Критерий Лебега

Опр: 1. Множество $E \subset \mathbb{R}$ называется множеством меры ноль по Лебегу, если: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ не более чем счетный набор интервалов (или отрезков) $\{\mathrm{I}_n\}$ таких, что:

(1) Множество E покрыто этими интервалами: $E \subset \bigcup\limits_n \mathrm{I}_n$;

(2) Сумма длин этих интервалов меньше ε: $\sum\limits_n |\mathrm{I}_n| < \varepsilon$;

Опр: 2. Если некоторое свойство имеет место для всех точек, кроме множества меры ноль, то говорят, что это свойство выполняется почти всюду.

Теорема 1. (**Критерий Лебега**) f - интегрируема по Риману на отрезке $[a, b] \Leftrightarrow f$ - ограничена на отрезке $[a, b]$ и f почти всюду непрерывна на отрезке $[a, b]$.

Rm: 1. Проще говоря, функция интегрируема тогда и только тогда, когда функция ограничена, а множество точек разрыва является множеством меры ноль по Лебегу.

$\square$ Рассматриваем только ограниченную функцию f.

($\Rightarrow$) Пусть f - интегрируема на $[a, b]$, тогда выполняется критерий Дарбу:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \mathbb{T}\colon\ \sum_k \omega(f, \Delta_k)\cdot|\Delta_k| < \varepsilon$$

Напоминание про непрерывность: $\omega(f, a) = \lim\limits_{\delta \to 0+} \omega\left(f, \mathcal{U}_\delta(a)\right)$ - это колебание функции f в точке a. Мы знаем, что f - непрерывна в точке $a \Leftrightarrow \omega(f, a) = 0$. Множество точек разрыва замкнуто и равно:

$$\bigcup_n \left\{x\colon \omega(f, x) \geq \frac{1}{n}\right\}$$

Таким образом, достаточно показать, что $\forall n \in \mathbb{N}$ множество

$$E_n = \left\{x\colon \omega(f, x) \geq \frac{1}{n}\right\}$$

является множеством меры ноль по Лебегу, поскольку счетное объединение множества меры ноль будет также множеством меры ноль (см. свойство 3 на прошлой лекции). Фиксируем n и рассмотрим множество E_n. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда $\exists\, \mathbb{T}$ - разбиение отрезка $[a, b]$ на отрезки Δ_k:

$$\sum_k \omega(f, \Delta_k)\cdot|\Delta_k| < \varepsilon$$

Пусть $\Delta_k \cap E_n \neq \varnothing$, то есть $\exists\, a \in E_n\colon a \in \Delta_k$, тогда возможно несколько исходов:

(1) a лежит внутри Δ_k, тогда по определению колебания в точке верно:

$$\omega(f, \Delta_k) = \sup_{x, y \in \Delta_k} |f(x) - f(y)| \geq \omega\left(f, \mathcal{U}_\delta(a)\right) = \sup_{x, y \in \mathcal{U}_\delta(a)} |f(x) - f(y)| \Rightarrow \omega(f, \Delta_k) \geq \omega(f, a) \geq \frac{1}{n}$$

(2) $a \in \Delta_k \cap \Delta_{k+1}$ или $a \in \Delta_k \cap \Delta_{k-1}$. Рассмотрим случай $a \in \Delta_k \cap \Delta_{k+1}$. Хотя бы для одного из отрезков Δ_k, Δ_{k+1} колебание не будет маленьким:

$$\omega(f, \Delta_k) \geq \frac{1}{3n} \vee \omega(f, \Delta_{k+1}) \geq \frac{1}{3n}$$

На обоих отрезках колебание не может оказаться маленьким, иначе получим противоречие:

$$\omega(f, \Delta_k) < \frac{1}{3n} \wedge \omega(f, \Delta_{k+1}) < \frac{1}{3n} \Rightarrow \omega(f, a) \leq \frac{2}{3n}$$

Почему это так? Пусть $x, y \in \mathcal{U}_\delta(a)$, тогда рассмотрим разность функции f в этих точках:

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(a)| + |f(y) - f(a)| \leq \omega(f, \Delta_k) + \omega(f, \Delta_{k+1}),\ x \in \Delta_k,\ y \in \Delta_{k+1}$$

$$|f(x) - f(y)| \leq \omega(f, \Delta_k),\ x, y \in \Delta_k$$
$$|f(x) - f(y)| \leq \omega(f, \Delta_{k+1}),\ x, y \in \Delta_{k+1}$$

Таким образом, если каждое колебание маленькое, то верно следующее:

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{2}{3n} \Rightarrow \omega(f, a) \leq \frac{2}{3n} < \frac{1}{n}$$

Получили противоречие с тем, что $a \in E_n$. Значит, хотя бы на одном из отрезков колебание не меньше, чем $\frac{1}{3n}$.

