Условный экстремум

В прошлый раз мы рассматривали задачу на условный экстремум:

$$\begin{cases} f(x) \to \text{extr!} \\ x \in l \end{cases}$$

где предполагали $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Для её решения мы начали рисовать множества уровня: $f(x) = f_0$ и искали решение там, где линия уровня f касалась бы линии, которая задает нам условие.

Идея: Ищем экстремумы в тех точках, в которых линии уровня исследуемой функции касаются линии задающей условия.

Задача: Типичной задачей рассматривали поиск экстремума на единичной окружности:

$$\begin{cases} x + y \to \text{extr!} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

В этом случае рисуем окружность, проводим линии уровня и смотрим точки соприкосновения.

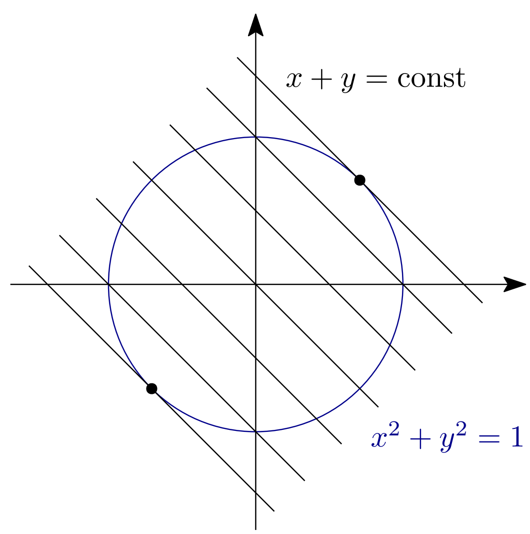

Рис. 1: Поиск точек экстремума на окружности.

Для того, чтобы разобраться с теорией условных экстремумов, оставляя при этом доступную геометрическую интерпритацию, для начала исследуем некоторые геометрические объекты.

Гладкие поверхности

Опр: 1. Множество $M^k \subset \mathbb{R}^n$ называется гладкой k-мерной поверхностью, если $\forall p \in M^k$ найдутся окрестности $Q(p)_x \subset \mathbb{R}^n$, $V(0)_u \subset \mathbb{R}^n$ и диффеоморфизм $f\colon Q \to V$ такой, что:

$$f\big(M^k \cap Q(p)_x\big) = V(0)_u \cap \{u_{k+1} = \ldots = u_n = 0\}$$

Попробуем визуализировать это понятие.

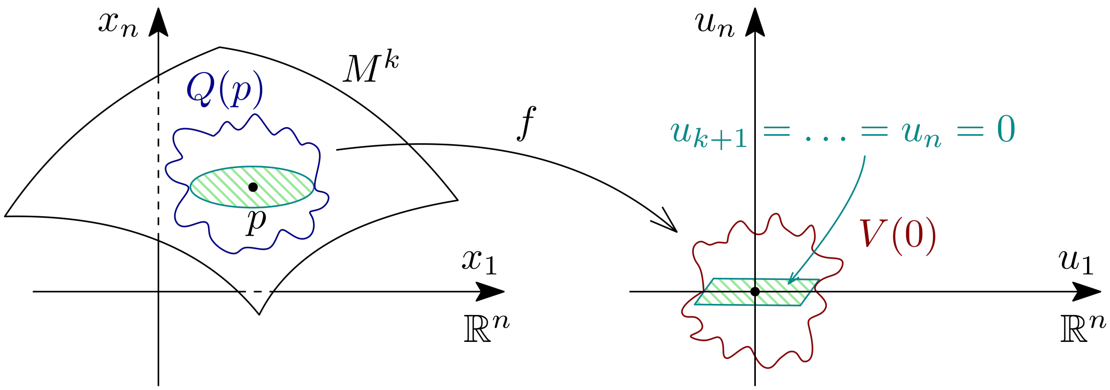

Рис. 2: Определение гладкой k-мерной поверхности.

То есть, гладкая k-мерная поверхность это такая поверхность, которую локально можно спрямить в k-мерную плоскость с помощью диффеоморфизма.

Rm: 1. В определении ничего не говорится про дополнительные свойства множества, только про то, что это подмножество $\mathbb{R}^n$, которое локально выпрямляется в k-мерную плоскость.

Заметим что этот объект мы уже встречали в виде множества решений уравнений, которое исследовалось в теореме о неявной функции $\Rightarrow$ оно является k-мерной поверхностью. Например, знаем что $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ и пусть $\{F(x,y) = 0\} \neq \varnothing$, тогда:

