Числовые ряды

Пусть $\{a_n\}$ - числовая последовательность.

Опр: 1. Формальное выражение $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется рядом.

Опр: 2. Сумма первых N слагаемых $S_N = a_1 + \ldots + a_N$ называется частичной суммой.

Опр: 3. Говорят, что ряд сходится и S - его сумма, если существует конечный предел:

$$\lim_{N\to\infty} S_N = S$$

Обозначаем S также, как и сам ряд:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Rm: 1. С рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ связана последовательность частичных сумм S_N и обратно, со всякой последовательностью x_n связан ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(x_n - x_{n-1}) = (x_1 - 0) + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + (x_4 - x_3) + \ldots$$

где частичная сумма S_n равна n-ому члену последовательности $\{x_n\}$:

$$x_n = x_1 + (x_2 - x_1) + \ldots + (x_n - x_{n-1}) = S_n,\ x_0 = 0$$

то есть это последовательность частичных сумм этого ряда.

Утв. 1. (**Необходимое условие сходимости**) Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $a_n \to 0$.

□ $a_n = S_n - S_{n-1} \to S - S = 0$, поскольку ряд сходится. ■

Утв. 2. Добавление, отбрасывание, изменение конечного набора слагаемых ряда не влияет на его сходимость, но может изменить его сумму.

□ Такое изменение при достаточно большом N просто добавляет к S_N фиксированное число: пусть изменение касается членов ряда с номерами меньше $N_0 \Rightarrow \exists C\colon \forall N > N_0,\ S'_N = S_N + C$, где S'_N - это частичная сумма измененного ряда. Сходимость исходной последовательности (S_N) равносильна сходимости новой последовательности $(S_N + C)$. ■

Можно ли расставлять скобки произвольным образом в ряде? Например, был ряд:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

можно ли вместо него рассматривать ряд:

$$(a_1 + a_2) + (a_3 + \ldots + a_n) + (\ldots) + \ldots + (\ldots) + \ldots$$

Рассмотрим следующий ряд:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

Если расставить скобки произвольным образом, то мы получим:

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots = 0 + 0 + 0 + \ldots$$

Таким образом нас волнуют два вопроса:

(1) Пусть ряд сходится, можно ли в нем расставить скобки произвольным образом?

(2) Не знаем, сходится ряд или нет, но если расставим скобки, то он будет сходится. Правда ли что исходный ряд сходится?

Утв. 3. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и $0 = n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$ - возрастающая последовательность натуральных чисел, тогда следующий ряд:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} a_n \right)$$

сходится к той же сумме.

□ Пусть

$$\widetilde{S}_{K+1} = \sum_{k=0}^{K} \left(\sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} a_n \right) = a_1 + \ldots + a_{n_{K+1}}$$

Заметим, что $\widetilde{S}_{K+1} = S_{n_{K+1}}$ - подпоследовательность сходящейся последовательности $S_N \Rightarrow$ предел подпоследовательности равен пределу последовательности. ■

Утв. 4. Пусть последовательность $a_n \to 0$ и $0 = n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$ - возрастающая последовательность натуральных чисел, причем $n_{k+1} - n_k \leq L$, $\forall k$. Тогда из сходимости сгруппированного ряда:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} a_n \right)$$

следует сходимость исходного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Rm: 2. Условием $n_{k+1} - n_k \leq L$, $\forall k$ запрещается брать группировку сколь угодно большой длины.

□ Возьмем произвольную частичную сумму $S_N = a_1 + \ldots + a_N$, она устроена следующим образом:

$$S_N = a_1 + \ldots + a_N = a_1 + \ldots + a_{n_K} + a_{n_K+1} + \ldots + a_N$$

где после a_N может не хватать слагаемых до $a_{n_{K+1}}$: $a_{N+1}, \ldots, a_{n_{K+1}-1}, a_{n_{K+1}}$. Пусть $\widetilde{S}_K \to S$, то есть сгруппированный ряд сходится и верно следующее:

$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists K_\varepsilon \colon \forall K \geq K_\varepsilon,\, |\widetilde{S}_K - S| = |a_1 + \ldots + a_{n_{K-1}} + a_{n_{K-1}+1} + \ldots + a_{n_K} - S| < \varepsilon$$

