Неопределенный интеграл

Есть два основных метода сведения сложных интегралов к простым: замена переменных и интегрирование по частям.

Замена переменных

Формула замены переменных происходит из теоремы о дифференцировании сложной функции.

Пусть $F'(x) = f(x)$ на некотором промежутке I, тогда вместо x можно подставить другую функцию $x = g(t)$, тогда производная сложной функции выражается по формуле:

$$(F(g(t)))' = F'(g(t)) \cdot g'(t) \Rightarrow \int f(g(t)) \cdot g'(t) dt = F(g(t)) + C$$

Следовательно, если мы умеем считать первообразную от $f(x)$, то мы умеем считать первообразную и от $f(g(t)) \cdot g'(t)$, следовательно мы сначала считаем интеграл:

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

И затем подставляем $g(t)$, чтобы получить **формулу замены переменной**:

$$\int f(x) dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t) dt = F(g(t)) + C$$

До этого мы узнали частный случай этой формулы замены переменных:

$$\int f(at + b) a \cdot dt = F(at + b) + C$$

Rm: 1. Как всегда, надо помнить про промежуток $\langle a, b \rangle$ на котором происходит интегрирование. В частности, $g(t)$ должна принимать значения из этого промежутка. Мы об этом вспомним, когда займемся определенными интегралами.

При замене переменных становится ясно, почему необходимо писать в конце дифференциал по переменной (более подробно об этом станет понятнее, когда будем изучать определенный интеграл):

$$\int f(x) dx = \int f(g(t)) dg(t) = \int f(g(t)) \cdot g'(t) dt$$

Задача 1. (**Д1674**)

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

□

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \int \frac{t}{\sqrt{1 - t^2}} dt = |g(t) = 1 - t^2,\ g'(t) = -2t| = -\frac{1}{2} \int \frac{-2t}{\sqrt{1 - t^2}} dt =$$
$$= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{g(t)}} \cdot g'(t) dt = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{y}} dy = -\sqrt{y} + C = -\sqrt{1 - x^2} + C$$

■

Задача 2. (**Д1680**)

$$\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}, \ \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2d(\sqrt{x})$$

□ Пусть $y = \sqrt{x} \Rightarrow dy = \frac{1}{2}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x}}$, тогда мы получим:

$$\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \int \frac{2dy}{(1+y^2)} = 2\operatorname{arctg} y + C = 2\operatorname{arctg}(\sqrt{x}) + C$$

■

Задача 3. (**Д1697**)

$$\int \operatorname{tg} x dx$$

□

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = |y = \cos x, \ dy = -\sin x dx| = -\int \frac{dy}{y} = -\ln|y| + C = -\ln|\cos x| + C$$

■

Задача 4. (**Д1766**)

$$\int x^2 \sqrt[3]{1-x} dx$$

□ Будем пользоваться здесь правилом: если вам что-то не нравится в интеграле, выберете это в качестве новой переменной. Например, здесь $y = \sqrt[3]{1-x}$, тогда выразим x наоборот:

$$y^3 = 1 - x \Rightarrow x = 1 - y^3, \ dx = -3y^2 dy$$

Теперь мы можем сделать замену переменной:

$$\int x^2 \sqrt[3]{1-x} dx = \int (1-y^3)^2 \cdot y \cdot (-3y^2) dy = -3\int (1-y^3)^2 y^3 dy = -3\int (y^3 - 2y^6 + y^9) dy =$$

$$= -3\cdot\left(\frac{y^4}{4} - \frac{2y^7}{7} + \frac{y^{10}}{10}\right) + C = -3\cdot\left(\frac{(\sqrt[3]{1-x})^4}{4} - \frac{2(\sqrt[3]{1-x})^7}{7} + \frac{(\sqrt[3]{1-x})^{10}}{10}\right) + C$$

