Интеграл Римана по множеству

Опр: 1. Интеграл Римана по произвольному множеству E (где E - ограничено) это интеграл:

$$\int\limits_E f(x)dx = \int\limits_{\mathrm{I}} \widetilde{f}(x)dx, \quad \overline{E} \subset \mathring{\mathrm{I}}, \quad \widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in E \\ 0, & x \notin E \end{cases}$$

Rm: 1. Можно себе представлять, что все функции определены всюду и мы берём: $\widetilde{f}(x) = f(x) \cdot \chi_E(x)$.

Как мы проверели, определение - корректно.

Утв. 1. $\int_E 1dx$ существует $\Leftrightarrow \partial E$ - множество меры нуль по Лебегу.

Опр: 2. Множество E допустимо (измеримо по Жордану), если E - ограничено и ∂E это множество меры нуль по Лебегу.

Опр: 3. Объемом допустимого множества E называется интеграл: $|E| = \int_E 1dx$.

Утв. 2. Если E допустимо и $|E| = 0$, то $\forall$ ограниченная функция f интегрируема по Риману на E и кроме того, верно: $\int_E f(x)dx = 0$.

Теорема 1. (**Критерий Лебега для допустимых множеств**) Пусть E - допустимое множество. Тогда f интегрируема на $E \Leftrightarrow f$ - ограничена на E и непрерывна почти всюду на E.

Утв. 3. Если E это компакт меры нуль по Лебегу, то E - допустимое множество и $|E| = 0$.

$\square$ Поскольку E - компакт, то $\partial E \subset E \Rightarrow \partial E$ это множество меры нуль $\Rightarrow \chi_E(x)$ - интегрируема и почти всюду равна $0 \Rightarrow |E| = 0$ (см. утв. 6 лекция 3). $\blacksquare$

Rm: 2. Из того, что ограниченное множество является множеством меры нуль не следует, что это множество - допустимое.

Пример: $\mathbb{Q}$ в отрезке $[0, 1]$.

Упр. 1. Верно ли, что всякий компакт является допустимым множеством? (ответ - нет, но нужно понять может ли у компакта граница быть не меры 0).

Утв. 4. Если E_1 и E_2 - допустимые множества, то $E_1 \cup E_2$, $E_1 \setminus E_2$, $E_1 \cap E_2$ - допустимые множества.

Rm: 3. Таким образом, $\mathcal{A} = \{E \subset \mathrm{I} \mid E$ - допустимые $\}$ - алгебра подмножеств в I. Является ли это σ-алгеброй? Нет, пример: объединение рациональных точек (то есть с рациональными координатами), так как точка - допустимое множество, а счётное объединение точек уже может быть не допустимым.

$\square$ Ограниченность - очевидна: объединение, пересечение, вычитание ограниченных множеств - ограниченно. Покажем, что: $\partial(E_1 \cup E_2)$, $\partial(E_1 \cap E_2)$, $\partial(E_1 \setminus E_2) \subset \partial E_1 \cup \partial E_2$. Пусть $a \notin \partial E_1 \cup \partial E_2$, тогда возможно несколько вариантов:

1) a - внешняя для E_1 и для $E_2 \Rightarrow E_1 \cup E_2$ - внешняя, $E_1 \cap E_2$ - внешняя, $E_1 \setminus E_2$ - внешняя $\Rightarrow a$ не является граничной;
2) a - внешняя для E_1 и внутренняя для $E_2 \Rightarrow E_1 \cup E_2$ - внутренняя, $E_1 \cap E_2$ - внешняя (есть окрестность, где нет точек E_1), $E_1 \setminus E_2$ - внешняя $\Rightarrow a$ не является граничной;

3) a - внутренняя для E_1 и внешняя для E_2 $\Rightarrow$ $E_1 \cup E_2$ - внутренняя, $E_1 \cap E_2$ - внешняя (есть окрестность, где нет точек E_2), $E_1 \setminus E_2$ - внутренняя $\Rightarrow a$ не является граничной;

