Свойства интеграла Римана

Теорема 1. Пусть f_n интегрируемы по Риману на отрезке $[a,b]$ и $f_n \rightrightarrows f$ на $[a,b]$. Тогда f интегрируема по Риману на $[a,b]$ и верно следующее:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx$$

$\square$

1) Докажем, что последовательность чисел $\int\limits_a^b f_n(x)dx$ сходится. Рассмотрим критерий Коши и воспользуемся линейностью интеграла Римана:

$$\left|\int\limits_a^b f_n(x)dx - \int\limits_a^b f_m(x)dx\right| = \left|\int\limits_a^b \big(f_m(x) - f_n(x)\big)dx\right|$$

Мы можем записать следующие неравенства:

$$m = -\sup_x |f_n(x) - f_m(x)| \leq f_n(x) - f_m(x) \leq \sup_x |f_n(x) - f_m(x)| = M$$

и воспользоваться теоремой о среднем:

$$\int\limits_a^b \big(f_m(x) - f_n(x)\big)dx = \mu_{n,m}\cdot(b-a),\ m \leq \mu_{n,m} \leq M$$

где $\mu_{n,m} \in [m, M]$ и как следствие $|\mu_{n,m}| \leq \sup\limits_x |f_n(x) - f_m(x)|$. Тогда получим:

$$\left|\int\limits_a^b \big(f_m(x) - f_n(x)\big)dx\right| = |\mu_{n,m}\cdot(b-a)| \leq \sup_x |f_n(x) - f_m(x)|\cdot(b-a) \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$$

где последнее верно по равномерной сходимости $f_n \rightrightarrows f$ (используя критерий Коши). Следовательно последовательность интегралов $\mathrm{I}_n = \int\limits_a^b f_n(x)dx$ фундаментальна и существует её предел $\mathrm{I} = \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{I}_n$.

2) Зафиксируем отмеченное разбиение $(\mathbb{T}, \xi)$ отрезка $[a,b]$ и воспользуемся правилом 3ε:

$$|\mathrm{I} - \sigma(f, \mathbb{T}, \xi)| \leq |\mathrm{I} - \mathrm{I}_n| + |\mathrm{I}_n - \sigma(f_n, \mathbb{T}, \xi)| + |\sigma(f_n, \mathbb{T}, \xi) - \sigma(f, \mathbb{T}, \xi)|$$

Заметим, что:

$$|\sigma(f_n, \mathbb{T}, \xi) - \sigma(f, \mathbb{T}, \xi)| = \left|\sum_k \big(f_n(\xi_k) - f(\xi_k)\big)\cdot|\Delta_k|\right| \leq \sum_k \big|f_n(\xi_k) - f(\xi_k)\big|\cdot|\Delta_k|$$

Поскольку f_n стремится к f равномерно, то $\forall k$, $\left|f_n(\xi_k) - f(\xi_k)\right| \le \sup\limits_{x\in[a,b]}\left|f_n(x) - f(x)\right|$ и тогда верно:

$$|\sigma(f_n, \mathbb{T}, \xi) - \sigma(f, \mathbb{T}, \xi)| \le \sum_k \underbrace{\left|f_n(\xi_k) - f(\xi_k)\right|}_{\le \sup\limits_{x\in[a,b]}\left|f_n(x)-f(x)\right|} \cdot|\Delta_k| \le (b-a)\cdot \sup_{x\in[a,b]}\left|f_n(x) - f(x)\right|$$

Возьмем $\varepsilon > 0$ и находим n такое, что $|\mathrm{I} - \mathrm{I}_n| < \varepsilon$ и $|\sigma(f_n, \mathbb{T}, \xi) - \sigma(f, \mathbb{T}, \xi)| < \varepsilon$. Фиксируем n, поскольку по условию f_n были интегрируемы, то находим $\delta > 0$: $\lambda(\mathbb{T}) < \delta \Rightarrow |\mathrm{I}_n - \sigma(f_n, \mathbb{T}, \xi)| < \varepsilon$. Тогда:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0\colon \forall (\mathbb{T}, \xi),\ \lambda(\mathbb{T}) < \delta \Rightarrow |\mathrm{I} - \sigma(f, \mathbb{T}, \xi)| < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon$$

■

Rm: 1. Данное доказательство напоминает доказательство сохранения непрерывности при равномерном пределе. Так получилось поскольку проблема в этих утверждения одна и та же: необходимо поменять два предела местами (предел в интеграле и предел f_n в данном случае).

