Несобственные интегралы с параметром

Пусть $X \neq \varnothing$, есть полуинтервал $[a,b)$, где возможно $b=+\infty$, есть функция $f\colon X\times[a,b)\to\mathbb{R}(\mathbb{C})$. Теперь всегда будем подразумевать, что: $\forall x\in X,\ t\mapsto f(x,t)$ - интегрируема по Риману на $[a,c]$, $\forall c\in[a,b)$. Рассмотрим следующую функцию:

$$F(x,y)=\int\limits_a^y f(x,t)dt,\ F\colon X\times[a,b)\to\mathbb{R}(\mathbb{C})$$

Опр: 1. Если $\forall x\in X,\ \exists \lim\limits_{y\to b-}F(x,y)$, то этот предел обозначается:

$$\int\limits_a^b f(x,t)dt=\lim_{y\to b-}F(x,y)=\lim_{y\to b-}\int\limits_a^y f(x,t)dt$$

и называется несобственным интегралом с параметром.

Опр: 2. Если $F(x,y)\underset{y\to b-}{\overset{X}{\rightrightarrows}}\int\limits_a^b f(x,t)dt$, то $\varphi(x)=\int\limits_a^b f(x,t)dt$ и говорят что несобственный интеграл $\varphi(x)$ сходится равномерно.

Равномерная сходимость есть далеко не всегда. Попробуем разобрать пример.

Пример: Сходится ли равномерно интеграл: $\int\limits_0^{+\infty}e^{-(t-x)^2}dt,\ x\geq 0$? Рассмотрим разность:

$$\sup_{x\geq 0}\left|\int\limits_0^{+\infty}e^{-(t-x)^2}dt-\int\limits_0^{y}e^{-(t-x)^2}dt\right|=\sup_{x\geq 0}\int\limits_y^{+\infty}e^{-(t-x)^2}dt\xrightarrow[y\to+\infty]{?}0$$

$$\sup_{x\geq 0}\int\limits_y^{+\infty}e^{-(t-x)^2}dt\geq\int\limits_y^{+\infty}e^{-(t-y)^2}dt=\int\limits_0^{+\infty}e^{-s^2}ds=\frac{\sqrt{\pi}}{2}>0$$

Равномерной сходимости нет, при этом, если бы мы указали $0\leq x\leq 10$, то она была бы:

$$y>10\Rightarrow\sup_{x\in[0,10]}\int\limits_y^{+\infty}e^{-(t-x)^2}dt\leq\int\limits_y^{+\infty}e^{-(t-10)^2}dt$$

Rm: 1. Заметим, что как и для рядов за сходимость здесь отвечает “хвост” интеграла. Пусть несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x,t)dt$ сходится $\forall x\in X$. Тогда его равномерная сходимость равносильна следующему:

$$\sup_{x\in X}\left|\int\limits_y^b f(x,t)dt\right|\xrightarrow[y\to b-]{}0$$

Иногда это называют супремум-критерием. Рассмотрим эту сходимость подробнее:

$$\varphi(x) - F(x,y) = \int_a^b f(x,t)dt - F(x,y) = \int_a^b f(x,t)dt - \int_a^y f(x,t)dt = \int_y^b f(x,t)dt \underset{y\to b-}{\overset{X}{\rightrightarrows}} 0$$

где последнее верно в силу следующего:

$$F(x,y) \underset{y\to b-}{\overset{X}{\rightrightarrows}} \int_a^b f(x,t)dt \Leftrightarrow \sup_{x\in X}\left|F(x,y) - \int_a^b f(x,t)dt\right| = \sup_{x\in X}|F(x,y)-\varphi(x)| \xrightarrow[y\to b-]{} 0$$

Теорема 1. (**критерий Коши**) Несобственный интеграл $\int_a^b f(x,t)dt$ - сходится равномерно на $X \Leftrightarrow$ выполнено условие Коши:

$$\forall\varepsilon > 0,\, \exists\, c\in(a,b)\colon \forall c_1, c_2 \in (c,b),\, \sup_{x\in X}\left|\int_{c_1}^{c_2} f(x,t)dt\right| < \varepsilon$$