4) a - внутренняя для E_1 и для $E_2 \Rightarrow E_1 \cup E_2$ - внутренняя, $E_1 \cap E_2$ - внутренняя, $E_1 \setminus E_2$ - внешняя (есть окрестность, где все точки из $E_2 \Rightarrow$ не из дополнения) $\Rightarrow a$ не является граничной;

Следовательно, все эти множества входят в $\partial E_1 \cup \partial E_2$, а объединение двух множеств меры нуль это множество меры нуль. ■

Свойства интеграла Римана по множеству

Теорема 2. Пусть E - допустимое множество (в пунктах $1-2$ допустимость не требуется).

1) Если f, g интегрируемы на E, то $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha\cdot f(x) + \beta\cdot g(x)$ интегрируемы на E и верно:

$$\int\limits_E (\alpha\cdot f(x) + \beta\cdot g(x))dx = \alpha \int\limits_E f(x)dx + \beta \int\limits_E g(x)dx$$

2) Если f, g интегрируемы на E и $f \le g$, то:

$$\int\limits_E f(x)dx \le \int\limits_E g(x)dx$$

3) (**Теорема о среднем**): Если f интегрируема на E, то $\exists\, \mu \in [\inf\limits_E f, \sup\limits_E f]$ такое, что:

$$\int\limits_E f(x)dx = \mu\cdot|E|$$

Если E - связно и f - непрерывна на E, то $\exists\, c \in E\colon \mu = f(c)$;

4) (**Полезные неравенства**): Пусть f, g интегрируемы на E, тогда:

$$\left|\int\limits_E f(x)dx\right| \le \int\limits_E |f(x)|dx, \quad \int\limits_E f(x)\cdot g(x)dx \le \sqrt{\int\limits_E f^2(x)dx}\cdot\sqrt{\int\limits_E g(x)dx}$$

□

1) f, g интегрируемы на E, тогда по определению: $\exists\, \mathrm{I}\colon \overline{E} \subset \mathring{\mathrm{I}}$, рассматриваем $\widetilde{f}$ и $\widetilde{g}$:

$$\int\limits_E \alpha\cdot f(x) + \beta\cdot g(x)dx = \int\limits_{\mathrm{I}} \alpha\cdot\widetilde{f}(x) + \beta\cdot\widetilde{g}(x)dx =$$

$$= \alpha\cdot \int\limits_{\mathrm{I}} \widetilde{f}(x)dx + \beta\cdot \int\limits_{\mathrm{I}} \widetilde{g}(x)dx = \alpha\cdot \int\limits_E f(x)dx + \beta\cdot \int\limits_E g(x)dx$$

Существование этих интегралов это ровно существование интегралов от $\widetilde{f}$ и $\widetilde{g}$ по какому-либо брусу, содержащему $\overline{E}$;

2) f, g интегрируемы на E, тогда по определению: $\exists\, \mathrm{I}\colon \overline{E} \subset \mathring{\mathrm{I}}$, рассматриваем $\widetilde{f}$ и $\widetilde{g}$:

$$f \le g \Rightarrow \widetilde{f} \le \widetilde{g} \Rightarrow \int\limits_E f(x)dx = \int\limits_{\mathrm{I}} \widetilde{f}(x)dx \le \int\limits_{\mathrm{I}} \widetilde{g}(x)dx = \int\limits_E g(x)dx$$

3) f - интегрируема $\Rightarrow f$ - ограничена $\Rightarrow \inf\limits_E f \le f \le \sup\limits_E f$, поскольку E - допустимое, то:

$$\inf_E f(x)\cdot|E| \le \int\limits_E f(x)dx \le \sup_E f(x)\cdot|E|$$

Если $|E| = 0$, то $\int_E f(x)dx = 0 \Rightarrow \mu \in \mathbb{R}$ - произвольное. Если $|E| \ne 0$, то:

$$\inf_E f(x) \le \frac{1}{|E|}\cdot \int\limits_E f(x)dx \le \sup_E f(x) \Rightarrow \mu := \frac{1}{|E|}\cdot \int\limits_E f(x)dx \in [\inf_E f, \sup_E f]$$

