PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 02-2014
Profesores: P.Álvarez - A.Cataldo
A.Lüer - J.Vera

Pauta Interrogación 2

Se debe contestar en cuadernillos independientes cada pregunta. En cada cuadernillo debe colocar su nombre y número de lista asignado. Al finalizar su prueba, debe dejar los cuadernillos en su puesto, estos serán retirados por los ayudantes. ***Si no cumple con las instrucciones se le descontarán automáticamente 5 puntos.*** *Está prohibido el uso de calculadoras y de celulares de cualquier tipo.*

Pregunta 1 (15 puntos)

(a) (**3 puntos**) Indique, justificando con precisión, si la siguiente afirmación es verdadera o no: "Si un problema de Programación Lineal en forma estándar tiene soluciones degeneradas, esto significa que tiene restricciones redundantes".

Respuesta: No es verdad en general. El ejemplo clásico es el del poliedro cuya imagen en tres dimensiones corresponde a una pirámide de cuatro lados. La cúspide de la pirámide está sobredeterminado y produce soluciones básicas degeneradas. Sin embargo ninguna de las cuatro restricciones que lo definen es redundante para el conjunto.

(b) (**3 puntos**) Considere un problema de Programación Lineal de la forma

$$P)\quad \begin{array}{ll} \max & c^T x \\ s.a. & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Suponga que x^* es solución óptima de $P)$ e y^* es solución óptima del correspondiente dual. Suponga que se quiere agregar la siguiente restricción al problema $P)$: $\alpha^T x \leq \beta$, para crear el problema:

$$P_1)\quad \begin{array}{ll} \max & c^T x \\ s.a. & Ax \leq b \\ & \alpha^T x \leq \beta \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Suponga que x^* no cumple la restricción nueva, es decir, $\alpha^T x^* > \beta$. Muestre que, sin embargo, es fácil encontrar una solución que sea factible para el dual del nuevo problema $P_1)$.

Respuesta: El dual de P) es

$$D)\quad \begin{array}{ll} \min & b^T y \\ s.a. & A^T y \geq c \\ & y \geq 0 \end{array}$$

y el dual de P1) es:

$$D_1)\quad \begin{array}{ll} \min & b^T y + \beta t \\ s.a. & A^T y + \alpha t \geq c \\ & y \geq 0 \\ & t \geq 0 \end{array}$$

Si y^* es solución óptima de D), entonces basta tomar $(y^*, 0)$ en D_1 y esa es evidentemente una solución factible de este problema.

(c) (**3 puntos**) Suponga que se ha resuelto un problema de Programación Lineal de minimización con el Algoritmo Simplex y el tableau final es el siguiente:

1	-3	4	0	0	2
0	-5	3	1	0	2
0	-1	3	0	1	0
0	0	1	0	0	-1
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$

Explique con precisión si acaso existe otro vértice de la región factible que también sea solución óptima del problema. Justifique.

Respuesta: El que una variable no básica tenga costo reducido nulo hace pensar que hay múltiples soluciones. Sin embargo, los coeficientes de la columna son todos negativos y no se define ningún pivote. Esa es la situación que ocurre cuando un problema es no acotado. Lo que aquí pasa es que el problema tiene óptimo finito pero tiene todo un conjunto no acotado que son soluciones óptimas. No existe otro vértice, más bien todas las soluciones que están dadas a partir de un punto x^0 por un rayo de escape son soluciones óptimas del problema.

(d) (**3 puntos**) Considere un problema de Programación Lineal de la forma

$$P) \quad \begin{array}{ll} \text{máx} & c^T x \\ s.a. & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

donde $b \geq 0$. Para este problema se forma el problema de Fase I agregando una variable artificial por cada restricción. Suponga que el valor óptimo de la Fase I es cero (el problema es factible) y todas las variables artificiales son no básicas al final de la Fase I, existiendo, por lo tanto, una base factible, B, sólo con columnas de A. Muestre que el Tableau final de Fase I, B^{-1} se encuentra en el lugar de las columnas de las variables artificiales.

