

Examen. Solución

Pregunta 1 (16 puntos):

Responda brevemente las siguientes preguntas, sobre la base de los contenidos del curso (Note las diferencias de puntaje de las partes).

- a) **(2 pts)** Considere el problema no restringido $\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$, donde f es una función convexa 2 veces continuamente diferenciable de n variables. Queremos encontrar una solución aproximada y para eso usamos el método de Newton. Suponga que se ejecutan k iteraciones del método a partir de un punto inicial x^0 . Suponiendo que las evaluaciones de $\nabla f(x)$ y $\nabla^2 f(x)$ requieren en total $O(n^2)$ operaciones aritméticas, ¿cuál es el orden del número de operaciones aritméticas totales realizadas en cada iteración del método? Justifique con precisión su respuesta.

Respuesta: Además de evaluar los gradientes y Hessiano, Newton requiere calcular la dirección de avance y eso es $O(n^3)$ ya que implica calcular $\nabla^2 f(x)^{-1}$, o resolver un sistema de ecuaciones con esa matriz. Luego, es $O(n^3)$ por iteración y eso da un total de $O(kn^3)$.

- b) **(4 pts)** Considere el problema restringido en \mathbb{R}^n :

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{s.a.} \quad & x \in S, \end{aligned}$$

donde f es una función fuertemente convexa, diferenciable y S es un conjunto convexo cerrado y acotado. Se quiere resolver el problema con un método de primer orden y se va a usar el método del gradiente a partir de un punto x^0 . Escriba la expresión (fórmula) que define la iteración general del método para este problema, asumiendo un paso fijo igual a α (no hay “linesearch”).

Respuesta: La iteración es

$$x^{k+1} = \text{Proy}_S(x^k - \alpha \nabla f(x^k))$$

donde Proy_S es la proyección euclídea sobre el conjunto S . Tiene que hacerse la proyección, de otro modo no hay garantía de factibilidad de las iteraciones.

Nota de corrección: 1 punto por ponerlo sin proyección.

- c) **(4 pts)** Explique brevemente por qué el Análisis de Sensibilidad tradicional de Programación Lineal no es necesariamente un buen enfoque para abordar problemas de incertidumbre en un modelo de optimización lineal.

Respuesta: Por que es un análisis limitado al ser sólo local dentro de límites eventualmente chicos y, además, es “a posteriori”, se hace cuando ya está calculada una solución sobre la base de valores de parámetros ya asumidos.

- d) **(2 pts)** Considere el siguiente problema de optimización lineal “binario”:

$$\begin{aligned} z^* = \min \quad & c^T x \\ \text{s.a.} \quad & Ax = b \\ & x_j \in \{0, 1\}, j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

donde A es de $m \times n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$. Si se escribe el dual lagrangeano de este problema y el valor óptimo de ese dual es igual a w^* , ¿son iguales o no w^* con z^* ? Justifique con toda precisión su respuesta.

Respuesta: En general se tendrá que no ya que, debido a que un problema de optimización entera NO es convexo, no habrá dualidad fuerte.

- e) (4 pts) En forma muy breve explique a qué tipo de estructura de problema se aplican los siguientes enfoques de optimización de gran escala: i) Generación de Columnas, ii) Descomposición de Dantzig-Wolfe, ii) Descomposición de Benders (puede usar, también, diagramas para su explicación).

Respuesta:

Generación de columnas se aplica a un problema que tiene muchas más columnas que restricciones. Dantzig -Wolfe se aplica a una estructura de bloques independientes más uno común (acá puede hacerse el dibujo mostrado en clases), y Benders se aplica a estructuras con “variables complicantes” de la forma

$$\begin{array}{lll} \min & c^T x & + d^T y \\ s.a. & Ax & = b \\ & Ex & + Dy = e \\ & x \in C & y \geq 0 \end{array}$$

(también puede ir un dibujo de los bloques).

