Свойства несобственного интеграла с параметром

Аналогично собственным интегралам, для несобственных всё делится на 3 вида утверждений.

1) **Непрерывность и переход к пределу**;
2) **Дифференцируемость**;
3) **Интегрируемость**;

Но прежде чем переходить к разбору свойств надо понять общее правило работы с такими интегралами. Несобственный интеграл определяется как предел в некоторой особенности $\Rightarrow$ всё что можно сказать про него строится следующим образом: мы говорим, что нечто известно до предельного перехода, а дальше объясняем почему это нечто сохраняется после предельного перехода.

Опр: 1. Пусть $f\colon [a,b)\times Y' \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, где Y - метрическое пространство, y_0 - предельная точка, $Y' = Y \setminus \{y_0\}$, тогда выражение вида:

$$F(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx$$

будем называть несобственным интегралом, зависящим от параметра.

Непрерывность и переход к пределу

Теорема 1. (**О переходе к пределу под несобственным интегралом**) Пусть Y - метрическое пространство, y_0 - предельная точка, $Y' = Y \setminus \{y_0\}$. Пусть $f\colon [a,b)\times Y' \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, $\varphi\colon [a,b) \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Предположим, что $x \mapsto f(x,y)$, $x \mapsto \varphi(x)$ - интегрируемы по Риману на $[a,u]$, $\forall u \in [a,b)$.

(I) Предположим, что $\forall u \in [a,b)$ верно следующее: $\lim\limits_{y\to y_0} \int\limits_a^u f(x,y)dx = \int\limits_a^u \varphi(x)dx$;

(II) $\int\limits_a^b f(x,y)dx$ - сходится равномерно на Y';

Тогда $\int\limits_a^b \varphi(x)dx$ - сходится и верно: $\lim\limits_{y\to y_0} \int\limits_a^b f(x,y)dx = \int\limits_a^b \varphi(x)dx$.

$\square$ Введем функцию $\Phi(u,y) = \int\limits_a^u f(x,y)dx$. Дано следующее:

$$\forall u \in [a,b),\ \Phi(u,y) \xrightarrow[y\to y_0]{} \int\limits_a^u \varphi(x)dx$$

и верна равномерная сходимость:

$$\Phi(u,y) \underset{u\to b-}{\overset{Y'}{\rightrightarrows}} \int\limits_a^b f(x,y)dx$$

Применяем теорему о перестановке пределов, тогда: $\exists \lim\limits_{y\to y_0}\int\limits_a^b f(x,y)dx$, $\exists \lim\limits_{u\to b}\int\limits_a^u \varphi(x)dx$, и они равны:

$$\lim_{y\to y_0}\int\limits_a^b f(x,y)dx = \lim_{y\to y_0}\lim_{u\to b-}\int\limits_a^u f(x,y)dx = \lim_{u\to b}\lim_{y\to y_0}\int\limits_a^u f(x,y)dx = \lim_{u\to b}\int\limits_a^u \varphi(x)dx = \int\limits_a^b \varphi(x)dx$$

■

Следствие 1. Пусть Y - метрическое пространство, y_0 - предельная точка, $Y' = Y\setminus\{y_0\}$. Пусть имеются функции $f\colon [a,b)\times Y \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, $\varphi\colon [a,b)\to\mathbb{R}(\mathbb{C})$. Предположим, что $x\mapsto f(x,y)$, $x\mapsto\varphi(x)$ - интегрируемы по Риману на $[a,u]$, $\forall u\in[a,b)$.

(I) Предположим, что $\forall x\in[a,b)$, $\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y) = \varphi(x)$;

(II) Пусть $\exists\,\psi(x)$ на $[a,b)\colon |f(x,y)|\le\psi(x)$, $\forall x\in[a,b), \forall y\in Y'$ и $\int\limits_a^b \psi(x)dx$ - сходится (что в частности подразумевает, что $\psi(x)$ интегрируема на каждом $[a,u]$);

Тогда $\int\limits_a^b \varphi(x)dx$ - сходится, $\int\limits_a^b f(x,y)dx$ - сходится и верно: $\lim\limits_{y\to y_0}\int\limits_a^b f(x,y)dx = \int\limits_a^b \varphi(x)dx$.

Rm: 1. Данное следствие очень сильно напоминает теорему Лебега о мажорируемой сходимости.

□ Проверяем условия предыдущей теоремы: $\int\limits_a^b f(x,y)dx$ сходится равномерно по признаку Вейерштрасса из-за пункта (II) (см. лекцию 21). Теперь нужно объяснить почему верно следующее условие:

$$\forall u\in[a,b),\ \lim_{y\to y_0}\int\limits_a^u f(x,y)dx = \int\limits_a^u \varphi(x)dx$$

Функция $\varphi(x)$ - интегрируема, $f(x,y)$ при каждом y - интегрируема, есть поточечная сходимость $\Rightarrow$ проверим теорему Арцела, для этого нужна оценка на функцию $f(x,y)$. Поскольку $\psi(x)$ интегрируема на каждом $[a,u]$, $\forall u\in[a,b)$, тогда она не превосходит некоторой константы:

$$\forall x\in[a,u],\ \forall y\in Y',\ |f(x,y)|\le\psi(x)\le\sup_{[a,u]}\psi(x) = C$$

Следовательно, применима теорема Арцела. После чего применяем предыдущую теорему. ■

Теорема 2. (**непрерывность**) Пусть $f \in C([a,b) \times [c,d])$ и $\int\limits_a^b f(x,y)dx$ - сходится равномерно на $[c,d]$.