Следствие 1. Если f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то f интегрируема по Риману на $[a, b]$.

Идея: Необходимо придумать последовательность функций, которые будут равномерно приближать непрерывную функцию f. Будем использовать ступенчатые функции:

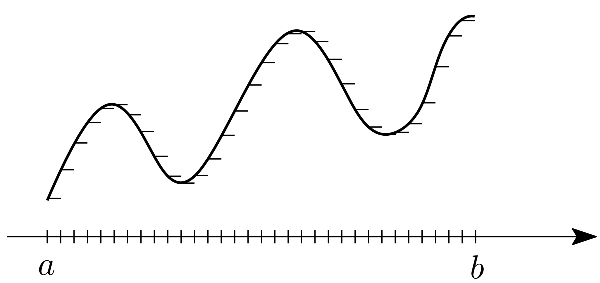

Рис. 1: Приближение непрерывной функции ступенчатыми.

разделим отрезок $[a, b]$ на части и на каждой заменим функцию f каким-нибудь её значением $\Rightarrow$ получаем ступенчатую функцию. Разбивая всё мельче отрезок $[a, b]$, получим последовательность ступенчатых функций равномерно сходящихся к f.

□ Пусть $\Delta^n_k = [x^n_{k-1}, x^n_k)$, $\forall k = \overline{1, n-1}$, $\Delta^n_n = [x^n_{n-1}, b]$, где $x^n_k = a + \frac{k(b-a)}{n}$. Определим $f_n(x)$:

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f(x^n_{k-1})\cdot \mathbb{I}_{\Delta^n_k}(x)$$

Это последовательность интегрируемых функций, как линейная комбинация интегрируемых функций. Рассмотрим разность $|f_n(x) - f(x)|$:

$$\forall x \in \Delta^n_k,\ |f_n(x) - f(x)| = |f(x^n_1)\cdot 0 + \ldots + f(x^n_{k-1})\cdot 1 + \ldots + f(x^n_{n-1})\cdot 0 - f(x)| = |f(x^n_{k-1}) - f(x)|$$

Поскольку функция f непрерывна на $[a, b] \Rightarrow$ по теореме Кантора функция f равномерно непрерывна:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0\colon \forall x, y \in [a, b],\ |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Следовательно при каждом фиксированном n и k будет верно:

$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists\, \delta > 0\colon \forall x \in \Delta_k^n,\, |x - x_{k-1}^n| < \delta \Rightarrow |f(x_{k-1}^n) - f(x)| = |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Длина каждого из отрезков разбиения $|\Delta_k^n| \leq |x_k^n - x_{k-1}^n| = \frac{b-a}{n}$ стремится к нулю с ростом n, тогда $\forall k$:

$$\forall \delta > 0,\, \exists\, N\colon \forall n > N,\, |\Delta_k^n| < \delta$$

Поскольку $\forall x \in \Delta_k^n$ верно $|x - x_{k-1}^n| < |\Delta_k^n|$, то $\forall k$, $\forall x \in \Delta_k^n$ мы получим:

$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists\, N\colon \forall n > N,\, |f(x_{k-1}^n) - f(x)| = |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

В силу того, что $[a,b] = \bigcup\limits_{k=1}^{n} \Delta_k^n$ это же будет верно для любой точки $x \in [a,b]$. Тогда по определению точной верхней грани:

$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists\, N\colon \forall n > N,\, \sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Из чего следует, что $f_n \rightrightarrows f$. Применяем предыдущую теорему и получаем требуемое. ■

Упр. 1. Пусть f кусочно-непрерывная функция на отрезке $[a,b]$, то есть: существует конечный набор точек $(a = c_0, \ldots, c_m = b)$ таких, что на каждом интервале (c_i, c_{i+1}) функция f непрерывна и верно:

$$\forall i = \overline{0, m-1},\, \exists\, f(c_i+) = \lim_{x \to c_i+} f(x),\, \forall i = \overline{1, m},\, \exists\, f(c_i\text{-}) = \lim_{x \to c_i-} f(x)$$

или по-другому: функция разрывна, но у неё конечное число точек разрыва, каждая из которых это разрыв первого рода. Доказать, что кусочно-непрерывная функция f интегрируема по Риману.