4) Заметим, что: $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$, тогда по интегрируемости и монотонности:

$$-\int\limits_E |f(x)|dx \le \int\limits_E f(x)dx \le \int\limits_E |f(x)|dx \Rightarrow \left|\int\limits_E f(x)dx\right| \le \int\limits_E |f(x)|dx$$

f, g интегрируемы на E, тогда по определению: $\exists\, \mathrm{I}\colon \overline{E} \subset \mathring{\mathrm{I}}$ и $\widetilde{f}, \widetilde{g}$ интегрируемы на $\mathrm{I} \Rightarrow \widetilde{f}\cdot\widetilde{g}$ интегрируемы на I, следовательно по определению $f\cdot g$ интегрируемы на E. По неравенству Коши-Буняковского для интегрируемых по Риману функций на I будет верно: $|\langle \widetilde{f}, \widetilde{g}\rangle| \le \|\widetilde{f}\|\cdot\|\widetilde{g}\|$, тогда:

$$\int\limits_{\mathrm{I}} \widetilde{f}(x)\cdot\widetilde{g}(x)dx = \int\limits_E f(x)\cdot g(x)dx \le \sqrt{\int\limits_{\mathrm{I}} \widetilde{f}(x)dx}\cdot\sqrt{\int\limits_{\mathrm{I}} \widetilde{g}(x)dx} = \sqrt{\int\limits_E f(x)dx}\cdot\sqrt{\int\limits_E g(x)dx}$$

■

Теорема 3.

1) Пусть E - допустимое множество и f интегрируема на E, если $D \subset E$ и D - допустимо, то f интегрируема на D;

2) Если E_1, E_2 - допустимые и f интегрируема на E_1 и на E_2, то f интегрируема на $E_1 \cup E_2$ и верно:

$$\int\limits_{E_1\cup E_2} f(x)dx = \int\limits_{E_1} f(x)dx + \int\limits_{E_2} f(x)dx - \int\limits_{E_1\cap E_2} f(x)dx$$

В частности, если $|E_1 \cap E_2| = 0$, то последнего слагаемого нет:

$$\int\limits_{E_1\cup E_2} f(x)dx = \int\limits_{E_1} f(x)dx + \int\limits_{E_2} f(x)dx$$

Rm: 4. Заметим, что в первом пункте если отказаться от допустимости D, то утверждение станет не верным. Например, 1 интегрируема на отрезке, но не является интегрируемой по Риману на $\mathbb{Q}$.

$\square$

1) f интегрируема на $E \Rightarrow$ по критерию Лебега f ограничена на $E \Rightarrow f$ ограничена на D. Если точка x - точка разрыва f на множестве D, то x - точка разрыва f на множестве $E \Rightarrow$ множество точек разрыва f на $D \subset$ множество точек разрыва f на $E \Rightarrow$ это точки множества меры нуль $\Rightarrow$ по критерию Лебега f интегрируема на D;

2) Пусть $\overline{E}_1 \cup \overline{E}_2 \subset \mathring{\mathrm{I}}$ и считаем, что f определена на I (как угодно продолжаем её вне $\overline{E}_1 \cup \overline{E}_2$). Очевидно равенство:
$$f\cdot\chi_{E_1\cup E_2} = f\cdot\chi_{E_1} + f\cdot\chi_{E_2} - f\cdot\chi_{E_1\cap E_2}$$
Тогда, f интегрируема на $\mathrm{I} \Rightarrow f\cdot\chi_{E_1}$ - интегрируемаая функция на I, аналогично можно сказать про $f\cdot\chi_{E_2}$ - она интегрируема на I. Взяли подмножество: $E_1 \cap E_2 \subset E_1 \Rightarrow$ оно допустимое $\Rightarrow f\cdot\chi_{E_1\cap E_2}$ интегрируема на I (смотри первый пункт). По линейности, сумма интегрируемых функций даст интегрируему функцию $\Rightarrow f$ интегрируема на $E_1 \cup E_2$. Применяем линейность и получаем:
$$\int\limits_{\mathrm{I}} f(x)\cdot\chi_{E_1\cup E_2}(x)dx = \int\limits_{\mathrm{I}} f(x)\cdot\chi_{E_1}(x)dx + \int\limits_{\mathrm{I}} f(x)\cdot\chi_{E_2}(x)dx - \int\limits_{\mathrm{I}} f(x)\cdot\chi_{E_1\cap E_2}(x)dx$$