Тогда функция $F(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx$ непрерывна на $[c,d]$.

□ Нужно доказать, что $\lim\limits_{y \to y_0} \int\limits_a^b f(x,y)dx = \int\limits_a^b f(x,y_0)dx$ (по определению непрерывности). Проверяем условия 1 теоремы:

(I) $a \le u < b$, $\lim\limits_{y \to y_0} \int\limits_a^u f(x,y)dx = \int\limits_a^u f(x,y_0)dx$ - непрерывность собственного интеграла по параметру. Данное условие выполнено, так как $f \in C([a,b) \times [c,d])$;

(II) $\int\limits_a^b f(x,y)dx$ - сходится равномерно на Y' по условию;

Следовательно, требуемое выполняется по 1 теореме. ■

Надо иметь в виду, что убрать условия равномерной сходимости интеграла - нельзя. Для этого есть достаточно простой и показательный пример.

Пример: Рассмотрим интеграл: $F(y) = \int\limits_0^{+\infty} ye^{-xy}dx$, где $f(x,y) = ye^{-xy} \colon [0,+\infty) \times [0,1]$. Эта "отличная" функция: на заданном множестве она ограничена и непрерывна. Равномерной сходимости у этой функции нет. Как обычно, если под интегралом нет ничего осцилирующего, то мы будем проверять хвост интеграла:

$$\int\limits_c^{+\infty} ye^{-xy}dx = \int\limits_c^{+\infty} e^{-xy}d(yx) = \int\limits_{cy}^{+\infty} e^{-u}du \Rightarrow y = \frac{1}{c} \Rightarrow \int\limits_1^{+\infty} e^{-u}du = \frac{1}{e} \nrightarrow 0$$

Рассмотрим $F(y)$:

$$F(y) = \int\limits_0^{+\infty} ye^{-xy}dx = \begin{cases} 0, & y = 0 \\ 1, & y > 0 \end{cases}$$

Следовательно, мы получили разрывную функцию. Заметим также, что предыдущее следствие здесь нельзя применить в силу следующего:

$$\forall y \in [0,1],\, \forall x \in [0,+\infty),\, e^{xy} \ge 1 \Rightarrow e^{-xy} \le 1 \Rightarrow \nexists\, g(x) \colon |f(x,y)| \le g(x) \wedge \int\limits_0^{+\infty} g(x)dx < \infty$$

Если же взять $f(x,y) = ye^{-xy^2}$, то мы вообще получим неограниченную функцию:

$$\int\limits_0^{+\infty} ye^{-xy^2}dx = \begin{cases} 0, & y = 0 \\ \dfrac{1}{y}, & y > 0 \end{cases}$$

Таким образом, только лишь непрерывность $f(x,y)$ и сходимость интеграла при каждом y ничего не говорит про непрерывность получившегося несобственного интеграла, более того, ничего не говорит даже об ограниченности.

Упр. 1. Существует ли $f \in C([0,+\infty)\times[0,1])\colon F(y) = \int\limits_0^{+\infty} f(x,y)dx$ - ограниченная, но не интегрируемая на отрезке $[0,1]$ по Риману. Сразу заметим, что $F(y)$ не может быть всюду разрывной $\Rightarrow$ задача состоит в том, чтобы понять: возможно ли, чтобы точек разрыва было не меры ноль.

□ См., например, контрпримеры в анализе Гелбаум. ■

Дифференцируемость несобственного интеграла с параметром

Теорема 3. Пусть $f \in C([a,b)\times[c,d])$, при каждом x существует $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \in C([a,b)\times[c,d])$.

(I) $\exists\, y_0 \in [c,d]\colon \int\limits_a^b f(x,y_0)dx$ - сходится, то есть: $\exists \lim\limits_{u\to b}\int\limits_a^u f(x,y_0)dx$;

(II) $\int\limits_a^b \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$ - сходится равномерно, то есть: $\int\limits_a^u \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx \underset{u\to b}{\overset{[c,d]}{\rightrightarrows}} \int\limits_a^b \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$;

Тогда $\int\limits_a^b f(x,y)dx$ - сходится равномерно на $[c,d]$, непрерывно дифференцируема по y и верно следующее:

$$\frac{d}{dy}\left(\int\limits_a^b f(x,y)dx\right) = \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$$

