Интеграл Лебега для простых функций

Пусть $(X, \mathcal{M}, \mu)$ - измеримое пространство.

Опр: 1. Пусть функция $f\colon X \to \mathbb{R}$, тогда она называется простой в том и только в том случае, когда она измерима, принимает только конечное число значений и любое ненулевое значение принимается на множестве конечной меры. Формально это будет так:

$$f(x) = \sum_{l=1}^{r} a_l \cdot \chi_{F_l}(x), \quad \forall l,\, F_l \in \mathcal{M}, \quad \forall l_1 \neq l_2 \Rightarrow F_{l_1} \cap F_{l_2} = \varnothing, \quad \forall l,\, a_l \neq 0 \Rightarrow \mu(F_l) < \infty$$

Rm: 1. Ненулевые значения на множестве конечной меры необходимы только если у нас X σ-конечно. Для конечного измеримого пространства и так понятно, что ненулевые значения будут на множестве конечной меры. Также заметим, что по нашему определению, простая функция автоматически является измеримой.

Rm: 2. Если $f(x)$ - простая, то её можно представить в виде:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot \chi_{E_k}(x)$$

где $c_1 < c_2 < \ldots < c_n$, $\forall k,\, E_k \in \mathcal{M}$ и $\bigsqcup\limits_{k=1}^{n} E_k = X$, причем если $c_k \neq 0$, то $\mu(E_k) < \infty$.

Опр: 2. Пусть $f(x)$ это простая функция, тогда интегралом Лебега называется сумма вида:

$$\int\limits_X f(x) d\mu = \sum_{l=1}^{r} a_l \cdot \mu(F_l)$$

где формально считаем, что: $0 \cdot \infty = 0$ (поскольку мера у нас σ-конечна).

Rm: 3. В тех местах, где нам потребуется различать интегралы Римана и интегралы Лебега, мы будем обозначать интеграл Лебега через $(\mathcal{L})$:

$$(\mathcal{L}) \int\limits_X f(x) d\mu = \int\limits_X f(x) d\mu$$

Попробуем понять в чем разность между интегралом Римана и интегралом Лебега.

Пример: Пусть у нас есть функция, которая принимает конечное число значений на отрезке $[0, 1]$.

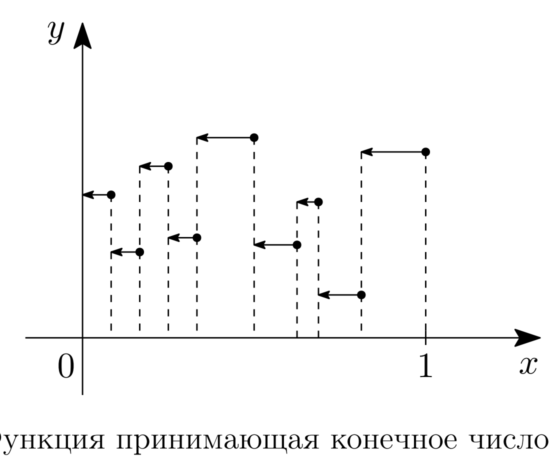

Рис. 1: Функция принимающая конечное число значений.

Тогда по построениею интегралов:

1) **Интеграл Римана**: Надо разбить отрезок $[0, 1]$ на отдельные интервалы фиксированной длины, берём значение функции на этом интервале, умножаем и так для каждого интервала. Затем мы уменьшаем длину каждого интервала;

2) **Интеграл Лебега**: Надо посмотреть значения на оси y, а затем посмотрим какова мера прообразов этих значений. В нашем случае - суммарная длина интервалов на которых функция принимает конкретные значения. Затем мы значения умножаем на меру интервала и складываем;

Утв. 1. Определение интеграла Лебега для простых функций корректно, то есть не зависит от способа представления функции.

