Свойства функций Эйлера

Опр: 1. Гамма-функция Эйлера: $\Gamma(x) = \int\limits_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$, $x > 0$.

Опр: 2. Бета-функция Эйлера: $\mathcal{B}(x,y) = \int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$, $x > 0$, $y > 0$.

Свойства бета-функции

1) **Формула понижения**:

$$\mathcal{B}(x,y+1) = \frac{y}{x+y}\mathcal{B}(x,y)$$

$$\mathcal{B}(m,n) = \frac{(n-1)!}{m\cdot(m+1)\cdot\ldots\cdot(m+n-1)} = \frac{(n-1)!(m-1)!}{(n+m-1)!} = \frac{1}{n+m-1}\cdot\frac{1}{C_{n+m-2}^{n-1}}$$

2) **Симметричность**:

$$\mathcal{B}(x,y) = \mathcal{B}(y,x)$$

3) **Замена границ интегрирования**:

$$\mathcal{B}(x,y) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{s^{x-1}}{(1+s)^{x+y}}ds$$

Свойства гамма-функции

1) **Формула понижения**:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

2) **Формула Эйлера-Гаусса**:

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} n^x\cdot B(x,y+n)$$

3) **Формула дополнения**:

$$\Gamma(x)\cdot\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)},\ 0 < x < 1$$

☐ Рассмотрим произведение гамма-функций и воспользуемся формулой Эйлера-Гаусса:

$$\Gamma(x)\cdot\Gamma(1-x) = \lim_{n\to\infty}\left(n^x\mathcal{B}(x,n)\cdot n^{1-x}\mathcal{B}(1-x,n)\right)$$

Распишем формулу под пределом, используя формулу понижения:

$$n^x\mathcal{B}(x,n)\cdot n^{1-x}\mathcal{B}(1-x,n) = \frac{n\cdot(n-1)!}{x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+(n-1))}\cdot\frac{(n-1)!}{(1-x)\cdot(1-x+1)\cdot\ldots\cdot(1-x+(n-1))} =$$

$$= \frac{n\cdot(n-1)!}{x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+(n-1))}\cdot\frac{(n-1)!}{(1-x)\cdot(2-x)\cdot\ldots\cdot(n-x)} =$$

$$= \frac{n}{(n-x)}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{((n-1)!)^2}{(1-x^2)\cdot(4-x^2)\cdot\ldots\cdot((n-1)^2-x^2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(n^x\mathcal{B}(x,n)\cdot n^{1-x}\mathcal{B}(1-x,n)\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n-x)}\cdot\frac{\pi}{\pi x}\cdot\frac{((n-1)!)^2}{(1-x^2)\cdot(4-x^2)\cdot\ldots\cdot((n-1)^2-x^2)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n-x}\cdot\frac{\pi}{\pi x}\cdot\prod_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)} = \pi\cdot\frac{1}{\pi x\prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)} = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$$

где последнее равенство верно в силу теоремы Эйлера (см. лекцию 2 текущего семестра). ■

Интеграл Пуассона

Опр: 3. Интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ называется интегралом Пуассона.

Утв. 1.

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2},\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$$

□ Рассмотрим следующий интеграл:

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \left|x^2 = t\right| = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-t}dt = \frac{1}{2}\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

Воспользуемся формулой дополнения:

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = \pi \Rightarrow \Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \Rightarrow \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Rightarrow \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$$

■

Полезно помнить, теорема Муавра-Лапласа утверждала, что броски правильной монеты имеют правильно сдвинутую (на $\frac{n}{2}$) плотность, подобную $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$. Следовательно, взяв интеграл:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} = 1$$

Это есть плотность стандартного нормального распределения.

4) **Формула бета-функции через гамма-функцию**:

$$\mathcal{B}(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

□

$$\mathcal{B}(x,y+n)=\frac{(y+(n-1))}{(x+y+(n-1))}\cdot\ldots\cdot\frac{(y+1)}{(x+(y+1))}\cdot\frac{y}{(x+y)}\cdot\mathcal{B}(x,y)\Rightarrow$$

$$\mathcal{B}(x,y)=\frac{\dfrac{(x+y)\cdot\ldots\cdot(x+y+(n-1))\cdot n^y\cdot n^x}{(n-1)!}}{\dfrac{n^{x+y}\cdot y\cdot(y+1)\cdot\ldots\cdot(y+(n-1))}{(n-1)!}}\cdot\mathcal{B}(x,y+n)=\frac{n^y\mathcal{B}(y,n)\cdot n^x\mathcal{B}(x,y+n)}{n^{x+y}\cdot\mathcal{B}(x+y,n)}$$