□ Проверям условия теоремы о дифференцируемости предела семейства функций. Пусть верно:

$$a \le u < b,\ \Phi(u,y) = \int\limits_a^u f(x,y)dx \Rightarrow \exists\, y_0\colon \Phi(u,y_0) \underset{u\to b}{\longrightarrow} \int\limits_a^b f(x,y_0)dx < \infty$$

где последнее верно по (I). По теореме о дифференцируемости собственного интеграла с параметром, мы получаем следующее:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y}(u,y) = \int\limits_a^u \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx \Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial y}(u,y) \underset{u\to b}{\overset{[c,d]}{\rightrightarrows}} \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$$

где последнее верно по условию (II). Таким образом, условия теоремы о дифференцировании предела семейства функций выполнены и мы получим:

$$\Phi(u,y) \underset{u\to b}{\overset{[c.d]}{\rightrightarrows}} \int\limits_a^b f(x,y)dx$$

Функция $y \mapsto \int\limits_a^b f(x,y)dx$ - дифференцируема и по использованной теореме её производная равна:

$$\frac{d}{dy}\left(\int\limits_a^b f(x,y)dx\right) = \lim_{u\to b}\int\limits_a^u \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx = \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$$

Непрерывность производной следует из теоремы 2 о непрерывности. ■

Rm: 2. Поскольку теория получается достаточно загроможденной ссылками на более ранние теоремы, попробуем разобраться с несобственным интегралом, не сводя это к науке про семейства функций.

Теорема 4. Пусть $f(x,y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ - непрерывные на $[a,b)\times[c,d]$ функции. Пусть также выполнены условия:

(I) $F(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx$ - сходится $\forall y \in [c,d]$;

(II) $\exists\, \psi(x)$: $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \le \psi(x)$ и $\int\limits_a^b \psi(x)dx$ - сходится;

Тогда функция $F(y)$ - дифференцируема и $F'(y) = \int\limits_a^b \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$.

□ Используя определение производной, рассмотрим следующее отношение:

$$\frac{F(y)-F(y_0)}{y-y_0} = \int\limits_a^b \frac{f(x,y)-f(x,y_0)}{y-y_0}dx$$

Таким образом, задача свелась к перестановке пределов. По следствию из теоремы о пределе под несобственным интегралом, необходимо проверить:

(I) $\forall x \in [a,b)$, $\exists \lim\limits_{y\to y_0} \dfrac{f(x,y)-f(x,y_0)}{y-y_0} = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)$ - производная есть по условию и на каждом отрезке эта функция интегрируема, то есть у нас есть поточечный предел;

(II) В силу теоремы Лагранжа мы получим: $\left|\dfrac{f(x,y)-f(x,y_0)}{y-y_0}\right| \le \psi(x)$, где $\int\limits_a^b \psi(x)dx < \infty$;

Таким образом, по следствию 1 мы получаем:

$$\lim_{y\to y_0}\frac{F(y)-F(y_0)}{y-y_0} = \lim_{y\to y_0}\int\limits_a^b \frac{f(x,y)-f(x,y_0)}{y-y_0}dx = \int\limits_a^b \lim_{y\to y_0}\left(\frac{f(x,y)-f(x,y_0)}{y-y_0}\right)dx = \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$$

■

Пример: Интеграл Дирихле

Вычислим **интеграл Дирихле**, используя инструментарий несобственных интегралов. Мы уже делали это упражнение. Хотим найти следующий интеграл:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

Рассмотрим следующий интеграл с параметром:

$$F(y) = \int_0^{+\infty} f(x, y)dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-xy} dx,\ y \geq 0$$

Сходится ли он равномерно (в нуле доопределена как 1)? Особенность только в $+\infty$, интеграл Дирихле сходится равномерно (параметра нет), e^{-xy} - равномерно ограниченная, монотонная функция, тогда по признаку Абеля интеграл $F(y)$ будет сходиться равномерно по y. Теперь хотим понять, что это за функция $F(y)$:

(1) Так как $f(x, y)$ непрерывна по y и интеграл сходится равномерно, то $F(y)$ - непрерывная функция. Заметим, что здесь оценить сверху $|f(x, y)| \leq \psi(x)$ не получится, поскольку:

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right| e^{-xy} \leq \psi(x) \Rightarrow y = 0,\ \left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq \psi(x) \Rightarrow \int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \not< \infty \Rightarrow \int_0^{+\infty} \psi(x)dx \not< \infty$$

то есть получилось бы противоречие со сходимостью интеграла от $\psi(x)$;

(2) Пусть $y > 0$, тогда нас будет интересовать дифференцируемость $F(y)$. Когда мы рассматриваем дифференцируемость в точке y_0, нам она не нужна на всём промежутке для y. Если продифференцировать под интегралом по y, то мы получим:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\sin x}{x} e^{-xy}\right) dx = -\int_0^{+\infty} \sin x e^{-xy} dx$$

