Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Tarea 3

1 de octubre de 2019

2º semestre 2019 - Profesores G. Diéguez - F. Suárez

Requisitos

- La tarea es individual. Los casos de copia serán sancionados con la reprobación del curso con nota 1,1.
- **Entrega**: Hasta las 23:59:59 del 27 de septiembre a través del buzón habilitado en el sitio del curso (SIDING).
  - Esta tarea debe ser hecha completamente en LaTeX. Tareas hechas a mano o en otro procesador de texto **no serán corregidas**.
  - Debe usar el template LaTeX publicado en la página del curso.
  - Cada solución de cada problema debe comenzar en una nueva hoja. ***Hint:*** Utilice `\newpage`
  - Debe entregar un `zip` con nombre `numalumno.zip`, en el que `numalumno` es su número de alumno.
  - El `zip` debe contener el archivo `PDF` correspondiente a su solución con nombre `numalumno.pdf`, junto con el archivo `numalumno.tex` que lo compila. Si su código hace referencia a otros archivos, debe incluirlos también.
- El no cumplimiento de alguna de las reglas se penalizará con un descuento de 0.5 en la nota final (acumulables).
- No se aceptarán tareas atrasadas, o entregadas por cualquier otro medio, ya sea físico o electrónico.
- Si tiene alguna duda, el foro del Siding es el lugar oficial para realizarla.

Problemas

Problema 1

Sean A y B conjuntos. Demuestre que:

a) $A \cap B = A \backslash (A \backslash B)$.

b) $(A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$.

c) $A \subseteq B$ si y sólo si $B^c \subseteq A^c$.

Solución

Primero, será útil demostrar que $A \setminus B = A \cap B^c$:

($\subseteq$) Sea $a \in A \setminus B$ arbitrario. Se tiene entonces por definición que $a \in A \wedge a \notin B$. Como $a \notin B$, entonces $a \in B^c$. Por lo tanto $a \in A \wedge a \in B^c \Rightarrow a \in A \cap B^c$ por definición de $\cap$.

($\supseteq$) Sea $a \in A \cap B^c$ arbitrario. Por definición $a \in A \wedge a \in B^c$. Como $a \in B^c$, se tiene que $a \notin B$ por definición. Luego, $a \in A \wedge a \notin B$, y entonces $a \in A \setminus B$.

Ahora demostraremos cada una de las propiedades.

a) ($\subseteq$) Sea $a \in A \cap B$ arbitrario. Entonces:

$$\begin{aligned}
a \in A \wedge a \in B & \qquad \text{(def. de } \cap) \\
a \in A \wedge a \notin B^c & \qquad (a \in B \leftrightarrow a \notin B^c) \\
a \in A \wedge a \notin (A \cap B^c) & \qquad \text{(def. de } \cap) \\
a \in A \wedge a \notin (A \setminus B) & \qquad (A \cap B^c = A \setminus B) \\
a \in A \setminus (A \setminus B) & \qquad \text{(def. de } \setminus)
\end{aligned}$$

($\supseteq$) Sea $a \in A \setminus (A \setminus B)$ arbitrario. Entonces:

$$\begin{aligned}
a \in A \wedge a \notin A \setminus B & \qquad \text{(def. de } \setminus) \\
a \in A \wedge a \notin A \cap B^c & \qquad (A \cap B^c = A \setminus B) \\
a \in A \wedge a \in (A \cap B^c)^c & \qquad \text{(def. de } \in) \\
a \in A \wedge a \in (A^c \cup B) & \qquad \text{(de Morgan)} \\
a \in A \wedge (a \in A^c \vee a \in B) & \qquad \text{(def. de } \cup) \\
(a \in A \wedge a \in A^c) \vee (a \in A \wedge a \in B) & \qquad \text{(distributividad de } \wedge) \\
a \in A \wedge a \in B & \qquad \text{(término izq. es siempre falso)} \\
a \in A \cap B & \qquad \text{(def. de } \cap)
\end{aligned}$$

b) $(\subseteq)$ Sea $a \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ arbitrario. Tenemos dos casos:

Si $a \in A \setminus B$,

$$
\begin{aligned}
a \in A \wedge a \notin B & \qquad \text{(def. de } \setminus) \\
a \notin A \cap B & \qquad (a \notin B) \\
a \in A \cup B & \qquad (a \in A \to a \in A \cup B) \\
\Rightarrow a \in (A \cup B) \setminus (A \cap B) & \qquad (a \in (A \cup B) \wedge a \notin (A \cap B))
\end{aligned}
$$

Si $a \in B \setminus A$,

$$
\begin{aligned}
a \in B \wedge a \notin A & \qquad \text{(def. de } \setminus) \\
a \notin A \cap B & \qquad (a \notin A) \\
a \in A \cup B & \qquad (a \in B \to a \in A \cup B) \\
\Rightarrow a \in (A \cup B) \setminus (A \cap B) & \qquad (a \in (A \cup B) \wedge a \notin (a \cap B))
\end{aligned}
$$

Como en ambos casos $a \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ entonces $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \subseteq (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

$(\supseteq)$ Sea $a \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ arbitrario. Entonces $a \in (A \cup B) \wedge a \notin (A \cap B)$. Nuevamente tenemos dos casos:

Si $a \in A$,

$$
\begin{aligned}
a \in (A \cap B)^c & \qquad (a \notin A \cap B) \\
a \in A^c \cup B^c & \qquad \text{(ley de Morgan)} \\
a \in A \cap (A^c \cup B^c) & \qquad (a \in A \wedge a \in (A^c \cup B^c)) \\
a \in (A \cap A^c) \cup (A \cap B^c) & \qquad \text{(distributividad de } \cap) \\
a \in \varnothing \cup (A \cap B^c) & \qquad (A \cap A^c = \varnothing) \\
a \in A \cap B^c & \qquad (\varnothing \text{ es elemento neutro de } \cup) \\
a \in A \setminus B & \qquad (A \cap B^c = A \setminus B)
\end{aligned}
$$

Por otro lado, si $a \in B$,

$$
\begin{aligned}
a \in (A \cap B)^c & \qquad (a \notin A \cap B) \\
a \in A^c \cup B^c & \qquad \text{(ley de Morgan)} \\
a \in B \cap (A^c \cup B^c) & \qquad (a \in B \wedge a \in (A^c \cup B^c)) \\
a \in (B \cap B^c) \cup (B \cap A^c) & \qquad \text{(distributividad de } \cap) \\
a \in \varnothing \cup (B \cap A^c) & \qquad (B \cap B^c = \varnothing) \\
a \in B \cap A^c & \qquad (\varnothing \text{ es elemento neutro de } \cup) \\
a \in B \setminus A & \qquad (B \cap A^c = B \setminus A)
\end{aligned}
$$

Se tiene que si $a \in (A \cup B) \wedge a \notin (A \cap B)$ entonces $a \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Por lo tanto $(A \cup B) \setminus (A \cap B) \subseteq (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

c) ($\Rightarrow$) Supongamos que $A \subseteq B$. Entonces, para todo x se cumple que $x \in A \Rightarrow x \in B$. Sea ahora $a \in B^c$ arbitrario. Queremos demostrar que $a \in A^c$. Por contradicción, supongamos que $a \notin A^c$. Luego, se tiene que $a \in (A^c)^c \Rightarrow a \in A \Rightarrow a \in B$, lo que contradice que $a \in B^c$. Por lo tanto, necesariamente $a \in A^c$ y entonces $B^c \subseteq A^c$.

($\Leftarrow$) Supongamos que $B^c \subseteq A^c$. Entonces, para todo x se cumple que $x \in B^c \Rightarrow x \in A^c$. Sea ahora $a \in A$ arbitrario. Queremos demostrar que $a \in B$. Por contradicción, supongamos que $a \notin B$. Luego, se tiene que $a \in B^c$ y por hipótesis $a \in A^c$, lo que contradice que $a \in A$. Por lo tanto, necesariamente $a \in B$ y entonces $A \subseteq B$.

Pauta (6 pts.)

