Асимптотика интегралов Лапласа

Мы рассмотрели интегралы Лапласа, поняв что они могут встречаться. Возникает необходимость исследовать такие выражения, например, отвечая на вопрос как себя ведет следующая функция от λ:

$$F(\lambda) = \int\limits_a^b f(x)e^{\lambda g(x)}dx$$

Как себя ведет эта сумма в отдельных точках? Мы рассмотрим один из таких вопросов: как ведет себя эта сумма, когда $\lambda \to +\infty$, можем ли мы найти асимптотику? Полезно разобрать два примера.

1) **Пример**: f - непрерывная на $(0, +\infty)$, но в нуле она такая, чтобы интеграл сходился $\Rightarrow$ будем считать, что интеграл сходится абсолютно при некотором $\lambda_0 > 0$:

$$\int\limits_0^{+\infty} f(x)e^{-\lambda x}dx$$

Что будет при $\lambda \to +\infty$? Если кажется, что будет стремится к нулю, то полезно помнить о следующем интеграле:

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda}$$

Основная "масса" интеграла концентрируется рядом с точкой максимума функции стоящей в экспоненте (в данном случае, эта точка 0). Попробуем это формализовать.

Принцип локализации

$$\int\limits_0^{+\infty} f(x)e^{-\lambda x}dx = \int\limits_0^{\delta} f(x)e^{-\lambda x}dx + \int\limits_\delta^{+\infty} f(x)e^{-\lambda x}dx$$

Попробуем понять, что второй интеграл стремится к нулю экспоненциально:

$$\forall\lambda > \lambda_0, \left|\int\limits_\delta^{+\infty} f(x)e^{-\lambda x}dx\right| \le \int\limits_\delta^{+\infty} |f(x)|e^{-\lambda x}dx = \int\limits_\delta^{+\infty} |f(x)|e^{-\lambda_0 x}\cdot e^{-(\lambda-\lambda_0)x}dx \le$$

$$\le \int\limits_\delta^{+\infty} |f(x)|e^{-\lambda_0 x}\cdot e^{-(\lambda-\lambda_0)\delta}dx \le e^{-(\lambda-\lambda_0)\delta}\int\limits_0^{+\infty} |f(x)|e^{-\lambda_0 x}dx = Ce^{-\lambda\delta} \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} 0$$

Когда есть стремление быстрее любой степени, мы будем это отмечать как $O(\lambda^{-\infty})$:

$$f(\lambda) = O(\lambda^{-\infty}) \Leftrightarrow \forall k,\ \frac{f(\lambda)}{\lambda^{-k}} \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} 0 \Leftrightarrow \forall k,\ f(\lambda) = O\left(\frac{1}{\lambda^k}\right)$$

например, $e^{-\lambda} = O(\lambda^{-\infty})$. Таким образом, мы получаем принцип локализации:

$$\int\limits_0^{+\infty} f(x)e^{-\lambda x}dx = \int\limits_0^{\delta} f(x)e^{-\lambda x}dx + O(\lambda^{-\infty})$$

Получили, что у интеграла слева поведение на бесконечности такое же, как и у интеграла от 0 до δ с точностью до $O(\lambda^{-\infty}) \Rightarrow$ это означает поведение интеграла слева зависит от того, как функция $f(x)$ устроена рядом с нулем. Более того, эту запись можно читать в обе стороны, что интеграл на маленькой окрестности будет сводится к интегралу на полуинтервале от 0 до $+\infty$.

