Степенные ряды

Пусть у нас есть некоторая функция $f(x)$, очень часто хочется её представить в виде суммы простых функций (в некотором роде разложить по базису функций $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$):

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$$

Поскольку функция сложная, то сумма будет до бесконечности. Встает вопрос, что за разумные $\varphi_n(x)$ могут здесь использоваться? Первое, что приходит на ум - многочлены $\Rightarrow$ разумно рассматривать следующую систему:

$$\{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$$

Вместо такой системы можно рассматривать систему со сдвигом:

$$\{1, x - x_0, (x - x_0)^2, \dots, (x - x_0)^n, \dots\}$$

Но всегда можно сделать обратный сдвиг, поэтому не будем её рассматривать (будем смотреть системы с центром в нуле). Мы хотим уметь раскладывать любую функцию по таким системам. Рассмотрим следующий пример:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2},\ f(x) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$$

$f(x)$ это гладкая, хорошая функция на всём $\mathbb{R}$, попробуем разложить её в ряд:

$$f(x) = 1 - x^2 + x^4 - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n},\ |x| < 1$$

Это обычная геометрическая прогрессия, но такой ряд сходится только лишь при $|x| < 1$, при этом сама функция $f(x)$ является бесконечно гладкой на всем $\mathbb{R}$. Проблема заключается в том, что у этой функции на комплексной плоскости есть особенности: $x = \pm i$.

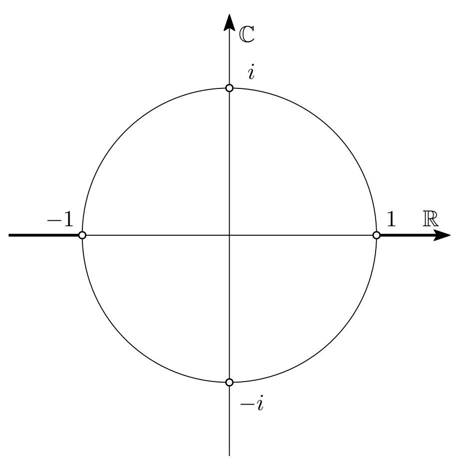

Рис. 1: Круг сходимости у ряда $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$.

Таким образом, нам разумно рассматривать разложение в степенные ряды в $\mathbb{C}$.

Опр: 1. Ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ называется степенным рядом с центром в z_0, где $\forall n,\ c_n, z, z_0 \in \mathbb{C}$.

Далее везде считаем, что $z_0 = 0$.

Комплексные числа

Как уже проходили на алгебре, будем рассматривать комплексные числа следующим образом:

$$\forall z \in \mathbb{C},\ z = x + iy$$

В комплексной плоскости топология наследуемая метрикой (даже нормой) $\mathbb{R}^2$:

$$\forall z \in \mathbb{C},\ |z| = \rho(z, 0) = \sqrt{x^2 + y^2},\ \rho(z_1, z_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Сходимость в $\mathbb{C}$ задается этой же метрикой: $(\mathbb{C}, \rho)$ - метрическое пространство.

Опр: 2. Последовательность $\{z_n\}$ сходится к z: $z_n \to z$, если $\rho(z_n, z) \to 0$.

Дифференцируемость будет определяться в чем-то сложнее, в чем-то проще случая для вещественных пространств. Пусть есть функция в комплексозначной плоскости:

$$f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C} \longleftrightarrow g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

Ей будет соответствовать некоторая функция g из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$. Хотелось бы понять, как будет связано комплексное дифференцирование с вещественным.

Комплексное дифференцирование

Опр: 3. Функция $f(z)$ - $\mathbb{C}$-дифференцируема в z_0, если существует предел:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta_z) - f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0)$$

Теорема 1. (**о связи дифференцируемости в $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}^2$**) Функция $f(z) = u(z) + iv(z)$ - $\mathbb{C}$-дифференцируема тогда и только тогда, когда выполнены два условия:

1) $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ - дифференцируема;

2) Выполнены условия Коши-Римана: $\begin{cases} u_x(z) = v_y(z) \\ u_y(z) = -v_x(z) \end{cases}$;

□ По определению $\mathbb{C}$-дифференцируемости:

$$f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = f'(z_0)\Delta z + \overline{o}(|\Delta z|)$$