$$\{F(x,y) = 0\} = M^1 \subset \mathbb{R}^2$$

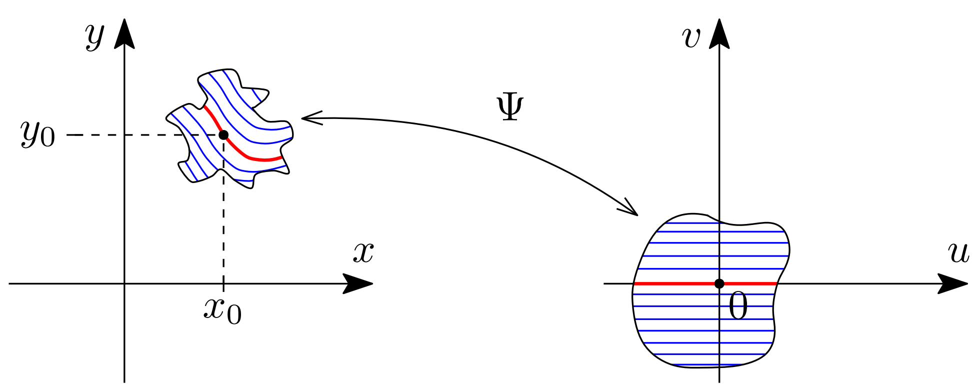

Рис. 3: Выпрямление кривой линии в одномерную прямую.

Следовательно, кривая в $\mathbb{R}^2$ которую можно выпрямить - это гладкая одномерная поверхность.

Утв. 1. M^k - гладкая k-мерная поверхность $\Leftrightarrow \forall p \in M^k$, $\exists \mathcal{W}(p)$, непрерывно дифференцируемые в ней функции $F_{k+1}, \ldots, F_n$ такие, что $dF_{k+1}, \ldots, dF_n$ - линейно независимы и выполнено следующее:

$$M^k \cap \mathcal{W}(p) = \{x \in \mathcal{W}(p) \mid F_{k+1}(x) = 0, \ldots, F_n(x) = 0\}$$

Rm: 2. Линейно независимые дифференциалы это то же самое, что и линейно независимые градиенты (т.е. задающие дифференциалы векторы). В случае одного n требуется невырожденность градиента.

Таким образом, любая k-мерная плоскость может быть задана, как множество решений $(n-k)$ линейных уравнений: Всякая двумерная плоскость в пространстве задается как множество решений из одного уравнения, всякая прямая в пространстве задается как решение системы из двух уравнений и так далее.

Пример: $\mathbb{R}^3$, $F(x, y, z) = 0$, функция невырождена (градиент у неё нигде не ноль). Если множество не пустое, то мы получили гладкую k-мерную поверхность. Сфера, конус, парабалоиды, гиперболоиды будут двумерными гладкими поверхностями (кроме особых точек). И наоборот, мы можем смотреть на решение системы уравнений, как на гладкую k-мерную поверхность.

$\square$

($\Leftarrow$) Условие независимости $dF_{k+1}, \ldots, dF_n$ по-другому можно сформулировать так:

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} \frac{\partial F_{k+1}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_{k+1}}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} = n - k$$

то есть, $(n-k)$ строчек этой матрицы линейно независимы. Тогда с точностью до нумерации координат можно написать, что минор порядка $(n-k)$ не равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_{k+1}}{\partial x_{k+1}} & \cdots & \frac{\partial F_{k+1}}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_{k+1}} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \neq 0$$

По условию, $p \in M^k \cap \mathcal{U}(p) \Rightarrow F_{k+1}(p) = \ldots = F_n(p) = 0$. Тогда для следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} F_{k+1}(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ F_n(\underbrace{x_1, \ldots, x_k}_{\widetilde{x}}, \underbrace{x_{k+1}, \ldots, x_n}_{\widetilde{y}}) & = & 0 \end{cases}$$

выполняются условия теоремы о неявной функции $\Rightarrow$ можем указать замену координат, которая множество решений этой системы в окрестности точки p превращает в пересечение открытой окрестности и плоскости, где координаты $\overline{k+1, n}$ равны нулю:

$$f\colon \begin{cases} w_i & = & \widetilde{x}_i - p_i,\ i = \overline{1, k} \\ w_j & = & F_j(\widetilde{x}, \widetilde{y}),\ j = \overline{k+1, n} \end{cases},\ f(p) = 0$$

Далее, аналогично доказательству теоремы о неявной функции, найдутся окрестности $Q(p) \subset \mathcal{W}(p)$ и $V(0)$ такие, что $f\colon Q(p) \to V(0)$ - локальный диффеоморфизм. Причем, по условию:

$$M^k \cap Q(P) \subset M^k \cap \mathcal{W}(p) \Rightarrow M^k \cap Q(p) = \{x \in Q(p) \mid F_{k+1}(x) = 0, \ldots, F_n(x) = 0\}$$

Тогда аналогично теореме о неявной функции можно проверить, что:

$$f\big(M^k \cap Q(p)\big) = V(0) \cap \{w_{k+1} = \ldots = w_n = 0\} = \{w \in V(0) \mid w_{k+1} = \ldots = w_n = 0\}$$

□

(⇒) Под действием отображения f верно: $\begin{cases} w_i &= \widetilde{x}_i - p_i,\ i=\overline{1,k} \\ w_j &= F_j(\widetilde{x},\widetilde{y}),\ j=\overline{k+1,n} \end{cases}$, тогда получим следующее:

$$(\widetilde{x},\widetilde{y}) \in M^k \cap Q(p) \Rightarrow w \in V(0), \begin{cases} w_i &= \widetilde{x}_i - p_i,\ i=\overline{1,k} \\ w_j &= F_j(\widetilde{x},\widetilde{y}) = 0,\ j=\overline{k+1,n} \end{cases}$$