Утв. 1. Пусть в окрестности $x = 0$ функция $f(x)$ имеет следующий вид:

$$f(x) = x^{\alpha}\left(c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n\right) + O(x^{n+\alpha+1}),\ \alpha > -1$$

тогда интеграл Лапласа имеет следующий вид:

$$\int\limits_0^{+\infty} f(x)e^{-\lambda x}dx = \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k \Gamma(k+\alpha+1)}{\lambda^{k+\alpha+1}} + O\left(\frac{1}{\lambda^{n+\alpha+2}}\right)$$

□ Согласно принципу локализации, всё свелось к интегралу около нуля. Подставим в этот интеграл значение функции:

$$\int\limits_0^{+\infty} f(x)e^{-\lambda x}dx = \int\limits_0^{\delta} f(x)e^{-\lambda x}dx + O(\lambda^{-\infty}) = \sum_{k=0}^{n}\int\limits_0^{\delta} c_k x^{k+\alpha}e^{-\lambda x}dx + \int\limits_0^{\delta} O\left(x^{n+\alpha+1}\right)e^{-\lambda x}dx + O(\lambda^{-\infty})$$

С точностью до $O(\lambda^{-\infty})$ можем заменить δ на $+\infty$:

$$\int\limits_0^{+\infty} f(x)e^{-\lambda x}dx = \sum_{k=0}^{n}\int\limits_0^{+\infty} c_k x^{k+\alpha}e^{-\lambda x}dx + \int\limits_0^{+\infty} O\left(x^{n+\alpha+1}\right)e^{-\lambda x}dx + O(\lambda^{-\infty})$$

Используем преобразование Лапласа и получаем требуемое. ■

2) **Пример**: вычисление асимптотики интегралов вида:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-\lambda x^2}dx$$

Считаем, что сходится абсолютно при $\lambda_0 > 0$ (при всех больших лямбда). Надо свести к чему-то знакомому, но есть трудность связанная с тем, что нельзя сделать замену $x^2 = t$, поскольку это не монотонное преобразование $\Rightarrow$ разбиваем интеграл на две части:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-\lambda x^2}dx = \int\limits_0^{+\infty}\left(f(x) + f(-x)\right)e^{-\lambda x^2}dx = \left|x = \sqrt{t}\right| = \int\limits_0^{+\infty} \frac{f\left(\sqrt{t}\right) + f\left(-\sqrt{t}\right)}{2\sqrt{t}} e^{-\lambda t}dt$$

Теперь можно находить асимптотику применяя известные факты. Например, рассмотрим первый член асимптотики:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + O(x^2) \Rightarrow \frac{f\left(\sqrt{t}\right) + f\left(-\sqrt{t}\right)}{2\sqrt{t}} = \frac{f(0)}{\sqrt{t}} + O\left(\sqrt{t}\right) = t^{-\frac{1}{2}}\left(f(0) + O(t)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int\limits_0^{+\infty} \frac{f\left(\sqrt{t}\right) + f\left(-\sqrt{t}\right)}{2\sqrt{t}} e^{-\lambda t}dt = \frac{f(0)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\lambda^{\frac{1}{2}}} + O\left(\frac{1}{\lambda^{\frac{3}{2}}}\right) = f(0)\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\right),\ \lambda \to +\infty$$

Таким образом видно, что асимптотика зависит только от f в нуле. Данная ситуация напоминает теорему Муавра-Лапласа.

Метод Лапласа

Рассмотрим следующий интеграл, асимптотику которого мы хотим найти:

$$\int_a^b f(x)e^{\lambda g(x)}dx$$

Будем считать, что всегда этот интеграл сходится абсолютно по промежутку $]a, b[$ при некотором $\lambda_0 > 0$. Весь метод Лапласа состоит из четырех наблюдений.

Утв. 2. (**Оценка сверху**) Если $g(x) \leq M$, то тогда:

$$\forall \lambda > \lambda_0, \left| \int_a^b f(x)e^{\lambda g(x)}dx \right| \leq Ce^{\lambda M}$$

где C не зависит от λ.

