Pdf-solucionario-macroeconomia-jose-de-gregorio compress

Macreoconomía 2 (Universidad Privada del Norte)

José De Gregorio

Macroeconomía

Teoría y Políticas

Soluciones

José De Gregorio y Christopher Neilson

4 de enero de 2008

SANTIAGO, CHILE

Agradecimientos

Muchas de las respuestas se han compilado de pruebas, exámenes y clases auxiliares de los diversos cursos realizado por el Profesor José De Gregorio, tanto en la Universidad de Chile como en la Pontificia Universidad Católica de Chile. Apreciamos la colaboración de los ayudantes de cátedra, quienes, a través de su trabajo y compromiso, contribuyeron con las soluciones acá presentadas.

Además, extendemos nuestros más sinceros agradecimientos a Carlos Salazar R., Eugenio Rojas, Gustavo Leyva, Juan Ignacio Elorrieta, Álvaro García M., Federico Huneeus, Damián Romero, Francisco Marcet, Sebastián Bustos y David Coble, por sus valiosos comentarios a las distintas versiones, que permitieron enmendar los errores y mejorar de manera significativa la claridad, calidad y consistencia de las respuestas.

Esperamos que el entusiasmo de todos los estudiantes involucrados con este proyecto, se extienda a través de los jóvenes lectores que inician su travesía a través del fascinante mundo de la Macroeconomía.

2. Los Datos

2.1 Contabilidad nacional.

a.) **Respuesta**
El único bien final lo produce la panadería. Por lo que el PIB es $510

b.) **Respuesta**
El valor agregado se define en la página 22 del De Gregorio como la diferencia entre el valor bruto de la producción y las compras intermedias. En este caso sería :

$$\begin{aligned} \text{PIB} &= 200 + (370 - 200) + (510 - 370) \\ &= 200 + 170 + 140 \\ &= \$510 \end{aligned}$$

c.) **Respuesta**
Esto equivale simplemente a ver como se reparte el PIB.

$$\begin{aligned} \text{PIB} &= [40 + 40 + 120] + [100 + 69 + 1] + [40 + 100] \\ &= 200 + 170 + 140 \\ &= \$510 \end{aligned}$$

d.) **Respuesta**
Ya que el PIB nominal es igual a la suma de cada producto por su precio, y en esta economía solo existe un producto, el nivel de precios es $510 : 85 = 6$

e.) **Respuesta**
Ya que vamos a utilizar como base el precio del pan del año pasado, para este período el PIB nominal es igual al real, o sea, $510. Ahora, sabemos que la cantidad de panes este año fue de 85, por lo que el PIB real es $85 \cdot 17 = \$1445$.

f.) **Respuesta**
Ya que la tasa de inflación es la tasa de variación del nivel de precios, tenemos:

$$\frac{6 - 17}{17} \approx -0,65$$

Por lo tanto, estamos frente a una fuerte inflación negativa (deflación). En el caso del crecimiento del PIB,podemos observar:

$$\frac{1445 - 510}{510} = 1,83$$

lo cuál significa un aumento bastante grande en la producción, de casi un doscientos por ciento.

2.2 Producto real y nominal.

a.) **Respuesta**
El cálculo del PIB nominal se discute en la página 22 del De Gregorio y esta dado por la ecuación 2.8. La producción de bienes y servicios se valora al precio actual por lo que en este caso de tres bienes es simplemente la suma de la producción valorada a los precios corrientes: $p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3$.

$$\begin{aligned} \text{PIBN}_{2000} &= 100 \cdot 1 + 25 \cdot 100 + 80 \cdot 30 = 5000 \\ \text{PIBN}_{2001} &= 110 \cdot 3 + 30 \cdot 110 + 90 \cdot 40 = 7230 \\ \text{PIBN}_{2002} &= 115 \cdot 2 + 35 \cdot 105 + 95 \cdot 35 = 7230 \end{aligned}$$

Vemos que en términos de PIB nominal, no hubo crecimiento entre el 2001 y 2002.

b.) **Respuesta**
El calculo del PIB real se discute en la página 22 del De Gregorio y esta dado por la ecuación 2.9 lo que en este caso de tres bienes se reduce a la siguiente expresión

$$y_t = \sum_{i=0}^{n} p_{i,0}q_{i,t} = 1 \cdot q_{1,t} + 100 \cdot q_{2,t} + 30 \cdot q_{3,t}$$

$$\begin{aligned} \text{PIBR}_{2000} &= 100 \cdot 1 + 25 \cdot 100 + 80 \cdot 30 = 5000 \\ \text{PIBR}_{2001} &= 110 \cdot 1 + 30 \cdot 100 + 90 \cdot 30 = 5810 \\ \text{PIBR}_{2002} &= 115 \cdot 1 + 35 \cdot 100 + 95 \cdot 30 = 6465 \end{aligned}$$

Vemos que en términos del PIB real, si hubo crecimiento entre el 2001 y 2002 lo cual es distinto a lo que se encontró en la parte b.) de este ejercicio.

c.) **Respuesta**
El crecimiento del PIB real es simplemente el cambio porcentual del nivel con respecto al año anterior. De esta forma

$$\begin{aligned} g_{01} &= \frac{5810 - 5000}{5000} = 16{,}2\,\% \\ g_{02} &= \frac{6455 - 5810}{5810} = 11{,}1\,\% \end{aligned}$$

d.) **Respuesta**
Al cambiar el año base, el PIB real necesariamente va a cambiar si los precios eran distintos en el nuevo año base. Repetimos el ejercicio en b.), pero ahora usamos los precios del 2002:

$$\begin{aligned}
\text{PIBR}_{2000} &= 100 \cdot 2 + 25 \cdot 105 + 80 \cdot 35 = 5625 \\
\text{PIBR}_{2001} &= 110 \cdot 2 + 30 \cdot 105 + 90 \cdot 35 = 6520 \\
\text{PIBR}_{2002} &= 115 \cdot 2 + 35 \cdot 105 + 95 \cdot 35 = 7230
\end{aligned}$$

A su vez, el crecimiento, siguiendo lo hecho en la parte c.) es

$$\begin{aligned}
g_{01} &= \frac{6520 - 5625}{5625} = 15{,}9\,\% \\
g_{02} &= \frac{7230 - 6520}{6520} = 10{,}9\,\%
\end{aligned}$$

Encontramos que las tasas de crecimiento cambiaron al usar otro año base dado que estamos multiplicando por un set distinto de precios.

2.3 Contando desempleados.

a.) **Respuesta**
Falso. Puede que la tasa de participación sea mas baja en un pais por lo que la cantidad de desempleados sea mas baja y aun tengan la misma tasa de desempleo. Esto se debe a que la tasa de desempleo se calcula sobre la base de personas que buscan trabajo y no sobre la cantidad total de personas que podría trabajar si quisiera.

b.) **Respuesta**
Falso. Esta pregunta esta relacionada con la respuesta en a.), ya que la clave esta en la fuerza de trabajo total. Si la participación laboral baja, por ejemplo, los desempleados llevan mucho tiempo sin encontrar trabajo por lo que disienten de su búsqueda, la tasa de desempleo cae pero no aumenta la producción nacional.

2.4 Índices de precios y crecimiento.

a.) **Respuesta**
Esta parte esta relacionada al desarrollo en el ejercicio 2.2. para el calculo del PIB nominal, simplemente multiplicar y sumar $p \cdot q$.

$$\begin{aligned}
\text{PIBN}_{t_0} &= 3 \cdot 12 + 7 \cdot 6 + 8 \cdot 7 = 134 \\
\text{PIBN}_{t_1} &= 8 \cdot 6 + 6 \cdot 8 + 10 \cdot 10 = 196
\end{aligned}$$

Tomando los precios del periodo t_0 tenemos que le PIB real es

$$\begin{aligned}
\text{PIBN}_{t_0} &= 3 \cdot 12 + 7 \cdot 6 + 8 \cdot 7 = 134 \\
\text{PIBN}_{t_1} &= 3 \cdot 6 + 7 \cdot 8 + 8 \cdot 10 = 154
\end{aligned}$$

A su vez, el crecimiento real es

$$g_{t_1} = \tfrac{154-134}{134} = 15\,\%$$

b.) **Respuesta**

El deflactor del PIB se discute en la pagina 30 del De Gregorio y esta dado por la ecuación 2.13. En este caso el deflactor del PIB en t_1 es simplemente:

$$P = \frac{Y}{y} = \frac{196}{154} = 1{,}27 \tag{3.1}$$

c.) **Respuesta**

El indice de precios al consumidor se discute en la página 30 del De Gregorio y esta dado por la ecuación 2.15, mientras los ponderadores están descrito por la ecuación 2.16.

Primero calculamos los ponderadores con el cual le daremos peso a cada precio dentro del índice.

$$\begin{aligned}
\alpha_A &= \frac{p_{i,0}q_{i,0}}{\sum_{j=0}^{n} p_{j,0}q_{j,0}} = \frac{3\cdot 12}{134} = 0{,}27 && (3.2)\\
\alpha_B &= = \frac{7\cdot 6}{134} = 0{,}31 && (3.3)\\
\alpha_C &= = \frac{8\cdot 7}{134} = 0{,}42 && (3.4)\\
& && (3.5)
\end{aligned}$$

El índice por lo tanto sera

$$\begin{aligned}
IPC_{t_0} &= 0{,}27\cdot 3 + 0{,}31\cdot 7 + 0{,}42\cdot 8 = 6{,}34\\
IPC_{t_1} &= 0{,}27\cdot 8 + 0{,}31\cdot 6 + 0{,}42\cdot 10 = 8{,}22
\end{aligned}$$

A su vez, la inflación fue de

$$\pi_{t_1} = \tfrac{8{,}22-6{,}34}{6{,}34} = 30\,\%$$

d.) **Respuesta**

Podemos ver que el uso de IPC arroja una variación de los precios lealmente mayor al encontrado en el caso del deflator del PIB. Se debe notar que en el caso del IPC los ponderadores son fijos mientras en el calculo del deflactor los ponderadores son variables.

Se debe notar que la mayor parte de la inflación es debido al aumento del precio del bien A, de $P_A 3 \rightarrow 8$. Mientras que el consumo de este cayo a la mitad. Por este motivo el IPC sobre ponderar el bien A en t_1, llevando a una inflación mayor.

2.5 Tipos de cambios y devaluaciones.

a.) **Respuesta**
Para calcular las devaluaciones lo único que hay que ver es en que % subió el tipo de cambio respecto a la fecha de inicio del período que se esta analizando. El siguiente cuadro muestra las devaluaciones nominales de las monedas:

Cuadro 1: Devaluaciones Nominales en %

	Bhat/US$	Rupia/US$	Ringgit/US$
30 de Julio al 1 de Diciembre 1997	33.1	71.1	39.5
1 de Diciembre al 1 de Marzo 1998	3.6	138.4	7.36

Es claro que las monedas se han depreciado porque todos los tipos de cambios han aumentado respecto al dólar. Este tema se dicute en en mas detalle en la sección 2.10 del De Gregorio .

b.) **Respuesta**
Para calcular una devaluación o apreciación real, lo que hay que hacer es ajustar el tipo de cambio, al final del período de análisis, por el índice de precio de los países. Recuerde que el tipo de cambio real, TCR es dado por la ecuación (2.33) del De Gregorio :

$$TCR = \frac{eP^*}{P}$$

donde e es el tipo de cambio nominal y P^* es el índice de precios de los países con los cuales comercia el país. Lo que en este caso es sólo con EE.UU. P es el nivel de precios domésticos. Para calcular un índice de precios necesitamos fijarnos una base, por conveniencia la fijamos en 100 tanto en el país doméstico, como en el pais *. Por lo tanto el 30 de julio el tipo de cambio real es igual al tipo de cambio nominal.

Ahora tenemos que calcular el índice de precios el 1 de diciembre de 1997 y volver a calcular el TCR para esa fecha. Para calcular el índice de precios al 1.12.97 tenemos que simplemente sumar la inflaciones de agosto hasta noviembre (en estricto rigor hay que multiplicarlas, pero esto es una aproximación valida) y aumentar el índice de precios en ese mismo nivel.

A partir del índice de precios se calcula la inflación, ahora que tenemos la inflación calcularemos el índice de precios. Esto nos lleva a:

Cuadro 2: Indices de Precios

	Tailandia	Indonesia	Malasia	EE.UU
30 de julio 1997	100	100	100	100
1 de diciembre 1997	102.7	102.9	100.8	100.5

Por lo tanto el TCR de Tailandia, por ejemplo, el 1 de diciembre de 1997 es:

$$\mathrm{TCR} = \frac{42{,}2 \cdot 100{,}5}{102{,}7} = 41{,}296$$

por lo tanto el TCR de tailandia entre el 30 de julio y el 1 de diciembre de 1997 se depreció en un 30.27 %.

Los TCR el 1 de diciembre de 1997 de los distintos países son los siguientes: Tailandia 41.29, Indonesia 4.302 y Malasia 3.66.

Hay que notar que al inicio del periodo estudiado el tipo de cambio nominal es igual al tipo de cambio real. Por lo tanto las devaluaciones reales entre el 30.7.97 y 1.12.97 son: Tailandia 30.27 %, Indonesia 67.1 % y Malasia 39.2 %.

Para calcular las devaluaciones del TCR entre el 1.12.97 al 1.3.98 lo más fácil es nuevamente fijar el índice de precios en 100 para el 1.12 de 1997, esto simplemente por conveniencia.

Recordar que nos piden calcular la devaluación entre el 1.12.97 al 1.3.98 por lo tanto lo que haya sucedido antes de 1.12.97 es irrelevante. El procedimiento es igual al caso anterior. El siguiente cuadro entrega los indices de precios:

Cuadro 3: Indices de Precios

	Tailandia	Indonesia	Malasia	EE.UU
1 de diciembre 1997	100	100	100	100
1 de marzo 1998	101.6	105.7	100.9	100.6

Los TCR el 1 de marzo de 1998 de los distintos países son los siguientes: Tailandia 43.27, Indonesia 9.993 y Malasia 3.93.

Las devaluaciones reales de los países entre el 1.12.97-1.3.98 son los siguientes: Tailandia 2.5 %, Indonesia 126.9 % y Malasia 7.1 %.

c.) **Respuesta**

Debido a que las monedas de esos países se devaluaron en términos reales, las importaciones de los bienes son ahora más caras. Por lo tanto el poder de compra de los habitantes de esos países ha caído.

d.) **Respuesta**

Puesto que la canasta de consumo de esos países esta compuesta en un 30 % de bienes importados, si el precio de esos bienes sube en un 20 %, significa que la inflación (es decir el aumento del costo de vida de los habitantes de esos países) es igual a lo que subió cada bien ponderado por su importancia en la canasta de consumo de los individuos. Es decir la inflación, π es:

$$\pi = 0{,}3 * 0{,}2 = 0{,}06 = 6\,\%$$

Recordar que hemos supuesto que los bienes nacionales no suben de precio.

2.6 Las exportaciones y el PIB.

a.) **Respuesta**

Podemos ver que el costo total de los bienes finales es la suma de los dos insumos, M y wL, lo cual es $1000 + 200 = 1200$ millions. Parte del valor de los bienes finales lo agregaron los trabajadores de la economia y parte lo pusieron las importaciones de insumos intermedios.

b.) **Respuesta**

Tomando en cuenta el hecho que no existen utilidades, el PIB de este pais es $X - M = 200$. Se debe notar que los insumos importados no son valor agregado y solo la mano de obra genera valor al transformar el bien intermedio en bien final. El valor de este proceso se refleja en los salarios de los trabajadores.

c.) **Respuesta**

Las exportaciones representan 1000/200 =500 % del PIB.

2.7 Más cuentas nacionales.

a.) **Respuesta**

El PNB se discute en la página 33 del De Gregorio y se representa como

$$PNB = PIB - F$$

Donde F en este caso corresponde al pago de intereses por la deuda de la economía. Si la tasa de interés es 5 % y el stock de deuda es 10 mil millones de dólares, entonces $F = 0{,}5$ mil millones de dólares o 1000 millones de pesos.

El PIB es de 51.5 mil millones de dólares por lo que el PNB=51 mil millones de dólares o 102 mil millones de pesos.

b.) **Respuesta**

La balanza comercial esta descrita por la ecuación 2.3 y es simplemente la diferencia entre las exportaciones y las importaciones, $X - M$. Dado que sabemos que el $PIB = A + X - M$ podemos reemplazar los valores de A y PIB para encontrar que la balanza comercial es de -3 mil millones de pesos o en otras palabras el deficit en al balanza comercial es de 3 % del PIB.

c.) **Respuesta**
La cuenta corriente se describe en la página 40 y en la ecuación 2.30 del De Gregorio . En este caso el saldo en cuenta corriente es

$$CC = X - M - F = -3/2 - 0{,}5 = -2 \text{ millones de dólares}$$

Por lo que equivale a 4 % del PIB.

d.) **Respuesta**
Usando los resultados anteriores las importaciones son 3 mil millones de pesos o 1.5 millones de dólares mas que las exportaciones por lo que estas ascienden a 9.5 mil millones de dólares.

e.) **Respuesta**
Sabemos que se debe cumplir que $S_p + S_g + S_e = I$, por lo que podemos calcular cada uno de estos componentes y así encontrar la inversion. El ahorro nacional es de 14 % $(S_p + S_g)$ y el ahorro externo es de 4 % del PIB $(CC = S_e)$ por lo que la inversion total del pais es de 18 % del PIB.

2.8 Contabilidad de la inversión.

Respuesta
Revisando las definiciones el la página 18 podemos ver que se deben cumplir que $K_{t+1} - K_t = I_t - \delta K_t$. Dividiendo esta expresión por el nivel del producto llegamos a $\frac{K_{t+1}}{Y} = \frac{I_t}{Y} + \frac{K_t}{Y}(1-\delta)$. Podemos reemplazar los datos para llegar a

$$\frac{K_{t+1}}{Y} = 0{,}23 + 3(1 - 0{,}96)$$

i) La depreciación es $3 \cdot 0{,}04 = 0{,}12$ del PIB.

ii) La tasa de inversion neta es $\frac{I_t}{Y} - \frac{K_t}{Y}\delta = 0{,}23 - 0{,}12 = 0{,}11$

iii) Para responder esto basta reformular la ecuación que describe la acumulación de capital de la siguiente forma

$$K_{t+1} - K_t = \underbrace{I_t - \delta K_t}_{\text{Inversion Neta}}$$

Si partimos con un stock de capital igual a cero, efectivamente

$$K_t = \sum_{s=0}^{t} \text{Inversion Neta}_s$$

.

3. Consumo

3.1 Ciclos de auge y recesión.

a.) **Respuesta**

Para suavizar el consumo, esta economía debería ahorra manzanas en la época de mucha cosecha y durante las malas cosechas utilizar los mercados internacionales para suavizar su consumo endeudándose.

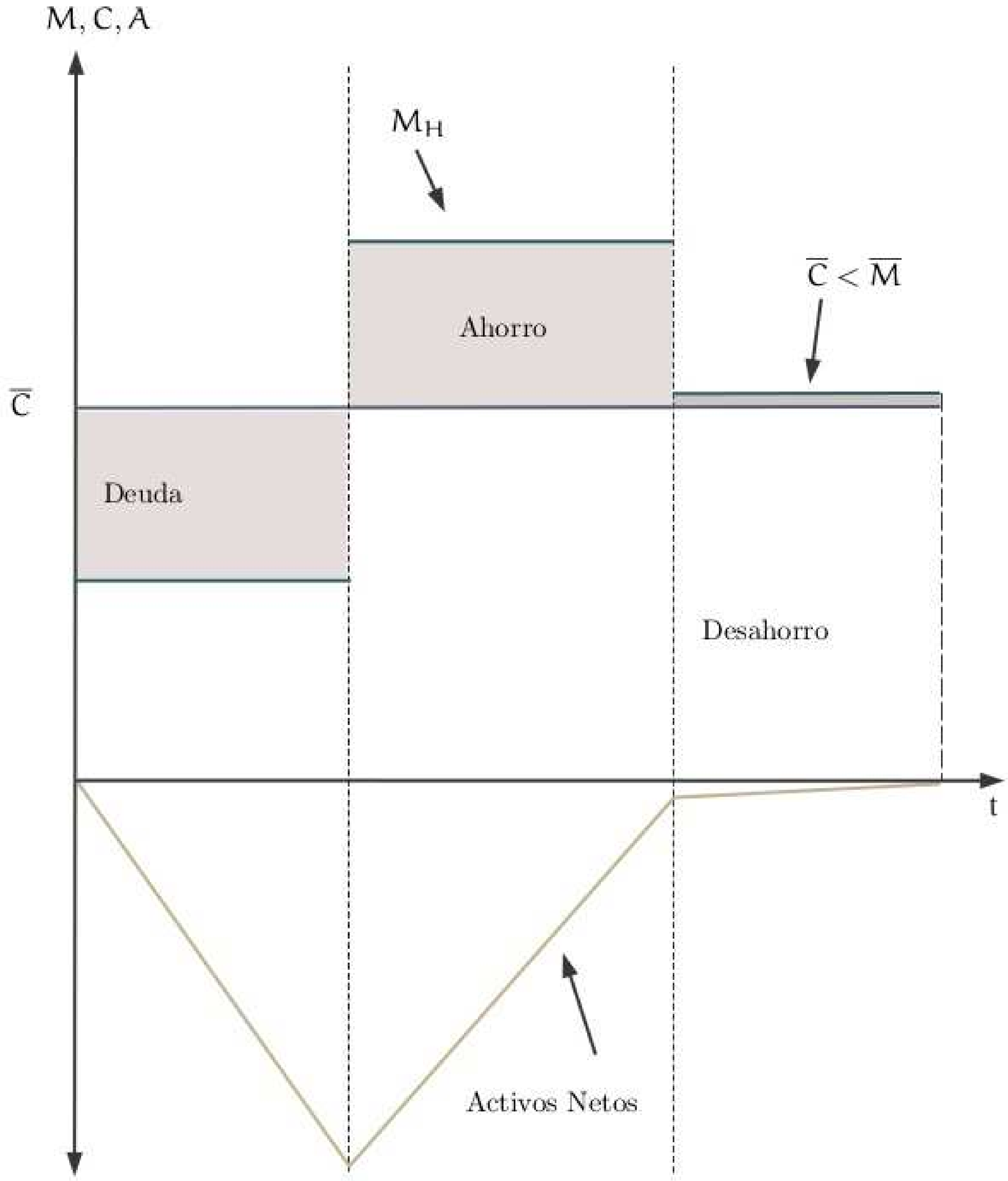
Sin embargo, la cantidad exacta de consumo no va ser exactamente la producción promedio debido a que la menor cosecha es hoy y las mejores cosechas serán en el futuro. El precio de suavizar lo pone la tasa de interés por lo que el consumo promedio sera un poco menos que la producción promedio de la economía.

