

EXERCÍCIO COMPUTACIONAL 01

Método das Diferenças Finitas

Natanael Magalhães Cardoso¹✉

¹nº USP: 8914122

✉ natanael.mc@usp.br

Data de submissão: 12 de julho de 2021

RESUMO: Neste relatório é mostrado os principais resultados do primeiro exercício programa

1. METODOLOGIA

1.1. DESCRIÇÃO DO PROGRAMA

A implementação do programa segue o paradigma de programação funcional. Isto é, o algoritmo é composto por funções puras que dependem apenas de seus parâmetros de entrada e não causam efeitos colaterais no estado do programa. Isto facilita a depuração do programa pela inspeção de cada função separadamente. Já que cada função faz apenas uma tarefa.

A lista a seguir mostra as três funções principais do programa, bem como seus parâmetros de entrada e seus retornos.

1. `template1(k, initial_value) ↦ (T)`

`template2(k, initial_value) ↦ (T)`

Estas funções recebem um parâmetro k , que é a constante de escalonamento da matriz. Todas as dimensões da matriz são multiplicadas por esta constante. Quanto maior o valor de k , maior a matriz e menor o tamanho do lado da malha de discretização. O lado h da malha de discretização vale $h = 1/k$. O parâmetro `initial_value` é o valor inicial de potencial. Esta função retorna uma matriz T a geometria e o estado inicial do problema. Locais preenchidos com vácuo são representados por indeterminação e são desprezados no cálculo das funções seguintes.

2. `compute_potential(template, axis, epochs, callbacks) ↦ (potential, history)`

Esta função recebe, na ordem de apresentação, um modelo, que é uma matriz que representa a estrutura do problema; o eixo de propagação; a quantidades de épocas, ou iterações, do algoritmo e uma lista de `callbacks`, que são funções que são executadas durante o processo de convergência. Ela uma tupla contendo a matriz de potencial e o histórico de erro, contendo o valor do erro para cada época.

3. `compute_ef(potential, h) ↦ (Ex, Ey)`

Esta função recebe a matriz de potencial, calculada por `compute_potential`, e a altura h de cada célula e retorna uma tupla de matrizes (E_x, E_y) , que correspondem às componentes horizontais e verticais do campo elétrico, respectivamente.

4. `compute_resistance(V, l, h, conductivity, Ex, Ey, axis) \mapsto resistance`

Esta função recebe, na ordem de apresentação, uma diferença de potencial V ; o valor da espessura da placa l ; o comprimento h de cada célula da malha de discretização; o valor da condutância; os potenciais Ex e Ey calculados pela função `compute_ef` e o eixo de propagação. Ela retorna um vetor do comprimento (ou largura) da placa com as resistências calculadas considerando cada linha (ou coluna) de Ey (ou Ex). O valor considerado depende do eixo de propagação.

Para calcular a resistência do problema, as funções são chamadas na ordem mostrada. As funções de visualização não foram descritas mas estão disponíveis no código-fonte.

1.2. INSPEÇÃO DA MATRIZ INICIAL DE POTENCIAL

O passo preliminar é a criação da matriz de potencial com os valores iniciais. A Figura 1 mostra dois gráficos criados para visualizar a matriz gerada pelas funções `template1` e `template2`. Este gráfico mapeia cada valor da matriz para uma cor específica. Esta análise foi feita para verificar se a matriz com os valores iniciais de potencial representa a geometria do problema corretamente. Por motivo de visualização, foi usado um valor de $k = 0.5$ e $k = 1$ para os gráficos da esquerda e da direita, respectivamente. Ou seja, cada unidade do gráfico da esquerda representa 2mm da geometria real, enquanto que cada unidade do gráfico da direita representa 1mm da geometria do problema.

