Меры. Внешние меры

Цель: Мера Лебега и мера Хаусдорфа. Меры Лебега хватает, чтобы говорить об объемах без тонкостей связанных с интегралом Римана и мерой Жордана. Мера Хаусдорфа это правильный способ говорить о поверхностных площадях, комерных объемах и так далее.

Таким образом, если хотим проинтегрировать в $\mathbb{R}^n$ по какому-нибудь необычному множеству $\Rightarrow$ мера Лебега, если хотим проинтегрировать в $\mathbb{R}^n$ или в метрическом пространстве по какому-то объекту и хотим, чтобы мера учитывала его геометрию (например, выражала площадь поверхности или длину кривой), то надо использовать меру Хаусдорфа.

Опр: 1. Пусть $X \neq \varnothing$, набор подмножеств $\mathcal{A}$ множества X называется алгеброй, если:

1) $\varnothing, X \in \mathcal{A}$;
2) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B,\ A \setminus B,\ A \cup B \in \mathcal{A}$;

Если дополнительно верно, что:

3) $\forall n \in \mathbb{N},\ A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup\limits_n A_n,\ \bigcap\limits_n A_n \in \mathcal{A}$;

то $\mathcal{A}$ называется σ-алгеброй.

Примеры алгебр:

1) $\{\varnothing, X\}$ - σ-алгебра;
2) 2^X - σ-алгебра;
3) Возьмем $B \in X$ и набор $\{\varnothing, B, X \setminus B, X\}$ - σ-алгебра;
4) $\{$конечные объединения промежутков из $[0, 1]\}$ - алгебра, но не σ-алгебра;

   $\square$ Пересечение промежутков - это промежуток, объединение промежутков это объединение промежутков. Дополнение к промежутку это либо промежуток, либо объединение двух промежутков. Дополнение к конечному объединению $\Rightarrow$ пересечение дополнений $\Rightarrow$ пересечение объектов из данного набора. Рассмотрим рациональные числа:

   $$\mathbb{Q} = \bigcup_n \{r_n\} \stackrel{?}{=} \bigcup_1^N \mathrm{I}_k$$

   Это будет не верно, поскольку если I_k не является точкой, то в I_k есть иррациональное число $\Rightarrow$ должны быть точками $\Rightarrow$ получается конечный набор точек, а $\mathbb{Q}$ - счётное множество $\Rightarrow$ не являтеся σ-алгеброй. $\blacksquare$

5) $\{\varnothing, \mathbb{N},$ конечные множества и дополнения к конечным множествам в $\mathbb{N}\}$ - алгебра, но не σ-алгебра;

   $\square$ Это можно показать взяв множество всех чётных чисел - оно есть счётное объединение множеств из одного элмента (в отдельности каждого чётного числа), но при этом оно не конечное и не является дополнением к конечному. $\blacksquare$

Rm: 1. В теории вероятности к σ-алгебре относятся события. Поскольку интересуют обычно вопросы асимптотические, что происходит, когда количество событий - очень большое (бесконечное обычно) $\Rightarrow$ надо уметь что-то делать не только с конечным набором, но и с счётным $\Rightarrow$ рассматриваются σ-алгебры в качестве множества событий.

Rm: 2. Аналогично, с точки зрения вычисления объемов, площадей и длин, σ-алгебра также естественный объект потому, что сложные объекты получаются из простых $\Rightarrow$ минимальный набор действий в алгебре.

Опр: 2. Пусть S - какой-либо непустой набор подмножеств X, тогда:

$$\sigma(S) = \bigcap_{S \subset \mathcal{F}} \mathcal{F},\ \mathcal{F} \text{ - } \sigma\text{-алгебры}$$

называется σ-алгеброй, порожденной S.

Rm: 3. Всегда существуют σ-алгебры, содержащие S, например, 2^X обязательно содержит S.

Rm: 4. $\sigma(S)$ это минимальная σ-алгебра по включению: если σ-алгебра $\mathcal{A} \supset S$, то $\mathcal{A} \supset \sigma(S)$.

Пример: Возьмем $S = \{B\} \Rightarrow \sigma(S) = \{\varnothing, X, B, X \setminus B\}$, мы уже знаем, что это σ-алгебра.

Rm: 5. Построение $\sigma(S)$ это всё, что можно собрать из S.

Упр. 1. Пусть $S = \{B, C\}$, опишите $\sigma(S)$.

