Pontificia Universidad Católica De Chile
Facultad De Matemáticas
Departamento De Matemática
TAV 2023

Álgebra Lineal - MAT1203
Pauta Interrogación 4

1. Sean $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ y $\mathcal{D} = \{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2\}$ las bases de los espacios vectoriales V y W respectivamente. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal con la propiedad

$$T(\mathbf{b}_1) = 3\mathbf{d}_1 - 5\mathbf{d}_2, \quad T(\mathbf{b}_2) = -\mathbf{d}_1 + 6\mathbf{d}_2, \quad T(\mathbf{b}_3) = 4\mathbf{d}_2$$

Determine la matriz para T respecto a $\mathcal{B}$ y $\mathcal{D}$.

Solución La matriz T respecto a $\mathcal{B}$ y $\mathcal{D}$ es

$$[T] = \begin{bmatrix} [T(b_1)]_{\mathcal{D}} & [T(b_2)]_{\mathcal{D}} & [T(b_3)]_{\mathcal{D}} \end{bmatrix}.$$

Calculamos cada columna: $[T(b_1)]_{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}, [T(b_1)]_{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \end{bmatrix}, [T(b_1)]_{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$. Por lo tanto

$$[T] = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -5 & 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Puntaje

- 1,5 puntos por cada columna correcta (4,5 puntos en total)
- 1,5 puntos por escribir la matriz completa.

2. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique su respuesta.
   (a) Si A es una matriz diagonalizable, entonces también es invertible.
   (b) Existen matrices de la forma $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ con $b \neq 0$ cuyos valores propios son 2 y 3.

Solución

(a) Falso. La matriz nula es diagonalizable y no invertible.

(b) Falso. Si $b \neq 0$ entonces sus valores propios son $\lambda = a \pm ib$ lo que corresponde a números complejos. Por lo tanto 2 y 3 no pueden ser valores propios.

Puntaje

- 1 punto por determinar correctamente si es verdadera o falsa cada afirmación (2 puntos en total).
- 2 puntos por justificar correctamente cada respuesta (4 puntos en total).

3. Sean $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 5 \\ -9 \\ 5 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $W = \text{Gen}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$.

   (a) Encuentre la proyección de $\mathbf{y}$ al plano W.

   (b) Encuentre la distancia de $\mathbf{y}$ al plano W.

Solución

(a) Los vectores $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ son ortogonales. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\text{proy}_W(\mathbf{y}) &= \frac{\mathbf{y}\cdot\mathbf{u}_1}{||\mathbf{u}_1||^2}\mathbf{u}_1 + \frac{\mathbf{y}\cdot\mathbf{u}_2}{||\mathbf{u}_2||^2}\mathbf{u}_2 \\
&= \frac{\begin{bmatrix} 5 \\ -9 \\ 5 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}}{9+25+1}\begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{\begin{bmatrix} 5 \\ -9 \\ 5 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}{9+4+1}\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -9 \\ -1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

(b) La distancia de $\mathbf{y}$ a W está dada por $||\mathbf{y} - \text{proy}_W(\mathbf{y})||$. Así:

$$\mathbf{y} - \text{proy}_W(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} 5 \\ -9 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ -9 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

por lo que

$$||\mathbf{y} - \text{proy}_W(\mathbf{y})|| = \sqrt{4+0+36} = \sqrt{40}.$$

Puntaje

- 0,5 puntos por escribir una fórmula para calcular la proyección.
- 1 punto por calcular la proyección sobre cada vector de la base de W de manera correcta (2 en total)
- 0,5 puntos por calcular $\text{proy}_W(\mathbf{y})$ correctamente.
- 1 punto por establecer que la distancia corresponde a $||\mathbf{y} - \text{proy}_W(\mathbf{y})||$.
- 1 punto por encontrar el vector $\mathbf{y} - \text{proy}_W(\mathbf{y})$
- 1 punto por calcular correctamente la distancia.

4. Sean $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(a) Compruebe que $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son vectores propios de A.

(b) Identifique un tercer vector propio de A recordando que este debe ser ortogonal a los dos anteriores.

(c) Diagonalice ortogonalmente la matriz A.

Solución

(a) Notamos que

$$A\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 \\ 20 \\ 10 \end{bmatrix} = 10\mathbf{v_1}$$

y

$$A\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{v}_2.$$

Esto significa que $\mathbf{v_1}$ es un vector propio de A asociado al valor propio 10 y $\mathbf{v_2}$ es un vector propio de A asociado al valor propio 1.

(b) Un vector $\mathbf{u}$ ortogonal a $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ cumple que $\mathbf{v_1} \cdot \mathbf{u} = 0$ y $\mathbf{v_2} \cdot \mathbf{u} = 0$, es decir,

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y resolviendo el sistema tenemos $\mathbf{u} = \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, un vector ortogonal a los dos anteriores es $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$. Comprobamos ahora que v_3 es también un vector propio de A:

$$A\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix} = \mathbf{v}_3.$$

Por lo tanto $\mathbf{v_3}$ es otro valor vector propio de A asociado al valor propio 1.

(c) Como $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$ son una base ortogonal de vectores propios de A, basta definir P como la matriz cuyas columnas son los vectores normalizados y D la matriz diagonal de valores propios correspondientes, es decir,

$$P = \begin{bmatrix} -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{18} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{18} \\ 1/\sqrt{5} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{18} \end{bmatrix} \text{ y } D = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

para que $A = PDP^T$.

Puntaje

- 1 punto por comprobar que cada vector dado es un vector propio. Considerar también si el/la estudiante usa polinomio característico y calcula los espacios propios correspondientes (2 puntos en total).
- 2 puntos por determinar un vector ortogonal a los vectores dados. Considerar también si lo hace mediante Gram-Schmidt al ortogonalizar una base de un espacio propio.
- 1 punto por definir correctamente P. Asignar sólo $0,5$ puntos si olvida normalizar.
- 1 punto por definir correctamente D.