$\mathbb{R}^n$ - линейное, Евклидово, нормированное и метрическое пространсво

Опр: 1. $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R} = \{\,(x_1, \ldots, x_n) \mid x_k \in \mathbb{R}\,\}$ - упорядоченный набор из n чисел.

Линейное пространство

Операции над наборами:

(1) **Сложение**: $(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_n, \ldots, x_n + y_n)$;

(2) **Умножение на скаляр** $\alpha \in \mathbb{R}$: $\alpha\cdot(x_1, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)$;

С этими операциями $\mathbb{R}^n$ - линейное, векторное пространство над $\mathbb{R}$.

Вектора $e_k = (0, \ldots, 0, \underset{k}{1}, 0, \ldots, 0)$ образуют базис в $\mathbb{R}^n$, то есть $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ единственным образом представляется в виде:

$$x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$$

где x_k - координаты вектора x.

Евклидово пространство

На $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ определена функция $x, y \mapsto \langle x, y\rangle \in \mathbb{R}$:

$$\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$.

Свойства этой функции:

1) $\langle x, x\rangle \geq 0 \wedge \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (неотрицательность);

2) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ (симметричность);

3) $\langle \alpha x + \beta z, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle + \beta\langle z, y\rangle$ (линейность);

Опр: 2. Если на линейном пространстве (над $\mathbb{R}$) задана функция $\langle\cdot,\cdot\rangle$, удовлетворяющая свойствам 1), 2) и 3), то такую функцию называют скалярным произведением, а линейное пространство со скаларням произведением называют Евклидовым пространством.

Теорема 1. (неравенство Коши-Буняковского-Шварца-Гёльдера) Справедливо неравенство:

$$|\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle}\cdot\sqrt{\langle y, y\rangle}$$

причем если верно равенство $\Leftrightarrow$ x и y - линейно зависимы.

$\square$ Пусть $t \in \mathbb{R}$, $p(t) = \langle x + ty, x + ty\rangle = \langle x, x\rangle + 2t\langle x, y\rangle + t^2\langle y, y\rangle$.

Рассмотрим случай, когда $y = 0 \Rightarrow x, y$ - линейно зависимы $\Rightarrow 0 = 0 + 0 \Rightarrow \langle x, 0\rangle = \langle x, 0\rangle + \langle x, 0\rangle \Rightarrow$ $\Rightarrow \langle x, 0\rangle = 0 \Rightarrow |0| = 0 \leq \sqrt{\langle x, x\rangle}\cdot 0 = 0 \Rightarrow$ равенство верно. Далее, считаем $y \neq 0 \Rightarrow \langle y, y\rangle \neq 0 \Rightarrow$ имеем квадратный трехчлен.

По свойству 1), $\forall t$, $p(t) \geq 0 \Rightarrow D \leq 0$, $D = 4\langle x, y\rangle^2 - 4\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle \leq 0 \Rightarrow \langle x, y\rangle^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle \Rightarrow$ извлекаем корень и получаем требуемое неравенство $|\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle}\cdot\sqrt{\langle y, y\rangle}$.

Равенство $\Leftrightarrow D = 0 \Leftrightarrow \exists\, t_0 \colon p(t_0) = 0 \Leftrightarrow x + t_0 y = 0$, т.е. x и y линейно зависимы. $\blacksquare$

Упр. 1. Свести к $\mathbb{R}^2$ и использовать школьную математику при доказательстве (скорее всего это про площадь параллелограмма).

Нормированное пространство

Длина или норма вектора $x \in \mathbb{R}^n$: $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Свойства нормы:

0) $\|\cdot\| \colon \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$;

1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$;

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника);

   $\square$ $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \Rightarrow$ по неравенству КБ: $\langle x, y\rangle \leq \|x\|\cdot\|y\|$. Тогда:
   $$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\|x\|\cdot\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 \Rightarrow \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$
   $\blacksquare$

Опр: 3. Линейное пространство (над $\mathbb{R}$), на котором задана функция $\|\cdot\|$, удовлетворяющая свойствам 0), 1), 2), и 3) называется нормированным, а эта функция называется нормой.

