

# EXERCÍCIO COMPUTACIONAL 02

## *Método dos Momentos*

---

Natanael Magalhães Cardoso<sup>1</sup>

<sup>1</sup>nº USP: 8914122

**Professor:** Murilo Hiroaki Seko

**Data de submissão:** 31 de julho de 2021

---

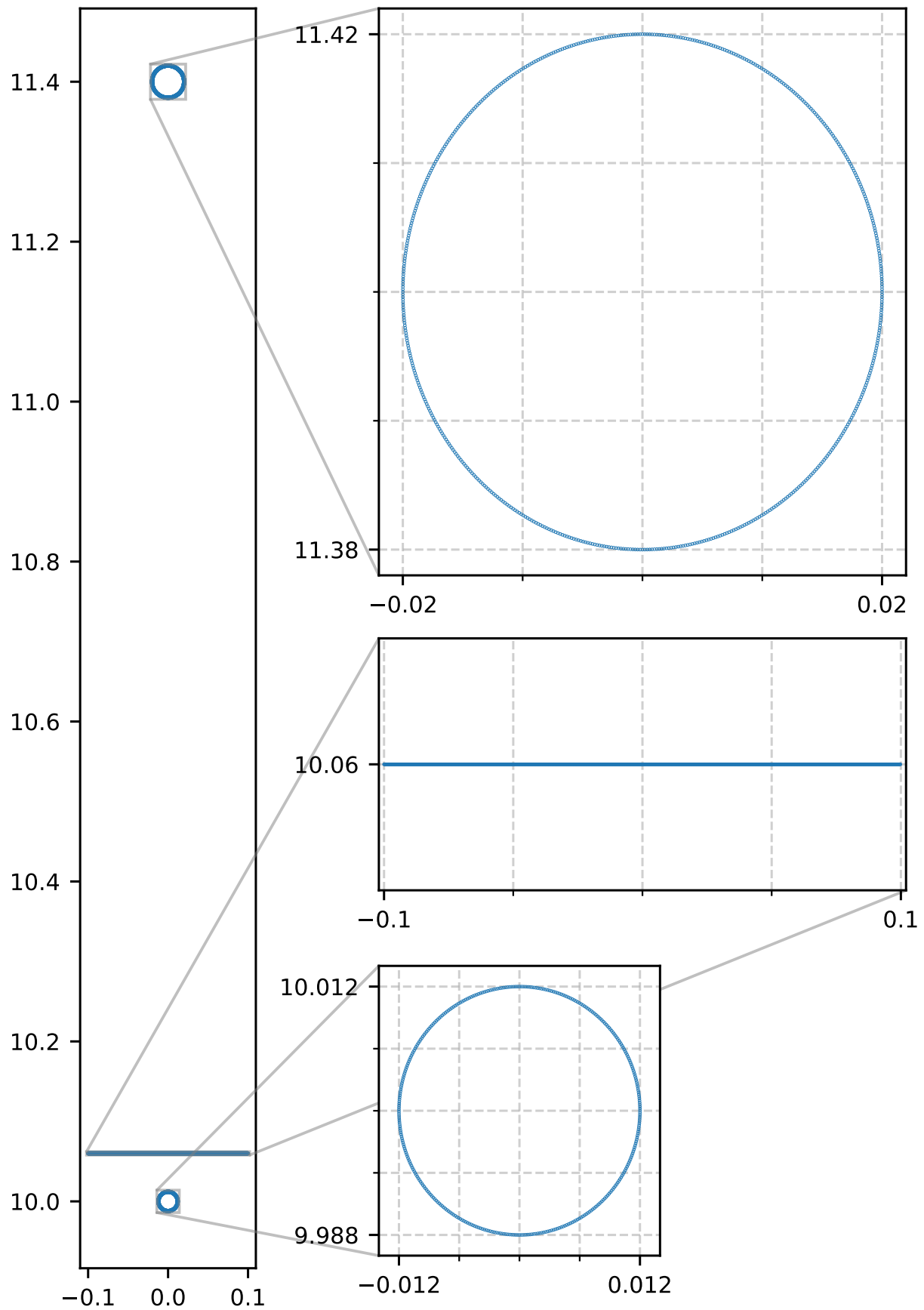
---

## 1. MATRIZ DE CAPACITÂNCIAS $[C']_3$

---

### 1.1. INSPEÇÃO DA REPRESENTAÇÃO COMPUTACIONAL DO SISTEMA

A implementação deste algoritmo representa a geometria do problema por uma matriz. Antes de executá-lo para calcular algum valor, é importante verificar se a geometria do sistema está devidamente representada pela matriz. O diagrama da Figura 1 mostra a forma geral da matriz, no painel à esquerda, e os limites das posições dos corpos, nos painéis à direita.

