Компактность

Опр: 1. Если $\forall\varepsilon > 0$ множество имеет конечную ε-сеть, то оно называется вполне ограниченным.

Теорема 1. (**критерий компактности Хаусдорфа**) Пусть (X, ρ) - полное метрическое пространство. Множество $K \subset X$ - компакт $\Leftrightarrow$ K - замкнуто и вполне ограниченно.

Теорема 2. (**критерий компактности в** $B(X)$) Множество $K \subset B(X)$ - компакт $\Leftrightarrow$ верно следующее:

1) K - замкнуто;
2) K - ограниченно;
3) $\forall\varepsilon > 0$, $\exists$ разбиение X на конечное число множеств $X_1, \ldots, X_N$ $\left(X = \bigsqcup\limits_{n=1}^{N} X_n\right)$ такое, что:

$$\forall f \in K,\ \forall i,\ \forall y, z \in X_i,\ |f(y) - f(z)| < \varepsilon$$

то есть на каждом из этих кусочков (X_i) все функции одинаково мало меняют свое значение;

Теорема 3. (**Арцела-Асколи**) Множество $K \subset C[a, b]$ компактно $\Leftrightarrow$

1) K - замкнуто;
2) K - равномерно ограниченно, то есть:

$$\exists C > 0\colon \forall f \in K,\ \|f\| \le C$$

3) K - равностепенно непрерывно, то есть:

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\,\delta > 0\colon \forall f \in K,\ \forall x, y \in [a, b],\ |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Rm: 1. Равностепенная непрерывность это усиление свойства равномерной непрерывности. Функция непрерывная на отрезке является равномерно непрерывной, а вот теперь δ выбирается не только для всех x, y но и для всех f.

□

($\Rightarrow$) Свойства 1) и 2) - очевидны, поскольку компакт - ограниченное и замкнутое множество. Проверим свойство 3). Мы знаем, что:

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\,\text{конечная } \varepsilon\text{-сеть},\ f_1, \ldots, f_N \in K\colon \forall f \in K,\ \exists\,k \in 1, \ldots, N\colon \|f - f_k\| = \max_{[a,b]} |f - f_k| < \varepsilon$$

Каждая из этих функций является непрерывной по условию $\Rightarrow$ является равномерно непрерывной:

$$\forall f_k,\ \forall\varepsilon > 0,\ \exists\,\delta_k > 0\colon \forall x, y \in [a, b],\ |x - y| < \delta_k \Rightarrow |f_k(x) - f_k(y)| < \varepsilon$$

Поскольку функций конечное число, то возьмем $\delta = \min\limits_{1 \le k \le N} \{\delta_k\}$, тогда:

$$\forall k = \overline{1, N},\ \forall x, y \in [a, b],\ |x - y| < \delta \Rightarrow |f_k(x) - f_k(y)| < \varepsilon$$

Возьмем произвольную функцию $f \in K$ и начнем сравнивать:

$$\forall x, y \in [a, b],\ |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \le |f(x) - f_k(x)| + |f_k(x) - f_k(y)| + |f_k(y) - f(y)|$$

выбираем k таким образом, чтобы $|f(x) - f_k(x)| < \varepsilon$ и $|f(y) - f_k(y)| < \varepsilon$, это возможно так как, f_k из ε-сети. Тогда:

$$|f(x) - f_k(x)| + |f_k(x) - f_k(y)| + |f_k(y) - f(y)| \leq 3\varepsilon$$

то есть равностепенная непрерывность выполняется.

($\Leftarrow$) Для критерия Хаусдорфа нужно, чтобы пространство было полным (с прошлого семестра знаем, что пространство непрерывных функций на отрезке - полное, см. второй семестр, лекцию 6, теорему 3), нужно, чтобы множество было замкнутым (есть по условию) и вполне ограниченным, то есть существовала конечная ε-сеть.

