c) = f(c)$$

■

Rm: 3. Обратное утверждение не верно: если существует F', то из этого не следует, что f будет непрерывна в этой точке.

Упр. 1. Привести такой пример.

Возьмем это утверждение и добавим к нему критерий Лебега, тогда получится следующее следствие:

Следствие 1. Функция $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ - дифференцируема почти всюду на отрезке $[a,b]$, непрерывна на $[a,b]$ и $F'(x) = f(x)$ почти всюду на $[a,b]$.

Rm: 4. Обычно непрерывные функции, у которых производная существует почти всюду и равна заданной функции не называют первообразной, поскольку возникают неприятности вроде лестницы Кантора (непрерывная, производная существует почти всюду и равна нулю и получается, что у нуля возникла не константная производная).

Приложения интеграла Римана

1) **Площадь под графиком**: Если есть неотрицательная функция f над отрезком $[a, b]$, тогда считается, что интеграл вычисляет площадь под графиком этой функции:

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

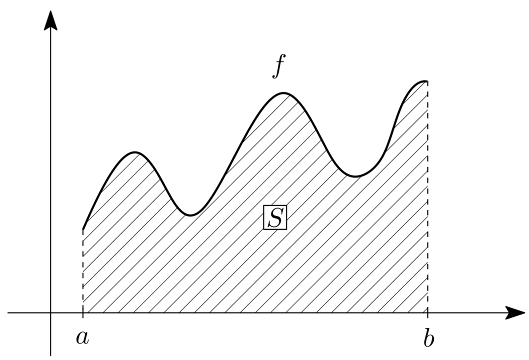
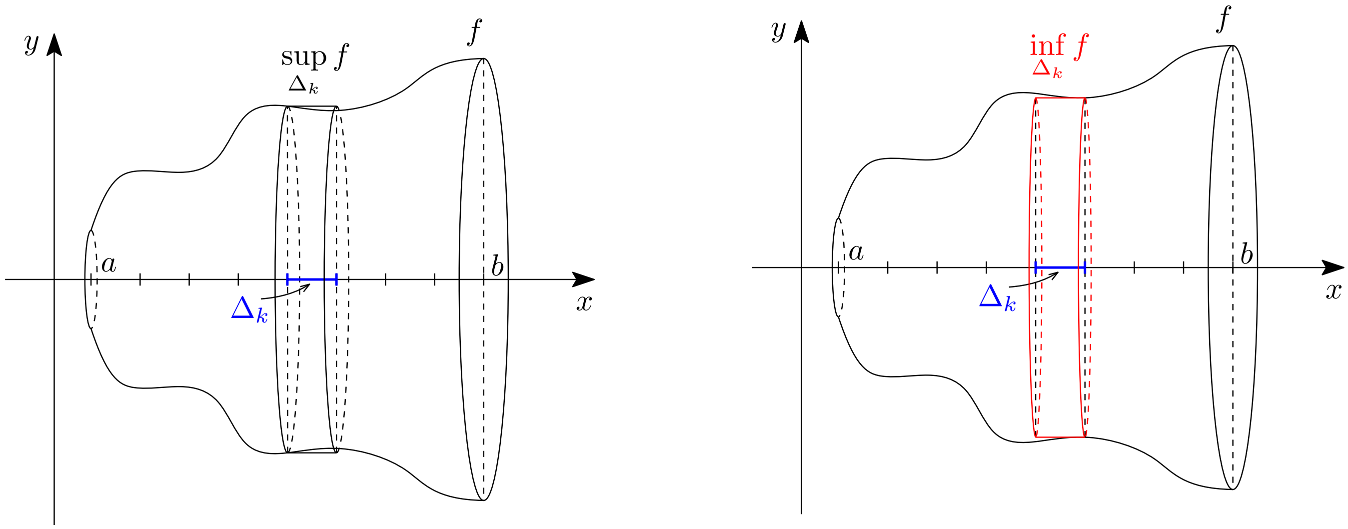


Рис. 1: Интеграл, как площадь под графиком.

Rm: 5. Но ничего конкретного про площадь сказать нельзя, поскольку мы не знаем что такое площадь.

2) **Объем тела вращения**: Имеется система координат Oxy, функция f над отрезком $[a, b]$, вращаем график вокруг оси x.



(a) Верхний цилиндр. (b) Нижний цилиндр.

Рис. 2: Интеграл, как объем тела вращения.

Хотим найти объем фигуры, полученной вращением $f(x)$ вокруг оси Ox. Для этого делим отрезок $[a, b]$, возьмем отрезок Δ_k и на нём $\sup f(x)$, затем нарисуем цилиндр такого радиуса с центром на оси $x \Rightarrow$

получим внешний цилиндр, если взять $\inf f(x)$, то получим внутренний цилиндр. Значит объем тела вращения V зажимается между следующими суммами:

$$\sum_k \left(\inf_{x\in\Delta_k} f\right)^2 \cdot\pi\cdot|\Delta_k| \le V \le \sum_k \left(\sup_{x\in\Delta_k} f\right)^2 \cdot\pi\cdot|\Delta_k|$$

Заметим, что брать квадрат точной верхней/нижней грани у неотрицательной функции это тоже самое, что и у f^2 брать точную верхнюю/нижнюю грань. Тогда:

$$\sum_k \left(\inf_{x\in\Delta_k} f^2\right) \cdot\pi\cdot|\Delta_k| \le V \le \sum_k \left(\sup_{x\in\Delta_k} f^2\right) \cdot\pi\cdot|\Delta_k|$$

Когда масштаб разбиения $\lambda(\mathbb{T})$ начнет стремиться к нулю, то верхняя/нижняя суммы Дарбу для функции πf^2 будут стремиться к одному и тому же числу:

$$V = \pi\cdot\int\limits_a^b f^2(x)dx$$

Rm: 6. Опять же, что такое объем мы пока сказать не можем и выводы сделаны эвристически.

