Сходимость по мере и её свойства

В теории вероятности эта сходимость ещё называется сходимостью по вероятности. Пусть у нас есть измеримое пространство $(X, \mathcal{M}, \mu)$.

Опр: 1. Пусть последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и $f(x)$ измеримы и конечны на X. Тогда говорят, что $f_n(x)$ сходится по мере на X к $f(x)$ в том и только в том случае, когда:

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in X \colon |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0$$

Или подробнее:

$$\forall \varepsilon > 0, \gamma > 0, \exists N \colon \forall n \geq N, \mu(\{x \in X \colon |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) < \gamma$$

Обозначение: $f_n \overset{\mu}{\Rightarrow} f$ или $f_n \xRightarrow{\mu, X} f$.

Теорема 1. Пусть $(X, \mathcal{M}, \mu)$ - конечное ИП (то есть $\mu(X) < \infty$), $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $f(x)$ - измеримы и конечны на $(X, \mathcal{M}, \mu)$. Пусть также открытое $G \subseteq \mathbb{R}^1$, $g(t) \in C(G)$ (непрерывная на G) и верно:

$$\forall n, f_n \colon X \to G, f \colon X \to G, f_n \overset{\mu}{\Rightarrow} f$$

Тогда: $g(f_n) \overset{\mu}{\Rightarrow} g(f)$.

☐ Согласно теореме 4 лекции 5 открытое множество можно представить в виде: $G = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} (\alpha_n, \beta_n)$, следовательно существует последовательность компактов:

$$K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_n \subset \ldots \subset G \colon G = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$$

поскольку каждый интервал можно приблизить компактами и приближая n-ым компактом первые n интервалов мы, увеличивая количество интервалов, приблизим всё G. Рассмотрим прообразы:

$$f^{-1}(K_n) \equiv E_n, n = 1, 2, \ldots \Rightarrow E_1 \subseteq E_2 \subseteq \ldots \subseteq E_n \subseteq \ldots, X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

поскольку G исчерпывается компактами и f отображает весь X в G. Так как $\mu(X) < \infty$, то по утверждению о непрерывности меры (смотри утверждение 2, лекция 4) будет верно:

$$\mu(X \setminus E_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Пусть заданы произвольные $\varepsilon > 0$ и $\gamma > 0$, выберем n_0 такое, что $\mu(X \setminus E_{n_0}) < \frac{\gamma}{2}$. Рассмотрим расстояние:

$$d = \rho(K_{n_0}, \mathbb{R}^1 \setminus G) = \inf_{\substack{x \in K_{n_0} \\ y \in \mathbb{R}^1 \setminus G}} |x - y| = \min_{\substack{x \in K_{n_0} \\ y \in \mathbb{R}^1 \setminus G}} |x - y| > 0$$

где для любого фиксированного x расстояние до замкнутого множества достигается: поскольку мы рассматриваем непрерывную функцию на компакте, равную расстоянию до $\mathbb{R}^1 \setminus G$ и следовательно на компакте она достигает своего минимума, а расстояние больше нуля, поскольку множества не пересекаются (K_{n_0} содержится внутри G). Введём множество:

$$K' = \{y \in \mathbb{R}^1 \colon \rho(K_{n_0}, y) \leq \tfrac{d}{2}\}$$

оно замкнуто, а поскольку K_{n_0} было ограниченным множеством и мы отходим от него не дальше, чем на $\frac{d}{2}$, то K' ещё и ограничено $\Rightarrow K'$ это компакт. Кроме того, $K' \subset G$. По условию $g(t) \in C(G)$, то есть непрерывна на G, тогда $g(t)$ непрерывна на компакте K'. В результате:

$$\exists\, \delta > 0 \colon \forall z, y \in K',\ |z - y| \leq \delta \Rightarrow |g(z) - g(y)| < \varepsilon$$

По условию сходимости по мере:

$$\exists\, N \colon \forall n \geq N,\ A_n = \{x \in X \colon |f_n(x) - f(x)| > \min(\tfrac{d}{2}, \delta)\} \Rightarrow \mu(A_n) < \frac{\gamma}{2}$$

Предположим, что $n \geq N$ и $x \notin A_n \cup (X \setminus E_{n_0})$, тогда:

1) $f(x) \in K_{n_0} \subseteq K'$, поскольку так мы выбирали E_{n_0} и $K_{n_0} \subseteq K'$ по построению K';
2) $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{d}{2}$, вместе с первым свойством из этого следует, что: $f_n(x) \in K'$;
3) $|f_n(x) - f(x)| \leq \delta$, вместе со вторым свойством из этого следует, что: $|g(f_n)(x) - g(f)(x)| < \varepsilon$;