где $\overline{o}$ - комплексное. Поскольку $f'(z_0) = a + ib$ -комплексное число и $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ - тоже комплексное, то перепишем всё в виде:

$$(u(z_0 + \Delta z) - u(z_0)) + i\,(v(z_0 + \Delta z) - v(z_0)) = (a + ib)(\Delta x + i\Delta y) + \overline{o}\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right)$$

Распишем отдельно комплексную часть и отдельно вещественную:

$$u(z_0 + \Delta z) - u(z_0) = a\Delta x - b\Delta y + \overline{o}\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right)$$

$$v(z_0 + \Delta z) - v(z_0) = b\Delta x + a\Delta y + \overline{o}\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right)$$

Таким образом, приращение функций u и v есть локально линейное отображение плюс малая часть, а это означает, что векторная функция $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ - дифференцируема по определению. Матрица её производных соответственно равна:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \Rightarrow u_x = v_y \land u_y = -v_x$$

Поскольку все действия были равносильными, то мы получаем утверждение в обе стороны. ■

Rm: 1. Условия Коши-Римана можно запомнить как растяжение плюс поворот. Мы знаем, что матрица поворота это:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Тогда, полученная в теореме матрица может быть представлена, как:

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \sqrt{a^2+b^2} \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix}$$

Пример: Рассмотрим $f(z) = z^n$, найдем производную. По определению:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z+\Delta z)^n - z^n}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta z \left(\sum\limits_{k=0}^{n-1} (z+\Delta z)^k z^{n-1-k} \right)}{\Delta z} = \sum_{k=0}^{n-1} z^k z^{n-1-k} = nz^{n-1}$$

Пример: Рассмотрим $f(z) = \overline{z}$, существует ли у неё производная? По определению:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{z+\Delta z} - \overline{z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{z} - \overline{z} + \overline{\Delta z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$$

Этот предел не существует, поскольку по разным траекториям мы получим различные пределы. Пусть $\Delta z = \Delta x$, тогда:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

Пусть $\Delta z = i\Delta y$, тогда:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{i\Delta y}}{i\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{-i\Delta y}{i\Delta y} = -1$$

По одному направлению получили один предел, по-другому - другой $\Rightarrow$ предела не существует и функция не является $\mathbb{C}$-дифференцируемой.

Сходимость степенных рядов

Рассмотрим степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ в нуле (поскольку сделали сдвиг). Возникает вопрос, где он может сходиться? Вспоминая, что

$$\varlimsup_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k>n} c_k,\ \varliminf_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k>n} c_k$$

И признак Коши имел следующий вид:

Утв. 1. (**признак Коши**) Пусть $a_n \geq 0$, тогда:

(1) Если $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q < 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;

(2) Если $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q > 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится;

(3) Если $q = 1$, то ничего сказать нельзя;

Рассмотрим следующий верхний предел в контексте степенных рядов:

$$q = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|\cdot|z|^n} = |z|\cdot \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$$

Если $q < 1$, то ряд абсолютно сходится (ряд из модулей поскольку) $\Rightarrow$ сходится. Если $q > 1$, то расходится ряд из модулей (формально ничего про исходный сразу не видно), следовательно не сходятся к нулю слагаемые (см. признак Коши) $|c_n|\cdot|z|^n \Rightarrow$ исходный ряд расходится.

Опр: 4. Радиусом сходимости R будем называть следующее число:

$$R = \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}} \in [0, \infty]$$

Опр: 5. Кругом сходимости будем называть множество $\{z\colon |z| < R\}$.

Rm: 2. Включение 0 и ∞ в определении радиуса сходимости подразумевается следующем образом:

$$R = 0 \Leftrightarrow \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \infty,\ R = \infty \Leftrightarrow \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 0$$

Теорема 2. (**формула Коши-Адамара**) Для степенного ряда вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, если $|z| < R$, то ряд сходится, если значение $|z| > R$, то ряд расходится.

$\square$ Пусть $0 < \varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} < \infty$, тогда по признаку Коши ряд сходится, если:

$$q = |z|\cdot \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} < 1 \Leftrightarrow |z| < \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}} = R$$

и ряд расходится, если:

$$q = |z|\cdot \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} > 1 \Leftrightarrow |z| > \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}} = R$$

Если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|} = 0$, то $q = 0$ и сходимость всегда есть $\Rightarrow R = \infty$ и $\forall z,\ |z| < \infty$.

