Дробное дифференцирование и дробное интегрирование

Вспомним, что разбирая интегралы с параметром мы нашли решение уравнения $y^{(n)} = f$:

$$y(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1} f(t)dt = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^x (x-t)^{n-1} f(t)dt$$

Будем считать, что $f \in C([0,1])$. Там же мы ввели следующие операторы:

Опр: 1. При любом $\alpha > 0$ будем называть следующее выражение:

$$J^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt,\ \alpha \in \mathbb{R}^+$$

оператором дробного интегрирования Римана-Луивилля.

Rm: 1. По договоренности будем считать, что $J^0 f(x) = f(x)$. Когда $\alpha > 0$ у нас получается несобственный интеграл.

Утв. 1. Для любых положительных α и β будет верно:

$$J^\alpha\left(J^\beta f\right) = J^{\alpha+\beta} f,\ \alpha,\ \beta > 0$$

☐ Распишем наше выражение в левой части:

$$J^\alpha\left(J^\beta f\right) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-s)^{\beta-1} f(s)ds\right)dt = (*)$$

Мы хотим показать, что оно будет равно следующему:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^x (x-t)^{\alpha+\beta-1} f(t)dt = J^{\alpha+\beta} f$$

Пусть $\alpha \geq 1$, $\beta \geq 1$, тогда наши интегралы будут обычными интегралами Римана, без особенностей. Попробуем поменять местами интегралы, для этого воспользуемся упражнением из лекции 22:

$$(*) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^x \left(\int_s^x (x-t)^{\alpha-1}(t-s)^{\beta-1}dt\right) f(s)ds$$

Внутренний интеграл похож на бета-функцию, попробуем сделать замену, чтобы эту функцию получить:

$$u = \frac{x-t}{x-s} \Rightarrow t = x - u(x-s) \Rightarrow \int_s^x (x-t)^{\alpha-1}(t-s)^{\beta-1}dt = (x-s)^{\alpha+\beta-2}\int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}(x-s)du =$$

$$= (x-s)^{\alpha+\beta-1}\int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}du = (x-s)^{\alpha+\beta-1}\mathcal{B}(\alpha,\beta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (*) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int\limits_0^x \left(\int\limits_s^x (x-t)^{\alpha-1}(t-s)^{\beta-1}dt \right) f(s)ds = \frac{\mathcal{B}(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int\limits_0^x (x-s)^{\alpha+\beta-1} f(s)ds =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int\limits_0^x (x-s)^{\alpha+\beta-1} f(s)ds = J^{\alpha+\beta} f$$

Встает вопрос, как доказать это же для $\alpha > 0$, $\beta > 0$? Можно попробовать сделать это с помощью несобственного интеграла, но часто сильно упрощает дело введение дополнительного параметра:

$$J^\alpha \left(J^\beta f\right) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^x (x-t+\varepsilon)^{\alpha-1} \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int\limits_0^t (t-s+\varepsilon)^{\beta-1} f(s)ds \right) dt$$

Теперь можно переставить интегралы местами, а затем, пользуясь следствием 1 из лекции 23 про перестановку предела и интеграла, устремить $\varepsilon \to 0$. ■

Упр. 1. Обосновать предельный переход в теореме выше при $\varepsilon \to 0$.

Опр: 2. Пусть $n = \lceil \alpha \rceil$, $\alpha > 0$ будем называть следующее выражение:

$$D^\alpha f(x) = D^n \left(J^{n-\alpha} f(x)\right)$$

оператором дробного дифференцирования Римана-Луивилля.

Rm: 2. Заметим, что $D^n f(x)$ в определении оператора Римана-Луивилля это обычная производная, поскольку $n \in \mathbb{N}$. $D^\alpha f(x)$ при $\alpha \in \mathbb{N}$ также представляет из себя обычную производную.