□ Пусть $\forall i = \overline{1,m}$, $\Delta_{i,k}^n = [x_{i,k-1}^n, x_{i,k}^n)$, $\forall k = \overline{2,n}$ и $\Delta_{i,1}^n = (x_{i,0}^n, x_{i,1}^n)$, где $x_{i,k}^n = c_{i-1} + \frac{k(c_i - c_{i-1})}{n}$. Определим функцию $f_n(x)$ следующим образом:

$$f_n(x) = f_n^1(x) + \ldots + f_n^m(x) + f(c_0)\cdot\mathbb{I}_{c_0}(x) + \ldots + f(c_m)\cdot\mathbb{I}_{c_m}(x)$$

$$\forall i = \overline{1,m},\; f_n^i(x) = \sum_{k=2}^{n} f(x_{i,k-1}^n)\cdot\mathbb{I}_{\Delta_{i,k}^n}(x) + f(x_{i,0}^n\text{-})\cdot\mathbb{I}_{\Delta_{i,1}^n}(x)$$

Это последовательность интегрируемых функций, как линейная комбинация интегрируемых функций. Рассмотрим разность $|f_n(x) - f(x)|$:

$$\forall x \in \Delta_{i,k}^n,\, k \neq 1,\, |f_n(x) - f(x)| = |f(x_{i,k-1}^n)\cdot 1 - f(x)| = |f(x_{i,k-1}^n) - f(x)|$$

$$\forall x \in \Delta_{i,1}^n,\, |f_n(x) - f(x)| = |f(x_{i,1}^n\text{-})\cdot 1 - f(x)| = |f(x_{i,0}^n\text{-}) - f(x)|$$

$$\forall i = \overline{0,m},\, x = c_i \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| = |0 + \ldots + 0 + f(c_i)\cdot 1 + 0 + \ldots + 0 - f(c_i)| = |f(c_i) - f(c_i)| = 0$$

Рассмотрим следующую функцию на отрезке $[c_{i-1}, c_i]$, $\forall i = \overline{1,m}$:

$$\widetilde{f}_i(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (c_{i-1}, c_i) \\ f(c_{i-1}+), & x = c_{i-1} \\ f(c_i\text{-}), & x = c_i \end{cases}$$

По определению она будет непрерывна на отрезке $[c_{i-1}, c_i] \Rightarrow$ по теореме Кантора функция $\widetilde{f}_i(x)$ будет равномерно непрерывна на этом отрезке. Тогда:

$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists\, \delta > 0\colon \forall x, y \in [c_{i-1}, c_i],\, |x - y| < \delta \Rightarrow \left|\widetilde{f}_i(x) - \widetilde{f}_i(y)\right| < \varepsilon$$

Следовательно это же будет справедливо и $\forall x \in \Delta_{i,k}^n \subset (c_{i-1}, c_i)$. Таким образом, при каждом фиксированном n, i и $k \neq 1$ будет верно:

$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists\, \delta > 0\colon \forall k \neq 1,\, \forall x \in \Delta_{i,k}^n,\, |x - x_{i,k-1}^n| < \delta \Rightarrow |f(x_{i,k-1}^n) - f(x)| = |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Также, по определению одностороннего предела, при каждом фиксированном n и i:

$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists\, \delta > 0\colon \forall x \in \Delta_{i,1}^n,\, 0 < x - x_{i,0}^n < \delta \Rightarrow |f(x_{i,0}^n\text{-}) - f(x)| = |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Длина каждого из отрезков разбиения $|\Delta_{i,k}^n| < |x_{i,k}^n - x_{i,k-1}^n| = \frac{c_i - c_{i-1}}{n}$, $\forall i = \overline{1,m}$ стремится к нулю с ростом n, тогда $\forall k, i$:

$$\forall \delta > 0,\, \exists\, N\colon \forall n > N,\, |\Delta_{i,k}^n| < \delta$$

