Список литературы

Книги на курсе:

1. Ульянов, Дьяченко: Мера и интеграл
2. Колмогоров, Фомин
3. Сакс: Теория интеграла

Базовые понятия

Аксиома выбора: Пусть имеется $\{A_w\}_{w\in\Omega}$ - система непустых множеств:

$$A_{w_1} \cap A_{w_2} = \varnothing, w_1 \neq w_2 \Rightarrow \exists\, B = \{a_w\}_{w\in\Omega}\colon \forall w \in \Omega, a_w \in A_w$$

Обозначения стандартные: $\cap, \cup, \setminus, \triangle$.

Опр: 1. Симметрической разностью называется: $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Опр: 2. $C = A \sqcup B$ - дизъюнктное объединение тогда и только тогда, когда:

(1) $C = A \cup B$;

(2) $A \cap B = \varnothing$;

Утв. 1. Верны следующие тождества:

(1) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

(2) $A \cup B = (A \triangle B) \triangle (A \cap B)$;

(3) $A \setminus B = A \triangle (A \cap B)$;

$\square$ Покажем справедливость равенств:

(1) Очевидно;

(2) $A \cup B = [(A \cup B) \setminus (A \cap B)] \cup (A \cap B) = ([(A \cup B) \setminus (A \cap B)] \cup (A \cap B)) \setminus \varnothing = ([(A \cup B) \setminus (A \cap B)] \cup (A \cap B)) \setminus ([(A \cup B) \setminus (A \cap B)] \cap (A \cap B)) = ((A \cup B) \setminus (A \cap B)) \triangle (A \cap B) = (A \triangle B) \triangle (A \cap B)$;

(3) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B) = (A \cup (A \cap B)) \setminus (A \cap B) = (A \cup (A \cap B)) \setminus (A \cap (A \cap B)) = A \triangle (A \cap B)$;

$\blacksquare$

Системы множеств

Опр: 3. Пусть $K = \{A_w\}_{w\in\Omega} \wedge E \in K \Rightarrow E$ - единица $K \Leftrightarrow \forall w \in \Omega, A_w \cap E = A_w$, $(A_w \subseteq E)$.

Опр: 4. Пусть K - система множеств $\Rightarrow K$ - полукольцо $\Leftrightarrow$ выполнены условия:

(1) $\varnothing \in K$;

(2) $A, B \in K \Rightarrow A \cap B \in K$;

(3) Если $A, A_1 \in K\colon A_1 \subset A \Rightarrow \exists\, A_2, \ldots, A_n \in K\colon A = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i$;

Примеры

1. Пусть $[a,b) \subset \mathbb{R}^1$, тогда $K = \varnothing \cup \{\, [\alpha,\beta) \subseteq [a,b) \,\}$ - полукольцо;
2. Пусть $[a,b] \subset \mathbb{R}^1$, $K = \varnothing \cup \{\, \{'\alpha,\beta\}' \subseteq [a,b] \,\}$, где $\{' = [\vee ($ - полукольцо;
3. $[a,b] = \prod\limits_{j=1}^{n} [a_j, b_j] \subset \mathbb{R}^n$, $K = \varnothing \cup \{\, \{\alpha,\beta\} = \prod\limits_{j=1}^{n} \{\alpha_j,\beta_j\} \subseteq [a,b] \,\}$ - полукольцо;
4. Все открытые подмножества отрезка $[0,1]$ - не образуют полукольцо, поскольку их нельзя дополнить конечным числом интервалов до дизъюнктного объединения.

Опр: 5. Система множеств R называется кольцом $\Leftrightarrow$ выполнены условия:

(1) $R \neq \varnothing$;

(2) $A, B \in R \Rightarrow A \cap B \in R$;

(3) $A, B \in R \Rightarrow A \triangle B \in R$;

Опр: 6. Кольцо с единицей называется алгеброй.

Утв. 2. Пусть R - кольцо $\Rightarrow$ R - полукольцо и если $A, B \in R \Rightarrow A \cup B \in R$.

$\square$ R - кольцо $\Rightarrow \exists\, A \in R \Rightarrow \varnothing = A \triangle A \in R \Rightarrow (1)$ - выполняется.

(2) - выполняется автоматически.

$A, A_1 \in R$, $A_1 \subset A \Rightarrow A \setminus A_1 = A \triangle A_1 = A_2 \in R \Rightarrow A = A_1 \bigsqcup A_2 \Rightarrow (3)$ - выполняется.