(⇐) По определению диффеоморфизма, каждая точка из $V(0)$ есть образ какой-то точки из $Q(p)$. Получается, что:

$$\forall w \in V(0),\ \exists\,(\widetilde{x},\widetilde{y}) \in Q(p)\colon \begin{cases} w_i &= \widetilde{x}_i - p_i,\ i=\overline{1,k} \\ w_j &= F_j(\widetilde{x},\widetilde{y}),\ j=\overline{k+1,n} \end{cases}$$

Но поскольку $w_{k+1} = \ldots = w_n = 0$ и $w \in V(0) \Rightarrow (\widetilde{x},\widetilde{y}) \in Q(p),\ F_{k+1}(\widetilde{x},\widetilde{y}) = \ldots = F_n(\widetilde{x},\widetilde{y}) = 0.$ ■

Простоты ради, можно было определить замену:

$$f\colon \begin{cases} u_1' + p_1 = u_1 &= \widetilde{x}_1 \\ \vdots & \ddots \quad \vdots \\ u_k' + p_k = u_k &= \widetilde{x}_k \\ v_1 &= F_{k+1}(\widetilde{x},\widetilde{y}) \\ \vdots & \ddots \quad \vdots \\ v_{n-k} &= F_n(\widetilde{x},\widetilde{y}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u &= \widetilde{x} \\ v &= F(\widetilde{x},\widetilde{y}) \end{cases}$$

И в этом случае использовать доказательство теоремы о неявной функции, где $Q(p) = \mathcal{U}'(0) \times \mathcal{V}(\widetilde{y}_0)$, $V(0) = f\big(Q(p)\big)$ и $p = (\widetilde{x}_0, \widetilde{y}_0)$. Тогда автоматически получим:

$$f\big(\{(\widetilde{x},\widetilde{y}) \mid \widetilde{x} \in \mathcal{U}(\widetilde{x}_0),\ \widetilde{y} \in \mathcal{V}(\widetilde{y}_0),\ F(\widetilde{x},\widetilde{y}) = 0\}\big) = \{(u,v) \mid u \in \mathcal{U}(\widetilde{x}_0),\ v = 0\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f\big(\{(\widetilde{x},\widetilde{y}) \mid \widetilde{x} \in \mathcal{U}'(0),\ \widetilde{y} \in \mathcal{V}(\widetilde{y}_0),\ F(\widetilde{x},\widetilde{y}) = 0\}\big) = \{(u',v) \mid u' \in \mathcal{U}(0),\ v = 0\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f\big(\{(\widetilde{x},\widetilde{y}) \mid (\widetilde{x},\widetilde{y}) \in Q(p),\ F(\widetilde{x},\widetilde{y}) = 0\}\big) = \{(u',v) \mid (u',v) \in V(0),\ v = 0\}$$

(⇒) По определению гладкой k-мерной поверхности, $\forall p \in M^k$ найдутся окрестности $Q(p), V(0)$ и диффеоморфизм $f\colon Q \to V$ такой, что:

$$f\big(M^k \cap Q(p)\big) = V(0) \cap \{u_{k+1} = \ldots = u_n = 0\}$$

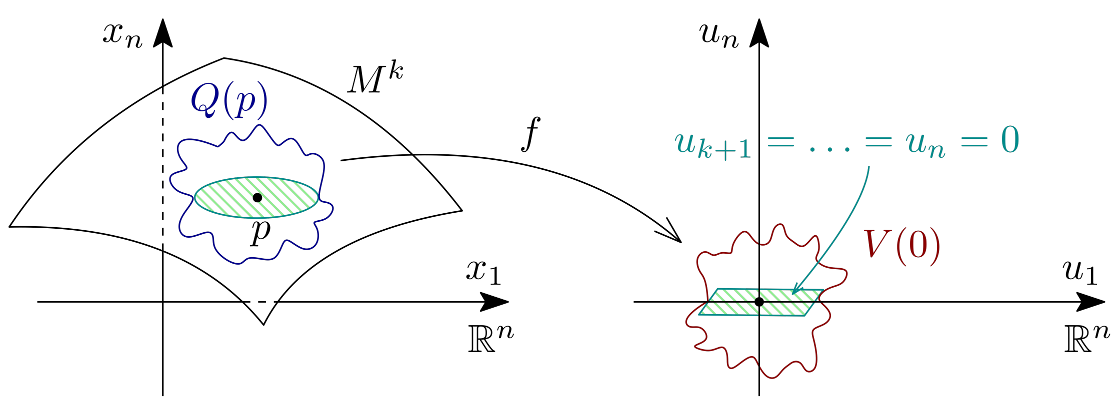

Рис. 4: Определение гладкой k-мерной поверхности.

