Применение формулы замены переменной

Теорема Брауэра

Теорема 1. (**Брауэра**) Если f - непрерывное отображение замкнутого шара: $\overline{\mathcal{B}}(0,1) \to \overline{\mathcal{B}}(0,1)$, то:

$$\exists\, x_0 \in \overline{\mathcal{B}}(0,1)\colon\ f(x_0) = x_0$$

$\square$ (Продолжение доказательства):

$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ - гладкое отображение, $f\colon \overline{\mathcal{B}} \to \overline{\mathcal{B}}$. Предположим, что $f(x) \neq x$ на $\overline{\mathcal{B}}$, тогда проведём луч через $f(x)$ и x до пересечения с границей:

$$F(x) = x + \lambda(x)\cdot(x - f(x)), \quad \lambda(x) = \frac{-\langle x, x - f(x)\rangle + \sqrt{\langle x, x - f(x)\rangle^2 + (1 - \|x\|^2)\cdot\|x - f(x)\|^2}}{\|x - f(x)\|^2}$$

(1) $F(x)$ - гладкое отображение в $\mathcal{B}(0, 1+\delta)$, $\delta > 0$;

(2) $\|F(x)\| = 1$, то есть: $F\colon \overline{\mathcal{B}}(0,1) \to \partial\overline{\mathcal{B}}(0,1)$;

(3) (Ретракция): $\forall x \in \partial\mathcal{B}(0,1)$, $F(x) = x$;

Идея: Из того, что $f(x) \neq x$, мы построим такое отображение $F(x)$, а затем с помощью ФЗП поймем, что такого отображения не существует и придём к противоречию. То, что такого отображения не существует и называется леммой о барабане/леммой об отсутствии ретракции шара на свою границу. Нам надо понять, что можно сказать про подкоренное выражение:

$$\psi(x) = \underbrace{\langle x, x - f(x)\rangle^2}_{\geq 0} + \underbrace{(1 - \|x\|^2)}_{\geq 0,\, \forall x \in \overline{\mathcal{B}}(0,1)} \cdot \underbrace{\|x - f(x)\|^2}_{\neq 0,\, \forall x \in \mathcal{B}(0,1+\delta)} \geq 0$$

Мы показали, что $\psi(x) > 0$ в $\mathcal{B}(0, 1+\delta)$ и таким образом, мы проверили корректность всех трех свойств, ожидаемых от функции $F(x)$.

Докажем, что такого $F(x)$ не существует и придём к противоречию. Возьмем $t \in [0,1]$ и рассмотрим функцию (линейная гомотопия тождественного отображения и отображения F):

$$F_t(x) = (1-t)x + tF(x)$$

Заметим, что $F_t(x)$ в окрестности $\mathcal{B}(0, 1+\frac{\delta}{2})$ - гладкое отображение и $\exists\, t_0 \in (0,1)\colon \forall t \in [0, t_0]$ выполнено:

1) $F_t(x)$ - инъекция на $\mathcal{B}(0, 1+\frac{\delta}{2})$;

2) $\det F_t' > 0$ на окрестности $\mathcal{U}\colon \overline{\mathcal{B}}(0,1) \subset \mathcal{U} = \mathcal{B}(0, 1+\frac{\delta}{2})$. Рассмотрим функцию: $(t, x) \mapsto \det F_t'(x)$, она непрерывна на компакте $[0,1] \times \mathcal{B}(0, 1+\frac{\delta}{2}) \Rightarrow$ равномерно непрерывна на нём. Заметим, что $\det F_0'(x) = 1$ и из равномерной непрерывности верно:

$$\exists\, t_0\colon t \in [0, t_0],\ \forall x \in \overline{\mathcal{B}}(0, 1+\tfrac{\delta}{2}),\ |\det F_t'(x) - \det F_0'(x)| \leq \tfrac{1}{2} \Rightarrow \forall x \in \overline{\mathcal{B}}(0, 1+\tfrac{\delta}{2}),\ \det F_t'(x) \geq \tfrac{1}{2}$$