□

$$\sigma(S) = \{\varnothing, X, B, C, B \cap C, B \cup C, B \setminus C, C \setminus B, X \setminus B, X \setminus C,$$
$$X \setminus (B \cup C), X \setminus (B \cap C), B \Delta C, X \setminus (B \Delta C), X \setminus (B \setminus C),\ X \setminus (C \setminus B)\}$$

■

Когда мы говорим, что "можно собрать из S" не нужно понимать это буквально, поскольку это не означает, что есть некий алгоритм, который по элементам S с помощью операций: $\cap$, $\cup$, $\setminus$ выводит выражение для любого множества из этой σ-алгебры. Для больших S, $\sigma(S)$ столь огромны, что такого описания нет. Содержательным примером такой σ-алегбры является Борелевская σ-алгебра.

Борелевская σ-алгебра

Опр: 3. Пусть X - метрическое пространство. σ-алгебра: $\mathcal{B}(X) = \sigma(\{\text{открытые множества}\})$ называется Борелевской σ-алгеброй, то есть это минимальная σ-алгебра, порожденная всеми открытыми множествами X.

Утв. 1. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\{\text{шары}\}) = \sigma(\{\text{открытые кубы}\})$.

□ Всякое открытое множество $\mathcal{U}$ это не более, чем счётное объединение открытых кубов: для каждой точки a строим куб $K_a \subset \mathcal{U}$ с рациональными вершинами $\Rightarrow \cup_a K_a = \mathcal{U}$ и таких кубов не более, чем счётное число. Тогда:

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \sigma(\{\text{открытые кубы}\})$$

поскольку оно содержит все открытые $\Rightarrow$ должно содержать минимальную порожденную всеми открытыми. Обратное включение очевидно, поскольку среди открытых множеств есть открытые кубы. ■

σ-аддитивные меры

Опр: 4. Пусть на X задана σ-алгебра $\mathcal{A}$. Функция $\mu\colon \mathcal{A} \to [0, +\infty)$ называется σ-аддитивной мерой (конечной неотрицательной σ-аддитивной мерой), если верно свойство σ-аддитивности:

$$\forall A_j \in \mathcal{A},\ A_i \cap A_j = \varnothing,\ \mu\left(\cup_j A_j\right) = \sum_j \mu(A_j)$$

Rm: 6. Можно допускать в качестве значения $\mu = +\infty$, если добавить в определение:

1) $\mu(\varnothing) = 0$;
2) $\forall c \in \mathbb{R},\ c + (+\infty) = +\infty$;

Опр: 5. Мера μ называется конечной, если она нигде не принимает значение $+\infty$.

Rm: 7. Заметим, что свойство $\mu(\varnothing) = 0$ во множествах с конечной мерой появляется автоматически:

$$\mu(X) = \mu(X \cup \varnothing) = \mu(X) + \mu(\varnothing) \Rightarrow \mu(\varnothing) = 0$$

Примеры σ-аддитивных мер:

1) Дельта мера: Пусть $a \in X$, тогда на σ-алгебре 2^X определена мера:

$$\delta_a(B) = \begin{cases} 1, & a \in B \\ 0, & a \notin B \end{cases}$$

   $\square$ Если взять объединение попарно непересекающихся множеств, то только одно из них может содержать $a \Rightarrow$ и справа и слева будет 1, а если ни одно не содержит, то справа и слева будет 0. $\blacksquare$

   Rm: 8. Также эту мерй называют мерой Дирака;

2) Пусть $X = \{1, 2, \ldots, N\}$, σ-алгебра - 2^X и заведём числа: $p_k \geq 0$, зададим меру:

$$\mu(B) = p_1 \cdot \delta_1(B) + \ldots + p_N \cdot \delta_N(B) = \sum_{k\colon k \in B} p_k$$

   $\square$ Слева единички выставятся у тех p_k, для которых $k \in B \Rightarrow$ получится нужная нам сумма, а каждая в отдельности δ_k это σ-аддитивная мера; $\blacksquare$

3) Пусть $X = \mathbb{N}$, заведем числа: $p_k \geq 0\colon\ \sum_k p_k < \infty$, определим меру на $2^{\mathbb{N}}$:

$$\mu(B) = \sum_{k\colon k \in B} p_k$$

   Упр. 2. Проверить, что эта мера является аддитивной и σ-аддитивной;

4) Существует функция $\mu\colon 2^{\mathbb{N}} \to [0, +\infty)$ такая, что:

   (1) μ - аддитивна;

   (2) $\mu(\{k\}) = 0$ и $\mu(\mathbb{N}) = 1$, то есть не является σ-аддитивной;

   Rm: 9. Для построения такой меры требуются знания из функционального анализа;

Утв. 2. (**Непрерывность меры**) Пусть μ это конечная σ-аддитивная мера на σ-алгебре $\mathcal{A}$ подмножеств X. Тогда:

