Собственный интеграл с параметром

Пусть $f(x,y)\colon [a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}(\mathbb{C})$. Предположим, что $\forall y$ функция $x\mapsto f(x,y)$ интегрируема на $[a,b]$ по Риману. Пусть также есть какие-то функции $\alpha,\beta\colon [c,d]\to[a,b]$.

Опр: 1. Собственным интегралом с параметром мы будем называть функцию на $[c,d]$ вида:

$$F(y)=\int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx$$

Возникает несколько вопросов про эту функцию:

1) **Непрерывность**;
2) **Дифференцируемость**;
3) **Интегрируемость**;

Rm: 1. Разобравшись с этими вопросами, мы перенесем их на несобственные интегралы и там понадобится равномерная сходимость.

Непрерывность собственного интеграла с параметром

Теорема 1. Пусть $f\in C([a,b]\times[c,d])$ - непрерывна на квадрате и $\alpha,\beta\in C([c,d])$ - непрерывны на отрезке. Тогда функция:

$$F(y)=\int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx$$

непрерывна на отрезке $[c,d]$.

$\square$ Введем вспомогательную функцию:

$$\Phi(u,y)=\int\limits_{a}^{u} f(x,y)dx,\ y\in[c,d],\ u\in[a,b]$$

тогда:

$$F(y)=\int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx=\int\limits_{\alpha(y)}^{u} f(x,y)dx+\int\limits_{u}^{\beta(y)} f(x,y)dx=\Phi(\beta(y),y)-\Phi(\alpha(y),y)$$

Достаточно проверить, что функция $\Phi(u,y)$ - непрерывна на $[a,b]\times[c,d]$ по совокупности переменных. Пусть $(u_0,y_0)\in[a,b]\times[c,d]$, следовательно:

$$|\Phi(u,y)-\Phi(u_0,y_0)|\leq|\Phi(u,y)-\Phi(u,y_0)|+|\Phi(u,y_0)-\Phi(u_0,y_0)|$$

Рассмотрим второе слагаемое в неравенстве:

$$|\Phi(u,y_0)-\Phi(u_0,y_0)|=\left|\int\limits_{u_0}^{u} f(x,y_0)dx\right|$$

Поскольку $f(x,y)$ - непрерывна на $[a,b]\times[c,d]$, значит она ограничена на нём. Тогда:

$$\exists\, M>0\colon \forall (x,y)\in[a,b]\times[c,d],\ |f(x,y)|\le M \Rightarrow \left|\int\limits_{u_0}^{u} f(x,y_0)dx\right| \le \int\limits_{u_0}^{u} |f(x,y_0)|dx \le M|u-u_0|$$

Таким образом: $M|u-u_0| \xrightarrow[u\to u_0]{} 0$. Рассмотрим первое слагаемое в неравенстве:

$$|\Phi(u,y)-\Phi(u,y_0)| \le \int\limits_a^u |f(x,y)-f(x,y_0)|dx \le \int\limits_a^b |f(x,y)-f(x,y_0)|dx$$

Поскольку $f(x,y)$ - непрерывна на прямоугольнике $\Rightarrow$ $f(x,y) \underset{y\to y_0}{\overset{[a,b]}{\rightrightarrows}} f(x,y_0)$ по теореме Кантора (см. пример в лекции 20 этого семестра), тогда:

$$\lim_{y\to y_0}\int\limits_a^b |f(x,y)-f(x,y_0)|dx = \int\limits_a^b \lim_{y\to y_0}|f(x,y)-f(x,y_0)|dx = 0$$

Следовательно, $\lim\limits_{(u,y)\to(u_0,y_0)} \Phi(u,y) = \Phi(u_0,y_0) \Rightarrow \Phi(u,y)$ - по определению непрерывна по совокупности переменных. Исходная функция $F(y)$ - композиция непрерывных функций $\Rightarrow$ непрерывна. ■

□ (**второе доказательство**) Можем доказать по-другому, используя ту же функцию $\Phi(u,y)$. Всё также покажем, что эта она непрерывна по совокупности переменных. Если y - фиксированный, то:

$$u \mapsto \int\limits_a^u f(x,y)dx$$

непрерывная функция (см. например, семестр 2, лекция 26, утверждение 2 про Липшецевость), поскольку $f(x,y)$ - непрерывна (хотя достаточно и интегрируемости). Зафиксируем переменную u, тогда рассмотрим функцию:

$$y \mapsto \int\limits_a^u f(x,y)dx$$

она также будет непрерывна в силу рассуждений, аналогичных предыдущему доказательству:

$$f(x,y)\in C([a,b]\times[c,d]) \Rightarrow f(x,y) \underset{y\to y_0}{\overset{[a,b]}{\rightrightarrows}} f(x,y_0) \Rightarrow \lim_{y\to y_0}\int\limits_a^u f(x,y)dx = \int\limits_a^u f(x,y_0)dx$$

