Свойства суммы степенного ряда

Теорема 1.

1) Радиусы сходимости рядов $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$ совпадают: $R = R'$.

2) Если радиус сходимости $R > 0$, то внутри круга сходимости сумма $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ дифференцируема и вычисляется следующим образом: $f'(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$, $\forall z \in \{z\colon |z| < R\}$.

Следствие 1. Пусть радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, $R > 0$. Тогда на $\{z\colon |z| < R\}$ сумма этого ряда бесконечное число раз дифференцируема и её k-ая производная вычисляется следующим образом:

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n n(n-1)\cdot \ldots \cdot(n-k+1) z^{n-k}$$

В частности, будет верно:

$$\forall k \in \mathbb{N},\ c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

и степенной ряд является рядом Тейлора своей суммы.

Следствие 2. Пусть радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, $R > 0$. Тогда радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} z^{n+1}$ равен R и его производная равна исходному ряду внутри круга сходимости:

$$\forall z \in \{z\colon |z| < R\},\ \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n z^{n+1}}{n+1}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

Или, что тоже самое, можно записать так:

$$\forall z \in \{z\colon |z| < R\},\ \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n\right) dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} z^{n+1} + C,\ C \in \mathbb{C}$$

Теорема 2. Пусть радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, $R > 0$ и $\varphi\colon [a,b] \to \{z\colon |z| < R\}$ - непрерывна, а функция g - непрерывна на отрезке $[a,b]$ (со значениями в $\mathbb{R}$ или в $\mathbb{C}$). Тогда для функции суммы ряда $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ верно, что $f(\varphi(t)) \cdot g(t)$ интегрируема по Риману на $[a,b]$ и выполняется равенство:

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \cdot g(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_a^b \varphi(t)^n g(t) dt$$

Rm: 1. Заметим, что интеграл может быть от комплексно-значной функции, но t - вещественное число:

$$\int_a^b (u(t) + i v(t))\, dt = \int_a^b u(t) dt + i \int_a^b v(t) dt$$

и все свойства интегрируемости сохраняются.

☐ Поскольку на круге сходимости функция $f(z)$ - дифференцируема $\Rightarrow$ она непрерывна (или ещё можно так: из-за равномерной сходимости внутри круга, сумма в окрестности любой точки является непрерывной функцией). Как композиция непрерывных функций $t \mapsto f(\varphi(t))\, g(t)$ - непрерывная функция на $[a,b] \Rightarrow$ она интегрируема.

Отрезок $[a,b]$ - компакт, φ - непрерывная функция $\Rightarrow$ непрерывный образ компакта $K = \varphi([a,b])$ это тоже компакт в $\{z\colon |z| < R\}$. Возьмем функцию $z \mapsto |z|$ - непрерывна (норма всегда непрерывная функция) $\Rightarrow$ достигает максимума на K в какой-то точке:

$$\exists\, z_0\colon z_0 \in K \Rightarrow \forall z \in K,\ |z| \le |z_0| = R_1 < R$$

где последнее верно по определению $K \Rightarrow K \subset \{z\colon |z| \le R_1\}$. На этом круге ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ сходится равномерно. При $t \in [a,b]$, $\varphi(t) \in K$, функция $g(t)$ - непрерывная на $[a,b] \Rightarrow$ она ограничена на отрезке (равномерно ограничена на нём). Тогда ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \varphi(t)^n g(t)$ сходится равномерно на $[a,b]$. По теореме о перестановке равномерного предела и интеграла, мы получаем:

$$\int\limits_a^b f(\varphi(t)) \cdot g(t)dt = \int\limits_a^b \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi(t)^n g(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int\limits_a^b \varphi(t)^n g(t)dt$$

■

Данная теорема достаточно часто применяется на практике. Рассмотрим уже известный пример.

Пример: Разложим $\operatorname{arctg} x$ в нуле, при $|x| < 1$:

$$\operatorname{arctg} x = \int\limits_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int\limits_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int\limits_0^x t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

Теорема 3. (**единственность**) Если $\exists\, z_k\colon z_k \to 0,\ z_k \ne 0$, такие что:

$$\forall k,\ \sum_{n=0}^{\infty} c_n z_k^n = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z_k^n$$

где ряды выше сходятся и равны, то $\forall n,\ c_n = d_n$.