Хотим найти функции $F_{k+1}, \ldots, F_n$, чтобы они задавали кусок $M^k \cap Q(p)$ как решение следующей системы уравнений: $F_{k+1}(x) = \ldots = F_n(x) = 0$. Возьмем $F_m(x) = u_m$ - функции, которые задают диффеоморфизм:

$$f\colon \begin{cases} u_1 & = & F_1(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u_n & = & F_n(x) \end{cases}$$

Множество $M^k \cap Q(p)$ представляет собой ровно те точки, которые под действием диффеоморфизма f перешли в точки $V(0) \cap \{u_{k+1} = \ldots = u_n = 0\}$, то есть в которых:

$$\begin{cases} F_{k+1}(x) & = & u_{k+1} & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ F_n(x) & = & u_n & = & 0 \end{cases}$$

Таким образом, мы получили $u_m = f(F_m) = F_m$ и по инвариантности I-го дифференциала мы получим:

$$du_m = \frac{\partial u_m}{\partial F_{k+1}} dF_{k+1} + \ldots + \frac{\partial u_m}{\partial F_m} dF_m + \ldots + \frac{\partial u_n}{\partial F_n} dF_n = 1 \cdot dF_m = dF_m$$

Следовательно, если бы оказались линейно зависимыми $dF_{k+1}, \ldots, dF_n$, тогда оказались бы линейно зависимыми и $du_{k+1}, \ldots, du_n$ в системе координат $u_1, \ldots, u_n$, что невозможно в силу того, что градиенты этих функций имеют вид:

$$\begin{pmatrix} \nabla u_{k+1} \\ \vdots \\ \nabla u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

То есть они линейно независимы. ■

Утв. 2. M^k - гладкая k-мерная поверхность $\Leftrightarrow$ в окрестности всякой своей точки M^k является графиком дифференцируемой функции $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{n-k}$.

Пример: $M^2 \subset \mathbb{R}^3$, в окрестности всякой своей точки это множество является графиком функции либо $z = f(x, y)$, либо $y = f(x, z)$, либо $x = f(y, z)$.

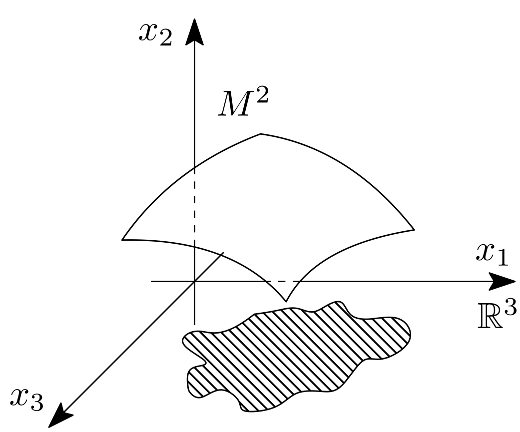

Рис. 5: Гладкая 2-мерная поверхность в пространстве.

Rm: 3. Таким образом, гладкая k-мерная поверхность это что-то составленное из лоскутков в виде графиков отображений. Это опять напоминает теорему о неявной функции.

Пример: $M^1 \subset \mathbb{R}^3$, в окрестности всякой своей точки это множество является графиком функции, который задается как:

$$\begin{cases} z = f_1(x) \\ y = f_2(x) \end{cases} \vee \begin{cases} x = f_1(z) \\ y = f_2(z) \end{cases} \vee \begin{cases} x = f_1(y) \\ z = f_2(y) \end{cases}$$

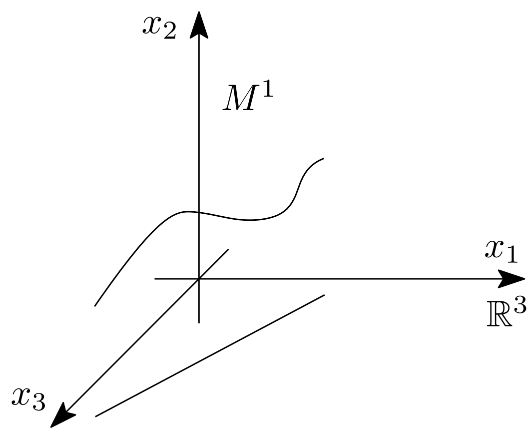

Рис. 6: Гладкая 1-мерная поверхность в пространстве.

□
(⇒) Верно по теореме о неявной функции.

(⇐) Равенства вида $x = f(y)$ (график функции) можно переписать так: $x - f(y) = 0$ (множество уровня отображения), то есть локально поверхность задается $(n-k)$ уравнениями. Применяем предыдущее утверждение и получаем требуемое. ■

Rm: 4. Рассмотрим снова определение гладкой k-мерной поверхности. Обозначим в нем:

$$V(0) \cap \{u_{k+1} = \ldots = u_n = 0\} = W \subset \mathbb{R}^k$$

W это открытое множество в $\mathbb{R}^k$ (открытая окрестность нуля в пространстве $\mathbb{R}^k$) в котором находятся координаты $u_1, \ldots, u_k$. Рассмотрим обратное отображение f^{-1}, оно задается как

$$f^{-1}(u_1, \ldots, u_k, u_{k+1}, \ldots, u_n) \colon V \to Q$$

Занулим последние $(n-k)$ координат и введем функцию g:

$$g = f^{-1}(u_1, \ldots, u_k, 0, \ldots, 0) \Rightarrow g \colon W \to \mathbb{R}^n,\ g(W) = Q \cap M^k$$

Следовательно, кусок поверхности $M^k \cap Q$ можно воспринимать так: есть k параметров: $u_1, \ldots, u_k$, которые бегают в пространстве $\mathbb{R}^k$ по некоторому открытому множеству и есть зависимость:

$$g \colon \begin{cases} x_1 = x_1(u_1, \ldots, u_k) \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ x_n = x_n(u_1, \ldots, u_k) \end{cases}$$

и когда эти k параметров меняются, то рисуется множество в $\mathbb{R}^n$. Получается параметрически заданная часть поверхности. Более того, g является непрерывно дифференцируемой функцией (как обратное к диффеоморфизму).

