Интеграл Лебега

Дальнейший материал будет разбираться менее детальнее, поскольку для него есть отдельный курс действительного анализа.

Опр: 1. Пусть у нас есть тройка $(X, \mathcal{A}, \mu)$, где μ - σ-аддитивная, конечная, неотрицательная мера. Эта тройка называется измеримым пространством.

Опр: 2. Функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ называется $\mathcal{A}$-измеримой, если: $\forall c \in \mathbb{R}$, $\{x\colon f(x) < c\} \in \mathcal{A}$.

Rm: 1. Можно показать, что это определение равносильно следующему:

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$$

Эти моменты обсуждаются на действительном анализе.

Теорема 1. (**Свойства измеримых функций**)

1) Если f, g - $\mathcal{A}$-измеримы, тогда: $f + g$ и $f{\cdot}g$ - $\mathcal{A}$-измеримы;
2) Пусть $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - непрерывная функция, а f - $\mathcal{A}$-измерима, тогда $h(f(x))$ - $\mathcal{A}$-измерима;
3) Если $\forall x,\ f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, f_n - $\mathcal{A}$-измеримы, то f - $\mathcal{A}$-измерима;

Упр. 1. Если $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - непрерывная функция, то $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $h^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

$\square$ Рассмтрим все множества E, для которых $h^{-1}(E) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{A} = \{E \mid h^{-1}(E) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$$

Дальше легко проверяется, что $\mathcal{A}$ это σ-алгебра, а поскольку h - непрерывная, то эта σ-алгебра содержит все открытые множества $\Rightarrow$ поскольку борелевская минимальная, то $\mathcal{A}$ содержит все борелевские множества $\Rightarrow$ проверили, что прообраз борелевского - борелевский. $\blacksquare$

Rm: 2. Обычно, перед обсуждением измеримости рассматривают две ситуации:

(1) Имеется множество X с σ-алгеброй $\mathcal{A}$ и множество Y без σ-алгебры. Пусть есть отображение: $f\colon X \to Y$, тогда следующее множество является σ-алгеброй:

$$\mathcal{B} = \{E \subset Y\colon f^{-1}(E) \in \mathcal{A}\}$$

(2) Имеется множество X без σ-алгебры и множество Y с σ-алгеброй $\mathcal{B}$. Пусть есть отображение: $f\colon X \to Y$, тогда следующее множество является σ-алгеброй:

$$\mathcal{A} = \{f^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}\}$$

Полезно также доказать, что если имеется отображение $f\colon X \to Y$ и на Y есть некоторое семейство подмножеств S, тогда верно:

$$f^{-1}(\sigma(S)) = \sigma(f^{-1}(S))$$

где $\sigma(S)$ - σ-алгебра порожденная семейством S.

Важный частный случай: Пусть μ - внешняя мера и $\mathcal{A}_\mu$ - измеримые относительно μ множества. Тогда измеримые относительно $\mathcal{A}_\mu$ функции называют μ-измеримыми.

Сходимости измеримых функций

Пусть $(X, \mathcal{A}_\mu, \mu)$ - ИП, считаем, что μ на X - конечна и далее будем рассматривать μ-измеримые функции. Пусть имеется последовательность f_n и функция f. У нас будет 3 вида сходимостей:

(I) **Равномерная сходимость**: $f_n \overset{E}{\rightrightarrows} f$;

(II) **Сходимость μ почти всюду (μ п.в.)**: $f_n \xrightarrow{\mu \text{ п.в.}} f$, если: $\mu\left(\{x\colon f_n(x) \nrightarrow f\}\right) = 0$;

(III) **Сходимость по мере**: $f_n \overset{\mu}{\Rightarrow} f$, если $\forall \delta > 0$, $\mu\left(\{x\colon |f_n(x) - f(x)| \geq \delta\}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$;

Теорема 2. Пусть μ-конечная мера. Тогда:

1) (I) $\Rightarrow$ (II) $\Rightarrow$ (III);

2) (**Теорема Егорова**): Если $f_n \xrightarrow{\mu \text{ п.в.}} f$, то:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, X_\varepsilon\colon f_n \overset{X_\varepsilon}{\rightrightarrows} f \wedge \mu(X \setminus X_\varepsilon) < \varepsilon$$

3) (**Теорема Рисса**): Если $f_n \overset{\mu}{\Rightarrow} f$, то $\exists\, f_{n_k}\colon f_{n_k} \xrightarrow{\mu \text{ п.в.}} f$;