Кроме того, мы знаем, что:
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, N_\varepsilon \colon \forall n > N_\varepsilon,\ |a_n| < \varepsilon$$

Сравним сумму S_N с пределом S частичных сумм сгруппированного ряда:

$$|S_N - S| \leq |(a_1 + \ldots + a_{n_K}) - S| + |a_{n_K+1}| + \ldots + |a_N|,\ n_K < N \leq n_{K+1}$$

Пусть $N > \max\{n_{K_\varepsilon}, n_{N_\varepsilon}\}$, где $n_{N_\varepsilon} \geq N_\varepsilon$, поскольку $n_p \geq p$ (см. лекцию 9, 1-ый курс, теорема 1). Так как K - последний номер, при котором $N > n_K$, то $n_K \geq \max\{n_{K_\varepsilon}, n_{N_\varepsilon}\} \Rightarrow n_K + 1 > \max\{n_{K_\varepsilon}, n_{N_\varepsilon}\}$.

Тогда $n_K + 1 > n_{N_\varepsilon} \geq N_\varepsilon \wedge n_K + 1 > n_{K_\varepsilon} \Rightarrow$ выполняются условия сходимости выше. Так как слагаемых между $n_K + 1$ и N не больше L, то будет верно следующее:

$$|S_N - S| \leq |\widetilde{S}_K - S| + |a_{n_K+1}| + \ldots + |a_N| \leq \varepsilon + L\varepsilon = \varepsilon(1 + L)$$

■

Упр. 1. Придумать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, такой что $\forall A \in \mathbb{R}$, $\exists$ расстановка скобок такая, что сгруппированный ряд сходится к A.

□ Поскольку любой ряд можно связать с последовательностью частичных сумм и обратно, то нам необходимо придумать такую последовательность чисел, из которой можно получить сходящуюся подпоследовательность к любому числу $a \in \mathbb{R}$. Рассмотрим произвольную нумерацию рациональных чисел в виде бесконечной последовательности вида:

$$r_1, r_1, r_2, r_1, r_2, r_3, r_1, \ldots, r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$$

В ней каждое рациональное число встречается бесконечно много раз. Соответственно, для любого произвольного числа $a \in \mathbb{R}$ можно выбрать подпоследовательность из последовательности $\{r_n\}$, которая будет сходиться к этому числу. Обозначим члены этой последовательности следующим образом:

$$\{a_n\} \colon a_0 = 0, a_1 = r_1, a_2 = r_1, a_3 = r_2, a_4 = r_1, a_5 = r_2, a_6 = r_3, a_7 = r_1, \ldots$$

Сформируем из этой последовательности ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n-1}) = a_1 + a_2 - a_1 + a_3 - a_2 + a_4 - a_3 + a_5 - a_4 + a_6 - a_5 + a_7 - a_6 + \ldots$$

расставляя в полученном ряду скобки, можно получить любую исходную подпоследовательность в виде последовательности частичных сумм. Например, последовательность $\widetilde{S}_1 = a_3, \widetilde{S}_2 = a_4, \widetilde{S}_3 = a_7$ можно получить расставив скобки следующим образом:

$$(a_1 + a_2 - a_1 + a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + (a_5 - a_4 + a_6 - a_5 + a_7 - a_6) + \ldots$$

Следовательно, частичные суммы сгруппированного ряда будут равны требуемому:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} a_n\right) = a_3 + (a_4 - a_3) + (a_7 - a_4) + \ldots \Rightarrow \widetilde{S}_1 = a_3, \widetilde{S}_2 = a_4, \widetilde{S}_3 = a_7$$

Предел частичных сумм сгруппированного ряда будет сходится к заранее заданному $a \in \mathbb{R}$. ■

Критерий Коши

Опр: 4. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно, если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Опр: 5. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно, если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится.

Теорема 1. (**Критерий Коши**) Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится $\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0,\ \exists\, N\colon \forall n, m > N,\ |S_n - S_m| < \varepsilon$ или подробнее:

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\, N\colon \forall n, m\colon n > m > N,\ \left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| < \varepsilon$$

□ Сразу следует из критерия Коши для последовательностей, поскольку сходимость равна фундаментальности последовательности частичных сумм. ■

Утв. 5. Если ряд сходится абсолютно, то он сходится.

