Ряды с неотрицательными слагаемыми

Ряды с неотрицательными слагаемыми полезно сравнивать друг с другом.

Следствие 1. Пусть, начиная с некоторого номера, выполнено:

$$\forall n,\ c_1 b_n \leq a_n \leq c_2 b_n$$

где $c_1, c_2 > 0$ - фиксированы $\Rightarrow$ ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся и расходятся одновременно.

Мы рассмотрели наборы примеров, один из которых это геометрическая прогрессия. Докажем несколько простых наблюдений, которые по сути своей состоят в сравнении данного ряда с геометрической прогрессией.

Утв. 1. (**Признак Даламбера**) Пусть $a_n > 0$, тогда:

(1) Если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;

(2) Если $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q > 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится;

(3) Если $q = 1$, то ничего сказать нельзя;

$\square$ Вспомним, что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, c_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{k>n} c_k$ и $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, c_n = \lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_{k>n} c_k$. Тогда:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sup\limits_{k>n} \dfrac{a_{k+1}}{a_k} \right) = q < 1 \Rightarrow$ некая последовательность точных верхних граней сходится к некоторому числу $q < 1$. Тогда пусть $q < q_0 < 1$, получим:

$$\exists\, n_0 \colon \forall n > n_0,\ \sup_{k>n} \frac{a_{k+1}}{a_k} < q_0 < 1 \Rightarrow \forall k > n_0 + 1,\ \frac{a_{k+1}}{a_k} < q_0 < 1$$

Поскольку точная верхняя грань меньше, чем q_0, то все такие элементы $\dfrac{a_{k+1}}{a_k}$ тем более меньше, чем q_0. Отбросим элементы $a_1, a_2, \ldots, a_{n_0+1}$. Далее считаем что $\forall k,\ \dfrac{a_{k+1}}{a_k} < q_0 < 1$. Тогда:

$$a_n = a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \ldots \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} \leq a_1 \cdot q_0 \cdot q_0 \cdot \ldots \cdot q_0 = a_1 \cdot q_0^{n-1}$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_1 q_0^{n-1}$ сходится $\Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ тоже сходится;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\inf\limits_{k>n} \dfrac{a_{k+1}}{a_k} \right) = q > 1 \Rightarrow$ тогда выпишем формально:

$$\exists\, n_0 \colon \forall n > n_0,\ \inf_{k>n} \frac{a_{k+1}}{a_k} > 1 \Rightarrow \forall k > n_0 + 1,\ \frac{a_{k+1}}{a_k} > 1 \Rightarrow a_{k+1} > a_k \Rightarrow a_k \nrightarrow 0$$

Последовательность положительных чисел не может возрастать и одновременно стремиться к нулю. И таким образом, необходимое условие сходимости не выполняется;

$\blacksquare$

Утв. 2. (**Признак Коши**) Пусть $a_n \geq 0$, тогда:

(1) Если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = q < 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;

(2) Если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = q > 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится;

(3) Если $q = 1$, то ничего сказать нельзя;

Rm: 1. При расходимости в качестве q вполне допустима $+\infty$.

Rm: 2. Всё доказательство сведется к неравенству $a_n \leq q^n$ для какого-то q. Но лучше писать $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ потому что корень из n асимптотически убивает любой множитель при q^n. Например, при $a_n \leq nq^n$ можно увидеть, что асимптоически ничего не меняется: $\sqrt[n]{a_n} \leq q \cdot \sqrt[n]{n}$, где $\sqrt[n]{n} \to 1$.

