Ряды Фурье в комплекснозначном пространстве

Мы рассматривали теорию рядов Фурье для вещественозначных функций. Хотелось бы расширить эту теорию для более общего пространства, что послужит для нас мостиком к преобразованию Фурье.

Рассмотрим функции вида $f(t) = u(t) + iv(t)$, где u, v - обычные вещественные функции, интегрируемые по Риману на отрезке $[0, 2\pi]$, то есть $u, v \in R[0, 2\pi]$. Для краткости будем писать: $f \in R^{\mathbb{C}}[0, 2\pi]$. Как уже обговаривали ранее, под интегралом от f будем понимать следующий интеграл:

$$\int_0^{2\pi} f(t)dt = \int_0^{2\pi} u(t)dt + i\int_0^{2\pi} v(t)dt$$

Определим скалярное произведение и норму на этом пространстве:

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(t)\cdot\overline{g(t)}dt, \quad \|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle} = \sqrt{\int_0^{2\pi} f(t)\cdot\overline{f(t)}dt} = \sqrt{\int_0^{2\pi} |f(t)|^2dt}$$

По аналогии с вещественным случаем, мы отождествляем функции равные почти всюду:

$$t \in [0, 2\pi],\ f_1(t) = u_1(t) + iv_1(t),\ f_2(t) = u_2(t) + iv_2(t) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f_1(t) = f_2(t) \Leftrightarrow u_1(t) \overset{\text{п.в.}}{=} u_2(t) \wedge v_1(t) \overset{\text{п.в.}}{=} v_2(t)$$

Поскольку $f(t) = u(t) + iv(t)$, то распишем квадрат нормы для f:

$$\|f\|^2 = \int_0^{2\pi} |f(t)|^2dt = \int_0^{2\pi} |u(t)|^2dt + \int_0^{2\pi} |v(t)|^2dt$$

Утв. 1. Система функций:

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}$$

это о.н.с. и полная система в $R^{\mathbb{C}}[0, 2\pi]$.

☐ Ортонормированность доказывается абсолютно также, как и раньше, поскольку в системе обычные вещественные функции.

Полнота получается из следующих соображений: пусть $f = u + iv,\ u, v \in R[0, 2\pi] \Rightarrow$ мы можем приблизить их тригонометрическими многочленами T_u и T_v соответственно. Тогда:

$$u \sim T_1,\ v \sim T_2\colon \int_0^{2\pi} |u(t) - T_u(t)|^2\,dt < \varepsilon,\ \int_0^{2\pi} |v(t) - T_v(t)|^2\,dt < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u + iv \sim T_u + iT_v\colon \int_0^{2\pi} |u(t) + iv(t) - (T_u(t) + iT_v(t))|^2\,dt = \int_0^{2\pi} |(u(t) - T_u(t)) + i(v(t) - T_2(t))|^2\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} |u(t) - T_u(t)|^2\,dt + \int_0^{2\pi} |v(t) - T_v(t)|^2\,dt < 2\varepsilon$$

■

Следствие 1. $\forall f \in R^{\mathbb{C}}[0, 2\pi]$ ряд Фурье по системе $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}$ будет иметь вид:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) dt, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Этот ряд сходится в $R^{\mathbb{C}}[0, 2\pi]$ к f.

Rm: 1. Заметим, что коэффициенты в этот раз будут комплексными из-за функции f. Кроме того, поточечная и равномерная сходимость исследуется точно также, как и для вещественных функций дословно, в силу чего мы не будем этого повторять здесь.

Экспоненциальная о.н.с.

Кроме системы из синусов, косинусов и единицы в случае комплекснозначных функий обычно используют другую систему, состоящую из комплексных экспонент.

Утв. 2. В пространстве $R^{\mathbb{C}}[0, 2\pi]$ набор функций:

$$\left\{\frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \;\middle|\; n \in \mathbb{Z}\right\}, \ e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$$

является о.н.с. и полной системой.