Следовательно, $F_{n,\varepsilon} = \{x \in X \colon |g(f_n)(x) - g(f)(x)| > \varepsilon\} \subset A_n \cup (X \setminus E_{n_0})$, тогда:

$$\mu(F_{n,\varepsilon}) \leq \mu(A_n) + \mu(X \setminus E_{n_0}) < \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2} = \gamma$$

■

Следствие 1. Пусть $(X, \mathcal{M}, \mu)$ - конечное ИП, $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и $f(x)$ измеримы и конечны на $(X, \mathcal{M}, \mu)$, то:

$$f_n \overset{\mu}{\Rightarrow} f \ \Rightarrow\ f_n^2 \overset{\mu}{\Rightarrow} f^2$$

Если вдобавок $f_n(x)$ и $f(x)$ не обращаются в 0 на X, то:

$$f_n \overset{\mu}{\Rightarrow} f \ \Rightarrow\ \frac{1}{f_n} \overset{\mu}{\Rightarrow} \frac{1}{f}$$

□ В первом случае $G = \mathbb{R}^1$ и $g(t) = t^2$, во втором случае $G = \mathbb{R}^1 \setminus \{0\}$, $g(t) = \frac{1}{t}$. ■

Следствие 2. Пусть $(X, \mathcal{M}, \mu)$ - конечное ИП, $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и $f(x)$, $g(x)$ измеримы и конечны на $(X, \mathcal{M}, \mu)$, то:

$$f_n \overset{\mu}{\Rightarrow} f,\ g_n \overset{\mu}{\Rightarrow} g \ \Rightarrow\ f_n{\cdot}g_n \overset{\mu}{\Rightarrow} f{\cdot}g$$

Если вдобавок ни одна из функций $g_n(x)$ и $g(x)$ не обращаются в 0 на X, то:

$$f_n \overset{\mu}{\Rightarrow} f,\ g_n \overset{\mu}{\Rightarrow} g \ \Rightarrow\ \frac{f_n}{g_n} \overset{\mu}{\Rightarrow} \frac{f}{g}$$

Rm: 1. Заметим, что требование конечности можно немного модифицировать и требовать либо определять результат операций на тех множествах на которых функции принимают бесконечные значения, либо требовать конечность почти всюду и полноту меры μ.

□ Представим произведение следующим образом:

$$f_n{\cdot}g_n = \frac{1}{4}\left((f_n + g_n)^2 - (f_n - g_n)^2\right) \overset{\mu}{\Rightarrow} \frac{1}{4}\left((f + g)^2 - (f - g)^2\right) = f{\cdot}g$$

Кроме того:

$$\frac{f_n}{g_n} = f_n{\cdot}\frac{1}{g_n} \overset{\mu}{\Rightarrow} f{\cdot}\frac{1}{g} = \frac{f}{g}$$

■

Фундаментальные по мере последовательности и критерий Коши

Опр: 2. Пусть $(X, \mathcal{M}, \mu)$ - ИП (конечное или σ-конечное), $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ - измеримые и конечны на $(X, \mathcal{M}, \mu)$. Тогда эта последовательность называется фундаментальной по мере в том и только в том случае, когда:

$$\forall \varepsilon > 0,\, \forall \gamma > 0,\, \exists N \colon \forall m, n \geq N,\, \mu(\{x \in X \colon |f_m(x) - f_n(x)| > \varepsilon\}) < \gamma$$

Теорема 2. (**Критерий Коши**) Последовательность измеримых и конечных на ИП функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится по мере к измеримой и конечной $f(x)$ в том и только в том случае, когда эта последовательность фундаментальна.