$\blacksquare$

Rm: 5. То есть на самом деле аддитивности, как отдельного свойства, на самом деле нет. Аддитивность это следствие линейности, применяемой с индикаторами.

Теорема 4. (**Фубини**) Пусть E - допустимое множество, $\overline{E} \subset \mathring{\mathrm{I}}$ и $\mathrm{I} = \mathrm{I}_x \times \mathrm{I}_y$, где $\mathrm{I}_x \subset \mathbb{R}^n$, $\mathrm{I}_y \subset \mathbb{R}^m$.

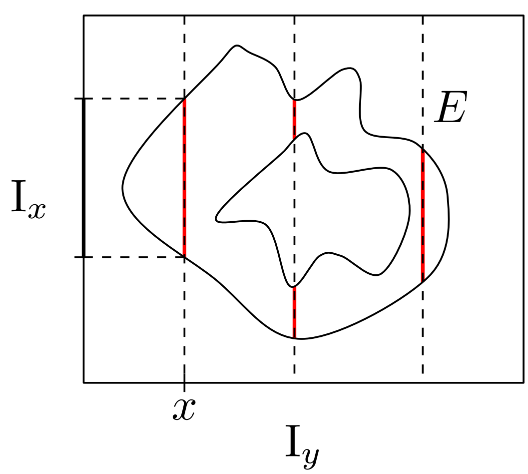

Рис. 1: Множество E_x.

Положим $E_x = \{y \mid (x,y) \subset E\} \subset \mathrm{I}_y$. Пусть $\forall x \in \mathrm{I}_x$, E_x - допустимое в $\mathbb{R}^m$, функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ интегрируема по Риману и $\forall x$, $y \mapsto f(x,y)$ интегрируема на E_x. Тогда верно:
$$\iint_E f(x,y)dxdy = \int\limits_{\mathrm{I}_x} \left(\int\limits_{E_x} f(x,y)dy \right) dx$$

□ Рассмотрим индикатор множества E и заметим, что: $\chi_E(x,y) = \chi_{E_x}(y)$, поскольку оно верно при каждом фиксированном x для всех $y \Rightarrow$ выполнено вообще для всех $(x,y) \Rightarrow$ равенство верно. Считаем, что f продолжена на весь брус I вне множества E, по условию функция $y \mapsto f(x,y)\chi_{E_x}(y)$ интегрируема на I_y. Тогда, как вся функция: $f(x,y)\cdot\chi_E(x,y) = f(x,y)\cdot\chi_{E_x}(y)$ интегрируема на I. По теореме Фубини для бруса мы получаем:

$$\iint_E f(x,y)dxdy = \iint_{\mathrm{I}} f(x,y)\chi_E(x,y)dxdy = \int\limits_{\mathrm{I}_x}\left(\int\limits_{\mathrm{I}_y} f(x,y)\cdot\chi_{E_x}(y)dy\right)dx = \int\limits_{\mathrm{I}_x}\left(\int\limits_{E_x} f(x,y)dy\right)dx$$

где последнее верно по определению. ■

Rm: 6. От допустимости можно отказаться, но пришлось бы давать такие же комментарии, как мы давали в теореме Фубини. Более того, можно было бы не требовать допустимости E_x, а требовать только интегрируемость f на E_x, также как можно было бы не требовать допустимость E, а требовать интегрируемость f на E.

