Измеримые функции

Опр: 1. Измеримым пространством или ИП будем называть тройку $(X, \mathcal{M}, \mu)$, где $\mathcal{M}$ - σ-алгебра с единицей X, а μ - σ-аддитивная мера. Если μ - конечная, то пространство будем называть конечным, если μ - σ-конечна, то σ-конечным.

Опр: 2. Пусть $(X, \mathcal{M}, \mu)$ - измеримое пространство (ИП), $E \in \mathcal{M}$ - некоторое множество и задана функция: $f\colon E \to \mathbb{R}^1 \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$, тогда она называется измеримой на E (или можно сказать измеримом пространстве $(E, E \cap \mathcal{M}, \mu)$) в том и только в том случае, если:

$$\forall c \in \mathbb{R}^1,\ f^{-1}((c, +\infty]) = \{x \in E\colon f(x) \in (c, +\infty]\} \in \mathcal{M}$$

Rm: 1. Также можно сказать $f^{-1}((c, +\infty]) \in \mathcal{M} \cap E$ вместо $f^{-1}((c, +\infty]) \in \mathcal{M}$.

Rm: 2. Поскольку если $(X, \mathcal{M}, \mu)$ это ИП и $E \in \mathcal{M}$, то $(E, \mathcal{M} \cap E, \mu)$ также ИП, в определении можно считать, что f задана на X.

Rm: 3. Если $f(x)$ определена на открытом или замкнутом подмножестве $A \subseteq \mathbb{R}^1$ и $f \in C(A)$, то есть f непрерывна на A, то f измерима на $(A, \mathcal{M} \cap A, \mu)$, где $\mathcal{M}$ это классическая Лебеговская σ-алгебра, а μ это классическая мера Лебега. Это следует из следующего факта:

$$\forall c,\ f^{-1}((c, +\infty]) = f^{-1}((c, +\infty)) = A \cap B$$

где B - открытое множество, а все открытые множества измеримы относительно классической меры Лебега (см. теорему с прошлой лекции, что любое открытое множество представимо в виде дизъюнктного объединения интервалов, которые измеримы относительно классической меры Лебега по её определению, смотри лекцию 3).

Опр: 3. Пусть $(X, \mathcal{M}, \mu)$ это ИП и $E \in \mathcal{M}$, тогда будем говорить, что некоторое свойство $(*)$ выполнено почти всюду на E (п.в. на E) $\Leftrightarrow \exists\, E_0 \in \mathcal{M},\ E_0 \subseteq E \wedge \mu(E \setminus E_0) = 0$, а свойство $(*)$ выполнено $\forall x \in E_0$.

Опр: 4. Функции $f(x)$ и $g(x)$ совпадающие п.в. на $E \in \mathcal{M}$ будем называть эквивалентными на E.

Далее, везде $(X, \mathcal{M}, \mu)$ это ИП и f измеримая на $X \Leftrightarrow f$ измеримая на $(X, \mathcal{M}, \mu)$

Лемма 1. Пусть $f(x)$ измерима на ИП $(X, \mathcal{M}, \mu)$, тогда:

$$f^{-1}(\{+\infty\}) \in \mathcal{M},\ f^{-1}(\{-\infty\}) \in \mathcal{M},\ f^{-1}(\mathbb{R}^1) \in \mathcal{M},\ \forall a, b \in \mathbb{R}^1,\ f^{-1}((a, b)) \in \mathcal{M}$$

то есть, все такие множества - измеримы.

□ Представим $f^{-1}(\{+\infty\})$ в виде:

$$f^{-1}(\{+\infty\}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}((n, +\infty])$$

где $f^{-1}((n, +\infty]) \in \mathcal{M}$ по определению $\Rightarrow \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} f^{-1}((n, +\infty]) \in \mathcal{M}$, поскольку $\mathcal{M}$ это σ-алгебра. Аналогично, представим $f^{-1}(\{-\infty\})$ в виде:

$$f^{-1}(\{-\infty\}) = X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}((-n, +\infty])$$

$$\forall n,\ f^{-1}((-n,+\infty]) \in \mathcal{M} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}((-n,+\infty]) \in \mathcal{M} \Rightarrow X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}((-n,+\infty]) \in \mathcal{M}$$