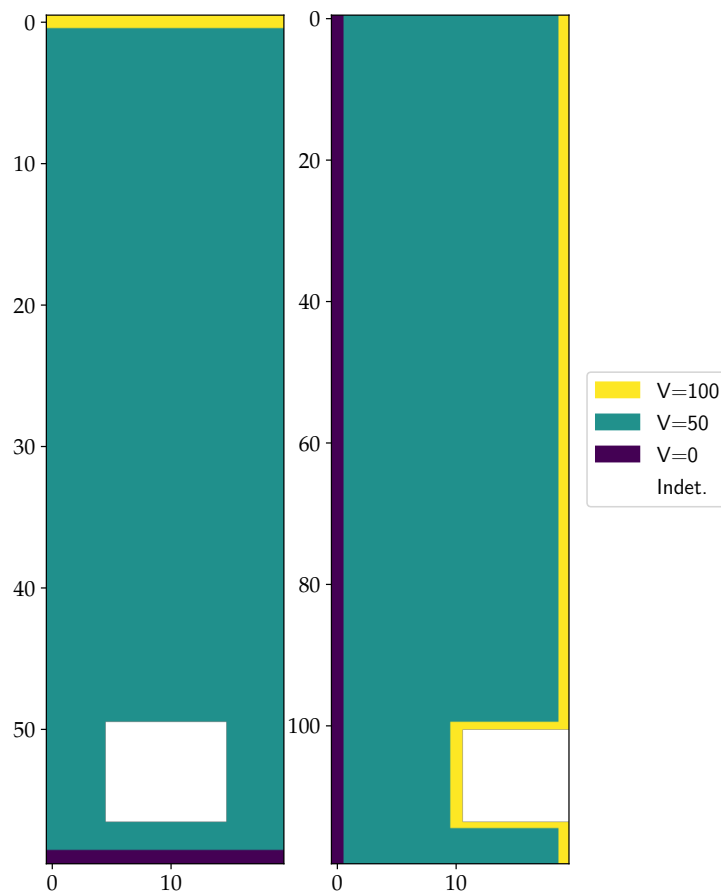


Figura 1: Mapa de cor das matrizes geradas pelas funções `template1` (esquerda) e `template2` (direita).

Notamos que existem quatro valores (representados pelas cores) distintos nas matrizes, re-

presentando os potenciais iniciais em volts, são eles 100, 50, 0 e indeterminado. Os valores 100V e 0V representam os potenciais dos eletrodos e o potencial 50V, que é o valor médio da DDP entre os eletrodos, é usado como valor inicial. Já o vácuo é representado por uma indeterminação e é mostrado na parte branca do gráfico.

Visto que as matrizes iniciais de potencial são coerentes com as geometrias dos problemas, é possível iniciar o algoritmo de diferenças finitas a partir delas. Os resultados gerados por este algoritmo são mostrados a seguir.

2. RESULTADOS, DISCUSSÃO E CONCLUSÃO

2.1. EQUIPOTENCIAIS

A Figura 2 mostra as equipotenciais para ambos os problemas, com $\Delta\varphi = 2V$ no gráfico da esquerda e $\Delta\varphi = 4V$ no gráfico da direita. Ambos com $k = 1$ (malha de discretização de 1mm), por motivos de visualização.

