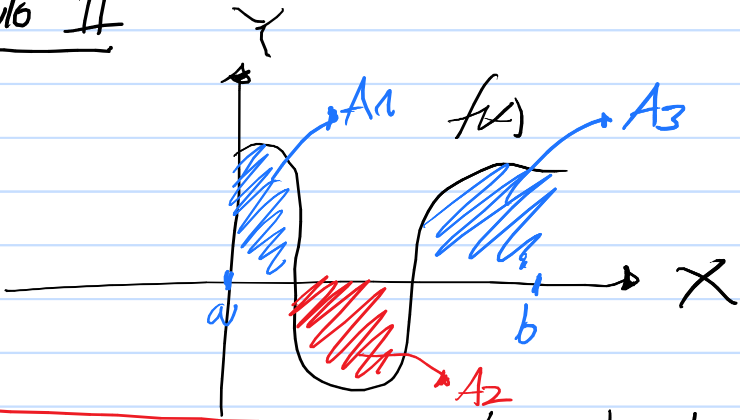
REPASO Calculo II

• **Area:**

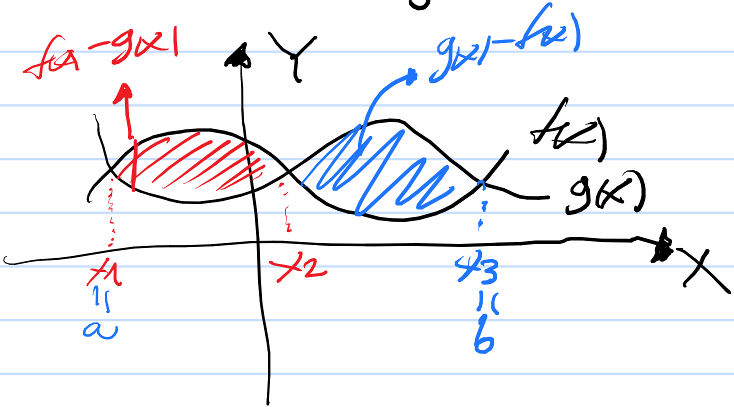


$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = A_1 + A_3 - A_2}$$

• La integral es la suma de las areas bajo la curva con signos.

- **Área entre 2 curvas:** Sea $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones. El área comprendida entre ellas en el intervalo $[a,b]$ es:

$$\boxed{\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx}$$



• Ecuación de la recta vectorial: – Sea (x_0, y_0, z_0) un punto por el que pasa la recta con vector director (a, b, c)

$$\Rightarrow \boxed{\vec{r}(t) = (a, b, c) \cdot t + (x_0, y_0, z_0)}$$

Ecuación paramétrica

$$\boxed{\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}}$$

Ecuación cartesiana

INTEGRALES IMPROPIAS

Sea $f(x)$ integrando sobre $[a,b]$

Tipo I: Uno de los extremos de integración está en infinito.

Tipo II: $\exists x_0 \in [a,b]$: $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ ó $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ diverge.

Por ejemplo sea $f(x)$ una función que en $x=1$ diverge.
¿Cómo determinar si la siguiente integral converge?

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

Solución:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx} = \overbrace{\lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{0} f(x)\,dx}^{\text{tipo I}} + \overbrace{\lim_{t\to 1^-}\int_{0}^{t} f(x)\,dx}^{\text{tipo II}} +$$

$$\underbrace{\lim_{t\to 1^+}\int_{t}^{2} f(x)\,dx}_{\text{tipo II}} + \underbrace{\lim_{t\to \infty}\int_{2}^{t} f(x)\,dx}_{\text{tipo I}}$$

Converge $\Longleftrightarrow$ todas las otras integrales convergen

Diagnostico: Si $\int_a^\infty f(x)dx$ converge, entonces: $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$

Nota: $\int_a^\infty f(x)dx$ $\quad \lim_{x\to\infty} f(x)=0 \not\Rightarrow \int_a^\infty f(x)dx$ converge

Si $\lim_{x\to\infty} f(x)\neq 0 \Rightarrow \int_a^\infty f(x)dx$ diverge.