По утверждению 5 лекции 10, если мы построим конечную ε-сеть в пространстве ограниченных функций $B[a,b]$, $\forall\varepsilon > 0$, то мы построим конечную 2ε-сеть уже из элементов самого множества $\Rightarrow$ построим конечную 2ε-сеть в пространстве непрерывных функций $C[a,b]$, $\forall\varepsilon > 0$, поскольку $C[a,b] \subset B[a,b]$ с той же самой метрикой (это одна и та же метрика для непрерывных функций). Для построения конечной ε-сети (из теоремы 2 лекции 11) множества $K \subset B[a,b]$ воспользуемся критерием компактности:

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\{X_1, \ldots, X_N\} \text{ - разбиение } X\colon \forall f \in K,\ \forall i,\ \forall y, z \in X_i,\ |f(y) - f(z)| < \varepsilon$$

Заметим, что условие равностепенной непрерывности буквально дает такое разбиение отрезка. Возьмем некоторое $\varepsilon > 0$, найдем для него $\delta > 0$ из условия 3) и проходим отрезок $[a,b]$ шагом меньше δ. Следовательно, это и будут те самые требуемые X_i, поскольку:

$$\forall f \in K,\ \forall i,\ \forall y, z \in X_i \Rightarrow |y - z| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(z)| < \varepsilon$$

то есть мы получаем:

$$\forall f \in K,\ \forall i,\ \forall y, z \in X_i,\ |f(y) - f(z)| < \varepsilon$$

таким образом выполняется критерий компактности $\Rightarrow$ выполняется критерий Хаусдорфа $\Rightarrow$ множество K - компакт и мы получили требуемое. ■

Типичный пример

Множество

$$K_{R,L} = \left\{ f \in C[a,b]\colon \max_{t\in[a,b]} |f(t)| \leq R \wedge |f(t) - f(s)| \leq L|t - s| \right\}$$

это типичный компакт в пространстве непрерывных функций. R, L - фиксированы. Первое свойство:

$$\max_{t\in[a,b]} |f(t)| \leq R$$

говорит, что это равномерно ограниченное множество. Второе свойство:

$$|f(t) - f(s)| \leq L|t - s|$$

говорит, что это равностепенно непрерывное множество. Единственное, что остается проверить - замкнутость множества: содержит ли это множество пределы всех своих последовательностей? Пусть есть набор функций $\{f_n\}\colon f_n \to f$, предел в этом пространстве означает, что максимум разности стремится к нулю $\Rightarrow$ эта сходимость равномерная на $[a,b]$:

$$\{f_n\}\colon f_n \to f \Leftrightarrow \max_{t\in[a,b]} |f_n(t) - f(t)| \to 0 \Leftrightarrow f_n \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$$

Таким образом, в этом множестве взять сходящуюся последовательность это то же самое, что взять равномерно сходящуюся последовательность. Будут ли для функции f выполнятся условия на $K_{R,L}$. Пусть верно:

$$|f_n(t)| \leq R, \forall t \in [a, b] \wedge |f_n(t) - f_n(s)| \leq L|t - s|$$

Устремим n к бесконечности, поскольку у нас есть равномерная сходимость, то у нас есть и поточечная сходимость: $f_n(t) \to f(t)$, $\forall t$, тогда по правилу перехода к пределу в неравенстве:

$$|f(t)| \leq R, \forall t \in [a, b] \wedge |f(t) - f(s)| \leq L|t - s|$$

Следовательно f также принадлежит множеству $K_{R,L}$.

Опр: 2. Множество выпукло, если с любыми 2 своими точками содержит отрезок, их соединяющий.

Rm: 2. Заметим, что это множество - выпуклое. Пусть $f, g \in K_{R,L}$, опишем все функции из отрезка соединяющего две данные функции:

$$[f, g] = \{\alpha f + (1 - \alpha)g \mid \alpha \in [0, 1]\}$$

Очевидно, что неравенства $K_{R,L}$ сохраняются и для этого отрезка $\Rightarrow K_{R,L}$ - выпуклый компакт. Для выпуклого компакта есть теорема Шаудера (которую сможем доказать только в следующем семестре).