Rm: 3. Отметим, что не важно $n = \lceil \alpha \rceil$ мы можем представить оператор по-другому для любого числа, большего чем α:

$$D^\alpha f(x) = D^m \left(J^{m-\alpha} f(x)\right), \forall m \geq \alpha$$

Это так, поскольку мы ранее установили: $\forall m \in \mathbb{N}$, $D^m J^m f(x) = f(x)$, тогда по утверждению 1:

$$J^{m-\alpha} = J^{m-n} J^{n-\alpha},\ D^m = D^n D^{m-n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D^\alpha f(x) = D^n \left(J^{n-\alpha} f(x)\right) = D^n \left(D^{m-n} J^{m-n} J^{n-\alpha} f(x)\right) = D^m \left(J^{m-\alpha} f(x)\right)$$

Пусть $f \in C^1[0,1]$, $\alpha \in (0,1)$, попробуем найти $D^\alpha f(x)$ по определению:

$$D^\alpha f(x) = D^1 J^{1-\alpha} f(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^x (x-t)^{-\alpha} f(t)dt \right) = (**)$$

Здесь возникает трудность в том, что использовать дифференцирование по интегралу с параметром напрямую по многим причинам может оказаться некорректным. Как уже отмечалось, делать замены в интегралах с параметром при исследовании сходимости интеграла - плохая идея. Тем не менее при исследовании интеграла как функции параметра, замены очень часто помогают (убирать параметр там, где от него возникают проблемы), например:

$$\int\limits_0^{+\infty} \alpha^2 e^{-\lambda x} dx \Rightarrow \alpha x = u \Rightarrow \alpha \int\limits_0^{+\infty} e^{-u} du$$

Видим, что интеграл дифференцируем и мы не воспользовались никакими теоремами. Часто ничего не выходит из дифференцирования интеграла по параметру, например, если рассмотрим интеграл:

$$\frac{d}{d\alpha}\left(\int\limits_0^{+\infty}\frac{x\sin ax}{1+x^2}dx\right)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^2\cos ax}{1+x^2}dx\Rightarrow\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}dx\not<\infty$$

Но если избавиться от параметра, вытащив его из-под $\sin ax$, то получим:

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{x\sin ax}{1+x^2}dx=\int\limits_0^{+\infty}\frac{(ax)\sin ax}{(ax)^2+a^2}d(ax)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{u\sin u}{u^2+a^2}du$$

И можно будет дифференцировать уже сколь угодно раз по параметру. По аналогии сделаем замену в нашем интеграле $(**)$:

$$x-t=u\Rightarrow(**)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\left(\int\limits_x^0 u^{-\alpha}f(x-u)d(-u)\right)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\left(\int\limits_0^x u^{-\alpha}f(x-u)du\right)$$

Параметр в пределе интегрирования остался, но особенность ушла в точку, где нет параметра. Чтобы можно было воспользоваться доказанными теоремами, разобьем интеграл на два:

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\left(\int\limits_0^x u^{-\alpha}f(x-u)du\right)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\left(\int\limits_0^{x_1} u^{-\alpha}f(x-u)du+\int\limits_{x_1}^x u^{-\alpha}f(x-u)du\right)$$

По аналогии с тем, как мы рассматривали интеграл Дирихле, нам нужно поведение функции рядом с точкой дифференцируемости $\Rightarrow$ будем считать, что $x\in[x_1,x_2]\subset[0,1]$. Поскольку $f\in C^1[0,1]\Rightarrow$ она ограниченна, её производная ограниченна $\Rightarrow$ рассмотрим левый интеграл:

$$\frac{d}{dx}\left(\int\limits_0^{x_1} u^{-\alpha}f(x-u)du\right)=\int\limits_0^{x_1} u^{-\alpha}f'(x-u)du,\ \left|\int\limits_0^{x_1} u^{-\alpha}f'(x-u)du\right|\le\int\limits_0^{x_1}Cu^{-\alpha}du<\infty$$

Следовательно по признаку Вейерштрасса получаем равномерно сходящийся интеграл. Значит можно дифференцировать по теореме о дифференцируемости несобственного интеграла. Правый интеграл не является несобственным, его можно дифференцировать:

$$\frac{d}{dx}\left(\int\limits_{x_1}^x u^{-\alpha}f(x-u)du\right)=\frac{f(0)}{x^\alpha}+\int\limits_{x_1}^x u^{-\alpha}f'(x-u)du$$

