Несобственный интеграл Римана

Сразу заметим, что конструкции несобственного интеграла Римана не совпадают в многомерном и одномерном случаях. Он нужен только для редких случаев, когда не работает интеграл Лебега, например, для случаев осциллирующих функций (см. интеграл Дирихле).

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, $E \neq \varnothing$ и существует функция $f\colon E \to \mathbb{R}$.

Опр: 1. Исчерпанием называется набор множеств $\{E_m\}$ такой, что:

1) E_m - допустимые множества (то есть это уже ограниченные множества граница которых это множество меры нуль по Лебегу);
2) $\forall m$, $E_m \subset E_{m+1}$;
3) Объединение E_m это всё E: $\cup_m E_m = E$;

Пример: $E = \mathbb{R}^n = \cup_m [-m, m]^n = \cup_m \mathcal{B}(0, m)$.

Пример: $E = \mathcal{B}(0,1) \setminus \{0\} = \cup_m \{\frac{1}{m} < \|x\| < 1\} = \cup_m \{\frac{1}{m} < \|x\| < 1 - \frac{1}{m}\}$.

Обозначение: $\mathcal{E}_f$ множество всех исчерпаний $\{E_n\}$ множества E таких, что f интегрируема на E_n, $\forall n$ по Риману.

Пример: Интервал $(0,1) \subset \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow$ нельзя брать исчерапние $(0, 1 - \frac{1}{m}) = E_m$, поскольку функция неограниченна в $0 \Rightarrow$ не интегрируема по Риману, но исчерпания вида: $(\frac{1}{m}, 1)$ - разрешены.

Rm: 1. Также заметим, что делая те или иные преобразования с функцией f мы можем менять эти классы. Например, были классы $\mathcal{E}_f$ и $\mathcal{E}_g \Rightarrow$ ничего нельзя сказать про $\mathcal{E}_{f+g}$ и каждый раз надо выяснять какие исчерпания мы берём, когда говорим о несобственном интеграле Римана.

Пример: $f(x) = D(x)$, $g(x) = -D(x)$, где $D(x)$ - функция Дирихле на отрезке $[0,1]$.

Rm: 2. Верно ли, что любое множество есть объединение допустимых? Нет, не любое, хотя бы потому что объединение допустимых это измеримое множество по Лебегу, а в качестве множества E можно взять неизмеримое.

Упр. 1. Пусть K - компакт, можно ли его исчерпать и представить в виде объединения допустимых множеств: $K = \cup_m E_m$, где E_m - допустимые. Вложенность можно получить накатыванием:

$$\widetilde{E}_M = \bigcup_{m=1}^{M} E_m$$

□ Мы знаем, что $E_m = \mathring{E}_m \cup \partial E_m$. Пусть K - без внутренних точек $\Rightarrow \mathring{E}_m = \varnothing \Rightarrow E_m = \partial E_m \Rightarrow E_m$ это множество меры нуль, ну а тогда K это множество меры нуль $\Rightarrow$ противоречие с тем, что K может быть множеством положительной меры (отсутствие внутренних точек $\neq$ множество меры нуль). ■

Опр: 2. Если $\forall \{E_m\} \in \mathcal{E}_f$, $\exists \lim\limits_{m\to\infty} \int_{E_m} f(x)dx$ и этот предел не зависит от исчерпания, то говорят, что f интегрируема в несобственном смысле по Риману на E и предел обозначают через: $\int_E f(x)dx$.

Rm: 3. Это существенно отличается от одномерного несобственного интеграла. Ранее было так:

$$\int\limits_0^{+\infty} f(x)dx = \lim_{c\to+\infty} \int\limits_0^{c} f(x)dx$$

где $f(x)$ интегрируема на каждом отрезке $[0,c] \Rightarrow$ в качестве исчерпаний брались отрезки $E_m = [0, c_m]$, где c_m - произвольная последовательность такая, что $c_m \to \infty$. Следовательно, мы требуем, чтобы для всякой такой последовательности интеграл сходился к одному и тому же:

$$\forall \{c_m\} \colon c_m \to \infty,\ E_m = [0, c_m],\ \int\limits_{E_m} f(x)dx \to \int\limits_0^{+\infty} f(x)dx$$

