Суммирование расходящихся рядов

В чем может быть интерес к расходящимся рядам? Рассмотрим следующий пример:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

Если возьмем $x = -1$, то получим расходящийся ряд слева, а справа получим $\frac{1}{2}$. Следовательно, то чему была равна сумма непрерывно продолжается на точку $x = -1$, несмотря на ряд слева.

Хотелось бы, чтобы такие "моменты" ряды не портили и суммировались к чему-то разумному. То есть как-то такие ряды преобразовать, чтобы в подобных точках сумма сходилась. Особенно этим часто пользуются физики. Мы будем рассматривать несколько способов суммирования.

(I) Суммирование Пуассона-Абеля

Опр: 1. Число A называется суммой по методу Пуассона-Абеля ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ (который не предполагается сходящимся), если $\forall x \in (0,1)$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ - сходится и число A равно:

$$A = \lim_{x \to 1-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Говорят, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ суммируем по Пуассону-Абелю.

Возникает вопрос, почему бы просто не присвоить расходящимся суммам значение 0? Ответ на него связан с желанием, чтобы заданные суммы обладали каким-то набором естественных свойств. Хотим, чтобы были удовлетворены следующие свойства:

1) Линейность: Если $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ суммируем к числу A и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ суммируем к числу B, то их линейная комбинация: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n)$ суммируема к числу $\alpha A + \beta B$.

2) Регулярность: Если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ сходится и его сумма равна A, то этот ряд суммируем к A.

В таком случае, если сумма расходящегося ряда стремится к нулю, мы можем получить:

$$\sum_{n=0}^{N}(n + 2^{-n}) \to 0,\ \sum_{n=0}^{N} n \to 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{N}(n + 2^{-n} - n) = \sum_{n=0}^{N} 2^{-n} \to 0$$

что очевидно является противоречием свойству регулярности $\Rightarrow$ присвоение расходящимся рядам нулевых значений нарушеат естественное свойство линейности.

3) <u>Произведение рядов</u>: Если $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ суммируем к числу A и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ суммируем к числу B, тогда следующий ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$, где $c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + \ldots + a_nb_0$ также суммируем по Пуассону-Абелю и его сумма будет равна:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = A{\cdot}B = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$$

Утв. 1. Метод суммирования Пуассона-Абеля линеен, регулярен и удовлетворяет свойству произведения рядов.

☐ Проверим свойства:

1) Линейность: Пусть есть два ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$, составим из них ряды: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_nx^n$. По условию, поскольку эти ряды суммируемы по П-А, то они сходятся на $x \in (0,1)$. Тогда:

$$\forall x \in (0,1), \ \sum_{n=0}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n)x^n \text{ - сходится}$$

$$\lim_{x\to 1-} \sum_{n=0}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n)x^n = \lim_{x\to 1-} \alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n + \lim_{x\to 1-} \beta \sum_{n=0}^{\infty} b_nx^n = \alpha A + \beta B$$

2) Регулярность: Пусть $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = A$ в обычном смысле, тогда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ сходится в $x = 1$. По II-ой теореме Абеля, этот ряд сходится равномерно на $[0,1]$, следовательно можно переставлять предел и сумму местами, тогда:

$$\lim_{x\to 1-} \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x\to 1-} a_nx^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$$

3) Произведение рядов: Рассмотрим две суммы $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_nx^n$, когда $x < 1$, то эти ряды сходятся абсолютно $\Rightarrow$ можно их переменожать (в том числе по Коши):

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_nx^n\right)$$

Устремим $x \to 1-$ и воспользуемся арифметикой пределов:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \lim_{x\to 1-} \sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n = \left(\lim_{x\to 1-} \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n\right) \cdot \left(\lim_{x\to 1-} \sum_{n=0}^{\infty} b_nx^n\right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = A{\cdot}B$$

■

Пример: По суммированию Пуассона-Абеля, получаем: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n = \frac{1}{2}$, поскольку:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = \frac{1}{1+x} \xrightarrow[x\to 1-]{} = \frac{1}{2}$$

Пример: Рассмотрим следующий ряд: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot n$. Просуммируем по Пуассону-Абелю:

$$\forall x \in (0,1),\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n x^n = x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n x^{n-1} = x\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n\right)' = x\left(\frac{-x}{1+x}\right)' = \frac{-x}{(1+x)^2} \xrightarrow[x\to 1-]{} -\frac{1}{4}$$

(II) Суммирование по Чезаро

Опр: 2. Пусть имеется ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ (не предполагается сходящимся), $S_N = \sum\limits_{n=1}^{N} a_n$ - его частичные суммы.