Если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|} = \infty$ и $z \neq 0$, то тогда мы получаем в пределе ∞ и ряд расходится всегда $\Rightarrow R = 0$. ■

Rm: 3. Теорема не говорит ничего про то, что может происходить на границе круга сходимости. Там может быть всё что угодно.

Примеры применения теоремы Коши-Адамара

1) Пример: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$, вычислим радиус сходимости:

$$\forall n,\ c_n = 1 \Rightarrow \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{1} = 1 \Rightarrow R = \frac{1}{1} = 1$$

Таким образом, круг сходимости это множество $\{z\colon |z| < 1\}$. На границе круга сходимости ряд расходится, поскольку:

$$|z| = 1 \Rightarrow |z^n| = 1 \nrightarrow 0$$

что должно было быть верным для сходящегося ряда. Область сходимости: $\{z\colon |z| < 1\}$.

2) Пример: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$, вычислим радиус сходимости:

$$\forall n,\ c_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 \Rightarrow R = \frac{1}{1} = 1$$

То есть всё, как и в прошлом примере. Единственный вопрос, что происходит на границе: $|z| = 1$:

$$z = \cos\varphi + i\sin\varphi \Rightarrow z^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos n\varphi}{n} + i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin n\varphi}{n}$$

Эти ряды сходятся только при $\varphi \neq 2\pi k$ (см. лекцию 4 про признак Дирихле), то есть при $z \neq 1$. Область сходимости: $\{z\colon |z| \leq 1 \land z \neq 1\}$.

3) Пример: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$, вычислим радиус сходимости:

$$\forall n,\ c_n = \frac{1}{n:2} \Rightarrow \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = 1 \Rightarrow R = \frac{1}{1} = 1$$

То есть всё, как и в прошлом примере. Но на границе $|z| = 1$ имеет место следующее:$\frac{|z^n|}{n^2} = \frac{1}{n^2} \Rightarrow$ ряд из модулей просто сходится $\Rightarrow$ сам ряд сходится. Область сходимости: $\{z\colon |z| \leq 1\}$

4) Пример: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, вычислим радиус сходимости используя формулу Стирлинга:

$$\forall n,\ c_n = \frac{1}{n!} \Rightarrow \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{1}{n!}} \approx \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{n^n\sqrt{2\pi n}}{e^n}}} = 0 \Rightarrow R = \frac{1}{0} = \infty$$

Rm: 4. Заметим, что рассматриваемый ряд есть разложение комплексной экспоненты e^z.

Таким образом, этот ряд сходится $\forall z \in \mathbb{C}$. Область сходимости: $\{z\colon z \in \mathbb{C}\}$.

5) Пример: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n n!$, вычислим радиус сходимости используя формулу Стирлинга:

$$\forall n,\, c_n = n! \Rightarrow \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{n!} \approx \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{n^n\sqrt{2\pi n}}{e^n}} = \infty \Rightarrow R = \frac{1}{\infty} = 0$$

Таким образом, этот ряд нигде не сходится (кроме точки $z = 0$). Область сходимости: $\{z\colon z = 0\}$.

Rm: 5. Заметим, что при работе с радиусами сходимости и теоремой Коши-Адамара надо быть всегда аккуратным, например, рассмотрим ряд:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{n^2} \Rightarrow R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n^2]{|2^n|}} = 1$$

где степень корня уже не n, а n^2 из-за строения ряда.

Упр. 1. Построить пример, когда на границе круга сходимости три точки расходимости.

Упр. 2. Построить пример, когда на границе круга сходимости ровно одна точка сходимости (см. конспект с задачами).

Теоремы Абеля о сходимости степенных рядов

Теорема 3. (**I-ая теорема Абеля** (1)) Если степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ сходится в точке $z_1 \neq 0$, то он также сходится $\forall z\colon |z| < |z_1|$ и сходится абсолютно и равномерно на множестве $\{z\colon |z| \leq q|z_1|\}$, $\forall q \in (0,1)$.

Rm: 6. Если $\exists\, z_2$ в которой степенной ряд не сходится, то $\forall z\colon |z| > |z_2|$ ряд также будет не сходится.

