# Функциональные ряды

**Опр: 1.** Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится поточечно на $X \Leftrightarrow \forall x \in X,\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ - сходится.

**Опр: 2.** Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на $X \Leftrightarrow$ последовательность $S_N(x) = \sum\limits_{n=1}^{N} f_n(x)$ частичных сумм этого ряда сходится равномерно на $X$.

**Утв. 1.** (**необходимое условие равномерной сходимости ряда**) Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на $X$, то его слагаемые равномерно стремятся к нулю: $f_n \overset{X}{\rightrightarrows} 0$.

**Теорема 1.** (**критерий Коши равномерной сходимости ряда**) Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на $X$ тогда и только тогда, когда:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, N \colon \forall n, m > N,\ \sup_X \left| \sum_{k=m}^{n} f_k(x) \right| < \varepsilon$$

**Теорема 2.** (**признак Вейерштрасса**) Пусть $f_n \colon X \to \mathbb{R}$ и $\exists\, a_n \geq 0 \colon \forall x \in X,\ |f_n(x)| \leq a_n$, тогда из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ следует равномерная сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

**Теорема 3.** (**обобщение признака Вейерштрасса**) Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ - два функциональных ряда, где последний сходится равномерно на $X$. Пусть также справедливо следующее:

$$\forall x \in X,\ |f_n(x)| \leq g_n(x)$$

тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ будет сходится равномерно.

□ Проверим критерий Коши:

$$\forall x \in X,\ \left| \sum_{k=m}^{n} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=m}^{n} g_k(x) \Rightarrow \sup_X \left| \sum_{k=m}^{n} f_k(x) \right| \leq \sup_X \left( \sum_{k=m}^{n} g_k(x) \right)$$

Поскольку для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_k(x)$ критерий Коши выполняется и оценка сверху не зависит от $x$, то критерий Коши для рассматриваемого функционального ряда сразу выполняется. ■

## Признак Дини

**Теорема 4.** (**признак Дини**) Пусть $K$ - компакт в метрическом пространстве, $f_n, f \in C(K)$, числовая последовательность $|f_n(x) - f(x)|$ - невозрастает по $n$ и стремится к нулю $\forall x \in K$. Тогда $f_n \overset{K}{\rightrightarrows} f$.

**Rm: 1.** Таким образом, если мы взяли последовательность непрерывных функций, знаем, что они поточечно сходятся к непрерывной функции, то из этого не следует равномерная сходимость. Что нужно добавить для равномерной сходимости? Надо добавить монотонность (и компактность). Более того, достаточно добавить монотонность либо по $n$, либо по $x \Rightarrow$ любая монотонность, компактность и непрерывность будут вести к равномерной сходимости.

**Rm: 2.** Данный признак неудобен тем, что необходимо точно знать что $f$ - непрерывная функция, поэтому на практике его применяют не так часто. Но иногда применяется и этот признак.

**Типичный пример**: Пусть есть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n(x) = S(x)$, знаем, что $g_n(x), S(x) \in C(K)$, $g_n \geq 0$. Ряд из $g_n$ сходится, тогда:

$$\sum_{n=1}^{N} g_n(x) \overset{K}{\rightrightarrows} S(x)$$

Также с помощью этого признака можно доказывать отсутствие непрерывности у предельной функции, если знаем, что нет равномерной сходимости, но при этом мы рассматриваем функции на компакте. Как показать, что $S$ не может быть непрерывной - от противного, пусть $S$ - непрерывная, тогда по признаку Дини ряд сойдется равномерно, но это не так $\Rightarrow$ функция не является непрерывной функцией.