□ Так как ряд из модулей a_n сходится, то используем критерий Коши:

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\, N\colon \forall n > m > N,\ \big||a_{m+1}| + \ldots + |a_n|\big| = |a_{m+1}| + \ldots + |a_n| < \varepsilon$$

Тогда по неравенству треугольника:

$$|a_{m+1} + \ldots + a_n| \le |a_{m+1}| + \ldots + |a_n| < \varepsilon$$

Следовательно, для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ выполнено условия критерия Коши $\Rightarrow$ ряд сходится. ■

Rm: 3. Прежде чем исследовать исходный ряд на сходимость, необходимо посмотреть на сходимость ряда из модулей, поскольку он будет состоять из неотрицательных слагаемых, что в свою очередь проще анализировать.

Ряды с неотрицательными слагаемыми

Пусть $a_n \ge 0$, тогда S_N не убывают и следовательно по теореме Вейрштрасса (про монотонные последовательности см. лекцию 8, 1-ый курс, теор. 1 и 6) сходимость S_N равносильна их ограниченности.

Утв. 6. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ из неотрицательных слагаемых ($\forall n,\ a_n \ge 0$) сходится $\Leftrightarrow S_N$ - ограничены.

Следствие 1. Пусть $0 \le a_n \le b_n$, тогда:

(1) из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$;

(2) из расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ следует расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$;

□ Сразу следует из замечания про теорему Вейрштрасса. Частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ограничены частичными суммами ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. Тогда:

(1) Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то его частичные суммы ограничены, а значит ограничены и частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \Rightarrow$ он сходится;

(2) Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то его частичные суммы не ограничены, а значит не ограничены и частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \Rightarrow$ он расходится;

■

Следствие 2. Пусть, начиная с некоторого номера, выполнено:

$$\forall n,\ c_1 b_n \leq a_n \leq c_2 b_n$$

где $c_1, c_2 > 0$ - фиксированы $\Rightarrow$ ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся и расходятся одновременно.

□ Это прямое следствие предыдущего следствия. ■

Rm: 4. Как получать такого рода неравенства? Взяли некий ряд a_n и хотим его подменить чем-то более простым и это следствие объясняет, что можно заменить ряд из a_n на ряд из b_n. Для этого нужно проверить неравенства из условия, но очень часто доказать его сложно, а вычислить предел - нет.

<u>**Типичный пример**</u>: Пусть $a_n > 0$, $b_n > 0$ и мы знаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = c > 0$. Оказывается, что из этого следует, что ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся и расходятся одновременно.

Предел отношения $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = c \Rightarrow$ начиная с некоторого номера, все элементы последовательности $\dfrac{a_n}{b_n}$ лежат между c_1 и c_2.

Примеры

Рассмотрим типичные примеры числовых рядов.

1) Геометрическая прогрессия: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$, если $|q| < 1 \Rightarrow$ сходится, если $|q| \geq 1 \Rightarrow$ расходится.

2) Гармонический ряд: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, данный ряд расходится.

□ Рассмотрим суммы вида:

$$\forall m,\ \frac{1}{m+1} + \ldots + \frac{1}{2m} \geq \frac{1}{2m} + \ldots + \frac{1}{2m} = \frac{m}{2m} = \frac{1}{2}$$

тогда частичные суммы не ограничены, поскольку:

$$1 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2},\ \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{2},\ \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{8} \geq \frac{1}{2}, \ldots \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ |S_{2n} - S_n| \geq \frac{1}{2}$$

то есть последовательность не фундаментальна. ■

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, если $p \leq 1 \Rightarrow$ ряд расходится, поскольку тогда $\frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n}$, если $p > 1 \Rightarrow$ ряд сходится.