Pregunta 2 (16 puntos):

- a) (8 pts) Responda las siguientes dos preguntas en forma breve pero precisa.

- i) (4 pts) En el artículo “Robust Optimization for Emergency Logistic Planning: Risk Mitigation in Humanitarian Relief Supply Chains”, de A. Ben-Tal et al., y que tuvo que leer y preparar para este examen, se presenta un modelo de optimización que busca determinar el flujo de vehículos en ciertos lugares de modo que satisfagan demandas por transporte de evacuación. Explique qué es lo que motiva a usar un enfoque de Optimización Robusta en vez de un enfoque “estocástico” más bien basado en distribuciones de probabilidades.

Respuesta: Está explicado en el primer párrafo de la página 1178, se debe a la dificultad de estimar distribuciones para situaciones asociadas a desastres naturales.

- ii) (4 pts) Sobre el mismo artículo que tuvo que leer, ahí se presenta un enfoque que se llama “Afinely Adjustable Robust Optimization” (AARC). Por otro lado, en el curso estudiamos básicamente dos enfoques de optimización estocástica: Restricciones Probabilísticas y Modelos estocásticos de 2 etapas. ¿A cuál de estos dos enfoques es análogo (aunque no equivalente) el enfoque AARC? Justifique con precisión.

Respuesta: Para responder esto había que entender, aunque fuera superficialmente, el modelo y la estructura de políticas de decisión y algo también está explicado en la página 1178. Hay decisiones de primera y segunda etapa en el modelo: las variables x son de primera etapa y las y , las que ajustan la cantidad de vehículos en las celdas, dado x y la realización incierta, son las de segunda etapa. Luego, el uso de AARC es totalmente análogo a usar un modelo estocástico de 2 etapas, pero sin distribuciones de probabilidad.

- b) (8 pts) Considere el siguiente problema de Optimización en n variables, que aparece en algunas aplicaciones de reconstrucción de imágenes:

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{j=1}^{n-1} |x_{j+1} - x_j| \\ s.a. & Ax = b \end{array}$$

donde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ (matriz de $m \times n$), $b \in \mathbb{R}^m$.

- i) (4 pts) Proponga qué método de optimización, de entre todos los estudiados en el curso, usaría para resolver este problema. ¿Qué tan eficiente sería su método? No tiene que describir el detalle del método, pero debe ser explícito en la explicación de su elección y muy justificado en todo. Incluso puede transformar el problema, si quiere, pero todo debe justificarlo.

Respuesta: Hay varias alternativas para esto, cualquiera está correcta:

1. Se puede transformar todo el problema a uno de Optimización Lineal:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j=1}^{n-1} t_j \\ \text{s.a.} \quad & Ax = b \\ & -t_j \leq x_{j+1} - x_j \leq t_j, j = 1, \dots, n-1 \\ & t \geq 0 \end{aligned}$$

En este caso la resolución tendrá la eficiencia que tiene el método Simplex, por ejemplo.

2. Notando que la función objetivo es no diferenciable, podemos usar un método de subgradiente y proyectar sobre $Ax = b$. Esto debiera tener una eficiencia $O(1/\epsilon^2)$ para llegar a una solución ϵ -óptima.
3. Se podría usar un problema “proxi” de la forma:

$$\min \tau \sum_{j=1}^{n-1} |x_{j+1} - x_j| + \|Ax - b\|_2^2$$

Y esto abordarse por un método de subgradiente. La complejidad sería similar al caso anterior.

- ii) (4 pts) Ahora considere la siguiente variante del problema de arriba:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j=1}^{n-1} (x_{j+1} - x_j)^2 \\ \text{s.a.} \quad & Ax = b \end{aligned}$$

Misma pregunta: qué método propone usar y por qué, y qué tan eficiente cree que será.

