Топология точек множества метрического пространства

Вопрос: Будет ли верно, что $\overline{B(a,r)} = \overline{B}(a,r)$? **Ответ**: Нет.
Например, возьмем X с дискретной метрикой $\Rightarrow B(a,1) = \{a\} = \overline{B(a,1)}$, но $\overline{B}(a,1) = X$.

Такая ситуация возможна только в метрическом пространстве, в нормированном это не так.

Упр. 1. Показать, что в нормированном пространстве $\overline{B(a,r)} = \overline{B}(a,r)$.

Надо объяснить, что каждая точка сферы является граничной точкой для открытого шара.

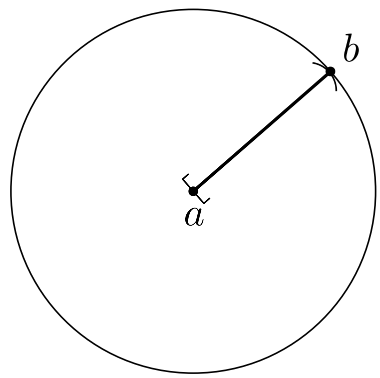

Рис. 1: Каждая точка сферы - граничная для открытого шара.

<u>Идея</u>: Берем точки $a + (b-a)t$, $t \in [0,1) \Rightarrow$ будут браться все точки полуинтервала $[a,b)$. Очевидно, что сколь угодно близко к b есть точки открытого шара, но сама точка b не лежит в открытом шаре, а значит это граничная точка. Тогда каждая точка сферы является граничной.

Утв. 1. В нормированном пространстве $\overline{B(a,r)} = \overline{B}(a,r)$.

$\square$ Пусть $(X, \|\cdot\|)$ - нормированное пространство, тогда:

($\Rightarrow$) Поскольку $\overline{B(a,r)}$ - самое маленькое замкнутое множество, то $\overline{B(a,r)} \subseteq \overline{B}(a,r)$.

($\Leftarrow$) Рассмотрим множество $\overline{B}(a,r) = B(a,r) \cup \{\, x \mid \|x-a\| = r\,\}$, $B(a,r) \subseteq \overline{B(a,r)}$. Покажем, что множество $A = \{\, x \mid \|x-a\| = r\,\}$ - это множество граничных точек шара $B(a,r)$.

Пусть $y \in A \Rightarrow$ по условию $\|y-a\| = r$, $y \in (X \setminus B(a,r))$, тогда:

(1) $\forall B(y,s)$, $B(y,s) \cap (X \setminus B(a,r)) \neq \varnothing$;

(2) Рассмотрим следующее выражение:

$$x_t = a + (y-a)t,\ t \in [0,1) \Rightarrow \|x_t - a\| = \|a + (y-a)t - a\| = |t|\cdot\|y-a\| = |t|\cdot r < r$$

так как $t < 1$. Тогда $\forall t \in [0,1)$, $x_t \in B(a,r)$.

Рассмотрим следующиую разницу:

$$\|x_t - y\| = \|a + (y-a)t - y\| = \|(t-1)(y-a)\| = |t-1|\cdot\|y-a\| = |1-t|\cdot r,\ \forall t \in [0,1)$$

таким образом, $\forall s > 0, \exists\, t \in [0,1)\colon |1-t|r < s \Rightarrow x_t \in B(y,s) \Leftrightarrow \forall B(y,s),\ B(y,s) \cap B(a,r) \neq \varnothing$;

Получили, что $\forall y \in A$, y - граничная точка шара $B(a,r) \Rightarrow A \subseteq \overline{B(a,r)} \Rightarrow \overline{B}(a,r) \subseteq \overline{B(a,r)}$. $\blacksquare$

Пусть (X, ρ) - метрическое пространство. Возьмем $A \subset X \Rightarrow (A, \rho)$ - метрическое пространство. Как устроены открытые множества в (A, ρ)?

Утв. 2. $\mathcal{U}_A$ - открытое множество в $(A, \rho) \Leftrightarrow \exists$ открытое множество $\mathcal{U}$ в $(X, \rho)\colon \mathcal{U}_A = \mathcal{U} \cap A$.