□ Заметив что:

$$\int_{c_1}^{c_2} f(x,t)dt = F(x,c_2) - F(x,c_1)$$

теорема следует сразу из критерия Коши равномерной сходимости для семейства функций. ■

Rm: 2. Критерий Коши чаще всего используется для доказательства того, что что-то не сходится. Для положительных результатов, в типичных ситуациях, есть признаки сходимости. Обычно подбирают участки, сколь угодно близко к b, где несобственный интеграл не является равномерно малым. Есть одно наблюдение, которое следует из критерия Коши, которое во многих случаях позволяет в одну строчку показать, что какой-то интеграл не сходится равномерно.

Следствие 1. Пусть $X\subset Y$ - метрическое пространство, x_0 - предельная точка пространства X, $x_0 \notin X$ и $\forall c\in[a,b)$, $f(x_0,t)$ - интегрируема на $[a,c]$, где $|f(x,t)|\le C$ и верно $f(x,t)\xrightarrow[x\to x_0]{} f(x_0,t)$. Тогда, если интеграл $\int_a^b f(x_0,t)dt$ не сходится, то $\int_a^b f(x,t)dt$ не сходится равномерно на X.

□ Пусть $\int_a^b f(x,t)dt$ сходится равномерно на X, тогда по критерию Коши:

$$\forall\varepsilon > 0,\, \exists\, c\in(a,b)\colon \forall c_1, c_2 \in (c,b),\, \sup_{x\in X}\left|\int_{c_1}^{c_2} f(x,t)dt\right| < \varepsilon \Rightarrow \forall x\in X,\, \left|\int_{c_1}^{c_2} f(x,t)dt\right| < \varepsilon$$

Мы находимся в условиях теоремы Арцела $\Rightarrow$ можем переходить к пределу:

$$\left|\int_{c_1}^{c_2} f(x,t)dt\right| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{x\to x_0}\left|\int_{c_1}^{c_2} f(x,t)dt\right| = \left|\int_{c_1}^{c_2} f(x_0,t)dt\right| \le \varepsilon$$

Значит интеграл $\int\limits_a^b f(x_0, t)dt$ - сходится $\Rightarrow$ получили противоречие. ■

Пример: Сходится ли равномерно интеграл: $\int\limits_0^1 \frac{dt}{t^x}$ при $x \in (0,1)$? Очевидно, что при каждом $x \in (0,1)$ этот интеграл сходится, поскольку степень меньше 1, но равномерной сходимости не будет:

$$x = 1 \Rightarrow \int\limits_0^1 \frac{dt}{t} = \ln t\Big|_{t=0}^{1} = \ln 1 - \lim_{t\to 0+} \ln t = +\infty$$

Данный метод называется методом граничной точки.

Теорема 2. (**признак Вейерштрасса**)

1) Если $|f(x,t)| \le g(x,t)$ и $\int\limits_a^b g(x,t)dt$ - сходится равномерно на X, то $\int\limits_a^b f(x,t)dt$ тоже сходится равномерно на X;

2) Если $|f(x,t)| \le g(t)$ и $\int\limits_a^b g(t)dt$ - сходится, то $\int\limits_a^b f(x,t)dt$ сходится равномерно на X;

□ 2) является частным случаем 1). Докажем 1): по критерию Коши:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, c \in (a,b)\colon \forall c_1, c_2 \in (c,b),\ \sup_{x\in X}\left|\int\limits_{c_1}^{c_2} g(x,t)dt\right| < \varepsilon$$

$$\left|\int\limits_{c_1}^{c_2} f(x,t)dt\right| \le \int\limits_{c_1}^{c_2} g(x,t)dt \Rightarrow \sup_{x\in X}\left|\int\limits_{c_1}^{c_2} f(x,t)dt\right| \le \sup_{x\in X}\int\limits_{c_1}^{c_2} g(x,t)dt < \varepsilon$$

■

Пример: Будет ли равномерно сходится интеграл: $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin(x^2+tx+t^2)}{x^2+t^2}dt$ по x ? Будет, поскольку:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \left|\frac{\sin(x^2+tx+t^2)}{x^2+t^2}\right| \le \frac{1}{t^2},\ \int\limits_1^{+\infty}\frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t}\Big|_{t=1}^{+\infty} = 1 < \infty$$

Равномерная сходимость интеграла от произведения

Рассмотрим интегралы следующего вида: $\int\limits_a^b f(x,t)g(x,t)dt$. Когда он будет сходиться? Аналогичные вопросы (и ответы) уже возникали при изучении сходимости рядов и несобственных интегралов.

