Разложение $\sin x$ в бесконечное произведение

Применим формулу разложения функции $\sin x$ в бесконечное произведение.

Утв. 1. (**Формула Валлиса**)

$$\lim_{N\to\infty}\left(\frac{(2^N\cdot N!)^2}{(2N)!}\right)^2\cdot\frac{1}{2N+1}=\frac{\pi}{2}$$

$\square$ В формуле разложения синуса возьмем $x=\dfrac{\pi}{2}$, тогда получим:

$$\sin\frac{\pi}{2}=1=\frac{\pi}{2}\cdot\lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)$$

Рассмотрим слагаемые в бесконечном произведении:

$$1-\frac{1}{4n^2}=\frac{4n^2-1}{4n^2}=\frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\pi}{2}=\lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}\frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)}=\lim_{N\to\infty}\left(\frac{(2N)!!}{(2N-1)!!}\right)^2\cdot\frac{1}{2N+1}$$

где

$$(2N)!!=2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2N-2)\cdot2N=2^N\cdot(1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(N-1)\cdot N)=2^N\cdot N!$$

а также выполнено следующее:

$$(2N-1)!!=1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2N-3)\cdot(2N-1)\Rightarrow(2N)!=(2N-1)!!\cdot(2N)!!\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\pi}{2}=\lim_{N\to\infty}\left(\frac{((2N)!!)^2}{(2N)!}\right)^2\cdot\frac{1}{2N+1}=\lim_{N\to\infty}\left(\frac{\left(2^N\cdot N!\right)^2}{(2N)!}\right)^2\cdot\frac{1}{2N+1}$$

$\blacksquare$

Следствие 1. Разложение косинуса:

$$\cos x=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{4x^2}{\pi^2(2n-1)^2}\right)$$

$\square$ Из формулы синуса двойного угла, мы знаем:

$$\cos x=\frac{\sin 2x}{2\sin x}=\frac{2x\cdot\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{4x^2}{\pi^2n^2}\right)}{2\cdot x\cdot\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{x^2}{\pi^2n^2}\right)}=\frac{\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{4x^2}{\pi^2n^2}\right)}{\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{x^2}{\pi^2n^2}\right)}$$

Рассмотрим бесконечные произведения как следующие пределы:

$$\frac{\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{4x^2}{\pi^2n^2}\right)}{\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{x^2}{\pi^2n^2}\right)}=\frac{\lim\limits_{N\to\infty}\prod\limits_{n=1}^{2N}\left(1-\dfrac{4x^2}{\pi^2n^2}\right)}{\lim\limits_{N\to\infty}\prod\limits_{n=1}^{2N}\left(1-\dfrac{x^2}{\pi^2n^2}\right)}=\frac{\lim\limits_{N\to\infty}\prod\limits_{n=1}^{N}\left(1-\dfrac{4x^2}{\pi^2(2n-1)^2}\right)\cdot\left(1-\dfrac{4x^2}{\pi^2(2n)^2}\right)}{\lim\limits_{N\to\infty}\prod\limits_{n=1}^{2N}\left(1-\dfrac{x^2}{\pi^2n^2}\right)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos x = \lim_{N\to\infty} \frac{\prod\limits_{n=1}^{N}\left(1-\dfrac{4x^2}{\pi^2(2n-1)^2}\right)\cdot\left(1-\dfrac{x^2}{\pi^2 n^2}\right)}{\prod\limits_{n=1}^{2N}\left(1-\dfrac{x^2}{\pi^2n^2}\right)} = \lim_{N\to\infty} \frac{\prod\limits_{n=1}^{N}\left(1-\dfrac{4x^2}{\pi^2(2n-1)^2}\right)}{\prod\limits_{n=N+1}^{2N}\left(1-\dfrac{x^2}{\pi^2n^2}\right)} =$$

$$= \frac{\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{4x^2}{\pi^2(2n-1)^2}\right)}{1} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{4x^2}{\pi^2(2n-1)^2}\right)$$

■

Признак Гаусса

Лемма 1. Пусть $b_n > 0$ и известно, что: $\dfrac{b_n}{b_{n+1}} = 1+\beta_n$, $\sum\limits_n |\beta_n| < \infty$, тогда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} b_n > 0$.

□ Распишем b_n следующим образом:

$$b_n = b_1\cdot\frac{b_2}{b_1}\cdot\frac{b_3}{b_2}\cdot\ldots\cdot\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{b_1}{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(1+\beta_k)}$$

Бесконечное произведение сходится, поскольку сходится ряд $\sum\limits_n |\beta_n| \Rightarrow$ существует $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Поскольку значеие $b_1 > 0$, бесконечное произведение сходится, то оно не ноль и не бесконечность $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} b_n > 0$. ■

Теорема 1. (**Признак Гаусса**) Пусть $a_n > 0$ и верно следующее: $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = 1+\dfrac{p}{n}+\alpha_n$, $\sum\limits_n |\alpha_n| < \infty$, тогда будет верно, что: $a_n \sim \dfrac{C}{n^p}$, $C > 0$ или если записать по-другому:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^{-p}} = C > 0$$

Rm: 1. Где, к примеру, $\alpha_n = O\left(\dfrac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right)$.

