Мера Лебега и Жордана

Пусть S - полукольцо с единицей E, m - σ-аддитивная мера на S, $\mathcal{R}(S)$ - минимальная алгебра, содержащая S, ν - продолжение m на $\mathcal{R}(S)$ (поскольку $\mathcal{R}(S)$ это алгебра $\Rightarrow \mathcal{R}(S)$ это кольцо).

Опр: 1. В рамках условий выше, если $A \subseteq E$, то определим внешнюю меру Лебега:

$$\mu^*(A) = \inf_{\mathrm{I}(A)} \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n),\ \mathrm{I}(A) = \left\{A_1, \ldots, A_n, \ldots \in S \colon A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right\}$$

Опр: 2. В рамках условий выше, если $A \subseteq E$, то определим внешнюю меру Жордана:

$$\mu_J^*(A) = \inf_{\mathrm{I}(A)} \sum_{i=1}^{n} m(A_i),\ \mathrm{I}(A) = \left\{A_1, \ldots, A_n \in S \colon A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i\right\}$$

Теорема 1. Если $A, A_1, \ldots, A_n, \ldots \subseteq E$ и кроме того $A \subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, то верно:

$$\mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$$

справа допускается бесконечное значение. Для внешней меры Жордана, аналогичное неравенство справедливо для случая, когда $A \subseteq \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$.

□ Установим неравенство для внешней меры Лебега. Если сумма справа равна ∞, то утверждение очевидно. Пусть сумма конечна и задано некоторое $\varepsilon > 0$, тогда по определению:

$$\forall n,\ \exists \{C_{n,i}\}_{i=1}^{\infty} \subset S \colon A_n \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} C_{n,i},\ \sum_{i=1}^{\infty} m(C_{n,i}) < \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$$

Тогда будет верно:

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{\infty} C_{n,i} \Rightarrow \mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} m(C_{n,i}) < \sum_{n=1}^{\infty}\left(\mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) = \varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$$

Так как $\varepsilon > 0$ - произвольное, то отсюда вытекает утверждение теоремы. ■

Следствие 1. Если $A, B \subseteq E$, то справедлива следующаяя оценка:

$$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leq \mu^*(A \Delta B)$$

Для μ_J^* - аналогично.

□ Очевидно, что $A \subseteq (A \Delta B) \cup B \Rightarrow$ по предыдущей теореме будет верно:

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(A \Delta B) + \mu^*(B) \Leftrightarrow \mu^*(A) - \mu^*(B) \leq \mu^*(A \Delta B)$$

Поскольку A и B равноправны, то тоже самое можно было бы написать в варианте $B \subseteq (A \Delta B) \cup A$:

$$\mu^*(B) \leq \mu^*(A \Delta B) + \mu^*(A) \Leftrightarrow \mu^*(A) - \mu^*(B) \geq -\mu^*(A \Delta B)$$

Отсюда следует утверждение следствия. ■

Продолжение мер по Лебегу и Жордану

Опр: 3. Пусть $A \subseteq E$. Тогда скажем, что $A \in \mathcal{M}$ или A измеримо по Лебегу в том и только в том случае, когда:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A_\varepsilon \in \mathcal{R}(S) \colon \mu^*(A \Delta A_\varepsilon) < \varepsilon$$

Опр: 4. Пусть $A \subseteq E$. Тогда скажем, что $A \in \mathcal{M}_J$ или A измеримо по Жордану в том и только в том случае, когда:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A_\varepsilon \in \mathcal{R}(S) \colon \mu_J^*(A \Delta A_\varepsilon) < \varepsilon$$

Rm: 1. Очевидно, что если $A \in \mathcal{R}(S) \Rightarrow A \in \mathcal{M}$, $A \in \mathcal{M}_J$, поскольку оно само себя и аппроксимирует. Кроме того, так как: $\forall B$, $\mu^*(B) \leq \mu_J^*(B)$, то $\mathcal{M}_J \subseteq \mathcal{M}$.

Теорема 2. $\mathcal{M}$ - алгебра ($\mathcal{M}_J$ - алгебра).