Для получения непрерывности $\Phi(u,y)$ по совокупности переменных нам нужно, чтобы она была равномерно непрерывной хотя бы по одной переменной относительно другой (см. семестр 2, лекция 10). Аналогично предыдущему доказательству:

$$f(x,y)\in C([a,b]\times[c,d]) \Rightarrow \exists\, M>0\colon \forall (x,y)\in[a,b]\times[c,d],\ |f(x,y)|\le M \Rightarrow$$

$$|\Phi(u,y)-\Phi(v,y)| = \left|\int\limits_v^u f(x,y)dx\right| \le \int\limits_v^u |f(x,y)|dx \le M|u-v| \xrightarrow[v\to u]{} 0 \Rightarrow \Phi(u,y) \underset{u\to u_0}{\overset{[c,d]}{\rightrightarrows}} \Phi(u_0,y)$$

Таким образом, мы получили $\Phi(u,y)$ - непрерывная функция по совокупности переменных. ■

Дифференцируемость собственного интеграла с параметром

Теорема 2. Пусть $f\colon [a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ - непрерывна, $\forall x$ функция $y\mapsto f(x,y)$ - непрерывно дифференцируема на $[c,d]$ или, что то же самое, $f'_y(x,y)$ - непрерывна на $[a,b]\times[c,d]$ и функции α,β - непрерывно дифференцируемы на $[c,d]$. Тогда функция:

$$F(y)=\int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx$$

будет непрерывно дифференцируема и справедливо равенство:

$$F'(y)=\beta'(y)\cdot f(\beta(y),y)-\alpha'(y)\cdot f(\alpha(y),y)+\int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x,y)dx$$

Rm: 2. В комплексном случае $f\colon [a,b]\times[c,d]\to\mathbb{C}$, $f(x,y)=u(x,y)+iv(x,y)$, $f'_y=u'_y+iv'_y$. Соответственно, исследуемая функция будет иметь вид:

$$F(y)=\int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} u(x,y)dx+i\int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} v(x,y)dx$$

И мы применяем теорему к каждому из этих интегралов по отдельности.

Rm: 3. Заметим также, что формула дифференцирования немного не интуитивна и бывает полезно рассмотреть случай, когда $f(x,y)=f(x)$, тогда будет получаться:

$$F(y)=\int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x)dx\Rightarrow F'(y)=\beta'(y)\cdot f(\beta(y))-\alpha'(y)\cdot f(\alpha(y))$$

$\square$ Воспользуемся вспомогательной функцией $\Phi(u,y)$:

$$\Phi(u,y)=\int\limits_{a}^{u} f(x,y)dx\Rightarrow F(y)=\Phi(\beta(y),y)-\Phi(\alpha(y),y)$$

Если уже знаем, что $\Phi(u,y)$ - непрерывно дифференцируема, то $F'(y)$ будет равна:

$$F'(y)=\frac{\partial\Phi}{\partial u}(\beta(y),y)\cdot\beta'(y)+\frac{\partial\Phi}{\partial y}(\beta(y),y)-\frac{\partial\Phi}{\partial u}(\alpha(y),y)\cdot\alpha'(y)-\frac{\partial\Phi}{\partial y}(\alpha(y),y)$$

Поскольку $\Phi(u,y)$ это интеграл с переменным верхним пределом, то его производные будет равны:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u}(u,y)=f(u,y),\ \frac{\partial\Phi}{\partial y}(u,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\int\limits_{a}^{u} f(x,y)dx\right)$$

Если интеграл и дифференцирование можно переставлять местами, то $F'(y)$ приобретет вид:

$$F'(y)=f(\beta(y),y)\cdot\beta'(y)+\int\limits_{a}^{\beta(y)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx-f(\alpha(y),y)\cdot\alpha'(y)-\int\limits_{a}^{\alpha(y)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx=$$

$$= f(\beta(y), y)\cdot\beta'(y) - f(\alpha(y), y)\cdot\alpha'(y) + \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dx$$

И соответственно мы получаем требуемое. Значит нам нужно показать дифференцируемость $\Phi(u, y)$ и возможность переставить интеграл и производную местами. По определению дифференцирования интеграла с переменным верхним пределом от непрерывной функции:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u}(u, y) = f(u, y) \in C([a, b] \times [c, d])$$