□ Распишем интеграл и внесем модуль под интеграл:

$$\left| \int_a^b f(x)e^{\lambda g(x)}dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|e^{\lambda_0 g(x)}e^{(\lambda-\lambda_0)g(x)}dx \leq e^{\lambda M}e^{-\lambda_0 M}\int_a^b |f(x)|e^{\lambda_0 g(x)}dx = e^{\lambda M}C$$

где мы получили, что:

$$C = e^{-\lambda_0 M}\int_a^b |f(x)|e^{\lambda_0 g(x)}dx$$

■

Утв. 3. (**Оценка снизу**) Пусть $x_0 \in (a, b)$. Функции f, g непрерывны в точке x_0 и $f(x_0) \neq 0$. Тогда:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, r > 0\colon (x_0 - r, x_0 + r) \subset (a, b) \land \forall \delta \in (0, r), \left| \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)e^{\lambda g(x)}dx \right| \geq |f(x_0)|\delta e^{\lambda(g(x_0)-\varepsilon)}$$

□ Пусть $f(x_0) > 0$, тогда выбираем $r > 0$ на $(x_0 - r, x_0 + r)$ так, чтобы:

$$f(x) \geq \frac{f(x_0)}{2},\ g(x) \geq g(x_0) - \varepsilon$$

это возможно в силу непрерывности (по определению). Тогда, учитывая что $\lambda > \lambda_0 > 0$, получим:

$$\forall \delta \in (0, r), \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)e^{\lambda g(x)}dx \geq \frac{f(x_0)}{2}e^{\lambda(g(x_0)-\varepsilon)}2\delta = f(x_0)\delta e^{\lambda(g(x_0)-\varepsilon)}$$

■

Утв. 4. (**Принцип локализации**) Пусть $x_0 \in (a,b)$, f, g - непрерывны в точке x_0 и $f(x_0) \neq 0$. Предположим, что x_0 - точка строгого глобального максимума g на интервале (a,b):

$$\forall \mathcal{U}(x_0), \sup_{(a,b)\setminus\mathcal{U}(x_0)} g(x) < g(x_0)$$

Тогда $\forall (x_0 - r, x_0 + r) \subset (a,b)$ верно, что:

$$\int\limits_a^b f(x)e^{\lambda g(x)}dx = \int\limits_{x_0-r}^{x_0+r} f(x)e^{\lambda g(x)}dx \left(1 + O(\lambda^{-\infty})\right)$$

$\square$ Докажем сначала, что $\exists\, 0 < \delta < r$ такое, что выполнено:

$$\int\limits_a^b f(x)e^{\lambda g(x)}dx = \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)e^{\lambda g(x)}dx \left(1 + O(\lambda^{-\infty})\right)$$

$$\int\limits_{x_0-r}^{x_0+r} f(x)e^{\lambda g(x)}dx = \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)e^{\lambda g(x)}dx \left(1 + O(\lambda^{-\infty})\right)$$

Заметим также, что выполняется равенство:

$$\frac{1}{1 + O(\lambda^{-\infty})} = 1 + O(\lambda^{-\infty})$$

поскольку:

$$\frac{1}{1 + O(\lambda^{-\infty})} - 1 = \frac{O(\lambda^{-\infty})}{1 + O(\lambda^{-\infty})} = O(\lambda^{-\infty})$$

где последнее равенство верно в силу того, что в знаменателе ограниченная величина. Отметим при этом, что слева и справа разные O. Следовательно, мы можем писать:

$$F(\lambda) = G(\lambda)(1 + O(\lambda^{-\infty})) \Leftrightarrow G(\lambda) = F(\lambda)(1 + O(\lambda^{-\infty}))$$

Таким образом, доказав равенства выше, мы получим:

$$\int\limits_{x_0-r}^{x_0+r} f(x)e^{\lambda g(x)}dx = \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)e^{\lambda g(x)}dx \left(1 + O(\lambda^{-\infty})\right) \Rightarrow \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)e^{\lambda g(x)}dx = \int\limits_{x_0-r}^{x_0+r} f(x)e^{\lambda g(x)}dx \left(1 + O(\lambda^{-\infty})\right)$$