Respuesta: Esto se sigue del hecho que la matriz resultante para el problema de Fase I es de la forma $[A|I]$ ya que el agregar las variables artificiales es como "pegar" una identidad a la matriz original A. Al final de la fase I, existe una base formada sólo por columnas de A. Digamos que esa base es B. El sistema que está escrito en el Tableau equivale a multiplicar (por la izquierda) $[A|I]$ por B^{-1} y eso da: $[B^{-1} \times A|B^{-1}]$. Luego, en la posición de la identidad original se puede observar la inversa de la base B.

(e) (**3 puntos**) Considere el Problema de Programación lineal en forma estándar:

$$P) \quad \begin{array}{ll} \text{Max} & c^T x \\ s.a. & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

y suponga que se encuentra actualmente en una iteración cualquiera, sin haber llegado todavía al óptimo. Sea B la base actual y sea $\pi^T = c_B^T B^{-1}$. Muestre que π NO es solución válida para el problema dual.

Respuesta: Recordemos que el dual de la forma estándar presentada es:

$$D) \quad \begin{array}{ll} \text{Min} & b^T y \\ s.a. & A^T y \leq c \end{array}$$

y los costos reducidos son las holguras del dual en el óptimo. Pero si estamos en una iteración intermedia, tendremos que $A^T\pi$ NO será $\leq c$ ya que aún no estamos en el óptimo. Luego, no puede ser solución factible del dual. (NOTA: si alguien no se dio cuenta que el problema estaba puesto como "max" pero el razonamiento es el presentado, con la desigualdad invertida, se debe considerar correcto).

Pregunta 2 (15 puntos)

(a) (**7 puntos**) El siguiente es un tableau intermedio en alguna iteración de la Fase I del método Simplex. El problema posee dos variables no negativas (x_1, x_2) y cuatro restricciones. La función objetivo es de maximización y una variables de holgura fue incorporada (y_1).

1	0	0	1/5	2/5	0	2
0	1	0	2/5	-1/5	0	c
0	0	0	-1	-1	1	b
0	0	1	-2/5	1/5	0	2
0	0	0	2	d	0	a
x_1	x_2	y_1	t_1	t_2	t_3	$\bar{b}$

Entregue las condiciones de a, b, c y d que se necesitan para que las siguientes aseveraciones sean verdaderas.

(i) (**2 puntos**) La solución actual es óptima y el problema original es factible.

(ii) (**2 puntos**) La solución actual es óptima y el problema original es infactible.

(iii) (**3 puntos**) La solución actual es óptima y el problema original es degenerado.

Pauta

(i) Para que la solución actual sea óptima y el problema original factible se requiere que $a = 0$, $b = 0$, $c \geq 0$ y $d \geq 0$.

(ii) Para que la solución actual sea óptima y el problema original infactible se requiere que $a > 0$, $b > 0$, $c \geq 0$ y $d \geq 0$.

(iii) Para que la solución actual sea óptima y el problema original degenerado se requiere que $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$ y $d \geq 0$.

(b) (**8 puntos**) Considere el siguiente problema de Programación Lineal:

$$
P) \quad \begin{array}{lrcrcrcr}
\text{Max} & x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & \\
\text{s.a.} & 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 4 \\
 & 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & \leq & -5 \\
 & -x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & \leq & -1 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

(i) (**2 puntos**) Formule el problema de Fase I utilizando la menor cantidad de variables artificiales y resuélvalo usando Simplex Tabular (Tableau).

(ii) (**2 puntos**) Usando el resultado de la Fase I, identifique una base factible para el problema P) e indique cuál es su matriz básica. ¿Cómo es la solución óptima del problema de Fase I? ¿tiene sentido que eso ocurra?

(iii) (**2 puntos**) Determine los costos reducidos de la solución inicial obtenida para el problema de Fase II usando la forma matricial del algoritmo Simplex.

(iv) (**2 puntos**) Como debe haber verificado en (iii), esa solución inicial no es óptima, así que determine, nuevamente usando el desarrollo matricial del algoritmo Simplex, cuál será la nueva base después de hacer una iteración (no tiene que seguir resolviendo).

