PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TEMPORADA ACADÉMICA DE VERANO 2019

INTERROGACIÓN 1
MAT1640

Problema 1 Considere la EDO

$$(x-1)\,y' = \left(y^2-1\right).$$

(a) Encuentre una solución general y determine el dominio de las soluciones obtenidas.

(b) Encuentre, si existe, una solución singular.

(c) Determine valores de a y b para los cuales se puede asegurar que $y(a)=b$ siempre tiene una única solución local.

(d) Considere la condición inicial $y(1)=b$. Determine los valores de b para los cuales existe una única solución, existen infinitas soluciones, o no existen soluciones.

Solución.

(a) La ecuación es separable por lo que

$$\ln|x-1| + C = \int \frac{1}{x-1}dx = \int \frac{1}{y^2-1}dy = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{y-1}-\frac{1}{y+1}\right)dy = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right|.$$

Simplificando obtenemos

$$\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = C(x-1)^2\ ,C>0$$

y, permitiendo $C\in\mathbb{R}$, simplemente

$$y(x) = \frac{C(x-1)^2+1}{1-C(x-1)^2}. \quad \left(\text{es posible, y correcto, llegar a } y(x) = \frac{(x-1)^2+C}{C-(x-1)^2}\right)$$

(1 punto)

Esta soluciones tienen como dominio todo $\mathbb{R}$ excepto los puntos x tales que $C(x-1)^2=1$. Luego, si $C\le 0$ el dominio es todo $\mathbb{R}$, mientras que si $C>0$ entonces el dominio es $\mathbb{R}\setminus\{1-\sqrt{\frac{1}{C}}, 1+\sqrt{\frac{1}{C}}\}$. (En caso de haber obtenido la segunda familia, los puntos problemáticos son $1\pm\sqrt{C}$, $C>0$). **(1 punto)**

(b) La función $y(x)=-1$ es solución de la ecuación, y es singular pues

$$-1 = \frac{C(x-1)^2+1}{1-C(x-1)^2} \ \text{ si y solo si } \ -1=1$$

y entonces $y(x)=-1$ no es elemento de la familia. (Si en la parte anterior se obtuvo la segunda familia, entonces $y(x)=1$ es singular). **(1 punto)**

(c) Si $x \neq 1$ podemos reescribir la EDO como

$$y' = \frac{y^2 - 1}{x - 1} = f(x, y)$$

y vemos que tanto $f(x, y)$ como

$$\partial y f(x, y) = \frac{2y}{x - 1}$$

son continuas en todo el plano excepto la linea $x = 1$. Luego, por el Teorema de Picard, $y(a) = b$ siempre tiene una única solución local provisto que $a \neq 1$. **(1,5 puntos)**

(d) De la EDO obtenemos que si $y(1) = b$ entonces

$$0 = 0 \cdot y' = b^2 - 1$$

por lo que no hay soluciones si $b \neq 1$ y $b \neq -1$. Notemos que para todo elemento de la familia obtenida se cumple $y(1) = 1$ independiente del valor de C (en el caso de la segunda familia se debe pedir $C \neq 0$). Luego, existen infinitas soluciones si $b = 1$. Si $b = -1$ tenemos la única solución $y(x) = -1$, pues toda otra solución no constante del PVI debe ser localmente un elemento de la familia general, y ninguna de ellas alcanza el valor -1 **(1,5 puntos)**.

Observación: lo anterior no es una demostración de que $y(x) = -1$ es la única solución tal que $y(1) = -1$, pero considero suficiente que el estudiante haga referencia a que ningún elemento de la familia general satisface la condición inicial (ningún elemento no constante en el caso de la segunda familia).

Problema 2 Encuentre soluciones para dos, y sólo dos, de los siguientes PVI:

(a) $y' = \frac{2yx^2+y^3}{x^3}$, $y(1) = 2$.

(b) $(3x^2y^3 + 2xy + y)dx + (4x^3y^2 + 2x^2 + 2x)dy = 0$, $y(1) = 1$.

(c) $\left[x\sin(y) + e^{-\cos(y)}\right] y' = 1$, $y(1) = 0$.

(d) $(2x\sin(y)\cos(y))\, y' = 4x^2 + \sin^2(y)$, $y(1) = \pi/4$.

Solución.

