Пространство ограниченных функций

Теорема 1. Если $f_n \in C^1[a,b]$, $f_n \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$ и $f_n' \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} g$, тогда $g = f'$.

Rm: 1. Несколько замечаний к доказательству:

(1) Из теоремы $\Rightarrow f \in C^1[a,b]$: равномерная сходимость сохраняет непрерывность $\Rightarrow f$ - непрерывна, $f' = g \Rightarrow f$ - дифференцируема и поскольку производная является равномерным пределом непрерывных функций, то она сама является непрерывной функцией;

(2) Условие $f_n \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$ можно заменить на условие: $\exists\, x_0 \in [a,b]\colon f_n(x_0)$ - сходится. Тогда утверждение будет звучать так: $\exists\, f\colon f_n \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$, f - дифференцируема и $f' = g$. Почему возможна замена? Поскольку функции дифференцируема, то по теореме Лагранжа:

$$\exists\, c \in [a,b]\colon (f_n(x) - f_m(x)) - (f_n(x_0) - f_m(x_0)) = (f_n'(c) - f_m'(c))(x - x_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall x \in [a,b], \exists\, c \in [a,b]\colon f_n(x) - f_m(x) = (f_n'(c) - f_m'(c))(x - x_0) + (f_n(x_0) - f_m(x_0)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sup_{[a,b]} |f_n(x) - f_m(x)| \le |f_n(x_0) - f_m(x_0)| + \sup_{[a,b]} |f_n'(x) - f_m'(x)|(b-a) \xrightarrow{n,m\to\infty} 0$$

(3) В доказательстве не использовалась непрерывность f_n', поскольку это необходимо для простоты формулировки теоремы;

Следствие 1. Линейное пространство $C^k[a,b]$ (k-раз дифференцируемые функции, производные - непрерывны) с нормой

$$\|f\| = \max_{[a,b]} |f| + \max_{[a,b]} |f'| + \ldots + \max_{[a,b]} |f^{(k)}|$$

является банаховым пространством.

□ Докажем для $k = 1$, для более высоких порядков - аналогично. Факт, что $\|f\|$ - норма проверяется на семинарах.

Пусть f_n - фундаментальная последовательность, тогда:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, N\colon \forall n, m > N,\ \|f_n - f_m\| < \varepsilon \Rightarrow \max_{[a,b]} |f_n - f_m| < \varepsilon \wedge \max_{[a,b]} |f_n' - f_m'| < \varepsilon$$

Тогда f_n - фундаментальна в $C[a,b]$, а поскольку это полное пространство, то

$$\exists\, f \in C[a,b]\colon f_n \rightrightarrows f \Leftrightarrow \max_{[a,b]} |f_n - f_m| \to 0$$

Вместе с этим, f_n' - фундаментальна в $C[a,b]$. Тогда

$$\exists\, g \in C[a,b]\colon f_n' \rightrightarrows g \Leftrightarrow \max_{[a,b]} |f_n' - g| \to 0$$

Тогда по теореме: $f' = g \Rightarrow f \in C^1[a,b]$. Тогда:

$$\|f_n - f\| = \max_{[a,b]} |f_n - f| + \max_{[a,b]} |f_n' - f'| \to 0$$

то есть, фундаментальная последовательность сходится. ■

Придумаем пример двух норм, которые не будут эквивалентными.

Пример: Пространство $C^1[a,b]$, 1-ая норма: $\|f\|_0 = \max\limits_{[a,b]}|f|$, 2-ая норма: $\|f\|_1 = \max\limits_{[a,b]}|f| + \max\limits_{[a,b]}|f'|$. Эти нормы не являются эквивалентными.

Нормы эквивалентны $\Leftrightarrow \exists\, c_1, c_2 \colon \|\cdot\|_0 \le c_1\|\cdot\|_1 \wedge \|\cdot\|_1 \le c_2\|\cdot\|_0$. Но в данном случае, не выполняется второе неравенство.

Если $\|\cdot\|_1 \le c_2\|\cdot\|_0$, то $\max|f'|$ оцениваете через $\max|f|$. Пусть $f_n(x) = \dfrac{1}{n}\sin(n^2x)$. Тогда $\max|f_n| \to 0$, но $f_n' = n\cos(n^2x)$ и $\max|f_n'| \to \infty$. То есть нормы не эквивалентны.

