Мотивация интеграла Римана

Ранее мы обсуждали неопределенные интегралы. Мы пришли к выводу, что кроме очень узкого класса функций первообразные найти (записав конечную формулу) очень трудно или почти невозможно. Возникает вопрос: как определять первообразные кроме алгебраического вычисления путем сведения к известным?

Пусть есть интервал (a, b) и функция f. Мы хотим найти первообразную $F\colon F' = f$. Пусть $F(x_0) = 0$, где $x_0 \in (a, b)$, хотим найти $F(x)$ в точке $x \in (a, b)$. Если x и x_0 мало отличаются, то:

$$F(x) = F(x) - F(x_0) \approx F'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow F(x) \approx f(x_0)(x - x_0)$$

Здесь "примерно" такое же, как и в определении дифференцируемости, то есть можно записать так:

$$F(x) = f(x_0)(x - x_0) + \overline{o}\big((x - x_0)\big)$$

Но нас интересуют значения функции F не только рядом с точкой x_0, но вообще на интервале (a, b).

<u>**Идея**</u>: Умея на маленьких промежутках $[x_0, x_0 + \varepsilon]$ хотя бы приблизительно указывать значения F, мы хотели бы научиться указывать значения на всем промежутке $[x_0, x]$.

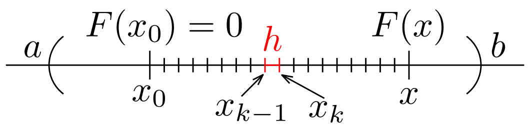

Рис. 1: Нахождение значения функции F в любой точке отрезка $[x_0, x]$.

Разобьем промежуток $[x_0, x]$ точками x_k и запишем $F(x)$ как сумму приращений на этих отрезках:

$$F(x) = \sum_k \big(F(x_k) - F(x_{k-1})\big)$$

Таким образом в сумме стоят приращения функции F на маленьких отрезках. Пусть $x = x_N$, распишем эту сумму подробнее:

$$F(x) = F(x_N) - F(x_{N-1}) + F(x_{N-1}) - F(x_{N-2}) + \ldots + F(x_1) - F(x_0) = F(x_N) - F(x_0) = F(x_N)$$

Поскольку приращения маленькие, то каждое слагаемое в этой сумме можно заменить таким:

$$F(x) = \sum_k \big(F(x_k) - F(x_{k-1})\big) = \sum_k \Big(f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) + \overline{o}\big((x_k - x_{k-1})\big)\Big)$$

Если это $\overline{o}$ не зависит от отрезка на котором мы его рассматриваем:

$$\overline{o}\big((x_k - x_{k-1})\big) = \overline{o}(1)\cdot(x_k - x_{k-1}),\ \lim_{x_k \to x_{k-1}} \overline{o}(1) = \lim_{h \to 0} \overline{o}(1) = 0,\ h = x_k - x_{k-1},\ \forall k = \overline{1, N}$$

и если мы можем его сделать единым для всех отрезков, то их сумма будет равна:

$$\sum_k \overline{o}\big((x_k - x_{k-1})\big) = \overline{o}(1)\cdot \sum_k (x_k - x_{k-1}) = \overline{o}(1)\cdot(x - x_0)$$

Выбирая все больше точек разбиения и мельче отрезки разбиения, эта сумма устремится к нулю:

$$\lim_{h \to 0} \overline{o}(1) = 0 \Rightarrow \lim_{h \to 0} \sum_k \overline{o}\big((x_k - x_{k-1})\big) = 0$$

Следовательно функция $F(x)$ это в определенном смысле следующий предел:

$$F(x) = \lim_{h \to 0} \sum_k f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})$$

Чтобы избежать использования бесконечно малых, мы можем воспользоваться теоремой Лагранжа:

$$F(x) = \sum_k \big(F(x_k) - F(x_{k-1})\big) = \sum_k f(c_k)(x_k - x_{k-1}),\ c_k \in [x_{k-1}, x_k]$$

Но тогда не ясно какие точки c_k необходимо брать, теорема Лагранжа никакого конструктивного ответа как выбирать c_k не дает. С другой стороны, если мы можем восстанавливать $F(x)$ таким способом, то наверное ответ не должен зависеть от выбора точки c_k. А если мы будем брать произвольные c_k, то возникнут бесконечно малые величиные ($\overline{o}$).

В результате, возникают вопросы: как правильно эту конструкцию формализовать, в каком смысле понимать здесь предел и для каких функций f это сработает? На эти вопросы можно ответить используя интеграл Римана.