$\square$ Пусть $f(x)$ - простая и имеются представления:

$$f(x) = \sum_{l=1}^{r} a_l \cdot \chi_{F_l}(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot \chi_{E_k}(x)$$

где все F_l, E_k - измеримые множества, $c_1 < c_2 < \ldots < c_n$, $\bigsqcup\limits_{l=1}^{r} F_l = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} E_l = X$ и ненулевые значения принимаются на множествах конечной меры. Заметим, что тогда:

$$\forall a_l,\, \exists\, c_k \colon a_l = c_k$$

поскольку значения складываться не могут и каждое принимается на своём множестве. Обозначим:

$$\Gamma_k = \{l \in \{1, 2, \ldots, r\} \colon a_l = c_k\} \Rightarrow \bigsqcup_{l \in \Gamma_k} F_l = E_k \wedge \bigsqcup_{k=1}^{n} \Gamma_k = \{1, 2, \ldots, r\}$$

где последнее верно в силу того, что все c_k у нас разные $\Rightarrow$ Γ_k не могут пересекаться между собой. Следовательно, рассмотрим следующую сумму:

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \cdot \mu(E_k) = \sum_{k=1}^{n} c_k \sum_{l \in \Gamma_k} \mu(F_l) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l \in \Gamma_k} a_l \cdot \mu(F_l) = \sum_{l=1}^{r} a_l \cdot \mu(F_l)$$

$\blacksquare$

Теорема 1. (**Линейность интеграла Лебега**) Пусть $f(x)$ и $g(x)$ - простые и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^1$, тогда линейная комбинация этих функций: $\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)$ тоже простая функция и будет верно:

$$\int\limits_X (\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x))\, d\mu = \alpha \cdot \int\limits_X f(x) d\mu + \beta \cdot \int\limits_X g(x) d\mu$$

$\square$ Пусть: $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \cdot \chi_{E_k}(x)$ и $g(x) = \sum\limits_{j=1}^{m} d_j \cdot \chi_{S_j}(x)$, где E_k, $S_j \in \mathcal{M}$, $\bigsqcup\limits_{k=1}^{n} E_k = \bigsqcup\limits_{j=1}^{m} S_j = X$ и любое ненулевое значение принимается на множестве конечной меры. Тогда:

$$\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (\alpha \cdot c_k + \beta \cdot d_j) \cdot \chi_{E_k \cap S_j}(x)$$

Видно, что эта функция принимает конечное число значений (не больше, чем $n \cdot m$), каждое значение принимается на некотором измеримом множестве, кроме того нетрудно заметить:

$$\bigsqcup_{k=1}^{n}\bigsqcup_{j=1}^{m} E_k \cap S_j = X$$

Также заметим, что если $\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x) \neq 0$, то хотя бы одно из значений c_k или d_j не должны быть равны нулю $\Rightarrow$ должна быть конечная мера у E_k или $S_j \Rightarrow$ конечная мера у пересечения. Следовательно, функция: $\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)$ - простая. В силу того, что определение интеграла корректно, то:

$$\int\limits_X (\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x))\, d\mu = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} (\alpha \cdot c_k + \beta \cdot d_j) \cdot \mu(E_k \cap S_j) = \alpha \sum_{k=1}^{n} c_k \sum_{j=1}^{m} \mu(E_k \cap S_j) +$$

$$+ \beta \sum_{j=1}^{m} d_j \sum_{k=1}^{n} \mu(E_k \cap S_j) = \alpha \sum_{k=1}^{n} c_k \mu(E_k) + \beta \sum_{j=1}^{m} d_j \mu(S_j) = \alpha \cdot \int\limits_X f(x) d\mu + \beta \cdot \int\limits_X g(x) d\mu$$

■

Утв. 2. Если $f(x)$ простая и $f(x) \geq 0$, то $\int\limits_X f(x)dx \geq 0$.

□ Вытекает сразу из определения простой функции и интеграла Лебега:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \chi_{F_k}(x) \geq 0 \wedge \forall k,\ \mu(F_k) \geq 0 \Rightarrow \int\limits_X f(x) d\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \mu(F_k) \geq 0$$

■

Утв. 3. Если $f(x)$ и $g(x)$ - простые и $\forall x \in X,\ f(x) \geq g(x)$, то будет верно:

$$\int\limits_X f(x) d\mu \geq \int\limits_X g(x) d\mu$$

□ Сразу следует из предыдущего утверждения и линейности интеграла:

$$\forall x \in X,\ f(x) \geq g(x) \Rightarrow f(x) - g(x) \geq 0 \Rightarrow \int\limits_X (f(x) - g(x)) d\mu = \int\limits_X f(x) d\mu - \int\limits_X g(x) d\mu \geq 0$$

