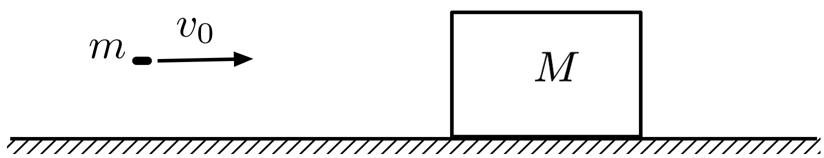
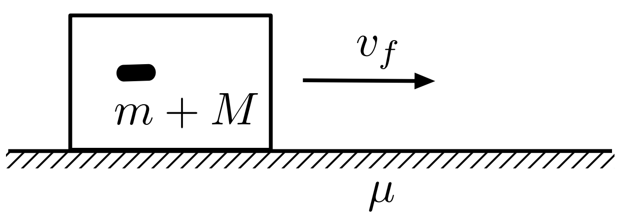
Problemas de Momentum Lineal

Rafael Benguria y M. Cristina Depassier

1. Una bala de masa m es disparada con velocidad v_0 hacia un bloque de masa M (ver figura). El bloque con la bala incrustada desliza sobre la superficie horizontal con un coeficiente de roce cinético μ. Encuentre la distancia s que recorre el sistema bloque–bala antes de detenerse.



Solución: Como la bala se queda incrustada en el bloque, el choque de la bala contra el bloque es un choque plástico. Por conservación del momentum lineal en la dirección horizontal podemos calcular fácilmente la velocidad v_f con que emerge el sistema bloque–bala después del choque. El momentum inicial del sistema es implemente $m\,v_0$ pues el bloque está originalmente en reposo. Y, como el bloque y la bala se mueven juntos después del choque, su momentum lineal es $(m + M)\,v_f$.



Por conservación de momentum lineal entonces tenemos que,

$$m\,v_0 = (m + M)\,v_f,$$

de modo que

$$v_f = \frac{m}{m + M}\,v_0. \tag{1}$$

Para calcular la distancia que recorre el sistema bloque–bala antes de detenerse basta usar el balace energía trabajo. Si llamamos K_1 a la energía cinética del sistema justo después del choque y K_2 la energía cinética del sistema cuando se detiene tenemos, usando (1), que

$$K_1 = \frac{1}{2}(m + M)\,v_f^2 = \frac{1}{2}\frac{m^2}{m + M}\,v_0^2, \tag{2}$$

y, ciertamente, $K_2 = 0$. Por el balance Energía–Trabajo tenemos que

$$\Delta K = K_2 - K_1 = W_{1\to 2}. \tag{3}$$

Aquí, $W_{1\to 2}$ es el trebajo hecho por la fuerza de roce sobre el sistema bloque–bala cuando éste se mueve desde la posición 1 a la posición 2. La fuerza de roce, contraria al movimiento, es constante y está dada por $f_r = \mu\, N = \mu\,(M+m)g$. Entonces,

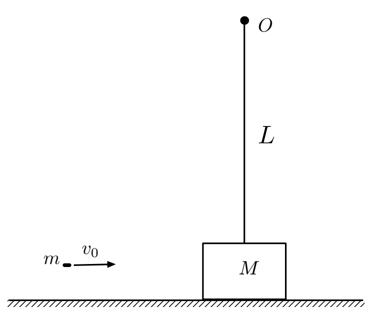
$$W_{1\to 2} = -f_r\, s = -\mu\,(M+m)\,g\,s. \tag{4}$$

Finalmente, de (2), (3) y (4) finalmente obtenemos,

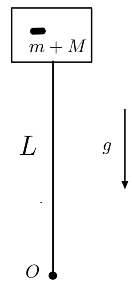
$$s = \frac{1}{2}\left(\frac{m}{m+M}\right)^2 \frac{v_0^2}{\mu\, g}. \tag{5}$$

Como es de esperar, si $\mu = 0$, $s = \infty$.

2. Se dispara un proyectil de masa m con una velocidad v sobre un péndulo balístico que tiene masa M. El péndulo está sujeto al extremo inferior de una cuerda ideal de longitud L que puede girar en torno a su extremo superior. El proyectil se incrusta en el péndulo proveyendo un movimiento de rotación en torno al punto de sujeción. Hallar la velocidad mínima del proyectil para que el péndulo llegue a describir una circunferencia completa manteniendo la cuerda bajo tensión.



Solución: Lo primero que debemos hacer es resolver el choque plástico entre el proyectil y el péndulo. Se trata de un choque plástico unidimensional. La velocidad con que emrge el bloque de masa M con la bala incrustada la encontramos por conservación de momentum. El momentum inicial a lo largo de la velocidad de la bala es $P_{in} = m\,v$ y el momentum del sistema bloque–bala es $P_{fin} = (M+m)\,V$, en que hemos llamado V a la velocidad del sistema después del choque. Por Conservación de Momentum Lineal, $P_{in} = P_{fin}$ de donde obetenmos,



$$V = \frac{m}{m+M}\, v. \tag{6}$$

Luego del choque el sistema Bloque-Bala realiza un movimiento circular de radio L en torno al punto de sujeción O. Queremos ver cual es la condición sobre V para que el sistema logre llegar a la posición mas alta. Para hacer esto combinamos la ecuación de conservación de energía y las ecuaciones de la dinámica. Para identificar las dos situaciones llamaremos 1 al instante en que el sistema se encuentra en la posición más baja (posición de partida) y 2 al instante en que el sistema llega a la posición mas alta. Si consideramos como nivel de referencia para el potencial gravitatorio a la posición más baja, tendremos que las energías potenciales en ambos instantes están dadas por

$$V_{g,1} = 0 \qquad y \qquad V_{g,2} = (M+m)\, g\, (2L), \tag{7}$$

respectivamente. Por otra parte, las respectivas energías cinéticas están dadas por,

$$K_1 = \frac{1}{2}(m+M)V^2 = \frac{1}{2}\frac{m}{m+M}\, mv^2 \qquad y \qquad K_2 = \frac{1}{2}(m+M)v_2^2, \tag{8}$$