☐ Поскольку в точке z_1 сходятся оба ряда, то есть общий круг сходимости и на нём возникают две функции (немного уменьшив круг можно получить и равномерную сходимость):

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,\ g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n$$

На общем круге сходимости $f(z)$ и $g(z)$ непрерывны, тогда :

$$f(0) = c_0 = \lim_{k\to\infty} f(z_k) = \lim_{k\to\infty} g(z_k) = d_0 = g(0)$$

Рассмотрим следующую функцию:

$$\frac{f(z) - c_0}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^{n-1}$$

её радиус сходимости такой же, как и у исходной функции $f(z)$, следовательно это непрерывная функция на общем круге сходимости. То же самое касается функции:

$$\frac{g(z) - d_0}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} d_n z^{n-1}$$

её радиус сходимости также будет аналогичен исходной функции $g(z)$ и она будет непрерывна на общем круге сходимости. Следовательно:

$$c_1 = \lim_{k\to\infty} \frac{f(z_k) - c_0}{z_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{g(z_k) - d_0}{z_k} = d_1$$

где второе равенство верно в силу того, что $f(z_k) = g(z_k)$ и $c_0 = d_0$. Далее продолжаем процедуру. ■

Кратные ряды

Пусть последовательность задана двумя индексами $\{a_{nm}\}_{n,m=1}^{\infty}$, будем рассматривать следующий ряд:

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} a_{nm}$$

Можно представлять это так: есть табличка, в клетках таблички стоят элементы последовательности и мы по этой таблице производим суммирование.

$n \backslash m$	1	2	$\cdots$	M	$\cdots$
1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1M}	$\cdots$
2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2M}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$
N	a_{N1}	a_{N2}	$\cdots$	a_{NM}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$

Рис. 1: Последовательность заданная двумя индексами.

Такое суммирование принципиально можно понимать тремя способами. Заметим, все эти способы могут приводить к разным ответам и возникнет естественный вопрос, а когда ответ будет один и тот же? То что ответы разные можно легко увидеть из теорем про произведения двух рядов.

(1) Двойной ряд

Опр: 1. Двойным рядом будем называть суммы вида:

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} a_{nm} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} = S$$

Опр: 2. Частичная сумма двойного ряда $S_{NM} = \sum\limits_{n\le N}\sum\limits_{m\le M} a_{nm}$.

Опр: 3. Двойной ряд сходится если $\exists \lim\limits_{\substack{N\to\infty \\ M\to\infty}} S_{NM}$, этот предел называется суммой и равен S.

Rm: 2. Напоминание из прошлого семестра (см. семинары):

$$\lim_{\substack{N\to\infty \\ M\to\infty}} S_{NM} = S \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0,\, \exists\, K\colon \forall N, M \in \mathbb{N}\colon N > K, M > K,\ |S_{NM} - S| < \varepsilon$$

Это тоже самое, что и предел $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} f(x, y)$.

Утв. 1. Если двойной ряд $\sum\limits_{n,m=1}^{\infty} a_{nm}$ сходится, то $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} a_{nm} = 0$.

□ Распишем член ряда через его частичные суммы:

$$a_{nm} = S_{nm} - S_{n-1m} - S_{nm-1} + S_{n-1m-1} \to S - S - S + S = 0$$

■

Заметим, что если задана последовательность a_{nm}, то также имеем последовательность частичных сумм и наоборот, если задана последовательность частичных сумм, то можно восстановить последовательность a_{nm}. Для простого ряда было:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \Leftrightarrow a_n = S_n - S_{n-1}$$

Соответственно, в нашем случае ситуация следующая:

$$S_{nm} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{nm} \Leftrightarrow a_{nm} = S_{nm} - S_{n-1m} - S_{nm-1} + S_{n-1m-1}$$

Rm: 3. Из того, что $a_{nm} \to 0$ не следует, что a_{nm} - ограничена. Более того, из сходимости ряда этого тоже не следует. Это так, поскольку стремление к нулю говорит про $n, m > K$, но ничего не говорит про то, что происходит с a_{n1} или a_{1m}, например:

$$a_{1m} = m,\ a_{2m} = -m,\ \forall k > 2,\ a_{km} = 0 \Rightarrow \sum_{\substack{n\le N\\ m\le M}} a_{nm} = 0$$

Теорема 4. Двойной ряд с положительными членами $a_{nm} \geq 0$ сходится тогда и только тогда, когда его частичные суммы ограничены.