Следствие 1. (**Принцип Кавальери**)

$$|E| = \int\limits_{\mathrm{I}_x} |E_x|dx$$

Rm: 7. Значение принципа следующее: если вы хотите найти объем какого-то тела, то вы начинаете его рассекать, смотреть сечения и потом, грубо говоря, суммировать площади сечения.

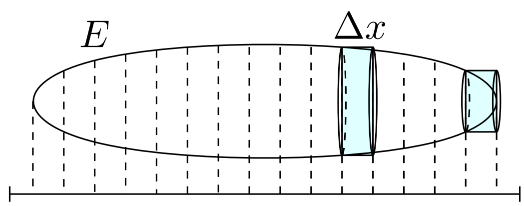

Рис. 2: Разбиение на сечения и получение объема тела E.

Rm: 8. Отсюда возможны простые наблюдения: если взяли два тела над одним и тем же множеством (например, отрезком, квадратом) и начинаем измерять, что площади сечения совпадают $\Rightarrow$ объемы совпадают. И опять же это будет следовать из формулы принципа Кавальери $\Rightarrow V_1 = V_2$.

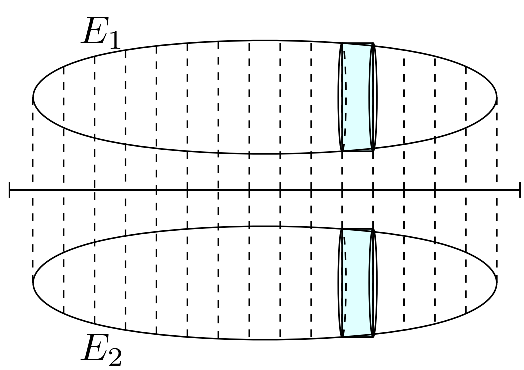

Рис. 3: Совпадение объемов у тел с совпадающими сечениями.

Упр. 2. Найти объем шара с помощью объема цилиндра и конуса.

□ Пусть у нас есть шар радиуса a, площадь его сечения на расстоянии от центра h равна:

$$S_{sec}^{sph} = \pi \cdot \left(\sqrt{a^2 - h^2}\right)^2 = \pi \cdot (a^2 - h^2)$$

Площадь сечения цилиндра радиуса a в любой точке равна:

$$S_{sec}^{cyl} = \pi \cdot a^2$$

Площадь сечения двойного конуса радиуса a, вписанного в цилиндр высоты a на расстоянии h от центра равна:

$$S_{sec}^{con} = \pi \cdot h^2$$

Таким образом, разность площадей цилиндра и конуса на расстоянии h от центра конуса равна:

$$S_{sec}^{cyl} - S_{sec}^{con} = \pi \cdot a^2 - \pi \cdot h^2 = \pi \cdot (a^2 - h^2) = S_{sec}^{sph}$$

Тогда по принципу Кавальери, объем шара, равен объему цилиндра радиуса a и высотой $2a$ за вычетом объема двойного конуса радиуса a и высотой $2a$.

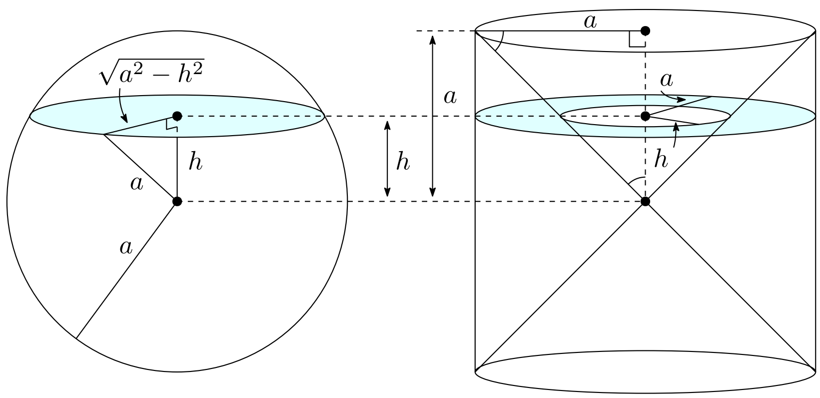

Рис. 4: Площади сечения шара, цилиндра и конуса.

