Критерий интегрируемости. Теорема Фубини

Теорема 1. Пусть f - ограниченная функция на замкнутом бруске I. f - интегрируема по Риману на I тогда и только тогда, когда $\exists$ последовательности ступенчатых функций h_n, g_n такие, что:

1) $h_n(x) \le h_{n+1}(x)$; $g_{n+1}(x) \le g_n(x)$, $\forall n$;
2) $h_n(x) \le f(x) \le g_n(x)$, $\forall n$;
3) $\int_{\mathrm{I}} g_n(x)dx - \int_{\mathrm{I}} h_n(x)dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$;

Rm: 1. Отметим, что это фактически критерий Дарбу, изложенный на языке функций, где равномерная сходимость заменена на монотонную последовательность.

□

($\Leftarrow$) Пусть $(\mathbb{T}, \xi)$ - отмеченное разбиение, $h_n \le f \le g_n$, следовательно (объемы брусков ≥ 0):

$$\sigma(h_n, \mathbb{T}, \xi) \le \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) \le \sigma(g_n, \mathbb{T}, \xi)$$

Заметим, что последовательность интегралов от h_n не убывает, а g_n не возрастает:

$$\int\limits_{\mathrm{I}} h_n(x)dx \le \int\limits_{\mathrm{I}} h_{n+1}(x)dx, \quad \int\limits_{\mathrm{I}} g_{n+1}(x)dx \le \int\limits_{\mathrm{I}} g_n(x)dx$$

Поскольку f - ограниченна, то эти последовательности ограниченны $\Rightarrow$ у монотонных, ограниченных последовательностей есть предел. По пункту 3) условия и теореме Вейерштрасса следует:

$$\exists \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathrm{I}} h_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathrm{I}} g_n(x)dx = A$$

Возьмем $\varepsilon > 0$ произвольное, тогда:

$$\exists\, n\colon \int\limits_{\mathrm{I}} h_n(x)dx > A - \varepsilon, \int\limits_{\mathrm{I}} g_n(x)dx < A + \varepsilon$$

Фиксируем $n \Rightarrow$ поскольку ступенчатые функции - интегрируемы, то:

$$\exists\, \delta > 0\colon \forall (\mathbb{T}, \xi),\ \lambda(\mathbb{T}) < \delta \Rightarrow \left| \int\limits_{\mathrm{I}} h_n(x)dx - \sigma(h_n, \mathbb{T}, \xi) \right| < \varepsilon, \left| \int\limits_{\mathrm{I}} g_n(x)dx - \sigma(g_n, \mathbb{T}, \xi) \right| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A - 2\varepsilon < \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) < A + 2\varepsilon \Rightarrow |\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) - A| < 2\varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0\colon \forall (\mathbb{T}, \xi),\ \lambda(\mathbb{T}) < \delta \Rightarrow |\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) - A| < \varepsilon$$

($\Rightarrow$) Пусть f - интегрируема, построим $h_n(x)$ и $g_n(x)$. Возьмём произвольный брусок J:

$$J = J_1 \times \dots \times J_n,\ J_k = (\ ,\ ) \vee [\ ,\ ) \vee (\ ,\ ] \vee [\ ,\ ]$$

Разобьем каждый промежуток J_k в объединение промежутков (договоримся, что $|\Delta_k^i| > 0$):

$$\forall k = \overline{1, n},\ J_k = \bigcup_{i=1}^{m_k} \Delta_k^i, \quad \forall i, j,\ \Delta_k^i \cap \Delta_k^j = \varnothing,\ \Delta_k^i = (\ ,\ ) \vee [\ ,\ ) \vee (\ ,\ ] \vee [\ ,\ ]$$

Возьмём Декартовы произведения: $\mathrm{I}_{k_1\ldots k_n} = \Delta_1^{k_1} \times \Delta_2^{k_2} \times \ldots \times \Delta_n^{k_n}$, тогда:

$$J = \bigcup_{k_1\ldots k_n} \mathrm{I}_{k_1\ldots k_n}, \quad (k_1\ldots k_n) \neq (l_1\ldots l_n) \Rightarrow \mathrm{I}_{k_1\ldots k_n} \cap \mathrm{I}_{l_1\ldots l_n} = \varnothing$$

Кроме того, $\forall \varepsilon > 0$ можно разбить так, чтобы: $\mathrm{diam}(\mathrm{I}_{k_1\ldots k_n}) < \varepsilon$, (каждую сторону разбиваем на промежутки малой длины так, чтобы диаметр соответствующих клеточек получался меньше ε).

