Мера на полукольце. Продолжение меры на мин. кольцо.

Опр: 1. Пусть S - полукольцо, заданная на S функция $m\colon S \to [0, \infty)$ называется мерой в том и только в том случае, если:

$$\forall A, A_1, \ldots, A_n \in S\colon A = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i \Rightarrow m(A) = \sum_{i=1}^{n} m(A_i)$$

Опр: 2. Пусть S - полукольцо, заданная на S функция $m\colon S \to [0, \infty)$ называется σ-аддитивной мерой в том и только в том случае, если:

$$\forall A, A_1, \ldots, A_n, \ldots \in S\colon A = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i \Rightarrow m(A) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$$

Утв. 1. Пусть S - полукольцо, m - мера на S. Пусть $A_0, A_1, \ldots, A_n \in S$ и $A_0 \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$, тогда:

$$m(A_0) \leq \sum_{i=1}^{n} m(A_i)$$

$\square$ По лемме 2 из лекции 1, $\exists \{B_j\}_{j=1}^{M} \subseteq S\colon B_j$ - попарно непересекаются и выполнено:

$$\forall i \in \{0, 1, \ldots n\},\, \exists\, \Omega(i) \subseteq \{1, \ldots, M\}\colon A_i = \bigsqcup_{j \in \Omega(i)} B_j$$

При этом $\bigcup\limits_{i=0}^{n} \Omega(i) = \{1, \ldots, M\}$, так как $A_0 \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \Rightarrow \Omega(0) \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} \Omega(i)$ поскольку если бы это было не так, то нашелся бы элемент B_k, который лежал бы в представлении A_0, которая не покрывалась бы никаким A_i. Следовательно, получаем: $\bigcup\limits_{i=1}^{n} \Omega(i) = \{1, \ldots, M\}$. Таким образом:

$$m(A_0) = \sum_{j \in \Omega(0)} m(B_j) \leq \sum_{j=1}^{M} m(B_j) \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \in \Omega(i)} m(B_j) = \sum_{i=1}^{n} m(A_i)$$

$\blacksquare$

Rm: 1. В общем случае, нельзя распространить ситуацию на случай, когда A_0 покрыто счетным объединением A_i. В этом случае понадобится сигма-аддитивность.

Rm: 2. Считаем выполненным замечание в конце прошлой лекции про отсутствие лишних множеств.

Утв. 2. Пусть S - полукольцо, m - мера на S. Пусть $A, A_1, \ldots, A_n \in S$ и известно, что $\bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i \subseteq A$, тогда:

$$\sum_{i=1}^{n} m(A_i) \leq m(A)$$

$\square$ По лемме 1 из лекции 1:

$$\exists\, A_{n+1}, \ldots, A_l \in S\colon A = \bigsqcup_{i=1}^{l} A_i \Rightarrow m(A) = \sum_{i=1}^{l} m(A_i) \geq \sum_{i=1}^{n} m(A_i)$$

$\blacksquare$

Следствие 1. Пусть S - полукольцо, m - мера на S. Пусть $A, A_1, \ldots, A_n, \ldots \in S$ и $\bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \subseteq A$, тогда:

$$\sum_{i=1}^{\infty} m(A_i) \leq m(A)$$

$\square$ $\forall N$, $\bigsqcup\limits_{i=1}^{N} A_i \subseteq A \Rightarrow$ по утв. 2 получим: $\sum\limits_{i=1}^{N} m(A_i) \leq m(A)$, переходим к пределу $N \to \infty$ и устанавливаем утверждение. $\blacksquare$

Rm: 3. Для сигма-аддитивности меры, нам не хватает всегда обратного неравенства.

Классическая мера Лебега

Пусть $n \in \mathbb{N}$ и выполнено следующее:

$$[a,b] = \prod_{j=1}^{n}[a_j, b_j] \subset \mathbb{R}^n, \quad S = \varnothing \sqcup \{\, \{\alpha, \beta\} = \prod_{j=1}^{n}\{\alpha_j, \beta_j\} \subseteq [a,b]\,\}$$

где S это полукольцо. Определим функцию на всевозможных промежутках:

$$m(\{\alpha, \beta\}) = m_n(\{\alpha, \beta\}) = \prod_{j=1}^{n}(\beta_j - \alpha_j)$$

Неотрицательность функции m - очевидна.