Открытые и замкнутые множества в метрических пространствах

Пусть (X, ρ) - метрическое пространство.

Опр: 1. Множество $\mathcal{U} \subset X$ называется открытым, если $\forall a \in \mathcal{U}$, $\exists\, B(a,r) \subset \mathcal{U}$.

Опр: 2. Множество $F \subset X$ называется замкнутым, если $X \setminus F$ - открытое.

Примеры:

(1) Открытый шар - открытое множество;

(2) Замкнутый шар - замкнутое множество;

□

(1) Возьмем шар $B(a,r) = \{\, x \mid \rho(a,x) < r \,\}$, возьмем точку b внутри этого шара, покажем, что она будет входить в $B(a,r)$ с некоторой своей окрестностью.

Пусть $\delta = r - \rho(a,b)$, возьмем шар $B(b,\delta)$. Проверим, что $\forall x \in B(b,\delta)$, $x \in B(a,r)$:

$$\rho(a,x) \le \rho(a,b) + \rho(b,x) < \rho(a,b) + \delta = \rho(a,b) + (r - \rho(a,b)) = r$$

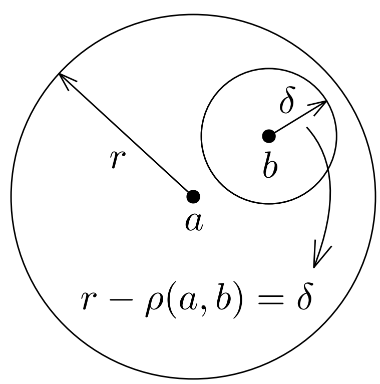

Рис. 1: Открытый шар - открытое множество.

(2) (Упр.): Возьмем шар $\overline{B}(a,r) = \{\, x \mid \rho(a,x) \le r \,\}$, покажем, что $X \setminus \overline{B}(a,r)$ - открытое множество.

Возьмем точку $b \notin \overline{B}(a,r)$, покажем, что она будет входить в $X \setminus \overline{B}(a,r)$ с некоторой своей окрестностью.

Поскольку $b \in X \setminus \overline{B}(a,r) \Rightarrow \rho(a,b) > r \Rightarrow$ пусть $\delta = \rho(a,b) - r > 0$, возьмем шар $B(b,\delta)$. Проверим, что $\forall x \in B(b,\delta)$, $x \in X \setminus \overline{B}(a,r)$:

$$\rho(a,b) \le \rho(a,x) + \rho(x,b) \Rightarrow \rho(x,a) \ge \rho(a,b) - \rho(x,b) > \rho(a,b) - \delta = \rho(a,b) - \rho(a,b) + r = r$$

■

Утв. 1. Пусть $(X, \|\cdot\|)$ и $F \subset X$ - конечномерное подпространство. Тогда F - замкнуто.

□ Пусть $F = L(e_1, \ldots, e_n)$, где $e_1, \ldots, e_n$ - линейно независимые вектора, а L - линейная оболочка, тогда

$$F = L(e_1, \ldots, e_n) = \{\, c_1 e_1 + \ldots + c_n e_n \,\},\ c_i \in \mathbb{R}$$

Возьмем $a \notin F$, для доказательства достаточно найти шар $B(a,r)\colon B(a,r) \cap F = \varnothing$.

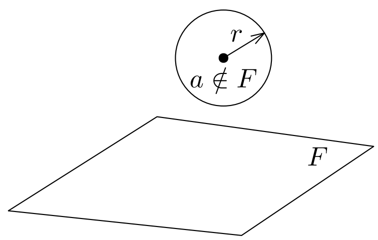

Рис. 2: Шар $B(a,r)\colon B(a,r) \cap F = \varnothing$.