Строим последовательность разбиений: $\{\mathrm{I}_m^N\} = \mathbb{T}^N$, где N - номер разбиения, а m - индекс, пересчитывающий все бруски. Последовательность строим так, чтобы выполнялись свойства:

(1) $\mathrm{diam}(\mathrm{I}_m^N) < \frac{1}{N}$;

(2) $\mathbb{T}^{N+1}$ из $\mathbb{T}^N$ получается разбиением I_m^N на попарно непересекающиеся бруски, как описано выше (процедура называется измельчением);

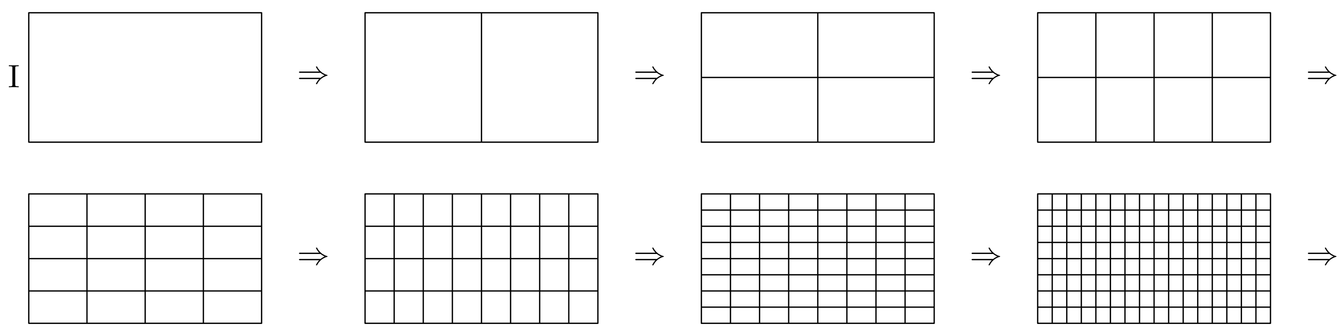

Рис. 1: Измельчение I.

Тогда $\exists\, k\colon \mathrm{I}_m^{N+1} \subset \mathrm{I}_k^N$, $\forall m \neq l$, $\mathrm{I}_m^N \cap \mathrm{I}_l^N = \varnothing$ и $\mathrm{diam}(\mathrm{I}_m^N) < \frac{1}{N}$. Предъявим последовательность функций:

$$h_N(x) = \sum_m \inf_{\mathrm{I}_m^N} f(x) \cdot \chi_{\mathrm{I}_m^N}(x), \quad g_N(x) = \sum_m \sup_{\mathrm{I}_m^N} f(x) \cdot \chi_{\mathrm{I}_m^N}(x)$$

Отличие от сумм Дарбу здесь в том, что бруски не пересекаются $\Rightarrow$ это не обычное разбиение, как в определении интеграла, а разбиение чуть более общее (это сделано, чтобы не было наложений значений). Проверим свойства из теоремы:

1) $h_N(x) \leq h_{N+1}(x)$, поскольку бруски не пересекаются, то тут всегда только одно слагаемое может быть не 0, разбили брусок на мелкие и только один мелкий будет содержать x, тем самым:

$$h_N(x) = \inf_{\mathrm{I}_m^N} f(x),\ h_{N+1}(x) = \inf_{\mathrm{I}_k^{N+1}} f(x)$$

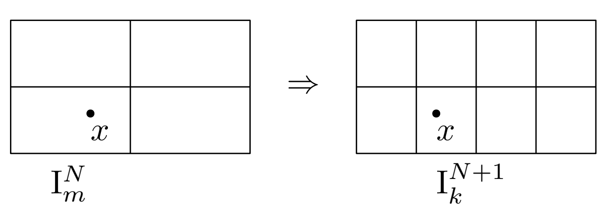

Рис. 2: Измельчение относительно конкретной точки x.

