Неизмеримые множества

Хотелось бы понять какие существуют неизмеримые множества и насколько может быть богатой Лебеговская σ-алгбера. На самом деле, ответ на вопрос существуют ли такие множества относительно любой меры зависит, в общем, от двух вещей: самой меры и принятия или нет аксиомы выбора. В данном курсе мы принимаем аксиому выбора безоговорочно $\Rightarrow$ всё зависит от меры.

Пусть M это все подмножества прямой $\mathbb{R}^1$ и мера задана следующим образом:

$$\mu(A) = \begin{cases} 1, & 0 \in A \\ 0, & 0 \notin A \end{cases}$$

Несложно понять, что это мера Лебега-Стильтьеса, порожденная функцией: $\varphi(x) = \mathbb{I}(x > 0)$, то есть она непрерывна слева. В этом случае неизмеримых множеств нет. В более привычном случае классической меры Лебега, с принятой аксиомой выбора, неизмеримых множеств будет достаточно. Основное свойство, которое их порождает это инвариантность классической меры, относительно сдвига.

Теорема 1. Пусть $\mathcal{M}$ это классическая Лебеговская σ-алгебра на подмножествах отрезка $[0, 1]$, μ - соответствующая классическая мера Лебега, $A \in \mathcal{M}$ и $\mu(A) > 0$. Тогда:

$$\exists\, B \subset A\colon B \notin \mathcal{M}$$

Rm: 1. Иными словами, в любом множестве положительной меры (относительно классической меры Лебега) есть неизмеримое подмножество. Также заметим, что условие $\mu(A) > 0$ существенно, поскольку мы знаем, что мера Лебега полна и поэтому если имеем множество меры нуль, то автоматически любое его подмножество будет измеримо и тоже будет иметь нулевую меру, тогда как в множествах положительной меры будут неизмеримые подмножества.

□ Введём на $[0, 1]$ отношение эквивалентности: $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$. Рефлексивность, симметричность и транзитивность - очевидны. Тогда $[0, 1]$ может быть представлен следующим образом:

$$[0, 1] = \bigsqcup_{\alpha \in \Omega} K_\alpha$$

где K_α - классы (утверждение доказывается в других курсах или см. Кострикина), а объединение не является счетным. Используя аксиому выбора, образуем множество:

$$E_0 = \{x_\alpha\}_{\alpha \in \Omega},\ x_\alpha \in K_\alpha,\ \forall \alpha \in \Omega$$

Затем, пусть $\{r_n\}_{n=0}^{\infty} = \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$, где для удобства будем считать, что $r_0 = 0$. Обозначим, через $E_n = E_0 + r_n = \{x_\alpha + r_n,\ \alpha \in \Omega\}$, $n \in \mathbb{N}, n > 0$. Докажем, ряд утверждений:

1) $E_n \cap E_m = \varnothing$ при $n \neq m$;

   □ Действительно, пусть существует общий элемент z:

$$\exists\, z \in E_n \cap E_m \Rightarrow x_\alpha + r_n = z = x_\beta + r_m \Rightarrow x_\alpha - x_\beta = r_n - r_m \in \mathbb{Q} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_\alpha \sim x_\beta \Rightarrow \alpha = \beta,\ x_\alpha = x_\beta \Rightarrow r_n = r_m \Rightarrow n = m$$

   где равенства представителей классов верны, поскольку из каждого класса мы взяли по одному представителю; ■

2) $[0,1] \subset \bigsqcup\limits_{n=0}^{\infty} E_n$;

$\square$ Пусть $x \in [0,1]$, тогда в силу представления $[0,1]$ верно:

$$\exists\, \alpha_0 \colon x \in K_{\alpha_0} \Rightarrow x - x_{\alpha_0} = q \in [-1,1] \wedge q \in \mathbb{Q} \Rightarrow q = r_{n_0} \Rightarrow x = x_{\alpha_0} + r_{n_0} \in E_{n_0}$$

Таким образом, $\forall x \in [0,1]$, $\exists\, E_k \colon x \in E_k \Rightarrow [0,1] \subset \bigsqcup\limits_{n=0}^{\infty} E_n$; $\blacksquare$

