Применение производящих функций

(IV) Игра Пенни

Бросается правильная монета бесконечное число раз. Будем считать орёл за 1 и решку за 0. Если совершенно n бросков, то всего возможных комбинаций нулей и едениц может быть $2^n \Rightarrow$ вероятность реализации конкретного сценария будет равна:

$$A \in \Omega,\ A = \{\underbrace{0110\ldots1}_{n}\},\ \mathbb{P}(A) = \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2}}_{n} = \frac{1}{2^n}$$

В такой последовательности нас будет интересовать комбинация 110: мы бросаем монетку до тех пор, пока не появится такая комбинация. Пусть мы бросили монетку n раз, какова вероятность, что на n-ом бросании впервые возникла комбинация 110? Обозначим эту вероятность как p_n, тогда заметим:

$$p_0 = 0,\ p_1 = 0,\ p_2 = 0,\ p_3 = \frac{1}{8},\ \ldots$$

В контексте темы, нас будет интересовать производящая функция $P(z)$ для этой последовательности вероятностей. Одновременно с этим, обозначим через q_n - вероятность того, что в первых n бросаниях комбинация 110 не появилась:

$$q_0 = 1,\ q_1 = 1,\ q_2 = 1,\ q_3 = \frac{7}{8},\ \ldots$$

Тогда производящие функции будут иметь следующий вид:

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n,\ Q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n z^n$$

Рассмотрим комбинацию длины n , где нет 110, затем бросаем монетку и получаем её $\Rightarrow$ получаем все комбинации, где первый раз встречается 110. Вероятность таких последовательностей будет равна:

$$B \in \Omega,\ B = \{\underbrace{\text{ нет комбинации 110 }}_{n}110\} \Rightarrow \mathbb{P}(B) = q_n\cdot\frac{1}{8} = p_{n+3} \Rightarrow \frac{1}{8}z^3Q(z) = P(z)$$

Рассмотрим ещё следующие комбинации: пусть сколько-то бросков ничего не было, затем бросили монетку ещё раз, где может выпасть либо орёл, либо решка. Объединяя эти наборы мы получаем комбинации, где может появится нужная последовательность, а может не появится. Добавляя к этим событиям случай, когда ничего не бросали мы сможем представить это так:

$$\{\varnothing\} + \{\text{ нет 110 } |0\} + \{\text{ нет 110 } |1\} = \{\text{ нет 110 }\} + \{\text{ есть 110 }\}$$

Случай, когда не бросали монетку слева перейдет в случай справа, когда монетка была брошена ровно один раз (у $Q(z)$ потеряно нулевое слагаемое). Запишем это в терминах производящих функций:

$$1 + \frac{1}{2}zQ(z) + \frac{1}{2}zQ(z) = Q(z) + P(z) \Rightarrow (z-1)Q(z) = P(z) - 1$$

Получили два уравнения, хотелось бы получить $P(z)$:

$$Q(z) = \frac{8}{z^3}P(z) \Rightarrow \frac{8(z-1)}{z^3}P(z) = P(z) - 1 \Rightarrow z^3 = P(z)\cdot(z^3 - 8(z-1)) \Rightarrow P(z) = \frac{z^3}{z^3 - 8(z-1)}$$

Мы получили рациональную дробь, значит последовательность будет удовлетворять реккурентному соотношению. Можем их посчитать приравняв коэффициенты к нулю, начиная с некоторого номера:

$$z^3 = z^3P(z) - 8zP(z) + 8P(z) \Rightarrow z_n\colon 8p_n - 8p_{n-1} + p_{n-3} = 0 \Rightarrow p_n = p_{n-1} - \frac{1}{8}p_{n-3},\ n > 3$$

Можно разложить это в ряд при z маленьких. Но сделаем ещё одно замечание, пусть $z = 1 \Rightarrow$ получим вероятность того, что искомая комбинация вообще встретится:

$$P(1) = p_0 + p_1 + p_2 + \ldots = \frac{1}{1 - 8{\cdot}0} = 1$$

Таким образом, мы видим, что с вероятностью 1 появляется такая комбинация.