□ Очевидно, что если ряд сходится, то его частичные суммы - ограничены. Пусть $S_{NM} \leq L$ и обозначим точную верхнюю грань по всем таким суммам $S = \sup\limits_{N,M}\{S_{NM}\}$. Покажем, что S будет являться суммой ряда. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда:

$$\exists\, S_{N_0M_0} \colon S_{N_0M_0} > S - \varepsilon \Rightarrow \forall n > N_0, m > M_0,\ S_{nm} > S - \varepsilon$$

где последнее очевидно: $S_{nm} \leq S_{kp}$, $\forall n \leq k, m \leq p$, поскольку члены ряда неотрицательны. Тогда:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, N_0, M_0 \colon \forall n > N_0, m > M_0,\ |S_{nm} - S| < \varepsilon$$

Это и означает, что: $S = \lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} S_{nm}$. ■

Теорема 5. Если сходится двойной ряд из абсолютных значений данного ряда, то и сам ряд сходится.

□ Пусть $a_{nm} = b_{nm} + c_{nm} = \max\{a_{nm}, 0\} - \min\{0, a_{nm}\}$, тогда очевидно, что:

$$0 \leq b_{nm} \leq |a_{nm}|,\ 0 \leq c_{nm} \leq |a_{nm}|$$

Таким образом, из сходимости двойного ряда из абсолютных значений следует ограниченность сумм и соответственно сходимость рядов:

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} b_{nm}, \sum_{n,m=1}^{\infty} c_{nm}$$

Следовательно сходится и их сумма равная исходному ряду:

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} a_{nm} = \sum_{n,m=1}^{\infty} b_{nm} + \sum_{n,m=1}^{\infty} c_{nm}$$

■

(2) Повторные ряды

Опр: 4. Повторными рядами будем называть суммы вида:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm}\right) = \lim_{N\to\infty}\left(\lim_{M\to\infty} S_{NM}\right) \text{ или } \sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{nm}\right) = \lim_{M\to\infty}\left(\lim_{N\to\infty} S_{NM}\right)$$

Rm: 4. То есть эти суммы это просто повторные пределы. Из семинаров прошлого семестра известно, что это совсем не тоже самое, что и двойной предел. Заметим также, что повторное суммирование это разные способы суммирования. В одном может быть сходимость, а в другом её может не быть вовсе.

Опр: 5. Повторный ряд сходится, если сходятся все ряды по индексу m и их суммы равны S_n:

$$\forall n, \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} = S_n$$

и если сходится ряд из этих сумм:

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm}$$

Rm: 5. Аналогично сходимость определяется для суммирования сначала по n, затем по m.

Здесь также можно применить теорему про совпадение двойного ряда и повторного, аналогичную теореме про совпадение повторного предела и двойного предела (см. лекция 9, курс 2).

Теорема 6. Если сходится двойной ряд $\sum\limits_{n,m=1}^{\infty} a_{nm}$ и сходятся все ряды по индексу m, то сходится и повторный ряд и имеет ту же сумму, что и двойной ряд:

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} a_{nm} = S = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm}$$

□ Следует напрямую из теоремы о равенстве двойного предела и повторных. ■

Rm: 6. Теорема аналогично может быть сформулирована для суммирования по индексу n.

(3) Простые ряды

Опр: 6. Простыми рядами будем называть суммы вида:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n(k)m(k)}$$

где $k \mapsto (n(k), m(k))$ - биекция, которая нумерует все клетки таблицы.