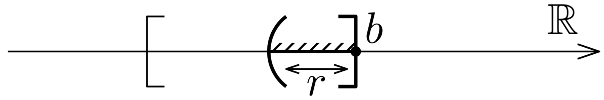

Рис. 2: Открытое множество внутри отрезка (открытый шар $B(b, r)$), но не открытое в $\mathbb{R}$.

□ Пусть $a \in A$, возьмем шар $B^A(a, r) = \{\, x \in A \mid \rho(a, x) < r \,\} \Rightarrow B^A(a, r) = B(a, r) \cap A$.

($\Rightarrow$) Пусть $\mathcal{U}_A$ - открытое множество в A. Тогда

$$\mathcal{U}_A = \bigcup_\alpha B_\alpha^A = \bigcup_\alpha (B_\alpha \cap A) = \left(\bigcup_\alpha B_\alpha\right) \cap A = \mathcal{U} \cap A, \text{ где } \mathcal{U} = \bigcup_\alpha B_\alpha$$

поскольку объединение открытых множеств - открыто. Данное множество $\mathcal{U}$ предъявляется неоднозначно, но такое множество есть.

($\Leftarrow$) Пусть $\exists$ открытое множество $\mathcal{U}\colon \mathcal{U}_A = \mathcal{U} \cap A$, заметим, что всякое открытое множество есть объединение открытых шаров $\Rightarrow$ тогда верны выкладки выше в обратную сторону:

$$\mathcal{U} \cap A = \left(\bigcup_\alpha B_\alpha\right) \cap A = \bigcup_\alpha (B_\alpha \cap A) = \bigcup_\alpha B_\alpha^A = \mathcal{U}_A$$

Получили, что $\mathcal{U}_A$ - открытое множество, как объединение открытых множеств. ■

Компакты

Опр: 1. Множество $K \subset X$ в метрическом пространстве (X, ρ), называется компактом, если для всякого набора открытых множеств $\{\mathcal{U}_\alpha\}$, покрывающих K существует конечный поднабор $\mathcal{U}_{\alpha_1}, \ldots, \mathcal{U}_{\alpha_N}$, покрывающий K.

Опр: 2. Множество $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ покрывает $K \Leftrightarrow K \subset \bigcup\limits_\alpha \mathcal{U}_\alpha$.

Пример: Точка $\{a\}$ - это компакт.

Пусть $K \subset X \Rightarrow (K, \rho)$ - метрическое пространство и открытые множества изменятся. В этом случае K это открытое множество само в себе (знаем, что всё X само в себе это открытое множество). Вдруг K в X это компакт, а само в себе - нет? Или наоборот само в себе компакт, а в X уже нет.

Утв. 3. $K \subset X$ - компакт в метрическом пространстве $(X, \rho) \Leftrightarrow K$ - компакт в метрическом пространстве (K, ρ).

□
($\Rightarrow$) Пусть $K \subset \bigcup\limits_\alpha \mathcal{U}_\alpha^K$. Знаем, что $\mathcal{U}_\alpha^K = \mathcal{U}_\alpha \cap K$, где $\mathcal{U}_\alpha$ - открытое в X. Тогда $K \subset \bigcup\limits_\alpha \mathcal{U}_\alpha$ в пространстве в X, а в нём, множество K является компактом $\Rightarrow$ можно выбрать конечное подпокрытие

$$\exists\, \alpha_1, \ldots, \alpha_N \colon K \subset \bigcup_{j=1}^N \mathcal{U}_{\alpha_j} \Rightarrow K \subset \bigcup_{j=1}^N (\mathcal{U}_{\alpha_j} \cap K)$$

по определению пересечения, тогда $K \subset \bigcup\limits_{j=1}^N \mathcal{U}_{\alpha_j}^K$.

