Интеграл Римана в $\mathbb{R}^n$

Разбиения в $\mathbb{R}^n$

Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^n$.

Опр: 1. Пусть $\mathrm{J}_1, \ldots, \mathrm{J}_n \subset \mathbb{R}$ - ограниченные промежутки:

$$(\alpha, \beta), (\alpha, \beta], [\alpha, \beta), [\alpha, \beta]$$

Будем называть множество $\mathrm{I} = \mathrm{J}_1 \times \mathrm{J}_2 \times \ldots \times \mathrm{J}_n$ параллелепипидом или брусом.

Rm: 1. Заметим, что этот объект называют брусом, поскольку параллелепипид это не обязательно такой объект, а здесь важно, что ребра этого параллелепипида параллельны осям координат.

Rm: 2. Заметим также, что естественное обобщение отрезка на $\mathbb{R}^n$ это брус.

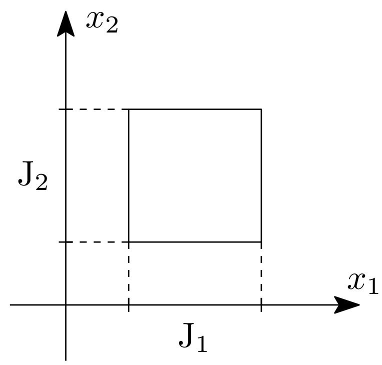

Рис. 1: Пример бруса в $\mathbb{R}^2$.

Опр: 2. Брус $\mathrm{I} = \mathrm{J}_1 \times \mathrm{J}_2 \times \ldots \times \mathrm{J}_n$ называется замкнутым, если все J_k - это отрезки, то есть это декартово произведение отрезков.

Опр: 3. Объемом бруса $\mathrm{I} = \mathrm{J}_1 \times \ldots \times \mathrm{J}_n$ назовём число: $|\mathrm{I}| = |\mathrm{J}_1| \cdot \ldots \cdot |\mathrm{J}_n|$.

Пусть I - замкнутый брус, $\mathrm{I} = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$. Возьмем разбиение каждого из отрезков:

$$a_1 = x_1^0 < x_1^1 < \ldots < x_1^{m_1} = b_1, \ldots, a_n = x_n^0 < \ldots < x_n^{m_n} = b_n$$

Припишем этим разбиениям отрезки: $\Delta_i^k = \left[x_i^{k-1}, x_i^k\right]$, $|\Delta_i^k| = x_i^k - x_i^{k-1}$. Если мы возьмем декартовые произведения всевозможных отрезков, то мы получим набор брусков:

$$\mathrm{I}_{k_1 \ldots k_n} = \Delta_1^{k_1} \times \ldots \times \Delta_n^{k_n}$$

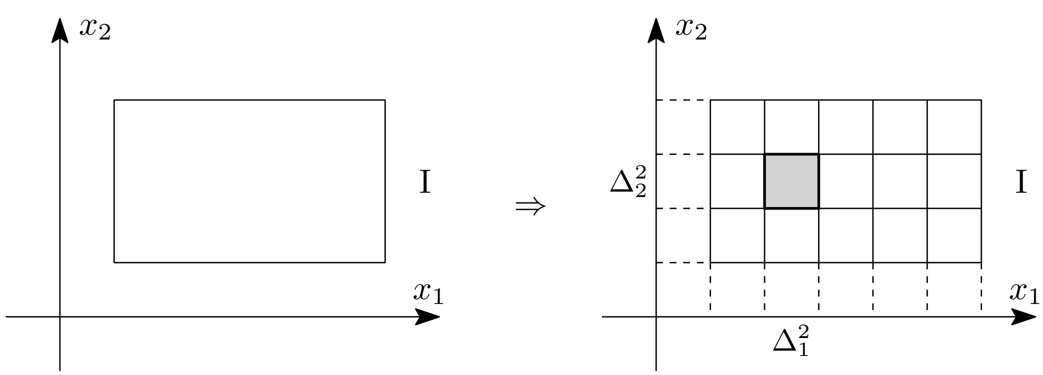

Рис. 2: Пример разбиения бруса в $\mathbb{R}^2$, брусок I_{22}.

Опр: 4. Разбиением бруска I назовем набор из брусков: $\mathrm{I}_{k_1\ldots k_n} = \Delta_1^{k_1} \times \ldots \times \Delta_n^{k_n}$ и обозначим: $\mathbb{T} = \{\mathrm{I}_m\}$.

Rm: 3. Разбиение не обязательно должно быть таким, но в таком виде оно упрощает дальнейший разбор теории. Отметим, что клеточная структура общности не уменьшает.

Утв. 1. Если $\{\mathrm{I}_m\}$ - разбиение бруска I, то $|\mathrm{I}| = \sum\limits_{k_1\ldots k_n} |\mathrm{I}_{k_1\ldots k_n}|$.