Теорема 7. Пусть даны двойной и простой ряды, состоящие из одних и тех же членов. Тогда абсолютная сходимость одного из них влечет абсолютную сходимость другого и равенство их сумм.

□ Пусть сходится абсолютно двойной ряд, тогда будет верно:

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} |a_{nm}| = S$$

Возьмем частичную сумму простого ряда модулей:

$$\forall K, \sum_{k=1}^{K} |a_{n(k)m(k)}| \leq \sum_{n,m=1}^{\infty} |a_{nm}| = S$$

Следовательно простой ряд абсолютно сходится. Пусть теперь сходится абсолютно простой ряд:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{n(k)m(k)}| = A$$

тогда для любой частичной суммы абсолютного двойного ряда:

$$\sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{M} |a_{nm}| = S_{NM}$$

Следовательно, $\exists\, K$ такое, что все слагаемые этой суммы будут содержаться среди первых K членов простого абсолютного ряда и тогда: $S_{NM} < A$. В этом случае, двойной ряд будет сходиться абсолютно.

Поскольку простой ряд сходится абсолютно, то в нём мы можем переставить слагаемые любым биективным способом (см. лекцию 4) $\Rightarrow$ расположим их по "квадратам" (т.е. на схеме идем от левого верхнего угла к правому нижнему растущими квадратами), тогда возьмем частичную сумму по целому квадрату:

$$A = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} a_{nm} = \lim_{N=M\to\infty} S_{NN} = S$$

■

Сходимость двойных, повторных и простых рядов

Рассмотрим несколько примеров.

Пример: $S_{NM} = \dfrac{1}{N}\sin M + \dfrac{1}{M}\sin N$, тогда:

$$\forall N, \nexists \lim_{M\to\infty} S_{NM}, \forall M, \nexists \lim_{N\to\infty} S_{NM}$$

Но при этом существует двойной предел:

$$\exists \lim_{\substack{N\to\infty \\ M\to\infty}} S_{NM} = 0$$

Таким образом, заметим, что следующие пределы - разные и по смыслу, и по значению:

$$\lim_{N\to\infty}\left(\lim_{M\to\infty} S_{NM}\right), \lim_{M\to\infty}\left(\lim_{N\to\infty} S_{NM}\right), \lim_{\substack{N\to\infty \\ M\to\infty}} S_{NM}$$

Пример: $S_{NM} = \dfrac{NM}{N^2+M^2}$, тогда:

$$\lim_{N\to\infty}\left(\lim_{M\to\infty} S_{NM}\right) = \lim_{N\to\infty}(0) = 0$$

Но при этом, если мы возьмем $N = M$:

$$S_{NN} = \frac{N^2}{N^2+N^2} = \frac{1}{2} \nrightarrow 0$$

То есть не существует двойного предела:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists K\colon \forall N > K, M > K, |S_{NM} - S| < \varepsilon$$

$$N = M \to \infty \Rightarrow S = \frac{1}{2};\ M > K,\ N \to \infty \Rightarrow S = 0$$

Теорема 8. Если хотя бы один из рядов:

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} a_{nm}, \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm}\right), \sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{nm}\right), \sum_{k=1}^{\infty} a_{n(k)m(k)}$$

сходится абсолютно, то все ряды сходятся абсолютно и их суммы равны.

□ Пусть сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|a_{n(k)m(k)}|$ и его сумма равна S. Тогда $\forall N, m$, $\sum\limits_{n=1}^{N}|a_{nm}| \le S$. Следовательно ряд сходится абсолютно и сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{nm}$ для любых m. По определению:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists K\colon \forall k > K, \sum_{k=K+1}^{\infty}|a_{n(k)m(k)}| < \varepsilon \Rightarrow \left|\sum_{k=K+1}^{\infty} a_{n(k)m(k)}\right| = \left|S - \sum_{k=1}^{K} a_{n(k)m(k)}\right| < \varepsilon$$

При больших N и M, следующая разность есть сумма группы членов $a_{n(k)m(k)}$ для номеров с $k > K$:

$$\exists\, N_0, M_0 \colon \forall N > N_0, M > M_0,\ \left|\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} a_{nm} - \sum_{k=1}^{K} a_{n(k)m(k)}\right| \leq \sum_{k=K+1}^{\infty} |a_{n(k)m(k)}| < \varepsilon$$