Утв. 1. Если $\int\limits_a^b |f(x,t)|dt$ - сходится равномерно на X, $g(x,t)$ - равномерно ограничена на X, то есть:

$$\exists\, C > 0\colon \forall x,\ \forall t,\ |g(x,t)| \le C$$

Тогда $\int\limits_a^b f(x,t)g(x,t)dt$ сходится равномерно на X.

☐ Поскольку $|f(x,t)g(x,t)| \le C|f(x,t)|$, то по признаку Вейерштрасса сразу получаем требуемое. ■

Утв. 2. Пусть интеграл $\int\limits_a^y |f(x,t)|dt$ - равномерно ограничен на X, то есть:

$$\exists\, C > 0\colon \forall x,\ \forall y,\ \int\limits_a^y |f(x,t)|dt \le C$$

и функция $g(x,t) \underset{t\to b-}{\overset{X}{\rightrightarrows}} 0$. Тогда $\int\limits_a^b f(x,t)g(x,t)dt$ сходится равномерно на X.

☐ По критерию Коши, пусть $\varepsilon > 0$ и мы нашли $c \in (a,b)$ такое, что:

$$\forall t \in (c,b),\ \sup_{x\in X}|g(x,t)| < \varepsilon$$

Будем отсюда рассматривать $c_1, c_2\colon c < c_1 < c_2 < b$. Оценим разность:

$$\left|\int\limits_{c_1}^{c_2} f(x,t)g(x,t)dt\right| \le \varepsilon \int\limits_{c_1}^{c_2} |f(x,t)|dt \le \varepsilon \int\limits_a^{c_2} |f(x,t)|dt \le \varepsilon{\cdot}C$$

Условие Коши выполнено $\Rightarrow$ произведение сходится равномерно на X. ■

Интегрирование по частям

Лемма 1. Пусть $\forall x \in X$, функция $t \mapsto f(x,t)$ - непрерывна на $[a,b)$, функция $t \mapsto g(x,t)$ - непрерывно дифференцируема на $[a,b)$. Введем обозначение: $F(x,t) = \int\limits_a^t f(x,s)ds - h(x)$, где $h(x)$ - произвольная функция от x (не зависит от t). Тогда:

$$\int\limits_a^y f(x,t)g(x,t)dt = g(x,y)F(x,y) - g(x,a)F(x,a) - \int\limits_a^y g'_t(x,t)F(x,t)dt =$$

$$= g(x,y)\cdot\left(\int\limits_a^y f(x,s)ds - h(x)\right) + g(x,a)h(x) - \int\limits_a^y g_t'(x,t)\left(\int\limits_a^t f(x,s)ds - h(x)\right)$$

☐ Вспоминая производную интеграла по верхнему пределу, мы получим:

$$\int\limits_a^y f(x,t)g(x,t)dt = \int\limits_a^y g(x,t)\cdot(F(x,t))_t'\,dt = g(x,y)F(x,y) - g(x,a)F(x,a) - \int\limits_a^y g_t'(x,t)F(x,t)dt$$

где последнее равенство это формула интегрирования по частям для несобственных интегралов. Подставляя выражение для $F(x,t)$ получаем требуемое. ■

Теорема 3. Если $\exists\, h(x)\colon g(x,y)F(x,y)$ сходится равномерно на X при $y \to b-$, то интегралы:

$$\int\limits_a^b f(x,t)g(x,t)dt,\ \int\limits_a^b g_t'(x,t)F(x,t)dt$$

или оба сходятся равномерно на X, или оба не сходятся равномерно на X.