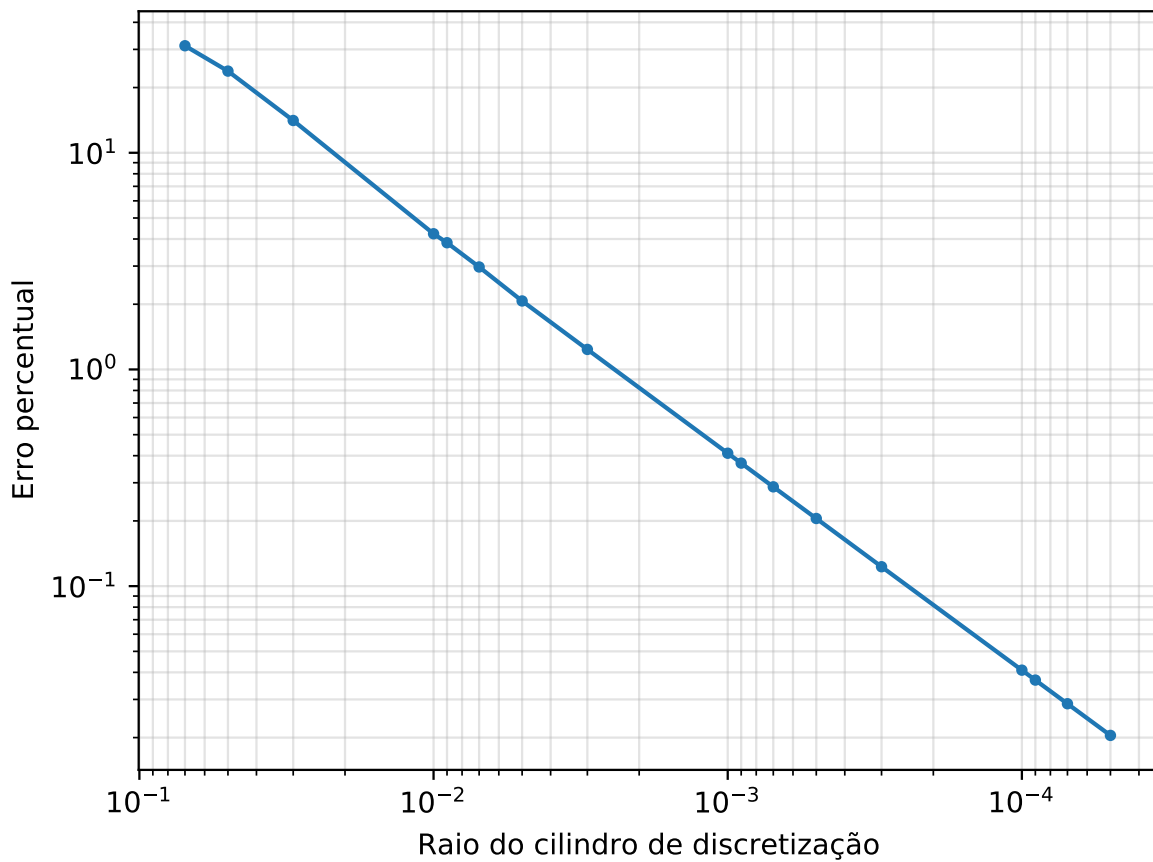


**Figura 1:** Visualização da matriz do sistema. O painel da esquerda mostra a geometria da matriz do sistema e os da direita mostram os corpos 1, 2 e 3 (de baixo para cima) em escala aumentada. Os pontos azuis indicam os cilindros de raio  $b = 1 \cdot 10^{-4}$ .