Функция $f(x, y)$ - непрерывна по условию, значит производная по первому аргументу - непрерывна (поскольку равна непрерывной функции $f(u, y)$). Если мы проверим равенство:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y}(u, y) = \int\limits_a^u \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dx$$

где $f'_y(x, y)$ - непрерывная по условию $\Rightarrow$ интеграл с переменным верхним пределом от непрерывной функции будет по совокупности переменных непрерывным (см. предыдущую теорему). Если частные производные оказались непрерывными, то сама функция - дифференцируема (см. достаточное условие, семестр 2, лекция 13). И даже больше, она будет непрерывно дифференцируема, поскольку частные первые производные - непрерывные (или ещё рассуждая так: композиция непр. дифф. функций - непрерывно дифференцируема). Таким образом, нам необходимо доказать последнее равенство:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y}(u, y) = \lim_{y\to y_0} \frac{\Phi(u, y) - \Phi(u, y_0)}{y - y_0} = \lim_{y\to y_0} \int\limits_a^u \frac{f(x, y) - f(x, y_0)}{y - y_0}dx = \int\limits_a^u \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0)dx$$

где последнее верно в силу теоремы Арцела, поскольку $f'_y(x, y)$ - непрерывна $\Rightarrow$ интегрируема, разница непрерывных функций - непрерывная функция $\Rightarrow$ интегрируема и есть оценка:

$$\left|\frac{f(x, y) - f(x, y_0)}{y - y_0}\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, c)\right| \leq C$$

где равенство верно по теореме Лагранжа, но $f'_y(x, y)$ непрерывна на прямоугольнике и поэтому вся ограничена какой-то константой $C > 0$.

Можно это же показать через равномерную сходимость:

$$\sup_{x\in[a,b]}\left|\frac{f(x, y) - f(x, y_0)}{y - y_0} - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right| = \sup_{x\in[a,b]}\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, c) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right|, \lim_{y\to y_0} c(y) = y_0$$

где равенство верно в силу теоремы Лагранжа и точка c лежит между y и y_0. Поскольку функция $f'_y(x, y) \in C([a, b] \times [c, d])$, то она равномерно непрерывна на этом прямоугольнике. Тогда:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \underset{y\to y_0}{\overset{[a,b]}{\rightrightarrows}} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) \Rightarrow \sup_{x\in[a,b]}\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, c) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right| \xrightarrow[y\to y_0]{} 0$$

Следовательно, мы можем переставить интеграл и предел местами (по теореме о перестановке предела и интеграла для несобственных интегралов). ■

Интегрируемость собственного интеграла с параметром

Теорема 3. Пусть $f \in C([a,b]\times[c,d])$ и $F(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx$. Тогда $F(y)$ интегрируема на $[c,d]$, функция $x \mapsto \int\limits_c^d f(x,y)dy$ интегрируема на $[a,b]$ и верно равенство:

$$\int\limits_c^d F(y)dy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)dx\right)dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)dy\right)dx$$

$\square$ Поскольку $f(x,y)$ - непрерывна по $y \Rightarrow F(y)$ тоже непрерывна по теореме 1 $\Rightarrow$ функция $F(y)$ интегрируема по y. Аналогично для функции $x \mapsto \int\limits_c^d f(x,y)dy$: она также будет непрерывной $\Rightarrow$ интегрируемой по x. Обоснуем перестановку интегралов местами, рассмотрим разность:

$$\int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)dx\right)dy - \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)dy\right)dx$$

Заменим b на t, где $t \in [a,b]$ и рассмотрим функцию $\psi(t)$:

$$\forall t \in [a,b],\ \psi(t) = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^t f(x,y)dx\right)dy - \int\limits_a^t \left(\int\limits_c^d f(x,y)dy\right)dx \Rightarrow \psi(a) \overset{?}{=} 0$$

Продифференцируем $\psi(x)$: поскольку $f(x,y)$ - непрерывна, то интеграл с переменным верхним пределом от неё непрерывно дифференцируем по t:

$$f(x,y) \in C([a,b]\times[c,d]) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left(\int\limits_a^t f(x,y)dx\right) = f(t,y) \in C([a,b]\times[c,d])$$

Следовательно, можно применить вторую теорему к первому слагаемому $\psi(t)$:

$$\frac{d}{dt}\left(\int\limits_c^d \left(\int\limits_a^t f(x,y)dx\right)dy\right) = \int\limits_c^d \left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\int\limits_a^t f(x,y)dx\right)\right)dy = \int\limits_c^d f(t,y)dy$$

Второй интеграл дифференцируется, как интеграл с переменным верхним пределом от непрерывной функции. Тогда:

$$\psi'(t) = \int\limits_c^d f(t,y)dy - \int\limits_c^d f(t,y)dy = 0 \Rightarrow \psi(t) \equiv 0 \Rightarrow \psi(b) = 0$$

Поскольку в точке a функция $\psi(t)$ равна 0, и её производная $\psi'(t) \equiv 0$. $\blacksquare$

Rm: 4. Отметим, что в следующем семестре мы будем рассматривать гораздо более общую теорему Фубини, поэтому общность в данном случае нас пока не будет сильно интересовать.