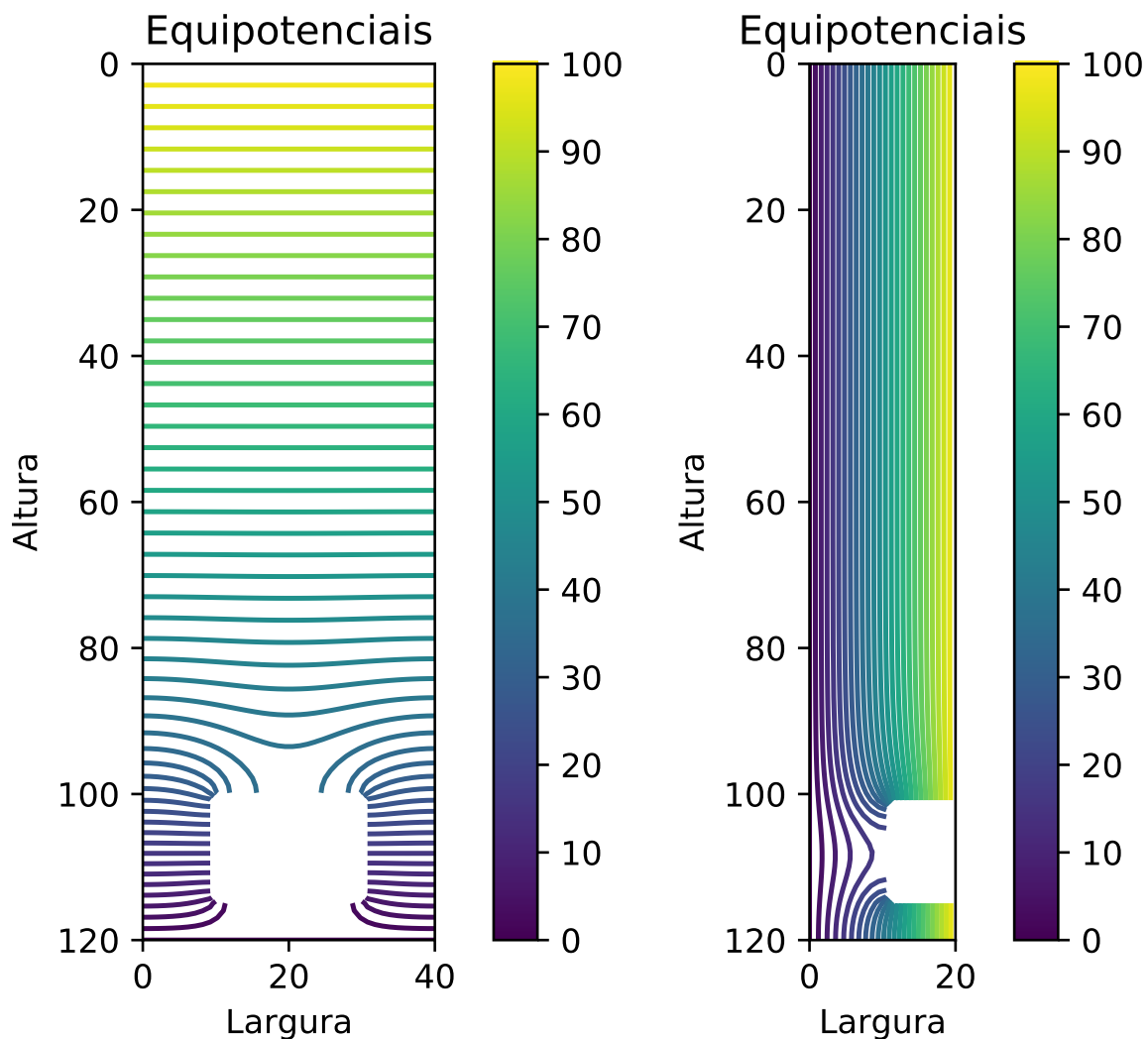


Figura 2: Equipotenciais para o Problema 1 (esquerda) e Problema 2 (direita).

2.2. LINHAS DE CAMPO

A Figura 3 mostra as linhas do campo elétrico calculadas nas mesmas condições das equipotenciais (malha de discretização de 1mm), também por motivo de visualização.

