Арифметические действия с рядами

Теорема 1. Пусть ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся, тогда:

1) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \alpha \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$;

$\square$

1) Очевидно:
$$\sum_{n=1}^{N} \alpha \cdot a_n = \alpha \cdot \sum_{n=1}^{N} a_n = \alpha \cdot S_N \Rightarrow \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \alpha \cdot a_n = \alpha \cdot \lim_{N\to\infty} S_N$$
И таким образом, получаем требуемое;

2) Очевидно:
$$S_N = \sum_{n=1}^{N}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{N} a_n + \sum_{n=1}^{N} b_n = S_N^a + S_N^b$$
следовательно требуемое будет верно по арифметике пределов;

$\blacksquare$

Rm: 1. К сожалению, перемножение рядов между собой уже не будет так очевидно, как операции выше.

Теорема 2. (**Коши**) Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n| < \infty$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{i(k)} b_{j(k)}$ из их попарных произведений, где нумерация произведена каким угодно способом (то есть $k \to (i(k), j(k))$ - произвольная нумерация), сходится абсолютно и сумма ряда будет равна:
$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{i(k)} b_{j(k)} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right)$$

$\square$ **Идея**: Доказательство проведем в два этапа, сначала докажем абсолютную сходимость и далее можно будет рассматривать какие угодно частичные суммы. И таким образом, мы предъявим нумерацию и последовательность частичных сумм по которой будет очевидно, что они сходятся к произведению.

Обозначим $A = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $B = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ и рассмотрим следующую частичную сумму:
$$\sum_{k=1}^{N} \left|a_{i(k)} b_{j(k)}\right| = \sum_{k=1}^{N} \left|a_{i(k)}\right| \cdot \left|b_{j(k)}\right| \le \left(\sum_{n=1}^{M(i,N)} |a_n|\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{M(j,N)} |b_n|\right)$$
где $M(i,N) = \max\{i(k),\, k \le N\}$, $M(j,N) = \max\{j(k),\, k \le N\}$. Неравенство верно, поскольку в его правой части будут все члены, которые есть в его левой части. Поскольку ряды сходятся абсолютно,

значит эти частичные суммы ограничены (можно сказать, что суммами рядов):

$$\left(\sum_{n=1}^{M(i,N)} |a_n|\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{M(j,N)} |b_n|\right) \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right) < \infty$$

Таким образом, частичные суммы исходного ряда ограничены $\Rightarrow$ для знакопостоянных рядов это означает его сходимость:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|a_{i(k)} b_{j(k)}\right| < \infty$$

Теперь мы можем нумеровать ряды любым образом. Сделаем это так, чтобы за N^2 шагов, пройти все элементы квадрата $\{(i,j)\colon 1 \leq i \leq N,\ 1 \leq j \leq N\}$. Или по-другому:

$$\{(i(k), j(k)) \mid k = 1, \ldots, N^2\} = \{(i,j) \mid 1 \leq i, j \leq N\}$$

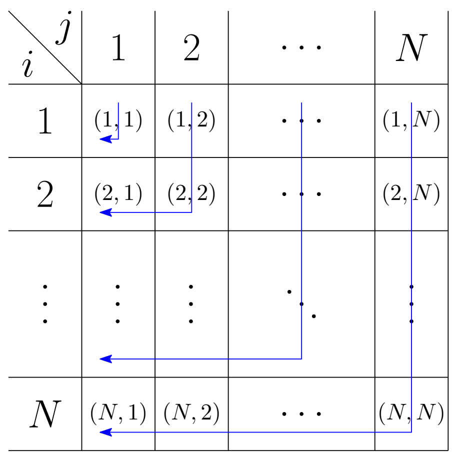

Рис. 1: Нумерация N^2 элементов.

Тогда, частичная сумма ряда из попарных произведений будет равна:

$$S_{N^2} = \sum_{i,j \leq N} a_i b_j = \left(\sum_{i=1}^{N} a_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{N} b_j\right) \to A{\cdot}B$$

Поскольку сумма ряда сходится, то существует предел S_N, а так как предел подпоследовательности равен пределу последовательности, то $S_N \to A{\cdot}B$. ■

Можно ли ослабить требование абсолютной сходимости ряда? Оказывается, что можно.