☐ Следует из арифметики пределов и формулы интегрирования по частям: $g(x,a)F(x,a)$ - константа по y, $g(x,y)F(x,y)$ - сходится равномерно $\Rightarrow$ если сходится левая часть в формуле интегрирования по частям, то будет сходится правая и наоборот. ■

Следствие 2. (**признаки Абеля-Дирихле**) Пусть функция $t \mapsto f(x,t)$ - непрерывна на $[a,b]$, функция $t \mapsto g(x,t)$ - непрерывно дифференцируема на $[a,b)$ и верно: $g_t'(x,t) \leq 0\,(\geq 0)$, $\forall t \in [a,b)$.

1) **Признак Дирихле**: $\int\limits_a^y f(x,t)dt$ - равномерно ограниченны на X и $g(x,t) \underset{t\to b-}{\overset{X}{\rightrightarrows}} 0$. Тогда интеграл от произведения $\int\limits_a^b f(x,t)g(x,t)dt$ сходится равномерно на X;

2) **Признак Абеля**: $\int\limits_a^b f(x,t)dt$ - сходится равномерно на X, $g(x,t)$ - равномерно ограниченна на X. Тогда интеграл от произведения $\int\limits_a^b f(x,t)g(x,t)dt$ сходится равномерно на X;

Rm: 3. Заметим схожесть формулировок с утверждениями 1 и 2 с тем отличием, что здесь за счет монотонности не требуются модули (абсолютной сходимости) под интегралом.

☐

1) Пусть $h \equiv 0 \Rightarrow F(x,y) = \int\limits_a^y f(x,s)ds$, тогда: $g(x,y)F(x,y) = g(x,t)\int\limits_a^y f(x,s)ds \underset{y\to b-}{\overset{X}{\rightrightarrows}} 0$ по арифметике пределов (см. лекцию 10), поскольку $F(x,y)$ - равномерно ограничена, а $g(x,y) \underset{y\to b-}{\overset{X}{\rightrightarrows}} 0$. По

теореме 3 достаточно исследовать равномерную сходимость интеграла:

$$\int\limits_a^b g'_t(x,t)F(x,t)dt = \int\limits_a^b g'_t(x,t)\left(\int\limits_a^t f(x,s)ds\right)dt$$

где $F(x,t)$ - равномерно ограничена, а $\int\limits_a^b |g'_t(x,t)|\,dt$ будет сходиться равномерно (из-за монотонности) $\Rightarrow$ используем формулу Ньютона-Лейбница, тогда получим:

$$\int\limits_a^y |g'_t(x,t)|\,dt = -\int\limits_a^y g'_t(x,t)dt = g(x,a) - g(x,y) \underset{y\to b-}{\overset{X}{\rightrightarrows}} g(x,a)$$

Следовательно, применим утверждение 1 и тем самым докажем требуемое;

2) Пусть мы определим $h(x)$ так:

$$h(x) = \int\limits_a^b f(x,t)dt \Rightarrow F(x,y) = \int\limits_a^y f(x,s)ds - \int\limits_a^b f(x,s)ds$$

тогда: $F(x,y) \underset{y\to b-}{\overset{X}{\rightrightarrows}} 0$, поскольку интеграл $h(x)$ сходится равномерно по условию. Так как по условию $g(x,t)$ равномерно ограничена на X, то мы получим: $g(x,y)F(x,y) \underset{y\to b-}{\overset{X}{\rightrightarrows}} 0$. По теореме 3 необходимо исследовать интеграл: $\int\limits_a^b g'_t(x,t)F(x,t)dt$ на сходимость. Рассмотрим:

$$\int\limits_a^y |g'_t(x,t)|\,dt = -\int\limits_a^y g'_t(x,t)dt = g(x,a) - g(x,y)$$

где опять воспользовались формулой Ньютона-Лейбница. Зная, что $g(x,y)$ равномерно ограниченна на X, то $-g(x,y)+g(x,a)$ также будет равномерно ограниченной на $X \Rightarrow$ равномерно ограничен и интеграл от модуля производной. Применяем утверждение 2 и получим требуемое.

■

Rm: 4. В признаках Абеля-Дирихле функция $F(x,t)$ может принимать комплексные значения, а функция $g(x,t)$ - нет.

