Поточечная сходимость тригонометрического ряда Фурье

Утв. 1. Набор функций:

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}$$

является полной ортонормированной системой в пространстве $R[0, 2\pi]$.

Следствие 1. $\forall f \in R[0, 2\pi]$ раскладывается в ряд Фурье по системе: $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}$.

Опр: 1. Тригонометрическим рядом Фурье функции $f \in R[0, 2\pi]$ называют функциональный ряд вида:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt, \; \forall n \in \mathbb{N}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) dt, \; \forall n \in \mathbb{N}$$

Мы остановились на том, что понимаем под равенством выше сходимость в виде:

$$\sqrt{\int\limits_0^{2\pi} \left| f(x) - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right)\right)\right|^2 dx} = \sqrt{\int\limits_0^{2\pi} |f(x) - S_N(x)|^2 \, dx} \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$$

Заметим, что из сходимости в среднеквадратическом смысле (в виде интеграла) не следует сходимость почти всюду или вообще в каждой точке. Тем не менее, есть теорема Л'Карлесона (1966):

$$\forall f \in R[0, 2\pi], \; S_N \to f \text{ почти всюду}$$

то есть, сходимость есть для всех точек x кроме точек меры ноль. Перед нами стоит следующий вопрос, когда будет выполнено поточечное равенство? В каких-то точках будет сходиться или нет? Если возьмем некоторую точку x, можно ли утверждать что при некоторых условиях равенство $f(x)$ тригонометрическому ряду Фурье понимается в обычном смысле?

Лемма 1. (**Римана**) Если $f \in R[a, b]$, то: $\lim\limits_{\lambda \to \infty} \int\limits_a^b f(x) \cos(\lambda x) dx = 0$, $\lim\limits_{\lambda \to \infty} \int\limits_a^b f(x) \sin(\lambda x) dx = 0$.

□ Возьмем промежуток $\{c, d\} \subset [a, b]$, пусть для начала $f = \mathbb{I}_{\{c,d\}}$, тогда:

$$\int\limits_a^b f(x) \cos(\lambda x) dx = \int\limits_c^d \cos(\lambda x) dx = \frac{\sin \lambda d - \sin \lambda c}{\lambda} \xrightarrow[\lambda \to \infty]{} 0$$

Аналогично для интеграла с синусом. Пусть $f_{\mathbb{T}}(x)$ это функция из утверждения о полноте тригонометрической системы по отрезку $[a, b]$:

$$f_{\mathbb{T}}(x) = \sum_{k=1}^{N} \inf_{\Delta_k} f \cdot \mathbb{I}_{\Delta_k}(x)$$

Оценим разность между исходной функцией $f(x)$ и $f_{\mathbb{T}}(x)$:

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\cos(\lambda x)dx - \int\limits_a^b f_{\mathbb{T}}(x)\cos(\lambda x)dx\right| \le \int\limits_a^b |f(x) - f_{\mathbb{T}}(x)|\cdot 1\, dx = \int\limits_a^b |f(x) - f_{\mathbb{T}}(x)|dx$$

Пользуясь выводом из того же утверждения, мы получим:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, f_{\mathbb{T}}\colon \int\limits_a^b |f(x) - f_{\mathbb{T}}(x)|dx < \varepsilon$$

Фиксируем разбиение $\mathbb{T}$, тогда:

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\cos(\lambda x)dx\right| = \left|\int\limits_a^b f(x)\cos(\lambda x)dx - \int\limits_a^b f_{\mathbb{T}}(x)\cos(\lambda x)dx + \int\limits_a^b f_{\mathbb{T}}(x)\cos(\lambda x)dx\right| \le$$

$$\int\limits_a^b |f(x) - f_{\mathbb{T}}(x)|dx + \left|\int\limits_a^b f_{\mathbb{T}}(x)\cos(\lambda x)dx\right| \le \varepsilon + \left|\int\limits_a^b f_{\mathbb{T}}(x)\cos(\lambda x)dx\right| \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} \varepsilon + 0 = \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists\, \lambda_0\colon \forall \lambda > \lambda_0,\ \left|\int\limits_a^b f_{\mathbb{T}}(x)\cos(\lambda x)dx\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| < 2\varepsilon$$

■

Rm: 1. Попробуем понять неформальное объяснение леммы.

