Производящие функции

Производящие функции очень часто используются в комбинаторике, теории вероятностей, физике и алгоритмах программирования.

Опр: 1. Пусть у нас есть последовательность $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, тогда ей можно сопоставить следующую формальную сумму (в том смысле, что мы не предполагаем, что это сумма сходится):

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

Этот объект называется производящей функцией.

С такими суммами можно выполнять формальные операции (то есть как-будто мы делаем некоторую операцию с последовательностью). Можно думать об этом так: вместо последовательности мы зачем-то начали писать суммы, определенные выше.

Пусть $A(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $B(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, тогда определим формальные операции над ними:

1) **Сложение**: $\alpha A(z) + \beta B(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) z^n$;

2) **Умножение**: $A(z) \cdot B(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0) z^n$;

3) **Дифференцирование**: $A'(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$;

4) **Интегрирование**: $\int A(z) dz = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1} + \text{const}$;

Каждое из этих действий оставляет нас в рамках действий с последовательностями. Раньше, последовательности можно было складывать, а теперь, благодоря степенным рядам, возникает набор нетривиальных действий с ними: перемножение, дифференцирование, интегрирование. Эти действия естественны с точки зрения степенных рядов. Если где-то такие степенные ряды сошлись, то на общем круге сходимости эти операции - честные операции, то есть совсем обычные операции, а не формальные.

На круге сходимости определена функция $A(z)$ и она содержит всю информацию про последовательность $\{a_n\}$: если радиус сходимости $R > 0$, то мы можем вычислять её члены следующим образом:

$$\forall n \in \mathbb{N},\, a_n = \frac{A^{(n)}(0)}{n!}$$

Следовательно функция $A(z)$ составлена по последовательности и зная её можно эту последовательность найти. В этом смысле, $A(z)$ как бы "производит" последовательность, порождает её как последовательность своих коэффициентов Тейлора в нуле. Далее, рассмотрим примеры таких функций.

Применение производящих функций

(I) Числа Фибоначчи

Числа Фибоначчи определяются следующим образом: $f_0 = f_1 = 1, f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$. Попробуем найти производящую функцию $F(z)$ этой последовательности:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n = 1 + z + \sum_{n=2}^{\infty}(f_{n-1} + f_{n-2})z^n = 1 + z + z\left(\sum_{n=2}^{\infty} f_{n-1}z^{n-1}\right) + z^2\left(\sum_{n=2}^{\infty} f_{n-2}z^{n-2}\right) =$$

$$= 1 + z + z(F(z) - 1) + z^2F(z) = 1 + zF(z) + z^2F(z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1 - z - z^2)F(z) = 1 \Rightarrow F(z) = \frac{1}{1 - z - z^2}$$

Теперь можно разложить производящую функцию в степенной ряд используя её явный вид:

$$z^2 + z - 1 = 0 \Rightarrow z_1, z_2 = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow F(z) = \frac{-1}{(z_1 - z)(z_2 - z)} = \frac{-1}{z_2 - z_1}\left(\frac{1}{z_1 - z} - \frac{1}{z_2 - z}\right)$$

Вынесем z_1 и z_2 за скобки и используем сумму бесконечной геометрической прогрессии, тогда:

$$F(z) = \frac{-1}{z_2 - z_1}\left(\frac{1}{z_1}\cdot\frac{1}{1 - \frac{z}{z_1}} - \frac{1}{z_2}\cdot\frac{1}{1 - \frac{z}{z_2}}\right) = \frac{-1}{z_2 - z_1}\left(\frac{1}{z_1}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{z_1^n} - \frac{1}{z_2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{z_2^n}\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z_2 - z_1}\cdot\left(\frac{1}{z_2^{n+1}} - \frac{1}{z_1^{n+1}}\right)\right)z^n$$

Мы получили так называемую формулу Бине.

Число Фибоначчи удовлетворяло простому реккурентному соотношению (такие соотношения называются линейными): $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$.

(1) Если найти две последовательности, которые удовлетворяют такому соотношению, то их сумма тоже будет удовлетворять такому соотношению;

(2) Если найти последовательность удовлетворяющую такому соотношению и умножить её на число, то опять получится последовательность удовлетворяющая этому соотношению;

Мы посчитали производяющую функцию и она оказалась рациональной дробью. Оказывается, что это общий факт: всегда при работе с линейными реккурентными соотношениями в качестве производящей функции мы будем получать рациональные дроби.