($\Leftarrow$) Пусть K - компакт в метрическом пространстве (K, ρ). Тогда можно выбрать конечное подпокрытие $\Rightarrow \exists\, \alpha_1, \ldots, \alpha_N \colon K \subset \bigcup\limits_{j=1}^N \mathcal{U}_{\alpha_j}^K \Rightarrow$ найдутся такие открытые множества $\{\mathcal{U}_{\alpha_j}\}$ пространства X, что по определению открытых множеств в K:

$$\mathcal{U}_{\alpha_j}^K = \mathcal{U}_{\alpha_j} \cap K, \forall j = \overline{1, N} \Rightarrow K \subset \bigcup_{j=1}^N (\mathcal{U}_{\alpha_j} \cap K) = \left(\bigcup_{j=1}^N \mathcal{U}_{\alpha_j}\right) \cap K \Rightarrow K \subset \bigcup_{j=1}^N \mathcal{U}_{\alpha_j}$$

таким образом, получили конечный набор открытых множеств в X, покрывающий K. ■

Лемма 1. (Бореля-Гейне-Лебега в $\mathbb{R}^n$): Брус $[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ - является компактом в $\mathbb{R}^n$ с обычной Евклидовой метрикой.

□ Пусть $n = 2$, докажем с использованием рисунка.

(От противного): Пусть утверждение не верно, тогда найдется покрытие из которого выбрать конечное подпокрытие - нельзя.

(1) Делим брус на 4 части, хотя бы у одной из полученных четвертей из данного покрытия нельзя выбрать конечное подпокрытие;

(2) Возьмем полученную четверть, для которой не существует конечного подпокрытия и поделим её опять на 4 части. Опять найдется четверть у которой нет конечного подпокрытия;

⋮ Продолжим аналогичные действия;

Получили систему вложенных прямоугольников у которой не существует конечного подпокрытия $\Rightarrow$ по каждой координате мы получили систему вложенных отрезков $\Rightarrow$ по каждой координате есть общая точка (см. первый семестр).

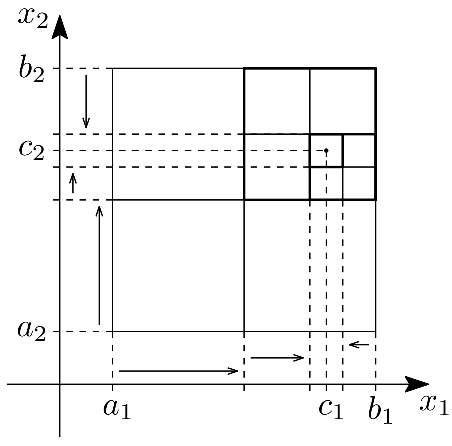

Рис. 3: Брус $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$.

Тогда

$$\exists\, c = (c_1, c_2) \in [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \colon c_1 \in [a_1^n, b_1^n],\ c_2 \in [a_2^n, b_2^n],\ \forall n \in \mathbb{N}$$

то есть c принадлежит всем построенным прямоугольникам. Поскольку весь прямоугольник был покрыт открытыми множествами (есть покрытие), то $\exists$ открытое множество $\mathcal{U}_\alpha \colon c \in \mathcal{U}_\alpha \wedge \exists\, B(c, r) \subset \mathcal{U}_\alpha$, поскольку множество открытое и можно внутри него найти шар, покрывающий данную точку.

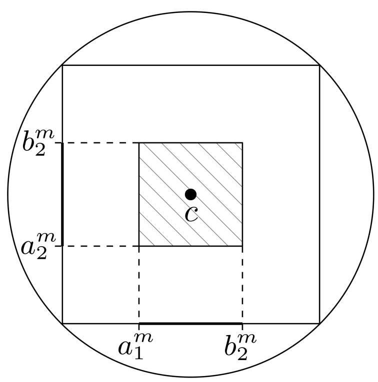

Рис. 4: Прямоугольники внутри открытого шара $B(c, r)$.

Вписываем в шар прямоугольник, когда проекции вложенных отрезков попадут на стороны этого прямоугольника $\Rightarrow$ построенный прямоугольник целиком попадет внутрь открытого шара $B(c, r) \subset \mathcal{U}_\alpha \Rightarrow$ противоречие с построением вложенных прямоугольников.

В случае с n-мерным кубом, предъявляется шар

$$B(c, r) = \left\{\, x \;\Big|\; \sum_{k=1}^{n} (x_k - c_k)^2 < r^2 \,\right\}$$

Хотим найти множество вида

$$C_\delta = [c_1 - \delta, c_1 + \delta] \times \ldots \times [c_n - \delta, c_n + \delta] \subset B(c, r)$$

Какая в этом случае будет δ? Например, $\delta < \frac{r}{\sqrt{n}} \Rightarrow$ каждая точка внутри этого множества C_δ будет $\subset B(c, r)$ и рассуждения будут аналогичны случаю $n = 2$. ■

Rm: 1. Мы вписываем прямоугольник внутрь шара, поскольку таким образом, проще проверять, что другие прямоугольники попали внутрь круга: производим сравнение по сторонам между вписанным прямоугольником и вложенными отрезками.