Теперь не обязательно брать такие расширяющиеся отрезки, а можно брать эти отрезки совершенно в любом порядке, главное, чтобы множества расширялись и по таким исчерпаниям снова проверять, что предел есть, например:

$$E_1 = [0,1],\ E_2 = [0,1] \cup [2,3],\ E_3 = [0,1] \cup [2,3] \cup [1,2]$$

Пример: Рассмотрим функцию:

$$f(x) = \tfrac{(-1)^{n-1}}{n},\ n-1 \le x \le n,\ f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot \mathbb{I}_{[n-1,n]}(x)$$

Поймем, что происходит с этой функцией с точки зрения старого и нового определения:

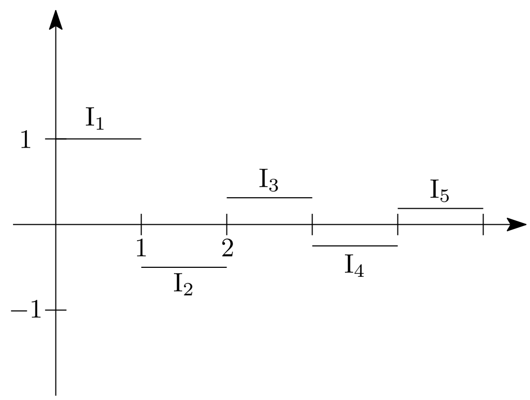

Рис. 1: Функция $f(x)$.

$$\lim_{c \to \infty} \int\limits_0^c f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2, \quad N-1 < c < N \Rightarrow \left| \int\limits_0^c f(x)dx - \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| \le \frac{2}{N-1} \to 0$$

Возникает вопрос, а с точки зрения нового определения будет эта функция интегрируема или нет? Если допускать исчерпание, как в многомерном случае, то можно выбрать любую перестановку отрезков: $\mathrm{I}_{\varphi(1)}, \mathrm{I}_{\varphi(2)}, \ldots$ и брать объединение:

$$E_m = \bigcup_{k=1}^{m} \mathrm{I}_{\varphi(k)} \Rightarrow \int\limits_{E_m} f(x)dx \xrightarrow[m \to \infty]{} \text{перестановка ряда } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = A$$

А мы знаем, что перестановкой такого ряда можно получить произвольное число A или $\pm\infty$ (теорема Римана). По итогу окажется (без доказательства), что никакой условной сходимости в новом определении не будет.

Утв. 1. Пусть E - допустимое множество, f - интегрируема по Риману на E (в обычном смысле). Если $\{E_n\}$ это исчерпание E (будут лежать в $\mathcal{E}_f$, так как E_n - это допустимые множества, а f интегрируема на допустимом множестве $\Rightarrow$ интегрируема на подмножестве допустимого), то верно:

1) $|E| = \lim\limits_{m\to\infty} |E_m|$;
2) $\int_E f(x)dx = \lim\limits_{m\to\infty} \int_{E_m} f(x)dx$;