Фактически, нами доказано следующее равенство для непрерывной функции $f(x,y)$:

$$\int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)dx \right) dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)dy \right) dx$$

Рассмотрим прямоугольник $[a,b]\times[c,d]$ и сделаем его разбиение точками $\{x_k\}$ и $\{y_m\}$ сторон $[a,b]$ и $[c,d]$ соответственно:

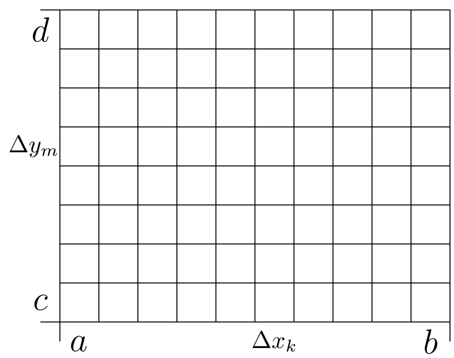

Рис. 1: Разбиение прямоугольника $[a,b]\times[c,d]$.

Мы знаем, что когда масштаб разбиения стремится к нулю, то $\int\limits_a^b f(x,y)dx \approx \sum\limits_{k=1}^N f(x_k,y)\cdot|\Delta x_k|$, интеграл приближается своей Римановой суммой. Эвристически отсюда можно сделать вывод:

$$\int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)dx \right) dy \approx \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^N f(x_k,y_m)\cdot|\Delta x_k|\cdot|\Delta y_m|,\ \int\limits_a^b f(x,y_m)dx \approx \sum_{k=1}^N f(x_k,y_m)\cdot|\Delta x_k|$$

Поскольку сумму можно считать в любом порядке, то мы можем поменять порядок и получим:

$$\sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^N f(x_k,y_m)\cdot|\Delta x_k\cdot|\Delta y_m| = \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^M f(x_k,y_m)\cdot|\Delta y_m|\cdot|\Delta x_k|,\ \sum_{m=1}^M f(x_k,y_m)\cdot|\Delta y_m| \approx \int\limits_c^d f(x_k,y)dy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^M f(x_k,y_m)\cdot|\Delta y_m|\cdot|\Delta x_k| \approx \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)dy \right) dx$$

Таким способом, мы получили естественную логику на основе которой возникает равенство в теореме выше. Попробуем его доказать формально.

□ Заметим, что поскольку $f(x,y)\in C([a,b]\times[c,d])$, то $f(x,y)$ - равномерно непрерывна на этом прямоугольнике. Из примера в лекции 20:

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists\,\delta_1>0\colon \forall x\in[a,b],\ |x-x_0|<\delta_1 \Rightarrow \sup_{y\in[c,d]} |f(x,y)-f(x_0,y)|<\varepsilon$$

Также из теоремы 1 мы знаем, что $F(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx$ - непрерывная функция $\Rightarrow$ интегрируема. По определению интегрируемости по Риману:

$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists\, \delta_2 > 0 \colon \forall (\mathbb{T}_y, \eta),\, \lambda(\mathbb{T}_y) < \delta_2 \Rightarrow \left| \sum_{m=1}^{M} F(\eta_m) \cdot |\Delta y_m| - \int\limits_c^d F(y)dy \right| < \varepsilon$$

Рассмотрим следующую разность и прибавим-вычтем сумму $\sum\limits_{m=1}^{M} F(\eta_m)\cdot|\Delta y_m|$:

$$\left| \sum_{m=1}^{M} \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k, \eta_m) \cdot |\Delta x_k| \cdot |\Delta y_m| - \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)dx \right) dy \right| =$$

$$= \left| \sum_{m=1}^{M} \left(\sum_{k=1}^{N} f(\xi_k, \eta_m) \cdot |\Delta x_k| - F(\eta_m) \right) \cdot |\Delta y_m| + \sum_{m=1}^{M} F(\eta_m) \cdot |\Delta y_m| - \int\limits_c^d F(y)dy \right| \leq$$

$$\leq \sum_{m=1}^{M} \left| \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k, \eta_m) \cdot |\Delta x_k| - F(\eta_m) \right| \cdot |\Delta y_m| + \left| \sum_{m=1}^{M} F(\eta_m) \cdot |\Delta y_m| - \int\limits_c^d F(y)dy \right|$$