Теорема 4. (**Шаудер**) Пусть $(X, \|\cdot\|)$ - нормированное пространство. Пусть $K \subset X$ это выпуклый компакт в нормированном пространстве и $F\colon K \to K$ это непрерывное отображение. Тогда существует неподвижная точка:

$$\exists\, x \in K\colon F(x) = x$$

Мы можем доказать, что для отрезка это так, но это не очевидно даже для шара (теореме Брауэра). Если взять теорему Арцела-Асколи и теорему Шаудера, позволяют в практически одно касание доказать теорему о существовании решения дифференциального уравнения.

Существование решения задачи Коши

Пусть $b \in C([0,T]\times\mathbb{R}_x)$ - непрерывная функция двух переменных. Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{cases} \dot{x} &= b(t,x),\ t\in[0,T] \\ x(0) &= x_0 \end{cases} \tag{$*$}$$

Это задача Коши. Когда у этой системы есть решения? В общем случае их может не быть. Для существования решения достаточно непрерывности правой части. Кроме того, если требовать непрерывной дифференцируемости по x, то этого будет достаточно для единственности. Пусть $|b| \le M$.

Упр. 1. Пусть b - любое, можно ли построить простой пример задачи Коши у которой нет решений?

□ Следующая система не имеет решений:

$$\begin{cases} \dot{x} &= D(t),\ t\in[0,T] \\ x(0) &= x_0 \end{cases} \tag{$*$}$$

где $D(t)$ - функция Дирихле. Функция $D(0)=1$. По теореме Дарбу не может производная у всюду дифференцируемой функции иметь два значения 0 и 1, потому что для производной выполняется теорема о промежуточном значении. ■

Упр. 2. Рассмотреть следующую функцию:

$$\dot{x} = \begin{cases} -1, & x \ge 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases}$$

Обосновать, почему у неё нет решений.

Теорема 5. (**Пеано**) Если $b \in C\left([0,T]\times\mathbb{R}\right)$, $\forall s,x,\ |b(s,x)| \le M$, то $\forall x_0$ задача Коши $(*)$ имеет решение.

Rm: 3. Заметим, что здесь не указывается единственность. Кроме того, если отказаться в теореме от ограниченности, то придется выбирать другой отрезок вместо $[0,T]$. Более того, теорема Пеано верна только в конечномерных пространствах.

□ Доказательство будет проходить в несколько этапов:

(1) $F\colon K_{R,M} \to K_{R,M}$;

(2) F - непрерывное отображение;

(3) $F(x) = x \Leftrightarrow$ выполнены условия задачи Коши $(*)$;

Пусть $R = |x_0| + MT$, рассмотрим множество:

$$K_{R,M} = \{x \in C[0,T]\colon |x(t)| \le R \wedge |x(t)-x(s)| \le M|t-s|\}$$

как мы уже доказали, по теореме Арцела-Асколи это множество является выпуклым компактом (как вполне ограниченное и замкнутое множество по критерию Хаусдорфа). Заметим, что задача Коши эквивалентна следующей:

$$x \in C[0,T],\ x(t) = x_0 + \int\limits_0^t b(s,x(s))ds$$

В одну сторону нужно просто продифференцировать (при условии непрерывности функции под интегралом), а в обратную просто проинтегрировать (см. курс дифф. ур-ний). Тогда видно какое отображение должно обладать неподвижной точкой (аргумент есть функция $x(t)$):

$$F\colon x(s) \mapsto F(x)\,(t) = x_0 + \int\limits_0^t b(s, x(s))ds$$

Пусть $x \in C[0,T]$, рассмотрим $F(x)\,(t)$. Поскольку $|b| \le M$, $t \in [0,T]$ и x_0 - фиксировано, то:

$$|F(x)\,(t)| \le |x_0| + \left|\int\limits_0^t b(s, x(s))ds\right| \le |x_0| + MT = R$$

Рассмотрим Липшецевость:

$$|F(x)\,(t) - F(x)\,(s)| = \left|\int\limits_0^t b(r, x(r))dr - \int\limits_0^s b(r, x(r))dr\right| = \left|\int\limits_s^t b(r, x(r))dr\right| \le M|t-s| = L|t-s|$$