□

1) По определению: $E_m \subset E_{m+1} \subset E$, тогда: $|E_m| \uparrow$ (не возрастает) и $|E_m| \leq |E|$. Следовательно:
$$\exists \lim_{m\to\infty} |E_m| \wedge \lim_{m\to\infty} |E_m| \leq |E|$$
Поскольку множества допустимы, то ∂E_m, ∂E - это множества меры нуль по Лебегу, кроме того граница это замкнутое множество, а поскольку E само было ограниченным $\Rightarrow$ это компакт, тогда:
$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists\, \Delta_m, \Delta\colon |\Delta_m| < \frac{\varepsilon}{2^m},\, |\Delta| < \varepsilon,\, \partial E_m \subset \Delta_m,\, \partial E \subset \Delta$$
где Δ_m, Δ - конечные объединения открытых кубов (взяли кубы, поскольку компакт $\Rightarrow$ конечное покрытие, а конечное объединение допустимых множеств это допустимое множество $\Rightarrow$ можно написать их объем), которые покрывают границу. Также, мы воспользовались тем, что граница это множество меры нуль $\Rightarrow$ есть ограничения на объем Δ_m, Δ. Тогда рассмотрим множество:
$$\mathcal{U}_m = E_m \cup \Delta_m \cup \Delta$$
это открытое множество, поскольку если точка лежит в Δ_m, Δ, то там открытые множества $\Rightarrow$ входит с окрестностью, если точка лежит в E_m $\Rightarrow$ она либо внутренняя, либо граничная $\Rightarrow$ если граничная, то она в дельтах, если внутренняя $\Rightarrow$ с окрестностью входит в E_m. Тогда:
$$\bigcup_m \mathcal{U}_m \supset \overline{E} = E \cup \partial E$$
поскольку E_m закрыло E, а Δ_m, Δ закрыли ∂E. Замыкание это компакт $\Rightarrow$ есть конечное подпокрытие, тогда:
$$\mathcal{U}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{U}_N \supset E,\, E_m \subset E_{m+1} \Rightarrow \Delta \cup \Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_N \cup E_N \supset E \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |E| \leq |E_N| + |\Delta_1| + \ldots + |\Delta_N| + |\Delta| \leq |E_N| + 2\varepsilon$$
Поскольку N - произвольное, то:
$$|E| \leq \lim_{N\to\infty} |E_N| + 2\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \lim_{N\to\infty} |E_N|$$
Заметим, что все это можно было не делать, если бы воспользовались теоремой Лебега (см. далее в курсе). Возьмем $\chi_{E_m}(x)$ и $\chi_E(x)$, $E_m \subset E_{m+1}$ и $\cup_m E_m = E \subset \mathrm{I}$, где I - некоторый брус, тогда:
$$|E_m| = \int\limits_{\mathrm{I}} \chi_{E_m}(x)dx,\, |E| = \int\limits_{\mathrm{I}} \chi_E(x)dx$$
$$0 \leq \chi_{E_m}(x) \leq 1 \wedge \forall x \in \mathrm{I},\, \chi_{E_m}(x) \to \chi_E(x)$$
функции индикаторы - ограничены и последнее верно в силу того, что если точка не лежит в E, то она не лежит ни в каком E_m и там, и там нули, если лежит в E, то верно:
$$\exists\, k\colon x \in E_k \Rightarrow \forall m > k,\, x \in E_m$$
Теорема Лебега о мажорируемой сходимости даёт нам $|E_m| \to |E|$;

2) Следует из предыдущего пункта:

$$\left|\int\limits_E f(x)dx - \int\limits_{E_m} f(x)dx\right| = \left|\int\limits_{E\setminus E_m} f(x)dx\right| \leq \sup_E |f(x)|\cdot(|E| - |E_m|) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$$

■

Таким образом, в случае допустимого E мы понимаем, как нам считать интегралы. В случая, когда E не является допустимым, то хотелось бы понять как оно будет работать, поскольку на каждое исчерпание делать своё исследование - совсем не целесообразно.

Теорема 1. Пусть $f \geq 0$ и $\mathcal{E}_f \neq \varnothing$, тогда из существования предела: $\lim\limits_{m\to\infty}\int_{E_m} f(x)dx$ для одного исчерпания $\{E_m\} \in \mathcal{E}_f$ следует существование предела для всякого исчерпания и эти пределы равны.

□ Пусть $\{E_m\}$ - исчерпание по которому $\exists \lim\limits_{m\to\infty}\int_{E_m} f(x)dx$, возьмем другое исчерпание $\{D_k\}$ из $\mathcal{E}_f$. Заметим, что если взять множества $\{E_m \cap D_k\}_m$, то это будет исчерпанием D_k:

$$D_k \subset E, \bigcup_m E_m = E \Rightarrow \bigcup_m (E_m \cap D_k) = D_k$$

По доказанному утверждению будет верно:

$$\int\limits_{D_k} f(x)dx = \lim_{m\to\infty} \int\limits_{E_m\cap D_k} f(x)dx \leq \lim_{m\to\infty}\int\limits_{E_m} f(x)dx$$

где последнее верно в силу того, что $f(x) \geq 0$ и увеличелась область интегрирования $\Rightarrow$ интеграл мог лишь увеличиться:

$$E_m = (E_m \cap D_k) \cup (E_m \setminus D_k),\ (E_m \cap D_k) \cap (E_m \setminus D_k) = \varnothing \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int\limits_{E_m} f(x)dx = \int\limits_{E_m\cap D_k} f(x)dx + \int\limits_{E_m\setminus D_k} f(x)dx \geq \int\limits_{E_m\cap D_k} f(x)dx + 0 = \int\limits_{E_m\cap D_k} f(x)dx$$

