Exercício Escrito 02

Método das Imagens: Capacitâncias Parciais

Natanael Magalhães Cardoso[1]

[1] *nº USP: 8914122*

Professor: Murilo Hiroaki Seko

Data de submissão: 19 de julho de 2021

1. Dados do Sistema

Tabela 1: Tabela com os dados do problema

Variável	Expressão	Valor (SI)
m	-	1
n	-	2
p	-	2
a	$2.5\left(\frac{m}{4}+1\right)$	3.125×10^{-3} m
d	-	0.3 m
h	$\frac{n}{2}+10$	11 m
l	-	1000 m
D	$\frac{p}{4}+1$	1.5 m

2. Matriz de Capacitâncias

2.1. Hipóteses

1. Pelos valores da Tabela 1, a seguinte relação é estabelecida: $2a \ll \min(d, D, \mathcal{H}_k)$, onde a é o raio de cada linha de transmissão, $\mathcal{H}_k$ é a altura da linha k em relação ao solo, D é a distância horizontal entre as linhas e d é a distância vertical entre as linhas. Como o diâmetro da linha é ≈ 50 vezes menor que a menor grandeza mensionada, as linhas de transmissão serão simplificados por linhas de carga imagens (retas) usando o método das imagens.
2. Um fio descarregado tem influência desprezível sobre o potencial produzido pelo outro.
3. As linhas de carga são uniformimente carregadas com cargas Q_i e $-Q_i$.

2.2. Equação do potencial e da elastância

O potencial φ devido a duas linhas de carga de comprimento l uniformemente carregadas com cargas Q_i e $-Q_i$ é aproximado pela expressão (1).

$$\varphi = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon} \ln\left(\frac{r_-}{r_+}\right) \quad \overset{\rho_L = Q/l}{\Rightarrow} \quad \varphi = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_{ar} l} \ln\left(\frac{r_-}{r_+}\right) \tag{1}$$

Como a equação (1) apresenta uma relação de φ e Q. As elastâncias S_{ki} serão calculadas pela relação V_k/Q_i, quando o eletrodo k tem potencial V_k e o eletrodo i tem carga Q_i e todos os outros eletrodos têm carga nula, como mostrado na equação (2).

$$S_{ki} = \left.\frac{V_k}{Q_i}\right|_{Q_n=0, n\neq i} \tag{2}$$

2.3. Caso 1: Cálculo de S_{ki} para $k = i$

Calculando S_{ki} com o eletrodo k sejuito a um potencial V_k para $i = k$ e considerando nula a carga dos demais eletrodos. Fazendo $r_- = 2\mathcal{H}_k - a_i$ e $r_+ = a_i$ e substituindo na equação (1), temos

$$V_k = \frac{Q_i}{2\pi\varepsilon l} \ln\left(\frac{2\mathcal{H}_k - a_k}{a_k}\right), \quad \text{com } Q_i = \begin{cases} Q_i, & \text{se } i \neq k \\ 0, & \text{se } i = k \end{cases} \tag{3}$$

onde H_k é a distância entre o eletrodo k e o solo e a_k é o raio do eletrodo k.

Aplicando a relação $2\mathcal{H}_k - a_k \approx 2\mathcal{H}_k$ da Hipótese 1 na equação (3), temos

$$S_{ki}\big|_{k=i} = \frac{V_k}{Q_i} = \frac{1}{2\pi\varepsilon l} \ln\left(\frac{2\mathcal{H}_k}{a_k}\right) \tag{4}$$

Logo, substituindo os valores da Tabela 1 com $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_3 = d + h$ e $\mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_4 = h$, temos

$$S_{11} = S_{22} = \frac{1}{2\pi\varepsilon l} \ln\left(\frac{2(h+d)}{a}\right) \tag{5}$$

$$S_{33} = S_{44} = \frac{1}{2\pi\varepsilon l} \ln\left(\frac{2h}{a}\right) \tag{6}$$

A relação de igualdade das elastâncias entre alguns eletrodos, como $S_{11} = S_{22}$ e $S_{33} = S_{44}$, se deu por conta da geometria do sistema. Isso é mostrado na Figura 1, onde as distâncias $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_3$ e $\mathcal{H}_4$ são identificadas para cada eletrodo e sua respectiva imagem.

