Формула замены переменных

Теорема 1. (**Формула замены переменных**) Пусть $\Omega_x, \Omega_y \subset \mathbb{R}^n$ - открытые и ограниченные множества. $\varphi\colon \Omega_x \to \Omega_y$ - диффеоморфизм, $\overline{E} \subset \Omega_x$ и E - допустимое множество. Пусть $f\colon \varphi(E) \to \mathbb{R}$, тогда функция f интегрируема по Риману на $\varphi(E) \Leftrightarrow f(\varphi(x))\cdot|\det \mathrm{J}_\varphi(x)|$ интегрируема на E и в случае интегрируемости верно равенство:

$$\int\limits_{\varphi(E)} f(y)dy = \int\limits_E f(\varphi(x))\cdot|\det \mathrm{J}_\varphi(x)|dx$$

Rm: 1. Не обязательно, чтобы $\Omega_x, \Omega_y \subset \mathbb{R}^n$ были ограниченными, поскольку сама теорема будет верна для допустимых множеств.

$\square$

Проверка формулы в частном случае 2):

$$\varphi\colon \Omega_x = \mathbb{R}^n \to \Omega_y = \mathbb{R}^n,\ \varphi(x) = Ax + b,\ \det(A) \neq 0$$

Множество E это брус или образ бруса при невырожденном аффинном преобразовании (как φ). Пусть f будет непрерывна на $\mathbb{R}^n$. Проверим равенство:

$$\int\limits_{\varphi(E)} f(y)dy = \int\limits_E f(\varphi(x))\cdot|\det(A)|dx$$

Лемма 1. Всякое отображение: $\varphi(x) = Ax + b$ является композицией конечного набора отображений следующего вида:

(1) Переставление координат (смотри случай 1));

(2) $y_1 = x_1, \ldots, y_{n-1} = x_{n-1}, y_n = x_n + c$, где c - какое-то число;

(3) $y_1 = x_1, \ldots, y_{n-1} = x_{n-1}, y_n = c\cdot x_n$, где c - какое-то число;

(4) $y_1 = x_1, \ldots, y_{n-1} = x_{n-1}, y_n = x_n + x_{n-1}$;

То есть $\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \ldots \circ \varphi_m$, где каждое отображение является одного из этих видов.

$\square$ (1) и (2) $\Rightarrow$ далее считаем $b = 0 \Rightarrow \varphi(x) = Ax$. Вспомним, что E_{ij} - матрица, где на (i,j)-м месте стоит 1 и 0 на всех остальных, то есть матричная единица. Тогда:

$$(I + E_{ij})A = A + A_{ij},\ i \neq j$$

где A_{ij} это матрица состоящая из j-ой строки матрицы A на i-ом месте $\Rightarrow$ мы получили прибавление к i-ой строке j-ой строки. Рассмотрим матрицу E_i^c - матрица полученная из единичной, домножением на c единицы на (i,i)-м месте. Тогда $E_i^c\cdot A$ - домножение i-ой строчки на c. Следовательно, мы умеем складывать строки и умножать на числа $\Rightarrow$ мы умеем переставлять строчки местами:

$$\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} \xrightarrow[i+j]{} \begin{pmatrix} i \\ i+j \end{pmatrix} \xrightarrow[j-(i+j)]{} \begin{pmatrix} -j \\ i+j \end{pmatrix} \xrightarrow[i+j+(-j)]{} \begin{pmatrix} -j \\ i \end{pmatrix} \xrightarrow[\cdot(-1)]{} \begin{pmatrix} j \\ i \end{pmatrix}$$

Умножая матрицу A на матрицы $E_1, \ldots, E_m$ мы можем привести её к единичной матрице:

$$E_m{\cdot}E_{m-1}{\cdot}\ldots{\cdot}E_2{\cdot}E_1{\cdot}A = I$$

Также заметим, что обратные преобразования - это преобразования такого же вида, тогда:

$$A = E_1^{-1}{\cdot}\ldots{\cdot}E_m^{-1} = \widetilde{E}_1{\cdot}\ldots{\cdot}\widetilde{E}_m$$