Теорема 1. Заданная функция $m(\{\alpha, \beta\}) = m_n(\{\alpha, \beta\}) = \prod\limits_{j=1}^{n}(\beta_j - \alpha_j)$ это мера на S.

$\square$ Индукцией по $\dim(\mathbb{R}^n) = n$. Пусть $\{\alpha, \beta\} = \bigsqcup\limits_{k=1}^{r}\{\alpha(k), \beta(k)\}$.

База: Если $n = 1$, то можно занумеровать (в силу конечности промежутков) промежутки так, чтобы:

$$\alpha = \alpha(1) \leq \beta(1) = \alpha(2) \leq \ldots \leq \beta(r) = \beta$$

Поэтому:

$$m_1(\{\alpha, \beta\}) = \beta - \alpha = \sum_{k=1}^{r}(\beta(k) - \alpha(k)) = \sum_{k=1}^{r} m_1(\{\alpha(k), \beta(k)\})$$

Шаг: Пусть $n > 1$ и утверждение доказано для меры m_{n-1}. Для множеств $F \subseteq \mathbb{R}^n$ определим сечение множества F следующим образом:

$$E_{n,t}(F) = \{\, (x_1, \ldots, x_{n-1}) \colon (x_1, \ldots, x_{n-1}, t) \in F \,\}$$

Это по сути просто сечение множества F. Заметим:

$$\forall \{\alpha, \beta\},\ E_{n,t}(\{\alpha, \beta\}) = \begin{cases} \prod\limits_{j=1}^{n-1}\{\alpha_j, \beta_j\}, & t \in \{\alpha_n, \beta_n\}; \\ \varnothing, & \text{иначе;} \end{cases}$$

Тогда:

$$\{\alpha, \beta\} = \bigsqcup_{k=1}^{r}\{\alpha(k), \beta(k)\} \Rightarrow \forall t \in \{\alpha_n, \beta_n\},\ E_{n,t}(\{\alpha, \beta\}) = \bigsqcup_{k=1}^{r} E_{n,t}(\{\alpha(k), \beta(k)\})$$

Следовательно, рассматривая n-мерную функцию от интересующего промежутка, мы получим:

$$m_n(\{\alpha, \beta\}) = \prod_{j=1}^{n}(\beta_j - \alpha_j) = \int\limits_{\alpha_n}^{\beta_n} m_{n-1}\left(E_{n,t}(\{\alpha, \beta\})\right) dt = \int\limits_{\alpha_n}^{\beta_n} \sum_{k=1}^{r} m_{n-1}\left(E_{n,t}(\{\alpha(k), \beta(k)\})\right) dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{r} \int\limits_{\alpha_n}^{\beta_n} m_{n-1}\left(E_{n,t}(\{\alpha(k), \beta(k)\})\right) dt = \sum_{k=1}^{r} \int\limits_{\alpha_n(k)}^{\beta_n(k)} \prod_{j=1}^{n-1}(\beta_j(k) - \alpha_j(k))\, dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{r} \prod_{j=1}^{n-1} (\beta_j(k) - \alpha_j(k)) \cdot (\beta_n(k) - \alpha_n(k)) = \sum_{k=1}^{r} \prod_{j=1}^{n} (\beta_j(k) - \alpha_j(k)) = \sum_{k=1}^{r} m_n (\{\alpha(k), \beta(k)\})$$

Следовательно, m - это мера. Также заметим, что интегрируемость по Риману следует из кусочно-постоянности подынтегральной функции. ■

Теорема 2. Функция m - σ-аддитвная мера на S.