Следовательно, выполняются все условия, наложенные на $K_{R,M}$, тогда, если возьмем $x \in K_{R,M}$:

$$F\colon K_{R,M} \to K_{R,M}$$

Более того, отображение F переводит в компакт всё (если мы возьмем просто $x \in C[0,T]$, то отображение будет также в компакт). Проверим, что отображение F это непрерывное отображение:

$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists\, \delta > 0\colon \forall x, y \in K_{R,M},\ \|x - y\| < \delta \Rightarrow \|F(x) - F(y)\| < \varepsilon$$

Так как $b(s,x)$ - непрерывна на $B = [0,T] \times [-R,R]$, то b - равномерно непрерывна на нем (поскольку непрерывна на компакте):

$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists\, \delta > 0\colon \forall (t_1, x_1), (t_2, x_2) \in B,\ \sqrt{|t_1 - t_2|^2 + |x_1 - x_2|^2} < \delta \Rightarrow |b(t_1, x_1) - b(t_2, x_2)| < \varepsilon$$

Пусть функции $x, y \in K_{R,M}$ и пусть $|x(t) - y(t)| < \delta$, $\forall t \in [0,T]$ или по-другому $\|x - y\| < \delta$. Рассмотрим разность отображений:

$$|F(x)\,(t) - F(y)\,(t)| \le \int\limits_0^T |b(s, x(s)) - b(s, y(s))|ds$$

Поскольку s одинаковое под интегралом, то $\sqrt{|s-s|^2 + |x-y|^2} = |x - y| < \delta$, тогда:

$$|F(x)\,(t) - F(y)\,(t)| \le \int\limits_0^T |b(s, x(s)) - b(s, y(s))|ds \le \varepsilon \int\limits_0^T ds = T\varepsilon$$

и это верно для каждого $t \in [0,T]$, тогда:

$$\|F(x) - F(y)\| \le T\varepsilon$$

и тем самым отображение F - непрерывное. Следовательно, по теореме Шаудера:

$$\exists\, x \in C[0,T]\colon F(x) = x$$

Тогда:

$$x(t) = x_0 + \int\limits_0^t b(s, x(s))ds$$

Проверим: $x(0) = x(0)$, интеграл с переменным верхним пределом от непрерывной функции $\Rightarrow$ можно дифференцировать (2 семестр, лекция 26, утв. 3): $\dot{x}(t) = b(t, x(t))$ ■

Свойства равномерно сходящихся последовательностей

Возьмем функциональную последовательность $f_n(x)$, она как-то сходится к функции $f(x)$. Возникает вопрос, а каков предел последовательности $f(x)$? Выделим следующие пунктов:

(1) $f_n(x)$ - непрерывные $\overset{?}{\Rightarrow}$ $f(x)$ - непрерывная;

(2) $f_n(x)$ - интегрируемы $\overset{?}{\Rightarrow}$ $f(x)$ - интегрируема и выполняется:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b f_n(x)dx$$

(3) $f_n(x)$ - дифференцируемы $\overset{?}{\Rightarrow}$ $f(x)$ - дифференцируема и выполняется:

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$$

Не во всех из этих пунктов существенной является равномерная сходимость, но по крайней мере для двух из трех это очень удобное и естественное условие (1 и 3).

Всего основных свойств 3 и одно из них уже нам знакомо.

Теорема 6. (**о перестановке пределов**) Пусть X это метрическое пространство, a это предельная точка X и последовательность $f_n \overset{X}{\rightrightarrows} f$. Если $\forall n,\ \exists \lim\limits_{x\to a} f_n(x) = A_n$, то:

$$\exists \lim_{n\to\infty} A_n,\ \exists \lim_{x\to a} f(x) \wedge \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{x\to a} f(x)$$

или по-другому:

$$\lim_{x\to a}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right)$$

□

1) Докажем, что существует предел A_n. Поскольку $f_n \overset{X}{\rightrightarrows} f$, то выполняется условия Коши:

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N\colon \forall n, m > N,\ \forall x,\ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Поскольку это выполнено для всех x, то устремим x к a:

$$x \to a \Rightarrow \forall n, m > N,\ |A_n - A_m| \le \varepsilon$$

Следовательно, $\{A_n\}$ - фундаментальна и $\exists \lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$;