☐ По определению:

$$|\mathrm{I}| = \left(\left|\Delta_1^1\right| + \ldots + |\Delta_1^{m_1}|\right) \cdot \left(\left|\Delta_2^1\right| + \ldots + |\Delta_2^{m_2}|\right) \cdot \ldots \cdot \left(\left|\Delta_n^1\right| + \ldots + |\Delta_n^{m_n}|\right)$$

Раскроем скобки:

$$|\mathrm{I}| = \sum_{k_1\ldots k_n} \left|\Delta_1^{k_1}\right| \cdot \ldots \cdot \left|\Delta_n^{k_n}\right| = \sum_{k_1\ldots k_n} |\mathrm{I}_{k_1\ldots k_n}|$$

■

Опр: 5. Отмеченным разбиением бруска I назовем набор пар:

$$(\mathbb{T}, \xi) = \{(\mathrm{I}_j, \xi_j) \mid \xi_j \in \mathrm{I}_j\}$$

Опр: 6. Диаметром бруска разбиения назовем максимальное расстояние между точками в бруске:

$$\operatorname{diam}(\mathrm{I}_m) = d(\mathrm{I}_m) = \sup_{x,y\in \mathrm{I}_m} \|x - y\|$$

Rm: 4. У прямоугольника диаметром является длина диагонали.

Опр: 7. Масштабом разбиения или параметром разбиения назовем максимум из всех диаметров брусков разбиения:

$$\lambda(\mathbb{T}) = \max_j d(\mathrm{I}_j)$$

Интеграл Римана в $\mathbb{R}^n$

Пусть определена функция $f\colon \mathrm{I} \to \mathbb{R}$.

Опр: 8. Суммой Римана называется следующее выражение:

$$\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) = \sum_j f(\xi_j)\cdot|\mathrm{I}_j|$$

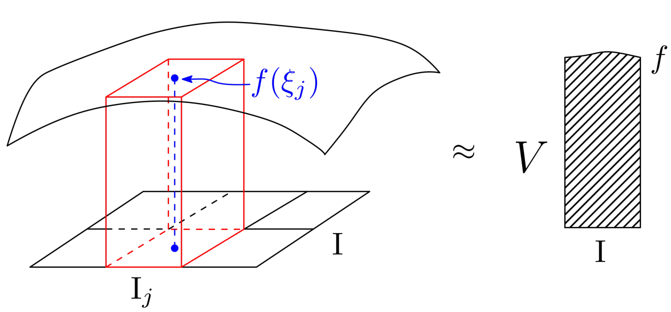

Рис. 3: Сумма Римана как “объем” под графиком f над брусом I.

Опр: 9. Число A называется интегралом Римана функции f по брусу I (f называется интегрируемой по Риману на I), если:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0\colon \forall (\mathbb{T}, \xi),\ \lambda(\mathbb{T}) < \delta \Rightarrow |\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) - A| < \varepsilon$$

то есть, это предел по базе:

$$\lim_{\lambda(\mathbb{T}) \to 0} \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) = A$$

Обозначение:

$$A = \int\limits_{\mathrm{I}} f(x)dx = \int\limits_{\mathrm{I}} f(x_1, \ldots, x_n)dx_1 \ldots dx_n = \int\int\limits_{\mathrm{I}}\cdots\int f(x_1, \ldots, x_n)dx_1 \ldots dx_n$$

Утв. 2. (**простейшие свойства интеграла**)

1) Если f интегрируема на I, то f ограничена;
2) Если f, g интегрируемы на I, то $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha f + \beta g$ интегрируема на I и верно:

$$\int\limits_{\mathrm{I}} (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int\limits_{\mathrm{I}} f(x)dx + \beta \int\limits_{\mathrm{I}} g(x)dx$$

3) Если f, g интегрируемы на I и $f(x) \le g(x)$, то верно:

$$\int\limits_{\mathrm{I}} f(x)dx \le \int\limits_{\mathrm{I}} g(x)dx$$

□

1) Пусть A это интеграл f, возьмем $\varepsilon = 1$, тогда: $\exists\, \delta > 0\colon \forall (\mathbb{T}, \xi)$, $\lambda(\mathbb{T}) < \delta$ такое, что будет верно:

$$A - \varepsilon < \sum_j f(\xi_j) \cdot |\mathrm{I}_j| < A + \varepsilon$$

Заметим, что $|\mathrm{I}_j| > 0$ и ξ_j - произвольная точка из I_j. Докажем от противного. Пусть f не является ограниченной $\Rightarrow \exists\, k\colon f$ не является ограниченной на бруске I_k. Фиксируем ξ_j, $\forall j \ne k$ и переписываем неравенство:

$$\mathrm{const} = A - \varepsilon - \sum_{j \ne k} f(\xi_j) \cdot |\mathrm{I}_j| < f(\xi_k) \cdot |\mathrm{I}_k| < A + \varepsilon - \sum_{j \ne k} f(\xi_j) \cdot |\mathrm{I}_j| = \mathrm{const}$$

$$|\mathrm{I}_j| = \mathrm{const} \ne 0 \Rightarrow |f(\xi_j)| < \infty$$

$f(\xi_k)$ - ограниченно, но ξ_k - произвольное $\Rightarrow f(x)$ ограниченно на $\mathrm{I}_k \Rightarrow$ противоречие;