Rm: 7. Под равномерной сходимостью в данном случае понимаем такую же, как и для обычных рядов:

$$\sup_{z\in Z} \left| \sum_{n=N}^{\infty} c_n z^n \right| \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

$\square$ Пусть $|z| \leq q|z_1|$, $q \in (0,1)$. Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z_1^n$ - сходится, тогда $c_n z_1^n \to 0$ по необходимому условию сходимости ряда $\Rightarrow c_n z_1^n$ - ограничена:

$$\exists\, M > 0\colon \forall n,\, |c_n z_1^n| \leq M$$

Рассмотрим отдельно слагаемые ряда, по условию:

$$|c_n z^n| \leq |c_n|\cdot|z_1|^n q^n \leq M q^n,\, q \in (0,1) \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |c_n z^n| \text{ - сходится}$$

Более того, ряд сходится равномерно по признаку Вейерштрасса для каждого q. $\blacksquare$

Теорему можно переформулировать для радиусов сходимости.

Следствие 1. Если R - радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, то $\forall R_1 < R$ на круге $\{z\colon |z| < R_1\}$ ряд сходится равномерно и абсолютно.

□ Рассмотрим слагаемые ряда на круге $\{z\colon |z| < R_1\}$:

$$|c_n z^n| \leq |c_n| \cdot R_1^n < |c_n| \cdot R^n \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |c_n z^n| < \infty$$

По I-ой теореме Абеля сразу получаем требуемое. ■

Теорема 4. (**II-ая теорема Абеля**) Если степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ сходится в точке $z_1 \neq 0$, то он сходится равномерно на отрезке $[0, z_1] = \{z_1 t\colon t \in [0,1]\}$.

□ Надо проверить ряд вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (c_n z_1^n) t^n$ на отрезке $[0,1]$ на равномерную сходимость. Семейство функций $a_n(t) = t^n$ - монотонное, равномерно ограниченное на $[0,1]$. Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z_1^n$ - сходится $\Rightarrow$ сходится равномерно на $[0,1]$, поскольку не зависит от t. Тогда по признаку Абеля получаем требуемое. ■

Пример: Из формулы Тейлора мы знаем, что:

$$x \in \mathbb{R},\ |x| < 1 \Rightarrow \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n,\ R = 1$$

Перейдем пределом по x слева к 1. Можно ли переставлять предел и сумму? Для этого необходимо, чтобы один из пределов был равномерным. По второй теореме Абеля заданный ряд сходится равномерно на отрезке $[0,1]$ поскольку при $R < 1$ ряд сходится, а при $x = 1$ мы получаем ряд Лейбница. Тогда:

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Но у этого ряда очень долгая сходимость хвостов $\Rightarrow$ вычислять так 2 очень долго. Рассмотрим:

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k-1}}{2k-1}$$

Возьмем $x = \frac{1}{3}$, тогда мы получим:

$$\ln 2 = 2\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{2k-1} \frac{1}{2k-1}$$

И уже в этом случае скорость сходимости будет порядка $\left(\frac{1}{3}\right)^N$ и слагаемых понадобится в разы меньше (вместо 100 слагаемых хватит 4-5), чем для наивного подхода.

Rm: 8. Во втором томе Фихтенгольца есть большое обсуждение про методы усиления сходимости.

Пример: Полезно знать, как можно вычислить число π. Поскольку $\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1$, то можно попробовать разложить арктанегнс в степенной ряд. Это сделать сложно, поэтому вспомним следующее:

$$\operatorname{arctg} x = \int\limits_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int\limits_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} dt$$

Будем считать, что $0 < x < 1$, тогда ряд на $[0, x]$ сходится равномерно $\Rightarrow$ можно поменять интеграл и степенной ряд:

$$\operatorname{arctg} x = \int\limits_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

Rm: 9. Аналогичным образом можно получать разложение в степенной ряд у любых разумных обратных функций, поскольку их производные устроены обычно лучше, чем сама обратная функцию.

Полученный выше ряд сходится в $x = 1$ (как ряд Лейбница) $\Rightarrow$ есть равномерная сходимость на $[0, 1] \Rightarrow$ можно поменять местами предел и сумму:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

Опять получили крайне медленную сходимость. Можно вместо $\frac{\pi}{4}$ искать $\frac{\pi}{6}$ и с подстановкой $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Но можно сделать ещё лучше.