Воспользуемся формулой Эйлера-Гаусса:

$$\lim_{n\to\infty}\mathcal{B}(x,y)=\mathcal{B}(x,y)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^y\mathcal{B}(y,n)\cdot n^x\mathcal{B}(x,y+n)}{n^{x+y}\cdot\mathcal{B}(x+y,n)}=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

■

Дробное дифференцирование

Пусть $m\le n$, найдем производную $(x^n)^{(m)}$:

$$(x^n)^{(m)}=n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)x^{n-m}=\frac{n!}{(n-m)!}x^{n-m}=\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-m+1)}x^{n-m}$$

Теперь можем считать, что m не обязательно целое и заменить на α.

$$(x^n)^{(\alpha)}=\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-\alpha+1)}x^{n-\alpha}$$

Упр. 1. Найти $\left((x^n)^{\left(\frac{1}{2}\right)}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)}$.

□

$$(x^n)^{\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\frac{1}{2})}x^{\left(n-\frac{1}{2}\right)}\Rightarrow\left((x^n)^{\left(\frac{1}{2}\right)}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\frac{1}{2})}\cdot\frac{\Gamma\left(n-\frac{1}{2}+1\right)}{\Gamma\left(n-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1\right)}x^{n-1}=\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n)}x^{n-1}$$

■

Преобразование Лапаласа

Опр: 4. Интегралом Лапласа в общем случае называется следующий интеграл:

$$\int\limits_a^b f(x)e^{\lambda g(x)}dx,\ \forall\lambda \geq 0$$

где интеграл воспринимается, как несобственный на промежутке $\{a, b\}$.

Rm: 1. Интегралы Лапласа это интегралы, которые сами являются функциями от λ.

Предположим, что $f \in C[0, +\infty)$, иначе будем это отдельно обговаривать. Также будем допускать функции, которые растут не быстрее экспоненты, то есть выполняется условие:

$$|f(x)| \leq C_f e^{\lambda_f x}$$

Опр: 5. Преобразованием Лапласа функции f называется следующее выражение:

$$\mathcal{L}(f)\,(\lambda) = \int\limits_0^{+\infty} f(x)e^{-\lambda x}dx$$

Утв. 2. Преобразование Лапласа $\mathcal{L}(f)$ определено при $\lambda > \lambda_f$.

□ По условияю $\lambda - \lambda_f > 0$, тогда рассмотрим следующий интеграл:

$$\int\limits_0^{+\infty} f(x)e^{-\lambda x}dx = \int\limits_0^{+\infty} f(x)e^{-\lambda_f x} \cdot e^{-(\lambda-\lambda_f)x}dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int\limits_0^{+\infty} |f(x)|\, e^{-\lambda_f x} \cdot e^{-(\lambda-\lambda_f)x}dx \leq \int\limits_0^{+\infty} C_f e^{-(\lambda-\lambda_f)x}dx = \frac{C_f}{\lambda - \lambda_f} < \infty$$

■

Теорема 1. (Свойства преобразования Лапласа)

(1) **Линейность**:

$$\mathcal{L}(\alpha f + \beta g) = \alpha\mathcal{L}(f) + \beta\mathcal{L}(g),\ \forall\lambda > \max\{\lambda_f, \lambda_g\}$$

(2) **Сдвиг преобразования**:

$$\mathcal{L}(e^{ax}f(x))\,(\lambda) = \mathcal{L}(f)\,(\lambda - a),\ \forall\lambda > a + \lambda_f$$

(3) **Перевод дифференцирования в умножение**: Пусть f - непрерывно дифференцируема на полуинтервале $[0, +\infty)$ и $|f'(x)| \leq C_{f'} e^{\lambda_f x}$, тогда:

$$\mathcal{L}(f')\,(\lambda) = -f(0) + \lambda\mathcal{L}(f)\,(\lambda)$$

(4) **Дифференцируемость**: $\forall\lambda > \lambda_f$ функция $\mathcal{L}(f)\,(\lambda)$ дифференцируема и верно следующее:

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\mathcal{L}(f)\,(\lambda) = -\mathcal{L}(x \cdot f(x))$$

$\square$

(1) Распишем интеграл:

$$\mathcal{L}(\alpha f+\beta g)=\int\limits_0^{+\infty}\left(\alpha f(x)+\beta g(x)\right)e^{-\lambda x}dx=\alpha\int\limits_0^{+\infty}f(x)e^{-\lambda x}dx+\beta\int\limits_0^{+\infty}g(x)e^{-\lambda x}dx=\alpha\mathcal{L}(f)+\beta\mathcal{L}(g)$$

(2) Распишем преобразование Лапласа от функции $e^{ax}f(x)$:

$$\mathcal{L}(e^{ax}f(x))\,(\lambda)=\int\limits_0^{+\infty}e^{ax}f(x)e^{-\lambda x}dx=\int\limits_0^{+\infty}f(x)e^{-(\lambda-a)x}dx=\mathcal{L}(f)\,(\lambda-a)$$