■

Утв. 4. Если $f(x)$ - простая, то и $|f(x)|$ - тоже простая функция, кроме того:

$$\left| \int\limits_X f(x) d\mu \right| \leq \int\limits_X |f(x)| d\mu$$

□ Исходная функция принимала не более конечного числа значений $\Rightarrow |f(x)|$ число значений может лишь уменьшиться. Кроме того верно:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} c_k{\cdot}\mu(E_k)\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |c_k|{\cdot}\mu(E_k)$$

■

Утв. 5. Если $\mu(X) < \infty$, то $f(x) \equiv c$ это простая функция. Тогда:

$$\int\limits_X f(x)d\mu = c{\cdot}\mu(X)$$

□ Так как $\mu(X) < \infty$ и функция $f(x)$ принимает лишь одно значение на всём $X \Rightarrow$ она простая. Тогда:

$$\int\limits_X f(x)d\mu = \sum_{k=1}^{n} c{\cdot}\mu(E_k) = c{\cdot} \sum_{k=1}^{n} \mu(E_k) = c{\cdot}\mu\left(\bigsqcup_{k=1}^{n} E_k\right) = c{\cdot}\mu(X)$$

■

Опр: 3. Пусть $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ - последовательность функций на X, тогда скажем, что она монотонно не убывает на X в том и только в том случае, когда:

$$\forall x \in X,\, \forall n \in \mathbb{N},\, f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$$

Обозначение: $f_n(x) \uparrow$ или $f_n(x) \uparrow f(x)$ если известно к чему она сходится.

Теорема 2. Пусть $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, где $g_n(x)$ это простые неотрицательные функции на X, $g_n(x) \uparrow$ на X и кроме того:

$$\forall x \in X,\, g(x) \leq \lim_{n\to\infty} g_n(x)$$

Тогда будет верно неравенство:

$$\int\limits_X g(x)d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int\limits_X g_n(x)d\mu$$

где справа возможно значение ∞.

□ Пусть $g(x) = \sum\limits_{r=1}^{s} a_r{\cdot}\chi_{E_r}(x)$, где $E_r \in \mathcal{M}$, $E_{r_1} \cap E_{r_2} = \varnothing$ при $r_1 \neq r_2$ и $0 < a_1 < \ldots < a_s$. Обозначим:

$$F = \bigsqcup_{r=1}^{s} E_r \Rightarrow \mu(F) < \infty$$

где последнее верно в силу того, что все значения a_i ненулевые (даже если у нас σ-конечное пространство). Тогда $\forall \varepsilon > 0$ и для $\forall n$ определим множество:

$$F_n(\varepsilon) = \{x \in F\colon g_n(x) < g(x) - \varepsilon\}$$

Так как $g_n(x)\uparrow$, то мы имеем: $F \supseteq F_1(x) \supseteq F_2 \supseteq \ldots$, при этом, поскольку: $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) \geq g(x)$, то:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n(\varepsilon) = \varnothing$$

Следовательно, по теореме о непрерывности меры (в силу $\mu(F) < \infty$), мы получим:

$$\mu(F_n(\varepsilon)) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Заметим, что если: $X = A \sqcup B$, причём $A, B \in \mathcal{M}$ и $h(x)$ это простая функция на X, то $h(x)$ простая и на A, и на B. В результате:

$$h(x) = h(x)\cdot\chi_A(x) + h(x)\cdot\chi_B(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int\limits_X h(x)d\mu = \int\limits_X h(x)\cdot\chi_A(x)d\mu + \int\limits_X h(x)\cdot\chi_B(x)d\mu = \int\limits_A h(x)d\mu + \int\limits_B h(x)d\mu$$