Игра с двумя участниками

Пусть теперь у нас будет два участника Алиса и Боб, Алиса загадала комбинацию 110, а Боб загадал комбинацию 100. Дальше начинается бросание монетки и выигрывает тот, чья комбинация появляется первой. На самом деле, один из участников выигрывает с большей вероятностью. Интересный факт, что какую бы комбинацию мы не придумали длины 3 всегда можно указать комбинацию, которая у неё выигрывает. Это называется парадоксом Пенни.

Обозначим через S_A сумму вероятностей тех комбинаций, когда выигрывает Алиса и через S_B сумму вероятностей тех комбинаций, когда выигрывает Боб:

$$S_A = \sum_{n=0}^{\infty} p_n^A,\ S_B = \sum_{n=0}^{\infty} p_n^B$$

где p_n^A - вероятность, что на n-ом шаге появилась комбинация Алиса, а до этого не было не только её комбинации, но и комбинации Боба. Обозначим через Q - сумма q_n вероятностей, что на шаге n нет нужных комбинаций. Аналогично прошлому разу, рассмотрим комбинации, когда не было ничего ни для Алисы, ни для Боба, а затем бросили монетку ещё раз. Мы получаем следующий набор:

$$\{\varnothing\} + \{\text{ нет A, нет B } |0\} + \{\text{ нет A, нет B } |1\} = \{\text{ нет A, нет B }\} + \{\text{ есть A }\} + \{\text{ есть B }\}$$

Предположив, что $z = 1$ (здесь уже не работаем с производящими функциями), мы получим:

$$1 + \frac{1}{2}Q + \frac{1}{2}Q = Q + S_A + S_B \Rightarrow S_A + S_B = 1$$

Это означает, что хотя бы один из них на каком-то шаге выиграет. Рассмотрим случай, когда сначала ничего не было, а затем получили комбинацию 100 и аналогично, когда получили 110:

$$\{\text{ нет A, нет B } |100\} = \{\text{ есть A } |0\} + \{\text{ есть B }\} \Rightarrow \frac{1}{8}Q = \frac{1}{2}S_A + S_B$$

$$\{\text{ нет A, нет B } |110\} = \{\text{ есть A }\} \Rightarrow \frac{1}{8}Q = S_A \Rightarrow S_A = 2S_B \Rightarrow S_A = \frac{2}{3},\ S_B = \frac{1}{3}$$

Rm: 1. Есть замечательная книга про похожие задачи: Кнут, Поташник и Грэхам, “конкретная математика”. В этой книге есть очень много красивых наблюдений и методов, которые используются и в комбинаторике, и в программировании.

Решение дифф. уравнений с помощью степенных рядов

Задача Коши

Пример: Рассмотрим задачу Коши: $\begin{cases} y' &= y \\ y(0) &= 1 \end{cases}$ и будем искать решение в виде $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$.

Априори неизвестно, есть ли решение в виде степенного ряда или получится ли вообще что-то разумное. Подставим в систему и проверим:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

По теореме о единственности мы знаем, что если степенные ряды совпали, то совпали и их коэффициенты при их соответствующих степенях. Тогда, воспользовавшись начальным условием, мы получим:

$$x^0\colon y(0) = c_0 = 1,\ x^1\colon 1{\cdot}c_1 = c_0,\ x^n\colon (n+1)c_{n+1} = c_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_{n+1} = \frac{c_n}{n+1} = \frac{c_{n-1}}{(n+1)n} = \ldots = \frac{1}{(n+1)!} \Rightarrow y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

Возникает вопрос, зачем так решать дифференциальные уравнения? Иногда степенными рядами можно решить то, что обычными методами так просто не решить.

Уравнение Лапласа

Пример: Рассмотрим следующее уравнение: $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$.

Rm: 2. Для большого числа задач бывает важно находить решения такого уравнения. Например, если вы решаете задачу о том, как распределена температура в аудитории (или в какой-то области): если температура больше не меняется и больше нет других источников изменения, то распределение температуры будет удовлетворять такому уравнению. Другой пример: надули мыльный пузырь или натянули мыльную плёнку на какую-то рамку, как будет устроен профиль этой плёнки? Если она не сильно изгибается, очень хорошим приближением опять будет задаваться решением этого уравнения.