Se puede encontrar la cantidad de consumo óptimo si asumimos que esta economía maximiza sobre un horizonte infinito y alguna forma funcional para la utilidad de los agentes de la economía bajo estudio. Sabemos de la teoría del ingreso permanente que si $r = \rho$ el consumo sera constante en el tiempo y que se debe consumir rW donde W representa el valor presente de todas las manzanas producidas en el futuro. Supongamos que el precio de las manzanas es 1 y no cambia. Además que esta economía no tiene deuda ni activos en $t = 0$. Si M_l,M_h y $\overline{M}$ son la cantidad de las manzanas producidas en época baja, alta y en promedio, respectivamente, entonces se podría escribir el consumo óptimo de la siguiente manera

$$
\begin{aligned}
\frac{1+r}{r}\overline{C} &= \sum_{t=0}^{6}\frac{M_L}{(1+r)^t} + \sum_{t=7}^{13}\frac{M_H}{(1+r)^t} + \left(\frac{1}{1+r}\right)^{14}\left[\frac{1+r}{r}\overline{M}\right] \\
\overline{C} &= \frac{r}{1+r}\left\{\underbrace{\left[7M_l\sum_{t=0}^{6}\frac{1}{(1+r)^t} + 7M_h\sum_{t=7}^{13}\frac{1}{(1+r)^t}\right]}_{\overline{M}>} + \left(\frac{1}{1+r}\right)^{14}\left[\frac{1+r}{r}\overline{M}\right]\right\}
\end{aligned}
$$

$$\overline{C} = \overline{M} + \epsilon \Rightarrow \overline{C} < \overline{M}$$

Si el valor presente de las manzanas producidas en el período malo y bueno fuera igual a $\overline{M}$, entonces el consumo de manzanas hubiera sido exactamente igual a $\overline{M}$. En todo caso el punto es que, si dividimos el tiempo en tres etapas, baja producción, alta producción y el resto del tiempo $t \to \infty$ podemos gráficar este problema de la siguiente manera:



b.) **Respuesta**

Dado que esta economía tiene acceso a mercados de capitales, no es relevante el ingreso presente, sino el valor del ingreso permanente, por lo que los futuros ingresos altos que son previstos, ya se habrán traspasado al presente de tal manera de suavizar el consumo en la proporción que dicten las preferencias de los individuos de esta economía. En otras palabras, no cambia el estándar de vida de los individuos. Cualquier aumento de la riqueza esperada es suavizada durante todos los períodos por lo que no hay cambios bruscos en la calidad de vida si es que los aumentos de ingresos son previstos.

c.) **Respuesta**

Si la tasa real es cero entonces podemos reescribir el problema de tal manera que $\overline{C} = \overline{M}$ si además se cumple que $r = \rho$ y que $B_0 = 0$.

$$\begin{aligned}
\sum_{t=0}^{\infty} \overline{C} &= 7M_L + \sum_{t=7}^{13} M_H + \sum_{t=14}^{\infty} \overline{M} \\
\sum_{t=0}^{\infty} \overline{C} &= \sum_{t=0}^{\infty} \overline{M} \\
\overline{C} &= \overline{M}
\end{aligned}$$

d.) **Respuesta**

El efecto que tiene sobre la trayectoria de consumo es siempre a través de como varia el ingreso permanente. Si este cambia, el consumo cambia de manera acorde con $\frac{\partial C_t}{\partial W_t} = r$. En el caso que cambien los precios del mercado mundial cuando suba o baje la producción nacional de manzanas va a depender en que manera es esta relación. Si es una relación lineal de manera que alzas en la producción afectan de la misma manera que bajas, entonces es como que el valor de la productividad de manzanas no bajara tanto en tiempos malos y no subiera en tiempos buenos.

3.2 Consumo y tasa de interés.

a.) **Respuesta**

Las restricciones que enfrenta el individuo cada período son:

$$\begin{aligned}
Y_1 &= S + C_1 \\
C_2 &= S(1+r) + Y_2
\end{aligned}$$

Donde la primera ecuación muestra que el ingreso recibido en el período 1, el individuo puede dedicarlo al consumo de ese período o puede ahorrarlo (endeudarse en el caso de deudor). En la segunda ecuación, vemos que el consumo del segundo período se sustenta de dos partes: lo ahorrado del período anterior, con sus respectivos intereses, y el ingreso del segundo período.

Despejando el ahorro de la segunda ecuación y reemplazando la expresión en la primera ecuación tenemos:

$$\begin{aligned}
S &= \frac{C_2}{1+r} - \frac{Y_2}{1+r} \\
\Rightarrow Y_1 &= \frac{C_2}{1+r} - \frac{Y_2}{1+r} + C_1
\end{aligned}$$

$$Y_1 + \frac{Y_2}{1+r} = C_1 + \frac{C_2}{1+r} \tag{4.1}$$

Despejamos de la restricción intertemporal C_2 y reemplazamos en la función de utilidad:

$$
\begin{aligned}
C_2 &= (1+r)(Y_1 - C_1) + Y_2 \\
\Rightarrow U &= \log C_1 + \beta \log\left[(1+r)(Y_1 - C_1) + Y_2\right]
\end{aligned}
$$

$$\beta = \frac{1}{1+r}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{dU}{dC_1} &= \frac{1}{C_1} + \frac{\beta}{(1+r)(Y_1 - C_1) + Y_2}\left(-(1+r)\right) = 0 \\
\frac{1}{C_1} &= \frac{1}{(1+r)(Y_1 - C_1) + Y_2} \\
\Rightarrow C_1 &= \frac{(1+r)Y_1 + Y_2}{2+r}
\end{aligned}
$$

Reemplazando este resultado en la restricción presupuestaria, obtenemos que $C_1 = C_2$. Encontrando una expresión para el ahorro obtenemos:

$$
\begin{aligned}
S &= Y_1 - C_1 \\
S &= Y_1 - \frac{(1+r)Y_1 + Y_2}{2+r} \\
S &= \frac{(2+r)Y_1 - (1+r)Y_1 - Y_2}{2+r} \\
S &= \frac{2Y_1 + rY_1 - Y_1 - rY_1 - Y_2}{2+r} \\
S &= \frac{Y_1 - Y_2}{2+r}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, cuando $Y_1 = Y_2$, el ahorro es cero. Esto ocurre porque, dado que $\rho = r$ y por la función de utilidad del individuo, este presenta la misma valoración por el consumo presente y futuro, por lo que, ante igualdad de los ingresos, no está dispuesto a endeudarse o a ahorrar por un mayor consumo en alguno de los dos períodos.

b.) i. **Respuesta**

Primero, el ahorro queda definido como:

$$S = \frac{Y_1}{2+r}$$

Encontrando la variación del ahorro ante un cambio en la tasa de interés, tenemos:

$$\frac{\Delta S}{\Delta r} = \frac{-Y_1}{(2+r)^2} < 0$$

Dado que el individuo no registra ingresos en el segundo período, todo lo que sea consumo en el mañana vendrá de su ahorro. Ante un aumento de la tasa de interés, las cantidad que tendrá disponible en el mañana aumentará por el solo concepto de intereses. Por lo tanto, puede acceder a un mayor consumo en el futuro sin una mayor renuncia al consumo presente.

ii. **Respuesta**

En este caso, el ahorro queda definido como:

$$S = \frac{-Y_2}{2+r}$$

Encontrando como cambia el ahorro al variar la tasa de interés en este caso, tenemos:

$$\frac{\Delta S}{\Delta r} = \frac{Y_2}{(2+r)^2} > 0$$

En este caso, S representa el nivel de endeudamiento en el que incurre el individuo (ahorro negativo). Si la tasa de interés aumenta, el pedir prestado se vuelve más caro, por lo que ese nivel de endeudamiento disminuye.

3.3 Seguridad social.

a.) **Respuesta**

En este caso, si el gobierno obliga a todos los ciudadanos ahorrar una fracción de sus ingresos y los individuos tienen pleno acceso al mercado financiero entonces el ahorro de los individuos no aumentará. Esto porque el individuo sabe que al momento de jubilar va a tener más dinero (debido a su ahorro previsional), por lo tanto lo óptimo para él es ajustar su ahorro o aumentar su deuda ahora en la misma magnitud que el ahorro previsional. Esta respuesta es igual si la miramos desde la teoría del ciclo de vida o la teoría del ingreso permanente.

b.) **Respuesta**

En este caso, como el gobierno obliga a todos los ciudadanos a ahorrar una fracción de sus ingresos, todos los individuos excepto los jovenes se comportarán como en el caso anterior, es decir no aumentarán su ahorro. Sin embargo los jovenes no podrán endeudarse respecto a su futura jubilación, lo cual significa que ahora ahorrarán más de lo que predice la teoria del ingreso permanente. Sumando a todos los individuos de la economía llegamos a que ahorro total sube, nadie aumenta su ahorro excepto los jóvenes.

c.) **Respuesta**

En esta caso, como los padres se preocupan del bienestar de sus hijos y los hijos no se pueden pedir prestado todo lo que quisieran, los padres van a servir de mercado financiero a los hijos. Es decir todos están obligados a ahorrar, los padres se endeudan con los bancos para suavizar su consumo (como en el caso a) y se endeudan por sus hijos trasfiriéndole dinero a ellos para que ellos suavizen consumo. Por lo tanto en este caso el ahorro total de la economía no aumentará.

d.) **Respuesta**

Antes de que el gobierno obligará a ahorrar a los individuos, lo óptimo para cada individuo era consumirse todos sus ingresos antes de jubilarse. Porque sabía que el gobierno no lo dejaría morirse de hambre. Para evitar esta situación el gobierno decide obligar a los individuos a ahorrar, en este caso, el ahorro aumentará ya que el individuo sabe que el gobierno sólo le dará plata en el caso que <u>no</u> tenga ingresos. Lo cual nunca sucederá, porque todos los individuos siempre tendrán el ingreso de su ahorro forzado. Por lo tanto, cuando el gobierno les oblige a ahorrar a los individuos, estos no aumentarán su nivel de deuda porque saben que si se endeudan respecto a su futura jubilación, cuando jubilen tendrán deudas iguales a sus ingresos y en ese caso no recibirán dinero del estado.

3.4 Restricciones de liquidez, seguridad social y bienestar.

a.) **Respuesta**

El individuo enfrenta distintos ingresos a lo largo de su vida: durante los primeros veinte años enfrenta $1/4Y$ (con $Y = Y_A$). Los siguientes cuarenta años enfrenta Y, y en los últimos diez años de su vida obtiene $1/5Y$. Por principio de no saciedad, el individuo gasta todo su ingreso en consumo, por lo que tenemos que la restricción puede plantearse como:

$$\begin{aligned}
\frac{20}{4}Y + 40Y + \frac{10}{5}Y &= \sum_{t=1}^{70} C_t \\
5Y + 40Y + 2Y &= \sum_{t=1}^{70} C_t \\
47Y &= \sum_{t=1}^{70} C_t
\end{aligned}$$

Planteamos el lagrangeano para resolver el problema de maximización:

$$\mathcal{L} : \sum_{t=1}^{70} \log C_t + \lambda \left(47Y - \sum_{t=1}^{70} C_t \right)$$

Resolviendo las CPO tenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_i} &= \frac{1}{C_i} - \lambda = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_j} &= \frac{1}{C_j} - \lambda = 0 \\
\Rightarrow \frac{C_j}{C_i} &= 1 \\
\Rightarrow C_j &= C_i
\end{aligned}$$

Esto, para cualquier período. Reemplazando en la restricción tenemos:

$$\begin{aligned}
47Y &= 70\overline{C_t} \\
\Rightarrow \overline{C_t} &= \frac{47Y}{70}
\end{aligned}$$

Entonces, el ahorro para cada período de juventud queda definido como:

$$s_J = Y_J - \overline{C_t} = \frac{Y}{4} - \frac{47Y}{70} = \frac{-59Y}{140}$$

Para cada período de adultez:

$$s_A = Y_A - \overline{C_t} = Y - \frac{47Y}{70} = \frac{23Y}{70}$$

Y para la vejez:

$$s_V = Y_V - \overline{C_t} = \frac{Y}{5} - \frac{47Y}{70} = \frac{-33Y}{70}$$

En el agregado, tenemos:

$$S_t = \frac{-59Y}{140} \cdot 20 + \frac{23Y}{70} \cdot 40 - \frac{33Y}{70} \cdot 10 = 0$$

b.) **Respuesta**

Dado que los individuos no pueden endeudarse en su juventud, el consumo durante ese período de la vida será igual al ingreso que reciban en cada momento t. Por lo tanto, en cada año de juventud su consumo será igual a: $C_t = Y_J = Y/4$ con $t = 1 \ldots 20$. En el resto de su vida, el individuo intentará suavizar su consumo, de la forma:

$$\begin{aligned}
40Y + \frac{10}{5}Y &= \sum_{t=21}^{70} C_t \\
42Y &= \sum_{t=21}^{70} C_t \\
C_i &= C_j \\
42Y &= 50\overline{C_t} \\
\Rightarrow \overline{C_t} &= \frac{21Y}{25}
\end{aligned}$$

Por lo que el ahorro durante la adultez será:

$$s_A = Y_A - \overline{C_t} = Y - \frac{21Y}{25} = \frac{4Y}{25}$$

Y en la vejez:

$$s_V = Y_V - \overline{C_t} = \frac{Y}{5} - \frac{21Y}{25} = \frac{-16Y}{25}$$

El ahorro agregado es entonces:

$$S_t = 0 \cdot 20 + \frac{4Y}{25} \cdot 40 - \frac{16Y}{25} \cdot 10 = 0$$

El ahorro agregado se mantiene en cero, pero ahora el ahorro en la adultez es menor que en el caso en que no tenía restricciones crediticias durante la juventud. Esto ocurre, ya que no puede suavizar consumo durante sus años juveniles.

c.) **Respuesta**
Para el primer caso, la utilidad queda definida de la forma:

$$U = \sum_{t=1}^{70} \log \overline{C_t} = 70 \cdot \log\left(\frac{47Y}{70}\right)$$

En el segundo caso, tenemos:

$$U = \sum_{t=1}^{20} \log C_J + \sum_{t=21}^{70} \log \overline{C_t} = 20 \cdot \log\left(\frac{Y}{4}\right) + 40 \cdot \log\left(\frac{21Y}{25}\right)$$

Desde ya vemos que para cualquier valor de Y, el primer caso entrega una mayor utilidad (hagan la prueba si es que no nos creen). Esto ocurre porque en el segundo caso, el individuo se enfrenta a una restricción intertemporal más acotada, al no tener posibilidades de endeudamiento en su juventud. Esto lo limita en cuanto al nivel de consumo que el quisiera conseguir para ese período de su vida, ya que es mayor a lo que puede acceder con el ingreso que recibe en ese momento.

d.) **Respuesta**
Hasta el momento, la población no crecía (apenas nacía un niño, moría un viejo). Ahora, el crecimiento es distinto de cero y positivo. Eso quiere decir que de un año a otro, el endeudamiento va a crecer en un $n\%$, por lo que el ahorro agregado va a ser negativo. Esto no ocurre con restricciones crediticias, ya que los jovenes no se podrían endeudar. De todas maneras, individualmente ocurre que las personas están mejor sin las restricciones crediticias, ya que pueden alcanzar un mayor nivel de utilidad.

e.) **Respuesta**
Reconstruyendo la restricción presupuestaria para este caso, tenemos que, para el período de juventud, el ingreso será: $Y/4 - Y/6 = Y/12$. Para la adultez, tenemos: $Y - Y/6 = 5Y/6$. Por último, para el período de la vejez tenemos que cada período recibirá $Y/5$, pero además, les será devuelto todo ese impuesto pagado durante su vida, que sería igual a $60 \cdot Y/6 = 10Y$. Por lo tanto, la restricción intertemporal del individuo queda descrita como:

$$\begin{aligned}
\frac{20}{12}Y + 40Y \cdot \frac{5}{6} + \frac{10}{5}Y + 10Y &= \sum_{t=1}^{70} \overline{C_t} \\
\frac{5}{3}Y + \frac{100}{3}Y + 2Y + 10Y &= 70\overline{C_t} \\
35Y + 12Y &= 70\overline{C_t} \\
\Rightarrow \overline{C_t} &= \frac{47Y}{70}
\end{aligned}$$

El consumo óptimo no cambia. El ahorro durante cada período de la vida es como sigue:

$$s_J = Y_J - \overline{C_t} = \frac{Y}{12} - \frac{47Y}{70} = \frac{-247Y}{420}$$

$$s_A = Y_A - \overline{C_t} = \frac{5Y}{6} - \frac{47Y}{70} = \frac{17Y}{105}$$

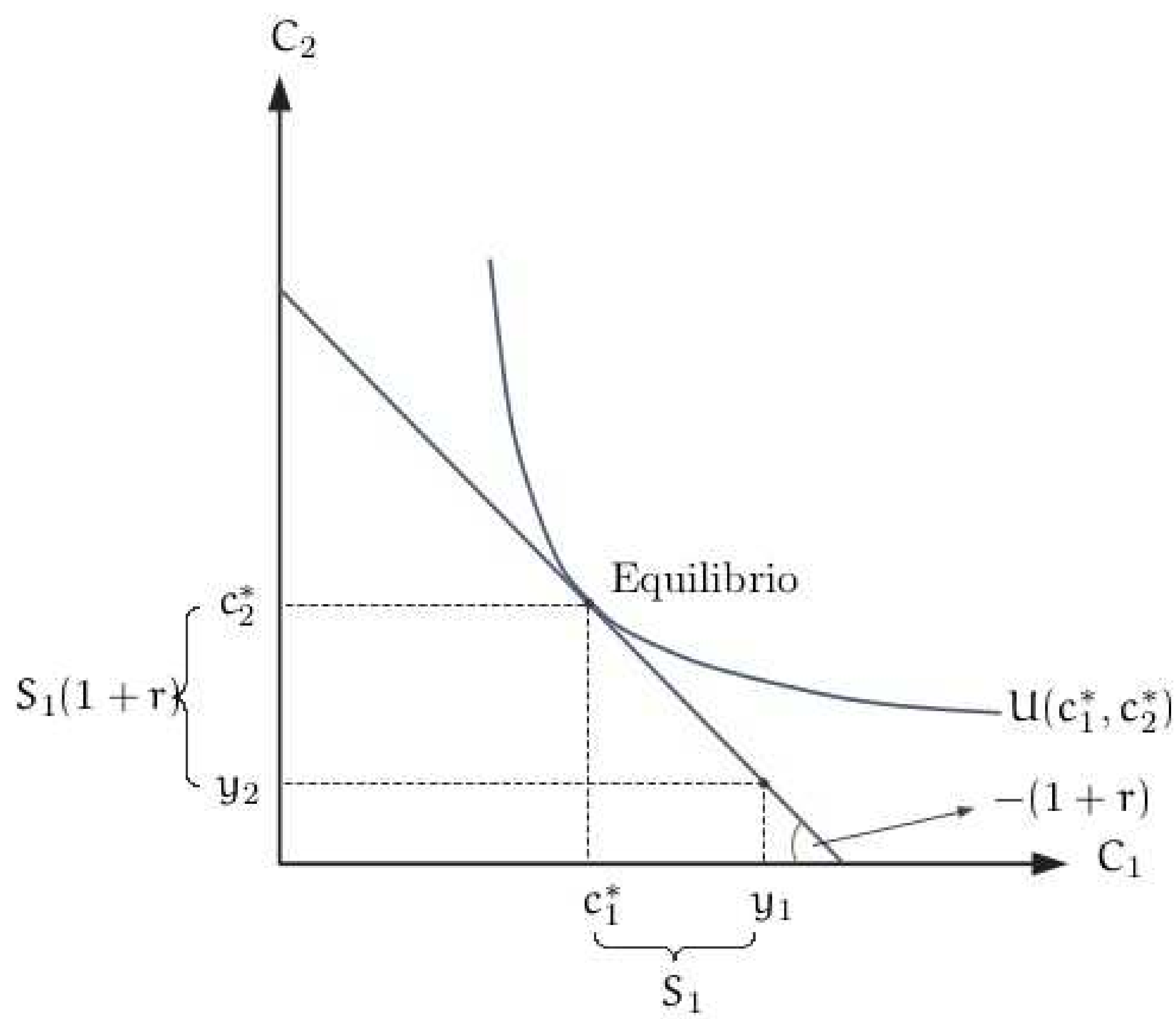
Y el agregado sigue sumando cero.

Como vemos, el impuesto de suma alzada no afecta las decisiones óptimas de consumo de el individuo. Este mecanismo de seguridad social puede servir para una sociedad con muchos individuos poco previsores, que no ahorran para el futuro y se inclinan fuertemente por el consumo actual.

3.5 Relación entre ahorro presente e ingreso futuro.

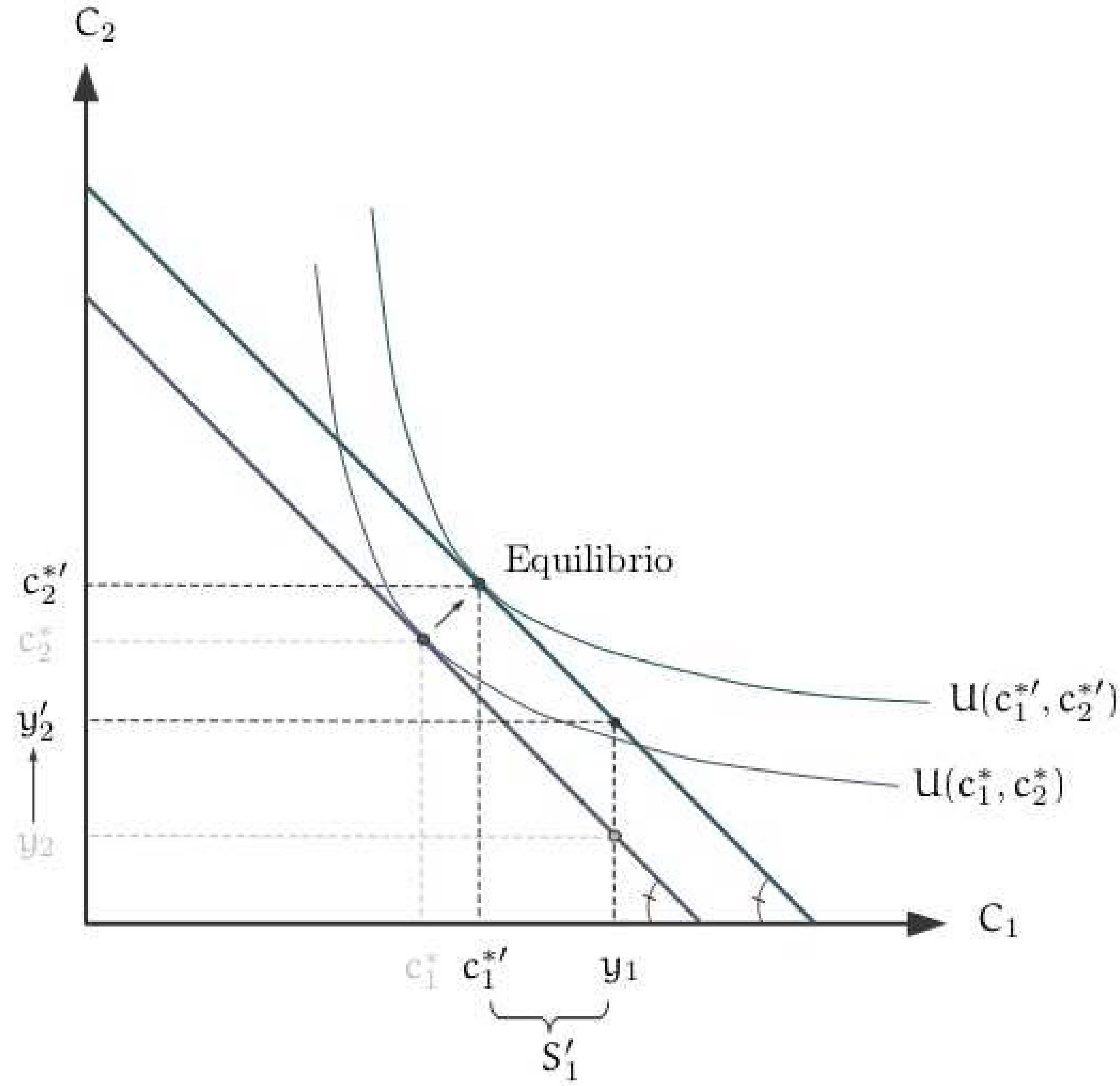
a.) **Respuesta**
No, pues la función de teoría keynesiana supone que el individuo ahorra siempre la misma fracción de sus ingresos y además es una teoría estática, no tiene ninguna relación entre el ingreso presente y futuro.

b.) **Respuesta**
Esto se puede observar en la síguete figura.



c.) **Respuesta**

El ingreso en el período aumenta de y_2 a y_2*. Por lo tanto el consumo en el primer período cambia de c_1 a c_{1*} y en el segundo de c_2 a c_{2*}. Esto significa que el ahorro en el primer período pasa de S_1 a S_1'. Esto se puede apreciar en la figura c.).



d.) **Respuesta**
No hemos hecho ningún supuesto sobre la función de utilidad, ni tampoco hemos tomado una tasa de interés en particular. Lo mismo sucede con el ingreso. Pero por sobre todo la derivación gráfica es correcta porque si el individuo sabe que su ingreso en el futuro va a ser alto ahorrará poco o nada hoy, para de esa forma suavizar consumo y pagará con el ingreso de mañana su mayor consumo hoy.