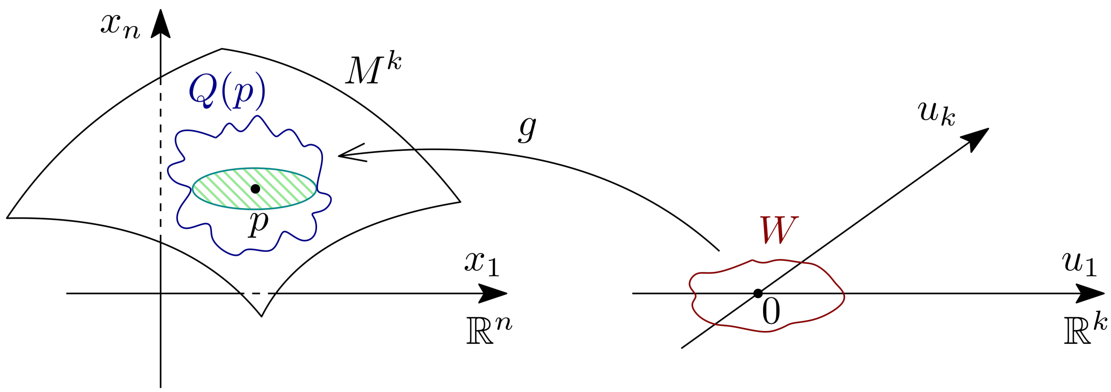

Рис. 7: Отображение g параметризует кусок окрестности, который лежит в Q.

Также отметим, что ранг матрицы Якоби этого отображения равен k:

$$\operatorname{rk} J_g = \operatorname{rk} \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial u_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_k} \end{pmatrix} = k$$

в силу того, что мы взяли обратное отображение к диффеоморфизму (оно невырожденное). В противном случае, если бы среди этих k столбцов оказались линейно зависимые, то ранг матрицы Якобои отображения $f^{-1}\colon x = x(u)$ был бы меньше n:

$$\operatorname{rk} J_{f^{-1}} = \operatorname{rk} \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial u_k} & \frac{\partial x_1}{\partial u_{k+1}} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial u_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_k} & \frac{\partial x_n}{\partial u_{k+1}} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{pmatrix} < n$$

А это противоречило бы определению диффеоморфизма (матрица была бы вырожденная). В результате, поверхность задается параметрически k параметрами, но они должны быть независимы друг от друга.

Теперь в задаче об условном экстремуме мы можем спокойно сказать, где же мы исследуем функцию на условный экстремум - мы будем исследовать её на гладкой k-мерной поверхности. Но нам понадобится ещё один объект, связанный с поверхностями - касательное пространство.

Касательное пространство

Пусть есть поверхность M^k. Как нам сказать, что в точке p её что-то касается? Начнем с более простой задачи. Пусть у нас есть кривая $\gamma(t)\colon (-1,1) \to \mathbb{R}^n$ (одномерная поверхность). Что естественно считать касанием этой кривой в какой-то точке? Вектор скорости. Естественно думать что этот вектор задает натянутую на него прямую, которая как раз и касается кривой $\gamma(t)$ в точке.

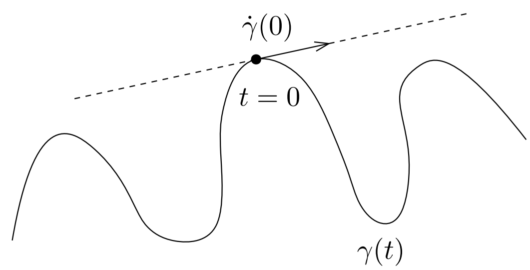

Рис. 8: Вектор скорости в точке $t = 0$ кривой $\gamma(t)$.

Будем считать что интуитивно понятно: если нарисовали кривую, то вектор скорости $\dot\gamma(t_0)$ объявляется касательным к этой кривой. Из этого легко объяснить что является касательной плоскостью.

Касательное пространство это линейное пространство. Что объявить векторами, которые касаются в точке p поверхности M^k? Проведем через эту точку кривую γ так, чтобы в точке p это было $\gamma(0)$ и просто будем вычислять вектор скорости $\dot\gamma$ и именно его объявим касательным вектором. Все вместе эти вектора должны образовать касательное пространство.