## 1.2. CALIBRAÇÃO DO RAIOS DOS CILINDROS DE DISCRETIZAÇÃO

Nesta implementação do algoritmo do Métodos dos Momentos, os corpos são discretizados por pequenos cilindros. A acurácia do resultado numérico calculado (da aproximação calculada) pelo algoritmo é tão melhor quanto menor for o tamanho deste raio. Sendo assim, uma calibração do raio foi feita para validar que a aproximação calculada seja suficientemente próxima ao valor real. Nesta calibração, é ajustado um valor para o raio tal que o erro percentual, calculado a partir da equação (1), entre o valor estimado e o teórico seja menor que 0.5%. A Figura 2 mostra este erro percentual em função do raio dos cilindros de discretização. O menor erro percentual obtido foi de 0.0205% para o raio de discretização  $b = 5 \cdot 10^{-5}$ .

$$\text{Erro percentual} = \left| \frac{C_{teo} - C_{calc}}{C_{teo}} \right| \quad (1)$$



**Figura 2:** Gráfico log-log (com o eixo  $x$  invertido) do erro percentual entre o valor da capacitância no corpo 1 calculado pelo algoritmo e o valor teórico em função do raio do cilindro de discretização.

## 1.3. RESULTADO DO ALGORÍTMO

A matriz de capacitâncias, calculada pelo algoritmo com um raio de discretização  $b = 5 \cdot 10^{-5}$ , é mostrada na equação (2).

$$[C']_3 = \begin{bmatrix} 23.394 & -20.812 & -0.869 \\ -20.812 & 29.882 & -3.703 \\ -0.869 & -3.703 & 9.699 \end{bmatrix} \text{ nF} \quad (2)$$

## 2. DIAGRAMA ELÉTRICO DE $[C']_3$

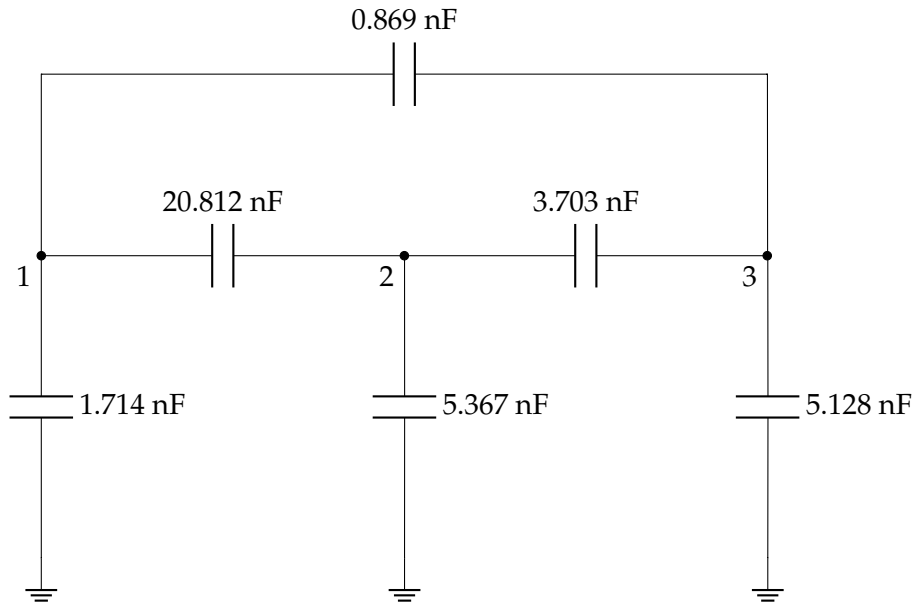
O modelo de circuito elétrico com parâmetros concentrados é obtido de  $[C']_3$ , da equação (2), onde a capacitância  $C_{ki}$  é calculada pela relação (3).

$$C_{ki} = \begin{cases} \sum_{j=1}^N C'_{kj}, & \text{se } i = 0 \\ -C'_{ki}, & \text{se } i \neq k \end{cases} \quad (3)$$

Das equações (2) e (3), calcula-se

$$\begin{aligned} C_{10} &= 1.714 \text{ nF} & C_{12} &= C_{21} = 20.812 \text{ nF} \\ C_{20} &= 5.367 \text{ nF} & C_{13} &= C_{31} = 0.869 \text{ nF} \\ C_{30} &= 5.128 \text{ nF} & C_{23} &= C_{32} = 3.703 \text{ nF} \end{aligned}$$

A partir dos valores acima, pode-se montar o diagrama do circuito elétrico correspondente ao sistema, como mostrado na Figura 3.