3.6 Más consumo intertemporal.

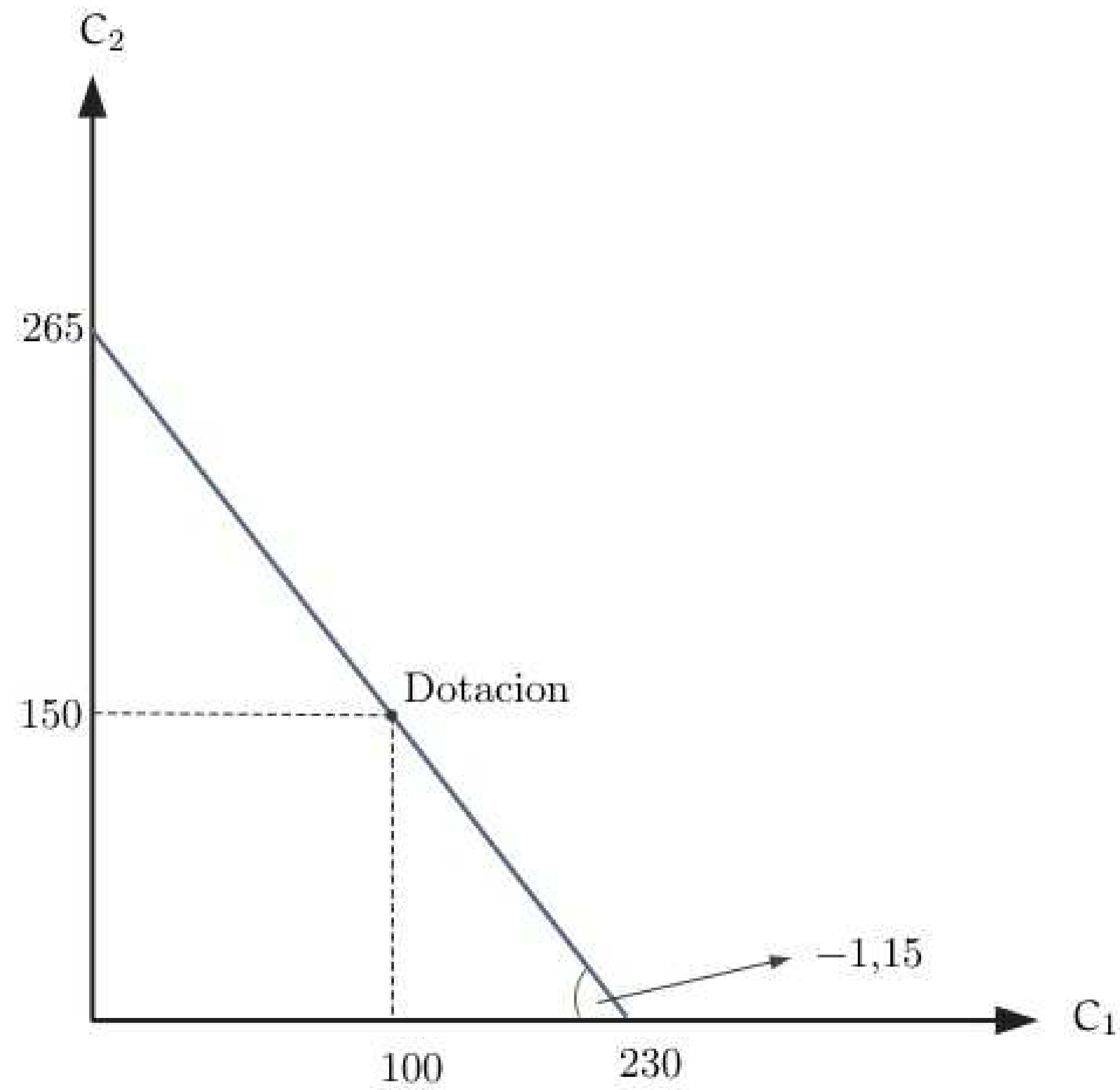
a.) **Respuesta**
La restricción presupuestaria es:

$$C_1 + \frac{C_2}{1+r} = Y_1 + \frac{Y_2}{1+r} \tag{4.2}$$

Reemplazando los valores entregados, tenemos que

$$100 + \frac{150}{1{,}15} = C_t + \frac{C_{t+1}}{1{,}15} \tag{4.3}$$

Gráficamente:



b.) **Respuesta**
Tomando (4.2) y reemplazando $C_1 = C_2 = C$, tenemos que

$$
\begin{aligned}
C_1(1+r) + C_2 &= (1+r)Y_1 + Y_2 && (4.4)\\
C(2+r) &= (1+r)Y_1 + Y_2 && (4.5)\\
\frac{1{,}15 \times 100 + 150}{2{,}15} &= C && (4.6)\\
C &\simeq 123 && (4.7)
\end{aligned}
$$

c.) **Respuesta**
Utilizando 4.5 y sabiendo que $2C_1 = C_2$,

$$
\begin{aligned}
C_1 + \frac{C_2}{(1+r)} &= Y_1 + \frac{Y_2}{(1+r)}\\
C_1 + \frac{2C_1}{(1+r)} &= Y_1 + \frac{Y_2}{(1+r)}\\
\frac{C_1(1+r) + 2C_1}{(1+r)} &= Y_1 + \frac{Y_2}{(1+r)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_1 &= \frac{1+r}{3+r}\left[Y_1 + \frac{Y_2}{(1+r)}\right] \qquad (4.8)\\
C_1 &= \frac{1{,}15}{3{,}15}\left[100 + \frac{150}{(1{,}15)}\right]\\
C_1^* &\simeq 84\\
C_2^* &\simeq 168
\end{aligned}
$$

d.) **Respuesta**

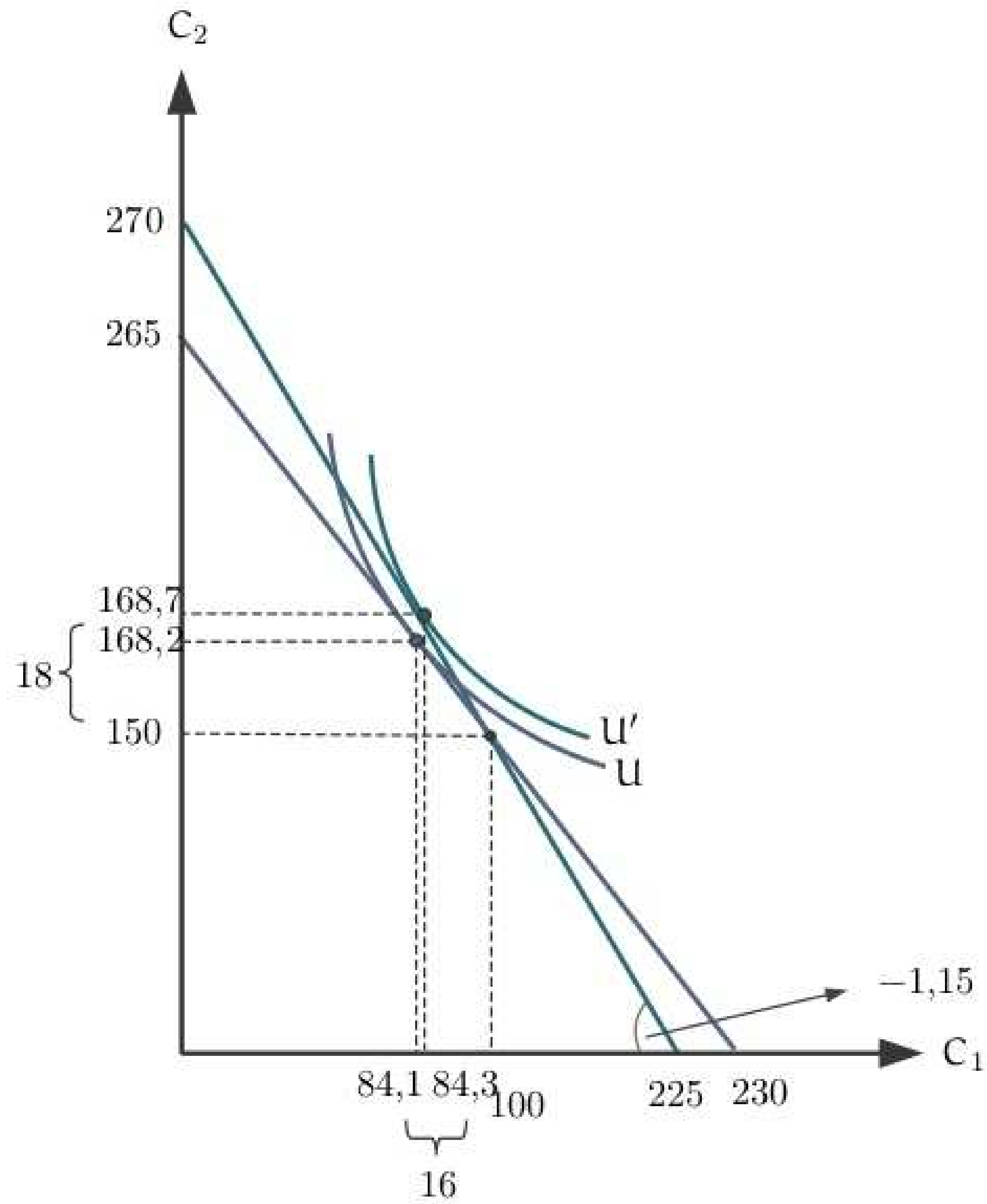
Mirando la ecuación (4.8) podemos ver que el cambio en la tasa de interés afectara por medio del primer termino en llaves $\left[\frac{1+r}{3+r}\right]$ el cual aumenta con r y también mediante el efecto de bajar el valor presente de los ingresos futuros en el termino $Y_2/(1+r)$ el cual es obviamente negativo.

$$
C_1 = \left[\frac{1+r}{3+r}\right]\left[Y_1 + \frac{Y_2}{(1+r)}\right]
$$

Al reemplazar los datos tenemos que el consumo permanece casi constante con una pequeña alza de $84{,}13 \to 84{,}38$. El consumo el el segundo período es simplemente el doble. Por lo tanto un aumento de la tasa de interés genera un aumento en el consumo en t!

Esto se puede explicar porque $Y_1 > C_1$, es decir, el individuo es un acrededor neto. Dado que no hay efecto de cambio en la distribución de consumo (i.e. no puede ahorrar mas dado el mayor incentivo) debido a que esta dado por el enunciado, solo existe el efecto ingreso positivo y el efecto negativo sobre el valor presente de los ingresos en $t+1$.

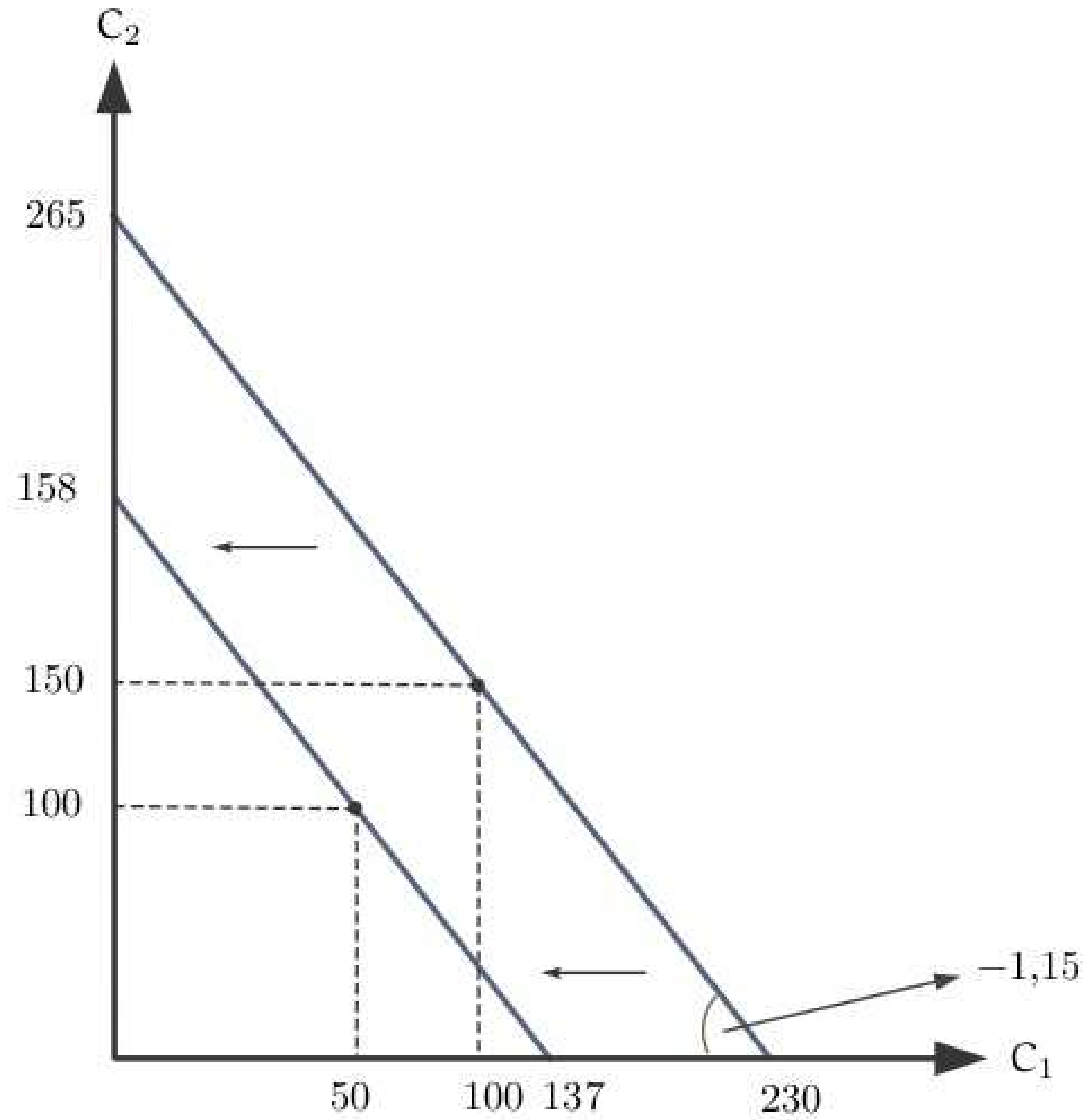
e.) **Respuesta**



f.) **Respuesta**

El rol del gobierno en este caso seria de cambiar la dotación de ingreso.

$$
\begin{aligned}
C_1 + \frac{C_2}{(1+r)} &= Y_1 - T + \frac{Y_2 - T}{(1+r)} \\
C_1 + \frac{C_2}{(1{,}15)} &= 50 + \frac{100}{(1{,}15)}
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$



g.) i. **Respuesta**
Utilizando 4.5 y sabiendo que $C_1 = 40$,

$$(1{,}15)50 + 100 = 40(1{,}15) + C_2 \quad (4.10)$$
$$C_2 = 111{,}5 \quad (4.11)$$

ii. **Respuesta**
Utilizando 4.5 y sabiendo que $t_1 = 60$ y $t_2 = 40$,

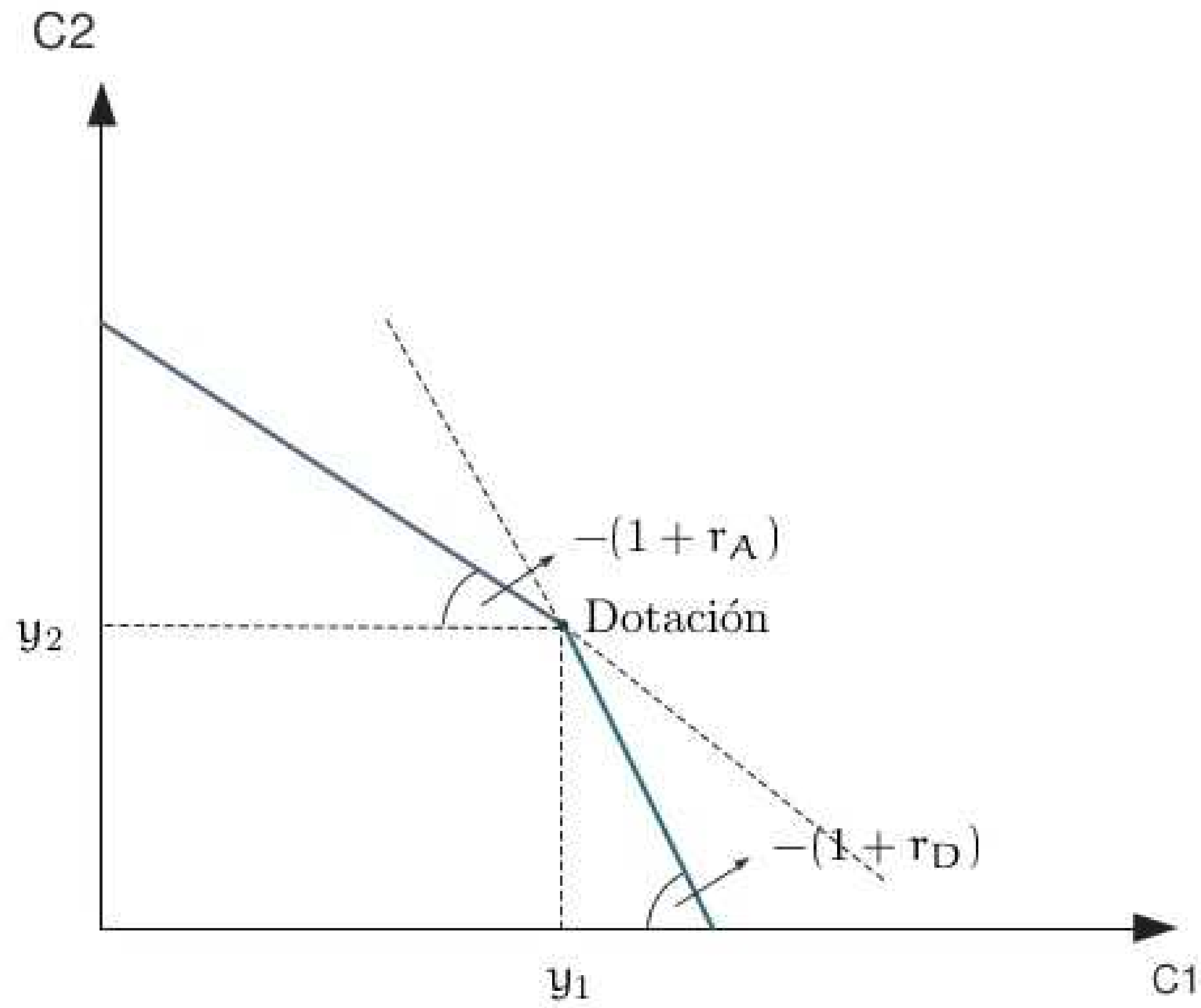
$$(1{,}15)40 + 110 = 40(1{,}15) + C_2 \quad (4.12)$$
$$C_2 = 110 \quad (4.13)$$

iii. **Respuesta**
El cambio en la estructura de impuestos hace que el individuo pase de una situación ahorradora a una situación neutral, donde $Y_1 = C_1$ e $Y_2 = C_2$.

3.7 Consumo y restricciones de liquidez.

a.) **Respuesta**

Las pendientes son $-(1+r_D)$ para la sección que implica deuda, donde $c_1 > y_1$ y $-(1+r_A)$ para la section de la restricción presupuestaria que implica ahorro en el primer período con $c_1 < y_1$. parte ahorradora.



b.) **Respuesta**
De las condiciones de primer orden se tiene que

$$\frac{U_{C_1}(C_1, C_2)}{U_{C_2}(C_1, C_2)} = 1 + r \tag{4.14}$$

$$\tag{4.15}$$

Sabemos que $r_A < r_D$, entonces

$$\frac{U_{C_1}(C_1, C_2)}{U_{C_2}(C_1, C_2)} \leqslant |1 + r_D| \tag{4.16}$$

$$\frac{U_{C_1}(C_1, C_2)}{U_{C_2}(C_1, C_2)} \geqslant |1 + r_A| \tag{4.17}$$

Evaluando en $C_1 = Y_1$ y $C_2 = Y_2$

$$\frac{U_{C_1}(Y_1, Y_2)}{U_{C_2}(Y_1, Y_2)} \leqslant |1 + r_D| \tag{4.18}$$

$$\frac{U_{C_1}(Y_1, Y_2)}{U_{C_2}(Y_1, Y_2)} \geqslant |1 + r_A| \tag{4.19}$$

c.) **Respuesta**

Si la función es separable, las expresiones de la utilidad marginal con respecto a C_1 y C_2 dependerán solamente de el consumo en un período. Esto es,

$$\frac{u_{C_1}(Y_2)}{u_{C_2}(Y_1)} \leqslant |1+r_D| \quad (4.20)$$

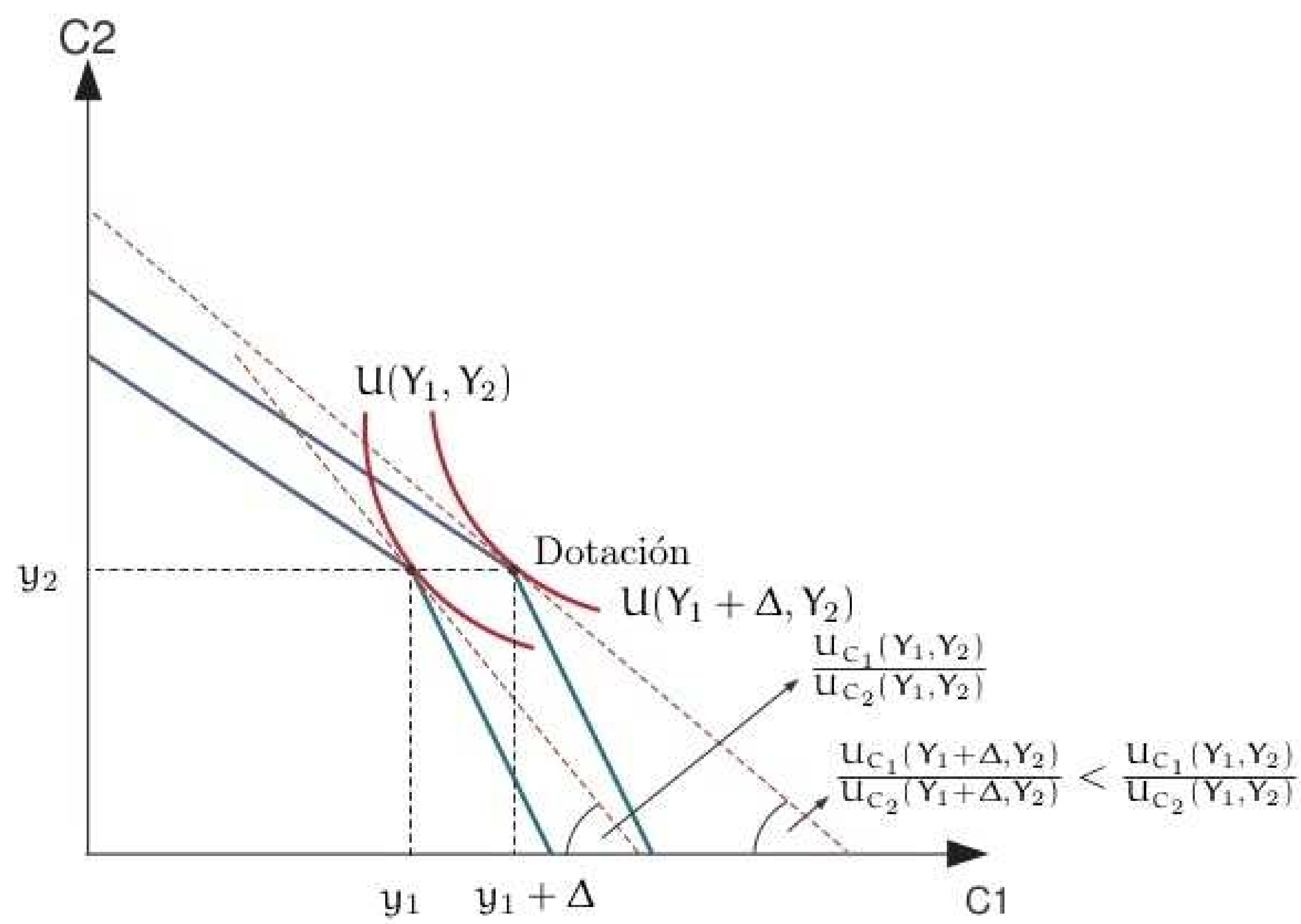
$$\frac{u_{C_1}(Y_2)}{u_{C_2}(Y_1)} \geqslant |1+r_A| \quad (4.21)$$

d.) **Respuesta**

En este caso se debe cumplir exclusivamente la desigualdad y no estar solo marginalmente restringido en la desviación optima de consumo. Esto significa si nos movemos marginalmente en el consumo c_1 o c_2, se continúan cumpliendo ambas condiciones, y por lo tanto aun se consume la dotación.