2) По линейности суммы: $\sigma(\alpha f + \beta g, \mathbb{T}, \xi) = \alpha\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) + \beta\sigma(g, \mathbb{T}, \xi)$. Рассмотрим сразу $\delta > 0$ общее для f и g (минимум из δ_f, δ_g) так, чтобы:

$$\left| \int\limits_{\mathrm{I}} f(x)dx - \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) \right| < \varepsilon \land \left| \int\limits_{\mathrm{I}} g(x)dx - \sigma(g, \mathbb{T}, \xi) \right| < \varepsilon$$

По неравенству треугольника:

$$\left|\int\limits_{\mathrm{I}}(\alpha f(x)+\beta g(x))dx-\sigma(\alpha f+\beta g,\mathbb{T},\xi)\right|\leq|\alpha|\cdot\left|\int\limits_{\mathrm{I}}f(x)dx-\sigma(f,\mathbb{T},\xi)\right|+$$

$$+|\beta|\cdot\left|\int\limits_{\mathrm{I}}g(x)dx-\sigma(g,\mathbb{T},\xi)\right|\leq(|\alpha|+|\beta|)\varepsilon$$

3) По линейности достаточно доказать, что $f\geq 0\Rightarrow A=\int\limits_{\mathrm{I}}f(x)dx\geq 0$. По определению:

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\,\delta>0\colon\forall(\mathbb{T},\xi),\ \lambda(\mathbb{T})<\delta\Rightarrow A+\varepsilon\geq\sigma(f,\mathbb{T},\xi)=\sum_j f(\xi_j)\cdot|\mathrm{I}_j|\geq 0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A\geq-\varepsilon\Rightarrow\lim_{\varepsilon\to 0}A\geq\lim_{\varepsilon\to 0}(-\varepsilon)=0\Rightarrow A\geq 0$$

■

Характеристическая функция

Опр: 10. Пусть I - замкнутый брус и $\mathrm{J}\subset\mathrm{I}$ - произвольный брус. Функция вида:

$$\chi_{\mathrm{J}}(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathrm{J}\\ 0, & x\notin\mathrm{J}\end{cases}$$

называется характеристической функцией.

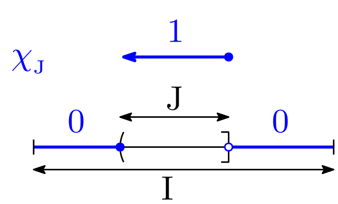

Рис. 4: Характеристическая функция $\chi_{\mathrm{J}}(x)$.

Распишем подробнее: $\mathrm{J}=\mathrm{J}_1\times\ldots\times\mathrm{J}_n\Rightarrow\chi_{\mathrm{J}}(x)=\chi_{\mathrm{J}_1}(x_1)\cdot\ldots\cdot\chi_{\mathrm{J}_n}(x_n)$, поскольку лежать в декартовом произведении означает, что каждая координата лежит в нужной части декартового произведения. Таким образом, мы получаем единицу только в том случае, когда весь набор $(x_1,\ldots,x_n)$ лежит в J.

Утв. 3. $\int\limits_{\mathrm{I}}\chi_{\mathrm{J}}(x)dx=|\mathrm{J}|$.

□ При $n=1$ уже доказано (см. семестр 2, лекция 21). Пусть $(\mathbb{T},\xi)$ - отмеченное разбиение, $\mathbb{T}$ будет устроено следующим образом:

$$\mathbb{T}=\{\mathrm{I}_{k_1\ldots k_n},\ \xi^{\varkappa}=(\xi_1^{\varkappa},\ldots,\xi_n^{\varkappa})\},\ \mathrm{I}_{k_1\ldots k_n}=\Delta_1^{k_1}\times\ldots\times\Delta_n^{k_n},\ \varkappa=(k_1\ldots k_n)$$

где $\xi^{\varkappa}$ означает, что для каждой клетки у нас есть своя отмеченная точка и координаты не обязаны совпадать между собой на одинаковых отрезках (выбор координаты зависит от всего набора индексов):

$$\varkappa' = (k_1, k_2', \ldots, k_n') \neq \varkappa = (k_1, k_2, \ldots, k_n) \Rightarrow \xi_1^{\varkappa} \neq \xi_1^{\varkappa'},\ \xi_1^{\varkappa}, \xi_1^{\varkappa'} \in \Delta_1^{k_1}$$