Pauta

(i) Llevado $P)$ a forma estándar:

$$P)\qquad \begin{array}{lrcrcrcrcrcrcl} \text{Min} & -x_1 & + & x_2 & - & x_3 & & & & & & & & \\ \text{s.a.} & 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & & & & & = & 4 \\ & -2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & & & - & x_5 & & & = & 5 \\ & x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & & & & & - & x_6 & = & 1 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & , & x_6 & \geq & 0 \end{array}$$

entonces el problema de Fase I agregando las variables auxiliares t_1 a la segunda restricción y t_2 a la segunda queda definido como:

$$FI{-}P)\qquad \begin{array}{lrcrcrcrcrcrcrcrcl} \text{Min} & t_1 & + & t_2 & & & & & & & & & & & & & & \\ \text{s.a.} & 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & & & & & & & & & = & 4 \\ & -2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & & & - & x_5 & & & + & t_1 & & & = & 5 \\ & x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & & & & & - & x_6 & & & + & t_2 & = & 1 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & , & x_6 & \geq & 0 & & & & \end{array}$$

El tableau de Fase I queda:

2	-1	2	1	0	0	0	0	4
-2	3	-1	0	-1	0	1	0	5
1	-1	2	0	0	-1	0	1	1
0	0	0	0	0	0	1	1	0

Necesitamos que los costos reducidos de las variables básicas sean nulos, así que el tableau inicial queda:

2	-1	2	1	0	0	0	0	4
-2	3	-1	0	-1	0	1	0	5
1	-1	2	0	0	-1	0	1	1
1	-2	-1	0	1	1	0	0	-6

Podemos notar que no estamos en el óptimo, que la variable que entra a la base será x_2 y que la variable que sale de la base es t_1.

El siguiente tableau es:

4/3	0	5/3	1	-1/3	0	1/3	0	17/3
-2/3	1	-1/3	0	-1/3	0	1/3	0	5/3
1/3	0	5/3	0	-1/3	-1	1/3	1	8/3
-1/3	1	-5/3	0	1/3	1	2/3	0	-8/3

Podemos notar que no estamos en el óptimo, que la variable que entra a la base será x_3 y que la variable que sale de la base es t_2.

El siguiente tableau es:

1	0	0	1	0	1	0	-1	3
-3/5	1	0	0	-2/5	-1/5	2/5	1/5	11/5
1/5	0	1	0	-1/5	-3/5	1/5	3/5	8/5
0	1	0	0	0	0	1	1	0

que como se aprecia es solución óptima del problema de Fase I, e indica que el problema de original es factible.

(ii) (**2 puntos**) La solución óptima del problema corresponde a:
$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, t_1, t_2) = (0, \frac{11}{5}, \frac{8}{5}, 3, 0, 0, 0, 0)$.
La base factible asociada a esta solución, (x_4, x_2, x_3) como variables básicas, es:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2/5 & 1/5 \\ 0 & 1/5 & 3/5 \end{bmatrix}$$

luego, los costos reducidos de las variables no básicas son:
Se puede notar que el problema de Fase I presenta múltiples soluciones (el costo reducido de algunas variables básicas es nulo). Esto era esperable pues todas las variables x_i tienen el coeficiente nulo en la función objetivo del problema de Fase I.

(iii) Los costos reducidos de las variables no básicas son:

$$\begin{pmatrix} \bar{c}_{x_1} & \bar{c}_{x_5} & \bar{c}_{x_6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2/5 & 1/5 \\ 0 & 1/5 & 3/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{c}_{x_1} & \bar{c}_{x_5} & \bar{c}_{x_6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/5 & 1/5 & -2/5 \end{pmatrix}$$

que como se aprecia no es solución óptima.

(iv) De la parte (iii) se observa que la variable que entra a la base es x_6 (costo reducido más negativo). Para determinar la variable que sale aplicamos el criterio de salida, que queda (considerando que las variables no básicas están en orden x_1, x_5, x_6):

$$\bar{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2/5 & 1/5 \\ 0 & 1/5 & 3/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3/5 & -2/5 & -1/5 \\ 1/5 & -1/5 & -3/5 \end{bmatrix}$$

$$\text{Min}_{\bar{a}_{\bullet,x_6}>0} = \left\{ \frac{3}{1}, \frac{11/5}{-1/5}, \frac{8/5}{-3/5} \right\} = 3 \Rightarrow \text{sale } x_4 \text{ de la base.}$$

Entonces, la nueva base queda compuesta por las variables (x_6, x_2, x_3).

