Ряды Фурье

Мотивация для рядов Фурье

Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^3$, в нём есть скалярное произведение $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$. Пусть в $\mathbb{R}^3$ также задан ортонормированный базис:

$$\begin{array}{rcl} e_1 & = & (1,0,0) \\ e_2 & = & (0,1,0) \\ e_3 & = & (0,0,1) \end{array} \text{ - о.н.с., } \langle e_i, e_j\rangle = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \ \forall i, \ \|e_i\| = 1$$

Длину определяем как и раньше: $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Оказывается, что:

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \ x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$$

Это называется рядом Фурье, где x_i можно находить так: $x_i = \langle x, e_i\rangle$ - коэффициенты Фурье. Одновременно с этим, верна теорема Пифагора:

$$\|x\|^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2$$

это равенство будут называть равенством Парсеваля или равенством Ляпунова (модули стоят, чтобы индексы не потерялись). Также заметим, что если взять не все e_j, а только два из них или один, или ничего, то не всякий x разложиться в ряд Фурье. Нужна полнота.

Евклидово пространство

Опр: 1. Пусть E - линейное пространство над $\mathbb{C}$ (или $\mathbb{R}$). Предположим, что на $E \times E$ определена функция со значениями в $\mathbb{C}$ (или в $\mathbb{R}$), удовлетворяющая следующими свойствами:

1) $\langle x, x\rangle \in \mathbb{R}$, $\langle x, x\rangle \geq 0$, $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$;
3) $\langle \alpha x_1 + \beta x_2, y\rangle = \alpha \langle x_1, y\rangle + \beta \langle x_2, y\rangle$;

Тогда $\langle \cdot, \cdot\rangle$ называется скалярным произведением, а E называют Евклидовым пространством.

Rm: 1. В линейной алгебре пространства над $\mathbb{C}$ описанное выше называют обычно Эрмитовым, тогда как в анализе обычно делят пространства на Евклидовы и Гильбертовы, где в Евклидовом не требуется никакой полноты, а в Гильбертовом требуется полнота.

Опр: 2. Нормой будем называть корень из скалярного произведения: $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Теорема 1. (**неравенство Коши-Буняковского-Шварца**)

$$\forall x, y, \ |\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

☐ Рассмотрим квадратный трехчлен, пусть $t \in \mathbb{R}$, тогда:

$$0 \leq \langle x - ty, x - ty\rangle = \|x\|^2 - t\langle y, x\rangle - t\langle x, y\rangle + t^2\|y\|^2 = \|x\|^2 - 2t\,\mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle + t^2\|y\|^2$$

где последнее равенство верно в силу: $z + \overline{z} = a + bi + a - bi = 2a = 2\,\mathrm{Re}\,z$. Теперь возможны две ситуации:

(1) Пусть $\|y\| = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow 0 \leq 0$ - выполнено;

(2) Пусть $\|y\| \neq 0 \Rightarrow D \le 0 \Leftrightarrow 4(\mathrm{Re}\,\langle x,y\rangle)^2 - 4\|x\|^2{\cdot}\|y\|^2 \le 0 \Leftrightarrow |\,\mathrm{Re}\,\langle x,y\rangle\,| \le \|x\|{\cdot}\|y\|$, поскольку полученное неравенство справедливо для любых x, y, то возьмем $x = \lambda z$, $\lambda \in \mathbb{C}$, тогда:

$$\forall y, z,\ \forall \lambda \in \mathbb{C},\ |\,\mathrm{Re}\,\lambda\,\langle z,y\rangle\,| \le |\lambda|{\cdot}\|z\|{\cdot}\|y\|$$

Пусть $|\lambda| = 1 \Rightarrow$ мы получим неравенство:

$$\forall y, z,\ \forall \lambda \in \mathbb{C},\ |\lambda| = 1,\ |\,\mathrm{Re}\,\lambda\,\langle z,y\rangle\,| \le \|z\|{\cdot}\|y\|$$

Умножение на комплексное число, по модулю равное единице, это поворот:

$$z = x + iy \Rightarrow z = re^{i\theta},\ |z| = 1 \Rightarrow |z| = r = 1 \Rightarrow z = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \Rightarrow z{\cdot}\overline{z} = e^{i\theta}e^{-i\theta} = 1 = |z|$$

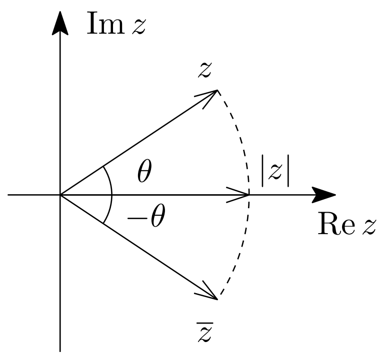

Рис. 1: Поворот на плоскости через домножение комплексного числа.

Следовательно, мы можем выбрать λ так, чтобы повернуть $\lambda\,\langle z,y\rangle$ до его модуля: $\lambda\,\langle z,y\rangle = |\,\langle z,y\rangle\,|$. Это λ можно выбрать явно:

$$\lambda = \frac{\overline{\langle z,y\rangle}}{|\,\langle z,y\rangle\,|} \Rightarrow \lambda\,\langle z,y\rangle = \frac{\langle z,y\rangle\cdot\overline{\langle z,y\rangle}}{|\,\langle z,y\rangle\,|} = \frac{|\,\langle z,y\rangle\,|^2}{|\,\langle z,y\rangle\,|} = |\,\langle z,y\rangle\,| \Rightarrow |\,\mathrm{Re}\,\lambda\,\langle z,y\rangle\,| = |\,\langle z,y\rangle\,| \le \|z\|{\cdot}\|y\|$$

Отметим, что в случае вещественного $\langle x,y\rangle$ равенство равносильно $D = 0 \Rightarrow$ есть корень в уравнении: $\langle x - ty, x - ty\rangle = 0 \Rightarrow \exists\, t\colon\ \langle x - ty, x - ty\rangle = 0 \Rightarrow x = ty$, то есть получили линейную зависимость. В случае, если $\langle x,y\rangle$ не вещественно, то удобно перевести в вещественный случай $\Rightarrow$ представим x в виде: $x = \lambda z \Rightarrow \exists\,\lambda\colon\ \langle x,y\rangle = \langle\lambda z,y\rangle = \lambda\,\langle z,y\rangle \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists\, t\colon\ \lambda z - ty = 0 \Rightarrow \lambda z = ty$, следовательно опять получили линейную зависимость.