Также заметим, что:

$$D_k \subset D_{k+1} \wedge f(x) \geq 0 \Rightarrow \int\limits_{D_k} f(x)dx \leq \int\limits_{D_{k+1}} f(x)dx \leq \lim_{m\to\infty}\int\limits_{E_m} f(x)dx$$

то есть последовательность интегралов не возрастает и ограничена, следовательно:

$$\exists \lim_{k\to\infty}\int\limits_{D_k} f(x)dx \leq \lim_{m\to\infty}\int\limits_{E_m} f(x)dx$$

Меняем местами эти исчерпания и получаем равенство. ■

Следствие 1. Пусть $\varnothing \neq \mathcal{E}_f \subset \mathcal{E}_g$ и $|f| \leq g$, тогда из интегрируемости g по множеству E следует интегрируемость f по множеству E.

□ Рассмотрим функции:

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} \geq 0,\ f^-(x) = \max\{-f(x), 0\} \geq 0$$

Тогда: $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$, кроме того, мы подставили функцию $f(x)$ в $\max\{x, 0\}$, $\max\{-x, 0\}$ - Липшицевы функции (хотя нам достаточно просто непрерывности функции $\Rightarrow$ получаем подстановку интегрируемой функции в непрерывную, см. следствие 2 лекции 4) $\Rightarrow f^+(x), f^-(x)$ интегрируемы там же, где и $f(x)$, тогда:

$$\mathcal{E}_f \subset \mathcal{E}_{f^+},\ \mathcal{E}_f \subset \mathcal{E}_{f^-}$$

Заметим, что исчерпания для $f^+(x)$ и $f^-(x)$ могут иметь гораздо больше возможностей, чем просто f, например, если $f^-(x) \equiv 0$. Возьмем исчерпание $\{E_m\} \in \mathcal{E}_f$, тогда:

$$f^+(x) \leq |f(x)| \leq g(x) \Rightarrow \int\limits_{E_m} f^+(x)dx \leq \int\limits_{E_m} g(x)dx$$

$$f^-(x) \leq |f(x)| \leq g(x) \Rightarrow \int\limits_{E_m} f^-(x)dx \leq \int\limits_{E_m} g(x)dx$$

По условию $\exists \lim\limits_{m\to\infty} \int_{E_m} g(x)dx \Rightarrow$ ограничены $\Rightarrow$ последовательность $\int_{E_m} f^+(x)dx$ - ограниченна и $\uparrow$ (не убывает) $\Rightarrow$ есть предел: $\exists \lim\limits_{m\to\infty} \int_{E_m} f^+(x)dx$, аналогично для $f^-(x)$: $\exists \lim\limits_{m\to\infty} \int_{E_m} f^-(x)dx$. Тогда по арифметике пределов и линейности обычного интеграла существует предел:

$$\exists \lim_{m\to\infty} \int\limits_{E_m} f(x)dx = \lim_{m\to\infty} \int\limits_{E_m} (f^+(x) - f^-(x))dx = \lim_{m\to\infty} \int\limits_{E_m} f^+(x)dx - \lim_{m\to\infty} \int\limits_{E_m} f^-(x)dx$$

Из существования пределов: $\exists \lim\limits_{m\to\infty} \int_{E_m} f^+(x)dx$, $\lim\limits_{m\to\infty} \int_{E_m} f^-(x)dx$ и теоремы доказанной выше следует, что $f^+(x)$ и $f^-(x)$ интегрируемы на E в несобственном смысле. Тогда:

$$\lim_{m\to\infty} \int\limits_{E_m} f(x)dx = \lim_{m\to\infty} \int\limits_{E_m} f^+(x)dx - \lim_{m\to\infty} \int\limits_{E_m} f^-(x)dx = \int\limits_{E} f^+(x)dx - \int\limits_{E} f^-(x)dx$$

Следовательно, предел слева не зависит от $\{E_m\} \Rightarrow f(x)$ - интегрируема. ■

Rm: 4. Пусть $\mathcal{E}_f = \mathcal{E}_{|f|} \neq \varnothing$, тогда f интегрируема на E в несобственном смысле $\Leftrightarrow$ $|f|$ интегрируема на E в несобственном смысле (без доказательства, его можно посмотреть в Зориче во 2-м томе разложено в задачах). Следовательно, никакой условной сходимости нет.