■

Задача 5. (**Д1776**)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$$

□ Пусть $y = \sqrt{1+e^x}$, тогда:

$$y^2 = 1 + e^x \Rightarrow e^x = y^2 - 1 \Rightarrow x = \ln(y^2 - 1), \ dx = \frac{2y}{y^2 - 1} dy$$

Отметим, что помимо преобразования интегралов тут подразумевается и преобразование некоторых промежутков. Исходный интеграл был определен везде, но при замене мы получаем, что $y > 1$. То есть подразумеваем $y \in (1, +\infty)$ и на этом промежутке замена корректна. Тогда:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} = \int \frac{2y dy}{(y^2-1)\cdot y} = 2\int \frac{dy}{y^2-1} = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| + C = \ln\left|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right| + C$$

■

Избавление от корней в подстановках

Попробуем разобраться как избавляться от простейших корней делая подстановки.

Задача 6. (**Д1778**)

$$\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

□ В данном пример заменой переменной в виде корня, от него не получится избавиться:

$$\sqrt{1-x^2} = y \Rightarrow 1-x^2 = y^2 \Rightarrow 1-y^2 = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{1-y^2}$$

И когда мы посчитаем дифференциал, то корень может при этом остаться. Поэтому замена в виде корня будет не очень хорошей. В этом случае помогут тригонометрические функции. Мы видим, что $|x| < 1$, следовательно мы можем сделать замену:

$$x = \sin t \Rightarrow 1 - x^2 = 1 - \sin^2 t = \cos^2 t$$

И следовательно, мы сможем удобно брать корни. Тогда:

$$\sqrt{\cos^2 t} = |\cos t|$$

Поскольку мы можем сами выбирать переменную t, то скажем, что мы берем $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, при этом синус пробежит все значения, а косинус будет положительным $\Rightarrow$ можем опустить модуль:

$$\sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t,\ x = \sin t,\ dx = \cos t dt$$

$$\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{\cos t dt}{\cos^3 t} = \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \operatorname{tg} t + C$$

Можно подставить в тангенс арксинус и мы получим верный ответ, но попробуем упростить полученный результат:

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \operatorname{tg} t + C = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C$$

■

Упрощение выражений с $\sqrt{1-x^2}$: замена $x = \sin t$, $x = \cos t$ избавляют нас от корня.

Упрощение выражений с $\sqrt{a^2-x^2}$: замена $x = a\sin t$, $x = a\cos t$ избавляют нас от корня.

Рассмотрим ещё пару замену, позволяющих избавляться от квадратного трехчлена.

Задача 7. (**Д1784**)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}, \quad x - a = (b-a)\cdot \sin^2 t$$

□

$$b - x = (b-a) - (x-a) = (b-a) - (b-a)\cdot \sin^2 t = (b-a)\cdot \cos^2 t$$

Без потери общности будем считать, что $a < b$. Поскольку наш трехчлен имеет вид: $(x-a)(b-x)$, то он положителен только на интервале $(a, b) \Rightarrow$ подразумевается, что мы работаем на этом интервале.

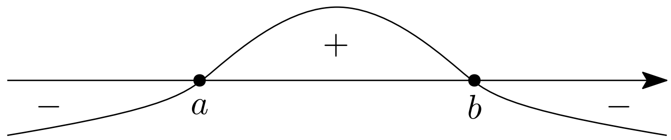

Рис. 1: Значения квадратного трехчлена $(x-a)(b-x)$ на $\mathbb{R}$.

Выберем значения $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, тогда:

$$t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \sin^2 t \in (0,1) \Rightarrow (b-a)\sin^2 t \in (0, b-a) \Rightarrow x = a + (b-a)\sin^2 t \in (a,b)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(b-a)^2 \sin^2 t \cos^2 t}} =$$

$$= \int \frac{(b-a)2\cos t \sin t dt}{(b-a)\sin t \cos t} = 2t + C = 2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}} + C$$

■

Также, иногда от корня помогают гиперболические замены переменных. Вспомним, что:

$$\operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2},\ \operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2},\ \operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$$