$\square$

$(\Rightarrow)$ Пусть $f_n \overset{\mu}{\Rightarrow} f$, тогда:

$$\forall \varepsilon > 0,\, \forall \gamma > 0,\, \exists N \colon \forall n \geq N,\, \mu(\{x \in X \colon |f_n(x) - f(x)| > \tfrac{\varepsilon}{2}\}) < \frac{\gamma}{2}$$

Предположим, что $m, n \geq N$, тогда (из неравенства треугольника):

$$\{x \in X \colon |f_n(x) - f_m(x)| > \varepsilon\} \subset \{x \in X \colon |f_n(x) - f(x)| > \tfrac{\varepsilon}{2}\} \cup \{x \in X \colon |f_m(x) - f(x)| > \tfrac{\varepsilon}{2}\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu(\{x \in X \colon |f_n(x) - f_m(x)| > \varepsilon\}) \leq \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2} = \gamma$$

$(\Leftarrow)$ Пусть $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ это фундаментальная по мере последовательность, тогда:

$$\forall i \in \mathbb{N},\, \varepsilon = \gamma = 2^{-i},\, \exists n_i \colon \forall m, n \geq n_i,\, \mu(\{x \in X \colon |f_m(x) - f_n(x)| > 2^{-i}\}) < 2^{-i}$$

Введём обозначения:

$$\forall N \geq n_i,\, B_{i,N} = \{x \in X \colon |f_N(x) - f_{n_i}(x)| > 2^{-i}\}$$

$$A_i = \{x \in X \colon |f_{n_i}(x) - f_{n_{i+1}}(x)| > 2^{-i}\} = B_{i, n_{i+1}}$$

Тогда очевидно, что:

$$\forall N \geq n_i,\, \mu(B_{i,N}) < 2^{-i}$$

Построим новое множество (функции измеримы $\Rightarrow$ все множества измеримы):

$$A = \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{i=j}^{\infty} A_i$$

Мы знаем, что:

$$\forall j \geq 1,\, \mu\left(\bigcup_{i=j}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=j}^{\infty} \mu(A_i) < \sum_{i=j}^{\infty} 2^{-i} = 2^{-j+1}$$

В силу теоремы о непрерывности меры, будет верно:

$$\mu(A) = \lim_{j \to \infty} \mu\left(\bigcup_{i=j}^{\infty} A_i\right) = 0$$

Пусть у нас $x \in X \setminus A$, тогда: $\exists j \colon x \notin \bigcup\limits_{i=j}^{\infty} A_i$. Если $k > l \geq j$, то оценим разность:

$$|f_{n_l}(x) - f_{n_k}(x)| \leq |f_{n_l}(x) - f_{n_{l+1}}(x)| + |f_{n_{l+1}}(x) - f_{n_{l+2}}(x)| + \ldots + |f_{n_{k-1}}(x) - f_{n_k}(x)| <$$

$$< 2^{-l} + 2^{-l-1} + \ldots + 2^{-k+1} < \sum_{i=l}^{\infty} 2^{-i} = 2^{-l+1}$$

Следовательно, числовая последовательность: $\{f_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ фундаментальна (начинаем с 1, поскольку выше были рассуждения для хвоста этой последовательность). Тогда по критерию Коши для действительных чисел будет верно:

$$\forall x \in X \setminus A,\ \exists \lim_{i\to\infty} f_{n_i}(x) < \infty \Rightarrow f(x) = \lim_{i\to\infty} f_{n_i}(x)$$

При этом, функция $f(x)$ измерима (как предел измеримых функций) и конечна (по определению $f(x)$ как предела выше) на $X \setminus A$. Доопределив $f(x) = 0$ при $x \in A$, мы получим функцию измеримую и конечную на X. Проверим, что $f_n(x) \overset{\mu}{\rightrightarrows} f(x)$. Пусть заданы $\varepsilon > 0$ и $\gamma > 0$. Зафиксируем:

$$j\colon 2^{-j} < \frac{1}{4} \cdot \min\{\varepsilon, \gamma\}$$

Предположим, что $x \notin \bigcup\limits_{i=j}^{\infty} A_i$, тогда по доказанному выше:

$$\forall k > j,\ |f_{n_k}(x) - f_{n_j}(x)| < 2^{-j+1} \xrightarrow[k\to\infty]{} |f(x) - f_{n_j}(x)| \le 2^{-j+1} < \frac{\varepsilon}{2}$$

где последнее верно по выбору j. Затем по построению последовательности n_j, верно:

$$\forall N \ge n_j,\ \mu(B_{j,N}) < 2^{-j} < \frac{\gamma}{4}$$

$$\forall x \notin B_{j,N} \Rightarrow |f_N(x) - f_{n_j}(x)| \le 2^{-j} < \frac{\varepsilon}{4}$$