Если $A, B \in R \Rightarrow A \cup B = (A \triangle B) \triangle (A \cap B) \in R$. $\blacksquare$

Опр: 7. Пусть R - система множеств, тогда R это σ-кольцо (δ-кольцо) $\Leftrightarrow$ выполнены условия:

(1) R - кольцо;

(2) $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \in R \Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in R$ $\left(\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \in R \Rightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in R \right)$;

Опр: 8. σ-кольцо (δ-кольцо) с единицей будем называть σ-алгеброй (δ-алгеброй).

Утв. 3. Пусть R - σ-кольцо $\Rightarrow$ R - δ-кольцо. Обратное, вообще говоря не верно, но если R - δ-алгебра, то R - σ-алгебра.

$\square$ Воспользуемся следующими фактами:

$$A \setminus (A \setminus B) = A \cap (A \setminus B)^c = A \cap (A \cap B^c)^c = A \cap (A^c \cup B) = (A \cap A^c) \cup (A \cap B) = \varnothing \cup (A \cap B) = A \cap B$$

$$A_1 \cap \bigcap_{i=2}^{\infty} A_i = A_1 \setminus \left(A_1 \setminus \bigcap_{i=2}^{\infty} A_i \right) = A_1 \setminus \left(A_1 \cap \left(\bigcap_{i=2}^{\infty} A_i \right)^c \right) = A_1 \setminus \left(A_1 \cap \left(\bigcup_{i=2}^{\infty} A_i^c \right) \right) =$$

$$= A_1 \setminus \left(\bigcup_{i=2}^{\infty} (A_1 \cap A_i^c) \right) = A_1 \setminus \left(\bigcup_{i=2}^{\infty} (A_1 \setminus A_i) \right)$$

R - σ-кольцо и $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \in R \Rightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \setminus \left(\bigcup\limits_{i=2}^{\infty} (A_1 \setminus A_i) \right)$, где $\bigcup\limits_{i=2}^{\infty} (A_1 \setminus A_i) \in R$, так как $A_1 \setminus A_i \in R$ и счетное объединение принадлежит σ-кольцу.

Если R - δ-кольцо с единицей E и $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \in R$, то $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i = E \setminus \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} (E \setminus A_i) \in R$. Доказательство аналогично факту выше. ■

Пример: все ограниченные подмножества прямой $\mathbb{R}^1 = \delta$-кольцо, но не σ-кольцо (за счет счетного объединения ограниченных множеств можно получить всю прямую $\mathbb{R}^1$).

Утв. 4. Пусть $\{R_w\}_{w\in\Omega}$ - некоторая система колец $\Rightarrow \bigcap\limits_{w\in\Omega} R_w$ - кольцо.

□ $\forall w \in \Omega$, $\varnothing \in R_w \Rightarrow R = \bigcap\limits_{w\in\Omega} R_w \ni \varnothing \Rightarrow R$ - не пусто (содержит пустое множество).

Пусть $A, B \in R \Rightarrow \forall w \in \Omega,\ A, B \in R_w \Rightarrow \forall w \in \Omega,\ A \cap B \in R_w,\ A \triangle B \in R_w \Rightarrow A \cap B \in R,\ A \triangle B \in R.$ ■

Rm: 1. Если все R_w обладали одной и той же $E \Rightarrow E$ - единица $R \Rightarrow R$ - алгебра.

Rm: 2. Утверждение, аналогичное утверждению выше справедливо и для σ-колец.

Теорема 1. Пусть K - некоторая система множеств $\Rightarrow \exists$ кольцо $R(K)$:

(1) $K \subseteq R(K)$;

(2) Если кольцо R_1: $K \subseteq R_1 \Rightarrow R(K) \subseteq R_1$;

где $R(K)$ - минимальное кольцо, содержащее K.

□

(1) Пусть $K = \{A_w\}_{w\in\Omega}$. Рассмотрим $B = \bigcup\limits_{w\in\Omega} A_w$ и пусть $\bar{R}$ - все подмножества B включая $\varnothing$, очевидно, что $\bar{R}$ - кольцо. Теперь $\{R_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ - все кольца, которые содержатся в $\bar{R}$ и содержат $K \Rightarrow$ эта система не пуста ($\bar{R} = R_{\gamma_0}$).

   Положим $R(K) = \bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} R_\gamma$, по утверждению выше $R(K)$ - кольцо, а по выбору $\{R_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} \Rightarrow K \subseteq R(K)$, так как каждое из колец содержит K.

(2) Пусть T - кольцо: $K \subseteq T$, пусть $\widetilde{R} = \bar{R} \cap T$ - кольцо и $\widetilde{R} = R_{\gamma_1}$ - лежит внутри $\bar{R}$ и содержит $K \Rightarrow R(K) \subseteq R_{\gamma_1} \subseteq T$.

■

Rm: 3. Если E - единица $K \Rightarrow B = E$ и $R(K)$ - алгебра с единицей E

Rm: 4. Аналогично доказывается, что $\exists \min$ σ-кольцо содержащее K, а если K обладало E, то оно будет σ-алгеброй.