Рассмотрим Риманову сумму:

$$\sum_{\varkappa} \chi_{\mathrm{J}}(\xi^{\varkappa}) \cdot |\mathrm{I}_{\varkappa}| = \sum_{k_1 \ldots k_n} \chi_{\mathrm{J}_1}(\xi_1^{\varkappa}) \cdot \ldots \cdot \chi_{\mathrm{J}_n}(\xi_n^{\varkappa}) \cdot |\Delta_1^{k_1}| \cdot \ldots \cdot |\Delta_n^{k_n}|, \quad \xi_1^{\varkappa} \in \Delta_1^{k_1}, \ldots, \xi_n^{\varkappa} \in \Delta_n^{k_n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{k_1 \ldots k_n} \chi_{\mathrm{J}_1}(\xi_1^{\varkappa}) \cdot \ldots \cdot \chi_{\mathrm{J}_n}(\xi_n^{\varkappa}) \cdot |\Delta_1^{k_1}| \cdot \ldots \cdot |\Delta_n^{k_n}| \leq \sum_{k_1 \ldots k_n} \sup_{x_1 \in \Delta_1^{k_1}} \chi_{\mathrm{J}_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot \sup_{x_n \in \Delta_n^{k_n}} \chi_{\mathrm{J}_n}(x_n) \cdot |\Delta_1^{k_1}| \cdot \ldots \cdot |\Delta_n^{k_n}| =$$

$$= \left(\sum_{k_1} \sup_{x_1 \in \Delta_1^{k_1}} \chi_{\mathrm{J}_1}(x_1) \cdot |\Delta_1^{k_1}| \right) \cdot \ldots \cdot \left(\sum_{k_n} \sup_{x_n \in \Delta_n^{k_n}} \chi_{\mathrm{J}_n}(x_n) \cdot |\Delta_n^{k_n}| \right)$$

В скобочках записаны одномерные верхние суммы Дарбу. Заметим, что:

$$\lambda(\mathbb{T}) \to 0 \Rightarrow \max_{k_1} |\Delta_1^{k_1}| \to 0, \ldots, \max_{k_n} |\Delta_n^{k_n}| \to 0$$

Тогда:

$$\lim_{\lambda(\mathbb{T}) \to 0} \left(\sum_{k_1} \sup_{x_1 \in \Delta_1^{k_1}} \chi_{\mathrm{J}_1}(x_1) \cdot |\Delta_1^{k_1}| \right) \cdot \ldots \cdot \left(\sum_{k_n} \sup_{x_n \in \Delta_n^{k_n}} \chi_{\mathrm{J}_n}(x_n) \cdot |\Delta_n^{k_n}| \right) =$$

$$= \left(\int_{a_1}^{b_1} \chi_{\mathrm{J}_1}(x_1) dx_1 \right) \cdot \ldots \cdot \left(\int_{a_n}^{b_n} \chi_{\mathrm{J}_n}(x_n) dx_n \right) = |\mathrm{J}_1| \cdot \ldots \cdot |\mathrm{J}_n| = |\mathrm{J}|$$

По аналогии, оценим снизу:

$$\sum_{\varkappa} \chi_{\mathrm{J}}(\xi^{\varkappa}) \cdot |\mathrm{I}_{\varkappa}| \geq \left(\sum_{k_1} \inf_{x_1 \in \Delta_1^{k_1}} \chi_{\mathrm{J}_1}(x_1) \cdot |\Delta_1^{k_1}| \right) \cdot \ldots \cdot \left(\sum_{k_n} \inf_{x_n \in \Delta_n^{k_n}} \chi_{\mathrm{J}_n}(x_n) \cdot |\Delta_n^{k_n}| \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{\lambda(\mathbb{T}) \to 0} \left(\sum_{k_1} \inf_{x_1 \in \Delta_1^{k_1}} \chi_{\mathrm{J}_1}(x_1) \cdot |\Delta_1^{k_1}| \right) \cdot \ldots \cdot \left(\sum_{k_n} \inf_{x_n \in \Delta_n^{k_n}} \chi_{\mathrm{J}_n}(x_n) \cdot |\Delta_n^{k_n}| \right) =$$

$$= \left(\int_{a_1}^{b_1} \chi_{\mathrm{J}_1}(x_1) dx_1 \right) \cdot \ldots \cdot \left(\int_{a_n}^{b_n} \chi_{\mathrm{J}_n}(x_n) dx_n \right) = |\mathrm{J}_1| \cdot \ldots \cdot |\mathrm{J}_n| = |\mathrm{J}|$$

Следовательно: $\sigma\left(\chi_{\mathrm{J}}, \mathbb{T}, \xi\right) \xrightarrow[\lambda(\mathbb{T}) \to 0]{} |\mathrm{J}|$. ■