Утв. 1.

1) Пусть $\{a_n\}$: $a_{n+1} = c_1a_n + c_2a_{n-1} + \ldots + c_ka_{n-k+1}$, тогда производящая функция это дробь:

$$A(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},\ \deg Q = k,\ \deg P \leq k - 1$$

2) Если производящая функция это дробь:

$$A(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},\ Q(z) = 1 + c_1z + \ldots$$

то начиная с некоторого номера a_n удовлетворяет линейному реккурентному соотношению;

□

1) Умножим $A(z)$ на разложенное $c_1z + c_2z^2 + \ldots + c_kz^k$ и соберем коэффициент при z^n, $n \geq k$:

$$z^n,\ n \geq k\colon c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \ldots + c_ka_{n-k} = a_n \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (c_1z + c_2z^2 + \ldots + c_kz^k)A(z) = A(z) + P(z),\ \deg P \leq k-1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A(z) = \frac{P(z)}{c_1z + c_2z^2 + \ldots + c_kz^k - 1} = \frac{P(z)}{Q(z)},\ \deg Q = k$$

2) Домножим $A(z)$ на $Q(z)$ и приравняем коэффициенты:

$$Q(z)\cdot A(z) = (1 + c_1z + \ldots)\cdot A(z) = P(z) \Rightarrow P(z) - A(z) = A(z)(c_1z + \ldots)$$

Пусть степень многочлена $P(z)$ равна m и $P(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_nz^n \Rightarrow \forall n > m,\ b_n = 0$, тогда:

$$\forall n \geq m+1,\ z^n\colon\ -a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \ldots + c_{m+1}a_{n-(m+1)}$$

■

Пример: в кармане есть только один рубль и пять рублей, сколькими способами можно разменять n рублей? На самом деле можно выбрать любое число монет. Рассмотрим следующее выражение:

$$(1 + z + z^2 + z^3 + \ldots)(1 + z^5 + z^{10} + z^{15} + \ldots) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nz^n$$

где равенство получается раскрытием скобок и сбором слагаемых по степеням. При степени z^n будет стоять a_n - число слагаемых, полученное взятием какого-то числа слагаемых из левой скобки и какого-то числа слагаемых из правой скобки. Число a_n это в точности число способов разменять n по рублю и по пять рублей. Попробуем найти эти a_n:

$$(1 + z + z^2 + z^3 + \ldots)(1 + z^5 + z^{10} + z^{15} + \ldots) = \frac{1}{(1-z)(1-z^5)} = \frac{1}{1 - z - z^5 + z^6} = A(z) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (1 - z - z^5 + z^6)A(z) = 1 \Rightarrow \forall n \geq 6,\ z^n : a_n - a_{n-1} - a_{n-5} + a_{n-6} = 0$$

Таким образом, мы получаем ответ: $a_n = a_{n-1} + a_{n-5} - a_{n-6}$.

Упр. 1. Посчитать с помощью производящих функций следующую сумму: $(C_n^0)^2 + \ldots + (C_n^n)^2$.

□ Рассмотрим Бином Ньютона и его производящую функцию:

$$(1+z)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^kz^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_kz^k = A(z),\ a_k = C_n^k, \forall k = \overline{0,n},\ a_k = 0, \forall k > n$$

Рассмотрим следующее произведение двух биномов Ньютона:

$$(1+z)^n(z+1)^n = (C_n^0 + C_n^1z + C_n^2z^2 + \ldots + C_n^nz^n)\cdot(C_n^0z^n + C_n^1z^{n-1} + C_n^2z^{n-2} + \ldots + C_n^n) = A^2(z)$$

где мы можем раскрыть скобки и собрать слагаемые, затем рассмотрим $B(z) = (A(z))^2$:

$$B(z) = (A(z))^2 = (1+z)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^kz^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_kz^k \Rightarrow a_n = C_{2n}^n = (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \ldots + (C_n^n)^2$$

■

(II) Числа Каталана

Когда пишется алгебраическое выражение, оно содержит скобки, которые указывают последовательность действий. Из таких выражений можно удалить всё кроме скобок, то что получится будет называться скобочной структурой. Например:

$$((1 \cdot 2) + (3 \cdot (1+2))) \mapsto (()\,(()))$$

Скобочные структуры бывают правильные и неправильные. Правильная скобочная структура в начале имеет число левых скобок $\geq$ число правых скобок, а по всему выражению число левых скобок $=$ числу правых скобок.

