Равномерная сходимость

Мы уже проходили эту тему во втором и первом семестре, сейчас будем лишь углублять и утончать наши знания.

Пусть $X \neq \varnothing$, заданы функции $f_n, f\colon X \to \mathbb{R}$ (или в более общее $\mathbb{C}$).

Rm: 1. Обычно всегда трудно осознать, что перед нами последовательность функций.

Упр. 1. Нарисовать "мультик" из функций:

$$f_n^1(x) = \begin{cases} 1, & x < \dfrac{1}{n} \\ 0, & x \geq \dfrac{1}{n} \end{cases}, \; f_n^2(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & x < \dfrac{1}{n} \\ 0, & x \geq \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

Опр: 1. Последовательность функций f_n сходится поточечно к f, если $\forall x \in X$ числовая последовательность $f_n(x)$ сходится к числу $f(x)$. Или подробнее:

$$\forall x \in X,\, \forall \varepsilon > 0,\, \exists\, N \colon \forall n > N,\, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Рассмотрим функцию $f_n^1(x)$ и в качестве $x = \frac{1}{1000}$, тогда $f_1^1(x) = \ldots = f_{999}^1(x) = 1$ и дальше последовательность функций везде будет равна нулю: $f_n^1(x) = 0$, $\forall n > 999$. Если взять $x = \frac{1}{10^6}$, то тогда картина будет похожей: при $n \leq 999999$ значения $f_n^1(x)$ будет равны 1 и для $n > 999999$ будет равны 0. Таким образом, $f_n^1(x)$ в этом примере поточечно сходятся к 0.

Опр: 2. Последовательность функций f_n сходится равномерно к f на X, если:

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Или по-другому:

$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists\, N \colon \forall n > N,\, \forall x \in X,\, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

обозначаем $f_n \overset{X}{\rightrightarrows} f$.

Rm: 2. Отметим, что для маленьких n не запрещено, чтобы разность $\sup\limits_{x \in X} |f_n(x) - f(x)|$ была бесконечностью. Не будем считать это плохой ситуацией. Выражение должно быть конечным, начиная с какого-то номера.

Будет ли равномерная сходимость для $f_n^1(x)$? Чтобы это понять надо взять и посмотреть, как ведет себя точная верхняя грань:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n^1(x) - 0| = 1 \nrightarrow 0$$

То есть не будет равномерной сходимости, тогда как для $f_n^2(x)$ она будет:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n^2(x) - 0| = \tfrac{1}{n} \to 0$$

Rm: 3. Еще одна аналогия: в равномерной сходимости происходит стремление к нулю как бы сразу во всех точках x.

Утв. 1. Если $f_n \overset{X}{\rightrightarrows} f$, то $f_n \to f$ поточечно.

$\square$ Очевидно из определения. $\blacksquare$

Rm: 4. Из данного утверждения следует, что равномерный предел определен единственным образом, поскольку поточечный предел это предел числовой последовательности, там единственность предела есть. И получается, что в каждой точке X предельная функция f задана однозначно.

Опр: 3. Последовательность $f_n(x)$ равномерно ограниченна, если верно следующее:

$$\exists\, C > 0\colon \forall x,\, \forall n,\, |g_n(x)| \le C$$

Утв. 2. Пусть $f_n \overset{X}{\rightrightarrows} f$, $g_n \overset{X}{\rightrightarrows} g$, тогда:

(1) $f_n + g_n \overset{X}{\rightrightarrows} f + g$;

(2) если f, g ограниченны на X, то $f_n{\cdot}g_n \overset{X}{\rightrightarrows} f{\cdot}g$;

Rm: 5. Если не требовать ограниченности на f и g, то второй пункт будет неверным. Например:

$$X = \mathbb{R},\; f_n(x) \equiv f(x) = x,\; g_n(x) = \frac{1}{n} \overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} 0 \Rightarrow f_n(x){\cdot}g_n(x) = \frac{x}{n}$$

И тогда точная верхняя грань у произведения $f_n(x){\cdot}g_n(x)$ всегда будет бесконечностью.