Упр. 1. Пусть $f_1, \ldots, f_n \geq 0$ и f_k интегрируемы на $[a_k, b_k]$, $\mathrm{I} = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$. Доказать, что $f_1(x_1) \cdot \ldots \cdot f_n(x_n)$ - интегрируема на I и верно:

$$\int_{\mathrm{I}} f_1(x_1) \cdot \ldots \cdot f_n(x_n) dx_1 \ldots dx_n = \int_{a_1}^{b_1} f_1(x_1) dx_1 \cdot \ldots \cdot \int_{a_n}^{b_n} f_n(x_n) dx_n$$

□ Доказательство проводится по полной аналогии с предыдущей задачей. Пусть начальные условия такие же. Введём обозначение:

$$f(x) = f_1(x_1) \cdot \ldots \cdot f_n(x_n),\ \forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{I}$$

Рассмотрим Римановы суммы (с учётом того, что $\forall i = \overline{1, n},\ f_i \geq 0$):

$$\sum_{\varkappa} f(\xi^{\varkappa}) \cdot |\mathrm{I}_{\varkappa}| = \sum_{k_1 \ldots k_n} f_1(\xi_1^{\varkappa}) \cdot \ldots \cdot f_n(\xi_n^{\varkappa}) \cdot |\Delta_1^{k_1}| \cdot \ldots \cdot |\Delta_n^{k_n}|, \quad \xi_1^{\varkappa} \in \Delta_1^{k_1}, \ldots, \xi_n^{\varkappa} \in \Delta_n^{k_n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{k_1 \ldots k_n} f_1(\xi_1^{\varkappa}) \cdot \ldots \cdot f_n(\xi_n^{\varkappa}) \cdot |\Delta_1^{k_1}| \cdot \ldots \cdot |\Delta_n^{k_n}| \leq \sum_{k_1 \ldots k_n} \sup_{x_1 \in \Delta_1^{k_1}} f_1(x_1) \cdot \ldots \cdot \sup_{x_n \in \Delta_n^{k_n}} f_n(x_n) \cdot |\Delta_1^{k_1}| \cdot \ldots \cdot |\Delta_n^{k_n}| =$$

$$= \left(\sum_{k_1} \sup_{x_1 \in \Delta_1^{k_1}} f_1(x_1) \cdot |\Delta_1^{k_1}| \right) \cdot \ldots \cdot \left(\sum_{k_n} \sup_{x_n \in \Delta_n^{k_n}} f_n(x_n) \cdot |\Delta_n^{k_n}| \right) \xrightarrow[\lambda(\mathbb{T}) \to 0]{} \left(\int_{a_1}^{b_1} f_1(x_1) dx_1 \right) \cdot \ldots \cdot \left(\int_{a_n}^{b_n} f_n(x_n) dx_n \right)$$

По аналогии, оценим снизу:

$$\sum_{\varkappa} f(\xi^{\varkappa}) \cdot |\mathrm{I}_{\varkappa}| \geq \left(\sum_{k_1} \inf_{x_1 \in \Delta_1^{k_1}} f_1(x_1) \cdot |\Delta_1^{k_1}| \right) \cdot \ldots \cdot \left(\sum_{k_n} \inf_{x_n \in \Delta_n^{k_n}} f_n(x_n) \cdot |\Delta_n^{k_n}| \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{\lambda(\mathbb{T}) \to 0} \left(\sum_{k_1} \inf_{x_1 \in \Delta_1^{k_1}} f_1(x_1) \cdot |\Delta_1^{k_1}| \right) \cdot \ldots \cdot \left(\sum_{k_n} \inf_{x_n \in \Delta_n^{k_n}} f_n(x_n) \cdot |\Delta_n^{k_n}| \right) = \left(\int_{a_1}^{b_1} f_1(x_1) dx_1 \right) \cdot \ldots \cdot \left(\int_{a_n}^{b_n} f_n(x_n) dx_n \right)$$

Следовательно:

$$\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) \xrightarrow[\lambda(\mathbb{T}) \to 0]{} \int_{\mathrm{I}} f_1(x_1) \cdot \ldots \cdot f_n(x_n) dx_1 \ldots dx_n = \int_{a_1}^{b_1} f_1(x_1) dx_1 \cdot \ldots \cdot \int_{a_n}^{b_n} f_n(x_n) dx_n$$

■

Пример: Рассмотрим неинтегрируемую функцию:

$$D(s) = \begin{cases} 1, & s \in \mathbb{Q} \\ 0, & s \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

это функция Дирихле и рассмотрим произведение этих функций: $\widetilde{D}(x) = D(x_1) \cdot \ldots \cdot D(x_n)$. Эта функция не является интегрируемой на всяком брусе I. Выбирая отмеченные точки сумма Римана может принимать два значения:

$$\sigma\left(\widetilde{D}, \mathbb{T}, \xi\right) = \begin{cases} |\mathrm{I}|, & \xi \in \mathbb{Q}^n \\ 0, & \xi \notin \mathbb{Q}^n \end{cases}$$

Сумма Римана не зависит от $\lambda(\mathbb{T}) \Rightarrow$ нет сходимости $\Rightarrow$ функция не интегрируема.

