Несобственный интеграл

Пусть f определена на $[a, b)$, $f\colon [a, b) \to \mathbb{R}$, где b может быть бесконечностью и $\forall c \in [a, b)$ функция f интегрируема по Риману на отрезке $[a, c]$. Определим следующую функцию:

$$F(c) = \int\limits_a^c f(x)dx$$

Опр: 1. Если существует предел $\lim\limits_{c \to b-} F(c)$, то он называется несобственным интегралом Римана по полуинтервалу $[a, b)$ и обозначается следующим образом:

$$\lim_{c \to b-} F(c) = \int\limits_a^b f(x)dx$$

при этом говорят, что несобственный интеграл сходится.

Свойства несобственных интегралов

Поскольку несобственный интеграл это предел, то всё, что можно достичь предельным переходом, переносится с обычных интегралов на несобственные.

Утв. 1. (**Свойства несобственных интегралов**)

(1) **Линейность**: Если f и g интегрируемы в несобственном смысле на $[a, b)$, то $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, линейная комбинация этих функций $\alpha f + \beta g$ также интегрируема на $[a, b)$. И верно следующее:

$$\int\limits_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int\limits_a^b f(x)dx + \beta \int\limits_a^b g(x)dx$$

(2) **Монотонность**: Если f и g интегрируемы в несобственном смысле на $[a, b)$ и $f \le g$, то:

$$\int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b g(x)dx$$

(3) **Формула замены переменных**: Пусть $\varphi\colon [\alpha, \beta) \to [a, b)$ - непрерывно дифференцируема, её производная $\varphi' > 0$, $\varphi(\alpha) = a$ и $\lim\limits_{t \to \beta-} \varphi(t) = b$, тогда несобственные интегралы:

$$\int\limits_a^b f(x)dx, \int\limits_\alpha^\beta f\left(\varphi(t)\right) \cdot \varphi'(t)dt$$

сходятся и расходятся одновременно и в случае сходимости равны;

(4) **Формула интегрирования по частям**: Пусть f, g - непрерывно дифференцируемы на $[a, b)$ и существует предел $\lim\limits_{c \to b-} f(c) \cdot g(c)$. Тогда несобственные интегралы:

$$\int\limits_a^b f(x) \cdot g'(x)dx, \int\limits_a^b f'(x) \cdot g(x)dx$$

сходятся и расходятся одновременно и верна формула:

$$\int\limits_a^b f(x)\cdot g'(x)dx = \lim_{c\to b-} f(c)\cdot g(c) - f(a)\cdot g(a) - \int\limits_a^b f'(x)\cdot g(x)dx$$

Rm: 1. В свойстве замены переменных есть условие $\varphi' > 0$. В обычной замене переменных интеграла Римана данное свойство не требовалось.

$\square$

(1) Пусть $a < c < b$, тогда по свойству интеграла Римана будет верно:

$$\int\limits_a^c (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int\limits_a^c f(x)dx + \beta \int\limits_a^c g(x)dx$$

Переходя к пределу и воспользовавшись арифметикой пределов функций, мы получим требуемое;

(2) Пусть $a < c < b$, тогда по свойству интеграла Римана будет верно:

$$\int\limits_a^c f(x)dx \le \int\limits_a^c g(x)dx$$

Переходя к пределу и воспользовавшись арифметикой пределов функций, мы получим требуемое;

(3) Пусть $\alpha < \gamma < \beta$, тогда по свойству интеграла Римана будет верно:

$$\int\limits_\alpha^\gamma f\left(\varphi(t)\right)\cdot\varphi'(t)dt = \int\limits_a^{\varphi(\gamma)=c} f(x)dx$$

По теореме о промежуточном значении, $\forall c \in [a, b)$, $\exists\, \gamma\colon \varphi(\gamma) = c$. Поскольку $\varphi' > 0$, то φ - диффеоморфизм (см. лекция 14, семестр 2) $\Rightarrow$ обратная функция также является непрерывно дифференцируемой $\Rightarrow$ если c стремится к b, то γ будет стремится к β. Тогда:

$$\gamma \to \beta- \Leftrightarrow \varphi(\gamma) \to b- \Rightarrow \int\limits_\alpha^\gamma f\left(\varphi(t)\right)\cdot\varphi'(t)dt < \infty \Leftrightarrow \int\limits_a^{\varphi(\gamma)=c} f(x)dx < \infty$$