□

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sup\limits_{k>n} \sqrt[k]{a_k}\right) = q < 1$. Тогда будет верно следующее:

$$\exists\, q_0 < 1 \wedge n_0 \colon \forall n > n_0,\ \sup_{k>n} \sqrt[k]{a_k} < q_0 < 1 \Rightarrow \forall k > n_0 + 1,\ \sqrt[k]{a_k} < q_0 < 1 \Rightarrow a_k < q_0^k$$

Тем самым, начиная с некоторого номера члены ряда мажорируются чистой геометрической прогрессией $\Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;

(2) Верхний предел это наибольший из частичных пределов, тогда:

$$\exists\,\{n_k\} \colon\ \sqrt[n_k]{a_{n_k}} \to q > 1$$

В частности:

$$\exists\, K \colon \forall k > K,\ \sqrt[n_k]{a_{n_k}} > 1 \Rightarrow a_{n_k} > 1$$

Это в точности означает, что $a_n \nrightarrow 0$

■

Rm: 3. Между критериями есть взаимосвязь: признак Даламбера $\Rightarrow$ признак Коши. При этом есть ряды, которые по признаку Даламбера не исследуется, но исследуется по признаку Коши. Типичный пример:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \ldots$$

Поскольку будут иметься такие члены a_n, что отношение $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ при больших n будет уходить в бесконечность и признак Даламбера не даст адекватного результата.

Бесконечные произведения

Пусть $\{b_n\}$ - числовая последовательность.

Опр: 1. Выражение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ называется бесконечным произведением, где b_n называются множителями.

Опр: 2. Выражение $\prod_N = \prod\limits_{n=1}^{N} b_n$ называется частичным произведением.

Опр: 3. Если существует конечный, отличный от нуля, предел $\lim\limits_{N\to\infty} \prod_N$, то говорят, что произведение сходится и равно этому пределу: $\lim\limits_{N\to\infty} \prod_N \neq 0$.

Опр: 4. Если $\lim\limits_{N\to\infty} \prod_N = 0$, то говорят, что произведение расходится к нулю. В остальных случаях говорят, что произведение расходится.

Утв. 3. (**Необходимое условие сходимости**) Если $\prod\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то $b_n \to 1$.

□ Поскольку бесконечное произведение сходится ⇒ не к нулю ⇒ среди b_n нулей нет и частичные произведения точно отличны от нуля. Возьмем следующее отношение:

$$b_n = \frac{\prod_n}{\prod_{n-1}} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} b_k}{\prod\limits_{k=1}^{n-1} b_k} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{\prod\limits_{k=1}^{\infty} b_k}{\prod\limits_{k=1}^{\infty} b_k} = 1$$

■

Rm: 4. Поскольку b_n в сходящихся бесконечных произведениях стремятся к единице, то начиная с некоторого номера они точно больше 0. Точно также, как и в рядах можно отбрасывать конечное число множителей если они не нулевые, потому что делим фиксированные суммы на число или умножаем на фиксированное число.

Теорема 1. Пусть $b_n > 0$, тогда $\prod\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится ⇔ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln b_n$ сходится. В случае сходимости имеют место равенства:

$$e^{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln b_n} = \prod_{n=1}^{\infty} b_n$$

$$\ln\left(\prod_{n=1}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln b_n$$

□ Функции e^x, $\ln x$ - непрерывные, верны формулы $e^{\sum\limits_{n=1}^{N} \ln b_n} = \prod\limits_{n=1}^{N} b_n$ и $\ln\left(\prod\limits_{n=1}^{N} b_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{N} \ln b_n$. Здесь важно, что мы запретили произведению сходится к нулю.

$(\Rightarrow)$ Если $\prod\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ - сходится, то по определению $\lim\limits_{N\to\infty}\prod\limits_{n=1}^{N} b_n = C > 0$. Так как $\ln x$ непрерывен на $(0,+\infty)$, то верно следующее $\ln\left(\prod\limits_{n=1}^{N} b_n\right) \xrightarrow[N\to\infty]{} \ln C$, но $\ln\left(\prod\limits_{n=1}^{N} b_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{N}\ln b_n \Rightarrow$ ряд из $\ln b_n$ - сходится.

$(\Leftarrow)$ Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln b_n$ - сходится, то по определению $\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{N}\ln b_n = C$. Так как e^x непрерывна на $\mathbb{R}$, то верно следующее $e^{\sum\limits_{n=1}^{N}\ln b_n} \xrightarrow[N\to\infty]{} e^C$, но $e^{\sum\limits_{n=1}^{N}\ln b_n} = \prod\limits_{n=1}^{N} b_n \Rightarrow$ бесконечное произведение из b_n - сходится. ■

Мы знаем, что $b_n \to 1$, это можно записать как $b_n = 1 + \beta_n$, $\beta_n \to 0$. Предполагаем, что $b_n > 0$, но это вовсе не означает, что $\beta_n > 0$. Согласно предыдущей теореме, исследование сходимости бесконечного произведения свелось бы к исследованию ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\beta_n)$$

Из прошлой лекции мы знаем, что знакопеременный ряд нельзя проверять асимптотическими методами по первому приближению. Нужен знакопостоянный ряд.