При измельчении точная нижняя грань не уменьшается, тогда:

$$x \in \mathrm{I}_m^N \wedge x \in \mathrm{I}_k^{N+1} \Rightarrow \mathrm{I}_k^{N+1} \subset \mathrm{I}_m^N \Rightarrow h_N(x) = \inf_{\mathrm{I}_m^N} f(x) \leq \inf_{\mathrm{I}_k^{N+1}} f(x) = h_{N+1}(x)$$

Для $g_N(x)$ получется аналолгично: $g_N(x) \geq g_{N+1}(x)$;

2) $h_N(x) \leq f(x) \leq g_N(x)$ - очевидно, поскольку $h_N(x)$ - точная нижняя грань $f(x)$ на соответствующем бруске, $g_N(x)$ - точная верхняя грань $f(x)$ на соответствующем бруске;

3) Воспользуемся результатами предыдущих пунктов, тогда:

$$0 \leq \int\limits_{\mathrm{I}} g_N(x)dx - \int\limits_{\mathrm{I}} h_N(x)dx = \sum_m \sup_{\mathrm{I}_m^N} f(x) \cdot \left|\mathrm{I}_m^N\right| - \sum_m \inf_{\mathrm{I}_m^N} f(x) \cdot \left|\mathrm{I}_m^N\right|$$

Для простоты дальнейших рассуждений замкнём бруски (для определения интеграла Римана). Когда мы замыкаем, мы увеличиваем множество и sup может только возрасти, а inf может только уменьшиться, тогда:

$$\sum_m \left(\sup_{\mathrm{I}_m^N} f(x) - \inf_{\mathrm{I}_m^N} f(x)\right) \cdot \left|\mathrm{I}_m^N\right| \leq \sum_m \left(\sup_{\bar{\mathrm{I}}_m^N} f(x) - \inf_{\bar{\mathrm{I}}_m^N} f(x)\right) \cdot \left|\bar{\mathrm{I}}_m^N\right|$$

Заметим, что $\overline{\mathbb{T}}^N = \left\{\bar{\mathrm{I}}_m^N\right\}$ - разбиение I такое, что: $\lambda\left(\overline{\mathbb{T}}^N\right) < \frac{1}{N}$, поскольку добавление границы длины брусков поменять не может. Поскольку f - интегрируема, тогда:

$$\forall \xi^N, \left|\sigma\left(f, \overline{\mathbb{T}}^N, \xi^N\right) - \int\limits_{\mathrm{I}} f(x)dx\right| \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

Пусть $\varepsilon > 0$, выберем ξ^N и $\widetilde{\xi}^N$ так, чтобы: $f(\xi_m^N) < \inf\limits_{\bar{\mathrm{I}}_m^N} f(x) + \varepsilon$ и $f(\widetilde{\xi}_m^N) > \sup\limits_{\bar{\mathrm{I}}_m^N} f(x) - \varepsilon$, тогда:

$$0 \leq \int\limits_{\mathrm{I}} g_N(x)dx - \int\limits_{\mathrm{I}} h_N(x)dx \leq \sigma\left(f, \overline{\mathbb{T}}^N, \widetilde{\xi}^N\right) - \sigma\left(f, \overline{\mathbb{T}}^N, \xi^N\right) + 2\varepsilon\cdot|\mathrm{I}| \xrightarrow[N\to\infty]{} 0 + 2\varepsilon\cdot|\mathrm{I}| = 2\varepsilon\cdot|\mathrm{I}|$$

Поскольку ε можно сделать сколь угодно маленьким, то будет верно:

$$\int\limits_{\mathrm{I}} g_N(x)dx - \int\limits_{\mathrm{I}} h_N(x)dx \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

■

Rm: 2. Для любой ограниченной функции f на I всегда $\exists\, h_n, g_n \colon h_n \leq h_{n+1},\ g_n \geq g_{n+1},\ h_n \leq f \leq g_n$.

Rm: 3. Для любой интегрируемой функции f на I к предыдущему замечанию добавляется, что:

$$\int\limits_{\mathrm{I}} h_n(x)dx - \int\limits_{\mathrm{I}} g_n(x)dx \to 0$$

Rm: 4. Можно рассматривать только построенные последовательности:

$$h_N(x) = \sum_m \inf_{\mathrm{I}_m^N} f(x) \cdot \chi_{\mathrm{I}_m^N}(x), \quad g_N(x) = \sum_m \sup_{\mathrm{I}_m^N} f(x) \cdot \chi_{\mathrm{I}_m^N}(x)$$

Тогда:

$$f \text{ - интегрируема } \Leftrightarrow \sum_m \left(\sup_{\mathrm{I}_m^N} f(x) - \inf_{\mathrm{I}_m^N} f(x) \right) \cdot |\mathrm{I}_m^N| \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$$

Почти критерий Дарбу, отличие в том, что мы не рассматриваем суммы Дарбу, а рассматриваем последовательности вложенных разбиений $\Rightarrow$ нельзя написать для любого разбиения, масштаб которого стремится к нулю верно, что разность выше тоже стремится к нулю, где можно было бы заменить:

$$\omega\left(f, \mathrm{I}_m^N\right) = \sup_{\mathrm{I}_m^N} f(x) - \inf_{\mathrm{I}_m^N} f(x)$$

Rm: 5. В доказательстве достаточности нам не важно, что функции ступенчатые, но в необходимости мы строим ступенчатые. Также заметим, что из ступенчатости следует их интегрируемость.