Если допустить чтобы y подходила к 0, то интеграл выше не будет сходиться равномерно (по методу граничной точки: при $y = 0$ интеграл от синуса на $+\infty$ не сходится $\Rightarrow$ интеграл не сходится равномерно на $[0, +\infty)$). Рассмотрим равномерную сходимость на отрезке $[c, d]$: $y_0 \in [c, d]$, тогда интеграл выше будет сходиться равномерно, поскольку:

$$|\sin x| e^{-xy} \leq e^{-cx} = \psi(x),\ \int_0^{+\infty} \psi(x)dx = \frac{1}{c} < \infty$$

Следовательно, по признаку Вейерштрасса интеграл от $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ сходится равномерно на $[c, d]$;

Таким образом, мы можем применить теорему 3 и у нас получится:

$$y > 0,\ F'(y) = -\int_0^{+\infty} \sin x e^{-xy} dx$$

Этот интеграл мы можем посчитать решив следующее дифференциальное уравнение с квазимногочленом в правой части:

$$u' = e^{-xy}\sin x$$

Для таких ДУ известна общая форма, которую надо подбирать для решения:

$$u = C_1e^{-xy}\sin x + C_2e^{-xy}\cos x \Rightarrow u' = -ye^{-xy}\left(C_1\sin x + C_2\cos x\right) + e^{-xy}\left(C_1\cos x - C_2\sin x\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -yC_1 - C_2 = 1,\ -yC_2 + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = yC_2 \Rightarrow C_2 = -\frac{1}{1+y^2},\ C_1 = -\frac{y}{1+y^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F'(y) = -e^{-xy}\cdot\left(-\frac{y}{1+y^2}\sin x - \frac{1}{1+y^2}\cos x\right)\Bigg|_{x=0}^{+\infty} = 0 + 1\cdot\left(0 - \frac{1}{1+y^2}\right) = -\frac{1}{1+y^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(y) = \int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-xy}dx = -\operatorname{arctg} y + C,\ y > 0$$

Чтобы вычислить константу, устремим y в бесконечность. Можем ли мы перейти к пределу под интегралом? Поскольку на $+\infty$ интеграл сходится равномерно (при $y > 0$) как мы установили выше, то вопрос перехода к пределу это вопрос возможности перейти к пределу в интеграле:

$$\forall u \in [0, +\infty),\ \int\limits_0^u\frac{\sin x}{x}e^{-xy}dx$$

Подинтегральная функция - ограниченна, поточечно подинтегральная функция сходится так:

$$\frac{\sin x}{x}e^{-xy} \xrightarrow[y\to+\infty]{} \begin{cases} 0, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases} = g(x)$$

Предельная функция $g(x)$ интегрируема, тогда по теореме Арцела можно переходить к пределу (см. лекция 20, теорема 5):

$$\forall u \in [0, +\infty),\ \int\limits_0^u f(x,y)dx = \int\limits_0^u\frac{\sin x}{x}e^{-xy}dx \xrightarrow[y\to+\infty]{} \int\limits_0^u g(x)dx = 0$$

Пользуясь равномерной сходимостью $F(y)$ можем перейти к пределу при $u \to \infty$ по теореме 1:

$$F(y) = \int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-xy}dx \to 0 \Rightarrow 0 = -\operatorname{arctg}\frac{\pi}{2} + C \Rightarrow C = \frac{\pi}{2}$$

Поскольку функция $F(y)$ - непрерывная, то мы получаем интеграл Дирихле:

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2}$$

Заметим также, что теорема Арцела здесь заметно упрощает разбор, поскольку $f(x,y)$ не сходится равномерно к 0 или к функции $g(x)$, когда $x \to 0$, так как она должна была бы остаться непрерывной, в силу непрерывности $f(x,y)$.

Интегрируемость несобственных интегралов с параметром

Теорема 5. Пусть $f \in C([a,b) \times [c,d])$ и $\int\limits_a^b f(x,y)dx$ сходится равномерно на $[c,d]$. Тогда функция $F(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx$ интегрируема на $[c,d]$, функция $G(x) = \int\limits_c^d f(x,y)dy$ интегрируема в несобственном смысле на $[a,b)$ и верно следующее равенство:

$$\int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)dx \right) dy$$

□ Поскольку $f(x,y)$ - непрерывна и $\int\limits_a^b f(x,y)dx$ - сходится равномерно на $[c,d]$, то по теореме 2 мы сразу получаем непрерывность $F(y)$ на $[c,d] \Rightarrow F(y)$ будет интегрируема на $[c,d]$ по y. Пусть $a \leq u < b$, тогда для собственных интегралов с параметром (см. лекцию 22, теорему 3) будет верно:

$$\int\limits_a^u \left(\int\limits_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^u f(x,y)dx \right) dy$$

Теперь нужно доказать, что мы можем перейти к пределу при $u \to b$ в этом равенстве, то есть, что мы можем перейти к пределу под интегралом:

$$\int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)dy \right) dx = \lim_{u \to b-} \int\limits_a^u \left(\int\limits_c^d f(x,y)dy \right) dx = \lim_{u \to b-} \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^u f(x,y)dx \right) dy = \lim_{u \to b-} \int\limits_c^d \Phi(u,y)dy$$