Respuesta: Aquí hay, al menos, un par de opciones, cualquiera está correcta:

1. Usar el Método de Frank-Wolfe ya que las restricciones son lineales, y como la función objetivo es convexa esto llevaría típicamente a una complejidad $O(1/\epsilon)$ para llegar a una solución ϵ -óptima.
2. Como la función objetivo es cuadrática, se puede pasar a las restricciones:

$$\begin{aligned} \min \quad & t \\ \text{s.a.} \quad & Ax = b \\ & \sum_{j=1}^{n-1} (x_{j+1} - x_j)^2 \leq t \end{aligned}$$

y ahora la restricción cuadrática puede reformularse como una restricción de cono de segundo orden. Eso se puede resolver por un método de punto interior.

Nota de corrección: En ambos casos, 2 puntos por justificar el método que propongan y 2 puntos por comentar (correctamente) la eficiencia.

El problema descrito a continuación se usa en las preguntas 3 y 4.

Un hospital de gran tamaño debe decidir sobre la asignación de camas en el tiempo entre las distintas especialidades médicas. Este proceso de planificación se realiza sobre T semanas. Suponga que existen p especialidades y denotemos por d_{it} la demanda de camas para la especialidad i en la semana t , la que corresponde a pacientes que deben ser hospitalizados en esa especialidad. Sea K_t la cantidad total de camas

del hospital en la semana t (puede ser la misma en todas las semanas). Existe un costo c_{it} por el uso de una cama de la especialidad i en la semana t . Debido a las variaciones de la demanda de un periodo a otro puede ser necesario ajustar, al comienzo de la semana, la cantidad de camas reasignando algunas de estas entre las áreas. Supongamos que si se reasignan camas entre la especialidad i y la especialidad j , se incurre en un costo g_{ij}^t . Adicionalmente, en cada semana, cada cama genera un uso de tiempo de recursos médicos igual a α_{it} horas por cama para una cama de la especialidad i en la semana t , y hay un máximo de L_t horas disponibles en el hospital en la semana t . El siguiente modelo de optimización busca obtener una asignación de camas a especialidades de modo que se cumpla con la demanda y se minimice el costo. El modelo usa las variables x_{it} , correspondientes al número de camas asignadas a la especialidad i en la semana t , y variables w_{ij}^t correspondientes a la cantidad de camas de la especialidad i que son transferidas a la especialidad j al comienzo de la semana t :

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^p \left\{ c_{it} x_{it} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p g_{ij}^t w_{ij}^t \right\} \\ \text{s.a.} \quad & x_{it} = x_{it-1} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p w_{ji}^t - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^p w_{ik}^t \quad i = 1, \dots, p; t = 1, \dots, T \quad (1) \\ & x_{it} \geq d_{it} \quad i = 1, \dots, p; t = 1, \dots, T \quad (2) \\ & \sum_{i=1}^p x_{it} \leq K_t \quad t = 1, \dots, T \quad (3) \\ & \sum_{i=1}^p \alpha_{it} x_{it} \leq L_t \quad t = 1, \dots, T \quad (4) \\ & x_{it} \geq 0, w_{ij}^t \geq 0 \quad i, j = 1, \dots, p; t = 1, \dots, T \quad (5) \end{aligned}$$

Este modelo ignora la integralidad de las variables (las camas debieran ser “enteras”), pero es una aproximación adecuada en la práctica. Se tiene, entonces, que la restricción (1) define el balance de camas para cada semana, la (2) establece el cumplimiento de demanda, la (3) define el límite de camas disponibles, la (4) establece el límite de horas y la (5) define la naturaleza de las variables. Supondremos que los valores x_{i0} corresponden a las camas disponibles al comienzo del periodo de planificación en cada especialidad.

Pregunta 3 (14 puntos):

Suponga que en el problema recién descrito nos enfrentamos a la situación en que la demanda por camas, d_{it} es aleatoria, pero sabemos que sigue una cierta distribución de probabilidad conocida. Si la asignación de camas que se ha decidido no es suficiente para cubrir la demanda, entonces la demanda que no puede ser cubierta debe ser transferida a otros hospitales, lo que representa un aspecto negativo.