en que hemos llamado v_2 al módulo de la velocidad con que el sistema llega a la posición superior. usando *Conservación de Energía*,

$$K_1 + V_{g,1} = K_2 + V_{g,2}$$

y (7) y (8) obtenemos,

$$v_2^2 = \frac{m^2}{(m+M)^2}\, v^2 - 4\, g\, L. \tag{9}$$

Cuando el sistema se encuentra en la posición más alta actúan dos fuerzas: su peso $(m+M)g$ y la tensión de la cuerda T, ambas apuntando hacia abajo. Si usamos ccordenadas polares (centradas en O, y con $\rho = L$, cosntante) para describir el movimiento del sistema, la aceleración del bloque está dada por

$$\vec{a} = -L\,\dot{\theta}^2\hat{\rho} + L\ddot{\theta}\hat{\theta}.$$

y la fuerza en el punto mas alto por

$$\vec{T} + (M+m)\vec{g} = -\left(T + (m+M)g\right)\hat{\rho},$$

y, usando las ecuaciones de Newton y el hecho que $v_1 = L\dot{\theta}$, encontramos que,

$$T + (m+M)g = (m+M)L\dot{\theta}^2 = (m+M)\frac{v_2^2}{L}, \tag{10}$$

De las ecuaciones (9) y (10) finalmente encontramos,

$$T = \frac{m^2}{m+M}\frac{v^2}{L} - 5(m+M)g. \tag{11}$$

Para que el sistema llegue hasta la posición superior es necesario que $T > 0$ siempre y, en particular, en el punto mas alto. Imponiendo $T > 0$ en (11) tenemos entonces la condición,

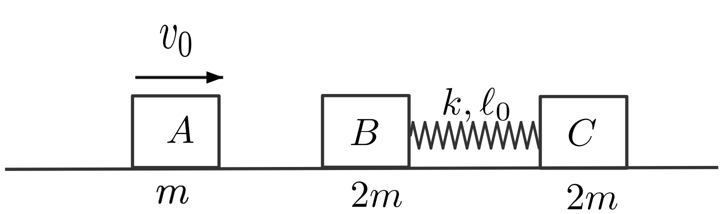
$$v > \frac{m+M}{m}\sqrt{5\,g\,L}.$$

3. Considere un bloque de masa m que se desplaza hacia la derecha con rapidez inicial v_0 sobre una mesa horizontal lisa (i.e., sin roce) y eventualmente choca elásticamente contra el sistema de la figura que está inicialmente en reposo. Este sistema consiste en dos bloques, cada uno de ellos con masa $2\,m$, unidos por una resorte de constante elástica k y largo natural ℓ_0.

   a) Encuentre la velocidad del Centro de Masa del sistema de dos bloques justo después del choque.

   b) Encuentre la compresión máxima del sistema de dos bloques después del choque.

   c) Encuentre la frecuencia de las oscilaciones que realiza el sistema de dos bloques después del choque.



Solución:

a) Llamemos A el bloque de masa m y, respectivamente B y C a los dos bloques del sistema de la derecha como se indica en la figura. Como la mesa es lisa, el bloque A se va a mover con rapidez constante, v_0 hasta que choca contra el bloque B.

En el instante del choque, las fuerzas de reacción (normales) entre A y B son tan grandes que podemos ignorar todas las demás, en particular la fuerza del resorte. Así es que lo único que interesa en ese instante es el choque elástico entre el bloque A y el bloque B. resolvamos primero ese choque. Llamemos $v_A = v_0$ y $v_B = 0$ a las velocidades iniciales de los bloques A y B (considerando la dirección psoitiva hacia la derecha). Del mismo modo, llamemos v_A^f y v_B^f a las respectivas velocidades inmediatamente después del choque. Para encontrar v_A^f y v_B^f, usamos el hecho que en un choque elástico en una dimensión se conserva el Momentum Lineal, i.e.,

$$m\, v_0 = m\, v_A^f + 2\, m\, v_B^f \tag{12}$$

y, se conserva el módulo de la velocidad relativa y se invierte su dirección, i.e.,

$$0 - v_0 = -(v_B^f - v_A^f). \tag{13}$$

Resolviendo el sistema (12) y (13) para v_A^f y v_B^f, encontramos,

$$v_A^f = -\frac{1}{3}\, v_0 \qquad y \qquad v_B^f = \frac{2}{3}\, v_0. \tag{14}$$

Así, el bloque A se devuelve (i.e., se mueve hacia la izauierda) con rapidez $v_0/3$ mientras que el bloque B se mueve hacia la derecha con rapidez $2\, v_0/3$. Justo después del choque, el bloque C no se ha movido, por lo tanto en ese instante su velocidad es aún cero. Entonces la velocidad del Centro de Masa del sistema B–C está dada por

$$V_{\text{CM}} = \frac{2\, mV_B^f + 2\, m \times 0}{2\, m + 2\, m} = \frac{1}{3}\, v_0. \tag{15}$$

Como luego del choque no hay fuerzas externas que actúen sobre el sistema B–C en la dirección horizontal, se conserva V_{CM} de este sistema. Así, el sistema de los dos bloques y el resorte se moveran hacia la derecha con $V_{\text{CM}} = v_0/3$.

b) Nótese que justo después del choque la velocidad relativa del bloque B con respecto al CM es

$$\frac{2}{3}\, v_0 - \frac{1}{3}\, v_0 = \frac{1}{3}\, v_0,$$

y la del bloque C,

$$0 - \frac{1}{3}\, v_0 = -\frac{1}{3}\, v_0.$$

Relativo al CM los bloques B y C se acercan (hacia el CM) obviamente con el mismo módulo de rapidez relativa porque ambos tienen la misma masa. Entonces, el resorte se empieza a comprimir. En el momento de máxima compresión los dos bloques están en reposo con respecto al CM, ó en otras palabras ambos se mueven co la misma velocidad (la del CM) relativa al suelo. Para calcular la compresión máxima podemos usar *conservación de energía*. Para eso compraremos dos situaciones. Llamemos 1 a la situación justo después del choque en que $v_B = 2\,v_0/3$, $v_C = 0$, y el resorte está en su largo natural. Por otra parte llamemos 2 a la situación en que el resorte está en su máxima compresión (digamos compresión d relativa a su largo natural) y los dos bloques se mueven con la velocidad del CM, i.e., $v_B = v_C = v_0/3$. Entonces la energía total del sistema B–C en la situación 1 está dada por,