Перейдем к пределу по $N \to \infty$, поскольку ряд по n сходится, то:

$$\forall M > M_0,\ \left|\sum_{m=1}^{M} S_m - \sum_{k=1}^{K} a_{n(k)m(k)}\right| \leq \varepsilon$$

Тогда мы получим:

$$\forall M > M_0,\ \left|\sum_{m=1}^{M} S_m - S\right| \leq \left|\sum_{m=1}^{M} S_m - \sum_{k=1}^{K} a_{n(k)m(k)}\right| + \left|\sum_{k=1}^{K} a_{n(k)m(k)} - S\right| < 2\varepsilon$$

Следовательно, повторный ряд сходится к S. Наоборот, если сходится ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_{nm}|\right) = S$, то:

$$\forall N, M,\ \sum_{m=1}^{M}\left(\sum_{n=1}^{N} |a_{nm}|\right) < S$$

Рассмотрим частичную сумму простого ряда от 1 до K, тогда:

$$\forall K,\ \exists\, N_0, M_0 \colon \forall N > N_0, M > M_0,\ \sum_{k=1}^{K} |a_{n(k)m(k)}| \leq \sum_{m=1}^{M}\left(\sum_{n=1}^{N} |a_{nm}|\right) < S$$

Следовательно, простой ряд сходится абсолютно $\Rightarrow$ сходится. Аналогичное утверждение в обе стороны будет верно для повторной суммы сначала по m и затем по n. Объединяя это с теоремой про равенство абсолютной сходимости простого и двойного рядов мы получаем требуемое. ■

Упр. 1. Исследовать сходимость ряда:

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{1}{n^p + m^p},\ p > 0$$

Кратные степенные ряды

Пусть последовательность задана двумя индексами $\{c_{nm}\}_{n,m=1}^{\infty}$, будем рассматривать следующий кратный степенной ряд (предварительно сделав сдвиг по переменным в $z_0 = 0$, $w_0 = 0$):

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} c_{nm} z^n w^n,\ \forall n, m,\ c_{nm} \in \mathbb{C},\ z, w \in \mathbb{C}$$

Область сходимости этого ряда не обязана представлять из себя что-то обобщающее круг сходимости. Иногда можно переписать этот ряд в виде повторного:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{\infty} c_{nm} w^m \right) z^n$$

Но это тогда просто степенной ряд по переменной z и аналогично по w, где радиусы сходимости будут зависеть от другой переменной: $|z| \leq R(w)$ и $|w| \leq R(z)$. Таким образом, область сходимости не обязательно будет выглядеть как прямоугольник: $|z| < R$, $|w| < R_1$, более того, область сходимости может не содержать внутренних точек. Но можно ли понять, что этот ряд где-то сходится?

Утв. 2. Предположим, что $z_1 \neq 0$, $w_1 \neq 0$ и $\exists\, M \colon \forall n, m,\ |c_{nm} z_1^n w_1^m| \leq M$. Тогда $\forall q \in (0, 1)$ на области:

$$\{(z, w) \colon |z| \leq q|z_1|,\ |w| \leq q|w_1|\}$$

степенной ряд $\displaystyle\sum_{n,m=0}^{\infty} c_{nm} z^n w^n$ сходится абсолютно и равномерно.

□ Поскольку $|z| \leq q|z_1|$ и $|w| \leq q|w_1|$, тогда:

$$|c_{nm} z^n w^m| \leq |c_{nm} z_1 w_1| q^n q^m \leq M q^{n+m}$$

Рассмотрим следующий ряд с неотрицательными слагаемыми:

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} q^{n+m}$$

Из теоремы про сходимость кратных рядов достаточно исследовать на сходимость один из трех известных рядов. Рассмотрим повторный ряд, поскольку все слагаемые неотрицательны, то:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{\infty} q^{n+m} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{1-q} = \frac{1}{(1-q)^2} < \infty \Rightarrow \sum_{n,m=0}^{\infty} q^{n+m} < \infty$$

