Интеграл Лебега

Пусть $(X, \mathcal{M}, \mu)$ это измеримое пространство.

Опр: 1. Пусть $f(x)$ измерима и неотрицательна на X, тогда множеством минорантных функций для неё называется множество неотрицательных простых функций:

$$Q_f = \{\text{простые функции } \varphi(x)\colon 0 \leq \varphi(x) \leq f(x),\, \forall x \in X\}$$

Rm: 1. Всегда функция $0 \in Q_f$ и следовательно: $Q_f \neq \varnothing$.

Опр: 2. Пусть $f(x)$ измерима и неотрицательна на X, тогда интегралом Лебега функции $f(x)$ по множеству X называется точная верхняя грань:

$$(\mathcal{L}) \int\limits_X f(x) d\mu = \int\limits_X f(x) d\mu = \sup_{\varphi \in Q_f} \int\limits_X \varphi(x) d\mu$$

При этом будем говорить, что $f(x) \in \mathcal{L}(X)$ (интегрируема по Лебегу на X) тогда и только тогда, когда интеграл конечен, то есть:

$$f(x) \in \mathcal{L}(X) \Leftrightarrow \int\limits_X f(x) d\mu < \infty$$

Если функция $f(x)$ измерима на X, то определим функции:

1) $f_+(x) = \max\{f(x), 0\}$;
2) $f_-(x) = -\min\{f(x), 0\}$;

Обе функции измеримые и неотрицательные. Заметим, что всегда будет верно равенство:

$$\forall x \in X,\ f(x) = f_+(x) - f_-(x)$$

Опр: 3. Пусть $f(x)$ измерима на X, тогда скажем, что $f(x)$ интегрируема по Лебегу на X, если интегрируемы функции: $f_+(x)$ и $f_-(x)$, то есть:

$$f(x) \in \mathcal{L}(X) \Leftrightarrow f_+(x) \in \mathcal{L}(X) \wedge f_-(x) \in \mathcal{L}(X)$$

Если это выполнено, то полагаем, что верно равенство:

$$(\mathcal{L}) \int\limits_X f(x) d\mu = \int\limits_X f(x) d\mu = \int\limits_X f_+(x) d\mu - \int\limits_X f_-(x) d\mu$$

Утв. 1. Пусть функция $f(x)$ измерима на $(X, \mathcal{M}, \mu)$ (далее будем писать измерима на X). Тогда:

$$f(x) \in \mathcal{L}(X) \Leftrightarrow |f(x)| \in \mathcal{L}(X)$$

$\square$

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x)$$

По определению:

$$f(x) \in \mathcal{L}(X) \Leftrightarrow f_+(x) \in \mathcal{L}(X) \wedge f_-(x) \in \mathcal{L}(X)$$

Когда условие выше выполнено, то верно:

$$\int\limits_X f(x)d\mu = \int\limits_X f_+(x)d\mu - \int\limits_X f_-(x)d\mu$$

Заметим, что: $|f(x)| = f_+(x) + f_-(x)$, тогда по теореме 3 лекции 8, будет верно:

$$\int\limits_X |f(x)|d\mu = \int\limits_X f_+(x)d\mu + \int\limits_X f_-(x)d\mu \Rightarrow |f(x)| \in \mathcal{L}(X) \Leftrightarrow f_+(x) \in \mathcal{L}(X) \wedge f_-(x) \in \mathcal{L}(X)$$

где интеграл от модуля определен в любой ситуации, поскольку $|f(x)| \geq 0$. Следовательно:

$$f(x) \in \mathcal{L}(X) \Leftrightarrow f_+(x) \in \mathcal{L}(X) \wedge f_-(x) \in \mathcal{L}(X) \Leftrightarrow |f(x)| \in \mathcal{L}(X)$$

■

Утв. 2. Если функция $f(x), g(x)$ - измеримы и неотрицательны на X, $f(x) \in \mathcal{L}(X)$ и $\forall x \in X$, $g(x) \leq f(x)$, тогда будет верно, что $g(x) \in \mathcal{L}(X)$ и $\int_X g(x)d\mu \leq \int_X f(x)d\mu$.