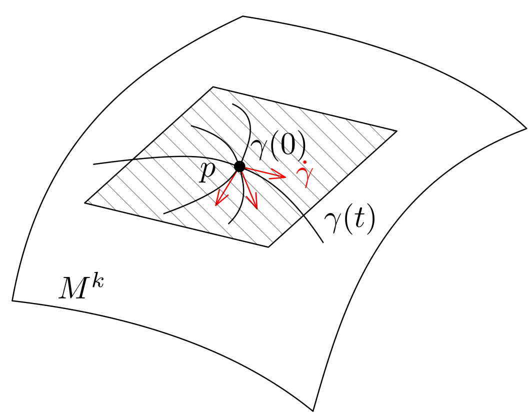

Рис. 9: Касательное пространство.

Опр: 2. Пусть M^k - гладкая k-мерная поверхность в $\mathbb{R}^n$, $p \in M^k$. Касательным пространством T_pM^k в точке p будем называть множество:

$$T_pM^k = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \exists\, \gamma\colon (-1,1) \to \mathbb{R}^n, \gamma(t) \in C(-1,1),\, \gamma(t) \in M^k,\, \gamma(0) = p,\, \dot\gamma(0) = v\}$$

где $\gamma(t) \in C(-1,1)$ означает что $\gamma(t)$ - гладкая кривая, то есть непрерывно дифференцируема на $(-1,1)$.

Утв. 3. T_pM^k это k-мерное линейное пространство.

$\square$ Пусть есть поверхность M^k, точка $p \in M^k$ и мы провели кривую $\gamma(t)$ через эту точку. Возьмем диффеоморфизм f, определяющий в окрестности точки p (в окрестности Q, где есть отображение) поверхность M^k. Тогда в координатах плоскости $u_1, \ldots, u_k$ мы получим проходящую через ноль гладкую кривую $u(t) = f\big(\gamma(t)\big)$ (поскольку f - диффеоморфизм). И наоборот, взяв кривую $u(t)$ и вернувшись в M^k отображением g (тем самым, которое задает параметризацию) получим $\gamma(t) = g\big(u(t)\big)$.

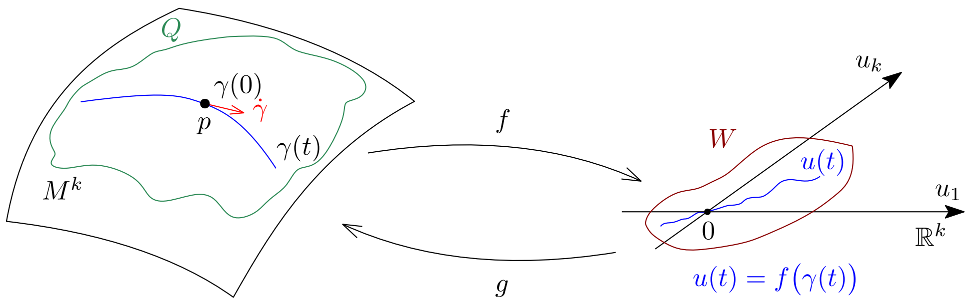

Рис. 10: Эквивалентность гладких кривых в W и Q.

Таким образом, рисовать гладкие кривые, проходящие через точку p на поверхности это то же самое, что брать гладкую кривую $u(t)$, проходящую через точку 0 в открытом множестве W и затем применять отображение g, которое параметризуют соответствующий кусок поверхности. Таким образом получили отображение $\gamma(t)$:

$$\gamma(t)\colon \begin{cases} x_1 & = & x_1\big(u_1(t), \ldots, u_k(t)\big) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & = & x_n\big(u_1(t), \ldots, u_k(t)\big) \end{cases}$$

Посчитаем вектор скорости в точке 0:

$$\dot\gamma(0)\colon \begin{cases} \dfrac{\partial x_1}{\partial u_1}\dot u_1(0) + \ldots + \dfrac{\partial x_1}{\partial u_k}\dot u_k(0) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial x_n}{\partial u_1}\dot u_1(0) + \ldots + \dfrac{\partial x_n}{\partial u_k}\dot u_k(0) \end{cases} \Rightarrow \dot\gamma(0) = \dot u_1(0)\cdot\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial x_n}{\partial u_1} \end{pmatrix} + \ldots + \dot u_k(0)\cdot\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u_k} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial x_n}{\partial u_k} \end{pmatrix}$$

Если мы возьмем в качестве $u(t)$ функцию следующего вида:

$$u(t) = \begin{pmatrix} \underset{1}{0} & \cdots & \underset{m-1}{0} & \underset{m}{t} & \underset{m+1}{0} & \cdots & \underset{k}{0} \end{pmatrix}$$

то есть двигаемся вдоль координатной оси $u_m \Rightarrow$ вектор $\dot\gamma(0)$ это просто столбец:

$$\dot\gamma(0) = \dot u_1(0)\cdot\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial x_n}{\partial u_1} \end{pmatrix} + \ldots + \dot u_m(0)\cdot\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u_m} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial x_n}{\partial u_m} \end{pmatrix} + \ldots + \dot u_k(0)\cdot\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u_k} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial x_n}{\partial u_k} \end{pmatrix} = 0 + \ldots + 1\cdot\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u_m} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial x_n}{\partial u_m} \end{pmatrix} + \ldots + 0 = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u_m} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial x_n}{\partial u_m} \end{pmatrix} = v_m$$