Теорема Фубини

Опр: 1. Повторным интегралом Римана называются интегралы вида:

$$\int\limits_{\mathrm{I}_x} \left(\int\limits_{\mathrm{I}_y} f(x,y) dy \right) dx, \quad \int\limits_{\mathrm{I}_y} \left(\int\limits_{\mathrm{I}_x} f(x,y) dx \right) dy$$

Теорема 2. (**Фубини**) Пусть $\mathrm{I} = \mathrm{I}_x \times \mathrm{I}_y$, $\mathrm{I}_x \subset \mathbb{R}^n$, $\mathrm{I}_y \subset \mathbb{R}^m$ - замкнутые бруски (в том числе I тоже замкнутый брусок). Пусть f интегрируема по Риману на I и $\forall x \in \mathrm{I}_x$ функция $y \mapsto f(x,y)$ интегрируема на бруске I_y, тогда функция: $x \mapsto \int_{\mathrm{I}_y} f(x,y)dy$ интегрируема на I_x и верно равенство:

$$\iint\limits_{\mathrm{I}} f(x,y) dx dy = \int\limits_{\mathrm{I}_x} \left(\int\limits_{\mathrm{I}_y} f(x,y) dy \right) dx$$

Если $\forall y \in \mathrm{I}_y$ функция $x \mapsto f(x,y)$ интегрируема на бруске I_x, тогда функция: $y \mapsto \int_{\mathrm{I}_x} f(x,y)dx$ интегрируема на I_y и верно равенство:

$$\iint\limits_{\mathrm{I}} f(x,y) dx dy = \int\limits_{\mathrm{I}_y} \left(\int\limits_{\mathrm{I}_x} f(x,y) dx \right) dy$$

Rm: 6. По теореме Фубини, если у нас есть брусок $\mathrm{I} = \mathrm{I}_x \times \mathrm{I}_y$ и мы хотим проинтегрировать функцию $f(x,y)$ по нему. Для этого, мы фиксируем каждый раз точку x и интегрируем по сечению, то есть интегрируем по y. И таким образом мы можем зафиксировать все x вдоль I_x.

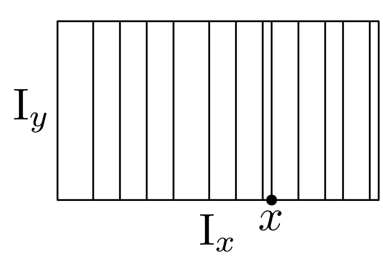

Рис. 3: Интегрирование по I_x.

Получаем функцию, которая выдаёт значения интегралов на сечении, затем мы эту функцию проинтегрируем по x, то есть "сложим" все эти сечения.

Rm: 7. В одномерном случае интеграл это попытка посчитать площадь под графиком, здесь же многомерный интеграл это попытка посчитать объем под графиком.

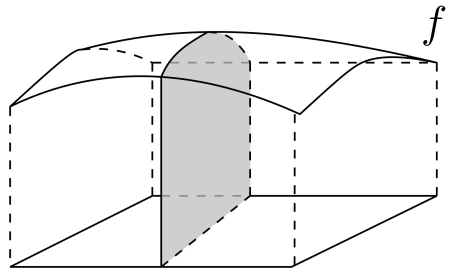

Рис. 4: Площадь сечения под графиком.

Она предлагает брать сечения под графиком, считать их площадь и складывать $\Rightarrow$ смотрим на сечения.

Задача 1. Что будет в пересечении двух трубок одинакового диаметра под прямым углом?