□ По определению множества Q_f будет верно:

$$Q_g \subseteq Q_f \Rightarrow \int\limits_X g(x)d\mu = \sup_{\varphi \in Q_g} \int\limits_X \varphi(x)d\mu \leq \sup_{\varphi \in Q_f} \int\limits_X \varphi(x)d\mu = \int\limits_X f(x)d\mu < \infty$$

где последнее верно по условию. Тогда получаем конечность интеграла от $g \Rightarrow g(x) \in \mathcal{L}(X)$ и верно неравенство для интегралов. ■

Теорема 1. Верны следующие утверждения:

1) Если $\mu(X) = 0$ и $f(x)$ измерима на X, то $f(x) \in \mathcal{L}(X)$ и более того:

$$\int\limits_X f(x)d\mu = 0$$

2) Если $g(x)$ измеримы на X, $f(x) \in \mathcal{L}(X)$ и $g(x) = f(x)$ п.в. на X, тогда $g(x) \in \mathcal{L}(X)$ и верно:

$$\int\limits_X g(x)d\mu = \int\limits_X f(x)d\mu$$

3) Если $f(x) \in \mathcal{L}(X)$, то $\mu(\{x \in X\colon f(x) = \pm\infty\}) = \mu(A) = 0$;

□

1) Достаточно проверить для $f(x) \geq 0$, поскольку любая функция разбивается не неотрицательные: $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$. По условию:

$$\mu(X) = 0 \Rightarrow \forall \varphi(x) \in Q_f,\ \int\limits_X \varphi(x)d\mu = 0 \Rightarrow \int\limits_X f(x)d\mu = 0$$

2) Поскольку $f(x) = g(x)$ п.в. на X, то $f_+(x) = g_+(x)$, $f_-(x) = g_-(x)$ п.в. на X, поэтому достаточно рассмотреть неотрицательные $f(x)$ и $g(x)$. Пусть $E = \{x \in X\colon f(x) = g(x)\}$, тогда $\mu(X \setminus E) = 0$ по условию (функции совпадают п.в.), рассмотрим интеграл:

$$\int\limits_X g(x)d\mu = \int\limits_E g(x)d\mu + \int\limits_{X\setminus E} g(x)d\mu = \int\limits_E g(x)d\mu = \int\limits_E f(x)d\mu =$$

$$= \int\limits_E f(x)d\mu + \int\limits_{X\setminus E} f(x)d\mu = \int\limits_X f(x)d\mu < \infty$$

где используется представление из следствия 1 лекции 8: $g(x) = g(x)\cdot\chi_E(x) + g(x)\cdot\chi_{X\setminus E}(x)$ и первый пункт текущей теоремы. Из конечности $\int_X f(x)d\mu$ следует интегрируемость $\int_X g(x)d\mu$ и равенство этих интегралов;

3) Достаточно рассмотреть $f(x) \geq 0$, предположим, что $\mu(A) > 0$. Если $\mu(X) < \infty$, то и $\mu(A) < \infty$, но в общей ситуации пусть верна σ-конечность меры на X:

$$X = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} B_n,\ \forall n,\ B_n \in \mathcal{M},\ \mu(B_n) < \infty$$

Тогда множество A также можно представить в аналогичном виде:

$$A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} (A \cap B_n),\ \mu(A) > 0 \Rightarrow \exists\, n_0\colon \mu(A \cap B_{n_0}) > 0$$

Поскольку при этом будет верно: $\mu(A \cap B_{n_0}) \leq \mu(B_{n_0}) < \infty$. Рассмотрим функции:

$$\forall m \geq 1,\ h_m(x) = m\cdot\chi_{A\cap B_{n_0}}(x) \in Q_f$$

Эта функция простая, поскольку она принимает всего 2 значения: 0 вне множества $A \cap B_{n_0}$ и m в этом множестве, которое самое по себе - множество конечной меры. Кроме того, на этом множестве, как подмножестве A, функция $f(x) = +\infty \Rightarrow h_m(x) \leq f(x)$. Тогда:

$$\int\limits_X f(x)d\mu \geq \int\limits_X h_m(x)d\mu = m\cdot \underbrace{\mu(A \cap B_{n_0})}_{>0} \xrightarrow{m\to\infty} \infty$$

Получили противоречие с тем, что $f(x) \in \mathcal{L}(X) \Rightarrow \int_X f(x)d\mu < \infty$;