Пусть у нас всего n пар скобок, сколько правильных скобочных структур c_n можно построить?

$$c_1 \colon () \Rightarrow c_1 = 1,\ c_2 \colon ()(), (()) \Rightarrow c_2 = 2$$

Возьмем скобочную структуру из $n+1$ пары скобок. Будем считать $c_0 = 1$. Возьмем 1-ую левую скобку и посмотрим, где она закрывается: может оказаться так, что справа от закрывающей скобки ничего нет, может оказаться, что внутри k пар скобок, а за правой скобокой находится $(n-k)$ структур:

$$(\underbrace{\quad \ldots \quad}_{k})\ \underbrace{\quad \ldots \quad}_{n-k}$$

Для каждого фиксированного k может возникнуть $c_k \cdot c_{n-k}$ разных скобочных структур. Просуммируем и получим число скобочных структур из $n+1$ пары скобок:

$$c_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} c_k \cdot c_{n-k} \Rightarrow C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n ?$$

Теперь интересно найти производящую функцию, вдруг она окажется такой, что мы умеем по-другому раскладывать её в ряд и тогда сможем узнать, какова формула для c_n или узнаем более простую реккурентную формулу. Возведем $C(z)$ в квадрат:

$$C(z)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(c_0 c_n + \ldots c_n c_0\right) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} z^n = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} z^{n+1} = \frac{C(z)-1}{z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow zC(z)^2 - C(z) + 1 = 0 \Rightarrow C(z) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4z}}{2z}$$

Ищем $C(z)$ в виде степенного ряда. Поскольку ряд $C(z)$ в нуле равен 0, то если мы возьмем в решении выше знак $+$, то в нуле мы получим выражение вида $\frac{1}{z}$, следовательно для получения степенного ряда нам необходимо, чтобы единцы в числителе сократились $\Rightarrow$ берем знак $-$. Тогда:

$$C(z) = \frac{1 - \sqrt{1-4z}}{2z} = \frac{1}{2z}\left(1 - (1-4z)^{\frac{1}{2}}\right)$$

Вспомним бином Ньютона при $\alpha = \frac{1}{2}$, $t = -4z$:

$$(1+t)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha - n + 1)}{n!} \cdot t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - 1\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{1}{2} - n + 1\right)}{n!} \cdot (-4)^n z^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C(z) = \frac{1}{2z}\left(1 - (1-4z)^{\frac{1}{2}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2} - 1\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{1}{2} - n + 1\right) \cdot 4^n}{n!} (-1)^{n+1} \cdot z^{n-1} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{4}\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\left((n-1)-\frac{1}{2}\right)\cdot(-1)^{n-1}\cdot 4^n}{n!}(-1)^{n+1}\cdot z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n-1}\cdot(1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-3))}{2^{n-1}\cdot n!}z^{n-1} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}\cdot(n-1)!\cdot(1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-3))}{n!(n-1)!}z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}C_{2n-2}^{n-1}z^{n-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_{n-1} = \frac{1}{n}C_{2n-2}^{n-1}z^{n-1} \Rightarrow c_n = \frac{1}{n+1}C_{2n}^{n}$$

Rm: 1. Что-то очень похожее могло возникать при анализе теоремы Муавра-Лапласа ранее.

Число триангуляций

Числа Каталана, помимо исходной задачи, дают ответ на другие. С помощью них можно решить задачу про число триангуляций: возьмем выпуклый $(n+2)$-угольник и начинаем диагоналями разбивать на треугольники, чтобы диагонали пересекались только в вершинах. Сколько таких разбиений может быть? У $(n+2)$-угольника таких может быть c_n. Будем считать, что $c_0 = 1$.