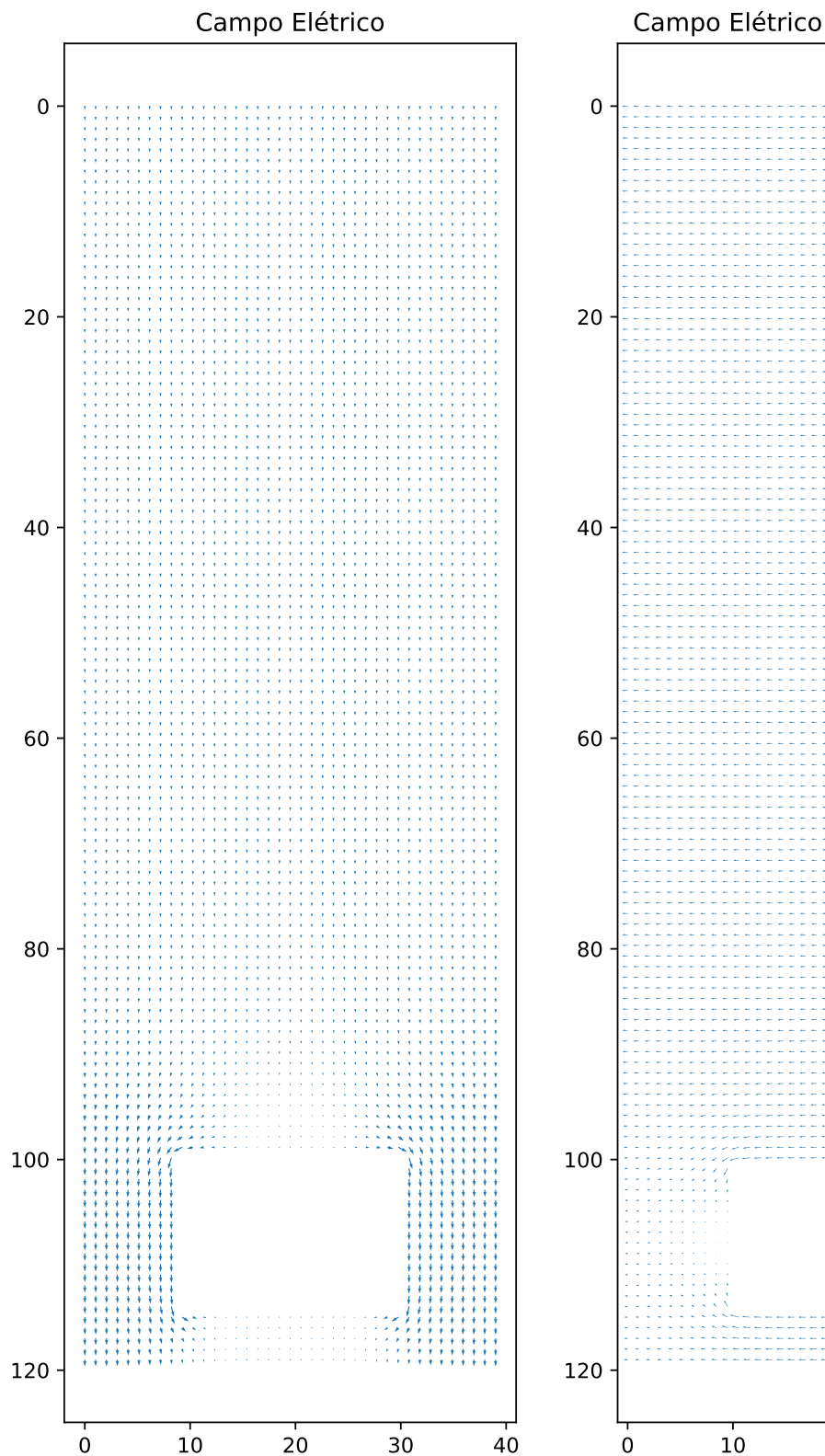


Figura 3: Linhas de campo para o Problema 1 (esquerda) e Problema 2 (direita).

2.3. RESISTÊNCIA

Para calcular a resistência foi usada uma malha de discretização de lado igual a 0.5mm ($k = 2$) para ambos os problemas. A matriz de potencial foi calculada considerando um valor máximo de erro quadrático igual a $1 \cdot 10^{-10}$. Nessas condições, a convergência foi atingida após 55890 épocas (ou iterações) para o Problema 1 e 2300 épocas para o Problema 2.

2.3.1 Erros parciais

As Figuras 4 e 5 mostram os valores dos erros quadráticos do potencial em função da época na escala log-log.

