Меры Лебега

Мера Лебега на $\mathbb{R}^n$

Теорема 1. Пусть $L(x) = Ax+b$, $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, где $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}$, b - вектор. Тогда для всякого измеримого ограниченного множества E верно равенство:

$$\lambda(L(E)) = |\det A|\cdot\lambda(E)$$

Rm: 1. Заметим, что:

$$|\det A| = \sqrt{\det A\cdot \det A} = \sqrt{\det (A\cdot A)} = \sqrt{\det (A^T A)}$$

Как найти элементы матрицы $A^T A$? Если $e_1, \ldots, e_n$ это ортонормированный базис, то её столбцы можно находить так: $A^T Ae_j$, но если есть скалярное произведение в пространстве, то можно выразить сам элемент матрицы (см. линейную алгебру):

$$\left\langle A^T Ae_i, e_j\right\rangle = (A^T A)_{ij} = \langle Ae_i, Ae_j\rangle \Rightarrow \mathbb{R}^n_x \xrightarrow{y=Ax} \mathbb{R}^n_y$$

Следовательно, кубик, натянутый на $(e_1, \ldots, e_n)$ в $\mathbb{R}^n_x$, переходит в параллелепипед, натянутый на $(Ae_1, \ldots, Ae_n)$ в $\mathbb{R}^n_y$. Тогда $v_i = Ae_i$ - вектора на которые натянут определитель A и $(\langle v_i, v_j\rangle)$ это матрица Грама. Таким образом:

$$\lambda(L(E)) = \mathrm{const}\cdot\lambda(E) \Rightarrow \mathrm{const} = \sqrt{\det (\langle v_i, v_j\rangle)}$$

где const вычисляется из того, что мы смотрим в какой параллелепипед переносится единичный куб и для этих векторов: $(v_1, \ldots, v_n)$ считаем матрицу Грама. Такой вариант записи без изменения переносится на всякие плоскости в $\mathbb{R}^n$ и без изменений переносится на кривые поверхности, когда L уже перестает быть линейным отображением и $\lambda(L(E))$ это уже мера Хаусдорфа. В этом случае матрица Грама берется для векторов, соответствующих параллелепипеду - образу единичного куба при отображении, которое для общего отображения является его аффинным приближением по формуле Тейлора.

Мера Лебега на $\mathbb{R}^k$

Пусть у нас есть $\mathbb{R}^n$, $\langle v, u\rangle = v_1u_1 + \ldots + v_nu_n$ - фиксированы. Возьмем $\Pi_k \subset \mathbb{R}^n$ - k-мерную аффинную плоскость и выбираем в ней прямоугольную систему координат: $(\eta_1, \ldots, \eta_k)$, $\langle \eta_i, \eta_j\rangle = \delta_{ij}$ (то есть, с точки зрения фиксированного скалярного произведения это ортонормированные вектора) и тогда каждой точке сопоставляется набор из $(y_1, \ldots, y_k)$. После такого сопоставления мы отождествляем Π_k с $\mathbb{R}^k$ и с $\mathbb{R}^k$ переносим на Π_k меру Лебега: $\lambda_{\Pi_k} \Rightarrow$ можем измерять k-мерные объемы.

Теорема 2. $L(x) = Ax + b\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$, где $n \geq k$ и $\mathrm{rk}\,(A) = k$. Тогда $L(\mathbb{R}^k) = \Pi_k$ - k-мерная аффинная плоскость в $\mathbb{R}^n$ и верно, что для всякого измеримого ограниченного множества $E \subset \mathbb{R}^k$:

$$\lambda_{\Pi_k}(L(E)) = \sqrt{\det (A^T\cdot A)}\cdot\lambda(E)$$

Rm: 2. У нас параметрическое задание плоскости в $\mathbb{R}^3$ из аналитической геометрии. Например:

$$L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ L(x) = b + x_1\eta + x_2\xi = b + A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},\ \eta = Ae_1 = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix},\ \xi = Ae_2 = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