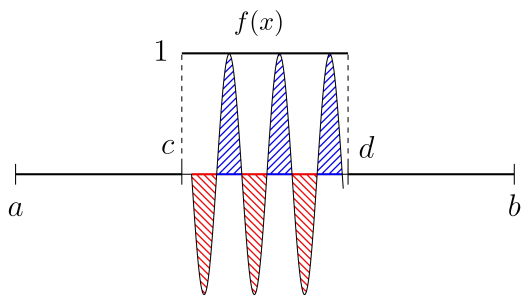

Рис. 1: Поведение произведения индикаторной функции $f(x) = \mathbb{I}_{\{c,d\}}(x)$ и $\cos\lambda x$.

На отрезке $[a, b]$ имеем ступеньку на промежутке $\{c, d\}$ и на этом промежутке начинаем рисовать $\cos\lambda x$. При устремлении λ в бесконечность, косинус начнет очень быстро колебаться $\Rightarrow$ за исключением отрезков рядом с точками c и d будет интегрирование косинуса по периоду (число красных промежутков на рисунке равно числу синих промежутков за исключением интервалов на концах), поэтому этот интеграл сокращается. Как мы уже выясняли, любая функция из $R[a, b]$ приближается такими ступенчатыми функциями и на каждом интервале происходит сокращение.

Ядро Дирихле

Чтобы продвинуться дальше в понимании сходимости, попробуем понять, как устроены частичные суммы тригонометрического ряда Фурье:

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)dt +$$

$$+\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)\cdot(\cos nt\cos nx + \sin nt\sin nx)\,dt\right) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)\cdot\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N}\cos n(x-t)\right)dt$$

Опр: 2. Ядром Дирихле назовем следующую функцию: $D_N(t) = 1 + 2(\cos t + \cos 2t + \ldots + \cos Nt)$.

Таким образом, мы можем переписать частичную сумму:

$$S_N(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)D_N(x-t)dt$$

Несложно увидеть в полученном свёртку. Пусть $f \in R[0, 2\pi]$ и продолжена как 2π-периодическая функция и далее везде будем так считать, тогда у нас будет свёртка двух 2π-периодических функций:

$$S_N(x) = \frac{1}{2\pi} f * D_N(x)$$

Когда эта свёртка сходится к f? Как мы уже знаем, $S_N(x)$ сходится к $f(x)$, когда $D_N(x)$ - дельтаобразная последовательность. Тем самым возникает вопрос о том, как устроено ядро Дирихле.

Теорема 1. (**свойства ядра Дирихле**)

1) D_N - гладкая 2π-периодическая и четная функция;

2) $\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} D_N(t)dt = 1$;

3) $D_N(t) = \begin{cases} 2N+1, & t = 2\pi m \\ \dfrac{\sin(N+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}, & t \neq 2\pi m \end{cases}$;

4) $\forall \delta \in (0, \pi)$, $\int\limits_\delta^{2\pi-\delta} D_N(t)dt = 2\int\limits_\delta^{\pi} D_N(t)dt \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$;

Rm: 2. Для того, чтобы объявить ядро Дирихле дельтаобразной последовательностью нехватает неотрицательности и этим свойством ядро как раз не обладает. Более того, свойства ядра следуют из-за знакопеременности (увидим, что следуют из леммы Римана). Более того, важное 4)-ое свойство как раз следует из осцилируемости ядра и поставив модуль уже будет не верно.

□

1) По определению функция Дирихле это конечная линейная комбинация косинусов и константы $\Rightarrow$ гладкая, 2π-периодическая из-за косинусов, четная также из-за косинусов;

2) $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} D_N(t)dt = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} dt + 2\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} (\cos t + \cos 2t + \ldots + \cos Nt)\, dt = \dfrac{2\pi}{2\pi} + 0 = 1;$

3) Если $t = 2\pi n$, то $D_N(t) = 1 + \underbrace{2\cdot 1 + 2\cdot 1 + \ldots + 2\cdot 1}_{N} = 1 + 2N$.

