Преобразование Фурье

Опр: 1. Преобразованием Фурье функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ называется функция вида:

$$\widehat{f}(y) = \mathcal{F}(f)(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixy} dx$$

Утв. 1. Если f абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$, то есть:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < \infty$$

то преобразование Фурье существует, является непрерывной функцией и верна оценка:

$$\left|\widehat{f}(y)\right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$$

Опр: 2. Пространством быстроубывающих функций Шварца назовем пространство функций:

$$S = \left\{ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ f \in C^{\infty}(\mathbb{C}),\ \forall m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ \sup_{x \in \mathbb{R}} (1 + |x|^n) \cdot |f^{(m)}(x)| < \infty \right\}$$

где под $f \in C^{\infty}(\mathbb{C})$ мы понимаем бесконечную дифференцируемость функции f: то есть действительные и мнимые части - бесконечно дифференцируемые функции.

Теорема 1. (**преобразование Фурье и дифференцирование**) $\forall f \in S$ будут верны следующие соотношения:

$$\mathcal{F}\left(f^{(k)}\right)(y) = (iy)^k \mathcal{F}(f)(y)$$

$$\mathcal{F}(f)^{(k)}(y) = \mathcal{F}\left((-ix)^k f(x)\right)(y)$$

Следствие 1. Преобразование Фурье это линейное отображение из S в S.

$\square$ Линейность следует из линейности интеграла. Пусть $f \in S$, тогда:

1) $\widehat{f}$ - бесконечно дифференцируемая по теореме 1;

2) Осталось показать, что $\widehat{f}^{(k)}$ стремятся к нулю быстрее всякой степени $\Rightarrow$ рассмотрим следующее:

$$|y|^m \cdot \left|\widehat{f}^{(k)}(y)\right| = |y|^m \cdot \left|\mathcal{F}\left((-ix)^k f(x)\right)(y)\right| = \left|(iy)^m \cdot \mathcal{F}\left((-ix)^k f(x)\right)(y)\right| = \left|\mathcal{F}\left(\left((-ix)^k f(x)\right)^{(m)}\right)(y)\right|$$

$$f(x) \in S \Rightarrow (-ix)^k f(x) \in S \Rightarrow \left((-ix)^k f(x)\right)^{(m)} \in S \Rightarrow \left|\mathcal{F}\left(\left((-ix)^k f(x)\right)^{(m)}\right)(y)\right| < \infty$$

Преобразование Фурье функции из S является ограниченной функцией $\Rightarrow \widehat{f}^{(k)}$ стремятся к нулю быстрее всякой степени.

$\blacksquare$

Таким образом, преобразование Фурье это линейный оператор из S в S, а пространство S для преобразования Фурье это инвариантное подпространство. Чтобы узнать как устроено линейное преобразование надо посмотреть на его собственные вектора и собственные значения. Спектр преобразования Фурье мы не можем изучить, но самую важную собственную функцию указать можем.

Теорема 2.

$$\mathcal{F}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)(y) = e^{-\frac{y^2}{2}}$$

$\square$ Заметим, что:

$$\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)' = -xe^{-\frac{x^2}{2}}$$

Также отметим, что функция $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ решает дифференциальное уравнение:

$$\begin{cases} f' &= -xf \\ f(0) &= 1 \end{cases}$$

и такое решение единственное. Продифференцируем преобразование Фурье этой функции:

$$\mathcal{F}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)'(y) = \mathcal{F}\left(-ixe^{-\frac{x^2}{2}}\right)(y) = i\mathcal{F}\left(-xe^{-\frac{x^2}{2}}\right)(y) = i\mathcal{F}\left(\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)'\right)(y) =$$

$$= i\cdot(iy)\cdot\mathcal{F}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)(y) = -y\mathcal{F}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)(y)$$

$$\mathcal{F}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot 1\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi} = 1$$

Из-за четности функции $e^{-\frac{x^2}{2}}$ её преобразование Фурье это вещественная функция, поскольку в разложении интеграл с синусом будет равен 0. Тем самым, преобразование Фурье удовлетворяет дифференциальному уравнению выше, а в силу единственности решения мы получаем требуемое. $\blacksquare$

Rm: 1. Заметим, что замена переменных в преобразовании Фурье будет происходить так ($a \neq 0$):

$$\mathcal{F}\left(f(ax+b)\right)(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(ax+b)e^{-ixy}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{|a|}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-\frac{i(t-b)y}{a}}dt = \frac{e^{\frac{iby}{a}}}{|a|}\mathcal{F}\left(f\left(\tfrac{y}{a}\right)\right)$$

Мы бы хотели показать, что преобразование Фурье это изоморфизм, но для этого нам надо установить обратное преобразование Фурье. Начнём с рассмотрения важной леммы.