□ Рассмотрим плоскость $\Pi_k \subset \mathbb{R}^n$, которая задается так: $L(x) = Ax + b$, то есть к концу вектора b прикладываются всевозможные вектора $Ax \Rightarrow$ получается k-мерная аффинная плоскость. Поместим в конец вектора b прямоугольную систему координат: $(\eta_1, \ldots, \eta_k)$, $\langle \eta_i, \eta_j \rangle = \delta_{ij}$. Тогда у каждой точки Π_k появятся координаты, следовательно: $Ax \mapsto (y_1, \ldots, y_k)$, где $y_j = \langle Ax, \eta_j \rangle$. Получили отображение:

$$B \colon \mathbb{R}^k_x \to \mathbb{R}^k_y,\ B(x_1, \ldots, x_k) = (\langle Ax, \eta_1 \rangle, \langle Ax, \eta_2 \rangle, \ldots, \langle Ax, \eta_k \rangle) = (y_1, y_2, \ldots, y_k)$$

Очевидно, что B это линейное, невырожденное отображение, поскольку это просто смена системы координат (матрица перехода). Поскольку $\lambda_{\Pi_k}(L(E))$ это по определению ввод ортонормированной системы координат, переписывание $L(E)$ в координатах $(y_1, \ldots, y_k)$ и затем расчёт обычной меры Лебега, то:

$$\lambda_{\Pi_k}(L(E)) = \lambda(B(E)) = |\det B| \cdot \lambda(E) = \sqrt{\det(B^T B)} \cdot \lambda(E) = \sqrt{\det(\langle Be_i, Be_j \rangle)} \cdot \lambda(E)$$

Рассмотрим матрицу $(\langle Be_i, Be_j \rangle)$, где $e_i, e_j \in \mathbb{R}^k$. Матрица Грама устроена так:

$$\langle Be_i, Be_j \rangle_{\mathbb{R}^k_y} = \sum_s \langle Ae_i, \eta_s \rangle_{\mathbb{R}^n} \cdot \langle Ae_j, \eta_s \rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle Ae_i, Ae_j \rangle_{\mathbb{R}^n} = \left\langle A^T Ae_i, e_j \right\rangle_{\mathbb{R}^k_x} \Rightarrow |\det B| = \sqrt{\det(A^T A)}$$

где мы использовали тот факт, что:

$$Be_s = B(0, \ldots, 0, \underset{s}{1}, 0, \ldots, 0) = (\langle Ae_s, \eta_1 \rangle, \langle Ae_s, \eta_2 \rangle \ldots, \langle Ae_s, \eta_k \rangle),\ s = i, j$$

Остальные равенства проверяются непосредственным переходом к координатам, например:

$$\langle Ae_i, \eta_s \rangle_{\mathbb{R}^n} = a_{1i} \cdot \eta_{1s} + a_{2i} \cdot \eta_{2s} + \ldots + a_{ni} \cdot \eta_{ns} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \langle Ae_i, \eta_s \rangle_{\mathbb{R}^n} \cdot \langle Ae_j, \eta_s \rangle_{\mathbb{R}^n} = a_{1i} \cdot a_{1j} \cdot \eta_{1s}^2 + a_{1i} \cdot a_{2j} \cdot \eta_{1s} \cdot \eta_{2s} + \ldots + a_{ni} \cdot a_{nj} \cdot \eta_{ns}^2 + \ldots$$

$$\forall i = \overline{1, n},\ \sum_{s=1}^{k} \eta_{is}^2 = 1 = \langle \eta_i, \eta_i \rangle, \quad \forall i \neq j,\ \sum_{s=1}^{k} \eta_{is} \eta_{js} = 0 = \langle \eta_i, \eta_j \rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_s \langle Ae_i, \eta_s \rangle_{\mathbb{R}^n} \cdot \langle Ae_j, \eta_s \rangle_{\mathbb{R}^n} = a_{1i} \cdot a_{1j} + a_{2i} \cdot a_{2j} + \ldots + a_{ni} \cdot a_{nj} = \langle Ae_i, Ae_j \rangle_{\mathbb{R}^n}$$