Таким образом, нам нужно доказать следующее:

$$\lim_{u \to b-} \int\limits_c^d \Phi(u,y)dy = \int\limits_c^d \lim_{u \to b-} \Phi(u,y)dy = \int\limits_c^d F(y)dy$$

По условию: $\Phi(u,y) = \int\limits_a^u f(x,y)dx \underset{u \to b-}{\overset{[c,d]}{\rightrightarrows}} \int\limits_a^b f(x,y)dx$, одновременно с этим функция $\Phi(u,y)$ - непрерывна по y на $[c,d] \Rightarrow$ интегрируема на $[c,d]$ (лекция 22, теорема 1), тогда по теореме о перестановке предела и интеграла для семейств функций с параметром (см. лекцию 20, теорему 4) мы сразу получаем требуемое. В результате:

$$\exists \int\limits_c^d \lim_{u \to b-} \Phi(u,y)dy = \int\limits_c^d \left(\lim_{u \to b-} \int\limits_a^u f(x,y)dx \right) dy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)dx \right) dy = \lim_{u \to b-} \int\limits_a^u \left(\int\limits_c^d f(x,y)dy \right) dx$$

Следовательно, мы одновременно получаем выполнение искомого равенства и интегрируемость $G(x)$ в несобственном смысле на $[a,b)$. ■

Rm: 3. Заметим, что мы сделали принципиально два шага: (1) отступили от особенностей, переставили интегралы и (2) перешли к пределу. В данном случае, мы воспользовались равномерной сходимостью. Аналогично, можем получить такой же результат, используя теорему Арцела.

Теорема 6. Пусть $f \in C([a,b) \times [c,d])$ и выполнены следующие условия:

(1) $\forall y,\ \exists \int\limits_a^b f(x,y)dx$ (существует поточечный предел);

(2) функция: $F(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx$ - интегрируема на $[c,d]$ (предел функции интегрируем);

(3) функция: $y \mapsto \int\limits_a^b |f(x,y)|dx$ - интегрируема на $[c,d]$ (аналог ограниченности);

Тогда функция $G(x) = \int\limits_c^d f(x,y)dy$ интегрируема в несобственном смысле на $[a,b)$ и верно равенство:

$$\int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)dx \right) dy$$

$\square$ Пусть $a \le u < b$, тогда будет верно (см. лекцию 22, теорему 3):

$$\int\limits_a^u \left(\int\limits_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^u f(x,y)dx \right) dy = \int\limits_c^d \Phi(u,y)dy$$

Проверяем условия теоремы Арцела (см. лекцию 20, теорему 5):

$$\forall y \in [c,d],\ \lim_{u \to b-} \Phi(u,y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx = F(y)$$

По условию $F(y)$ - интегрируема на $[c,d]$, функции $\Phi(u,y)$ - интегрируемы на $[c,d]$ из-за непрерывности функции $f(x,y)$. Таким образом, выполнены пункты (1)-(3) теоремы Арцела. Найдем оценку $|\Phi(u,y)|$. Если функция интегрируема по Риману, то она ограничена $\Rightarrow$ по условию:

$$\exists C > 0\colon\ |\Phi(u,y)| = \left| \int\limits_a^u f(x,y)dx \right| \le \int\limits_a^u |f(x,y)|dx \le \int\limits_a^b |f(x,y)|dx \le C$$

Следовательно, все пункты теоремы Арцела выполнены и мы получаем:

$$\lim_{u \to b-} \int\limits_c^d \Phi(u,y)dy = \int\limits_c^d \lim_{u \to b-} \Phi(u,y)dy = \int\limits_c^d F(y)dy$$

Далее рассуждения аналогичны предыдущей теореме и мы получаем требуемое. $\blacksquare$

Rm: 4. Также заметим, что если $f(x,y) \leq 0$, то можно отказаться от условия на $|f(x,y)|$.

Часто возникает потребность в перестановке двух несобственных интегралов, поэтому рассмотрим следующую теорему.

Теорема 7. Пусть $f \in C([a,b) \times [c,d))$ и выполнены следующие условия:

(1) $x \mapsto \int\limits_c^d f(x,y)dy$, $x \mapsto \int\limits_c^d |f(x,y)|dy$ - интегрируемы на $[a,u]$, $\forall u \in [a,b)$;

(2) $y \mapsto \int\limits_a^b f(x,y)dx$, $y \mapsto \int\limits_a^b |f(x,y)|dx$ - интегрируемы на $[c,v]$, $\forall v \in [c,d)$;

(3) $\int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b |f(x,y)|dx \right) dy$ - сходится;

где условия (1) и (2) подразумевают существование интегралов $\forall x \in [a,b)$ в (1) и $\forall y \in [c,d)$ в (2). Тогда можно переставлять интегралы местами:

$$\int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)dx \right) dy$$

Rm: 5. В результате теоремы, в частности, включено существование несобственных интегралов у функции: $G(x) = \int\limits_c^d f(x,y)dy$ на $[a,b)$ и функции: $F(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx$ на $[c,d)$, аналогично тому, как это было в предыдущих теоремах.