Утв. 4. Следующий ряд $\sum\limits_{n}|\ln(1+\beta_n)|$ - сходится $\Leftrightarrow$ $\sum\limits_{n}|\beta_n|$ - сходится. В частности, если сумма модулей $\sum\limits_{n}|\beta_n|$ - сходится, то и бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+\beta_n)$ - сходится.

□ Мы знаем, что:

$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{\ln(1+x)}{x}\right| = 1$$

Пусть $\varepsilon = \frac{1}{2}$, тогда:

$$\exists\,\delta > 0\colon \forall x \in (-\delta,\delta)\setminus\{0\},\ -\frac{1}{2} \le \left|\frac{\ln(1+x)}{x}\right| - 1 \le \frac{1}{2} \Rightarrow \forall x \in (-\delta,\delta),\ \frac{1}{2}|x| \le |\ln(1+x)| \le \frac{3}{2}|x|$$

Далее рассматриваем только случай β_n стремящегося к нулю (так получится для доказательства в обе стороны по необходимому условию сходимости).

$$\exists\, n_0\colon \forall n > n_0,\ \frac{1}{2}|\beta_n| \le |\ln(1+\beta_n)| \le \frac{3}{2}|\beta_n|$$

Таким образом, слагаемые одного ряда оцениваются слагаемыми другого с константами $\Rightarrow$ по следствию сходимости рядов с неотрицательными слагаемыми оба ряда сходятся и расходятся одновременно $\Rightarrow$ требуемое - выполнено. ■

Rm: 5. Заметим, что модуль убрать нельзя, иначе сыграют слагаемые более глубокого разложения логарифма (второго порядка).

Упр. 1. Доказать, что из сходимости рядов $\sum\limits_{n}\beta_n$ и $\sum\limits_{n}\beta_n^2$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{n}\ln(1+\beta_n)$.

Указание: $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$.

☐ Воспользуемся разложением ряда Тейлора функции $\ln(1+x)$:

$$\ln(1+\beta_n) = \beta_n - \frac{\beta_n^2}{2} + o(\beta_n^2) \Rightarrow \beta_n - \ln(1+\beta_n) = \frac{\beta_n^2}{2} + o(\beta_n^2)$$

Рассмотрим предел следующего отношения:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\beta_n - \ln(1+\beta_n)|}{\beta_n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\dfrac{\beta_n^2}{2} + o(\beta_n^2)\right|}{\beta_n^2} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{2} + \frac{o(\beta_n^2)}{\beta_n^2}\right| = \frac{1}{2}$$

Таким образом, по следствию из прошлой лекции ряды β_n^2 и $|\beta_n - \ln(1+\beta_n)|$ сходятся одновременно. Первый ряд по условию сходится $\Rightarrow$ ряд $\beta_n - \ln(1+\beta_n)$ сходится абсолютно $\Rightarrow$ сходится. Таким образом:

$$\exists \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} (\beta_n - \ln(1+\beta_n)) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \beta_n - \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \ln(1+\beta_n)$$

А поскольку ряд $\sum\limits_n \beta_n$ сходится, то существует предел частичной суммы $\Rightarrow$ существует предел частичной суммы второго слагаемого в правой части выше $\Rightarrow$ ряд $\sum\limits_n \ln(1+\beta_n)$ также будет сходится. ■

Упр. 2. Привести пример, когда обратное утверждение не верно. То есть ряд $\sum\limits_n \ln(1+\beta_n)$ сходится, но ряды $\sum\limits_n \beta_n$ и $\sum\limits_n \beta_n^2$ расходятся.