Опр: 1. Это уравнение называется *уравнением Лапласа*, функция удовлетворяющая этому уравнению называется *гармонической*.

Пусть мы изучаем эту задачу в каком-либо цилиндре, тогда естественно будет перейти от обычной Евклидовой системы координат в цилиндрическую. Тогда:

$$\begin{cases} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \\ z &= z \end{cases} \Rightarrow \Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} + u_{zz}$$

Одним из важных методов в дифф. уравнениях является разделение переменных $\Rightarrow$ сделаем догадку, что надо искать решение в некотором специальном виде:

$$u(r, \varphi, z) = R(r)\Phi(\varphi)Z(z)$$

За догадкой лежит уверенность в том, что все сложные процессы распадаются в линейные комбинации простых и чтобы научиться любую ситуацию моделировать надо иметь большой запас решений, не надо пытаться найти сразу все, достаточно бывает найти большой класс, а дальше через него, с помощью линейных комбинаций (возможно бесконечных), выразить то, что нам нужно. Это так называемый принцип суперпозиции. Подставим выражение в уравнение Лапласа:

$$R''\Phi Z + \frac{1}{r}R'\Phi Z + \frac{1}{r^2}R\Phi'' Z + R\Phi Z'' = 0 \Rightarrow \frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\cdot\frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\Phi'}{\Phi} + \frac{Z''}{Z} = 0$$

Когда делят, обычно рассуждают исходя из того, что пытаются найти не всё, а достаточно много. Заметим, что первое и второе слагаемые зависят только от r, третье от r и φ и последнее зависит только от z. Поскольку это всё равно нулю, то последнее слагаемое равно функции, которая от z не зависит $\Rightarrow$ это константа (поскольку слагаемое зависит только от z). Тогда:

$$Z'' = \lambda^2 Z$$

где λ в квадрате, поскольку по некоторым причинам удобно считать, что это положительная константа. По аналогичным причинам, мы получаем, что:

$$\Phi'' + n^2\Phi = 0$$

где отрицательный коэффициент берется в силу того, что все решения в таком случае будут косинусами и синусами, в противном случае будут экспоненты $\Rightarrow$ поскольку φ это полярный угол, то естественным будет ожидание, что для хороших функций должна получаться функция периодическая. Подставим эти выражения и посмотрим, какое уравнение получается на r:

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\cdot\frac{R'}{R} - \frac{n^2}{r^2} + \lambda^2 = 0 \Rightarrow r^2R''(r) + rR'(r) + (\lambda^2r^2 - n^2)R(r) = 0$$

Масштабированием в λ раз можно добиться равенства $\lambda = 1$, пусть это уже будет так. Перепишем это уравнение в привычных переменных:

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0, \ (*)$$

Возьмем у этого уравнения решение $y(0) = \dfrac{1}{2^n n!}$, тогда решение этого уравнения $y(x)$ будет называться функцией Бесселя порядка n.

Rm: 3. Обратим внимание, что в этом примере из начальных решений получится только одно. Это необычно, поскольку при уравнениях со вторыми производными обычно ставится два условия: на начальное положение и производную. Тут это не так, поскольку при y'' находится x^2 и при разрешении такого уравнения относительно y'' мы получим особенность $\frac{1}{x^2}$ в правой части. Поэтому для класса решений в виде степенных рядов здесь будет достаточно только одного условия.

Если захотим искать множество решений $(*)$, а затем их линейными комбинациями построить любое другое, то потребуется найти все функции Бесселя. Рассмотрим для этого случай с $n = 0$:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \Rightarrow x^2\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + x\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} + x^2\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(0) = 1 = c_0,\ c_1 = 0,\ x^n\colon n(n-1)c_n + nc_n + c_{n-2} = 0 \Rightarrow c_n = -\frac{c_{n-2}}{n^2}$$

где c_0 получается из начального условия, а c_1 из приравнивания слагаемых. Поскольку $c_1 = 0$, то всё нечётные слагаемые равны 0:

$$c_1 = 0 \Rightarrow c_3 = -\frac{0}{3^2} = 0 \Rightarrow c_{2k+1} = 0$$

с другой стороны, всё четные слагаемые будут иметь вид:

$$c_{2k} = -\frac{c_{2k-2}}{(2k)^2} = \frac{c_{2k-4}}{(2k(2k-2))^2} = \ldots = \frac{(-1)^k}{((2k)!!)^2} \Rightarrow y(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{((2k)!!)^2}$$