Пусть $N \ge n_j$, $x \notin B_{j,N} \cup \bigcup\limits_{i=j}^{\infty} A_i$, тогда:

$$|f_N(x) - f(x)| \le |f_N(x) - f_{n_j}(x)| + |f_{n_j}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{x \in X\colon |f_N(x) - f(x)| > \varepsilon\} \subset B_{j,N} \cup \bigcup_{i=j}^{\infty} A_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu(\{x \in X\colon |f_N(x) - f(x)| > \varepsilon\}) \le \mu(B_{j,N}) + \mu\left(\bigcup_{i=j}^{\infty} A_i\right) < 2^{-j} + 2^{-j+1} < \frac{\gamma}{4} + \frac{\gamma}{2} < \gamma$$

$\blacksquare$

Сходимость почти всюду и её связь со сходимостью по мере

Пусть $(X, \mathcal{M}, \mu)$ - измеримое пространство, $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $f(x)$ измеримы и конечны на $(X, \mathcal{M}, \mu)$.

Опр: 3. Последовательность f_n сходится почти всюду к f тогда и только тогда, когда:

$$\exists\, E \in \mathcal{M}\colon \mu(X \setminus E) = 0, \quad \forall x \in E,\ f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$$

Обозначение: $f_n \xrightarrow{\text{пв}} f$ или $f_n \xrightarrow{\text{пв},X} f$ или $f_n \xrightarrow{as} f$.

Лемма 1. Пусть $(X, \mathcal{M}, \mu)$ - измеримое пространство, $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $f(x)$ измеримы и конечны на $(X, \mathcal{M}, \mu)$ почти всюду. Если $\forall k, m \in \mathbb{N}$ множество:

$$F_{k,m} = \{x \in X\colon |f_k(x) - f(x)| > \tfrac{1}{m}\}$$

то можно дать описание точкам из X для которых последовательность $f_n(x)$ не сходится к $f(x)$:

$$\{x \in X\colon f_n(x) \nrightarrow f(x)\} = \bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} F_{k,m}$$

Rm: 2. Доказательства в явном виде не будет, но чтобы было понятнее можно представить, что объединение это квантор существует, а пересечение - квантор для любого. В правую часть выражения выше входят такие x, что $\exists\, m \geq 1$ такое, что $\forall n \geq 1$ найдется $k \geq n$ такое, что $|f_k(x) - f(x)| > \frac{1}{m}$.

Теорема 3. Пусть $\mu(X) < \infty$, тогда будет верно:

$$f_n(x) \xrightarrow{as} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \mu\left(\bigcup_{k=n}^{\infty}\{x \in X\colon |f_k(x) - f(x)| > \varepsilon\}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

□ Воспользуемся предыдущей леммой:

$$f_n(x) \xrightarrow{as} f(x) \Leftrightarrow \mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} F_{k,m}\right) = 0 \Leftrightarrow \forall m \geq 1,\ \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} F_{k,m}\right) = 0$$

Множества $\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} F_{k,m}$ вложены друг в друга с ростом n, поэтому по теореме о непрерывности меры:

$$\mu(X) < \infty \Rightarrow \forall m \geq 1,\ \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} F_{k,m}\right) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} F_{k,m}\right)$$

$$\forall m \geq 1,\ \bigcup_{k=n}^{\infty} F_{k,m} = \bigcup_{k=n}^{\infty}\{x \in X\colon |f_k(x) - f(x)| > \tfrac{1}{m}\}$$

Следовательно, полученное равенство эквивалентно требованиям теоремы. ■

Следствие 3. Если $\mu(X) < \infty$ и $f_n(x) \xrightarrow{as} f(x)$, то $f_n(x) \overset{\mu}{\Rightarrow} f(x)$.

Rm: 3. Отметим, что в вероятности сходимость почти всюду называется сходимостью почти наверное.

☐ В сходимости по мере требуется:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in X \colon |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0$$

Из сходимости почти всюду следует:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \mu\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} \{x \in X \colon |f_k(x) - f(x)| > \varepsilon\}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu(\{x \in X \colon |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) \leq \mu\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} \{x \in X \colon |f_k(x) - f(x)| > \varepsilon\}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

■

Rm: 4. Заметим, что условие конечности здесь существенно.

Пример: Если верно:

$$f_n(x) = \chi_{(-n,n)}(x) = \mathbb{I}_{(-n,n)}(x)$$

где $n = 1, 2, \ldots$. Тогда $f_n(x) \to 1$ всюду на $\mathbb{R}^1$, но в то же время, не сходится по мере μ к 1:

$$\varepsilon = \tfrac{1}{2},\ \mu(\{x \in \mathbb{R}^1 \colon |f_n(x) - f(x)| > \tfrac{1}{2}\}) = \infty \Rightarrow f_n(x) \overset{\mu}{\not\Rightarrow} f(x)$$

Ограничимся случаями, когда мера конечна, например, отрезок $[0,1]$ и классическая мера Лебега. Из сходимости почти всюду вытекает сходимость по мере, а не может ли так быть, что всё связано только со сходимостью почти всюду (то есть, это одно и тоже). На самом деле нет и для этого есть следующая теорема.