Rm: 6. Заметим, что требовать ограниченности от последовательности равномерно сходящейся или требовать ограниченности от их предела это одно и то же, потому что всегда есть такая оценка:

$$|f_n(x)| \le |f_n(x) - f(x)| + |f(x)|$$

Если ограничен супремум $f(x)$, то поскольку супремум разности $|f_n(x) - f(x)|$ стремится к нулю, то начиная с некоторого номера $f_n(x)$ тоже будет равномерно ограниченной. Или по-другому:

$$\exists\, C > 0\colon |f(x)| \le C,\, \forall x \Rightarrow |f_n(x)| \le C + 1,\, \forall n > n_0,\, \forall x$$

Аналогично:

$$|f(x)| \le |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x)|$$

Если ограничена равномерно последовательность $f_n(x)$, то поскольку супремум разности $|f_n(x) - f(x)|$ стремится к нулю, то начиная с некоторого номера $f(x)$ тоже будет ограниченной. Или по-другому:

$$\exists\, C > 0\colon |f_n(x)| \le C,\, \forall n > n_0,\, \forall x \Rightarrow |f(x)| \le C,\, \forall x$$

где в последнем неравенстве не прибавляем 1 к константе в силу поточечной сходимости.

$\square$

(1) Оценим разность:

$$|f_n(x) + g_n(x) - (f(x) + g(x))| \le |f_n(x) - f(x)| + |g_n(x) - g(x)|$$

Навешиваем справа точную верхнюю грань по $x \in X$:

$$|f_n(x) + g_n(x) - (f(x) + g(x))| \le \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| + \sup_{x \in X} |g_n(x) - g(x)|$$

таким образом, правая часть больше не зависит от $x \Rightarrow$ левая часть оценивается сверху везде и можно навесить супремум слева:

$$\sup_{x\in X} |f_n(x) + g_n(x) - (f(x) + g(x))| \leq \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| + \sup_{x\in X} |g_n(x) - g(x)|$$

Правая часть стремиться к нулю $\Rightarrow$ левая часть тоже будет стремиться к нулю;

(2) Оценим разность:

$$|f_n(x)\cdot g_n(x) - f(x)\cdot g(x)| = |f_n(x)\cdot g_n(x) - f(x)\cdot g_n(x) + f(x)\cdot g_n(x) - f(x)\cdot g(x)| \leq$$

$$\leq |f_n(x) - f(x)|\cdot|g_n(x)| + |g_n(x) - g(x)|\cdot|f(x)| = (*)$$

По условию:

$$\exists\, n_0, C > 0\colon \forall x, \forall n > n_0,\ |g_n(x)| \leq C,\ |f(x)| \leq C$$

Тогда оценка разности будет следующей:

$$(*) \leq C\left(|f_n(x) - f(x)| + |g_n(x) - g(x)|\right)$$

Аналогично предыдущему пункут навешиваем супремумы справа, затем слева и получим:

$$\sup_{x\in X} |f_n(x)\cdot g_n(x) - f(x)\cdot g(x)| \leq C\left(\sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| + \sup_{x\in X} |g_n(x) - g(x)|\right)$$

■

Утв. 3. Пусть $f_n \overset{X}{\rightrightarrows} 0$ и g_n - равномерно ограниченна, тогда $f_n\cdot g_n \overset{X}{\rightrightarrows} 0$.

□ Оценим разность:

$$|f_n(x)\cdot g_n(x) - 0| = |f_n(x)\cdot g_n(x)| \Rightarrow \exists\, n_0, C > 0\colon \forall x, \forall n > n_0,\ |f_n(x)\cdot g_n(x)| \leq C|f_n(x)|$$

Тогда:

$$\sup_{x\in X} |f_n(x)\cdot g_n(x)| \leq C \sup_{x\in X} |f_n(x)|$$

Правая часть стремиться к нулю $\Rightarrow$ левая часть тоже будет стремиться к нулю. ■

Критерий Коши

Теорема 1. (**Критерий Коши**) Последовательность f_n сходится равномерно на X тогда и только тогда, когда выполняется условие Коши:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, N\colon \forall n, m > N,\ \sup_{x\in X} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Rm: 7. Буквально должно напоминать проверку полноты пространства ограниченных функций.

