Суммы и интегралы Дарбу

Всегда предполагаем, что f - ограничена на изучаемом отрезке $[a,b]$.

Опр: 1. $\forall$ разбиения $\mathbb{T}$ отрезка $[a,b]$ следующая сумма:

$$s(f,\mathbb{T})=\sum_{k=1}^{N}\inf_{\Delta_k} f\cdot|\Delta_k|$$

называется нижней суммой Дарбу.

Опр: 2. $\forall$ разбиения $\mathbb{T}$ отрезка $[a,b]$ следующая сумма:

$$S(f,\mathbb{T})=\sum_{k=1}^{N}\sup_{\Delta_k} f\cdot|\Delta_k|$$

называется верхней суммой Дарбу.

Лемма 1. Верны следующие утверждения:

(1) $s(f,\mathbb{T})=\inf\limits_{\xi}\sigma(f,\mathbb{T},\xi)\leq\sigma(f,\mathbb{T},\xi)\leq\sup\limits_{\xi}\sigma(f,\mathbb{T},\xi)=S(f,\mathbb{T})$;

(2) Пусть $\mathbb{T}\subset\mathbb{T}'$ (измельчение разбиения $\mathbb{T}$), тогда $s(f,\mathbb{T})\leq s(f,\mathbb{T}')$ и $S(f,\mathbb{T})\geq S(f,\mathbb{T}')$;

(3) $\forall\,\mathbb{T}_1,\mathbb{T}_2$, $s(f,\mathbb{T}_1)\leq S(f,\mathbb{T}_2)$;

Опр: 3. Точная верхняя грань нижней суммы Дарбу:

$$\underline{\mathrm{I}}=\sup_{\mathbb{T}} s(f,\mathbb{T})$$

называется нижним интегралом Дарбу.

Опр: 4. Точная нижняя грань верхней суммы Дарбу:

$$\overline{\mathrm{I}}=\inf_{\mathbb{T}} S(f,\mathbb{T})$$

называется верхним интегралом Дарбу.

Лемма 2. Нижний и верхний интегралы Дарбу можно определить следующим образом:

$$\lim_{\lambda(\mathbb{T})\to 0} s(f,\mathbb{T})=\underline{\mathrm{I}},\ \lim_{\lambda(\mathbb{T})\to 0} S(f,\mathbb{T})=\overline{\mathrm{I}}$$

$\square$ Рассмотрим первое равенство, предел мы понимаем в следующем смысле:

$$\forall\varepsilon>0,\,\exists\,\delta>0\colon\forall\,\mathbb{T},\,\lambda(\mathbb{T})<\delta\Rightarrow\underline{\mathrm{I}}-s(f,\mathbb{T})<\varepsilon$$

По определению, нижний интеграл Дарбу это точная верхняя грань нижней суммы Дарбу, тогда:

$$\forall\varepsilon>0,\,\exists\,\mathbb{T}_\varepsilon\colon\underline{\mathrm{I}}-\varepsilon<s(f,\mathbb{T}_\varepsilon)$$

Пусть $\mathbb{T}$ - произвольное разбиение отрезка $[a,b]$. Рассмотрим следующую разность:

$$\underline{\mathrm{I}}-s(f,\mathbb{T})=\underline{\mathrm{I}}-s(f,\mathbb{T}_\varepsilon)+s(f,\mathbb{T}_\varepsilon)-s(f,\mathbb{T})<\varepsilon+s(f,\mathbb{T}_\varepsilon)-s(f,\mathbb{T})$$

Возьмем $\mathbb{T}\cup\mathbb{T}_\varepsilon$ - измельчение $\mathbb{T}_\varepsilon$ и $\mathbb{T}$, тогда по предыдущей лемме:

$$\varepsilon + s(f,\mathbb{T}_\varepsilon) - s(f,\mathbb{T}) \le \varepsilon + s(f,\mathbb{T}\cup\mathbb{T}_\varepsilon) - s(f,\mathbb{T})$$

Пусть $\mathbb{T}$ разбивает отрезок $[a,b]$ на Δ_k, а $\mathbb{T}\cup\mathbb{T}_\varepsilon$ разбивает отрезок $[a,b]$ на Δ'_m. Среди отрезков $\mathbb{T}\cup\mathbb{T}_\varepsilon$ есть те же самые, что и среди отрезков $\mathbb{T}$.