$n = 1 \Rightarrow c_1 = 1$ $\qquad\qquad$ $n = 2 \Rightarrow c_2 = 2$

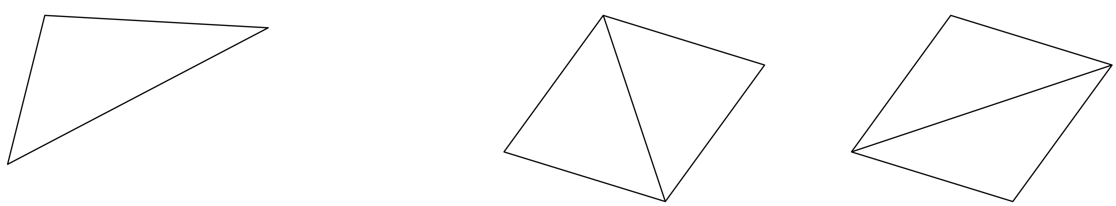

Рис. 1: Число триангуляция для случаев $n = 1$ и $n = 2$.

Можно попробовать опять получить реккурентную формулу и убедиться, что она получится такой же, как и для скобочных структур: выделим какую-то фиксированную сторону $\Rightarrow$ триангуляцией выделяется треугольник, который эту сторону содержит.

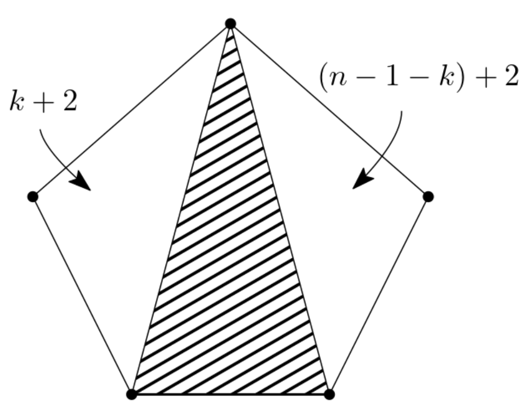

Рис. 2: Число триангуляций при фиксированной стороне.

Тогда можно заметить, что если слева от построенного треугольника образовался $(k+2)$-угольник, то справа образовался $((n-1-k)+2)$-угольник, следовательно слева мы получили c_k способов триангуляции, а справа $c_{(n-1)-k}$. Перебираем все способы, тогда мы опять получим знакомое реккурентное соотношение:

$$c_n = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \cdot c_{(n-1)-k} \Rightarrow c_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n$$

Пути Дика

Аналогичной задачей, является поиск числа путей от точки 0 до $2n$, если разрешено проводить ломанные под углом в 45° вверх и вниз, не выходя ниже оси абсцисс.

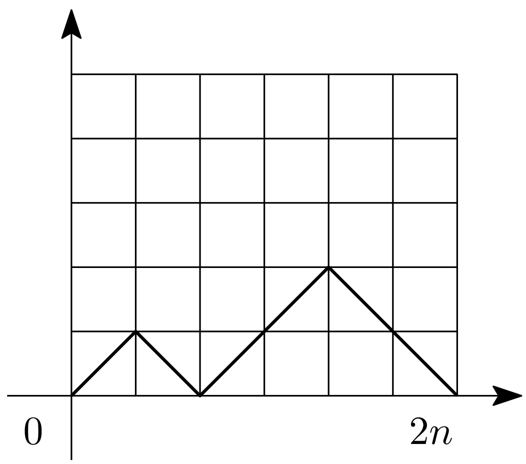

Рис. 3: Число путей Дика.

Данная задача однозначно сопоставляется с задачей про скобки. Когда идем наверх скобка открывается, когда идем вниз скобка закрывается. Поэтому каждая скобочная структура может быть определена такой ломаной. Следовательно и путей всего может быть c_n.

Rm: 2. Книга Ландо "Производящие функции" содержит большое количество примеров, связанных с производящими функциями.

(III) Многочлены Лежандра

Есть материальная точка x_0 с массой m_0 и есть другая материальная точка x с массой m. Спрашивается с какой силой точка (x, m) притягивается к (x_0, m_0). Вспоминая формулу из физики:

$$F = -\frac{\gamma m m_0 (x - x_0)}{|x - x_0|^3}$$

У силы есть потенциал (то из чего дифференцированием, получилась сила) U:

$$U = \frac{\gamma m m_0}{|x - x_0|}, \ F = \nabla U$$

Что будет, если у точек очень много (x_j, m_j) и все притягивают точку (x, m). Рассмотрим:

$$U = \sum_j \frac{\gamma m m_j}{|x - x_j|}$$

Если эти точки находятся достаточно удаленно, то может быть не видно, что там множество точек и физиками было предложено взять центр масс, в который собирается вся масса и считать, что это одна точка, которая притягивает. Это означает, что мы хотим заменить потенциал примерно следующим выражением:

$$U = \sum_j \frac{\gamma m m_j}{|x - x_j|} \sim \frac{\gamma m \cdot \sum\limits_j m_j}{|x - x_0|}$$

Возникает естественный вопрос, а какова погрешность таких замен? Что происходит, когда мы так заменяем? Собственно этим вопросом когда-то задался Лежандр. Возьмем какой-либо y среди этих точек и попробуем осознать, какое же получится отличие. Пусть расстояние между y и x_0 равно r_0, расстояние между x и x_0 равно r, а угол между xx_0 и yx_0 равен θ.