Аналогично, при умножении таких матриц на вектора: $E_{ij}{\cdot}x \Rightarrow x_i \to x_i + x_j$ и $E_i^c{\cdot}x \Rightarrow x_i \to c{\cdot}x_i$. Таким образом, мы представили: $\varphi(x) = A{\cdot}x$ в виде композиций отображений вида: $x_i{\cdot}c$ или $x_i + x_j$, где остальные координаты остаются на местах. С учетом возможности перестановки координат, лемма доказана. ■

Применим теорему Фубини и проверим, что для каждого из преобразований $(2), (3), (4)$ верна ФЗП:

$$\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \ldots \circ \varphi_m, \int\limits_{\varphi(E)} f(y)dy = \int\limits_{\varphi_2 \circ \ldots \circ \varphi_m(E)} f(\varphi_1(z)){\cdot}|\varphi_1'(z)|dz = \ldots =$$

$$= \int\limits_E f(\varphi_1{\circ}\varphi_2{\circ}\ldots{\circ}\varphi_m(x)){\cdot}|\varphi_1'|{\cdot}|\varphi_2'|{\cdot}\ldots{\cdot}|\varphi_m'|dx = \int\limits_E f(\varphi(x)){\cdot}|\varphi'|dx$$

Таким образом, достаточно проверить для каждого из простых преобразований верность формулы выше. Проверим для (4) (аналогично для (2) и (3)):

$$\varphi\colon y_1 = x_1, \ldots, y_{n-1} = x_{n-1}, y_n = x_n + x_{n-1}$$

Мы знаем, что E это заведомо допустимое множество: брус или его образ аффинного преобразования, в частности это выпуклое множество, его одномерные сечения это промежутки, а поскольку E - ограничено, то это ограниченные промежутки (либо интервал, либо полуинтервал, либо отрезок). Если f всюду непрерывна, то всё можно интегрировать по этим сечениям. Пусть верно:

$$E \subset \mathrm{I}_{n-1} \times [a_n, b_n], \, \overline{E} \subset \mathring{\mathrm{I}}_{n-1} \times (a_n, b_n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi(E) \subset \{(y_1, \ldots, y_n) \mid (y_1, \ldots, y_{n-1}) \in \mathrm{I}_{n-1}, \, a_n + y_{n-1} \le y_n \le b_n + y_{n-1}\}$$

Поскольку $y_1, \ldots, y_{n-1}$ бегают по бруску, то:

$$\exists\, A, B\colon E, \, \varphi(E) \subset \mathring{\mathrm{I}}_{n-1} \times (A, B) \Rightarrow \int\limits_{\varphi(E)} f(y_1, \ldots, y_n)dy_1{\cdot}\ldots{\cdot}dy_n = \int\limits_{\mathrm{I}_{n-1} \times [A,B]} f(y)\chi_{\varphi(E)}(y)dy$$

Применяем теорему Фубини и мы получим:

$$\int\limits_{\mathrm{I}_{n-1} \times [A,B]} f(y)\chi_{\varphi(E)}(y)dy = \int\limits_{\mathrm{I}_{n-1}} dy_1{\cdot}\ldots{\cdot}dy_{n-1} \int\limits_A^B f(y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n){\cdot}\chi_{\varphi(E)}(y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n)dy_n =$$

$$= \int\limits_{\mathrm{I}_{n-1}} dx_1{\cdot}\ldots{\cdot}dx_{n-1} \int\limits_A^B f(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_n){\cdot}\chi_{\varphi(E)}(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_n)dy_n$$

Далее, мы делаем замену $y_n = x_n + x_{n-1}$ в одномерном интеграле, которую мы умеем делать из второго семестра:

$$\int\limits_A^B f(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_n)\cdot\chi_{\varphi(E)}(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_n)dy_n =$$

$$= \int\limits_{A-x_{n-1}}^{B-x_{n-1}} f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n + x_{n-1})\cdot\chi_{\varphi(E)}(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n + x_{n-1})dx_n = (*)$$