Таким образом, мы получаем общую формулу:

$$D^\alpha f(x)=\frac{f(0)}{\Gamma(1-\alpha)x^\alpha}+\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^x u^{-\alpha}f'(x-u)du$$

Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Утв. 2. Пусть $f\in C^1[0,1]$, $\alpha\in(0,1)$, тогда: $D^\alpha f(x)=\dfrac{f(0)}{\Gamma(1-\alpha)x^\alpha}+\dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\displaystyle\int\limits_0^x u^{-\alpha}f'(x-u)du.$

Пример: $f(x) = x$ найдем производную порядка $\alpha = \frac{1}{2}$.

$$D^{\frac{1}{2}}x = \frac{0}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)x^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int\limits_0^x u^{-\frac{1}{2}}du = \frac{2\sqrt{x}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{x}$$

Заметим, что достаточно сложно будет найти производную e^x порядка $\alpha \in (0,1)$.

Упр. 2. Найти дробные производные для x^m и e^x.

Заметим, что вообще-то не верно, что:

$$D^\alpha(D^\beta f) = D^{\alpha+\beta} f$$

Одновременно с этим также не верно:

$$D^\alpha f \cdot D^\beta f = D^{\alpha+\beta} f$$

Упр. 3. Используя степени x^β подобрать степени, показывающие что равенства выше не верны.

Также заметим, что иногда эти равенства всё же выполняются.

Упр. 4. Показать, что если $f = J^{\alpha+\beta}\varphi$, то $D^\alpha(D^\beta f) = D^{\alpha+\beta} f$

Теперь хотелось бы понять, как решать дифференциальные уравнения с дробными производными. Пусть $0 < \alpha < 1$, рассмотрим следующее ДУ:

$$D^\alpha y = F(x, y)$$

Когда $\alpha = 1$, то такой дифур решался интегрированием и задача Коши сводилась к задаче нахождения неподвижной точки. Здесь же не ясно даже как ставить начальные условия. Рассмотрим:

$$D^\alpha y = f(x) \Rightarrow J^\alpha D^\alpha y = J^\alpha D^1 J^{1-\alpha} y$$

Таким образом, хотелось бы научиться менять местами J и D. Обозначим $g = J^{1-\alpha}y$, тогда мы получим:

$$J^\alpha D^1 g = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x (x-t)^{\alpha-1}g'(t)dt = \left|x - t = u\right| = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x u^{-(1-\alpha)}g'(x-u)du = D^1 J^\alpha g - \frac{g(0)}{\Gamma(\alpha)x^{1-\alpha}}$$

Возвращаясь к ДУ получится:

$$J^\alpha f = J^\alpha D^\alpha y = J^\alpha D^1 J^{1-\alpha} y = D^1 J^\alpha J^{1-\alpha} y - \frac{J^{1-\alpha}y(0)}{\Gamma(\alpha)x^{1-\alpha}} = y - \frac{J^{1-\alpha}y(0)}{\Gamma(\alpha)x^{1-\alpha}}$$

$$D^\alpha y = f \Leftrightarrow y = \frac{J^{1-\alpha}y(0)}{\Gamma(\alpha)x^{1-\alpha}} + J^\alpha f$$

Если $\alpha = 1$, то никакого деления на x не будет (сингулярности не останется) и справа вместо дроби будет просто константа. Таким образом, задача Коши в дробных производных будет иметь вид:

$$\begin{cases} D^\alpha y & = & F(x, y) \\ J^{1-\alpha}y(0) & = & b \end{cases}$$

А её решение будет все равно, что искать следующую неподвижную точку:

$$y = \frac{b}{\Gamma(\alpha)x^{1-\alpha}} + J^{\alpha}F(x, y)$$

Ранее, существование решения доказывалось через теорему о неподвижной точке. Здесь это делается абсолютно также. Мы этого делать не будем.

Упр. 5. Решить следующие уравнения:

$$y^{\left(\frac{1}{2}\right)} = 0,\ y^{\left(\frac{1}{2}\right)} = x,\ y^{\left(\frac{1}{2}\right)} = y$$

Последнее уравнение можно попытаться найти в виде степенных рядов. Получится т.н. функции Мета-Клефлера.