Интеграл Римана

Пусть имеется отрезок $[a, b]$.

Опр: 1. Разбиением $\mathbb{T}$ на отрезке $[a, b]$ назовем набор точек: $\mathbb{T} = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b\}$.

Опр: 2. Отрезками разбиения $\mathbb{T}$ будем называть отрезки Δ_k такие, что:

$$\Delta_k = [x_{k-1}, x_k],\ |\Delta_k| = x_k - x_{k-1},\ k = \overline{1, N},\ \sum_{k=1}^{N} |\Delta_k| = b - a$$

Опр: 3. Масштабом или параметром разбиения $\lambda(\mathbb{T})$ будем называть длину наибольшего отрезка разбиения:

$$\lambda(\mathbb{T}) = \max_k |\Delta_k|$$

Опр: 4. Отмеченным разбиением будем называть пару $(\mathbb{T}, \xi)$, где $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_N)$, $\xi_k \in \Delta_k$ - набор точек.

Rm: 1. Проще говоря, отмеченное разбиение это выбранные в каждом отрезке разбиения точки (говорят отмеченные точки).

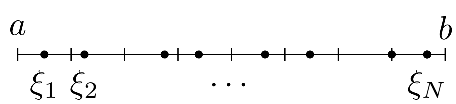

Рис. 2: Отмеченное разбиение $(\mathbb{T}, \xi)$.

Пусть на $[a, b]$ задана функция f.

Опр: 5. Римановой суммой называется сумма $\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) = \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)\cdot|\Delta_k| = f(\xi_1)\cdot|\Delta_1| + \ldots + f(\xi_N)\cdot|\Delta_N|$.

Риманова сумма по форме это ровно то, что мы писали ранее для восстановления первообразной. Но помимо этого, она несёт в себе достатчно простой геометрический смысл.

Геометрический смысл: Риманова сумма представляет из себя сумму площадей прямоугольников, которая приближается к площади подграфика.

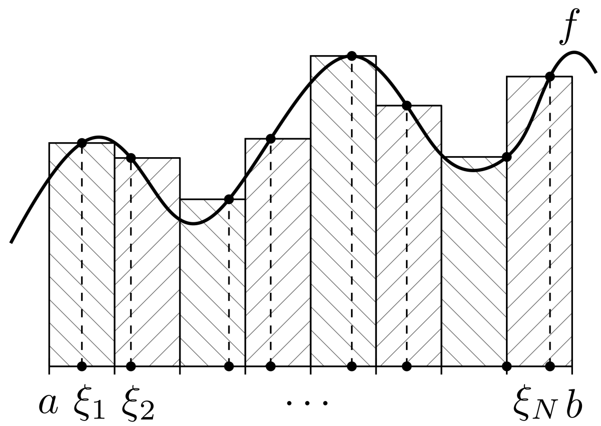

Рис. 3: Риманова сумма $\sigma(f, \mathbb{T}, \xi)$ для функции f как сумма площадей прямоугольников.

Опр: 6. Функция f интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$ и число I - её интеграл, если:

$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists\, \delta > 0 \colon \forall (\mathbb{T}, \xi),\, \lambda(\mathbb{T}) < \delta \Rightarrow |\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) - \mathrm{I}| < \varepsilon$$

Число I прянято называть определенным интегралом и обозначать следующим образом:

$$\mathrm{I} = \int\limits_a^b f(x)dx$$

Rm: 2. Определение должно напоминать определение предела, но здесь нет единственного параметра, который куда-то стремится. Например, при каждом значении параметра может быть сколь угодно много отмеченных разбиений, удовлетворяющих свойству $\lambda(\mathbb{T}) < \delta$.

Rm: 3. Также заметим, что никаких ограничений на ξ нет, то есть отмеченные точки могут быть какими угодно в отрезках разбиения.

На самом деле интегрируемость по Риману может быть записана на языке пределов по базе.

Интеграл Римана как предел по базе

Вспомним определение из предыдущего семестра. Пусть $X \neq \varnothing$.