   Если $t \neq 2\pi n$, то домножим $D_N(t)$ на $\sin\frac{t}{2}$:

$$D_N(t)\sin\tfrac{t}{2} = \sin\tfrac{t}{2} + 2\sin\tfrac{t}{2}\cos t + \ldots + 2\sin\tfrac{t}{2}\cos Nt = \sin\tfrac{t}{2} - \sin\tfrac{t}{2} + \sin\tfrac{3t}{2} - \sin\tfrac{3t}{2} + \ldots +$$

$$+\sin\left(N - \tfrac{1}{2}\right)t - \sin\left(N - \tfrac{1}{2}\right)t + \sin\left(N + \tfrac{1}{2}\right)t \Rightarrow D_N(t) = \frac{\sin\left(N + \frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}$$

   где мы воспользовались следующим:

$$2\sin\tfrac{t}{2}\cos kt = \sin\left(\left(k + \tfrac{1}{2}\right)t\right) - \sin\left(\left(k - \tfrac{1}{2}\right)t\right)$$

4) Возьмем $\delta \in (0, \pi)$ и рассмотрим интеграл:

$$\int\limits_\delta^{2\pi-\delta} D_N(t)dt = \int\limits_\delta^{\pi} D_N(t)dt + \int\limits_\pi^{2\pi-\delta} D_N(t)dt = \int\limits_\delta^{\pi} D_N(t)dt + \int\limits_{-\pi}^{-\delta} D_N(t)dt =$$

$$= \int\limits_\delta^{\pi} D_N(t)dt - \int\limits_{-\pi}^{-\delta} D_N(-t)d(-t) = \int\limits_\delta^{\pi} D_N(t)dt - \int\limits_\pi^{\delta} D_N(s)ds = 2\int\limits_\delta^{\pi} D_N(t)dt$$

   где мы воспользовались периодичностью и четностью ядра Дирихле. Распишем интеграл явно, поскольку $t \neq 2\pi n$ на отрезке $[\delta, \pi]$, то:

$$2\int\limits_\delta^{\pi} D_N(t)dt = 2\int\limits_\delta^{\pi} \frac{1}{\sin\frac{t}{2}}\cdot \sin\left(N + \tfrac{1}{2}\right)t\, dt$$

   Заметим, что $\dfrac{1}{\sin\frac{t}{2}} \in C[\delta, \pi] \Rightarrow \dfrac{1}{\sin\frac{t}{2}} \in R[\delta, \pi]$, а $\sin\left(N + \frac{1}{2}\right)t = \sin\lambda t$, таким образом мы можем применить лемму Римана:

$$2\int\limits_\delta^{\pi} \frac{1}{\sin\frac{t}{2}}\cdot \sin\left(N + \tfrac{1}{2}\right)t\, dt \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

■

Перепишем частичные суммы ряда Фурье в более удобном виде:

$$S_N(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)D_N(x-t)dt = f * D_N(t) = D_N * f(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x-t)D_N(t)dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_0^{\pi} f(x-t)D_N(t)d + \int\limits_{\pi}^{2\pi} f(x-t)D_N(t)dt\right) = \frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_0^{\pi} f(x-t)D_N(t)d + \int\limits_{-\pi}^{0} f(x-t)D_N(t)dt\right)$$

где последнее равенство выполнено в силу периодичности $D_N(t)$. Сделаем замену $t \to -t$:

$$\frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_0^{\pi} f(x-t)D_N(t)d + \int\limits_{-\pi}^{0} f(x-t)D_N(t)dt\right) = \frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_0^{\pi} f(x-t)D_N(t)d + \int\limits_{0}^{\pi} f(x+s)D_N(s)ds\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\pi} (f(x-t)+f(x+t))D_N(t)dt$$

Теорема 2. (**принцип локализации Римана**) Пусть $f, g \in R[0, 2\pi]$, 2π-периодические и $f = g$ в окрестности точки $x_0 : \mathcal{U}(x_0)$, тогда ряды Фурье f и g сходятся и расходятся в точке x_0 одновременно и в случае сходимости их суммы совпадают.

Rm: 3. Отметим, что коэффициенты Фурье вычисляются на всём отрезке $[0, 2\pi]$, а оказывается, что для сходимости в конкретной точке это всё неважно. Важно лишь то, как ведёт себя функция рядом с точкой x_0 и совершенно неважно, как ведёт себя функция вне этой окрестности.