□ Эта система является полной в силу следующих соотношений:

$$\cos(kx) = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}, \ \sin(kx) = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}, \ 1 = e^{i \cdot 0 \cdot x}$$

Мы ранее выяснили, что любую исходную функцию можно приблизить системой из косинусов, синусов и единицы $\Rightarrow$ можно приблизить линейной комбинацией через экспоненты $\Rightarrow$ эта система также является полной. Ортонормированность находится здесь сильно проще, чем для обычной системы:

$$\left\langle e^{ikx}, e^{imx} \right\rangle = \int_0^{2\pi} e^{ikx} e^{-imx} dx = \int_0^{2\pi} e^{i(k-m)x} dx = \begin{cases} 2\pi, & k = m \\ 0, & k \neq m \end{cases}$$

где мы воспользовались тем, что функция e^{ix} - 2π-периодическая:

$$e^{i2\pi} = \cos(2\pi) + i \sin(2\pi) = 1 = e^{i \cdot 0}$$

■

У нас было две ортонормированные системы и мы по сути сделали замену базиса (ортогональная замена координат). Отметим, что сами замены происходят в двухмерных пространствах, то есть:

$$\{\sin kx, \cos kx\} = \left\{e^{ikx}, e^{-ikx}\right\}$$

Было сначала пространство натянутое на косинус и синус над $\mathbb{C}$, затем в этом же пространстве выбрали другой базис в виде экспоненты. А в пространстве из 1 ничего не менялось.

Следствие 2. $\forall f \in R^{\mathbb{C}}[0, 2\pi]$ ряд Фурье по $\dfrac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}$, $n \in \mathbb{Z}$ сходится к f в $R^{\mathbb{C}}[0, 2\pi]$.

Принято записывать ряд Фурье в следующем виде:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$$

$$c_n(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left\langle f, \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

Сумму этого ряда обычно записывают как предел частичных сумм вида:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}$$

Одновременно с этим, будет верно представление (при возвращении к тригонометрической системе):

$$\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right)$$

Несложно проверить, что коэффициенты связаны между собой следующим образом:

$$\forall k \in \mathbb{N},\ a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) = a_k \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} + b_k \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} =$$

$$= \frac{a_k e^{ikx} + a_k e^{-ikx} + i b_k e^{-ikx} - i b_k e^{ikx}}{2} = e^{ikx} \frac{a_k - i b_k}{2} + e^{-ikx} \frac{a_k + i b_k}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N},\ c_k = \frac{a_k - i b_k}{2},\ c_{-k} = \frac{a_k + i b_k}{2}$$

Все рассуждения выше были сделаны в предположении, что мы работаем на отрезке $[0, 2\pi]$, где f всегда может быть продолжена до 2π-периодической. Если мы перейдем к отрезку $[-\pi, \pi]$, то поменяется только промежуток интегрирования:

$$f \in R^{\mathbb{C}}[0, 2\pi],\ c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx \Rightarrow f \in R^{\mathbb{C}}[-\pi, \pi],\ c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

Если же мы перейдем к отрезку $[-l, l]$, то чтобы получить полную о.н.с. необходимо будет сделать замену координат:

$$x = \frac{\pi y}{l} \Rightarrow x \in [-\pi, \pi] \to y \in [-l, l],\ \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \to \frac{e^{\frac{i\pi n y}{l}}}{\sqrt{2l}}$$

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \to c_n(f) = \frac{1}{2l} \int\limits_{-l}^{l} f(x) e^{\frac{i\pi n y}{l}} dx$$

Заготовив систему на $[0, 2\pi]$ мы теперь можем её перенести на любой отрезок (не обязательно брать симметричный) через масштабирование и сдвиг, а далее на нём устроить полную о.н.с.

Упр. 1. Пусть $f \in C^1$, f - 2π-периодическая, $c_n(f) = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx$, доказать, что:

$$c_n(f') = i{\cdot}n{\cdot}c_n(f)$$

□ Воспользуемся формулой интегрирования по частям:

$$c_n(f') = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f'(x)e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}f(x)e^{-inx}\Big|_{x=0}^{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)(ine^{-inx})dx = in{\cdot}c_n(f)$$

■

Упр. 2. Пусть f, g - непрерывные 2π-периодические функции, доказать, что:

$$c_n(f * g) = 2\pi{\cdot}c_n(f){\cdot}c_n(g)$$

□ Поскольку f, g - непрерывные 2π-периодические функции, то $f * g(x)$ тоже будет непрерывной и 2π-периодической по свойству свёртки. Тогда:

$$c_n(f * g) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} (f * g)(x)e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)g(x-t)e^{-inx}dtdx$$