**Figura 3:** Diagrama elétrico do sistema.

## 3. MATRIZ DE CAPACITÂNCIAS $[C']_2$

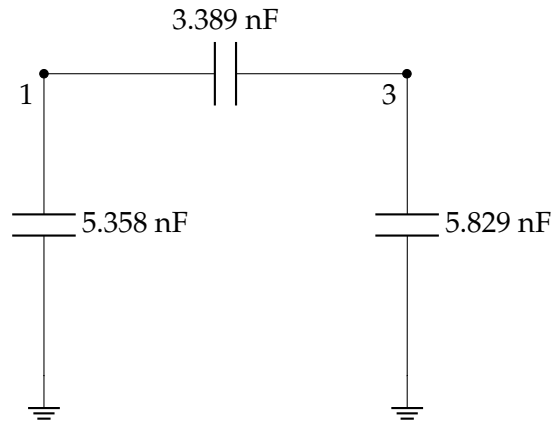
A matriz de capacitâncias  $[C']_2$ , calculada removendo o corpo 2 do sistema definido anteriormente, está representada na equação (4).

$$[C']_2 = \begin{bmatrix} 8.747 & -3.389 \\ -3.389 & 9.218 \end{bmatrix} \text{ nF} \quad (4)$$

Usando a equação (3) para o cálculo da capacitância com parâmetros concentrados e a equação (4), calcula-se

$$\begin{aligned}C_{10} &= 5.358 \text{ nF} \\C_{30} &= 5.829 \text{ nF} \\C_{13} = C_{31} &= 3.389 \text{ nF}\end{aligned}$$

Assim, o diagrama elétrico do circuito é mostrado na Figura 4.



**Figura 4:** Diagrama elétrico do sistema.

Os valores das capacitâncias entre os corpos 1 e 3 e entre os corpos 1 e 3 e a terra são alterados com a remoção do corpo 2. Ambas as capacitâncias aumentam, mas a capacitância do corpo 1, que estava mais perto do corpo 2, aumenta muito mais.

## 4. GERADOR THÉVENIN

### 4.1. CASO 1: CORPO 2 ATERRADO

O gerador de Thévenin para este caso pode ser calculado a partir do diagrama elétrico da Figura 3. Na Figura 5, os ramos em vermelho serão desconsiderados por conta do curto circuito, em azul.

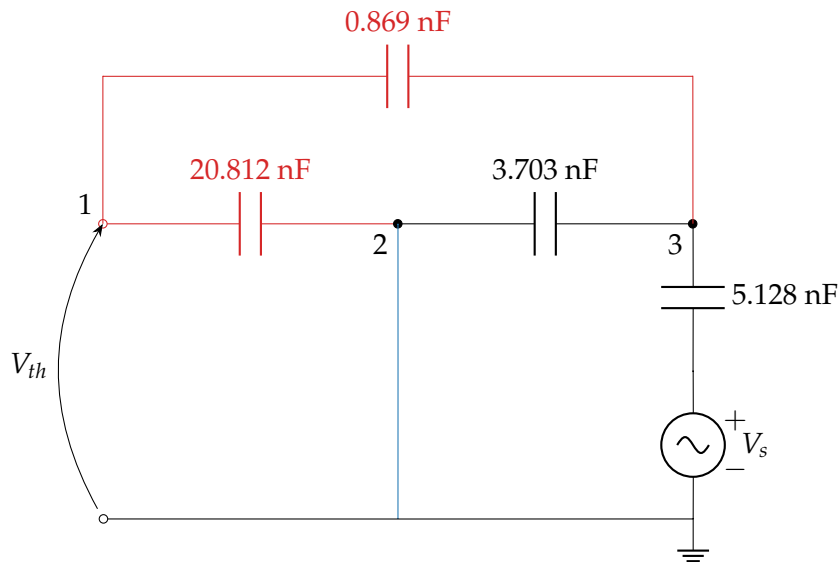


Figura 5: Diagrama elétrico do sistema.

O diagrama elétrico após as simplificações é mostrado na Figura 6.

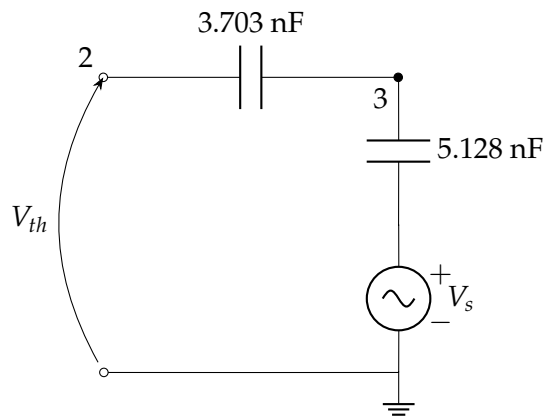


Figura 6: Diagrama elétrico simplificado.