Следовательно, мы получим:

$$\lim_{\gamma\to\beta-}\int\limits_\alpha^\gamma f\left(\varphi(t)\right)\cdot\varphi'(t)dt = \int\limits_\alpha^\beta f\left(\varphi(t)\right)\cdot\varphi'(t)dt = \lim_{c\to b-}\int\limits_a^c f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx$$

(4) Пусть $a < c < b$, тогда по свойству интеграла Римана будет верно:

$$\int\limits_a^c f(x)\cdot g'(x)dx = f(c)\cdot g(c) - f(a)\cdot g(a) - \int\limits_a^c f'(x)\cdot g(x)dx$$

Поскольку предел $f(c)\cdot g(c)$ существует и равен числу, то предел по интегралу слева будет существовать тогда и только тогда, когда будет существовать предел по интегралу справа:

$$\lim_{c\to b-}\int\limits_a^c f(x)\cdot g'(x)dx = \lim_{c\to b-} f(c)\cdot g(c) - f(a)\cdot g(a) - \lim_{c\to b-}\int\limits_a^c f'(x)\cdot g(x)dx$$

Или, что то же самое:

$$\int\limits_a^b f(x)\cdot g'(x)dx = \lim_{c\to b-} f(c)\cdot g(c) - f(a)\cdot g(a) - \int\limits_a^b f'(x)\cdot g(x)dx$$

■

Rm: 2. В третьем свойстве важно, чтобы функция φ была "хорошей", чтобы мы получили диффеоморфизм. Это есть основное отличие от обычного интегрирования.

Упр. 1. Пусть $f \in C[a,b)$ и φ - гладкая. Можно ли сделать замену?

□ Рассмотрим следующие функции:

$$f(x) = x,\ \varphi(t) = \cos(t) + e^{-t},\ \varphi(t)\colon [0,+\infty) \to (-1,2]$$

$f(x)$ - непрерывная на $(-1,2]$ функция. $\varphi(t)$ - гладкая функция. Тогда:

$$\int\limits_{-1}^{2} xdx = \lim_{c\to(-1)+}\int\limits_c^2 xdx = \lim_{c\to(-1)+}\frac{x^2}{2}\bigg|_c^2 = 2 - \lim_{c\to(-1)+}\frac{c^2}{2} = \frac{3}{2}$$

При этом:

$$\int\limits_0^{+\infty}(\cos(t)+e^{-t})\cdot(\cos(t)+e^{-t})'dt = \int\limits_0^{+\infty}(\cos(t)+e^{-t})\cdot\big(-\sin(t)-e^{-t}\big)\,dt =$$

$$= \lim_{c\to+\infty}\int\limits_0^c(-\sin(t)\cos(t) - \sin(t)e^{-t} - \cos(t)e^{-t} - e^{-2t})dt = \lim_{c\to+\infty}F(c)$$

Тогда:

$$\int\limits_0^c \sin(t)\cos(t)dt = \frac{\sin^2(c)}{2},\ \int\limits_0^c e^{-2t}dt = -\frac{1}{2}\ e^{-2t}\Big|_{t=0}^c = -\frac{1}{2}e^{-2c} + \frac{1}{2}$$

$$\int\limits_0^c \sin(t)e^{-t}dt = -e^{-c}\sin(c) + \int\limits_0^c \cos(t)e^{-t}dt = -e^{-c}\sin(c) - e^{-t}\ \cos(t)\Big|_{t=0}^c - \int\limits_0^c \sin(t)e^{-t}dt =$$

$$= -e^{-c}(\sin(c)+\cos(c)) + 1 - \int\limits_0^c \sin(t)e^{-t}dt \Rightarrow \int\limits_0^c \sin(t)e^{-t}dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-c}(\sin(c)+\cos(c))$$

$$\int\limits_0^c \cos(t)e^{-t}dt = -e^{-c}\cos(c) + 1 + e^{-c}\sin(c) - \int\limits_0^c \cos(t)e^{-t}dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int\limits_0^c \cos(t) e^{-t} dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-c} (\sin(c) - \cos(c))$$