Подставив в первое равенство, получим требуемое:

$$\int\limits_a^b f(x)e^{\lambda g(x)}dx = \int\limits_{x_0-r}^{x_0+r} f(x)e^{\lambda g(x)}dx \left(1 + O(\lambda^{-\infty})\right)\left(1 + O(\lambda^{-\infty})\right) = \int\limits_{x_0-r}^{x_0+r} f(x)e^{\lambda g(x)}dx \left(1 + O(\lambda^{-\infty})\right)$$

Докажем их, пусть $f(x_0) > 0$, выбираем $\delta \in (0, r)$ так, чтобы

$$\forall x \in \mathrm{I} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta),\ f(x) > 0$$

Выберем $\varepsilon > 0$ таким образом, чтобы:

$$\exists\, \varepsilon > 0\colon g(x_0) - 2\varepsilon > \sup_{(a,b)\setminus \mathrm{I}} g$$

По утверждению про оценку снизу:

$$\exists\, \gamma \in (0, \delta), \int\limits_{x_0-\gamma}^{x_0+\gamma} f(x)e^{\lambda g(x)}dx \geq C_1 e^{\lambda(g(x_0)-\varepsilon)}$$

где C_1 не зависит от λ. Тогда:

$$\frac{\int\limits_a^b f(x)e^{\lambda g(x)}dx}{\int\limits_{\mathrm{I}} f(x)e^{\lambda g(x)}dx} = \frac{\int\limits_{\mathrm{I}} f(x)e^{\lambda g(x)}dx + \int\limits_{(a,b)\setminus \mathrm{I}} f(x)e^{\lambda g(x)}dx}{\int\limits_{\mathrm{I}} f(x)e^{\lambda g(x)}dx} = 1 + \frac{\int\limits_{(a,b)\setminus \mathrm{I}} f(x)e^{\lambda g(x)}dx}{\int\limits_{\mathrm{I}} f(x)e^{\lambda g(x)}dx} = 1 + (*)$$

оценим второе слагаемое по модулю. В числитель подставим максимум функции g на $(a, b) \setminus \mathrm{I}$ и таким образом получим:

$$\int\limits_{(a,b)\setminus \mathrm{I}} f(x)e^{\lambda g(x)}dx \leq e^{\lambda(g(x_0)-2\varepsilon)}C_2$$

Поскольку функция f была предположена знакопостоянной (положительной), поэтому взяв интервал поменьше - числитель станет поменьше $\Rightarrow$ дробь станет побольше:

$$\mathrm{I} \leftrightarrow (x_0 - \gamma, x_0 + \gamma) \Rightarrow \int\limits_{\mathrm{I}} f(x)e^{\lambda g(x)}dx \geq \int\limits_{x_0-\gamma}^{x_0+\gamma} f(x)e^{\lambda g(x)}dx \geq e^{\lambda(g(x_0)-\varepsilon)}C_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |(*)| \leq \frac{C_2 e^{\lambda(g(x_0)-2\varepsilon)}}{C_1 e^{\lambda(g(x_0)-\varepsilon)}} = \frac{C_2}{C_1}e^{-\lambda\varepsilon} = O(\lambda^{-\infty}) \Rightarrow |(*)| = O(\lambda^{-\infty})$$

■

Метод Лапласа

Утв. 5. (**Принцип локализации**) Пусть $x_0 \in (a,b)$, f, g - непрерывны в точке x_0 и $f(x_0) \neq 0$. Предположим, что x_0 - точка строгого глобального максимума g на интервале (a,b):

$$\forall \mathcal{U}(x_0), \sup_{(a,b)\setminus\mathcal{U}(x_0)} g < g(x_0)$$

Тогда $\forall (x_0 - r, x_0 + r) \subset (a,b)$ верно, что:

$$\int\limits_a^b f(x)e^{\lambda g(x)}dx = \int\limits_{x_0-r}^{x_0+r} f(x)e^{\lambda g(x)}dx\left(1 + O(\lambda^{-\infty})\right)$$

Таким образом, это дает нам следующий метод: вместо исследования страшного интеграла по непонятному промежутку, можно исследовать интгерал по промежутку сколь угодно малому вокруг точки экстремума. Чтобы воспользоваться этим методом, нам потребуется ещё одно утверждение.