Упр. 3. Воспользоваться формулой:

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$$

И подобрать x и y, чтобы в правой части получили $\operatorname{arctg} 1$ $\left(\text{подходят } \frac{1}{2} \text{ и } \frac{1}{3}\right)$.

Свойства суммы степенного ряда

Прежде чем перейдем к рассмотрению свойств суммы, уточним некоторый момент относительно верхних пределов последовательностей.

Утв. 2. Пусть последовательности $\{a_n\}$, $a_n > 0$ и $\{b_n\}$, $b_n > 0$ такие, что:

$$\exists\, a = \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n,\ b = \overline{\lim_{n\to\infty}} b_n :$$

Тогда:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}} b_n \geq \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n \cdot b_n$$

И если у последовательности $\{a_n\}$ существует конечный предел $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, то будет верно равенство:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}} b_n = a \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}} b_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n \cdot b_n$$

□ По определению:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k>n} a_k,\ \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k>n} b_k$$

Поскольку $a_n, b_n > 0$, то:

$$\sup_{k>n} a_k \sup_{k>n} = \sup_{m,k>n} a_k b_m \geq \sup_{k>n} a_k b_k \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sup_{k>n} a_k \lim_{n\to\infty} \sup_{k>n} b_k \geq \lim_{n\to\infty} \sup_{k>n} a_k b_k$$

В случае, если у $\{a_n\}$ существует предел a, то возьмем $a > \varepsilon > 0$ такое, что:

$$\exists N \colon \forall n > N,\ a_n \geq a - \varepsilon \Rightarrow \forall n > N,\ \sup_{k>n} a_n b_n \geq \sup_{k>n} (a-\varepsilon) b_n = (a-\varepsilon) \sup_{k>n} b_n$$

Перейдем к пределу:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{k>n} a_n b_n \geq (a-\varepsilon) \lim_{n\to\infty} \sup_{k>n} b_n \Leftrightarrow \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n b_n \geq (a-\varepsilon) \overline{\lim_{n\to\infty}} b_n$$

А в силу произвольности $\varepsilon > 0$ мы получим:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n b_n \geq a \overline{\lim_{n\to\infty}} b_n \Rightarrow \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n b_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}} 7 b_n$$

■

Обозначим $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Хотим показать, что это дифференцируемая функция.

Теорема 5.

1) Радиусы сходимости рядов $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$ совпадают: $R = R'$.

2) Если радиус сходимости $R > 0$, то внутри круга сходимости сумма $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ дифференцируема и вычисляется следующим образом: $f'(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$, $\forall z \in \{z \colon |z| < R\}$.

Rm: 10. На границе сходимость может теряться, но внутри круга сходимости ничего не теряется.

□

1) Заметим, что ряды: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nc_n z^{n-1}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nc_n z^n$ сходятся или расходятся одновременно: первый ряд сходится $\Rightarrow$ домножив на ненулевую константу получим сходящийся ряд, второй ряд сходится $\Rightarrow$ поделив на ненулевую константу получим сходящийся ряд, при $z = 0$ оба ряда сходятся $\Rightarrow$ сходимость рядов одинакова $\Rightarrow$ радиусы сходимости этих рядов совпадают по I-ой теореме Абеля, иначе нашлась бы точка, где сходимости не совпадают. Следовательно: $R' = R''$ Посчитаем радиус сходимости второго ряда:

$$\frac{1}{R''} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{n|c_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = 1 \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{R}$$

где второе равенство верно, поскольку какую бы подпоследовательность ни взяли, у нас будет произведение подпоследовательности которая стремится к 1 и нашей $|c_n|$. Следовательно: $R' = R'' = R$. Или можно посчитать в явном виде (учитывая, что e^x и $\log x$ - непрерывные, возрастающие функции):

$$\frac{1}{R'} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n-1]{n|c_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} n^{\frac{1}{n-1}} \cdot \left(|c_n|^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{n}{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n-1]{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \sup_{k>n} e^{\frac{k}{k-1}\log\left(|c_k|^{\frac{1}{k}}\right)} =$$

$$= 1 \cdot e^{\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{k>n} \frac{k}{k-1}\log\left(|c_k|^{\frac{1}{k}}\right)} = e^{1\cdot\log\left(\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{k>n} |c_k|^{\frac{1}{k}}\right)} = \lim_{n\to\infty}\sup_{k>n} \sqrt[k]{|c_k|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{R}$$