где $\chi_{\varphi(E)}(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n + x_{n-1} = \chi_{\varphi(E)}(\varphi(x)) = \chi_E(x)$, поскольку φ - диффеоморфизм. Далее, поскольку мы выбрали A и B столь большими, что: $E \subset \mathrm{I}_{n-1} \times [A - x_{n-1}, B - x_{n-1}]$, тогда:

$$[A - x_{n-1}, B - x_{n-1}] \subset [A, B] \Rightarrow (*) = \int\limits_A^B f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n + x_{n-1})\chi_E(x_1, \ldots, x_n)dx_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int\limits_{\varphi(E)} f(y)dy = \int\limits_{\mathrm{I}_{n-1}} dx_1\cdot\ldots\cdot dx_{n-1} \int\limits_A^B f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n + x_{n-1})\chi_E(x)dx_n =$$

$$= \int\limits_{\mathrm{I}_{n-1}} dx_1\cdot\ldots\cdot dx_{n-1} \int\limits_A^B f(\varphi(x))\chi_E(x)dx_n = \int\limits_E f(\varphi(x))dx$$

где в последнем равенстве мы опять воспользовались теоремой Фубини. Это является правильной формулой замены переменной, поскольку для такого преобразования: $|\varphi'| = 1$. ■

Rm: 2. Как доказывается вся ФЗП с помощью такого же приема - смотри Зорич, второй том.

Rm: 3. Общий случай будет разобран позднее и сразу для интеграла Лебега, но из того, что мы доказали уже следует полезное равенство: E это брус, $\varphi(x) = Ax + b$, $\det(A) \neq 0$, то тогда:

$$|\varphi(E)| = |\det(A)|\cdot|E|$$

Чтобы получить это равенство, надо в доказанном взять $f = 1$. Смысл этой формулы: объем параллелепипеда равен определителю матрицы, задающей вектора параллелепипеда, умноженному на объем бруса из которого этот параллелепипед получается.

Следствие 1. Значение интеграла Римана не зависит от выбора декартовой системы координат.

□ Пусть изначально были координаты в $\mathbb{R}^n$ - x, которые мы ортогональным преобразованием заменили на y. Поскольку преобразование ортогональное, то определитель φ равен единице и верно равенство:

$$\int\limits_{E_x} f(x)dx = \int\limits_{E_y} f(y)dy$$

■

Rm: 4. Заметим, что если начнутся какие-либо растяжения, менять объемы, то значения интеграла также будут меняться. Поэтому речь идет только об ортонормированных системах координат.

Применение формулы замены переменной

Теорема Брауэра

Теорема 2. (**Брауэра**) Если f - непрерывное отображение замкнутого шара: $\overline{\mathcal{B}} \to \overline{\mathcal{B}}$, то:

$$\exists\, x \in \overline{\mathcal{B}}\colon\ f(x) = x$$

Rm: 5. Доказательство предложил Милнер. Следствие теоремы Брауэра - теорема Шаудера.

$\square$ Начнём со случая, когда $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ - гладкое отображение. Для определенности возьмем единичный шар: $\mathcal{B} = \mathcal{B}(0,1)$, $f\colon \overline{\mathcal{B}} \to \overline{\mathcal{B}}$. Обычно первая часть доказательства всегда сводится к лемме о барабане: нельзя стянуть полотно барабана не разорвав на границе. Предположим, что $f(x) \neq x$ на $\overline{\mathcal{B}}$, тогда проведём луч через $f(x)$ и x до пересечения с границей:

$$F(x) = x + \lambda(x)\cdot(x - f(x)), \quad \lambda(x)\colon \|F(x)\| = 1$$

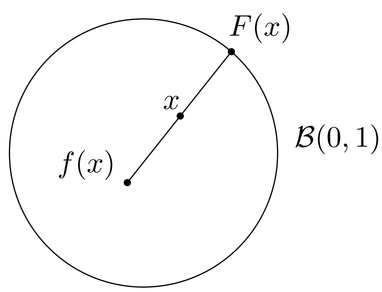

Рис. 1: Построение $F(x)$.