Пусть $t \in [0, t_0]$, тогда $F_t(\mathcal{B}(0, 1+\frac{\delta}{2}))$ - открытое множество и $F_t\colon \mathcal{B}(0, 1+\frac{\delta}{2}) \to F_t(\mathcal{B}(0, 1+\frac{\delta}{2}))$ это диффеоморфизм: Возьмем шар $\mathcal{B}(0, 1+\frac{\delta}{2})$ и точку a в нём, её образ - $F_t(a)$, матрица якоби в этой точке $F_t'(a)$ - невырождена $\Rightarrow$ по теореме об обратной функции существуют окрестности $\mathcal{V}$ и $\mathcal{W}$ между которыми F_t устанавливает диффеоморфизм $\Rightarrow$ в образе F_t' лежит образ целой окрестности из шара, следовательно $F_t(a)$ - внутренняя точка $F_t(\mathcal{B}(0, 1+\frac{\delta}{2}))$.

1) Все точки отображения внутренние $\Rightarrow$ образ это открытое множество;

2) Отображение $F_t(x)$ инъективно, а также оно сюръективно по построению $\Rightarrow$ это биекция и локально у каждой точки в образе есть окрестность на которой обратная является диффеоморфизмом $\Rightarrow$ непрерывно дифференцируемая в обе стороны биекция $\Rightarrow$ диффеоморфизм;

Рассмотрим шар $\mathcal{B} = \mathcal{B}(0,1)$ - открытый шар, $\forall x \in \mathcal{B}$, $\|x\| < 1$, рассмотрим его образ:

$$\|x\| < 1 \Rightarrow \|F_t(x)\| \leq \underbrace{(1-t)}_{>0} \cdot \underbrace{\|x\|}_{<1} + t\cdot\|F(x)\| = (1-t)\cdot\|x\| + t < 1 - t + t < 1 \Rightarrow F_t(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}$$

Так как F_t - диффеоморфизм, то $F_t(\mathcal{B})$ - открытое множество в $\mathcal{B}$. Кроме того, $F_t(\mathcal{B})$ - замкнуто в $\mathcal{B}$ (индуцированная топология $\mathcal{B}$): возьмем последовательность точек $y_n \in F_t(\mathcal{B})\colon y_n \to y \in \mathcal{B}$ и проверим, что $y \in F_t(\mathcal{B})$. Поскольку F_t - диффеоморфизм, то возьмем $x_n = F_t^{-1}(y_n) \in \mathcal{B}$, тогда по непрерывности обратной функции F_t^{-1} будет верно: $x_n \to x = F_t^{-1}(y)$. Если x окажется на границе, тогда $\|x\| = 1 \Rightarrow$ очевидно, что: $\|x\| \leq 1$. Предположим, что $\|x\| = 1$, тогда:

$$\|x\| = 1 \Rightarrow F(x) = x \Rightarrow F_t(x) = (1-t)x + tx = x \Rightarrow \|F_t(x)\| = \|x\| = 1$$

С другой стороны, $\|F_t(x)\| = \|y\| < 1$, поскольку $y \in \mathcal{B} \Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow \|x\| < 1 \Rightarrow y \in F_t(\mathcal{B})$. Итого:

$$F_t(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B},\ F_t(\mathcal{B}) \neq \varnothing,\ F_t(\mathcal{B}) \text{ - открыто и замкнуто в } \mathcal{B}$$

Поскольку $\mathcal{B}$ - связно, то $F_t(\mathcal{B}) = \mathcal{B}$, так как $F_t(\mathcal{B}) \neq \varnothing$. Рассмотрим объем $\mathcal{B}$:

$$|\mathcal{B}| = |F_t(\mathcal{B})| \overset{\text{ФЗП}}{=} \int\limits_{\mathcal{B}} \underbrace{\det F_t'(x)}_{>0} dx = P(t) \text{ - многочлен по } t$$

где $F_t'(x) = (1-t)\mathrm{I} + tF'(x) \Rightarrow$ определитель $F_t'(x)$ даст многочлен от t по формуле определителя. Заметим, что на отрезке $[0, t_0]$, $P(t) \equiv |\mathcal{B}| > 0$, тогда $P(t) \equiv |\mathcal{B}| > 0$, $\forall t$. Рассмотрим $P(1)$:

$$P(1) = \int\limits_{\mathcal{B}} \det F_1'(x)dx = \int\limits_{\mathcal{B}} \det F'(x)dx = \int\limits_{\mathcal{B}} 0dx = 0$$

где последнее верно поскольку: $F\colon \overline{\mathcal{B}}(0,1) \to \partial\overline{\mathcal{B}}(0,1)$ и если $\exists\, x \in \mathcal{B}\colon \det F'(x) \neq 0$, то существует локальный диффеоморфизм $\Rightarrow$ в образе есть целая открытая окрестность $\Rightarrow$ у точки в образе целый шар лежит в этом образе, но у границы шара внутренних точек нет $\Rightarrow \det F'(x) = 0$, $\forall x \in \mathcal{B}$. Итого получаем $P(1) = 0 \Rightarrow$ противоречие.