- a) (8 pts.) Proponga una reformulación del problema anterior que tome en cuenta un “costo” β_{it} por cada unidad de demanda no cubierta de la especialidad i en la semana t , y haga su reformulación como un modelo estocástico de dos etapas. Sea explícito en lo que considerará variables de primera etapa (“here and now”) y de segunda etapa (de ajuste o “wait and see”). Justifique su elección con claridad. También sea explícito en la escritura de los modelos. (Ind: si necesita, síntase libre de hacer reescrituras del modelo).

Respuesta: Vamos primera a hacer lo siguiente: juntar las restricciones (1) y (2) y de esta manera el modelo queda:

$$\min \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^p \left\{ c_{it}x_{it} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p g_{ij}^t w_{ij}^t \right\}$$

s.a.

$$x_{it-1} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p w_{ji}^t - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^p w_{ik}^t \geq d_{it} \quad i = 1, \dots, p; t = 1, \dots, T \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^p x_{it} \leq K_t \quad t = 1, \dots, T \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^p \alpha_{it} x_{it} \leq L_t \quad t = 1, \dots, T \quad (4)$$

$$x_{it} \geq 0, w_{ij}^t \geq 0 \quad i, j = 1, \dots, p; t = 1, \dots, T \quad (5)$$

Esto no es estrictamente necesario hacerlo pero simplifica un poco la escritura que sigue y, además, hace más explícita la interacción de las decisiones con la demanda.

Dado que ahora hay posibilidades de dejar demanda sin cumplir, vamos a agregar al modelo variables de ajuste en la restricción (1), s_{it} que permiten no cumplir la demanda y medir por cuánto, y pondremos el costo en la función objetivo. El modelo reformulado es:

$$\min \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^p \left\{ c_{it}x_{it} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p g_{ij}^t w_{ij}^t + \beta_{it}s_{it} \right\}$$

s.a.

$$x_{it-1} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p w_{ji}^t - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^p w_{ik}^t + s_{it} = d_{it} \quad i = 1, \dots, p; t = 1, \dots, T \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^p x_{it} \leq K_t \quad t = 1, \dots, T \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^p \alpha_{it} x_{it} \leq L_t \quad t = 1, \dots, T \quad (4)$$

$$x_{it} \geq 0, w_{ij}^t \geq 0, s_{it} \geq 0 \quad i, j = 1, \dots, p; t = 1, \dots, T \quad (5)$$

Nótese que, dado que lo que importa es incurrir en costos cuando no se cumple la demanda, se está cobrando sólo en ese caso (es como si la demanda disminuyera en la cantidad s_{it}).

Ahora asumimos que d es aleatorio y en lo que se muestra a continuación se asume que las variables x y w son las variables de primera etapa, y las variables s son las variables de ajuste cuando se manifiesta la incertidumbre. Entonces, el modelo de 2 etapas es:

$$\min \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^p \left\{ c_{it}x_{it} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p g_{ij}^t w_{ij}^t \right\} + E(Q(s, w))$$

s.a.

$$\sum_{i=1}^p x_{it} \leq K_t \quad t = 1, \dots, T \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^p \alpha_{it} x_{it} \leq L_t \quad t = 1, \dots, T \quad (4)$$

$$x_{it} \geq 0, w_{ij}^t \geq 0 \quad i, j = 1, \dots, p; t = 1, \dots, T \quad (5)$$

El problema de segunda etapa es:

$$Q(x, w) = \min \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^p \beta_{it}s_{it}$$

s.a.

$$x_{it-1} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p w_{ji}^t - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^p w_{ik}^t + s_{it} = d_{it} \quad i = 1, \dots, p; t = 1, \dots, T \quad (1)$$

$$s_{it} \geq 0 \quad i = 1, \dots, p; t = 1, \dots, T$$

Es posible argumentar también que las variables x son las de primera etapa y las variables w y s son las de segunda etapa. Esto se justifica en el hecho que las decisiones de w pueden ser pensadas también como ajuste. Esto lleva a una formulación diferente, pero que también es correcta.