Рассмотрим новое пространство: $F_{n+1} = L(e_1, \ldots, e_n, e_{n+1})$, $e_{n+1} = a$, ясно, что они все линейно независимы, иначе a выразился бы через $e_1, \ldots, e_n$ и тогда бы $a \in F$, но $a \notin F$. Тогда:

$$\forall x \in F_{n+1},\ x = c_1 e_1 + \ldots + c_n e_n + c_{n+1} e_{n+1},\ c_i \in \mathbb{R}$$

Введем на этом пространстве норму (проверка, что это норма - точно такая же, как и в $\mathbb{R}^n$ для координат):

$$\|x\|_2 = \sqrt{c_1^2 + \ldots + c_n^2 + c_{n+1}^2}$$

По этой норме, каково расстояние от векторов e_{n+1} до рассматриваемой плоскости F?

$F = \{\, c_{n+1} = 0 \,\}$ в пространстве F_{n+1} $(F \subset F_{n+1})$. Пусть $x = (c_1, \ldots, c_n, 0) \in F$, тогда

$$e_{n+1} = (0, \ldots, 0, 1) \Rightarrow \|x - e_{n+1}\|_2 = \sqrt{c_1^2 + \ldots + c_n^2 + 1^2} \ge 1$$

Если взять множество $\{\, x \in F_{n+1}\colon \|x - e_{n+1}\|_2 < 1 \,\}$, то оно не будет пересекаться с F.

Так как F_{n+1} - конечномерно, то $\|\cdot\|_2$ эквивалентно исходной норме $\|\cdot\|$ на F_{n+1}, в частности

$$\exists\, C > 0\colon \|\cdot\|_2 \le C \|\cdot\|$$

Шар $B\big(e_{n+1}, \frac{1}{C}\big) \cap F_{n+1} \subset \{\, x \in F_{n+1}\colon \|x - e_{n+1}\|_2 < 1 \,\}$ и, следовательно, не пересекается с $F \Rightarrow$

$$B\big(e_{n+1}, \tfrac{1}{C}\big) \cap F = \varnothing$$

■

Упр. 1. Показать на примере, что конечномерность важна (привести пример линейного подпространства, которое бесконечномерно, но не является замкнутым).

Свойства открытых и замкнутых множеств

Теорема 2. Верны следующие свойства:

(1) Объединение всякого набора открытых множеств и пересечение конечного набора открытых множеств, является открытым множеством;

(2) Пересечение всякого набора замкнутых множеств и объединение конечного набора замкнутых множеств, является замкнутым множеством;

□ (1) Пусть $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ - набор открытых множеств, возьмем точку $a \in \bigcup\limits_\alpha \mathcal{U}_\alpha \Rightarrow \exists\, \alpha_0 \colon a \in \mathcal{U}_{\alpha_0} \Rightarrow$

$$\exists\, B(a,r) \subset \mathcal{U}_{\alpha_0} \Rightarrow B(a,r) \subset \bigcup_\alpha \mathcal{U}_\alpha$$

Таким образом, объединение всякого набора открытых множеств является открытым множеством.

Пусть $\{\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_N\}$ - набор открытых множеств, возьмем точку $a \in \bigcap\limits_{k=1}^{N} \mathcal{U}_k \Rightarrow a \in \mathcal{U}_k,\ \forall k \Rightarrow$

$$\forall k,\ \exists\, B(a, r_k) \subset \mathcal{U}_k \Rightarrow r = \min\{r_1, \ldots, r_N\} \Rightarrow \forall k,\ B(a,r) \subset \mathcal{U}_k \Rightarrow B(a,r) \subset \bigcap_{k=1}^{N} \mathcal{U}_k$$

Таким образом, пересечение конечного набора открытых множеств является открытым множеством;

(2) Указание: $X \setminus F$ - открытое множество и используем формулу Моргана (см. прошлый семестр);

■

Rm: 2. Всякое открытое множество есть объединение открытых шаров:

$$\mathcal{U} = \bigcup_{a \in \mathcal{U}} B(a,r)$$

Топология точек множества метрического пространства

Пусть (X, ρ) - метрическое пространство и $A \subset X$.

Опр: 3. Точка $a \in A$ называется внутренней, если $\exists\, B(a, r) \subset A$.

Rm: 3. В открытом множестве все точки - внутренние.

Опр: 4. Точка a называется граничной, если $\forall B(a, r)$, $B(a, r) \cap A \neq \varnothing \wedge B(a, r) \cap (X \setminus A) \neq \varnothing$.

Опр: 5. Точка a называется предельной (для множества A), если $\forall B(a, r)$, $B(a, r) \cap A$ - бесконечное множество.

