Критерий Лебега

Теорема 1. (**Критерий Лебега**) f интегрируема по Риману на I $\Leftrightarrow$ f - ограничена и f - непрерывна почти всюду на I.

Rm: 1. Заметим, что доказать эту теорему можно идентично тому, что было во 2-м семестре (см. лекцию 25). Сейчас же мы докажем теорему немного по-другому, использовав факт, который станит понятен только в дальнейшем, но позволяющий доказать эту теорему проще.

☐ Предполагаем, что f - ограниченна. По критерию интегрируемости, пусть у нас есть $\{\mathrm{I}_m^N\}$ - разбиение бруска I на попарно непересекающиеся бруски так, что $\mathrm{diam}(\mathrm{I}_m^N) < \frac{1}{N}$ и $N+1$-ое разбиение получается из N-го разбиением уже имеющихся брусков. Для таких разбиений мы определяли две функции:

$$h_N(x) = \sum_m \inf_{\mathrm{I}_m^N} f(x) \cdot \chi_{\mathrm{I}_m^N}(x), \quad g_N(x) = \sum_m \sup_{\mathrm{I}_m^N} f(x) \cdot \chi_{\mathrm{I}_m^N}(x)$$

Тогда по критерию интегрируемости верно:

$$f \text{ - интегрируема на I} \Leftrightarrow \int\limits_{\mathrm{I}} (\underbrace{g_N(x) - h_N(x)}_{\geq 0}) dx \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

Рассмотрим внимательнее подинтегральное выражение:

$$g_N(x) - h_N(x) = \sum_m (\sup_{\mathrm{I}_m^N} f(x) - \inf_{\mathrm{I}_m^N} f(x)) \cdot \chi_{\mathrm{I}_m^N}(x) = \sum_m \omega(f, \mathrm{I}_m^N) \cdot \chi_{\mathrm{I}_m^N}(x)$$

Возьмем $x \in \mathrm{I}$ такой, что x не принадлежит границам I_m^N, $\forall m, N$, то есть каждый раз эта точка оказывается внутри бруска разбиения. Возьмем $\delta > 0$ и рассмотрим шар $\mathcal{B}(x,\delta) \Rightarrow$ брус содержащий x попадет в шар $\mathcal{B}(x,\delta)$ с ростом $N \Rightarrow$ колебание на брусе будет меньше, чем на шаре:

$$\mathrm{diam}(\mathrm{I}_m^N) < \frac{1}{N} \to 0 \Rightarrow \exists\, N\colon \mathrm{I}_m^N \subset \mathcal{B}(x,\delta) \Rightarrow \omega(f, \mathrm{I}_m^N) \leq \omega(f, \mathcal{B}(x,\delta))$$

где последнее верно, в силу того, что при расширении множества sup может только возрасти,a inf только уменьшиться (см. лекцию 2 этого семестра). Вспомним, что колебание в точке $\omega_f(x)$ это предел:

$$\omega_f(x) = \lim_{\delta\to 0+} \omega(f, \mathcal{B}(x,\delta))$$

Про это можно посмотреть, в лекции 17 семестра 1 и лекции 25 семестра 2. Возьмем $\varepsilon > 0$, тогда:

$$\exists\,\delta > 0\colon \omega(f, \mathcal{B}(x,\delta)) < \omega_f(x) + \varepsilon \Rightarrow \omega(f, \mathrm{I}_m^N) < \omega_f(x) + \varepsilon \Rightarrow g_N(x) - h_N(x) < \omega_f(x) + \varepsilon$$

где последнее верно в силу того, что: $x \in \mathrm{I}_m^N \Rightarrow \chi_{\mathrm{I}_m^N}(x) = 1$, $\forall k \neq m$, $\chi_{\mathrm{I}_k^N}(x) = 0$. Таким образом:

$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists\, N_0\colon \forall N > N_0,\, g_N(x) - h_N(x) < \omega_f(x) + \varepsilon$$