∎

Линейность интеграла Лебега в общем случае

Теорема 2. Пусть $f(x) \in \mathcal{L}(X)$ и $\alpha \in \mathbb{R}^1$, тогда $\alpha\cdot f(x) \in \mathcal{L}(X)$ и более того:

$$\int\limits_X \alpha\cdot f(x)d\mu = \alpha\cdot\int\limits_X f(x)d\mu$$

□ Пусть $\alpha = 0$, тогда: $\alpha{\cdot}f(x) = 0$, где действует соглашение: $0{\cdot}\infty = 0$. При этом 0 - интегрируемая функция, тогда:

$$0 = \int\limits_X 0{\cdot}f(x)d\mu = 0{\cdot}\int\limits_X f(x)d\mu = 0$$

Пусть $\alpha > 0$ (случай $\alpha < 0$ рассматривается аналогично), тогда:

$$(\alpha{\cdot}f)_+(x) = \alpha{\cdot}f_+(x),\ (\alpha{\cdot}f)_-(x) = \alpha{\cdot}f_-(x)$$

Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда: $f(x) \geq 0$. Отметим, что:

$$h(x) \in Q_f \Leftrightarrow \alpha{\cdot}h(x) \in Q_{\alpha\cdot f}$$

по определению Q_f. Поэтому:

$$\int\limits_X f(x)d\mu = \sup_{h\in Q_f}\int\limits_X h(x)d\mu = \sup_{\alpha\cdot h\in Q_{\alpha f}}\int\limits_X h(x)d\mu = \frac{1}{\alpha}{\cdot}\sup_{\alpha\cdot h\in Q_{\alpha f}}\int\limits_X \alpha{\cdot}h(x)d\mu = \frac{1}{\alpha}{\cdot}\int\limits_X \alpha{\cdot}f(x)d\mu$$

где мы воспользовались линейностью по умножению для простой функции. В результате:

$$\alpha{\cdot}\int\limits_X f(x)d\mu = \int\limits_X \alpha{\cdot}f(x)d\mu$$

■

Rm: 2. У нас либо действовало соглашение, что $0{\cdot}\infty = 0$, либо можно было обратиться к ситуациям, когда мера полна и тогда по предыдущей теореме, поскольку $f(x) \in \mathcal{L}(X)$, то $f(x)$ конечна почти всюду $\Rightarrow$ проблемы с умножением могли бы возникнуть лишь на множестве нулевой меры, а когда мера полна, то на множестве нулевой меры интеграл обязательно будет равен 0.

Теорема 3. Пусть $f(x), g(x) \in \mathcal{L}(X)$, тогда $f(x) + g(x) \in \mathcal{L}(X)$ и более того:

$$\int\limits_X (f(x)+g(x))d\mu = \int\limits_X f(x)d\mu + \int\limits_X g(x)d\mu$$

□ Поскольку $\forall x \in \mathcal{L}(X)$, $|f(x)+g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$, и согласно утверждению 1 этой лекции верно: $|f(x)| \in \mathcal{L}(X)$, $|g(x)| \in \mathcal{L}(X)$, тогда по теореме 3 предыдущей лекции верно, что: $|f(x)| + |g(x)| \in \mathcal{L}(X)$. Согласно утверждению 2 верно, что: $|f(x)+g(x)| \in \mathcal{L}(X) \Rightarrow f(x)+g(x) \in \mathcal{L}(X)$.

Покажем теперь, что верно равенство. Предположим, что $f(x) \geq 0$, $g(x) \leq 0$ на X. Введём множества:

$$E_+ = \{x \in X\colon f(x)+g(x) \geq 0\},\ E_- = \{x \in X\colon f(x)+g(x) < 0\}$$

Согласно нашим рассмотрениям относительно поведения измеримых функций, верно: $E_-, E_+ \in \mathcal{M}$, тогда: $X = E_+ \sqcup E_-$. При этом, будет верно:

$$(f+g)_+(x) = (f(x)+g(x)){\cdot}\chi_{E_+}(x),\ (f+g)_-(x) = -(f(x)+g(x)){\cdot}\chi_{E_-}(x)$$

Заметим, что на множестве E_+ функции $f(x), f(x)+g(x)$ и $-g(x)$ все неотрицательны, причем верно:

$$f(x) = (f(x)+g(x)) + (-g(x))$$

По теореме 3 предыдущей лекции мы получаем, что:

$$\int\limits_{E_+} f(x)d\mu = \int\limits_{E_+} (f(x)+g(x))d\mu + \int\limits_{E_+} (-g(x))d\mu = \int\limits_{X} (f+g)_+(x)d\mu - \int\limits_{E_+} g(x)d\mu$$

где мы воспользовались теоремой 2. На множестве E_- функции $-(f(x)+g(x))$, $-g(x)$, $f(x)$ - неотрицательны, поэтому верно:

$$\int\limits_{E_-} (-g(x))d\mu = \int\limits_{E_-} -(f(x)+g(x))d\mu + \int\limits_{E_-} f(x)d\mu = \int\limits_{X} (f+g)_-(x)d\mu + \int\limits_{E_-} f(x)d\mu$$