**Rm: 3.** Отметим, что наличие равномерной сходимости это достаточное условие, но не необходимое.

$\square$ Введем функции $h_n(x)$:

$$h_n(x) = |f_n(x) - f(x)| \geq 0,\ \forall x \in K,\ h_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,\ h_n(x) \geq h_{n+1}(x)$$

надо доказать, что $h_n(x) \rightrightarrows 0$. Пусть $x \in K$, возьмем $\varepsilon > 0$, поскольку $h_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, то:

$$\exists\, N_x \colon h_{N_x}(x) < \varepsilon$$

Так как, $h_{N_x}$ - непрерывна в точке $x$, то найдется окрестность $\mathcal{U}(x)$, такая что $\forall y \in \mathcal{U}(x)$, $h_{N_x}(y) < 2\varepsilon$:

$$\forall x \in K,\ h_{N_x}(x) \in C(K) \Rightarrow \exists \mathcal{U}(x) \subset K \colon \forall y \in \mathcal{U}(x),\ |h_{N_x}(x) - h_{N_x}(y)| < \varepsilon \Rightarrow h_{N_x}(y) < 2\varepsilon$$

Из-за монотонности, мы получим:

$$\forall n \geq N_x,\ \forall y \in \mathcal{U}(x),\ h_n(y) \leq h_{N_x}(y) < 2\varepsilon$$

Поскольку $K$ - компакт, то объединение таких окрестностей по каждому $x \in K$ покроет $K$:

$$K \subset \bigcup_{x \in K} \mathcal{U}(x) \Rightarrow \exists \mathcal{U}(x_1), \ldots, \mathcal{U}(x_M) \colon K \subset \bigcup_{k=1}^{M} \mathcal{U}(x_k)$$

где последнее верно в силу компактности $K$: $\exists$ конечный набор окрестностей покрывающих $K$. На каждой из этих окрестностей есть свой номер $N_{x_1}, \ldots, N_{x_M}$, начиная с которого все соответствующие функции $h_n(x)$ становятся меньше $2\varepsilon$. Возьмем $N = \max\{N_{x_1}, \ldots, N_{x_M}\}$, тогда:

$$\forall n > N,\ \forall y \in K,\ h_n(y) < 2\varepsilon$$

поскольку $\exists\, j \colon y \in \mathcal{U}(x_j) \wedge N \geq N_{x_j}$. Таким образом, требуемое доказано. $\blacksquare$

**Rm: 4.** От компактности в этой теореме отказаться невозможно, пример $x^n$.

## Равномерная сходимость рядов вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$

Будем исследовать равномерную сходимость в рядах следующего вида:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$$

Сразу заметим, что если мы знаем про равномерную сходимость одного из рядов $a_n$ или $b_n$, то интересно понять, какие нужны свойства для второго ряда, чтобы сходилось произведение $a_nb_n$.

**Утв. 2.** Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n(x)|$ сходится равномерно на $X$. Если $b_n(x)$ - равномерно ограничены на $X$:

$$\exists\, C\colon \forall x \in X,\, \forall n,\, |b_n(x)| \le C$$

тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ сходится равномерно.

□ Следует из обобщенного признакак Вейерштрасса, поскольку:

$$\forall x \in X,\, |a_n(x)b_n(x)| \le C|a_n(x)|$$

Следовательно исходный ряд сходится равномерно. ■

**Утв. 3.** Пусть частичные суммы $\sum\limits_{n=1}^{N} |a_n(x)|$ - равномерно ограничены на $X$ и $b_n \overset{X}{\rightrightarrows} 0$, тогда ряд произведения $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ сходится равномерно.

□ Проверяем критерий Коши:

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k(x)b_k(x)\right| \le \sup_{x\in X \wedge m+1\le k<n} |b_k(x)| \cdot \sum_{k=m+1}^{n} |a_k(x)| \le \sup_{x\in X \wedge m+1\le k<n} |b_k(x)| \cdot C$$

Поскольку $b_k \overset{X}{\rightrightarrows} 0$, то начиная с некоторого номера все точные верхние грани $b_k(x)$ будут меньше наперед заданного $\varepsilon$, то есть:

$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists\, N\colon \forall m > N,\, \sup_{x\in X} |b_m(x)| < \varepsilon$$

Пусть $m, n > N$, тогда:

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k(x)b_k(x)\right| \le \sup_{x\in X \wedge m+1\le k<n} |b_k(x)| \cdot C < \varepsilon C$$

■

Это достаточно простые наблюдения, которые мы сможем усилить далее с помощью преобразования Абеля.