2) Применим метод 3ε (уже делали так ранее). Хотим доказать, что $f(x) \to A$ при $x \to a$:

$$|f(x) - A| \le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - A_n| + |A_n - A|$$

Поскольку f_n равномерно сходится к f и A_n - фундаментальна (сходится к A), то:

$$\exists n \in \mathbb{N}\colon |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon \wedge |A_n - A| < \varepsilon$$

фиксируем это n. По условию $\exists \lim\limits_{x\to a} f_n(x) = A_n$, тогда:

$$\exists\, \delta > 0\colon \forall x \in \mathcal{B}'(a,\delta),\ |f_n(x) - A_n| < \varepsilon$$

Таким образом, мы получаем:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0\colon \forall x \in \mathcal{B}'(a,\delta),\ |f(x) - A| < 3\varepsilon$$

■

Следствие 1. Пусть X - метрическое пространство, $a \in X$. Если $f_n \overset{X}{\rightrightarrows} f$ и f_n - непрерывны в точке a, то f - непрерывна в точке a.

☐ Если a - изолированная точка, то уже все доказано, поскольку в них любые определенные функции являются непрерывными. Пусть a - предельная точка X, тогда по предыдущей теореме:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\Big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Big) = \lim_{n\to\infty}\Big(\lim_{x\to a} f_n(x)\Big) = \lim_{n\to\infty} f_n(a) = f(a)$$

где третье равенство верно в силу непрерывности $f_n(x)$, $\forall n$ в точке a. Четвертое равенство верно в силу того, что из равномерной непрерывности следует поточечная. ■

Rm: 4. На самом деле, мы уже доказывали эту теорему, но в частном случае (см. семестр 2, лекция 6).

Следствие 2. Пусть X - метрическое пространство, тогда $C_B(X)$ - пространство ограниченных непрерывных функций является полным нормированным пространством с метрикой:

$$\rho(f,g) = \sup_X |f(x) - g(x)|$$

☐ Возьмем фундаментальную последовательность в $C_B(X)$ это будет фундаментальная последовательность по равномерной сходимости (будет равномерно сходиться на X). По доказанному выше свойству, её предел будет непрерывной фукнцией. Поскольку $C_B(X)$ - пространство ограниченных функций из X, то и предел будет - ограниченной:

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon + |f_n(x)|$$

Таким образом, предел есть и он лежит в этом пространстве. ■

Rm: 5. Такую же теорему в частном случае мы уже доказывали (см. семестр 2, лекция 6).

Второе свойство мы тоже уже видели во втором семестре.

Теорема 7. Пусть $f_n \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$ и f_n - интегрируемы по Риману на $[a,b]$. Тогда f - интегрируема по Риману на $[a,b]$ и можно переходить к пределу под знаком интеграла:

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b f_n(x)dx = \int\limits_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx$$

□

1) Пусть $\mathrm{I}_n = \int\limits_a^b f_n(x)dx$. Докажем, что существует предел I_n:

$$|\mathrm{I}_n - \mathrm{I}_m| \leq \int\limits_a^b |f_n(x) - f_m(x)|dx \leq (b-a)\sup_{[a,b]}|f_n(x) - f_m(x)|$$

Поскольку $f_n \rightrightarrows f \Rightarrow$ удовлетворяет условию Коши, тогда:

$$\forall\varepsilon > 0,\, \exists\, N\colon \forall n, m > N,\, \sup_{[a,b]}|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \Rightarrow |\mathrm{I}_n - \mathrm{I}_m| < (b-a)\varepsilon$$

Следовательно, $\{\mathrm{I}_n\}$ - фундаментальна и $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{I}_n = \mathrm{I}$.