□ Докажем теорему для $\mathcal{M}$, поскольку для $\mathcal{M}_J$ оно полностью аналогичное. Пусть $A, B \in \mathcal{M}$. Тогда:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A_\varepsilon, B_\varepsilon \in \mathcal{R}(S) \colon \mu^*(A \Delta A_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2} \wedge \mu^*(B \Delta B_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Имеет место следующее включение:

$$(A \cap B) \Delta (A_\varepsilon \cap B_\varepsilon) \subseteq (A \Delta A_\varepsilon) \cup (B \Delta B_\varepsilon)$$

где $(A_\varepsilon \cap B_\varepsilon) \in \mathcal{R}(S)$ поскольку $\mathcal{R}(S)$ - кольцо и выдерживает такие операции. Включение верно так, как если $a \in (A \cap B) \Delta (A_\varepsilon \cap B_\varepsilon)$, то точка либо принадлежит одновременно и A, и B, и не принадлежит хотя бы одному из A_ε или B_ε, либо $a \in (A_\varepsilon \cap B_\varepsilon)$ и не принадлежат хотя бы одному из A или B. Аналогично, рассмотрим симметрическую разность:

$$(A \Delta B) \Delta (A_\varepsilon \Delta B_\varepsilon) \subseteq (A \Delta A_\varepsilon) \cup (B \Delta B_\varepsilon)$$

где $(A_\varepsilon \Delta B_\varepsilon) \in \mathcal{R}(S)$ поскольку $\mathcal{R}(S)$ - кольцо и выдерживает такие операции. Включение верно так, как если $a \in (A \Delta B) \Delta (A_\varepsilon \Delta B_\varepsilon)$, то точка либо принадлежит ровно одному из четерых составляющих множеств: $A, B, A_\varepsilon, B_\varepsilon$, либо ровно трем множествам, например, если $A \cap B \cap A_\varepsilon \neq \varnothing$. И тогда точка будет точно принадлежать множеству $(A \Delta A_\varepsilon) \cup (B \Delta B_\varepsilon)$. Следовательно по теореме 1:

$$\mu^*((A \cap B) \Delta (A_\varepsilon \cap B_\varepsilon)) \leq \mu^*(A \Delta A_\varepsilon) + \mu^*(B \Delta B_\varepsilon) < \varepsilon$$

Аналогично, получаем:

$$\mu^*((A \Delta B) \Delta (A_\varepsilon \Delta B_\varepsilon)) \leq \mu^*(A \Delta A_\varepsilon) + \mu^*(B \Delta B_\varepsilon) < \varepsilon$$

Отсюда $\mathcal{M}$ - кольцо, а поскольку $E \in \mathcal{M}$, так как $\mathcal{R}(S)$ - минимальная алгебра, $E \in \mathcal{R}(S)$ и единицей можно аппроксимировать саму себя $\Rightarrow \mathcal{M}$ - алгебра. Аналогично для меры Жордана. ■

Теорема 3. μ^* - мера на $\mathcal{M}$ (μ_J^* - мера на $\mathcal{M}_J$).

□ Пусть $A = B \bigsqcup C$, $B, C \in \mathcal{M} \Rightarrow A \in \mathcal{M}$ (поскольку $\mathcal{M}$ это алгебра). Тогда по теореме 1:

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(B) + \mu^*(C)$$

Пусть $\varepsilon > 0$, поскольку $B, C \in \mathcal{M}$, то по определению:

$$\exists\, B_\varepsilon, C_\varepsilon \in \mathcal{R}(S)\colon \mu^*(B\Delta B_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{6},\ \mu^*(C\Delta C_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{6}$$

Заметим, что $A\Delta(B_\varepsilon \cup C_\varepsilon) \in \mathcal{R}(S)$ и выполнено:

$$A\Delta(B_\varepsilon \cup C_\varepsilon) \subseteq (B\Delta B_\varepsilon) \cup (C\Delta C_\varepsilon)$$

поскольку $A = B \bigsqcup C$. Немного сложнее понять про $B_\varepsilon \cap C_\varepsilon \in \mathcal{R}(S)$:

$$B_\varepsilon \cap C_\varepsilon \subseteq (B\Delta B_\varepsilon) \cup (C\Delta C_\varepsilon)$$

Если $a \in B_\varepsilon \cap C_\varepsilon$, то эта точка не могла бы быть одновременно и в B, и в C, иначе они бы пересекались, но $B \cap C = \varnothing$. Тогда, если $a \in B \cap B_\varepsilon$, то $a \in C\Delta C_\varepsilon$ и аналогично для $a \in C \cap C_\varepsilon$. Отсюда, по теореме 1 снова получаем:

$$\mu^*(A\Delta(B_\varepsilon \cup C_\varepsilon)) \le \mu^*(B\Delta B_\varepsilon) + \mu^*(C\Delta C_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\mu^*(B_\varepsilon \cap C_\varepsilon) = \nu(B_\varepsilon \cap C_\varepsilon) \le \mu^*(B\Delta B_\varepsilon) + \mu^*(C\Delta C_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{3}$$