Обозначим частичную сумму кратного степенного ряда следующим образом:

$$S_{NK}(z, w) = \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{K} c_{nm} z^n w^m$$

Равномерная сходимость означает то же самое, что и всегда:

$$S_{NK} \overset{E}{\rightrightarrows} S \Leftrightarrow \sup_{(z,w) \in E} |S_{NK}(z, w) - S(z, w)| \xrightarrow[N,K \to \infty]{} 0$$

Тогда:

$$|S_{NK}(z,w)-S(z,w)|=\left|\sum_{\substack{n=N+1\\m=K+1}}^{\infty} c_{nm}z^n w^m\right|\leq M\cdot\sum_{\substack{n=N+1\\m=K+1}}^{\infty} q^{n+m}\to 0$$

Поскольку хвост у сходящегося ряда стремится к нулю, то взяв супремум, мы получим требуемое. ■

Rm: 7. Рассматриваем $\{(z,w)\colon |z|\leq q|z_1|\wedge|w|\leq q|w_1|\}$, где (z_1,w_1) взяты из утверждения. Тогда ряд:

$$\sum_{n,m=0}^{\infty}|c_{nm}|\cdot|z|^n\cdot|w|^m$$

сходится. Следовательно, по теореме о равенстве кратных сходящихся рядов, мы можем рассматривать исходный ряд в следующем виде:

$$\sum_{n,m=0}^{\infty}c_{nm}z^n w^m=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty}c_{nm}z^n w^m\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty}c_{nm}w^m\right)z^n=f(z,w)$$

Всё свелось к одномерному случаю. При фиксированном w получим степенной ряд по z и наоборот $\Rightarrow$ можно применять весь инструментарий из обычных степенных рядов. В частности, можно дифференцировать бесконечное число раз на множестве сходимости (можно считать почленно дифференцируя):

$$\exists\,\frac{\partial^{n+m}f}{\partial z^n\partial w^m}(z,w)$$

И, в частности, если взять такую производную в нуле, мы получим коэффициенты ряда:

$$\frac{\partial^{n+m}f}{\partial z^n\partial w^m}(0,0)=c_{nm}n!m!$$

Следовательно, этот ряд окажется рядом Тейлора для своей суммы, только понадобится сделать группировку по степеням n и m, чтобы порядок производной был один и тот же, тогда это получится в чистом виде дифференциал.

Пример: Пусть $z_1\neq 0$ и $c_{0m}=z_1m!$, $c_{1m}=-m!$, $\forall k\geq 2$, $c_{km}=0$, $N\geq 2$. Тогда:

$$S_{NK}=\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{K}c_{nm}z^n w^m=\sum_{m=0}^{K}w^m\left(z-z_1\right)m!$$

Этот ряд сходится $\Leftrightarrow$ $w=0$ или $z=z_1$. Никаких внутренних точек сходимости нет.

Rm: 8. В учебнике Фихтенгольца теорема Абеля для кратных степенных рядов формулируется с ошибкой. Там отсутствует требование ограниченности и делается ошибочный вывод, что из сходимости следует ограниченность коэффициентов.

Таким образом, для кратных степенных рядов, если в какой-то точке установили, что слагаемые ограничены, то появлется разумная область сходимости с которой уже можно работать. В том числе, сводится всё к повторным рядам и анализируются, как обычные степенные ряды, в противном случае, всё становится очень сложным.

Пример: Рассмотрим следующий ряд:

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} C_{n+m}^{n} z^n w^m$$

Найти область сходимости? Рассмотрим область, где этот ряд сходится абсолютно:

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} C_{n+m}^{n} \cdot |z|^n \cdot |w|^m = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n,m:\ n+m=k} C_{n+m}^{n} \cdot |z|^n \cdot |w|^m = \sum_{k=0}^{\infty} (|z| + |w|)^k = \frac{1}{1 - (|z| + |w|)}$$

Таким образом, ряд сходится при $|z| + |w| < 1$. Внутри этого ромба ряд сходится, вне - расходится, что происходит на границе области - вопрос.