Следовательно, мы получим следующее:

$$\int\limits_{X} (f(x)+g(x))d\mu = \int\limits_{X} (f+g)_+(x)d\mu - \int\limits_{X} (f+g)_-(x)d\mu =$$

$$= \int\limits_{E_+} f(x)d\mu + \int\limits_{E_+} g(x)d\mu + \int\limits_{E_-} f(x)d\mu + \int\limits_{E_-} g(x)d\mu =$$

$$= \left(\int\limits_{E_+} f(x)d\mu + \int\limits_{E_-} f(x)d\mu\right) + \left(\int\limits_{E_+} g(x)d\mu + \int\limits_{E_-} g(x)d\mu\right) = \int\limits_{X} f(x)d\mu + \int\limits_{X} g(x)d\mu$$

где мы воспользовались знакопостояннством функций - что справедливо для неотрицательных функций, то справедливо и для неположительных функций.

В общем случае, мы можем представить сумму функций в виде:

$$f(x)+g(x) = \underbrace{f_+(x)+g_+(x)}_{\geq 0}\underbrace{-(f_-(x)+g_-(x))}_{\leq 0}$$

По доказанному выше, будет верно:

$$\int\limits_{X} (f(x)+g(x))d\mu = \int\limits_{X} (f_+(x)+g_+(x))d\mu + \int\limits_{X} (-(f_-(x)+g_-(x)))d\mu = (*)$$

Воспользуемся теоремой 3 из прошлой лекции, вынесем знак минуса из-под интеграла и воспользуемся определением интеграла Лебега:

$$(*) = \int\limits_{X} f_+(x)d\mu + \int\limits_{X} g_+(x)d\mu - \int\limits_{X} f_-(x)d\mu - \int\limits_{X} g_-(x)d\mu = \int\limits_{X} f(x)d\mu + \int\limits_{X} g(x)d\mu$$

■

Следствие 1. Если $f(x), g(x) \in \mathcal{L}(X)$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^1$, то $\alpha\cdot f(x)+\beta\cdot g(x) \in \mathcal{L}(X)$ и верно:

$$\int\limits_{X} (\alpha\cdot f(x)+\beta\cdot g(x))d\mu = \alpha\cdot\int\limits_{X} f(x)d\mu + \beta\cdot\int\limits_{X} g(x)d\mu$$

□ Очевидно, как комбинация предыдущих двух теорем. ■

Следствие 2. Если $f(x), g(x) \in \mathcal{L}(X)$ и $\forall x \in X,\ f(x) \geq g(x)$, то будет верно: $\int_X f(x)d\mu \geq \int_X g(x)d\mu$.

□ Функция $f(x) - g(x) \geq 0,\ f(x) - g(x) \in \mathcal{L}(X)$, тогда:

$$0 \leq \int\limits_X (f(x) - g(x))d\mu = \int\limits_X f(x)d\mu - \int\limits_X g(x)d\mu \Rightarrow \int\limits_X f(x)d\mu \geq \int\limits_X g(x)d\mu$$

■

Утв. 3. Если $f(x) \in \mathcal{L}(X)$, $g(x)$ измерима на X и $|g(x)| \leq |f(x)|$ п.в. на X, то $g(x) \in \mathcal{L}(X)$.

□ Пусть $E = \{x \in X \colon |g(x)| \leq |f(x)|\}$, тогда:

1) $\mu(X \setminus E) = 0 \Rightarrow g(x) \in \mathcal{L}(X \setminus E)$ и $\int_{X \setminus E} g(x)d\mu = 0$;
2) $|g(x)| \in \mathcal{L}(E)$, поскольку $|f(x)| \in \mathcal{L}(E)$, тогда $g(x) \in \mathcal{L}(E)$;

Из пунктов выше вытекает утверждение. ■

Rm: 3. Если функция $f(x) \in \mathcal{L}(X)$, то тогда верно:

$$\left|\int\limits_X \underbrace{f_+(x)}_{\geq 0} d\mu - \int\limits_X \underbrace{f_-(x)}_{\geq 0} d\mu\right| = \left|\int\limits_X f(x)d\mu\right| \leq \int\limits_X |f(x)|d\mu = \int\limits_X f_+(x)d\mu + \int\limits_X f_-(x)d\mu$$

Rm: 4. Если $\mu(X) < \infty$ и $f(x)$ измерима на X и кроме того $\forall x \in X,\ |f(x)| \leq c$, то в этом случае:

$$f(x) \in \mathcal{L}(X),\ \int\limits_X |f(x)|d\mu \leq c{\cdot}\mu(X)$$

Это частный случай утверждения 2, где: $|f(x)| \leq c{\cdot}\chi_X(x)$.