Аналогично, представим $f^{-1}(\mathbb{R}^1)$ в виде:

$$f^{-1}(\mathbb{R}^1) = X \setminus \big(f^{-1}(\{+\infty\}) \cup f^{-1}(\{-\infty\})\big)$$

$$f^{-1}(\{+\infty\}) \cup f^{-1}(\{-\infty\}) \in \mathcal{M} \Rightarrow X \setminus \big(f^{-1}(\{+\infty\}) \cup f^{-1}(\{-\infty\})\big) \in \mathcal{M}$$

Затем, $\forall b \in \mathbb{R}^1$ рассмотрим полный прообраз: $f^{-1}([b,+\infty])$:

$$f^{-1}([b,+\infty]) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}((b-\tfrac{1}{n},+\infty]) \in \mathcal{M} \Rightarrow f^{-1}((a,b)) = f^{-1}((a,+\infty]) \setminus f^{-1}([b,+\infty]) \in \mathcal{M}$$

где измеримость первого слагаемого $f^{-1}((a,+\infty])$ вытекает из определения. ■

Теорема 1. Пусть функция $f(x)$ измерима и конечна на X ($f\colon X \to \mathbb{R}^1$), тогда для любого борелевского множества $B \subseteq \mathbb{R}^1$, $f^{-1}(B) \in \mathcal{M}$.

□ Рассмотрим $\Sigma = \{A \subseteq \mathbb{R}^1 \colon f^{-1}(A) \in \mathcal{M}\}$. По предыдущей лемме $\mathbb{R}^1 \in \Sigma$. Если $A, C \in \Sigma$, то:

$$f^{-1}(A \cap C) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(C),\ f^{-1}(A) \in \mathcal{M},\ f^{-1}(C) \in \mathcal{M} \Rightarrow f^{-1}(A) \cap f^{-1}(C) \in \mathcal{M}$$

Аналогично, получим:

$$f^{-1}(A\Delta C) = f^{-1}(A)\Delta f^{-1}(C),\ f^{-1}(A) \in \mathcal{M},\ f^{-1}(C) \in \mathcal{M} \Rightarrow f^{-1}(A)\Delta f^{-1}(C) \in \mathcal{M}$$

В результате, $A \cap C \in \Sigma$, $A\Delta C \in \Sigma \Rightarrow \Sigma$ это алгбера (поскольку $\mathbb{R}^1 \in \Sigma$). Если $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \Sigma$, то в этом случае:

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(A_i),\ \forall i,\ f^{-1}(A_i) \in \mathcal{M} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(A_i) \in \mathcal{M} \Rightarrow f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \in \Sigma$$

В результате, Σ это σ-алгебра. Согласно предыдущей лемме любой интервал $(a,b) \in \Sigma \Rightarrow$ воспользуемся теоремой 4 с прошлой лекции, получим, что любое открытое $G \in \Sigma \Rightarrow \Sigma$ это σ-алгебра, содержащая все открытые множества, а борелевская это минимальная σ-алгебра, содержащая все открытые, следовательно борелевская σ-алгебра $\mathcal{B} \subset \Sigma$. ■

Rm: 4. Для любого измеримого по Лебегу, относительно классической меры Лебега, множества его полный прообраз не обязательно будет измеримым. Это не верно даже когда f будет непрерывной. На семинарах разбирается пример непрерывной функции и измеримого по Лебегу множества, относительно классической меры Лебега такого, что его полный прообраз уже будет неизмерим.

Лемма 2. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ измеримы на X, тогда измеримы множества:

$$A = \{x \in X \colon f(x) > g(x)\},\ B = \{x \in X \colon f(x) = g(x)\}$$

□ Пусть $\mathbb{Q}$ - все рациональные числа на $\mathbb{R}^1$, тогда множество A можно представить так:

$$A = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} f^{-1}((r,+\infty]) \cap g^{-1}([-\infty, r))$$

Измеримость $f^{-1}((r,+\infty])$ вытекает из определения, измеримость $g^{-1}([-\infty,r))$ вытекает из того, что $g^{-1}([-\infty,r)) = X \setminus g^{-1}([r,+\infty)) \Rightarrow A \in \mathcal{M}$. Аналогично, $B = X \setminus (\{f > g\} \cup \{g > f\}) \Rightarrow B \in \mathcal{M}$. ■

Теорема 2. Пусть $f(x)$ измерима на X, открытое множество $G \subseteq \mathbb{R}^1$, $f\colon X \to G$ и функция $\varphi(t)$ непрерывна на G, тогда композиция: $\varphi(f(x))$ измерима на X.