■

Мера Хаусдорфа

Пусть мы находимся в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Опр: 1. Пусть $0 < \alpha \leq n$, $\delta > 0$, тогда вспомогательной мерой называется функция:

$$H^\alpha_\delta(E) = \inf \left\{ \sum_j (\operatorname{diam} F_j)^\alpha \colon E \subset \cup_j F_j,\ F_j \text{ - замкнутые},\ \operatorname{diam} F_j = \sup_{x, y \in F_j} |x - y| \leq \delta \right\}$$

Замкнутые множества берем, поскольку при замыкании диаметр не меняется и сумма не меняется также $\Rightarrow$ если умеем покрывать чем-то, то замыкаем и будем покрывать замкнутыми. При этом на точную нижнюю грань это не скажется никак.

Заметим, что выше, при $\delta \to 0+$ у нас множество становится меньше $\Rightarrow$ точная нижняя грань может лишь только увеличиться $\Rightarrow$ возможно лишь невозрастание $H^\alpha_\delta(E) \Rightarrow$ функция монотонна.

Опр: 2. Функция: $H^\alpha(E) = \lim\limits_{\delta \to 0+} H^\alpha_\delta(E)$, где допустимо значение $+\infty$, называется мерой Хаусдорфа.

Сделаем ряд полезных наблюдений, когда мы обсуждаем меру Хаусдорфа.

Вычисление длины прямой мерой Хаусдорфа

Пусть у нас есть отрезок длины l и мы хотим метрически определить его длину. Возьмем покрытие отрезка в виде ε-сети (отрезок - компакт $\Rightarrow$ конечное покрытие):

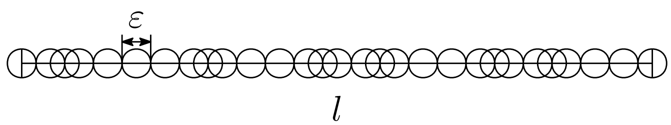

Рис. 1: Покрытие отрезка длины l ε-сетью.

N_ε - количество ε-шаров, покрывающих отрезок $\Rightarrow$ длина будет оцениваться, как $N_\varepsilon \cdot 2\varepsilon$. Поскольку покрытие может быть каким угодно и можно покрывать одно и то же место по несколько раз, то естественно взять самое маленькое выражение: $\inf N_\varepsilon \cdot 2\varepsilon$. Очевидно, что:

$$l \leq \inf N_\varepsilon \cdot 2\varepsilon$$

Можно покрывать отрезок дизъюнктно и выбрать покрытие так, чтобы было верно:

$$N_\varepsilon = \frac{l}{2\varepsilon} \Rightarrow l \leq \inf N_\varepsilon \cdot 2\varepsilon \leq N_\varepsilon \cdot 2\varepsilon + 2\varepsilon = l + 2\varepsilon$$

Далее мы сможем устремить $\varepsilon \to 0$. Или подобрать покрытие так, чтобы: $l \leq \inf N_\varepsilon \cdot 2\varepsilon \leq N_\varepsilon \cdot 2\varepsilon = l$, поскольку для оценки снизу нам нужно любое покрытие, а для оценки сверху = какое-то. Тоже самое можно проделать с площадью: $\inf N_\varepsilon \cdot \pi\varepsilon^2$. По тем же самым соображениям будет получаться:

$$S = \inf N_\varepsilon \cdot \pi\varepsilon^2$$

Мера Хаусдорфа в данном случае хороша тем, что ровно таким же способом будем определять площади, длины и так далее, причем уже не важно, какой объект - любое множество будем накрывать любыми замкнутыми множествами (шары не всегда удобны для покрытия).