(3) Воспользуемся интегрированием по частям:

$$\mathcal{L}(f')\,(\lambda)=\int\limits_0^{+\infty}f'(x)e^{-\lambda x}dx=\left.f(x)e^{-\lambda x}\right|_{x=0}^{+\infty}+\lambda\int\limits_0^{+\infty}f(x)e^{-\lambda x}dx$$

В силу начальных условий, верно:

$$\left|f(x)e^{-\lambda x}\right|\leq C_f e^{-(\lambda-\lambda_f)x},\ \lambda>\lambda_f\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}C_f e^{-(\lambda-\lambda_f)x}=0\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)e^{-\lambda x}=0$$

Таким образом, мы получаем:

$$\mathcal{L}(f')\,(\lambda)=-f(0)+\lambda\mathcal{L}(f)\,(\lambda)$$

(4) Учитывая, что $\lambda>\lambda_f$, эвристически продифференцируем функцию Лапласа (от лямбды зависит только экспонента, интеграл линейный $\Rightarrow$ линейное дифференцирование оно перестановочное):

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\int\limits_0^{+\infty}f(x)e^{-\lambda x}dx=-\int\limits_0^{+\infty}f(x)xe^{-\lambda x}dx$$

Проверим строго по определению:

$$\frac{\mathcal{L}(f)\,(\lambda+\Delta)-\mathcal{L}(f)\,(\lambda)}{\Delta}=\int\limits_0^{+\infty}f(x)\left(\frac{e^{-(\lambda+\Delta)x}-e^{-\lambda x}}{\Delta}\right)dx\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\mathcal{L}(f)\,(\lambda+\Delta)-\mathcal{L}(f)\,(\lambda)}{\Delta}-\left(-\int\limits_0^{+\infty}f(x)xe^{-\lambda x}dx\right)=\int\limits_0^{+\infty}f(x)e^{-\lambda x}\left(\frac{e^{-\Delta x}-1+\Delta x}{\Delta}\right)dx=(*)$$

Необходимо показать, что правая часть стремится к нулю. Научимся оценивать для всех t функцию $e^t-1-t=g(t)$, показав, что $g(t)\leq t^2e^{|t|}$. Рассмотрим $g(t)$ подробнее:

$$g(0)=0,\ g'(t)=e^t-1,\ g'(0)=0,\ g''(t)=e^t$$

Оценим $g'(t)$ через первообразную:

$$|g'(t)| = \left|\int\limits_0^t g''(s)ds\right| = \left|\int\limits_0^t e^s ds\right| \le \left|\int\limits_0^t e^{|t|}ds\right| = |t|e^{|t|}$$

Оценим $g(t)$, использую полученную выше оценку для $g'(t)$:

$$|g(t)| = \left|\int\limits_0^t g'(s)ds\right| \le \left|\int\limits_0^t |s|e^{|s|}ds\right| \le \left|\int\limits_0^t |t|e^{|t|}ds\right| = t^2e^{|t|}$$

Таким образом, мы получаем следующую оценку:

$$(*) \le \int\limits_0^{+\infty} |f(x)|\cdot e^{-\lambda x}\cdot|\Delta|\cdot x^2\cdot e^{|\Delta|x}dx \le |\Delta| \int\limits_0^{+\infty} C_f e^{-(\lambda-\lambda_f-|\Delta|)x}x^2dx = (**)$$

Пусть $|\Delta| < \dfrac{\lambda-\lambda_f}{2}$, тогда:

$$(**) \le |\Delta|C_f \int\limits_0^{+\infty} e^{-\left(\frac{\lambda-\lambda_f}{2}\right)x}x^2dx \xrightarrow[\Delta\to 0]{} 0$$

■

Теорема 2. (**Вейерштрасса**) Если f непрерывна на $[0,1]$, то:

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists P_\varepsilon \text{ - многочлен: } \max_{[0,1]}|f - P_\varepsilon| < \varepsilon$$

Rm: 2. Пока без доказательства, необходима для теоремы о единственности.

Теорема 3. (**единственность**) Если $\mathcal{L}(f)(\lambda) = \mathcal{L}(g)(\lambda)$, $\forall\lambda \ge \lambda_1$, то $f = g$ на $[0,+\infty)$.