где равенство слева верно в силу того, что $B_\varepsilon \cap C_\varepsilon \in \mathcal{R}(S)$ и утверждения 5 лекции 2. Используя следствие 1, мы получим:

$$\mu^*(A) \ge \mu^*(B_\varepsilon \cup C_\varepsilon) - \mu^*(A\Delta(B_\varepsilon \cup C_\varepsilon)) = \nu(B_\varepsilon \cup C_\varepsilon) - \mu^*(A\Delta(B_\varepsilon \cup C_\varepsilon)) \ge \nu(B_\varepsilon \cup C_\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{3}$$

Поскольку $B_\varepsilon \cup C_\varepsilon = B_\varepsilon \sqcup (C_\varepsilon \setminus (B_\varepsilon \cap C_\varepsilon))$, то можно видеть, что:

$$\nu(B_\varepsilon \cup C_\varepsilon) = \nu(B_\varepsilon) + \nu(C_\varepsilon \setminus (B_\varepsilon \cap C_\varepsilon)) = \nu(B_\varepsilon) + \nu(C_\varepsilon) - \nu(B_\varepsilon \cap C_\varepsilon)$$

где равенство верно по определению меры ν на $\mathcal{R}(S)$. Тогда:

$$\mu^*(A) \ge \nu(B_\varepsilon \cup C_\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{3} = \nu(B_\varepsilon) + \nu(C_\varepsilon) - \nu(B_\varepsilon \cap C_\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{3} \ge \nu(B_\varepsilon) + \nu(C_\varepsilon) - \frac{2\varepsilon}{3}$$

Вернемся обратно к внешней мере и воспользуемся следствием 1:

$$\mu^*(A) \ge \nu(B_\varepsilon) + \nu(C_\varepsilon) - \frac{2\varepsilon}{3} = \mu^*(B_\varepsilon) + \mu^*(C_\varepsilon) - \frac{2\varepsilon}{3} \ge$$

$$\ge \mu^*(B) - \mu^*(B\Delta B_\varepsilon) + \mu^*(C) - \mu^*(C\Delta C_\varepsilon) - \frac{2\varepsilon}{3} \ge \mu^*(B) + \mu^*(C) - \varepsilon$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ - произвольное, отсюда вытекает, что:

$$\mu^*(A) \ge \mu^*(B) + \mu^*(C) \Rightarrow \mu^*(A) = \mu^*(B) + \mu^*(C)$$

Таким образом, для двух множеств доказана аддитивность. Если задано множество A:

$$A = \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k,\ A_k \in \mathcal{M} \Rightarrow A = \left(\bigsqcup_{k=2}^{n} A_k\right) \bigsqcup A_1,\ A_1 \in \mathcal{M}, \bigsqcup_{k=2}^{n} A_k \in \mathcal{M} \Rightarrow \mu^*(A) = \mu^*(A_1) + \mu^*\left(\bigsqcup_{k=2}^{n} A_k\right)$$

Продолжая этот процесс, получим в итоге, что:

$$\mu^*(A) = \mu^*(A_1) + \mu^*\left(\bigsqcup_{k=2}^{n} A_k\right) = \ldots = \sum_{k=1}^{n} \mu^*(A_k)$$

■

Обозначение: Для $A \in \mathcal{M}$ положим $\mu(A) = \mu^*(A)$ и назовем μ - мерой Лебега.

Обозначение: Для $A \in \mathcal{M}_J$ положим $\mu_J(A) = \mu_J^*(A)$ и назовем μ_J - мерой Жордана.

Теорема 4. Множество $\mathcal{M}$ - σ-алгебра (для $\mathcal{M}_J$ - не верно).