$$\frac{u_{C_1}(Y_2)}{u_{C_2}(Y_1)} < |1+r_D| \quad (4.22)$$

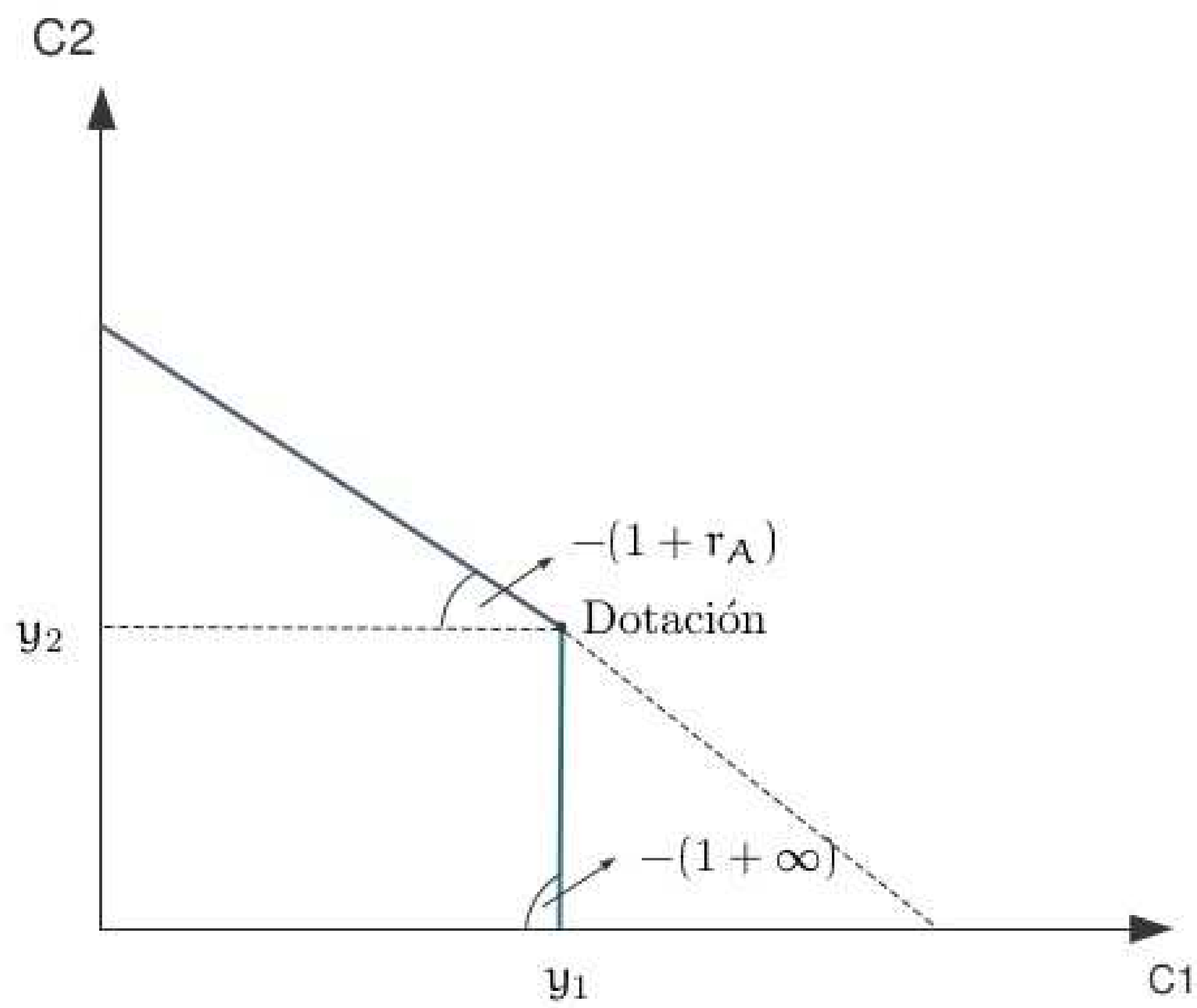
$$\frac{u_{C_1}(Y_2)}{u_{C_2}(Y_1)} > |1+r_D| \quad (4.23)$$



Por construcción hemos definido que el individuo consumirá donde ambas pendientes se cruzan, entonces, al aumentar sólo Y_1, C_1 aumentará en la misma proporción. Dado que no hemos movido Y_2, el aumento de Y_1 no tendrá efectos sobre C_2.

e.) **Respuesta**
Si la brecha entre r_D y r_A es muy grande y se cumple que $r_D > r_A$, sucede que es muy caro endeudarse y el retorno del ahorro es muy bajo (relativamente). Al ser la brecha grande entre tasas, existe un conjunto mas grande de agentes que optan por consumir su dotación y se utiliza menos el mercado financiero para suavizar su consumo lo cual genera bajos niveles de ahorro y deuda. En los países en desarrollo, es de esperar que tengan una trayectoria de ingreso con mayor pendiente que los países industrializados y que estos Este punto es vital para un país en desarrollo, ya existe una correlación positiva entre ahorro y crecimiento.

f.) **Respuesta**
En este caso, los individuos pueden solo ahorrar, y gráficamente se puede describir en la siguiente figura.



Vemos que sera mas restrictivo y que limita aun mas las decisiones de consumo intertemporal.

3.8 Ahorro y crecimiento.

a.) **Respuesta**
Primero, encontramos la restricción presupuestaria,

$$\sum_{i=1}^{3} Y_i = Y + (1+\gamma)Y + 0 \quad (4.24)$$

$$\sum_{i=1}^{3} Y_i = (2+\gamma)Y \quad (4.25)$$

Como sabemos que $C_1 = C_2 = C_3$, C_i será

$$C_i = \frac{Y(2+\gamma)}{3} \tag{4.26}$$

$$\tag{4.27}$$

Dado que ahorro es $S_i = Y_i - C_i$,

$$\begin{aligned} S_1 &= Y - \frac{Y(2+\gamma)}{3} \\ S_2 &= Y(1+\gamma) - \frac{Y(2+\gamma)}{3} \\ S_3 &= -\frac{Y(2+\gamma)}{3} \end{aligned}$$

b.) **Respuesta**
Ya que no hay crecimiento de la población ni del ingreso, el ahorro para cualquier período será la suma de los ahorros para cada período de la vida del individuo.

$$S_1 + S_2 + S_3 = Y - \frac{Y(2+\gamma)}{3} + Y(1+\gamma) - \frac{Y(2+\gamma)}{3} - \frac{Y(2+\gamma)}{3} = 0 \tag{4.28}$$

Vemos que el ahorro agregado sera cero en cada momento.

c.) **Respuesta**
Lo relevante en este caso es ver que no ha cambiado el valor total de los recursos de las personas. Partamos comparando el ahorro obligatorio con el ahorro óptimo que ya escoge el individuo en cada etapa de su vida. Si se cumple que $2A < \frac{Y(2+\gamma)}{3}$, entonces se ahorra la diferencia y no cambia el consumo ni ahorro. En el caso que $2A > \frac{Y(2+\gamma)}{3}$, tenemos que el consumo en el ultimo período es mayor al deseado y hay los agentes suavizan igual pero ahorra los viejos le traspasan recursos a los jóvenes. Dado que no hay restricciones al mercado de capitales, y el valor del ingreso permanente no ha cambiado, el ahorro forzado no tiene ningún efecto sobre el consumo ni el ahorro agregado, solo quienes son los ahorradoes.

d.) **Respuesta**
Hasta el momento, la población no crecía (apenas nacía un niño, moría un viejo) por lo que la restricción presupuestaria del individuo aplicaba a la economía entera. Ahora, el crecimiento es positivo por lo que mientras los individuos cumplan su restricción presupuestaria, el agregado va a depender de que sector (ahorrantes o deudores) son los que están creciendo.

Si el período $t = 0$ el ingreso era Y, entonces

$$\begin{aligned} \sum S_t &= (1+n)^t S_1 + (1+n)^{t-1} S_2 + S_3 (1+n)^{t-2} \\ \sum S_t &= \left[(1+n)^2 \left[Y - \frac{Y(2+\gamma)}{3}\right] + (1+n)\left[Y(1+\gamma) - \frac{Y(2+\gamma)}{3}\right] - \frac{Y(2+\gamma)}{3}\right](1+n)^{t-2} \end{aligned}$$

El signo del ahorro depende de γ y n.

$$\begin{aligned}
(1+n)^2\left[Y - \frac{Y(2+\gamma)}{3}\right] + (1+n)\left[Y(1+\gamma) - \frac{Y(2+\gamma)}{3}\right] - \frac{Y(2+\gamma)}{3} &> 0 \\
(1+n)^2[1-\gamma] + (1+n)[1+2\gamma] &> 2+\gamma \\
(1+n)[(1+n)(1-\gamma) + (1+2\gamma)] &> 2+\gamma \\
3 + n(1-\gamma) &> 0 \qquad (4.29)
\end{aligned}$$

Vemos que mientras γ y n ambos no sean demasiado grandes ocurre lo mas obvio y aumenta el ahorro agregado. Se podría dar el caso contrario si es que el ingreso crece mucho (γ grande), por lo que cada individuo tiene $S_1 < 0$. Es sumado con el hecho que n también es muy grande, lleva a que es posible que el ahorro agregado sea negativo. Suponemos que se cumple la condición en (4.29) para el resto del ejercicio.

e.) **Respuesta**
El ingreso total de esta economía, en el período t, será:

$$Y_t = Y(1+n)^t + Y(1+\gamma)(1+n)^{t-1} = Y(2+n+\gamma)(1+n)^{t-1} \qquad (4.30)$$

En el período

$$Y_{t+1} = Y(1+n)^{t+1} + Y(1+\gamma)(1+n)^t = Y(2+n+\gamma)(1+n)^t \qquad (4.31)$$

La tasa de crecimiento en esta economía seria de

$$\frac{Y(2+n+\gamma)(1+n)^t - Y(2+n+\gamma)(1+n)^{t-1}}{Y(2+n+\gamma)(1+n)^{t-1}} = n$$

El ahorro también crece a la misma tasa.

f.) **Respuesta**
Los países con n alto, también tendrán crecimiento del ahorro de n. Sin embargo, en este modelo, el ahorro no tiene ningún efecto sobre le ingreso y el crecimiento es exclusivamente producto del aumento de la población.

4. Inversión

4.1 Inversión.

a.) **Respuesta**
Si j esta dado, la inversión total de los j proyectos más rentables es jK. Ya que cada proyecto contempla una inversion de K unidades de un bien de capital. El valor de la inversion por lo tanto es de jP_0K.

b.) **Respuesta**
La condición sobre el último proyecto en el cual invierte el individuo es tal que el valor presente del proyecto es igual a cero. Esto nos lleva a:

$$\frac{\frac{\nu}{j} + P_1K}{1+r} - P_0K = 0 \tag{5.1}$$

donde el primer término es el valor presente del ingreso que el individuo recibirá cuando finalize el proyecto y el segundo término es la inversión del proyecto al inicio del período. Despejando j obtenemos:

$$\bar{j} = \frac{\nu}{(P_0(1+r) - P_1)K} > 0$$

Por lo tanto el valor de la inversion total es $\bar{j}KP_0$, o simplemente

$$I = \frac{P_0\nu}{(P_0(1+r) - P_1)} > 0$$

Además se puede ver que $\frac{\partial I}{\partial r} < 0$.

c.) **Respuesta**
Si $P_0 < P_1/(1+r)$ esto implica que existe una ganaría de capital que es mayor al costo de los fondos dado por la tasa de interés. Esto lleva a una oportunidad de generar ganancias sin importar el valor agregado del proyecto en si dado por ν/j. Esto se puede ver en la ecuación (5.1) que nos entrega la condición del ultimo proyecto:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\nu}{j} + P_1K}{1+r} - P_0K &= 0 & (5.2) \\ \frac{\frac{\nu}{j}}{1+r} + K\left[\frac{P_1}{1+r} - P_0\right] &= 0 & (5.3) \\ & & (5.4) \end{aligned}$$

Tomando el limite de esta expresión al hacer $j \to \infty$ vemos que

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\frac{\nu}{j}}{1+r} + K\left[\frac{P_1}{1+r} - P_0\right] = K\left[\frac{P_1}{1+r} - P_0\right] > 0$$

Lo cual es una contradicción y muestra que habrán incentivos para realizar todos los proyectos independiente de ν y j dado que la actividad que genera valor en este caso es comprar el capital y guardarlo en el tiempo.

En equilibrio uno espera que no se generen oportunidades de arbitraje de este tipo ya que la tasa de interés debería reaccionar al aumento en la demanda por fondos frente a una situación así hasta restablecer el equilibrio.

4.2 Impuestos e inversión.

a.) **Respuesta**

Valor presente flujo de ingresos es:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{PZ(1-\delta)^{i-1}}{(1+r)^i} &= \frac{PZ}{1+r}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1-\delta}{1+r}\right)^{i-1} = \frac{PZ}{1+r}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1-\delta}{1+r}\right)^{i} \\ &= \frac{PZ}{1+r}\frac{1+r}{r+\delta} = \frac{PZ}{r+\delta} \end{aligned} \tag{5.5}$$

Por lo tanto el VAN será:

$$\text{VAN} = \frac{PZ}{r+\delta} - P_K \tag{5.6}$$

y la condición para que la inversión se realize es:

$$PZ > (r+\delta)P_K \tag{5.7}$$

b.) **Respuesta**

Si la empresa se endeuda y paga rP_K, el valor presente de lo que paga es:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{rP_K}{(1+r)^i} = P_K \tag{5.8}$$

Por lo tanto el VAN es exactamente el mismo al de la parte anterior y la decisión de inversión la misma. Es indiferente entre financiar con fondos propios o con deuda.

Se puede llegar a lo mismo notando que la empresa tiene un flujo permanente de $PZ(1-\delta)^{i-1} - rP_K$ en el período i. Puesto que no hay pago al inicio por la inversión (se pidió prestad la plata), el VAN es el mismo al de (a).

c.) **Respuesta**

En este caso la empresa recibe como utilidad después de impuestos, en un período i, $(1-\tau)(PZ(1-\delta)^{i-1} - rP_K)$, lo que en valor presente corresponde a:

$$\text{VAN} = (1-\tau)\left(\frac{PZ}{r+\delta} - P_K\right) \tag{5.9}$$

Si bien las utilidades caen, la decisión de invertir o no cambia con los casos anteriores. El sistema tributario es neutral respecto de la inversión.

d.) **Respuesta**

En este caso simplemente el valor presente de los flujos de caja es el de la parte (a), pero multiplicado por $1-\tau$. Por otra parte la empresa paga P_K en el período 0, pero recibe un crédito (subsidio) de τP_K, lo que implica que paga sólo $(1-\tau)P_K$. En consecuencia el VAN es exactamente el mismo al anterior.

e.)i.) **Respuesta**

La empresa descuenta (no en valor presente):

$$\begin{aligned}\delta P_K + \delta(1-\delta)P_K + \delta(1-\delta)^2 P_K + .. &= \delta P_K(1+(1-\delta)+(1-\delta)^2+\ldots) \\ &= \delta P_K \frac{1}{1-(1-\delta)} = P_K \end{aligned} \quad (5.10)$$

ii.) **Respuesta**

En este caso la empresa tiene flujos antes de impuesto en valor presente de $PZ/(r+\delta)$, pero cuando paga impuestos lo hace sólo sobre un flujo de $PZ(1-\delta)^{i-1} - P_K\delta(1-\delta)^{i-1}$, de modo que el valor presente del pago de impuestos es (después de un par de simplificaciones):

$$\tau \sum_{i=1}^{\infty} \frac{[PZ-\delta P_K](1-\delta)^{i-1}}{(1+r)^i} = \tau \frac{PZ-\delta P_K}{r+\delta} \quad (5.11)$$

Por lo tanto el VAN del proyecto es:

$$\begin{aligned}\text{VAN} &= \frac{PZ}{r+\delta} - \tau\left[\frac{PZ-\delta P_K}{r+\delta}\right] - P_K \\ &= (1-\tau)\frac{PZ}{r+\delta} - \left(1-\tau\frac{\delta}{r+\delta}\right)P_K \end{aligned} \quad (5.12)$$

como se ve de esta ecuación el VAN cae y habrá menos inversión. La razón es que el descuento tributario en el futuro es descontado. Si la tasa de interés fuera cero, esto sería exactamente igual a los caso anteriores. Pero no basta que el capital se deprecie completamente para que el impuesto sea neutral, sino que el momento en que se paga el impuesto y se reciben los créditos es importante.

4.3 Depreciación, impuestos e inversión.

a.) **Respuesta**

La utilidad del primer período antes de impuestos es $Z-Q$, y paga impuestos sobre $Z-Q/2$, es decir la utilidad después de impuestos es $Z(1-\tau)-Q+\tau Q/2 = Z(1-\tau)-Q(1-\tau/2)$. Similarmente, en el segundo período la utilidad después de impuestos es $Z(1-\tau)/2+\tau Q/2$. El valor presente es:

$$VP = \frac{3Z(1-\tau)}{2} - Q(1-\tau) = (1-\tau)\left[\frac{3Z}{2}-Q\right]. \quad (5.13)$$

Note que la condición para hacer o no el proyecto, $VP >$ o < 0, es independiente de τ.

b.) **Respuesta**
En este caso la utilidad después de impuestos en el primer períodoes $(Z - Q)(1 - \tau)$, y en el segundo $Z(1 - \tau)/2$. El valor presente del proyecto es:

$$VP = (1 - \tau)\left[\frac{3Z}{2} - Q\right] \tag{5.14}$$

Que es exactamente igual a la de la parte anterior, en consecuencia la forma de imputar la depreciación no afecta la decisión de invertir. Como el alumno irá deduciendo, es claro que esto ocurre porque $r = 0$, es decir el presente y el futuro son valorados iguales, y en consecuencia da lo mismo cuando imputar el costo de capital.

c.) **Respuesta**
Procediendo de manera similar, en el caso de la depreciación lineal el valor presente es (note que en el segundo período el ingreso es $Z(1+r)/2$, o sea en valor presente es $Z/2$):

$$VP_l = (1 - \tau)\frac{3Z}{2} - [1 - \frac{r}{2}\frac{2+r}{1+r}]Q \tag{5.15}$$

Por su parte, en el caso de depreciación acelerada se tiene:

$$VP_a = (1 - \tau)\frac{3Z}{2} - (1 - \tau)Q \tag{5.16}$$

Por lo tanto,

$$VP_a > VP_l \tag{5.17}$$

Por lo tanto es más probable que se realize la inversión en el caso que haya depreciación acelerada. En otras palabras, la depreciación acelerada aumenta la rentabilidad de los proyectos y por lo tanto aumenta la inversión.

d.) **Respuesta**
La razón de lo anterior es que la tasa de interés es positiva, en consecuencia el futuro es descontado y es preferible que se deprecie antes que después. En el caso de la depreciación lineal, el valor presente de la depreciación es $Q(2+r)/2(1+r)$, que es menor que Q (valor presente de la depreciación cuando está acelerada) en la medida que la tasa de interés es positiva, por lo tanto la depreciación lineal no deprecia todo el capital en valor presente.

4.4 Inversión y tasa de interés.

a.) **Respuesta**
Sabemos que cuando el capital es igual al capital deseado la inversión viene dada por:

$$I_t = K^*_{t+1} - K^*_t \tag{5.18}$$

donde $K_i = \frac{\nu Y^*}{R}$. Por lo tanto si la tasa de interés aumenta de forma permanente, es decir para siempre, entonces el nivel de capital se cae y como el capital de la firma es igual al capital deseado, la empresa ajusta su capital de una vez. Siendo la inversión negativa, es decir la firma se deshace de una vez de del capital que no le sirve. En este caso el efecto de la tasa de interés sobre la inversión será transitorio, pues la inversión cambia una sóla vez.

Sin embargo si la empresa enfrenta costos de ajuste, entonces la inversión de la firma es:

$$I_t = \lambda(K^*_{t+1} - K_t) \tag{5.19}$$

en donde λ representa la fracción del desajuste que la firma se ajusta cada período. Supongamos que al inicio el nivel de capital de la firma se encontraba en su nivel deseado, por lo tanto un aumento en la tasa de interés disminuye K^*_{t+1}, es decir el nivel deseado de capital de la firma. Como la firma se ajusta sólo una fracción λ en cada período, el aumento en la tasa de interés produce un efecto permanente en la inversión, pues ahora tenemos que se realiza inversión en cada período, siendo esta siempre negativa. Pero cada período el nivel de inversión es menor, pues el desajuste de la firma es cada vez menor.

b.) **Respuesta**

Con la función keynesiana, la inversión cae, pues ahora la tasa de interés es mayor. Pero después del aumento de la tasa de interés la inversión permanece en un mismo nivel hasta que vuelva a cambiar nuevamente la tasa de interés. Este resultado no es consistente con los de la parte anterior, excepto cuando los costos de ajuste son cero, es decir $\lambda = 1$.

c.) **Respuesta**

No, la respuesta sigue siendo la misma, pues la teoría keynesiana no realiza ningún supuesto de como evoluciona la inversión cuando crece el nivel deseado de capital. Porque la teoría supone que el capital de la firma es igual al capital deseado y la único que puede producir una brecha entre ambos es la tasa de interés.

4.5 Inversión e incertidumbre.

Respuesta

Sabemos, por el enunciado, que la firma cuando elige la cantidad de trabajadores conoce el salario, pero cuando elige la cantidad de capital no sabe el salario exacto pero si su valor esperado. Por lo tanto tenemos que dividir el problema en dos, primero la firma elige la cantidad de trabajo, conociendo el salario y después elige la cantidad de capital.

Es decir la firma resuelve:

$$\max_{\{L\}} \pi(w, K, L) = 2K^{\gamma/2}L^{1/2} - wL - K$$

cuando el salario es alto ($w_0(1+\alpha)$) y cuando el salario es bajo ($w_0(1-\alpha)$). Formalmente:

$$\max_{\{L\}} \pi(w, K, L) = 2K^{\gamma/2}L^{1/2} - w_0(1+\alpha)L - K$$

De la condición de primer orden y después de un poco de algebra llegamos a:

$$L_{w_{Alto}} = \frac{K^{\gamma}}{w_0^2(1+\alpha)^2}$$

lo hemos llamado L_{Bajo} porque el salario es alto y por lo tanto cuando el salario es alto la demanda por trabajo es baja. De mismo modo cuando el salario es bajo, $w_0(1-\alpha)$, entonces la demanda por trabajo es:

$$L_{w_{\mathrm{Bajo}}} = \frac{K^{\gamma}}{w_0^2(1-\alpha)^2}$$

El último paso es determinar la cantidad de capital que elige la firma. Tal como lo dice el enunciado la firma maximiza el ingreso esperado, sin embargo sabiendo en cada escenario cuanto trabajo contrata, es decir para determinar la cantidad de capital resolvemos:

$$\begin{aligned}
\max_{\{K\}} \pi(w, K, L) &= \frac{1}{2}\left[2K^{\gamma/2}\frac{K^{\gamma/2}}{w_0(1+\alpha)} - w_0(1+\alpha)\frac{K^{\gamma}}{w_0^2(1+\alpha)^2} - K\right] \\
&+ \frac{1}{2}\left[2K^{\gamma/2}\frac{K^{\gamma/2}}{w_0(1-\alpha)} - w_0(1-\alpha)\frac{K^{\gamma}}{w_0^2(1-\alpha)^2} - K\right]
\end{aligned}$$

Simplificando un poco antes de derivar llegamos a:

$$\max_{\{K\}} \pi(w, K, L) = \frac{1}{2}\left[\frac{K^{\gamma}}{w_0(1+\alpha)} - K\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{K^{\gamma}}{w_0(1-\alpha)} - K\right]$$

De la condición de primer orden obtenemos:

$$K = \left[\frac{\gamma}{w_0(1-\alpha^2)}\right]^{\frac{1}{1-\gamma}}$$

Derivando la última expresión con respecto a α obtenemos que el capital aumenta cuando aumenta la incertidumbre del salario, es decir α.

4.6 Inversión y costos de ajustes.

a.) **Respuesta**

λ hace referencia a la proporción de la brecha entre el capital deseado y el efectivo que se invierte en el periodo. El que λ esté entre uno y cero refleja los costos convexos que tiene la inversión en capital en este modelo.

Al existir un mercado competitivo en el arriendo de capital, y ante la ausencia de depreciación y de inflación, si no existen variaciones en el precio del capital, y normalizamos el precio de este en uno, R será igual a r.

b.) **Respuesta**

Primero, calculamos el stock de capital deseado:

$$K^* = 0,1\frac{400}{0,05} = 800$$

Ahora, valiéndonos de la ecuación de ajuste, tenemos:

$$
\begin{aligned}
I_t &= \lambda(K^* - K_t) \\
I_t &= 0,25(800 - 400) \\
I_t &= 100
\end{aligned}
$$

c.) **Respuesta**

Ahora tenemos:

$$
\begin{aligned}
I_t &= 0,5(800 - 400) \\
I_t &= 200
\end{aligned}
$$

La inversión aumenta al doble.

d.) **Respuesta**

El que λ aumente su valor, indica que el costo de estar lejos del óptimo es mayor en proporción que el costo de aumentar el capital. Por eso la inversión aumenta, ya que se busca alcanzar el K^* más rapidamente por sobre del costo que implica aumentar los niveles de capital de un periodo a otro.