□ Рассмотрим частичные суммы в точке x_0. Пусть $\delta > 0$ таково, что $f = g$ на $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, тогда:

$$S_N^f(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\pi} (f(x_0-t)+f(x_0+t))D_N(t)dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\delta} (g(x_0-t)+g(x_0+t))D_N(t)dt + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\delta}^{\pi} (f(x_0-t)+f(x_0+t))D_N(t)dt$$

$$S_N^g(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\pi} (g(x_0-t)+g(x_0+t))D_N(t)dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\delta} (g(x_0-t)+g(x_0+t))D_N(t)dt + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\delta}^{\pi} (g(x_0-t)+g(x_0+t))D_N(t)dt$$

Заметим, что под интегралом, функция $(g(x_0-t)+g(x_0+t))D_N(t)$ на $[\delta, \pi]$ есть произведение интегрируемой функции и $\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)t$, делённой на $\sin\frac{t}{2}$:

$$t \in [\delta, \pi] \Rightarrow (g(x_0-t)+g(x_0+t))D_N(t) = \frac{1}{\sin\frac{t}{2}}\cdot(g(x_0-t)+g(x_0+t))\cdot\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)t$$

$$\frac{1}{\sin\frac{t}{2}} \in C[\delta,\pi] \Rightarrow \frac{1}{\sin\frac{t}{2}} \in R[\delta,\pi] \Rightarrow \frac{1}{\sin\frac{t}{2}}\cdot(g(x_0-t)+g(x_0+t)) \in R[\delta,\pi]$$

Аналогично для $(f(x_0-t)+f(x_0+t))D_N(t)$. Следовательно, можно применить лемму Римана:

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\delta}^{\pi}(f(x_0-t)+f(x_0+t))D_N(t)dt = 0$$

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\delta}^{\pi}(g(x_0-t)+g(x_0+t))D_N(t)dt = 0$$

В результате, мы получаем требуемое:

$$S_N^f(x_0) = S_N^g(x_0) + \underset{N\to\infty}{\overline{o}(1)}$$

■

Нам нужно какое-нибудь простое условие для определения сходимости в точке.

Теорема 3. (**достаточное условие сходимости в точке**) Пусть $f \in R[0,2\pi]$, 2π-периодическая функция и удовлетворяет условию Гёльдера в точке x_0:

$$\exists\,\mathcal{U}(x_0),\ \exists\, C>0,\gamma>0\colon \forall x\in\mathcal{U}(x_0),\ |f(x)-f(x_0)|\le C|x-x_0|^{\gamma}$$

Тогда $S_N(x_0)\to f(x_0)$.

Rm: 4. Можно ли просто потребовать непрерывности для сходимости? Ответ - нет, нельзя, но это не банальный ответ. Непрерывности не хватает, в то время как условие Гёльдера дает что-то чуть лучше, чем непрерывность.

□ По свойству ядра Дирихле верно, что $\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\pi} D_N(t)dt = \frac{1}{2}$, тогда:

$$|S_N(x_0)-f(x_0)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\underbrace{(f(x_0-t)+f(x_0+t)-2f(x_0))}_{=\psi(t)}D_N(t)dt\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\psi(t)D_N(t)dt\right| \le$$

$$\le \left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\delta}^{\pi}\frac{\psi(t)}{\sin\frac{t}{2}}\cdot\sin\left(N+\tfrac{1}{2}\right)t\,dt\right| + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\delta}\frac{|f(x_0-t)-f(x_0)|+|f(x_0+t)-f(x_0)|}{\sin\frac{t}{2}}dt$$

При фиксированном δ, по лемме Римана мы получим:

$$\lim_{N\to\infty}\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\delta}^{\pi}\frac{\psi(t)}{\sin\frac{t}{2}}\cdot\sin\left(N+\tfrac{1}{2}\right)t\,dt\right| = 0$$