□ Пусть $A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \mathcal{M}$ и $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, надо проверить, что $A \in \mathcal{M}$. Введем множества :

$$B_1 = A_1,\, \forall i > 1,\, B_i = A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j$$

Тогда все элементы $B_i \in \mathcal{M}$, потому что $\mathcal{M}$ - алгебра, при этом $A = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$. Заметим, что тогда:

$$\forall N,\, \bigsqcup_{n=1}^{N} B_n \subseteq A \Rightarrow \mu^*(A) \geq \mu^*\left(\bigsqcup_{n=1}^{N} B_n\right) = \sum_{n=1}^{N} \mu^*(B_n) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(B_n) < \infty$$

где равенство выше верно в силу аддитивности внешней меры (доказали выше, что это мера на $\mathcal{M}$), а сходимость ряда следует из того, что неравенство верно для любого N. Теперь, если задано $\varepsilon > 0$, то подберем номер N таким образом, что:

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \mu^*(B_n) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Поскольку $\mathcal{M}$ - алгебра, то воспользовавшись определнием измеримости по Лебегу получим:

$$\bigsqcup_{n=1}^{N} B_n \in \mathcal{M} \Rightarrow \exists\, C_\varepsilon \in \mathcal{R}(S)\colon \mu^*\left(\left(\bigsqcup_{n=1}^{N} B_n\right) \Delta C_\varepsilon\right) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Рассмотрим $A \Delta C_\varepsilon$, будет верно:

$$A \Delta C_\varepsilon \subseteq \left(\left(\bigsqcup_{n=1}^{N} B_n\right) \Delta C_\varepsilon\right) \bigcup \left(\bigsqcup_{n=N+1}^{\infty} B_n\right)$$

Тогда по теореме 1 утверждается, что:

$$\mu^*(A \Delta C_\varepsilon) \leq \mu^*\left(\left(\bigsqcup_{n=1}^{N} B_n\right) \Delta C_\varepsilon\right) + \sum_{n=N+1}^{\infty} \mu^*(B_n) < \varepsilon$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ - произвольное, то $A \in \mathcal{M}$ по определению $\Rightarrow \mathcal{M}$ является σ-алгеброй. ■

Теорема 5. μ это σ-аддитивная мера на $\mathcal{M}$.

□ Пусть $A = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, $\forall n,\, A_n \in \mathcal{M}$. Тогда, по теореме 1:

$$\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

С другой стороны, так как μ это просто мера, то согласно следствию 1 из лекции 2 вытекает обратное неравенство:

$$\mu(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

■

Теорема 6. Если $A \in \mathcal{M}_J$, то $\mu(A) = \mu_J(A)$.

Rm: 2. В общем случае, для внешних мерах это не так.

□ Всегда $\mu^*(A) \leq \mu_J^*(A) \Rightarrow \mu(A) \leq \mu_J(A)$. Подберем для заданного $\varepsilon > 0$ множество $A_\varepsilon \in \mathcal{R}(S)$:

$$\mu_J^*(A\Delta A_\varepsilon) = \mu_J(A\Delta A_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \mu(A\Delta A_\varepsilon) = \mu^*(A\Delta A_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Поэтому $\mu_J(A) \leq \mu_J(A_\varepsilon) + \dfrac{\varepsilon}{2}$ по следствию 1, тогда:

$$\mu_J(A) \leq \mu_J(A_\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2} = \nu(A_\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2} = \mu(A_\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2} < \mu(A) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \mu(A) + \varepsilon$$

где равенство верно в силу утверждения 5 лекции 2. Так как $\varepsilon > 0$ - произвольное, то $\mu_J(A) \leq \mu(A)$. ■

Следствие 2. Мера Жордана μ_J σ-аддитивна на $\mathcal{M}_J$.

□ Поскольку $\mu = \mu_J$, а мера Лебега σ-аддитивна. ■

Опр: 5. Если полукольцо и мера равны соответственно:

$$S = \left\{\{\alpha, \beta\} \colon \{\alpha, \beta\} \subseteq [a, b] = \prod_{j=1}^{m} [a_j, b_j]\right\} \wedge m(\{\alpha, \beta\}) = \prod_{j=1}^{n} (\beta_j - \alpha_j)$$

то получившиеся продолжением m по Лебегу и по Жордану меры на $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}_J$ будем называть классическими мерами Лебега и Жордана соответственно.

Rm: 3. Классические меры Лебега и Жордана инвариантны относительно сдвигов, точнее:

$$A \subseteq [a, b] \subset R^n,\ t \in R^n \colon A + t = \{x + t \colon x \in A\} \subseteq [a, b] \Rightarrow A \in \mathcal{M} \Leftrightarrow A + t \in \mathcal{M}$$

причем, если $\in$, то $\mu(A) = \mu(A + t)$. Это вытекает из соответствующего свойства функции m на S.