Опр: 11. Пусть I - замкнутый брус. $\{\mathrm{J}_m\}$ - произвольный набор брусков в I, $m = \overline{1, M}$. Функцию вида:

$$f(x) = \sum_{m=1}^{M} c_m \chi_{\mathrm{J}_m}(x)$$

будем называть ступенчатой функцией.

Следствие 1. Ступенчатая функция f интегрируема на I и верно равенство:

$$\int\limits_{\mathrm{I}} f(x)dx = \sum_{m=1}^{M} c_m \cdot |\mathrm{J}_m|$$

$\square$ Сразу следует из линейности интеграла и утверждения про интеграл функции $\chi_{\mathrm{J}}(x)$ выше. $\blacksquare$

Следствие 2. Пусть $\mathrm{J}, \mathrm{J}_1, \ldots, \mathrm{J}_M$ - бруски и брусок $\mathrm{J} \subset \bigcup\limits_{m=1}^{M} \mathrm{J}_m$, тогда:

$$|\mathrm{J}| \leq \sum_{m=1}^{M} |\mathrm{J}_m|$$

$\square$ Очевидно, что $\chi_{\mathrm{J}} \leq \sum\limits_{m=1}^{M} \chi_{\mathrm{J}_m}$, поскольку на каждой точке из J справа будет хотя бы одна единица. Возьмем брус I, который содержит все данные бруски. Тогда по линейности и монотонности:

$$|\mathrm{J}| = \int\limits_{\mathrm{I}} \chi_{\mathrm{J}}(x)dx \leq \int\limits_{\mathrm{I}} \sum_{m=1}^{M} \chi_{\mathrm{J}_m}(x)dx = \sum_{m=1}^{M} \int\limits_{\mathrm{I}} \chi_{\mathrm{J}_m}(x)dx = \sum_{m=1}^{M} |\mathrm{J}_m|$$

$\blacksquare$

Упр. 2. Пусть $\mathrm{J} = \bigcup\limits_{m=1}^{M} \mathrm{J}_m$ и $\mathrm{J}_m \cap \mathrm{J}_l = \varnothing$, $\forall m \neq l$. Доказать, что: $|\mathrm{J}| = \sum\limits_{m=1}^{M} |\mathrm{J}_m|$.

$\square$

$$x \in \mathrm{J} \Leftrightarrow \exists\, k = \overline{1, n} \colon x \in \mathrm{J}_k \Rightarrow \forall x \in \mathrm{J},\ \chi_{\mathrm{J}}(x) = \sum_{m=1}^{M} \chi_{\mathrm{J}_m}(x)$$

Возьмем брус I, который содержит все данные бруски. Тогда по линейности:

$$|\mathrm{J}| = \int\limits_{\mathrm{I}} \chi_{\mathrm{J}}(x)dx = \int\limits_{\mathrm{I}} \sum_{m=1}^{M} \chi_{\mathrm{J}_m}(x)dx = \sum_{m=1}^{M} \int\limits_{\mathrm{I}} \chi_{\mathrm{J}_m}(x)dx = \sum_{m=1}^{M} |\mathrm{J}_m|$$

$\blacksquare$

Rm: 5. Если бруски пересекаются только по граням, тогда:

$$\forall x \in \mathrm{J},\ \chi_{\mathrm{J}}(x) = \sum_{m=1}^{M} \chi_{\widehat{\mathrm{J}}_m}(x) + \sum_{k<l} \chi_{\mathrm{J}_k \cap \mathrm{J}_l}(x)$$

где $\forall m \neq l$, $\widehat{\mathrm{J}}_m \cap \widehat{\mathrm{J}}_l = \varnothing$, а пересечение возможно лишь по граням. В этом случае, по аддитивности:

$$|\mathrm{J}| = \int\limits_{\mathrm{I}} \chi_{\mathrm{J}}(x)dx = \int\limits_{\mathrm{I}} \left(\sum_{m=1}^{M} \chi_{\widehat{\mathrm{J}}_m}(x) + \sum_{k<l} \chi_{\mathrm{J}_k \cap \mathrm{J}_l}(x) \right) dx = \sum_{m=1}^{M} \int\limits_{\mathrm{I}} \chi_{\widehat{\mathrm{J}}_m}(x)dx + 0 = \sum_{m=1}^{M} |\mathrm{J}_m|$$

Перестановка интеграла и предела

Утв. 4. Пусть f - интегрируема на брусе I, тогда верно равенство:

$$\left|\int\limits_{\mathrm{I}} f(x)dx\right| \leq \sup_{\mathrm{I}} |f|\cdot|\mathrm{I}|$$

□ Очевидно, что:

$$-\sup_{\mathrm{I}} |f|\cdot\chi_{\mathrm{I}}(x) \leq f(x) \leq \sup_{\mathrm{I}} |f|\cdot\chi_{\mathrm{I}}(x)$$

Воспользуемся свойством монотонности и линейности:

$$-\sup_{\mathrm{I}} |f|\cdot|\mathrm{I}| \leq \int\limits_{\mathrm{I}} f(x)dx \leq \sup_{\mathrm{I}} |f|\cdot|\mathrm{I}|$$

■

Теорема 1. Пусть f_n интегрируемы на I, $f_n \underset{n\to\infty}{\overset{\mathrm{I}}{\rightrightarrows}} f$, тогда f - интегрируема на I и верно равенство:

$$\int\limits_{\mathrm{I}} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathrm{I}} f_n(x)dx$$

□ По аналогии с доказательством 3-го семестра (лекция 12).