Rm: 8. Заметим, что доказательство в обратную сторону здесь не очевидно. Для вещественных чисел нам надо было сначала откуда-то взять предел и мы использовали теорему Больцано (огр. последовательность $\Rightarrow$ выбираем сходящуюся подпоследовательность, это и есть предел), но здесь поступить аналогично не получится, поскольку с точки зрения равномерной сходимости (а даже и поточечной) здесь теорема Больцано не выполняется.

Есть задача, что из последовательности $\sin(nx)$ на отрезке $[0, 1]$ (равномерно ограниченная последовательность) нельзя выбрать поточечно сходящуюся подпоследовательность.

Также отметим, что возможность выбирать поточечную подпоследовательность связана только со случаями, когда X не более, чем счетное. Чуть далее мы пообсуждаем альтернативы теореме Больцано.

□
($\Rightarrow$) Очевидно.

($\Leftarrow$) По условию:

$$\forall\varepsilon > 0,\, \exists N\colon \forall n, m > N,\, \forall x \in X,\, |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Следовательно $\forall x$, начиная с некоторого номера N числовая последовательность $\{f_n(x)\}$ - фундаментальна. По критерию Коши для числовых последовательностей $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Проверим, что сходимся к этому равномерно, напишем условие Коши:

$$\forall\varepsilon > 0,\, \exists N\colon \forall n, m > N,\, \forall x \in X,\, |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Фиксируем x и фиксируем n, а m устремляем к бесконечности. Поскольку мы уже знаем, что предел в каждой точке x есть, мы можем перейти в неравенстве к пределу:

$$|f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$$

Но все предыдущие высказывания остались в силе, следовательно:

$$\forall\varepsilon > 0,\, \exists N\colon \forall n > N,\, \forall x \in X,\, |f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon \Rightarrow \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| \to 0$$

■

Будет ли выполнятся теорема Больцано? Нет, не будет.

Пример: $f_n(x) = \sin(nx)$, эта последовательность равномерно ограниченна: $\forall n$, $\forall x$, $|f_n(x)| \le 1$. Нельзя выбрать даже поточечную сходящуюся подпоследовательность.

Если бы интересовала сходимость только равномерная, то пример построить гораздо проще:

Пример: Рассмотрим следующую последовательность $\{f_n\}$:

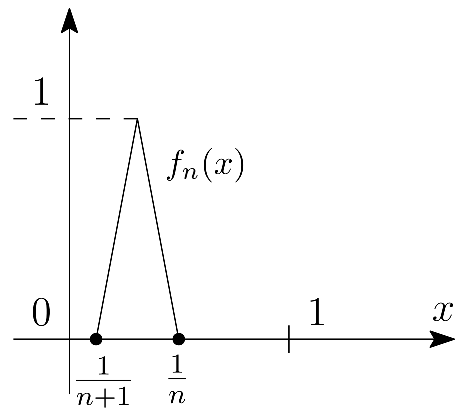

Рис. 1: Последовательность функций $f_n(x)$.

Если рассмотрим точную верхнюю грань:

$$\sup_{x\in X}|f_n(x)-f_m(x)|=1$$

поскольку они все на разных промежутках отличны от нуля. Очевидно, что f_n и никакая её подпоследовательность не удовлетворяет условию Коши $\Rightarrow$ никакая подпоследовательность не может быть сходящейся равномерно, при этом эта последовательность равномерна ограниченна.

Получается, что условия теоремы Больцано нет. Но надо помнить, что теорема Больцано связана не только с возможностью выбирать из ограниченного сходящееся, но с компактностью.

Причина: ограниченное замкнутое множество может не быть компактом, потому что для точек компакта было утверждение о том, что если задана последовательность из неё можно выбрать сходяющуюся подпоследовательность. Причина отуствия теоремы Больцано в первую очередь связана с отсутствием компактности ограниченных замкнутых множеств.