Поскольку $[0,1] \subset \bigsqcup\limits_{n=0}^{\infty} E_n$ и так как $A \subset [0,1]$, то будет верно:

$$A = \bigsqcup_{n=0}^{\infty} (A \cap E_n) = \bigsqcup_{n=0}^{\infty} A_n,\ \forall n,\ A_n = A \cap E_n$$

Предположим, что $\forall n$, $A_n \in \mathcal{M}$, то есть измеримое множество $\Rightarrow$ в силу σ-аддитивности классической меры Лебега будет верно:

$$\mu(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n),\ \mu(A) > 0 \Rightarrow \exists\, n_s \colon \mu(A_{n_s}) = \gamma > 0$$

По определению, $A_{n_s} \subset E_{n_s}$. Рассмотрим при $n \neq n_s$ множества: $C_n = A_{n_s} - r_{n_s} + r_n \subset E_n$, поскольку:

$$A_{n_s} \subset E_{n_s} \Rightarrow A_{n_s} - r_{n_s} \subset E_0 \Rightarrow A_{n_s} - r_{n_s} + r_n \subset E_n$$

Также, положим: $C_{n_s} = A_{n_s}$. Так как классическая мера Лебега инвариантна относительно сдвигов (см. лекция 3, после следствия 2), то $\forall n$, $C_n \in \mathcal{M}$ - тоже измеримое множество, поскольку $A_{n_s} \in \mathcal{M}$ и мера равна: $\forall n$, $\mu(C_n) = \gamma$. Поэтому:

$$\forall n,\ C_n \subset E_n \wedge \forall n \neq m,\ E_n \cap E_m = \varnothing \Rightarrow C_n \cap C_m = \varnothing \Rightarrow \bigsqcup_{n=0}^{\infty} C_n \subseteq \bigsqcup_{n=0}^{\infty} E_n \subseteq [-1,2]$$

где последнее следует из определения $E_0 \subset [0,1]$ и того, что $r_n \in [-1,1]$. Тогда:

$$\infty = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(C_n) \leq \mu([-1,2]) = 2 - (-1) = 3$$

Получили противоречие с тем, что: $A_n = A \cap E \in \mathcal{M}$, то есть это измеримые множества. В результате:

$$\exists\, n_1 \colon A_{n_1} = A \cap E_{n_1} \notin \mathcal{M}$$

Следовательно, $B = A_{n_1}$ это неизмеримое множество, существование которого мы хотели доказать. $\blacksquare$

Некоторые свойства измеримых множеств

Сначала разберем техническую теорему, которая пригодится при разборе теоремы Фубини.

Теорема 2. Пусть $\mathcal{M}$ - σ-алгебра на которой задана σ-аддитивная, σ-конечная мера Лебега μ, полученная Лебеговским продолжением σ-аддитивной меры m с полукольца S. Пусть $A \in \mathcal{M}$ и $\mu(A) < \infty$. Тогда A можно представить в виде:

$$A = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{i,j} \setminus A_0,\ A_{i,j} \in \mathcal{R}(S),\ A_0 \in \mathcal{M},\ \mu(A_0) = 0$$

где $\mathcal{R}(S)$ это минимальное кольцо, содержащее S. Для каждого фиксированного i выполняется вложение множеств: $\forall i,\ A_{i,1} \subseteq A_{i,2} \subseteq \dots$. Если $B_i = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_{i,j}$, то $\mu(B_1) < \infty$ и $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \dots$.

□ Из процесса построения конечной и σ-конечной меры Лебега следует, что: $\forall n,\ \exists \{C_{n,i}\}_{i=1}^{\infty} \subset S$ такое, что выполняются следующие условия:

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} C_{n,i}, \quad \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_{n,i} \setminus A\right) < \frac{1}{n}$$

Это можно получить сразу из определения меры Лебега, поскольку $\mu(A)$ это точная нижняя грань:

$$\forall n,\ \exists \{C_{n,i}\}_{i=1}^{\infty} \subset S\colon \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_{n,i}\right) \le \mu(A) + \frac{1}{n},\ S \subseteq \mathcal{M} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} C_{n,i} \in \mathcal{M} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 < \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_{n,i} \setminus A\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_{n,i}\right) - \mu(A) \le \frac{1}{n}$$