Говорят, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ суммируем по Чезаро к A, если:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{S_1 + \ldots + S_N}{N} = A$$

Есть некоторая последовательность $\{S_N\}$ и теперь вместо предела последовательности стали смотреть на предел средних арифметических. Это вполне естественная вещь, поскольку если есть какие-то наблюдения из жизни, но собранные с погрешностями (а это почти всегда так).

Ясно что желательно, чтобы на ответ эти погрешности не влияли, но также понятно, что если они возникают, то они в сумме могут собраться во что-то плохое, могут последовательность сделать несходящейся: $S_n + (-1)^n\varepsilon$ и даже если S_n сходилось, то полученное уже сходиться не будет, предела уже нет. Также ясно, что эта проблема не последовательности, а наших измерений.

Как с ними побороться? Давайте смотреть на средние арифметические, это будет убирать осциляцию вокруг последовательности.

Утв. 2. Метод Чезаро линеен и регулярен.

□ Проверим свойства:

1) Линейность: Возьмем два ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ с частичными суммами S_N^a и S_N^b. Тогда:

$$\sum_{n=1}^{N}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha\sum_{n=1}^{N} a_n + \beta\sum_{n=1}^{N} b_n = \alpha S_N^a + \beta S_N^b$$

Рассмотрим средние арифметические этого ряда:

$$\frac{(\alpha S_1^a + \beta S_1^b) + \ldots + (\alpha S_N^a + \beta S_N^b)}{N} = \alpha\frac{S_1^a + \ldots S_N^a}{N} + \beta\frac{S_1^b + \ldots S_N^b}{N} \to \alpha A + \beta B$$

2) Регулярность: Пусть $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = A$, то есть $S_N \to A$. Обозначим $\widetilde{S}_N = S_N - A \to 0$. Тогда:

$$\frac{S_1 + \ldots + S_N}{N} - A = \frac{\widetilde{S}_1 + \ldots + \widetilde{S}_N}{N}$$

Хотим показать, что такое среднее арифметическое будет стремиться к нулю:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, M \colon \forall N > M,\ \left|\widetilde{S}_N\right| < \varepsilon$$

$$\frac{\widetilde{S}_1 + \ldots + \widetilde{S}_N}{N} = \frac{\widetilde{S}_1 + \ldots + \widetilde{S}_M}{N} + \frac{\widetilde{S}_{M+1} + \ldots + \widetilde{S}_N}{N}$$

Выберем N таким большим, чтобы:

$$\left|\frac{\widetilde{S}_{M+1} + \ldots + \widetilde{S}_N}{N}\right| < \frac{(N-M-1)\varepsilon}{N} < \varepsilon,\ \frac{\widetilde{S}_1 + \ldots + \widetilde{S}_M}{N} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0 \Rightarrow \left|\frac{\widetilde{S}_1 + \ldots + \widetilde{S}_M}{N}\right| < \varepsilon$$

где предпоследнее верно в силу того, что M - фиксированное. Тогда:

$$\left|\frac{S_1 + \ldots + S_N}{N}\right| < 2\varepsilon$$

■

Пример: Рассмотрим ряд: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n$. Поймем как устроена последовательность частичных сумм:

$$S_N = \begin{cases} 1, & N = 2k \\ 0, & N = 2k+1 \end{cases} \Rightarrow \frac{S_1 + \ldots S_N}{N} = \begin{cases} \dfrac{m}{2m} = \dfrac{1}{2}, & N = 2m \\ \dfrac{m}{2m+1}, & N = 2m+1 \end{cases} \xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{1}{2}$$

Утв. 3. Если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ суммируем по Чезаро, то $a_n = \overline{o}(n)$.

□ Пусть $A_n = \dfrac{S_1 + \ldots + S_n}{n}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$, тогда:

$$S_n = n{\cdot}A_n - (n-1){\cdot}A_{n-1} = n{\cdot}\left(A_n - \left(1 - \frac{1}{n}\right)A_{n-1}\right) = n{\cdot}\overline{o}(1) = \overline{o}(n)$$

Заметим, что $a_n = S_n - S_{n-1} = \overline{o}(n) - \overline{o}(n) = \overline{o}(n)$. Или ещё это можно увидеть так:

$$\frac{a_n}{n} = \frac{S_n}{n} - \frac{S_{n-1}}{n} = \frac{A_n}{n} - \frac{A_{n-1}}{n} - \frac{A_{n-1}}{n} + \frac{A_{n-2}}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

■

Пример: Рассмотрим ряд: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n n$. Он не суммируется методом Чезаро, поскольку $a_n \neq \overline{o}(n)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n = -1 + 2 - 3 + 4 - \ldots$$

Но при этом он суммируется методом Абеля (см. выше).