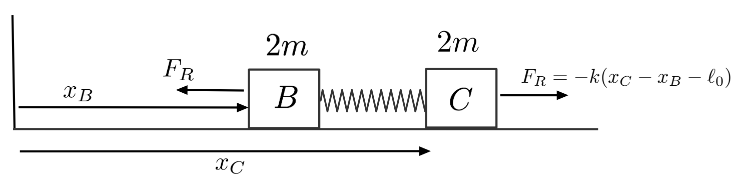
$$E_1 = \frac{1}{2}(2\,m)\left(\frac{2}{3}v_0\right)^2 = \frac{4}{9}m\,v_0^2, \tag{16}$$

en tanto que,

$$E_2 = \frac{1}{2}(2\,m)\left(\frac{1}{3}v_0\right)^2 + \frac{1}{2}(2\,m)\left(\frac{1}{3}v_0\right)^2 + \frac{1}{2}\,k\,d^2 = \frac{2}{9}m\,v_0^2 + \frac{1}{2}\,k\,d^2. \tag{17}$$

Por conservación de energía, $E_1 = E_2$ y de (16) y (17) obtenemos,

$$d = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{m}{k}}\,v_0. \tag{18}$$



c) Para encontrar la frecuencia de las oscilaciones del sistema B–C después del choque basta escribir las ecuaciones de Newton para cada uno de los bloques y luego restarlas para encontrar una ecuación para la separación entre los bloques: $x_C - x_B$. De la figura tenemos que la ecuación de movimiento del bloque B está dada por

$$2\,m\ddot{x}_C = F_R = -k(x_C - x_B - \ell_0), \tag{19}$$

en tanto que la ecuación de movimiento del bloque B está dada por,

$$2\,m\ddot{x}_B = -F_R = +k(x_C - x_B - \ell_0). \tag{20}$$

Restando (20) de (19) obtenemos,

$$2\,m(\ddot{x}_C - x_B) = -2\,k(x_C - x_B - \ell_0), \tag{21}$$

Llamando $s = x_C - x_B - \ell_0$ a la separación de los bloques medida con respecto al largo natural de los resortes, tenemos a partir de (21),

$$\ddot{s} + \Omega^2\,s = 0, \tag{22}$$

en que $\Omega = \sqrt{k/m}$. La ecuación (22) es una ecuación de movimiento armónico simple que tiene soluciones periódicas de período $2\pi/\Omega$. Entonces la frecencia de las oscilaciones (i.e., el inverso del período) está dada por,

$$f = \frac{\Omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{23}$$

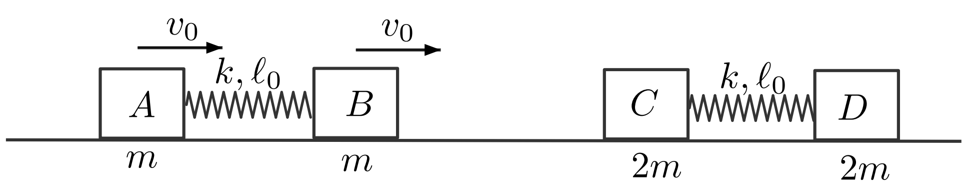
4. Dos bloques de masa m unidos por un resorte se desplazan como un todo con rapidez v_0, con el resorte en su largo natural. Choca elásticamente con otro sistema formado por dos masas de valor $2m$ cada una, también unidas por un resorte idéntico al anterior, y que se encuentran en reposo. Calcule

   a) la velocidad del centro de masa del sistema formado por los bloques C y D de la figura,

   b) la velocidad del centro de masa del sistema formado por los bloques A y B de la figura,

   c) la compresión máxima del resorte que une A con B y

   d) la compresión máxima del resorte que une C con D.



Solución:

Primero consideramos el choque entre B y C. La conservación de momentum es

$$mv_0 = mv_B + 2mv_C, \tag{24}$$

y como vimos de la conservación de momentum y energía cinética en el choque de dos partículas se deduce que la relación entre sus velocidades relativas inicial y final es $v_{2f} - v_{1f} = v_{1i} - v_{2i}$. En este caso, esta relación es

$$v_C - v_B = v_0 \tag{25}$$

Resolviendo el sistema (24), (25) se encuentra que luego del choque la velocidad de los bloques B y C es

$$v_B = -\frac{v_0}{3}, \qquad v_C = \frac{2v_0}{3}.$$

Entonces después del choque la velocidad del centro de masa de los bloques C-D es

$$v_{CM}^{CD} = \frac{2m(2/3)v_0 + 2m \times 0}{4m} = \frac{v_0}{3}.$$

b) De la misma forma la velocidad del CM de los bloques A-B es

$$v_{CM}^{AB} = \frac{mv_0 + m(-v_0/3)}{2m} = -\frac{v_0}{3}.$$

c) Inmediatamente después del choque el resorte todavía no se ha comprimido, por lo que la energía inicial del sistema A-B es

$$E_{AB} = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{v_0}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}mv_0^2.$$

Esta energía se conserva durante su movimiento ya que la fuerza del resorte es conservativa y no hay otras fuerzas que hagan trabajo. El momento de máxima compresión se produce cuando tanto A como B se mueven con la velocidad del centro de masa (ver nota al final). En este momento la energía es

$$E_1 = \frac{1}{2}k\delta_{AB}^2 + \frac{1}{2}m(v_{CM}^{AB})^2 + \frac{1}{2}m(v_{CM}^{AB})^2$$