где $A = B \sqcup (A \setminus B) \Rightarrow \mu(A) = \mu(A \setminus B) + \mu(B)$ верно для $A, B \in \mathcal{M}$ (измеримых по Лебегу множеств, где μ является мерой). Предположим:

$$B_1 = \bigcup_{l=1}^{\infty} C_{1,l},\ \forall i > 1,\ B_i = \bigcap_{k=1}^{i} \bigcup_{l=1}^{\infty} C_{k,l}$$

Тогда очевидно:

$$\mu(B_1) = \mu\left(\bigcup_{l=1}^{\infty} C_{1,l}\right) \le \mu(A) + \frac{1}{n} < \infty$$

Затем, по определению, мы получаем: $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \dots$, поскольку множества $C_{k,l}$ пересекаются в определении B_i. Кроме того, $\forall i,\ B_i \supseteq A$, из условий выше. Перегруппируем слагаемые в B_i:

$$\forall i,\ B_i = \bigcap_{k=1}^{i} \bigcup_{l=1}^{\infty} C_{k,l} = \bigcup_{l_1=1}^{\infty} \bigcup_{l_2=1}^{\infty} \dots \bigcup_{l_i=1}^{\infty} (C_{1,l_1} \cap C_{2,l_2} \cap \dots \cap C_{i,l_i})$$

Поскольку $C_{1,l_1} \cap C_{2,l_2} \cap \dots \cap C_{i,l_i}$ это конечное пересечение элементов полукольца, то это слагаемое принадлежит S, в результате счётное объединение таких слагаемых можно переписать:

$$\forall i,\ B_i = \bigcup_{l_1=1}^{\infty} \bigcup_{l_2=1}^{\infty} \dots \bigcup_{l_i=1}^{\infty} (C_{1,l_1} \cap C_{2,l_2} \cap \dots \cap C_{i,l_i}) = \bigcup_{r=1}^{\infty} D_{i,r},\ D_{i,r} \in S$$

Тогда положим при $j \geq 1$ множество:

$$\forall j \geq 1,\ A_{i,j} = \bigcup_{r=1}^{j} D_{i,r} \in \mathcal{R}(S) \Rightarrow \forall i,\ B_i = \bigcup_{r=1}^{\infty} D_{i,r} = \bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcup_{r=1}^{j} D_{i,r} = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{i,j}$$

где $A_{i,j} \in \mathcal{R}(S)$ поскольку $\mathcal{R}(S)$ это кольцо и выдерживает конечное объединение. При этом верна вложенность: $\forall i,\ A_{i,1} \subseteq A_{i,2} \subseteq \ldots$ просто по определению. Определим множество A_0:

$$A_0 = \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i \setminus A \Rightarrow \forall i,\ A_0 \subseteq B_i,\ \mu(B_i \setminus A) \leq \mu\left(\bigcup_{l=1}^{\infty} C_{i,l} \setminus A\right) < \frac{1}{i} \Rightarrow \forall i,\ \mu(A_0) < \frac{1}{i}$$

так как B_i это пересечение объединений из $C_{i,l}$, тогда $A_0 \in \mathcal{M}$ (вытекает из σ-алгебры: она выдерживает все операции) и $\mu(A_0) = 0$ в силу произвольности i. Итого:

$$\forall i,\ A \subseteq B_i \Rightarrow A \subseteq \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty} A_{i,j} \setminus A_0 = \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i \setminus \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i \setminus A\right) = A \cap \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i = A$$

где предпоследнее равенство верно в силу:

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \setminus (A \setminus B)$$

■

Rm: 2. Из этого же результата, когда речь идет про классическую меру Лебега на отрезке $[0,1]$, можно вывести что любое измеримое множество может быть представлено либо в виде пересечения счётного числа открытых множеств минус множество меры нуль, либо в виде объединения счётного числа замкнутых множеств плюм множество меры нуль. То есть либо множество типа G_δ без множества меры нуль, либо множество типа F_σ которому добавили множество меры нуль.