Таким образом, собирая всё вместе:

$$F(c) = -\frac{\sin^2(c)}{2} + \frac{1}{2} e^{-2c} - \frac{3}{2} + e^{-c} \cos(c)$$

$$\nexists \lim_{c \to +\infty} \frac{\sin^2(c)}{2}, \lim_{c \to +\infty} \left(\frac{1}{2} e^{-2c} - \frac{3}{2} + e^{-c} \cos(c) \right) = 0 - \frac{3}{2} + 0 = -\frac{3}{2}$$

Следовательно, не существует предела $\lim\limits_{c \to +\infty} F(c)$ и интеграл расходится. ■

Сходимость несобственного интеграла

Сходимость несобственных интегралов с положительными функциями

Пусть $f(x) \geq 0$ на $[a,b)$, тогда $F(c) = \int\limits_a^c f(x)dx$ не убывает (можно это представить как увеличение площади под графиком функции). По теореме Вейерштрасса (см. лекция 15, семестр 1):

$$\exists \lim_{c \to b} F(c) \Leftrightarrow F(c) \text{ - ограничена}$$

Утв. 2. Пусть f, g - определены на $[a,b)$ и $\forall c \in [a,b)$ интегрируемы по Риману на $[a,c]$, причем будет верно следующее: $0 \leq f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a,b)$. Тогда справедливо следующее:

$$\int\limits_a^b g(x)dx \text{ - сходится} \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx \text{ - сходится}$$

и наоборот:

$$\int\limits_a^b f(x)dx \text{ - расходится} \Rightarrow \int\limits_a^b g(x)dx \text{ - расходится}$$

□ Заметим, что $\forall c \in [a,b)$ будет выполнено:

$$\int\limits_a^c f(x)dx \leq \int\limits_a^c g(x)dx$$

Отсюда, по теореме Вейрштрасса ограниченность равносильна сходимости $\Rightarrow$ получаем требуемое. ■

Следствие 1. Пусть $f(x), g(x) \geq 0$ и выполнено $c_1 g(x) \leq f(x) \leq c_2 g(x)$, где $c_1, c_2 \geq 0$, тогда:

$$\int\limits_a^b f(x)dx \text{ - сходится} \Leftrightarrow \int\limits_a^b g(x)dx \text{ - сходится}$$

□ Следует сразу из утверждения выше. ■

Интегральный признак сходимости ряда

Сходимость рядов можно также исследовать с помощью несобственного интеграла.

Теорема 1. (**Интегральный признак сходимости ряда**)
Пусть f не возрастает на $[1,+\infty)$ и $f(x) \geq 0$. Тогда будет верно следующее:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(x) \text{ - сходится} \Leftrightarrow \int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx \text{ - сходится}$$

Rm: 3. В теореме нельзя отменить условие монотонности функции f, потому что нельзя зная что-то в целочисленных точках утверждать что-то про интеграл и наоборот, поскольку изменение значений в счетном числе точек не влияет на интеграл.

☐ Рассмотрим следующее неравенство:

$$f(k+1) = \int\limits_{k}^{k+1} f(k+1)dx \leq \int\limits_{k}^{k+1} f(x)dx \leq \int\limits_{k}^{k+1} f(k)dx = f(k), \forall k \in \mathbb{N}$$

Оно верно, поскольку f не возрастает. Просуммируем аналогичные неравенства при $k = 1, \ldots, N$:

$$\sum_{n=1}^{N+1} f(n) - f(1) = f(2) + \ldots + f(N+1) \leq \int\limits_{1}^{N} f(x)dx \leq f(1) + \ldots + f(N) = \sum_{n=1}^{N} f(n)$$

($\Rightarrow$) Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится, то его частичные суммы ограничены $\Rightarrow$ $\int\limits_{1}^{c} f(x)dx$ - ограничены по неравенству выше, поскольку: $\forall c$, $\exists\, N\colon\ N-1 \leq c \leq N$, а также будет верно:

$$\int\limits_{1}^{c} f(x)dx \leq \int\limits_{1}^{N} f(x)dx$$

Поскольку $f(x) \geq 0$, то $\int\limits_{1}^{\infty} f(x)dx$ - сходится.