Теорема 4. (**Пример Рисса**) Существует последовательность функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ измеримых относительно классической меры Лебега и конечных на $[0,1]$ таких, что:

$$f_n \xrightarrow[{[0,1]}]{\mu} 0, \quad \forall x \in [0,1],\ \nexists \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

где μ это классическая мера Лебега.

☐ Пусть $l = 0, 1, 2, \ldots,\ k = 0, 1, \ldots, 2^l - 1$ и функция $\psi_{l,k}(x) = \chi_{\left[k/2^l, (k+1)/2^l\right]}(x)$. Эта функция есть ничто иное, как ступенька.

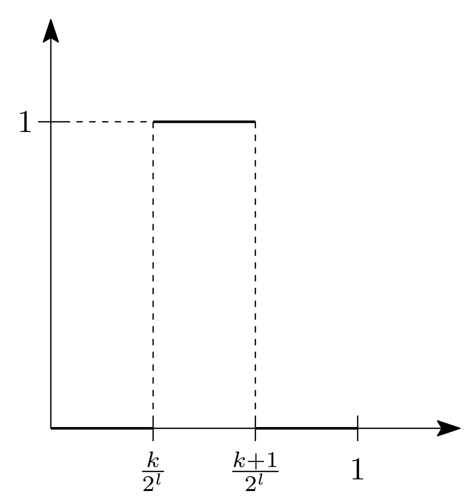

Рис. 1: Функция $\psi_{l,k}(x)$.

Таким образом, ступенька пробегает весь отрезок $[0,1]$, затем её длина уменьшается вдвое и опять повторяется тоже самое. Тогда $\forall n \in \mathbb{N}$ можно представить (однозначно) в виде: $n = 2^l + k$. При этом будет верно: $n \to \infty \Leftrightarrow l \to \infty$, поэтому:

$$\forall n,\ \mu(\{x \in [0,1]\colon |f_n(x) - 0| > 0\}) = 2^{-l} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow f_n \xRightarrow[{[0,1]}]{\mu} 0$$

В тоже время $\forall x \in [0,1]$, $\exists$ бесконечно много членов числовой последовательности $f_n(x) = 0$ и бесконечно много членов таких, что $f_n(x) = 1 \Rightarrow$ сходимости нет ни в одной точке. ■

Теорема 5. (**Рисса**) Пусть $f_n \xRightarrow{\mu,X} f$, тогда существует подпоследовательность $\{f_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что:

$$f_{n_k}(x) \xrightarrow{as,X} f(x)$$

□ Пусть $\mu(X) < \infty$, тогда рассмотрим n_i такие, что:

$$\mu(\{x \in X\colon |f_{n_i}(x) - f(x)| > 2^{-i}\}) < 2^{-i}$$

где $i = 1, 2, \ldots$, также считаем, что n_i монотонно возрастают. Проверим, что $f_{n_i}(x) \xrightarrow{as} f(x)$. Пусть заданы $\varepsilon > 0$ и $\gamma > 0$, тогда если $i\colon 2^{-i} < \frac{1}{2}\min(\varepsilon, \gamma)$, то:

$$\mu\left(\bigcup_{j=i}^{\infty}\{x \in X\colon |f_{n_j}(x) - f(x)| > \varepsilon\}\right) \le \mu\left(\bigcup_{j=i}^{\infty}\{x \in X\colon |f_{n_j}(x) - f(x)| > 2^{-j}\}\right)$$

поскольку множество справа более широкое, чем слева. Заметим, что:

$$\mu\left(\bigcup_{j=i}^{\infty}\{x \in X\colon |f_{n_j}(x) - f(x)| > 2^{-j}\}\right) \le \sum_{j=i}^{\infty}\mu(\{x \in X\colon |f_{n_j}(x) - f(x)| > 2^{-j}\}) < \sum_{j=i}^{\infty} 2^{-j} = 2^{i-1} < \gamma$$

Согласно критерию теоремы 3, это означает, что: $f_{n_i}(x) \xrightarrow{as} f(x)$. Рассмотрим теперь другой случай:

$$X = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} B_k,\ \forall k,\ \mu(B_k) < \infty$$