Опр: 1. Пусть $E \subset \mathbb{R}^1$ и K - система невырожденных отрезков ($[a,b]$ - невырожден $\Leftrightarrow b > a$). Тогда говорят, что E покрыто системой K в смысле Витали в том и только в том случае, когда:

$$\forall x \in E,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \text{ отрезок } \mathrm{I} = \mathrm{I}_{x,\varepsilon} \in K\colon x \in \mathrm{I} \wedge \mu(\mathrm{I}) < \varepsilon$$

где μ - классическая мера Лебега (длина).

Теорема 3. (**Витали**) Пусть ограниченное множество E лежит на прямой $E \subset \mathbb{R}^1$ и система невырожденных отрезков K покрывает E в смысле Витали. Тогда $\exists$ система попарно непересекающихся отрезков $\{\mathrm{I}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset K$ такая, что:

$$\mu^*\left(E \setminus \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{I}_n\right) = 0$$

где μ^* это классическая внешняя мера Лебега.

□ Пусть $E \subseteq [a,b]$, так как E по условию ограниченно. Поскольку система K покрывала E в смысле Витали, то система:

$$K_1 = \{\mathrm{I} \in K\colon \mathrm{I} \subseteq [a-1, b+1]\}$$

также покрывает E в смысле Витали. Определим число:

$$\alpha_1 = \sup_{\mathrm{I} \in K_1} \mu(\mathrm{I})$$

где $\alpha_1 > 0$ в силу того, что мы не рассматриваем невырожденные отрезки. Поскольку в K_1 все I лежат в конечном отрезке, то $\alpha_1 < \infty$ и можно выбрать $\mathrm{I}_1 \in K_1 \colon \mu(\mathrm{I}_1) > \frac{\alpha_1}{2}$. Определим множество:

$$K_2 = \{\mathrm{I} \in K_1 \colon \mathrm{I} \cap \mathrm{I}_1 = \varnothing\}$$

Если $K_2 = \varnothing$, то заканчиваем процесс, в противном случае, полагаем:

$$\alpha_2 = \sup_{\mathrm{I} \in K_2} \mu(\mathrm{I}) \Rightarrow \exists\, \mathrm{I}_2 \in K_2 \colon \mu(\mathrm{I}_2) > \frac{\alpha_2}{2}$$

И так далее, возможны два случая:

1) $\exists\, n_0 \colon K_{n_0} = \varnothing$, то есть процесс на каком-то шаге обрывается. Тогда мы имеем систему попарно непересекающихся отрезков: $\mathrm{I}_1, \ldots, \mathrm{I}_{n_0-1} \subset K$. Предположим, что:

$$\exists\, x \colon x \in E \setminus \bigsqcup_{l=1}^{n_0-1} \mathrm{I}_l = E \setminus F,\ F = \bigsqcup_{l=1}^{n_0-1} \mathrm{I}_l$$

конечное объединение замкнутых множеств - замкнуто $\Rightarrow F$ - замкнутое множество. Тогда:

$$\rho(x, F) = \inf_{y \in F} |x - y| = \alpha > 0$$

но по условию $\exists$ отрезок $\mathrm{I}_{x,\alpha/2} \in K_1 \colon x \in \mathrm{I}_{x,\alpha/2} \wedge \mu(\mathrm{I}_{x,\alpha/2}) < \frac{\alpha}{2}$, тогда: $\mathrm{I}_{x,\alpha/2} \cap F = \varnothing$, поскольку если бы было непустое пересечение, то расстояние:

$$\alpha = \rho(x, F) < \frac{\alpha}{2}$$

получили противоречие с утверждением, что $K_{n_0} = \varnothing$, поскольку нашли отрезок который подходит на роль отрезка из K_{n_0}. Таким образом, $E \subset F$ и утверждение доказано. Мера будет равна 0 потому, что $E \subset F = \varnothing$;

2) Построена счётная система попарно непересекающихся отрезков $\{\mathrm{I}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset K_1$, причем:

$$\forall n,\ \mu(\mathrm{I}_n) > \frac{\alpha_n}{2},\ \alpha_n = \sup_{\mathrm{I} \in K_n} \mu(\mathrm{I})$$

