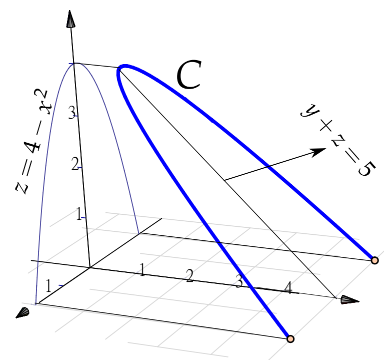
Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Temporada Académica de Verano 2023

MAT1630 – Cálculo III

Solución Interrogación N° 2

1. Calcule la integral de línea

$$\int_C \frac{x^2+2y}{\sqrt{33-8z}}\,ds$$



donde C es la curva que se muestra en la imagen

Solución. La curva C satisface las ecuaciones $\begin{cases} z = 4 - x^2 \\ y + z = 5 \end{cases}$. Sustituyendo la primera ecuación en la segunda se obtiene que $y + (4 - x^2) = 5 \Longleftrightarrow y = 1 + x^2$. Entonces, podemos considerar la parametrización $\alpha : [-2, 2] \to \mathbb{R}^3$ definida por $\alpha(t) = (t, 1 + t^2, 4 - t^2)$. El vector tangente es $\alpha'(t) = (1, 2t, -2t)$ cuyo norma al cuadrado es

$$\|\alpha'(t)\|^2 = 1 + 4t^2 + 4t^2 = 1 + 8t^2\,.$$

Luego, la integral de línea es

$$\begin{aligned} \int_C \frac{x^2+2y}{\sqrt{33-8z}}\,ds &= \int_{-2}^{2} \frac{t^2+2(1+t^2)}{\sqrt{33-8(4-t^2)}}\|\alpha'(t)\|\,dt \\ &= \int_{-2}^{2} \frac{2+3t^2}{\sqrt{1+8t^2}}\cdot\sqrt{1+8t^2}\,dt \\ &= 2\int_0^2 (2+3t^2)\,dt \\ &= 2\left[2t+t^3\right]_0^2 = 24 \end{aligned}$$

Puntaje Pregunta 1.

- 2 puntos por encontrar una parametrización para la curva C.
- 2 puntos por obtener la igualdad $\displaystyle\int_C \frac{x^2+2y}{\sqrt{33-8z}}\,ds = \int_{-2}^{2} \frac{2+3t^2}{\sqrt{1+8t^2}}\cdot\sqrt{1+8t^2}\,dt$
- 2 puntos por calcular la integral.

2. Sea $\mathbf{F}(x,y) = \left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + xe^{-y^2}, \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - x^2ye^{-y^2} \right)$ un campo de vectores definido en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Calcule $\displaystyle\int_C \mathbf{F} \cdot d\alpha$ donde C es la curva que va desde el punto $(2,0)$ al punto $(0,1)$ dada por la ecuación $x^2+y^2 = \sqrt{x^2+y^2} + x$. Justifique su respuesta.

Solución. Se verifica que $P_y = Q_x$, luego $\mathbf{F}$ es conservativo en cualquier dominio que sea simplemente conexo. Entonces, existe una función f con $\nabla f = \mathbf{F}$, es decir

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + xe^{-y^2} \\ f_y(x,y) &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - x^2ye^{-y^2} \end{aligned}$$

Al integrar con respecto x la primera ecuación, se obtiene

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + \frac{1}{2}x^2e^{-y^2} + g(y)$$

Ahora derivando con respecto a y se obtiene

$$f_y(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - x^2ye^{-y^2} + g'(y)$$

Se sigue que $g'(y) = 0 \Longleftrightarrow g(y) = C$ donde C es una constante. Por lo que

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + \frac{1}{2}x^2e^{-y^2}$$

es una función potencial para el campo $\mathbf{F}$. Aplicando el teorema fundamental de las integrales de línea en un conjunto abierto conexo que contenga la curva C y que no contenga al origen obtenemos

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\alpha = \int_C \nabla f \cdot d\alpha = f(0,1) - f(2,0) = -3\,.$$

Puntaje Pregunta 2.

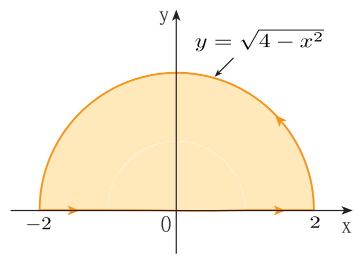
- 3 puntos por encontrar la función potencial $f(x,y)$.
- 2 puntos por calcular la integral de línea usando el teorema fundamental de las integrales de línea.
- 1 punto por mencionar las hipótesis del teorema fundamental de las integrales de línea, es decir que la curva debe estar contenida en un abierto conexo que no contiene el origen.