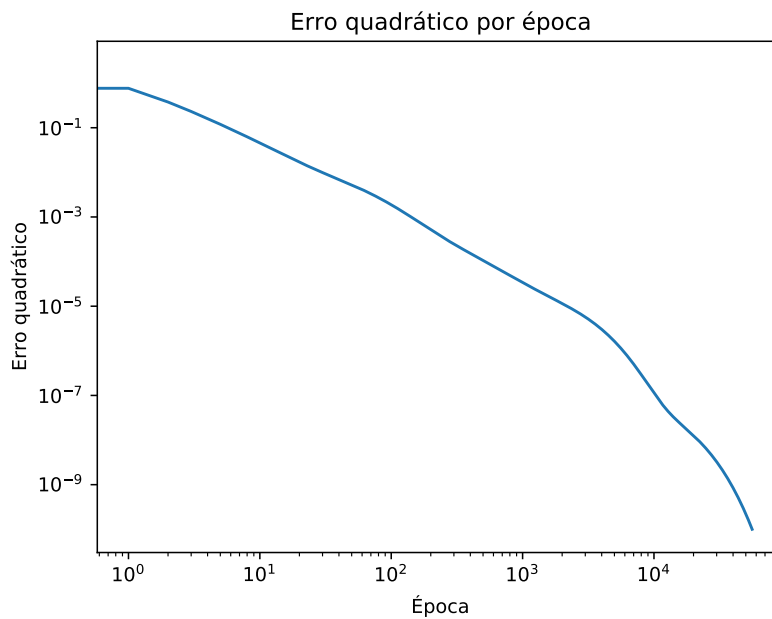


Figura 4: Gráfico log-log do valor do erro quadrático em função da época para o Problema 1.

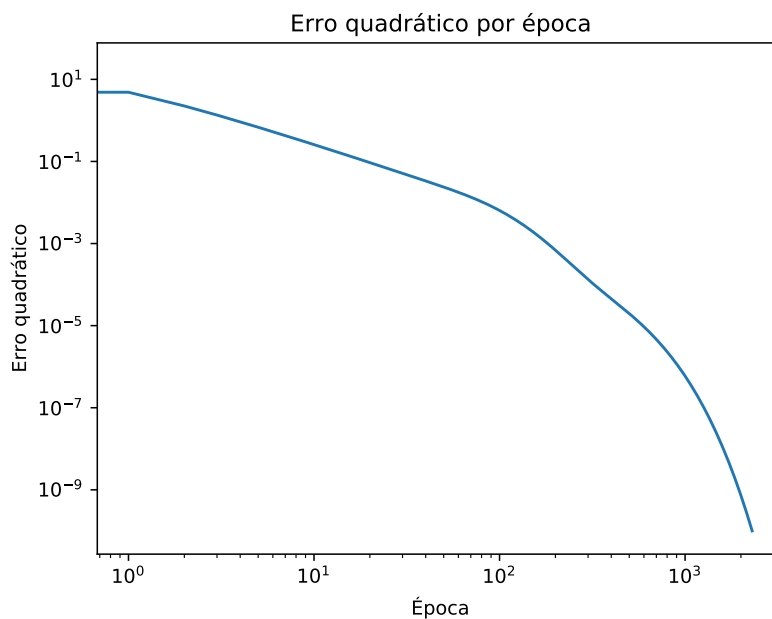


Figura 5: Gráfico log-log do valor do erro quadrático em função da época para o Problema 2.

2.3.2 Resistências parciais

Esta análise foi feita para associar o valor de resistência calculada a partir de linhas em diferentes alturas na placa do Problema 1 (template1). Isso é mostrado na Figura 6, onde a linha azul indica o valor da resistência e a linha vermelha indica a mediana (considerando todas as alturas). O eixo das abscissas indica a altura da placa considerada para o cálculo da resistência. Estes gráficos foram gerados a partir de um template com $k = 2$, ou seja, uma malha de discretização de lado $h = 1/k = 0.5mm$. Isto é, cada ponto deste eixo no gráfico representa 0.5mm da objeto real.