Reemplazando el valor de v_{CM}^{AB} e igualando $E_1 = E_{AB}$ obtenemos que la compresión máxima del resorte AB es

$$\delta_{AB} = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{m}{k}}v_0.$$

d) La energía inicial del sistema C-D es

$$E_{CD} = \frac{1}{2}(2m)\left(\frac{2v_0}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}mv_0^2.$$

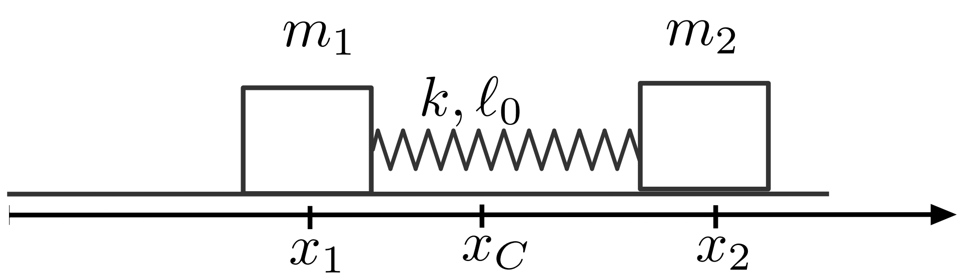
y la energía en el momento de compresión máxima es

$$E_2 = \frac{1}{2}k\delta_{CD}^2 + \frac{1}{2}(2m)(v_{CM}^{CD})^2 + \frac{1}{2}(2m)(v_{CM}^{CD})^2$$

Nuevamente, reemplazando v_{CM}^{CD} e igualando $E_2 = E_{CD}$ se obtiene

$$\delta_{CD} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{m}{k}}v_0.$$

Nota:



Si el sistema va desplazándose además de oscilar, el estiramiento del resorte es

$$\delta(t) = x_2(t) - x_1(t) - \ell_0.$$

Es máximo cuando

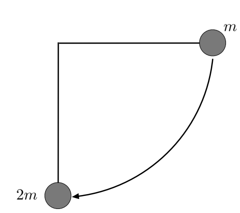
$$\frac{d\delta(t)}{dt} = 0 \implies \dot{x}_2 = \dot{x}_1,$$

es decir la velocidad de m_1 y de m_2 son iguales. En este instante la velocidad del CM es

$$v_C = \frac{m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2}{m_1 + m_2} = \dot{x}_1 = \dot{x}_2.$$

Como no hay fuerza externas, la velocidad del CM es constante y en el estiramiento máximo la velocidad de cada masa es igual a la del CM.

5. Una partícula de masa m se encuentra unida a un punto fijo O por medio de una cuerda ideal de largo ℓ como se indica en la figura. Nótese que la cuerda se encuentra en la dirección horizontal en la posición inicial. Se deja caer la masa m desde el reposo y choca contra otra partícula de masa $2\,m$, que inicialmente está en reposo suspendida del techo por medio de una cuerda ideal vertical como se indica en la figura. Si el choque entre las dos partículas es elástico calcule hasta que altura llegan estos dos péndulos después del choque.



Solución: Este problema lo hacemos en tres etapas. En la etapa 1 usamos conservación de energía para encontrar la velocidad con que la partícula de masa m llega abajo, justo antes de chocar a la otra. En la etapa 2 resolvemos el choque elástico entre las dos masas y, finalmente, en la etapa 3 usamos conservación de energía para encontrar las alturas h_1 y h_2 que alcanzan los dos bloques después del choque.

Etapa 1: Si llamamos E_1 a la energía inicial del péndulo 1, E_2 a la energía cuando m alcanza la posición inferior, v_0 a la velocidad de m en esa posición y, si usamos la posición inferior como nivel de referencia del potencial gravitatorio tenemos que,

$$E_1 = m\ g\,\ell, \tag{26}$$

y

$$E_2 = \frac{1}{2} m v_0^2 \tag{27}$$

de modo que, usando conservación de energía, obtenemos de inmediato que,

$$v_0 = \sqrt{2\,g\,\ell}. \tag{28}$$

Etapa 2: Ahora resolvemos el choque elástico (unidimensional) entre las partículas de masa m y $2m$. Llamaremos positivas a las velocidad que van hacia la izquierda en la figura. Llamaremos v_1 y v_2 a las velocidades con que emergen del choque las partículas de masa m y $2m$ respectivamente. Por conservación de momentum lineal tenemos que,

$$m v_0 = m v_1 + 2 m v_2. \tag{29}$$

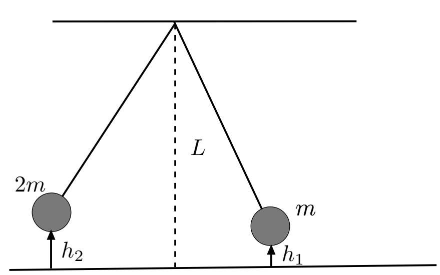
Como el choque es elástico se conserva el módulo de la velocidad relativa y hay un *cambio* en la dirección de ésta. Tenemos entonces que

$$(0 - v_0) = -(v_2 - v_1). \tag{30}$$

Resolviendo (29) y (30) para v_1 y v_2 obtenemos,

$$v_1 = -\frac{v_0}{3} \qquad y \qquad v_2 = +\frac{2\,v_0}{3}, \tag{31}$$

respectivamente. Nótese que la partícula de masa m se devuelve hacia la derecha y la partícula de masa $2m$ se mueve hacia la izquierda después del choque.