## Преобразование Абеля

Рассмотрим следующую сумму $\sum\limits_{n=1}^{N} a_n b_n$ (не важно, числа это или функции). Аналогично случаю для простых рядов, введем новые переменные: $B_n = b_1 + \ldots + b_n$, $B_0 = 0$, тогда:

$$\sum_{n=1}^{N} a_n b_n = \sum_{n=1}^{N} a_n (B_n - B_{n-1}) = (a_1 B_1 - a_1 B_0) + (a_2 B_2 - a_2 B_1) + \ldots + (a_N B_n - a_N B_{N-1}) =$$

$$= (a_1 - a_2) B_1 + \ldots + (a_{N-1} - a_N) B_{N-1} + a_N B_N - a_1 B_0 = \sum_{n=1}^{N-1} (a_n - a_{n+1}) B_n - a_1 B_0 + a_N B_N$$

Мы это уже делали ранее. Только ради технического удобства, проделаем следующее:

$$\sum_{n=1}^{N} a_n (B_n - B_{n-1}) = \sum_{n=1}^{N} a_n ((B_n - B) - (B_{n-1} - B)) = \sum_{n=1}^{N-1} (a_n - a_{n+1})(B_n - B) - a_1 (B_0 - B) + a_N (B_N - B)$$

Тогда будет верно следующее равенство:

$$\sum_{n=1}^{N} a_n(x) b_n(x) = \sum_{n=1}^{N-1} (a_n(x) - a_{n+1}(x)) \cdot (B_n(x) - B(x)) + a_1(x) \cdot B(x) + a_N(x) \cdot (B_N(x) - B(x))$$

Исходя из этого равенства, можно сформулировать следующую теорему.

**Теорема 5.** Пусть функции $a_n(x), b_n(x)$ определены на $X$ и существует такая функция $B(x)$ на $X$, что функции $a_N(x)(B_N(x) - B(x))$ равномерно сходятся на $X$ (обозначения взяты из преобразования Абеля). Тогда ряды:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x) \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} (a_n(x) - a_{n+1}(x)) (B_n(x) - B(x))$$

одновременно сходятся или расходятся равномерно на $X$.

$\square$ Очевидно следует из преобразования Абеля. $\blacksquare$

**Следствие 1.** (**признаки Абеля-Дирихле**):

1) **Признак Дирихле**: Если $a_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} 0$, $\forall x \in X$ последовательность $a_n(x)$ - монотонна и последовательность $B_n(x) = b_1(x) + \ldots + b_n(x)$ - равномерно ограничена на $X$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ сходится на $X$ равномерно;

2) **Признак Абеля**: Если $a_n(x)$ равномерно ограничены на $X$, $\forall x \in X$ числовая последовательность $\{a_n(x)\}$ монотонна и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ сходится равномерно на $X$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ сходится на $X$ равномерно;

**Rm: 5.** То есть, берем обычные признаки Абеля-Дирихле и везде где можно вставляем “равномерно”, получаются признаки Абеля-Дирихле равномерной сходимости.

$\square$

1) **Признак Дирихле**: Применим теорему с функцией $B \equiv 0$. Поскольку $B_n(x)$ - равномерно ограничены, а последовательность $a_n \overset{X}{\rightrightarrows} 0$, то по утверждению из лекции 10:

$$a_N(x)B_N(x) \overset{X}{\rightrightarrows} 0$$

Тогда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x) \text{ - сходится равномерно} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (a_n(x) - a_{n+1}(x)) \cdot B_n(x) \text{ - сходится равномерно}$$

Рассмотрим следующий ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(x) - a_{n+1}(x)|$ и его частичные суммы. Поскольку последовательность $a_n$ - монотонна, то мы знаем, как раскроется модуль при фиксированном $x$, тогда:

$$\sum_{n=1}^{N} |a_n(x) - a_{n+1}(x)| = \pm (a_1(x) - a_2(x) + a_2(x) - a_3(x) + \ldots + a_N(x) - a_{N+1}(x)) =$$

$$= \pm(a_1(x) - a_{N+1}(x)) = |a_1(x) - a_{N+1}(x)| \overset{X}{\rightrightarrows} |a_1(x)|$$

где последнее верно в силу того, что:

$$||a_1(x)| - |a_1(x) - a_{N+1}(x)|| \leq |a_1(x) - a_1(x) + a_{N+1}(x)| \leq \sup_{x \in X} |a_{N+1}(x)| \to 0$$

то есть модуль разности сходится к $|a_1(x)|$ равномерно по определению равномерной сходимости. Тогда:

$$\sum_{n=1}^{N} |a_n(x) - a_{n+1}(x)| \overset{X}{\rightrightarrows} |a_1(x)|$$

то есть равномерно сходящаяся последовательность из модулей умножается на равномерно ограниченную $\Rightarrow$ по утверждению 2 получаем равномерно сходящийся ряд $\Rightarrow$ сходится исходный ряд.