Nota de corrección: Aquí se podría asignar 2 puntos por identificar las variables de primera y segunda etapa e introducir las variables s , 3 puntos por el modelo general de 2 etapas y 3 puntos por el detalle del problema de segunda etapa, el que define Q .

Otra cosa a tener en cuenta: en esta solución los modelos están detallados, está perfectamente bien si los estudiantes los ponen en forma más compacta, por ejemplo, haciendo sólo relación a los números de restricciones en el modelo original del enunciado.

- b) (6 pts.)** Ahora explique la formulación SAA (Stochastic Average Approximation) para el problema formulado por usted en la parte a) e indique cómo se podría resolver y por qué (no tiene que escribir el detalle de ese método de resolución, pero sí tiene que identificar bien la estructura que le sirve de argumento para el método que pretende usar).

Respuesta: Para la formulación SAA, supongamos que se generan R escenarios de los valores d , a partir de la distribución de probabilidad conocida. Denotemos por d_{it}^q los valores de demanda de esos escenarios. El modelo SAA tiene que considerar variables s por escenario y es:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^p \left\{ c_{it}x_{it} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p g_{ij}^t w_{ij}^t \right\} + \frac{1}{R} \sum_{q=1}^R \left\{ \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^p \beta_{it} s_{it} \right\} \\ \text{s.a.} \quad & x_{it-1} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p w_{ji}^t - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^p w_{ik}^t + s_{it}^q = d_{it}^q \quad i = 1, \dots, p; t = 1, \dots, T; q = 1, \dots, R \quad (1) \\ & \sum_{i=1}^p x_{it} \leq K_t \quad t = 1, \dots, T \quad (3) \\ & \sum_{i=1}^p \alpha_{it} x_{it} \leq L_t \quad t = 1, \dots, T \quad (4) \\ & x_{it} \geq 0, w_{ij}^t \geq 0, s_{it}^q \geq 0 \quad i, j = 1, \dots, p; t = 1, \dots, T; q = 1, \dots, R \quad (5) \end{aligned}$$

Este problema se resuelve por Descomposición de Benders ya que x y w son variables complicantes, mientras que los s pueden quedar en la parte “dualizable” del método de Benders.

Aquí es válido también mostrar un diagrama de la estructura por bloques. Notar también lo siguiente: dado que el problema completo es lineal, otra respuesta válida sería argumentar que si se dualiza completo, el correspondiente dual tiene la estructura para la Descomposición de Dantzig-Wolfe. Esto debe justificarse bien con un diagrama o similar.

Nota de corrección: 4 puntos por la formulación de SAA y hacerlo bien, 2 puntos por mencionar y justificar Benders.

Pregunta 4 (14 puntos):

- a) (7 pts.)** Volviendo al problema original, suponga que le dicen que los factores de uso de tiempo asociados a las camas, α_{it} , son inciertos (debido a la naturaleza impredecible de las enfermedades de los pacientes). Asumamos, entonces, que los coeficientes α_{it} son variables aleatorias que siguen una distribución normal con media $\bar{\alpha}_{it}$ y desviación estándar σ_{it} . Postule un modelo de optimización con restricciones probabilísticas para abordar este problema, donde quiere cumplir con las restricciones (4) con probabilidad β , $1/2 < \beta < 1$, en cada semana.