Опр: 6. Проколотый шар с центром в точке a радиуса r это множество: $B'(a, r) = B(a, r) \setminus \{a\}$.

Утв. 2. Точка a - предельная точка множества $A \Leftrightarrow \forall B(a, r)$, $B'(a, r) \cap A \neq \varnothing$.

$\square$
($\Rightarrow$) Очевидно, так как выкидывание одной точки из бесконечного множества ни на что не влияет и $\forall B(a, r)$, $B'(a, r) \cap A \neq \varnothing$.

($\Leftarrow$) (От противного): Пусть точка a: $\forall B(a, r)$, $B'(a, r) \cap A \neq \varnothing$ - не является предельной точкой, тогда $\exists\, B'(a, r_0)$ в котором лежит не более, чем конечное множество точек из A: $B(a, r_0) \cap A$ - конечное множество.

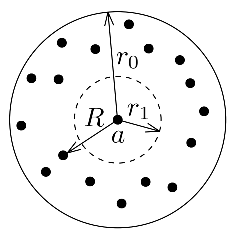

Рис. 3: Уменьшение шара.

Пусть $R = \min\limits_{x \in C} \rho(a, x)$, $C = B'(a, r_0) \cap A \Rightarrow$ уменьшим радиус шара таким образом, что $r_1 < R \Rightarrow B'(a, r_1) \cap A = \varnothing \Rightarrow$ противоречие. $\blacksquare$

Теорема 3. Следующие утверждения равносильны:

1) A - замкнуто;
2) A содержит все свои граничные точки;
3) A содержит все свои предельные точки;
4) Если $a_n \in A$ и $a_n \to a$, то $a \in A$;

$\square$
1) $\Rightarrow$ 2) Пусть a - граничная точка A, предположим, что $a \notin A$, так как A замкнуто, то $X \setminus A$ - открытое множество $\Rightarrow \exists\, B(a, r)$: $B(a, r) \cap A = \varnothing \Rightarrow$ противоречие с определением граничной точки.

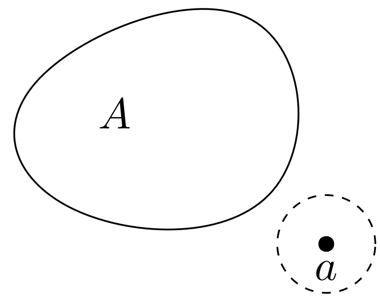

Рис. 4: В шаре $B(a, r)$ нет точек из $A \Rightarrow$ противоречие с определением граничной точки.

2) $\Rightarrow$ 3) Пусть a - предельная точка A, предположим, что $a \notin A$, тогда a - граничная, так как для предельной точки в её окрестности есть бесконечно много точек из A и сама точка $a \notin A$. Но все граничные точки должны $\in A \Rightarrow$ противоречие.

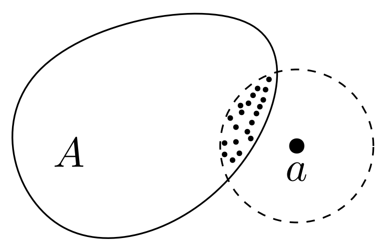

Рис. 5: Точка $a \notin A$ - предельная $\Rightarrow$ это граничная точка $\Rightarrow a \in A \Rightarrow$ противоречие.

3) $\Rightarrow$ 4) Возьмем последовательность точек $a_n \in A$, $a_n \to a$. Если $\exists\, n$: $a_n = a \Rightarrow$ выполнено.

Если $\forall n$, $a_n \neq a$, тогда a - предельная точка, поскольку $a_n \to a \Rightarrow$ в любой проколотой окрестности $B'(a, r)$ найдутся точки из $a_n \Rightarrow a \in A$.

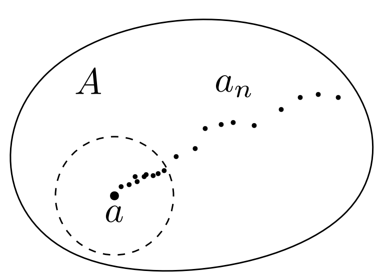

Рис. 6: $\forall n$, $a_n \neq a$, тогда a - предельная точка $\Rightarrow a \in A$.