Pregunta 3 (15 puntos)

(a) (**8 puntos**) Considere un problema de minimización definido sobre tres variables (llamaremos (P) a este problema y x_1, x_2 y x_3 las variables) y dos restricciones. El dual de (P), al que llamaremos (D) (y cuyas variables denotaremos por y_1 e y_2), posee cuatro puntos extremos, y la información relacionada a estos puntos extremos se entrega en la siguiente tabla (RD1,...,RD3 denotan las restricciones del dual):

Variables de (D) (y_1, y_2)	Restricciones activas en (D)	Variables de (P) (x_1, x_2, x_3)
$(1, 0)$	RD1	$(3, 0, 0)$
$(2, 0)$	RD3	$(0, 0, 3)$
$\left(\frac{8}{3}, \frac{2}{3}\right)$	RD2 y RD3	$\left(0, \frac{11}{3}, \frac{-2}{3}\right)$
$(-2, 3)$	RD1 y RD2	$(-2, 5, 0)$

Adicionalmente, el valor del costo asociado a la variable y_1 en la función objetivo de (D) es 3.

(i) (**6 puntos**) Considerando la información anterior, escriba explícitamente (P) (Ind: la información que se entrega es suficiente para inferir los valores de coeficientes, lados derechos, etc., que faltan).

(ii) (**2 puntos**) Indique cuál es la solución óptima de (P). Justifique su respuesta.

Pauta

(i) La información entregada sobre los cuatro puntos extremos permite construir el siguiente sistema de ecuaciones que representa el espacio de soluciones factibles del dual:

$$
\begin{array}{ccccc}
y_1 & + & y_1 & \geq & 1 \\
y_1 & + & 2y_1 & \leq & 4 \\
y_1 & - & y_1 & \leq & 2 \\
 & & y_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Con la información de las restricciones del dual podemos construir la función objetivo del primal. Esta función objetivo será $x_1 + 4x_2 + 2x3$. Como el problema dual posee cuatro puntos extremos y es acotado posee solución óptima, entonces el problema primal también posee solución óptima. Es más, la solución óptima del dual es alguno de los cuatro puntos extremos, y por lo tanto, la solución óptima del primal es alguno de los puntos entregados como solución para el primal. Al evaluar cada uno de los puntos del primal en la función $x_1 + 4x_2 + 2x_3$ el óptimo será aquel de menor valor (problema de minimización), que en este caso es el punto (-2, 5, 0) con valor de la función objetivo $z = 18$.

Entonces sabemos que el valor de la solución óptima del dual también vale 18, y que está asociada a la función objetivo del dual $3y_1 + c_2y_2$. Dado el punto (-2, 3) se puede determinar que $c_2 = 8$.

Entonces, el dual corresponde a:

$$
(D) \quad
\begin{array}{lccccc}
\text{Max} & 3y_1 & + & 8y_2 & & \\
\text{s.a.} & y_1 & + & y_2 & \geq & 1 \\
 & y_1 & + & 2y_2 & \leq & 4 \\
 & y_1 & - & y_2 & \leq & 2 \\
 & & & y_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

cuyo primal es:

$$
(P) \quad
\begin{array}{lcccccccc}
\text{Min} & x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & & \\
\text{s.a.} & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\
 & x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & \geq & 8 \\
 & x_1 & & & & & \leq & 0 \\
 & & & x_2 & & & \geq & 0 \\
 & & & & & x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

(ii) La solución óptima de (P) es (-2, 5, 0) con valor de la función objetivo $z = 18$.

(b) (**7 puntos**) Considere el siguiente problema de programación lineal:

$$(P) \quad \begin{array}{lrcrcr} \text{Max} & 2x_1 & + & 5x_2 & & \\ \text{s.a.} & 2x_1 & + & x_2 & \geq & 4 \\ & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 10 \\ & & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Se sabe que la solución óptima del problema corresponde a $x_1 = \frac{-2}{3}$ y $x_2 = \frac{16}{3}$.