(a) El lado derecho de la EDO es homogéneo de grado 0, por lo que ponemos $u = y/x$. Tenemos $xu' + u = y'$ y entonces

$$xu' + u = \frac{2yx^2 + y^3}{x^3} = 2\frac{y}{x} + \frac{y^3}{x^3} = 2u + u^3$$

por lo que

$$u' - \frac{u}{x} = \frac{u^3}{x}.$$

Esta ecuación es de Bernoulli, por lo que ponemos $v = u^{-2}$. Entonces $v' = -2u^{-3}u'$ y

$$-\frac{1}{2}u^3v' - \frac{u}{x} = \frac{u^3}{x}\ ,\ v' + 2\frac{v}{x} = -2\frac{1}{x} \quad \textbf{(1 punto)}$$

Esta ecuación es lineal con factor integrante $\rho(x) = \exp\left(\int 2/x dx\right) = x^2$. Al multiplicar por x^2 tenemos

$$\frac{d}{dx}\left(vx^2\right) = -2x\ ,\ v(x) = \frac{1}{x^2}\left(-x^2 + C\right).$$

Finalmente, obtenemos

$$u(x) = \pm\sqrt{\frac{x^2}{C - x^2}}\ ,\ y = \pm x\sqrt{\frac{x^2}{C - x^2}} \quad \textbf{(1 punto)}$$

Para cumplir la condición inicial tomamos

$$2 = y(1) = \sqrt{\frac{1}{C-1}}\ ,\ 4(C-1) = 1\ ,\ C = \frac{5}{4} \quad \textbf{(1 punto)}$$

(b) Vemos si la ecuación es exacta. Tenemos $M = 3x^2y^3 + 2xy + y$, $N = 4x^3y^2 + 2x^2 + 2x$

$$\partial_y M - \partial_x N = \left(9x^2y^2 + 2x + 1\right) - \left(12x^2y^2 + 4x + 2\right) = -3x^2y^2 - 2x - 1$$

así que no es exacta, pero tenemos

$$\frac{\partial_y M - \partial_x N}{M} = -\frac{1}{y}$$

por lo que usamos el factor integrante $\exp\left(\int 1/y dy\right) = y$. **(1 punto)**

Renombramos $M = 3x^2y^4 + 2xy^2 + y^2$, $N = 4x^3y^3 + 2x^2y + 2xy$, y calculamos

$$F = \int M dx = x^3y^4 + x^2y^2 + y^2x + g(y)\ ,\ 4y^3x^3 + 2x^2y + 2yx + g'(y) = N\ ,\ g' = 0\ ,\ g(y) = C.$$

Luego, podemos tomar simplemente $g = 0$,

$$F(x, y) = x^3y^4 + x^2y^2 + y^2x \quad \textbf{(1 punto)}$$

y definimos implicitamente soluciones por medio de

$$x^3y^4 + x^2y^2 + y^2x = C$$

Para cumplir $y(1) = 1$ hay que tomar $C = 3$. **(1 punto)**

(c) Si consideramos a x como función de y tenemos

$$x' = \frac{1}{y'} = x\sin(y) + e^{-\cos(y)}$$

la cual es lineal con factor integrante $\rho(y) = \exp\left(\int -\sin(y)dy\right) = \exp(\cos(x))$. **(1 punto)**

Al multiplicar obtenemos

$$\frac{d}{dy}(\rho x) = 1$$

y entonces

$$x = e^{-\cos(y)}(y + C) \quad \textbf{(1 punto)}$$

Para cumplir la condición inicial basta tomar

$$1 = e^{-1}C \ , \ C = e \quad \textbf{(1 punto)}$$

(d) Si ponemos

$$v = \sin^2 y$$

entonces

$$v' = 2\sin y \cos y y'$$

y la EDO se transforma en

$$xv' = 4x^2 + v \quad \textbf{(1 punto)}$$

la cual es lineal. Usando el factor integrante $\rho(x) = \frac{1}{x}$ tenemos

$$4 = \frac{d}{dx}\left(vx^{-1}\right) \ , \ v = 4x^2 + Cx.$$

Luego, obtenemos la solución implicita

$$\sin^2 y = 4x^2 + Cx \quad \textbf{(1 punto)}$$

Para cumplir la condición inicial se debe tener

$$\frac{1}{2} = 4 + C \ , \ C = -\frac{7}{2} \quad \textbf{(1 punto)}$$

(*Observación:* esta última EDO es 'exactable', en cuyo caso asignar **1 punto** por encontrar el factor integrante x^{-2}, **1 punto** por encontrar $F = -4x + \sin^2(y)/x$, y **1 punto** por definir implícitamente la solución y encontrar el valor apropiado de la constante)

Problema 3 Suponga que la tasa a la que decrece la temperatura absoluta $T(t)$ de un cuerpo enfriándose en un medio de temperatura constante A, es proporcional a la diferencia entre la temperatura del medio al cuadrado y la temperatura del cuerpo al cuadrado. Suponga que en una situación específica $A = 200$ K. Si en el tiempo $t = 0$ la temperatura del cuerpo es de 400 K, y en el tiempo $t = 1$ es de 300 K, determine la constante de proporcionalidad y la función T.