Возьмем некоторое число $\gamma > 0$, тогда так как $\bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{I}_n \subseteq [a-1, b+1]$, то будет верно:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(\mathrm{I}_n) < \infty \Rightarrow \exists\, N = N(\gamma) \colon \sum_{n=N}^{\infty} \mu(\mathrm{I}_n) < \frac{\gamma}{5}$$

$$x \in E \setminus \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{I}_n \Rightarrow x \in E \setminus \bigsqcup_{n=1}^{N} \mathrm{I}_n,\ F_N = \bigsqcup_{n=1}^{N} \mathrm{I}_n \Rightarrow \rho(x, F_N) > 0$$

поэтому $\exists\, \mathrm{I}_x \in K_{N+1}$ - отрезок из $K_1 \colon x \in \mathrm{I}_x \wedge \mathrm{I}_x \cap F_N = \varnothing$ (проверяли в предыдущем пункте). Очевидно, что:

$$\lim_{n \to \infty} \alpha_n = 0$$

причем, стремится монотонно, поскольку уменьшается множество по которому берется точная верхняя грань, сам же предел верен, в силу следующего:

$$\forall n,\ \mu(\mathrm{I}_n) > \frac{\alpha_n}{2},\ \alpha_n = \sup_{\mathrm{I} \in K_n} \mu(\mathrm{I}) \wedge \mathrm{I}_n \in K_1 \Rightarrow \mu(\mathrm{I}_n) \leq \mu([a-1, b+1]) = b - a + 2 < \infty$$

все отрезки лежат на конечном отрезке и туда нельзя вложить бесконечно много отрезков меры больше какого-то числа. Поэтому:

$$\exists\, l > N+1 \colon \mathrm{I}_x \notin K_l \Rightarrow \exists\, m \geq N+1 \colon \mathrm{I}_x \in K_m \setminus K_{m+1}$$

Отсюда вытекают следующие моменты:

(1) $\mu(\mathrm{I}_x) \leq \alpha_m = \sup\limits_{\mathrm{I} \in K_m} \mu(\mathrm{I})$;

(2) $\mathrm{I}_x \cap \mathrm{I}_m \neq \varnothing$, иначе $\mathrm{I}_x \in K_{m+1} \Rightarrow \mathrm{I}_x \cap \mathrm{I}_m \neq \varnothing \wedge \mu(\mathrm{I}_m) \geq \frac{\alpha_m}{2} \Rightarrow \exists\, z \in \mathrm{I}_x \cap \mathrm{I}_m$, c_m - середина I_m, тогда для произвольного $y \in \mathrm{I}_x$:

$$\forall y \in \mathrm{I}_x,\ \rho(y, c_m) \leq \rho(y, z) + \rho(z, c_m) \leq \mu(\mathrm{I}_x) + \frac{\mu(\mathrm{I}_m)}{2} \leq \alpha_m + \frac{\mu(\mathrm{I}_m)}{2} \leq 2\mu(\mathrm{I}_m) + \frac{\mu(\mathrm{I}_m)}{2} = \frac{5}{2}\mu(\mathrm{I}_m)$$

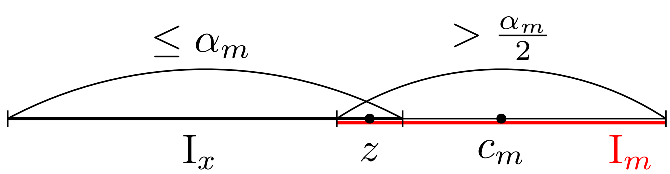

Рис. 1: Непустое пересечение отрезков I_x и I_m.