Etapa 3: Ahora nuevamente usamos conservación de energía para encontrar las alturas finales h_1 y h_2 de m y $2m$ respectivamente después del choque. Para m tenemos que

$$m\,g\,h_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{18}mv_0^2,$$

y para $2m$ tenemos que

$$2m\,g\,h_2 = \frac{1}{2}2mv_2^2 = \frac{4}{9}mv_0^2.$$

Usando (28) finalmente obtenemos,

$$h_1 = \frac{1}{9}\ell \qquad y \qquad h_2 = \frac{4}{9}\ell. \tag{32}$$

6. Dos estudiantes están sentados en los extremos opuestos de un trineo de 6 metros de longitud, inicialmente en reposo sobre hielo sin fricción. La masa de cada estudiante es de 50 kg y la del trineo de 40 kg. El estudiante de un extremos desliza un objeto de 2 kg hacia el otro, a una velocidad uniforme de 6 m/s respecto al trineo. El objeto se mueve sobre el trineo sin fricción.

   a) ¿Cuál es la velocidad del trineo, respecto al hielo, antes que el segundo estudiante atrape el objeto?

   b) ¿Cuál es, después que el segundo estudiante atrape el objeto?

   c) ¿Qué distancia se mueve el trineo mientras el objeto se desliza?

   d) ¿Qué distancia se mueve el centro de masa mientras el sistema se desliza?

Solución:

a) Se conserva el momentum del sistema ya que no hay fuerzas externas a él, El momentum inicial es $P_i = 0$. El momentum mientras el objeto se desliza (recordar que se debe referir todas las velocidades al suelo) es, llamando M a la masa del trineo, m a la masa de cada estudiante y m' a la masa del objeto que se lanza,

$$\vec{P} = M\,\vec{v}_{T/s} + 2\,m\vec{v}_{T/s} + m'\,\vec{v}_{0/T} = (M + 2m + m')\vec{v}_{T/s} + m'\vec{v}_{0/T},$$

donde usamos la composición vectorial de velocidades $\vec{v}_{0/s} = \vec{v}_{0/T} + \vec{v}_{T/s}$. Resulta entonces eligiendo el eje x en la dirección que se lanza el objeto, $\vec{v}_{0/T} = 5\,\hat{\imath}$,

$$\vec{v}_{T/S} = -\frac{m'\,\vec{v}_{0/T}}{M + 2m + m'} = -\frac{10}{142}\hat{\imath}.$$

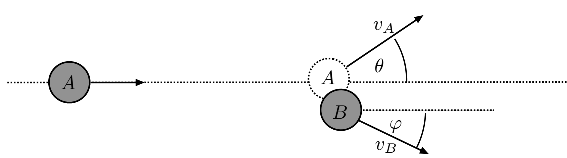
b) Cero, ya que cuando lo atrape el momentum total debe ser cero y, como todos se mueven ahora con la misma velocidad, la única posibilidad es que ésta sea cero.

c) El tiempo que viaja el objeto es $t = L/v_{0/T} = 6/5$ seg $= 1{,}2$ seg. La distancia que se desplaza el trineo durante este tiempo es

$$d = \frac{10}{142} \times 1,2 \approx 0,084 \ \text{metros.}$$

d) El Centro de Masa no se deplaza ya que no hay fuerzas externas (en la dirección horizontal). El movimiento del trineo se produce justamente por esta razón, i.e., para que el CM quede en el mismo lugar al cambiar la posición el objeto.

7. En la figura se muestra una colisión en el espacio vacío. La partícula A que tiene masa $2\,m$ y viaja inicialmente con velocidad v_0, colisiona con la partícula B de masa m inicialmente en reposo. Debido a la geometría bidimensional del choque, se observa que la partícula B sale en un ángulo φ respecto de la línea punteada en la figura de abajo: asuma este ángulo como un dato conocido. Asuma también que la colisióon es perfectamente elástica.



a) ¿Qué relación hay entre v_A, v_B y v_0?

b) Calcule v_B en función de φ y de v_0.

Solución:

a) Como el choque es elástico tenemos que

$$\frac{1}{2}2mv_0^2 = \frac{1}{2}2mv_A^2 + \frac{1}{2}mv_B^2$$

y, simplificando, de inmediato tenemos que

$$v_0^2 = v_A^2 + \frac{v_B^2}{2}. \tag{33}$$

b) Por conservación del momentum lineal a lo largo de la línea incidente tenemos que,

$$2mv_0 = 2mv_A \cos\theta + v_B \cos\varphi. \tag{34}$$

Y, por conservación del momentum lineal en la dirección perpendicular a la línea incidente tenemos que,

$$0 = 2mv_A \operatorname{sen}\theta - v_B \operatorname{sen}\varphi. \tag{35}$$

Simplificando, y rearreglando (34) tenemos que

$$v_A \cos\theta = v_0 - \frac{v_B}{2}\cos\varphi. \tag{36}$$

Luego, simplificando, y rearreglando (35) tenemos que

$$v_A \operatorname{sen}\theta = +\frac{v_B}{2}\operatorname{sen}\varphi. \tag{37}$$

Tomando el cuadrado de (36) y el de (37) y usando Pitágoras tenemos que

$$v_A^2 = v_0^2 + \frac{v_B^2}{4} - v_0\, v_B \cos\varphi. \tag{38}$$

Reemplazando esta expresión para v_A^2 en (33) y simplificando finalmente obtenemos que

$$v_B = \frac{4}{3} v_0\, \cos\varphi,$$

que era lo que se pedía.

8. Problema del acrobata y del mono. El acróbata de un circo de masa M salta desde un trampolín hacia arriba con velocidad inicial v_0. Mientras se eleva en el aire toma a un mono entrenado, de masa m, desde una rama ubicada a una altura h sobre el trampolín. ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el par acróbata–mono?

   Solución: Este problema combina conservación de energía, con un choque plástico. Lo podemos dividir en tres etapas. En la primera etapa usamos conservación de energía para encontrar la velocidad que llevar el acróbara cuando alcanza la altura del mono (i.e., h). En la segunda etapa resolvemos el choque plástico acróbata–mono. Una vez resuelto el choque plástico, usamos conservación de energía para calcular la altura máxima que alcanza el par. Este es un problema unidimensional (i.e., todo ocurre en la dirección vertical).