Пусть теперь $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ - непрерывное отображение и $f\colon \overline{\mathcal{B}} \to \overline{\mathcal{B}}$. Чтобы приблизить функцию гладкими - возьмем свёртки $\Rightarrow$ возьмем гладкую функцию ω с компактным носителем на $\mathbb{R}^m$ (то есть $\omega \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ и $\omega \equiv 0$ вне некоторого бруса $[-c, c]^m$, см. лекцию 25 семестра 3) такую, что:

$$\omega \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m),\ \omega \geq 0,\ \int \omega dx = 1,\ \omega_{\frac{1}{m}}(x) = m^n\cdot\omega(mx)$$

где $\omega_{\frac{1}{m}}(x)$ - δ-образная последовательность, обозначим I - брус, содержащий носитель ω, тогда:

$$f_m = f * \omega_{\frac{1}{m}}, \quad f_m(x) = \int\limits_{\mathrm{I}} f(x-y)\omega_{\frac{1}{m}}(y)dy$$

Мы знаем, что f_m - гладкая, $f_m \rightrightarrows f$ на каждом брусе, в том числе на тех, что содержат $\overline{\mathcal{B}}$. Одновременно заметим, что если $f\colon \overline{\mathcal{B}} \to \overline{\mathcal{B}}$, то совершенно не ясно, что $f_n\colon \overline{\mathcal{B}} \to \overline{\mathcal{B}} \Rightarrow$ рассмотрим:

$$\varepsilon_m = \max_{\overline{\mathcal{B}}} \|f(x) - f_m(x)\| \to 0 \Rightarrow g_m(x) = \frac{f_m(x)}{1+\varepsilon_m} \Rightarrow |g_m(x)| \leq 1,\, \forall x \in \overline{\mathcal{B}}$$

где g_m - гладкие, оценим числитель:

$$|f_m| \leq |f| + |f - f_m| \leq 1 + \varepsilon_m \Rightarrow |g_m(x)| \leq \frac{1+\varepsilon_m}{1+\varepsilon_m} = 1 \Rightarrow g_m\colon \overline{\mathcal{B}} \to \overline{\mathcal{B}}$$

$$g_m \overset{\overline{\mathcal{B}}}{\rightrightarrows} f \Rightarrow \exists\, x_m\colon g_m(x_m) = x_m \in \overline{\mathcal{B}} \Rightarrow \exists\, m_k\colon x_{m_k} \to x_0 \in \overline{\mathcal{B}}$$

Упр. 1. Вспомнить и повторить утверждения про свёртки из прошлого семестра.

Упр. 2. Доказать, что $g_{m_k}(x_{m_k}) \to f(x_0) \Rightarrow x_0 = f(x_0)$.

■

Теорема о еже

Теорема 2. (**О еже**) Пусть S^{2n} - единичная сфера с центром в нуле в $\mathbb{R}^{2n+1}$ и $V(x) = (V_1(x), \dots, V_{2n+1}(x))$ это гладкое (непрерывно дифференцируемое) в окрестности S^{2n} векторное поле:

$$\forall x \in S^{2n},\ \langle x, V(x)\rangle = 0$$

то есть это вектора, лежащие в касательном пространстве к сфере (ортогональны вектору нормали) или по-другому, это касательное векторное поле. Тогда существует особая точка:

$$\exists\, x_0 \in S^{2n} \colon V(x_0) = 0$$

Rm: 1. Аналогичная задача существует в дифференциальных уравнениях: каждому векторному полю соответствует решение системы для некоторой траектории $x(t)$:

$$\dot{x} = V(x),\ x_0 \colon V(x_0) = 0$$

тогда x_0 это стационарная точка.