□ В силу линейности достаточно доказать, что:

$$\mathcal{L}(f)(\lambda) = 0,\ \forall\lambda \ge \lambda_1 \Rightarrow f = 0$$

то есть, хотим показать, что ядро нулевое. По условию $\lambda_f \le \lambda_1$. Пусть $\lambda_f < \lambda_1$. Рассмотрим подробнее:

$$\forall\lambda \ge \lambda_1,\ \mathcal{L}(f)(\lambda) = \int\limits_0^{+\infty} f(x)e^{-\lambda x}dx = \int\limits_0^{+\infty} f(x)e^{-\lambda_1 x}e^{-(\lambda-\lambda_1)x}dx = 0$$

Обозначим $g(x) = f(x)e^{-\lambda_1 x}$, это непрерывная функция предел которой на бесконечности равен 0:

$$g \in C[0,+\infty),\ \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$$

по аналогии со свойством (3) и из-за $\lambda_f < \lambda_1$. Таким образом, мы свели пришли к задаче вида:

$$\int\limits_0^{+\infty} g(x)e^{-\lambda x}dx = 0,\ \forall\lambda \ge 0 \Rightarrow g(x) = 0$$

Пусть $\lambda \geq 1$, тогда:

$$\int\limits_0^{+\infty} g(x)e^{-\lambda x}dx = -\int\limits_0^{+\infty} g(x)e^{-(\lambda-1)x}de^{-x} = \left|e^{-x} = t\right| = \int\limits_0^1 g(-\ln(t))t^{\lambda-1}dt = \int\limits_0^1 h(t)t^{\lambda-1}dt$$

Обозначим $h(t) = g(-\ln(t))$, будем считать, что $h(0) = 0 \Rightarrow h(t)$ - непрерывна на $[0,1]$, поскольку:

$$\lim_{t\to 0} h(t) = \lim_{t\to 0} g(-\ln(t)) = 0 = h(0)$$

Будем придавать λ значения $1, 2, 3, \ldots$ и мы получим, что:

$$\int\limits_0^1 h(t)t^m dt = 0,\ \forall m = 0, 1, 2, \ldots$$

Получили, что $h(t)$ на отрезке $[0,1]$ стала ортогональной всем степеням $t \Rightarrow$ стала ортогональной любому многочлену. Поскольку многочленами можно приближать непрерывные функции $\Rightarrow$ можно как-то извлечь, что $h = 0$ (ортогональна тем, кем приближается, значит ортогональна самой себе). Рассмотрим следующий интеграл:

$$\int\limits_0^1 h^2(t)dt = \int\limits_0^1 h(t)\cdot\left(h(t) - P_\varepsilon(t)\right)dt$$

равенство верно, поскольку $h(t) \perp P_\varepsilon(t)$, где $P_\varepsilon(t)$ - многочлен. Поскольку $h(t)$ - непрерывная, воспользуемся теоремой Вейерштрасса:

$$\int\limits_0^1 h^2(t)dt = \int\limits_0^1 h(t)\cdot\left(h(t) - P_\varepsilon(t)\right)dt \leq \varepsilon \max_{t\in[0,1]}|h(t)| \Rightarrow \varepsilon \to 0 \Rightarrow \int\limits_0^1 h^2(t)dt = 0$$

Поскольку $h^2(t)$ - непрерывная, неотрицательная функция, то $h(t) = 0$. ■

Rm: 3. Доказательство напоминает задачу из линейной алгебры: $\langle x, y\rangle = 0$, то есть вектор x ортогонален некоему набору векторов y. Или по-другому:

$$\langle f, g\rangle = \int\limits_a^b f(x)g(x)dx$$

И в контексте теоремы, наша задача будет выглядеть так:

$$g \perp e^{-\lambda x},\ \forall \lambda \geq 0 \Rightarrow g(x) = 0$$

Примеры преобразования Лапласа

1) $\mathcal{L}(1) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda t}dt = \dfrac{1}{\lambda}, \forall \lambda > 0;$

2) $\mathcal{L}(e^{at}) = \dfrac{1}{\lambda - a}, \forall \lambda > a$ по свойству сдвига преобразования;

3) $\mathcal{L}(t^\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} t^\alpha e^{-\lambda t}dt,\ \alpha > -1 \Rightarrow \mathcal{L}(t^\alpha) = \dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{\lambda^{\alpha+1}}, \forall \lambda > 0;$

4) $\mathcal{L}(t^\alpha e^{at}) = \dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{(\lambda - a)^{\alpha+1}}, \forall \lambda > a;$

5) $\mathcal{L}(\cos(at)) = \int\limits_0^{+\infty} \cos(at) e^{-\lambda t}dt = \dfrac{\lambda}{a^2+\lambda^2}, \forall \lambda > 0;$