Задача Абеля

Пусть есть некоторая функция $\varphi(h)$. Мы хотим найти форму кривой такой, что если отпустим материальную точку с высоты h на этой кривой так, чтобы она спускалась под действием силы тяжести без трения (то есть на неё действует только сила реакции опоры) вниз за время $T = \varphi(h)$.

Попробуем на высоте h взять материальную точку массой m, она начнет падать. Пусть в какой-то момент времени она оказалась на уровне y, тогда по закону сохранения энергии, если в этот момент её скорость равна v, то её кинетическая энергия равна снижению материальной точки под действием силы тяжести с высоты h на высоту y:

$$\frac{mv^2}{2} = mg(h-y)$$

Если наше движение это $(x(t), y(t))$, то $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$ и по движению точки: $y(0) = h$, $y(T) = h$. Пусть наша кривая описывается как: $x = g(y)$, тогда: $x(t) = g(y(t)) \Rightarrow v^2 = (|g'(y)|^2 + 1)\,\dot{y}^2 = u^2(y)\dot{y}^2$. Подставим в исходное равенство:

$$-u(y)\dot{y} = \sqrt{2g(h-y)}$$

где слева стоит минус, поскольку y - убывает. Разделим переменные, как в обычном ДУ:

$$\frac{-u(y)\dot{y}}{\sqrt{2g(h-y)}} = 1 \Rightarrow \int\limits_0^T \frac{-u(y)\dot{y}}{\sqrt{2g(h-y)}}dt = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int\limits_0^h \frac{u(y)}{\sqrt{h-y}}dy = T = \varphi(h),\ dy = \dot{y}dt$$

Таким образом, мы получаем следующее уравнение:

$$\frac{1}{\sqrt{2g}}\int\limits_0^h \frac{u(y)}{\sqrt{h-y}}dy = \sqrt{\frac{\pi}{2g}}J^{\frac{1}{2}}u = \varphi(h)$$

Найти форму кривой это всё равно, что найти $u(y)$, из-за её определения. Имеем дробный интеграл $\Rightarrow$ надо продифференцировать дробное число раз:

$$D^{\frac{1}{2}}J^{\frac{1}{2}}u = D^1 J^{1-\frac{1}{2}}J^{\frac{1}{2}}u = D^1J^1u = u = \sqrt{\frac{2g}{\pi}}D^{\frac{1}{2}}\varphi = \sqrt{\frac{2g}{\pi}}\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int\limits_0^y \frac{\varphi(t)}{\sqrt{y-t}}dt\right)$$

Таким образом, мы получаем результат:

$$u(y) = \frac{\sqrt{2g}}{\pi}\frac{d}{dy}\left(\int\limits_0^y \frac{\varphi(t)}{\sqrt{y-t}}dt\right) \Rightarrow g'(y) = \sqrt{u^2(y) - 1}$$

Интегрируя $g'(y)$, мы найдем вид кривой.

Упр. 6. Разобрать случай $\varphi \equiv 1$ и получить циклоиду в задаче об таутохроне.

$\square$

$$\int\limits_0^y \frac{1}{\sqrt{y-t}}dt = -\,2\sqrt{y-t}\Big|_{t=0}^{y} = 2\sqrt{y} \Rightarrow u(y) = \frac{\sqrt{2g}}{\pi}\frac{2}{2\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{2g}}{\pi\sqrt{y}} \Rightarrow g'(y) = \sqrt{\frac{2g}{\pi y} - 1}$$

$$\int g'(y)dy = \int\sqrt{\frac{a-y}{y}}dy$$

$\blacksquare$

Упр. 7. Доказать, что гамма-функция и бета-функции на своей области определения они непрерывно дифференцируемы. (Бета выражается через гамма, а для гаммы можно доказывать всё при x $>$ 10, потому что формула понижения выдаст многочлен по иксам, икс большой следовательно в нуле никаких особенностей нет, есть только проблема сходимости на бесконечности и надо держать в голове замечание, что доказывать непр и дифф не надо требовать равномерность на всей оси, а достаточно x0 $<$ x $<$ x1 следовательно получит отличная равномерная сходимость , это будет следовать из теоремы вейерштрасса, а потом теорема о дифф + непр сразу даст нужный результат)