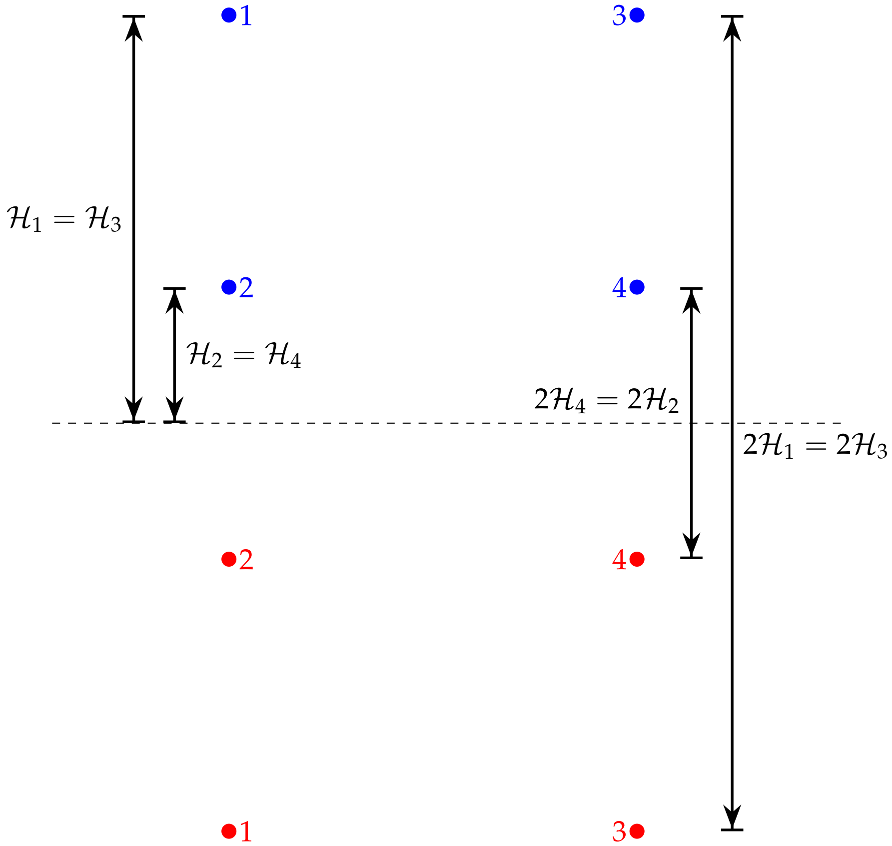

Figura 1: Diagrama do sistema, já considerando as simplificações e fora de escala, indicando a distância $\mathcal{H}_i$ entre o eletrodo i (em azul) e sua respectiva imagem (em vermelho).

2.4. Caso 2: Cálculo de S_{ki} para $k \neq i$

Como no Caso 1, podemos calcular S_{ki} com o eletrodo k sejuito a um potencial V_k para $i \neq k$ e considerando nula a carga dos demais eletrodos. Fazendo $r_- = H_{ki} - a_k$ e $r_+ = \Delta_{ki} - a_k$ e substituindo na equação (1), temos

$$V_k = \frac{Q_i}{2\pi\varepsilon l} \ln\left(\frac{H_{ki} - a_k}{\Delta_{ki} - a_k}\right), \quad \text{com } Q_i = \begin{cases} Q_i, & \text{se } i \neq k \\ 0, & \text{se } i = k \end{cases} \tag{7}$$

onde H_{ki} é a distância entre o eletrodo k e a imagem do eletrodo i, Δ_{ki} é a distância entre o eletrodo k e o eletrodo i e a_k é o raio do eletrodo k.

Considerando a Hipótese 1, é possível fazer as seguintes simplificações: $H_{ki} - a_k \approx H_{ki}$ e $\Delta_{ki} - a_k \approx \Delta_{ki}$, então

$$S_{ki}\big|_{k\neq i} = \frac{V_k}{Q_i} = \frac{1}{2\pi\varepsilon l} \ln\left(\frac{H_{ki}}{\Delta_{ki}}\right) \tag{8}$$

Os valores de H_{ki} e Δ_{ki} são dados pela relção a seguir

$$H_{12} = 2h + d \qquad \Delta_{12} = d$$
$$H_{13} = \sqrt{(2h + 2d)^2 + D^2} \qquad \Delta_{13} = D$$
$$H_{14} = \sqrt{(2h + d)^2 + D^2} \qquad \Delta_{14} = \sqrt{d^2 + D^2}$$

$$H_{23} = \sqrt{(2h+d)^2 + D^2} \qquad \Delta_{23} = \sqrt{d^2 + D^2}$$
$$H_{24} = \sqrt{(2h)^2 + D^2} \qquad \Delta_{24} = D$$
$$H_{34} = 2h + d \qquad \Delta_{34} = d$$