Теорема 3. (**Мертенс**) Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$, где:

$$c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1$$

сходится к произведению рядов $A = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $B = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = A{\cdot}B = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right)$$

Рассмотрим с точки зрения нумерации, каким образом получаются c_n? На самом деле, это просто движение по неглавным диагоналям множества $\{(a_i, b_j) \mid 1 \le i, j \le N\}$:

$i \backslash j$	1	2	$\cdots$	N
1	$(1,1)$	$(1,2)$	$\cdots$	$(1,N)$
2	$(2,1)$	$(2,2)$	$\cdots$	$(2,N)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
N	$(N,1)$	$(N,2)$	$\cdots$	(N,N)

Рис. 2: Нумерация элементов $a_i b_j$ в элементе c_n.

Например, $c_1 = a_1 b_1$, $c_2 = a_2 b_1 + a_1 b_2$, $c_3 = a_3 b_1 + a_2 b_2 + a_1 b_3$ и так далее.

Rm: 2. Когда нет абсолютной сходимости, это естественно ожидать, что становится важным как складывать слагаемые и надо найти правильный способ как это делать. Почему именно такой способ получился? Возьмем два многочлена и перемножим между собой:

$$(a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \ldots)\cdot(b_1 + b_2 x + b_3 x^3 + \ldots)$$

раскроем скобки и приведём подобные:

$$a_1 b_1 + (a_2 b_1 + a_1 b_2)x + (a_3 b_1 + a_2 b_2 + a_1 b_3)x^2 + \ldots$$

Получается, что мы как-будто взяли ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n x^{n-1}$, а затем перемножили их как многочлены и привели подобные.

$\square$ Рассмотрим частичную сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ и подставим в неё значения c_n:

$$c_1 + c_2 + \ldots + c_N = a_1 b_1 + a_2 b_1 + a_1 b_2 + a_3 b_1 + a_2 b_2 + a_1 b_3 + \ldots + a_N b_1 + \ldots + a_1 b_N$$

Сгруппируем элементы при a_i, тогда получим:

$$c_1 + c_2 + \ldots + c_N = a_1(b_1 + b_2 + \ldots + b_N) + a_2(b_1 + \ldots + b_{N-1}) + \ldots + a_n b_1$$

Или, введя обозначение $B_k = b_1 + \ldots + b_k$, мы получим следующий вид:

$$c_1 + c_2 + \ldots + c_N = a_1 B_N + a_2 B_{N-1} + \ldots a_N B_1$$

Мы знаем, что по условию $B_N \to B$, то есть $B_n = B + \beta_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} = 0$. Подставим это выражение в частичную сумму рассматриваемого ряда и тогда получим:

$$\sum_{n=1}^{N} c_n = B\cdot(a_1 + \ldots + a_N) + a_1 \beta_N + a_2 \beta_{N-1} + \ldots + a_N \beta_1$$

Из условия мы знаем:

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} a_n = A \Rightarrow \lim_{N\to\infty} B\cdot(a_1+\ldots+a_N) = B\cdot A$$

Рассмотрим оставшуюся часть частичной суммы:

$$a_1\beta_N + a_2\beta_{N-1} + \ldots + a_N\beta_1$$

Если мы докажем что она стремится к нулю, то мы получим требуемое. С одной стороны β_n - маленькие, поскольку стремтся к нулю, но вплоть до какого-то номера, они маленькими не явлются. Соответствено часть этих слагаемых будет мала за счёт абсолютной сходимости ряда из a_n. Оценим эту сумму по частям. Сначала рассмотрим хвостовую часть, затем начальную.

Из абсолютной сходимости имеем $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n| < \infty$, тогда:

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\, M\colon \sum_{n\geq M}|a_n| < \varepsilon$$

Пусть мы нашли этот номер M. Поскольку β_n стремятся к нулю $\Rightarrow$ они заведомо ограниченны, тогда:

$$|a_{M+1}\beta_{M-N} + \ldots + a_N\beta_1| \leq C\cdot\sum_{n\geq M}|a_n| < C\varepsilon$$

Зафиксировав номер M и оценива хвостовую часть суммы, мы хотим теперь оценить её начало:

$$|a_1\beta_N + a_2\beta_{N-1} + \ldots + a_M\beta_{N-M+1}|$$

Поскольку мы ещё не зафиксировали номер N и последовательность β_n стремится к нулю, то возьмем уже зафиксированное $\varepsilon > 0$ и найдем номер N_0 такой, что:

$$\exists\, N_0\colon \forall N > N_0,\ |\beta_{N-M+1}| < \frac{\varepsilon}{M\cdot\max\limits_{k\leq M}|a_k| + 1}$$