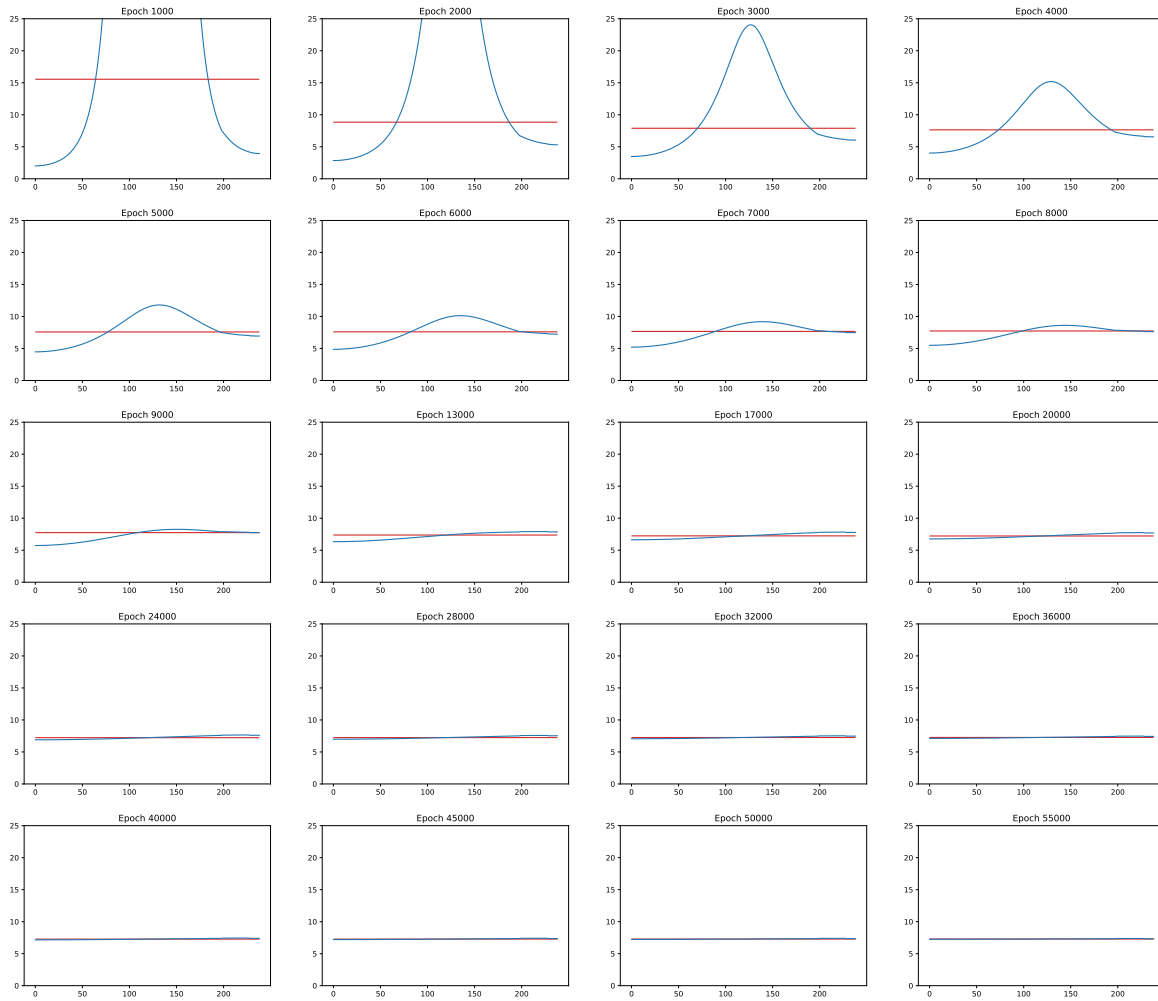


Figura 6: Valores de resistência para diferentes épocas (iterações)).

2.3.3 Resistências finais

As Figuras 7 e 8 mostram os valores de resistência calculados em função da altura (Problema 1) ou largura (Problema 2) da placa. As linhas vermelhas indicam a mediana considerando todas as medições de resistência e as linhas verdes indicam a mediana considerando apenas medições antes da região preenchida com vácuo ($y < k[b - (d + e)] = 200$ para o Problema 1 e $x < k[(a - c)/2] = 20$ para o Problema 2). Esta última será considerada como resposta final.