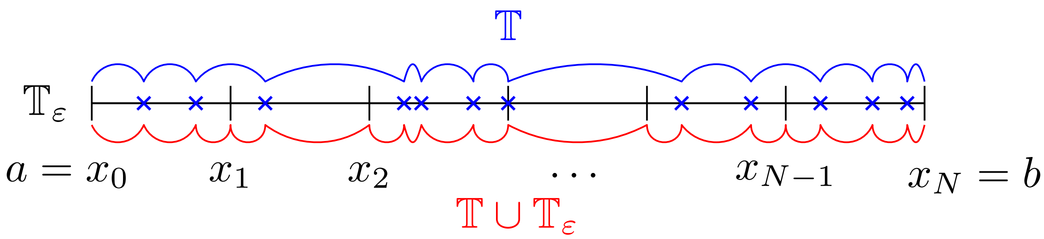

Рис. 1: Разбиение отрезка $[a,b]$.

Отрезки разбиения $\mathbb{T}$ не совпадают с отрезками разбиения $\mathbb{T}\cup\mathbb{T}_\varepsilon$ там, где отрезки Δ_k разбиты точками разбиения $\mathbb{T}_\varepsilon$: $x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}$, где N зависит от ε. Таким образом:

$$\forall x_j \in \mathbb{T}_\varepsilon,\ j = \overline{1, N-1},\ x_j \notin \Delta_k \Rightarrow \exists\, m\colon \Delta_k = \Delta'_m$$

И то же самое будет верно для Δ'_m:

$$\forall x_j \in \mathbb{T}_\varepsilon,\ j = \overline{1, N-1},\ x_j \notin \Delta'_m \Rightarrow \exists\, k\colon \Delta'_m = \Delta_k$$

Следовательно, не совпадающих отрезков разбиения может быть не более, чем удвоенное число точек разбиения $\mathbb{T}_\varepsilon$, то есть $2(N-1)$ отрезков. Оценим разность $s(f,\mathbb{T}\cup\mathbb{T}_\varepsilon) - s(f,\mathbb{T})$:

$$s(f,\mathbb{T}\cup\mathbb{T}_\varepsilon) - s(f,\mathbb{T}) = \sum_m \inf_{\Delta'_m} f\cdot|\Delta'_m| - \sum_k \inf_{\Delta_k} f\cdot|\Delta_k| = \sum_{m\colon x_j\in\Delta'_m} \inf_{\Delta'_m} f\cdot|\Delta'_m| + \sum_{m\colon x_j\notin\Delta'_m} \inf_{\Delta'_m} f\cdot|\Delta'_m| -$$

$$- \sum_{k\colon x_j\in\Delta_k} \inf_{\Delta_k} f\cdot|\Delta_k| - \sum_{k\colon x_j\notin\Delta_k} \inf_{\Delta_k} f\cdot|\Delta_k| = \sum_{m\colon x_j\in\Delta'_m} \inf_{\Delta'_m} f\cdot|\Delta'_m| - \sum_{k\colon x_j\in\Delta_k} \inf_{\Delta_k} f\cdot|\Delta_k|$$

Пусть $M = \sup\limits_{[a,b]}|f|$, тогда $\inf\limits_{[a,b]} f \le M$ и $-\inf\limits_{[a,b]} f \le M$. Поскольку разбиение $\mathbb{T}\cup\mathbb{T}_\varepsilon$ более мелкое, чем $\mathbb{T}$, то его масштаб $\lambda(\mathbb{T}) = \max\limits_k |\Delta_k| \ge \lambda(\mathbb{T}\cup\mathbb{T}_\varepsilon) = \max\limits_m |\Delta'_m|$. Поскольку число точек разбиения $\mathbb{T}_\varepsilon$ зависит от ε, то $N = N_\varepsilon$. В результате мы получим следующее:

$$\sum_{m\colon x_j\in\Delta'_m} \inf_{\Delta'_m} f\cdot|\Delta'_m| - \sum_{k\colon x_j\in\Delta_k} \inf_{\Delta_k} f\cdot|\Delta_k| \le 2(N_\varepsilon - 1)M\cdot\lambda(\mathbb{T}) + 2(N_\varepsilon - 1)M\cdot\lambda(\mathbb{T}) \le 4N_\varepsilon M\cdot\lambda(\mathbb{T})$$

$$\underline{\mathrm{I}} - s(f,\mathbb{T}) \le \varepsilon + 4N_\varepsilon M\cdot\lambda(\mathbb{T})$$

Пусть $\delta > 0\colon 4N_\varepsilon M\cdot\delta < \varepsilon$, тогда:

$$\forall\,\mathbb{T},\ \lambda(\mathbb{T}) < \delta \Rightarrow \underline{\mathrm{I}} - s(f,\mathbb{T}) < 2\varepsilon$$

Аналогичное доказательство проводится для верхнего интеграла Дарбу. ■

Применим эту лемму к доказательству критерия Дарбу.