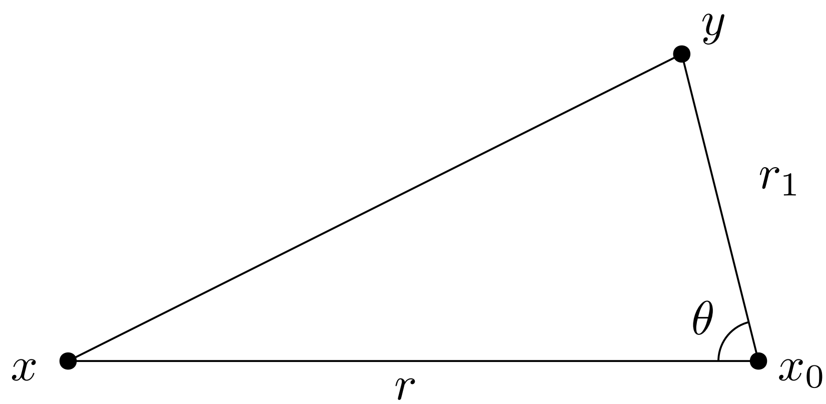

Рис. 4: Оценка замены точек x_j центром масс x_0.

Пусть $t = \cos\theta$, тогда по теореме косинусов $|x - y| = \sqrt{r^2 + r_1^2 - 2r_1 rt}$, также обозначим $\alpha = \frac{r_1}{r}$. Поскольку считаем, что до массы точек расстояние очень большое (летает далеко), то $\alpha < 1$. Тогда:

$$|x - y| = \sqrt{r^2 + r_1^2 - 2r_1 rt} = r\sqrt{1 + \alpha^2 - 2\alpha t} \Rightarrow \frac{1}{|x - y|} = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2 - 2\alpha t}} = \frac{1}{r} \cdot (*)$$

Поскольку α - мало, разложим последнее выражение в степенной ряд, обозначив коэффициенты $P_n(t)$:

$$\frac{1}{|x - y|} = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2 - 2\alpha t}} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) \alpha^n, \ P_0(t) = 1$$

Подставим это выражение в формулу потенциала для каждой точки и распишем асимптотику:

$$U = \sum_j \frac{\gamma m m_j}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_j^n}{r^n} P_n(t_j) = \frac{\gamma m \sum\limits_j m_j}{r} + \frac{\gamma m}{r^2} \sum_j m_j r_j P_1(t_j) + \dots$$

Коэффициенты $P_n(t)$ это многочлены по t, обладающие многими хорошими свойствами, они называются многочленами Лежандра. Видно, что эти многочлены Лежандра появляются также как появлялись последовательности: с помощью производящей функции $(*) \Rightarrow$ можно порождать функциональные последовательни. Попробуем понять, как устроены эти многочлены. Продифференцируем $(*)$:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2 - 2\alpha t}} \right)' = \frac{-\alpha + t}{(1 + \alpha^2 - 2\alpha t)\sqrt{1 + \alpha^2 - 2\alpha t}} = \sum_{n=1}^{\infty} n P_n(t) \alpha^{n-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (t - \alpha) \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) \alpha^n = (1 + \alpha^2 - 2\alpha t) \sum_{n=1}^{\infty} n P_n(t) \alpha^{n-1}$$

И приравниваем коэффициенты при слагаемых с обеих сторон:

$$\alpha_n\colon tP_n(t) - P_{n-1}(t) = (n+1)P_{n+1}(t) + (n-1)P_{n-1}(t) - 2ntP_n(t)$$

Приведем подобные и получим:

$$(n+1)P_{n+1}(t) = (1+2n)tP_n(t) - nP_{n-1}(t)$$

Видно, что если первые два коэффициента это многочлены, то дальше будут только многочлены.