□ Пусть $c \in \mathbb{R}^1$ и $B_c = \varphi^{-1}((c, +\infty)) = \{t \in G\colon \varphi(t) > c\}$, тогда в силу непрерывности φ множество B_c это открытое множество $\Rightarrow B_c$ - борелевское. Но при этом выполняется:

$$(\varphi(f))^{-1}((c, +\infty]) = (\varphi(f))^{-1}((c, +\infty)) = \{x \in X\colon f(x) \in B_c\} = f^{-1}(B_c) \in \mathcal{M}$$

где последнее верно по теореме 1. ■

Rm: 5. Заметим, что композиция двух измеримых функций не обязательно будет измеримой. Более того, если в теореме поменять ролями f и φ, то композиция $f(\varphi)$ не обязана быть измеримой, поскольку есть непрерывные функции, которые множество меры нуль переводят не в множество меры нуль.

Следствие 1. Пусть $f(x)$ измерима и конечна на X, тогда измеримы функции:

$$\forall a \in \mathbb{R}^1,\ a{\cdot}f(x),\ f^2(x),\ f(x) + a$$

И если $f(x) \neq 0$ на X, то $\frac{1}{f(x)}$ тоже измерима.

□ Следует непосредственно из теоремы 2 подбором непрерывных функций. ■

Следствие 2. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ измеримы на X и конечны (запрещаем бесконечные значения), то верны следующие утверждения:

1) $f(x) + g(x)$ измерима на X;
2) $f(x){\cdot}g(x)$ измерима на X;
3) Если $g(x) \neq 0$ на X, то $\frac{f(x)}{g(x)}$ измерима на X;

□

1) Пусть $c \in \mathbb{R}^1$, тогда:

$$(f + g)^{-1}((c, +\infty)) = \{x \in X\colon f(x) + g(x) > c\} = \{x \in X\colon f(x) > c - g(x)\}$$

поскольку $f(x)$ измерима и $c - g(x)$ измерима по следствию 1, то $(f + g)^{-1}((c, +\infty))$ измеримо по лемме 2;

2) Представим $f(x){\cdot}g(x)$ следующим образом:

$$f(x){\cdot}g(x) = \frac{1}{4}((f(x) + g(x))^2 - (f(x) - g(x))^2)$$

пользуясь леммой 2 и следствием 1 снова получаем измеримую функцию;

3) Представим $\frac{f(x)}{g(x)}$ следующим образом:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x){\cdot}\frac{1}{g(x)}$$

пользуясь следствием 1 и вторым пунктом данной теоремы, снова получаем измеримую функцию;

■

Rm: 6. Условия конечности функций $f(x)$ и $g(x)$ можно изменить на:

1) Определить операции с точками: $\pm\infty$, например, очевидные представления:

$$a + \infty = +\infty, \quad a - \infty = -\infty, \quad a > 0,\, a\cdot(\pm\infty) = \pm\infty, \quad a < 0,\, a\cdot(\pm\infty) = \mp\infty$$

Договорные представления:

$$\infty - \infty = 0, \quad 0\cdot\infty = 0$$

В этом случае можно не требовать конечности, подразумевая, что мы так определяем операции;

2) Если мера μ - полна, то можно потребовать конечности $f(x)$ и $g(x)$ п.в. на X. В этом случае неважно, как определены операции на множестве меры 0.

Измеримость пределов и точных граней последовательности функций. Измеримость производной функции

Теорема 3. Пусть $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ это последовательность измеримых функций на X, тогда следующие функции измеримы на X:

$$\varphi(x) = \sup_n f_n(x), \quad \psi(x) = \inf_n f_n(x), \quad h(x) = \varlimsup_{n\to\infty} f_n(x), \quad g(x) = \varliminf_{n\to\infty} f_n(x)$$

Кроме того, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ измерима на множестве своего существования E, то есть на $(E, \mathcal{M}\cap E, \mu)$.