Критерий Дарбу

Теорема 1. (**Критерий Дарбу**) Пусть f - ограничена на отрезке $[a, b]$. Функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$ по Риману $\Leftrightarrow \bar{\mathrm{I}} = \underline{\mathrm{I}}$. В случае интегрируемости верно:

$$\underline{\mathrm{I}} = \bar{\mathrm{I}} = \int\limits_a^b f(x)dx$$

$\square$
($\Rightarrow$) Функция f интегрируема на $[a, b]$, тогда:

$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists\, \delta > 0 \colon \forall (\mathbb{T}, \xi),\, \lambda(\mathbb{T}) < \delta \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx - \varepsilon < \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) < \int\limits_a^b f(x)dx + \varepsilon$$

По лемме мы знаем, что: $s(f, \mathbb{T}) = \inf\limits_{\xi} \sigma(f, \mathbb{T}, \xi)$ и $S(f, \mathbb{T}) = \sup\limits_{\xi} \sigma(f, \mathbb{T}, \xi)$. Поскольку отмеченное разбиение в определении интегрируемости - произвольное, то:

$$\int\limits_a^b f(x)dx - \varepsilon \le s(f, \mathbb{T}) \le S(f, \mathbb{T}) \le \int\limits_a^b f(x)dx + \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim\limits_{\lambda(\mathbb{T}) \to 0} s(f, \mathbb{T}) = \lim\limits_{\lambda(\mathbb{T}) \to 0} S(f, \mathbb{T}) = \int\limits_a^b f(x)dx$$

По лемме выше, эти пределы равны нижнему и верхнему интегралам Дарбу:

$$\lim\limits_{\lambda(\mathbb{T}) \to 0} s(f, \mathbb{T}) = \underline{\mathrm{I}} = \lim\limits_{\lambda(\mathbb{T}) \to 0} S(f, \mathbb{T}) = \bar{\mathrm{I}} \Rightarrow \underline{\mathrm{I}} = \bar{\mathrm{I}} = \int\limits_a^b f(x)dx$$

($\Leftarrow$) Пусть $\underline{\mathrm{I}} = \bar{\mathrm{I}} = \mathrm{I}$, мы знаем, что:

$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists\, \delta > 0 \colon \forall\, \mathbb{T},\, \lambda(\mathbb{T}) < \delta \Rightarrow \mathrm{I} - \varepsilon = \underline{\mathrm{I}} - \varepsilon < s(f, \mathbb{T}) \le \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) \le S(f, \mathbb{T}) < \bar{\mathrm{I}} + \varepsilon = \mathrm{I} + \varepsilon$$

где $s(f, \mathbb{T}) \le \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) \le S(f, \mathbb{T})$ по лемме выше. Тогда:

$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists\, \delta > 0 \colon \forall\, \mathbb{T},\, \lambda(\mathbb{T}) < \delta \Rightarrow |\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) - \mathrm{I}| < \varepsilon$$

Следовательно, f интегрируема на $[a, b]$. $\blacksquare$

Следствие 1. Ограниченная функция f интегрируема по Риману $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\, \exists\, \mathbb{T} \colon S(f, \mathbb{T}) - s(f, \mathbb{T}) < \varepsilon$.