Меры Лебега-Стильтьеса

Ограничимся случаем $\mathbb{R}^1$. Пусть φ - неубывающая, ограниченная, непрерывная слева функция на $\mathbb{R}$. Формально определим:

$$\varphi(-\infty) = \lim_{x\to-\infty}\varphi(x), \quad \varphi(+\infty) = \lim_{x\to+\infty}\varphi(x)$$

они существуют в силу ограниченности и монотонности. Пусть также:

$$S = \varnothing \sqcup \{[a,b)\colon -\infty \le a \le b \le +\infty \land [-\infty, b) = (-\infty, b)\}$$

Тогда S - полукольцо с единицей: $E = (-\infty, +\infty)$. Определим функцию $m\colon S \to [0,+\infty)$ следующим образом:

$$m([\alpha,\beta)) = \varphi(b) - \varphi(a)$$

Теорема 7. m это σ-аддитивная мера на S.

$\square$ Проверим,что m - мера. Если $[a,b) = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n}[a_k,b_k)$, то можно считать, что:

$$a = a_1 < b_1 = a_2 < b_2 = a_3 < \ldots < b_n = b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m([a,b)) = \varphi(b) - \varphi(a) = \sum_{k=1}^{n}(\varphi(b_k) - \varphi(a_k)) = \sum_{k=1}^{n} m([a_k, b_k)$$

следовательно m это просто мера.

Пусть $[a,b) = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n)$. Так как m - мера, то по следствию 1 лекции 2 мы получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty} m([a_n,b_n)) \le m([a,b))$$

Докажем обратное неравенство. Пусть вначале $-\infty < a < b < +\infty$ и задан некоторый $\varepsilon > 0$, тогда в силу непрерывности слева функции $\varphi(x)$:

$$\exists\, b' \in [a,b)\colon \varphi(b) < \varphi(b') + \frac{\varepsilon}{2}$$

Аналогично, пользуясь непрерывностью слева:

$$\forall n,\, \exists\, a_n' < a_n\colon \varphi(a_n) < \varphi(a_n') + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$$

Заметим:

$$[a,b'] \subseteq [a,b) = \bigsqcup_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n',b_n) \Rightarrow \exists\, N\colon [a,b') \subseteq [a,b'] \subseteq \bigcup_{n=1}^{N}(a_n',b_n) \subseteq \bigcup_{n=1}^{N}[a_n',b_n)$$

где справа верно в силу компактности $[a,b']$. По утверждению 1 лекции 2 мы имеем следующее:

$$m([a,b')) \le \sum_{n=1}^{N} m([a_n',b_n))$$

Таким образом:

$$m([a,b))-\frac{\varepsilon}{2}=\varphi(b)-\varphi(a)-\frac{\varepsilon}{2}<\varphi(b')-\varphi(a)=m([a,b'))\le\sum_{n=1}^{N}m([a'_n,b_n))=$$

$$=\sum_{n=1}^{N}(\varphi(b_n)-\varphi(a'_n))<\sum_{n=1}^{N}(\varphi(b_n)-\varphi(a_n)+\frac{\varepsilon}{2^{n+1}})\le\sum_{n=1}^{N}m([a_n,b_n))+\frac{\varepsilon}{2}\le\sum_{n=1}^{\infty}m([a_n,b_n))+\frac{\varepsilon}{2}$$

Следовательно:

$$m([a,b))<\sum_{n=1}^{\infty}m([a_n,b_n))+\varepsilon$$

Поскольку $\varepsilon>0$ - произвольное, то:

$$m([a,b))\le\sum_{n=1}^{\infty}m([a_n,b_n))$$

Пусть $-\infty=a<b<\infty$ и $(-\infty,b)=\bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n)$ тогда:

$$\forall k<b,\ [k,b)=\bigsqcup_{n=1}^{\infty}\left([a_n,b_n)\cap[k,b)\right)$$

По определению $\varphi(-\infty)$ имеем:

$$m((-\infty,b))=\varphi(b)-\varphi(-\infty)=\lim_{k\to-\infty}\left(\varphi(b)-\varphi(k)\right)=\lim_{k\to-\infty}m([k,b))\le$$

$$\le\lim_{k\to-\infty}\sum_{n=1}^{\infty}m\left([a_n,b_n)\cap[k,b)\right)\le\lim_{k\to-\infty}\sum_{n=1}^{\infty}m([a_n,b_n))=\sum_{n=1}^{\infty}m([a_n,b_n))$$

где первое неравенство следует из доказанного выше. Аналогично для $b=+\infty$. ■

Опр: 6. Мерой Лебега-Стильтьеса, построенной по $\varphi(x)$ называется Лебеговское продолжение меры m.