□

$$\int\limits_0^{+\infty} \cos(at)e^{-\lambda t}dt = \frac{1}{\lambda} - \frac{a}{\lambda}\int\limits_0^{+\infty} \sin(at)e^{-\lambda t}dt = \frac{1}{\lambda} - \frac{a}{\lambda}\left(-\frac{1}{\lambda}\sin(at)e^{-\lambda t}\Big|_{t=0}^{+\infty} + \frac{a}{\lambda}\int\limits_0^{+\infty}\cos(at)e^{-\lambda t}dt\right) =$$

$$= \frac{1}{\lambda} - \frac{a^2}{\lambda^2}\int\limits_0^{+\infty}\cos(at)e^{-\lambda t}dt \Rightarrow \left(1 + \frac{a^2}{\lambda^2}\right)\int\limits_0^{+\infty}\cos(at)e^{-\lambda t}dt = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \int\limits_0^{+\infty}\cos(at)e^{-\lambda t}dt = \frac{\lambda}{a^2+\lambda^2}$$

■

6) $\mathcal{L}(\sin(at)) = \dfrac{a}{a^2+\lambda^2}, \forall \lambda > 0;$

□ Из доказательства выше мы получаем:

$$\mathcal{L}(\cos(at)) = \frac{\lambda}{a^2+\lambda^2} = \frac{1}{\lambda} - \frac{a}{\lambda}\mathcal{L}(\sin(at)) \Rightarrow \frac{\lambda^2 - a^2 - \lambda^2}{\lambda^2 + a^2} = -a\mathcal{L}(\sin(at)) \Rightarrow \mathcal{L}(\sin(a)) = \frac{a}{\lambda^2+a^2}$$

■

Упр. 2. Найти $\mathcal{L}(t^\alpha e^{\beta t}\cos(at))$.

□ Предположим, что мы знаем разложение косинуса: $\cos(ax) = \dfrac{e^{iax} + e^{-iax}}{2}$, тогда:

$$\mathcal{L}(t^\alpha e^{\beta t}\cos(at)) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} t^\alpha\left(e^{(\beta+ia-\lambda)t} + e^{(\beta-ia-\lambda)t}\right)dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} t^\alpha e^{-(\lambda-\beta-ia)t}dt + \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} t^\alpha e^{-(\lambda-\beta+ia)t}dt$$

Рассмотрим для начала $\alpha = n \in \mathbb{N}$ и посчитаем первый интеграл:

$$\int\limits_0^{+\infty} t^n e^{-(\lambda-\beta-ia)t}dt = \frac{\partial^n}{\partial\lambda^n}\left(\int\limits_0^{+\infty} e^{-(\lambda-\beta-ia)t}dt\right) = \frac{\partial^n}{\partial\lambda^n}\left(\frac{-1}{\lambda-\beta-ia}\cdot e^{-(\lambda-\beta-ia)t}\Big|_{t=0}^{+\infty}\right) =$$

$$= \frac{\partial^n}{\partial\lambda^n}\left(\frac{1}{\lambda-\beta-ia}\right) = \frac{n!}{(\lambda-\beta-ia)^{n+1}} = \frac{\Gamma(n+1)}{(\lambda-\beta-ia)^{n+1}} \Rightarrow \int\limits_0^{+\infty} t^n e^{-(\lambda-\beta+ia)t}dt = \frac{\Gamma(n+1)}{(\lambda-\beta+ia)^{n+1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(t^n e^{\beta t}\cos(at)) = \frac{\Gamma(n+1)}{2}\cdot\left(\frac{1}{(\lambda-\beta-ia)^{n+1}} + \frac{1}{(\lambda-\beta+ia)^{n+1}}\right) =$$

$$= \frac{\Gamma(n+1)}{2}\cdot\left(\frac{(\lambda-\beta+ia)^{n+1}+(\lambda-\beta-ia)^{n+1}}{((\lambda-\beta)^2-(ia)^2)^{n+1}}\right) = \frac{\Gamma(n+1)}{2}\cdot\left(\frac{((\lambda-\beta)+ia)^{n+1}+((\lambda-\beta)-ia)^{n+1}}{((\lambda-\beta)^2+a^2)^{n+1}}\right)$$

Если, эвристически перейдем от n к α, то мы получим следующий результат:

$$\mathcal{L}(t^\alpha e^{\beta t}\cos(at)) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2}\cdot\left(\frac{((\lambda-\beta)+ia)^{\alpha+1}+((\lambda-\beta)-ia)^{\alpha+1}}{((\lambda-\beta)^2+a^2)^{\alpha+1}}\right)$$