Бывает ли так, что понятие норма задано, а скалярное произведение - нет? Всегда ли длину вектора можно задать подходящим скалярным произведением?

Если задана длина вектора, то мы можем выразить скалярное произведение через формулу:
$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}\Big(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\Big)$$
Но эта формула далеко не всегда будет задавать скалярное произведение. Есть простой критерий для проверки, что норма будет задавать скалярное произведение.

Упр. 2. (Равенство параллелограмма)

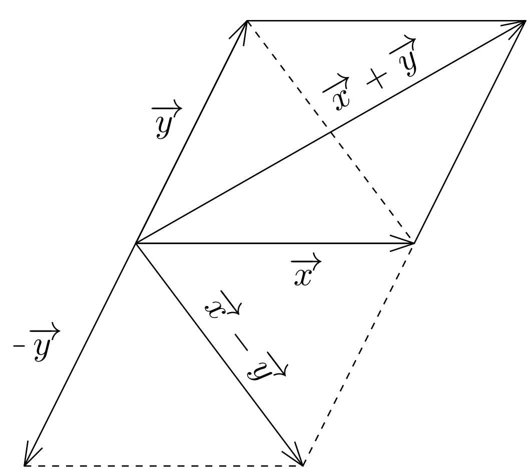

Рис. 1: Сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов сторон.

Нормированное пространство - Евклидово, тогда и только тогда, когда выполняется равенство параллелограмма $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$, доказать равенство при $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ (необх. условие).

Нормированные пространства это более широкий класс пространств, чем Евклидовы. В них есть линейная структура, вектора, длины, но нет углов. В Евклидовом пространстве, есть скалярное произведение $\Rightarrow \cos\angle xy \dfrac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\cdot\|y\|} \Rightarrow$ есть углы.

Метрическое пространство

Функция $\rho(x,y) = \|x-y\|$ обладает следующими свойствами:

1) $\rho \geq 0$, $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (неотрицательность);
2) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ (симметричность);
3) $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$ (неравенство треугольника);

   $\square$ $\rho(x,y) = \|x-y\| = \|(x-z)+(z-y)\| \leq \|x-z\| + \|z-y\| = \rho(x,z)+\rho(z,y)$. $\blacksquare$

Опр: 4. Если на непустом множестве X определена функция $\rho\colon X\times X \to [0,+\infty)$, удовлетворяющая свойствам 1), 2) и 3), то такая функция называется метрикой, а пара (X,ρ) метрическим пространством.

Переходы: Евклидово пространство $\Rightarrow$ нормированное пространство $\Rightarrow$ метрическое пространство - это упрощение структуры. В метрическом пространстве у нас есть только множество и "линейка", чтобы замерять расстояния между точками. Далее мы будем расширяться от понятия метрического пространства к Евклидову.

Примеры метрических пространств:

(1) $\mathbb{R}^n$, $\rho(x,y) = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2}$ - метрическое пространство (разбирается в школе). Такакя метрика называется Евклидовой;

(2) $X \neq \varnothing$, $\rho(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$, свойства 1) и 2) будут выполнены, проверим 3):

$\square$ $\rho(x,y) \leq \rho(x,z)+\rho(z,y)$, в худшем случае слева будет 1, при $x \neq y$, если $\rho(x,z) = 0 \Rightarrow x = z$, если $\rho(z,y) = 0 \Rightarrow y = z \Rightarrow x = z = y \Rightarrow \rho(x,y) = 0$, что будет протворечием, если $x \neq y \Rightarrow$ неравенство треугольника выполняется. $\blacksquare$

Такая метрика называется дискретной;

(3) $\mathbb{R}$, $\rho(x,y) = |f(x)-f(y)|$, где f - некоторая функция. 2), 3) - выполняются. Свойство 1) выполняется, когда $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow$ функция должна быть инъективной;

(4) $\mathbb{R}^n$, $\rho(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{n}|x_k-y_k|$ - метрическое пространство;

(5) $\mathbb{R}^n$, $\rho(x,y) = \max\limits_{1\leq k\leq n}|x_k-y_k|$, свойства 1) и 2) будут выполнены, проверим 3):

