Свёртка функций: мотивация

Для более полного понимания понятия свёртки начнём с физической интерпритации (нестрогой). Представим, что есть некоторое устройство: на вход подается сигнал, на выходе получается сигнал.

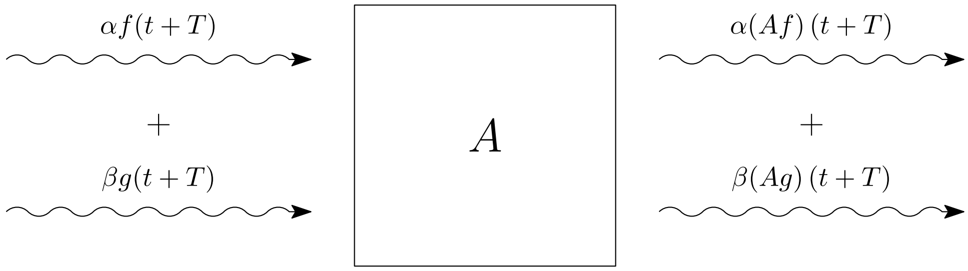

Рис. 1: Физическая мотивация свёртки.

Это устройство обладает двумя свойствами: **линейностью** и **независимостью от времени**. Например, весы: сумма двух грузов равна сумме весов, масштабирование работает по весу, как взвешивали вчера, так будут взвешивать и сегодня. Или, например, радиоприемник: суперпозиция сигналов будет выдаваться суперпозицией сигналов, работа вчера не будет отличаться от работы сегодня.

Формализуя, под прибором будем понимать некоторый оператор A на функциях:

$$A\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F},\ \mathcal{F} = \{\text{Пространство функций на } \mathbb{R}\}$$

Под входящим сигналом будем понимать функцию $f(t)$ на $\mathbb{R}$, а под выходящим сигналом будем понимать функцию Af, также на $\mathbb{R}$. Тогда свойства прибора будут формализованы так:

(1) **Линейность**: $A(\alpha f(t) + \beta g(t)) = \alpha Af(t) + \beta Ag(t)$;

(2) **Независимость от времени**: $\forall \tau \in \mathbb{R}$, $T_\tau f(t) = f(t-\tau)$, $A(T_\tau f(t)) = T_\tau(Af(t))$;

Rm: 1. Последнее математически обозначает, что оператор A коммутирует с оператором сдвига T_τ.

Типичный пример для такой ситуации - закон движения, описывающийся законами Ньютона. Многие колебательные, волновые движения могут иметь следующую форму:

$$\begin{cases} \ddot{x} + a\dot{x} + bx & = & f(x) \\ x(0) = \dot{x}(0) & = & 0 \end{cases}$$

В начальный момент времени всё находилось в состоянии покоя: у материальной точки не было скорости, стартовая координата была в нуле, затем стали действовать на эту точку силой $f(t)$ и она стала двигаться, при этом её держит какая-то пружина (bx) и есть трение $(a\dot{x})$.

Таким образом, прибор устроен так: подаете на вход силу $f(t)$, а на выходе получаете описание траектории во времени $x(t)$ - функция того, как будет двигаться материальная точка. Проверим, что интересующее сопоставление: $f(t) \to x(t)$ обладает свойствами оператора выше:

(1) Поскольку уравнение линейное, то если $f(t)$ распалось в сумму, то и решение будет строиться как сумма. Если $f(t)$ умножить на константу, то и решение $x(t)$ надо умножить на константу $\Rightarrow$ сопоставление: $f(t) \to x(t)$ обладает свойством линейности;

(2) Так как слева в первом уравнении ничего не зависит от t, то сдвинуть $f(t)$ будет всё равно что сдвинуть $x(t) \Rightarrow$ если хотим найти закон движения со сдвигом, то можно просто сдвинуть $f(t)$ и посмотреть что получится;

Многие физические законы описываются как некий черный ящик на который вы подаете функцию и из которого получаете функцию в ответ. Замечательно, что это очень общая схема лишь с двумя свойствами, без конкретизации того, как именно работает этот черный ящик.

Возникает вопрос, как описать действия такого прибора? Можно ли ввести какие-то эталонные функции, посмотреть как ведет себя прибор на них и дальше уже описать его действия, не используя сам прибор. Оказывается можно и это будут так называемые точечные импульсы.