□ Пусть верно, что:

$$\{\alpha, \beta\} = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} \{\alpha(k), \beta(k)\}$$

Предположим, что задано $\varepsilon > 0$, тогда подберем n-мерный отрезок $[\alpha', \beta']$ такой, что:

$$[\alpha', \beta'] \subset \{\alpha, \beta\} \colon m(\{\alpha, \beta\}) < m([\alpha', \beta']) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Это можно сделать в силу определения меры m, если уменьшить все координаты немного, мера тоже уменьшиться не сильно. Кроме того, $\forall k$ подберем n-мерные интервалы $(\alpha'(k), \beta'(k))$ такие, что:

$$\forall k \geq 1,\ (\alpha'(k), \beta'(k)) \supset \{\alpha(k), \beta(k)\} \colon m((\alpha'(k), \beta'(k))) < m(\{\alpha(k), \beta(k)\}) + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$$

Тогда, отрезок:

$$[\alpha', \beta'] \subseteq \{\alpha, \beta\} = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} \{\alpha(k), \beta(k)\} \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} (\alpha'(k), \beta'(k))$$

покрыт счетной системой интервалов, следовательно по лемме Гейне-Бореля будет верно следующее:

$$\exists M \colon [\alpha', \beta'] \subset \bigcup_{k=1}^{M} (\alpha'(k), \beta'(k))$$

По утверждению 1, мы получаем, что:

$$m([\alpha', \beta']) \leq \sum_{k=1}^{M} m((\alpha'(k), \beta'(k)))$$

Соединяя всё в одно, получим:

$$m(\{\alpha, \beta\}) < m([\alpha', \beta']) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{k=1}^{M} m((\alpha'(k), \beta'(k))) + \frac{\varepsilon}{2} <$$

$$< \sum_{k=1}^{M} \left(m(\{\alpha(k), \beta(k)\}) + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} \right) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon + \sum_{k=1}^{\infty} m(\{\alpha(k), \beta(k)\})$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ - произвольное, то мы получаем, что:

$$m(\{\alpha, \beta\}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(\{\alpha(k), \beta(k)\})$$

Обратное неравенство следует напрямую из следствия 1. ■

Продолжение меры на минимальное кольцо

Опр: 3. Пусть S - полукольцо, m - мера на S и $R(S)$ - минимальное кольцо, содержащее S. Тогда, если множество $A \in R(S)$ и $A = \bigsqcup_{i=1}^{n} B_i$, $B_i \in S$, то положим:

$$\nu(A) = \sum_{i=1}^{n} m(B_i)$$

такая функция называется продолженной мерой на $R(S)$ или продолжением меры m на $R(S)$.

Rm: 4. Неотрицательность функции немедленно следует из неотрицательности m. Необходимо проверить, что функция ν корректно определена и не зависит от выбора множеств.

Утв. 3. Функция ν - корректно определена.

□ Пусть $\bigsqcup_{i=1}^{n} B_i = A = \bigsqcup_{j=1}^{m} C_j$, где все $B_i, C_j \in S$. По сути нам надо проверить, что определение функции не будет зависеть от способа представления. Определим множества $D_{i,j} = B_i \cap C_j$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$, они все по определению полукольца принадлежат множеству S. Мы знаем, что:

$$\forall i,\ B_i = B_i \cap A = B_i \cap \bigsqcup_{j=1}^{m} C_j = \bigsqcup_{j=1}^{m} D_{i,j}$$

Аналогично:

$$\forall j,\ C_j = C_j \cap A = C_j \cap \bigsqcup_{i=1}^{n} B_i = \bigsqcup_{i=1}^{n} D_{i,j}$$

Тогда, мы получим следующее:

$$\sum_{i=1}^{n} m(B_i) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} m(D_{i,j}) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} m(D_{i,j}) = \sum_{j=1}^{m} m(C_j)$$

Следовательно, функция ν определена корректно. ■

Теорема 3. Функция ν - это мера на $R(S)$.

□ Пусть есть некое множество: $A = \bigsqcup_{k=1}^{r} A_k$, где $A_k \in R(S)$, тогда:

$$\forall k,\ A_k = \bigsqcup_{i=1}^{i_k} B_{k,i},\ B_{k,i} \in S$$

по определению $R(S)$, отсюда будет вытекать следующее:

$$A = \bigsqcup_{k=1}^{r}\bigsqcup_{i=1}^{i_k} B_{k,i} \Rightarrow \nu(A) = \sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{i_k} m(B_{k,i}) = \sum_{k=1}^{r} \nu(A_k)$$

где равенства справедливы в силу корректности и определения функции ν. ■

Теорема 4. Если исходная мера m была σ-аддитивной на S, то мера ν будет σ-аддитивной на $R(S)$.