(i) (**2 puntos**) Utilice el criterio de optimalidad del algoritmo Simplex para verificar que la solución entregada es óptima.

(ii) (**3 puntos**) Determine el rango de valores que puede tomar b_2 (recurso asociado a la segunda restricción de (P)) de manera que la estructura de la solución óptima entregada se mantenga.

(iii) (**2 puntos**) Si se agregase una nueva variable a (P) cuyo consumo de recursos en la restricciones estuviera dada por la columna $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, indique qué valores puede tomar el costo asociado a esta nueva variable de manera de que la solución óptima entregada siga siendo óptima.

Pauta

(i) Como se observa la variable x_1 es irrestricta. Para construir la forma estándar definimos $x_1 = x_3 - x_4$, con $x_3 \geq 0$ y $x_4 \geq 0$. Luego, la forma estándar de (P) es:

$$(P) \quad \begin{array}{lrcrcrcrcrcr} \text{Min} & -2x_3 & + & 2x_4 & - & 5x_2 & + & 0h_1 & + & 0h_2 & & \\ \text{s.a.} & 2x_3 & - & 2x_4 & + & x_2 & - & h_1 & & & = & 4 \\ & x_3 & - & x_4 & + & 2x_2 & & & + & h_2 & = & 10 \\ & x_3 & , & x_4 & , & x_2 & , & h_1 & , & h_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Dada la solución que se entrega, tenemos que las variables básicas son x_4 y x_2 y las variables no básicas son x_3, h_1 y h_2. Luego, la base asociada es:

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} -2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

Entonces, los costos reducidos de las variables no básicas quedan:

$$\begin{pmatrix} \bar{c}_{x_3} & \bar{c}_{h_1} & \bar{c}_{h_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{c}_{x_3} & \bar{c}_{h_1} & \bar{c}_{h_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 8/3 \end{pmatrix}$$

Como todos los costos reducidos de las variables no básicas son ≥ 0, la solución entregada es óptima.

(ii) Para esto debemos asegurar que se mantiene la factibilidad del punto entregado. Entonces, se debe satisfacer que:

$$x_B = \begin{bmatrix} -2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ b_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} b_2 \geq 8 \\ b_2 \geq 2 \end{array}$$

de donde se obtiene que para $b_2 \in [8, \infty)$ la solución entregada seguirá siendo óptima.

(iii) Para esto debemos asegurar que el costo reducido de la nueva variable es < 0

$$\bar{c} \;=\; c \;-\begin{pmatrix} 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} -2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = c + \frac{22}{3} \geq 0 \Rightarrow c \geq -\frac{22}{3}$$

de donde se obtiene que para $c \in [-\frac{22}{3}, \infty)$ la solución entregada seguirá siendo óptima.

Pregunta 4 (15 puntos)

Al organizar un matrimonio, es importante "armar las mesas" de buena forma, para que todos estén a gusto. Suponga que tiene I invitados, y dispone de T mesas con L lugares cada una. Para cada invitado $i \in 1, \ldots, I$, se conoce su edad E_i. Existe una serie de reglas que le han entregado los novios para que usted los ayude a organizar los invitados:

- ◇ En una misma mesa no se deberán sentar personas con más de D años de diferencia entre sí.
- ◇ Sea N el subconjunto de los invitados que corresponde a niños entre 5 y 12 años. Estos tienen que sentarse todos juntos en las mismas mesas, sin otros adultos.
- ◇ Las parejas, almacenadas en el conjunto P de pares de invitados (Suponga que P se compone de pares (p_1, p_2) con $p_1 < p_2$), se deben sentar en una misma mesa.
- ◇ De igual forma, para cada persona i se conocen las personas que deben estar sí o sí en su misma mesa, esta información se encuentra registrada en un conjunto B_i asociado a cada persona (Donde obviamente $|B_i| \leq L - 1$.)
- ◇ Los niños menores a 5 años deberán sentarse en la misma mesa que sus madres. Para esto se cuenta con un conjunto R de pares (madre, hijo/a de 5 o menos años).
- ◇ Sean H y M los conjuntos de hombres y mujeres mayores de 12 años invitados. Para favorecer (de cierta forma) el baile después de la comida, en cada mesa no puede haber más de un $\alpha\,\%$ (con $50 \leq \alpha \leq 100$) de personas mayores de 12 años del mismo género.
- ◇ Finalmente, para cada par de invitados $(i, j) : i < j$ se conoce la afinidad que hay entre ellos si están sentados en la misma mesa, la cual denotaremos con el número A_{ij}.