Теорема 1. Верны следующие свойства:

(1) Компакт является ограниченным множеством, то есть содержится в шаре;

(2) Компакт является замкнутым множеством;

(3) Замкнутое подмножество компакта является компактом;

(4) Всякое бесконечное подмножество компакта имеет предельную точку, принадлежащую компакту;

□ Доказательства будут аналогичны тем, что рассматривались в первом семестре.

(1) Возьмем точку $a \in X$, построим расширяющиеся шары вокруг неё: $B(a, n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Тогда всё пространство будет содержаться в объединении этих шаров

$$X \subset \bigcup_n B(a, n) \Rightarrow K \subset X \subset \bigcup_n B(a, n)$$

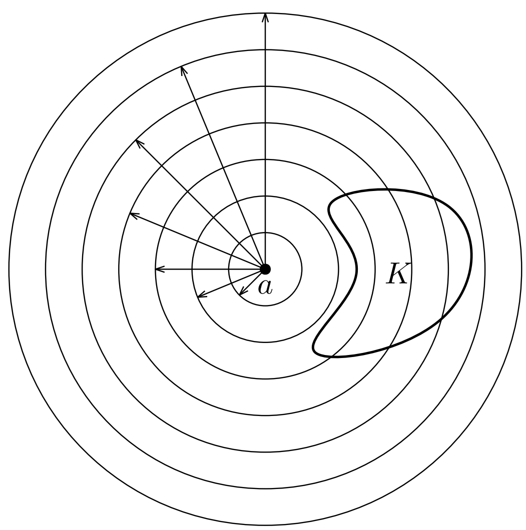

Рис. 5: Расширяющиеся шары $B(a, n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ и компактное множество K в пространстве X.

Все шары являются открытыми множествами $\Rightarrow$ по определению компакта найдется конечное подпокрытие:

$$\exists\, n_1, \ldots, n_N \colon K \subset \bigcup_{j=1}^{N} B(a, j)$$

Поскольку шары вложены друг в друга по построению: $B(a, n) \subset B(a, n+1)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, то найдем шар в котором содержится весь компакт. Пусть $C = \max\limits_{1 \le s \le N} n_s \Rightarrow K \subset B(a, C) \Rightarrow K$ - ограниченное множество;

(2) Если K - замкнутое множество, то его дополнение должно быть открытым. Возьмем точку из дополнения к компакту $a \in X \setminus K$.

Построим из неё замкнутые шары радиуса $\frac{1}{n}$: $\overline{B}\big(a, \frac{1}{n}\big)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Шары являются вложенными

$$\overline{B}\big(a, \tfrac{1}{n+1}\big) \subset \overline{B}\big(a, \tfrac{1}{n}\big),\ \forall n \in \mathbb{N}$$

дополнения к ним являются открытыми множествами.

Если взять объединение всех этих шаров, то получим объединение открытых множеств, покрывающих все множество X без точки a: $\bigcup\limits_n \overline{B}\big(a, \frac{1}{n}\big) = X \setminus \{a\}$, поскольку $a \notin K \Rightarrow$ множество K покрывается этим набором $\Rightarrow$ по определению компакта можно выбрать конечное подпокрытие. Тогда

$$\exists\, \overline{B}\big(a, \tfrac{1}{n_1}\big), \ldots, \overline{B}\big(a, \tfrac{1}{n_s}\big) \colon K \subset \overline{B}\big(a, \tfrac{1}{n_1}\big) \cup \ldots \cup \overline{B}\big(a, \tfrac{1}{n_s}\big)$$

возьмем самый маленький шарик $\Rightarrow M = \max\limits_{1 \le s \le N} n_s \Rightarrow K \subset X \setminus \overline{B}\big(a, \frac{1}{M}\big)$ - самое большое открытое множество из конечного подпокрытия, содержащее $K \Rightarrow B\big(a, \frac{1}{M}\big) \subset \overline{B}\big(a, \frac{1}{M}\big) \subset X \setminus K$.