В конечном счёте, поскольку $g(x) \leq a_s$, где a_s - максимальное значение для $g(x)$, то тогда для любого n будет верно:

$$\int\limits_X g(x)d\mu = \int\limits_F g(x)d\mu = \int\limits_{F_n(\varepsilon)} g(x)d\mu + \int\limits_{F\setminus F_n(\varepsilon)} g(x)d\mu \leq \int\limits_{F_n(\varepsilon)} a_s d\mu + \int\limits_{F\setminus F_n(\varepsilon)} (g_n(x)+\varepsilon)d\mu \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int\limits_X g(x)d\mu \leq a_s\cdot\mu(F_n(\varepsilon)) + \int\limits_X g_n(x)d\mu - \int\limits_{X\setminus(F\setminus F_n(\varepsilon))} g_n(x)d\mu + \varepsilon\cdot\mu(F\setminus F_n(\varepsilon)) \leq$$

$$\leq a_s\cdot\mu(F_n(\varepsilon)) + \varepsilon\cdot\mu(F) + \int\limits_X g_n(x)d\mu \Rightarrow a_s\cdot\mu(F_n(\varepsilon)) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow \int\limits_X g(x)d\mu \leq \lim_{n\to\infty}\int\limits_X g_n(x)d\mu + \varepsilon\cdot\mu(F)$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ - произвольное, то мы получаем утверждение теоремы. ■

Интеграл Лебега

Пусть $(X, \mathcal{M}, \mu)$ это измеримое пространство.

Опр: 4. Пусть $f(x)$ измерима и неотрицательна на X, тогда множеством минорантных функций для неё называется множество неотрицательных простых функций:

$$Q_f = \{\text{простые функции } \varphi(x)\colon 0 \leq \varphi(x) \leq f(x),\, \forall x \in X\}$$

Rm: 4. Всегда функция $0 \in Q_f$ и следовательно: $Q_f \neq \varnothing$.

Опр: 5. Пусть $f(x)$ измерима и неотрицательна на X, тогда интегралом Лебега функции $f(x)$ по множеству X называется точная верхняя грань:

$$(\mathcal{L}) \int\limits_X f(x) d\mu = \int\limits_X f(x) d\mu = \sup_{\varphi \in Q_f} \int\limits_X \varphi(x) d\mu$$

При этом будем говорить, что $f(x) \in \mathcal{L}(X)$ (интегрируема по Лебегу на X) тогда и только тогда, когда интеграл конечен, то есть:

$$f(x) \in \mathcal{L}(X) \Leftrightarrow \int\limits_X f(x) d\mu < \infty$$

Если функция $f(x)$ измерима на X, то определим функции:

1) $f_+(x) = \max\{f(x), 0\}$;
2) $f_-(x) = -\min\{f(x), 0\}$;

Обе функции измеримые и неотрицательные. Заметим, что всегда будет верно равенство:

$$\forall x \in X,\ f(x) = f_+(x) - f_-(x)$$

Опр: 6. Пусть $f(x)$ измерима на X, тогда скажем, что $f(x)$ интегрируема по Лебегу на X, если интегрируемы функции: $f_+(x)$ и $f_-(x)$, то есть:

$$f(x) \in \mathcal{L}(X) \Leftrightarrow f_+(x) \in \mathcal{L}(X) \wedge f_-(x) \in \mathcal{L}(X)$$

Если это выполнено, то полагаем, что верно равенство:

$$(\mathcal{L}) \int\limits_X f(x) d\mu = \int\limits_X f(x) d\mu = \int\limits_X f_+(x) d\mu - \int\limits_X f_-(x) d\mu$$

Rm: 5. Есть разные способы ввдеения интеграла Лебега, в данном конкретном случае будет проще доказывать теоремы о предельном переходе, но будет сложнее доказывать теоремы о линейности интеграла Лебега по функции в общей ситуации.

Утв. 6. Для простых функций определения 5 и 6 дают то же значение интеграла, что и определение 2.

□ В силу определения 6, если функция простая, то мы её должны разбить на две простые функции, обе из которых будут неотрицательными $\Rightarrow$ достаточно доказать утверждение для простой и неотрицательной функции $f(x)$. Заметим, что сама $f(x) \in Q_f$, поскольку она простая, тогда:

$$\sup_{\varphi \in Q_f} \int\limits_X \varphi(x) d\mu \geq \int\limits_X f(x) d\mu$$

в смысле определения 2, поскольку среди всех функций в Q_f есть и f. С другой стороны, если $\varphi(x) \in Q_f$, то (в смысле определения 2):

$$\int\limits_X \varphi(x) d\mu \leq \int\limits_X f(x) d\mu \Rightarrow \sup_{\varphi \in Q_f} \int\limits_X \varphi(x) d\mu \leq \int\limits_X f(x) d\mu \Rightarrow \sup_{\varphi \in Q_f} \int\limits_X \varphi(x) d\mu = \int\limits_X f(x) d\mu$$