Escriba un modelo de programación lineal binaria que determine la asignación de personas a mesas que entregue la máxima afinidad total.

Pauta

Variables de decisión

- ◇ X_{it}: 1, si el invitado $i \in 1, \ldots, I$ está sentado en la mesa $t \in 1, \ldots, T$; 0, en otro caso.
- ◇ Y_{ijt}: 1, si los invitados $i, j \in 1, \ldots, I : i < j$ están sentados en la mesa $t \in 1, \ldots, T$; 0, en otro caso.

Función objetivo

$$Z = \max \sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{I-1} \sum_{j=i+1}^{I} A_{ij} Y_{ijt} \tag{1}$$

Restricciones

◇ *Relación entre Y y X*

$$Y_{ijt} \leq X_{it},\ \forall i,j \in 1,\ldots,I,\ t \in 1,\ldots,T : i<j \tag{2}$$

$$Y_{ijt} \geq X_{it} + X_{jt} - 1,\ \forall i,j \in 1,\ldots,I,\ t \in 1,\ldots,T : i<j \tag{3}$$

◇ *Asignación de cada persona a una mesa.*

$$\sum_{t=1}^{T} X_{it} = 1,\ \forall i \in 1,\ldots,I \tag{4}$$

◇ *Capacidad de las mesas.*

$$\sum_{i=1}^{I} X_{it} \leq L,\ \forall t \in 1,\ldots,T \tag{5}$$

◇ *Diferencia de edad menor a D años.*

$$Y_{ijm} = 0,\ \forall i,j \in 1,\ldots,I,\ t \in 1,\ldots,T : i<j,\ |E_i - E_j| > D \tag{6}$$

◇ *Sólo niños entre 5 y 12 años en sus mesas.*

$$Y_{ijm} = 0,\ \forall i,j \in 1,\ldots,I,\ t \in 1,\ldots,T : i<j,\ (i \in N, j \notin N) \text{ ó } (i \notin N, j \in N) \tag{7}$$

◇ *Parejas sentadas en la misma mesa.*

$$\sum_{t=1}^{T} Y_{ijt} = 1,\ \forall (i,j) \in P \tag{8}$$

◇ *Los que deben estar sentados en la misma mesa.*

$$\sum_{t=1}^{T} Y_{ijt} = 1,\ \forall i,j \in 1,\ldots,I,\ t \in 1,\ldots,T : i<j,\ i \in S_j \text{ ó } j \in S_i \tag{9}$$

◇ *Niños menores de 5 años con sus madres.*

$$\sum_{t=1}^{T} Y_{ijt} = 1,\ \forall i,j \in 1,\ldots,I,\ t \in 1,\ldots,T : i<j,\ (i,j) \in R \text{ ó } (j,i) \in R \tag{10}$$

◇ *Distribución de los mayores de 12 años por género.*

$$\begin{aligned} \sum_{i \in H} X_{it} &\leq \frac{\alpha}{100} \sum_{i \in H \cup M} X_{jt},\ \forall t \in 1,\ldots,T \\ \sum_{i \in M} X_{it} &\leq \frac{\alpha}{100} \sum_{i \in H \cup M} X_{jt},\ \forall t \in 1,\ldots,T \end{aligned} \tag{11}$$

◇ *Naturaleza de las variables de decisión*

$$\begin{gathered} X_{it} \in \{0,1\},\ \forall i \in 1,\ldots,I,\ t \in 1,\ldots,T \\ Y_{ijt} \in \{0,1\},\ \forall i,j \in 1,\ldots,I,\ t \in 1,\ldots,T : i<j \end{gathered} \tag{12}$$