Примеры использования признаков сходимости

Пример: Сходится ли равномерно интеграл: $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x^2}dt,\ x \geq 1$? Будет ли поточечная сходимость?

$\square$ Первообразная синуса ограничена, $\frac{1}{t+x^2}$ монотонно стремится к нулю $\Rightarrow$ работает признак Дирихле для поточечной сходимости. Попробуем применить его к равномерной сходимости:

$$\forall x \in X,\ \int\limits_0^y \sin t\, dt = \cos 0 - \cos y \leq 2;\ \frac{1}{t+x^2} \underset{t\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} 0$$

Следовательно, по признаку Дирихле есть равномерная сходимость. Если взять модуль: $|\sin t|$, то даже обычной сходимости не будет. $\blacksquare$

Пример: Сходится ли равномерно интеграл: $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}e^{-xt}dt,\ x > 0$?

$\square$ Сходится равномерно по признаку Абеля: без экспоненты получаем константу по x (т.е. сходимость равномерная), а e^{-xt} - равномерно ограниченна и монотонна. $\blacksquare$

Пример: Сходится ли равномерно интеграл: $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t}dt,\ x > 0$?

$\square$ Видим, что у функции две особенности, поэтому подход должен быть следующим - разбить интеграл на два и отдельно исследовать в 0, и отдельно в $+\infty$:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t}dt = \int\limits_0^{1} \frac{\sin(xt)}{t}dt + \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t}dt$$

Вообще-то небезопасно делать замены в интеграле, зависящие от параметра. Для примера, сделаем преобразование здесь:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t}dt = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{xt}d(xt) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}du$$

Теперь интеграл не зависит от параметра, но отсюда не следует, что интеграл сходится равномерно. Это интеграл Дирихле. Ранее, мы уже находили его (лекция 8) Попробуем рассмотреть изначальное разбиение. Очевидно, что второй интеграл сходится по признаку Дирихле для обычной сходимости и, более того, это значение не равно 0. Если он ещё сходится и равномерно на полуинтервале $[1, +\infty)$, то хвост интеграла должен сходиться равномерно к 0, проверим это:

$$\int\limits_c^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t}dt = \int\limits_{xc}^{+\infty} \frac{\sin u}{u}du \Rightarrow \forall c,\ \exists\, x = \frac{b}{c} > 0 \Rightarrow \int\limits_{xc}^{+\infty} \frac{\sin u}{u}du = \int\limits_b^{+\infty} \frac{\sin u}{u}du$$

Поскольку мы знаем, что интеграл Дирихле положителен для $x > 0$, то подберём b так, чтобы:

$$\left|\int\limits_{b}^{+\infty}\frac{\sin u}{u}du\right| = |C| > 0 \Rightarrow \sup_{x>0}\left|\int\limits_{c}^{+\infty}\frac{\sin(xt)}{t}dt\right| \geq \left|\int\limits_{b}^{+\infty}\frac{\sin u}{u}du\right| = |C| \nrightarrow 0$$

Таким образом, мы получаем, что второй интеграл не сходится равномерно на $X = (0, +\infty)$. Аналогично, можно установить такой же факт для первого интеграла. ■

Рассмотрим ещё пример, показывающий что небезопасно делать замены, зависящие от параметра.

Пример: Сходится ли равномерно интеграл: $\int\limits_{0}^{+\infty} xe^{-xt}dt$, $x > 0$?

□ Делаем замену:

$$\int\limits_{0}^{+\infty} xe^{-xt}dt = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-xt}d(xt) = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-u}du$$

Здесь особенность только одна, в $+\infty$. Попробуем изучить равномерную сходимость честно:

$$\int\limits_{c}^{+\infty} xe^{-xt}dt = \int\limits_{xc}^{+\infty} e^{-u}du$$

В хвосте мы можем делать замену. Попробуем испортить сходимость хвоста, выбирая параметр x:

$$x = \frac{1}{c} \Rightarrow \int\limits_{1}^{+\infty} e^{-u}du = \frac{1}{e} > 0$$

Это не приближается к 0, следовательно равномерной сходимости нет. ■

Пример: Сходится ли равномерно интеграл: $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-xt}\sin t\,dt$, $x > 0$?