Проверим, что это действительно так. Проверим значения при $\alpha = 0, 1, 2$, пусть $\beta = 0$:

$$\alpha = 0 \Rightarrow \mathcal{L}(\cos(at)) = \frac{\Gamma(1)}{2}\cdot\left(\frac{\lambda+ia+\lambda-ia}{\lambda^2+a^2}\right) = \frac{0!}{2}\cdot\frac{2\lambda}{\lambda^2+a^2} = \frac{\lambda}{\lambda^2+a^2}$$

$$\alpha = 1 \Rightarrow \mathcal{L}(t\cos(at)) = \frac{1}{2}\cdot\frac{(\lambda+ia)^2+(\lambda-ia)^2}{(\lambda^2+a^2)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\lambda^2+2ia\lambda-a^2+\lambda^2-2ia\lambda-a^2}{(\lambda^2+a^2)^2} = \frac{\lambda^2-a^2}{(\lambda^2+a^2)^2}$$

$$\alpha = 2 \Rightarrow \mathcal{L}(t^2\cos(at)) = \frac{2!}{2}\cdot\frac{(\lambda+ia)^3+(\lambda-ia)^3}{(\lambda^2+a^2)^3} = \frac{2\lambda^3-6\lambda a^2}{(\lambda^2+a^2)^3} = \frac{2\lambda(\lambda^2-3a^2)}{(\lambda^2+a^2)^3}$$

■

Rm: 4. Отметим, что здесь мы пользовались следующим: $\int\limits_0^{+\infty} e^{-st}dt = \frac{-1}{s}$, $s \in \mathbb{C}$, $\Re(s) > 0$.

Примеры применения преобразования Лапласа: вычисление интегралов

Пример: Рассмотрим интеграл следующего вида:

$$f(a) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{1+x^2}dx,\ \forall a > 0$$

Считать данный интеграл напрямую достаточно затруднительно, возьмем его преобразование Лапласа, чтобы посмотреть, может оно будет соответствовать каким-то знакомым функциям:

$$\mathcal{L}(f)(\lambda) = \int\limits_0^{+\infty} \left(\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{1+x^2}dx \right) e^{-\lambda a}da,\ \lambda > 0$$

Интеграл это сумма, суммы можно переставлять (об этом будет идти речь в дальнейших лекциях), соответственно для интегралов это тоже верно (будет доказано потом):

$$\int\limits_0^{+\infty} \left(\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{1+x^2}dx \right) e^{-\lambda a}da = \int\limits_0^{+\infty} \left(\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos(ax)e^{-\lambda a}}{1+x^2}da \right) dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\mathcal{L}(\cos(ax))dx =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{\lambda}{\lambda^2+x^2}dx = \frac{\lambda}{\lambda^2-1} \int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{\lambda^2+x^2} \right) dx = \frac{\lambda}{\lambda^2-1} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\lambda} \right) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\lambda+1}$$

Таким образом, смотря на таблицы с примерами преобразований Лапласа, получаем:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2}e^{-|a|},\ \forall a$$

Пример: Рассмотрим следующий интеграл (интеграл Дирихле):

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx$$

Возьмем преобразование Лапласа в нуле:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx = \mathcal{L}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)(0) \Rightarrow \mathcal{L}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)(\lambda) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}e^{-\lambda x}dx,\ \forall \lambda > 0$$

Возьмем производную преобразования Лапласа по λ:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = -\int\limits_0^{+\infty} \sin(x)e^{-\lambda x}dx = -\frac{1}{\lambda^2+1} \Rightarrow \mathcal{L}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)(\lambda) = -\operatorname{arctg}(\lambda) + C$$

Чтобы найти константу устремляем λ к бесконечности:

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}e^{-\lambda x}dx = 0 = -\frac{\pi}{2} + C \Rightarrow C = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)(\lambda) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(\lambda) \Rightarrow \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

Остается вопрос, мы установили выражение $\mathcal{L}(\lambda)$ для $\lambda > 0$, почему по непрерывности можно считать, что мы знаем $\mathcal{L}(0)$. Сможем ответить на этот вопрос, изучив равномерную сходимость интегралов.

Примеры применения преобразования Лапласа: решение диф.уравнений

Пример: Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение с начальными условиями:

$$y'' - 3y' + 2y = e^x,\ y(0) = y'(0) = 0,\ x > 0$$

Делаем преобразование Лапласа, чтобы побыстрее избавится от производных, получим:

$$\mathcal{L}(y'' - 3y' + 2y)(\lambda) = \lambda^2\mathcal{L}(y)(\lambda) - 3\lambda\mathcal{L}(y)(\lambda) + 2\mathcal{L}(y)(\lambda) = \frac{1}{\lambda - 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(y)(\lambda) = \frac{1}{(\lambda-1)(\lambda^2 - 3\lambda + 2)} = \frac{1}{(\lambda-1)^2(\lambda-2)}$$

Таким образом, найти преобразование Лапласа будет равнятся нахождению решения уравнения. Получим:

$$\mathcal{L}(y)(\lambda) = \frac{1}{\lambda-2} - \frac{1}{\lambda-1} - \frac{1}{(\lambda-1)^2} \Rightarrow \mathcal{L}(y)(\lambda) = \mathcal{L}\left(e^{2x} - e^x - xe^x\right)(\lambda)$$

Таким образом, получили решение:

$$y(x) = e^{2x} - e^x - xe^x$$

Rm: 5. Пример выше - достаточно простое уравнение, но есть примеры, где преобразования Лапласа помогают решать уравнения, которые обычными способами разобрать гораздо труднее.