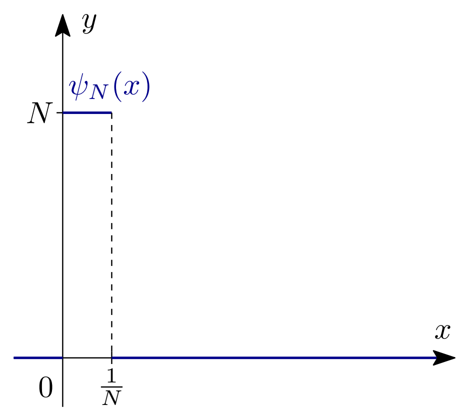

Рис. 2: Точечные импульсы.

Опр: 1. Последовательность функций:

$$\psi_N(x) = \begin{cases} N, & x \in \left[0, \frac{1}{N}\right] \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \left[0, \frac{1}{N}\right] \end{cases}, \ \forall N \in \mathbb{N}$$

называется функциями точечных импульсов.

Отметим, что интегралы от этих функций всё время равны 1. Представим, что мы взяли наш прибор и померили выходной сигнал на каждой такой функции и посмотрели, что будет на $N \to \infty$. Эвристически предположим, что есть сходимость к некоторой $E(x)$:

$$A\psi_N(x) \xrightarrow[N\to\infty]{} E(x)$$

Опр: 2. Функция $E(x) = \lim\limits_{N\to\infty} A\psi_N(x)$ называется аппаратной функцией.

Оказывается, что всё действие прибора описывается этой функцией и с помощью неё можно описать работу прибора на любом входном сигнале. Рассмотрим непрерывные функции с компактным носителем, то есть: $f \in C(\mathbb{R})$ и $f \equiv 0$ вне некоторого отрезка $[-c, c]$.

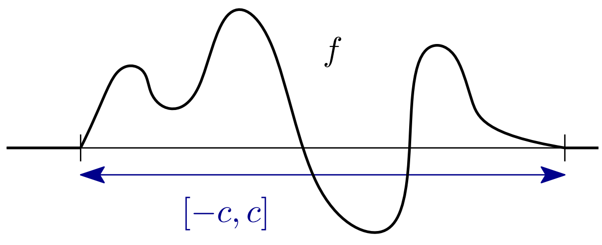

Рис. 3: Функция с компактным носителем.

В таком случае мы можем представить такие функции в виде следующей суммы:

$$f(x) \approx \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{N} \cdot f\left(\tfrac{k}{N}\right) \cdot \psi_N\left(x - \tfrac{k}{N}\right)$$

Графиком приближения f будут ступенчатые функции по всей $\mathbb{R}$ (чем-то похоже на конструкции при построении интеграла Римана).

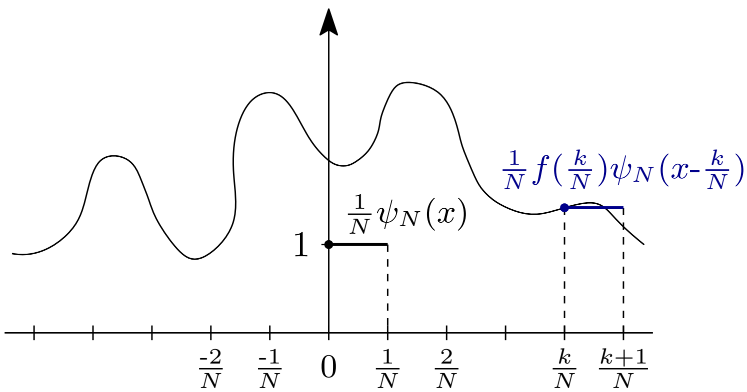

Рис. 4: Приближение функции $f(x)$.

Поскольку вне некоторого отрезка f равна нулю, на отрезке равномерно непрерывна, то приближение тоже будет равномерным. Естественно считать, что в приборе (операторе A) есть некоторые свойства непрерывности и если мы равномерно приближаемся, то можно менять местами A и предел, тогда:

$$Af(x) = A\left(\lim_{N\to\infty} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{N} \cdot f\left(\tfrac{k}{N}\right) \cdot \psi_N\left(x - \tfrac{k}{N}\right)\right) = \lim_{N\to\infty} A\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{N} \cdot f\left(\tfrac{k}{N}\right) \cdot \psi_N\left(x - \tfrac{k}{N}\right)\right) =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{N} \cdot f\left(\tfrac{k}{N}\right) \cdot (A\psi_N)\left(x - \tfrac{k}{N}\right) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{N} \cdot f\left(\tfrac{k}{N}\right) \cdot E\left(x - \tfrac{k}{N}\right) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)E(x-t)dt$$