Лемма 1. Пусть S - полукольцо, $A \in S$, $A_1, \ldots A_l \in S$ и $\bigsqcup\limits_{i=1}^{l} A_i \subset A$, тогда $\exists A_{l+1}, \ldots, A_m \in S$: $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{m} A_i$.

□ По индукции:
База: $l = 1 \Rightarrow$ определение полукольца.

Шаг: Пусть $l \geq 1$ и лемма доказана для l, $A, A_1, \ldots, A_{l+1} \in S$: $\bigsqcup\limits_{i=1}^{l+1} A_i \subset A$, по индукции

$$\exists\, B_1, \ldots, B_k \in S\colon \bigsqcup_{i=1}^{l} A_i \bigsqcup \left(\bigsqcup_{j=1}^{k} B_j \right) = A$$

Рассмотрим $C_j = A_{l+1} \cap B_j$, $j = \overline{1, k}$, $C_j \in S$ - по определению полукольца, кроме того, $C_j \subseteq B_j \Rightarrow \forall j,\ \exists\, \{D_{j,\nu}\}_{\nu=1}^{\nu_j} \subset S\colon B_j = C_j \bigsqcup \left(\bigsqcup\limits_{j=1}^{\nu_j} D_{j,\nu} \right)$ - по определению полукольца $\Rightarrow$

$$A = \bigsqcup_{i=1}^{l} A_i \bigsqcup \underbrace{\left(\bigsqcup_{j=1}^{k} C_j \right)}_{=A_{l+1}} \bigsqcup \left(\bigsqcup_{j=1}^{k} \bigsqcup_{\nu=1}^{\nu_j} D_{j,\nu} \right)$$

так как $A_{l+1} \cap \bigsqcup\limits_{j=1}^{l} A_j = \varnothing$, как дизъюнктное объединение по предположению индукции, и в силу того, что $A_{l+1} \subset A \Rightarrow A_{l+1} \subseteq \bigsqcup\limits_{j=1}^{k} B_j$, поскольку:

$$A = \bigsqcup_{i=1}^{l} A_i \bigsqcup \left(\bigsqcup_{j=1}^{k} B_j \right) \Rightarrow A_{l+1} = A_{l+1} \cap \left(\bigsqcup_{j=1}^{k} B_j \right) = \bigsqcup_{j=1}^{k} \Big(A_{l+1} \cap B_j \Big) = \bigsqcup_{j=1}^{k} C_j$$

Таким образом:

$$A = \bigsqcup_{i=1}^{l+1} A_i \bigsqcup \left(\bigsqcup_{j=1}^{k} \bigsqcup_{\nu=1}^{\nu_j} D_{j,\nu} \right)$$

■

Теорема 2. Пусть S - полукольцо $\Rightarrow$ $R(S) = \left\{ \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i\colon A_i \in S \text{ (включая пустое)} \right\}$ - минимальное кольцо, содержащее полукольцо S.

□

1) Очевидно $R(S)\colon S \subset R(S)$ - объединение по одному элементу;
2) Если произвольное кольцо $R\colon S \subset R \Rightarrow \left\{ \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i\colon A_i \in S \right\} \subseteq R$ - так как кольцо должно выдерживать операцию дизъюнктного объединения $\Rightarrow$ минимальное;
3) Проверим, что $\underbrace{\left\{ \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i\colon A_i \in S \right\}}_{L}$ - кольцо:
    (1) Пустое множество входит $\Rightarrow$ объединение не пусто;

(2) Пусть $A, B \in L$, тогда:

$$A = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i,\ B = \bigsqcup_{j=1}^{m} B_j,\ A_i, B_j \in S \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Big(\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i\Big) \cap \Big(\bigsqcup_{j=1}^{m} B_j\Big) = A \cap B = \bigsqcup_{i=1}^{n}\bigsqcup_{j=1}^{m} \underbrace{(A_i \cap B_j)}_{\in S} \Rightarrow A \cap B \in L$$

(3) Воспользуемся A и B из пункта (2). Пусть $C_{ij} = A_i \cap B_j \in S \Rightarrow C_{i1}, C_{i2}, \ldots, C_{im} \subset A_i$ и они попарно не пересекаются, тогда по лемме 1

$$\forall i = \overline{1, n},\ \exists \{D_{ir}\}_{r=1}^{r_i} \subset S\colon A_i = \Big(\bigsqcup_{j=1}^{m} C_{ij}\Big) \bigsqcup \Big(\bigsqcup_{r=1}^{r_i} D_{ir}\Big)$$