После покрытия, посчитаем количество покрытий и умножим на диаметр в подходящей степени α (в зависимости от объекта, который хотим посчитать: длина $\Rightarrow \alpha = 1$, площадь $\Rightarrow \alpha = 2$, и так далее), затем будем брать точную нижнюю грань таких выражений:

$$c \cdot l = \inf N_\varepsilon \cdot (2\varepsilon)^\alpha \Rightarrow \alpha = 1 \Rightarrow c \cdot l = \inf N_\varepsilon \cdot (2\varepsilon)$$

В какой-то момент, окажется, что α может быть дробным. Покрытия не обязательно будут одинаковыми, допустим разные элементы покрытия.

Вычисление произвольной кривой мерой Хаусдорфа

Хотелось бы понять, зачем нам нужно $\delta \to 0$, зачем двухступенчатое определение? Рассмотрим:

$$H_*^\alpha(E) = \inf \left\{ \sum_j (\operatorname{diam} F_j)^\alpha \colon E \subset \cup_j F_j,\ F_j \text{ - замкнутые} \right\}$$

Посчитаем длину единичной окружности. Есть замкнутое множество, которое эту окружность покрывает - сама окружность/круг, тогда $H_*^\alpha(E) \leq 2$, но при этом длина единичной окружности это 2π.

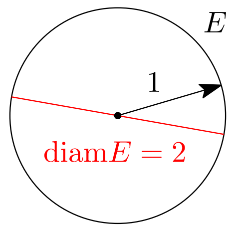

Рис. 2: Покрытие окружности одним кругом.

Аналогично, если мы возьмем очень изрезанную кривую и не будем требовать, чтобы диаметры покрывающих множеств были маленькие, то мы не сможем поймать геометрическую структуру этой кривой, поскольку её можно будет накрыть одним множеством.

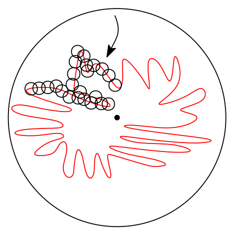

Рис. 3: Измельчение δ позволяет учитывать геометрическую структуру.

Если не будем мельчить покрытие, то никогда не поймаем изгибы, изрезанность или какие-либо другие структуры $\Rightarrow$ для этого приходится брать мельче покрытие $\Rightarrow$ получаем эффект, что уменьшая δ у нас начинает возрастать мера: двигаемся по всё более и более кривой дороге $\Rightarrow$ путь увеличивается.

Утв. 1. H^α - внешняя мера и все борелевские множества измеримы.

$\square$ Проверим, что H^α_δ это внешняя мера:

1) $\forall \delta > 0$, $\varnothing \subset F = \overline{\mathcal{B}}(0, \delta) \Rightarrow$ покрываем точкой $\Rightarrow \operatorname{diam} F = 0 \Rightarrow H^\alpha_\delta(\varnothing) = 0$;

2) $A \subset B \Rightarrow \forall$ покрытия B множествами F_j, $\operatorname{diam} F_j \leq \delta$ верно, что:

$$A \subset \cup_j F_j \Rightarrow H^\alpha_\delta(A) \leq \sum_j (\operatorname{diam} F_j)^\alpha$$

поскольку у нас точная нижняя грань в $H^\alpha_\delta(A)$. Заметим, что $H^\alpha_\delta(A)$ это нижняя граница для $\sum_j (\operatorname{diam} F_j)^\alpha$, а $H^\alpha_\delta(B)$ это точная нижняя граница, тогда по определению: $H^\alpha_\delta(A) \leq H^\alpha_\delta(B)$;