■

Формула заменых переменных

Утв. 5. Пусть $\mathcal{U}$ - открытое множество в $\mathbb{R}^n$, тогда:

1) $\mathcal{U}$ - это объединение не более, чем счётного набора замкнутых кубов, которые пересекаются лишь по границе;

2) $\mathcal{U}$ - это объединение не более, чем счётного набора замкнутых кубов, которые попарно не пересекаются и множества меры нуль по Лебегу;

3) $\mathcal{U}$ - это объединение не более, чем счётного набора замкнутых шаров положительного радиуса, которые попарно не пересекаются и множества меры нуль по Лебегу;

$\square$

1) Пройдем все оси с шагом 1 $\Rightarrow$ появляется сетка, те клетки которые целиком попали в $\mathcal{U}$, мы забираем. И говорим, что F_1 - набор всех клеток с ребром 1, попавших в $\mathcal{U}$:

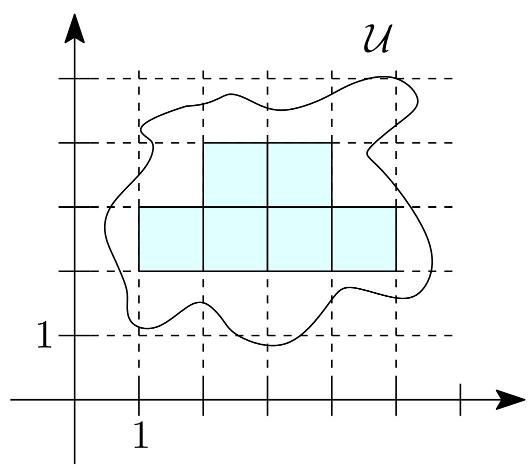

Рис. 5: Построение множества F_1.

Дальше мы идем с шагом $\frac{1}{2}$ по тем же самым осям, появляются новые клетки, которые мы могли не взять с ребром $\frac{1}{2}$. И говорим, что $F_{\frac{1}{2}}$ - набор всех клеток с ребром $\frac{1}{2}$, попавших в $\mathcal{U}$, но которые не лежат в уже взятых.

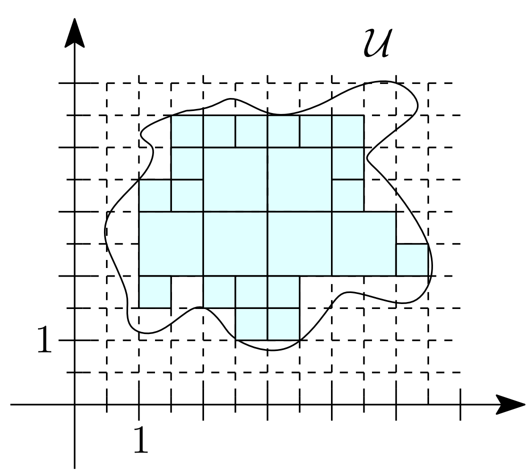

Рис. 6: Построение множества $F_{\frac{1}{2}}$.

И так далее, продолжаем формировать множества $F_{\frac{1}{4}}, F_{\frac{1}{8}}, F_{\frac{1}{16}}, \ldots$. Таким образом, мы получаем большое множество из этих клеток, пусть $\{K_m\}$ это все клетки всех $F_{\frac{1}{2^p}}$. По построению ясно, что никакие две не пересекаются внутренностями:

$$\forall k, l, k \neq l,\ \mathring{K}_k \cap \mathring{K}_l = \varnothing,\ K_k \cap K_l \subset \partial K_k \cup \partial K_l$$