E os valores de elastâncias estão dispostos nas equações a seguir

$$S_{12} = S_{21} = S_{34} = S_{43} = \frac{1}{2\pi\varepsilon l} \ln\left(\frac{2h+d}{d}\right) \tag{9}$$
$$S_{13} = S_{31} = \frac{1}{2\pi\varepsilon l} \ln\left(\frac{\sqrt{(2h+2d)^2 + D^2}}{D}\right) \tag{10}$$
$$S_{14} = S_{41} = S_{23} = S_{32} = \frac{1}{2\pi\varepsilon l} \ln\left(\frac{\sqrt{(2h+d)^2 + D^2}}{\sqrt{d^2 + D^2}}\right) \tag{11}$$
$$S_{24} = S_{42} = \frac{1}{2\pi\varepsilon l} \ln\left(\frac{\sqrt{(2h)^2 + D^2}}{D}\right) \tag{12}$$

Dos valores obtidos na equação (9), (10), (11) e (12), é notado que $S_{ki} = S_{ik}$. Isso ocorre pelo Teorema da Reciprocidade, o que implica numa matriz de elastâncias $[S]$ simétrica. Como a matriz de capacitâncias $[C']$ é calculada invertendo-se $[S]$, a relação $C'_{ki} = C'_{ik}$ também é válida. A relação de igualdade das elastâncias entre outros eletrodos, como $S_{12} = S_{34}$, se deu por conta da geometria do sistema.

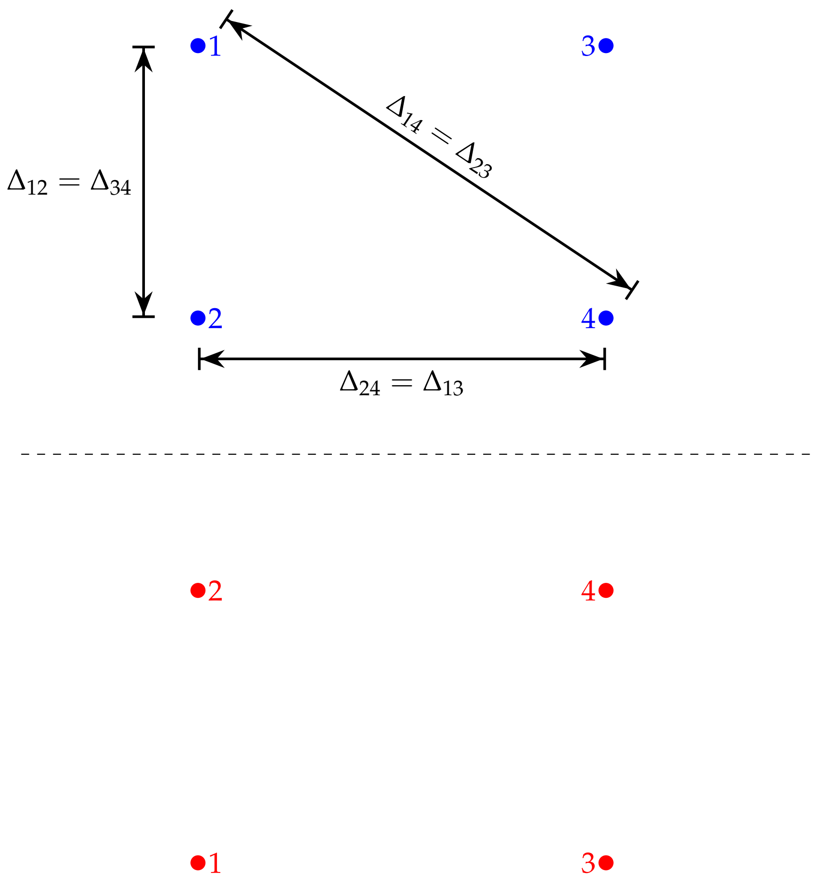

Figura 2: Diagrama do sistema, já considerando as simplificações e fora de escala, indicando a distância Δ_{ki} entre o eletrodo k e o eletrodo i.