Теорема 1. (**Фробениус**) Если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ суммируем по Чезаро к A, то этот ряд суммируем по Пуассону-Абелю тоже к A.

$\square$ Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, поскольку $a_n = \overline{o}(n)$, то при $0 < x < 1$ этот ряд сходится, поскольку

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \leq \sum_{n=1}^{\infty} cnx^n < \infty$$

Будем считать, что $S_0 = 0, S_{-1} = 0, \ldots$ - все отрицательные суммы будут равны 0. Тогда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty}(S_n - S_{n-1})x^n = \sum_{n=1}^{\infty} S_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} S_{n-1}x^n = \sum_{n=1}^{\infty} S_n x^n - \sum_{m=0}^{\infty} S_m x^{m+1} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} S_n(x^n - x^{n+1}) = (1-x)\sum_{n=1}^{\infty} S_n x^n = (1-x)\sum_{n=1}^{\infty}\left(nA_n - (n-1)A_{n-1}\right)x^n =$$

$$= (1-x)\sum_{n=1}^{\infty} nA_n - (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} nA_n x^{n+1} = (1-x)\sum_{n=1}^{\infty} nA_n(x^n - x^{n+1}) = (1-x)^2\sum_{n=1}^{\infty} nA_n x^n$$

По сути, было произведено два преобразования Абеля. По суммированию Чезаро мы знаем, что:

$$A_N = \frac{S_1 + \ldots + S_N}{N} \to A$$

Рассмотрим следующую сумму:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}\right) = x\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)' = x\cdot\left(\frac{-x}{1-x}\right)' = x\cdot\left(\frac{1}{1-x} - 1\right)' = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Получаем, что $(1-x)^2\sum\limits_{n=1}^{\infty} nAx^n = Ax$, тогда:

$$(1-x)^2\sum_{n=1}^{\infty} nA_n x^n = (1-x)^2\sum_{n=1}^{\infty} n(A_n - A)x^n + Ax$$

Мы знаем, что $A_N \to A$, тогда:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N\colon \forall n > N,\ |A_n - A| < \varepsilon$$

Фиксируем N и разобьем всю сумму на несколько частей:

$$(1-x)^2\sum_{n=1}^{\infty}n(A_n-A)x^n+Ax=(1-x)^2\sum_{n=1}^{N}n(A_n-A)x^n+Ax+(1-x)^2\sum_{n=N+1}^{\infty}n(A_n-A)x^n$$

Отсюда мы можем оценить слагаемые из такого разбиения:

$$\left|\sum_{n=N+1}^{\infty}n(A_n-A)x^n\right|\leq\sum_{n=N+1}^{\infty}n\varepsilon x^n=\varepsilon\sum_{n=N+1}^{\infty}nx^n\leq\varepsilon\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=\frac{\varepsilon x}{(1-x)^2}$$

Тогда, вычитая из преобразованного ряда A мы получим:

$$\exists\,\delta>0\colon\forall x\in(1-\delta,1),\ \left|(1-x)^2\sum_{n=1}^{\infty}nA_nx^n-A\right|\leq\left|(1-x)^2\sum_{n=1}^{N}n(A_n-A)x^n\right|+|A|\cdot|x-1|+\varepsilon x<3\varepsilon$$

■

Пусть ряд суммируем по Пуассону-Абелю, можно ли в каких-то ситуациях сказать, что исходный ряд имеет сумму, что-то потребовать от коэффициентов дополнительного, чтобы из суммируемости по Абелю следовала обычная суммируемость. Оказывается что можно: есть теоремы Таубера (см. задачи в листочках).

Всегда ли работает метод Пуассона-Абеля? Нет, не всегда. Рассмотрим следующий пример.

Пример: Рассмотрим ряд: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n$. Известно, что он расходится. Рассмотрим следующую сумму:

$$\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}\xrightarrow[x\to1-]{}\infty$$

Таким образом, просуммировать ряд методом Пуассона-Абеля нельзя.