3. Una partícula parte del punto $(-2,0)$ se mueve por el eje X hasta $(2,0)$ y luego por el semicírculo $y=\sqrt{4-x^2}$ hasta el punto de inicio. Use el teorema de Green para calcular el trabajo que hace el campo de fuerza $\mathbf{F}(x,y)=(x,x^3+3xy^2)$ sobre esta partícula.

   Solución. Tenemos que

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(x^3+3xy^2\right)-\frac{\partial}{\partial y}(x)=3x^2+3y^2\ .$$

   La curva C es cerrada, orientada positivamente y regular que delimita la región D de la figura



   La región D es una región simple de tipo I:

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -2\leqslant x\leqslant 2\ ,\quad 0\leqslant y\leqslant\sqrt{4-x^2}\right\}\ .$$

   Entonces por el Teorema de Green el trabajo que hace el campo de fuerza $\mathbf{F}$ sobre esta partícula es

$$W \;=\; \int\limits_C \mathbf{F}\cdot d\alpha=\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dA=\int_{-2}^{2}\int_0^{\sqrt{4-x^2}}(3x^2+3y^2)dydx\ .$$

   Usando coordenadas polares se obtiene que

$$W \;=\; \int_0^{\pi}\int_0^2 3r^2\cdot r\,drd\theta=3\pi\left[\frac{1}{4}r^4\right]_{r=0}^{r=2}=12\pi\ .$$

   Puntaje Pregunta 3.

   - 1 punto por calcular Q_x-P_y
   - 1 punto por describir la región D como una región simple de tipo I.
   - 2 puntos por usar el Teorema de Green para calcular el trabajo y obtener $W=\displaystyle\int_{-2}^{2}\int_0^{\sqrt{4-x^2}}(3x^2+3y^2)dydx$.
   - 2 puntos por calcular la integral doble usando coordenadas polares.

4. Hallar el área acotada por un arco de la cicloide

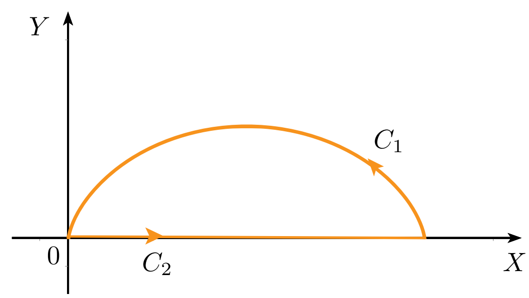
$$x(t) = a(t - \operatorname{sen}(t))\,, \quad y(t) = a(1 - \cos(t))\,, \quad t \in [0, 2\pi]\,, \quad a > 0$$

y el eje X. (Use el teorema de Green)

Solución. Tenemos que

$$\begin{aligned} x &= at - a\operatorname{sen}(t) & \qquad dx &= a - a\cos(t) \\ y &= a - a\cos(t) & \qquad dy &= a\operatorname{sen}(t) \end{aligned}$$

La curva C_1 es la cicloide orientada positivamente y C_2 es el segmento de recta que une $(0,0)$ con $(0, 2\pi a)$



Por el Teorema de Green se tiene que

$$\begin{aligned} A &= -\oint_C y\,dx = -\left[\int_{C_1} y\,dx + \int_{C_2} y\,dx\right] \\ &= -\int_{C_1} y\,dx - \int_{C_2} \underbrace{y}_{0}\,dx = \int_0^{2\pi} (a - a\cos(t))^2\,dt = a^2\int_0^{2\pi} (1 - 2\cos(t) + \cos^2(t))\,dt \\ &= a^2\int_0^{2\pi}\left(1 - 2\cos(t) + \frac{1+\cos(2t)}{2}\right)\,dt \\ &= a^2\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2} - 2\cos(t) + \frac{1}{2}\cos(2t)\right)\,dt \\ &= a^2\left[\frac{3}{2}t - 2\operatorname{sen}(t) + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2t)\right]_0^{2\pi} = 3\pi a^2\,. \end{aligned}$$

Puntaje Pregunta 4.

- 3 puntos por usar el Teorema de Green y usando la orientación positiva para las curvas involucradas.
- 3 puntos por calcular la integral.