4.7 Irreversibilidad y el beneficio de esperar.

a.) **Respuesta**

El valor presente es -100+130/1.1=18.2, entonces conviene hacer el proyecto, y no conviene postergarlo ya que pierde por el descuento.

b.) **Respuesta**

Este caso es igual al anterior. El valor esperado de los flujos es 0.5(180+80)=130, entonces el valor presente esperado del proyecto es -100+130/1.1=18.2, con lo cual aparentemente convendría realizar el proyecto.

c.) **Respuesta**

Si el flujo es alto el valor presente es -100+180/1.1^2=48.8. Si el retorno es bajo el valor presente es -100+80/1.1^2=-33.9. De ser este el caso el inversionista no invertiría, con lo cual el valor presente en caso de que se revelen flujos bajos será cero, dado que no es necesario invertir para saber que el proyecto no es rentable.

d.) **Respuesta**

El valor presente esperado de esperar es $0,5 \times 48,8 + 0,5 \times 0$, lo que es 24.4$>$18.2. Por lo tanto lo mejor, desde el punto de vista de maximizar el valor esperado, es no realizar el proyecto sino que esperar un período a que se resuelva la incertidumbre. La incertidumbre unida a la posibilidad que en el futuro la incertidumbre se resuelva hace que se puedan postergar proyectos que incluso en valor esperado sean rentables.

Nota: esto es lo que dio origen al estudio de la inversión como un problema de opciones financieras. Si el futuro se revela mal “la opción no se ejerce”, y de ahí que los proyectos de inversión tengan un valor de opción.

5. El Gobierno y la Política Fiscal

5.1 Equivalencia ricardiana, restricciones de liquidez y consumo.

a.) u **Respuesta**

Definiendo Y como el valor presente de los ingresos, y después de un poco de álgebra se llega al siguiente resultado:

$$
\begin{aligned}
c_1^a &= \frac{Y}{1+\beta} = \left[y_1 - G + \frac{y_2}{1+r}\right]\frac{1}{1+\beta} && (6.1)\\
c_2^a &= \left[y_1 - G + \frac{y_2}{1+r}\right]\frac{(1+r)\beta}{1+\beta} && (6.2)\\
S^a &= (y_1 - G)\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right) - \frac{y_2}{(1+r)(1+\beta)} && (6.3)
\end{aligned}
$$

Nótese que c_2 se puede calcular directo de las condiciones de primer orden:$c_2/(\beta c_1) = 1 + r$, usando el resultado de c_1, o resolviendo para el ahorro como $S = y_1 - G - c_1$ y luego usando $c_2 = S(1 + r) + y_2$. Otra forma es simplemente decir que el ahorro óptimo es $S^a = y_1 - G - c_1^a$.

b.) **Respuesta**

En este caso, $B = G$, es decir el gobierno se endeuda en lo que gasta, y luego debe cobrar impuestos $T_2 = G(1 + r)$ para pagar la deuda. En el primer período el gobierno tendrá un déficit de G y en el segundo un superávit primario de $G(1+r)$. El valor presente de los déficit primarios es cero.

En este caso $Y = y_1 + (y_2 - G(1 + r))/(1 + r) = y_1 - G + y_2/(1 + r)$, que, tal como es de esperar, es igual que la del primer período. Se cumple la equivalencia ricardiana, el individuo no cambia sus consumos como resultado del cambio de período en que se cobran los impuestos.

De hecho el ahorro en este caso cambia, ya que $S = y_1 - c_1$, entonces, comparado con la pregunta anterior el ahorro aumenta en G, que es exactamente lo que desahorra el gobierno, de modo que el ahorro agregado no cambia. SI resuleve para el ahorro se tiene que:

$$
S^b = y_1\frac{\beta}{1+\beta} + G\frac{1}{1+\beta} - \frac{y_2}{(1+r)(1+\beta)} = S^a + G \qquad (6.4)
$$

c.) **Respuesta**

Dada la restricción 5.13 esto significa que el individuo estaría pidiendo prestado (ahorro negativo) el primer período, esto por:

$$
\begin{aligned}
Y_1\beta &< \frac{Y_2}{1+r} + \beta G && (6.5)\\
(Y_1 - G)\beta &< \frac{Y_2}{1+r} && (6.6)
\end{aligned}
$$

Sabemos que hay restricciones de liquidez, por lo que el consumo del segundo período será igual al ingreso del segundo período ($C_2 = Y_2$). De la ecuación de Euler sabemos también que $C_1 = \frac{C_2}{(1+r)\beta}$. Si reemplazamos las condiciones enunciadas en este párrafo en la ecuación (6.6) tenemos:

$$Y_1 - G \quad < \quad C_1 \tag{6.7}$$

Podemos ver que la restricción nos está diciendo que el consumo del primer período **debe** ser mayor al ingreso disponible en ese período (en otras palabras, hay deuda). Pero esto no puede ser así (por la restricción del enunciado), de modo que elegirá una solución extrema, esto es:

$$c_1^c \quad = \quad y_1 - G \tag{6.8}$$

$$c_2^c \quad = \quad y_2 \tag{6.9}$$

$$S^c \quad = \quad 0 \tag{6.10}$$

Es decir el individuo consume todo su ingreso en el primer período.
La importancia de 5.13 es que con ella se asegura que la restricción al endeudamiento es activa (no es irrelevante).

d.) **Respuesta**
La rebaja de impuestos genera más ingreso de modo que el individuo ahorrará más en el primer período. De hecho, el individuo ahorrará más de acuerdo a S^b, siempre y cuando este valor sea positivo, lo que efectivamente ocurre ya que se cumple la restricción 5.14. En consecuencia la restricción no es relevante, y el individuo actúa exactamente como en la parte *6b*, es decir como si no hubiera restricción de liquidez, y el consumo en cada período es igual al de *6a*, que es el mismo de *6b*. Es fácil ver que $c_1^d = c_1^a > c_1^c$ debido a que se cumple 5.14. es decir:

$$c_1^d = \left[y_1 - G + \frac{y_2}{1+r}\right]\frac{1}{1+\beta} > c_1^c = y_1 - G \tag{6.11}$$

Desde el punto de vista de bienestar la política de cobrar los impuestos el período 2 es óptima, es decir alcanza el óptimo sin restricción de liquidez, debido a que la postergación de impuestos alivia la restricción al endeudamiento.

La equivalencia ricardiana no se cumple porque los individuos tienen restricciones de liquidez.

Por último, si 5.14 no se cumple, la restricción de liquidez sigue siendo activa, y el individuo consume y_1, que igualmente representa un aumento respecto del caso que los impuestos se cobren en el período 1, y la equivalencia ricardiana no se cumple. La política de postergar impuestos también mejora el bienestar, aunque no lleva al óptimo. Para esto último se requeriría de un subsidio que compense las demandas de endeudamiento.

5.2 Sostenibilidad del déficit fiscal.

a.) **Respuesta**

La restricción presupuestaria puede escribirse de la siguiente manera:

$$-(1+r)B_t = \sum_{s=t}^{\infty} \left(\frac{1}{1+r}\right)^{s-t} (Y_s - C_s - I_s - G_s) \tag{6.12}$$

Si se asume que el país crece a una tasa constante igual a γ podemos dividir la ecuación anterior por el producto y derivar la siguiente ecuación que relaciona tasa de interés y crecimiento en la restricción para la solvencia.

$$\begin{aligned}
B_{t+1} - B_t &= Y_t + rB_t - C_t - I_t - G_t \quad / \cdot \frac{1}{Y_t} && (6.13)\\
\frac{B_{t+1}}{Y_{t+1}}\frac{Y_{t+1}}{Y_t} - \frac{B_t}{Y_t} &= \frac{Y_t - C_t - I_t - G_t}{Y_t} + r\frac{B_t}{Y_t} && (6.14)\\
\frac{Y_{t+1}}{Y_t} f_{t+1} &= d_t + (r+1)b_t \quad / - \frac{Y_{t+1}}{Y_t} b_t && (6.15)\\
b_{t+1} - b_t &= \frac{Y_t}{Y_{t+1}}\left[d_t + \left(r + 1 - \frac{Y_{t+1}}{Y_t}\right) f_t\right] \quad /\gamma = \frac{Y_{t+1} - Y_t}{Y_t} && (6.16)\\
& && (6.17)
\end{aligned}$$

Con lo cual llegamos a la ecuación 5.9 del De Gregorio :

$$b_{t+1} - b_t = \left(\frac{d_t}{1+\gamma} + \frac{r-\gamma}{1+\gamma} b_t\right) \tag{6.18}$$

El crecimiento del producto disminuye el efecto que tiene un déficit comercial sobre la trayectoria futura de la deuda. A medida que el crecimiento sea más grande, es más facil sustentar mayores déficits.

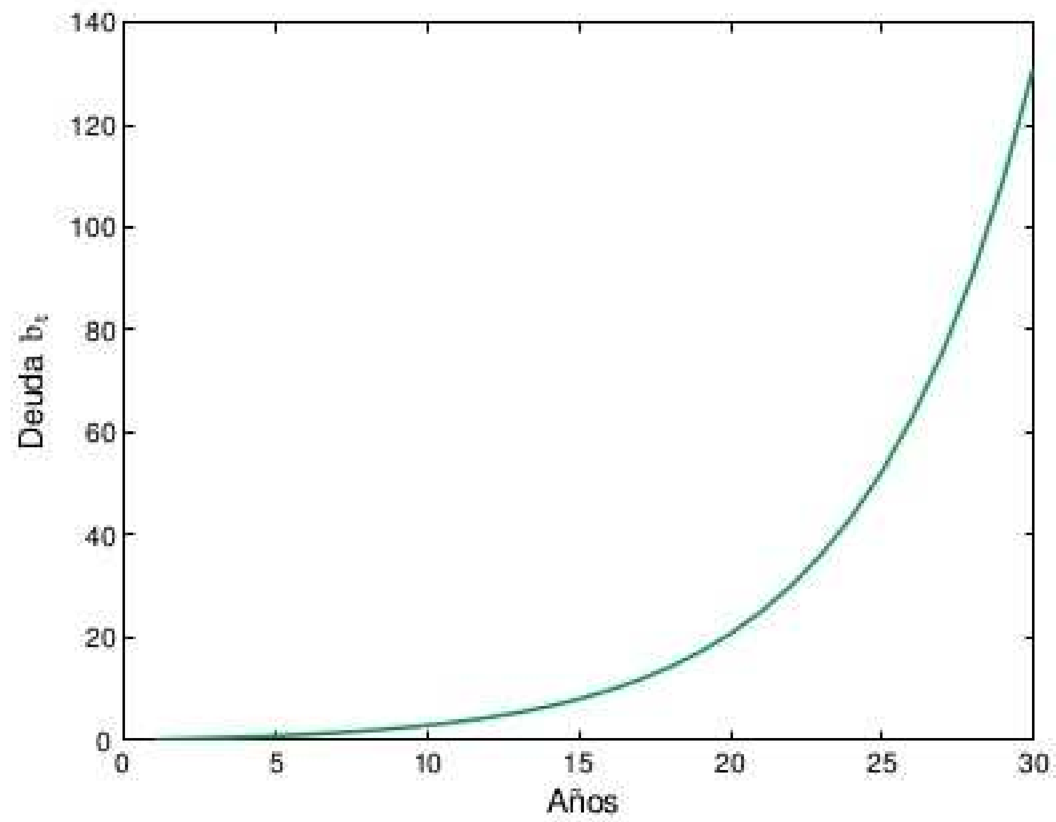
Usando la formula anterior podemos ver que no sería sustentable la situación de $\gamma = 0{,}5$.

$$b_{t+1} - \cancel{b_t}^{0} = \left(\frac{0{,}2}{1{,}5} + \frac{0{,}8 - 0{,}5}{1{,}5}\cancel{b_t}^{0}\right) > 0 \tag{6.19}$$

El siguiente periodo tendrá

$$b_{t+2} - b_{t+1} = \left(\frac{0{,}2}{1{,}5} + \frac{0{,}8 - 0{,}5}{1{,}5} b_{t+1}\right) > 0 \tag{6.20}$$

Esto se ve claramente al graficar la evolución de la deuda con los parámetros dados.



Vemos que aun comenzando sin deuda, y dado los parámetros de crecimiento, tasa de interés y déficit, esto no es sustentable. Sin embargo podría ser solvente si se esperan superávits comerciales suficientemente grandes en el futuro.

b.) **Respuesta**

$$\begin{aligned}
f_{t+1} - f_t &= \frac{-0,2}{1,5} = -0,13 \qquad f_{t+1} = -0,13 \\
f_{t+2} - f_{t+1} &= 0,67\,[-0,2 + (0,3)\cdot(-0,13)] \simeq -0,16 \qquad f_{t+2} = -0,29 \\
f_{t+3} - f_{t+2} &= 0,67\,[-0,2 + (0,3)\cdot(-0,29)] \simeq -0,19 \qquad f_{t+3} = -0,48 \\
f_{t+4} - f_{t+3} &= 0,67\,[-0,2 + (0,3)\cdot(-0,5)] \simeq -0,19 \qquad f_{t+3} = -0,72
\end{aligned}$$

Vemos además que le ajuste necesario a través de ajustes en los tb los ajustes mínimos necesarios para restaurar la sustentabilidad son $d_{min} = (r-\gamma)f_{t+j}$. En el caso que no sea posible hacer ajustes más grandes de 0.35, o sea pasar de -0.2 a 0.15, el período $t+3$ presenta la última oportunidad de volver a una trayectoria solvente.

c.) **Respuesta**

El hecho que exista este trade off genera menores oportunidades de trayectorias solventes y sustentables. Al generar efectos negativos sobre el crecimiento, un cambio brusco, aun políticamente posible, puede no ser suficiente a medida que el remedio sea peor que la enfermedad.

Podemos incluir esta relación en la ecuación anterior de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
f_{t+1} - f_t &= \frac{1}{1+\gamma}\left(d_t + (r-\gamma)f_t\right) \\
&= \frac{1}{1+(\gamma - \Delta tb)}\left(d_t + \Delta tb + (r - (\gamma - \Delta tb)f_t\right)
\end{aligned}$$

En el caso de instaurar sustentabilidad buscamos que $f_{t+1} - f_t = 0$ por lo que esta ecuación nos lleva a imponer la siguiente condición:

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{1+(\gamma-\Delta tb)}\left(d_t+\Delta tb+(r-(\gamma-\Delta tb)f_t\right) \\
0 &= d_t+\Delta tb+(r-(\gamma-\Delta tb)f_t) \\
-(d_t+(r-\gamma)f_t) &= \Delta tb(1+f_t) \\
-(-0{,}2+0{,}3f_t) &= \Delta tb(1+f_t)
\end{aligned}
$$

Revisando la factibilidad del ajuste en este caso:

Periodo 0 Trivialmente es posible aun un ajuste.

$$
f_{t+1}-f_t = \frac{-0{,}2}{1{,}5} = -0{,}13 \qquad f_{t+1} = -0{,}13
$$

Periodo 1

$$
\begin{aligned}
f_{t+1}-f_t &= \frac{-0{,}2}{1{,}5} = -0{,}13 \qquad f_{t+1} = -0{,}13 \\
f_{t+2}-f_{t+1} &= 0{,}67\left[-0{,}2+(0{,}3)\cdot(-0{,}13)\right] \simeq -0{,}16 \qquad f_{t+2} = -0{,}29 \\
-(-0{,}2+0{,}3\cdot-0{,}13) &= \Delta tb(1-0{,}13) \\
0{,}24 &= \Delta tb0{,}87 \\
0{,}28 &= \Delta tb \quad \Rightarrow \text{ factible!}
\end{aligned}
$$

Periodo 2

$$
\begin{aligned}
f_{t+3}-f_{t+2} &= 0{,}67\left[-0{,}2+(0{,}3)\cdot(-0{,}29)\right] \simeq -0{,}19 \qquad f_{t+3} = -0{,}48 \\
-(-0{,}2+0{,}3\cdot-0{,}29) &= \Delta tb(1-0{,}29) \\
0{,}29 &= \Delta tb0{,}71 \\
0{,}4 &= \Delta tb
\end{aligned}
$$

No lo cual factible dado que ajuste máximo es de 0.35.

La deuda límite se encuentra reemplazando $\Delta tb = 0{,}35$ y despejando f. Reemplazando los valores se encuentra que la deuda limite en este caso es 0.23.

Vemos que en el caso que el crecimiento no es fijo sino una función del gasto, se hace más difícil llevar una trayectoria no sostenible a ser sustentable. Mientras cuando no había una relación, se podía aguantar hasta el tercer período o en otras palabras una deuda como porcentaje del producto de 0.5 pero cuando se incorpora esta relación, en este caso se aguanta solo una deuda de 0.23 del producto lo cual es menos de la mitad.

La intuición detrás de la relación entre crecimiento y d es que los déficits comerciales pueden financiar inversión que lleva a mayor crecimiento en el futuro.

5.3 Política fiscal en tiempos difíciles.

a.) **Respuesta**

Primero expresamos cada componente como porcentaje del producto:
$g_{t-1} = \frac{G_{t-1}}{Y_{t-1}} = 0{,}2 \qquad t_{t-1} = \frac{T_{t-1}}{Y_{t-1}} = 0{,}2 \qquad b_{t-1} = \frac{B_{t-1}}{Y_{t-1}} = 0{,}4$
Ahora desarrollamos:
Para d_{t-1}

$$\begin{aligned} d_{t-1} &= g_{t-1} - t_{t-1} \\ d_{t-1} &= 0{,}2 - 0{,}2 \\ d_{t-1} &= 0\,\% \end{aligned}$$

Para df_{t-1}

$$\begin{aligned} df_{t-1} &= g_{t-1} - t_{t-1} + r * b_{t-1} \\ df_{t-1} &= 0{,}2 - 0{,}2 + 0{,}05 * 0{,}4 \\ df_{t-1} &= 2\,\% \end{aligned}$$

Para b_t

$$\begin{aligned} b_t &= g_{t-1} - t_{t-1} + r * b_{t-1} + b_{t-1} \\ b_t &= 0{,}2 - 0{,}2 + 0{,}05 * 0{,}4 + 0{,}4 \\ b_t &= 42\,\% \end{aligned}$$

b.) **Respuesta**

En t tendremos que:

$$\frac{\Delta T}{T} = -2\frac{\Delta Y}{Y} = -2 \cdot 0{,}05 = 0{,}1$$

Ya que la elasticidad es 2 y la caída del producto es de 5 %. Entonces la recaudacion cae en 10 % y que $T_t = 18$. Además $G_t = 20,6$ (sube 3 %). En consecuencia $D_t = 2,6$ ($2{,}7\,\%$ del PIB). El pago de intereses es $0,15 \cdot 42 = 6,3$, o sea $DF_t = 8,9$ (9.4 % del PIB), y entonces la deuda sera $42 + 8{,}9 = 50{,}9$, que es 53.6 % del PIB.

c.) **Respuesta**

La cifra de deuda anterior claramente excede el limite de endeudamiento posible. Por lo tanto habrá que reducir el gasto para llegar a una deuda de 47.5 (3.4 menor a la con gasto de 20.6), que es el 50 % del PIB. En consecuencia el gasto caer´a, el gobierno no podría evitarlo, y llegar´a a 20.6-3.4, lo que da $G_t = 17,2$ es decir una caída de 14 % respecto del gasto del año anterior.

d.) **Respuesta**

Procediendo de manera similar en este escenario y manteniendo el gasto en 20, tenemos que en la emergencia $T = 16$(cae 20 %), el pago de intereses es $0{,}2 \cdot B^*$, donde B^* es la deuda limite. Por lo tanto un deficit fiscal de $4 + 0{,}2B^*$. Esto se agrega a la deuda inicial que no queremos que supere el limite de $B^* = 45$ (el 50 % del PIB en esta debacle), entonces la deuda inicial debe ser de $B^* = 45 - 4 - 0{,}2B^*$ (esto no es mas que $B_{t+1} - B_t = G - T + rB_t$ donde B_{t+1} es 45 y B_t es la incognita B^*), con lo que se llega a $B^* = 34,2$, que es un 34.2 % del PIB del año anterior (que era 100).

e.) **Respuesta**

El asesor ha propuesto algo que tiene sustento ya que el fisco no puede endeudarse, y cambiar un activo por una reducción de pasivos (deuda) es justificada en este caso para que el país no enfrente dificultades de liquidez en el futuro. Si el país no tiene problemas de financiamiento la privatización no se justifica por razones fiscales ya que es financiamiento alternativo a deuda, y no representa ingresos "arriba de la linea".

5.4 Dinámica de deuda pública.

a.) **Respuesta**

La tasa de interés refleja el costo que tiene para el país su deuda. Si los agentes estiman que la probabilidad de que el país pague aumenta, entonces el costo que cobran será menor. Luego, al estabilizar la deuda, los agentes percibirán que la probabilidad de que el país pague aumenta, haciendo con eso que el costo (o sea la tasa de interés) caiga.

b.) **Respuesta**

Partiendo de la relación

$$b_{t+1} - b_t = \frac{d_t}{1+\gamma} + \frac{r-\gamma}{1+\gamma} b_t$$

y aproximando $1+\gamma = 1$ llegamos a

$$b_{t+1} - b_t = d_t + (r-\gamma) b_t \tag{6.21}$$

En este caso sabemos que $r = 10\,\%$, $s = -d = 4\,\%$, $\gamma = 2\,\%$ y $b_0 = 60\,\%$. Con ello, podemos calcular la razón deuda/PIB de acuerdo a (6.21). Reemplazando tenemos

$$\begin{aligned} b_1 - 0{,}6 &= -0{,}04 + (0{,}1 - 0{,}02) \times 0{,}6 \\ b_1 &= 0{,}6 - 0{,}04 + 0{,}08 \times 0{,}6 \\ b_1 &= 60{,}8\,\% \end{aligned}$$

Luego, el gobierno NO tiene razón, pues dados los parámetros con que se maneja su deuda seguiría aumentando. A futuro, la deuda aumentaría aún más (pues el nivel de deuda inicial sería cada vez mayor y los intereses a pagar cada vez mayores en consecuencia).

c.) **Respuesta**

Para satisfacer a los prestamistas debería darse que b_1 sea a lo más $60\,\%$. La condición que debe cumplir s está dada de la ecuación (6.21). Reemplazando los parámetros del modelo se tiene

$$0{,}6 - 0{,}6 = -s + (0{,}1 - 0{,}02) \times 0{,}6$$

despejando se obtiene que $s = 4{,}8\,\%$, valor mayor que el actualmente tiene el gobierno, lo que reafirma el hecho que la situación antes planteada no es sostenible.

d.) **Respuesta**

Si la tasa de crecimiento γ sube a $4\,\%$, entonces se tendrá que, tal como lo hicimos en (b), la razón Deuda/PIB estará dada por

$$\begin{aligned} b_1 - 0{,}6 &= -0{,}04 + (0{,}1 - 0{,}04) \times 0{,}6 \\ b_1 &= 0{,}6 - 0{,}04 + 0{,}06 \times 0{,}6 \\ b_1 &= 59{,}6\,\% \end{aligned}$$

Es decir, la deuda irá disminuyendo, cosa que seguirá a futuro de mantenerse los parámetros. En efecto, al calcular b_2 y b_3 se tiene que $b_2 \simeq 59{,}2\,\%$ y $b_3 \simeq 59\,\%$.

5.5 Deuda de largo plazo.

a.) **Respuesta**
La ecuación (5.2) del De Gregorio , representa el déficit fiscal de un gobierno durante un período de tiempo. Al lado izquierdo está la diferencia entre un período y otro de la deuda neta, es decir, la acumulación de deuda durante el período. Al lado derecho, está la diferencia entre gasto e ingreso $(G-T)$ más el pago de interés por el stock de deuda inicial del período. En resumen, la acumulación de deuda durante el período es igual al exceso de gasto sobre ingreso más los intereses que hay que pagar por la deuda preexistente.

b.) **Respuesta**
Tomando la ecuación (5.2) del De Gregorio , dividiendo por Y_t y definiendo $x_t = X_t/Y_t$ para todas las variables del tipo X_t, tenemos

$$b_{t+1}(1+\gamma) - b_t = g_t - \tau_t + rb_t \tag{6.22}$$

despejando, se llega a que

$$b_{t+1} - b_t = \frac{d_t}{1+\gamma} + \frac{r-\gamma}{1+\gamma} b_t \tag{6.23}$$

c.) **Respuesta**
El estado estacionario se alcanza cuando $b_t = b_{t+1} = b^*$. Imponiendo esta condición en (6.23) y recordando que $d_t = -s_t = s$ se tiene que

$$\begin{aligned} b^* - b^* &= -\frac{s}{1+\gamma} + \frac{r-\gamma}{1+\gamma} b^* \\ \Rightarrow b^* &= \frac{s}{r-\gamma} \end{aligned}$$

Si r aumenta, entonces el valor de la deuda de estado estacionario cae. La razón es que al aumentar r aumenta la cantidad de intereses que hay que pagar. Luego, dado un nivel de superávit, es necesario disminuir el nivel de deuda de equilibrio para seguir en una situación sostenible en el tiempo.