Итог: если возьмем объединение отрезков на которых колебание больше, чем $\frac{1}{3n}$, то оно заведомо будет содержать E_n:

$$\mathrm{I} = \left\{k \colon \omega(f, \Delta_k) \geq \frac{1}{3n}\right\},\ E_n \subset \bigcup_{k \in \mathrm{I}} \Delta_k$$

Рассмотрим следующую сумму:

$$\sum_{k \in \mathrm{I}} |\Delta_k| = 3n \sum_{k \in \mathrm{I}} \frac{1}{3n} |\Delta_k| \leq 3n \sum_{k \in \mathrm{I}} \omega(f, \Delta_k) \cdot |\Delta_k| \leq 3n \sum_{k} \omega(f, \Delta_k) \cdot |\Delta_k| < 3n\varepsilon$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ - произвольное, то мы накрыли множество E_n конечным набором отрезков, сумму длин которых можно сделать сколь угодно маленькой. Следовательно, E_n - множество меры ноль.

($\Leftarrow$) Пусть f - ограничена на $[a, b]$ и почти всюду непрерывна на $[a, b]$. Будем проверять критерий Дарбу:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \mathbb{T} \colon \sum_{k} \omega(f, \Delta_k) \cdot |\Delta_k| < \varepsilon$$

Но перед этим, вспомним лемму из прошлой лекции:

Лемма 1. Если $[a, b] \subset \bigcup\limits_{n} \mathrm{I}_n$, где I_n - интервалы, то верно следующее:

$$b - a \leq \sum_{n} |\mathrm{I}_n \cap [a, b]| \leq \sum_{n} |\mathrm{I}_n|$$

и докажем новую лемму:

Лемма 2. Пусть I - ограниченный промежуток (интервал, отрезок, полуинтервал) и $\mathrm{J}_1, \dots \mathrm{J}_M$ - промежутки, причем $\forall k, m$, J_k и J_m либо не пересекаются, либо пересекаются по концам ($\forall k, m$, $\mathring{\mathrm{J}}_k \cap \mathring{\mathrm{J}}_m = \varnothing$). Тогда верно следующее:

$$\bigcup_{k=1}^{M} \mathrm{J}_k \subset \mathrm{I} \Rightarrow \sum_{k=1}^{M} |\mathrm{J}_k| \leq |\mathrm{I}|$$

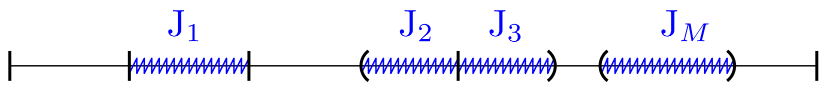

Рис. 1: Набор промежутков внутри ограниченного промежутка.

□ Докажем по индукции:

База: $M = 1 \Rightarrow \mathrm{J}_1 \subset \mathrm{I} \Rightarrow |\mathrm{J}_1| \leq |\mathrm{I}|$, поскольку $\mathrm{J}_1 =]\gamma, \delta[\subset \mathrm{I} =]\alpha, \beta[\Rightarrow \alpha \leq \gamma \leq \delta \leq \beta \Rightarrow \delta - \gamma \leq \beta - \alpha$.

Шаг: Пусть доказано для M, докажем для $M+1$. Будем считать, что $\mathrm{J}_k =]\alpha_k, \beta_k[$, $\mathrm{I} =]\alpha, \beta[$. Перенумеровывая, если нужно, J_k будем считать, что $\alpha_{M+1} = \max\limits_k \alpha_k$ и автоматически получим $\beta_{M+1} = \max\limits_k \beta_k$. Таким образом, берем самый правый промежуток. По построению:

$$\bigcup_{k=1}^{M} \mathrm{J}_k \subset]\alpha, \alpha_{M+1}[\Rightarrow \sum_{k=1}^{M} |\mathrm{J}_k| \leq \alpha_{M+1} - \alpha$$

где последнее неравенство выполненно по предположению индукции. Добавим к нему длину последнего промежутка J_{M+1}:

$$\sum_{k=1}^{M} |\mathrm{J}_k| + (\beta_{M+1} - \alpha_{M+1}) = \sum_{k=1}^{M+1} |\mathrm{J}_k| \leq \alpha_{M+1} - \alpha + (\beta_{M+1} - \alpha_{M+1}) = \beta_{M+1} - \alpha \leq \beta - \alpha = |\mathrm{I}|$$