где в последней строчке, во втором равенстве мы эвристически перешли к аппаратной функции и получили Риманову сумму. Таким образом, мы получили:

$$Af(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)E(x-t)dt$$

И пользовались всего тремя свойствами: линейностью, перестановочностью со сдвигами и пользовались какого-то сорта непрерывностью, чтобы менять местами разные пределы. Эту непрерывность несложно обосновать строго, например, для перестановочности A и равномерного предела функций $f_N(x)$:

$$f_N(x) \rightrightarrows f,\ f_N(x) \equiv 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus [-c, c] \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ Af_N(x) \to Af(x)$$

Можно и дальше делать строгие обоснование, только в рамках данного курса мы это делать не будем. В книге Хёрмандера (оценки для операторов) есть некоторые детали про свёртку (теорема Шварца).

Свёртка функций

Опр: 3. Выражение $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt$ называется свёрткой функций f и g и обозначается $f * g(x)$.

Возникают вопросы: когда это выражение имеет смысл, когда этот интеграл определен? Интеграл несобственный, две особенности $\Rightarrow$ имеет смысл разбить на два и оба интеграла должны сходиться.

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы по Риману на всяком отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R} \Rightarrow f(t)g(x-t)$ - интегрируема на $[a, b]$, $\forall [a, b] \subset \mathbb{R}$. Далее везде будем предполагать, что это так.

Утв. 1. Для существования свёртки $f * g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ достаточно хотя бы одного из следующих условий:

(1) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt$ - сходится и $g(t)$ - ограничена;

(2) $f(x)$ или $g(x)$ финитна, то есть равна нулю вне некоторого отрезка;

(3) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt$ и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 dt$ - сходятся;

Rm: 2. Заметим, что все эти три условия не одинаковы.

(1) Не требуется зануления хотя бы одной из функций вне некоторого отрезка;

(2) Если одна из функций зануляется, то нет никакого несобственного интеграла, поскольку в этом случае интеграл будет браться по некоторому отрезку $\Rightarrow$ мы работаем с конечным интегралом;

(3) Не требуется интегрируемости $f(x)$ и $g(x)$, а требуется интегрируемость квадратов и возможно следующее:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+|t|} dt \not< \infty, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+|t|)^2} dt < \infty$$

Rm: 3. Также заметим, что это не все возможные случаи существования свёртки и это не самые общие условия, когда она существует. В других курсах, далее, свойства свёртки будут ещё раз изучаться.

$\square$ По определению:

$$f * g(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt$$

(1) Очевидно, по признаку Вейерштрасса $\Rightarrow$ сразу будет сходимость;

(2) Если какая-то функция финитна, то $f(t)g(x-t) = 0$ вне какого-то отрезка $\Rightarrow$ интеграл собственный $\Rightarrow$ существует по интегрируемости функций по Риману;

(3) Из неравенства средних:

$$|f(t)g(x-t)| \leq \frac{1}{2}|f(t)|^2 + \frac{1}{2}|g(x-t)|^2$$

Рассмотрим интегралы:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt < \infty, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |g(x-t)|^2 dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |g(s)|^2 ds < \infty \Rightarrow \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)g(x-t)| dt < \infty$$

Следовательно, по признаку Вейерштрасса будет сходимость;

■

Свойства свёртки функций

Утв. 2. Пусть $f * g(x)$ существует $\forall x \in \mathbb{R}$, тогда:

(1) Существует $g * f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ и $g * f(x) = f * g(x)$;

(2) Если $\exists\, f_1 * g(x), f_2 * g(x)$, то $\forall \alpha, \beta$, $\exists\, (\alpha f_1 + \beta f_2) * g(x) = \alpha(f_1 * g)(x) + \beta(f_2 * g)(x)$;

(3) Для финитных, непрерывных f, g, h верно: $h * (g * f)(x) = (h * g) * f(x)$;

(4) Оператор сдвига коммутирует со свёрткой: $T_\tau(f * g)(x) = f * (T_\tau g)(x)$;

Rm: 4. Получаем свойства похожие на свойства кольца в пространстве функций, где свёртка это операция "умножения". Свойство (1) - коммутативность, (2) - дистрибутивность, (3) - ассоциативность, но не хватает единицы в этом пространстве такой, чтобы $f * \mathbf{1} = f$. Если бы была единица, то получилось бы на фунциях придумать умножение в виде свёртки.