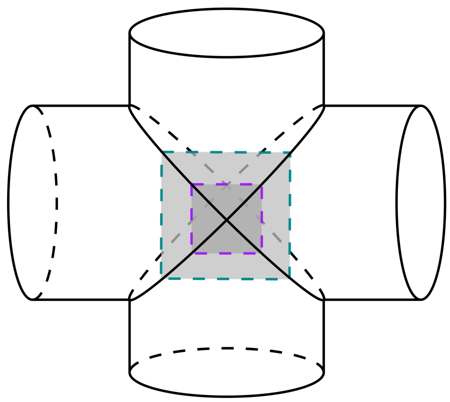

Рис. 5: Пересечение двух трубок под прямым углом.

$\square$ Можно считать, что трубки получились из уравнений: $x^2 + y^2 \leq 1$ и $x^2 + z^2 \leq 1$, тогда:

$$|y| \leq \sqrt{1-x^2},\ |z| \leq \sqrt{1-x^2}$$

Таким образом, если мы возьмём сечения при фиксированном x, будут получаться квадраты. $\blacksquare$

Аналогичный вопрос может быть про четырехмерный куб: $[0,1]^4$, как его себе представить? Один из способов это посмотреть сечения. Многомерные объекты мы так и понимаем - с помощью сечений.

В формулировке есть очень важное условие от которого отказаться нельзя: $\forall x \in \mathrm{I}_x$ функция $y \mapsto f(x,y)$ интегрируема на бруске I_y.

Пример: рассмотрим следующую функцию:

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & x \neq \frac{1}{2} \\ D(y), & x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

где $D(x)$ - функция Дирихле. По определению это интегрируемая функция, поскольку какое бы разбиение ни взяли, в Римановой сумме отлично от нуля лишь слагаемое, где задето сечение $x = \frac{1}{2}$, но сумма объемов этих слагаемых не превосходит $2\lambda(\mathbb{T})$ и следовательно: $\sigma \to 0$. Но в $x = \frac{1}{2}$ функция Дирихле и никакого интеграла по y не существует и такое может происходить не только на одном сечении. Поэтому исключив требование выше, интеграла по I_y не будет.

После доказательства можно будет обсудить, как хитро доопределять $f(x, y)$ в тех x для которых функция не интегрируема, но отметим, что интеграл Римана плохо реагирует на переопределения. Чтобы не перегружать теорему, мы пока обойдемся без этого. Аналогичное требоване есть, если расписываем всё в другом порядке.

Также отметим, что в обратную сторону теорема не верна: может так случиться, что у функции всё отлично на каждом сечении (как по x, так и по y), но при этом интеграла по квадрату нет (например, построив аналог функции Дирихле на квадрате: на плотном множестве 1, а вне него 0 так, чтобы на каждом сечении эта функция будет либо 0, либо только в одной точке будет $\neq 0$).

Доказательство теоремы Фубини

$\square$ Пусть $\mathrm{J} \subset \mathrm{I} = \mathrm{I}_x \times \mathrm{I}_y$ - произвольный брусок. Верно: $\mathrm{J} = \mathrm{J}_x \times \mathrm{J}_y$, поскольку брусок это произведение отрезков, а лююбой подбрусок это выбор в каждом отрезке промежутка и их перемножение. Рассмотрим индикаторы: $\chi_{\mathrm{J}}(x, y) = \chi_{\mathrm{J}_x}(x)\cdot\chi_{\mathrm{J}_y}(y)$ - как мы установлии в прошлый раз. Рассмотрим интегралы:

$$\int\limits_{\mathrm{I}} \chi_{\mathrm{J}}(x, y)dxdy = |\mathrm{J}|$$

$$\int\limits_{\mathrm{I}_x} \left(\int\limits_{\mathrm{I}_y} \chi_{\mathrm{J}}(x, y)dy\right)dx = \int\limits_{\mathrm{I}_x} \left(\int\limits_{\mathrm{I}_y} \chi_{\mathrm{J}_x}(x)\cdot\chi_{\mathrm{J}_y}(y)dy\right)dx = \int\limits_{\mathrm{I}_x} \chi_{\mathrm{J}_x}(x)\cdot\left(\int\limits_{\mathrm{I}_y} \chi_{\mathrm{J}_y}(y)dy\right)dx =$$

$$= \int\limits_{\mathrm{I}_x} \chi_{\mathrm{J}_x}(x)\cdot|\mathrm{J}_y|dx = |\mathrm{J}_y|\cdot\int\limits_{\mathrm{I}_x} \chi_{\mathrm{J}_x}(x)dx = |\mathrm{J}_x|\cdot|\mathrm{J}_y| = |\mathrm{J}|$$