1) $A_m \in \mathcal{A}$, $A_{m+1} \subset A_m \Rightarrow \mu(\cap_m A_m) = \lim\limits_{m\to\infty} \mu(A_m)$;
2) $B_m \in \mathcal{A}$, $B_m \subset B_{m+1} \Rightarrow \mu(\cup_m B_m) = \lim\limits_{m\to\infty} \mu(B_m)$;

□

1) Поймем, что 2) $\Rightarrow$ 1): возьмем $X \setminus A_m = B_m$, тогда $X \setminus (\cap_m A_m) = \cup_m (X \setminus A_m) = \cup_m B_m$, заметим:
$$\mu(B_m) = \mu(X) - \mu(A_m)$$
а также, что $B_m \subset B_{m+1} \Rightarrow A_{m+1} \subset A_m$, тогда:
$$\mu(B_m) \leftarrow \mu(\cup_m B_m) = \mu(X) - \mu(\cap_m A_m) \Rightarrow \mu(\cap_m A_m) \to \mu(A_m)$$

2) Рассмотрим множества: $C_1 = B_1$, $C_2 = B_2 \setminus B_1$, $C_3 = B_3 \setminus B_2, \ldots$, тогда по построению:
$$B_m = \bigcup_{k=1}^{m} C_k,\ \forall k, l,\ k \neq l,\ C_k \cap C_l = \varnothing \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mu(B_m) = \sum_{k=1}^{m} \mu(C_k) \to \sum_{k=1}^{\infty} \mu(C_k) = \mu(\cup_k C_k) = \mu(\cup_m B_m)$$
где в предпоследнем равенстве мы воспользовались σ-аддитивностью;

■

Приближение борелевского множества замкнутыми и открытыми

Теорема 1. Пусть X - метрическое пространство, $\mathcal{B}(X)$ - борелевская σ-алгебра, мера μ это σ-аддитивная, конечная мера на $\mathcal{B}(X)$, тогда: $\forall B \in \mathcal{B}(X)$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ замкнутое F_ε, открытое $\mathcal{U}_\varepsilon$ такие, что:

1) $F_\varepsilon \subset B \subset \mathcal{U}_\varepsilon$;
2) $\mu(\mathcal{U}_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$;

То есть всякое борелевское множество приближается изнутри и снаружи замкнутым и открытым множеством.

□

(1) Проверим, что утверждение верно для замкнутых множеств. Пусть F - замкнуто, выберем некоторое $\varepsilon > 0$, тогда $F = F_\varepsilon$. Рассмотрим открытое множество:
$$\mathcal{U}_m = F^{\frac{1}{m}} = \bigcup_{x\in F} \mathcal{B}(x, \tfrac{1}{m}) \Rightarrow \mathcal{B}(x, \tfrac{1}{m+1}) \subset \mathcal{B}(x, \tfrac{1}{m}) \Rightarrow \mathcal{U}_{m+1} \subset \mathcal{U}_m$$
Поскольку F - замкнуто, то $F = \cap_m \mathcal{U}_m$: если точка не лежит в F, то вокруг неё есть шар радиуса r в котором никаких точек из F нет и как только $\frac{1}{m} < r$, то эта точка не будет лежать ни в каком шаре $\mathcal{B}(x, \frac{1}{m})$. Тогда мы знаем:
$$\mu(F) = \lim_{m\to\infty} \mu(\mathcal{U}_m) \Rightarrow \exists\, m\colon \mu(\mathcal{U}_m \setminus F_\varepsilon) = \mu(\mathcal{U}_m \setminus F) = \mu(\mathcal{U}_m) - \mu(F) < \varepsilon$$

(2) Проверим верность утверждения для открытых множеств. Рассмотрим набор множеств:

$$S = \{E \in X \colon \forall \varepsilon > 0,\, \exists\, F_\varepsilon, \mathcal{U}_\varepsilon \colon F_\varepsilon \subset E \subset \mathcal{U}_\varepsilon \wedge \mu(\mathcal{U}_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon\}$$

S содержит все замкнутые множества. Если доказать, что S это σ-алгебра, то $\mathcal{B}(x) \subset S$, поскольку борелевская порождается в том числе замкнутыми множествами, а тогда для борелевских множеств автоматически будут выполнены свойства S. Докажем это:

1) $\varnothing \in S$, $F_\varepsilon = \mathcal{U}_\varepsilon = \varnothing$, $X \in S$, $F_\varepsilon = \mathcal{U}_\varepsilon = X$;