Тогда будет верно:

$$\forall N > N_0,\ |a_1\beta_N + \ldots + a_M\beta_{N-M+1}| < \frac{\varepsilon\cdot M\cdot\max\limits_{k\leq M}|a_k|}{M\cdot\max\limits_{k\leq M}|a_k| + 1} < \varepsilon$$

Следовательно, получаем требуемое:

$$\forall N > N_0,\ |a_1\beta_N + \ldots + a_N\beta_1| < (C+1)\varepsilon$$

∎

Пример: Рассмотрим произведение следующих рядов (условно сходящихся):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \Rightarrow a_k b_{n-k+1} = \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\cdot\frac{(-1)^{n-k+1}}{\sqrt{n-k+1}} = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{k(n-k+1)}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_n = a_1b_n + \ldots + a_nb_1 = (-1)^{n+1}\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k(n-k+1)}}\right)$$

Как понять, сходится ли этот ряд? Для этого нужно рассмотреть $k(n-k+1) = k((n+1)-k) = f(k)$. Следовательно $f(k)$ вогнутая и достигает максимума в точке $k = \dfrac{n+1}{2}$. Тогда:

$$k(n-k+1) \le \frac{n+1}{2}\left(\frac{n+1}{2}\right) = \frac{(n+1)^2}{4} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{k(n-k+1)}} \ge \frac{2}{n+1}$$

Таким образом, мы получаем следующие неравенства из рядов:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k(n-k+1)}} \ge \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{n+1} = \frac{2n}{n+1} \ge 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} c_n \ne 0$$

То есть, не выполняется необходимый признак сходимости ряда $\Rightarrow$ ряд расходится. Из этого мы делаем вывод, что просто так перемножать условно сходящиеся ряды нельзя. Но если всё-таки такое перемножение сойдется, то обязательно к произведению. О чём говорит следующая теорема.

Теорема 4. (**Абель**) Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится, где:

$$c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1$$

то последний ряд сходится к произведению первых рядов $A = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $B = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = A \cdot B$$

$\square$ Аналогично доказательству предыдущей теоремы, возьмем частичную сумму ряда из c_n:

$$C_n = c_1 + \ldots + c_n = a_1 B_n + \ldots + a_n B_1$$

Просуммируем все частные суммы и разделим на n:

$$\frac{C_1 + \ldots + C_n}{n} = \frac{a_1 B_1 + a_2 B_1 + a_1 B_2 + \ldots + a_1 B_n + \ldots + a_n B_1}{n} = \frac{A_1 B_n + A_2 B_{n-1} + \ldots + A_n B_1}{n}$$

Мы знаем, что ряд из c_n сходится $\Rightarrow$ C_n стремится к некоторому пределу. По теореме Чезаро (доказывается в курсе Солодова за 1-ый семестр), если последовательность сходится, то арифметическое среднее её членов также сходится к этому пределу:

$$\lim_{n\to\infty} C_n = C \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{C_1 + \ldots + C_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{A_1 B_n + \ldots + A_n B_1}{n} = C$$

А поскольку $A_n \to A$ и $B_n \to B$, то нам нужно показать, что:

$$\frac{A_1 B_n + \ldots + A_n B_1}{n} \to A \cdot B$$

Рассмотрим следующую разность:

$$\frac{A_1 B_n + \ldots + A_n B_1}{n} - AB = \frac{A_1(B_n - B) + \ldots + A_n(B_1 - B) + B(A_1 + \ldots + A_n) - nAB}{n} =$$

$$= \frac{A_1(B_n - B) + \ldots + A_n(B_1 - B)}{n} + B\left(\frac{A_1 + \ldots + A_n}{n} - AB\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} B\left(\frac{A_1 + \ldots + A_n}{n} - AB\right) = 0$$

Теперь нам необходимо оценить левую дробь выражения выше. Поскольку $(B_n - B)$ стремятся к нулю, то будет верно:

$$\forall\varepsilon > 0,\, \exists N\colon \forall n > N,\, |B_n - B| < \varepsilon$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$, найдем нужное N и тогда оценим одну часть рассматриваемой дроби:

$$\left|\frac{A_1(B_n - B) + \ldots + A_{n-N}(B_{N+1} - B)}{n}\right| \leq \varepsilon\cdot\frac{|A_1| + \ldots + |A_n|}{n} \leq \varepsilon C$$