($\Leftarrow$) Если интеграл сходится, то все выражения вида $\int\limits_{1}^{N} f(x)dx$ ограничены $\Rightarrow$ ограничены все частичные суммы знакопостоянного ряда $\Rightarrow$ он сходится. ■

Пример: Исследуем сходимость ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$, $p > 0$.

☐ По теореме он сходится $\Leftrightarrow$ сходится интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \dfrac{dx}{x^p}$, то есть при $p > 1$ (см. прошлую лекцию). ■

Пример: Исследуем сходимость ряда: $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p(x)}$.

☐ С точки зрения интеграла, проверить сходимость можно легко:

$$\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^p x} = \int\limits_2^{+\infty} \frac{d \ln x}{\ln^p x} = \int\limits_{\ln 2}^{+\infty} \frac{du}{u^p} \Rightarrow \text{сходится при } p > 1$$

■

Теорема применима в случае неотрицательной функции f, которая при этом еще и монотонна. Возникает вопрос: а можно ли в общем случае, как-то подверстать интеграл под исследование суммы ряда?

Формула Эйлера

Утв. 3. (**Формула Эйлера**) Пусть $f \in C^1[1, +\infty)$ (C^1 = непрерывно дифференцируемая функция), тогда верно следующее равенство:

$$\sum_{n=M}^{N} f(n) = f(M) + \int\limits_M^N f(x)dx + \int\limits_M^N \{x\} \cdot f'(x)dx$$

где $\{x\}$ - дробная часть x и $M, N \in \mathbb{N}$.

☐ Проверим, что формула верна. Пусть $k \in \mathbb{N}$, рассмотрим следующее слагаемое:

$$\int\limits_k^{k+1} \{x\} f'(x)dx = \int\limits_k^{k+1} (x-k)f'(x)dx = f(k+1) - \int\limits_k^{k+1} f(x)dx$$

где последнее равенство верно в силу интегрирования по частям. Перепишем полученное выражение:

$$f(k+1) = \int\limits_k^{k+1} f(x)dx + \int\limits_k^{k+1} \{x\} f'(x)dx$$

Просуммируем все такие выражения по k от M до $N-1$, тогда мы получим:

$$\sum_{k=M}^{N-1} f(k+1) = \sum_{n=M}^{N} f(n) - f(M) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=M}^{N} f(n) - f(M) = \int\limits_M^{M+1} f(x)dx + \ldots + \int\limits_{N-1}^{N} f(x)dx + \int\limits_M^{M+1} \{x\} f'(x)dx + \ldots + \int\limits_{N-1}^{N} \{x\} f'(x)dx$$

В силу аддитивности интегралов, мы получим требуемую формулу:

$$\sum_{n=M}^{N} f(n) = f(M) + \int\limits_M^N f(x)dx + \int\limits_M^N \{x\} f'(x)dx$$

■

Пример: Рассмотрим сумму $\sum\limits_{n=1}^{N} \cos(n^\alpha)$, $0 < \alpha < 1$. Применим формулу Эйлера:

$$\sum_{n=1}^{N} \cos(n^\alpha) = \cos(1) + \int_1^N \cos(x^\alpha)dx - \alpha \int_1^N \{x\} \frac{\sin(x^\alpha)}{x^{1-\alpha}} dx$$

Оценим последний интеграл по модулю: вносим модуль под интеграл, $\{x\} \le 1$, $\sin x \le 1$, тогда:

$$\alpha \left| \int_1^N \{x\} \frac{\sin(x^\alpha)}{x^{1-\alpha}} dx \right| \le \alpha \int_1^N \frac{dx}{x^{1-\alpha}} = N^\alpha - 1 \le N^\alpha$$

Оценим первый интеграл. Сделаем замену $t = x^\alpha$, $x = t^{1/\alpha}$, $dx = \dfrac{1}{\alpha} t^{(1/\alpha)-1} dt$:

$$\int_1^N \cos(x^\alpha)dx = \frac{1}{\alpha} \int_1^{N^\alpha} (\cos t) \cdot t^{(1/\alpha)-1} dt = \frac{1}{\alpha} \int_1^{N^\alpha} \frac{d(\sin t)}{t^{1-(1/\alpha)}}$$

$$\int_1^{N^\alpha} \frac{d(\sin t)}{t^{1-1/\alpha}} = \frac{\sin N^\alpha}{N^{\alpha-1}} - \frac{\sin 1^\alpha}{1} + \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \int_1^{N^\alpha} \frac{\sin t}{t^{2-1/\alpha}} dt \le CN^{1-\alpha}$$