Solución.
De acuerdo a lo que se indica

$$T' = k\left(200^2 - T^2\right) \quad \textbf{(2 puntos)}$$

Esta ecuación es separable con

$$kt + C = \int k dt = \int \frac{1}{200^2 - T^2} dT = \frac{1}{400} \int \frac{1}{200 - T} + \frac{1}{200 + T} dT = \frac{1}{400} \ln\left(\left|\frac{200 + T}{200 - T}\right|\right).$$

De aquí obtenemos que

$$\frac{200 + T}{200 - T} = Ce^{400kt}$$

y

$$T(t) = \frac{200Ce^{400kt} - 200}{1 + Ce^{400kt}} \quad \textbf{(2 puntos)}$$

Usando que $T(0) = 400$ tenemos

$$\frac{200 + 400}{200 - 400} = C \ , \ C = -3. \quad \textbf{(1 punto)}$$

Sustituyendo el valor de C y usando $T(1) = 300$ tenemos

$$\frac{200 + 300}{200 - 300} = -3e^{400k} \ , \ k = \frac{1}{400} \ln\left(\frac{5}{3}\right).$$

Luego

$$T(t) = -\frac{600(5/3)^t + 200}{1 - 3(5/3)^t} = 200\left(\frac{3(5/3)^t + 1}{3(5/3)^t - 1}\right) \quad \textbf{(1 punto)}$$

Problema 4 Suponga que un virus zombi ataca a la humanidad. Según la información disponible, el virus ha infectado una poblacion aislada de 10 millones de habitantes, transformando a Z_0 de ellos en zombies. Al parecer, la cantidad de zombies $Z(t)$ se incrementa solo por transmición directa del virus a sujetos sanos. Por otro lado, se ha desarrollado una vacuna que revierte completamente los efectos del virus. Bajo la hipótesis de que la suma de sujetos sanos y zombies es constante, se tiene que un modelo razonable es

$$Z'(t) = \alpha Z\,(10 - Z) - \beta\,(10 - Z)\ ,\ Z(0) = Z_0$$

donde $\alpha > 0$ mide la habilidad de los zombies para reproducirse, $\beta \geq 0$ mide la efectividad en el uso de la vacuna, y todo está medido en millones. En lo que sigue, considere $\alpha > 0$ como fijo y $\beta \geq 0$ como un parámetro.

(a) Encuentre los puntos críticos de la ecuación.

(b) Clasifique cada uno de los puntos críticos encontrados en función del valor de β.

(c) Dado distintos valores de $\beta \geq 0$ determine los valores de Z_0 (con $0 \leq Z_0 \leq 10$) para los cuales la población de zombies tiende asintóticamente a 10.

Solución.

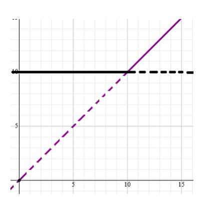
(a) Los puntos críticos son soluciones de $0 = (\alpha Z - \beta)\,(10 - Z) = f(Z)$. Luego, son $Z_1 = 10$ y $Z_2 = \beta/\alpha$ (evidentemente, es posible que $Z_1 = Z_2$). **(1,5 puntos)**

(b) $f(Z)$ es una función cuadrática con coeficiente lider negativo. Si sus dos raices coinciden, entonces $f \leq 0$. En caso contrario, en la primera raiz f' es positivo, mientras que en la segunda es negativo. Por lo tanto, si $\beta = \alpha 10$, $Z_1 = Z_2 = 10$ es un nodo **(0,5 puntos)**. Si $\beta > \alpha 10$ entonces $Z_1 = 10$ es fuente, y $Z_2 = \beta/\alpha$ es sumidero **(1 punto)**. Si $\beta < \alpha 10$ entonces $Z_1 = 10$ es sumidero, y $Z_2 = \beta/\alpha$ es fuente **(1 punto)**.

(c) Es más fácil ver lo que ocurre haciendo diagramas de fase:

$$\begin{array}{ll} \text{caso } \beta < \alpha 10: & \leftarrow \beta/\alpha \rightarrow 10 \leftarrow \\ \text{caso } \beta = \alpha 10: & \leftarrow \beta/\alpha = 10 \leftarrow \\ \text{caso } \beta > \alpha 10: & \leftarrow 10 \rightarrow \beta/\alpha \leftarrow \end{array}$$

o un diagrama de bifurcación (hecho aquí con $\alpha = 1$, pero el dibujo es, cualitativamente, el mismo para todo $\alpha > 0$):



Si $Z_0 = 10$ entonces $Z(t) = 10$ y, trivialmente, se tiene lo deseado independiente del valor de $\beta \geq 0$ **(0,5 puntos)**. El único otro caso posible es cuando $\beta < \alpha 10$ y $Z_0 \in (\beta/\alpha, 10]$. **(1,5 puntos)**

(*Observación:* no se pide que el estudiante haga diagrama de fase o de bifurcación.)