Поскольку $\forall x \in \Delta_{i,k}^n$ верно $|x - x_{i,k-1}^n| < |\Delta_{i,k}^n|$, то $\forall k, i$, $\forall x \in \Delta_{i,k}^n$ мы получим, что $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, N\colon \forall n > N$:

$$k \neq 1,\, |f(x_{i,k-1}^n) - f(x)| = |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

$$k = 1,\, |f(x_{i,0}^n\text{-}) - f(x)| = |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

В силу того, что $[a,b] = \bigcup\limits_{k=1}^{n} \bigcup\limits_{i=1}^{m} \Delta_{i,k}^n \cup \bigcup\limits_{i=0}^{m} c_i$ это же будет верно для любой точки $x \in [a,b]$. Тогда по определению точной верхней грани:

$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists\, N\colon \forall n > N,\, \sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Из чего следует, что $f_n \rightrightarrows f$. Применяем предыдущую теорему и получаем требуемое. ■

Следствие 2. Если f монотонна на $[a,b]$, то f интегрируема по Риману на $[a,b]$.

Rm: 2. Заметим, что функция f везде определена на отрезке $[a,b]$. Например, функция $f(x) = \frac{1}{x}$ на отрезке $[0,1]$ не подойдет под условия теоремы.

Rm: 3. Это утверждение нельзя вывести из предыдущего упражнения, поскольку у монотонной функции может быть бесконечно много (не более, чем счётно) точек разрыва. Тем не менее, все эти точки - это точки разрыва первого рода.

Построить доказательство по аналогии с предыдущими следствиями невозможно из-за того, что точки разрыва всюду плотные. Поэтому будем строить разбиение не отрезка $[a,b]$, а образа этого отрезка.

□ Без потери общности, пусть f не убывает.

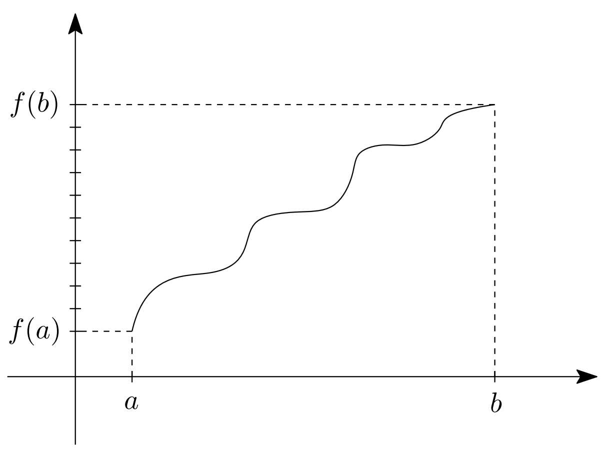

Рис. 2: Монотонная функция f и разбиение $[f(a), f(b)]$.

1) Если $f(a) = f(b) \Rightarrow f = \mathrm{const} \Rightarrow$ утверждение доказано;
2) Пусть $f(a) < f(b)$, будем строить последовательность f_n, которая приближает функцию f равномерно. Тогда возьмем разбиение отрезка $[f(a), f(b)]$:

$$\forall k = \overline{1, n-1},\ J_k^n = [y_{k-1}^n, y_k^n),\ J_n^n = [y_{n-1}^n, y_n^n],\ y_k^n = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{n} \cdot k$$

где J_k попарно не пересекаются $\forall k = \overline{1, n}$. Рассмотрим прообраз каждого из этих промежутков:

$$\Delta_k^n = f^{-1}(J_k^n) = \{x \in [a, b] \colon y_{k-1}^n \le f(x) < y_k^n\},\ k = \overline{1, n-1}$$

$$\Delta_n^n = f^{-1}(J_n^n) = \{x \in [a, b] \colon y_{n-1}^n \le f(x) \le y_n^n\}$$

В общем случае, прообразом может быть сложное множество, но у монотонных функций верно следующее:

(1) Δ_k^n - промежуток;

$\square$ Пусть $x_1 < x_2 < x_3$, $x_1, x_3 \in \Delta_k^n$. Поскольку $f(x)$ не убывает, то $y_{k-1}^n \le f(x_1) \le f(x_2)$, с другой стороны $f(x_2) \le f(x_3) < y_k^n \Rightarrow x_2 \in \Delta_k^n \Rightarrow \Delta_k^n$ - промежуток. $\blacksquare$