■

Следствие 1. Норма $\|x\|$ - это действительно норма, то есть:

1) $\|x\| \ge 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2) $\|\alpha x\| = |\alpha|{\cdot}\|x\|$;
3) $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$;

□ Свойства $1) - 2)$ следуют сразу из свойств скалярного произведения:

1) $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle} \ge 0$, $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle} = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

2) $\|\alpha x\| = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x\rangle} = \sqrt{\alpha\overline{\langle \alpha x, x\rangle}} = \sqrt{\alpha\cdot\overline{\alpha}\,\langle x, x\rangle} = \sqrt{|\alpha|^2\,\langle x, x\rangle} = |\alpha|\cdot\|x\|$;

3) Распишем квадрат нормы от $x+y$:

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x, y\rangle + \|y\|^2$$

Поскольку верно: $\operatorname{Re} z = \operatorname{Re}(x+iy) = x \le |z| = \sqrt{x^2+y^2}$, то воспользуемся этим и применим неравенство КБШ:

$$\|x+y\|^2 \le \|x\|^2 + 2|\langle x, y\rangle| + \|y\|^2 \le \|x\|^2 + 2\|x\|\cdot\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

Берем корень и за счет неотрицательности получаем требуемое;

■

Утв. 1. Равенство параллелограмма: $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.

□ По определению:

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x,y\rangle + \|y\|^2$$

$$\|x-y\|^2 = \langle x-y, x-y\rangle = \langle x,x\rangle - \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle = \|x\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle x,y\rangle + \|y\|^2$$

Складываем два равенства и получаем требуемое. ■

Rm: 2. Отметим, что если равенство параллелограмма выполнено, то норма задается скалярным произведением. Если дали норму и пообещали, что она относится к скалярному произведению, то её легко восстановить. Например, в случае $\mathbb{R}$ будет верно:

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2$$

тогда скалярное произведение будет иметь следующий вид:

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)$$

Из линейной алгебры: билинейная форма восстанавливается по квадратичной функции. Остается вопрос, будут ли выполнены свойства скалярного произведения? Можно показать, что равенства параллелограмма достаточно, чтобы это оказалось скалярным произведением и свойства выполнялись.

Упр. 1. Проверить, что на $\mathbb{R}^2$ норма вида: $\|x\| = |x_1| + |x_2|$ не является нормой, порожденной скалярным произведением.

Сходимость в Евклидовых пространствах

Мы получили нормированное пространство $(E, \|\cdot\|)$. Значит можем определить в нём сходимости.

Опр: 3. Последовательность $\{x_n\}$ сходится к x в нормированном пространстве $(E, \|\cdot\|)$, тогда и только тогда, когда:

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n \Leftrightarrow \|x_n - x\| \to 0$$

Опр: 4. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_k$ сходится к x в нормированном пространстве $(E, \|\cdot\|)$, тогда и только тогда, когда:

$$x = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} x_k \Leftrightarrow \left\| \sum_{k=1}^{N} x_k - x \right\| \to 0$$

Следствие 2. Если $x_n \to x$ и $y_n \to y$, то $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle$, то есть скалярное произведение непрерывно по совокупности переменных.

□ Рассмотрим разность:

$$|\langle x, y\rangle - \langle x_n, y_n\rangle| \leq |\langle x, y\rangle - \langle x_n, y\rangle| + |\langle x_n, y\rangle - \langle x_n, y_n\rangle| = |\langle x - x_n, y\rangle| + |\langle x_n, y - y_n\rangle|$$

Воспользуемся неравенством КБШ:

$$|\langle x - x_n, y\rangle| + |\langle x_n, y - y_n\rangle| \leq \|x - x_n\|\cdot\|y\| + \|x_n\|\cdot\|y - y_n\| \leq \|x - x_n\|\cdot\|y\| + C\cdot\|y - y_n\| \to 0$$

где в последнем неравенстве мы воспользовались ограниченностью x_n, так как она сходится. ■

Примеры Евклидовых пространств

1) $E = \mathbb{R}^n$, $\langle x, y\rangle = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k$

□ Проверялось во 2-ом семестре; ■

2) $E = \mathbb{C}^n$, $\langle x, y\rangle = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \overline{y}_k$

□ Проверяется на линейной алгебре; ■

3) $E = R[a, b]$ - интегрируемые по Риману функции на $[a, b]$, $\langle f, g\rangle = \int\limits_a^b f(t)\overline{g(t)}dt$;

□ Проверим, будет ли указанный объект скалярным произведением:

1) Рассмотрим $\langle f, f\rangle$:

$$\langle f, f\rangle = \int_a^b |f(t)|^2 dt \geq 0, \ \int_a^b |f(t)|^2 dt = 0 \Leftarrow f = 0$$