Лемма 1. Пусть $f, g \in S$, тогда верно равенство:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(y)g(y)e^{ixy}dy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x+y)\widehat{g}(y)dy$$

$\square$ По определению преобразования Фурье:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(y)g(y)e^{ixy}dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ity}dt\right)g(y)e^{ixy}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(y)e^{-iy(t-x)}dt\right)dy =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(y) e^{-iy(t-x)} dy \right) dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(y) e^{-iy(t-x)} dy \right) dt =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \widehat{g}(t-x) dt = |t = s + x| = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x+x) \widehat{g}(s) ds$$

где мы поменяли интегралы местами в силу того, что все функции бесконечно гладкие, убывают быстрее любой степени и экспонента оценивается единицей. Распишем подробнее:

1) Функция по y - гладкая функция на $\mathbb{R}$:

$$y \mapsto g(y) e^{iyx} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-iyt} dt = g(y)(\cos(xy) + i \sin(xy)) \mathcal{F}(f)(y)$$

так как $\mathcal{F}(f)(y) \in S$ - гладкая функция, $g(y) \in S \Rightarrow$ бесконечно гладкая, e^{iyx} - раскладывается в косинусы и синусы $\Rightarrow$ тоже гладкая функция. Для модуля:

$$y \mapsto |g(y)| \cdot |e^{iyx}| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| \cdot \left| e^{-iyt} \right| dt = |g(y)| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt = C_1 |g(y)| < \infty$$

Модули функций из S как минимум непрерывные функции $\Rightarrow$ функция интегрируема;

2) Функция по t - гладкая функция на $\mathbb{R}$:

$$t \mapsto f(t) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(y) e^{-iy(t-x)} dy = f(t) \mathcal{F}(g)(t-x)$$

так как $\mathcal{F}(g)(t-x)$ - гладкая функция, $f(t) \in S \Rightarrow$ бесконечно гладкая. Для модуля:

$$t \mapsto |f(t)| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |g(y)| \cdot \left| e^{-iy(t-x)} \right| dy = |f(t)| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |g(y)| dy = C_2 |f(t)| < \infty$$

Модули функций из S как минимум непрерывные функции $\Rightarrow$ функция интегрируема;

3) Повторный интеграл от модуля сходится:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left| f(t) g(y) e^{-iy(t-x)} \right| dt \right) dy \le \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| \cdot |g(y)| dt \right) dy =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |g(y)| \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| \cdot dt \right) dy = C_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |g(y)| dy = C_1 \cdot C_2 < \infty$$

Таким образом, применение теоремы о перестановке двух несобственных интегралов возможно. ■

Следствие 2. При $x=0$ получаем равенство:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(y)g(y)dy=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(y)\widehat{g}(y)dy$$

Теорема 3. (**формула обращения преобразования Фурье**)

$$\forall f\in S,\ f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(y)e^{ixy}dy$$

$\square$ Пусть $\varepsilon>0$, рассмотрим функцию $g_\varepsilon(x)=e^{-\frac{\varepsilon^2x^2}{2}}$ и найдем её преобразование Фурье:

$$\widehat{g_\varepsilon}(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{\varepsilon^2x^2}{2}}e^{-ixy}dx=\left|\varepsilon x=t\Rightarrow x=\tfrac{t}{\varepsilon}\right|=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}e^{-it\frac{y}{\varepsilon}}dt=\frac{1}{\varepsilon}e^{-\frac{y^2}{2\varepsilon^2}}$$

где мы воспользовались теоремой 2. Видим, что получили дельтаобразную последовательность (не хватает только нормировки). Подставляем эту функцию в лемму, тогда:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(y)e^{-\frac{\varepsilon^2y^2}{2}}e^{ixy}dy=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x+y)\frac{1}{\varepsilon}e^{-\frac{y^2}{2\varepsilon^2}}dy=\left|\tfrac{y}{\varepsilon}=z\right|=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x+\varepsilon z)e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