Предельный переход под знаком интеграла Лебега

Пусть $(X, \mathcal{M}, \mu)$ - измеримое пространство. Далее будем говорить измеримо на X.

Теорема 4. (**Беппо-Леви**) Пусть $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ - измеримые и неотрицательные функции на X, кроме того $f_n(x) \uparrow f(x)$ на X. Тогда:

$$\int\limits_X f(x)d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x)d\mu$$

Rm: 5. $f(x)$ это предел измеримых функций $\Rightarrow$ она измерима. Её неотрицательность вытекает из неотрицательности $f_n(x)$, а также из того, что функции монотонно возрастают. Также допускаются бесконечные значения.

$\square$ Рассмотрим функции: $g_1(x) = f_1(x)$, $\forall n \geq 2$, $g_n(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x)$, при этом считаем:

$$\infty - a = \infty,\ \infty - \infty = 0$$

Тогда все функции $g_n(x)$ измеримы и неотрицательны на X. $\forall n$ построим по лемме 1 предыдущей лекции последовательность простых неотрицательных функций $\psi_{n,k}(x) \uparrow g_n(x)$ на X. Введем функции:

$$F_k(x) = \sum_{n=1}^{k} \psi_{n,k}(x),\ k = 1, 2, \dots$$

Все $F_k(x)$ - измеримые, неотрицательные и являются простыми функциями. Рассмотрим свойства этой последовательности:

1) Монотонность последовательности F_k на X:

$$F_{k+1}(x) - F_k(x) = \psi_{k+1,k+1}(x) + \sum_{n=1}^{k} \underbrace{(\psi_{n,k+1}(x) - \psi_{n,k}(x))}_{\geq 0} \geq 0 \Rightarrow F_k(x) \uparrow$$

2) Ограниченность сверху функциями $f_k(x)$ и $f(x)$:

$$\forall k,\ F_k(x) = \sum_{n=1}^{k} \psi_{n,k}(x) \leq \sum_{n=1}^{k} g_n(x) = f_k(x) \leq f(x)$$

3) Ограниченность снизу функциями $f_N(x)$:

$$\forall N,\ \lim_{k\to\infty} F_k(x) \geq \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \psi_{n,k}(x) = \sum_{n=1}^{N} \lim_{k\to\infty} \psi_{n,k}(x) = \sum_{n=1}^{N} g_n(x) = f_N(x)$$

где предел и сумму можно менять, поскольку число N - фиксированное. Поскольку это верно для любого N, то можно взять предел по N:

$$\lim_{k\to\infty} F_k(x) \geq \lim_{N\to\infty} f_N(x) = f(x)$$

Из пунктов выше, поскольку $F_k(x)$ монотонно возрастает и ограничена сверху, то у неё есть предел и согласно пунктам 2) и 3) этот предел будет равен:

$$\lim_{k\to\infty} F_k(x) = f(x)$$

Тогда согласно утверждению 7 предыдущей лекции:

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_X F_k(x)d\mu = \int\limits_X f(x)d\mu$$

Заметим также, что верно следующее:

$$\forall k,\ F_k(x) \leq f_k(x) \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \int\limits_X f_k(x)d\mu \geq \lim_{k\to\infty} \int\limits_X F_k(x)d\mu = \int\limits_X f(x)d\mu$$

С другой стороны:

$$\forall k,\ f_k(x) \leq f(x) \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \int\limits_X f_k(x)d\mu \leq \int\limits_X f(x)d\mu$$

Тогда из полученных неравенств мы имеем равенство:

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_X f_k(x)d\mu = \int\limits_X f(x)d\mu$$

■

Следствие 3. (**теорема Беппо-Леви**) Пусть задана последовательность: $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}(X)$ и она монотонно сходится к $f(x)$: $f_n(x) \uparrow f(x)$ на X. Пусть кроме того, $\exists\, c > 0$ такая, что:

$$\forall n,\ \int\limits_X f_n(x)d\mu \leq c$$

Тогда $f(x) \in \mathcal{L}(X)$ и будет верно:

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_X f_k(x)d\mu = \int\limits_X f(x)d\mu$$

Rm: 6. Поскольку функции интегрируемы, то они конечны п.в., но всё же нужно либо использовать соглашения о действиях с бесконечными величинами, либо считать, что мера μ полна $\Rightarrow$ из конечности функций п.в. нам не важно, что происходит на множестве меры 0, либо считать, что функции конечный в каждой точке.