Дзета-регуляция

Ряд из натуральных чисел разошелся, но тем не менее, попробуем просуммировать этот ряд, пользуясь дзета-регуляризацией (см. Стивена Хокинга).

Опр: 3. Дзета-функцией называется функция следующего вида: $\zeta(s)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$, $s>1$.

Можно ли что-то сделать с этой функцией, чтобы присваивать выражению разумные значения не только при $s>1$? Вспомним формулу Эйлера:

$$\sum_{n=1}^{N-1}f(n)=\int_1^N f(x)dx+\int_1^N\{x\}f'(x)dx$$

Если мы знаем, что всё сходится, то можно её записать следующим образом:

$$\sum_{n=1}^{\infty}f(n)=\int_1^{\infty}f(x)dx+\int_1^{\infty}\{x\}f'(x)dx$$

У этой формулы есть обобщение (без доказательства):

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) = \int\limits_1^{+\infty} f(x)dx + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_k}{k!} f^{(k-1)}(x)\Big|_1^{+\infty} + (-1)^{m+1} \int\limits_1^{+\infty} \frac{B_m(\{x\}) f^{(m)}(x)dx}{m!}$$

где B_k - числа Бернулли, которые определяются следующим образом:

$$0^m + 1^m + \ldots + (n-1)^m = \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} C_{m+1}^k B_k n^{m+1-k}$$

Следующее соотношение позволяет вычислять эти числа (взяли в формуле $m = 1$):

$$\sum_{j=0}^{m} C_{m+1}^j B_j = 0,\ B_0 = 1$$

Найдем B_1: $C_2^0 B_0 + C_2^1 B_1 = 0 \Rightarrow 1 + 2B_1 = 0 \Rightarrow B_1 = -\dfrac{1}{2}$. Аналогично: $B_2 = \dfrac{1}{6}$, $B_3 = 0$.

Опр: 4. Многочленами Бернулли называются многочлены следующего вида:

$$B_m(t) = \sum_{j=0}^{m} C_m^j B_j t^{m-j}$$

Нам интересно применить обобщение формулы Эйлера к дзета-функции Римана: $f(x) = \dfrac{1}{x^s}$, когда $s > 1$ и для простоты возьмем $m = 3$. Тогда:

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{s-1}$$

$$f^{(k-1)}(x) = \frac{(-1)^{k-1} s(s+1)\cdot \ldots \cdot(s+k-2)}{x^{s+k-1}} \Rightarrow f^{(0)}(x) = \frac{1}{x^s}$$

в бесконечности производная уйдет в ноль, в единице будет коэффициент из числителя:

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{B_k}{k!} f^{(k-1)}(x)\Big|_1^{+\infty} = \frac{B_1}{1!}\cdot(-1) + \frac{B_2}{2!}\cdot s + (\ldots)\cdot(s+1)$$

нам будет не важно, что в скобках при $(s+1)$, поскольку далее мы будем подставлять $s = -1$. И последнее слагаемое будет равно:

$$(-1)^{m+1} \int\limits_1^{+\infty} \frac{B_m(\{x\}) f^{(m)}(x)dx}{m!} = (-1)^{m+k} \int\limits_1^{+\infty} \frac{B_m(\{x\})\cdot(s(s+1)\cdot\ldots\cdot(s+k-2))dx}{x^{s+m}\cdot m!}$$

где многочлен Бернулли будет ограничен в силу того, что подставляется дробная часть. Интеграл сходится при достаточно больших s: $s + m > 1$. Таким образом, если мы возьмем $s = -1$, то интеграл занулится. Тогда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{12}\cdot(-1) = -\frac{1}{12}$$

Rm: 1. Заметим, что $\zeta(s)$ единственным образом продолжается со значений $s > 1$ на остальные, то есть, в некоторым смысле, мы находим это значение используя единственное возможное продолжение.

Rm: 2. С такой ситуацией уже сталкивались при анализе многочленов Чебышева: $\cos(n \arccos x)$. Если раскрыть, то получим многочлен при $|x| \le 1$, поскольку $\arccos x$ определен от -1 до 1. И получается, что формула имеет смысл только при $|x| \le 1$, но если её “расписать” правильно, то она имеет смысл при всех x.

То что здесь произошло: была взята не очень удобная форма дзета-функции и преобразована в более удобную форму и оказалось, что там мы можем вычислять значения не только при $s > 1$, но и при других s, в частности при $s = -1$ и следовательно “посчитать” сумму натуральных чисел. В кавычках, само собой, потому что эту сумму мы просто проинтерпретировали.