4) $\Rightarrow$ 1) Предположим, что $X \setminus A$ не является открытым, тогда возьмем точку $a \in X \setminus A$, такую что не существует окрестности с центром в a, которая целиком бы лежала в $X \setminus A$:

$$\forall B\big(a, \tfrac{1}{n}\big),\ \exists\, a_n \in B\big(a, \tfrac{1}{n}\big)$$

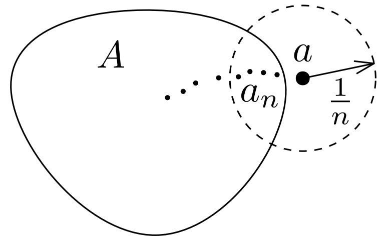

Рис. 7: Точки $a_n \in B\big(a, \frac{1}{n}\big) \Rightarrow a_n \to a \Rightarrow a \in A \Rightarrow$ противоречие.

Тогда получим последовательность $a_n \in A$: $\rho(a_n, a) \to 0 \Rightarrow a_n \to a \Rightarrow a \in A \Rightarrow$ противоречие. ■

Опр: 7. Множество $\overline{A} = A \cup \{$граничные точки $A\}$, называется замыканием множества A.

Утв. 3. Следующие утверждения верны:

1) $\overline{A}$ - замкнутое множество;
2) $\overline{A}$ - наименьшее замкнутое множество, содержащее A: $\overline{A} = \bigcap\limits_{A \subset F} F$, где F - замкнутые;
3) A - замкнуто $\Leftrightarrow A = \overline{A}$;

□

1) Пусть b - граничная точка $\overline{A} \Rightarrow$ в любой окрестности точки b будет точка из $\overline{A}$. По определению, $\overline{A}$ содержит два типа точек: либо это точка из A, либо это граничная точка A.

   В случае, когда это граничная точка из $A \Rightarrow$ можно взять окрестность этой точки, внутри окрестности точки b и она обязательно будет содержать точки из A (как граничная точка из A).

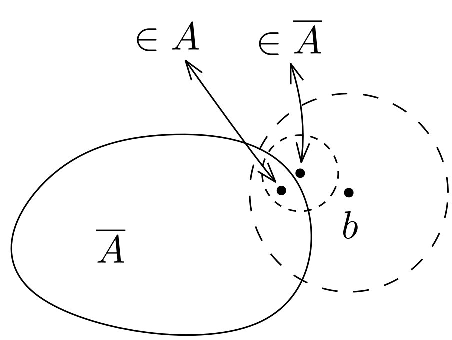

Рис. 8: b - граничная точка $\overline{A} \Rightarrow$ если $\exists$ граничная точка $A \Rightarrow$ в её окрестности найдем точку из A.

   Таким образом, в любой окрестности точки b есть точки из A и точки не из $\overline{A}$ (поскольку это граничная точка) $\Rightarrow b$ - граничная точка A и $b \in \overline{A}$;

2) Надо проверить, что в любом замкнутом множестве лежит $\overline{A} \Rightarrow$ если F - замкнуто и $A \subset F \Rightarrow$ граничные точки $A \subset F$.

   Пусть $a \notin F$ - граничная точка $A \Rightarrow$ так как, в любой окрестности есть элементы из $A \subset F$, а сама точка не из F, то a - граничная для F и должна в F лежать (так как, F - замкнутое множество);

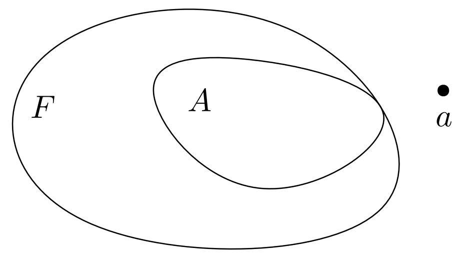

Рис. 9: $a \notin F$ - граничная точка $A \Rightarrow$ в её окрестности есть элементы из $A \Rightarrow a$ - граничная для F.

3) Уже доказали - смотри выше теорему. Если A замкнуто, то оно содержит все свои граничные точки $\Rightarrow A = \overline{A}$. И наоборот, если A содержит все свои граничные точки, то A - замкнуто;

■