Respuesta: Acá lo que queremos es que

$$Prob \left(\sum_{i=1}^p \alpha_{it} x_{it} \leq L_t \right) \geq \beta, \quad t = 1, \dots, T$$

Usando la transformación vista en clases (no hay que desarrollarla, basta sabérsela), la correspondiente restricción equivalente es:

$$\sum_{i=1}^p \bar{\alpha}_{it} x_{it} + z_{1-\beta} \sqrt{\sum_{i=1}^p \sigma_{it}^2 x_{it}^2} \leq L_t$$

donde $z_{1-\beta}$ es el correspondiente percentil de la distribución normal a probabilidad β , y que será positivo en este caso, dado el sentido de la desigualdad. Por ejemplo, si $\beta = 0,95$, $z_{1-\beta} = 1,64$. De esta forma, el modelo reformulado es (no es necesario escribirlo completo, basta tener bien la restricción):

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^p \left\{ c_{it} x_{it} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p g_{ij}^t w_{ij}^t \right\} \\ \text{s.a.} \quad & x_{it} = x_{it-1} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p w_{ji}^t - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^p w_{ik}^t \quad i = 1, \dots, p; t = 1, \dots, T \quad (1) \\ & x_{it} \geq d_{it} \quad i = 1, \dots, p; t = 1, \dots, T \quad (2) \\ & \sum_{i=1}^p x_{it} \leq K_t \quad t = 1, \dots, T \quad (3) \\ & \sum_{i=1}^p \bar{\alpha}_{it} x_{it} + z_{1-\beta} \sqrt{\sum_{i=1}^p \sigma_{it}^2 x_{it}^2} \leq L_t \quad t = 1, \dots, T \quad (4) \\ & x_{it} \geq 0, w_{ij}^t \geq 0 \quad i, j = 1, \dots, p; t = 1, \dots, T \quad (5) \end{aligned}$$

Nota de corrección: se pueden descontar puntos por los errores que se cometan (sumar equivocadamente la raíz cuadrada, por ejemplo, no poner las cosas elevadas al cuadrado).

- b) (7 pts.)** Explique en detalle cómo resolvería el problema formulado por usted en a) por medio de un algoritmo de punto interior. No tiene que dar todos los detalles del algoritmo pero diga cuál es la función de barrera que habría que usar para el problema y cómo sería el problema penalizado.

Respuesta: Para aplicar un algoritmo interior, hay que formular la restricción no lineal como una restricción de cono de segundo orden. Definamos variables y_t y variables u_{it} y escribimos lo siguiente:

$$\begin{aligned} & \sqrt{\sum_{i=1}^p u_{it}^2} \leq y_t \\ & u_{it} = \sigma_{it} x_{it} \\ & y_t = \frac{1}{z_{1-\beta}} \left(L_t - \sum_{i=1}^p \bar{\alpha}_{it} x_{it} \right) \end{aligned}$$

y esto para todo t . De este modo $(u_{1t}, \dots, u_{pt}, t_t)$ cumplen una restricción de cono de segundo orden y las demás son restricciones lineales. El problema completo es:

$$\min \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^p \left\{ c_{it} x_{it} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p g_{ij}^t w_{ij}^t \right\}$$

s.a.

$$x_{it} = x_{it-1} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p w_{ji}^t - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^p w_{ik}^t \quad i = 1, \dots, p; t = 1, \dots, T \quad (1)$$

$$x_{it} \geq d_{it} \quad i = 1, \dots, p; t = 1, \dots, T \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^p x_{it} \leq K_t \quad t = 1, \dots, T \quad (3)$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^p u_{it}^2} \leq y_t \quad t = 1, \dots, T \quad (4)$$

$$u_{it} - \sigma_{it} x_{it} = 0 \quad i = 1, \dots, p; t = 1, \dots, T \quad (5)$$

$$y_t = \frac{1}{z_{1-\beta}} \left(L_t - \sum_{i=1}^p \bar{\alpha}_{it} x_{it} \right) \quad t = 1, \dots, T \quad (6)$$

$$x_{it} \geq 0, w_{ij}^t \geq 0 \quad i, j = 1, \dots, p; t = 1, \dots, T \quad (7)$$

Cuando se resuelva con el algoritmo de punto interior, el problema penalizado es:

$$\min \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^p \left\{ c_{it} x_{it} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p g_{ij}^t w_{ij}^t \right\} + \mu \Phi(x, u, y)$$

s.a.