Утв. 6. Пусть $g \in C^4$ в некоторой окрестности точки x_0, $g'(x_0) = 0$, $g''(x_0) < 0$. Тогда существуют отрезки $\mathcal{U}(x_0)$ и $\mathcal{V}(0)$, диффеоморфизм $\varphi\colon \mathcal{V}(0) \to \mathcal{U}(x_0)$ (будем писать $x = \varphi(y)$) такие, что:

$$\forall y \in \mathcal{V}(0),\ g(\varphi(y)) = g(x_0) - y^2$$

Более того, получается, что $\varphi(y) \in C^2$.

Rm: 1. Суть утверждения: функция в окрестности точки x_0 заменой координат приводится просто к параболе. Похоже на лемму Адамара и лемму Морса из конца прошлого семестра (см. лекция 23).

☐ Распишем формулу Тейлора с остатком в интегральной форме для функции $g(x)$ в точке x_0:

$$g(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)^2\int\limits_0^1 g''(x_0 + s(x - x_0))(1 - s)ds$$

$$= g(x_0) + (x - x_0)^2\int\limits_0^1 g''(x_0 + s(x - x_0))(1 - s)ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(x) - g(x_0) = (x - x_0)^2\left(\int\limits_0^1 g''(x_0 + s(x - x_0))(1 - s)ds\right) = (x - x_0)^2 h(x)$$

Хотим, чтобы правая часть была равна $-y^2$, соответственно вопрос: какой надо взять y, чтобы получить требуемое? Возьмем корень из выражения:

$$(x - x_0)^2 h(x) = -y^2 \Rightarrow y(x) = (x - x_0)^2\sqrt{-h(x)}$$

Рассмотрим функцию $h(x)$ подробнее. Нас интересует, чему равно $h(x_0)$:

$$h(x_0) = \int\limits_0^1 g''(x_0 + s(x_0 - x_0))(1 - s)ds = g''(x_0)\int\limits_0^1 (1 - s)ds = \frac{g''(x_0)}{2} < 0 \Rightarrow -h(x_0) > 0$$

Поскольку под интегралом стоит $g''(x_0 + s(x - x_0))$, которая является дважды непрерывно дифференцируемой по x, то по определению дифференцирования, можно получить, что $h(x)$ также является дважды дифференцируемой: написать приращение и поделить на Δx, все будет сходиться равномерно, затем переставляем равномерный предел и интеграл.

Таким образом, в маленькой окрестности точки x_0 под корнем стоит положительная функция. Для локального диффеоморфизма достаточно проверить производную:

$$y'(x) = \sqrt{-h(x)} - \frac{(x - x_0)}{2\sqrt{-h(x)}} h'(x) \Rightarrow y'(x_0) = \sqrt{-h(x_0)} = \sqrt{-\frac{g''(x_0)}{2}} > 0$$

Производная в точке положительная, функция непрерывно дифференцируема $\Rightarrow$ локально она является диффеоморфизмом (теорема об обратной функции). $x = \varphi(y)$ - обратная к $y = y(x)$ ■

Rm: 2. Вместо C^4 можно без проблем взять C^3 и получить тот же результат.