Определение тригонометр. функций через степенные ряды

Мы уже определяли тригонометрические функции в 1-ом семестре, но там определение синуса было тавтологическим. Возникает вопрос, нельзя ли его определить как-то по-строгому. Теперь мы это можем сделать. Мы знаем разложение для экспоненты:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},\ z \in \mathbb{C}$$

Упр. 1. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^z,\ z \in \mathbb{C}$.

$\square$

$$\left|\left(1+\frac{z}{n}\right)^n - e^z\right| = \left|\sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{z^k}{n^k} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\right| \leq \left|\sum_{k=0}^{n} z^k \left(\frac{C_n^k}{n^k} - \frac{1}{k!}\right)\right| + \sum_{k=n+1}^{\infty} \left|\frac{z^k}{k!}\right|$$

Поскольку ряд e^z сходится, то его хвост будет стремиться к нулю $\Rightarrow$ возьмем $\varepsilon > 0$, тогда:

$$\exists\, N \colon \forall m > N,\ \sum_{k=m}^{\infty} \left|\frac{z^k}{k!}\right| < \varepsilon \Rightarrow \forall n \geq m,\ \sum_{k=m}^{n} \left|\frac{z^k}{k!}\right| \leq \sum_{k=m}^{\infty} \left|\frac{z^k}{k!}\right| < \varepsilon$$

Таким образом, нам необходимо оценить первое слагаемое. Рассмотрим следующую сумму $\forall n > N$:

$$\left|\sum_{k=0}^{N} z^k \left(\frac{C_n^k}{n^k} - \frac{1}{k!}\right)\right| \leq \sum_{k=0}^{N} |z^k| \cdot \frac{1}{k!} \cdot \left|\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1))}{n^k} - 1\right| = \sum_{k=1}^{N} \left|\frac{z^k}{k!}\right| \cdot \left|\prod_{j=1}^{k-1}\left(1-\frac{j}{n}\right) - 1\right|$$

Каждое из слагаемых этой суммы стремится к нулю, при $n \to \infty$, тогда:

$$\forall k = \overline{0, N},\ \exists\, N_k \colon \forall n > N_k,\ \left|\frac{z^k}{k!}\right| \cdot \left|\prod_{j=1}^{k-1}\left(1-\frac{j}{n}\right) - 1\right| < \frac{\varepsilon}{N}$$

Оценим оставшееся слагаемое суммы, пусть $n > \max\{N, N_0, \ldots, N_k\}$ достаточно большое, тогда:

$$\forall j = \overline{0, n},\ 0 \leq \left(1 - \frac{j}{n}\right) \leq 1 \Rightarrow \forall k \leq n,\ 0 \leq \prod_{j=1}^{k-1}\left(1-\frac{j}{n}\right) \leq 1 \Rightarrow \left|\prod_{j=1}^{k-1}\left(1-\frac{j}{n}\right) - 1\right| \leq 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{k=N+1}^{n} \left|\frac{z^k}{k!}\right| \cdot \left|\prod_{j=1}^{k-1}\left(1-\frac{j}{n}\right) - 1\right| \leq \sum_{k=N+1}^{n} \left|\frac{z^k}{k!}\right| \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \left|\frac{z^k}{k!}\right| < \varepsilon$$

Таким образом, мы получаем следующие неравенства:

$$\left|\left(1+\frac{z}{n}\right)^n - e^z\right| \leq \sum_{k=1}^{N} \left|\frac{z^k}{k!}\right| \cdot \left|\prod_{j=1}^{k-1}\left(1-\frac{j}{n}\right) - 1\right| + \sum_{k=N+1}^{\infty} \left|\frac{z^k}{k!}\right| + \sum_{k=n+1}^{\infty} \left|\frac{z^k}{k!}\right| < N \cdot \frac{\varepsilon}{N} + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left|\left(1+\frac{z}{n}\right)^n - e^z\right| = 0$$

$\blacksquare$

Упр. 2. Проверить по определению, что $e^{x+y} = e^x{\cdot}e^y$.