2) Применим метод 3ε. Хотим доказать, что $\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) = \sum\limits_j f(\xi_j)|\Delta_j|$ сходится к I:

$$|\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) - \mathrm{I}| \leq |\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) - \sigma(f_n, \mathbb{T}, \xi)| + |\sigma(f_n, \mathbb{T}, \xi) - \mathrm{I}_n| + |\mathrm{I}_n - \mathrm{I}|$$

$$|\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) - \sigma(f_n, \mathbb{T}, \xi)| = \left|\sum_j f_n(\xi_j)|\Delta_j| - \sum_j f(\xi_j)|\Delta_j|\right| \leq (b-a)\sup_{[a,b]}|f_n(x) - f(x)|$$

Поскольку f_n равномерно сходится к f и I_n сходится к I, то:

$$\exists\, n \in \mathbb{N}\colon (b-a)\sup_{[a,b]}|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \wedge |\mathrm{I}_n - \mathrm{I}| < \varepsilon$$

фиксируем это n. По условию f_n - интегрируемы $\Rightarrow$ выбираем масштаб разбиения:

$$\exists\, \delta > 0\colon \forall(\mathbb{T}, \xi),\, \lambda(\mathbb{T}) < \delta \Rightarrow |\sigma(f_n, \mathbb{T}, \xi) - \mathrm{I}_n| < \varepsilon$$

Таким образом, мы получаем:

$$\forall\varepsilon > 0,\, \exists\, \delta > 0\colon \forall(\mathbb{T}, \xi),\, \lambda(\mathbb{T}) < \delta \Rightarrow |\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) - \mathrm{I}| < 3\varepsilon$$

■

Rm: 6. На самом деле, мы уже доказывали эту теорему (см. семестр 2, лекция 22).

Можно ли отказаться от равномерной сходимости заменив на поточечную? Вообще говоря нельзя.

Пример: Рассмотрим следующую последовательность функций $\{f_n\}$ на $[0, 1]$:

$$f_n(x) = \begin{cases} n, & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0, & \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}$$

Ясно, что $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ поточечно, но при этом $\forall n$, $\int\limits_0^1 f_n(x)dx = 1$.

Пример: Рассмотрим следующую последовательность функций $\{f_n\}$ на $[0,1]$: $f_n \geq 0$, $f_n \to 0$ поточечно, но при этом не существует предела интеграла $\int\limits_0^1 f_n(x)dx$ при $n \to \infty$:

$$f_n(x) = \begin{cases} (1+(-1)^n)n(n+1), & \frac{1}{n+1} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0, & 0 \leq x \leq \frac{1}{n+1} \vee \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Ясно, что $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ поточечно, но при этом $\forall n$, $\int\limits_0^1 f_n(x)dx$ принимает значения то 0, то 2.

Тем не менее, возникает вопрос, что можно добавить, чтобы всё-таки получить поточечную сходимость вместо равномерной? Ответ на этот вопрос дает теорема Арцела.

Теорема 8. (**Арцела**) Если f_n, f - интегрируемы на $[a,b]$ по Риману, последовательность - ограничена: $\forall n, x$, $|f_n(x)| \leq C$ и $f_n(x) \to f(x)$ поточечно, то:

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx$$

Rm: 7. Возникает вопрос, насколько условия точные. На примерах мы видели, что даже когда $f = 0$ без условий ограничений теорема не будет верна. Одновременно с этим возникает вопрос, для чего требуется интегрируемость предельной функции, нельзя ли это сделать частью утверждения?

Если взять поточечно сходящуюся последовательность ограниченных функций (единой константой) и тогда предельная функция - интегрируема и в интегралах можно переходить к пределу. Это утверждение верно, но только для интеграла Лебега и будет называться теоремой Лебега о мажорируемой сходимости. Для интеграла Римана, однако, отказаться от интегрируемости предельной функции нельзя.

Пример: Пусть $\{r_n\}$ - все рациональные точки в отрезке $[0,1]$. Рассмотрим функции $\{f_n\}$ на $[0,1]$:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in \{r_1, r_2, \ldots, r_n\} \\ 0, & x \notin \{r_1, r_2, \ldots, r_n\} \end{cases}$$

Получаем поточечную сходимость к функции Дирихле $\forall x$, $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} D(x) \Rightarrow \forall n$ эта функция равна нулю за исключением конечного числа точек и тогда эти функции интегрируемы:

$$\forall n, \int\limits_0^1 f_n(x)dx = 0$$

Предельная функция не является непрерывной.

