Неопределенный интеграл

ДЗ: 1635, 1643, 1646 (вспомнить сумму кубов), 1650, 1656, 1659, 1667, 1672.

ДЗ: найти $\operatorname{th}^{-1}(y)$, $\operatorname{cth}^{-1}(y)$ и посчитать их производные.

Задача 1. (**Д1635**)

$$\int \frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}}dx$$

□

$$\int \frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}}dx = \int \frac{1-3x+3x^2-x^3}{x\sqrt[3]{x}}dx = \int \frac{1}{x^{\frac{4}{3}}} - 3\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} + 3x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{5}{3}}dx =$$

$$= -3\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{9}{2}x^{\frac{2}{3}} + \frac{9}{5}x^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{10}x^{\frac{8}{3}} + C = -\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\left(1 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{5}x^2 + \frac{1}{8}x^3\right) + C$$

■

Задача 2. (**Д1643**)

$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}}dx$$

□ Поскольку деление на корень из x^4-1, то промежуток подразумевается $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$:

$$\sqrt{x^4-1} = \sqrt{x^2-1}\cdot\sqrt{x^2+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx - \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx =$$

$$= \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| - \ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right| + C = \ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2+1}}\right| + C$$

■

Задача 3. (**Д1646**)

$$\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx$$

□

$$\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx = \int \frac{e^x+1}{e^x+1}\cdot(e^{2x}-e^x+1)dx = \frac{1}{2}e^{2x} - e^x + x + C$$

■

Задача 4. (**Д1650**)

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx$$

□

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int (1+\operatorname{tg}^2 x)dx - x + C = \operatorname{tg} x - x + C$$

■

Задача 5. (**Д1656**)

$$\int (2x+3)^{10} dx$$

□

$$\int (2x+3)^{10} dx = \int \frac{1}{2}(2x+3)^{10} d(2x+3) = \frac{1}{22} y^{11} + C = \frac{1}{22}(2x+3)^{11} + C$$

■

Задача 6. (**Д1659**)

$$\int \frac{dx}{(5x-2)^{\frac{5}{2}}}$$

□

$$\int \frac{dx}{(5x-2)^{\frac{5}{2}}} = \int \frac{1}{5} \frac{dy}{y^{\frac{5}{2}}} = -\frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot y^{-\frac{3}{2}} + C = -\frac{2}{15}(5x-2)^{-\frac{3}{2}} + C$$

■

Задача 7. (**Д1667**)

$$\int \frac{dx}{\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}$$

□

$$\int \frac{dx}{\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{\sin^2(y)} = -\frac{1}{2}\operatorname{ctg} y + C = -\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) + C$$

■

Задача 8. (**Д1672**)

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 \frac{x}{2}}$$

□

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{x}{2}\right)} = 2\int \frac{dy}{\operatorname{ch}^2 y} = 2\operatorname{th} y + C = 2\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

■

Найдем обратную для $\operatorname{th} x$ функцию. Заметим, что $\operatorname{th} x \in (-1, 1)$:

$$y = \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \Rightarrow y(e^x + e^{-x}) = e^x - e^{-x} \Rightarrow y(e^{2x}+1) = e^{2x} - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ye^{2x} - e^{2x} = -1 - y \Rightarrow e^{2x} = -\frac{1+y}{y-1} = \frac{1+y}{1-y} \Rightarrow x = \operatorname{th}^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right),\ |y| < 1$$

Аналогично для $\operatorname{cth} x$. Заметим, что $\operatorname{cth} x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$:

$$y(e^{2x} - 1) = e^{2x} + 1 \Rightarrow e^{2x} = \frac{y+1}{y-1} \Rightarrow x = \operatorname{cth}^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{y+1}{y-1}\right),\ |y| > 1$$

Найдем их производные. Для ареатангенса:

$$(\mathrm{th}^{-1}(x))' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1+y}{1-y}}\cdot\frac{(1-y)+(1+y)}{(1-y)^2} = \frac{1}{1-y^2}$$

Для ареакотангенса:

$$(\mathrm{cth}^{-1}(x))' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{y+1}{y-1}}\cdot\frac{(y-1)-(y+1)}{(y-1)^2} = -\frac{1}{y^2-1} = \frac{1}{1-y^2}$$