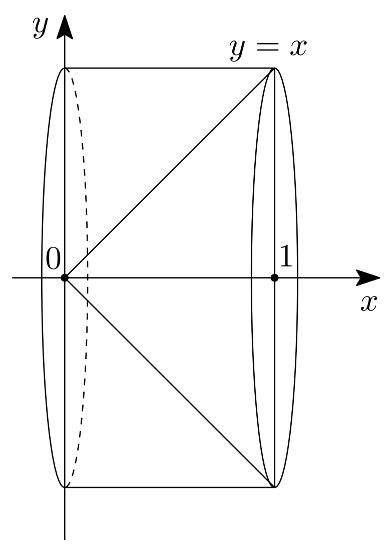


Рис. 3: Объем конуса/цилиндра.

Пример: Используя формулу выше, можем посчитать объем конуса. Вращаем функцию $y = x$ вокруг оси Ox над отрезком $[0, 1]$. Тогда по формуле выше объем будет равен:

$$V_{cone} = \pi\cdot\int\limits_0^1 x^2dx = \frac{\pi}{3}$$

Заметим, если посчитать объем цилиндра, то он будет равен просто π:

$$V_{cyl.} = \pi\cdot\int\limits_0^1 1\cdot dx = \pi$$

Таким образом, объем конуса составляет одну треть цилиндра. Тут можем обратить внимание на следующий момент: в разрезе одной половины данного цилиндра, площадь треугольника будет занимать ровно половину разреза, как тогда могли получить, что объем конуса не половина? Парадокс в том, что получаем мы не совсем прямоугольники.

3) **Длина пути**: Пусть есть отображение из $[a, b]$ в $\mathbb{R}^3$: $t \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, где $x(t), y(t), z(t)$ это непрерывно дифференцируемые функции, а $\gamma(t)$ - гладкая кривая. Начиная движение в a и заканчивая в b, проезжаем некий путь и спрашивается, какой длины l маршрут мы проехали?

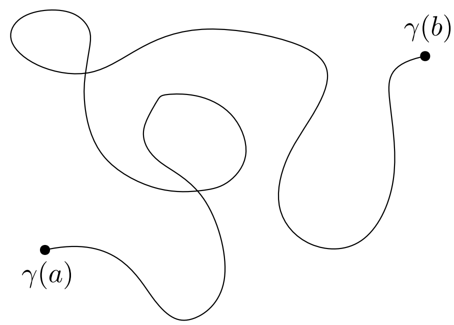


Рис. 4: Путь из $\gamma(a)$ в $\gamma(b)$.

Рассуждая немного эвристически, берем отрезок $[a, b]$, делим его, берем отрезок Δ_k. Можем сказать, что весь l складывается из того, что мы прошли на каждом Δ_k: l_{Δ_k}. Эта длина точно не больше, чем движение по прямой с максимальной скоростью и точно не меньше, чем движение по прямой с самой маленькой скоростью за этот же промежуток времени:

$$\inf_{\Delta_k} \|\dot{\gamma}\| \cdot |\Delta_k| \leq l_{\Delta_k} \leq \sup_{\Delta_k} \|\dot{\gamma}\| \cdot |\Delta_k|$$

Складываем все отрезки и получаем весь путь:

$$\sum_k \inf_{\Delta_k} \|\dot{\gamma}\| \cdot |\Delta_k| \leq \sum_k l_{\Delta_k} = l \leq \sum_k \sup_{\Delta_k} \|\dot{\gamma}\| \cdot |\Delta_k|$$

Опять же получаем верхнюю и нижнюю суммы Дарбу, тогда в пределе получаем следующее:

$$l = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)} dt$$

Пример: Измерим длину пути на четверти окружности в I-квадранте. $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \cdot dt = \frac{\pi}{2}$$

Можно взять другую параметризацию: $y = \sqrt{1 - x^2} \Rightarrow \gamma(t) = (t, \sqrt{1 - t^2})$, $t \in [0, 1]$, тогда получим:

$$l = \int_0^1 \sqrt{1^2 + \left(\frac{-t}{\sqrt{1 - t^2}}\right)^2} dt = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}$$

Но такой интеграл в смысле Римана не существует, поскольку когда подходим к 1 отношение уходит в бесконечность, а функция для интегрируемости должна быть ограниченной. Чтобы посчитать такой интеграл (ведь мы знаем, что длина у четверти окружности есть), надо немного отойти от 1:

$$\int\limits_0^{1-\delta} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin(1-\delta) - \arcsin(0) = \arcsin(1-\delta) \xrightarrow[\delta\to 0]{} \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$$

В таких случаях предлагается понимать интегралы с функциями, которые уходят на бесконечность в отдельных точках, как пределы, отступив от особенностей:

$$\int\limits_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \lim_{\delta\to 0} \int\limits_0^{1-\delta} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

Тогда говорят, что рассматриваем несобственный интеграл Римана.