□

(1) По свойствам несобственного интеграла, если интеграл до замены есть, то и после неё он сходится. Тогда, по определению:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt = |t = x - s| = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x-s)g(s)ds = g * f(x) < \infty$$

(2) По условию, существуют следующие интегралы:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)g(x-t)dt < \infty, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_2(t)g(x-t)dt < \infty$$

Тогда по определению линейности интеграла будет существовать интеграл от линейной комбинации функций и верно равенство:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\alpha f_1(t) + \beta f_2(t))\, g(x-t)dt = \alpha \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)g(x-t)dt + \beta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)g(x-t)dt < \infty$$

(4) По условию, мы требуем $\exists\, f * g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, возьмем сдвиг:

$$T_\tau(f * g)(x) = f * g(x-t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot g(x - \tau - t)dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot (T_\tau g)(x-t)dt = f * (T_\tau g)(x)$$

(3) Пусть h, f, g - финитны и непрерывны, тогда по определению:

$$h*(f*g)(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} h(t)\cdot(f*g(x-t))\,dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} h(t)\cdot\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(s)g(x-t-s)ds\right)dt$$

все интегралы выше при условиях финитности это собственные интегралы по конечным промежутка от непрерывных функций. Аналогично для правой части равенства:

$$(h*g)*f(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (h*f(v))\cdot g(x-v)dv = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} h(u)f(v-u)du\right)\cdot g(x-v)dv$$

Внесём под первый интеграл оставшиеся слагаемые и сделаем замену под интегралом:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} h(t)\cdot f(s)\cdot g(x-t-s)ds\right)dt = |s=v-t| = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} h(t)\cdot f(v-t)\cdot g(x-v)dv\right)dt$$

Меняем местами интегралы, в силу финитности и непрерывности функций, тогда:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} h(t)\cdot f(v-t)\cdot g(x-v)dv\right)dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} h(t)\cdot f(v-t)\cdot g(x-v)dt\right)dv =$$

$$= |u=t| = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} h(u)\cdot f(v-u)\cdot g(x-v)du\right)dv = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (h*f(v))\cdot g(x-v)dv = (h*g)*f(x)$$

■

Остается вопрос, а существует ли для свёртки единица? Пусть такая функция существует для финитных и непрерывных функций (обозначим их пространство $\mathcal{G}$), обозначем её как g, тогда:

$$\forall f\in\mathcal{G},\ \forall x\in\mathbb{R},\ f*g(x) = f(x) \Rightarrow \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt = f(x)$$

Если $g(t)\equiv 1$, то слева получим константу по интегралу, а справа функцию $\Rightarrow$ не подходит. Поскольку мы хотим, чтобы равенство выполнялось для всех x, то рассмотрим его в нуле:

$$x=0 \Rightarrow \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(-t)g(t)dt = f(0)$$

Рассмотрим следующую последовательность финитных, непрерывных функций:

$$\forall n\in\mathbb{N},\ f_n(x) = \begin{cases} 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\left[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right] \\ 1+\dfrac{x}{n}, & x\in\left[-\frac{1}{n},0\right] \\ 1-\dfrac{x}{n}, & x\in\left[0,\frac{1}{n}\right] \end{cases}$$

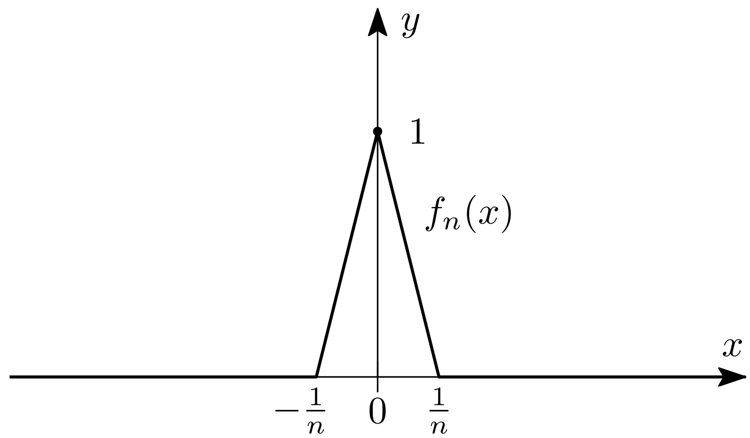

Рис. 5: Последовательность треугольников $f_n(x)$.