$\square$
($\Rightarrow$) Функция f - интегрируема $\Rightarrow \bar{\mathrm{I}} = \underline{\mathrm{I}}$. При $\lambda(\mathbb{T}) \to 0$ получим:

$$s(f, \mathbb{T}) \to \underline{\mathrm{I}},\, S(f, \mathbb{T}) \to \bar{\mathrm{I}} \Rightarrow S(f, \mathbb{T}) - s(f, \mathbb{T}) \to 0$$

($\Leftarrow$) Пусть $\forall \varepsilon > 0,\, \exists\, \mathbb{T} \colon S(f, \mathbb{T}) - s(f, \mathbb{T}) < \varepsilon$. По определению: $s(f, \mathbb{T}) \le \underline{\mathrm{I}} \le \bar{\mathrm{I}} \le S(f, \mathbb{T})$, тогда:

$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists\, \mathbb{T} \colon S(f, \mathbb{T}) - s(f, \mathbb{T}) < \varepsilon \Rightarrow 0 \le \bar{\mathrm{I}} - \underline{\mathrm{I}} < \varepsilon \Rightarrow \bar{\mathrm{I}} = \underline{\mathrm{I}}$$

$\blacksquare$

Мы получили критерий по которому можно проверить интегрируемость функции f. Для этого мы должны найти разбиение, где разность $S(f, \mathbb{T}) - s(f, \mathbb{T})$ - маленькая. Распишем её подробнее:

$$S(f, \mathbb{T}) - s(f, \mathbb{T}) = \sum_k \sup_{\Delta_k} f \cdot |\Delta_k| - \sum_k \inf_{\Delta_k} f \cdot |\Delta_k| = \sum_k \left(\sup_{\Delta_k} f - \inf_{\Delta_k} f \right) \cdot |\Delta_k| = \sum_k \omega(f, \Delta_k) \cdot |\Delta_k|$$

где $\omega(f, \Delta_k)$ - колебание функции f на интервале Δ_k. Таким образом, запишем критерий интегрируемости.

<u>**Критерий интегрируемости**</u>: Функция f - интегрируема $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \mathbb{T}\colon \sum\limits_k \omega(f, \Delta_k) \cdot |\Delta_k| < \varepsilon$.

Rm: 1. С учетом критерия становится очевидным, что непрерывные функции - интегрируемы: функция f - непрерывна на отрезке $[a, b] \Rightarrow$ будет равномерно непрерывна $\Rightarrow$ как только масштаб разбиения станет меньше δ, колебания станут меньше $\varepsilon \Rightarrow$ вся сумма станет меньше, чем $\varepsilon(b - a)$.

Rm: 2. Критерий нарушается там, где мы не сможем справиться с колебаниями (то есть там, где функция будет разрывной). При этом если точка разрыва одна, то она портит только одно слагаемое суммы и это слагаемое можно сделать маленьким за счет длины Δ_k.

Таким образом, точки разрыва могут быть, но их должно быть столько, чтобы сумма длин накрывающих их отрезков была маленькой, а на остальных отрезках справимся за счет непрерывности.

Это приводит к мысли, что интегрируемые по Риману функции это те, которые имеют не "слишком много" точек разрыва. Чтобы найти точное условие интегрируемости, необходимо понять в каком смысле точек разрыва "мало".

Множество меры ноль

Опр: 5. Множество $E \subset \mathbb{R}$ называется множеством меры ноль по Лебегу, если: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ не более чем счетный набор интервалов $\{\mathrm{I}_n\}$ таких, что:

(1) Множество E покрыто этими интервалами: $E \subset \bigcup\limits_n \mathrm{I}_n$;

(2) Сумма длин этих интервалов меньше ε: $\sum\limits_n |\mathrm{I}_n| < \varepsilon$;

Примеры множеств меры ноль

1) **Точка**: возьмем интервал I, накрывающий точку a длина которого меньше ε.

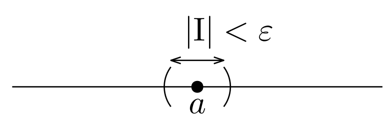

Рис. 2: Множество меры ноль: точка.

2) **Конечный набор точек**: накроем точки $x_1, \ldots, x_N$ интервалами I_i, длины которых меньше $\frac{\varepsilon}{N}$. Таким образом, суммарная длина всех отрезков будет меньше ε и все интервалы покрывают весь конечный набор точек.

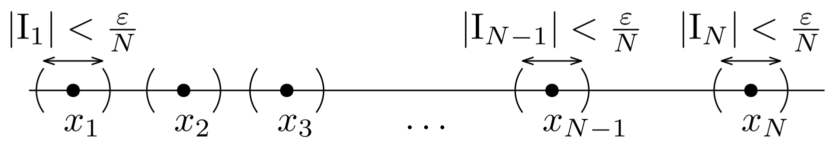

Рис. 3: Множество меры ноль: конечный набор точек.