Точка $x \in \mathrm{I}_m^N$ не принадлежит граням этого бруска $\Rightarrow$ она внутренняя, тогда:

$$\exists\,\gamma > 0\colon \mathcal{B}(x,\gamma) \subset \mathrm{I}_m^N \Rightarrow \omega(f, \mathcal{B}(x,\gamma)) \leq \omega(f, \mathrm{I}_m^N)$$

Когда мы стягиваем шары, то колебания на них не возрастают при уменьшении радиуса, тогда:

$$\omega_f(x) \leq \omega(f, \mathcal{B}(x,\gamma)) \leq \omega(f, \mathrm{I}_m^N) \Rightarrow \exists\, N_0\colon \forall N > N_0,\, \omega_f(x) \leq g_N(x) - h_N(x) \leq \omega_f(x) + \varepsilon$$

Таким образом, для x не принадлежащим граням брусков $\forall m, N$, I_m^N мы получаем:

$$g_N(x) - h_N(x) \xrightarrow[N\to\infty]{} \omega_f(x)$$

Объединение всех граней I_m^N по всем m и N является множеством меры нуль по Лебегу, поскольку каждая грань это подмножество $x_k = \text{const}$ - график непрерывной функции над соответствующим параллелепипедом (для конкретного бруска, все его грани это множество меры нуль), а объединение всех граней это объединение счётного набора множеств меры нуль. Тогда:

$$\forall N,\ |g_N(x) - h_N(x)| \le 2\cdot \sup_{\mathrm{I}} |f|, \quad g_N(x) - h_N(x) \xrightarrow[N\to\infty]{} \omega_f(x) \text{ п.в. на I} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int\limits_{\mathrm{I}} (g_N(x) - h_N(x))dx \xrightarrow[N\to\infty]{} \int\limits_{\mathrm{I}} \omega_f(x)dx$$

где мы пользуемся теоремой Лебега об ограниченной сходимости и утверждением о том, что интеграл Лебега совпадает с интегралом Римана, если функция интегрируема по Риману (мы пока не знакомы с данными утверждениями). Тогда:

$$f \text{ - интегрируема по Риману на I} \Leftrightarrow \int\limits_{\mathrm{I}} \omega_f(x)dx = 0$$

$$\omega_f(x) \ge 0 \Rightarrow \int\limits_{\mathrm{I}} \omega_f(x)dx = 0 \Leftrightarrow \omega_f(x) = 0 \text{ п.в.}$$

Вспоминая, что: $\omega_f(x) = 0 \Leftrightarrow f$ непрерывна в точке x, мы получаем требуемое. ■

Следствие 1. Если f интегрируема по Риману на I, $f \ge 0$ и $\int_{\mathrm{I}} f(x)dx = 0$, то $f = 0$ п.в. на I.

□ Пусть x_0 - точка непрерывности функции f и $f(x_0) > 0$, тогда $\exists$ J - брусок такой, что:

$$\mathrm{J} \subset \mathrm{I},\ x_0 \in \mathrm{J},\ |\mathrm{J}| > 0,\ f(x) \ge \frac{f(x_0)}{2},\ \forall x \in \mathrm{J}$$

Поскольку функция непрерывна и положительна в какой-то точке $\Rightarrow$ в целой окрестности отделена от нуля, окрестность можно взять в виде бруска положительного объема. Тогда можно утверждать:

$$f(x) \ge \frac{f(x_0)}{2}\cdot\chi_{\mathrm{J}}(x) \Rightarrow 0 = \int\limits_{\mathrm{I}} f(x)dx \ge \int\limits_{\mathrm{I}} \frac{f(x_0)}{2}\cdot\chi_{\mathrm{J}}(x)dx = \frac{f(x_0)}{2}\cdot|\mathrm{J}| > 0$$

Получили противоречие $\Rightarrow$ во всех точках непрервности $f = 0 \Rightarrow$ по критерию Лебега $f = 0$ п.в. ■

Следствие 2. Если f интегрируема по Риману на I и φ - непрерывна на $[\inf\limits_{\mathrm{I}} f, \sup\limits_{\mathrm{I}} f]$, то $\varphi(f)$ интегрируема по Риману на I.