Мы ожидаем от него следующее:

(1) $F(x)$ - гладкая в $\mathcal{B}(0, 1+\delta)$, $\delta > 0$;

(2) $\|F(x)\| = 1$, то есть: $F\colon \overline{\mathcal{B}}(0,1) \to \partial\mathcal{B}(0,1)$;

(3) (Ретракция): $\forall x \in \partial\mathcal{B}(0,1)$, $F(x) = x$;

Идея: Из того, что $f(x) \neq x$, мы построим такое отображение $F(x)$, а затем с помощью ФЗП поймем, что такого отображения не существует и придём к противоречию. То, что такого отображения не существует и называется леммой о барабане/леммой об отсутствии ретракции шара на свою границу.

$$1 = \|F(x)\|^2 = \|x + \lambda\cdot(x - f(x))\|^2 = \|x\|^2 + \lambda^2\|x - f(x)\|^2 + 2\lambda\left\langle x, x - f(x)\right\rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda(x) = \frac{-\left\langle x, x - f(x)\right\rangle + \sqrt{\left\langle x, x - f(x)\right\rangle^2 + (1 - \|x\|^2)\cdot\|x - f(x)\|^2}}{\|x - f(x)\|^2}$$

Хотим понять, что $F(x)$ - гладкая функция, для этого заметим, что:

$$\forall x \in \overline{\mathcal{B}}(0,1),\ \|x - f(x)\| > 0 \Rightarrow \exists\,\delta > 0\colon \min_{\overline{\mathcal{B}}(0,1+\delta)} \|x - f(x)\| > 0$$

Минимум найдется, поскольку мы рассматриваем компакт: $\overline{\mathcal{B}}(0, 1+\delta)$. Он положителен, поскольку если это не так, то:

$$\exists\, x_n \in \overline{\mathcal{B}}(0, 1+\delta)\colon \|x_n\| \to 1,\ f(x_n) = x_n \wedge x_n \to x_0 \Rightarrow \|x_0\| = 1 \Rightarrow x_0 \in \overline{\mathcal{B}}(0,1) \wedge f(x_0) = x_0$$

Получили противоречие $\Rightarrow \forall x \in \overline{\mathcal{B}}(0, 1+\delta)$, $x \neq f(x) \Rightarrow$ в функции $\lambda(x)$ знаменатель это гладкая функция, не обращающаяся в 0 в этом шаре. Нам надо понять, что можно сказать про подкоренное выражение: оно или может уйти в минус, или обращаться в 0 $\Rightarrow$ не будет гладкой функцией:

$$\psi(x) = \underbrace{\langle x, x - f(x)\rangle^2}_{\geq 0} + \underbrace{(1 - \|x\|^2)}_{\geq 0,\, \forall x \in \overline{\mathcal{B}}(0,1)} \cdot \underbrace{\|x - f(x)\|^2}_{\neq 0,\, \forall x \in \mathcal{B}(0,1+\delta)} \geq 0$$

Выясним, когда это выражение на $\overline{\mathcal{B}}(0,1)$ равняется нулю:

$$1 = \|x\| \wedge \langle x, x - f(x)\rangle = 0 \Rightarrow \psi(x) = 0,\, x \in \overline{\mathcal{B}}(0,1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \langle x, x - f(x)\rangle = \|x\|^2 - \langle x, f(x)\rangle = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = \|x\|^2 = \langle x, f(x)\rangle \leq \|f(x)\| \cdot \|x\| = \|f(x)\| \leq 1$$