■

Утв. 7. Пусть $f(x)$ измерима и неотрицательна на X, $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ - простые неотрицательные функции на X и кроме того $f_n(x) \uparrow f(x)$ на X, тогда:

$$\int\limits_X f(x) d\mu = \lim_{n \to \infty} \int\limits_X f_n(x) d\mu$$

□

1) По условию: $\forall n,\ f_n(x) \in Q_f$, поскольку: $\forall n,\ f_n(x) \leq f(x)$, тогда мы получим неравенство:

$$\forall n, \int\limits_X f(x) d\mu \geq \int\limits_X f_n(x) d\mu \Rightarrow \int\limits_X f(x) d\mu \geq \lim_{n \to \infty} \int\limits_X f_n(x) d\mu$$

2) Предположим, что некоторая функция $\varphi(x) \in Q_f$, тогда по условию:

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x) \geq \varphi(x)$$

По теореме 2 тогда будет верно следующее:

$$\lim_{n \to \infty} \int\limits_X f_n(x) d\mu \geq \int\limits_X \varphi(x) d\mu \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \int\limits_X f_n(x) d\mu \geq \sup_{\varphi \in Q_f} \int\limits_X \varphi(x) d\mu = \int\limits_X f(x) d\mu$$

■

Лемма о сходимости последовательности $f_n(x)$ к $f(x)$

Лемма 1. Пусть $f(x)$ неотрицательна и измерима на X, тогда существует последовательность простых неотрицательных функций: $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$: $f_n(x) \uparrow f(x)$ на X.

$\square$ Пусть $X = \bigsqcup\limits_{j=1}^{\infty} B_j$, где $\forall j$, $B_j \in \mathcal{M}$, $\mu(B_j) < \infty$. Если $\mu(X) < \infty$, то полагаем, что:

$$B_1 = X,\ B_2 = B_3 = \ldots = \varnothing$$

Для любого n определим функции $f_n(x)$:

$$f_n(x) = 0 \cdot \mathbb{I}_{X \setminus F_n}(x) + 2^n \cdot \mathbb{I}_{F_n \cap G_n}(x) + \sum_{k=1}^{2^{2n}} \frac{k-1}{2^n} \cdot \mathbb{I}_{F_n \cap H_{k,n}}(x)$$

$$F_n = \bigsqcup_{j=1}^{n} B_j, \quad G_n = \{x \in X \colon f(x) \geq 2^n\}, \quad H_{k,n} = \{x \in X \colon \tfrac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \tfrac{k}{2^n}\}, \forall k = 1, 2, 3, \ldots, 2^{2n}$$

Очевидно, что $f_n(x)$ это простые функции, поскольку принимают конечное число значений $\forall n$ на измеримом множестве (поскольку F_n - измеримы, G_n и $H_{k,n}$ - измеримы для измеримой функции $\Rightarrow$ пересечения тоже измеримы). Проверим, что: $f_n(x) \uparrow$ на X:

1) $\forall n$, $f_n(x) = 0 \Rightarrow f_{n+1}(x) \geq 0 = f_n(x)$;
2) $\forall n$, $f_n(x) = 2^n \Rightarrow x \in F_n \subseteq F_{n+1} \wedge f(x) \geq 2^n$, тогда:

$$k = 2^{2n+1} + 1 \Rightarrow f(x) \geq \frac{2^{2n+1} + 1 - 1}{2^{n+1}} = 2^n \Rightarrow \ldots \Rightarrow k = 2^{2n+2} \Rightarrow f(x) \geq 2^{n+1} - \frac{1}{2^{n+1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_{n+1}(x) \in \{2^n, 2^n + \tfrac{1}{2^{n+1}}, \ldots, 2^{n+1}\} \Rightarrow f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$$

3) $\forall n$, $f_n(x) = \frac{k-1}{2^n}$, $k = 1, 2, 3, \ldots, 2^{2n} \Rightarrow x \in F_n \subseteq F_{n+1} \wedge \frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n}$, тогда:

$$\frac{k-1}{2^n} = \frac{2k-2}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{2k}{2^{n+1}} = \frac{k}{2^n} \Rightarrow f_{n+1}(x) \in \{\tfrac{2k-2}{2^{n+1}}, \tfrac{2k-1}{2^{n+1}}\} \Rightarrow f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$$