□ Рассмотрим функции: $g_n(x) = f_n(x) - f_1(x)$, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда $\forall n$, $g_n(x) \in \mathcal{L}(X)$, как разность интегрируемых функций, $g_n(x) \geq 0$ на X, поскольку последовательность монотонно не убывает и кроме того $g_n(x) \uparrow (f(x) - f_1(x))$. По предыдущей теореме будет верно:

$$\int\limits_X (f(x) - f_1(x))d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X g_n(x)d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x)d\mu - \int\limits_X f_1(x)d\mu \leq c - \int\limits_X f_1(x)d\mu < \infty$$

Таким образом $(f(x) - f_1(x)) \in \mathcal{L}(X) \Rightarrow$ поскольку к одной интегрируемой функции мы можем прибавить другую интегрируемую функцию, а конкретно $f_1(x)$, то:

$$(f(x) - f_1(x)) + f_1(x) = f(x) \in \mathcal{L}(X) \Rightarrow \int\limits_X (f(x) - f_1(x))d\mu = \int\limits_X f(x)d\mu - \int\limits_X f_1(x)d\mu \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int\limits_X f(x)d\mu - \int\limits_X f_1(x)d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x)d\mu - \int\limits_X f_1(x)d\mu \Rightarrow \int\limits_X f(x)d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x)d\mu$$

■

Следствие 4. Пусть $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ - измеримы и неотрицательны на X, тогда:

$$\int\limits_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_X f_n(x)d\mu$$

Rm: 7. Допускаются бесконечные значения (как интегралов, так и сумм).

☐ Пусть $g_k(x) = \sum_{n=1}^{k} f_n(x)$, тогда в силу неотрицательности $f_n(x)$: $g_k(x) \uparrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, следовательно по теореме Беппо-Леви:

$$\int\limits_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)d\mu = \lim_{k\to\infty} \int\limits_X \sum_{n=1}^{k} f_n(x)d\mu$$

В силу теоремы 3 предыдущей лекции поскольку сумма конечна, то мы получим:

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_X \sum_{n=1}^{k} f_n(x)d\mu = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \int\limits_X f_n(x)d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_X f_n(x)d\mu$$

■

Теорема 5. (**теорема Фату**) Пусть $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ - измеримы и неотрицательны на X, предположим, что μ - полна и функция $f_n(x) \xrightarrow{as, X} f(x)$, где $f(x) \geq 0$ на X, тогда:

$$\int\limits_X f(x)d\mu \leq \varliminf_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x)d\mu$$

Rm: 8. Заметим, что из сходимости $f_n(x)$, пусть даже всюду, не вытекает существование предела у последовательности интегралов, но нижний предел всегда существует у них. Интегралы также могут принимать бесконечные значения.

☐ Рассмотрим следующие функции:

$$\forall k,\ \varphi_k(x) = \inf_{n\geq k} f_n(x) \Rightarrow \forall x \in X,\ \varphi_k(x) \uparrow \wedge\ \varphi_k(x) \xrightarrow{as, X} f(x)$$

где сходимость п.в. есть на измеримом множестве E: $\mu(X \setminus E) = 0$.

$$\forall x \in E,\ \lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = \lim_{k\to\infty} \inf_{n\geq k} f_n(x) = \varliminf_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$$

Тогда:

$$\int\limits_X f(x)d\mu = \int\limits_E f(x)d\mu = \lim_{k\to\infty} \int\limits_E \varphi_k(x)d\mu = \lim_{k\to\infty} \int\limits_X \varphi_k(x)d\mu$$

Но поскольку: $\forall k,\ \varphi_k(x) \leq f_k(x)$, то выберем последовательность, которая реализует нижний предел:

$$\{k_i\}_{i=1}^{\infty}:\ \varliminf_{k\to\infty} \int\limits_X f_k(x)d\mu = \lim_{i\to\infty} \int\limits_X f_{k_i}(x)d\mu \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \int\limits_X \varphi_k(x)d\mu = \lim_{i\to\infty} \int\limits_X \varphi_{k_i}(x)d\mu \leq \lim_{i\to\infty} \int\limits_X f_{k_i}d\mu = \varliminf_{k\to\infty} \int\limits_X f_k(x)d\mu$$

■