Таким образом, получили требуемое по индукции. ■

Пусть E - множество точек разрыва. Так как по условию E это множество меры ноль, то верно:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \{\mathrm{I}_j\}\colon\ \sum_j |\mathrm{I}_j| < \varepsilon,\ E \subset \bigcup_j \mathrm{I}_j$$

Если точка $x \notin E$, то f непрерывна в ней $\Rightarrow \exists \mathcal{U}_{\delta_x}(x)\colon \omega\left(f, \mathcal{U}_{3\delta_x}(x)\right) < \varepsilon$, то есть δ_x выбрано так, чтобы в утроенной окрестности колебание было меньше, чем ε (это можно сделать из-за непрерывности). Тогда будет верно:

$$[a, b] \subset \bigcup_j \mathrm{I}_j \bigcup_{x \notin E} \mathcal{U}_{\delta_x}$$

Но это всё - открытые множества $\Rightarrow$ мы можем выбрать конечное подпокрытие, поскольку отрезок $[a, b]$ это компакт:

$$\mathcal{U}_{\delta_1}, \dots, \mathcal{U}_{\delta_M}, \mathrm{I}_1, \dots, \mathrm{I}_N \Rightarrow [a, b] \subset \bigcup_{j=1}^{N} \mathrm{I}_j \bigcup_{i=1}^{M} \mathcal{U}_{\delta_i}$$

Выберем $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_M\}$ и разбиение $\mathbb{T}$ с масштабом $\lambda(\mathbb{T}) < \delta$. Будем рассматривать следующую сумму:

$$\sum_k \omega\left(f, \Delta_k\right) \cdot |\Delta_k|$$

Понятно, что есть два типа точек в этой сумме:

1) точки, которые попадают в окрестности $\mathcal{U}_{\delta_i}$ (тут маленькие колебания);

2) точки, которые закрыты интервалами I_j (тут маленькая длина интервалов);

Рассмотрим множество отрезков Δ_k, которые пересекаются с множествами $\mathcal{U}_{\delta_i}$ и которые не имеют с ними общих точек. Обозначим их как K и R соответственно:

$$\mathrm{K} = \left\{ k\colon \Delta_k \cap \bigcup_{i=1}^{M} \mathcal{U}_{\delta_i} \neq \varnothing \right\},\ \mathrm{R} = \left\{ k\colon \Delta_k \cap \bigcup_{i=1}^{M} \mathcal{U}_{\delta_i} = \varnothing \right\}$$

Разделим рассматриваемую сумму на две соответствующие части:

$$\sum_k \omega\left(f, \Delta_k\right) \cdot |\Delta_k| = \sum_{k\in \mathrm{K}} \omega\left(f, \Delta_k\right) \cdot |\Delta_k| + \sum_{k\in \mathrm{R}} \omega\left(f, \Delta_k\right) \cdot |\Delta_k|$$

Рассмотрим случай, когда $\Delta_k \cap \mathcal{U}_{\delta_i} \neq \varnothing$. Пусть $\mathcal{U}_{\delta_i} = (a_i - \delta_i, a_i + \delta_i)$, где a_i - середина окрестности $\mathcal{U}_{\delta_i}$.

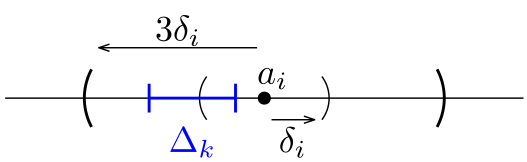

Рис. 2: Пересечение Δ_k с $\mathcal{U}_{\delta_i}$ не пусто.

Тогда $\Delta_k \subset \mathcal{U}_{3\delta_i}$, поскольку от любой точки отрезка Δ_k до a_i расстояние не больше, чем δ_i и длина отрезка Δ_k не больше, чем $\delta < \delta_i$. Таким образом, получим:

$$\Delta_k \subset \mathcal{U}_{3\delta_i} \Rightarrow \omega(f, \Delta_k) < \varepsilon \Rightarrow \sum_{k\in \mathrm{K}} \omega\left(f, \Delta_k\right) \cdot |\Delta_k| < \varepsilon \cdot \sum_{k\in \mathrm{K}} |\Delta_k| \leq \varepsilon(b-a)$$