Respecto de cuál economía tendrá una mayor Deuda/PIB, esta corresponderá a la con mayor superávit, por cuanto gracias a su mayor ahorro está en condiciones de sostener un nivel mayor de deuda.

d.) **Respuesta**

Por último, reemplazando los valores de los parámetros s,r y γ se tiene que $b^* = 50\,\%$. Si se parte de $b = 60\,\%$ entonces no habrá convergencia pues el pago de intereses de la deuda será mayor que el superávit, de forma que el stock de deuda finalmente aumenta.

6. La Economía Cerrada

6.1 Economía de pleno empleo.

a.) **Respuesta**
Sabemos que el ahorro de gobierno es $S_g = T - G - TR$. Reemplazando los valores dados obtenemos que $S_g = -5$.

El ahorro privado es $S_p = Y + TR - T - C$, reemplazando los valores y expresiones correspondientes obtenemos que $S_p = 18$.

El ahorro nacional, S_n, es $S_n = S_p + S_g$. Reemplazando los valores recién obtenidos llegamos a que el $S_n = 18 - 5 = 13$.

La economía es cerrada, es decir no hay ninguna información respecto a si es abierta, por lo tanto se cumple que la inversión es igual al ahorro nacional, es decir $I = S_n$. Donde $I = I_{privada} + I_{publica}$. Reemplazando las expresiones para la inversión pública y privada e igualando a el ahorro nacional despejamos la tasa de interés de equilibrio, esto nos $r = 11,33\,\%$.

Finalmente para calcular el ahorro fiscal (o superávit), S_f, usamos la indicación que dice que este se define como el gasto total del gobierno (tanto corriente como de capital) menos ingresos totales. Es decir el ahorro de gobierno, que es el ingreso corriente menos gastos corrientes, tenemos que restarle el gasto de capital, este corresponde a la inversión pública, es decir $S_f = S_g - I_{publica}$. Esto nos da $S_f = -15$

b.) **Respuesta**
El aumento del gasto no financiado produce los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} S_g &= -11 \\ S_p &= 18 \\ S_n &= 7 \end{aligned}$$

Como en la parte (a) $S_n = 13$ entonces $\Delta S = -6$, por definición $\Delta I = \Delta S = -6$.

Por otra parte tenemos que el nuevo nivel de gasto de gobierno es $G = 36$. Por lo tanto comparando con G de la parte (a) tenemos que $\Delta G = 6$. De esta forma tenemos que $DeltaG = -\Delta I$. Se produce el efecto de "crowding out total" entre el aumento del gasto y la disminución de la inversión, es decir, sólo se produce un cambio en la composicón del producto. Si S no depende de r y además el producto es fijo entonces de $S = \bar{Y} - C - G = I$, un aumento de G en ΔG se traduce íntegramente en una reducción en I.

Para calcular la nueva tasa de interés igualamos la inversión al ahorro nacional, es decir $I = 30 - 1{,}5r = 7 = S_n$. Donde obtenemos que $r = 15,33\,\%$.

c.) **Respuesta**
Sabemos que $S_n = S_g + S_p$, reemplazando las ecuaciones tenemos:

$$
\begin{aligned}
S_n &= T - G - TR + Y + TR - C - T \\
S_n &= Y - C - G \\
S_n &= Y - \gamma\tau Y - 1 - c(Y - \gamma Y) \\
S_n &= Y[1 - \gamma\tau - c(1-\gamma)] - 1 \\
S_n &= Y[1 + \tau(c - \gamma) - c] - 1
\end{aligned}
$$

De esta última ecuación tenemos que si $c = \gamma$ entonces el nivel de impuestos no afecta al ahorro nacional. Por lo tanto para $c = \gamma = 0{,}8$ la fracción de impuestos que hace disminuir el ahorro privado, es igual al aumento del ahorro de gobierno.

Esto sucede básicamente por que el estado y el individuo tienen la misma propensión marginal a consumir.

d.) **Respuesta**

Calculamos nuevamente el ahorro del gobierno y del sector privado:

$$
\begin{aligned}
S_g &= -5 \\
S_p &= 16 \\
S_n &= 11
\end{aligned}
$$

Comparando con la parte (a) obtenemos que:

$$
\begin{aligned}
\Delta S_g &= 0 \\
\Delta S_p &= -2 \\
\Delta I = \Delta S_n &= -2
\end{aligned}
$$

El ahorro nacional cae pues la gente financia parte de los mayores impuestos con menor ahorro y con menor consumo. Pues una fracción c la financia con menor consumo y el resto con menor ahorro. Además $\Delta G = \Delta T = 10$, pues $\gamma = 1$ entonces tenemos que $\Delta G > -\Delta I$. Otra forma de verlo es que sabemos que $\bar{Y} = C + I + G$ si tomamos diferencias tenemos que $-\Delta I = \Delta G + \Delta C$, y como $\Delta C < 0$ entonces $\Delta G > -\Delta I$.

La nueva tasa de interés de equilibrio es $12,66\,\%$.

e.) **Respuesta**

Con estos valores obtenemos que:

$$
\begin{aligned}
I_{publica} &= 12 \\
S_g &= -5 \\
S_p &= 18 \\
S_n &= 13
\end{aligned}
$$

La nueva tasa de interés de equilibrio es $r = 12,66\,\%$.

6.2 Gasto de gobierno y tasa de interés.

a.) **Respuesta**

El PIB en este caso es simplemente igual a la demanda interna ya que las exportaciones netas son iguales a cero.

$$Y_{2005} = C + I + G = C_p + G + I_{FBK} + I_{Ex} = 63 + 63 + 29 + 7 = 162$$

b.) **Respuesta**

Si la economía es cerrada y e producto es de pleno empleo entonces se tiene que $\bar{Y} = C + I + G$. Lo importante en este caso es que dado que estamos en el producto potencial, cualquier cambio en el gasto del gobierno necesariamente genera un efecto de crowding out de la inversión y el consumo.

Para ver exactamente cual es la relación entre ambos vemos que sacando diferencias de la ecuación anterior y reordenando términos obtenemos que $-(\Delta C + \Delta I) = \Delta G$. Sabemos que si G aumenta en 1 % entonces $\Delta G = 0{,}61$.

Para calcular ΔI y ΔC aplicamos la siguiente relación:

$$\Delta G = -(C \times e_C \times \Delta r + I \times e_I \times \Delta r)$$

de donde despejando se tiene:

$$\Delta r = \frac{\Delta G}{C \times e_C + I \times e_I}$$

donde Δr es la variación de la tasa de interés e_x es la semielasticidad de X y C, I son el nivel de consumo y de inversión.

Usando el resultado anterior y la información sobre el monto que debe subir el gasto y las elasticidades, podemos reemplazar en

$$\Delta r = \frac{\Delta G}{C \times e_C + I \times e_I} \quad (7.1)$$

$$\Delta r = \frac{0{,}61}{61 \times 0{,}003 + 35 \times 0{,}008} \quad (7.2)$$

$$\Delta r = \frac{0{,}61}{61 \times 0{,}003 + 35 \times 0{,}008} \quad (7.3)$$

$$\Delta r = \frac{0{,}61}{0{,}463} \quad (7.4)$$

$$\Delta r = 1{,}32$$

El resultado significa que la tasa de interés sube subirá en 1.32, haciendo caer el consumo y la inversión de manera de hacer paso para el aumento en el gasto del gobierno.

El consumo cae entonces en aproximadamente $0{,}24$ y la inversion en $0{,}37$.

c.) **Respuesta**
En este caso aumentar el gasto publico en 1 % del PIB equivale a 1.57 por lo que usando el mismo razonamiento anterior podemos trivialmente encontrar el aumento del la tasa de interés. El crecimiento que hubo entre el 2004 y 2005 fue de 3 % lo que fue más de 1 %.

d.) **Respuesta**
Sabemos que las transferencias no se contabilizan como gasto de gobierno, por lo tanto el gasto de gobierno aumenta sólo en 1.57/2 = 0.785. (1 % mayor del gasto de gobierno de 2004 multiplicado por 0.5, pues es sólo el 50 % es realmente gasto de gobierno) Por lo tanto el ahorro de gobierno cae en la misma cantidad.

Para el ahorro de gobierno, sabemos que de las transferencias 0.785, sólo se consume el 70 % ahorrando la diferencia. En este caso el ahorro privado aumenta en $(1-0,7)\times 0{,}785 = 0{,}2355$.

El ahorro total varía en $0{,}2355 - 0{,}785 = -0{,}5495$.

6.3 Equilibrio de largo plazo en dos períodos y política fiscal.

a.) **Respuesta**
Nota: La resolución de este ejercicio se llevó a cabo suponiendo que no habían restricciones de liquidez. En el caso de que existieran, el consumo de cada período simplemente sería igual al ingreso disponible de cada período.

Para encontrar las funciones de consumo óptimo en el tiempo debemos maximizar la función de utilidad sujeta a la restricción intertemporal del individuo, que según lo visto en clases sería:

$$Y_1 - T_1 + \frac{Y_2 - T_2}{1+r} = C_1 + \frac{C_2}{1+r}$$

pero debido a que el presupuesto es equilibrado, tenemos que $T_1 = G_1$ y $T_2 = G_2$ con lo que la restricción quedaría como

$$Y_1 - G_1 + \frac{Y_2 - G_2}{1+r} = C_1 + \frac{C_2}{1+r} \tag{7.5}$$

A partir de la ecuación de Euler $\left(\frac{u'(c_1)}{u'(c_2)} = \beta(1+r)\right)$ vista en el libro podemos encontrar rápidamente la condición de primer orden que vendría siendo:

$$C_2 = (1+r)\beta C_1 \tag{7.6}$$

Y reemplazando esta condición en la restricción del individuo podemos encontrar los dos consumos óptimos como sigue:

Para el consumo del período 1,

$$
\begin{aligned}
Y_1 - G_1 + \frac{Y_2 - G_2}{1+r} &= C_1 + \frac{(1+r)\beta C_1}{1+r} \\
Y_1 - G_1 + \frac{Y_2 - G_2}{1+r} &= C_1 + \beta C_1
\end{aligned}
$$

lo que factorizando nuestra variable y despejando obtenemos,

$$
C_1^* = \frac{1}{1+\beta}\left(Y_1 - G_1 + \frac{Y_2 - G_2}{1+r}\right) \tag{7.7}
$$

Análogamente para C_2, reemplazamos a partir de la condición de prime orden C_1 y lo reemplazamos en la restricción intertemporal obteniendo,

$$
Y_1 - G_1 + \frac{Y_2 - G_2}{1+r} = \frac{C_2}{(1+r)\beta} + \frac{C_2}{1+r}
$$

con $C_1 = \frac{C_2}{(1+r)\beta}$. Despejando C_2 llegamos a nuestro resultado,

$$
\begin{aligned}
Y_1 - G_1 + \frac{Y_2 - G_2}{1+r} &= C_2\left(\frac{1+\beta}{(1+r)\beta}\right) \\
C_2^* &= \frac{(1+r)\beta}{1+\beta}\left(Y_1 - G_1 + \frac{Y_2 - G_2}{1+r}\right)
\end{aligned}
$$

Las funciones de consumo óptimo corresponderían entonces a:

$$
C_1^* = \frac{1}{1+\beta}\left(Y_1 - G_1 + \frac{Y_2 - G_2}{1+r}\right) \tag{7.8}
$$

$$
C_2^* = \frac{(1+r)\beta}{1+\beta}\left(Y_1 - G_1 + \frac{Y_2 - G_2}{1+r}\right) \tag{7.9}
$$

b.) **Respuesta**
Según se deduce del enunciado, en esta economía no puede haber ahorro porque el individuo recibe el ingreso de un bien caído del cielo y éste no es almacenable, por lo tanto el ahorro es cero y además recordando que el presupuesto está equilibrado,

$$
\begin{aligned}
S &= Y_1 - T_1 - C_1 = Y_1 - G_1 - C_1 \\
Y_1 - G_1 - C_1 &= 0 \\
Y_1 - G_1 &= C_1^*
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, de la ecuación (4) obtenemos que,

$$\begin{aligned}
Y_1 - G_1 &= \frac{1}{1+\beta}\left(Y - G_1 + \frac{Y_2 - G_2}{1+r}\right) \\
(1+\beta)(Y_1 - G_1) - (Y_1 - G_1) &= \frac{Y_2 - G_2}{1+r} \\
1 + r &= \frac{Y_2 - G_2}{\beta(Y_1 - G_1)} \\
r^* &= \frac{Y_2 - G_2}{\beta(Y_1 - G_1)} - 1
\end{aligned}$$

c.) **Respuesta**

Suponiendo que se cumple la equivalencia ricardiana da igual como se comporta la trayectoria tributaria, entonces con las derivadas parciales podemos determinar la razón de cambio de la tasa de interés frente a el cambio del gasto,

$$\frac{\partial r}{\partial G_1} = \frac{Y_2 - G_2}{\beta(Y_1 - G_1)^2} \tag{7.10}$$

$$\frac{\partial r}{\partial G_2} = -\frac{1}{\beta(Y_1 - G_1)} \tag{7.11}$$

El primer caso es mayor que cero. La intuición detrás de esto es que un aumento del gasto de gobierno a corto plazo (como puede ser en un período de guerra inesperado) reduce el consumo presente. Entonces lo lógico sería que el individuo anticipe consumo a través de endeudamiento, pero esto no sucede ya que en el equilibrio el mercado sube la tasa para hacer el valor del consumo presente más caro para así mantener una trayectoria creciente de consumo.

Mientras que en el segundo caso, el aumento del gasto futuro genera una caída de la tasa de interés. Esto porque al caer el consumo futuro el individuo buscaría ahorrar, pero para lograr el equilibrio el mercado baja la tasa y hace el consumo futuro más caro incentivando al individuo a no ahorrar (no se puede ahorrar debido a que esta economía es como la de Robinson Crusoe) y así mantener una trayectoria creciente de consumo.

d.) **Respuesta**

Este cambio compensado en el futuro no generaría ningún cambio en la restricción presupuestaria dado que el valor presente de los ingresos del individuo restando el gasto de gobierno seguirían siendo los mismos y por lo tanto no cambiaría el consumo, ni el ahorro y así la tasa de interés de equilibrio se mantiene igual.

e.) **Respuesta**

Si tomamos $G_1 = G_2 = 0$ como dice el enunciado, la tasa de interés de equilibrio r^* quedaría como:

$$r = \frac{Y_2}{\beta Y_1} - 1 \Rightarrow \frac{\Delta r}{r} \approx \frac{\Delta Y}{Y} \tag{7.12}$$

Lo que es básicamente el crecimiento de la producción de la economía deflactado por el factor de descuento. La tasa de interés representa el precio relativo del consumo hoy versus mañana, el cual aumenta al ser el consumo más abundante en el futuro (o sea cuando hay crecimiento). En la medida que el ingreso tenga una trayectoria creciente en el tiempo las personas buscarán trasladar su consumo futuro al presente y aumenta el precio del consumo presente vs. el futuro mediante una alza de la tasa de interés.

7. Economía Abierta - La Cuenta Corriente

7.1 La reunificación de Alemania y sus efectos económicos.

a.) **Respuesta**
Se podría pensar que Alemania Federal tenía una tasa de interés de autarquía muy alta y que al abrir su economía, mucho capital entró debido a que la tasa de interés internacional era mucho más baja. Es de esperar que a medida que se fueran generando inversiones, la nueva tasa de equilibrio sea más baja que la de autarquía previo a la unificación.

b.) **Respuesta**
Dado lo expuesto en la respuesta anterior, es lógico pensar que la cuenta corriente de Alemania sea negativa debido a que $r^A > r^*$ y representa la escasez relativa de recursos con respecto al resto del mundo.

c.) **Respuesta**
Los posibles efectos son diversos y solo mencionaremos los relacionados a la materia del capítulo. El principal efecto vía la apertura financiera es que genera un efecto al alza de la tasa de interés internacional (o al menos dentro de la comunidad europea) y capital que hubiera fluído a otros miembros ahora va a construir infraestructura en Alemana. Se generan menos inversiones en otros países pero a su vez estos mismos países pueden invertir en proyectos mas rentables en Alemania.

Se podría espera también un efecto sobre los salarios debido a que habrá mas movilidad laboral de trabajadores que ganaban menos que el promedio en Europa y ahora pueden moverse a buscar trabajo en otros lugares.

7.2 La tasa de interés y la cuenta corriente.

a.) **Respuesta**
El individuo resuelve:

$$\max_{\{c_1,c_2\}} \log(c_1) + \beta\log(c_2) + \lambda\left(y_1 + \frac{y_2}{1+r} - c_1 - \frac{c_2}{1+r}\right)$$

De las condiciones de primer orden obtenemos:

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{1+r}{1+\delta} \tag{8.1}$$

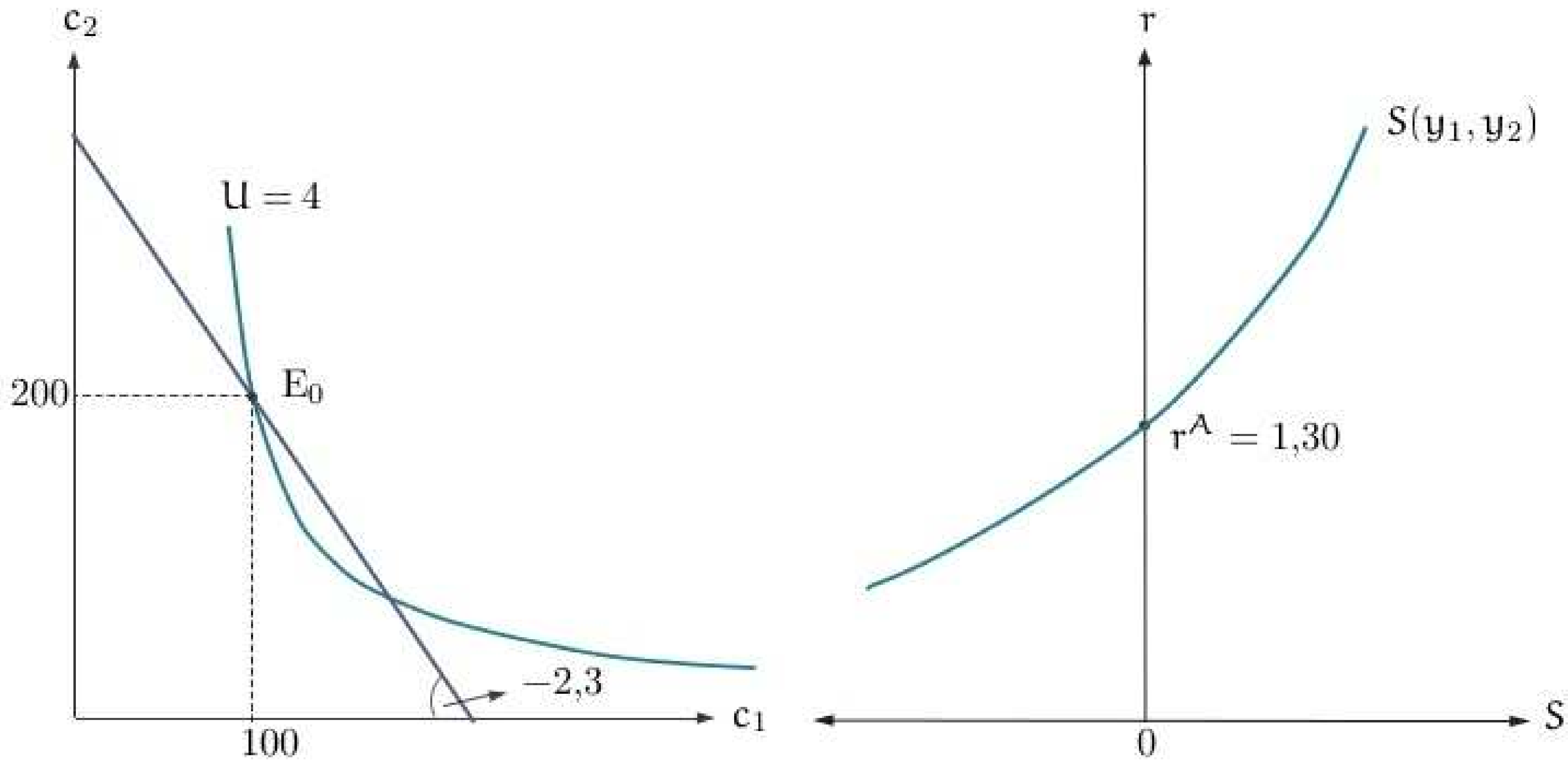
donde $\beta = \frac{1}{1+\delta}$.
Cuando el individuo no puede comerciar con nadie y el bien es perecible tenemos que el individuo se tiene que consumir todo en cada período. Es decir:

$$\begin{aligned} c_1 &= y_1 \\ c_2 &= y_2 \end{aligned}$$

Usando (8.1) más el hecho que $\delta = 15\,\%$ tenemos que

$$r^A = \frac{c_2}{c_1}(1+\delta) - 1 = 130\,\%$$

.