Etapa 1: Comparamos la energía del acróbata justo al partir (digamos E_1) con su energía cuando va pasando a la altura de la rama donde está el mono. Fijando el nivel de referencia gravitatorio el nivel original del acróbata, y llamando v_1 a la velocidad que lleva el acróbata cuando pasa por la rama tenemos que

$$E_1 = \frac{1}{2} M\, v_0^2, \tag{39}$$

y

$$E_2 = \frac{1}{2} M\, v_1^2 + M\, g\, h. \tag{40}$$

Usando conservación de energía, $E_1 = E_2$, de (45) y 40 obtenemos,

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2\, g\, h}. \tag{41}$$

Por supuesto tenemos que exigir $v_0 \geq \sqrt{2\, g\, h}$ para que el acróbata alcance a llegar a la altura del mono.

Etapa 2: Usando conservación de momentum lineal podemos calcular de inmediato la velocidad (digamos v_2) con que el par acróbata–mono emerge immediatamente después que el acróbata agarra al mono. Tenemos,

$$M\, v_1 = (M + m) v_2,$$

es decir,

$$v_2 = \frac{M}{m + M}\, v_1. \tag{42}$$

Etapa 3: Tal como en la etapa 1 ahora usamos nuevamente conservación de energía para encontrar la altura máxima H (medida desde el trampolín) que alcanza el par. Si llamamos E_3 a la enrgía del par justo depués que se juntan y E_3 a la energía del para cuando alcanza la altura máxima, tenemos que

$$E_3 = \frac{1}{2} (M + m)\, v_2^2 + (M + m)\, g\, h. \tag{43}$$

y

$$E_4 = (M + m)\, g\, H \tag{44}$$

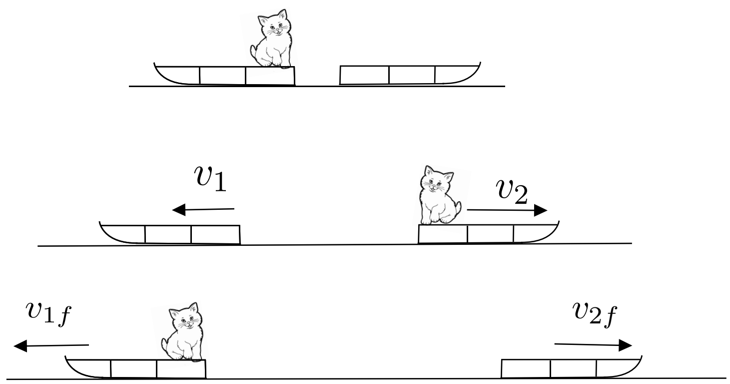
Por conservación de energía, $E_3 = E_4$, de donde obtenemos, usando (42),

$$H - h = \frac{1}{2} \frac{v_2^2}{g} = \frac{1}{2} \frac{M^2}{(M + m)^2} \frac{v_1^2}{g},$$

y usando (41) y simplificando finalmente obtenemos,

$$H = \frac{1}{2}\frac{M^2}{(M+m)^2}\frac{v_0^2}{g} + h\left(\frac{m(m+2\,M)}{(M+m)^2}\right). \tag{45}$$

9. Problema del gato saltando entre dos trineos. Dos trineos de masa M se encuentran en reposo sobre el hielo. No hay roce entre el hielo y los trineos. Sentado en uno de los trineos se encuentra un gato de masa m. El gato salta al otro trineo y de vuelta al trineo en que estaba sentado originalmente. Si el gato salta con rapidez v_g respecto a los trineos, ¿cuál es la velocidad final de cada trineo?



Solución:

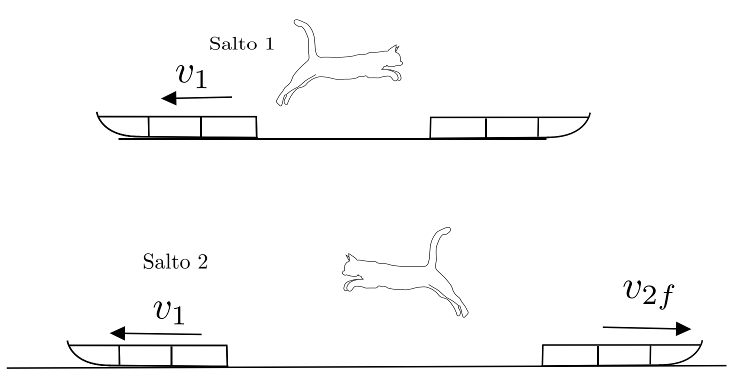
Llamemos trineo 1 al trineo de la izquierda en que el gato está sentado originalmente. Elijamos el eje x de coordenadas hacia la derecha.

El momentum original del sistema gato + trineo 1 + trineo 2 es cero. Como no hay fuerzas externas horizontales el momentum es cero en todo instante.

En la situacion final

$$P_f = -(M+m)v_{1f}\hat{x} + Mv_{2f}\hat{x}$$

Nos falta una ecuación para determinar las dos velocidades finales. Lo podemos resolver considerando el momentum cuando el gato salta.



En el salto 1 el momentum es

$$P_{S1} = -Mv_1\hat{x} + m\vec{v}_{G/S}$$

La velocidad del gato respecto al suelo durante el salto 1 es la velocidad del gato respecto al trineo 1 más la velocidad del trineo 1 respecto al suelo:

$$\vec{v}_{G/S} = \vec{v}_{G/T1} + \vec{v}_{T1/S} = v_g\hat{x} - v_1\hat{x}$$

por lo tanto

$$P_{S1} = -(M+m)v_1\hat{x} + mv_g\hat{x}.$$

Durante el salto 2 el momentum del sistema es

$$P_{S2} = -Mv_1\hat{x} + Mv_{2f}\hat{x} + m\vec{v}'_{G/S},$$

y ahora

$$\vec{v}'_{G/S} = \vec{v}_{G/T2} + \vec{v}_{T2/S} = -v_g\hat{x} + v_{2f}\hat{x}$$