□ Видно, что $e^{-xt} \not\rightrightarrows 0$, например:

$$x = \frac{1}{t} \Rightarrow e^{-xt} = \frac{1}{e}$$

Следовательно признак Дирихле использовать нельзя. Попробуем метод граничной точки. Пусть есть равномерная сходимость. Функции ограничены, всё интегрируемо, можно применять теорему Арцела:

$$\int\limits_{0}^{y} e^{-xt}\sin t\,dt \xrightarrow[x\to 0]{} \int\limits_{0}^{y}\sin t\,dt \Rightarrow \int\limits_{0}^{+\infty}\sin t\,dt \text{ - сходится}$$

Но последнее не может быть верным ⇒ получили противоречие ⇒ нет равномерной сходимости. Можно то же самое показать с помощью критерия Коши: выбрать промежуток, где синус больше $\frac{1}{2}$, загнать x близко к 0, чтобы этот множитель оказался не меньше, чем $\frac{1}{2}$ ⇒ получим интеграл, не меньший, чем $\frac{1}{4}$ умноженный на фиксированную длину промежутка. ■

Rm: 5. В общей ситуации, есть интеграл $\int\limits_a^b f(x,t)dt$ - сходится равномерно на $X' = X \setminus \{x_0\}$, пусть мы умеем переходить к пределу:

$$\int\limits_a^y f(x,t)dt \xrightarrow[x\to x_0]{} \int\limits_a^y f(x_0,t)dt \Rightarrow \int\limits_a^b f(x_0,t)dt \text{ - сходится}$$

Это следует из критерия Коши, поскольку оно будет верно для всех $x \in X'$, то устремим x к x_0 и получим то же самое неравенство, при $x = x_0$:

$$\sup_{x\in X'} \left| \int\limits_{c_1}^{c_2} f(x,t)dt \right| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \left| \int\limits_{c_1}^{c_2} f(x,t)dt \right| = \left| \int\limits_{c_1}^{c_2} f(x_0,t)dt \right| \le \varepsilon \Rightarrow \int\limits_a^b f(x_0,t)dt \text{ - сходится}$$

Упр. 1. Построить пример, когда $\int\limits_a^y f(x,t)dt$ - равномерно ограничен, $\forall x$, $\exists\, t(x)$: $g'_t \le 0$ на $[t(x), +\infty)$, но при этом $\int\limits_a^b f(x,t)g(x,t)dt$ не сходится равномерно. (См. задачник ВОС).

☐ Рассмотрим следующий интеграл:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos(t-x)}{(t-x)^2+1}dt,\ x \in [0,+\infty) \Rightarrow g(x,t) = \frac{1}{(t-x)^2+1},\ f(x,t) = \cos(t-x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int\limits_0^y f(x,t)dt = \int\limits_0^y \cos(t-x)dt = \sin(y-x) + \sin x \le 2,\ \forall x,y \in [0,+\infty)$$

$$\Rightarrow \forall x,t \in [0,+\infty),\ g(x,t) \le 1,\ g'_t(x,t) = -\frac{2(t-x)}{\left((t-x)^2+1\right)^2} \Rightarrow \forall x \ge 0,\ \forall t \ge x,\ g'_t \le 0$$

То есть функция $g(x,t)$ при каждом $x \ge 0$ убывает на $[t(x),+\infty) = [x,+\infty)$. Покажем, что интеграл произведения не сходится равномерно на $[0,+\infty)$ через критерий Коши. Пусть $c > 0$, тогда выберем:

$$c_1 = c+1,\ c_2 = c+3,\ x = c+2 \Rightarrow c_2 > c_1 > c > 0 \Rightarrow$$

$$\left| \int\limits_{c_1}^{c_2} \frac{\cos(t-c-2)}{(t-c-2)^2+1}dt \right| = \left| \int\limits_{-1}^{1} \frac{\cos u}{u^2+1}du \right| \ge \frac{1}{2}\cdot \left| \int\limits_{-1}^{1} \cos u\, du \right| = \sin 1 = \varepsilon > 0$$

Таким образом, получаем что критерий Коши нарушается и равномерной сходимости нет. ■