Sistemas de coordenadas
Introducción al Álgebra Lineal - MAT1279-1299

Facultad de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile

Agosto 2022

Sistemas de coordenadas

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

Teorema. (Teorema de representación única)

Sea $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ una base para un espacio vectorial V. Así, para cada $\mathbf{x}$ en V, existe un conjunto único de escalares $c_1, \ldots, c_n$ tal que

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{b}_1 + \cdots + c_n\mathbf{b}_n \, .$$

Sistemas de coordenadas

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

Definición.

Suponga que $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ es una base para V y que $\mathbf{x}$ está en V. Las **coordenadas de x respecto de la base** $\mathcal{B}$ (o las $\mathcal{B}$-**coordenadas de x**) son los pesos $c_1, \ldots, c_n$ tales que $\mathbf{x} = c_1\mathbf{b}_1 + \cdots + c_n\mathbf{b}_n$.

Si $c_1, \ldots, c_n$ son las $\mathcal{B}$-coordenadas de $\mathbf{x}$, entonces el vector en $\mathbb{R}^n$

$$\left[\mathbf{x}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

es el **vector de coordenadas de x (respecto de $\mathcal{B}$), o el vector de $\mathcal{B}$-coordenadas de x**. El mapeo $\mathbf{x} \mapsto \left[\mathbf{x}\right]_{\mathcal{B}}$ es el **mapeo de coordenadas (determinado por $\mathcal{B}$)**

Sistemas de coordenadas

EJEMPLO 1 Considere una base $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1\}$ para $\mathbb{R}^2$, donde $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Suponga que $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^2$ tiene el vector coordenadas $\left[\mathbf{x}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$. Determine $\mathbf{x}$.

EJEMPLO 2 Las entradas en el vector $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}$ son las coordenadas de $\mathbf{x}$ respecto de la base estándar $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1\}$, ya que

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} 6 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot \mathbf{e}_1 + 6 \cdot \mathbf{e}_2$$

Si $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, entonces $\left[\mathbf{x}\right]_{\mathcal{E}} = \mathbf{x}$

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

EJEMPLO 3 Sean $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ y $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$.

Determine el vector de coordenadas $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ de $\mathbf{x}$ respecto de $\mathbf{B}$.

Sistemas de coordenadas

Coordenadas en $\mathbb{R}^n$

Sean $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ una base de $\mathbb{R}^n$ y

$$P_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{b}_n \end{bmatrix} .$$

La ecuación vectorial

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + \cdots + c_n\mathbf{b}_n$$

es equivalente a

$$\boxed{\mathbf{x} = P_{\mathcal{B}} \left[\mathbf{x}\right]_{\mathcal{B}}}$$

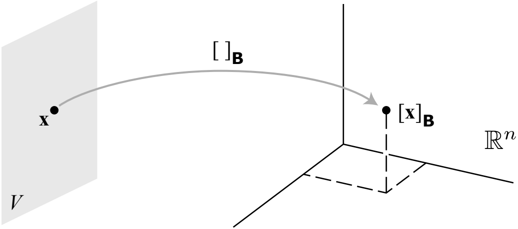
$P_{\mathcal{B}}$ se llama **matriz de cambio de coordenadas** de $\mathcal{B}$ a la base estándar en $\mathbb{R}^n$.
Como las columnas de $P_{\mathcal{B}}$ forman una base de $\mathbb{R}^n$, entonces $P_{\mathcal{B}}$ es invertible. Entonces

$$P_{\mathcal{B}}^{-1}\mathbf{x} = \left[\mathbf{x}\right]_{\mathcal{B}}$$

Sistemas de coordenadas

El mapeo de coordenadas

La elección de una base $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ de un espacio vectorial V introduce un sistema de coordenadas en V. El mapeo de coordenadas $\mathbf{x} \mapsto \left[\mathbf{x}\right]_{\mathcal{B}}$ conecta al espacio V, posiblemente desconocido, con el conocido espacio $\mathbb{R}^n$.



El mapeo de coordenadas de V sobre $\mathbb{R}^n$.

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

Teorema.

Sea $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ una base para un espacio vectorial V. Así, el mapeo de coordenadas $x \mapsto [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ es una transformación lineal uno a uno y sobreyectiva de V en $\mathbb{R}^n$.

El mapeo de coordenadas en el teorema anterior es un importante ejemplo de un isomorfismo de V en $\mathbb{R}^n$. En general, una transformación lineal uno a uno de un espacio vectorial V en un espacio vectorial W se llama isomorfismo de V en W (el término proviene de los vocablos griegos iso, que significa “lo mismo”, y morfé, que significa “forma” o “estructura”). La notación y la terminología para V y W pueden diferir, pero los dos espacios son indistinguibles como espacios vectoriales. Cada cálculo de espacio vectorial en V se reproduce con exactitud en W, y viceversa. En particular, cualquier espacio vectorial real con una base de n vectores es indistinguible de $\mathbb{R}^n$.

EJEMPLO 4 Sea $\mathcal{B}$ la base estándar del espacio $\mathbb{P}_3$ de polinomios; es decir, sea $\mathcal{B} = \{1, t, t^2, t^3\}$. Un elemento típico **p** de $\mathbb{P}_3$ tiene la forma

$$\mathbf{p}(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$

Como **p** ya es combinación lineal de los elementos de la base se sigue que

$$[\mathbf{p}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} .$$

Así, el mapeo de coordenadas $\mathbf{p} \mapsto [\mathbf{p}]_{\mathcal{B}}$ es un isomorfismo de $\mathbb{P}_3$ sobre $\mathbb{R}^4$.

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

EJEMPLO 5 Utilice vectores de coordenadas para comprobar que los polinomios $1 + 2t^2$, $4 + t + 5t^2$ y $3 + 2t$ son linealmente dependientes en $\mathbb{P}_2$.

EJEMPLO 6 Sea

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

$\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ es una base para $H = \text{Gen}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$. Determine si $\mathbf{x}$ se encuentra en H y, si lo está, encuentre el vector de coordenadas de $\mathbf{x}$ respecto de $\mathcal{B}$.