Обратное для последнего - не выполняется, но мы получим, что f почти всюду 0:

$$\int_a^b |f(t)|^2 dt = 0 \Rightarrow f \overset{\text{п.в.}}{=} 0$$

Введём на $R[a,b]$ отношения эквивалентности:

$$f \sim g \Leftrightarrow f \overset{\text{п.в.}}{=} g$$

Далее, под $R[a,b]$ будем понимать множество классов эквивалентности и будем отождествлять функции, которые отличаются на множестве меры ноль. В этом случае 1) будет выполнятся;

2) Очевидно:

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt = \int_a^b \overline{g(t)\overline{f(t)}}dt = \overline{\langle g, f\rangle}$$

3) Очевидно из линейности интеграла:

$$\langle \alpha f_1 + \beta f_2, g\rangle = \int_a^b (\alpha f_1(t) + \beta f_2(t))\overline{g(t)}dt = \alpha \int_a^b f_1(t)\overline{g(t)}dt + \beta \int_a^b f_2(t)\overline{g(t)}dt =$$

$$= \alpha \langle f_1, g\rangle + \beta \langle f_2, g\rangle$$

■

Опр: 5. В линейном пространстве E будем говорить, что вектор u ортогонален вектору v, если:

$$\forall u, v \in E,\ u \perp v \Leftrightarrow \langle u, v\rangle = 0$$

Rm: 3. Заметим, что нулевой вектор ортогонален всем векторам: $\langle 0, v\rangle = 0$, $\forall v \in E$.

Теорема 2. (**Пифагора**)

(1) Если $u \perp v$, то $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$;

(2) Если $u = \sum\limits_n u_n$ и $\forall n \neq m$, $u_n \perp u_m$, то $\|u\|^2 = \sum\limits_n \|u_n\|^2$;

Rm: 4. Заметим, что в отличии от школьной теоермы обратные равенства не верны:

$$\|u\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle u, v\rangle + \|v\|^2 = \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \Rightarrow 2\operatorname{Re}\langle u, v\rangle = 0$$

Таким образом, теорема будет верна в обратную сторону только в вещественном случае, но в комплексном случае будет верна только в одну сторону.

□

(1) По определению нормы: $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x, y\rangle + \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$;

(2) Следует сразу из предыдущего пункта по индукции для конечного случая. Для бесконечного случая применяется конечный и берется предел;

■

Ортонормированные системы

Опр: 6. Конечный или счётный набор векторов $\{e_k\}$ называется ортонормированной системой (о.н.с.), если выполняются следующие условия:

(1) $\forall k$, $\|e_k\| = 1$;

(2) $\forall k \neq m$, $e_k \perp e_m$, $\Leftrightarrow \forall k \neq m$, $\langle e_k, e_m \rangle = 0$

Опр: 7. $\forall x \in E$, числа $\hat{x}_k = \langle x, e_k \rangle$ называются коэффициентами Фурье.

Опр: 8. Сумму вида $\sum\limits_k \hat{x}_k e_k$ называют рядом Фурье по системе $\{e_k\}$.

Смысл коэффициентов Фурье состоит в проекции на e_k: $\hat{x}_k e_k$ - проекция на e_k, $\hat{x}_k$ - длина проекции. Смысл ряда Фурье: x собирается как сумма своих проекций.

Утв. 2. Пусть $\mathcal{P} = \langle e_1, \ldots, e_N \rangle$ - линейная оболочка $e_1, \ldots, e_N$, где $\{e_i\}_{i=1}^N$ - о.н.с., тогда:

$$\forall x \in E,\ \forall y \in \mathcal{P},\ x - (\hat{x}_1 e_1 + \ldots + \hat{x}_N e_N) \perp y$$

Rm: 5. В линейной алгебре вектор разности выше принято называть ортогональной проекцией вектора x на пространство $\mathcal{P}$.

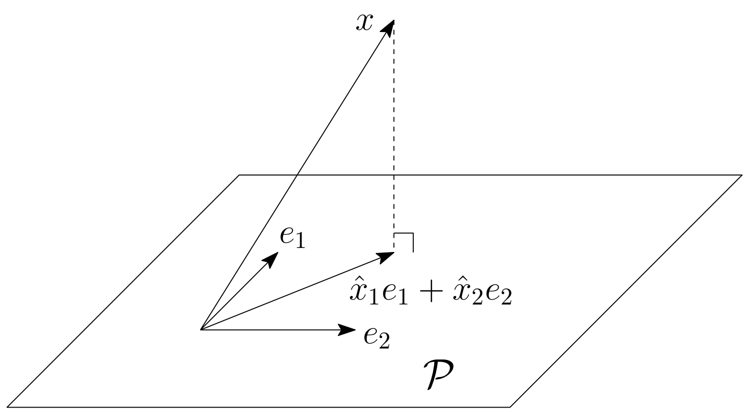

Рис. 2: Ортогональная проекция вектора x на пространство $\mathcal{P}$.

□ Поскольку $y \in \mathcal{P} \Rightarrow y = c_1 e_1 + \ldots + c_N e_N$, то достаточно проверить, что:

$$x - (\hat{x}_1 e_1 + \ldots + \hat{x}_N e_N) \perp e_k,\ \forall k = \overline{1, N}$$

Проверим ортогональность прямо по определению:

$$\langle x - (\hat{x}_1 e_1 + \ldots + \hat{x}_N e_N), e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - \sum_{j=1}^{N} \hat{x}_j \langle e_j, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - \hat{x}_k \langle e_k, e_k \rangle = \hat{x}_k - \hat{x}_k = 0$$

■

Утв. 3. (**экстремальное свойство коэффициентов Фурье**) Пусть $\mathcal{P} = \langle e_1, \ldots, e_N \rangle$ - линейная оболочка $e_1, \ldots, e_N$, где $\{e_i\}_{i=1}^N$ - о.н.с., тогда:

$$\forall x \in E,\ \min_{y \in \mathcal{P}} \|x - y\| = \|x - (\hat{x}_1 e_1 + \ldots + \hat{x}_N e_N)\|$$

и более того, $y = \hat{x}_1 e_1 + \ldots + \hat{x}_N e_N \in \mathcal{P}$ - единственный вектор на котором достигается минимум.