Como se puede ver en el gráfico, la utilidad del individuo es igual a 4.

b.) **Respuesta**
Sabemos que $r = 20\,\%$ y $\rho = 15\,\%$. Es decir:

$$c_2 = c_1 \frac{1,2}{1,15}$$

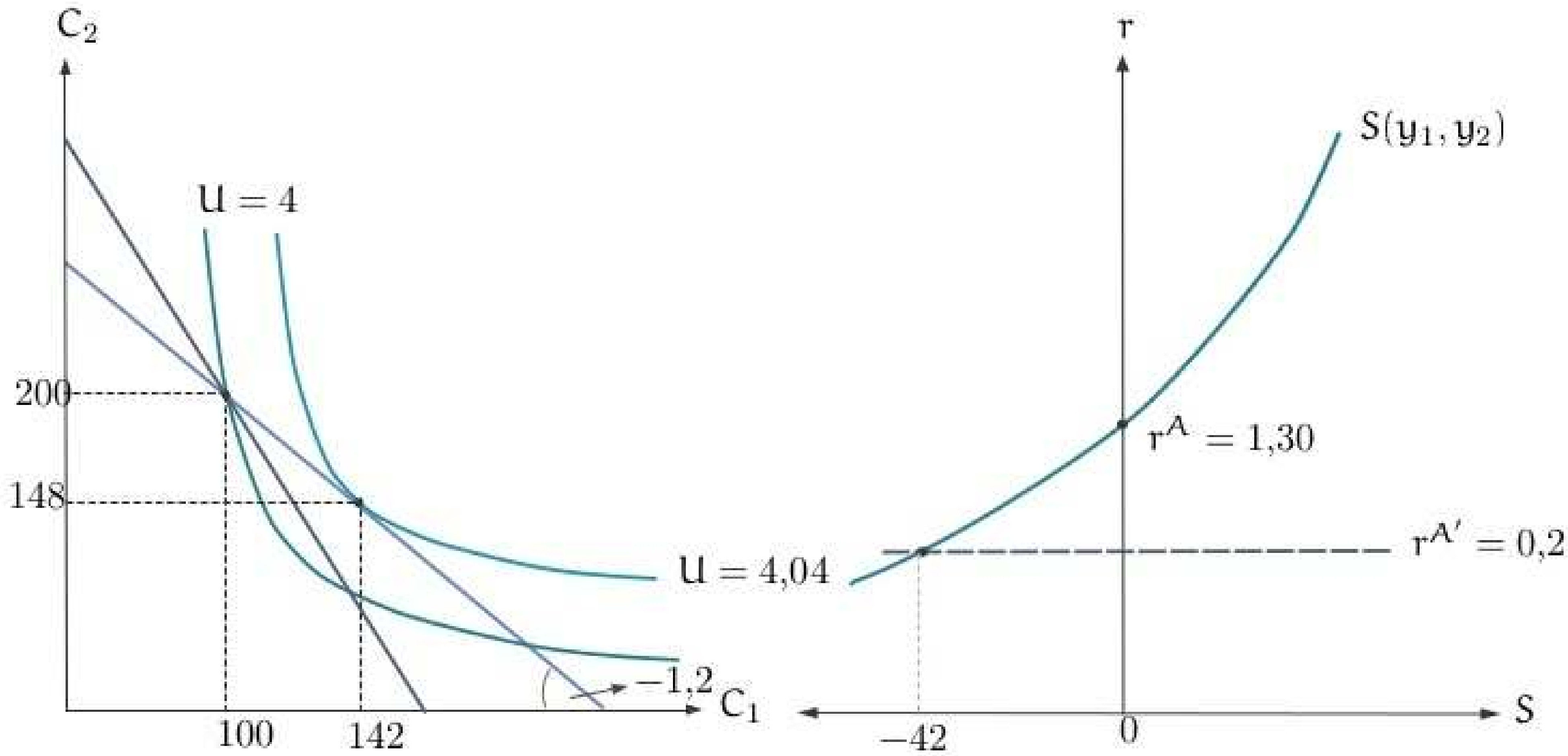
Usando la restricción presupuestaria:

$$c_1 + \frac{c_2}{1+r} = y_1 + \frac{y_2}{1+r}$$

Obtenemos el consumo en cada período:

$$\begin{aligned} c_1 &= 142,6 \\ c_2 &= 148,8 \end{aligned}$$

Siendo la utilidad del individuo $U = 4,04$.



c.) **Respuesta**
El pais tiene un déficit pues su consumo en el primer período es mayor a su ingreso. Se puede ver esto en el gráfico anterior.

d.) **Respuesta**
Sabemos que el déficit es la diferencia entre ingreso y gasto:

$$CC = Y_1 - C_1 = 100 - 142,6 = -42,6$$

e.) i. **Respuesta**
Falso, vemos que el déficit o superávit depende de la relación que existe entre r^A y r. En general, países con trayectorias crecientes (en desarrollo), tendrán tasas de interés de autarquía mayores y por lo tanto será beneficioso para ellos incurrir en un déficit para financiar consumo presente. Esto puede verse demostrado cuando calculamos la utilidad del país en el momento de endeudarse. Antes de endeudarse la utilidad era menor que después lo que nos lleva a concluir que un déficit de la cuenta corriente no es malo en este caso ya que se alcanza un bienestar mayor.

ii. **Respuesta**
Incierto, porque aunque países con tasas de interés de autarquía mayores a la tasa de interés mundial incurren en déficits, esto ocurre no porque sea más barato (¿más barato que qué? si no podían ahorrar a ninguna tasa antes!) sino porque les conviene debido a que es relativamente más escaso el consumo en el primer período en ese pais que en el mundo en general. Esto lleva a la decisión óptima de incurrir en un déficit en CC.

7.3 Equivalencia ricardiana.

a.) **Respuesta**

El individuo maximiza su utilidad sujeta a la restricción presupuestaria, como $r^* = \delta$ el consumo es parejo, es decir $c_1 = c_2$. La restricción presupuestaria es:

$$c_1 + \frac{c_2}{1+r^*} = y_1 - T_1 + \frac{y_2 - T_2}{1+r^*} \tag{8.2}$$

donde $T_1 = G_1$ y $T_2 = G_2$. Como $c_1 = c_2$ se tiene que el consumo es:

$$\begin{aligned} c_1 + \frac{c_1}{1+r^*} &= y_1 - G_1 + \frac{y_2 - G_2}{1+r^*} && (8.3) \\ c_1 \left[\frac{2+r^*}{1+r^*}\right] &= y_1 - G_1 + \frac{y_2 - G_2}{1+r^*} && (8.4) \\ c_1 = c_2 &= \left[\frac{1+r^*}{2+r^*}\right] \left[y_1 - G_1 + \frac{y_2 - G_2}{1+r^*}\right] && (8.5) \end{aligned}$$

El ahorro en el primer período, s_1 es:

$$\begin{aligned} s_1 &= y_1 - T_1 - c_1 = \frac{y_1 - G_1 - y_2 + G_2}{2+r^*} \\ s_2 &= -s_1 \end{aligned}$$

b.) **Respuesta**

Si el gobierno quiere recaudar todos los impuestos en el primer período de manera de gastar G_1 en el primer período y G_2 en el segundo período. Por lo tanto se tiene que el impuesto del primer período es:

$$T_1 = G_1 + \frac{G_2}{1+r^*} \tag{8.6}$$

La restricción presupuestaria queda:

$$c_1 + \frac{c_2}{1+r^*} = y_1 - T_1 + \frac{y_2}{1+r^*} = y_1 - G_1 + \frac{y_2 - G_2}{1+r^*}$$

Comparando la última ecuación con la ecuación (8.2) se tiene que son iguales, como $c_1 = c_2$ se tiene que el consumo c_1 y c_2 sigue siendo el mismo de la parte (a). Sin embargo el ahorro del individuo cambia, pues este es ahora

$$s_1 = y_1 - T_1 - c_1 = \frac{(y_1 - G_1 - y_2)(1+r^*) - G_2}{(2+r^*)(1+r^*)}$$

El ahorro del gobierno en el primer período es:

$$sg_1 = T_1 - G_1 = \frac{G_2}{1+r^*}$$

El ahorro de la economía es:

$$\begin{aligned} sn_1 &= s_1 + sg_1 = \frac{y_1 - G_1 - y_2 + G_2}{2+r^*} \\ sn_2 &= -sn_1 \end{aligned}$$

c.) **Respuesta**
Comparando las respuestas de las partes (a) y (b) obtenemos que el consumo de los dos períodos es el mismo en ambas partes, esto porque el valor presente del ingresos se mantiene en ambas respuestas.

d.) **Respuesta**
El resultado se debe a que el individuo sabe cuánto es el valor presente de los impuestos del gobierno y lo internaliza en su restricción presupuestaria, por lo tanto no importa cuando cobra el gobierno los impuestos siempre y cuando recaude la misma cantidad en valor presente.

7.4 Consumo de subsistencia y crecimiento en economía abierta.

a.) **Respuesta**
El individuo resuelve:

$$\max_{\{c_1, c_2\}} \log(c_1 - \kappa) + \beta \log(c_2 - \kappa)$$

s.a

$$y_1 + \frac{y_1(1+\gamma)}{1+r} = c_1 + \frac{c_2}{1+r}$$

De las condiciones de primer orden tenemos que:

$$\frac{c_2 - \kappa}{c_1 - \kappa} = \beta(1+r)$$

Como esta economía es cerrada y el bien es perecible tenemos que se tiene $c_1 = y_1$ y $c_2 = y_1(1+\gamma)$. Reemplazando estos valores en la última ecuación tenemos que:

$$r^A = (1+\delta)\left[\frac{y_1(1+\gamma) - \kappa}{y_1 - \kappa}\right] - 1 \tag{8.7}$$

b.) **Respuesta**
Un aumento de la tasa de crecimiento del país aumenta la tasa de interés pues los individuos desean ahora aumentar su consumo en el primer período para así suavizar consumo (esto debido a que presentarán mayores ingresos en el segundo período). Para evitar esa situación (economía cerrada y bien perecible) y llegar nuevamente al equilibrio tiene que subir la tasa de interés (de esta manera el consumo presente se encarece relativamente).

Un aumento en el consumo de subsistencia, implica que el individuo desea aumentar su nivel de consumo hoy y mañana, para desincentivar al individuo a hacer eso tiene que subir la tasa de interés y así se llega nuevamente al equilibrio de economía cerrada con bien perecible (nuevamente vemos que un alza de la tasa de interés provoca un encarecimiento relativo del consumo presente haciendo que el incentivo a consumir más hoy desaparezca).

c.) **Respuesta**

Si $\kappa = 0$ entonces de (8.7) tenemos que:

$$1 + r^A = (1 + \rho)(1 + \gamma)$$

de donde obtenemos que $\gamma < r^A$. Esto se debe porque debido al crecimiento económico los individuos desean suavizar consumo y eso significa que desean aumentar su nivel de consumo en el primer período, pero como la economía es cerrada y el perecible la única forma de mantener el equilibrio y desinhibir a los individuos a aumentar su consumo es que la tasa de interés sea mayor a la tasa de crecimiento (encareciendo relativamente el consumo presente).

7.5 Equilibrio con dos países.

a.) **Respuesta**

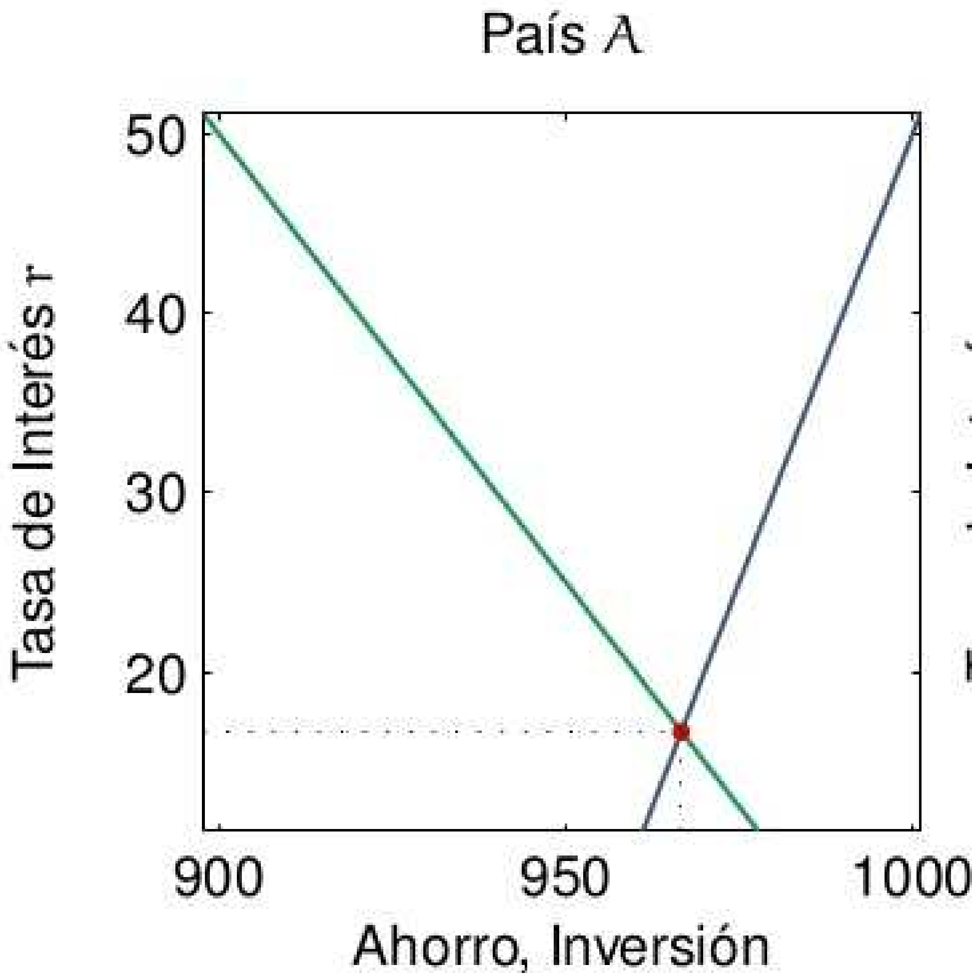
En el caso que ambos países no pueden acceder a mercados financieros internacionales, sabemos que el ahorro de la economía debe ser igual a la inversion. Haciendo $S = I$, encontramos una tasa de interés de autarquía en ambos países.

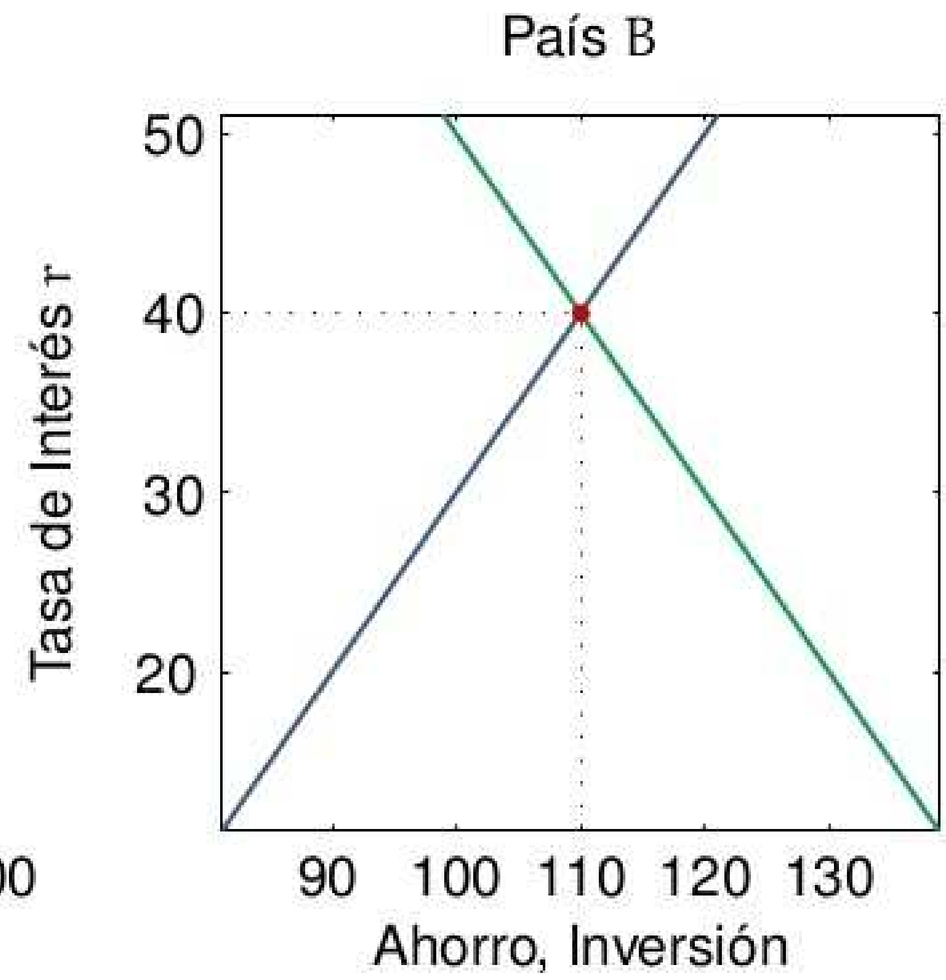
$$\begin{aligned} S^A &= I^A \\ 350 + r^A + 0{,}2Y^A &= 1000 - 2r^A \\ 350 + r^A + 0{,}2 \times 3000 &= 1000 - 2r^A \\ 3r^A &= 50 \end{aligned}$$

Con lo que la tasa de autarquía en la economía A es $r^A \simeq 16{,}67$ La inversión y ahorro es aproximadamente 967.

$$\begin{aligned} S^B &= I^B \\ 10 + r^B + 0{,}2Y^B &= 150 - r^B \\ 10 + r^B + 0{,}2 \times 300 &= 150 - r^B \\ 2r^B &= 80 \end{aligned}$$

Con lo que la tasa de autariqua en la economía B es $r^B = 40$. La inversion y ahorro es de 110.





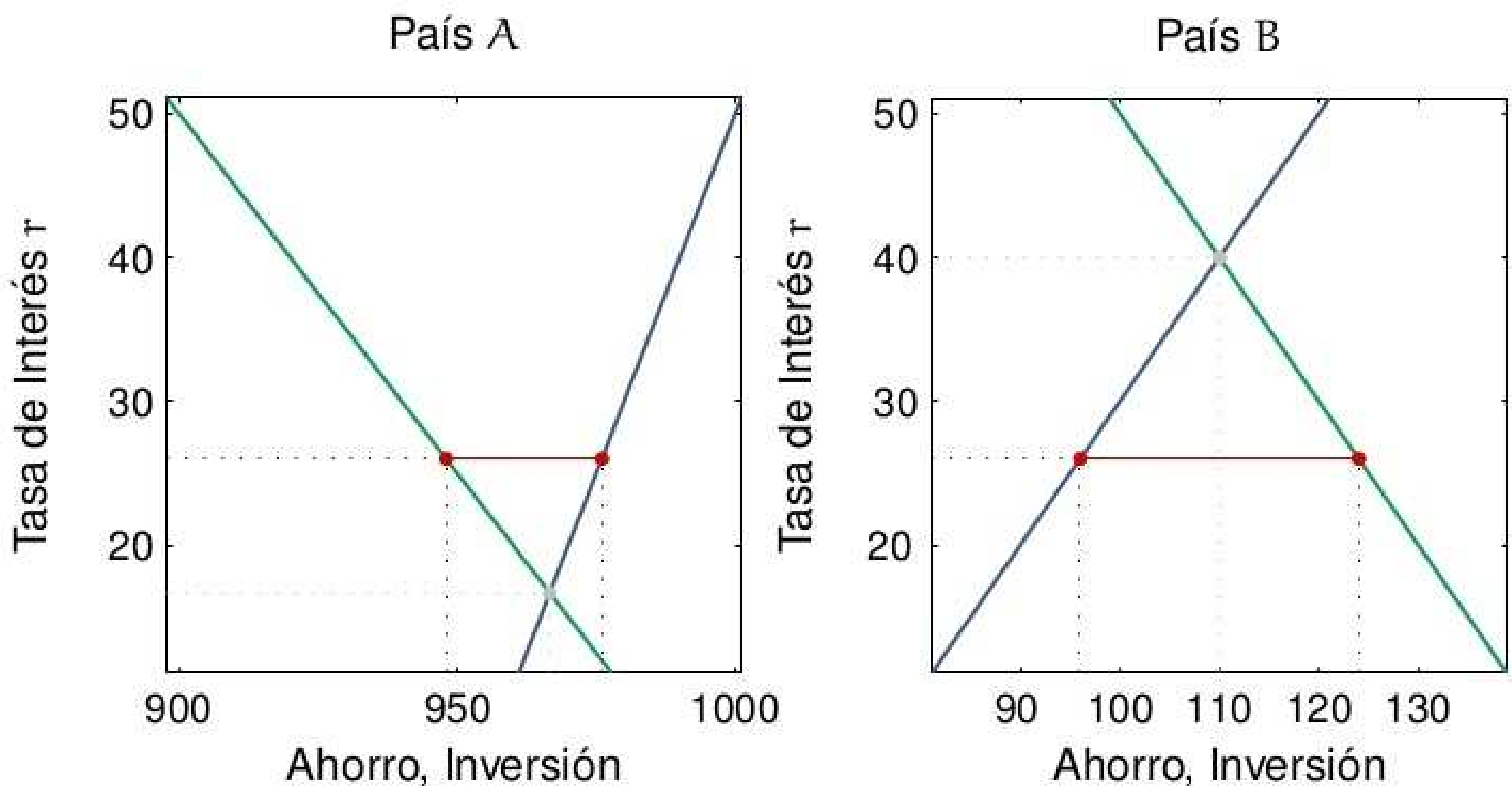
b.) **Respuesta**

En este caso, el equilibrio mundial debe ocurrir cuando $S_A(r^*) + S_B(r^*) = I_A(r^*) + I_B(r^*)$.

$$
\begin{aligned}
S_A(r^*) + S_B(r^*) &= I_A(r^*) + I_B(r^*) \\
350 + r^* + 0{,}2Y^A + 10 + r^* + 0{,}2Y^B &= 1000 - 2r^* + 150 - r^* \\
1020 + 2r^* &= 1150 - 3r^* \\
r^* &= 26
\end{aligned}
$$

Ahorro en A es de	976
Ahorro en B es de	96
Cuenta Corriente en A es de	28
Cuenta Corriente en B es de	-28
Inversion en A es de	948
Inversion en B es de	124

Graficamente:



Podemos ver que la tasa de interés internacional es una especie de "intermedio" entre las tasas de interés de autarquía de ambos países. La tasa de interés internacional termina siendo mayor que la tasa de interés de autarquía del país A y menor que la tasa de interés de autarquía del país B.

c.) **Respuesta**

Una caída exogena en el ahorro se puede modelar a través de un cambio en la constante de la ecuación del ahorro de la economía del país A. Resolviendo:

$$S_A(r^*) + S_B(r^*) - 60 = I_A(r^*) + I_B(r^*) \tag{8.8}$$

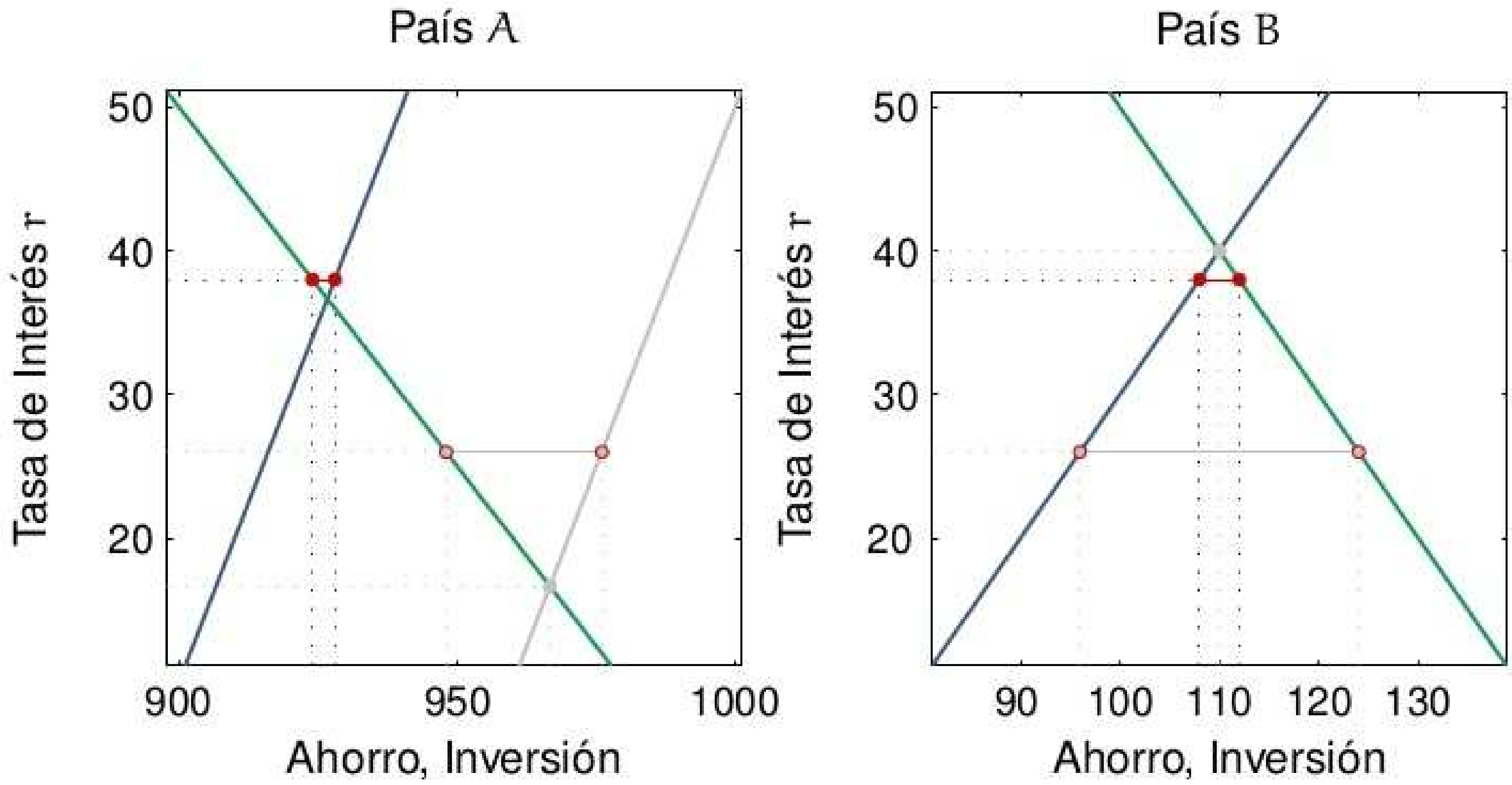
$$290 + r^* + 0{,}2Y^A + 10 + r^* + 0{,}2Y^B = 1000 - 2r^* + 150 - r^* \tag{8.9}$$

$$960 + 2r^* = 1150 - 3r^* \tag{8.10}$$

$$r^* = 38 \tag{8.11}$$

Ahorro en A es de	988
Ahorro en B es de	108
Cuenta Corriente en A es de	4
Cuenta Corriente en B es de	-4
Inversion en A es de	924
Inversion en B es de	112