por lo que

$$P_{S2} = -Mv_1\hat{x} + (M+m)v_{2f}\hat{x} - mv_g\hat{x}.$$

Resolvemos $P_{S1} = 0$ $P_{S2} = 0$ y obtenemos v_1 y v_{f2} El resultado de esto es

$$v_1 = \frac{mv_g}{M+m}, \qquad v_{2f} = \frac{Mv_1}{M+m} + \frac{mv_g}{M+m}$$

de donde obtenemos

$$v_{f2} = \frac{mv_g}{(M+m)^2}(M+2m).$$

Finalmente resolvemos $P_f = 0$ y obtenemos, reemplazando v_{f2},

$$v_{f1} = -\frac{mMv_g}{(M+m)^3}(M+2m).$$

10. Problema de Impulso (P. 3.8, Kleppner and Kolenkow). Una mujer de masa 50 kg salta directamente hacia arriba en el aire, elevándose 0, 8 m desde el suelo. ¿Cuál es el impulso que recibe del suelo para alcanzar esta altura?

    Solución: Como el movimiento de la mujer es directamente hacia arriba éeste es un problema unidimensional. Durante el despegue del suelo hay una fuerza normal que hace el suelo sobre la mujer, que actúa en un instante muy breve. Llamemos F a esa fuerza, que es responsable del cambio de momentum de la mujer. Si llamamos P al momentum lineal de la mujer, de la ecuación de Newton tenemos que

$$\frac{dP}{dt} = F, \tag{46}$$

Llamando $y = 0$ al instante justo antes del despegue y $t = \epsilon$ al instante justo después del despegue, integrando (46) entre 0 y ϵ, usando el teorema fundamental del cálculo, obtenemos,

$$\int_0^\epsilon F(t)\,dt = \int_0^\epsilon \frac{d\,P}{dt}\,dt = P(\epsilon) - P(0). \tag{47}$$

Como la mujer parte su salto desde el reposo, $P(0) = 0$. Por otra parte, si llamamos v_0 a la velocidad inicial de la mujer después del impulso y m a su masa, $P(\epsilon) = m\,v_0$. Reemplazando estos valores en (47), vemos que el *impulso* que da el suelo a la mujer está dado por,

$$J \equiv \int_0^\epsilon F(t)\,dt = mv_0. \tag{48}$$

Para calcular v_0 usamos conservación de energía: la energía inicial de la mujer (justo después del impulso) está dada por $E_1 = m\,v_0^2/2$ en tanto que su energía cuando está en su posición más alta, digamos h, con respecto a su altura inicial es solamente potencial, i.e., $E_2 = m\,g\,h$. Usando conservación de energía, i.e., $E_1 = E_2$ obtenemos

$$v_0 = \sqrt{2\,g\,h}. \tag{49}$$

y, finalmente reemplazando en (49) obtenemos el *impulso* entregado por el suelo,

$$J = m\sqrt{2\,g\,h}. \tag{50}$$

Nota: Para los datos numéricos del problema, usando que $g = 9,81$ m/s^2, obtenemos que el *impulso* recibido es $J = 198{,}1$ N s.

11. Cálculo de Centro de Masa (P. 3.1, Kleppner and Kolenkow). La densidad de una varilla delgada de largo ℓ varía con la distancia x de uno de sus extremos como $\lambda = \lambda_0(x/\ell)^2$. Encuentre la posición del Centro de Masa de la varilla medida desde ese extremo.

    Solución: Como la varilla es delgada, éste es básicamente un problema unidimensional. Si medimos la posición del Centro de Masa desde el extremo de la varilla, su coordenada $x_{\rm CM}$ está dada por

$$x_{\rm CM} = \frac{\int_0^\ell x\,dm}{M}, \tag{51}$$

en que M es la masa total de la varilla, i.e.,

$$M = \int_0^\ell dm. \tag{52}$$

En ambas ecuaciones, el elemento de masa dm está dado por $dm = \lambda(x)\, dx$ en que $\lambda(x)$ es la densidad lineal de masa de la varilla. En este caso, $\lambda(x) = \lambda_0 (x/\ell)^2$. Reemplazando dm en (52) obtenemos que,

$$M = \int_0^\ell \lambda_0 \left(\frac{x}{\ell}\right)^2 dx = \frac{1}{3} \lambda_0\, \ell, \tag{53}$$

de donde obtenemos que $\lambda_0 = 3\, M/\ell$. Por otra parte, reemplazando dm en (51) e integrando obtenemos que,

$$x_{\mathrm{CM}} = \frac{\int_0^\ell x\, dm}{M} = \frac{\lambda_0\, \ell^2}{4\, M}. \tag{54}$$

Finalmente, reemplazando el valor de λ_0 en (54) finalmente obtenemos,

$$x_{\mathrm{CM}} = \frac{3}{4} M\, \ell. \tag{55}$$

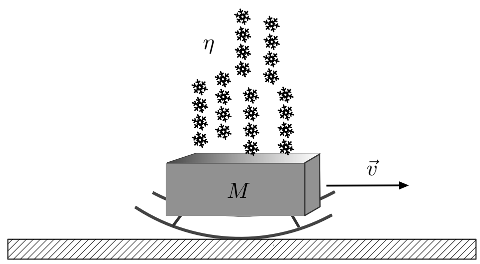
12. Centro de masa de una placa uniforme de masa M distribuída sobre un triángulo equilátero de lardo d.Encuentre el Centro de Masa de una placa uniforme de la foram de una triángulo equilátero de lado d.

    Respuesta: El Centro de Masa está justo en el centro de gravedad del triángulo, i.e., en el punto donde se juntan las tres transversales de gravedad.

13. Problema de Masa Variable: Trineo llenándose de nieve. Considere un trineo que está formado esencialmente por un cajón de masa M sin tapa, el cual se desplaza en línea recta por u na pista horizontal libre de roce, con una rapidez v_0. En cierto instante t_0 comienza a nevar, de manera tal que la nieve cae verticalmente y comienza a ingresar al trineo a una tasa constante η (masa de nieve por unidad de tiempo). Luego, en cierto instante t_f la nevazón se acaba y el trineo continuúa en movimiento acarreando una masa M de nieve dentro de él.

    a) Determine la rapidez v_f del trineo luego que deja de nevar.

    b) Determine el módulo de la aceleración del trineo en un instante t durrante la nevazón.