□ Переменожим ряды экспонент по теореме Коши:

$$e^x{\cdot}e^y = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n!}\right) = \sum_{t=0}^{\infty}\frac{x^{i(t)}{\cdot}y^{j(t)}}{i(t)!{\cdot}j(t)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k{\cdot}y^{n-k}}{k!{\cdot}(n-k)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}C_n^k\frac{x^k{\cdot}y^{n-k}}{n!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}{\cdot}\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^k{\cdot}y^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}{\cdot}(x+y)^n = e^{x+y}$$

■

Определим тригонометрические функции следующим образом (из тождества Эйлера):

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x,\ e^{-ix} = \cos x - i\sin x$$

$$\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$

В чем состоит трудность? Можем ли мы, смотря на эти функции, понять что все операции будут правильными. Проверяются по определению, через экспоненты свойства:

(1) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$;

□

$$\sin^2 x + \cos^2 x = \frac{e^{2ix}-2+e^{-2ix}}{-4} + \frac{e^{2ix}+2+e^{-2ix}}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

■

(2) $\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$;

□

$$\cos x\cos y - \sin x\sin y = \frac{e^{ix+iy}+e^{ix-iy}+e^{-ix+iy}+e^{-ix-iy}}{4} - \frac{e^{ix+iy}-e^{ix-iy}-e^{-ix+iy}+e^{-ix-iy}}{-4} =$$

$$= \frac{2e^{i(x+y)}+2e^{-i(x+y)}}{4} = \frac{e^{i(x+y)}+e^{-i(x+y)}}{2} = \cos(x+y)$$

■

(3) $\sin(x+y) = \cos x\sin y + \sin x\cos y$;

□

$$\cos x\sin y + \sin x\cos y = \frac{e^{ix+iy}-e^{ix-iy}+e^{-ix+iy}-e^{-ix-iy}}{4i} + \frac{e^{ix+iy}+e^{ix-iy}-e^{-ix+iy}-e^{-ix-iy}}{4i} =$$

$$= \frac{2e^{i(x+y)}-2e^{-i(x+y)}}{4} = \frac{e^{i(x+y)}-e^{-i(x+y)}}{2i} = \sin(x+y)$$

■

(4) $\sin(-x) = -\sin x$, $\cos(-x) = \cos x$;

$\square$

$$\sin(-x) = \frac{e^{-ix} - e^{ix}}{2i} = -\sin x,\ \cos(-x) = \frac{e^{-ix} + e^{ix}}{2} = \cos x$$

$\blacksquare$

(5) $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$;

$\square$

$$\cos 0 = \frac{2}{2} = 1,\ \sin 0 = \frac{1-1}{1} = 0$$

$\blacksquare$

Из этих свойств можно вывести большинство других тригонометрических формул, кроме связанных с формулами приведения, поскольку для этого нужно находить нули у $\sin x$ и $\cos x$.

Утв. 1. Существует наименьший положительный корень уравнения $\cos x = 0$, обозначение $\frac{p}{2}$. Более того, $\sin x$ на отрезке $\left[0, \frac{p}{2}\right]$ возрастает, $\cos x$ на $\left[0, \frac{p}{2}\right]$ убывает и $\sin\left(\frac{p}{2}\right) = 1$.

$\square$ Покажем, что $\cos 2 < 0$, этого будет достаточно, поскольку $\cos x$ - непрерывная функция, $\cos 0 = 1$ и тогда по теореме о промежуточном значении, где-то между на $[0, 2]$ будет точно корень. Наименьший корень найдется: $\{0\}$ - замкнуто $\Rightarrow f^{-1}(\{0\})$ - замкнуто, поскольку замкнутый прообраз непрерывной функции - замкнут (см. семестр 2, лекцию 10) $\Rightarrow$ содержит точную нижнюю грань. Рассмотрим:

$$\cos 2 = 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \frac{2^6}{6!} + \ldots = -\frac{1}{3} - \left(\left(\frac{2^6}{6!} - \frac{2^8}{8!}\right) + \left(\frac{2^{10}}{10!} - \frac{2^{12}}{12!}\right) + \ldots\right) < 0$$