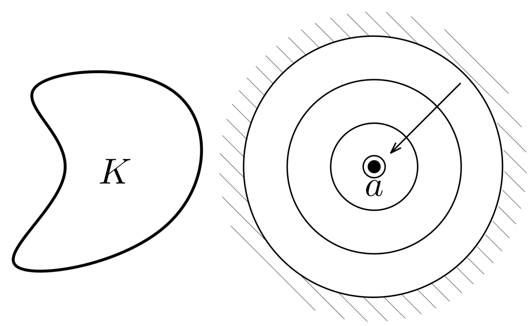

Рис. 6: Дополнение к компакту.

Таким образом, вместе с каждой точкой дополнение K содержит открытый шар $\Rightarrow$ дополнение множества K - открытое $\Rightarrow K$ - замкнутое множество;

(3) Пусть $F \subset K$ - замкнутое, возьмем покрытие множества $F \Rightarrow F \subset \bigcup\limits_\alpha \mathcal{U}_\alpha \Rightarrow K \subset \bigcup\limits_\alpha \mathcal{U}_\alpha \cup (X \setminus F)$.

Так как F - замкнуто, то $X \setminus F$ - открыто $\Rightarrow$ получили покрытие компакта $\Rightarrow$ возьмем конечное подпокрытие

$$K \subset \mathcal{U}_{\alpha_1} \cup \ldots \cup \mathcal{U}_{\alpha_N} \cup (X \setminus F)$$

но $F \not\subset (X \setminus F) \Rightarrow F \subset \mathcal{U}_{\alpha_1} \cup \ldots \cup \mathcal{U}_{\alpha_N} \Rightarrow$ нашли конечное подпокрытие открытыми множествами для F;

(4) (От противного): Пусть $\nexists$ предельных точек бесконечного подмножества компакта, принадлежащих компакту. Тогда $\forall a \in K$, $\exists\, B(a, r) \colon B(a, r)$ содержит конечное множество точек множества K. То есть

$$K \subset \bigcup_a B(a, r_a) \Rightarrow K \subset B(a_1, r_{a_1}) \cup \ldots \cup B(a_N, r_{a_N})$$

по определению компакта. Но мы знаем, что в каждом из таких шаров находится конечное множество точек $\Rightarrow$ исходное множество K - конечно $\Rightarrow$ противоречие.

■

Критерии компактности

Следствие 1. (**Критерий компактности в** $\mathbb{R}^n$) $K \subset \mathbb{R}^n$ - компакт $\Leftrightarrow K$ ограничено и замкнуто.

□
($\Rightarrow$) По теореме выше, компакт это ограниченное и замкнутое множество.

($\Leftarrow$) Если K - ограничено и замкнуто, то K лежит внутри бруса. По лемме Гейне-Бореля-Лебега, брус это компакт.

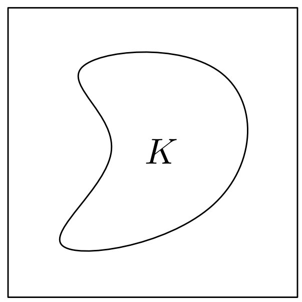

Рис. 7: Ограниченное и замкнутое множество лежит внутри бруса.

Поскольку K это замкнутое подмножество компакта, то по теореме выше K это компакт. ■

Когда ограниченное и замкнутое множество не является компактом?

Пример: Пространство $(\mathbb{N}, \rho)$, где $\rho(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$ - дискретная метрика. Тогда одноточечное множество $\{n\} = B(n, 1)$ - это шар радиуса 1. В этом случае $\mathbb{N}$ - ограниченное и замкнутое множество:

- **Замкнутость**: $\mathbb{N}$ - является замкнутым, поскольку все пространство всегда является замкнутым множеством;
- **Ограниченность**: $\mathbb{N} \subset B(n, 2)$, $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ множество ограниченно;

Но $\mathbb{N}$ не является компактом, потому что покрывается своими точками и нельзя выбрать конечное подпокрытие. Часто ли это так или мы просто взяли экзотический пример?