□ Если функция φ непрерывна на I, то она ограничена на нём $\Rightarrow$ подставили f в ограниченную функцию $\Rightarrow \varphi(f)$ ограничена. Если f непрерывна в x_0, то и $\varphi(f)$ непрерывна в $x_0 \Rightarrow \varphi(f)$ непрерывна почти всюду $\Rightarrow \varphi(f)$ по критерию Лебега интегрируема. ■

Следствие 3. Если f и g интегрируемы по Риману на I, то $f \cdot g$ интегрируемы на I.

□ Очевидно, поскольку каждая функция ограничена $\Rightarrow$ $f \cdot g$ ограничено. Каждая из них почти всюду непрерывна, но объединение двух множеств меры ноль это множество меры ноль $\Rightarrow$ обе одновременно непрерывны почти всюду, а произведение непрерывных функций - непрерывно $\Rightarrow$ получаем требуемое по критерию Лебега. ■

Пример: Рассмотрим функцию Римана и функцию знака:

$$R(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & x = \dfrac{m}{n}, \ (m,n) = 1 \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}, \quad \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

Функция $R(x)$ это ограниченная, почти всюду непрерывная функция $\Rightarrow$ интегрируемая функция. $\operatorname{sgn}(x)$ это интегрируемая функция. Композиция этих функций: $\operatorname{sgn}(R(x)) = D(x)$ это функция Дирихле. Следовательно, композиция функций - не интегрируема.

Rm: 2. Пример, когда внутрь подставляем не непрерывную функцию и получаем неинтегрируемую - сложнее. Ранее похожее обсуждалось во 2-м семестре, когда множество точек разрыва получает положительную меру: используется множество, похожее на Кантаровское, только положительной меры.

Интеграл Римана по множеству

Мы умеем интегрировать только по бруску, но нам хотелось бы научиться интегрировать не только по ним, но и по любому произвольному множеству.

Идея: Пусть у нас есть произвольное множество A и на нём задана функция $f\colon A \to \mathbb{R}$. Пусть A это ограниченное множество. Сделаем продолжение функции f на брус I, содержащий A:

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

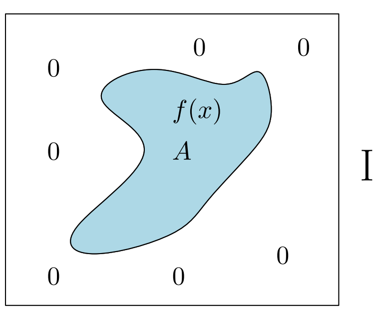

Рис. 1: Продолжение функции f на брус I.

Тогда интеграл по множеству A будет иметь вид:

$$\int\limits_A f(x)dx = \int\limits_{\mathrm{I}} \widetilde{f}(x)dx$$

Тогда все свойства интеграла Римана переносятся и сюда, при этом заметим, что необходимо существование интеграла справа. Вместе с этим, возникают справедливые вопросы, что если интеграл по другому бруску будет иным:

$$\int\limits_{\mathrm{I}} \widetilde{f}(x)dx \neq \int\limits_{\mathrm{J}} \widetilde{f}(x)dx$$

Или что по одному бруску интеграл есть, а по другому его нет. Вспомним определения. Пусть (X, ρ) - метрическое пространство и $A \subset X$.

Опр: 1. Точка $a \in A$ называется внутренней, если $\exists \mathcal{B}(a, r) \subset A$.

Обозначение: $\mathring{A} =$ множество внутренних точек A.

Опр: 2. Точка a называется граничной, если: $\forall \mathcal{B}(a, r)$, $\mathcal{B}(a, r) \cap A \neq \varnothing \wedge \mathcal{B}(a, r) \cap (X \setminus A) \neq \varnothing$.