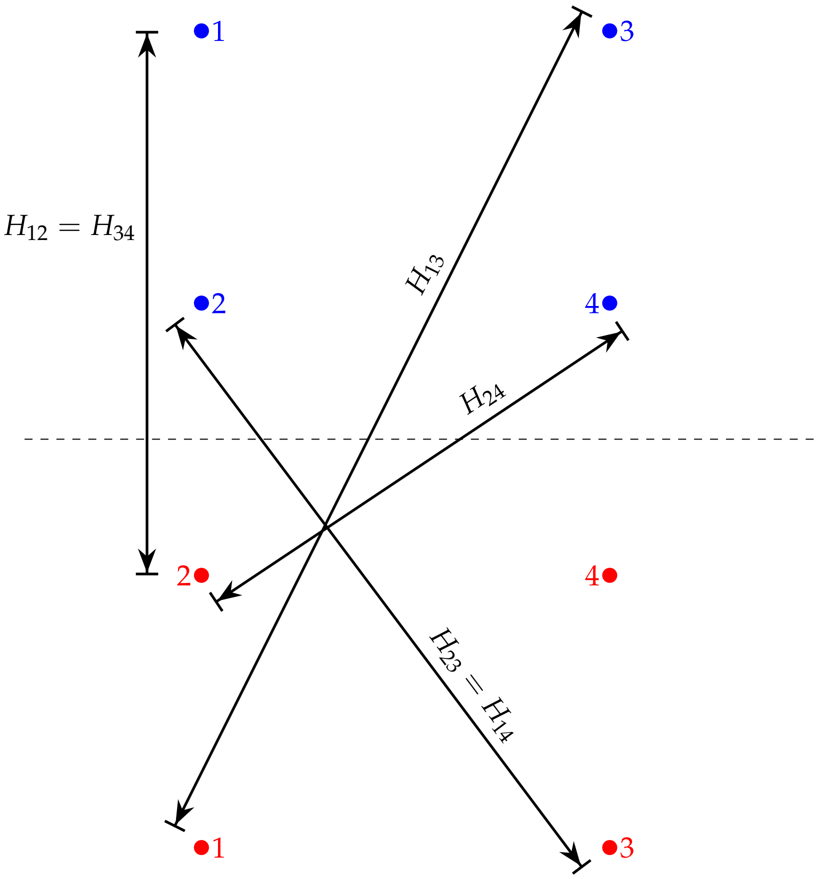

Figura 3: Diagrama do sistema, já considerando as simplificações e fora de escala, indicando a distância H_{ki} entre o eletrodo k (em azul) e a imagem do eletrodo i (em vermelho).

2.5. Matriz de capacitâncias

A equação (13) mostra a martiz de elastâncias do sistema. Ela é calculada a partir dos valores das equações (5), (6), (9), (10), (11) e (12).

$$[S_\alpha] = \begin{bmatrix} \ln\left(\frac{2(h+d)}{a}\right) & \ln\left(\frac{2h+d}{d}\right) & \ln\left(\frac{\sqrt{(2h+2d)^2+D^2}}{D}\right) & \ln\left(\frac{\sqrt{(2h+d)^2+D^2}}{\sqrt{d^2+D^2}}\right) \\ \ln\left(\frac{2h+d}{d}\right) & \ln\left(\frac{2h}{a}\right) & \ln\left(\frac{\sqrt{(2h+d)^2+D^2}}{\sqrt{d^2+D^2}}\right) & \ln\left(\frac{\sqrt{(2h)^2+D^2}}{D}\right) \\ \ln\left(\frac{\sqrt{(2h+2d)^2+D^2}}{D}\right) & \ln\left(\frac{\sqrt{(2h+d)^2+D^2}}{\sqrt{d^2+D^2}}\right) & \ln\left(\frac{2(h+d)}{a}\right) & \ln\left(\frac{2h+d}{d}\right) \\ \ln\left(\frac{\sqrt{(2h+d)^2+D^2}}{\sqrt{d^2+D^2}}\right) & \ln\left(\frac{\sqrt{(2h)^2+D^2}}{D}\right) & \ln\left(\frac{2h+d}{d}\right) & \ln\left(\frac{2h}{a}\right) \end{bmatrix}$$

$$[S] = \frac{1}{2\pi\varepsilon l}[S_\alpha] \tag{13}$$

Substituindo os valores da Tabela 1 na equação 13, chega-se aos valores numéricos da matriz de elastâncias do sistema, que é mostrado na equação (16).

$$[S] = \begin{bmatrix} 159.74 & 77.45 & 48.80 & 48.17 \\ 77.45 & 159.25 & 48.21 & 48.32 \\ 48.80 & 48.21 & 159.74 & 77.45 \\ 48.17 & 48.32 & 77.45 & 159.25 \end{bmatrix} \mathrm{MF}^{-1} \tag{14}$$