Assim, considerando o valor do estimador mediana amostral, chega-se à conclusão que o valor da resistência para o Problema 1 é $R \approx 7.28\Omega$ e para o Problema 2 é $R \approx 0.36\Omega$.

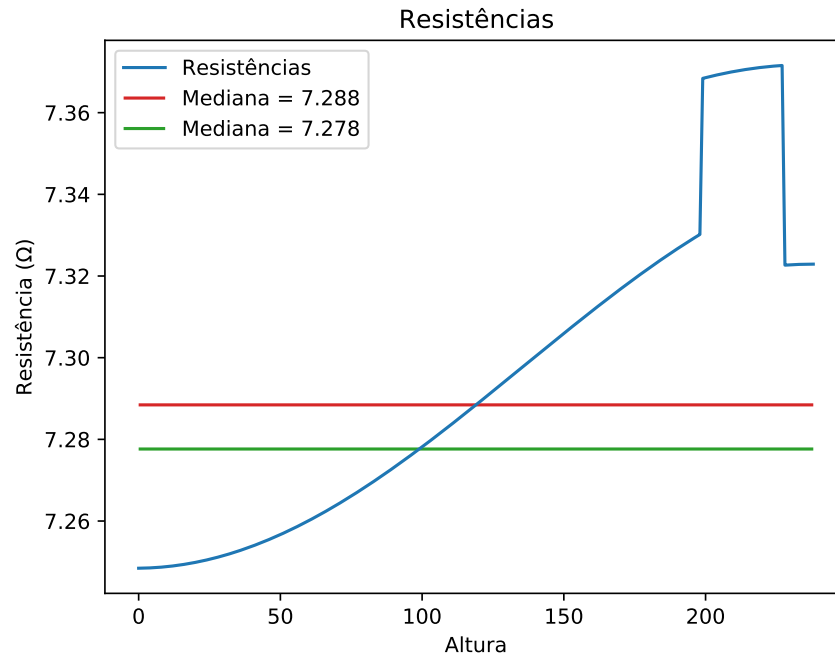


Figura 7: Valores de resistência do Problema 1 em função da altura da placa na última época (55890).

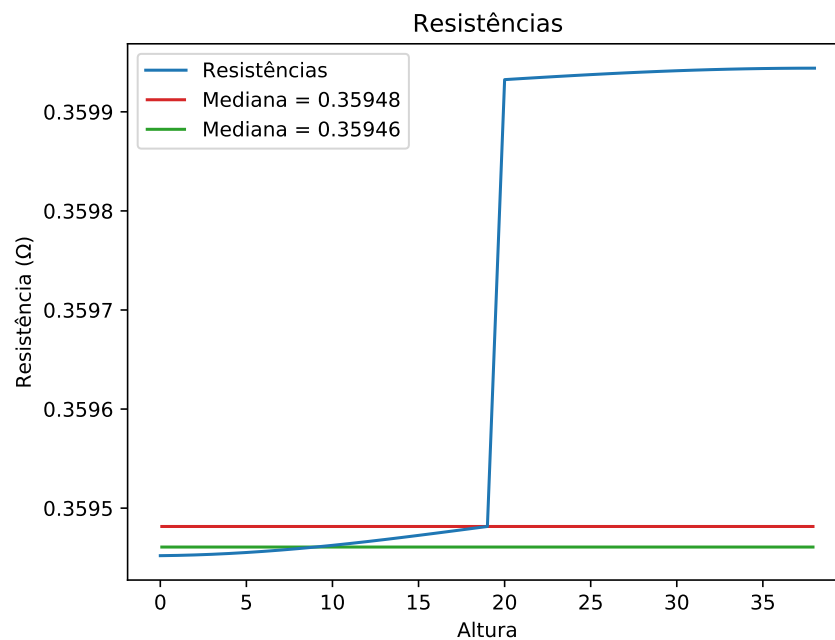


Figura 8: Valores de resistência do Problema 2 em função da altura da placa na última época (2300).