Обозначение: $\partial A =$ множество граничных точек A.

Опр: 3. Множество $\overline{A} = A \cup \partial A$, называется замыканием множества A.

Rm: 3. Замыкание, как мы помним, это замкнутое множество.

Утв. 1. Пусть A - ограниченное множество и $f\colon A \to \mathbb{R}$, $\widetilde{f}$ определена так:

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

Пусть I и J - замкнутые бруски такие, что $\overline{A} \subset \mathring{\mathrm{I}}$, $\overline{A} \subset \mathring{\mathrm{J}}$. Тогда $\widetilde{f}$ интегрируема на I $\Leftrightarrow$ $\widetilde{f}$ интегрируема на J и интегралы, если они существуют, по ним совпадают:

$$\int\limits_{\mathrm{I}} \widetilde{f}(x)dx = \int\limits_{\mathrm{J}} \widetilde{f}(x)dx$$

$\square$ Применим критерий Лебега. $\widetilde{f}$ непрерывна на $\mathbb{R}^n \setminus A$, поскольку $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus A$ функция $\widetilde{f} \equiv 0$ вместе с некоторой своей окрестностью (т.е. $\mathbb{R}^n \setminus A$ - открытое множество) $\Rightarrow$ все точки разрыва $\widetilde{f}$ лежат в пересечении внутренностей брусков: $\mathring{\mathrm{I}} \cap \mathring{\mathrm{J}}$, так как: $\overline{A} \subset \mathring{\mathrm{I}} \cap \mathring{\mathrm{J}}$.

($\Rightarrow$) Если $\widetilde{f}$ интегрируема на I, то $\widetilde{f}$ ограничена на I $\Rightarrow$ $\widetilde{f}$ ограничена на $\mathrm{I} \cap \mathrm{J}$ $\Rightarrow$ $\widetilde{f}$ ограничена на J, потому что $\widetilde{f} = 0$ вне этого пересечения. Если $\widetilde{f}$ интегрируема на I, то множество точек разрыва $\widetilde{f}$ в I (а значит в $\mathbb{R}^n$) имеет меру нуль по Лебегу. Но точки разрыва лежат в общей части $\mathrm{I} \cap \mathrm{J}$ $\Rightarrow$ $\widetilde{f}$ почти всюду непрерывна на J $\Rightarrow$ по критерию Лебега $\widetilde{f}$ интегрируема на J.

($\Leftarrow$) Аналогично предыдущему пункту.

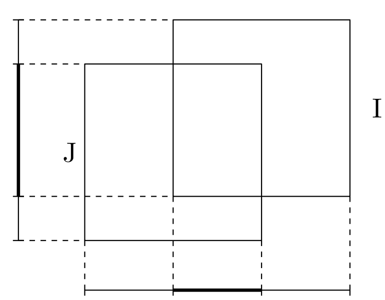

Рис. 2: Пересечение брусков I и J.

Поскольку у нас пока нет аддитивности, то равенство интегралов будем обосновывать по определению. Пусть оба интеграла существуют. Заметим, что $\mathrm{I}\cap\mathrm{J}$ - замкнутый брус с рёбрами положительной длины, поскольку $A \neq \varnothing$ и каждая точка A - это внутренняя точка I и $\mathrm{J} \Rightarrow \mathrm{I}\cap\mathrm{J}$ имеет внутренние точки. Теперь будем строить разбиение. Пусть $\mathbb{T}_1$ это разбиение I, а $\mathbb{T}_2$ это разбиение J такие, что на общей части они совпадают. Это можно сделать включением точек концов общих отрезков в разбиение:

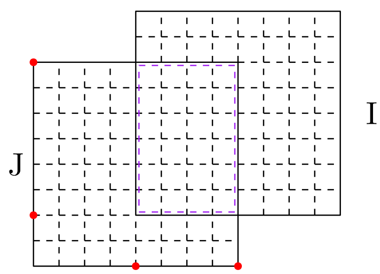

Рис. 3: Включение точек концов отрезков пересечения $\mathrm{I}\cap\mathrm{J}$ в разбиение.