3) **Счетный набор точек**: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ накрываем интервалами I_i, длина которых становятся меньше с ростом n. Например, интервалами длина которых меньше, чем $\dfrac{\varepsilon}{2^{n+1}}$. Тогда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\mathrm{I}_n| < \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \varepsilon$$

4) **Множество Кантора**: Отрезок $[0,1]$ делится на 3 равные части, середина исключается. Потом оставшиеся интервалы снова делятся на 3 равные части и середина снова исключается, и так далее. То, что останется будет множеством меры ноль. Сумма длин этих отрезков равна:

$$1 - \sum_{n=1}^{N} \frac{2^{n-1}}{3^n} \to 0$$

Это значит, что на каждом шаге можно оставшееся множество накрыть конечным числом отрезков, сумма длин которых будет меньше любого наперед заданного $\varepsilon > 0$. Любой такой отрезок можно будет чуть-чуть расширить, чтобы получился интервал.

5) **Отрезок**: Отрезок $[a,b]$ (где $b > a$) не является множеством меры ноль, поскольку сумму длин покрывающих интервалов сделать меньше, чем длина отрезка не получится. Об этом говорит следующая лемма.

Лемма 3. Если $[a,b] \subset \bigcup\limits_n \mathrm{I}_n$, где I_n - интервалы, то верно следующее:

$$b - a \le \sum_n |\mathrm{I}_n \cap [a,b]| \le \sum_n |\mathrm{I}_n|$$

Rm: 3. Из этой леммы следует еще одно доказательство того, что отрезок не является счетным множеством. Если бы он являлся счетным множеством, то был бы множеством меры ноль.

□ Отрезок это компакт, поэтому достаточно рассмотреть конечное покрытие. Пусть $[a,b] \subset \bigcup\limits_{n=1}^{N} \mathrm{I}_n$. Будем доказывать индукцией по количеству интервалов N.

<u>**База**</u>: $N = 1 \Rightarrow [a,b] \subset (\alpha,\beta) \Rightarrow b - a \le |[a,b] \cap (\alpha,\beta)| = b - a \le \beta - \alpha$.

<u>**Шаг**</u>: Пусть верно для N, докажем для $N+1$. Можно считать, что $b \in \mathrm{I}_{N+1} = (\alpha_{N+1}, \beta_{N+1})$. Пусть точка $\alpha_{N+1} \in [a,b]$, иначе смотри базу индукции. Рассмотрим отрезок $[a, \alpha_{N+1}]$, он целиком покрывается остальными интервалами:

$$[a, \alpha_{N+1}] \subset \bigcup_{n=1}^{N} \mathrm{I}_n$$

Если это не так, то вместе с интервалом $(\alpha_{N+1}, \beta_{N+1})$ они бы не смогли покрыть отрезок $[a, b]$. Тогда:

$$\alpha_{N+1} - a \leq \sum_{n=1}^{N} |[a, \alpha_{N+1}] \cap \mathrm{I}_n|$$

где верно следующее:

$$\forall n,\ |[a, \alpha_{N+1}] \cap \mathrm{I}_n| \leq |[a, b] \cap \mathrm{I}_n|$$

Добавим $b - \alpha_{N+1}$ к правой и левой части неравенства выше, получим:

$$b - a \leq b - \alpha_{N+1} + \sum_{n=1}^{N} |[a, \alpha_{N+1}] \cap \mathrm{I}_n| \leq b - \alpha_{N+1} + \sum_{n=1}^{N} |[a, b] \cap \mathrm{I}_n| = |[a, b] \cap \mathrm{I}_{N+1}| + \sum_{n=1}^{N} |[a, b] \cap \mathrm{I}_n|$$

Учитывая, что $\forall n,\ |[a, b] \cap \mathrm{I}_n| \leq |\mathrm{I}_n|$ получим требуемое. ■

Свойства множеств меры ноль

1) В определении множества меры ноль по Лебегу можно интервалы заменить отрезками.

□

(⇒) Если $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ интервалы $\mathrm{I}_n = (\alpha_n, \beta_n)$ такие, что:

$$E \subset \bigcup_n \mathrm{I}_n \wedge \sum_n |\mathrm{I}_n| < \varepsilon$$

то это выполнено и для отрезков $[\alpha_n, \beta_n]$. Поскольку E содержится в объединении интервалов и их концов, а наличие или отсутствие точки на сумму длин не сказыватеся.