2) Пусть $R > 0$, тогда по доказанному 1) верно, что $\forall z$, $|z| < R$ сходятся абсолютно ряды:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \ \sum_{n=1}^{\infty} nc_n z^{n-1}$$

Возьмем z_0: $|z_0| < R \Rightarrow \exists R_1$: $|z_0| < R_1 < R$. При $z \to z_0$ будем рассматривать z: $|z| < R_1$, поскольку при вычислении предела достаточно смотреть любую достаточно маленькую окрестность z_0. Тогда по определению $\mathbb{C}$-производной:

$$f'(z_0) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n\right)'\Bigg|_{z=z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n - \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z_0^n}{z - z_0} = \lim_{z\to z_0} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0}$$

Хотим предел вне суммы занести под сумму, это можно сделать лишь при равномерной сходимости. Рассмотрим слагаемые ряда:

$$\left|\frac{z^n - z_0^n}{z - z_0}\right| = \left|\frac{(z - z_0)(z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \ldots + z_0^{n-1})}{z - z_0}\right| \leq |z^{n-1}| + |z^{n-2}z_0| + \ldots + |z_0^{n-1}| \leq nR_1^{n-1}$$

Следующий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n| n R_1^{n-1}$ - сходится, поскольку это $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n n z^{n-1}$, где $z = R_1 < R$, который по следствию из I-ой теоремы Абеля сходится абсолютно $\Rightarrow$ по признаку Вейерштрасса ряд перед пределом сходится равномерно, тогда можно переставить предел и сумму местами:

$$\lim_{z\to z_0} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{z\to z_0} c_n \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n z_0^{n-1}$$

■

Rm: 11. Второй пункт можно было показать немного другим способом.

□
2) Рассмотрим следующую разность:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z+\Delta z)^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n - \Delta z \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1} = (*)$$

Хотим показать, что это при делении на Δz было $o(\Delta z)$, то есть по модулю стремилось к нулю. Возьмем $\varepsilon > 0$, $|z| < R_1 < R$, $|z+\Delta z| < R_1 < R$, тогда:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| R_1^n < \infty,\ \sum_{n=1}^{\infty} n|c_n| R_1^{n-1} < \infty \Rightarrow \exists\, N\colon\ \sum_{n=N}^{\infty} n|c_n| R_1^n < \varepsilon$$

Тогда оценим рассматриваемую разность:

$$|(*)| \le \left|\sum_{n=0}^{N-1} c_n \left((z+\Delta z)^n - z^n - \Delta z \cdot n z^{n-1}\right)\right| + |\Delta z| \cdot \sum_{n=N}^{\infty} n|c_n| \cdot |z|^{n-1} + \sum_{n=N}^{\infty} |c_n| \cdot |(z+\Delta z)^n - z^n|$$

где мы можем раскрыть скобки внутри последнего слагаемого:

$$\sum_{n=N}^{\infty} |c_n| \cdot |(z+\Delta z)^n - z^n| \le |\Delta z| \cdot \sum_{n=N}^{\infty} |c_n| \cdot \sum_{k=0}^{n-1} |z+\Delta z|^k \cdot |z|^{n-1-k} \le |\Delta z| \cdot \sum_{n=N}^{\infty} |c_n| \sum_{k=0}^{n-1} R_1^{n-1-k} \cdot R_1^k$$

$$|\Delta z| \cdot \sum_{n=N}^{\infty} |c_n| \sum_{k=0}^{n-1} R_1^{n-1-k} \cdot R_1^k = |\Delta z| \cdot \sum_{n=N}^{\infty} n|c_n| R_1^{n-1} \le |\Delta z| \varepsilon$$

$$|\Delta z| \cdot \sum_{n=N}^{\infty} n|c_n| \cdot |z|^{n-1} \le |\Delta z| \cdot \sum_{n=N}^{\infty} n|c_n| \cdot R_1^{n-1} \le |\Delta z| \varepsilon$$