□ Рассмотрим следующую последовательность $b_n = a_n n^p$, хотим доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = C > 0$. Рассмотрим отношение слагаемых новой последовательности:

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \left(1+\frac{p}{n}+\alpha_n\right)\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^p = \left(1+\frac{p}{n}+\alpha_n\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-p} = \left(1+\frac{p}{n}+\alpha_n\right)\cdot\left(1-\frac{p}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) =$$

$$= 1+\frac{p}{n}+\alpha_n-\frac{p}{n}-\frac{p^2}{n^2}-\frac{\alpha_n p}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right) = 1+\alpha_n = 1+\alpha_n\cdot\left(1-\frac{p}{n}\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{b_n}{b_{n+1}} = 1+O\left(\alpha_n\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Поскольку ряды из α_n и $\dfrac{1}{n^2}$ абсолютно сходятся, то по предыдущей лемме $\exists \lim\limits_{n\to\infty} b_n = C > 0$. ■

Следствие 2. Ряд $\sum\limits_n a_n$, где члены ряда a_n определены по теореме выше, сходится при $p > 1$ и расходится при $p \le 1$.

Пример: Рассмотрим следующий стандартный пример:

$$\sum_n \frac{p(p-1)\cdot\ldots\cdot(p+n-1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^q} = \sum_n a_n\cdot\frac{1}{n^q} = \sum_n c_n$$

При каких p и q данный ряд сходится? Применим признак Гаусса к этому ряду:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n+1}{p+n} = 1 + \frac{1-p}{p+n} = 1 + \frac{1-p}{n} + \frac{1-p}{p+n} - \frac{1-p}{n} = 1 + \frac{1-p}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Следовательно, по признаку Гаусса мы получаем, что:

$$a_n \sim \frac{C}{n^{1-p}} \Rightarrow c_n \sim \frac{C}{n^{1-p+q}}$$

Таким образом, если $1 - p + q > 1$, то будет иметь место сходимость ряда, иначе ряд расходится.

Используя лемму докажем ещё одну теорему.

Теорема 2. (**Формула Стирлинга**) Верно следующее:

$$n! = \sqrt{2\pi n}n^n\cdot e^{-n+\varepsilon_n},\ \lim_{n\to\infty}\varepsilon_n = 0$$

Rm: 2. Без доказательства, значение последовательности ε_n имеет следующий вид:

$$\varepsilon_n = \frac{\theta_n}{12n},\ 0 < \theta_n < 1$$

☐ Докажем сначала, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} = C$. И затем докажем, что $C = \sqrt{2\pi}$.

Пусть $b_n = \dfrac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$, рассмотрим отношение членов данной последовательности:

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}\cdot\frac{(n+1)^{n+1+\frac{1}{2}}}{(n+1)!e^{n+1}} = e^{-1}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} = e^{-1+\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

Разложим логарифм в ряд Тейлора:

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \Rightarrow -1 + 1 - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Таким образом, мы получили необходимый вид для применения леммы:

$$e^{O\left(\frac{1}{n^2}\right)} = 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} = C \Rightarrow n! \sim C\cdot n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}$$

Или в другом виде: $n! = C\cdot n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n+\varepsilon_n}$, где $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon = 0$. Извлечём корень из формулы Валлиса и получим:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2^n\cdot n!)^2}{(2n)!}\cdot\frac{1}{\sqrt{2n+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Подставим в неё значение $n!$ и тогда получим следующее выражение:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2^n{\cdot}C{\cdot}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n+\varepsilon_n})^2}{C{\cdot}(2n)^{2n+\frac{1}{2}}e^{-2n+\varepsilon_{2n}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{C^2n^{\frac{1}{2}}e^{2\varepsilon_n}}{\sqrt{2}Ce^{\varepsilon_{2n}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{C}{\sqrt{4+\dfrac{2}{n}}}\cdot\frac{e^{2\varepsilon_n}}{e^{\varepsilon_{2n}}}=\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Таким образом, получаем $C=\sqrt{2\pi}\Rightarrow n!\sim\sqrt{2\pi n}{\cdot}n^ne^{-n}$. ■

Рассмотрим одно из применений формулы Стирлинга.