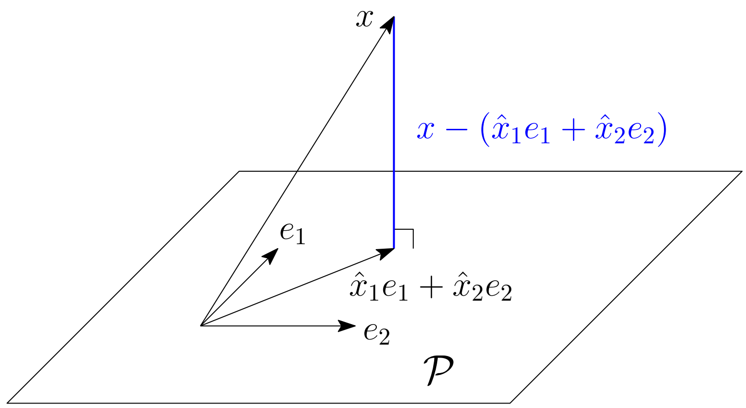

Рис. 3: Кратчайшее расстояние до $\mathcal{P}$.

Rm: 6. Отметим, что идейно это метод наименьших квадратов (МНК): надо найти в линейной оболочке данных векторов ближайший к вектору x, тогда можно провести ортогонализацию этих векторов и ответ получим прямо по формуле в свойстве.

□ Пусть $y \in \mathcal{P}$, рассмотрим квадрат расстояния: $\|x-y\|^2$, добавим и вычтем проекцию x на $\mathcal{P}$:

$$\|x-y\|^2 = \|x-(\hat{x}_1e_1+\ldots+\hat{x}_Ne_N)+(\hat{x}_1e_1+\ldots+\hat{x}_Ne_N)-y\|^2$$

$$x-(\hat{x}_1e_1+\ldots+\hat{x}_Ne_N)\perp\mathcal{P},\ (\hat{x}_1e_1+\ldots+\hat{x}_Ne_N)-y\in\mathcal{P}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x-(\hat{x}_1e_1+\ldots+\hat{x}_Ne_N)\perp(\hat{x}_1e_1+\ldots+\hat{x}_Ne_N)-y$$

Следовательно, мы можем применить теорему Пифагора:

$$\|x-y\|^2 = \|x-(\hat{x}_1e_1+\ldots+\hat{x}_Ne_N)\|^2+\|(\hat{x}_1e_1+\ldots+\hat{x}_Ne_N)-y\|^2 \geq \|x-(\hat{x}_1e_1+\ldots+\hat{x}_Ne_N)\|^2$$

$$\|(\hat{x}_1e_1+\ldots+\hat{x}_Ne_N)-y\|^2\geq 0 \wedge \|(\hat{x}_1e_1+\ldots+\hat{x}_Ne_N)-y\|^2=0 \Leftrightarrow y=\hat{x}_1e_1+\ldots+\hat{x}_Ne_N \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \|x-y\|^2=\|x-(\hat{x}_1e_1+\ldots+\hat{x}_Ne_N)\|^2 \Leftrightarrow y=\hat{x}_1e_1+\ldots+\hat{x}_Ne_N$$

■

Следствие 3. (**теорема Пифагора**) Если $e_1,\ldots,e_N$ - о.н.с., то верно следующее:

$$\forall x\in E,\ \left\|x-\sum_{k=1}^{N}\hat{x}_ke_k\right\|^2 = \|x\|^2-\sum_{k=1}^{N}|\hat{x}|^2$$

□ Чтобы увидеть здесь теорему Пифагора, перенесем слагаемое с минусом в левую часть, тогда:

$$\left\|x-\sum_{k=1}^{N}\hat{x}_ke_k\right\|^2+\sum_{k=1}^{N}|\hat{x}|^2=\|x\|^2$$

Одновременно с этим заметим:

$$\|x\|^2=\left\|x-\sum_{k=1}^{N}\hat{x}_ke_k+\sum_{k=1}^{N}\hat{x}_ke_k\right\|^2$$

Выше мы доказали, что: $x - \sum\limits_{k=1}^{N} \hat{x}_k e_k \perp \sum\limits_{k=1}^{N} \hat{x}_k e_k$, тогда по теореме Пифагора:

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{N} \hat{x}_k e_k + \sum_{k=1}^{N} \hat{x}_k e_k \right\|^2 = \left\| x - \sum_{k=1}^{N} \hat{x}_k e_k \right\|^2 + \left\| \sum_{k=1}^{N} \hat{x}_k e_k \right\|^2 = \left\| x - \sum_{k=1}^{N} \hat{x}_k e_k \right\|^2 + \sum_{k=1}^{N} |\hat{x}_k|^2 \|e_k\|^2 =$$

$$= \left\| x - \sum_{k=1}^{N} \hat{x}_k e_k \right\|^2 + \sum_{k=1}^{N} |\hat{x}_k|^2 \Rightarrow \|x\|^2 = \left\| x - \sum_{k=1}^{N} \hat{x}_k e_k \right\|^2 + \sum_{k=1}^{N} |\hat{x}_k|^2$$