Мы знаем как оценить правую часть $\Rightarrow$ необходимо понять как можно оценить левую. По определению интегрируемости по Риману при фиксированном $y \in [c,d]$:

$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists\, \delta_3 > 0 \colon \forall (\mathbb{T}_x, \xi),\, \lambda(\mathbb{T}_x) < \delta_3 \Rightarrow \left| \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k, y) \cdot |\Delta x_k| - \int\limits_a^b f(x,y)dx \right| < \varepsilon$$

$$\sup_{y \in [c,d]} \left| \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k, y) \cdot |\Delta x_k| - \int\limits_a^b f(x,y)dx \right| \leq \sum_{k=1}^{N} \left(\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} \sup_{y \in [c,d]} |f(\xi_k, y) - f(x,y)|\, dx \right)$$

Пусть $\bar{\delta} = \min\{\delta_1, \delta_3\}$, тогда если $\lambda(\mathbb{T}_x) < \bar{\delta}$, то $\max\limits_k |\Delta x_k| < \bar{\delta} \Rightarrow \forall x \in [x_{k-1}, x_k]$, $|x - \xi_k| < \delta_1$ и по равномерной непрерывности мы получим, что $\sup\limits_{y \in [c,d]} |f(x,y) - f(\xi_k, y)| < \varepsilon$. Тогда:

$$\sup_{y \in [c,d]} \left| \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k, y) \cdot |\Delta x_k| - \int\limits_a^b f(x,y)dx \right| \leq \varepsilon \cdot \sum_{k=1}^{N} |\Delta x_k| = \varepsilon(b-a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{m=1}^{M} \left| \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k, \eta_m) \cdot |\Delta x_k| - F(\eta_m) \right| \cdot |\Delta y_m| \leq \varepsilon(b-a) \sum_{k=1}^{M} |\Delta y_m| = \varepsilon(b-a)(d-c)$$

Таким образом, если мы выбираем $\hat{\delta} = \min\{\bar{\delta}, \delta_3\}$ маленькой, то мы получим следующий результат:

$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists\, \hat{\delta} > 0 \colon \max\{\lambda(\mathbb{T}_x), \lambda(\mathbb{T}_y)\} < \hat{\delta} \Rightarrow \left| \sum_{m=1}^{M} \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k, \eta_m) \cdot |\Delta x_k| \cdot |\Delta y_m| - \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)dx \right) dy \right| < \varepsilon$$

для любого подходящего разбиения. Аналогичным образом получается:

$$\forall\varepsilon > 0,\, \exists\,\delta > 0\colon\ \max\{\lambda(\mathbb{T}_x), \lambda(\mathbb{T}_y)\} < \delta \Rightarrow \left|\sum_{k=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} f(\xi_k, \eta_m)\cdot|\Delta y_m|\cdot|\Delta x_k| - \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)dy\right)dx\right| < \varepsilon$$

Поскольку сумма при перестановке слагаемых не изменяется, то мы получаем требуемое:

$$\lim_{(\lambda(\mathbb{T}_x),\lambda(\mathbb{T}_y))\to(0,0)} \sum_{m=1}^{M}\sum_{k=1}^{N} f(\xi_k, \eta_m)\cdot|\Delta x_k|\cdot|\Delta y_m| = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)dx\right)dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)dy\right)dx$$

■

Также заметим, что теорему о дифференцируемости по параметру можно вывести из утверждения про интегрируемость. То есть, до этого мы вывели теорему об интегрируемости из теоремы про дифференцируемость, а теперь можем сделать всё наоборот. Основным моментом в теореме про дифференцируемость было следующее:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y}(u,y) = \frac{d}{dy}\left(\int\limits_a^u f(x,y)dx\right) = \int\limits_a^u \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$$

Проинтегрируем левую часть этого равенства ещё раз по второму аргументу от c до y:

$$\int\limits_c^y \left(\frac{d}{dt}\int\limits_a^u f(x,t)dx\right)dt = \int\limits_a^u f(x,y)dx - \int\limits_a^u f(x,c)dx$$

где мы применили формулу Ньютона-Лейбница. И проинтегрируем правую часть:

$$\int\limits_c^y \left(\int\limits_a^u \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx\right)dt = \int\limits_a^u \left(\int\limits_c^y \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dt\right)dx = \int\limits_a^u (f(x,y) - f(x,c))dx = \int\limits_a^u f(x,y)dx - \int\limits_a^u f(x,c)dx$$