Для второго интеграла воспользуемся условием теоремы:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\delta}\frac{|f(x_0-t)-f(x_0)|+|f(x_0+t)-f(x_0)|}{\sin\frac{t}{2}}dt \le \frac{2C}{2\pi}\int\limits_0^{\delta}\frac{t^{\gamma}}{\sin\frac{t}{2}}dt \le C\int\limits_0^{\delta}t^{\gamma-1}dt = \frac{C}{\gamma}\delta^{\gamma}$$

где мы воспользовались тем, что $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \sin x \geq \frac{2x}{\pi}$. Таким образом, мы получили справа оценку, которая не зависит от N. Возьмем $\varepsilon > 0$ тогда:

$$\exists\, \delta \in (0, \pi)\colon \frac{C}{\gamma}\delta^\gamma < \varepsilon$$

Фиксируем δ и устремляем $N \to \infty$, тогда мы получаем:

$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists\, N_0\colon \forall N > N_0,\, |S_N(x_0) - f(x_0)| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

■

Rm: 5. Условия теоремы выполняются для функции $f \in C^1(\mathcal{U}(x_0))$ (непрерывно дифференцируема).

Rm: 6. Если $f \in C(\mathbb{R})$, то ряд Фурье может не сходиться к f в данной точке x_0.

Упр. 1. Пусть f - 2π-периодическая, $f \in R[0, 2\pi]$ и $\exists\, C > 0,\, \gamma > 0,\, \exists \mathcal{U}(x_0)$:

$$\forall x \in \mathcal{U}(x_0),\, x < x_0,\, |f(x) - A_-| \leq C|x - x_0|^\gamma \wedge \forall x \in \mathcal{U}(x_0),\, x > x_0,\, |f(x) - A_+| \leq C|x - x_0|^\gamma$$

Тогда $S_N(x_0) \to \dfrac{A_- + A_+}{2}$.

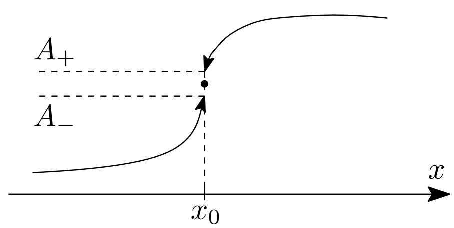

Рис. 2: Достаточный признак для разрывной функции.

Rm: 7. В данном случае функция может быть разрывна в точке x_0.

□ Доказательство практически идентично предыдущему, рассмотрим разность:

$$\left|S_N(x_0) - \frac{A_- + A_+}{2}\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\pi \left(f(x_0 - t) + f(x_0 + t) - A_- - A_+\right) D_N(t)dt\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\delta \frac{|f(x_0 - t) - A_-| + |f(x_0 + t) - A_+|}{\sin\frac{t}{2}}dt \leq \frac{C}{2\pi}\int\limits_0^\delta \frac{|x_0 - t - x_0|^\gamma + |x_0 + t - x_0|^\gamma}{\sin\frac{t}{2}}dt \leq \frac{C}{\gamma}\delta^\gamma$$

Фиксируем δ и устремляем $N \to \infty$, тогда мы получаем:

$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists\, N_0\colon \forall N > N_0,\, \left|S_N(x_0) - \frac{A_- + A_+}{2}\right| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

■

Ряды Фурье гладких функции

Как мы поняли, если функция непрерывно дифференцируема, то ряд Фурье к ней в точке сходится. А если функция гладкая (бесконечно гладкая), можно ли что-то сказать про сходимость ряда Фурье? Да, можно: чем глаже функция, тем лучше сходится ряд Фурье и наоборот, чем быстрее сходится ряд Фурье, тем функция как правило более гладкая.

Лемма 2. Пусть f - 2π-периодическая и $f \in C^1(\mathbb{R})$. Тогда:

$$a_n(f') = nb_n(f)$$

$$b_n(f') = -na_n(f)$$

□ Воспользуемся формулой интегрирования по частям:

$$a_n(f') = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f'(x)\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\left(f(x)\cos(nx)\right)\Big|_{x=0}^{2\pi} + \frac{\pi}{n}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx =$$

$$= n\cdot\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx = nb_n(f)$$

$$b_n(f') = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f'(x)\sin(nx)dx = \frac{1}{\pi}\left(f(x)\sin(nx)\right)\Big|_{x=0}^{2\pi} - \frac{\pi}{n}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx =$$

$$= -n\cdot\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx = -na_n(f)$$

■

Rm: 8. Отметим, что условие непрерывной дифференцируемости $f \in C^1(\mathbb{R})$ определено на всей прямой для простоты, чтобы не определеять концевую дифференцируемость.