где последнее верно в силу ограниченности сходящегося среднего арифметического из A_n. Зафиксировав N и заметив, что все оставшиеся слагаемые ограничены, будет верно:

$$\left|\frac{A_{n-N+1}(B_N - B) + \ldots + A_n(B_1 - B)}{n}\right| \leq \frac{NC}{n} \to 0 \Rightarrow$$

Таким образом получим:

$$\forall\varepsilon > 0,\, \exists N\colon \forall n > N,\, \left|\frac{A_1B_n + \ldots + A_nB_1}{n} - AB\right| < \varepsilon$$

■

Несобственный интеграл

Пусть f определена на $[a,b)$ и $\forall c \in [a,b)$ функция f интегрируема по Риману на отрезке $[a,c]$. Определим функцию:

$$F(c) = \int\limits_a^c f(x)dx$$

Опр: 1. Если существует предел $\lim\limits_{c\to b-} F(c)$, то он называется несобственным интегралом Римана по полуинтервалу $[a,b)$ и обозначается следующим образом:

$$\lim_{c\to b-} F(c) = \int\limits_a^b f(x)dx$$

при этом говорят, что несобственный интеграл сходится.

Rm: 3. Зачем придумывать такую конструкцию? Есть случаи, когда возникают выражения к которым интеграл Римана неприменим, например для неограниченных выражений.

Пример: Рассмотрим интеграл:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^p}$$

Этот интеграл перестает быть интегралом Римана при $p > 0$, поскольку функция под интегралом перестает быть ограниченной на $[0,1]$. Естественный подход - отойти от особенности:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{c\to 0+} \int\limits_c^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{c\to 0+} \begin{cases} p=1, & -\ln c \\ p\neq 1, & \left.\dfrac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_c^1 = \dfrac{1}{-p+1} - \dfrac{c^{-p+1}}{-p+1} \end{cases} = \begin{cases} \infty, & p=1 \\ \dfrac{1}{-p+1}, & -p+1>0 \\ \infty, & -p+1<0 \end{cases}$$

Значит этот интеграл сходится при $p < 1$.

Rm: 4. Есть другая ситуация в которой появляется необходимость в несобственном интеграле: когда промежуток интегрирования стал не отрезком, а, например, лучом. Такая ситуация также не покрывается интегралом Римана.

Пример: Рассмотрим интеграл:

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$$

Здесь подход аналогичен предыдущему примеру:

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{c\to +\infty} \int\limits_1^c \frac{dx}{x^p} = \lim_{c\to +\infty} \begin{cases} p=1, & -\ln c \\ p\neq 1, & \left.\dfrac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_1^c = \dfrac{c^{-p+1}}{-p+1} - \dfrac{1}{-p+1} \end{cases} = \begin{cases} \infty, & p=1 \\ \infty, & -p+1>0 \\ \dfrac{1}{p-1}, & -p+1<0 \end{cases}$$

Таким образом, интеграл сходится только, если $p > 1$.

Rm: 5. В некоторых текстах эти интегралы разделяют на интегралы 1-го и 2-го рода. Мы этого делать не будем.

Утв. 1. Если f интегрируема по Риману на $[a, b]$, то f интегрируема по Риману в несобственном смысле на $[a, b)$ и интегралы совпадают:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to b-} F(c)$$

□ Функция $F(c) = \int_a^c f(x)dx$ - непрерывна на $[a, b]$. Следовательно:

$$\lim_{c \to b-} F(c) = F(b) = \int_a^b f(x)dx$$

■

Rm: 6. Более того, функция $F(c)$ - Липшецова, см. лекцию 23 за прошлый семестр.

Поскольку несобственный интеграл это предел, то всё, что можно достичь предельным переходом, переносится с обычных интегралов на несобственные. Например, линейность.

Линейность: Если f и g интегрируемы в несобственном смысле на $[a, b)$, то $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, линейная комбинация этих функций $\alpha f + \beta g$ также интегрируема на $[a, b)$. И верно следующее:

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

□ Пусть $a < c < b$, тогда по свойству интеграла Римана будет верно:

$$\int_a^c (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int_a^c f(x)dx + \beta \int_a^c g(x)dx$$

Переходя к пределу и воспользовавшись арифметикой предела функции, мы получим требуемое. ■