где во втором равенстве мы применили теорему об интегрируемости интеграла с параметром. Видим, что значения левой и правой части исходного равенства при интегрировании совпали. Теперь можно проделать доказательство равенства задом наперед:

$$\int\limits_a^u f(x,y)dx - \int\limits_a^u f(x,c)dx = \int\limits_a^u (f(x,y) - f(x,c))dx = \int\limits_a^u \left(\int\limits_c^y \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dt\right)dx = \int\limits_c^y \left(\int\limits_a^u \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx\right)dt$$

где последний интгерал - дифференцируем как интеграл с переменным верхним пределом, тогда дифференцируема левая часть равенства и будет верно:

$$\frac{d}{dy}\int\limits_a^u f(x,y)dx - 0 = \frac{d}{dy}\int\limits_a^u f(x,y)dx = \int\limits_a^u \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$$

Упр. 1. Используя равенство $\int\limits_a^b f(x,y)dx = \lim\limits_{\lambda(\mathbb{T})\to 0}\sum\limits_{k=1}^{N} f(\xi_k,y)\cdot|\Delta x_k|$ доказать теорему о дифференцируемости по параметру собственного интеграла с параметром.

☐ Распишем производную по определению и воспользуемся линейностью интеграла:

$$\frac{d}{dy}\left(\int\limits_a^b f(x,y)dx\right) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\int\limits_a^b f(x,y+\Delta y)dx - \int\limits_a^b f(x,y)dx}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\int\limits_a^b \frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}dx =$$

$$= \lim_{\Delta y\to 0}\lim_{\lambda(\mathbb{T})\to 0}\sum_{k=1}^{N}\frac{f(\xi_k,y+\Delta y)-f(\xi_k,y)}{\Delta y}\cdot|\Delta x_k| = \lim_{\Delta y\to 0}\lim_{\lambda(\mathbb{T})\to 0}\psi\left(\lambda(\mathbb{T}),\Delta y\right)$$

Рассмотрим предел функции $\psi(\lambda(\mathbb{T}),\Delta y)$ при $\Delta y\to 0$:

$$\lim_{\Delta y\to 0}\psi(\lambda(\mathbb{T}),\Delta y) = \lim_{\Delta y\to 0}\sum_{k=1}^{N}\frac{f(\xi_k,y+\Delta y)-f(\xi_k,y)}{\Delta y}\cdot|\Delta x_k| =$$

$$= \sum_{k=1}^{N}\left(\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(\xi_k,y+\Delta y)-f(\xi_k,y)}{\Delta y}\right)\cdot|\Delta x_k| = \sum_{k=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial y}(\xi_k,y)\cdot|\Delta x_k|$$

Если мы покажем, что этот предел равномерный, то сможем воспользоватсья теоремой о перестановке пределов и получить требуемое. Рассмотрим разность:

$$\left|\sum_{k=1}^{N}\frac{f(\xi_k,y+\Delta y)-f(\xi_k,y)}{\Delta y}\cdot|\Delta x_k| - \sum_{k=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial y}(\xi_k,y)\cdot|\Delta x_k|\right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{N}\left|\frac{f(\xi_k,y+\Delta y)-f(\xi_k,y)}{\Delta y} - \frac{\partial f}{\partial y}(\xi_k,y)\right|\cdot|\Delta x_k| = \sum_{k=1}^{N}\left|\frac{\partial f}{\partial y}(\xi_k,c_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(\xi_k,y)\right|\cdot|\Delta x_k|,\ c_0\in(y,y+\Delta y)$$

где мы воспользовались теоремой Лагранжа, в силу непрерывной дифференцируемости $f(x,y)$ по y. Поскольку $f(x,y)$ - непрерывно дифференцируема по y, то $f'_y(x,y)$ - непрерывна на $[c,d] \Rightarrow$ равномерно непрерывна на отрезке (по теореме Кантора). Тогда по определению:

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\,\delta>0\colon \forall y,y_0\in[c,d],\ |y-y_0|<\delta \Rightarrow \sup_{x\in[a,b]}\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\right| < \varepsilon$$

Тогда, зафиксировав $\varepsilon>0$, найдем $\delta>0$ такой, что $|\Delta y|<\delta \Rightarrow \forall y\in[c,d],\ |y-c_0|<\delta$, тогда:

$$\forall\xi_k,\ \left|\frac{\partial f}{\partial y}(\xi_k,c_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(\xi_k,y)\right| \leq \sup_{x\in[a,b]}\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,c_0)\right| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall(\mathbb{T},\xi),\ \left|\sum_{k=1}^{N}\frac{f(\xi_k,y+\Delta y)-f(\xi_k,y)}{\Delta y}\cdot|\Delta x_k| - \sum_{k=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial y}(\xi_k,y)\cdot|\Delta x_k|\right| \leq \sum_{k=1}^{N}\varepsilon\cdot|\Delta x_k| = \varepsilon(b-a) \Rightarrow$$