Задача 8. (**Д1786**)

$$\int \sqrt{a^2 + x^2} dx$$

□ Сделаем замену $x = a \operatorname{sh} t \Rightarrow dx = a \operatorname{ch} t dt$, тогда:

$$a^2 + x^2 = a^2 + a^2 \operatorname{sh}^2 t = a^2 \operatorname{ch}^2 t \Rightarrow \sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2 \operatorname{ch}^2 t} = a \operatorname{ch} t$$

В данном случае, даже не важно, какие t мы берем, поскольку $\operatorname{ch} t > 0$.

$$\int \sqrt{a^2 + x^2} dx = \int a \operatorname{ch} t \cdot a \operatorname{ch} t dt = a^2 \int \operatorname{ch}^2 t dt = \frac{a^2}{4} \int (e^t + e^{-t})^2 dt$$

И дальше взять интеграл по стандартным правилам. Но можно и воспользоваться соотношенями, которые есть для гиперболических функций:

$$\operatorname{ch} 2t = \frac{e^{2t} + e^{-2t}}{2} = 2 \cdot \frac{e^{2t} + e^{-2t} + 2}{4} - 1 = 2\frac{(e^t + e^{-t})^2}{4} - 1 = 2\operatorname{ch}^2 t - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 \int \operatorname{ch}^2 t dt = \frac{a^2}{2} \int (\operatorname{ch}(2t) + 1) dt = \frac{a^2 t}{2} + \frac{a^2}{4} \operatorname{sh}(2t) + C$$

Также мы знаем, что $\operatorname{sh}(2t) = 2 \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t$:

$$\operatorname{sh}(2t) = \frac{e^{2t} - e^{-2t}}{2} = \frac{(e^t - e^{-t}) \cdot (e^t + e^{-t})}{2} = 2 \cdot \frac{e^t - e^{-t}}{2} \cdot \frac{e^t + e^{-t}}{2} = 2 \operatorname{sh} t \cdot \operatorname{ch} t$$

Тогда, наше выражение с $\operatorname{sh}(2t)$ примет вид:

$$x = a \operatorname{sh} t \Rightarrow \operatorname{sh} t = \frac{x}{a},\ \operatorname{ch} t = \frac{1}{a} \cdot \sqrt{a^2 + x^2} \Rightarrow \operatorname{sh}(2t) = 2 \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t = 2 \cdot \frac{x}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot \sqrt{a^2 + x^2}$$

Тогда получим ответ после подстановки ареасинуса $t = \ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1}\right)$:

$$\int \sqrt{a^2 + x^2}dx = \frac{a^2}{2}\left(\ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1}\right) + \frac{x}{a^2}\cdot\sqrt{a^2 + x^2}\right) + C$$

■

Упрощение выражений с $\sqrt{a^2 + x^2}$: замена $x = a \operatorname{sh} t$ избавляют нас от корня.

Упрощение выражений с $\sqrt{x^2 - a^2}$: замена $x = a \operatorname{ch} t$ избавляют нас от корня.

Интегрирование по частям

Данный метод основывается на правиле производной произведения:

$$(u(t)\cdot v(t))' = u'(t)\cdot v(t) + u(t)\cdot v'(t) \Rightarrow \int u'(t)\cdot v(t) + u(t)\cdot v'(t)dt = u(t)\cdot v(t) + C$$

По линейности, при существовании интеграла от слагаемого (интеграл от другого существует, потому что интеграл от суммы существует) мы получим:

$$\int u'(t)\cdot v(t)dt = u(t)\cdot v(t) - \int u(t)\cdot v'(t)dt$$

Это **формула интегрирования по частям**.

Rm: 2. Возникает вопрос, почему мы не пишем плюс C? Мы его не пишем, поскольку в формуле написано равенство двух множеств.