Рассмотрим случай, когда $\Delta_k \cap \mathcal{U}_{\delta_i} = \varnothing$. Поскольку весь отрезок $[a, b]$ покрыт конечным набором окрестностей $\mathcal{U}_{\delta_i}$ и интервалов I_j, то такие Δ_k содержатся в объединении интервалов I_j:

$$\Delta_k \subset \bigcup_{j=1}^{N} \mathrm{I}_j$$

В противном случае, была бы точка отрезка, которая ничем не закрыта $\Rightarrow$ противоречие с построением конечного покрытия. Пусть $\overline{M} = \sup\limits_{[a,b]} |f|$, распишем вторую сумму:

$$\sum_{k\in \mathrm{R}} \omega\left(f, \Delta_k\right) \cdot |\Delta_k| \leq 2\overline{M} \cdot \sum_{k\in \mathrm{R}} |\Delta_k| \leq 2\overline{M} \cdot \sum_{k\in \mathrm{P}} |\Delta_k|,\ \mathrm{P} = \left\{ k\colon \Delta_k \subset \bigcup_{j=1}^{N} \mathrm{I}_j \right\}$$

Поскольку отрезок Δ_k закрыт интервалами, то можем применить первую лемму:

$$2\overline{M} \cdot \sum_{k\in \mathrm{P}} |\Delta_k| \leq 2\overline{M} \cdot \sum_{k\in \mathrm{P}} \sum_{j=1}^{N} |\Delta_k \cap \mathrm{I}_j| \leq 2\overline{M} \sum_k \sum_{j=1}^{N} |\Delta_k \cap \mathrm{I}_j| = 2\overline{M} \sum_{j=1}^{N} \left(\sum_k |\Delta_k \cap \mathrm{I}_j| \right)$$

Заметим, что $\forall k$, $\Delta_k \cap \mathrm{I}_j$ - это промежутки в интервале I_j и они могут пересекаться только концами. Тогда применяя вторую лемму к суммам внутри скобок и вспоминая, что I_j накрывают множество меры ноль, получим:

$$2\overline{M}\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{k}|\Delta_k \cap \mathrm{I}_j|\right) \leq 2\overline{M}\sum_{j=1}^{N}|\mathrm{I}_j| < 2\overline{M}\varepsilon$$

Итог:

$$\sum_{k}\omega\left(f,\Delta_k\right)\cdot|\Delta_k| = \sum_{k\in \mathrm{K}}\omega\left(f,\Delta_k\right)\cdot|\Delta_k| + \sum_{k\in \mathrm{R}}\omega\left(f,\Delta_k\right)\cdot|\Delta_k| \leq \varepsilon(b-a) + 2\overline{M}\varepsilon = \varepsilon(b-a+2\overline{M})$$

где $(b-a+2\overline{M})$ - это константа, а $\varepsilon > 0$ могли взять сколь угодно маленьким $\Rightarrow$ критерий Дарбу выполнен $\Rightarrow$ функция f интегрируема на $[a,b]$. ■

Следствия критерия Лебега

Следствие 1. Пусть f интегрируема по Риману на отрезке $[a,b]$ и функция φ - непрерывна на $[m,M]$, где $m = \inf\limits_{[a,b]} f$, $M = \sup\limits_{[a,b]} f$. Тогда $\varphi\left(f(x)\right)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a,b]$.

□ Функция φ - непрерывна на отрезке $[m,M] \Rightarrow$ ограничена $\Rightarrow \varphi(f)$ - ограничена. Если f - непрерывна в точке $x \in [a,b]$, то $\varphi\left(f\right)$ - непрерывна в точке $x \in [a,b]$, как композиция непрерывных функций. Подмножества точек разрыва больше не станет $\Rightarrow \varphi(f)$ почти всюду непрерывна. ■

Пример: Если f - интегрируема, то $|f|$ - интегрируема и верно следующее:

$$\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|dx$$

Содержательно, $|f| = \varphi(f)$ - непрерывная функция, где $\varphi(t) = |t|$. Оценка интеграла справделива из монотонности: $-|f| \leq f \leq |f| \Rightarrow$ интегрируем и получаем оценку, написанную выше.

Следствие 2. Если f и g интегрируемы по Риману на $[a,b]$, то $f{\cdot}g$ - интегрируема по Риману на $[a,b]$.

□ Произведение ограниченных фукнций - ограниченная функция. Множество точек разрыва функции f и g - это множество меры ноль, их объединение будет также множеством меры ноль. В точках непрерывности f и g произведение $f{\cdot}g$ будет также непрерывным $\Rightarrow$ $f{\cdot}g$ непрерывно почти всюду $\Rightarrow$ интегрируемо по критерию Лебега. ■

Теорема 2. (**Теорема о среднем**) Пусть f и g - интегрируемы на $[a,b]$, $g \geq 0$, точная верхняя и нижняя грани функции f равны: $m = \inf\limits_{[a,b]} f$, $M = \sup\limits_{[a,b]} f$. Тогда:

$$\exists\,\mu \in [m,M]\colon \int\limits_a^b f(x){\cdot}g(x)dx = \mu\int\limits_a^b g(x)dx$$

Более того, если f - непрерывная, то $\mu = f(c)$, где $c \in [a,b]$.