Rm: 6. Также заметим, что последнее условие в теореме не симметричное, поэтому и доказательство будет не симметричным. Но в условии порядок интегрирования всегда можно заменить на другой.

□ Пусть $a < u < b$, тогда отступим от особенности и применим теореме 6, тогда:

$$\int\limits_c^d \left(\int\limits_a^u f(x,y)dx \right) dy = \int\limits_a^u \left(\int\limits_c^d f(x,y)dy \right) dx$$

Обозначим: $\Phi(u,y) = \int\limits_a^u f(x,y)dx$, снова хотим понять, можно ли перейти в ней к пределу по y. Мы знаем из условия (2), что:

$$\forall y \in [c,d), \lim_{u \to b-} \Phi(u,y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx$$

Эта функция интегрируема на $[c,v]$, $\forall v \in [c,d)$ по условию. Также, можем утверждать, что:

$$|\Phi(u,y)| = \left| \int\limits_a^u f(x,y)dx \right| \leq \int\limits_a^u |f(x,y)|dx \leq \int\limits_a^b |f(x,y)|dx = \psi(y)$$

По условию пункта (3) функция $\psi(y)$ - интегрируема на промежутке $[c,d)$, тогда: $\int\limits_c^d \psi(y)dy$ - сходится.

Таким образом, по следствию 1 мы получаем:

$$\exists \lim_{u\to b-} \int\limits_c^d \Phi(u,y)dy = \int\limits_c^d \left(\lim_{u\to b-} \Phi(u,y)\right) dy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)dx\right) dy$$

Далее рассуждения аналогичны теореме 5. ■

Рассмотрим теорему с перестановкой двух несобственных интегралов при наличии равномерной сходимости (аналогично теореме 5).

Теорема 8. Пусть $f \in C([a,b)\times[c,d))$ и выполнены следующие условия:

(1) $\int\limits_a^b f(x,y)dx$ - сходится равномерно на $[c,v]$, $\forall v \in [c,d)$;

(2) $\int\limits_c^d f(x,y)dy$ - сходится равномерно на $[a,u]$, $\forall u \in [a,b)$;

(3) $\int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b |f(x,y)|dx\right) dy$ - сходится;

где условия (1) и (2) подразумевают существование интегралов $\forall y \in [c,d)$ в (1) и $\forall x \in [a,b)$ в (2). Тогда можно переставлять интегралы местами:

$$\int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)dy\right) dx = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)dx\right) dy$$

□ Пусть $a < u < b$, тогда отступим от особенности и применим теорему 5, тогда:

$$\int\limits_c^d \left(\int\limits_a^u f(x,y)dx\right) dy = \int\limits_a^u \left(\int\limits_c^d f(x,y)dy\right) dx$$

Обозначим функцию: $\Phi(u,y) = \int\limits_a^u f(x,y)dx$, нам снова нужно показать переход предела по y под интеграл. По условию пункта (1) мы знаем, что:

$$\forall y \in [c,d),\ \lim_{u\to b-} \Phi(u,y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx$$

Более того, это может следовать напрямую из равномерной сходимости:

$$\forall y \in [c,d),\ \exists\, v \in [c,d)\colon y \in [c,v],\ \Phi(u,y) \underset{u\to b-}{\overset{[c,v]}{\rightrightarrows}} \int\limits_a^b f(x,y)dx \Rightarrow \Phi(u,y) \xrightarrow[u\to b-]{} \int\limits_a^b f(x,y)dx$$

Поскольку $f(x,y) \in C([a,b) \times [c,d))$, то $\forall u \in [a,b)$, $\Phi(u,y)$ будет непрерывна на $[c,v]$, $\forall v \in [c,d)$, как собственный интеграл с параметром $\Rightarrow$ будет интегрируема по Риману на $[c,v]$, $\forall v \in [c,d)$. В силу равномерной сходимости интеграла $\int\limits_a^b f(x,y)dx$ на $[c,v]$, $\forall v \in [c,d)$, мы получим, что $\int\limits_a^b f(x,y)dx$ интегрируема на $[c,v]$, $\forall v \in [c,d)$ по теореме 2. Аналогично предыдущей теореме:

$$|\Phi(u,y)| = \left|\int\limits_a^u f(x,y)dx\right| \leq \int\limits_a^u |f(x,y)|dx \leq \int\limits_a^b |f(x,y)|dx = \psi(y)$$

По условию пункта (3) функция $\psi(y)$ - интегрируема на промежутке $[c,d)$, тогда: $\int\limits_c^d \psi(y)dy$ - сходится.

Следовательно, по следствию 1 мы получаем:

$$\exists \lim_{u\to b-} \int\limits_c^d \Phi(u,y)dy = \int\limits_c^d \left(\lim_{u\to b-} \Phi(u,y)\right) dy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)dx\right) dy$$

Далее рассуждения аналогичны теореме 5. ■

Рассмотрим пример, который показывает, что просто так переставлять пределы нельзя.