3) Докажем полуаддитивность. Рассмотрим $\cup_m A_m$:

$$\forall m,\ A_m \subset \bigcup_j F_j^m\colon\ \operatorname{diam} F_j^m \leq \delta,\ \sum_j (\operatorname{diam} F_j^m)^\alpha \leq H^\alpha_\delta(A_m) + \frac{\varepsilon}{2^m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bigcup_m A_m \subset \bigcup_{m,j} F_j^m,\ \sum_{m,j} (\operatorname{diam} F_j^m)^\alpha \leq \sum_m H^\alpha_\delta(A_m) + \varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \sum_m H^\alpha_\delta(A_m) \Rightarrow H^\alpha_\delta(\cup_m A_m) \leq \sum_m H^\alpha_\delta(A_m)$$

По определению:

$$H^\alpha(E) = \lim_{\delta \to 0+} H^\alpha_\delta(E)$$

вместе с этим верно, что $H^\alpha_\delta(E)$ не убывает при $\delta \to 0$ (то есть, либо растёт, либо остается такой же).

Проверим, что $H^\alpha(E)$ это внешняя мера:

1) $\forall\delta > 0,\ H^\alpha_\delta(\varnothing) = 0 \Rightarrow H^\alpha(\varnothing) = \lim\limits_{\delta\to 0+} H^\alpha_\delta(\varnothing) = \lim\limits_{\delta\to 0+} 0 = 0;$

2) $A \subset B \Rightarrow H^\alpha_\delta(A) \le H^\alpha_\delta(B) \Rightarrow H^\alpha(A) = \lim\limits_{\delta\to 0+} H^\alpha_\delta(A) \le \lim\limits_{\delta\to 0+} H^\alpha_\delta(B) = H^\alpha(B);$

3) Поскольку при $\delta \to 0+$ функция $H^\alpha_\delta(E)$ не убывает, то будет верно:

$$\forall\delta > 0,\ H^\alpha_\delta(\cup_m A_m) \le \sum_m H^\alpha_\delta(A_m) \le \sum_m H^\alpha(A_m) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H^\alpha(\cup_m A_m) = \lim_{\delta\to 0+} H^\alpha_\delta(\cup_m A_m) \le \lim_{\delta\to 0+} \sum_m H^\alpha(A_m) = \sum_m H^\alpha(A_m)$$

Проверим, что все борелевские множества измеримы. Воспользуемся утверждением про измеримость:

$$A, B\colon \forall x \in A,\ y \in B,\ \|x - y\| \ge \gamma > 0 \Rightarrow H^\alpha(A \cup B) = H^\alpha(A) + H^\alpha(B)$$

Из полуаддитивности верно неравенство: $H^\alpha(A \cup B) \le H^\alpha(A) + H^\alpha(B)$. Надо обосновать неравенство в другую сторону. Рассмотрим, как будет устроена H^α_δ на этих множествах, когда $\delta < \frac{\gamma}{3}$, поскольку если получим неравенство для достаточно маленьких δ, то оно будет верно и в пределе:

$$A \cup B \subset \bigcup_j F_j\colon\ \operatorname{diam} F_j \le \delta \Rightarrow A \subset \bigcup_{j\colon F_j\cap A\neq\varnothing} F_j \wedge B \subset \bigcup_{j\colon F_j\cap B\neq\varnothing} F_j$$

Полученные наборы не пересекаются, поскольку не могут оказаться две точки, находящиеся на расстоянии $< \delta$ и при этом одна из них в A, а другая в B, поскольку расстояние между ними $> 3\delta$. Тогда:

$$\sum_j (\operatorname{diam} F_j)^\alpha = \sum_{j\colon F_j\cap A\neq\varnothing} (\operatorname{diam} F_j)^\alpha + \sum_{j\colon F_j\cap B\neq\varnothing} (\operatorname{diam} F_j)^\alpha \ge H^\alpha_\delta(A) + H^\alpha_\delta(B)$$