Возьмем отмеченные точки ξ_1 для $\mathbb{T}_1$ и ξ_2 для $\mathbb{T}_2$ так, чтобы они совпадали на общей части. Тогда:

$$\sigma(\widetilde{f},\mathbb{T}_1,\xi_1) = \sum_j \widetilde{f}(\xi_j^1)\cdot|\mathrm{I}_j^1| = \sum_{j\,:\,\mathrm{I}_j^1=\mathrm{I}_j^2} \widetilde{f}(\xi_j^1)\cdot|\mathrm{I}_j^1| + \sum_{j\,:\,\mathrm{I}_j^1\neq\mathrm{I}_j^2} \widetilde{f}(\xi_j^1)\cdot|\mathrm{I}_j^1| = \sum_{j\,:\,\mathrm{I}_j^1=\mathrm{I}_j^2} \widetilde{f}(\xi_j^1)\cdot|\mathrm{I}_j^1| + 0 =$$

$$= \sum_{j\,:\,\mathrm{I}_j^1=\mathrm{I}_j^2} \widetilde{f}(\xi_j^1)\cdot|\mathrm{I}_j^1| + \sum_{j\,:\,\mathrm{I}_j^1\neq\mathrm{I}_j^2} \widetilde{f}(\xi_j^2)\cdot|\mathrm{I}_j^2| = \sum_j \widetilde{f}(\xi_j^2)\cdot|\mathrm{I}_j^2| = \sigma(\widetilde{f},\mathbb{T}_2,\xi_2)$$

Разбиваем так, чтобы $\lambda(\mathbb{T}_1)\to 0$ и $\lambda(\mathbb{T}_2)\to 0$, тогда сразу получаем: $\int_{\mathrm{I}}\widetilde{f}(x)dx = \int_{\mathrm{J}}\widetilde{f}(x)dx$. ∎

Опр: 4. Интеграл Римана по произвольному множеству A (где A - ограничено) это интеграл:

$$\int\limits_A f(x)dx = \int\limits_{\mathrm{I}} \widetilde{f}(x)dx, \quad \overline{A}\subset\mathring{\mathrm{I}}, \quad \widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x\in A\\ 0, & x\notin A\end{cases}$$

Утв. 2. $\int_A 1dx$ существует $\Leftrightarrow \partial A$ - множество меры нуль по Лебегу.

□ Возьмем $\overline{A}\subset\mathring{\mathrm{I}}$, в данном случае $\widetilde{f}(x) = \chi_A(x)$, тогда по определению:

$$\exists \int\limits_A 1dx = \int\limits_{\mathrm{I}} \chi_A(x)dx \Leftrightarrow \chi_A(x) \text{ - п.в. непрерывна}$$

Точки разрыва у индикатора могут быть лишь на границе: взяли внутреннюю точку $A \Rightarrow \chi_A \equiv 1$ вместе с некоторой окрестностью, взяли внешнюю точку $\Rightarrow \chi_A \equiv 0$ вместе с некоторой окрестностью $\Rightarrow$ точки разрыва оказываются там, где в окрестности есть точки A и точки дополнения. Если это не так, то либо там есть окрестность, где нет точек A и это внешняя точка, либо там есть окрестность, где нет внешних точек и это внутренняя точка. Во всех остальных случаях мы приходим к граничной точке $\Rightarrow \partial A$ это точки разрыва и $\chi_A(x)$ п.в. непрерывна $\Leftrightarrow \partial A$ это множество меры нуль по Лебегу. ∎

Пример: $A = \mathbb{Q} \Rightarrow$ граница не является множеством меры нуль по Лебегу.

Пример: $\int_A f(x)dx$ существует, но при этом не существует $\int_A 1dx$? Да, например: $f(x)=0$.

Объем допустимого множества

Опр: 5. Множество A допустимо (измеримо по Жордану), если A - ограничено и ∂A это множество меры нуль по Лебегу.