где неравенство верно, поскольку второе слагаемое - положительно. Покажем это:

$$\frac{2^n}{n!} \vee \frac{2^{n+2}}{(n+2)!} \Leftrightarrow (n+2)(n+1) \vee 4 \Rightarrow \forall n > 6,\ (n+2)(n+1) > 4$$

Таким образом, наименьший корень есть, обозначим его через $\frac{p}{2}$. Рассматривая степенные ряды, мы можем посчитать производные и увидеть, что $(\cos x)' = -\sin x$ и $(\sin x)' = \cos x$:

$$(\cos x)' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot 2k \cdot x^{2k-1}}{(2k)!} = (-1)\cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^{2k-1}}{(2k-1)!} \overset{m=k+1}{=} -\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!} = -\sin x$$

$$(\sin x)' = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot (2k+1) \cdot x^{2k}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = \cos x$$

Поскольку на отрезке $\left[0, \frac{p}{2}\right)$ функция $\cos x > 0 \Rightarrow (\sin x)' > 0 \Rightarrow \sin x$ будет возрастать. Аналогично, производная косинуса будет строго отрицательной на $\left(0, \frac{p}{2}\right] \Rightarrow \cos x$ будет убывать. Более того, поскольку синус возрастает начиная с 0 , то в $\frac{p}{2}$ у него значение будет положительным, тогда:

$$\cos^2\left(\frac{p}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{p}{2}\right) = 1 \Rightarrow \sin^2\left(\frac{p}{2}\right) = 1,\ \sin\left(\frac{p}{2}\right) > 0 \Rightarrow \sin\left(\frac{p}{2}\right) = 1$$

$\blacksquare$

Отсюда сразу выводятся верны формулы приведения:

$$\sin\left(x+\frac{p}{2}\right)=\cos x\sin\left(\frac{p}{2}\right)+\sin x\cos\left(\frac{p}{2}\right)=\cos x$$

$$\cos\left(x+\frac{p}{2}\right)=\cos x\cos\left(\frac{p}{2}\right)-\sin x\sin\left(\frac{p}{2}\right)=-\sin x$$

Теперь все соображения о положительности, строгой монотонности можно перенести с отрезка $\left[0,\frac{p}{2}\right]$ на отрезок $\left[\frac{p}{2},p\right]$, затем на $\left[p,\frac{3p}{2}\right]$ и финально на $\left[\frac{3p}{2},2p\right]$. В частности, можем показать периодичность функций:

$$\sin\left(x+2p\right)=\cos\left(x+\frac{3p}{2}\right)=-\sin\left(x+p\right)=-\cos\left(x+\frac{p}{2}\right)=\sin x$$

$$\cos\left(x+2p\right)=-\sin\left(x+\frac{3p}{2}\right)=-\cos\left(x+p\right)=\sin\left(x+\frac{p}{2}\right)=\cos x$$

Таким образом, мы получили что $2p$ это период, а из соотношений монотонности сразу выводится, что меньшего периода нет: пусть T - другой период, тогда $\cos 0=\cos T=1$, но по монотонности положительное значение равное 1 получается лишь в $2p\Rightarrow 2p=T$. Осталось понять, почему $p=\pi$.

Рассмотрим отображение $t\colon[0,2p)\to\{(x,y)\colon x^2+y^2=1\}$, $x=\cos t, y=\sin t$. Мы знаем, что это биекция на единичную окружность: рассмотрим отрезок $\left[0,\frac{p}{2}\right]$, он перейдет в правый верхний угол окружности, $\cos x$ пробегает все значения от 1 до 0, причем из-за строгой монотонности ровно один раз $\Rightarrow$ проходим все точки на этой дуге и ровно один раз. Остальные четверти получаются из формул привидения. Тогда мы можем посчитать длину окружности:

$$l(t)=\int\limits_0^{2p}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}dt=\int\limits_0^{2p}\sqrt{\sin^2 x+\cos^2 x}dt=\int\limits_0^{2p}dt=2p=2\pi\Rightarrow p=\pi$$

где число π мы определяем как длину половины единичной окружности.