☐ Рассмотрим следующий ряд: $\forall n \in \mathbb{N}$, $\beta_{2n-1} = \dfrac{1}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n}$, $\beta_{2n} = -\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{2N} \beta_n = \sum\limits_{n=1}^{N} \dfrac{1}{n} \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n} \Rightarrow$ расходится.

Аналогично, $\beta_{2n-1}^2 + \beta_{2n}^2 = \dfrac{2}{n} + \dfrac{2}{n\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n^2} \geq \dfrac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ и таким образом, ряд $\sum\limits_{n=1}^{2N} \beta_n^2 \geq \sum\limits_{n=1}^{N} \dfrac{1}{n} \Rightarrow$ по следствию из прошлой лекции, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_n^2$ расходятся вместе с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$.

Рассмотрим $\prod\limits_n (1+\beta_n)$, если этот ряд сходится, то $\sum\limits_n \ln(1+\beta_n)$ также будет сходиться. Верно следующее: $\forall n \in \mathbb{N}$, $(1+\beta_{2n-1})(1+\beta_{2n}) = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n\sqrt{n}} = 1 - \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$, следовательно получим:

$$\prod_{n=1}^{2N} (1+\beta_n) = \prod_{n=1}^{N} \left(1 - \frac{1}{n\sqrt{n}}\right) = \prod_{n=1}^{N} \left(1 - \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$$

Поскольку ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right|$ сходится, то сходится и правая часть уравнения выше, а значит и $\prod\limits_n (1+\beta_n)$. ■

Разложение $\sin x$ в бесконечное произведение

Пусть $P(x)$ - многочлен и $x_1, \dots, x_n$ - его корни. Тогда разложим многочлен на множители:

$$P(x) = A(x - x_1)\cdot \ldots \cdot(x - x_n)$$

Если раскладывать по аналогии $\sin x$, то получим:

$$\sin x = A\prod_n (x - \pi n)$$

но такое произведение не является сходящимся. Преобразуем разложение многочлена:

$$P(x) = (-1)^n A x_1\cdot \ldots \cdot x_n\cdot \left(1 - \frac{x}{x_1}\right)\cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{x}{x_n}\right) = C\cdot \left(1 - \frac{x}{x_1}\right)\cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{x}{x_n}\right)$$

Представим аналогичным способом разложение синуса. Учитывая что n бегают по всем целым, соберем разность квадратов и получим следующее разложение:

$$\sin x = (x - 0)\cdot \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right) = x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right)$$

Rm: 6. Такое разложение возможно не только для функции $\sin x$, в комплексном анализе рассматриваются целые классы функции раскладывающиеся по нулям.

Теорема 2. (**Эйлера**)

$$\sin x = x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right)$$

Rm: 7. Выражение в правой части сходится при всех $x \neq \pi n$, а при $x = \pi n$ расходится к нулю. Поэтому можно считать, что равенство имеет место для всех $x \in \mathbb{R}$.

□ Мы знаем из школы, что $\sin{(2N+1)t} = \sin t\cdot P_N(\sin^2 t)$, где $P_N(x)$ - многочлен степени N.

Упр. 3. Доказать данное выражение по индукции, рассмотрев сумму: $\sin(2N+3)t + \sin(2N-1)t$.

□ Воспользуемся формулой сложения синусов и косинуса двойного угла:

$$\sin{(2N+3)t} + \sin{(2N-1)t} = 2\sin{(2N+1)t}\cdot \cos 2t = 2\sin{(2N+1)t}\cdot(1 - 2\sin^2 t)$$

<u>База</u>: $\sin 3t = \sin t\cdot P_1(\sin^2 t)$, разложим $\sin 3t$:

$$\sin 3t = \sin 2t + t = \sin 2t\cdot \cos t + \cos 2t\cdot \sin t = (2\sin t\cdot \cos t)\cdot \cos t + (1 - 2\sin^2 t)\cdot \sin t =$$

$$= 2\sin t\cdot(1 - \sin^2 t) + (1 - 2\sin^2 t)\cdot \sin t = 3\sin t - 4\sin^3 t = \sin t\cdot(3 - 4\sin^2 t) = \sin t\cdot P_1(\sin^2 t)$$