Rm: 3. По теореме об обратной функции также можно сказать, что:

$$\varphi(0) = x_0,\ \varphi'(0) = \frac{1}{y'(x_0)} = \sqrt{\frac{-2}{g''(x_0)}} > 0$$

Асимптотика преобразования Лапласа

Воспользуемся принципом локализации и утверждением выше, чтобы найти асимптотику у преобразования Лапласа. Пусть x_0 - внутренняя точка $\{a, b\}$, выбираем $\mathcal{U}(x_0) \subset \{a, b\}$. Пусть $\forall x \in \mathcal{U}(x_0),\ g(x) \in C^4$ и выполнены условия на производные:

$$g'(x_0) = 0,\ g''(x_0) < 0$$

Пусть кроме того $g(x) \leq M$, $\exists \lambda_0\colon$ интеграл сходится абсолютно, f - непрерывно дифференцируема в точке x_0 и $f(x_0) \neq 0$. То есть выполнены все условия принципа локализации и утверждения выше. Можно считать, что $\mathcal{U}(x_0)$ такова, что существует непрерывно дифференцируемая функция $\varphi\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathcal{U}(x_0)$ - диффеоморфизм, для которого справедливо:

$$\varphi(0) = x_0,\ \varphi'(0) = \frac{1}{y'(x_0)} = \sqrt{\frac{-2}{g''(x_0)}} > 0,\ g\left(\varphi(y)\right) = g(x_0) - y^2$$

По принципу Локализации:

$$\int\limits_a^b f(x) e^{\lambda g(x)} dx = \int\limits_{\mathcal{U}(x_0)} f(x) e^{\lambda g(x)} dx \left(1 + O(\lambda^{-\infty})\right)$$

Рассмотрим отдельно интеграл справа и сделаем в нем замену $x = \varphi(y)$:

$$\int\limits_{\mathcal{U}(x_0)} f(x) e^{\lambda g(x)} dx = \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f\left(\varphi(y)\right) \varphi'(y) e^{\lambda\left(g(x_0) - y^2\right)} dy = e^{\lambda g(x_0)} \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} h(y) e^{-\lambda y^2} dy$$

Пусть $h(y) = h(0) + yH(y)$, где $H(y)$ - ограниченная функция на $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Так будет, когда f непрерывно дифференцируема и φ дважды непрерывно дифференцируема, что то же самое, что и h - непрерывно дифференцируемая функция (получаем необходимое по теореме Лагранжа). Тогда:

$$\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} h(y)e^{-\lambda y^2}dy = h(0)\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-\lambda y^2}dy + \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} yH(y)e^{-\lambda y^2}dy = h(0)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda y^2}dy\left(1 + O(\lambda^{-\infty})\right) + \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} yH(y)e^{-\lambda y^2}dy$$

где в последнем равенстве применили принцип локализации. Рассмотрим первый интеграл:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda y^2}dy = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}dy = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sqrt{\pi}$$

Рассмотрим второй интеграл, из рассуждениый выше $\forall y \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $|H(y)| \leq C$, тогда:

$$\left|\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} yH(y)e^{-\lambda y^2}dy\right| \leq C\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |y|e^{-\lambda y^2}dy\left(1 + O(\lambda^{-\infty})\right) = \frac{C}{\lambda}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |y|e^{-y^2}dy\left(1 + O(\lambda^{-\infty})\right) = O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

Итого:

$$\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} h(y)e^{-\lambda y^2}dy = h(0)\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\right),\ h(0) \neq 0$$

Пусть f - непрерывно дифференцируема, а $g \in C^4$ (чтобы $\varphi(y)$ была C^2), тогда:

$$h(y) = f\left(\varphi(y)\right)\varphi'(y) = f(x_0)\sqrt{\frac{-2}{g''(x_0)}} + H(y)y$$

Следовательно:

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)e^{\lambda g(x)}dx = f(x_0)e^{\lambda g(x_0)}\sqrt{\frac{2\pi}{-\lambda g''(x_0)}}\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\right)$$

Таким образом, получаем утверждение.