Отсюда, если $5\mathrm{I}_m$ это отрезок с центром c_m, имеющий длину в 5 раз больше, чем I_m, то в силу неравенства выше, получим: $\mathrm{I}_x \subseteq 5\mathrm{I}_m$;

Таким образом, мы получаем:

$$E \setminus \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{I}_n \subseteq \bigcup_{m=N+1}^{\infty} 5\mathrm{I}_m \Rightarrow \mu^*\left(E \setminus \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{I}_n\right) \leq \sum_{m=N+1}^{\infty} \mu(5\mathrm{I}_m) = 5\sum_{m=N+1}^{\infty} \mu(\mathrm{I}_m) < \gamma$$

где мы перешли к μ, поскольку все $5\mathrm{I}_m$ - измеримы. Поскольку $\gamma > 0$ - произвольное, то отсюда вытекает утверждение теоремы. Более того, отсюда вытекает, что множество $E \setminus \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{I}_n$ измеримо;

■

Rm: 3. Если бы мы использовали μ^* вместо μ, то возник бы вопрос, почему множество измеримо.

Следствие 1. В условиях теоремы Витали существует конечный набор попарно непересекающихся отрезков $\{\mathrm{I}_n\}_{n=1}^{N} \subset K$ такой, что:

$$\sum_{n=1}^{N} \mu(\mathrm{I}_n) > \frac{\mu^*(E)}{2}$$

Rm: 4. Если счётным набором отрезков мы можем покрыть всё множество E, то выбирая какой-то конечный набор мы можем добиться, чтобы его мера была велика.

Теорема 4. Пусть G это открытое множество в $\mathbb{R}^1$, тогда будет верно представление:

$$G = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} (\alpha_n, \beta_n)$$

где один или два интервала могут иметь бесконечные концы.

$\square$ Введём на G отношение эквивалентности: $x \sim y \Leftrightarrow \exists\, (a,b) \in G\colon x, y \in (a,b)$, проверим это:

1) G - открыто $\Rightarrow \exists\, (a,b)\colon x \in (a,b)$;

2) Симметричность очевидна;

3) Пусть $x \sim y$, $y \sim z \Rightarrow \exists\, (a,b), (c,d) \in G\colon x, y \in (a,b)$, $y, z \in (c,d) \Rightarrow (a,b) \cap (c,d) \neq \varnothing$, тогда:

$$(a,b) \cup (c,d) = (\min(a,c), \max(b,d)) = (e,f) \subset G \Rightarrow x, z \in (e,f) \Rightarrow x \sim z$$

Поэтому всё G представится в виде: $G = \bigsqcup\limits_{\alpha \in A} K_\alpha$, где K_α - класс эквивалентности α. Введём обозначение:

$$\forall \alpha,\ a_\alpha = \inf\{x \in K_\alpha\},\ b_\alpha = \sup\{x \in K_\alpha\}$$

и проверим, что $K_\alpha = (a_\alpha, b_\alpha)$. Действительно, если $x \in (a_\alpha, b_\alpha)$, то:

$$\exists\, y, z \in (a_\alpha, b_\alpha) \cap K_\alpha\colon y \sim z \wedge y < x < z \Rightarrow x \sim y \Rightarrow x \in K_\alpha$$

Если $x \in (-\infty, a_\alpha) \cup (b_\alpha, +\infty)$, то $x \notin K_\alpha$ по определению a_α, b_α. Проверим, что $a_\alpha \notin K_\alpha$, где $a \neq -\infty$. Для b_α - аналогично. Пусть $a_\alpha \in K_\alpha$, тогда рассмотрим точку $l = a_\alpha + \varepsilon$, где $\varepsilon < (b_\alpha - a_\alpha)$. По предположению верно: $a_\alpha \sim l$, следовательно $\exists\, (\gamma, \delta) \subset G\colon a_\alpha, l \in (\gamma, \delta) \Rightarrow \gamma < a_\alpha$ и кроме того, если мы рассмотрим середину отрезка $(\gamma, a_\alpha)\colon q = \frac{a_\alpha + \gamma}{2}$, то:

$$q = \frac{a_\alpha + \gamma}{2} \in (\gamma, \delta) \wedge q < a_\alpha \Rightarrow q \sim a_\alpha \Rightarrow q \in K_\alpha$$

Следовательно, мы получили противоречие с тем, что a_α было точной нижней гранью по всем $x \in K_\alpha$ и $q < a_\alpha \Rightarrow a_\alpha \notin K_\alpha$. Так как в любом интервале есть рациональное число, то число классов K_α не более, чем счётно. $\blacksquare$