☐ Из интегрируемости f и g получаем интегрируемость $f \cdot g$ и применяем первую теорему о среднем для интегралов (см. лекцию 23). ■

Следствие 3.

1) Если f интегрируема на $[a, b]$ и отрезок $[c, d] \subset [a, b]$, то f интегрируема на $[c, d]$;
2) Если f интегрируема на $[a, c]$ и $[c, b]$, то f интегрируема на $[a, b]$;

☐

1) Функция ограниченная на $[a, b]$ будет ограниченной на любом подотрезке.

   Множество точек разрыва f на $[a, b]$ - это множество меры ноль, а множество точек разрыва на $[c, d]$ будет подмножеством этого множества меры ноль $\Rightarrow f$ непрерывна на $[c, d]$ почти всюду.

   Применяем критерий Лебега и получаем требуемое;

2) Если f интегрируема на $[a, c]$ и $[c, b] \Rightarrow$ ограничена на обоих отрезках, тогда возьмем самое большое ограничение и получим ограниченность на $[a, b]$.

   На обоих отрезках функция f почти всюду непрерывна, объединение множеств меры ноль этих отрезков будет множеством меры ноль. Если f была непрерывной в точке c на одном отрезке, то и на другом она будет непрерывной в точке c, поскольку функция одна и та же.

   Применяем критерий Лебега и получаем требуемое;

■

Следствие 4. Пусть f интегрируема по Риману на $[a, b]$ и $f \geq 0$. Если $\int\limits_a^b f(x)dx = 0$, то $f = 0$ п.в.

☐ Докажем, что $f = 0$ во всех точках непрерывности (т.е. $f \neq 0$ только на множестве меры ноль). Пусть $f(c) > 0$ и c - точка непрерывности функции f (не равная a или b, на множество меры ноль это не скажется), тогда по теореме об отделимости:

$$\exists\, \Delta \subset [a, b] \colon c \in \Delta,\ c \neq a \wedge c \neq b,\ f(x) \geq \frac{f(c)}{2},\ \forall x \in \Delta$$

Заметим, что $|\Delta| > 0$, поскольку длина отрезка - положительная величина и выполняется следующее:

$$f(x) \geq \frac{f(c)}{2} \cdot \mathbb{I}_\Delta(x),\ \forall x \in [a, b]$$

Следовательно, интегрируя неравенство, по свойству монотонности мы получим:

$$\int\limits_a^b f(x)dx \geq \frac{f(c)}{2} \cdot |\Delta| > 0$$

Получили противоречие с тем, что интеграл на всем отрезке равен $0 \Rightarrow f$ принимает значение 0 во всех точках непрерывности, то есть $f = 0$ почти всюду. ■

Следствие 5.

1) Пусть функции f и g интегрируемы по Риману на $[a,b]$ и $f=g$ почти всюду. Тогда:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$$

2) Если функция f интегрируема по Риману на $[a,b]$ и $g=f$ всюду, кроме конечного числа точек, то функция g - интегрируема на $[a,b]$ и справедливо следующее:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$$

Rm: 2. Стоит обратить внимание, что если не требовать, чтобы функция g была интегрируемой в первой части следствия, то из $f=g$ п.в. не следует, что g интегрируема. Например, функция Дирихле совпадает с 0 п.в., 0 - интегрируемая, а функция Дирихле - нет (она почти всюду разрывна).

□

1) Рассмотрим Римановы суммы:

$$\sum_i f(\xi_i)\cdot|\Delta_i|,\ \sum_i g(\xi_i)\cdot|\Delta_i|$$

Всегда можно выбрать $\xi_i\colon f(\xi_i)=g(\xi_i)$, поскольку Δ_i не является множеством меры ноль: иначе, если бы во всех его точках f и g отличались, то Δ_i был бы подмножеством множества, где $f\neq g$, то есть множества меры ноль, что невозможно. Тогда:

$$\sum_i f(\xi_i)\cdot|\Delta_i| = \sum_i g(\xi_i)\cdot|\Delta_i|$$

Переходя к пределам, получим равенство интегралов;

2) Добавили не более, чем конечное число точек разрыва $\Rightarrow$ функция осталась почти всюду непрерывной $\Rightarrow$ верно по критерию Лебега и первому пункту;

■