■

Следствие 4. (**неравенство Бесселя**) Если $\{e_k\}$ - конечная или счётная о.н.с., то верно следующее:

$$\forall x \in E, \ \sum_{k} |\hat{x}_k|^2 \le \|x\|^2$$

□ Используя предыдущее следствие, будет верно:

$$\forall N \in \mathbb{N}, \ \sum_{k=1}^{N} |\hat{x}_k|^2 + \left\| x - \sum_{k=1}^{N} \hat{x}_k e_k \right\|^2 = \|x\|^2, \ 0 \le \left\| x - \sum_{k=1}^{N} \hat{x}_k e_k \right\|^2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{N} |\hat{x}_k|^2 \le \|x\|^2$$

Переходя к пределу при $N \to \infty$, мы получим неравенство для счетной о.н.с. ■

Из этого следствия сразу следует, что коэффициентами Фурье могут выступать далеко не любые последовательности чисел. Если последовательность чисел является коэффициентами Фурье, то сумма квадратов должна сходиться. Например, $\frac{1}{\sqrt{n}}$ не является последовательностью коэффициентов Фурье ни для какой о.н.с. ни в каком ортонормированном пространстве.

Главный вопрос, относящийся к коэффициентам Фурье: пусть $\{e_k\}$ - о.н.с., верно ли разложение:

$$x = \sum_{k} \hat{x}_k e_k$$

Например, в $\mathbb{R}^3$ системой из $\{e_1, e_2\}$ не всякий векторе $x = \hat{x}_1 e_1 + \hat{x}_2 e_2$. В конечномерном случае это так, если $\{e_k\}$ - это базис. В бесконечномерном пространстве есть алгебраический базис, но он никакого отношения к о.н.с не имеет. Пусть была система по которой могли всё представить, если оставить из неё только элементы с четными номерами,то уже заведомо не всё можно представить, хотя элементов всё также счетно много. Как в бесконечномерном случае проверять верность разложения? Можно это разбить на два вопроса:

(1) Есть некоторый $x \in E$, хотим понять раскладывается он или нет?

(2) Есть о.н.с., хотим понять, правда ли что всякий x раскладывается?

Ответом на первый вопрос будет равенство Парсеваля.

Теорема 3. (**равенство Парсеваля**) Если $\{e_k\}$ - о.н.с., то $\forall x \in E$, верно следующее:

$$x = \sum_k \hat{x}_k e_k \Leftrightarrow \|x\|^2 = \sum_k |\hat{x}_k|^2$$

□

($\Rightarrow$) По теореме Пифагора.

($\Leftarrow$) Воспользуемся равенством следствия (теорема Пифагора):

$$0 \le \left\| x - \sum_{k=1}^{N} \hat{x}_k e_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{N} |\hat{x}|^2$$

По условию выполнено:

$$\lim_{N\to\infty} \left(\|x\|^2 - \sum_{k=1}^{N} |\hat{x}|^2 \right) = 0 \Rightarrow \lim_{N\to\infty} \left\| x - \sum_{k=1}^{N} \hat{x}_k e_k \right\|^2 = 0 \Rightarrow x = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \hat{x}_k e_k = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{x}_k e_k$$

Следовательно, мы получим неравенство для счетной о.н.с. ■

Следующая теорема отвечает на второй поставленный вопрос.

Теорема 4. (**полнота о.н.с.**) Пусть $\{e_k\}$ - о.н.с. в Евклидовом пространстве E, тогда следующие утверждения равносильны:

(1) $\forall x \in E$, $x = \sum_k \hat{x}_k e_k$ (можно разложить в ряд Фурье);

(2) (**свойство полноты**) Замыкание линейной оболочки $\{e_k\} = E$, то есть:

$$\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists c_1, \ldots, c_N \colon \|x - (c_1 e_1 + \ldots + c_N e_N)\| < \varepsilon$$

Rm: 7. Свойство полноты также называют замкнутостью, тотальностью.

Rm: 8. Во (2)-ом утверждении в отличие от (1)-го используются произвольные $c_1, \ldots, c_N$. Это удобнее, чем утверждение (1), чтобы ответить на вопрос: а **когда** можно раскладывать в ряд Фурье? Но (1)-ое лучше тем, что там известны коэффициенты и есть понимание **чем** приближать ряд Фурье. Вместе с этим, точность с каждым новым коэффициентом в (1) не ухудшается, поскольку новые слагаемые добавляются не изменяя предыдущие:

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{N} \hat{x}_k e_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{N} |\hat{x}|^2 \ge \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{N+1} |\hat{x}|^2 = \left\| x - \sum_{k=1}^{N+1} \hat{x}_k e_k \right\|^2$$

Во (2)-м утверждении при уменьшении ε нужно заново строить новое приближение:

$$\varepsilon \to \widetilde{\varepsilon} \Rightarrow \|x - (c_1 e_1 + \ldots + c_N e_N)\| \to \|x - (\widetilde{c}_1 e_1 + \ldots + \widetilde{c} e_{\widetilde{N}})\|$$

Особенно это заметно, когда приближаются непрерывные функции многочленами. Пусть задана последовательность: $a_0, a_1, \ldots, a_N, \ldots$ добавляя члены которой функция приближается лучше:

$$f \in C[-1,1],\ a_0, a_1, \ldots, a_N, \ldots \colon\ \left\| f(x) - \left(a_0 + a_1 x + \ldots + a_N x^N\right) \right\| \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

Если такая последовательность существует, то функция представима степенным рядом $\Rightarrow$ если он сходится, то внутри интервала сходится равномерно вместе со всеми производными и функция f была бы аналитической, а функция f всего лишь была непрерывной.

С учетом замечаний выше можно утверждать, что теорема Вейерштрасса как идея - хорошо, но как способ интерполяции - ужасна, потому что хорошего алгоритма приближения нет. Есть многочлены Бернштейна, но с каждой итерацией их вид будет меняться, в силу этого ряды Фурье лучше.