и аналогично:

$$\forall j = \overline{1, m},\ \exists \{E_{j\nu}\}_{\nu=1}^{\nu_j} \subset S\colon B_j = \Big(\bigsqcup_{i=1}^{n} C_{ij}\Big) \bigsqcup \Big(\bigsqcup_{\nu=1}^{\nu_j} E_{j\nu}\Big)$$

Следовательно, распишем симметричную разность:

$$A \triangle B = \left(\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i\right) \triangle \left(\bigsqcup_{j=1}^{m} B_j\right) =$$

$$= \left(\left(\bigsqcup_{i=1}^{n}\bigsqcup_{j=1}^{m} C_{ij}\right) \bigsqcup \left(\bigsqcup_{i=1}^{n}\bigsqcup_{r=1}^{r_i} D_{ir}\right)\right) \triangle \left(\left(\bigsqcup_{j=1}^{m}\bigsqcup_{i=1}^{n} C_{ij}\right) \bigsqcup \left(\bigsqcup_{j=1}^{m}\bigsqcup_{\nu=1}^{\nu_j} E_{j\nu}\right)\right) =$$

$$= \Big(\bigsqcup_{i=1}^{n}\bigsqcup_{r=1}^{r_i} D_{ir}\Big) \bigsqcup \Big(\bigsqcup_{j=1}^{m}\bigsqcup_{\nu=1}^{\nu_j} E_{j\nu}\Big) \in L$$

Таким образом, получили, что L - кольцо.

■

Лемма 2. Пусть S - полукольцо, $A_1, \ldots, A_k \in S \Rightarrow \exists$ конечный набор попарно непересекающихся множеств $\{B_j\}_{j=1}^{M} \in S$ таких, что:

$$\forall i \in \{1, \ldots, k\}, \exists \Omega(i) \subset \{1, \ldots, M\}\colon A_i = \bigsqcup_{j \in \Omega(i)} B_j$$

□ По индукции для k.

(1) База: $k = 1$ - очевидно: $B_1 = A_1$;

(2) Шаг: Пусть утверждение доказано, для $k \geq 1$, тогда по предположению индукции:

$$\forall A_1, \ldots, A_k \in S,\ \exists \{B_j\}_{j=1}^{M} \in S\colon \forall i \in [1, \ldots, k],\ \exists \Omega(i)\colon A_i = \bigsqcup_{j \in \Omega(i)} B_j$$

Рассмотрим множества $C_j = A_{k+1} \cap B_j$, $j = \overline{1, M}$, $C_j \in S$ поскольку S - полукольцо $\Rightarrow$ по лемме 1:

$$\exists\, D_1, \dots D_r \in S\colon A_{k+1} = \Big(\bigsqcup_{j=1}^{M} C_j\Big) \bigsqcup \Big(\bigsqcup_{l=1}^{r} D_l\Big)$$

Также по определению полукольца:

$$\forall j,\, \exists \{E_{j\mu}\}_{\mu=1}^{\mu_j} \in S\colon B_j = C_j \bigsqcup \left(\bigsqcup_{\mu=1}^{\mu_j} E_{j\mu}\right)$$

Следовательно, следующий набор множеств представляет требуемое:

$$\{C_j\}_{j=1}^{M} \bigsqcup \{D_l\}_{l=1}^{r} \bigsqcup \left(\bigsqcup_{j=1}^{M} \bigsqcup_{\mu=1}^{\mu_j} E_{j\mu}\right)$$

Из этого набора можно составить любое B_j, поскольку:

$$\forall j = \overline{1, M},\ B_j = C_j \bigsqcup \left(\bigsqcup_{\mu=1}^{\mu_j} E_{j\mu}\right)$$

Следовательно, можно составить любое A_i и A_{k+1}, поскольку:

$$A_i = \bigsqcup_{j \in \Omega(i)} B_j,\ A_{k+1} = \Big(\bigsqcup_{j=1}^{M} C_j\Big) \bigsqcup \left(\bigsqcup_{l=1}^{r} D_l\right)$$

Остается проверить, что они не пересекаются: так как не пересекались $B_j \Rightarrow E_{j\mu}$ - не пересекаются, следовательно все $E_{j\mu}$ не пересекаются с C_j, так как при одном и том же j имеем дизъюнктное объединение, а при разных j они лежат в разных B_j и не пересекаются между собой. Также они не пересекаются с D_l, так как D_l лежат в A_{k+1} и они не пересекаются с B_j.

■

Rm: 5. В дальнейшем при использовании леммы 2, всегда будем считать что:

$$\{B_j\}_{j=1}^{M}\colon \bigsqcup_{i=1}^{k} \Omega(i) = \{1, \dots, M\}$$

Таким образом, нет паразитных множеств, которые не входят ни в какое-то объединение.