Заметим, что промежуток может состоять из одной точки, быть интервалом, отрезком или полуинтервалом;

(2) $\Delta_k^n \cap \Delta_l^n = \varnothing$, $\forall k \ne l$, то есть промежутки попарно не пересекаются;

$\square$ Пусть $\Delta_k^n \cap \Delta_l^n \ne \varnothing$, тогда $\exists\, x \in \Delta_k^n \cap \Delta \colon y_{k-1}^n \le f(x) < y_k^n \wedge y_{l-1}^n \le f(x) < y_l^n$, откуда следует что $[y_{k-1}^n, y_k^n) \cap [y_{l-1}^n, y_l^n) \ne \varnothing \Rightarrow$ противоречие. $\blacksquare$

(3) $\bigcup\limits_k \Delta_k^n = [a, b]$;

$\square$ Поскольку мы взяли прообразы всего, что есть в области значений $[f(a), f(b)]$, то мы получили весь отрезок $[a, b]$ в силу того, что f определена на всем $[a, b]$. $\blacksquare$

Рассмотрим следующие функции $f_n(x)$ и их разность с исходной функцией $f(x)$:

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} y_{k-1}^n \cdot \mathbb{I}_{\Delta_k^n}(x) \Rightarrow \forall k,\ \forall x \in \Delta_k^n,\ |f_n(x) - f(x)| = |f(x) - y_{k-1}^n| \le y_k^n - y_{k-1}^n = \frac{f(b) - f(a)}{n}$$

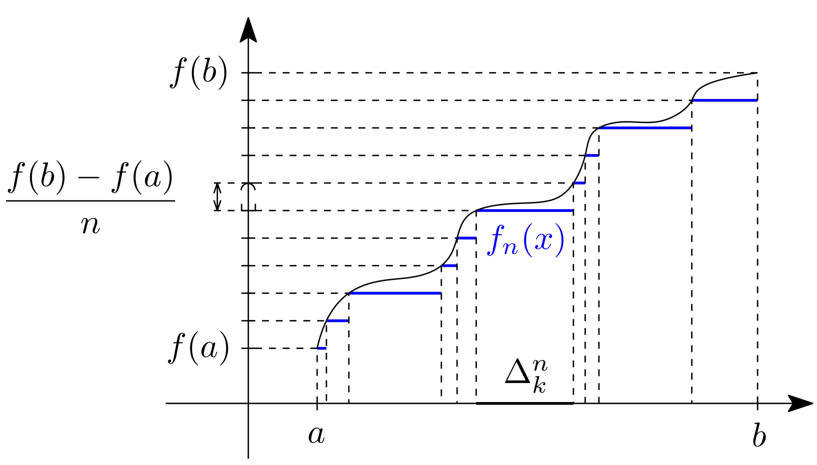

Рис. 3: Построение промежутков Δ_k^n и функций f_n.

Таким образом, $f_n \rightrightarrows f$. Сами функции $f_n(x)$ - интегрируемые функции. Применяем предыдущую теорему и получаем требуемое.

■

Rm: 4. Монотонность в доказательстве использовалась при построении множеств Δ_k^n.

Rm: 5. Из данного следствия мы знаем, что:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n \int\limits_a^b f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n y_{k-1}^n \cdot |\Delta_k^n|$$

Если то же самое проделать не с монотонной функцией, а с любой ограниченной, то получим определение интеграла Лебега. Но возникает трудность в том, что Δ_k^n уже не обязательно будет промежутком и не ясно, что такое длина Δ_k^n.

Таким образом, мы получили достаточно широкий класс интегрируемых по Риману функций, которые можно приблизить ступенчатой функцией (непрерывные, кусочно-непрерывные, монотонные). Достаточно сложно придумать пример интегрируемое по Риману функции, которую нельзя приблизить ступенчатой.