Опр: 7. Базой называется такой непустой набор $\mathfrak{B}$ подмножеств X, что

(1) $\varnothing \notin \mathfrak{B}$;

(2) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B},\, \exists\, B_3 \in \mathfrak{B} \colon B_3 \subset B_1 \cap B_2$;

Опр: 8. Число $A = \lim\limits_{\mathcal{B}} f$ называется пределом f по базе $\mathfrak{B}$, если:

$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists\, B \in \mathfrak{B} \colon \forall x \in B,\, |f(x) - A| < \varepsilon$$

Пусть $X = \{(\mathbb{T}, \xi)\}$ - множество всех возможных разбиений. В качестве элементов базы возьмем всевозможные наборы B_δ, где B_δ это все разбиения масштаб которых меньше δ:

$$\mathfrak{B} = \{B_\delta\},\, B_\delta = \{(\mathbb{T}, \xi) \mid \lambda(\mathbb{T}) < \delta\},\, \delta > 0$$

Утв. 1. Заданное таким образом множество $\mathfrak{B}$ является базой.

□ Проверим по определению, что $\mathfrak{B}$ - база:

(1) Какое бы малое $\delta > 0$ мы не задали, всегда можно разбить отрезок таким образом, что шаг будет меньше $\delta \Rightarrow \varnothing \notin \mathfrak{B}$;

(2) $\forall B_{\delta_1}, B_{\delta_2} \in \mathfrak{B}$, $\exists\, B_{\min\{\delta_1,\delta_2\}} \in \mathfrak{B} \colon B_{\min\{\delta_1,\delta_2\}} \subset B_{\delta_1} \cap B_{\delta_2}$;

■

Rm: 4. Обычно вместо предела по базе $\mathfrak{B}$ пишут предел при $\lambda(\mathbb{T}) \to 0$, понимая что это описывается как предел по базе.

Тогда, определенный интеграл Римана от a до b функции f это просто предел по заданной базе:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\mathfrak{B}} \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) = \lim_{\lambda(\mathbb{T}) \to 0} \sigma(f, \mathbb{T}, \xi)$$

Или строго по определению:

$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists B_\delta \colon \forall (\mathbb{T}, \xi) \in B_\delta \Rightarrow \left| \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) - \int\limits_a^b f(x)dx \right| < \varepsilon$$

Отметим, что можно было бы взять все свойства предела по базе и переформулировать их как свойства интеграла Римана: арифметика пределов, переход к пределам в неравенствах, единственность пределов, критерий Коши (не обсуждали) и так далее. Мы лишь отметим что из этого следует единственность пределов $\Rightarrow$ единственность интегралов Римана.

Примеры определенных интегралов

1) $f(x) \equiv 1$, по определению: $\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) = \sum\limits_{k=1}^{N} f(\xi_k) \cdot |\Delta_k| = \sum\limits_{k=1}^{N} |\Delta_k| = b - a \Rightarrow \int\limits_a^b 1 \cdot dx = b - a$;

2) $f(x) = \mathcal{D}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ - функция Дирихле. Если $\xi_k \in \mathbb{Q}$, то $\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) = b - a$. Если же $\xi_k \notin \mathbb{Q}$, то $\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) = 0$. Получается что эта функция не интегрируема.

   Пусть это не так и функция интегрируема, тогда в малом масштабе разбиения будет верно:

$$|\sigma - A| < \frac{b - a}{2}$$

   Но это бы одновременно означало, что $b - a$ отлично от A на меньше, чем $\frac{b-a}{2}$ и 0 отличен от A на эту же величину $\Rightarrow$ нет такого предела $\Rightarrow$ функция Дирихле не является интегрируемой;

3) $f(x) = \mathbb{I}_J(x) = \begin{cases} 1, & x \in J \\ 0, & x \notin J \end{cases}$, где $J \in [a, b]$ - это промежуток с концами $c \leq d$, где $a \leq c \leq d \leq b$.

Утв. 2. Функция $f(x) = \mathbb{I}_J(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и $\int\limits_a^b f(x)dx = d - c$.

□ Точки c и d могут находиться внутри отрезка разбиения или быть на одном из концов такого отрезка (то есть c или d это какой-то x_k разбиения). Следовательно, все множество отрезков $\{\Delta_k\}$ мы можем разбить на три группы:

(I) Отрезки содержащие c и d. Поскольку обе точки могут лежать на концах отрезков, то их число будет не больше 4;

(II) Отрезки внутри интервала (c, d);

(III) Отрезки в дополнении к $[c, d]$;