Или, используя формулу выше при $N = 0$, получим аналогичное:

$$\sin 3t + \sin{(-t)} = 2\sin t\cdot(1 - 2\sin^2 t) \Rightarrow \sin 3t = 3\sin t - 4\sin^3 t$$

<u>Шаг</u>: пусть выражение верно для N: $\sin{(2N+1)t} = \sin t\cdot P_N(\sin^2 t)$, рассмотрим случай $N+1$:

$$(2(N+1)+1)t = (2N+3)t \Rightarrow \sin{(2N+3)t} = 2\sin{(2N+1)t}\cdot(1 - 2\sin^2 t) - \sin{(2N-1)t}$$

По индукции верно: $\sin{(2N-1)t} = \sin t{\cdot}P_{N-1}(\sin^2 t)$ и $\sin{(2N+1)t} = \sin t{\cdot}P_N(\sin^2 t)$, тогда получим:

$$\sin{(2N+3)t} = 2\sin t{\cdot}P_N(\sin^2 t){\cdot}(1-2\sin^2 t) - \sin t{\cdot}P_{N-1}(\sin^2 t) = \sin t{\cdot}(P_{N+1}(\sin^2 t) - P_{N-1}(\sin^2 t))$$

где последнее равенство верно, поскольку умножение многочлена степени N на многочлен степени 1 дает новый многочлен степени $N+1$, тогда:

$$\sin{(2N+3)t} = \sin t{\cdot}(P_{N+1}(\sin^2 t))$$

где последнее верно в силу того, что степени многочленов различны и максимальная степень равна $N+1$. Таким образом, получили требуемое. ■

Перепишем исходное выражение в следующем виде:

$$\frac{\sin{(2N+1)t}}{\sin t} = P_N(\sin^2 t)$$

Корни этого многочлена можно найти из равенства нулю левой части:

$$(2N+1)t = \pi n \Rightarrow t = \frac{\pi n}{2N+1} \Rightarrow \sin^2\left(\frac{\pi n}{2N+1}\right)$$

Теперь, когда n будет пробегать $1, 2, \ldots, N$ наберём как раз N различных корней, а потом он пойдет на повтор (поскольку от 0 до $\dfrac{\pi}{2}$ квадрат синуса возрастает). Следовательно, можно будет многочлен разложить на множители:

$$\frac{\sin{(2N+1)t}}{\sin t} = P_N(\sin^2 t) = C_N{\cdot}\prod_{n=1}^{N}\left(1 - \frac{\sin^2 t}{\sin^2\frac{\pi n}{2N+1}}\right)$$

Как найти константу? Пусть $t \to 0$ тогда слева будет стремление к $2N+1$ по замечательному пределу, а справа к C_N. Следовательно, получим что $C_N = (2N+1)$.

Возьмем $t = \dfrac{x}{2N+1}$, тогда получим:

$$\sin x = (2N+1){\cdot}\sin\frac{x}{2N+1}{\cdot}\prod_{n=1}^{N}\left(1 - \frac{\sin^2\frac{x}{2N+1}}{\sin^2\frac{\pi n}{2N+1}}\right)$$

Эвристически: Устремляем $N \to \infty$ и пользуемся замечательными пределами $\Rightarrow$ получим требуемое. Но проблема в том, что нельзя устремлять N и в множителях, и в их количестве. Поэтому этот предельный переход требует обоснования.

(Продолжение доказательства из лекции 3): Разделим полученный многочлен на главную и хвостовую части:

$$\sin x = \left[(2N+1){\cdot}\sin\frac{x}{2N+1}{\cdot}\prod_{n=1}^{J}\left(1 - \frac{\sin^2\frac{x}{2N+1}}{\sin^2\frac{\pi n}{2N+1}}\right)\right]{\cdot}\prod_{n=J+1}^{N}\left(1 - \frac{\sin^2\frac{x}{2N+1}}{\sin^2\frac{\pi n}{2N+1}}\right)$$