Пример: Уравнение запаздывания:

$$y'(x) = y(x-1) + 1,\ y(x) = 0,\ \forall x \leq 0$$

Возьмем преобразование Лапласа от этого уравнения:

$$\lambda\mathcal{L}(y)(\lambda) = \int\limits_0^{+\infty} y(x-1)e^{-\lambda x}dx + \frac{1}{\lambda} = e^{-\lambda}\int\limits_{-1}^{+\infty} y(t)e^{-\lambda t}dt + \frac{1}{\lambda} = e^{-\lambda}\int\limits_0^{+\infty} y(t)e^{-\lambda t}dt + \frac{1}{\lambda}$$

где последнее равенство верно в силу $y(x) = 0,\ \forall x \leq 0$. Тогда:

$$\lambda\mathcal{L}(y)(\lambda) = e^{-\lambda}\mathcal{L}(y)(\lambda) + \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \mathcal{L}(y)(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2\left(1 - \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\right)}$$

Таких функций в наших примерах нет. Надо перейти к чему-то более простому, например, разложив в ряд:

$$\mathcal{L}(y)(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2\left(1 - \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-n\lambda}}{\lambda^{n+2}}$$

При $\lambda > 1$ этот ряд сходится. Теперь нужно угадать преобразование Лапласа у слагаемых этого ряда. Для $\frac{1}{\lambda^{n+2}}$ это будут функции $\frac{x^{n+1}}{\Gamma(n+2)}$. Попробуем разобраться с $e^{-n\lambda}$, для этого рассмотрим следующее преобразование Лапласа:

$$\int\limits_0^{+\infty} (x-a)_+^k e^{-\lambda x} dx$$

где $(x-a)_+^k = \max\{0, (x-a)^k\}$. Избавимся от сдвига:

$$\int\limits_0^{+\infty} (x-a)_+^k e^{-\lambda x} dx = |x-a=t| = e^{-\lambda a} \int\limits_{-a}^{+\infty} t_+^k e^{-\lambda t} dt = e^{-\lambda a} \int\limits_0^{+\infty} t^k e^{-\lambda t} dt = e^{-\lambda a} \frac{\Gamma(k+1)}{\lambda^{k+1}}$$

И таким образом, требуемая исходная функция для слагаемых будет иметь вид:

$$\frac{(x-n)_+^{n+1}}{\Gamma(n+2)} = \frac{(x-n)_+^{n+1}}{(n+1)!} \Rightarrow \mathcal{L}(y)\,(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}\left(\frac{(x-n)_+^{n+1}}{(n+1)!}\right)(\lambda)$$

Пользуясь (нестрого, из-за суммирования на бесконечности) линейностью, мы получим:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-n)_+^{n+1}}{(n+1)!}$$

Конечная ли это сумма? Да, так как на интервале $\forall x \in (a,b)$ мы будем получать конечную сумму, поскольку $\exists n \in \mathbb{N}\colon n > x$ и соответственно все слагаемые ряда после этого n будут нулевыми $\Rightarrow$ получается отличная дифференцируемая функция.

Упр. 3. Понять, что $y(x) \le e^x$. Сумма монотонна $\Rightarrow$ все частичные суммы также оцениваются e^x.

$\square$ Из разложения Тейлора, известно что: $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$, тогда:

$$\forall x > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \frac{(x-n)_+^{n+1}}{(n+1)!} \le \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \Rightarrow \sum_{n=0}^{N} \frac{(x-n)_+^{n+1}}{(n+1)!} \le 1 + \sum_{n=0}^{N} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{(x-n)_+^{n+1}}{(n+1)!} \le \lim_{N\to\infty} \left(1 + \sum_{n=0}^{N} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right) \Rightarrow y(x) \le e^x$$

Или же, это можно показать через преобразование Лапласа. Рассмотрим его для обеих функций:

$$\mathcal{L}(y)\,(\lambda) = \int\limits_0^{+\infty} y(x) e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda(\lambda - e^{-\lambda})},\ \mathcal{L}(e^x)\,(\lambda) = \int\limits_0^{+\infty} e^x e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda - 1}$$

$$\lambda > 1 \Rightarrow \frac{1}{e^\lambda} < 1 \Rightarrow \lambda - e^{-\lambda} > \lambda - 1 \Rightarrow \frac{1}{\lambda(\lambda - e^{-\lambda})} < \frac{1}{\lambda - 1} \Rightarrow y(x) \le e^x$$

$\blacksquare$

Упр. 4. Доказать, что:

$$\lim_{N\to\infty}\int\limits_0^{+\infty}\left|y(x)-\sum_{n=0}^{N}\frac{(x-n)_+^{n+1}}{(n+1)!}\right|e^{-\lambda x}dx=0$$

Указание: разбить интеграл от 0 до a плюс интеграл от a до $+\infty$. И оценить второй интеграл через $2e^x$.