Следовательно, это касательный вектор, который получен так: в качестве $\gamma(t)$ взяли образ кривой, которая совпадает с осью координат в координатах $u_1, \ldots, u_k$. Тогда любой другой касательный вектор есть линейная комбинация этих векторов $v_1, \ldots, v_k$ или $\dot\gamma(0) \in \langle v_1, \ldots, v_k\rangle$:

$$\dot\gamma(0) = c_1 v_1 + \ldots + c_k v_k$$

И наоборот, если зададим константы $c_1, \dots, c_k$, то предъявим кривую γ у которой такой вектор скорости. Если задали набор $(c_1, \dots, c_k)$, то в качестве $\gamma(t)$ возьмем то, что получается из кривой $u(t)$ вида:

$$u(t) = \begin{pmatrix} c_1 t & c_2 t & \dots & c_k t \end{pmatrix}$$

Такой кривой мы опишем движение вдоль вектора $\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_k \end{pmatrix}$ на плоскости координат $u_1, \dots, u_k$. Получается, что $T_p M^k$ это в точности линейная оболочка векторов $v_1, \dots, v_k$:

$$T_p M^k = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$$

Это ровно те вектора из которых состояла матрица отображения параметризующего кусок поверхности. Мы говорили, что ранг этой матрицы равен $k \Rightarrow$ линейная оболочка состоит из k линейно независимых векторов. Следовательно, $T_p M^k$ это линейное k-мерное пространство. ■

Пример в $\mathbb{R}^3$

Рассмотрим поверхность $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ и координаты u_1, u_2. Отображение $g\colon W \to Q \subset M^2$ параметризует кусок поверхности M^2. Возьмем движение вдоль оси $u_1 \Rightarrow$ под действием g через точку p пройдет кривая. Возьмем движение вдоль оси $u_2 \Rightarrow$ под действием g через точку p пройдет еще одна кривая.

Таким образом, рисуя сетку координат в W, мы одновременно рисуем сетку координат (но уже кривую) на поверхности M^2. И каждая точка поверхности однозначно определяется значениями u_1, u_2 в системе координат Ou_1u_2. Поэтому очень часто (u_1, u_2) называют локальными координатами.

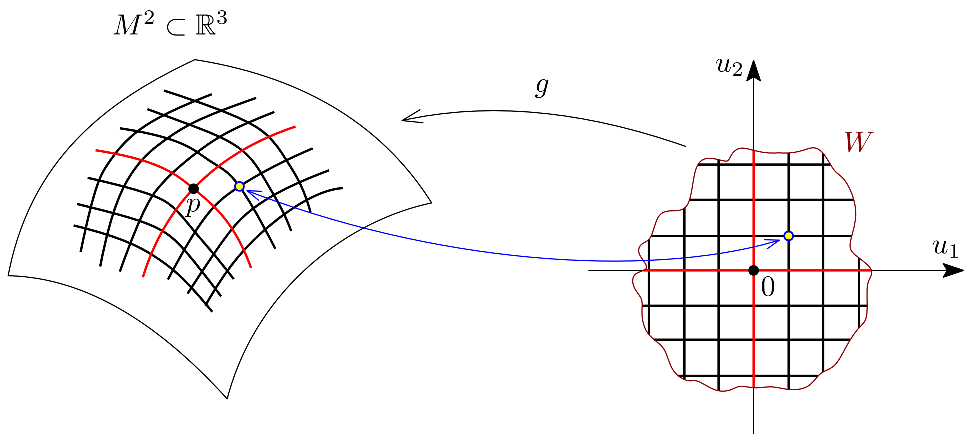

Рис. 11: Локальные координаты.

Уберем сетку и оставим только то, что проходит через точку p. Возьмем касательные вектора в этой точке: $\frac{\partial x}{\partial u_1}$ и $\frac{\partial x}{\partial u_2}$. Любой другой касательный вектор будет выражаться через них. Следовательно, вся касательная плоскость будет натянута на эти два вектора.

Более того, любой вектор который выразим через $\frac{\partial x}{\partial u_1}$ и $\frac{\partial x}{\partial u_2}$ можно получить как образ кривой (а на самом деле прямой) линии $\begin{pmatrix} c_1 t & c_2 t \end{pmatrix}$ в Ou_1u_2. Тогда c_1, c_2 (в силу формулы для вектора скорости) будут коэффициентами перед $\frac{\partial x}{\partial u_1}$ и $\frac{\partial x}{\partial u_2}$ соответственно. Конкретнее, в доказательстве выше получили:

$$\dot{\gamma}(0) = \dot{u}_1(0) \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial x_n}{\partial u_1} \end{pmatrix} + \dot{u}_2(0) \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial x_n}{\partial u_2} \end{pmatrix} = \dot{u}_1(0) \cdot \frac{\partial x}{\partial u_1} + \dot{u}_2(0) \cdot \frac{\partial x}{\partial u_2}$$

Если в качестве $u(t)$ мы возьмем $\big(t \quad 0\big)$, то $\dot{\gamma}(0) = \frac{\partial x}{\partial u_1}$, то есть $\frac{\partial x}{\partial u_1}$ и $\frac{\partial x}{\partial u_2}$ являются касательными векторами, а любой другой касательный вектор является их линейной комбинацией. И наоборот, всякая их линейная комбинация есть касательный вектор $\big($должны подобрать $u(t)$ так, чтобы $\dot{u}_1(0) = c_1$ и $\dot{u}_2(0) = c_2$ и, например, подойдет $\big(c_1 t \quad c_2 t\big)\big)$.