В силу непрерывности функций, мы можем переставить интегралы местами:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)g(x-t)e^{-inx}dtdx = \int\limits_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} g(x-t)e^{-in(x-t)}dx\right)dt =$$

$$= c_n(g){\cdot}\int\limits_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt = 2\pi{\cdot}c_n(g){\cdot}c_n(f)$$

■

Обобщение рядов Фурье

Пусть E - евклидово пространство, мы взяли в нём $\{e_n\}$ - о.н.с., пусть она полная $\Rightarrow$ мы сопоставляем каждому вектору $x \in E$ набор чисел, которые естественно назвать его координатами:

$$\forall x \in E,\, x = \sum_n \hat{x}e_n \Leftrightarrow x \mapsto (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \dots)$$

То есть мы можем смотреть на x, как на вектор с бесконечным числом координат, он однозначно по ним восстанавливается и сумма модулей квадратов сходится по равенству Парсеваля сходится к $\|x\|^2$. Получается, что как-будто бы мы всё смотрим в $\mathbb{R}^n$: в ортонормированном базисе $\mathbb{R}^n$ есть координаты, суммы их квадратов это длина вектора. Возникает общий вопрос: что делает с функцией разложение в ряд Фурье по такой аналогии?

Рассмотрим пространство $R^{\mathbb{C}}[0, 2\pi]$, пусть $f \in R^{\mathbb{C}}[0, 2\pi]$ и $\{e^{inx} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ - система в этом пространстве $\Rightarrow$ любая функция f раскладывается по этой системе:

$$f = \sum_n c_n e^{inx}$$

Значит, каждая функция $f \in R^{\mathbb{C}}[0, 2\pi]$ может восприниматься как вектор с бесконечным числом координат, которые будут теми самыми коэффициентами Фурье:

$$f \mapsto (c_1, c_2, \dots)$$

Сумма квадратов координат с правильной нормировкой будет длиной вектора, сумма функций перейдет в сумму векторов. Таким образом мы представили пространство функций как пространство векторов с бесконечным набором координат $\Rightarrow$ можем думать про эти функции, как про вектора из линейной алгебры с нюансом, что у этих векторов бесконечно много координат. Зафиксируем функцию $g \in R^{\mathbb{C}}[0, 2\pi]$, в этом пространстве есть линейные отображения A:

$$Af = f * g$$

Свёртка - некоторый универсальный объект $\Rightarrow$ в некотором смысле здесь написана работа любого линейного прибора, который не меняет своих свойств со временем. В результате $R^{\mathbb{C}}[0, 2\pi]$ - линейное пространство, A - линейное отображение в нём и теперь мы бы хотели узнать как это линейное отображение устроено. В линейной алгебре, чтобы узнать как работает линейный оператор нужно смотреть куда переходят базисные вектора, какой матрицей он задается и хорошо если это была бы диагональная матрица. Попробуем записать линейный оператор A в системе координат: $(c_1, c_2, \dots)$:

$$c_n(Af) = c_n(f * g) = 2\pi \cdot c_n(g) \cdot c_n(f) = \alpha_n c_n(f) = \alpha_n f_n$$

$$f \leftrightarrow (f_1, f_2, \dots) = (c_1(f), c_2(f), \dots) \Rightarrow Af \leftrightarrow (\alpha_1 f_1, \alpha_2 f_2, \dots)$$

Получается, что работа этого прибора записывается как умножение вектора в этой системе координат на диагональную матрицу (бесконечную):

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots \\ 0 & \alpha_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ называют спектором, по аналогии с линейной алгеброй. То есть мы взяли прибор, про который ничего не знали (кроме линейности и инвариантности по времени), решили обрабатывать периодические сигналы и оказывается, что этот прибор работает так: берем разложение периодического сигнала по Фурье и тогда прибор просто умножает эти коэффициенты на заранее заготовленные элементы спектра. Когда посчитали преобразование Фурье функции g говорят, что найден точечный спектр, поскольку найден точечный спектор оператора A.

Преобразование Фурье

Преобразование Фурье обсуждается много раз на разных дисциплинах, окончательное обсуждение будет на функциональном анализе. Преобразование Фурье в том числе встречается в теории вероятностей, но уже под названием характеристической функции.