Teorema: Si $\int f(x)dx$, $\int g(x)dx$, $\int h(x)dx$ son todas integrales de primera o segunda especie (tipo I ó tipo II) tales que:

$$\boxed{g(x) \leq f(x) \leq h(x)}$$

- Si $\int g(x)dx$ y $\int h(x)dx$ convergen $\Rightarrow$ $\int f(x)dx$ converge.
- Si $\int g(x)dx \to \infty$ $\Rightarrow$ $\int f(x)dx \to \infty$ (diverge)
- Si $\int h(x)dx \to -\infty$ $\Rightarrow$ $\int f(x)dx \to -\infty$ (diverge)

Comparación al límite

Teorema: Sean f y g funciones de $[a,+\infty) \to \mathbb{R}$ positivas y sea:

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L}$$

• Si $L>0 \Rightarrow \left[\int_a^\infty f(x)\,dx \text{ converge/diverge} \Longleftrightarrow \int_a^\infty g(x)\,dx \text{ converge/diverge}\right]$

• Si $L=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{Si } \int_a^\infty g(x)dx \text{ converge} \Rightarrow \int_a^\infty f(x)dx \text{ converge} \\ \text{Si } \int_a^\infty f(x)dx \text{ diverge} \Rightarrow \int_a^\infty g(x)dx \text{ diverge} \end{array} \right]$

Este mismo criterio se puede obtener para integrales del tipo II solo cambiando $\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}}$ por $\boxed{\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}}$

p-integrales: Sea $a>0$

$$\boxed{\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^p} : \begin{cases} \text{converge} & \Leftrightarrow \quad p>1 \\ \text{diverge} & \text{e.o.c.} \end{cases}}$$

$$\boxed{\int_0^{a} \frac{dx}{x^p} : \begin{cases} \text{converge} & \Leftrightarrow \quad p<1 \\ \text{diverge} & \text{e.o.c.} \end{cases}}$$

Notación: Cuando dos integrales se comportan igual se usa el símbolo

$$\boxed{\int f(x)\,dx \sim \int g(x)\,dx}$$

SERIES

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k}$$

Proposición: Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie convergente, entonces

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Nota: Este criterio no se usa para determinar convergencia

si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \not\Rightarrow \sum_{n=1} a_n$ converge

Solo se usa para descartar:

Si $\lim_{n \to \infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge

Proposición: Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ series tales que $\forall n \geq n_0$ se cumple: $\boxed{a_n \leq b_n \leq c_n}$

entonces:

- $\boxed{\text{Si } \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ converge}}$
- $\boxed{\text{Si } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverge} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ diverge}}$

Comparación al límite

Teorema: Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series de términos positivos, entonces:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l}$$

$$\boxed{\cdot \text{ Si } l > 0 \Rightarrow \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge/diverge} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ converge/diverge} \right]}$$

- Si $l=0 \Rightarrow \left[\text{Si } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge} \right]$
- Si $l=\infty \Rightarrow \left[\text{Si } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ diverge} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverge} \right]$

Criterio de la razón

Teorema: Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie y sea:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell$$

. Entonces:

- Si $\ell < 1$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge
- Si $\ell > 1$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge
- Si $\ell = 1$ el criterio no es concluyente.

Séries conhecidas

$$\boxed{\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ converge} \Leftrightarrow p>1 \\ &\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} \text{ converge} \Leftrightarrow |r|<1 \end{aligned}}$$

Criterio de la raíz

Teorema: Sea la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Consideremos el siguiente límite:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell$$

- Si $\ell < 1$ la serie converge.
- Si $\ell > 1$ la serie diverge
- Si $\ell = 1$ el criterio no es concluyente.

Comparación con la integral

Teorema: Sea $f:[k,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ una función:

- Continua
- Decreciente
- Positiva en su dominio
- tq $a_i = f(i)$

$$\Rightarrow \boxed{\int_k^\infty f(x)dx \text{ es convergente} \Leftrightarrow \sum_{n=k}^{\infty} a_n \text{ es convergente.}}$$

SERIES ALTERNANTES

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n$$

Teorema: Si para $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se verifica que:

(a) $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(b) Es decreciente para todo $n \in \mathbb{N}$.

(c) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \text{ es convergente}}$$

Si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge $\Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n$ converge

Convergència absoluta.