Теорема Муавра-Лапласа

Бросаем n раз правильную монету. Какова вероятность, что было k орлов? Надо количество всех подходящих расстановок k орлов по n местам, поделить на все расстановки по n местам. Тогда:

$$\mathbb{P}(k\text{ - орлов})=\frac{C_n^k}{2^n}$$

Формула сложная, поскольку факториалы сложно считать при больших значениях n и k. Возникает вопрос, нельзя ли это заменить на что-то простое и эквивалентное?

Теорема 3. (**Локальная теорема Муавра-Лапласа**) Рассмотрим $x_k=\dfrac{k-\frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{4}}}$ и предположим, что эта величина находится в отрезке $a\le x_k\le b$. Тогда:

$$\mathbb{P}(k\text{ - орлов})\sim\frac{2}{\sqrt{n}}{\cdot}\varphi(x_k),\ \varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

□ Распишем вероятность:

$$\mathbb{P}(k\text{ - орлов})=C_n^k2^{-n}=\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot2^{-n}=e^{-n\ln2+\ln n!-\ln k!-\ln(n-k)!}$$

Используем формулу Стирлинга:

$$\ln n!=\ln\sqrt{2\pi}+\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot\ln n-n+o(1)$$

По условию $k=\dfrac{n}{2}+\dfrac{x_k\sqrt{n}}{2}$, тогда $n-k=\dfrac{n}{2}-\dfrac{x_k\sqrt{n}}{2}$. Снова используем формулу Стирлинга:

$$\ln k!=\ln\sqrt{2\pi}+\left(\frac{n+1}{2}+\frac{x_k\sqrt{n}}{2}\right)\cdot\ln\left(\frac{n}{2}+\frac{x_k\sqrt{n}}{2}\right)-\frac{n}{2}-\frac{x_k\sqrt{n}}{2}+o(1)$$

В силу ограниченности x_k, здесь $o(1)$ стремится к нулю при k стремящемся к бесконечности, что эквивалентно стремлению к бесконечности n. Аналогично:

$$\ln(n-k)!=\ln\sqrt{2\pi}+\left(\frac{n+1}{2}-\frac{x_k\sqrt{n}}{2}\right)\cdot\ln\left(\frac{n}{2}-\frac{x_k\sqrt{n}}{2}\right)-\frac{n}{2}+\frac{x_k\sqrt{n}}{2}+o(1)$$

Таким образом, получим:

$$R_n=-n\ln2+\ln n!-\ln k!-\ln(n-k)!=-n\ln2-\ln\sqrt{2\pi}+\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot\ln n-$$

$$-\left(\frac{n+1}{2}+\frac{x_k\sqrt{n}}{2}\right)\cdot\ln\left(\frac{n}{2}+\frac{x_k\sqrt{n}}{2}\right)-\left(\frac{n+1}{2}-\frac{x_k\sqrt{n}}{2}\right)\cdot\ln\left(\frac{n}{2}-\frac{x_k\sqrt{n}}{2}\right)+o(1)$$

Рассмотрим следующее выражение:

$$\ln\left(\frac{n}{2}\pm\frac{x_k\sqrt{n}}{2}\right)=\ln\frac{n}{2}+\ln\left(1\pm\frac{x_k}{\sqrt{n}}\right)=\ln\frac{n}{2}+\left(\pm\frac{x_k}{\sqrt{n}}-\frac{x_k^2}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_n=-n\ln 2-\ln\sqrt{2\pi}+\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot\ln n-\left(\frac{n+1}{2}+\frac{x_k\sqrt{n}}{2}\right)\cdot\left(\ln\frac{n}{2}+\frac{x_k}{\sqrt{n}}-\frac{x_k^2}{2n}\right)-$$

$$-\left(\frac{n+1}{2}-\frac{x_k\sqrt{n}}{2}\right)\cdot\left(\ln\frac{n}{2}-\frac{x_k}{\sqrt{n}}-\frac{x_k^2}{2n}\right)+o(1)=-n\ln 2-\ln\sqrt{2\pi}+\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot\ln n-(n+1)\ln\frac{n}{2}+$$

$$+\frac{x_k^2}{2}-x_k^2+o(1)=-\ln\sqrt{2\pi}-\frac{1}{2}\ln n-\ln 2-\frac{x_k^2}{2}+o(1)=-\ln\sqrt{2\pi}-\ln\frac{\sqrt{n}}{2}-\frac{x_k^2}{2}+o(1)$$

Подставив R_n в экспоненту, мы получим:

$$e^{R_n}\sim\frac{2}{\sqrt{2\pi n}}\cdot e^{\frac{2}{x_k^2}}=\frac{2}{\sqrt{n}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x_k^2}{2}}=\frac{2}{\sqrt{n}}\cdot\varphi(x_k)$$

∎