Пример: Пусть $f(x,y)$ определена на множестве $[1,+\infty) \times [1,+\infty)$ так, что:

$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \Rightarrow f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right),\ f(x,y) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

Посчитаем следующие интегралы, используя формулу Ньютона-Лейбница:

$$\int\limits_1^{+\infty} f(x,y)dy = \frac{y}{x^2+y^2}\bigg|_{y=1}^{+\infty} = -\frac{1}{1+y^2} \Rightarrow \int\limits_1^{+\infty}\left(\int\limits_1^{+\infty} f(x,y)dy\right)dx = -\operatorname{arctg} x\Big|_1^{+\infty} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4}$$

Если мы будем считать в обратном порядке, то получим:

$$\int\limits_1^{+\infty} f(x,y)dx = -\frac{x}{x^2+y^2}\bigg|_{x=1}^{+\infty} = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow \int\limits_1^{+\infty}\left(\int\limits_1^{+\infty} f(x,y)dx\right)dy = \operatorname{arctg} y\Big|_1^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

Упр. 2. Почему не работает теорема? (см. например антидемидович 3, пример 50)

Преобразования Лапласа

Вспомним снова об интеграле Дирихле: $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ и об интеграле Лапласа: $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos{(ax)}}{1+x^2} dx$. В прошлый раз, когда мы их вычисляли, используя преобразование Лапласа, не всё было обоснованно. Попробуем вычислить эти интегралы максимально строго.

Интеграл Дирихле

Утв. 1.

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

□ Пусть $\lambda > 0$ и возьмем преобразование Лапласа для подинтегральной функции интеграла Дирихле:

$$\mathcal{L}\left(\frac{\sin x}{x}\right)(\lambda) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\lambda x} dx = \int\limits_0^{+\infty} f(x, \lambda) dx$$

Далее мы брали производную по λ:

$$\mathcal{L}\left(\frac{\sin x}{x}\right)'(\lambda) = -\int\limits_0^{+\infty} \sin x e^{-\lambda x} dx$$

Мы можем так сделать, поскольку $\mathcal{L}(\lambda)$ - это несобственный интеграл, внутри функция $f(x, \lambda)$. Пусть мы возьмем $\lambda \in [\alpha, \beta] \subset (0, +\infty)$ - это стандартный прием, который позволяет избежать проблем с равномерной сходимостью при приближении к особым точкам поскольку дифференцируемость, непрерывность это всё вопросы локальные $\Rightarrow$ достаточно научиться доказывать и обосновывать дифференцируемость на любом локальном отрезке:

(0) Доопределив в точке 0 подинтегральную функцию, получим гладкую функцию по x и по λ;

(1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\lambda x} dx$ - сходится $\forall \lambda \in [\alpha, \beta]$, поскольку оценивается интегралом от $e^{-\lambda x}$;

(2) $\int\limits_0^{+\infty} \sin x e^{-\lambda x} dx$ - сходится равномерно $[\alpha, \beta]$ по признаку Вейерштрасса:

$$|\sin x e^{-\lambda x}| \le e^{-\alpha x}, \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} < \infty$$

В результате, мы применяем теорему 3 и получаем требуемое. Используя интеграл Лапласа, будет:

$$\mathcal{L}\left(\frac{\sin x}{x}\right)'(\lambda) = -\int\limits_0^{+\infty} \sin x e^{-\lambda x} dx = -\frac{1}{1+\lambda^2} \Rightarrow \mathcal{L}\left(\frac{\sin x}{x}\right)(\lambda) = C - \operatorname{arctg} \lambda$$

Чтобы найти константу C мы устремляли $\lambda \to +\infty$:

$$\lim_{\lambda\to 0}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-\lambda x}dx = C - \frac{\pi}{2}$$

Теперь мы хотим поменять местами предел и интеграл:

(1) Проверим поточечную сходимость: $\frac{\sin x}{x}e^{-\lambda x} \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$, таким образом, поточечный предел есть и получающаяся функция - интегрируема;

(2) Будем считать, что $\lambda \geq 1$, тогда: $\left|\frac{\sin x}{x}e^{-\lambda x}\right| \leq e^{-x}$, $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1$;

Следовательно, мы можем применить следствие 1 и поменять предел и интеграл местами:

$$\lim_{\lambda\to 0}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-\lambda x}dx = \int\limits_0^{+\infty}\lim_{\lambda\to\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-\lambda x}dx = \int\limits_0^{+\infty}0dx = 0 = C - \frac{\pi}{2} \Rightarrow C = \frac{\pi}{2}$$

Теперь мы хотим понять, почему будет верно следующее равенство:

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \lim_{\lambda\to 0}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-\lambda x}dx$$

(1) Проверим поточечную сходимость: $\forall x \geq 0$, $\frac{\sin x}{x}e^{-\lambda x} \xrightarrow[\lambda\to 0]{} \frac{\sin x}{x}$.