Они представляют из себя треугольники на отрезке $\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$ с вершиной в точке 0 и ноль вне этого отрезка, где $f(0) = 1$. Попробуем для такой последовательности функций вычислить значение свёртки в точке 0, учитывая интегрируемость функции $g(x)$, а следовательно её ограниченность:

$$1 = f_n(0) = \int\limits_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f_n(-t)g(t)dt \leq \int\limits_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} 1{\cdot}C dt = \frac{2C}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

В результате, получили противоречие. Справиться можно было бы с этим увеличивая функцию $g(t)$, то есть она должна была бы компенсировать сжимание области интегрирования. Как итого, среди функций единицы нет, но это не означает, что её вообще нет. Единица есть в так называемых обобщенных функциях (будет изучаться на 3-ьем курсе).

Rm: 5. С чем-то похожим мы сталкиваемся при изучении вещественных и рациональных чисел, вещественных чисел изначально нет среди рациональных, нет никакого рационального числа, которое могло быть равно $\sqrt{2}$. Вещественные числа мы получаем предельным переходом, как пределы последовательностей рациональных чисел. По аналогии в этой ситуации, нам не хватает функций.

Дельтаобразная последовательность

Найдем эту единицу для свёртки среди последовательностей функций.

Опр: 4. Дельтаобразной последовательностью функций называется всякая последовательность функций $\{\omega_n\}$, удовлетворяющая свойствам:

1) ω_n - интегрируема и $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \omega_n(t)dt = 1$;

2) $\omega_n \geq 0$;

3) $\forall\delta > 0, \displaystyle\int\limits_{|t|\geq\delta} \omega_n(t)dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$;

Чтобы понять устройство этих функций, рассмотрим крайне показательный пример.

Пример: Пусть $\psi \geq 0$, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)dx = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\omega_n(x) = n\psi(nx)$, тогда $\{\omega_n\}$ - это дельтаобразная последовательность:

2) Просто по определению: $\omega_n(x) = n\psi(nx) \geq 0$;

1) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \omega_n(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} n\psi(nt)dt = |nt = s| = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi(s)ds = 1$;

3) $\forall \delta > 0$, $\int\limits_{|t|\geq\delta} \omega_n(t)dt = \int\limits_{|t|\geq\delta} n\psi(nt)dt = |nt = s| = \int\limits_{-\infty}^{-n\delta} \psi(s)ds + \int\limits_{n\delta}^{+\infty} \psi(s)ds \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, поскольку это хвосты сходящегося несобственного интеграла;

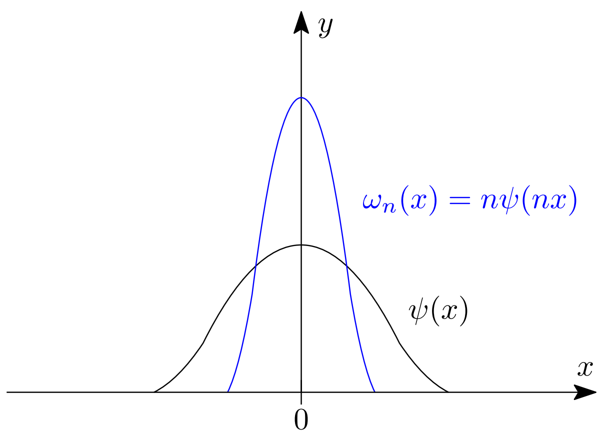

Рис. 6: Последовательность δ-образных функций $\omega_n(x)$.

Видно, что последовательность $\omega_n(x)$ поджимаются к нулю по x и вытягиваются по y. И происходит то, чего нам не хватало при доказательстве отсутствия единицы для свёртки.

Rm: 6. Заметим также, что функции точечных импульсов, которые мы разбирали в мотивации свёртки, построены из функции-индикатора на $[0, 1]$:

$$\psi(x) = \mathbb{I}_{[0,1]}(x) \Rightarrow \psi_N(x) = \begin{cases} N, & x \in \left[0, \frac{1}{N}\right] \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \left[0, \frac{1}{N}\right] \end{cases} = N\psi(Nx), \forall N \in \mathbb{N}$$

Дельтаобразная последовательность названа так в честь физика Дирака, который указал, что для многих физических моделей полезно рассматривать функцию Дирака.

Опр: 5. Функцией Дирака будем называть следующий объект:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases}, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = 1$$

Формально, в математике нет такой функции (среди функций), но математики придумали как такую функцию можно прописать. Один из способов это через обобщенные функции, который мы не будем здесь рассматривать, а другой способ - заменить её дельтаобразной последовательностью: $\omega_n(x) \to \delta(x)$. Естественно хотелось бы понять, нашли ли мы искомую единицу для свёртки?

Теорема 1. Пусть f - непрерывная и ограниченная, $\{\omega_n\}$ - это дельтаобразная последовательность. Тогда: $f * \omega_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(x)$ на всяком отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$.