Опр: 1. Преобразованием Фурье функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ называется функция вида:

$$\widehat{f}(y) = \mathcal{F}(f)(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixy} dx$$

Ранее, мы обозначала крышкой коэффициенты Фурье в разложении. Поэтому здесь аналогичное обозначение имеет смысл. Представим, что функция f - финитная и гладкая, с носителем на $[-N\pi, N\pi]$. Понятно, что это $N\pi$ можно взять сколь угодно большим и на каждом таком отрезке можно разложить функцию в ряд Фурье.

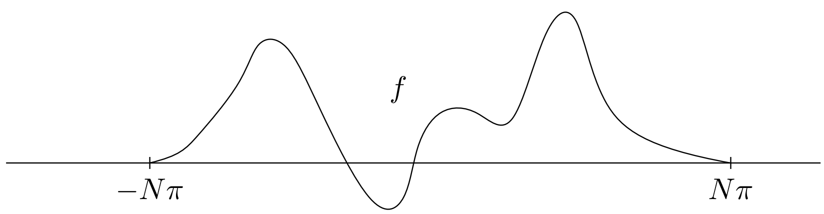

Рис. 1: Гладкая и финитная функция с носителем на $[-N\pi, N\pi]$.

Раскладывая функцию f в ряд Фурье нам надо выяснить коэффициенты Фурье:

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi N} \int\limits_{-N\pi}^{N\pi} f(x) e^{-\frac{ikx}{N}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi} N} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-\frac{ikx}{N}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi} N} \widehat{f}\left(\frac{k}{N}\right)$$

Таким образом, с помощью преобразования Фурье мы можем увидеть все коэффициенты Фурье у f. Если забыть про нормирующий множитель, то как тогда увидеть точечный спектр функции f? Надо всю числовую ось пройти с шагом $\frac{1}{N}$ и нарисовать график преобразования Фурье:

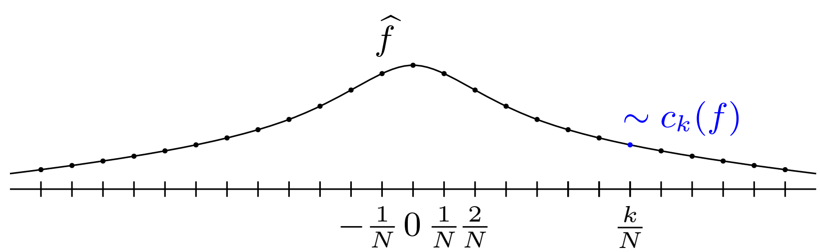

Рис. 2: График преобразования Фурье $\mathcal{F}(f)$, коэффициенты Фурье находятся на графике.

Смотрим значения в точках на графике: это и есть, с точностью до множителя $\frac{1}{\sqrt{2\pi} N}$, коэффициенты Фурье. То есть оказывается, что если раскладываем функцию с компактным носителем на разных отрезках $[-N\pi, N\pi]$, то зная преобразование Фурье мы можем смотреть как устроены коэффициенты Фурье на таких отрезках. Причем, чем больше возьмем N, тем сильнее можно будет подменить коэффициенты визуально на график функции. В результате получаем, что преобразование Фурье содержит в себе все возможные коэффициенты Фурье для таких функций f.

Утв. 3. Если f абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$, то есть:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < \infty$$

то преобразование Фурье существует, является непрерывной функцией и верна оценка:

$$\left|\widehat{f}(y)\right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$$

Rm: 2. Благодаря оценке выше мы можем сказать, что преобразование Фурье в утверждении является ещё и заведомо ограниченной функцией.

□ Рассмотрим преобразование Фурье как несобственный интеграл с параметром и воспользуемся признаком Вейерштрасса:

$$\left|\widehat{f}(y)\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixy} dx\right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left|f(x) e^{-ixy}\right| dx \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx < \infty$$

Таким образом, мы получили оценку сверху на преобразование Фурье, интеграл сходится равномерно по $y \Rightarrow$ все определено, можем переходить к пределу под интегралом:

$$\lim_{y \to y_0} \widehat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) \lim_{y \to y_0} e^{-ixy} dx = \widehat{f}(y_0)$$

Значит интеграл получается непрерывной функцией по y. ■

Пространство Шварца быстроубывающих функций

Дальнейшие общие рассуждения про преобразование Фурье в правильной общности можно будет сделать только используя материал дальнейших курсов, сейчас же это просто невозможно.