Поскольку тождество верно $\forall N$, устремим $N \to \infty$, тогда:

$$\lim_{N\to\infty}(2N+1){\cdot}\sin\frac{x}{2N+1} = x,\ \lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{J}\left(1 - \frac{\sin^2\frac{x}{2N+1}}{\sin^2\frac{\pi n}{2N+1}}\right) = \prod_{n=1}^{J}\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right)$$

У первой части тождества есть конечный предел, значит есть конечный предел и у второй части тождества, обозначием его R_J:

$$\lim_{N\to\infty}\prod_{n=J+1}^{N}\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2N+1}}{\sin^2\frac{\pi n}{2N+1}}\right)=R_J$$

Нам необходимо как-то этот предел оценить, поскольку мы хотим получить бесконечное произведение. Если покажем, что $\lim\limits_{J\to\infty} R_J=1$, то всё будет доказано. Мы получили, что $\forall J$ верно:

$$\sin x = x\cdot\prod_{n=1}^{J}\left(1-\frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right)\cdot R_J$$

Очевидна оценка сверху (поскольку идет перемножение членов, меньше единицы):

$$\prod_{n=J+1}^{N}\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2N+1}}{\sin^2\frac{\pi n}{2N+1}}\right)\le 1$$

Найдем оценку снизу. Вспоминая, что если угол x был в интервале $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, то $\sin x\le x$. И поскольку $\sin x$ на этом интервале это выпуклая функция, то она больше секущей на нём $\Rightarrow \sin x\ge\frac{2}{\pi}x$.

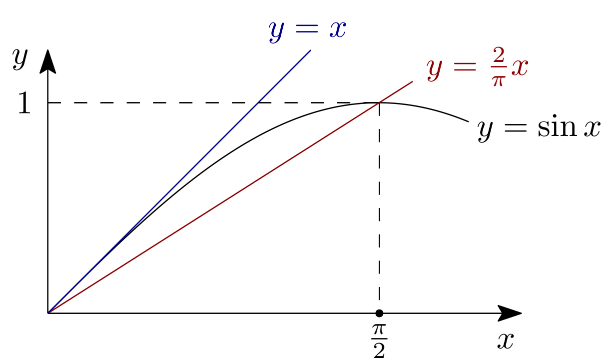

Рис. 1: Оценка функции $\sin x$ на интервале $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Таким образом:

$$\forall x\in\left(0,\tfrac{\pi}{2}\right),\ \frac{2}{\pi}x\le\sin x\le x$$

Возьмем J достаточно большим так, чтобы $\forall N>J$, $\dfrac{|x|}{2N+1}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, тогда:

$$\frac{\sin^2\frac{x}{2N+1}}{\sin^2\frac{\pi n}{2N+1}}\le\frac{\frac{x^2}{(2N+1)^2}}{\frac{4\pi^2n^2}{\pi^2(2N+1)^2}}=\frac{x^2}{4n^2}$$

Следовательно, получили оценку снизу для достаточно больших J:

$$\prod_{n=J+1}^{N}\left(1-\frac{x^2}{4n^2}\right)\le\prod_{n=J+1}^{N}\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2N+1}}{\sin^2\frac{\pi n}{2N+1}}\right)\le 1$$

Перейдем к пределу по N, поскольку $\sum\limits_n\left|\dfrac{x^2}{4n^2}\right|$ сходится, то произведение $\prod\limits_n\left(1-\dfrac{x^2}{4n^2}\right)$ сходится и мы получим следующие неравенства:

$$\prod_{n=J+1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{4n^2}\right)\le R_J\le 1$$

Устремим $J \to \infty$, тогда получим:

$$\lim_{J\to\infty} \prod_{n=J+1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{4n^2}\right) = \lim_{J\to\infty} \frac{\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{4n^2}\right)}{\prod\limits_{n=1}^{J} \left(1 - \frac{x^2}{4n^2}\right)} = 1 \Rightarrow \lim_{J\to\infty} R_J = 1$$

Следовательно, используя сходимость $\sum\limits_n \left|\frac{x^2}{4n^2}\right|$, получим требуемое:

$$\sin x = \lim_{J\to\infty} \left(x \cdot \prod_{n=1}^{J} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right) \cdot R_J\right) = x \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right) \cdot 1 = x \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right)$$

■