1) Рассмотрим следующую разность:

$$\left|\int\limits_{\mathrm{I}} f_n(x)dx - \int\limits_{\mathrm{I}} f_m(x)dx\right| = \left|\int\limits_{\mathrm{I}} (f_n(x) - f_m(x))dx\right| \leq \sup_{\mathrm{I}} |f_n - f_m|\cdot|\mathrm{I}|$$

Следовательно, числовая последовательность интегралов: $\{A_n\}$, $A_n = \int\limits_{\mathrm{I}} f_n(x)dx$ - фундаментальна и сходится к некоторому числу A: $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$;

2) Применим метод 3ε:

$$|A - \sigma(f_n, \mathbb{T}, \xi)| \leq |A - A_n| + |\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) - \sigma(f_n, \mathbb{T}, \xi)| + |\sigma(f_n, \mathbb{T}, \xi) - A_n|$$

$$|\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) - \sigma(f_n, \mathbb{T}, \xi)| = \left|\sum_j f(\xi_j)\cdot|\mathrm{I}_j| - \sum_j f_n(\xi_j)\cdot|\mathrm{I}_j|\right| \leq \sup_{\mathrm{I}} |f_n(x) - f(x)|\cdot|\mathrm{I}|$$

По равномерной сходимости f_n и из сходимости A_n к A будет верно:

$$\exists\, n \in \mathbb{N}\colon \sup_{\mathrm{I}} |f_n(x) - f(x)|\cdot|\mathrm{I}| < \varepsilon \wedge |A_n - A| < \varepsilon$$

Зафиксируем n и поскольку f_n интегрируемы, то выберем масштаб разбиения:

$$\exists\, \delta > 0\colon \forall(\mathbb{T}, \xi),\ \lambda(\mathbb{T}) < \delta \Rightarrow |\sigma(f_n, \mathbb{T}, \xi) - A_n| < \varepsilon$$

Таким образом, мы получаем:

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0\colon \forall(\mathbb{T}, \xi),\ \lambda(\mathbb{T}) < \delta \Rightarrow |\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) - A| < 3\varepsilon$$

■

Следствие 3. Если f непрерывна на I, то f - интегрируема.

☐ Хотим построить последовательность ступенчатых функций $f_N(x)$ так, чтобы $f_N(x) \underset{N\to\infty}{\overset{\mathrm{I}}{\rightrightarrows}} f(x)$. Разобьем брусок I на бруски I_j^N так, чтобы $\mathrm{I}_j^N \cap \mathrm{I}_m^N = \varnothing$, где $\operatorname{diam}\left(\mathrm{I}_j^N\right) < \frac{1}{N}$.

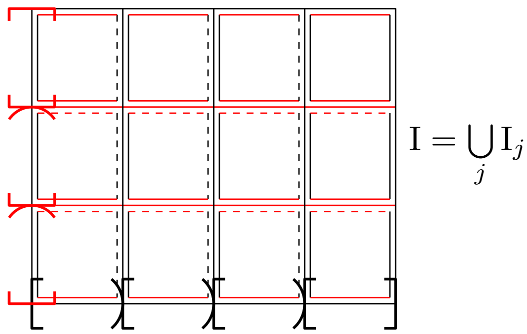

Рис. 5: Разбиение бруска I на попарно непересекающиеся бруски.

Если разбиение на промежутке по ребрам это разбиение на попарно непересекющиеся, то естественно получившиеся промежутки, как их произведения, будут тоже попарно непересекающимися. Иначе, можно было бы найти наложение разбиения рёбер друг на друга, а это было бы противоречием.