(a)
- 1 pto. por demostrar que $A \cap B \subseteq A \setminus (A \setminus B)$.
- 1 pto. por demostrar que $A \setminus (A \setminus B) \subseteq A \cap B$.

(b)
- 1 pto. por demostrar que $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \subseteq (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
- 1 pto. po demostrar que $(A \cup B) \setminus (A \cap B) \subseteq (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

(c)
- 1 pto. por demostrar que $A \subseteq B \Rightarrow B^c \subseteq A^c$.
- 1 pto. por demostrar que $B^c \subseteq A^c \Rightarrow A \subseteq B$.

Puntajes parciales y soluciones alternativas a criterio del corrector.

Problema 2

Sean A, B y C conjuntos. Dadas relaciones binarias R de A en B y S de B en C, la **composición** de R y S se define como:

$$R \circ S = \{(x, z) \mid \exists y \in B \text{ tal que } xRy \wedge ySz\}$$

Note que $R \circ S$ también es una relación binaria, esta vez de A en C.

Sea ahora R una relación binaria sobre un conjunto A. En este caso podríamos tomar la composición de R consigo misma:

$$R \circ R = \{(x, z) \mid \exists y \in A \text{ tal que } xRy \wedge yRz\}$$

A esta relación la denotamos como R^2, y en general, a la relación que se obtiene de componer R n veces consigo misma la denotamos como R^n.

Dada una relación binaria R sobre un conjunto A, demuestre que:

a) Si R es simétrica, entonces R^n es simétrica para todo $n \in \mathbb{N}, n > 0$.

b) Si R es refleja y transitiva, entonces $R^n = R$ para todo $n \in \mathbb{N}, n > 0$.

Solución

En primer lugar notemos que si $R = \varnothing$ las propiedades se cumplen trivialmente. Supondremos de ahora en adelantes entonces que R no es vacía.

a) Sea $(a, b) \in R^n$. Por definición de composición, sabemos que existen $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ tales que

$$(a, a_1) \in R, (a_1, a_2) \in R, ..., (a_{n-2}, a_{n-1}) \in R, (a_{n-1}, b) \in R$$

Además, como R es simétrica, tenemos también que

$$(a_1, a) \in R, (a_2, a_1) \in R, ..., (a_{n-1}, a_{n-2}) \in R, (b, a_{n-1}) \in R$$

Reordenando:

$$(b, a_{n-1}) \in R, (a_{n-1}, a_{n-2}) \in R, ..., (a_2, a_1) \in R, (a_1, a) \in R$$

Finalmente, por definición de composición, tenemos que $(b, a) \in R^n$, por lo que R^n es simétrica.

b) Demostraremos por inducción simple que $R^n = R$ para todo $n >= 1$.

BI: Para $n = 1$ la propiedad es cierta, pues R^1 es R.

HI: Supongamos que $R^n = R$ para $n >= 1$.

TI: Debemos demostrar que $R^{n+1} = R$. Por HI tenemos que $R^n = R$, y si componemos con R a ambos lados obtenemos que $R^n \circ R = R \circ R$, por lo que $R^{n+1} = R \circ R$. Demostraremos entonces que $R \circ R = R$:

$R \circ R \subseteq R$: Sea $(a, b) \in R \circ R$. Por definición de composición sabemos que existe c tal que $(a, c) \in R$ y $(c, b) \in R$. Como R es transitiva, se cumple que $(a, b) \in R$, y por lo tanto $R \circ R \subseteq R$.

$R \subseteq R \circ R$: Sea $(a, b) \in R$. Como R es refleja, sabemos que $(b, b) \in R$. Por definición de composición, $(a, b) \in R \circ R$, y entonces $R \subseteq R \circ R$.

Pauta (6 pts.)

a)
- 1 pto. por usar definición de composición.
- 1 pto. por usar simetría.
- 1 pto. por componer de vuelta.

b)
- 0.5 ptos. por BI.
- 0.5 ptos. por HI.
- 2 ptos. por TI.

Puntajes parciales y soluciones alternativas a criterio del corrector.