Таким образом, мы получили оценку сверху:

$$\sum_{n=1}^{N} \cos(n^\alpha) \le C_1 + CN^{1-\alpha} + N^\alpha \le C_2 \left(1 + N^{1-\alpha} + N^\alpha\right)$$

Например, при $\alpha = \frac{1}{2}$ мы получим:

$$\sum_{n=1}^{N} \cos(\sqrt{n}) \le C\sqrt{N}$$

Таким образом, понять просто так поведение суммы ряда - крайне затруднительно, если реально. После применения формулы Эйлера появляются все технологии, которые используются в интегральном исчислении. И обычно, с интегралами разбираться гораздо проще, чем с суммами.

Сходимость несобственных интегралов в общем случае

Обсудив сходимость с неотрицательными слагаемыми, возникает вопрос, а что делать в общей ситуации? В общей ситуации с рядми производились преобразования Абеля.

Rm: 4. Стоит отметить, что преобразование Абеля важнее, чем признаки Абеля-Дирихле (следствие этого преобразования), поскольку часто "зазор" проходит в задачах о сходимости не там, где указано в этих признаках.

В несобственных интегралах аналогом преобразования Абеля является интегрирование по частям. В следующий раз, мы на этом остановимся подробнее.

Пример: рассмотрим интеграл: $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$. Надо понять сходится или нет?

□ Сходу дать ответ на вопрос сложно, поскольку не хватает $\frac{1}{x}$. Хотим усилить сходимость, поэтому используем интегрирование по частям:

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{c \to +\infty} \int\limits_1^c \frac{\sin x}{x} dx = -\lim_{c \to +\infty} \int\limits_1^c \frac{d \cos x}{x} = -\lim_{c \to +\infty} \frac{\cos x}{x}\Big|_1^c - \int\limits_1^c \frac{\cos x}{x^2} dx$$

Пока что не умеем доказывать сходимость последнего интеграла, но в это уже не сложно поверить. ■

Критерий Коши

Несобственный интеграл от a до b это предел функции:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{c \to b-} \int\limits_a^c f(x)dx = \lim_{c \to b-} F(c)$$

Кроме случая, когда функция монотонна и там работает теорема Вейерштрасса из первого семестра есть ещё критерий Коши:

Теорема 2. (**Критерий Коши**) Несобственный интеграл сходится, а значит и предел функции $F(c)$ существует, если выполнен критерий Коши:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{c \to b-} F(c) < \infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\, \exists\, \delta > 0,\, \forall c_1, c_2 \in (b - \delta, b),\, |F(c_1) - F(c_2)| = \left|\int\limits_{c_1}^{c_2} f(x)dx\right| < \varepsilon$$

Если $b = \infty$, то берем $c_1, c_2 > A$, где $A < \infty$.

Rm: 5. Чаще всего критерий Коши нужен в двух местах: на лекции, для доказательств и в решении задач, при отрицательной части. То есть для доказательства того, что интеграл не сходится. Например, функции "плохеет" на каких-то отрезках, и следовательно оценивать лучше на этих отрезках.

Утв. 4. Пусть $f\colon [a, b) \to \mathbb{R}$, $\forall c \in [a, b)$ интегрируема по Риману на $[a, c]$. Тогда:

$$\int\limits_a^b |f(x)|\, dx \text{ - сходится} \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx \text{ - сходится}$$

□ Проверим критерий Коши:

$$\left|\int\limits_{c_1}^{c_2} f(x)dx\right| \leq \int\limits_{c_1}^{c_2} |f(x)|\, dx$$

Интеграл модуля сходится, поэтому:

$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists\, \delta > 0,\, \forall c_1, c_2 \in (b - \delta, b),\, \left|\int\limits_{c_1}^{c_2} |f(x)|\, dx\right| = \int\limits_{c_1}^{c_2} |f(x)|\, dx < \varepsilon \Rightarrow \left|\int\limits_{c_1}^{c_2} f(x)dx\right| < \varepsilon$$

■