Эти три группы не пересекаются и $\{\Delta_k\} = (\mathrm{I}) \sqcup (\mathrm{II}) \sqcup (\mathrm{III})$. Построим Риманову сумму:

$$\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) = \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)\cdot|\Delta_k| = \sum_{k:\ \Delta_k \in (\mathrm{I})} f(\xi_k)\cdot|\Delta_k| + \sum_{k:\ \Delta_k \in (\mathrm{II})} f(\xi_k)\cdot|\Delta_k| + \sum_{k:\ \Delta_k \in (\mathrm{III})} f(\xi_k)\cdot|\Delta_k| =$$

$$= \underbrace{\sum_{k:\ \Delta_k \in (\mathrm{I})} f(\xi_k)\cdot|\Delta_k|}_{\geq 0} + \sum_{k:\ \Delta_k \subset (c,d)} f(\xi_k)\cdot|\Delta_k| + 0 = \sum_{k:\ \Delta_k \in (\mathrm{I})} f(\xi_k)\cdot|\Delta_k + \sum_{k:\ \Delta_k \subset (c,d)} |\Delta_k|$$

Поскольку отрезков из группы (I) не больше 4, то:

$$0 \leq \sum_{k:\ \Delta_k \in (\mathrm{I})} f(\xi_k)\cdot|\Delta_k| \leq 4\lambda(\mathbb{T})$$

Сумма длин отрезков внутри интервала (c, d) заведомо не больше, чем $d - c$. Эта же сумма отличается от $d - c$ не больше, чем на сумму длин интервалов покрывающих c и d, то есть $2\lambda(\mathbb{T})$:

$$d - c - 2\lambda(\mathbb{T}) \leq \sum_{k:\ \Delta_k \subset (c,d)} |\Delta_k| \leq d - c$$

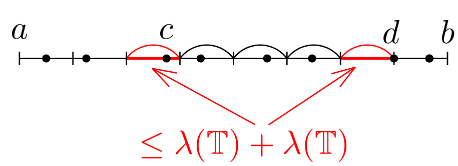

Рис. 4: Отрезки покрывающие c и d рядом с интервалом (c, d).

Подводя итог, мы получаем:

$$-2\lambda(\mathbb{T}) \leq \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) - (d - c) \leq 4\lambda(\mathbb{T})$$

По определению:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \delta = \frac{\varepsilon}{4} > 0,\ \forall (\mathbb{T}, \xi), \lambda(\mathbb{T}) < \delta \Rightarrow |\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) - (d - c)| \leq 4\lambda(\mathbb{T}) < 4\delta < \varepsilon$$

■

Свойства интеграла Римана

Почти все свойства интеграла Римана будут унаследованы от пределов.

1) (**Линейность**): Если f и g интегрируемы по Риману на $[a, b]$, то $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ функция $\alpha \cdot f + \beta \cdot g$ интегрируема по Риману и верно:

$$\int\limits_a^b (\alpha \cdot f + \beta \cdot g) dx = \alpha \int\limits_a^b f dx + \beta \int\limits_a^b g dx$$

□ Рассмотрим сразу $\delta > 0$ общее для f и g (взяли минимальное из δ_f, δ_g):

$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists \delta > 0 \colon \forall (\mathbb{T}, \xi),\, \lambda(\mathbb{T}) \Rightarrow \left| \int\limits_a^b f dx - \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) \right| < \varepsilon \wedge \left| \int\limits_a^b g dx - \sigma(g, \mathbb{T}, \xi) \right| < \varepsilon$$

Заметим что по определению Римановой суммы:

$$\sigma(\alpha \cdot f + \beta \cdot g, \mathbb{T}, \xi) = \alpha \cdot \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) + \beta \cdot \sigma(g, \mathbb{T}, \xi)$$

Оценим следующую разность через неравенство треугольника:

$$\left| \alpha \int\limits_a^b f dx + \beta \int\limits_a^b g dx - \sigma(\alpha \cdot f + \beta \cdot g, \mathbb{T}, \xi) \right| \leq |\alpha| \cdot \left| \int\limits_a^b f dx - \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) \right| + |\beta| \cdot \left| \int\limits_a^b g dx - \sigma(g, \mathbb{T}, \xi) \right| \leq C\varepsilon$$

где $C = |\alpha| + |\beta|$, но константа при всяком ε не важна. ■

Следствие 1. Пусть $J_1, \ldots, J_M$ - любые промежутки в отрезке $[a, b]$. Следующая функция:

$$f(x) = \sum_{m=1}^{M} c_m \cdot \mathbb{I}_{J_m}(x)$$

интегрируема по Риману и её интеграл равен:

$$\int\limits_a^b f(x) dx = \sum_{m=1}^{M} c_m \cdot |J_m|$$

□ Следует сразу же из примера выше и линейности. ■

2) (**Монотонность**): Если f и g интегрируемы на $[a, b]$ и $f \leq g$ на $[a, b]$, то верно:

$$\int\limits_a^b f(x) dx \leq \int\limits_a^b g(x) dx$$

□ Достаточно доказать для $f \equiv 0$, так как:

$$\int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b g(x)dx \Leftrightarrow 0 \leq \int\limits_a^b \big(g(x) - f(x)\big)dx$$