Следовательно, будет верно: $\forall u < +\infty$, $\int\limits_0^{u}\frac{\sin x}{x}e^{-\lambda x}dx \xrightarrow[\lambda\to 0]{} \int\limits_0^{u}\frac{\sin x}{x}dx$ (по непрерывности собственного интеграла с параметром, можно по теореме Арцела);

(2) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-\lambda x}dx$ - сходится равномерно на $\lambda > 0$ по признаку Абеля, поскольку $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ - сходится равномерно, поскольку не зависит от λ и $e^{-\lambda x}$ - равномерно ограниченна и $\forall\lambda$ она монотонна;

Следовательно, мы можем воспользоваться теоремой 1 и получить требуемое:

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \int\limits_0^{+\infty}\lim_{\lambda\to\infty}\left(\frac{\sin x}{x}e^{-\lambda x}\right)dx = \lim_{\lambda\to 0}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-\lambda x}dx = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

$\blacksquare$

Интеграл Лапласа

Утв. 2.

$$\forall a \geq 0, \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2}e^{-a}$$

□ Аналогично тому, как мы это делали в лекции 8. Возьмем преобразование Лапласа, чтобы посмотреть, может оно будет соответствовать каким-то знакомым функциям:

$$\mathcal{L}(f)(\lambda) = \int\limits_0^{+\infty} \left(\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{1+x^2}dx \right) e^{-\lambda a}da,\ \lambda > 0$$

Ранее мы делали перестановку интегралов нестрого. Пусть мы рассматриваем функцию:

$$f(x,a)\colon [0,+\infty) \times [0,+\infty) \to \mathbb{R},\ f(x,a) = \frac{\cos ax}{1+x^2}e^{-\lambda a}$$

Все участвующие в $f(x,a)$ функции - непрерывные $\Rightarrow f(x,a) \in C([0,+\infty) \times [0,+\infty))$. Проверим условия теоремы 7 о перестановке двух несобственных интегралов:

(1) $x \mapsto \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2}e^{-\lambda a}da = \frac{1}{1+x^2}\int\limits_0^{+\infty} \cos(ax) \cdot e^{-\lambda a}da = \frac{\lambda}{(1+x^2)(\lambda^2+x^2)}$ - непрерывная функция, следовательно она интегрируема на любом конечном отрезке.

$x \mapsto \int\limits_0^{+\infty} \frac{|\cos ax|}{1+x^2}e^{-\lambda a}da = \frac{1}{1+x^2}\int\limits_0^{+\infty} |\cos(ax)| \cdot e^{-\lambda a}da$ - подинтегральная функция непрерывна по x и оценивается экспонентой $\Rightarrow$ интеграл сходится равномерно $\Rightarrow$ вся функция непрерывна по параметру, следовательно она интегрируема на любом конечном отрезке;

(2) $a \mapsto \int\limits_0^{+\infty} \frac{|\cos ax|}{1+x^2}e^{-\lambda a}dx = e^{-\lambda a}\int\limits_0^{+\infty} \frac{|\cos ax|}{1+x^2}dx$ - непрерывна по a, поскольку подинтегральная функция непрерывна по a и оценивается интегралом от $\frac{1}{1+x^2} \Rightarrow$ получаем равномерную сходимость $\Rightarrow$ получаем непрерывность по параметру a, следовательно она интегрируема на любом конечном отрезке. Для случая без модуля - аналогично;

(3) Рассмотрим следующий интеграл:

$$\int\limits_0^{+\infty} \left(\int\limits_0^{+\infty} \frac{|\cos ax|}{1+x^2}e^{-\lambda a}da \right) dx \Rightarrow \int\limits_0^{+\infty} \frac{|\cos ax|}{1+x^2}e^{-\lambda a}da \leq \frac{1}{1+x^2}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda a}da = \frac{1}{\lambda(1+x^2)}$$

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{\lambda(1+x^2)}dx = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{\pi}{2\lambda} < \infty \Rightarrow \int\limits_0^{+\infty} \left(\int\limits_0^{+\infty} \frac{|\cos ax|}{1+x^2}e^{-\lambda a}da \right) dx < \infty$$

Таким образом, все условия теоремы 7 выполнены и мы можем переставить местами интегралы:

$$\int\limits_0^{+\infty} \left(\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{1+x^2}dx \right) e^{-\lambda a}da = \int\limits_0^{+\infty} \left(\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos(ax)e^{-\lambda a}}{1+x^2}da \right) dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\mathcal{L}(\cos(ax))dx =$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{\lambda}{\lambda^2+x^2} dx = \frac{\lambda}{\lambda^2-1} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{\lambda^2+x^2} \right) dx = \frac{\lambda}{\lambda^2-1} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\lambda} \right) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\lambda+1}$$

Смотря на таблицы с примерами преобразований Лапласа, получаем:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-a}, \forall a \geq 0$$

$\blacksquare$

Упр. 3. Доказать, что $\Gamma(x)$ и $\mathcal{B}(x,y)$ - бесконечно гладки при $x > 0$, $y > 0$ (что они дифференцируемы сколь угодно раз и все их производные - гладкие).