$$\psi(\lambda(\mathbb{T}),\Delta y) \underset{\Delta y\to 0}{\overset{(\mathbb{T},\xi)}{\rightrightarrows}} \sum_{k=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial y}(\xi_k,y)\cdot|\Delta x_k| \Rightarrow \lim_{\Delta y\to 0}\lim_{\lambda(\mathbb{T})\to 0}\psi\left(\lambda(\mathbb{T}),\Delta y\right) = \lim_{\lambda(\mathbb{T})\to 0}\lim_{\Delta y\to 0}\psi\left(\lambda(\mathbb{T}),\Delta y\right)$$

■

Упр. 2. Пусть $f \in C([a,b]\times[a,b])$, доказать равенство:

$$\int\limits_a^b \left(\int\limits_a^y f(x,y)dx\right) dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_x^b f(x,y)dy\right) dx$$

Rm: 5. Возникает вопрос, откуда появляются такие равенства? Рассмотрим квадрат $[a,b]\times[a,b]$ и возьмем его диагональ $y = x$. Если интегралы заменить суммами, то в равенстве будет написано: надо суммировать по x, при фиксированном y, от a до y. То есть фиксируем y (например, y_k) и суммируем по x только до диагонали (а не по всей строчке):

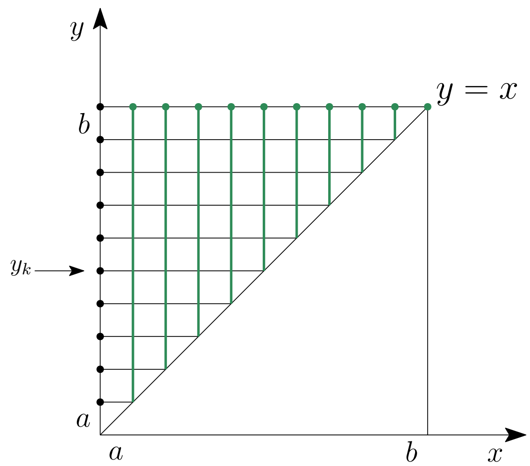

Рис. 2: Мотивация для равенства повторных интегралов с переменными пределами.

И дальше суммируем по $y \Rightarrow$ нашли сумму всех элементов таблицы в верхнем треугольнике. С другой стороны, при фиксированном x мы можем суммировать по столбцам от диагонали (от x до b), а затем сложить результат. Получим тот же результат: сумму всех элементов в верхнем треугольнике.

$\square$ Рассмотрим следующую функцию:

$$\psi(t) = \int\limits_a^t \left(\int\limits_a^y f(x,y)dx\right) dy - \int\limits_a^t \left(\int\limits_x^t f(x,y)dy\right) dx$$

Тогда её производная будет равна:

$$\psi'(t) = \int\limits_a^t f(x,t)dx - \int\limits_t^t f(t,y)dy - \int\limits_a^t \frac{d}{dt}\left(\int\limits_x^t f(x,y)dy\right) dx = \int\limits_a^t f(x,t)dx - \int\limits_a^t f(x,t)dx = 0$$

Заметим, что $\psi(a) = 0 \Rightarrow \psi(t) \equiv 0 \Rightarrow \psi(b) = 0.$ $\blacksquare$

Приложение: Решение неодн. ДУ

Рассмотрим линейные неоднородные дифференциальные уравнения. Например:

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_0y=f,\ a_k\in\mathbb{R}$$

Обычно такое решается через вариацию постоянной, плюс решается угадыванием, когда правая часть простая (константа или многочлен, например). Но всё это обычно достаточно трудоёмко и хотелось бы более простой способ.

Утв. 1. Пусть задано линейное неоднородное дифференциальное уравнение:

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_0y=f,\ a_k\in\mathbb{R} \tag{$*$}$$

Пусть u - решение следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} u^{(n)}+a_{n-1}u^{(n-1)}+\ldots+a_0u & = & 0 \\ u(0)=u'(0)=\ldots=u^{(n-2)}(0) & = & 0 \\ u^{(n-1)}(0) & = & 1 \end{cases}$$

Тогда функция $y(x)=\int\limits_0^x u(x-t)f(t)dt$ - решение уравнения $(*)$.

Rm: 6. Обычно такая задача Коши решается через решение однородной системы, затем подбираются константы так, чтобы первые $(n-2)$-ые производные занулились, а последняя $(n-1)$-ая была единицей.

Rm: 7. Все решения неоднородной задачи будут равны сумме решений однородной и неоднородной.