Rm: 5. Таким образом, продолжение σ-аддитивной меры также является σ-аддитивной мерой.

□ Пусть $A, A_1, \ldots, A_n, \ldots \in R(S)$ и верно, что $A = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Тогда, по определению $R(S)$:

$$A = \bigsqcup_{j=1}^{m} B_j,\ B_j \in S,\ \forall n,\ A_n = \bigsqcup_{l=1}^{l_n} C_{n,l},\ C_{n,l} \in S$$

Рассмотрим следующий набор множеств: $\forall j, n, l,\ D_{j,n,l} = B_j \cap C_{n,l} \in S$, где принадлежность следует из того, что S - полукольцо. В виду имеющегося равенства для A, имеем:

$$A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigsqcup_{n=1}^{\infty}\bigsqcup_{l=1}^{l_n} C_{n,l} = \bigsqcup_{j=1}^{m} B_j \Rightarrow \forall j,\ B_j = \bigsqcup_{n=1}^{\infty}\bigsqcup_{l=1}^{l_n} D_{j,n,l},\ \forall n, l,\ C_{n,l} = \bigsqcup_{j=1}^{m} D_{j,n,l}$$

Тогда, по определению ν и в силу σ-аддитивности m на S получим:

$$\nu(A) = \sum_{j=1}^{m} m(B_j) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{l_n} m(D_{j,n,l})$$

Поскольку слагаемые неотрицательны, то кратный ряд можно переставлять и сумма от этого не изменится, следовательно мы получим:

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{l_n} m(D_{j,n,l}) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{l_n}\sum_{j=1}^{m} m(D_{j,n,l}) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{l_n} m(C_{n,l}) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)$$

Откуда получаем требуемое. ■

Rm: 6. Если множество $A \in S$, то $\nu(A) = m(A)$. Это вытекает из корректности меры ν.

Утв. 4. Пусть R - кольцо и ν - σ-аддитивная мера на R, тогда, если $A, A_1, \ldots, A_n, \ldots \in R$ и кроме того множество $A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, то будет верно:

$$\nu(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i)$$

где справа допускается бесконечное значение.

□ Введем множества:

$$B_1 = A_1 \cap A, \quad \forall i > 1,\ B_i = \left(A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j\right) \cap A$$

Тогда $B_i \in R$, поскольку R - кольцо и все операции выдерживает. Поскольку $B_i \subset A_i$, то будет верно:

$$\forall i,\ \nu(A_i) = \nu(B_i) + \nu(A_i \setminus B_i), \quad \nu(A_i \setminus B_i) \geq 0 \Rightarrow \forall i,\ \nu(A_i) = \nu(B_i) + \nu(A_i \setminus B_i) \geq \nu(B_i)$$

Кроме того, $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i$ потому что мы выбросили все лишние точки, которые нам мешали с точки зрения наличия дизъюнктности, а затем ещё и пересекали с $A \Rightarrow$ по σ-аддитивности получим:

$$\nu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(B_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i)$$

■

Мера Лебега и Жордана

Пусть S - полукольцо с единицей E, m - σ-аддитивная мера на S, $R(S)$ - минимальная алгебра, содержащая S, ν - продолжение m на $R(S)$ (поскольку $R(S)$ это алгебра $\Rightarrow R(S)$ это кольцо).

Rm: 7. Если мера не обладает σ-аддитивностью, то возможности её продолжения исчерпываются $R(S)$ и дальше обсуждать особенно нечего. Но популярные меры в основном обладают σ-аддитивностью и поэтому можно будет распространить меру на более широкий класс.