Следствие 2. Пусть f - 2π-периодическая и $f \in C^m(\mathbb{R})$. Тогда:

1) $a_n(f) = \dfrac{\alpha_n}{n^m}$, $b_n(f) = \dfrac{\beta_n}{n^m}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 + |\beta_n|^2 < \infty$;

2) $\sup\limits_x |f(x) - S_N(x)| \le \overline{o}\left(N^{-m+\frac{1}{2}}\right)$;

Rm: 9. Таким образом, чем более гладкую функцию мы берём, тем быстрее стремятся к нулю её коэффициенты Фурье. И соответственно, чем быстрее убывают коэффициенты, тем лучше сходится соответствующий ряд.

□

1) Заметим, что по неравенству Бесселя будет верно:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|a_n\left(f^{(m)}\right)\right|^2 + \left|b_n\left(f^{(m)}\right)\right|^2 < \left\|f^{(m)}\right\|^2 < \infty$$

где последнее следует из условия (в силу достаточного условия сходимости ⇒ выполняется для гладкой функции). Рассмотрим коэффициенты по модулю и применим предыдущую лемму:

$$\left|a_n\left(f^{(m)}\right)\right| = n\left|b_n\left(f^{(m-1)}\right)\right| = n^2\left|a_n\left(f^{(m-2)}\right)\right| = \ldots = \begin{cases} n^m\left|a_n(f)\right|, & m = 2k \\ n^m\left|b_n(f)\right|, & m = 2k+1 \end{cases}$$

$$\left|b_n\left(f^{(m)}\right)\right| = n\left|a_n\left(f^{(m-1)}\right)\right| = n^2\left|b_n\left(f^{(m-2)}\right)\right| = \ldots = \begin{cases} n^m\left|b_n(f)\right|, & m = 2k \\ n^m\left|a_n(f)\right|, & m = 2k+1 \end{cases}$$

Следовательно, мы получаем, что $a_n(f)$ это либо $\dfrac{a_n\left(f^{(m)}\right)}{n^m}$, либо $\dfrac{b_n\left(f^{(m)}\right)}{n^m}$ с нужным знаком. Аналогично получим, что $b_n(f)$ будет оставшимся вариантом, следовательно:

$$a_n(f) = \frac{\alpha_n}{n^m},\ b_n(f) = \frac{\beta_n}{n^m}$$

Тогда по замечанию выше мы получим требуемое:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^2 + |\beta_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\left|a_n\left(f^{(m)}\right)\right|^2 + \left|b_n\left(f^{(m)}\right)\right|^2 < \infty$$

2) Мы знаем, что $S_N(x) \to f(x)$ поточечно, тогда рассмотрим разность:

$$|f(x) - S_N(x)| = \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty}|a_n\cos(nx)| + |b_n\sin(nx)| \leq$$

$$\leq \sum_{n=N+1}^{\infty}|a_n| + |b_n| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{|\alpha_n|}{n^m} + \frac{|\beta_n|}{n^m} \leq \left(\sqrt{\sum_{n=N+1}^{\infty}|\alpha_n|^2} + \sqrt{\sum_{n=N+1}^{\infty}|\beta|^2}\right)\cdot\sqrt{\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n^{2m}}}$$

где в последнем неравенстве мы воспользовались неравенством Коши-Буняковского:

$$x_1y_1 + \ldots + x_ny_n + \ldots \leq \sqrt{x_1^2 + \ldots x_n^2 + \ldots}\cdot\sqrt{y_1^2 + \ldots + y_n^2 + \ldots}$$

По доказанному выше, мы можем утверждать:

$$\lim_{N\to\infty}\left(\sqrt{\sum_{n=N+1}^{\infty}|\alpha_n|^2} + \sqrt{\sum_{n=N+1}^{\infty}|\beta|^2}\right) = 0$$

Оставшуюся сумму оценим через интеграл:

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n^{2m}} \leq \int_N^{\infty}\frac{1}{x^{2m}}dx = \frac{1}{2m-1}\cdot\frac{1}{N^{2m-1}} \Rightarrow \sqrt{\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n^{2m}}} \leq \frac{N^{-m+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2m-1}}$$

Следовательно, мы получаем:

$$\sup_x|f(x) - S_N(x)| \leq \left(\sqrt{\sum_{n=N+1}^{\infty}|\alpha_n|^2} + \sqrt{\sum_{n=N+1}^{\infty}|\beta|^2}\right)\cdot\frac{N^{-m+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2m-1}} = \overline{o}(1)\cdot\overline{o}\left(N^{-m+\frac{1}{2}}\right) = \overline{o}\left(N^{-m+\frac{1}{2}}\right)$$

■

Теорема 4. Пусть $f \in R[0,2\pi]$, 2π-периодическая и её коэффициенты Фурье устроены так:

$$a_n(f) = \frac{\alpha_n}{n^m},\ b_n(f) = \frac{\beta_n}{n^m},\ \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| + |\beta_n| < \infty$$

Тогда $\exists\, \widetilde{f} = f$ п.в., $\widetilde{f} \in C^m(\mathbb{R})$ и $\widetilde{f}$ - 2π-периодическая.

$\square$ Пусть $\widetilde{f}(x) = \lim\limits_{N\to\infty} S_N(x)$. Тригонометрический ряд Фурье сходится равномерно вместе со всеми почленными производными до m-го порядка. Продифференцируем k раз ($k \le m$) ряд:

$$\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos{(nx)} + b_n \sin{(nx)}\right)^{(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^k \cos\left(nx + \tfrac{\pi k}{2}\right) + b_n n^k \sin\left(nx + \tfrac{\pi k}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^k \cos\left(nx + \tfrac{\pi k}{2}\right) + b_n n^k \sin\left(nx + \tfrac{\pi k}{2}\right)\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} \left(|a_n| + |b_n|\right) n^k \le$$

$$\le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\alpha_n| + |\beta_n|}{n^m} \cdot n^k < \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| + |\beta_n| < \infty$$

Следовательно, по признаку Вейерштрасса у ряда вместе со всеми m производными есть равномерная сходимость и предел суммы будет m-раз непрерывно дифференцируемой функцией (см. лекцию 13 этого семестра) $\Rightarrow$ $\widetilde{f}(x) \in C^m(\mathbb{R})$ и 2π-периодическая функция, как равномерный предел 2π-периодических функций. Учитывая, что: $\sup\limits_x \left|\widetilde{f}(x) - S_N(x)\right| \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$ мы получим:

$$\int\limits_0^{2\pi} \left|S_N(t) - \widetilde{f}(t)\right|^2 dt \le \int\limits_0^{2\pi} \sup_x \left|S_N(x) - \widetilde{f}(x)\right|^2 dt = 2\pi \cdot \sup_x \left|S_N(x) - \widetilde{f}(x)\right|^2 \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

А поскольку одновременно с этим выполняется сходимость функции f к тригонометрическому ряду Фурье в среднеквадратическом смысле (по определению такого ряда), то верно:

$$\int\limits_0^{2\pi} \left|S_N(t) - f(t)\right|^2 dt \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

Следовательно, в пространстве $R[0,2\pi]$, $S_N \to f$ и $S_N \to \widetilde{f}$, а поскольку пространство - нормированное, то предел единственный $\Rightarrow f = \widetilde{f}$ почти всюду в $R[0,2\pi]$. $\blacksquare$

Упр. 2. Пусть $\sigma_N = \dfrac{S_0(X) + \ldots + S_N(x)}{N+1} = \int\limits_0^{2\pi} f(t) F_N(x-t)dt$, где $F_N(x)$ - ядро Фейеро. Проверить, что $F_N(t)$ - дельтаобразная последовательность 2π-периодических функций. Следовательно $\sigma_n \rightrightarrows f$, $f \in C$.

См.лекции

Упр. 3. Доказать, что ряд Фурье $f \in R[0, 2\pi]$ можно почленно интегрировать, то есть $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{N\to\infty} \int\limits_a^b S_N(t)dt$.

См.лекции (файл)