Rm: 7. Множество своего существования может оказаться пустым.

$\square$ Если $c \in \mathbb{R}^1$, то будет верно:

$$\{x \in X \colon \varphi(x) > c\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{x \in X \colon f_n(x) > c\}$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\, \{x \in X \colon f_n(x) > c\} \in \mathcal{M} \Rightarrow \{x \in X \colon \varphi(x) > c\} \in \mathcal{M}$$

Аналогично для других функций:

$$\{x \in X \colon \psi(x) > c\} = \bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=1}^{\infty}\{x \in X \colon f_n(x) > c + \tfrac{1}{m}\} \in \mathcal{M}$$

$$h(x) = \inf_{n\geq 1}\sup_{k\geq n} f_k(x)$$

Взятие верхней и нижней граней последовательности измеримых функций не изменяет измеримости, то отсюда будет вытекать измеримость $h(x)$. Аналогично для функции $g(x)$. Рассмотрим множество E:

$$E = \{x \in X \colon \exists \lim_{n\to\infty} f_n(x)\} = \{x \in X \colon h(x) = g(x)\} \in \mathcal{M}$$

Это то множество, где верхний предел совпадает с нижним, при этом две измеримые функции равны друг другу на измеримом множестве по лемме 2. Кроме того, на E функция $f(x) = h(x)$, а $h(x)$ измерима на E, поскольку она измерима на всём X. $\blacksquare$

Теорема 4. Пусть $f(x) \in C((a, b))$, где $(a, b) \subset \mathbb{R}^1$, тогда её производная измерима относительно классической меры Лебега на множестве своего существования.

□ Введем функции:

$$\forall x \in (a,b),\ \overline{f}'(x) = \varlimsup_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \quad \underline{f}'(x) = \varliminf_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Тогда $\forall c \in \mathbb{R}^1$ можем записать:

$$\{x \in (a,b)\colon \overline{f}' > c\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{0<|h|<\frac{1}{n}} \{x \in (a,b)\colon x+h \in (a,b) \wedge \tfrac{1}{h}\cdot(f(x+h)-f(x)) > c + \tfrac{1}{m}\}$$

Если обозначим множество в скобках за $E_{c,h,m}$, то так как $f(x) \in C((a,b))$, $\forall c,h,m$, $E_{c,h,m}$ - открытое множество $\Rightarrow \bigcup\limits_{0<|h|<\frac{1}{n}} E_{c,h,m}$ - тоже будет открытым, а далее операции - счётные и следовательно:

$$\{x \in (a,b)\colon \overline{f}' > c\} \in \mathcal{M}$$

Аналогично проверяется непрерывность нижней производной. Тогда:

$$A = \{x \in (a,b)\colon \exists\, f'(x)\} = \{x \in (a,b)\colon \overline{f}'(x) = \underline{f}'(x)\}$$

где последнее множество измеримо по лемме 2. И отметим, что на A, $f'(x) = \overline{f}'(x)$, которая измерима, поэтому на множестве существования наша функция измерима. ■

Rm: 8. Заметим, что под существованием производной полагаем существование любой производной: конечной или бесконечной. То есть $f'(x)$ может равняться $\pm\infty$, это не запрещено. Согласно лемме 1, в частности измеримо то множество, на котором $f'(x)$ конечна (прообраз $\mathbb{R}^1$) $\Rightarrow$ можно изменить эту теорему так, чтобы конечная $f'(x)$ была измеримой на множестве своего существования.

Rm: 9. Этот результат справедлив и для любой измеримой функции, вместо непрерывных функций.

Rm: 10. Равенство множеств проверяется тем, что если точка принадлежит левой части, то она принадлежит правой и наоборот.

Сходимость по мере и её свойства

В теории вероятности эта сходимость ещё называется сходимостью по вероятности. Пусть у нас есть измеримое пространство $(X, \mathcal{M}, \mu)$.

Опр: 5. Пусть последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и $f(x)$ измеримы и конечны на X. Тогда говорят, что $f_n(x)$ сходится по мере на X к $f(x)$ в том и только в том случае, когда:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in X\colon |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0$$

Или подробнее:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \gamma > 0,\ \exists\, N\colon \forall n \geq N,\ \mu(\{x \in X\colon |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) < \gamma$$

Обозначение: $f_n \overset{\mu}{\Rightarrow} f$ или $f_n \overset{\mu,X}{\Longrightarrow} f$.