Выбираем произвольные точки $\xi_j^N \in \mathrm{I}_j^N$ и рассмотрим функцию:

$$f_N(x) = \sum_j f\left(\xi_j^N\right) \cdot \chi_{\mathrm{I}_j^N}(x)$$

Заметим, что $\sum\limits_j \chi_{\mathrm{I}_j^N}(x) \equiv 1$, $\forall x \in \mathrm{I}$, поскольку бруски I_j^N не пересекаются и только один из индикаторов принимает единичное значение. Тогда оценим разность:

$$|f(x) - f_N(x)| \leq \sum_j \left|f(x) - f\left(\xi_j^N\right)\right| \cdot \chi_{\mathrm{I}_j^N}(x)$$

Мы знаем, что f - равномерно непрерывна, поскольку брусок это компакт $\Rightarrow$ по теореме Кантора непрерывная функция на компакте - равномерно непрерывна, тогда:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, N_0 \colon \forall N > N_0,\ \|x - y\| < \frac{1}{N} \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Поскольку диаметр: $\operatorname{diam}\left(\mathrm{I}_j^N\right) < \frac{1}{N}$, то $\left\|x - \xi_j^N\right\| < \frac{1}{N}$, $\forall x \in \mathrm{I}_j^N$, тогда:

$$\sum_j \left|f(x) - f\left(\xi_j^N\right)\right| \cdot \chi_{\mathrm{I}_j^N}(x) \leq \sum_j \varepsilon \cdot \chi_{\mathrm{I}_j^N}(x) = \varepsilon \cdot \sum_j \chi_{\mathrm{I}_j^N}(x) = \varepsilon$$

где неравенство верно в силу того, что $\left|f(x) - f\left(\xi_j^N\right)\right| < \varepsilon$ для таких x при которых $\chi_{\mathrm{I}_j^N} \neq 0$. Тогда:

$$f_N(x) \underset{N\to\infty}{\overset{\mathrm{I}}{\rightrightarrows}} f(x)$$

Воспользовавшись теоремой, мы получаем требуемое. ■

Rm: 6. Заметим, что все интегрируемые функции (даже в одномерном случае) не охватываются как равномерные пределы ступенчатых функций.

Упр. 3. Доказать, что $\chi_{\triangle 101}(x)$ интегрируема по Риману на I, но не приближается равномерно ступенчатыми функциями.

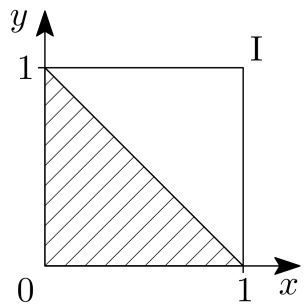

Рис. 6: Треугольник $\triangle 101$.

Суть проблемы в том, что наша ступенчатая функция составлена из индикаторов прямоугольников с рёбрами параллельными осям.

$\square$ Пусть $\mathrm{J} = \triangle 101$, $\mathrm{I} = [0,1] \times [0,1]$, тогда по доказанному выше:

$$\int\limits_{\mathrm{I}} \chi_{\triangle 101}(x)dx = |\mathrm{J}| = \frac{1}{2}\cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

По аналогии со следствием выше разобъем I на непересекающиеся бруски I_j^N, где $\operatorname{diam}\left(\mathrm{I}_j^N\right) < \frac{1}{N}$, аналогично выбираем произвольные точки $\xi_j^N \in \mathrm{I}_j^N$ и рассмативаем функцию:

$$f_N(x) = \sum_j \chi_{\triangle 101}\left(\xi_j^N\right) \cdot \chi_{\mathrm{I}_j^N}(x)$$

Пусть I_k^N - брусок, находящийся на диагонали $\triangle 101$. Оценим разность функций на нём:

$$\forall x \in \mathrm{I}_k^N,\ |\chi_{\triangle 101}(x) - f_N(x)| = \left|\chi_{\triangle 101}(x) - \chi_{\triangle 101}\left(\xi_k^N\right)\right|$$

тогда, если $\xi_k^N \in \triangle 101$, то можно взять $x \notin \triangle 101$, а если $\xi_k^N \in \triangle 101$, то можно взять $x \in \triangle 101$. Следовательно, мы получаем следующую оценку:

$$\sup_{x \in \mathrm{I}_k^N} \left|\chi_{\triangle 101}(x) - \chi_{\triangle 101}\left(\xi_k^N\right)\right| = 1 \not\to 0$$

Следовательно, равномерной сходимости ступенчатых функций к $\chi_{\triangle 101}$ нет. ■

Данный пример иллюстрирует, почему таких ступенчатых функций не хватает. В связи с этим появляется задача расширения класса интегрируемости. Как нам получить критерий интегрируемости?

Критерий интегрируемости

Теорема 2. Пусть f - ограниченная функция на замкнутом бруске I. f - интегрируема по Риману на I тогда и только тогда, когда $\exists$ последовательности ступенчатых функций h_n, g_n такие, что:

1) $h_n(x) \leq h_{n+1}(x)$; $g_{n+1}(x) \leq g_n(x)$, $\forall n$;
2) $h_n(x) \leq f(x) \leq g_n(x)$, $\forall n$;
3) $\int\limits_{\mathrm{I}} g_n(x)dx - \int\limits_{\mathrm{I}} h_n(x)dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$;

Rm: 7. Отметим, что это фактически критерий Дарбу, изложенный на языке функций, где равномерная сходимость заменена на монотонную последовательность.