Поскольку: $f(x)\in S\Rightarrow$ она непрерывная, ограниченная и по признаку Вейерштрасса у нас есть равномерная сходимость:

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x+\varepsilon z)e^{-\frac{z^2}{2}}dz\right|\le\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(x+\varepsilon z)|\cdot e^{-\frac{z^2}{2}}dz\le C_1\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}dz<\infty$$

В этом случае мы можем переставить предел и интеграл местами. Аналогично:

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(y)e^{-\frac{\varepsilon^2y^2}{2}}e^{ixy}dy\right|\le\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|\widehat{f}(y)\right|e^{-\frac{\varepsilon^2y^2}{2}}dy\le C_2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{\varepsilon^2y^2}{2}}dy<\infty$$

Перейдем к пределу под интегралами:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\lim_{\varepsilon\to0}\left(\widehat{f}(y)e^{-\frac{\varepsilon^2y^2}{2}}e^{ixy}\right)dy=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(y)e^{ixy}dy=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\lim_{\varepsilon\to0}\left(f(x+\varepsilon z)e^{-\frac{z^2}{2}}\right)dz=f(x)\sqrt{2\pi}$$

$\blacksquare$

Обратное преобразование Фурье

Опр: 3. Обратным преобразованием Фурье функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ называется функция вида:

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{ixy} dy$$

Утв. 2. Верны следующие свойства обратного преобразования Фурье:

1) $\mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \mathcal{F}(f)(-x)$;
2) $\mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \overline{\mathcal{F}\left(\overline{f}\right)}(x)$;

□

1) Просто по определению;
2) По определению:

$$\mathcal{F}\left(\overline{f}\right)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(y)} e^{-ixy} dy \Rightarrow \overline{\mathcal{F}\left(\overline{f}\right)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{ixy} dy$$

■

Отсюда очевидно, что обратное преобразование Фурье функции из S переводит в функции из S, это очевидно, поскольку его можно записать как обычное преобразование Фурье и потом взять сопряжение, а сопряжение не выводит нас из класса быстроубывающих функций.

Утв. 3. Верны следующие равенства:

1) $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))(x) = f(x)$;
2) $\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(f))(x) = f(x)$;

□

1) Доказано в теореме 3;
2) $\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(f))(x) = \mathcal{F}\left(\overline{\mathcal{F}\left(\overline{f}\right)}\right)(x) = \overline{\overline{\mathcal{F}\left(\overline{\mathcal{F}\left(\overline{f}\right)}\right)}}(x) = \overline{\mathcal{F}^{-1}\left(\mathcal{F}\left(\overline{f}\right)\right)}(x) = \overline{\overline{f}}(x) = f(x)$

■

Следствие 3. Преобразование Фурье это линейный изоморфизм пространства S.

□ Из утверждения 3 следует, что преобразование Фурье это биекция из S в S, по определению. Или по-другому, мы написали правое и левое обратное преобразование, тем самым установили, что преобразование - линейный изоморфизм. ■

Rm: 2. Получается, что преобразование Фурье это невырожденная замена координат, которая превращает дифференцирование в умножение на ix:

$$\mathcal{F}\colon (S, f) \leftrightarrow (S, g),\ g = \widehat{f},\ \frac{d}{dx} f(x) \Leftrightarrow ix \cdot g(x)$$

Теорема 4. Верны следующие соотношения для свёртки:

1) $f, g \in S \Rightarrow f * g \in S$;
2) $\mathcal{F}(f * g) = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g)$;

Rm: 3. Отсюда видно, почему в пространстве S нет единицы, потому что единица не быстроубывающая функция.