Solución:

a) Como no hay fuerzas horizontales en este problema, se conserva el momentum lineal del sistema. Inicialmente el momentum lineal del sistema a lo largo de la horizontal es

$$P_{\text{in}} = M v_0. \tag{56}$$

Después que para la nevazón y el trineo se ha cargado con una masa M de nieve, el momentum lineal horizontal es,

$$P_{\text{fin}} = (M + M)v_f = 2\,M v_f. \tag{57}$$

Igualando $P_{\text{in}} = P_{\text{fin}}$ obtenemos,

$$v_f = \frac{1}{2} v_0. \tag{58}$$

b) Si hacemos el mismo procedimiento de la parte a) pero ahora comparamos el instante inicia con un momento cualquiera $t_0 < t < t_f$, la masa del trineo más la nieve caida es de $M + \eta(t - t_f)$. Si llamamos $v(t)$ a la velocidad del trineo en ese momento, procediendo como en a) obtenemos,

$$M\,v_0 = (M + \eta(t - t_0))v(t). \tag{59}$$

Derivando (59) con respecto al tiempo obtenemos,

$$0 = \eta v(t). + (M + \eta(t - t_0))a(t), \tag{60}$$

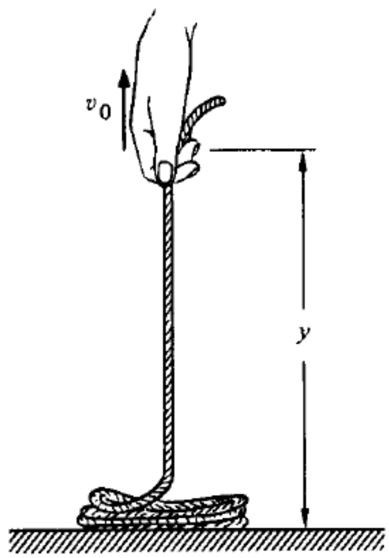
en que hemos llamado $a(t) = dv/dt$ a la aceleración del trineo. Resolviendo el sistema (59) y (60) para $v(t)$ y $a(t)$ obetenemos

$$a(t) = -\frac{\eta\,M}{(M + \eta(t - t_0))^2}\,v_0.$$

Entonces el módulo de la aceleración del trineo está dado por,

$$|a(t)| = \frac{\eta\,M}{(M + \eta(t - t_0))^2}\,v_0.$$

14. Problema de masa variable: Tirando una cuerda enrollada (P. 4.21, Kleppner and Kolenkow). Considere una cuerda masiva de densidad lineal de masa λ kg/m, la cual está enrollada sobre una mesa horizontal. Uno de sus extremos es tirado verticalmente con rapidez constante v_0.



a) Encuentre la fuerza ejercida sobre el extremo de la cuerda como función de la altura y.

b) Compara la potencia entregada a la cuerda con la tasa de cambio de la energía mecánica total de la cuerda.

Solución: a) Este es un problema unidimensional. Tomaremos la dirección positiva (para referir velocidad, moemntum, fuerza) a la dirección vertical hacia arriba. El moemntum de la cuerda (del segmento de cuerda que está levantado), digamos $P(t)$, está dado por la masa del segmento por su velocidad, i.e.,

$$P(t) = \lambda\, y\, v_0, \tag{61}$$

en que hemos usado que la masa del segmento levantado es la densidad por el largo del segmento. De (61) tenemos que

$$\frac{dP}{dt} = \lambda\, v_0\, \frac{dy}{dt} = \lambda\, v_0^2. \tag{62}$$

Por otra parte, las fuerzas que están actuando sobre la cuerda son F (hacia arriba) y el peso del segmento $\lambda\, y\, g$ (hacia abajo). Entonces, usando la ecuación de Newton, de (62) tenemos que,

$$\lambda\, v_0^2 = \frac{dP}{dt} = F - \lambda\, y\, g = F - \lambda\, v_0\, t\, g, \tag{63}$$

de donde finalmente obtenemos,

$$F = \lambda\, v_0\, (v_0 + g\, t) \tag{64}$$

b) La potencia entregada a la cuerda, digamos P_c, está dada por

$$P_c = F v_0 = \lambda\, v_0^2\, (v_0 + g\, t). \tag{65}$$

Por otra parte la energía mecánica del segmento levantado de la cuerda está dado por

$$E = K + V. \tag{66}$$

en que K y V son respectivamente la energía cinética y potencial del segmento. Aquí,

$$K = \frac{1}{2}(\lambda\, y) v_0^2 = \frac{1}{2}(\lambda\, v_0\, t) v_0^2 = \frac{1}{2}\lambda\, v_0^3\, t. \tag{67}$$

Por otra parte, si elegimos el nivel de referencia del potencial gravitatorio el nivel del piso, la energía potencial del segmento es lsu masa por la altura del Centro de Masa del segmento, i.e., $y/2$. Entonces,

$$V = (\lambda\, y)\, g\, \frac{y}{2} = \lambda\, g \frac{y^2}{2} = \frac{1}{2}\lambda\, g\, v_0^2\, t^2. \tag{68}$$

Usando (66), (67) y (68) obtenemos

$$E(t) = \frac{1}{2}\lambda\, v_0^3\, t + \frac{1}{2}\lambda\, g\, v_0^2\, t^2, \tag{69}$$

de donde obtenemos que la tasa de variación de la energía mecánica está dada por,

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}\lambda\, v_0^3 + \lambda\, g\, v_0^2\, t = \lambda\, v_0^2\, \left(\frac{v_0}{2} + g\, t\right) < P_c \tag{70}$$

que es estrictamente menor que la potencia entregada por F. En realidad el resto de la potencia entregada se disipa en forma de calor en la cuerda.