□ Рассмотрим следующий ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^q} - \frac{1}{(n+1)^q} \right) \Rightarrow S_N = 1 - \frac{1}{(N+1)^q},\ q > 0 \Rightarrow \lim_{N \to \infty} S_N = 1$$

Распишем слагаемое внутри скобок и используем бином Ньютона:

$$\frac{1}{n^q} - \frac{1}{(n+1)^q} = \frac{(n+1)^q - n^q}{n^q (n+1)^q} = \frac{1}{n^q} \cdot \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^q - 1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^q} = \frac{1}{n^q} \cdot \frac{1 + \frac{q}{n} + \overline{o}\left(\frac{1}{n}\right) - 1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^q} = \frac{1}{n^{q+1}} \cdot \frac{q + \overline{o}(1)}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^q}$$

где предел правого сомножителя последнего слагаемого равен q при $n \to \infty$:

$$\lim_{n \to \infty} \overline{o}(1) = 0,\ \lim_{n \to \infty} (1 + \tfrac{1}{n})^q = 1 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{q + \overline{o}(1)}{(1 + \frac{1}{n})^q} = q$$

Тогда заметим, что:

$$\frac{\dfrac{1}{n^q} - \dfrac{1}{(n+1)^q}}{\dfrac{1}{n^{q+1}}} \to q > 0$$

По следствию выше, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^q} - \frac{1}{(n+1)^q} \right)$ сходится $\Leftrightarrow$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{q+1}}$ сходится. Поскольку $q > 0$, то мы получили требуемое: интересующий нас ряд сходится при $p = 1 + q > 1$. ■

4) Ряд Лейбница: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$, данный ряд сходится. Докажем это через теорему о сходимости любых убывающих монотонных последовательностей.

Теорема 2. (**Признак Лейбница**) Пусть a_n не возрастают и $a_n \to 0$, тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot a_n$ сходится.

□ Невозрастание a_n ($\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq a_{n+1}$) и $a_n \to 0$ автоматически делает эту последовательность неотрицательной. Распишем четную частичную сумму S_{2k}:

$$S_{2k} = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \ldots + a_{2k} = -a_1 + (a_2 - a_3) + (a_4 - a_5) + \ldots + a_{2k}$$

Поскольку последовательность не возрастает, то $a_n - a_{n+1} \geq 0$, а также $a_{2k} \geq 0 \Rightarrow S_{2k} \geq -a_1$. Перейдем в частичной сумме от k к $k+1$:

$$S_{2k+2} = S_{2k} - a_{2k+1} + a_{2k+2},\ a_{2k+1} \geq a_{2k+2} \Rightarrow -a_{2k+1} + a_{2k+2} \leq 0 \Rightarrow S_{2k} \geq S_{2k+2}$$

Следовательно, S_{2k} - не возрастает и ограничена снизу $\Rightarrow$ она сходится к S. Рассмотрим нечетную частичную сумму S_{2k+1}:

$$S_{2k+1} = S_{2k} - a_{2k+1},\ \lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = 0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} S_{2k+1} = \lim_{k\to\infty} S_{2k} = S$$

Если в последовательности элементы с четными номерами и нечетными номерами сходятся к одному и тому же, то эта последовательность сходится, поскольку начиная с некоторого номера все четные и все нечетные, то есть все члены, мало отличаются от предельного значения S. ■

Опр: 6. Пусть a_n не возрастают и $a_n \to 0$, тогда ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot a_n$ называются рядами Лейбница.

Rm: 5. Ряд Лейбница 4) также дает нам пример условно сходящегося ряда, который не сходится абсолютно.

Rm: 6. При работе со знакопеременными рядами рассматривать только асимптотику нельзя.

5) Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n}\right)$ имеет слагаемые, которые ведут себя асимптотически как $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, а ряд из них сходится как ряд Лейбница. Но на самом деле исходный ряд построен как сумма ряда Лейбница и гармонического, который расходится $\Rightarrow$ исходный ряд расходится.

Rm: 7. Асимптотика работает только для неотрицательных рядов, потому что только там можно использовать теорему сравнения. Чтобы смотреть сходимость знакопеременных рядов асимптотически теорема сравнения не применима, поскольку последовательность немонотонна и может колебаться будучи ограниченной $\Rightarrow$ надо смотреть что в ряде происходит дальше со следующими асимптотическими членами $\Rightarrow$ надо раскладывать ряд дальше.