□ Воспользуемся указанием:

$$\int\limits_0^{+\infty}\left|y(x)-\sum_{n=0}^{N}\frac{(x-n)_+^{n+1}}{(n+1)!}\right|e^{-\lambda x}dx=\int\limits_0^{a}\left|y(x)-\sum_{n=0}^{N}\frac{(x-n)_+^{n+1}}{(n+1)!}\right|e^{-\lambda x}dx+\int\limits_a^{+\infty}\left|y(x)-\sum_{n=0}^{N}\frac{(x-n)_+^{n+1}}{(n+1)!}\right|e^{-\lambda x}dx$$

Рассмотрим предел первого интеграла при $N\to\infty$:

$$\lim_{N\to\infty}\int\limits_0^{a}\left|y(x)-\sum_{n=0}^{N}\frac{(x-n)_+^{n+1}}{(n+1)!}\right|e^{-\lambda x}dx=\int\limits_0^{a}|y(x)-y(x)|e^{-\lambda x}dx=0$$

Рассмотрим второй интеграл и, согласно указанию, оценим его сверху:

$$\int\limits_a^{+\infty}\left|y(x)-\sum_{n=0}^{N}\frac{(x-n)_+^{n+1}}{(n+1)!}\right|e^{-\lambda x}dx\le\int\limits_a^{+\infty}2e^xe^{-\lambda x}dx=2\int\limits_a^{+\infty}e^{-(\lambda-1)x}dx=\frac{2}{\lambda-1}e^{-(\lambda-1)a}$$

Таким образом, мы можем установить следующее неравенство $\forall a\in[0,+\infty)$:

$$0\le\lim_{N\to\infty}\int\limits_0^{+\infty}\left|y(x)-\sum_{n=0}^{N}\frac{(x-n)_+^{n+1}}{(n+1)!}\right|e^{-\lambda x}dx\le\frac{2}{\lambda-1}e^{-(\lambda-1)a}$$

Следовательно, предел существует, неравенство выполняется для всех a, первое и второе слагаемые не зависят от него, устремим a к бесконечности, тогда:

$$0\le\lim_{N\to\infty}\int\limits_0^{+\infty}\left|y(x)-\sum_{n=0}^{N}\frac{(x-n)_+^{n+1}}{(n+1)!}\right|e^{-\lambda x}dx\le0\Rightarrow\lim_{N\to\infty}\int\limits_0^{+\infty}\left|y(x)-\sum_{n=0}^{N}\frac{(x-n)_+^{n+1}}{(n+1)!}\right|e^{-\lambda x}dx=0$$

■

Упр. 5. Из предыдущего упражнения доказать, что:

$$\mathcal{L}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-n)_+^{n+1}}{(n+1)!}\right)(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{L}\left(\frac{(x-n)_+^{n+1}}{(n+1)!}\right)(\lambda)$$

□ По определению преобразования Лапласа нам необходимо доказать:

$$\int\limits_0^{+\infty}y(x)e^{-\lambda x}dx=\int\limits_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-n)_+^{n+1}}{(n+1)!}e^{-\lambda x}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_0^{+\infty}\frac{(x-n)_+^{n+1}}{(n+1)!}e^{-\lambda x}dx$$

Оценим следующую разность:

$$\left|\int\limits_0^{+\infty} y(x)e^{-\lambda x}dx - \sum_{n=0}^{N}\int\limits_0^{+\infty}\frac{(x-n)_+^{n+1}}{(n+1)!}e^{-\lambda x}dx\right| = \left|\int\limits_0^{+\infty}\left(y(x) - \sum_{n=0}^{N}\frac{(x-n)_+^{n+1}}{(n+1)!}\right)e^{-\lambda x}dx\right| \leq$$

$$\leq \int\limits_0^{+\infty}\left|y(x) - \sum_{n=0}^{N}\frac{(x-n)_+^{n+1}}{(n+1)!}\right|e^{-\lambda x}dx \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

■

Эти действия оправдывают, почему можно было использовать линейность, а теорема единственности указывает, что решение может быть только одно.