С другой стороны, хотелось бы понять в каком естественном пространстве живет преобразование Фурье. Если выбрать правильно пространство, то с него можно будет потом перенести преобразование на очень общие функции. Таким пространством оказалось пространство Шварца (обозначаем через S).

Опр: 2. Пространством быстроубывающих функций Шварца назовем пространство функций:

$$S = \left\{ f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C},\, f \in C^{\infty}(\mathbb{C}),\, \forall m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\},\, \sup_{x \in \mathbb{R}} (1 + |x|^n) \cdot |f^{(m)}(x)| < \infty \right\}$$

где под $f \in C^{\infty}(\mathbb{C})$ мы понимаем бесконечную дифференцируемость функции f: то есть действительные и мнимые части - бесконечно дифференцируемые функции.

Из определения видно, что $f \in S$ и всякая её производная на бесконечности стремятся к нулю быстрее любой степени.

Примеры: $f \equiv 0 \in S$, гладкие финитные функции $\in S$, $e^{-x^{2k}} \in S$, $P(x)e^{-x^{2k}} \in S$.

Очевидно, что S - линейное пространство над $\mathbb{C}$. Более того, S - алгебра, поскольку:

$$f, g \in S \Rightarrow f \cdot g \in S$$

Функция бесконечно гладкая $\Rightarrow$ производная будет бесконечно гладкой, если любая производная стремилась быстрее степени $\Rightarrow$ у производной будет то же свойство:

$$f \in S \Rightarrow f^{(k)} \in S$$

Отсюда можно получить простое следствие:

$$f \in S,\ P - \text{многочлен} \Rightarrow P \cdot f \in S$$

то есть этот класс функций выдерживает умножение на многочлены. Нашей целью будет показать, что преобразование Фурье является линейным изоморфизмом пространства S. Часто распространение преобразования Фурье на другие пространства начинается именно с S.

Теорема 1. (**преобразование Фурье и дифференцирование**) $\forall f \in S$ будут верны следующие соотношения:

$$\mathcal{F}\left(f^{(k)}\right)(y) = (iy)^k \mathcal{F}(f)(y)$$

$$\mathcal{F}(f)^{(k)}(y) = \mathcal{F}\left((-ix)^k f(x)\right)(y)$$

□ Поскольку f из S, то все интегралы существуют. Тогда воспользуемся интегрированием по частям:

$$\mathcal{F}\left(f^{(k)}\right)(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f^{(k)}(x) e^{-ixy} dx = iy \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f^{(k-1)}(x) e^{-ixy} dx = \ldots = (iy)^k \mathcal{F}(f)(y)$$

$$\mathcal{F}\left((-ix)^k f(x)\right)(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (-ix)^k f(x) e^{-ixy} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \frac{d^k}{dy^k}(e^{-ixy}) dx =$$

$$= \frac{d^k}{dy^k} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixy} dx = \mathcal{F}(f)^{(k)}(y)$$

где мы применили теорему о дифференцировании интеграла с параметром. Для этого необходимо проверить сходимость интеграла:

$$f(x) \in S \Rightarrow \left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixy} dx \right| \le \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < \infty \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixy} dx < \infty$$

Также необходимо проверить второе, что после дифференцирования сходимость - равномерная. Продифференцируем:

$$\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixy} dx \right)' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (-ix) f(x) e^{-ixy} dx \Rightarrow \left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (-ix) f(x) e^{-ixy} dx \right| \le \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x| \cdot |f(x)| dx < \infty$$

Посколью $xf(x) \in S$ (оценка сверху), то мы получаем равномерную сходимость. ■

Rm: 3. Особенность этого утверждения заключается в том, что преобразование Фурье превращает дифференцирование в умножение на степень (с точностью до i^k) и наоборот умножение на степень превращает в дифференцирование. А поскольку обещано, что преобразование Фурье будет линейным изоморфизмом, то это замена базиса, в которой дифференцирование превращается в умножение.

Следствие 3. Преобразование Фурье отображает S в S

Rm: 4. В следующий раз мы отметим, что преобразование Фурье это линейное отображение, значит S это инвариантное подпространство для этого оператора.