Опр: 4. В рамках условий выше, если $A \subseteq E$, то определим внешнюю меру Лебега:

$$\mu^*(A) = \inf_{\mathrm{I}(A)} \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n),\ \mathrm{I}(A) = \left\{ A_1, \dots, A_n, \dots \in S \colon A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\}$$

Опр: 5. В рамках условий выше, если $A \subseteq E$, то определим внешнюю меру Жордана:

$$\mu_J^*(A) = \inf_{\mathrm{I}(A)} \sum_{i=1}^{n} m(A_i),\ \mathrm{I}(A) = \left\{ A_1, \dots, A_n \in S \colon A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right\}$$

Rm: 8. Заметим, что:

$$\forall A \subseteq E,\ \mu^*(A) \le \mu_J^*(A) \le m(E)$$

где последнее неравенство верно в силу того, что в обеих метриках берется нижняя грань множеств, покрывающих A. Первое неравенство верно в силу того, что нижняя грань в мере Лебега берется по большему множеству $\Rightarrow$ оно точно не может быть больше, чем нижняя грань по меньшему.

Утв. 5. Если $A \in R(S)$, то $\mu^*(A) = \mu_J^*(A) = \nu(A)$.

$\square$ Проверим для Лебега, для Жордана - аналогично. С одной стороны, так как $A \in R(S)$, то

$$A = \bigsqcup_{i=1}^{K} A_i,\ A_i \in S \Rightarrow \mu^*(A) \le \sum_{i=1}^{K} m(A_i) = \nu(A)$$

Предположим, что $A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, где все $A_i \in S \subseteq R(S)$, тогда по утверждению 4:

$$\nu(A) \le \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$$

где последнее равенство верно в силу того, что все $A_i \in S$. Переходя справа к нижней грани, мы получим, что $\nu(A) \le \mu^*(A)$. $\blacksquare$

Утв. 6. Величины внешних мер Лебега и Жордана не изменятся, если:

$$\mathrm{I}(A) = \left\{ A_1, \dots, A_n, \dots \in S \colon A \subseteq \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\}$$

для меры Лебега и

$$\mathrm{I}(A) = \left\{ A_1, \dots, A_n \in S \colon A \subseteq \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i \right\}$$

для меры Жордана.

□ Докажем для внешней меры Лебега (доказательство для меры Жордана почти идентично). Пусть $A \subseteq E$ и определим:

$$\overline{\mu}^*(A) = \inf_{\mathrm{I}(A)} \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n),\, \mathrm{I}(A) = \left\{ A_1, \ldots, A_n, \ldots \in S \colon A \subseteq \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\}$$

Очевидно, что $\mu^*(A) \leq \overline{\mu}^*(A)$, просто потому, что покрытие в первом случае более богатое. Предположим, что $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, $A_i \in S \Rightarrow A_i \in R(S)$. Тогда определим множества:

$$B_1 = A_1, B_2 = A_2 \setminus A_1, \ldots, B_n = A_n \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} A_j, \ldots \Rightarrow \forall i,\, B_i \in R(S) \Rightarrow \forall i,\, B_i = \bigsqcup_{j=1}^{j_i} C_{i,j},\, C_{i,j} \in S$$

Кроме того, будет верно:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} \bigsqcup_{j=1}^{j_i} C_{i,j}$$

При этом, поскольку $\forall i,\, B_i \subseteq A_i$, то (см. утверждение 4) будет верно следующее:

$$\sum_{i=1}^{\infty} m(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \nu(B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{j_i} m(C_{i,j})$$

Следовательно, поскольку выполнено:

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \bigsqcup_{j=1}^{j_n} C_{n,j} \wedge \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{j_n} m(C_{n,j}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$$

то переходя к точной нижней грани, мы получим, что $\overline{\mu}^*(A) \leq \mu^*(A)$. ■

Приведём здесь пару определений из задачника (Ульянов, Бахвалов и другие).

Опр: 6. Мера m на полукольце S с единицей E называется конечной, если $m(E) < \infty$.

Опр: 7. Мера m на полукольце S называется σ-конечной, если существует такое множество X, что $A \subseteq X$ для каждого $A \in S$ (вообще говоря, $X \notin S$, то есть X не единица S), причём X может быть представлено в виде:

$$X = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

где $A_n \in S$ и $m(A_n) < \infty$ при всех n.

Rm: 9. Конечная мера является частным случаем σ-конечной.