Опр: 6. Объемом допустимого множества A (или мерой Жордана множества A) называется интеграл:

$$|A| = \int\limits_A 1dx$$

Rm: 4. Заметим, что не нужно путать этот объем с мерой Лебега. Мера Лебега множества рациональных чисел равна нулю, а объем ему приписать нельзя, потому что индикатор этого множества не интегрируем по Риману.

Утв. 3. Если A допустимо и $|A| = 0$, то $\forall$ ограниченная функция f интегрируема по Риману на A и кроме того, верно:

$$\int\limits_A f(x)dx = 0$$

$\square$ Возьмем $\widetilde{f}(x)$ и брус I: $\overline{A} \subset \mathring{\mathrm{I}}$. f - ограничена $\Rightarrow$ $\widetilde{f}$ тоже ограничена. Точки разрыва $\subset \overline{A}$, где $\overline{A} = A \cup \partial A$, так как вне этого множества функция - тождественный ноль. Поскольку A - допустимо, то ∂A это множество меры нуль по Лебегу и верно:

$$\int\limits_{\mathrm{I}} \underbrace{\chi_A(x)}_{\geq 0} dx = |A| = 0 \Rightarrow \chi_A(x) = 0 \text{ почти всюду}$$

Поскольку $\chi_A(x) \neq 0$ на множестве A, то A это множество меры нуль. Тогда $\overline{A} = A \cup \partial A$ - множество меры нуль $\Rightarrow$ точки разрыва это множество меры нуль $\Rightarrow$ $\widetilde{f}$ непрерывана почти всюду и $\widetilde{f} = 0$ почти всюду, поскольку A это множество меры нуль ($\widetilde{f} \neq 0$ только на A) $\Rightarrow$ интеграл $\int_{\mathrm{I}} \widetilde{f}(x)dx$ существует и равен $0 \Rightarrow$ интеграл $\int_A f(x)dx$ существует и равен 0. $\blacksquare$

Таким образом, если объем ноль, то это множество меры нуль и любая ограниченаня функция на этом множестве интегрируема.

Теорема 2. (**Критерий Лебега для допустимых множеств**) Пусть A - допустимое множество. Тогда f интегрируема на $A \Leftrightarrow f$ - ограничена на A и непрерывна почти всюду на A.

$\square$ f интегрируема на $A \Leftrightarrow \widetilde{f}$ интегрируема на I: $\overline{A} \subset \mathring{\mathrm{I}} \Leftrightarrow \widetilde{f}$ - ограничена и почти всюду непрерывна на брусе I. Следовательно, поскольку $\widetilde{f}$ ограничена на A, то и f ограничена на A.

$\widetilde{f}$ непрерывна на $\mathrm{I} \setminus \overline{A}$, а внутри A она почти всюду непрерывна и там же $\widetilde{f} = f$. Поскольку ∂A это множество меры нуль $\Rightarrow \widetilde{f}$ почти всюду непрерывна на I $\Rightarrow f$ почти всюду непрерывна на A, потому что на ∂A мы не смотрим, а изучаем только внутренние точки. В окрестностях внутренних точек $\widetilde{f}$ совпадает с $f \Rightarrow \widetilde{f}$ - ограничена и почти всюду непрерывна на I $\Leftrightarrow f$ - ограничена и почти всюду непрерывна на A. Следовательно, мы получаем требуемое. $\blacksquare$

Rm: 5. В условии имеется в виду непрерывность почти всюду по A на множестве A, но не вообще. То есть проверяются последовательности, которые лежат только в A.

Rm: 6. В условии невозможно отказаться от допустимости множества A, иначе можно взять функцию Дирихле и множество рациональных чисел $\Rightarrow$ она на нём непрерывна (потому что просто константа), при этом нельзя утверждать, что f интегрируема, так как функция Дирихле не будет интегриурема.

Rm: 7. Если множество не является допустимым, то важной становится сама функция f.