Проверим, что: $\forall x \in X$, $f_n(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} f(x)$. Если $f(x) < \infty$, то будет верно:

$$\exists\, n_0 \colon x \in F_{n_0} \wedge f(x) \leq 2^{n_0} \Rightarrow \forall n \geq n_0,\ 0 \leq f(x) - f_n(x) \leq \tfrac{1}{2^n} \Rightarrow f_n(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} f(x)$$

Если $f(x) = \infty$, то будет верно:

$$\exists\, n_0 \colon x \in F_{n_0} \Rightarrow \forall n \geq n_0,\ f(x) \geq 2^n \Rightarrow f_n(x) = 2^n \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$$

$\blacksquare$

Теорема 3. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ измеримые и неотрицательные функции на X, тогда:

$$\int\limits_X (f(x) + g(x)) d\mu = \int\limits_X f(x) d\mu + \int\limits_X g(x) d\mu$$

где мы считаем, что: $\infty + \infty = \infty$ и $\infty + a = \infty$.

☐ Согласно лемме 1 существует последовательность простых неотрицательных функций: $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, которые монотонно неубывая сходятся к $f(x)$: $f_n(x) \uparrow f(x)$. Аналогично, $\exists \{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$: $g_n(x) \uparrow g(x)$. При этом, если мы просуммируем эти последовательности, то:

$$(f_n(x) + g_n(x)) \uparrow (f(x) + g(x))$$

Согласно утверждению 7 будет верно:

$$\int\limits_X (f(x) + g(x))d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X (f_n(x) + g_n(x))d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x)d\mu + \lim_{n\to\infty} \int\limits_X g_n(x)d\mu$$

где последнее верно в силу того, что $f_n(x)$ и $g_n(x)$ - простые. Снова воспользуемся утверждением 7, тогда:

$$\int\limits_X (f(x) + g(x))d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x)d\mu + \lim_{n\to\infty} \int\limits_X g_n(x)d\mu = \int\limits_X f(x)d\mu + \int\limits_X g(x)d\mu$$

■

Следствие 1. Если $f(x)$ измерима и неотрицательна на X, а $X = A \sqcup B$, где $A, B \in \mathcal{M}$, то будет верно:

$$\int\limits_X f(x)d\mu = \int\limits_A f(x)d\mu + \int\limits_B f(x)d\mu$$

☐ Вытекает из равенства:

$$f(x) = f(x)\cdot\chi_A(x) + f(x)\cdot\chi_B(x)$$

и того, что согласно определениям 2 и 5 будет верно:

$$\int\limits_X f(x)\cdot\chi_A(x)d\mu = \int\limits_A f(x)d\mu$$

Подробнее, поскольку $A \subseteq X$, $A \in \mathcal{M}$, то $f(x) \in \mathcal{L}(A)$ тогда и только тогда, когда: $f(x)\chi_A(x) \in \mathcal{L}(X)$ и если $f(x) \in \mathcal{L}(A)$, то выполнено равенство выше. Очевидно, что это выполнено для простых функций. Пусть $h(x)$ - простая неотрицательная, тогда:

$$\forall x \in A,\ 0 \leq h(x) \leq f(x) \Rightarrow \forall x \in X,\ 0 \leq h(x)\cdot\chi_A(x) \leq f(x)\cdot\chi_A(x)$$

Обратно будет верно:

$$\forall x \in X,\ 0 \leq h(x) \leq f(x)\cdot\chi_A(x) \Rightarrow \forall x \in X \setminus A,\ h(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(x) = h(x)\cdot\chi_A(x) \Rightarrow \forall x \in A,\ 0 \leq h(x) \leq f(x)$$

Тогда:

$$\int\limits_X f(x)\cdot\chi_A(x)d\mu = \sup_{h\in Q_f} \int\limits_X h(x)\cdot\chi_A(x)d\mu = \sup_{h\in Q_f} \int\limits_A h(x)d\mu = \int\limits_A f(x)d\mu$$

■