Calculando a impedância de cada bipolo e a impedância equivalente

$$Z_{23} = \frac{1}{j\omega C_{23}} = -j716.33 = 716.33 \angle -90^\circ \text{ k}\Omega \quad (5)$$

$$Z_{30} = \frac{1}{j\omega C_{30}} = -j517.27 = 517.27 \angle -90^\circ \text{ k}\Omega \quad (6)$$

$$Z_{eq} = Z_{23} + Z_{30} = -j1233.6 \text{ k}\Omega = 1233.6 \angle -90^\circ \text{ k}\Omega \quad (7)$$

Calculando a corrente do circuito e a tensão de Thévenin, considerando que o potencial  $a$  é a tensão de saída do bipolo  $C_{23}$

$$I = \frac{V_s}{Z} = \frac{14\angle 0^\circ}{Z_{eq}} = \frac{14\angle 0^\circ}{1233.6\angle -90^\circ} = 11.31\angle 90^\circ \text{ mA} \quad (8)$$

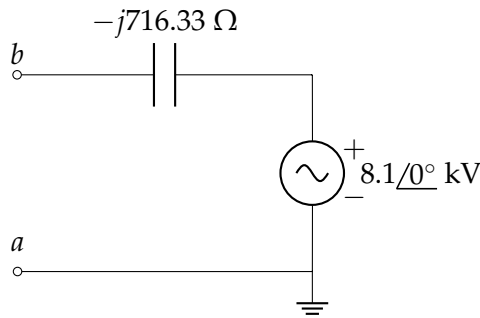
$$V_{ab} = V_{th} = I \cdot Z = (11.31\angle 90^\circ \text{ mA})(716.33\angle -90^\circ \text{ k}\Omega) = 8101.69\angle 0^\circ \text{ V} \quad (9)$$

Calculando a corrente de curto circuito e a impedância de Thévenin, considerando que o tensão medida entre os terminais  $a$  e  $b$  de Thévenin já está em curto circuito e não possui queda de tensão

$$I_{sc} = I = 11.31\angle 90^\circ \text{ mA} \quad (10)$$

$$Z_{th} = \frac{V_{th}}{I_{sc}} = \frac{8101.69\angle 0^\circ}{11.31\angle 90^\circ} = 716.33\angle -90^\circ = -j716.33 \text{ k}\Omega \quad (11)$$

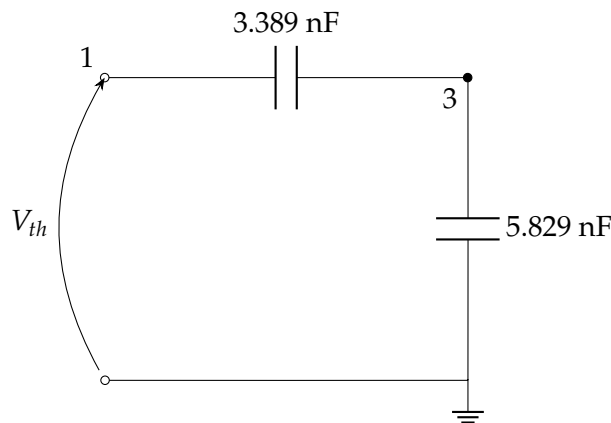
O Diagrama do Equivalente de Thévenin para o circuito é mostrado na Figura 7. Como a impedância de Thévenin  $Z_{th} = -j716.33 \text{ k}\Omega$  possui comportamento capacitivo, ela foi representada por um capacitor.



**Figura 7:** Equivalente Thévenin

## 4.2. CASOS 2 E 3: CORPO 2 ISOLADO/AUSENTE

O circuito usado para calcular o equivalente Thévenin para o corpo 2 ausente será baseado no diagrama gerado na Seção 3 e está ilustrado na Figura 8.



**Figura 8:** Diagrama elétrico do sistema.

Calculando a impedância de cada bipolo e a impedância equivalente

$$Z_{13} = \frac{1}{j\omega C_{13}} = -j782.7 = 782.7\angle -90^\circ \text{ k}\Omega \quad (12)$$

$$Z_{30} = \frac{1}{j\omega C_{30}} = -j455.07 = 455.07 \angle -90^\circ \text{ k}\Omega \quad (13)$$

$$Z_{eq} = Z_{13} + Z_{30} = -j1237.77 \text{ k}\Omega = 1237.77 \angle -90^\circ \text{ k}\Omega \quad (14)$$