3) (**Аддитивность**): Пусть f интегрируема по Риману на отрезке $[a,b]$, отрезке $[a,c]$ и на отрезке $[c,b]$, где $a < c < b$, тогда:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$$

Rm: 6. В данной формулировке есть избыточные условия, поскольку далее мы узнаем, что если функция интегрируема на отрезке, то она интегрируема на любом подотрезке и наоборот, если есть интегрируемость на $[a,c]$ и $[c,b]$, то есть интегрируемость на $[a,b]$.

□ Если интеграл существует, то его можно получить как предел по любой последовательности разбиений масштаб которой стремится к нулю. Возьмем последовательности разбиений:

$$\mathbb{T}_{[a,c]}^n : n\to\infty \Rightarrow \lambda\left(\mathbb{T}_{[a,c]}^n\right)\to 0,\ \mathbb{T}_{[c,b]}^n : n\to\infty \Rightarrow \lambda\left(\mathbb{T}_{[c,b]}^n\right)\to 0$$

В частности, точка c принадлежит обоим разбиениям. В каждом из разбиений $\mathbb{T}_{[a,c]}^n$ и $\mathbb{T}_{[c,b]}^n$ возьмем отмеченные точки ξ' и ξ'' соответственно. Возьмем разбиение $\mathbb{T}_{[a,b]}^n = \mathbb{T}_{[a,c]}^n \cup \mathbb{T}_{[c,b]}^n$, тогда объединение отмеченных точек каждого из разбиений $\xi = (\xi', \xi'')$ будет отмеченными точками для большого разбиения отрезка $[a,b]$. Заметим, что:

$$\lambda\left(\mathbb{T}_{[a,c]}^n\right)\to 0 \wedge \lambda\left(\mathbb{T}_{[c,b]}^n\right)\to 0 \Rightarrow \lambda\left(\mathbb{T}_{[a,b]}^n\right)\to 0$$

$$\sigma\left(f, \mathbb{T}_{[a,b]}^n, \xi\right) = \sigma\left(f, \mathbb{T}_{[a,c]}^n, \xi'\right) + \sigma\left(f, \mathbb{T}_{[c,b]}^n, \xi''\right)$$

Тогда при $n\to\infty$ мы получим:

$$\lim_{n\to\infty}\sigma\left(f, \mathbb{T}_{[a,b]}^n, \xi\right) = \int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sigma\left(f, \mathbb{T}_{[a,c]}^n, \xi'\right) + \lim_{n\to\infty}\sigma\left(f, \mathbb{T}_{[c,b]}^n, \xi''\right) = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$$

■

Опр: 1. Для дальнейшего удобства будем считать, что интеграл в точке равен нулю:

$$\int\limits_a^a f(x)dx = 0$$

Опр: 2. Пусть $a < b$, тогда будет верно равенство:

$$\int\limits_b^a f(x)dx = -\int\limits_a^b f(x)dx$$

Rm: 7. Эти равенства отлично согласуются с аддитивностью. Например, если во втором равенстве перенести интеграл и применить свойство аддитивности, то получим интеграл от a до a, который будет равен нулю по первому равенству.

4) (**Формула Ньютона-Лейбница**): Пусть F дифференцируема на отрезке $[a, b]$ и F' интегрируема на отрезке $[a, b]$, тогда:

$$\int\limits_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$$

□ Возьмем разбиение отрезка $[a, b]$ на n частей $\mathbb{T} = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$. Тогда:

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{n} \big(F(x_k) - F(x_{k-1})\big) = \big(F(x_1) - F(a)\big) + \big(F(x_2) - F(x_1)\big) + \ldots + \big(F(b) - F(x_{n-1})\big)$$

Следовательно, по теореме Лагранжа будет верно:

$$\sum_{k=1}^{n} \big(F(x_k) - F(x_{k-1})\big) = \sum_{k=1}^{n} F'(c_k)\cdot|\Delta_k|,\ \forall k = \overline{1, n},\ c_k \in (x_{k-1}, x_k) \subset \Delta_k = [x_{k-1}, x_k]$$

А это есть ничто иное, как Риманова сумма:

$$\sum_{k=1}^{n} F'(c_k)\cdot|\Delta_k| = \sigma\left(F', \mathbb{T}, c\right),\ c = (c_1, \ldots, c_n),\ \forall k,\ c_k \in \Delta_k$$