Поскольку покрытие $A \cup B$ - произвольное, а $H^\alpha_\delta(A) + H^\alpha_\delta(B)$ это его нижняя грань, то будет верно требуемое:

$$H^\alpha_\delta(A \cup B) \ge H^\alpha_\delta(A) + H^\alpha_\delta(B)$$

так как, точная нижняя грань - самая большая из нижних граней (нижняя грань не превосходит точной нижней грани). Перейдем к пределу:

$$H^\alpha(A \cup B) = \lim_{\delta\to 0+} H^\alpha_\delta(A \cup B) \ge \lim_{\delta\to 0+} H^\alpha_\delta(A) + \lim_{\delta\to 0+} H^\alpha_\delta(B) = H^\alpha(A) + H^\alpha(B)$$

■

Итого: На σ-алгебре измеримых множеств $\mathcal{A}_{H^\alpha}$ мера H^α это σ-аддитивная мера и $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{A}_{H^\alpha}$.

Rm: 3. Пусть F это замкнутое подмножество в $\mathbb{R}^n$. Будем рассматривать F как самостоятельное метрическое пространство: (F, ρ), где $\rho(x, y) = |x - y|$. Построим на этом пространстве меру Хаусдорфа $\widetilde{H}^\alpha$ (то есть $F_j \subset F$). Таким образом, на F мы получаем две меры: H^α и $\widetilde{H}^\alpha$. Если множество замкнуто в F, то оно замкнуто в $\mathbb{R}^n$. Если взять $E \subset F$ и $E \subset \cup_j F_j$, где F_j это замкнутые в $\mathbb{R}^n$ множества, то тогда можно считать: $E \subset \cup_j (F_j \cap F)$, где $F_j \cap F$ уже будут замкнутыми в F. Заметим, что:

$$(\operatorname{diam} F_j \cap F)^\alpha \le (\operatorname{diam} F_j)^\alpha \Rightarrow \widetilde{H}^\alpha_\delta \le H^\alpha_\delta$$

При переходе от F_j к $F_j \cap F$ точная нижняя грань не изменится, поскольку вычисляя $\widetilde{H}^\alpha$ мы сокращаем количество замкнутых множеств $\Rightarrow \widetilde{H}^\alpha_\delta \ge H^\alpha_\delta \Rightarrow$ совпадают меры $H^\alpha_\delta = \widetilde{H}^\alpha_\delta \Rightarrow H^\alpha = \widetilde{H}^\alpha$.

Это важное замечание, поскольку если мы будем говорить про замкнутые подмножества, то можно говорить, что мера Хаусдорфа создана на самих замкнутых подмножествах и совершенно нет разницы, что происходит вовне, она описывает внутреннюю геометрию замкнутых подмножеств.

Утв. 2. Пусть $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ - аффинное отображение, сохраняющее расстояния (то есть какое-то движение/изометрия). Тогда:

$$\forall E,\ H^\alpha(L(E)) = H^\alpha(E)$$

Rm: 4. Заметим, что множество E здесь какое угодно.

□ Поймем это для H^α_δ, необходимо установить какое-либо неравенство, поскольку L^{-1} также будет сохранять расстояния. Тогда: $E \subset \cup_j F_j$, где F_j - замкнуты и $\operatorname{diam} F_j \le \delta \Rightarrow F_j$ это компакты, тогда:

$$L(E) \subset \bigcup_j L(F_j),\ \operatorname{diam} F_j = \operatorname{diam} L(F_j) \Rightarrow H^\alpha_\delta(L(E)) \le \sum_j (\operatorname{diam} F_j)^\alpha = \sum_j (\operatorname{diam} L(F_j))^\alpha$$

где $L(F_j)$ это тоже компакты $\Rightarrow$ замкнутые множества, $\operatorname{diam} F_j = \operatorname{diam} L(F_j)$ в силу сохранения расстояний отображением L. Поскольку покрытее - любое, то верно:

$$H^\alpha_\delta(L(E)) \le \inf \sum_j (\operatorname{diam} F_j)^\alpha = H^\alpha_\delta(E)$$

Переходя к пределу, получаем требуемое. Противоположное получается изменением L на L^{-1}. ■