Пример: Рассмотрим следующий несобственный интеграл ($\mathbb{R}^2$ не является допустимым множеством):

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}dxdy$$

Хотим понять, сходится ли этот интеграл. Попробуем посмотреть на исчерпание квадратами:

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}dxdy = \lim_{m\to\infty} \iint\limits_{[-m,m]\times[-m,m]} e^{-x^2-y^2}dxdy = \lim_{m\to\infty} \int\limits_{-m}^{m} \left(\int\limits_{-m}^{m} e^{-x^2} \cdot e^{-y^2} dx \right) dy = (*)$$

где в предпоследнем равенстве мы воспользовались теоремой Фубини. Мы знаем, что в одномерном случае интеграл от e^{-x^2} сходится на $\mathbb{R}$, тогда:

$$(*) = \lim_{m\to\infty} \int\limits_{-m}^{m} e^{-x^2}dx \cdot \int\limits_{-m}^{m} e^{-y^2}dy = \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt\right)^2$$

Возьмем другое исчерпание - шарами: $E_m = \{x \colon \|x\| < m\} \Rightarrow$ интеграл от этой функции по шару лучше всего считать в полярной системе координат, где:

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi \Rightarrow \mathrm{J}(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} \Rightarrow |\mathrm{J}(r,\varphi)| = r$$

и якобиан замены здесь $r \Rightarrow$ видно, что теорема о замене переменных здесь уже не работает, поскольку такая замена - не диффеоморфизм (поскольку у нас есть зануление якобиана в точке 0 и нет однозначности, если φ идет по полному обороту). Следовательно, отойдем от 0 на какое-либо положительное $\delta > 0$ и сделаем вырезку полосы ширины δ:

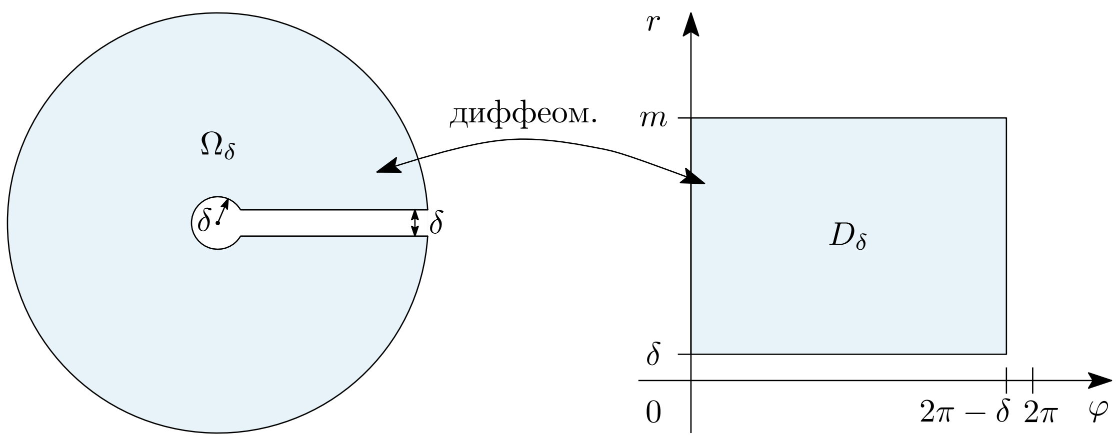

Рис. 2: Диффеоморфизм для формулы замены переменной между Ω_δ и D_δ.