где последнее верно, в силу того, что $f\colon \overline{\mathcal{B}}(0,1) \to \overline{\mathcal{B}}(0,1)$ и следовательно, мы получаем равенство в неравенстве КБШ $\Rightarrow f(x) = c \cdot x$ вместе с тем, что $\|x\|^2 = \langle x, f(x)\rangle \Rightarrow c = 1 \Rightarrow f(x) = x \Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow$ уменьшая $\delta > 0$ можно считать, что $\psi(x) > 0$ в $\mathcal{B}(0, 1+\delta)$. Итого, $\psi(x) > 0$ в окрестности, корень на положительной оси - гладкая функция $\Rightarrow \lambda(x)$ это гладкая функция на $\mathcal{B}(0, 1+\delta)$. $\|F(x)\| = 1$ по построению. Осталось проверить, что если $x \in \partial\mathcal{B}(0,1)$, то $F(x) = x$. Пусть $x \in \partial\mathcal{B}(0,1)$, тогда:

$$\|x\| = 1 \Rightarrow \langle x, x - f(x)\rangle = \|x\|^2 - \langle x, f(x)\rangle \geq \|x\|^2 - \|f(x)\| \cdot \|x\| = 1 - \|f(x)\| \geq 1 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda(x) = 0$$

Таким образом, мы проверили корректность всех трех свойств, ожидаемых от функции $F(x)$.

Докажем, что такого $F(x)$ не существует и придём к противоречию. Возьмем $t \in [0,1]$ и рассмотрим функцию (гомотопия тождественного отображения и отображения F):

$$F_t(x) = (1-t)x + tF(x)$$

Идея гомотопии: это отображение, как непрерывная кривая в пространстве отображений, соединяет тождественное и наше отображение $F(x)$. При непрерывных преобразованиях некоторые свойства сохраняются $\Rightarrow$ если сумели соеденить непрерывной кривой тождественное отображение (с набором хороших свойств) и наше, то есть ожидание, что пусть не все, но хотя бы некоторые из свойств тождественного должны совпасть/перенестись на свойства $F(x)$, а у $F(x)$ этого свойства нет $\Rightarrow$ противоречие.

Заметим, что $F_t(x)$ в окрестности $\mathcal{B}(0, 1+\frac{\delta}{2})$ - гладкое отображение и $\exists\, t_0 \in (0,1)\colon \forall t \in [0, t_0]$ выполнено:

1) $F_t(x)$ - инъекция на $\mathcal{B}(0, 1+\frac{\delta}{2})$:

$$F_t(x) - F_t(z) = (1-t)(x-z) + t(F(x) - F(z)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|F_t(x) - F_t(z)\| = \|(1-t)(x-z) + t(F(x) - F(z))\| \geq (1-t)\|x-z\| - t\|F(x) - F(z)\|$$

где если перенести последнее слагаемое в левую часть, то мы получим обычное неравенство треугольника. Поскольку $F(x)$ - гладкая на $\overline{\mathcal{B}}(0, 1+\delta)$, то $\exists\, L > 0$:

$$\forall x, z \in \overline{\mathcal{B}}(0, 1+\delta),\; \|F_t(x) - F_t(z)\| \leq L\|x-z\| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|F_t(x) - F_t(z)\| \geq (1-t)\|x-z\| - t \cdot L\|x-z\| = (1 - t(L+1))\|x-z\|$$

Если $t_0 < \frac{1}{2(L+1)}$, то $\forall t \in [0, t_0]$ будет оценка:

$$\|F_t(x) - F_t(z)\| \geq \frac{1}{2}\|x-z\| \Rightarrow x \neq z \Rightarrow F_t(x) \neq F_t(z)$$

Следовательно, $F_t(x)$ - инъекция на $\mathcal{B}(0, 1+\frac{\delta}{2})$;

2) $\det F_t' > 0$ на окрестности $\mathcal{U}\colon \overline{\mathcal{B}}(0,1) \subset \mathcal{U} = \mathcal{B}(0, 1 + \frac{\delta}{2})$. Данное свойство верно из непрерывности:

$$t = 0 \Rightarrow F_t(x) = x \Rightarrow \det F_t' = 1 > 0$$

Поскольку $F_t(x)$ - непрерывно по t и x, то оно равномерно непрерывно по t относительно $x \Rightarrow$ при малых t можем считать, что определитель для всех $x \in \overline{\mathcal{B}}(0,1)$ отличается от 1 меньше, чем на $\varepsilon \Rightarrow$ определитель положителен;

Остальное - в следующий раз. ■