□ Чтобы доказать утверждение мы подставим решение в уравнение и посмотрим, что всё получится, как мы ожидали. Для этого найдем производные у решения $y(x)$:

$$y'(x)=u(x-x)f(x)\cdot(x)'-u(x-0)f(0)\cdot(0)'+\int\limits_0^x u'(x-t)f(t)dt=\int\limits_0^x u'(x-t)f(t)dt$$

$$y''(x)=u'(x-x)f(x)+\int\limits_0^x u''(x-t)f(t)dt=\int\limits_0^x u''(x-t)f(t)dt\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\forall k=\overline{1,n-1},\ y^{(k)}=\int\limits_0^x u^{(k)}(x-t)f(t)dt$$

И так далее, пока не начнем считать n-ую производную, тогда:

$$y^{(n-1)}=\int\limits_0^x u^{(n-1)}(x-t)f(t)dt\Rightarrow y^{(n)}=u^{(n)}(0)f(x)+\int\limits_0^x u^{(n)}(x-t)f(t)dt=f(x)+\int\limits_0^x u^{(n)}(x-t)f(t)dt$$

Умножим k-ые производные на коэффициенты a_k и сложим, тогда мы получим:

$$y^{(n)}(x)+a_{n-1}y^{(n-1)}(x)+\ldots+a_0y(x)=f(x)+\int\limits_0^x\left(u^{(n)}+a_{n-1}u^{(n-1)}+\ldots+a_0u\right)(x-t)f(t)dt=f(x)$$

где последнее равенство верно в силу условий задачи Коши. ■

Пример: Рассмотрим $y''+y=f$ и задачу Коши: $\begin{cases} u''+u &= 0 \\ u(0) &= 0 \\ u'(0) &= 1 \end{cases} \Rightarrow u(x)=\sin x$, тогда легко можно написать ответ для неоднородного уравнения:

$$y(x)=\int\limits_0^x \sin{(x-t)} f(t)dt$$

Пример: Рассмотрим $y^{(n)}=f$, в обычной ситуации нужно n раз проинтегрировать:

$$\ldots \int\limits_0^c \left(\int\limits_0^b \left(\int\limits_0^a f(t)dt \right) da \right) db \ldots$$

Посмотрим, что даст упомянутый выше метод:

$$\begin{cases} u^{(n)} &= 0 \\ u(0)=u'(0)=\ldots=u^{(n-2)}(0) &= 0 \\ u^{(n-1)}(0) &= 1 \end{cases} \Rightarrow u(x)=\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

Тогда запишем решение неоднородного уравнения:

$$y(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int\limits_0^x (x-t)^{n-1}f(t)dt=\frac{1}{\Gamma(n)}\int\limits_0^x (x-t)^{n-1}f(t)dt$$

После того, как мы переходим к гамма-функции, перестает быть важным, что n - целое число.

Опр: 2. При любом $\alpha>0$ будем называть следующее выражение:

$$J^\alpha f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)dt,\ \alpha\in\mathbb{R}^+$$

оператором дробного интегрирования Римана-Луивилля.

Rm: 8. Заметим, что будет верно $J^\alpha J^\beta f=J^{\alpha+\beta}J$. Далее это будет доказываться после разбора несобственных интегралов с параметром.

Упр. 3. Пусть $n\in\mathbb{N}$, доказать следующие пункты:

(1) $\dfrac{d^n}{dx^n}J^n f=f$;

(2) Пусть $m>n$, тогда $\dfrac{d^n}{dx^n}J^m f=J^{m-n}f$;

□

(1) Следует сразу из определения оператора дробного интегрирования и утверждения про решение линейного неоднородного дифференциального уравнения: $\dfrac{d^n}{dx^n}J^n f=(J^n f)^{(n)}=f$;

(2) $\dfrac{d^n}{dx^n}J^m f = \dfrac{d^n}{dx^n}J^{n+(m-n)}f = \dfrac{d^n}{dx^n}J^n\left(J^{(m-n)}f\right) = \dfrac{d^n}{dx^n}J^n\varphi = \varphi = J^{(m-n)}f;$

■

Таким образом, мы можем попробовать дифференцирование свести к вычитанию.

Опр: 3. Пусть $0 < \alpha < 1$ будем называть следующее выражение:

$$D^\alpha f = D^1\left(J^{1-\alpha}f\right)$$

оператором дробного дифференцирования Римана-Луивилля.

Rm: 9. Заметим, что изначально потребность в дробном интегрировании и дифференцировании пришла из множества задач физики. В том числе, им занимался Абель для решения задач про скорость спуска с высоты h по закону $T = \varphi(h)$.