2) Пусть $E \in S$, возьмем $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\, F_\varepsilon, \mathcal{U}_\varepsilon \colon F_\varepsilon \subset E \subset \mathcal{U}_\varepsilon \Rightarrow X \setminus \mathcal{U}_\varepsilon \subset X \setminus E \subset X \setminus F_\varepsilon$, тогда:

$$(X \setminus F_\varepsilon) \setminus (X \setminus \mathcal{U}_\varepsilon) = \mathcal{U}_\varepsilon \setminus F_\varepsilon \Rightarrow \mu((X \setminus F_\varepsilon) \setminus (X \setminus \mathcal{U}_\varepsilon)) = \mu(\mathcal{U}_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$$

Таким образом, $X \setminus E \in S$;

3) Остается проверить, замкнутость относительного счетного объединения. Пусть $E_m \in S$, возьмем $\varepsilon > 0$. Рассмотрим множество $E = \cup_m E_m \Rightarrow$ рассмотрим каждое E_m:

$$\forall m,\, \exists\, F_m, \mathcal{U}_m \colon F_m \subset E_m \subset \mathcal{U}_m \wedge \mu(\mathcal{U}_m \setminus F_m) < \frac{\varepsilon}{2^m}$$

Тогда мы можем взять в качестве $\mathcal{U} = \cup_m \mathcal{U}_m$: оно будет открытым и будет содержать все $\mathcal{U}_m$. Рассмотрим множество $\widetilde{F} = \cup_m F_m$ оно уже может не быть замкнутым, доработаем его:

$$\widetilde{F} = \bigcup_m F_m = \bigcup_M F^M,\; F^M = \bigcup_{m=1}^{M} F_m$$

где F^M уже замкнутые множества, поскольку конечное объединение замкнутых множеств - замкнуто. Мы хотим найти M так, чтобы: $\mu(\mathcal{U} \setminus F^M) < 2\varepsilon$. Заметим:

$$\lim_{M\to\infty} \mu(\mathcal{U} \setminus F^M) = \lim_{M\to\infty} \mu(\mathcal{U}) - \mu(F^M) = \mu(\mathcal{U} \setminus \widetilde{F}) \le \sum_m \mu(\mathcal{U}_m \setminus \widetilde{F}) \le$$

$$\le \sum_m \mu(\mathcal{U}_m \setminus F_m) \le \sum_m \frac{\varepsilon}{2^m} = \varepsilon \Rightarrow \exists\, M_0 \colon \mu(\mathcal{U} \setminus F^{M_0}) < 2\varepsilon$$

где мы воспользовались следующим фактом: $\mu(\cup_m \mathcal{U}_m) \le \sum_m \mu(\mathcal{U}_m)$, а также тем, что F_m меньше, чем $\widetilde{F}$. Первое доказывается в курсе действительного анализа, либо так:

$$A_i \cap A_j = \varnothing \Rightarrow \mu(\cup_m A_m) = \sum_m \mu(A_m)$$

по определению для попарно непересекающихся множеств, для любых же будет верно:

$$\mu(B_1 \cup B_2) = \mu(B_1) + \mu(B_2) - \mu(B_1 \cap B_2) \le \mu(B_1) + \mu(B_2)$$

$$\mu(\cup_{j=1}^m B_j) = \mu(\cup_{j=1}^{m-1} B_j \cup B_m) \le \mu(\cup_{j=1}^{m-1} B_j) + \mu(B_m)$$

далее в предположении индукции получается для всех. Такие объединения - возрастающая последовательность, переходим к пределу - получаем неравенство. Следовательно, у нас лежат дополнения, объединения $\Rightarrow$ пересечения $\Rightarrow$ у нас σ-алгебра и утверждение доказано;

■

Следствие 1. Если μ и σ - конечные σ-аддитивные меры на $\mathcal{B}(X)$ совпадают на всех открытых множествах (тоже самое, что на всех замкнутых), то $\mu = \sigma$ на $\mathcal{B}(X)$.

$\square$ Пусть $B \in \mathcal{B}(X)$, $\varepsilon > 0$, $F_\varepsilon \subset B \subset \mathcal{U}_\varepsilon$, $\mu(\mathcal{U}_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$, но поскольку на B меры совпадают, то:

$$\mu(\mathcal{U}_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) = \mu(\mathcal{U}_\varepsilon) - \mu(F_\varepsilon) = \sigma(\mathcal{U}_\varepsilon) - \sigma(F_\varepsilon) < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu(B) - \sigma(B) \leq \mu(\mathcal{U}_\varepsilon) - \sigma(F_\varepsilon) = \mu(\mathcal{U}_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon \wedge \sigma(B) - \mu(B) \leq \sigma(\mathcal{U}_\varepsilon) - \mu(F_\varepsilon) = \sigma(\mathcal{U}_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0,\ |\sigma(B) - \mu(B)| \leq \varepsilon \Rightarrow \mu(B) = \sigma(B)$$

$\blacksquare$