$$x_{it} = x_{it-1} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p w_{ji}^t - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^p w_{ik}^t \quad i = 1, \dots, p; t = 1, \dots, T \quad (1)$$

$$u_{it} - \sigma_{it} x_{it} = 0 \quad i = 1, \dots, p; t = 1, \dots, T \quad (5)$$

$$y_t = \frac{1}{z_{1-\beta}} \left(L_t - \sum_{i=1}^p \bar{\alpha}_{it} x_{it} \right) \quad t = 1, \dots, T \quad (6)$$

donde

$$\Phi(x, u, y) = -\log(y_t^2 - \sum_{i=1}^p u_{it}^2) - \log(K_t - \sum_{i=1}^p x_{it}) - \sum_{i,t} \log(x_{it} - d_{it}) - \sum_{i,t} \log x_{it} - \sum_{i,j,t} \log w_{ij}^t$$

es la barrera de todas las desigualdades lineales y la restricción cónica.

Nota de corrección: 4 puntos por reconocer que hay que transformar a la formulación cónica y hacerlo correctamente y 3 puntos por los detalles de la barrera.

- c) **(6 pts. de bono)** Pensando que el problema original sea un problema de optimización de gran escala, identifique posibles “restricciones complicantes” para usar en una Relajación Lagrangeana del problema. Para las restricciones que haya elegido, escriba el correspondiente problema relajado (la función dual) y diga qué tipo de problema resulta y de qué forma se separa la estructura.

Respuesta: En este problema se puede observar que las restricciones (1) liga los períodos de tiempo. Si se relaja, el problema se separa por el índice t . Como (1) son igualdades, definimos multiplicadores λ_{it} sin restricción de signo para las restricciones (1). El problema relajado, correspondiente a la función dual, es:

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^p \left\{ c_{it} x_{it} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p g_{ij}^t w_{ij}^t \right\} + \sum_{i,t} \lambda_{it} (x_{it} - x_{it-1} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p w_{ji}^t + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^p w_{ik}^t) \\
s.a. \quad & x_{it} \geq d_{it} \quad i = 1, \dots, p; t = 1, \dots, T \quad (2) \\
& \sum_{i=1}^p x_{it} \leq K_t \quad t = 1, \dots, T \quad (3) \\
& \sum_{i=1}^p \alpha_{it} x_{it} \leq L_t \quad t = 1, \dots, T \quad (4) \\
& x_{it} \geq 0, w_{ij}^t \geq 0 \quad i, j = 1, \dots, p; t = 1, \dots, T \quad (5)
\end{aligned}$$

que se puede reescribir como:

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{t=1}^T \left\{ \sum_{i=1}^p (c_{it} + \lambda_{it} - \lambda_{it+1}) x_{it} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p (g_{ij} + \lambda_{it})^t w_{ij}^t - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p \lambda_{jt} w_{ji}^t \right\} \\
s.a. \quad & x_{it} \geq d_{it} \quad i = 1, \dots, p; t = 1, \dots, T \quad (2) \\
& \sum_{i=1}^p x_{it} \leq K_t \quad t = 1, \dots, T \quad (3) \\
& \sum_{i=1}^p \alpha_{it} x_{it} \leq L_t \quad t = 1, \dots, T \quad (4) \\
& x_{it} \geq 0, w_{ij}^t \geq 0 \quad i, j = 1, \dots, p; t = 1, \dots, T \quad (5)
\end{aligned}$$

donde se ve con claridad la separación por bloques para cada periodo de tiempo t . El problema de cada bloque es un simple problema con dos restricciones del tipo (3) y (4) para cada t , y las cotas inferiores a x_{it} .

Es importante hacer notar que si se quisiera escribir una relajación que relaje el problema según especialidades, eso solo se puede hacer relajando (1), (3) y (4) simultáneamente. Formalmente eso es correcto, pero la relajación resultante es muy poco interesante.