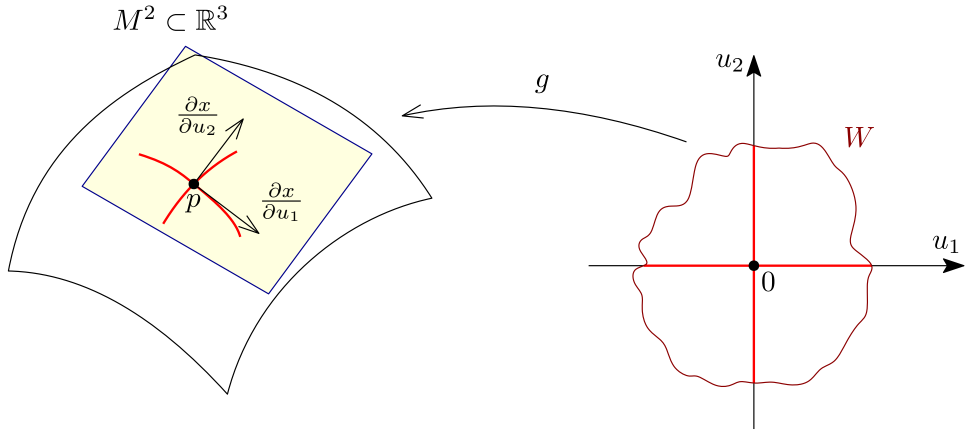

Рис. 12: Касательная плоскость в точке p.

<u>**Идея**</u>: Мы взяли вектора, соответствующие движению по осям координат в Ou_1u_2 и на них натянули плоскость, которая как раз и будет представлять из себя касательное пространство.

Утв. 4. Если M^k в окрестности точки p задается системой уравнений: $F_{k+1}(x) = 0, \ldots, F_n(x) = 0$, где дифференциалы $dF_{k+1}, \ldots, dF_n$ - линейно независимы, то касательное пространство есть решение следующей системы уравнений:

$$v \in T_pM^k \Leftrightarrow \begin{cases} \langle \nabla F_{k+1}(p), v \rangle & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle \nabla F_n(p), v \rangle & = & 0 \end{cases}$$

Rm: 5. Это уже частично известно нам. Возьмем в $\mathbb{R}^n$ множество заданное как $F(x) = 0$, то есть множество уровня хорошей функции F. Градиент этой функции будет перпендикулярен множеству уровня (соответственно, если двигаемся перпендикулярно градиенту, то значения функции не меняются).

Теперь это приобретает конкретный смысл: если функция F невырожденная, то $F(x) = 0$ представляет из себя $(n-1)$-мерную поверхность, а вектор градиента становится ортогональным вектором к её касательному пространству. Тогда система уравнений теоремы приобретает вид:

$$T_pM^k = \{v \colon v \perp \nabla F(p)\} = \{v \mid \langle \nabla F(p), v \rangle = 0\}$$

Касательная плоскость к $F(x) = 0$ в точке $x_0 = p$ это:

$$\langle x - x_0, \nabla F(x_0) \rangle = 0$$

Из аналитической геометрии, чтобы написать к $F(x, y, z) = 0$ касательную плоскость необходимо взять в точке:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot (x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot (y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot (z - z_0) = 0$$

и мы получим уравнение касательной плоскости. Это плоскость состоящая из векторов ортогональных градиенту F, а значит из векторов принадлежащих касательному пространству (по утверждению выше).

□ Пусть $v \in T_pM^k$, мы знаем что $v = \dot{\gamma}(0)$ для гладкой кривой, лежащей в M^k. Если кривая $\gamma \in M^k$, то $F_{k+1}\big(\gamma(t)\big) = 0, \ldots, F_n\big(\gamma(t)\big) = 0$. Продифференцируем эту систему в точке $t = 0$:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}F_{k+1}\big(\gamma(t)\big)\Big|_{t=0} & = & 0 & = & \langle \nabla F_{k+1}(p), \dot{\gamma}(0)\rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{d}{dt}F_{n}\big(\gamma(t)\big)\Big|_{t=0} & = & 0 & = & \langle \nabla F_{n}(p), \dot{\gamma}(0)\rangle \end{cases}$$

где $\gamma(0) = p$. То есть T_pM^k лежит в пространстве решений системы уравнений:

$$\begin{cases} \langle \nabla F_{k+1}(p), v\rangle & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle \nabla F_{n}(p), v\rangle & = & 0 \end{cases}$$

Эта система в свою очередь состоит из $n - k$ невырожденных уравнений. Размерность пространства решений однородной системы из $n - k$ уравнений это k. Одно k-мерное пространство лежит в другом, но так может быть только если они совпадают. ■