Следствие 2. Из всякой последовательности точек компакта, можно выбрать сходящуюся подпоследовательность к точке компакта.

Rm: 2. На самом деле верно и обратное $\Rightarrow$ данное свойство равносильно компактности (без доказательства). Данное свойство иногда называют секвенциальной компактностью.

Rm: 3. С компактностью связан термин вполне ограниченность, то есть когда можно компакт покрыть конечным числом шаров с заранее заданным радиусом. Если можно накрыть замкнутое множество в полном пространстве такой "сеткой", то это будет компакт.

□ Пусть есть последовательность точек $x_n \in K$. Тогда рассмотрим два случая:

(1) Множество значений x_n - бесконечно. Всякое бесконечное подмножество компакта K имеет предельную точку. Пусть для множества значений x_n это a.

Поскольку a это предельная точка, то возьмем шар $B\left(a, \frac{1}{k}\right)$ и выберем элементы $x_{n_k} \in B\left(a, \frac{1}{k}\right)$ в нём так, чтобы номера $n_1 < n_2 < \ldots$ были возрастающими. Это возможно, поскольку в каждом таком шаре лежит бесконечно много элементов этого множества, тогда $x_{n_k} \to a$;

(2) Множество значений x_n - конечно $\Rightarrow$ какие-то значения повторяются бесконечное число раз: $\exists\, x_{n_k} \equiv a \in K \Rightarrow x_{n_k} \to a$. Выбираем подпоследовательность, с элементами, которые повторяют значение и это будет сходящейся подпоследовательностью;

■

Пример: Рассмотрим пространство непрерывных функций $C[0,1]$ и возьмем в нём замкнутое, ограниченное множество

$$\overline{B}(0,1) = \left\{ f\colon \max_{[0,1]} |f| \leq 1 \right\}$$

тем не менее данный шар не является компактом.

Предъявим последовательность f_n из которой нельзя выбрать сходящуюся подпоследовательность. Например, такую в которой никакие элементы не сближаются:

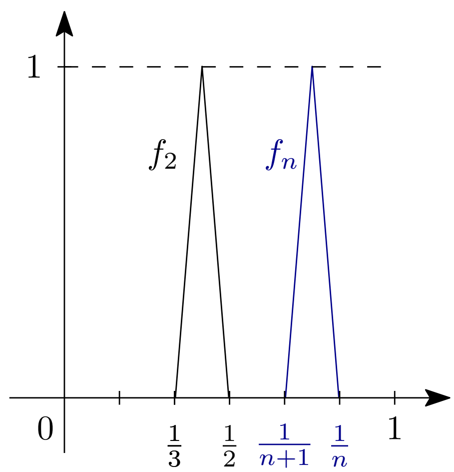

Рис. 8: Пример “расставленной” последовательности $\{f_n\}$.

На каждом отрезке будет своя новая функция-зубец $f_n \Rightarrow$

$$\forall n \neq m,\ \|f_n - f_m\| = \max_{[0,1]} |f_n - f_m| = |1$$

Тогда никакие две функции не находятся ближе, чем на расстоянии 1 друг от друга $\Rightarrow$ из f_n нельзя выбрать сходящуюся подпоследовательность.

Компакты в нормированном пространстве

Рассмотрим нормированные пространства.

Теорема 2. Если в нормированном пространстве, замкнутый шар (положительного радиуса) является компактом, то это пространство конечномерно.

Rm: 4. Если $\exists$ шар $\overline{B}(a,r)$, $r>0$, который является компактом, то всякий замкнутый шар является компактом.

Рассмотрим два шара:

$$\overline{B(a,r)} = \{\, x \colon \|x-a\| \le r \,\},\ \overline{B}(c,R) = \{\, x \colon \|x-c\| \le R\},\ r, R > 0$$

как получить один шар из другого?

(1) Делаем сдвиг: $x \to x + (c-a)$;

(2) Делаем гомотетию: $x \to \lambda x$, где $\lambda = \frac{R}{r}$;

Таким образом, всякий шар получается из другого преобразованием параллельного переноса и гомотетии. Сохраняют ли эти операции компактность или нет?

Упр. 2. Показать, что эти операции сохраняют компактность.

Далее мы покажем, что непрерывные отображения сохраняют компактность, а эти отображения - непрерывны.