(⇐) Пусть теперь $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \mathrm{J} = [\alpha_n, \beta_n]$ такие, что:

$$E \subset \bigcup_n \mathrm{J}_n \wedge \sum_n |\mathrm{J}_n| < \varepsilon$$

Расширим отрезки до интервалов, увеличив длину в два раза:

$$\mathrm{I}_n = \left(\frac{\alpha_n + \beta_n}{2} - (\beta_n - \alpha_n), \frac{\alpha_n + \beta_n}{2} + (\beta_n - \alpha_n)\right),\ |\mathrm{I}_n| = 2|\mathrm{J}_n| \Rightarrow \sum_n |\mathrm{I}_n| < 2\varepsilon$$

А поскольку $\varepsilon > 0$ - произвольное, то получим требуемое. ■

2) Если E множество меры ноль и $D \subset E$, то D - множество меры ноль.

□ Очевидно, поскольку если смогли покрыть большее множество, то меньшее покроем тем более:

$$D \subset E \subset \bigcup_n \mathrm{I}_n$$

Сумма длин отрезков не меняется, следовательно получаем требуемое. ■

3) Если E_n (не более, чем счетный набор) - множество меры ноль, то $\bigcup\limits_n E_n$ - множество меры ноль.

□ По аналогии со счетным набором точек: каждое E_n необходимо покрыть своим набором $\{\mathrm{I}_k^n\}$ так, чтобы сумма их длин была меньше, чем $\dfrac{\varepsilon}{2^{n+1}}$:

$$E_n \subset \bigcup_k \mathrm{I}_k^n \wedge \sum_k |\mathrm{I}_k^n| < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \Rightarrow \bigcup_n E_n \subset \bigcup_{k,n} \mathrm{I}_k^n \wedge \sum_{k,n} |\mathrm{I}_k^n| < \varepsilon$$

Таким образом, выполнено определение множества меры ноль. ■

Rm: 4. Здесь стоит задаться вопросом, как мы смогли так просуммировать произвольно ряд по индексам k, n. У нас есть числа a_k^n - длины отрезков I_k^n. Мы знаем, что сумма по k при фиксированном n меньше, чем $\dfrac{\varepsilon}{2^{n+1}}$:

$$\sum_k a_k^n < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$$

А теперь мы начинаем складывать по k, n: делаем нумерацию пар (k, n) (например, по табличке или по диагонали, главное чтобы вся таблица была занумерована). Таким образом, мы получаем сопоставление: $j \to (k(j), n(j))$ и строим сумму по j:

$$\sum_j a_{k(j)}^{n(j)}$$

Именно это подразумевается, когда пишем сумму ряда по индексам k, n: $\sum\limits_{k,n} |\mathrm{I}_k^n| < \varepsilon$. Эта сумма есть предел частичных сумм:

$$\sum_j a_{k(j)}^{n(j)} = \lim_{M\to\infty} \sum_{j=1}^M a_{k(j)}^{n(j)}$$

В этой конечной сумме уже можно перераспределить слагаемые так, как будет удобно, например, по принадлежности к n: отдельно те, которые относятся к 1 (если нет таких, то считаем слагаемое равным 0), отдельно те, которые относятся к 2 и так далее. Получим следующую сумму:

$$\sum_{j=1}^M a_{k(j)}^{n(j)} = \sum_p a_p^1 + \sum_p a_p^2 + \ldots + \sum_p a_p^M < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{8} + \ldots + \frac{\varepsilon}{2^{M+1}} < \varepsilon$$

Каждая частичная сумму меньше, чем $\varepsilon \Rightarrow$ их предел меньше или равен ε:

$$\sum_{k,n} |\mathrm{I}_k^n| = \sum_j a_{k(j)}^{n(j)} = \lim_{M\to\infty} \sum_{j=1}^M a_{k(j)}^{n(j)} \le \varepsilon$$

Критерий Лебега

Опр: 6. Если некоторое свойство имеет место для всех точек, кроме множества меры ноль, то говорят, что это свойство выполняется почти всюду.

Теорема 2. (**Критерий Лебега**) f - интегрируема по Риману на отрезке $[a, b] \Leftrightarrow f$ - ограничена на отрезке $[a, b]$ и f почти всюду непрерывна на отрезке $[a, b]$.

Rm: 5. Проще говоря, функция интегрируема тогда и только тогда, когда функция ограничена, а множество точек разрыва является множеством меры ноль по Лебегу.