$\square$ $\forall k = \overline{1,n}$, $|x_k-y_k| \leq |x_k-z_k| + |z_k-y_k| \Rightarrow |x_k-y_k| \leq \max\limits_{1\leq k\leq n}|x_k-z_k| + \max\limits_{1\leq k\leq n}|z_k-y_k| \Rightarrow$
$\Rightarrow \max\limits_{1\leq k\leq n}|x_k-y_k| \leq \max\limits_{1\leq k\leq n}|x_k-z_k| + \max\limits_{1\leq k\leq n}|z_k-y_k|$ так как справа от k ничего не зависело. $\blacksquare$

Таким образом это тоже метрическое пространство;

(6) $\{0,1\}^n = \{\,(\underbrace{0,1,0,0,1,1,0,\ldots}_{n})\,\}$, $\rho(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k - y_k|$ - метрическое пространство. Такая метрика называется расстоянием Хемминга, она указывает в скольких "битах" было различий.

(7) $X \neq \varnothing$, $B(X) = \{\, f \mid f\colon X \to \mathbb{R},\ f$ - ограничена $\}$, $\rho(f,g) = \sup\limits_x |f(x) - g(x)|$, $\forall f, g \in B(X)$, $B(X)$ - множество всех ограниченных функций из X в $\mathbb{R}$. Если взять $X = \{1, 2, \ldots, n\}$, то это будет частный случай - пример (5). Свойства 1), 2) - очевидны, остается доказать неравенство треугольника:

$\square$ $\forall x \in X$, $|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - z(x)| + |z(x) - y(x)| \Rightarrow \forall x \in X$, $|f(x) - g(x)| \leq \sup\limits_x |f(x) - z(x)| + \sup\limits_x |z(x) - y(x)| \Rightarrow \sup\limits_x |f(x) - g(x)| \leq \sup\limits_x |f(x) - z(x)| + \sup\limits_x |z(x) - y(x)|$, так как справа от x ничего не зависело. $\blacksquare$

Опр: 5. Открытым шаром с центром в точке a и радиусом r называется $B(a,r) = \{\, x \mid \rho(a,x) < r \,\}$.

Опр: 6. Замкнутым шаром с центром в точке a и радиусом r называется $\overline{B}(a,r) = \{\, x \mid \rho(a,x) \leq r \,\}$.

Пример: $\mathbb{R}^2$, $\rho(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$, нарисуем как выглядит $B(0,1) = \{\, (x_1, x_2) \mid |x_1| + |x_2| < 1 \,\}$:

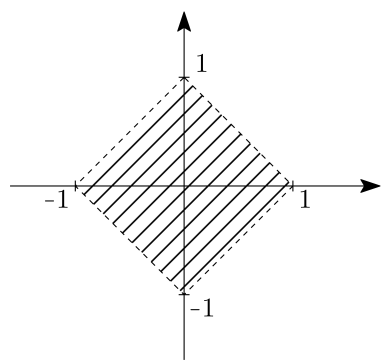

Рис. 2: Пример открытого шара $B(0,1) = \{\, (x_1, x_2) \mid |x_1| + |x_2| < 1 \,\}$.

Может оказаться, что шар с большим радиусом лежит строго внутри шара малого радиуса.

Пример: Возьмем прямоугольный треугольник $\triangle ABC$. В качестве метрического пространства возьмем его вершины $X = \{\, A, B, C \,\}$. Построим два шара $B(C,r) \wedge B(A,R)\colon R > r \Rightarrow$

$$B(C,r) = \{\, A, B, C \,\} \supsetneq B(A,R) = \{\, A, C \,\}$$

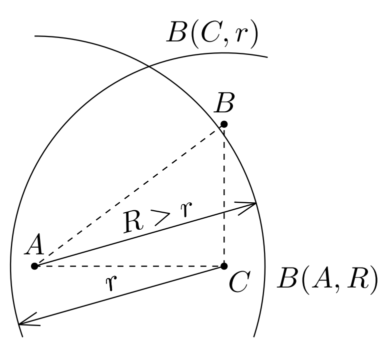

Рис. 3: Пример шара большего радиуса, содержащегося внутри шара меньшего радиуса.