Покажем, что если $g \geq 0$, то $\int\limits_a^b g(x)dx \geq 0$. По определению интеграла Римана:

$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists\, \delta > 0\colon \forall (\mathbb{T}, \xi),\, \lambda(\mathbb{T}) < \delta \Rightarrow \int\limits_a^b g dx \geq \sigma(g, \mathbb{T}, \xi) - \varepsilon \geq 0 - \varepsilon = -\varepsilon \Rightarrow \varepsilon \to 0 \Rightarrow \int\limits_a^b g(x)dx \geq 0$$

где $\sigma(g, \mathbb{T}, \xi) = \sum\limits_{k=1}^{N} g(\xi_k)\cdot|\Delta_k| \geq 0$, так как $g(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, b]$. ■

Следствие 2. (Теорема о среднем) Пусть f интегрируема на отрезке $[a, b]$ и $m \leq f \leq M$, тогда $\exists\, \mu \in [m, M]$ такая, что:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \mu\cdot(b - a)$$

Более того, если $f \in C[a, b]$, то $\mu = f(c)$ для некоторого $c \in [a, b]$.

Геометрический смысл: Интеграл Римана несет в себе смысл площади под графиком функции. Теорема говорит о том, что между минимальным и максимальным значением функции f найдется такое значение $f(c) = \mu$, что если проведём линию $y = \mu$ и возьмем площадь прямоугольника под этой линией на отрезке $[a, b]$, то она будет такой же, как и площадь под графиком f.

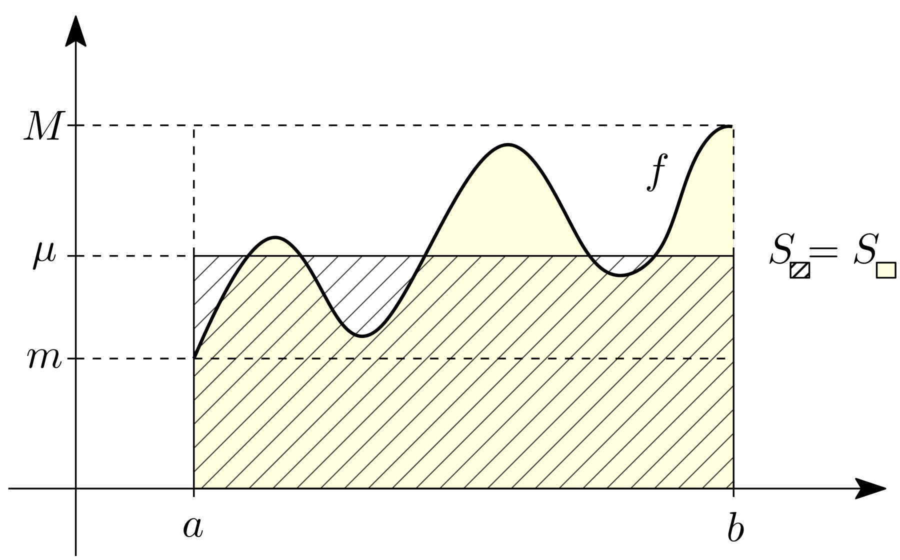

Рис. 5: Геометрический смысл теоремы о среднем.

Или что то же самое, площадь под графиком можно заменить площадью прямоугольника выбрав в качестве высоты некоторое значение между минимумом и максимумом функции f.

☐ Из неравенств $m \leq f(x) \leq M$ перейдем в интегралы, где по монотонности:

$$m\cdot(b-a) = \int\limits_a^b m\cdot dx \leq \int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b M\cdot dx = M\cdot(b-a)$$

Разделим на $(b-a) > 0$ - положительное число, получим:

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx \leq M$$

отсюда возьмем $\mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int\limits_a^b f(x)dx \Rightarrow (b-a)\cdot\mu = \displaystyle\int\limits_a^b f(x)dx$ и $m \leq \mu \leq M$.

Если функция $f \in C[a,b]$, то можно взять $m = \min\limits_{[a,b]} f$ и $M = \max\limits_{[a,b]} f$, которые по теореме Вейрштрасса достигаются. Следовательно, по теореме о промежуточном значении $\exists\, c \in [a,b]\colon \mu = f(c)$. ■