Таким образом, по определению интегрируемости на отрезке мы получим:

$$\lim_{\lambda(\mathbb{T})\to 0} \big(F(b) - F(a)\big) = F(b) - F(a) = \lim_{\lambda(\mathbb{T})\to 0} \sigma\left(F', \mathbb{T}, c\right) = \int\limits_a^b F'(x)dx$$

■

В условиях формулы Ньютона-Лейбница, мы можем найти $F(b)$ используя интеграл Римана. Поскольку мы ищем интегралы с точностью до константы, предположим, что $F(a) = 0$, тогда:

$$F(x) = \int\limits_a^x F'(t)dt$$

Таким образом, формула Ньютона-Лейбница отвечает на вопрос, как найти первообразную, производная которой интегрируема. Тем не менее, мы пока не можем ответить: есть ли первообразная у интегрируемой функции f.

Интеграл с переменным верхним пределом

Пусть f - интегрируема на $[a, b]$. Существует ли у неё первообразная? В общем случае, ответ - нет.

Пример: Рассмотрим функцию $f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0,1] \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x \in [-1,0) \end{cases}$ на отрезке $[-1, 1]$.

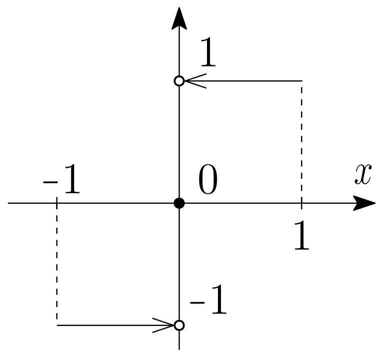

Рис. 4: Функция $\operatorname{sgn}(x)$.

Она интегрируема, но не имеет первообразной, поскольку не существует функции, производная которая была бы равна разрывной ступени.

Таким образом, хотелось бы доказать, что для каких-то классов функций первообразная есть. Для этой цели будем использовать следующее определение.

Опр: 3. Пусть функция f - интегрируема на $[a, b]$, тогда функция $F(x)$, заданная равенством:

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$$

называется интегралом с переменным верхним пределом.

К примеру, для функции $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ мы получим следующий интеграл:

$$F(x) = \int\limits_{-1}^x \operatorname{sgn}(t)dt = |x| - 1$$

Эта функция не дифференцируема в нуле из-за того, что у $f(x)$ в этой точке разрыв.

Теорема 2. Пусть f непрерывна на отрезке $[a, b]$, тогда функция $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ дифференцируема на $[a, b]$ и $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in [a, b]$. Тем самым, у всякой непрерывной функции есть первообразная.

☐ Пусть $h > 0$, рассмотрим следующее отношение:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\cdot\left(\int\limits_a^{x+h} f(t)dt - \int\limits_a^x f(t)dt\right) = \frac{1}{h}\int\limits_x^{x+h} f(t)dt$$

где последнее равенство верно в силу аддитивности. По теореме о среднем получим:

$$\frac{1}{h}\int\limits_{x}^{x+h} f(t)dt = \frac{1}{h}\cdot f(c)\cdot(x+h-x) = \frac{1}{h}\cdot f(c)\cdot h = f(c),\ c\in[x,x+h]$$

По непрерывности функции f получаем следующее:

$$\lim_{h\to 0+}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0+} f(c) = f(x)$$

Пусть $h<0$, по аналогии:

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\cdot\left(\int\limits_{a}^{x+h} f(t)dt - \int\limits_{a}^{x} f(t)dt\right) = -\frac{1}{h}\int\limits_{x+h}^{x} f(t)dt$$

где последнее равенство верно в силу аддитивности. По теореме о среднем получим:

$$-\frac{1}{h}\int\limits_{x+h}^{x} f(t)dt = -\frac{1}{h}\cdot f(c)\cdot(x-x-h) = \frac{1}{h}\cdot f(c)\cdot h = f(c),\ c\in[x+h,x]$$

По непрерывности функции f получаем следующее:

$$\lim_{h\to 0-}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0-} f(c) = f(x)$$

Подводя итог, мы получим:

$$\lim_{h\to 0-}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x) = \lim_{h\to 0+}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = F'(x)$$

И таким образом будет верно, что $F'(x)=f(x)$. ■