$\square$

(1) $\Rightarrow$ (2) В качестве искомых линейных комбинаций будут подходить частичные суммы:

$$\forall N \in \mathbb{N},\ c_1e_1 + \ldots c_Ne_N = \sum_{k=1}^{N} \hat{x}_k e_k$$

Следовательно x приближается $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \hat{x}_k e_k$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Мы хотим показать:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, N_0 \colon \forall N > N_0,\ \left\| x - \sum_{k=1}^{N} \hat{x}_k e_k \right\| < \varepsilon$$

Возьмем некоторое $\varepsilon > 0$, нам дано:

$$\exists N_0,\ c_1, \ldots, c_{N_0} \colon \|x - (c_1e_1 + \ldots c_{N_0}e_{N_0})\| < \varepsilon$$

Воспользуемся экстремальным свойством коэффициентов Фурье:

$$\forall N > N_0,\ \|x - (\hat{x}_1e_1 + \ldots + \hat{x}_Ne_N)\| \leq \|x - (c_1e_1 + \ldots + c_{N_0}e_{N_0} + 0\cdot e_{N_0+1} + \ldots + 0\cdot e_N)\| < \varepsilon$$

$\blacksquare$

Тригонометрические ряды Фурье

Рассмотрим пространство $R[0, 2\pi]$ (интегрируемые по Риману функции на отрезке $[0, 2\pi]$) с веществе-нозначными функциями. Скалярное произведение и норма будут иметь вид:

$$\langle f, g\rangle = \int\limits_0^{2\pi} f(x)g(x)dx,\ \|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle} = \sqrt{\int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx}$$

Как уже ранее обговаривали, будем отождествлять f и g, если $f = g$ п.в. (почти всюду).

Утв. 4. Набор функций:

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}\ \middle|\ n \in \mathbb{N}\right\}$$

является полной ортонормированной системой в пространстве $R[0, 2\pi]$.

□ Проверим, что система является ортонормированной:

(1) Проверим, что: $\forall k,\ \|e_k\| = 1$:

$$\left\|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right\| = \sqrt{\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} dx} = 1,\ \left\|\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}\right\| = \sqrt{\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos^2 nx}{\pi} dx},\ \left\|\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}\right\| = \sqrt{\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin^2 nx}{\pi} dx}$$

$$\int\limits_0^{2\pi} \cos^2(nx)dx = \frac{1}{n}\int\limits_0^{2\pi n} \cos^2(y)dy = \frac{1}{n}\sin(y)\cos(y)\Big|_{y=0}^{2\pi n} + \frac{1}{n}\int\limits_0^{2\pi n} \sin^2(y)dy = \frac{1}{n}\int\limits_0^{2\pi n} \sin^2(y)dy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int\limits_0^{2\pi n} \left(\cos^2(y) + \sin^2(y)\right) dy = 2\pi n = 2\int\limits_0^{2\pi n} \cos^2(y)dy = 2\int\limits_0^{2\pi n} \sin^2(y)dy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int\limits_0^{2\pi} \cos^2(nx)dx = \int\limits_0^{2\pi} \sin^2(nx)dx = \frac{1}{n}\pi n = \pi \Rightarrow \left\|\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}\right\| = \left\|\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}\right\| = 1$$

(2) Проверим, что: $\forall k \neq m,\ e_k \perp e_m,\ \Leftrightarrow \forall k \neq m,\ \langle e_k, e_m\rangle = 0$:

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}\right\rangle = \frac{1}{\pi\sqrt{2}}\int\limits_0^{2\pi} \cos(nx)dx = \frac{1}{n\pi\sqrt{2}}\sin(nx)\Big|_{x=0}^{2\pi} = 0$$

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}\right\rangle = \frac{1}{\pi\sqrt{2}}\int\limits_0^{2\pi} \sin(nx)dx = \frac{-1}{n\pi\sqrt{2}}\cos(nx)\Big|_{x=0}^{2\pi} = 0$$

$$\left\langle \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}\right\rangle = \frac{1}{n\pi}\int\limits_0^{2\pi} \sin(nx)d(\sin(nx)) = \frac{1}{2n\pi}\sin^2(nx)\Big|_{x=0}^{2\pi} = 0$$

Докажем, что система является полной. Надо проверить, что $\forall f \in R[0, 2\pi]$, $\forall \varepsilon > 0$ найдется линейная комбинация из тригонометрических функций и единицы: $1, \sin nx, \cos nx$ (то есть тригонометрический многочлен $T_P(x)$) такая, что:

$$\forall f \in R[0, 2\pi],\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists\, T_P(x)\colon \|f - T_P\| = \sqrt{\int\limits_0^{2\pi} |f(x) - T_P(x)|^2 dx} < \varepsilon$$

<u>**Идея**</u>: Всё доказательство будет состоять из нескольких шагов:

1) Сначала приблизим функцию $f(x)$ суммой индикаторов промежутков: $f(x) \sim \sum\limits_{k=1}^{N} c_j \mathbb{I}_{\Delta_j}(x)$;

2) Каждый индикатор приблизим 2π-периодической, непрерывной функцией $g_j(x)$: $\mathbb{I}_{\Delta_j}(x) \sim g_j(x)$;

3) Линейную комбинацию $g_j(x)$ мы приблизим многочленом $T_P(x)$: $\sum\limits_{j=1}^{N} c_j g_j(x) \sim T_P(x)$;

Если каждый раз приближение будет меньше ε, то в итоге получим $\|f - T_P\| < 3\varepsilon$.