Тоже самое верно и в другом порядке. Следовательно, для ступенчатой функции теорема верна. Воспользуемся критерием интегрируемости, тогда: $\exists$ последовательность $h_n(x, y),\ g_n(x, y)$ ступенчатых функций, для которых выполняются свойства:

1) $h_n(x, y) \leq f(x, y) \leq g_n(x, y)$, $\forall n$;
2) $h_n(x, y) \leq h_{n+1}(x, y)$; $g_{n+1}(x, y) \leq g_n(x, y)$, $\forall n$;
3) $\int_{\mathrm{I}} g_n(x, y)dxdy - \int_{\mathrm{I}} h_n(x, y)dxdy \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$;

Отметим, что функция $H_n(x) = \int_{\mathrm{I}_y} h_n(x, y)dy$ будет снова ступенчатой функцией, поскольку она равна индикатору бруска по x, умноженному на число. Аналогично для $G_n(x) = \int_{\mathrm{I}_y} g_n(x, y)dy$. Подробнее:

$$h_n(x, y) = \sum_k c_k\cdot\chi_{\mathrm{J}_k}(x, y) \Rightarrow \int\limits_{\mathrm{I}_y} h_n(x, y)dy = \sum_k c_k\cdot|\mathrm{J}_{k,y}|\cdot\chi_{\mathrm{J}_{k,x}}(x) = \sum_k \widetilde{c_k}\cdot\chi_{\mathrm{J}_{k,x}}(x)$$

Нам необходимо доказать интегрируемость функции $x \mapsto \int_{\mathrm{I}_y} f(x, y)dy$ на I_x и равенство двойного интеграла повторному. Для этого потребуется воспользоваться критерием интегрируемости.

По монотонности интеграла понятно, что H_n не убывает, а G_n не возрастает и по этой же причине верно:

$$h_n(x,y) \leq f(x,y) \leq g_n(x,y) \Rightarrow H_n(x) \leq \int\limits_{\mathrm{I}_y} f(x,y)dy \leq G_n(x)$$

Рассмотрим интегралы для $H_n(x)$, $G_n(x)$ и применим уже доказанное выше для ступенчатых функций:

$$\int\limits_{\mathrm{I}_x} H_n(x)dx = \int\limits_{\mathrm{I}_x}\left(\int\limits_{\mathrm{I}_y} h_n(x,y)dy\right)dx = \iint\limits_{\mathrm{I}} h_n(x,y)dxdy \xrightarrow[n\to\infty]{} \iint\limits_{\mathrm{I}} f(x,y)dxdy$$

$$\int\limits_{\mathrm{I}_x} G_n(x)dx = \int\limits_{\mathrm{I}_x}\left(\int\limits_{\mathrm{I}_y} g_n(x,y)dy\right)dx = \iint\limits_{\mathrm{I}} g_n(x,y)dxdy \xrightarrow[n\to\infty]{} \iint\limits_{\mathrm{I}} f(x,y)dxdy$$

Следовательно, разности этих интегралов, а значит и разность интегралов от H_n и G_n стемятся к нулю:

$$\int\limits_{\mathrm{I}_x} H_n(x)dx - \int\limits_{\mathrm{I}_x} G_n(x)dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow x \mapsto \int\limits_{\mathrm{I}_y} f(x,y)dy \text{ - интегрируема}$$

Кроме того:

$$\int\limits_{\mathrm{I}_x}\left(\int\limits_{\mathrm{I}_y} f(x,y)dy\right)dx = \lim_{n\to\infty}\int\limits_{\mathrm{I}_x} H_n(x)dx = \iint\limits_{\mathrm{I}} f(x,y)dxdy$$

■

Упр. 1. Мы использовали, что $\forall x$ существует интеграл $\int_{\mathrm{I}_y} f(x,y)dy$. Как доопределять функцию в тех точках x в которых этого интеграла не существует, чтобы заключение теоремы было верным? То есть:

$$F(x) = \begin{cases} \int_{\mathrm{I}_y} f(x,y)dy, & \text{интеграл существует} \\ ?, & \text{интеграл не существует} \end{cases}$$

Но так, чтобы:

$$\iint\limits_{\mathrm{I}} f(x,y)dxdy = \int\limits_{\mathrm{I}_x} F(x)dx$$

Окажется, что доопределять можно не как угодно.

Упр. 2. Сколь велико множество x, где надо доопределять эту функцию $F(x)$?