Компактность

Появляется естественный вопрос, какие множества будут компактами? Можно ли как-то описать компактность? Попробуем разобраться. Нас будут интересовать пространства ограниченных функций:

$$\mathcal{B}(X) = \{f\colon X \to \mathbb{R}, \sup_X |f| < \infty\}$$

это метрическое пространство с метрикой $\rho(f,g) = \sup_X |f-g|$ и соответственно:

$$f_n \overset{X}{\rightrightarrows} f \Leftrightarrow \rho(f_n, f) \to 0$$

по определению равномерной сходимости (взятое из сходимости по метрике). Вопрос, а как устроены компакты в $\mathcal{B}(X)$? Хочется получить что-нибудь аналогичное конечномерным пространствам, где компакты это ограниченные и замкнутые множества.

Опр: 4. Множество K в метрическом пространстве (X, ρ) компактно, если всякое его покрытие открытыми множествами имеет конечное подпокрытие.

Утв. 4. Множество $K \subset \mathcal{B}(X)$ - компакт, тогда (в неметрическом пространстве это утверждение неверно):

1) K - ограниченное множество;
2) K - замкнутое множество (дополнение к нему - открыто);
3) Замкнутое подмножество компакта является компактом;
4) Всякое бесконечное подмножество обязательно имеет предельную точку;

Rm: 9. В частности, 4) свойство означает, что у всякой последовательности элементов компакта есть сходящаяся подпоследовательность.

Для продолжения обсуждения, нам потребуется понятие ε-сети.

Опр: 5. Пусть $\varepsilon > 0$ и A - подмножество метрического пространства (X, ρ). Множество B называется ε-сетью для множества A, если:

$$\forall a \in A,\ \exists\, b \in B\colon \rho(a,b) < \varepsilon$$

Rm: 10. То есть, если возьмем множество B и в каждой его точке нарисуем шарик радиуса ε, то эти шары закроют множество A.

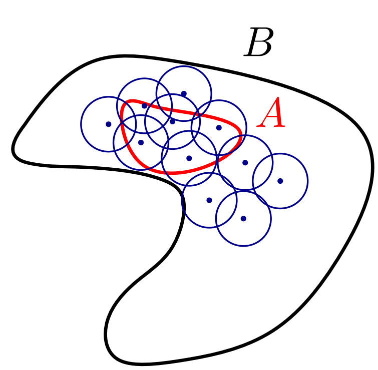

Рис. 2: Покрытие ε - сетью.

Rm: 11. В общем случае, компактность в метрических пространствах связана не с ограниченностью, а с возможностью поймать множество в такую сеть.

Опр: 6. Если множество B выше конечное, то говорят, что A имеет конечную ε-сеть.

Утв. 5. Если у множества A есть конечная ε-сеть, то у A есть конечная 2ε-сеть из элементов A.

□ Пусть B это ε-сеть для A. Возьмем $b \in B$, если $B(b, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing$, то выбираем $\tilde{a} \in B(b, \varepsilon) \cap A$ и берем все такие $\tilde{a}$ для каждого b (их конечное число). Если шарик пустой - его можно удалить, он не участвует в образовании ε-сети. Таким образом, получаем $\widetilde{A} = \{\tilde{a}\}$. Возьмем $c \in \widetilde{A}$, тогда:

$$\exists\, b \in B \colon \rho(b, c) < \varepsilon \wedge \exists\, \tilde{a} \in \widetilde{A} \colon \rho(b, \tilde{a}) < \varepsilon \Rightarrow \rho(c, \tilde{a}) < 2\varepsilon$$

■

Утв. 6. Если K - компакт, то у него $\forall \varepsilon > 0$ существует конечная ε-сеть.

□ Возьмем $\forall b \in K$ шар $B(b, \varepsilon)$, тогда их объединение покрывает K, то есть:

$$K \subset \bigcup_{b} B(b, \varepsilon)$$

Но эти шары открытые $\Rightarrow$ существует конечное подпокрытие: $B(b_1, \varepsilon), \ldots, B(b_N, \varepsilon)$, по определению компакта. А значит $B = \{b_1, \ldots, b_N\}$ это и есть конечная ε-сеть. ■