Rm: 8. Во многих случаях, понятно к чему сходится функция f_n, во многих случаях это описывает поточечная сходимость и можно сказать сколь плоха предельная функция. Трудность состоит в том, чтобы перейти к пределу. В данном случае надо проверить ограниченность f_n. Это совсем не то же самое, что и проверять их равномерную сходимость, это значительно слабее. Если бы $f_n \rightrightarrows f$, то f окажется интегрируемой по Риману и автоматически ограниченной $\Rightarrow f_n$ в совокупности ограничены константой. Таким образом, при равномерной сходимости, условие $\forall n, x$, $|f_n(x)| \leq C$ выполнено автоматически.

Rm: 9. Заметим также, что теорема не работает в обратную сторону.

Пример Рисса: Пусть $f_n \geq 0$ - интегрируемы, интеграл сходится к нулю:

$$\int\limits_0^1 f_n(x)dx \to 0$$

Но $\forall x \in [0,1]$, $f_n(x)$ - не имеет предела (даже бесконечного). Делим отрезок $[0,1]$ пополам, на первой половине определяем индикаторную функцию $f_1(x) = \mathbb{I}_{[0,\frac{1}{2}]}(x)$ на второй $f_2(x) = \mathbb{I}_{[\frac{1}{2},1]}(x)$. Далее, делим отрезок на 4 части и по аналогичному принципу строим следующие индикаторные функции:

$$f_3(x) = \mathbb{I}_{[0,\frac{1}{4}]}(x),\ f_4(x) = \mathbb{I}_{[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]}(x),\ f_5(x) = \mathbb{I}_{[\frac{1}{2},\frac{3}{4}]}(x),\ f_6(x) = \mathbb{I}_{[\frac{3}{4},1]}(x)$$

Затем делим на 8 частей и так далее. Таким образом, над каждой точкой x получаем бесконечное число нулей и единиц и последовательность функций никуда не сходится. Но при этом:

$$\int\limits_0^1 f_n(x)dx = |\Delta_n| \to 0$$

Rm: 10. Доказательство можно посмотреть в учебнике Фихтенгольца, где обсуждается равномерная сходимость. В целом, эта теорема есть частный случай теоремы Лебега.

Мы будем рассматривать множества, которые есть объединения отрезков, но не любых, а которые не более чем счетные и могут пересекаться лишь по концам:

$$F = \bigcup_n \Delta_n \subset [a,b],\ \Delta_n = [a_n, b_n],\ \forall n \neq m,\ \Delta_n \cap \Delta_m = \begin{cases} \varnothing, \\ b_n = a_m \vee b_m = a_n, \end{cases}$$

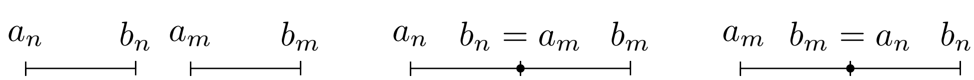

Рис. 1: Расположение отрезков Δ_n и Δ_m, при $n \neq m$.

По-другому это можно записать так: $\mathring{\Delta}_n \cap \mathring{\Delta}_m = \varnothing$, $\forall n \neq m$, где $\mathring{\Delta}$ означает внутренность интервала Δ. Каждому такому множеству F мы можем приписать длину $\lambda(F)$:

$$\lambda(F) = \sum_n |\Delta_n|$$

Порядок нумерования отрезков - не важен, поскольку абсолютно сходящийся ряд не меняет своей суммы от перестановки мест слагаемых. Далее рассматриваем множества только такого вида.

Утв. 1. Если $F \subset \bigcup\limits_j F_j$, то $\lambda(F) \leq \sum\limits_j \lambda(F_j)$.

Утв. 2. Пусть есть последовательность вложенных множеств: $F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_n \supset \ldots$. Причем известно, что $\forall n$, $\lambda(F_n) \geq \delta > 0$, тогда пересечение не может быть пустым: $\bigcap\limits_n F_n \neq \varnothing$.