2) **Признак Абеля**: Применим теорему с функцией $B(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$. Поскольку $a_n(x)$ - равномерно ограничены, а сходимость ряда $b_n$ это тоже самое, что и сходимость его частичных сумм (см. предыдущую лекцию про сходимость хвостов), то:

$$B_N(x) - B(x) \overset{X}{\rightrightarrows} 0 \Rightarrow a_N \cdot (B_N(x) - B(x)) \overset{X}{\rightrightarrows} 0$$

Тогда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x) \text{ - сх. равномерно} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (a_n(x) - a_{n+1}(x)) \cdot (B_n(x) - B(x)) \text{ - сх. равномерно}$$

Используя монтонность и равномерную ограниченность $a_n$, мы получим:

$$\forall N,\ \forall x,\ \sum_{n=1}^{N} |a_n(x) - a_{n+1}(x)| = |a_1(x) - a_{N+1}(x)| \leq C$$

то есть частичные суммы равномерно ограничены. Поскольку $|B_N(x) - B(x)| \overset{X}{\rightrightarrows} 0$ (см. предыдущую лекцию про сходимость хвостов), то по утвержденю 3 равномерно сходится ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n(x) - a_{n+1}(x)) \cdot (B_n(x) - B(x))$$

Следовательно, сходится исходный ряд.

■

**Пример**: Рассмотрим следующий типичный пример для применения признаков:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

Рассмотрим два случая:

1) $0 < \delta < x < 2\pi - \delta$, в этом случае понятно, что $a_n(x) = \frac{1}{n}$ - монотонная и равномерно стремится к нулю. Функции $b_n(x) = \sin nx$. Необходимо понять, что суммы $\sum\limits_{n=1}^{N} \sin nx$ - равномерны ограничены:

$$2\sin\tfrac{x}{2}\sin kx = \cos\left(k - \tfrac{1}{2}\right)x - \cos\left(k + \tfrac{1}{2}\right)x$$

Тогда эти косинусы будут сокращаться в следующей сумме:

$$2\sin\tfrac{x}{2}\sum_{n=1}^{N}\sin nx = \cos\tfrac{x}{2} - \cos\left(N + \tfrac{1}{2}\right)x \Rightarrow \sum_{n=1}^{N}\sin nx = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(N + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

Теперь необходимо найти равномерную оценку для этой суммы (одновременно и для $N$, и для $x$). Из условия:

$$\frac{\delta}{2} < \frac{x}{2} < \pi - \frac{\delta}{2} \Rightarrow \sin\tfrac{x}{2} \geq \sin\tfrac{\delta}{2} \Rightarrow \left|\sum_{n=1}^{N}\sin nx\right| \leq \frac{2}{2\sin\frac{\delta}{2}} = \frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}$$

По признаку Дирихле ряд сходится равномерно;

2) $0 < x < 2\pi$, в этом случае воспользуемся критерием Коши и распишем следующую сумму:

$$\sum_{n=m+1}^{2m} \frac{\sin nx}{n}$$

Выберем $x = \frac{1}{2m}$, тогда:

$$\forall n = \overline{m+1, 2m},\ \frac{1}{2} \leq nx \leq 1 \Rightarrow \sin nx > \sin\frac{1}{2} \Rightarrow \sum_{n=m+1}^{2m}\frac{\sin nx}{n} \geq \frac{\sin\frac{1}{2}}{2}$$

Поскольку сумма по $a_n$ будет тоже больше $\frac{1}{2}$. Таким образом, какое бы далекое $m$ не взяли, заданная сумма будет выше фиксированного значения, а это опровергает условие Коши $\Rightarrow$ ряд не сходится равномерно;