$\square$

1) По определению:

$$f * g(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(x - t) dt$$

Сам интеграл сходится, подинтегральные функции бесконечно гладкие. Также верно:

$$g \in S \Rightarrow \exists\, M\colon |g'| \leq M \Rightarrow \left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) g'(x - t) dt \right| \leq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} M |f(t) dt < \infty$$

Следовательно, интеграл сходится равномерно по признаку Вейерштрасса $\Rightarrow$ можно дифференцировать под несобственным интегралом:

$$f, g \in S \Rightarrow \frac{d}{dx} f * g(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) g'(x - t) dt$$

И это будет верно для любой производной $\Rightarrow$ получили бесконечную гладкость из теоремы о дифференцировании по параметру. Проверим, что это будет быстроубывающая функция:

$$g \in S \Rightarrow (1 + |x|^m) \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| \cdot |g(x - t)| dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| \cdot \frac{1 + |x|^m}{1 + |x - t|^m} \cdot (1 + |x - t|^m) \cdot |g(x - t)| dt \leq$$

$$\leq M \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| \cdot \frac{1 + |x|^m}{1 + |x - t|^m} dt \leq 2^m M \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| \cdot \frac{|t|^m + |x - t|^m}{1 + |x - t|^m} dt \leq 2^m M \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| (|t|^m + 1) dt$$

где мы воспользовались тем, что:

$$|x| \leq |t| + |x - t| \Rightarrow |x|^m \leq (|t| + |x - t|)^m \leq 2^m (|t|^m + |x - t|^m) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall x, t \in \mathbb{R},\ \frac{1 + |x|^m}{1 + |x - t|^m} \leq 2^m \frac{1 + |t|^m + |x - t|^m}{1 + |x - t|^m} \leq 2^m \left(\frac{|t|^m}{1} + \frac{|x - t|^m + 1}{|x - t|^m + 1} \right) \leq 2^m (|t|^m + 1)$$

Тогда мы получаем, что:

$$f \in S \Rightarrow M \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| \cdot \frac{1 + |x|^m}{1 + |x - t|^m} dt \leq 2^m M \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| \cdot (|t|^m + 1) dt < \infty$$

2) Проверим преобразование Фурье свёртки:

$$\mathcal{F}(f*g)=\sqrt{2\pi}\mathcal{F}(f)\cdot\mathcal{F}(g)\Leftrightarrow f*g=\sqrt{2\pi}\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)\cdot\mathcal{F}(g))\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sqrt{2\pi}\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)\cdot\mathcal{F}(g))=\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{F}(f)(y)\cdot\mathcal{F}(g)(y)\cdot e^{ixy}dy=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x+y)\mathcal{F}(\mathcal{F}(g))(y)dy$$

где мы применили лемму 1. Попробуем понять, что такое $\mathcal{F}(\mathcal{F}(g))(y)$:

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}(g))(y)=\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(g))(-y)=g(-y)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x+y)\mathcal{F}(\mathcal{F}(g))(y)dy=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x+y)g(-y)dy=|y\to -y|$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x-y)g(y)dy=g*f(x)=f*g(x)$$

■

Теорема 5. (**равенство Парсеваля**) Рассмотрим на S скалярное произведение:

$$\langle f,g\rangle=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)\overline{g(x)}dx$$

Тогда справедливо равенство:

$$\langle f,g\rangle=\langle\mathcal{F}(f),\mathcal{F}(g)\rangle$$

Rm: 4. Линейные операторы, сохраняющие скалярное произведение называются ортогональными операторы (или унитарными). Оказывается преобразование Фурье это ещё и ортогональная замена координат, если мы рассматриваем скалярное произведение, определенное выше.

□ Запишем скалярное произведение по определению и воспользуемся леммой 1 при $x=0$:

$$\langle\mathcal{F}(f),\mathcal{F}(g)\rangle=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{F}(f)(x)\overline{\mathcal{F}(g)(x)}dx=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathcal{F}\left(\overline{\mathcal{F}(g)(x)}\right)dx=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathcal{F}\left(\overline{\mathcal{F}(\overline{\overline{g}})(x)}\right)dx=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathcal{F}\left(\mathcal{F}^{-1}(\overline{g})\right)(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)\overline{g(x)}d=\langle f,g\rangle$$

■

Равенство Парсеваля очень часто используют в уравнениях математической физики, поскольку дифференциальные уравнения в пространстве S решать очень легко.

Пример: $g''-g=f\in S$, $g\in S$ какое будет решение? Возьмем преобразование Фурье:

$$(iy)^2\mathcal{F}(g)-\mathcal{F}(g)=\mathcal{F}(f)\Leftrightarrow\mathcal{F}(g)=-\frac{\mathcal{F}(f)}{1+y^2}\Rightarrow g=\mathcal{F}^{-1}\left(-\frac{\mathcal{F}(f)}{1+y^2}\right)$$