3) По теореме Вейерштрасса: $T_P(x) \underset{P\to\infty}{\overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows}} \sum\limits_{j=1}^{N} c_j g_j(x) \Rightarrow$ под интегралом всё будет отлично сходиться к нулю;

2) Внутри отрезка $[0, 2\pi]$ возьмем промежуток $\Delta_j = \{a, b\}$, индикатор на нём $\mathbb{I}_{\Delta_j}(x)$ и построим из него непрерывную функцию в виде трапеции, отступив от концов промежутка на δ, а затем продолжим её до 2π-периодической непрерывной функции:

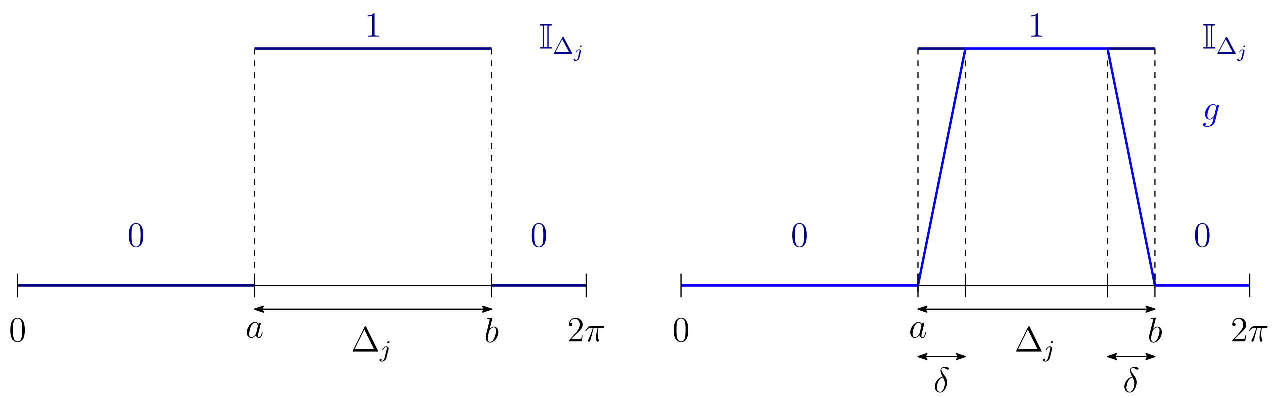

Рис. 4: Построение непрерывной функции из функции индикатора на $[0, 2\pi]$.

$$g_j(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 2\pi] \setminus [a, b] \\ \dfrac{x-a}{\delta}, & x \in [a, a+\delta] \\ 1, & x \in [a+\delta, b-\delta] \\ \dfrac{b-x}{\delta}, & x \in [b-\delta, b] \end{cases} \Rightarrow g_j(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \bigsqcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} [a+2\pi k, b+2\pi k] \\ \dfrac{x-a}{\delta}, & x \in [a+2\pi k, a+\delta+2\pi k],\ \forall k \in \mathbb{Z} \\ 1, & x \in [a+\delta+2\pi k, b-\delta+2\pi k],\ \forall k \in \mathbb{Z} \\ \dfrac{b-x}{\delta}, & x \in [b-\delta+2\pi k, b+2\pi k],\ \forall k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Посмотрим, будет ли $\mathbb{I}_{\Delta_j}(x)$ приближаться функцией $g_j(x)$ с точки зрения сходимости по норме:

$$\int\limits_0^{2\pi} |\mathbb{I}_{\Delta_j}(x) - g_j(x)|^2 dx = \int\limits_a^{a+\delta} |\mathbb{I}_{\Delta_j}(x) - g_j(x)|^2 dx + \int\limits_{b-\delta}^{b} |\mathbb{I}_{\Delta_j}(x) - g_j(x)|^2 dx \le \int\limits_a^{a+\delta} dx + \int\limits_{b-\delta}^{b} dx = 2\delta$$

Таким образом, выбирая δ достаточно маленьким, мы получим любую точность. Пусть каждую индикаторную функцию $\mathbb{I}_{\Delta_j}(x)$ мы научились приближать соответствующей функцией $g_j(x)$ для любого промежутка Δ_j, $j = \overline{1, N}$ внутри $[0, 2\pi]$:

$$\forall j = \overline{1, N},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 \colon \delta < \frac{\varepsilon^2}{2} \Rightarrow \sqrt{\int\limits_0^{2\pi} \left|\mathbb{I}_{\Delta_j}(x) - g_j(x)\right|^2 dx} < \sqrt{2\delta} < \varepsilon$$

Рассмотрим произвольную линейную комбинацию индикаторных функций и оценим её разность с линейной комбинацией приближающих функций:

$$\left\| \sum_{j=1}^{N} c_j \mathbb{I}_{\Delta_j} - \sum_{j=1}^{N} c_j g_j \right\| \le \sum_{j=1}^{N} |c_j| \cdot \left\| \mathbb{I}_{\Delta_j} - g_j \right\| \le \left(\sum_{j=1}^{N} |c_j| \right) \varepsilon$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$, можно сделать эту оценку сколь угодно маленькой:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 \colon \delta < \frac{\varepsilon^2}{2\left(\sum\limits_{j=1}^{N} |c_j| + 1\right)^2} \Rightarrow \left\| \sum_{j=1}^{N} c_j \mathbb{I}_{\Delta_j} - \sum_{j=1}^{N} c_j g_j \right\| < \varepsilon$$

1) Приблизим интегрируемую функцию линейной комбинацией индикаторов. Разобьем отрезок $[0, 2\pi]$ на полуинтервалы разбиением $\mathbb{T}$: $\Delta_k = [x_{k-1}, x_k)$, $\Delta_N = [x_{N-1}, x_N]$. Возьмем функцию:

$$f_{\mathbb{T}}(x) = \sum_{k=1}^{N} \inf_{\Delta_k} f \cdot \mathbb{I}_{\Delta_k}(x)$$