Поскольку из сходимости по мере на всём X следует сходимость по мере на его подмножестве, то:

$$f_n \xRightarrow{\mu} f \ \Rightarrow\ \forall k,\ f_n \xRightarrow{\mu,B_k} f$$

Тогда, по доказанному выше существует последовательность $\{f_{1,n(1)}\}_{n(1)=1}^{\infty}$, которая является подпоследовательностью: $F_0 = \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ и при этом такая, что:

$$f_{1,n(1)} \xrightarrow{as,B_1} f$$

Затем, поскольку: $f_{1,n(1)} \xRightarrow{\mu,B_2} f$, как часть последовательности, которая изначально сходилась по мере, то тогда: $\exists\{f_{2,n(2)}\}_{n(2)=1}^{\infty}$, которая является подпоследовательностью последовательности: $\{f_{1,n(1)}\}_{n(1)=1}^{\infty}$ и при этом такая, что:

$$f_{2,n(2)} \xrightarrow{as,B_2} f$$

И так далее. Взяв диагональную последовательность: $\{f_{i,n(i)_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ мы получим, что она $\forall k$ сходится почти всюду на B_k. Если $A_k \subset B_k$ это множество, где сходимости нет, то: $\mu(A_k) = 0$. Следовательно:

$$\mu\left(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = 0$$

На $X \setminus \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ есть сходимость $\Rightarrow$ в случае σ-конечной меры, мы выделили сходящуюся почти всюду подпоследовательность. $\blacksquare$

Теорема 6. (**Егорова**) Пусть $(X, \mathcal{M}, \mu)$ - ИП, $\mu(X) < \infty$ и есть последовательность функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что: $f_n(x) \xrightarrow{as} f(x)$. Тогда:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, E_\varepsilon \in \mathcal{M} \colon \mu(E_\varepsilon) < \varepsilon, \quad \forall x \in X \setminus E_\varepsilon,\ f_n(x) \overset{X\setminus E_\varepsilon}{\rightrightarrows} f(x)$$

То есть, принебрегая небольшой окрестностью из сходиомости п.в. следует равномерная сходимость.

$\square$ Согласно критерию теоремы 3 будет верно:

$$\forall i, \exists\, n_i \colon \mu\left(\bigcup_{n=n_i}^{\infty} \{x \in X \colon |f_n(x) - f(x)| > \tfrac{1}{i}\}\right) < \frac{\varepsilon}{2^{i+1}},\ i = 1, 2, \ldots$$

Тогда:

$$E_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{n=n_i}^{\infty} \{x \in X \colon |f_n(x) - f(x)| > \tfrac{1}{i}\} \Rightarrow \mu(E_\varepsilon) \le \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Пусть у нас задано $\gamma > 0 \Rightarrow \exists\, m \colon \frac{1}{m} < \gamma$. Заметим, что:

$$x \in X \setminus E_\varepsilon \Rightarrow x \notin \bigcup_{n=n_m}^{\infty} \{x \in X \colon |f_n(x) - f(x)| > \tfrac{1}{m}\}$$

Следовательно:

$$\forall n \ge n_m \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \le \tfrac{1}{m} < \gamma$$

А это и означает равномерную сходимость на $X \setminus E_\varepsilon$. $\blacksquare$

Пример: Если верно:

$$f_n(x) = \chi_{(-n,n)}(x) = \mathbb{I}_{(-n,n)}(x)$$

где $n = 1, 2, \ldots$, то тогда: $f_n(x) \xrightarrow{as} 1$ на $\mathbb{R}^1$, но в то же время, нельзя выделить множество конечной меры на $\mathbb{R}^1$ такое, что вне этого множества сходимость будет равномерной.

Теорема 7. (**Лузин**) Пусть $f(x)$ измерима на $[a, b] \subset \mathbb{R}^1$ относительно классической меры Лебега и конечна почти всюду на $[a, b]$, тогда:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, g_\varepsilon(x) \in C([a, b]) \colon \mu(\{x \in [a, b] \colon f(x) \ne g(x)\}) < \varepsilon$$

Rm: 5. Теорема говорит о том, что если принебречь множеством сколь угодно малой меры, то можно из нашей произвольной, измеримой и конечной почти всюду функции сделать непрерывную функцию.

Rm: 6. Теорема приводится без доказательства, ранее она доказывалась на семинарах.