A matriz de capacitâncias do sistema será calculada a partir da matriz de elastâncias. A relação entre elas é dada pela equação (15).

$$[C'] = [S]^{-1} \tag{15}$$

Invertendo a matriz de elastâncias, na equação (14), chega-se aos valores numéricos da matriz de capacitâncias, na equação (16).

$$[C'] = \begin{bmatrix} 8.62 & -3.56 & -1.07 & -1.01 \\ -3.56 & 8.64 & -1.01 & -1.05 \\ -1.07 & -1.01 & 8.62 & -3.56 \\ -1.01 & -1.05 & -3.56 & 8.64 \end{bmatrix} \text{nF} \tag{16}$$

3. Diagrama do Circuito Elétrico

O modelo de circuito elétrico com parâmetros concentrados é obtido de [C′], da equação (16), onde a capacitância é calculada pela relação a seguir.

$$C_{ki} = \begin{cases} \sum_{j=1}^{N} C'_{kj}, & \text{se } i = 0 \\ -C'_{ki}, & \text{se } k \neq i \end{cases} \tag{17}$$

Das equações (16) e (17), temos

$$C_{10} = 2.98\text{nF} \qquad C_{12} = 3.56\text{nF}$$
$$C_{20} = 3.01\text{nF} \qquad C_{13} = 1.07\text{nF}$$
$$C_{30} = 2.98\text{nF} \qquad C_{14} = 1.01\text{nF}$$
$$C_{40} = 3.02\text{nF} \qquad C_{23} = 1.01\text{nF}$$
$$C_{34} = 3.56\text{nF} \qquad C_{24} = 1.05\text{nF}$$

A partir dos valores acima, podemos montar o diagrama do circuito elétrico correspondente ao sistema, como mostrado na Figura 4.

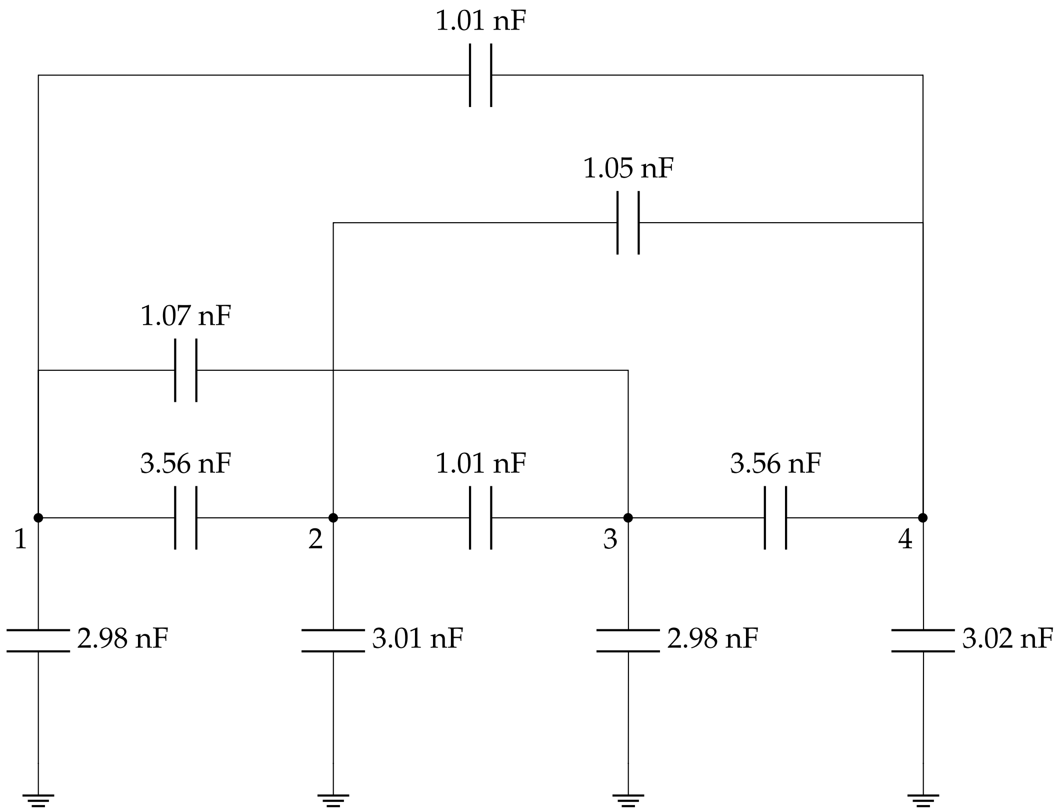

Figura 4: Circuito elétrico do sistema.