Утв. 7. Пусть x_0 - внутренняя точка $\{a, b\}$, выбираем $\mathcal{U}(x_0) \subset \{a, b\}$. Пусть $\forall x \in \mathcal{U}(x_0)$, $g(x) \in C^4$ и выполнены условия на производные:

$$g'(x_0) = 0,\ g''(x_0) < 0$$

Кроме того, выполнены условия по максимуму на функцию:

$$\forall \mathcal{U}(x_0),\ \sup_{\{a,b\}\setminus\mathcal{U}(x_0)} g < g(x_0)$$

Пусть $\exists\,\lambda_0\colon$ интеграл сходится абсолютно, f - непрерывна дифференцируемо в точке x_0 и $f(x_0) \neq 0$. Тогда:

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)e^{\lambda g(x)}dx = f(x_0)e^{\lambda g(x_0)}\sqrt{\frac{2\pi}{-\lambda g''(x_0)}}\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\right)$$

Rm: 4. Здесь мы получили главный член асимптотики, но часто бывает интересно, а что дальше? Рассмотренный метод позволяет получать, что дальше.

Пример: Формула Стирлинга

Применим полученную теорию к доказательству гамма-функциям и снова докажем формулу Стирлинга. Рассмотрим следующую гамма-функцию:

$$\Gamma(\lambda+1) = \int\limits_0^{+\infty} t^\lambda e^{-t} dt$$

Сделаем замену $t = \lambda x$, тогда этот интеграл превратится в следующий:

$$\Gamma(\lambda+1) = \lambda^{\lambda+1} \int\limits_0^{+\infty} x^\lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda^{\lambda+1} \int\limits_0^{+\infty} e^{\lambda(\ln(x)-x)} dx = \lambda^{\lambda+1} \int\limits_0^{+\infty} e^{\lambda g(x)} dx$$

Таким образом, мы находимся в условиях утверждения выше, где $f(x) \equiv 1$ и $g(x) = \ln(x) - x$. Чтобы найти асимптотику надо найти вторую производную и точку максимума:

$$g'(x_0) = \frac{1}{x_0} - 1 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1 \Rightarrow g(1) = -1,\ g''(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow g''(1) = -1$$

Следовательно, получаем асимптотику:

$$\Gamma(\lambda+1) = \lambda^{\lambda+1} e^{-\lambda} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\right) = \sqrt{2\pi\lambda}\lambda^\lambda e^{-\lambda} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\right)$$

Rm: 5. Если x_0 окажется на краю промежутка интегрирования, то вместо интервала $(-\varepsilon, \varepsilon)$ будет интервал $(0, \varepsilon)$ и полученная оценка домножиться на $\frac{1}{2}$, поскольку замену переменной мы сможем сделать только с одной стороны и интегралы, которые вели себя как $\sqrt{\pi}$ будут вести себя, как $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Упр. 1. Найти асимптотику по λ при $\lambda \to \infty$ следующего интеграла:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^\lambda dx$$

☐ Приведем интеграл к виду, используемому в утверждении:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^\lambda dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\lambda \ln(\sin(x))} dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\lambda g(x)} dx$$

Таким образом $f(x) \equiv 1$, $g(x) = \ln(\sin(x))$, тогда:

$$g'(x) = \frac{\cos(x)}{x} = 0,\ x \in \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow x_0 = \tfrac{\pi}{2} \Rightarrow g(x_0) = 0,\ g''(x_0) = -\frac{\sin(x_0)x_0 + \cos(x_0)}{x_0^2} = -\frac{2}{\pi}$$

Поскольку точка максимума оказалась на краю промежутка интегрирования, то мы домножем приближение на $\frac{1}{2}$, тогда:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\lambda g(x)} dx = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot e^{\lambda \cdot 0} \sqrt{\frac{2\pi}{-\lambda \cdot \left(-\frac{2}{\pi}\right)}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\right)$$

■

Rm: 6. Задача есть в книжке Арнольда от 5 до 15-ти.