Задача 9. (**Д1791**)

$$\int \ln x dx$$

□

$$\int \ln x dx = \int 1\cdot \ln x dx,\ 1 = u'(x) \Rightarrow u(x) = x,\ \ln x = v(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \ln x dx = x\cdot \ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx = x\ln x - x + C$$

■

Когда надо применять интегрирование по частям: очень часто это нужно делать, когда мы видим обратную функцию, например:

$$\ln x,\ \log_a x,\ \arccos x,\ \arcsin x,\ \operatorname{arctg} x,\ \operatorname{arcctg} x,\ \operatorname{sh}^{-1} x,\ \operatorname{ch}^{-1} x,\ \operatorname{th}^{-1} x,\ \operatorname{cth}^{-1} x$$

Также метод применяется, когда мы видим два разнородных множителя, например:

$$x\cdot e^x,\ x\cdot \sin x,\ x^2\cdot \cos x,\ e^x\cdot \sin x$$

Задача 10. (**Д1796**)

$$\int x^2 e^{-2x} dx$$

□ Мы видим, что у нас произведение двух разноплановых множителей: есть степенная функция, есть показательная функция ⇒ намёк на то, что нужно использовать интегрирование по частям. Обозначим функции следующим образом:

$$v(x) = x^2,\ u'(x) = e^{-2x} \Rightarrow u(x) = \frac{-e^{-2x}}{2}$$

Тогда по формуле интегрирования по частям:

$$\int x^2 e^{-2x} dx = -\frac{x^2}{2}e^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x} \cdot 2x dx = -\frac{x^2}{2}e^{-2x} + \int e^{-2x} x dx$$

Воспользуемся формулой ещё раз:

$$-\frac{x^2}{2}e^{-2x} + \int e^{-2x} x dx = -\frac{x^2}{2}e^{-2x} + \left(-\frac{x}{2}e^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x} dx\right) = -e^{-2x} \cdot \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right) + C$$

■

Задача 11. (**Д1828**)

$$\int e^{ax} \cos bx dx$$

□ Потребуем, чтобы $a, b \neq 0$, иначе это будет более простой интеграл и его можно просто посчитать. Видим, что здесь разнородные функции. Обозначим функции следующим образом:

$$v(x) = \cos bx,\ u'(x) = e^{ax} \Rightarrow u(x) = \frac{1}{a}e^{ax}$$

Тогда по формуле интегрирования по частям:

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{1}{a}e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a}\int e^{ax} \sin bx dx$$

Воспользуемся формулой ещё раз, снова обозначив $u'(x) = e^{ax}$, $v(x) = \sin bx$, тогда:

$$\frac{1}{a} \cdot e^{ax} \cdot \cos bx + \frac{b}{a} \cdot \int e^{ax} \cdot \sin bx dx = \frac{1}{a} \cdot e^{ax} \cdot \cos bx + \frac{b}{a} \cdot \left(\frac{1}{a} \cdot e^{ax} \cdot \sin bx - \frac{b}{a} \cdot \int e^{ax} \cdot \cos bx dx\right)$$

Обозначим исходный интеграл через I, тогда мы получим:

$$\mathrm{I} = \frac{1}{a} \cdot e^{ax} \cdot \cos bx + \frac{b}{a^2} \cdot e^{ax} \cdot \sin bx - \frac{b^2}{a^2} \cdot \mathrm{I} \Rightarrow \mathrm{I}\left(\frac{a^2 + b^2}{a^2}\right) = \frac{e^{ax}}{a} \cdot \left(\cos bx + \frac{b}{a}\sin bx\right) + C$$

Тогда мы получим:

$$\mathrm{I} = \int e^{ax} \cos bx dx = e^{ax} \cdot \left(\frac{a}{a^2 + b^2}\cos bx + \frac{b}{a^2 + b^2}\sin bx\right) + C$$

■

Rm: 3. В задаче выше надо никогда не забывать, что равенства без C это равенства по множествам.

ДЗ: 1690, 1695, 1703 (перейти к половинному углу: $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$, замена $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$).

ДЗ: подстановки: 1777, 1780, 1785, 1790, 1829.