4. Cargas nos Eletrodos

Com os valores das capacitâncias parciais conhecidos (equação (16)), a carga Q_k de um eletrodo k pode ser calculada de acordo com a equação (18).

$$Q_k = \sum_{i=1}^{N} C'_{ki} V_i \tag{18}$$

Substituindo os valores da matriz $[C']$, na equação (18), temos

$$\begin{aligned} Q_3 &= C'_{31}V_1 + C'_{32}V_2 + C'_{33}V_3 + C'_{34}V_4 = \\ &= (-1.07\text{nF})(40\text{kV}) + (-1.01\text{nF})(0\text{V}) + (8.62\text{nF})(0\text{V}) + (-3.56\text{nF})(0\text{V}) = \\ &= 42.8\mu\text{C} \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} Q_4 &= C'_{41}V_1 + C'_{42}V_2 + C'_{43}V_3 + C'_{44}V_4 = \\ &= (-1.01\text{nF})(40\text{kV}) + (-1.05\text{nF})(0\text{V}) + (-3.56\text{nF})(0\text{V}) + (8.64\text{nF})(0\text{V}) = \\ &= 40.4\mu\text{C} \end{aligned} \tag{20}$$

5. Energia Eletrostática

Considerando a inexistência de fontes no infinito, a equação (21) mostra a forma geral para o cálculo da energia armazenada pelo campo eletrostático.

$$W_e = \frac{1}{2}\iiint_{\tau} \varphi\rho_V \, dv + \frac{1}{2}\iint_{\zeta} \varphi\rho_S \, ds + \frac{1}{2}\int_{\xi} \varphi\rho_L \, dl \tag{21}$$

Considerando as densidades volumétricas e superficiais iguais a zero, pois os eletrodos do sistema foram definidos como linhas de carga uniforme. Logo, apenas a densidade linear de carga será usada. Assim, a equação geral (21) pode ser simplificada para

$$W_e = \frac{1}{2}\int_{\xi} \varphi\rho_L \, dl = \frac{1}{2}\varphi \int_{\xi} \rho_L \, dl = \frac{1}{2}\varphi Q \tag{22}$$

E, considerando N linhas condutoras, cada uma com carga Q_n e um potencial V_n, temos

$$W_e = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} V_n Q_n \tag{23}$$

Substituindo $Q_k = \sum_{i=1}^{N} C'_{ki} V_i$ na equação (23), temos

$$W_e = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} V_k \sum_{i=1}^{N} C'_{ki} V_i \;=\; \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} C'_{ki} V_k V_i \tag{24}$$

Finalmente, atribuindo os valores numéricos da matriz de capacitância $[C']$, da equação (16), e os valores de tensão, dados no problema, na equação (24), chega-se ao valor da energia armazenada pelo campo eletrostático W_e.

$$W_e = 6.897W \tag{25}$$

6. Apêndice

Alguns cálculos, como o da inversão da matriz $[S]$ e o cálculo de W_e, não foram mostrados no texto por terem sido feitos através do Código 1, mostrado a seguir.

Código 1: Código usado para cálculo da matriz de capacitâncias e energia

```python
import numpy as np
h = 11
a = 3.125e-3
d = 0.3
D = 1.5
l = 1e3
e = 8.854e-12

# Calculo da matriz de capacitancia pela matriz de elastancia
X11 = 2*(h+d)/a
X12 = (2*h+d)/d
X13 = np.sqrt((2*h+2*d)**2+D**2)/D
X14 = np.sqrt(((2*h+d)**2)/(d**2+D**2))
X22 = 2*h/a
X23 = np.sqrt(((2*h+d)**2+D**2)/(d**2+D**2))
X24 = np.sqrt((2*h)**2+D**2)/D
X33 = 2*(h+d)/a
X34 = (2*h+d)/d
X44 = (2*h)/a
k = 1./(2*np.pi*e*l)

S_alpha = np.array([
  [X11, X12, X13, X14],
  [X12, X22, X23, X24],
  [X13, X23, X33, X34],
  [X14, X24, X34, X44]
])
S = k*np.log(S_alpha)
print('Matriz de Elastancias', S)
C = np.linalg.inv(S)
print('Matriz de Capacitancias', C)

# Cálculo da energia
We = 0
V = [40e3, 0, 10e3, 0]
for k in range(4):
  for i in range(4):
    We += C[k,i]*V[k]*V[i]
We *= 0.5
print('We', We)
```