Rm: 2. Теорема называется теоремой о еже, так как говорят, что ежа невозможно причесать. Возьмем любое векторное поле F и вычтем из него проекцию на x:

$$V(x) = F(x) - \langle x, F(x)\rangle\, x$$

Это векторное поле уже является касательным $\Rightarrow$ обязательно есть точка x_0, где:

$$F(x_0) = c{\cdot}x_0$$

то есть такая точка, что вектор сонаправлен с $x \Leftrightarrow$ волос никак не ложиться.

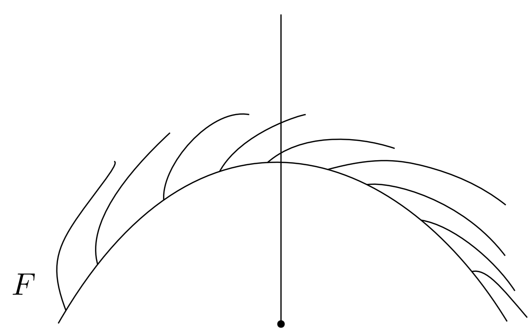

Рис. 1: Невозможность причесать ежа.

Пример касательного векторного поля: Рассмотрим S^1, тогда касательным векторным полем можно рассматривать: $V(x) = (x_2, -x_1) \Rightarrow$ если посчитать его в точках сферы, то $\langle x, V(x)\rangle = 0$.

$\square$ (От противного) Пусть $V(x) \neq 0$ на $S^{2n} \Rightarrow V(x) \neq 0$ в окрестности S^{2n}, тогда рассмотрим новое векторное поле, получаемое нормировкой:

$$W(x) = \frac{V(x)}{\|V(x)\|} \colon \mathbb{R}^{2n+1} \to \mathbb{R}^{2n+1}$$

это гладкое в окрестности S^{2n} отображение из $\mathbb{R}^{2n+1}$ в $\mathbb{R}^{2n+1}$. Рассмотрим функцию:

$$g(x) = \|x\| \cdot W\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$$

это гладкая функция на $\mathbb{R}^{2n+1} \setminus \{0\}$ (можно доопределить до непрерывной в нуле). Рассмотрим функцию:

$$F_t(x) = x + tg(x),\ t \in [0, 1]$$

для каждого t это гладкая функция в окрестности S^{2n}. Рассмотрим множество:

$$V_{a,b} = \{x \colon a < \|x\| < b\},\ 0 < a < b < 1$$

это есть ничто иное, как сферический слой.

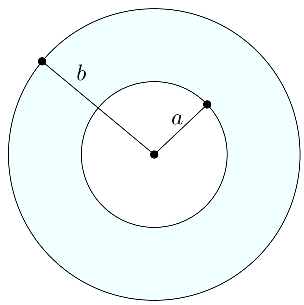

Рис. 2: Сферический слой.

Пусть верно: $0 < a_1 < a < b < b_1 < 1$, тогда $\exists\, t_0 \colon \forall t \in [0, t_0]$ такое, что выполнены два пункта:

1) F_t на $\overline{V}_{a_1,b_1}$ - инъекция (по аналогии с теоремой Брауэра):

$$\forall x, z \in \overline{V}_{a_1,b_1} \colon \|F_t(x) - F_t(z)\| \geq \|x - z\| - t\|g(x) - g(z)\| \geq (1 - t \cdot L)\|x - z\|$$

где неравенство снова следует из гладкости g, далее выбираем t так, чтобы последнее выражение было полжительным $\Rightarrow$ получаем инъективность;

2) $\det(F_t') > 0$ на $\overline{V}_{a_1,b_1}$ (по аналогии с теоремой Брауэра): $(t, x) \to \det(F_t'(x))$ - непрерывна на $\overline{V}_{a_1,b_1} \Rightarrow$ равномерно непрерывна, $\det(F_0'(x)) = 1 \Rightarrow$ по аналогии $\exists\, t_0$, когда $\det(F_{t_0}'(x)) > \frac{1}{2}$;

Тогда, $F_t(V_{a_1,b_1})$ - открытое множество и $F_t \colon V_{a_1,b_1} \to F_t(V_{a_1,b_1})$ - диффеоморфизм (проверка такая же, как в теореме Брауэра). Рассмотрим образ кольца: $F_t(V_{a,b})$, чтобы понять что это мы рассмотрим образ сферы, радиуса $r \colon a < r < b$: $\{x \colon \|x\| = r\} = S_r$. Заметим, что:

$$\langle x, V(x)\rangle = 0 \Rightarrow \langle x, W(x)\rangle = 0 \Rightarrow \langle x, g(x)\rangle = 0$$