Нам необходимо проверить, что: $\mathcal{U} = \cup_m K_m$. Возьмем произвольную точку $a \in \mathcal{U} \Rightarrow$ нам необходимо проверить, что $\exists\, l\colon a \in K_l$. Поскольку $\mathcal{U}$ - открыто, то a лежит в нем вместе с некоторой своей окрестностью, пусть это будет брус I_a. Далее, делаем разбиение осей длины меньше, чем расстояние от точки a до краев этого бруса. То есть:

$$\mathrm{I}_a = [\alpha_1, \beta_1] \times [\alpha_2, \beta_2] \times \ldots \times [\alpha_n, \beta_n] \Rightarrow \exists\, r\colon \frac{1}{2^r} < \beta_i - \alpha_i,\ \forall i = \overline{1, n}$$

Таким образом, каждая из координат $a = (a_1, \ldots, a_n)$ попадет в какой-то из отрезков разделения осей $\Rightarrow$ вся точка попадет в квадрат, который должен быть построен на r-ом шаге. И либо этот квадрат уже лежит в каком-то квадрате, который мы взяли раньше $\Rightarrow$ точка a лежит в каком-то квадрате, взятом раньше, либо в квадрате на r-ом шаге $\Rightarrow$ точка a лежит в каком-то квадрате.

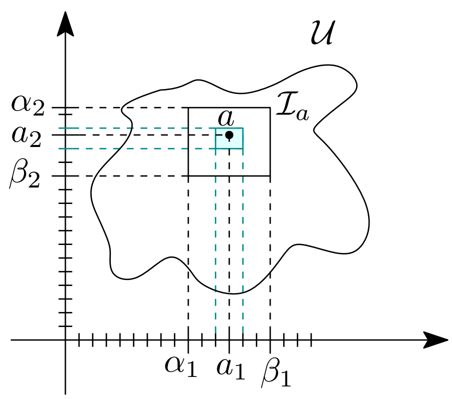

Рис. 7: Нахождение квадрата для любой точки $a \in \mathcal{U}$.

Квадраты могут пересекаться лишь по границам $\Rightarrow \mathcal{U} = \bigcup\limits_m K_m$;

2) **Идея доказательства**: Квадраты, построенные на предыдущем шаге могут пересекаться по границам $\Rightarrow$ нужно границы удалить $\Rightarrow$ объединение границ будет образовывать множество меры нуль. Теперь у нас есть множество попарно непересекающихся открытых квадратов.

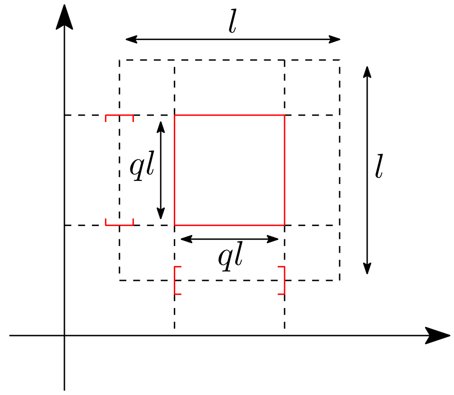

Рис. 8: Выделение замкнутого куба внутри открытого квадрата.

Каждый из таких квадратов теперь надо представить в виде объединения замкнутых кубов. Для этого, мы берем число $q \in (0,1)$ и вырезаем на каждом ребре длины l центрированный отрезок длины $ql \Rightarrow$ вырезается замкнутый квадрат. Если объем исходного квадрата был $|K|$, то объем вырезанного будет $q^n|K|$. После этого, весь квадрат распадается в объединении брусков. Их можно также раздробить на квадраты, и затем для каждого из них повторить процедуру.

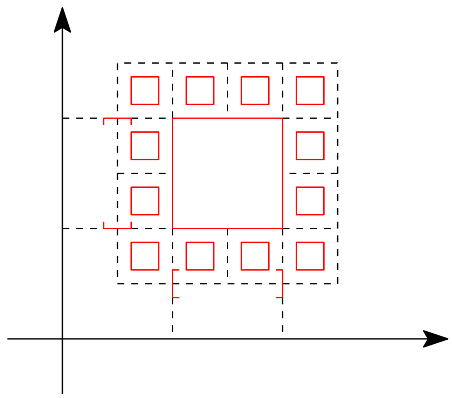

Рис. 9: Повторение процедуры разбинеия.