Разделим нашу оценку на $|\Delta z|$ и рассмотрим, что получится:

$$\frac{1}{|\Delta z|}|(*)| \le \left|\sum_{n=0}^{N-1} \frac{c_n\left((z+\Delta z)^n - z^n - \Delta z \cdot n z^{n-1}\right)}{|\Delta z|}\right| + 2\varepsilon$$

В первом слагаемом находится производная для $f(z) = z^n$ выше мы её уже вычисляли, поэтому при значении $|\Delta z| < \delta$ это слагаемое будет сколь угодно маленькое. А поскольку в сумме конечное число слагаемых и каждое слагаемое можно сделать сколь угодно маленьким, то найдем такое δ, что будет верно:

$$\left|\sum_{n=0}^{N-1} \frac{c_n\left((z+\Delta z)^n - z^n - \Delta z \cdot n z^{n-1}\right)}{|\Delta z|}\right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{|\Delta z|}|(*)| < 3\varepsilon$$

■

Rm: 12. Почему не стали ссылаться на теорему о дифференцировании ряда? Ряд из производных сходится равномерно, сам ряд сходится ⇒ он сходится равномерно, его сумма дифференцируема и равна сумме производных. Но здесь нельзя её применить, поскольку мы находимся в $\mathbb{C}$ и теорема Лагранжа больше не работает. В $\mathbb{R}$ можно было сослаться на ту теорему.

Следствие 2. Пусть радиус сходимости ряда $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$, $R>0$. Тогда на $\{z\colon |z|<R\}$ сумма этого ряда бесконечное число раз дифференцируема и её k-ая производная вычисляется следующим образом:

$$f^{(k)}(z)=\sum_{n=k}^{\infty}c_nn(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)z^{n-k}$$

В частности, будет верно: $\forall k\in\mathbb{N}$, $c_k=\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$ и степенной ряд является рядом Тейлора своей суммы.

$\square$ Поскольку радиус сходимости не изменяется, то продифференцировав один раз, по теореме мы получим тот же радиус сходимости $\Rightarrow$ можем сделать это ещё раз внутри круга сходимости и взять производную почленно. Следовательно $f(z)\in C^{\infty}(\{z\colon |z|<R\})$. Формула для $f^{(k)}(z)$ получается из почленного дифференцирования ряда. Формула для c_k получается подстановкой коэффициентов. $\blacksquare$

Заметим, что не любая функция раскладывается в ряд Тейлора.

Пример: Пусть $f(z)=e^{-\frac{1}{z^2}}$, в $\mathbb{R}$ это бесконечно дифференцируемая функция, но все её производные в нуле равны нулю. Сама функция не нулевая $\Rightarrow$ не может разложиться в ряд Тейлора. В $\mathbb{C}$ если мы возьмем $z=iy$, то получим $f(z)=e^{\frac{1}{y^2}}\Rightarrow\lim\limits_{y\to 0}e^{\frac{1}{y^2}}=\infty$. То есть функция даже не непрерывная, поэтому она комплексно-дифференцируемой быть не может. А если функция разлагается в степенной ряд, то она разлагается в $\mathbb{C}$-степенной ряд. Если на $\mathbb{R}$ ряд сходился, то сразу в круге $\mathbb{C}$ будет сходиться $\Rightarrow$ функция $f(z)$ должна быть хотя бы непрерывной, а она не непрерывна.

Следствие 3. Пусть радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$, $R>0$. Тогда радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{c_n}{n+1}z^{n+1}$ равен R и его производная равна исходному ряду внутри круга сходимости:

$$\forall z\in\{z\colon |z|<R\},\ \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_nz^{n+1}}{n+1}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$$

Или, что тоже самое, можно записать так:

$$\forall z\in\{z\colon |z|<R\},\ \int\left(\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n\right)dz=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n+1}z^{n+1}+C,\ C\in\mathbb{C}$$

$\square$ Радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ равен радиусу сходимости $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{c_n}{n+1}z^{n+1}$, иначе мы получили бы противоречие с теоремой о дифференцируемости степенного ряда, поскольку первый ряд есть почленная производная второго. $\blacksquare$

Rm: 13. Таким образом, если степенной ряд дифференцируем, то можно сколь угодно раз брать производную и сколь угодно раз интегрировать ряд.