Rm: 11. Здесь мы требуем конечности в каждой точке, но также возможно требовать измеримости функций на X и конечности почти всюду на X, а мера у нас полна.

Утв. 1. Предел по мере единственен с точностью до эквивалентности, то есть если:

$$f_n \overset{\mu}{\Rightarrow} f,\ f_n \overset{\mu}{\Rightarrow} g$$

то f эквивалентна g (то есть они совпадают почти всюду).

□ Пусть $k \in \mathbb{N}$, рассмотрим множество: $E_k = \{x \in X \colon |f(x) - g(x)| > \frac{1}{k}\}$, можно сказать:

$$\forall n,\ E_k \subseteq \{x \in X \colon |f_n(x) - f(x)| > \tfrac{1}{2k}\} \cup \{x \in X \colon |f_n(x) - g(x)| > \tfrac{1}{2k}\}$$

Это вытекает из того, что в случае отрицания мы получаем, что обе разности меньше $\frac{1}{2k}$, тогда:

$$|f(x) - g(x)| \le |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x) - g(x)| \le \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} = \frac{1}{k}$$

Следовательно, отсюда мы получим:

$$\forall n,\ \mu(E_k) \le \mu(\{x \in X \colon |f_n(x) - f(x)| > \tfrac{1}{2k}\}) + \mu(\{x \in X \colon |f_n(x) - g(x)| > \tfrac{1}{2k}\}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Тогда $\mu(E_k) = 0$ и наконец:

$$A = \{x \in X \colon |f(x) - g(x)| > 0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \Rightarrow \mu(A) = 0$$

то есть функции отличаются друг от друга на множестве меры нуль $\Rightarrow$ эквивалентны. ■

Теорема 5. Пусть $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $f(x)$, $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $g(x)$ - измеримы и конечны на X, $f_n \overset{\mu}{\Rightarrow} f$ и $g_n \overset{\mu}{\Rightarrow} g$, тогда: $f_n(x) + g_n(x) \overset{\mu}{\Rightarrow} f(x) + g(x)$.

□ Заметим, что $\forall \varepsilon > 0$ имеет место включение множества:

$$E_{f+g,\varepsilon,n} = \{x \in X \colon |(f_n(x) + g_n(x)) - (f(x) + g(x))| > \varepsilon\} \subseteq$$

$$\subseteq \{x \in X \colon |f_n(x) - f(x)| > \tfrac{\varepsilon}{2}\} \cup \{x \in X \colon |g_n(x) - g(x)| > \tfrac{\varepsilon}{2}\} = E_{f,\frac{\varepsilon}{2},n} \cup E_{g,\frac{\varepsilon}{2},n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu(E_{f+g,\varepsilon,n}) \le \mu(E_{f,\frac{\varepsilon}{2},n}) + \mu(E_{g,\frac{\varepsilon}{2},n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow f_n + g_n \overset{\mu}{\Rightarrow} f + g$$

■

Пример: Пусть $f_n(x) = x + \frac{1}{n}$, $x \in \mathbb{R}^1$, тогда $f_n(x) \overset{\mathbb{R}^1}{\rightrightarrows} f(x) = x \Rightarrow$ тем более $f_n(x) \xRightarrow{\mu,\mathbb{R}^1} f(x)$, где μ это классическая мера Лебега.

Пример: Рассмотрим $f_n^2(x) = x^2 + \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2}$ и $f^2(x) = x^2$, следовательно: $f_n^2(x) - f^2(x) = \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2}$, тогда:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mu\left(\{x \in \mathbb{R}^1 \colon |f_n^2(x) - f^2(x)| > 1\}\right) = \mu\left(\{x \in \mathbb{R}^2 \colon |\tfrac{2x}{n} + \tfrac{1}{n^2}| > 1\}\right) = \infty$$

где последнее верно в силу того, что независимо от отсечки, хвосты больше 1 находятся на множестве бесконечной меры. Таким образом, этот пример показывает, что тривиальной теоремы о сходимости произведения последовательностей для сходимости по мере - нет.