по сути это нижняя сумму Дарбу. Следовательно, мы хотим показать следующее:

$$\lim_{\lambda(\mathbb{T}) \to 0} \int\limits_0^{2\pi} |f(x) - f_{\mathbb{T}}(x)|^2 dx = 0$$

Функция f - интегрируема на $[0, 2\pi] \Rightarrow$ ограничена, пусть $M = \sup\limits_{[0,2\pi]} |f|$, оценим интеграл:

$$\int\limits_0^{2\pi} |f(x) - f_{\mathbb{T}}(x)|^2 dx \le 2M \int\limits_0^{2\pi} |f(x) - f_{\mathbb{T}}(x)| dx = 2M \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} \left| f(x) - \inf_{\Delta_k} f \right| dx \le$$

$$\le 2M \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} \left(\sup_{\Delta_k} f - \inf_{\Delta_k} f \right) dx = 2M \sum_{k=1}^{N} \omega(f, \Delta_k) \cdot (x_k - x_{k-1})$$

где $\omega(f,\Delta_k)=\sup\limits_{\Delta_k} f-\inf\limits_{\Delta_k} f$ (см. утверждение 4, лекцию 17, семестр 1). Таким образом, мы получили разность верхней и нижней суммы Дарбу, следовательно по критерию Дарбу (см. теорему 1, лекцию 24, семестр 2 или там же критерий интегрируемости):

$$2M\sum_{k=1}^{N}\omega(f,\Delta_k)\cdot(x_k-x_{k-1})=2M(S(f,\mathbb{T})-s(f,\mathbb{T}))\xrightarrow[\lambda(\mathbb{T})]{}\bar{\mathrm{I}}-\underline{\mathrm{I}}=0$$

Следовательно, можем подвести итог:

$$\|f-T_P\|\le\|f-f_{\mathbb{T}}\|+\left\|f_{\mathbb{T}}-\sum_{k=1}^{N}\inf_{\Delta_k} f\cdot g_k\right\|+\left\|\sum_{k=1}^{N}\inf_{\Delta_k} f\cdot g_k-T_P\right\|$$

Как мы только что показали:

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\,\hat{\delta}>0\colon\forall(\mathbb{T},\xi),\ \lambda(\mathbb{T})<\hat{\delta}\Rightarrow\|f-f_{\mathbb{T}}\|<\varepsilon$$

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\,g_k(x)\in C(\mathbb{R}),\ g_k(x+2\pi)=g_k(x),\ k=\overline{1,N}\colon\ \left\|f_{\mathbb{T}}-\sum_{k=1}^{N}\inf_{\Delta_k} f\cdot g_k\right\|<\varepsilon$$

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\,P_0\colon\forall P>P_0,\ \sup_{x\in[0,2\pi]}\left\|\sum_{k=1}^{N}\inf_{\Delta_k} f\cdot g_k-T_P\right\|<\varepsilon$$

Таким образом, выберем некоторое $\varepsilon>0$, найдем $\hat{\delta}>0$ такое, что наша функция $f(x)$ приближается линейной комбинацией индикаторных функций, то есть фиксируем разбиение $\mathbb{T}$. Для индикаторов найдутся 2π-периодические, непрерывные функции $\Rightarrow$ линейная комбинация также будет 2π-периодической и непрерывной $\Rightarrow$ для заранее заданного ε найдем P при котором $T_P(x)$ будет конечной линейной комбинацией нашей о.н.с., тогда:

$$\forall f\in R[0,2\pi],\ \forall\varepsilon>0,\ \exists\,T_P\colon\|f-T_P\|\le 3\varepsilon$$

А это есть ничто иное, как свойство полноты. ∎

Следствие 5. $\forall f\in R[0,2\pi]$ раскладывается в ряд Фурье по системе: $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \dfrac{\cos nx}{\sqrt{\pi}},\ \dfrac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}\ \middle|\ n\in\mathbb{N}\right\}$.

Посмотрим как устроены коэффициенты Фурье в таком разложении:

$$\left\langle f,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right\rangle=\int_0^{2\pi}f(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi}f(x)dx$$

$$\left\langle f,\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi}f(x)\cos(nx)dx,\ \left\langle f,\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi}f(x)\sin(nx)dx$$

Тем самым, ряд Фурье будет иметь следующий вид:

$$\left\langle f,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right\rangle\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left\langle f,\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}\right\rangle\cdot\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}+\left\langle f,\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}\right\rangle\cdot\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}\right)$$

Исторически принято записывать его иначе. Рассмотрим слагаемые ряда по отдельности:

$$\left\langle f, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} \right\rangle \cdot \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt \cdot \cos(nx)$$

аналогично будет для синуса. Поэтому тригонометрический ряд Фурье приобретет вид:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

В результате, $\forall f \in R[0, 2\pi]$ будет верно:

$$\sqrt{\int\limits_0^{2\pi} \left| f(x) - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \right) \right|^2 dx} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0 \qquad (*)$$

Заметим, что равенство функции ряду Фурье не является поточечным равенством:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \qquad (**)$$

Это равенство надо понимать в смысле сходимости выше, то есть: $(*) \Leftrightarrow (**)$. Например, можно представить, что $(*)$ не изменится, если мы изменим значение функции f в одной точке. И как мы уже отмечали ранее, стремление интеграла к нулю не означает, что подинтегральные функции стремятся к нулю, более того подинтегральная функция может не стремиться к нулю ни в одной точке (см. например пример Рисса, лекция 12).

Rm: 9. Такая сходимость называется среднеквадратической сходимостью. Как только что заметили, из неё не следует сходимости почти всюду (дополнительно отметим, что из поточечной сходимости следует сходимость почти всюду).

Поэтому возникает вопрос, когда будет выполнено поточечное равенство?