Таким образом, получим диффеоморфизм между сферой с вырезкой и $[\delta, m] \times [0, 2\pi - \delta] \Rightarrow$ можем воспользоваться заменой координат, а затем можно устремить $\delta \to 0$ и проверить, что у интегралов справа и слева ничего не происходит при таком предельном переходе. Используя ФЗП:

$$\int\limits_{\Omega_\delta} e^{-x^2-y^2}dxdy = \int\limits_{D_\delta} e^{-r^2} r dr d\varphi$$

Далее мы хотим $\delta \to 0$, возникает вопрос, почему мы придем к интегралу по Ω и интегралу по D (если выражения под интегралами выше интегрируемы по Ω и по D)? По теореме 1. Сделаем замену переменных:

$$\iint\limits_{E_m} e^{-x^2-y^2}dxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^m e^{-r^2} r dr = 2\pi \int\limits_0^m e^{-r^2} r dr = \pi \int\limits_0^{m^2} e^{-t}dt = \pi(1 - e^{-m^2}) \xrightarrow[m\to\infty]{} \pi$$

Поскольку под интегралом неотрицательная функция, то мы доказали, что этот интеграл сходится и равен $\pi \Rightarrow$ по теореме значение интеграла не зависит от выбора исчерпания, тогда:

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}dxdy = \lim_{m\to\infty} \iint\limits_{x^2+y^2\leq m} e^{-x^2-y^2}dxdy = \pi$$

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}dxdy = \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt\right)^2 = \pi \Rightarrow \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$$

И мы снова получили значение интеграла Эйлера-Пуассона.

Rm: 5. Подобным же образом можно избавляться от особых точек: если в области есть плохие точки и мы можем вырезать - сделать замену - перейти обратно к пределу $\Rightarrow$ считается, что вы можете делать замены переменных. В частности, если такая точка одна и интегралы в ФЗП справа/слева существуют, то их результаты будут совпадать.

Rm: 6. Отметим, что ФЗП для областей с особенностями разбирается во 2-ом томе Зорича (замена переменных в кратных интегралах, теорема 2).

Пример: Рассмотрим множество $E = \{x\colon 0 < \|x\| < 1\}$ и функцию $f(x) = \frac{1}{\|x\|^p}$. Хотим выяснить при каких p функция $f(x)$ интегрируема по множеству E? Рассмотрим интеграл по исчерпанию:

$$\int\limits_{\frac{1}{m}<\|x\|<1} \frac{1}{\|x\|^p}dx = |x = \psi(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}, r),\ \mathrm{J} = r^{n-1}\cdot g(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})| =$$

$$= \int\limits_{\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1}} d\varphi_1 \ldots d\varphi_{n-1} \int\limits_{\frac{1}{m}}^{1} \frac{1}{r^p}\cdot r^{n-1}\cdot|g(\varphi)|dr = \int\limits_{\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1}} |g(\varphi)|d\varphi_1 \ldots d\varphi_{n-1} \int\limits_{\frac{1}{m}}^{1} \frac{1}{r^{p-n+1}}dr$$

где мы воспользовались заменой переменных и нам в этой ситуации не важно, как устроена функция от углов: $g(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$. Интеграл от φ это некоторое ненулевое число, поскольку это интеграл от положительной функции $\Rightarrow$ нулём оказаться не может $\Rightarrow$ нас будет интересовать только интеграл справа: когда у него есть предел при $m \to \infty$? Это вопрос про то, когда сходится этот интеграл в нуле. Тогда:

$$\text{сходимость } \int\limits_0^1 \frac{1}{\|x\|^p}dx \Leftrightarrow \text{сходимость } \int\limits_0^1 \frac{1}{r^{p-n+1}}dr$$

То есть, сходимость есть при: $p-n+1 < 1 \Leftrightarrow p < n$. Это происходит из-за того, что появляется якобиан и помогает интегрируемости. Попробуем всё же осознать чему равен интеграл от углов, для этого возьмем интеграл от 1 по единичному шару ω_n и перейдем в полярную систему координат:

$$|\omega_n| = \int\limits_{\|x\|<1} 1dx = \int\limits_{\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1}} |g(\varphi)|d\varphi \int\limits_0^1 r^{n-1}dr = \frac{1}{n} \int\limits_{\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1}} |g(\varphi)|d\varphi \Rightarrow \int\limits_{\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1}} |g(\varphi)|d\varphi = n\cdot|\omega_n|$$

Заодно мы умеем переходить в полярную систему координат, когда под интегралом стоит радиальная функция и это на самом деле почти все типичные ситуации, когда это надо уметь делать:

$$\int\limits_{\|x\|<R} f(\|x\|)dx = n\cdot|\omega_n|\cdot \int\limits_0^R f(r)\cdot r^{n-1}dr$$