следовательно x и $tg(x)$ - перпендикулярны $\Rightarrow$ по теореме Пифгора будет верно:

$$\|x\| = r \Rightarrow \|F_t(x)\|^2 = \|x\|^2 + t^2 \cdot \|g(x)\|^2 = r^2 + t^2 \cdot \|x\|^2 = (1 + t^2)r^2 \Rightarrow F_t(S_r) \subset S_{r\sqrt{1+t^2}}$$

F_t это диффеоморфизм $\Rightarrow$ образ компакта - компакт $\Rightarrow F_t(S_r)$ это компакт, в частности, это замкнутое множество в $S_{r\sqrt{1+t^2}}$. С другой стороны: $F_t(S_r)$ это открытое множество в $S_{r\sqrt{1+t^2}}$: пусть мы взяли некоторую точку $a \in S_r$, рассмотрим её образ $F_t(a)$, поскольку F_t это диффеоморфизм, то существует окрестность точки a в $\mathbb{R}^{2n+1}$ и окрестность точки $F_t(a)$ в $\mathbb{R}^{2n+1}$ между которыми F_t осуществляет диффеоморфизм.

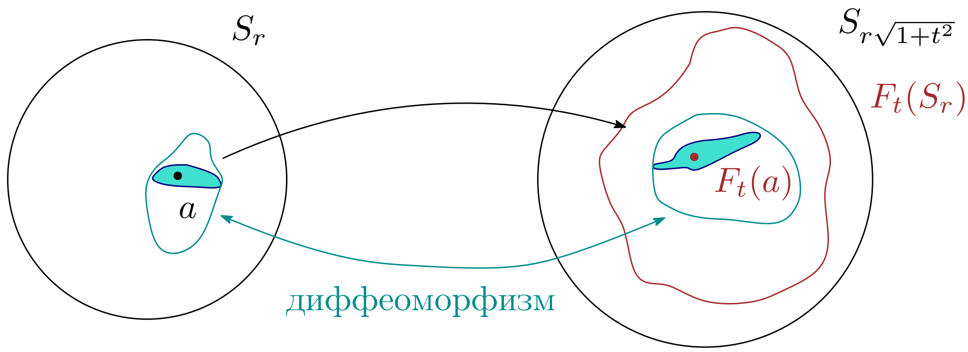

Рис. 3: Диффеоморфизм.

Поскольку диффеоморфизм переводит внутренние точки во внутренние, внешние во внешние, то пересечения этих окрестностей со сферами переходят друг в друга. Но пересечение открытого множества со сферой это и есть открытое множество на этой сфере $\Rightarrow$ в образе, $F_t(a)$ лежит с некоторой окрестностью. Сфера связное множество, тогда:

$$F_t(S_r) = S_{r\sqrt{1+t^2}} \Rightarrow F_t(V_{a,b}) = V_{\sqrt{1+t^2}a,\sqrt{1+t^2}b}$$

При маленьких t, используем ФЗП:

$$|V_{\sqrt{1+t^2}a,\sqrt{1+t^2}b}| = (1+t^2)^{\frac{2n+1}{2}} \cdot |V_{a,b}| = \int\limits_{V_{a,b}} \det\left(F_t'(x)\right)dx = P(t)$$

где последнее верно, так как $x \mapsto \sqrt{1+t^2}x$ и мы снова получили многочлен от t, следовательно:

$$(1+t^2)^{\frac{2n+1}{2}} \cdot c = P(t),\ c > 0$$

Такого быть не может, поскольку слева будет $(1+t^2)^n \cdot \sqrt{1+t^2} = P(t) \Rightarrow$ поскольку всё от t^2, то понятно, что многочлен $P(t)$ - четная функция $\Rightarrow$ обозначим $s = 1+t^2$, тогда:

$$c \cdot s^{n+\frac{1}{2}} = \widetilde{P}(s)$$

Это невозможно, поскольку справа многочлен после конечного числа дифференцирований будет равен нулю, а выражение слева после любого числа дифференцирования не ноль, поскольку степень - дробная $\Rightarrow$ мы получили противоречие. ∎