Следовательно, надо подобрать q так, чтобы сумма объемов в итоге сходилась к $|K|$. То что осталось вне - множестве меры нуль (решение не полное) -упр. Получится, что квадрат это объединение замкнутых попарно непересекающихся кубов;

3) Упр. Аналогично, должно разбираться на действительном анализе.

■

Утв. 6. В определении множества меры нуль по Лебегу произвольные бруски можно заменить кубами.

□ По определению:

$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists \{\mathrm{I}_m\} \colon E \subset \bigcup_m \mathrm{I}_m \wedge \sum_m |\mathrm{I}_m| < \varepsilon$$

1) Можно в определении брать бруски с рёбрами, рациональной длины: имеющийся брусок можно поместить в брусок у которого рёбра удлинились максимум в три раза.

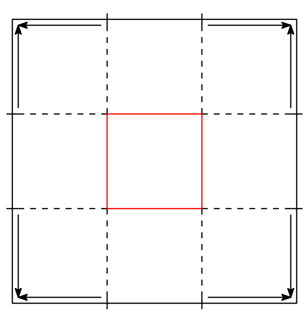

Рис. 10: Повторение процедуры разбиения.

Объем нового бруска $\widetilde{\mathrm{I}}$ будет ограничен:

$$|\widetilde{\mathrm{I}}| \leq 3^n|\mathrm{I}|$$

Тогда рациональные точки найдутся в удлиненных ребрах $\Rightarrow$ берём ребро рациональной длины.

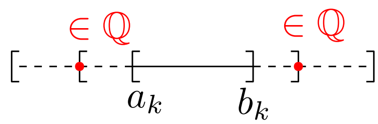

Рис. 11: Взятие ребра рациональной длины.

Увеличение объема обходится нам в одну фиксированную константу, если $\varepsilon > 0$ - произвольное, то мы ничего не теряем;

2) Бруски с рёбрами рациональной длины гораздо проще разбивается на кубы. Например, если у нас брусок K_j^m с рёбрами $\frac{k}{l}$ и $\frac{p}{q}$, тогда можно разбить такой прямоугольник на квадраты, взяв дробление каждой стороны с шагом: $\frac{1}{lq}$.

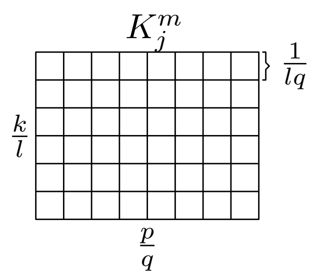

Рис. 12: Разбиение бруска на кубы.

Объем таких квадратов:

$$\sum_j |K_j^m| = |\mathrm{I}_m|$$

где K_j^m будут кубами и вместе с этим верно:

$$E \subset \bigcup_{j,m} K_j^m, \quad \sum_{j,m} |K_j^m| < \varepsilon$$

$\blacksquare$

Утв. 7. Пусть $\mathcal{U}$ - открытое множество $\subset \mathbb{R}^n$, $f\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}^k$, $k \geq n$ - локально Липшицева, то есть

$$\forall\, \mathrm{I} \text{ - замкнутый брус } \subset \mathcal{U},\ \exists\, C(\mathrm{I}) > 0\colon \forall x, y \in \mathrm{I},\ \|f(x) - f(y)\| \leq C(\mathrm{I}) \cdot \|x - y\|$$

Тогда для всякого множества $E \subset \mathcal{U}$ меры нуль множество $f(E)$ является множеством меры нуль.

Rm: 9. Если заменить f на непрерывную, то это утверждение - не верно, даже для гомеоморфизма (можно построить пример с помощью Канторовского множества, что множество меры нуль Канторовское перешло в множество меры $\frac{1}{2}$).