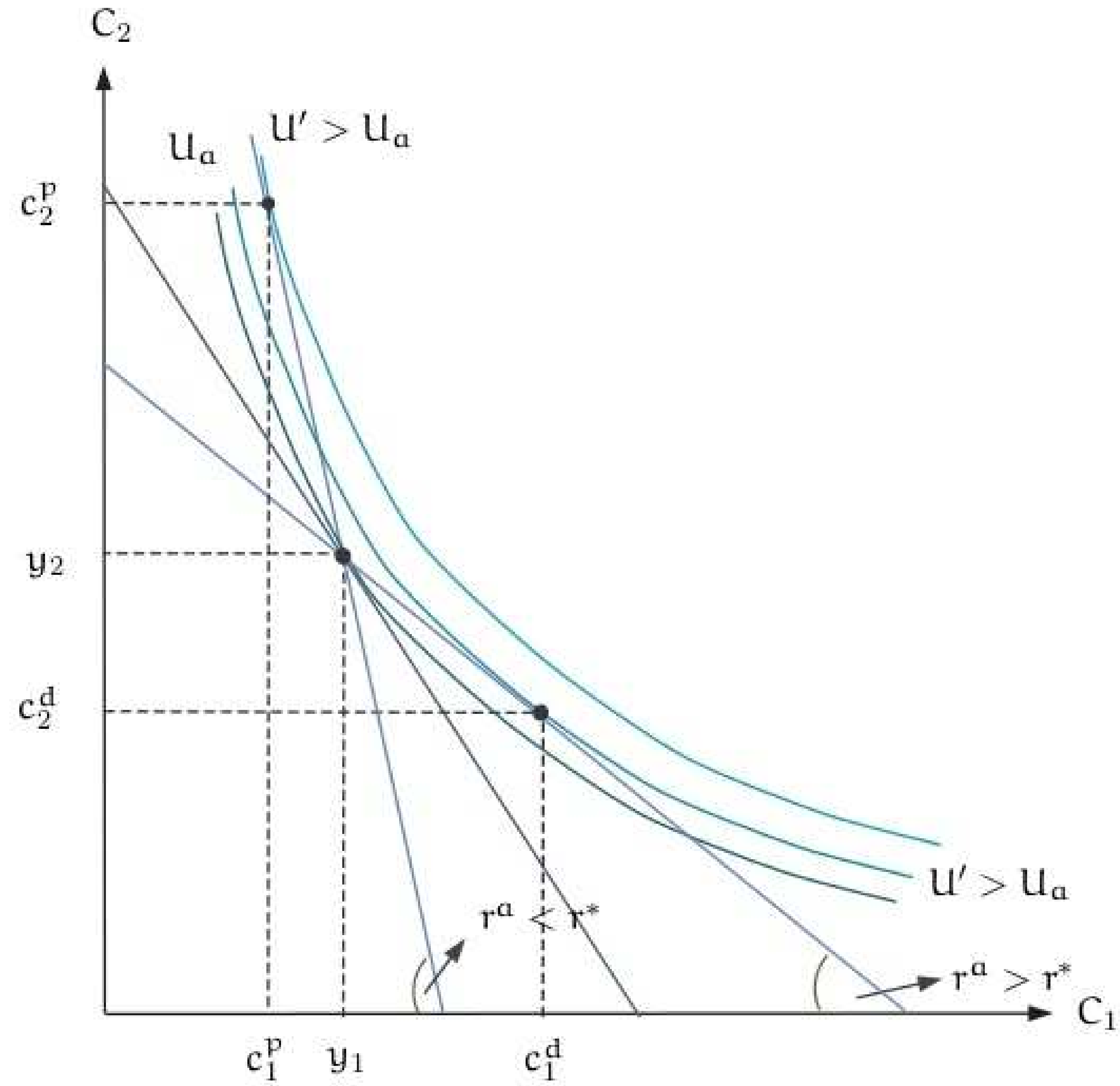
Graficamente:



d.) **Respuesta**

La intuición detrás de las ganancias de la apertura financiera es que se facilita la suavización del consumo y a su vez permite mayores posibilidades de inversión. La tasa de autarquía nos entrega información sobre las necesidades intertemporales de recursos. En la medida que sea muy distinta al resto del mundo, la apertura es más beneficiosa porque las necesidades son distintas y el intercambio es más beneficioso.

Un ejemplo simple sería un pais con una trayectoria positiva de ingreso mientras el mundo tiene una plana o negativa. La tasa de autarquía en el primer pais tendería a ser muy alta dado que los recursos escasean en el presente y no en el futuro. Pero en el resto del mundo no hay escasez relativa en el presente por lo que obviamente el intercambio es muy beneficio en este caso. El resto del mundo, que tiene ingresos en el presente, le presta al país que no tiene ingresos en el presente pero sí en el futuro. De esta manera el resto del mundo se asegura de tener ingresos en el futuro y el país se asegura de tener ingresos en el presente, pudiendo ambos sectores suavizar su consumo. Este ejemplo lleva a una situación de déficit en el presente pero lo mismo es cierto en el caso inverso.



Gráficamente se pueden ver dos escenarios donde la apertura financiera aumenta la utilidad del país.

7.6 Tasa interés mundial y la cuenta corriente.

a.) **Respuesta**
De la misma forma que se ha hecho en los ejercicios anteriores maximizando la utilidad sujeto a la restricción presupuestaría nos entrega un regla optima de consumo de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
\frac{C_2}{C_1} &= \beta(1+r) \qquad \text{Ecuación de Euler} \\
C_1 &= \frac{C_2}{\beta(1+r)} \\
& \rightarrow \text{ en la restricción presupuestaria:} \\
C_1 + \frac{C_2}{1+r} &= Y_1 + \frac{Y_2}{1+r} \\
\frac{C_2}{\beta(1+r)} + \frac{C_2}{1+r} &= Y_1 + \frac{Y_2}{1+r} \\
C_2 &= \frac{\beta(1+r)}{1+\beta}\left[Y_1 + \frac{Y_2}{1+r}\right] \\
C_1 &= \frac{1}{1+\beta}\left[Y_1 + \frac{Y_2}{1+r}\right]
\end{aligned}
$$

El ahorro de cada país es su ingreso corriente menos su consumo en este caso sin inversión ni impuestos.

$$
\begin{aligned}
S = Y_1 - C_1 &= Y_1 - \frac{1}{1+\beta}\left[Y_1 + \frac{Y_2}{1+r}\right] \\
S(r) &= \frac{\beta}{1+\beta}Y_1 - \frac{Y_2}{(1+r)(1+\beta)}
\end{aligned}
$$

Análogamente para el país 2:

$$
S^*(r) = \frac{\beta}{1+\beta}Y_1^* - \frac{Y_2^*}{(1+r)(1+\beta)}
$$

b.) **Respuesta**
Usando la ecuación para el ahorro podemos calcular la tasa de autarquía igualando a cero el ahorro / cuenta corriente.

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{\beta}{1+\beta}Y_1 - \frac{Y_2}{(1+r^A)(1+\beta)} \\
0 &= \frac{\beta}{1+\beta}Y_1 - \frac{Y_2}{(1+r^A)(1+\beta)} \\
\frac{\beta}{\cancel{1+\beta}}Y_1 &= \frac{Y_2}{(1+r^A)\cancel{(1+\beta)}} \\
r^A &= \frac{Y_2}{Y_1}\frac{1}{\beta} - 1
\end{aligned}
$$

De la misma forma la tasa de interés de autarquía del otro país será

$$r^A* = \frac{Y_2^*}{Y_1^*}\frac{1}{\beta^*} - 1$$

c.) **Respuesta**
Sabemos que en equilibrio se debe cumplir que $S = -S^*$. Usando esta condición podemos despejar la tasa de equilibrio.

$$\begin{aligned} S &= -S^* \\ \frac{\beta}{\cancel{1+\beta}}Y_1 - \frac{Y_2}{(1+r^A)\cancel{(1+\beta)}} &= \frac{Y_2^*}{(1+r^A)\cancel{(1+\beta)}} - \frac{\beta}{\cancel{1+\beta}}Y_1^* \\ \beta[Y_1 + Y_1^*](1+r) &= [Y_2 + Y_2^*] \end{aligned}$$

$$r = \frac{[Y_2 + Y_2^*]}{[Y_1 + Y_1^*]}\frac{1}{\beta} - 1 \tag{8.12}$$

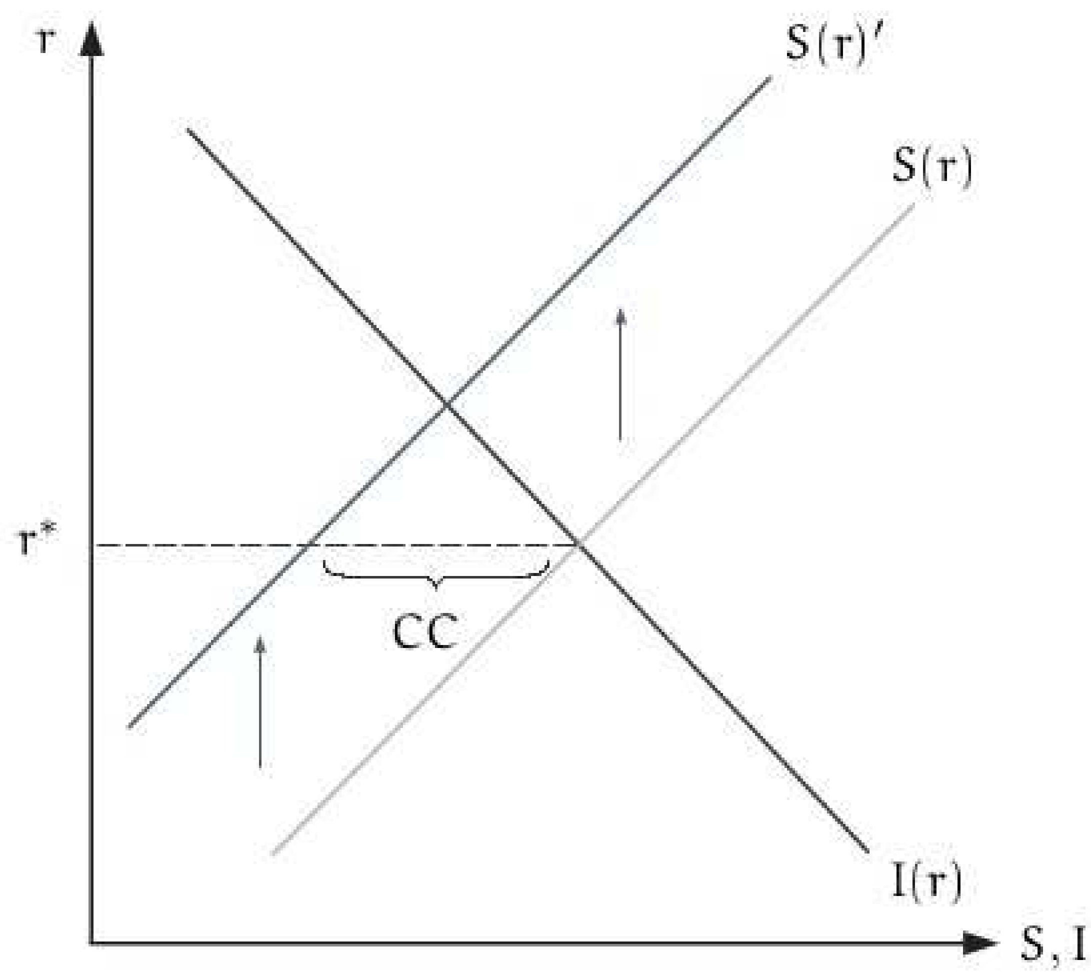
Vemos que se determina la tasa de equilibrio tomando en cuenta la relación de riqueza total en el tiempo. Será mayor o menor que la tasa de autarquía dependiendo si $\frac{Y_2}{Y_1} > \frac{Y_2^*}{Y_1^*}$.

d.) **Respuesta**
Usando la ecuación encontrada en (8.12) es trivial ver que aumenta la tasa de equilibrio. Esto es debido a que el ingreso mundial es más escaso ahora en el primer período relativo al segundo período y esto se ve reflejado por un mayor precio relativo entre el consumo en un período y otro vía la tasa de interés.

8. Economía Abierta - El Tipo de Cambio Real

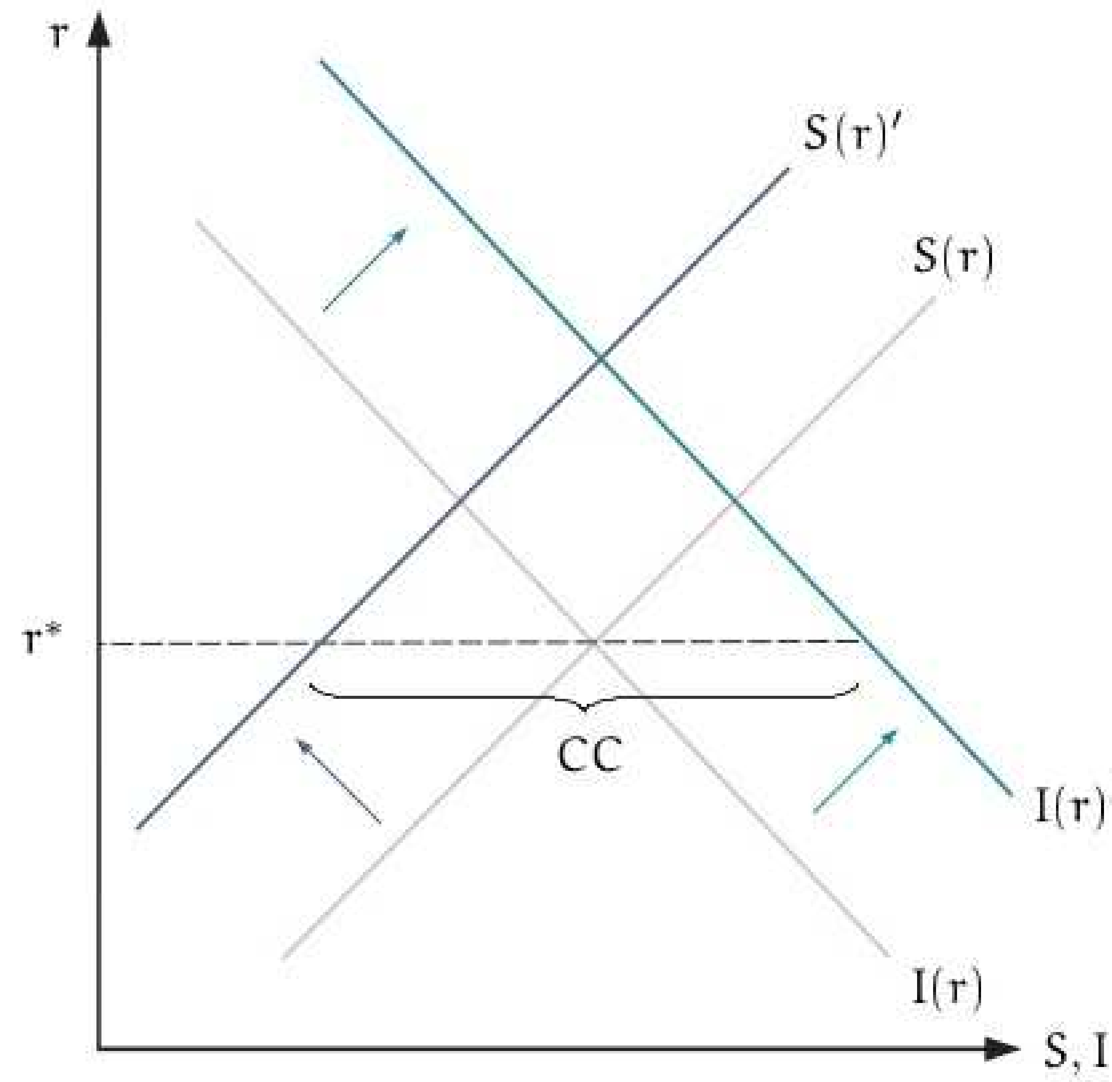
8.1 Shocks, cuenta corriente y tipos de cambio.

a.) **Respuesta**
Debido a que el shock sobre los términos de intercambio es transitorio, el consumo se mantiene estable, con el fin de ser suavizado. Se desplaza la curva del ahorro porque mientras el consumo sigue siendo el mismo, disminuye el ingreso, con lo que el ahorro es más bajo para cada nivel de tasa de interés. Esto produce un aumento del déficit de la cuenta corriente, el cual corresponde a la diferencia entre la curva del ahorro y de la inversión.



El déficit en este caso es producto de un cambio en el ingreso transitorio y la correspondiente reacción óptima de suavizar el consumo de la economía. Así, refleja netamente un cambio en el ingreso.

b.) **Respuesta**
El aumento exógeno en el consumo disminuye el ahorro para cada nivel de tasa de interés ya que el ingreso no ha cambiado. La curva de ahorro se desplaza al igual al caso anterior. Simultáneamente, aumenta la inversión lo que también desplaza la dicha curva, presionando más la demanda por recursos en la economía. El déficit en CC aumenta, lo que se puede apreciar en el gráfico siguiente.

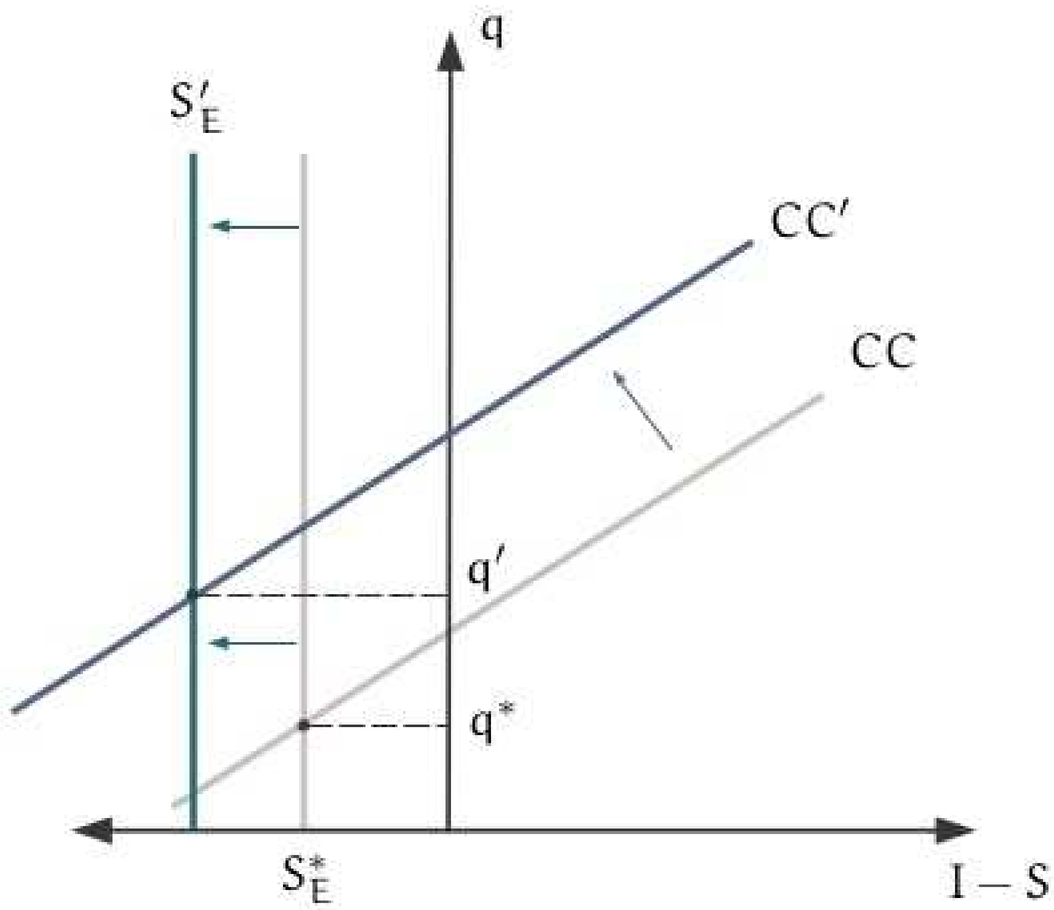


En este caso, el déficit se debe a un aumento en el gasto y no a un cambio en el ingreso. Se puede esperar que eventualmente aumente el ingreso debido a la inversión y se pueda pagar los excesos de consumo en el corto plazo.

c.) **Respuesta**
En el primer caso, el menor ingreso genera un déficit pero no existe mayor presión sobre la capacidad productiva de la economía y, por tanto, es de esperar que no genere presión inflacionaría. El segundo escenario, sin embargo, es más complicado, ya que el mayor consumo genera presión inflacionaría a través del aumento de la demanda agregada, lo que tiende a subir los precios de no haber capacidad ociosa en la economía.

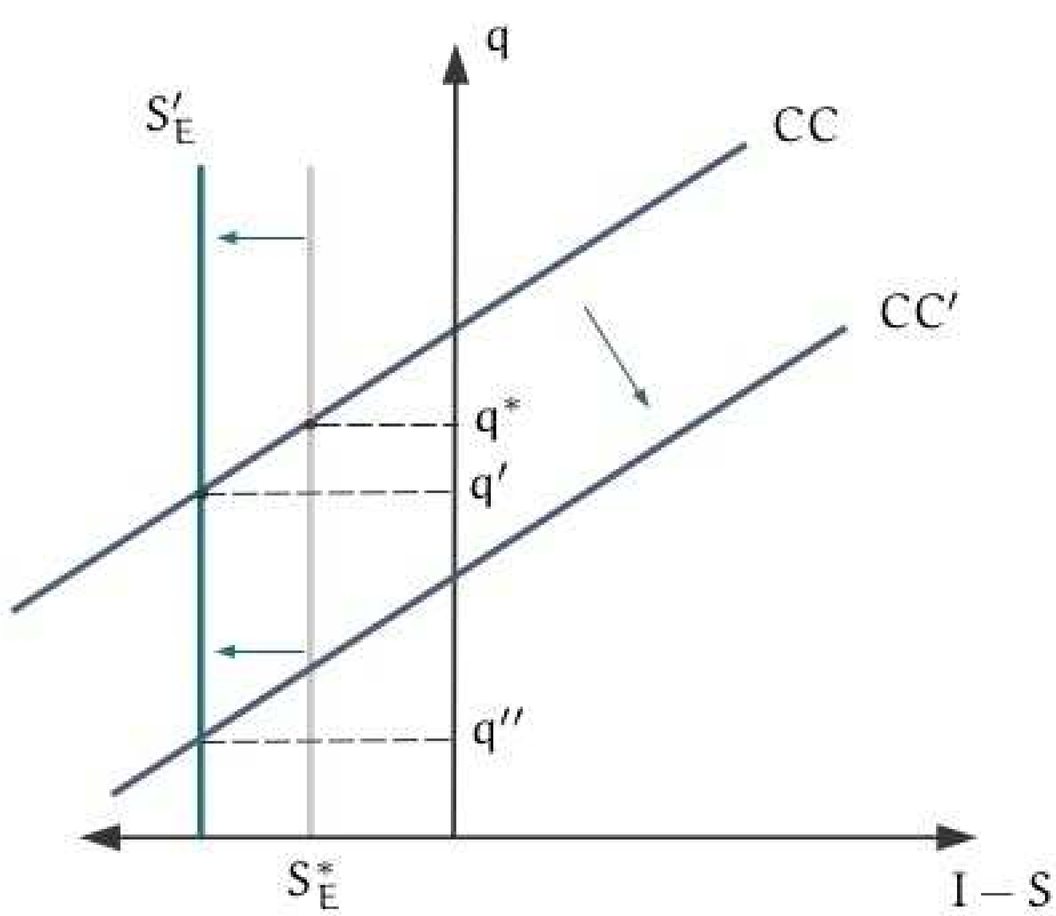
Si el aumento del consumo y la inversión está asociado a las decisiones de agentes optimizadores no será eficiente limitar su capacidad de acceso a recursos mediante límites a la cuenta corriente. El aumento de la inversión puede ser producto de una mayor productividad y el mayor consumo, una respuesta al mayor ingreso permanente que se genera por el aumento del stock de capital. De esta forma sería sub óptimo limitar la CC.

d.) **Respuesta**
En la parte a.) la caída en los términos de intercambio tiene como efecto una disminución del ahorro y también del valor de las exportaciones netas. El efecto sobre el tipo de cambio real es a través de un aumento del ahorro externo para cubrir el mayor déficit entre I y S y además, una caída de XN para cada valor de TCR q. El efecto final se ve en el gráfico siguiente.



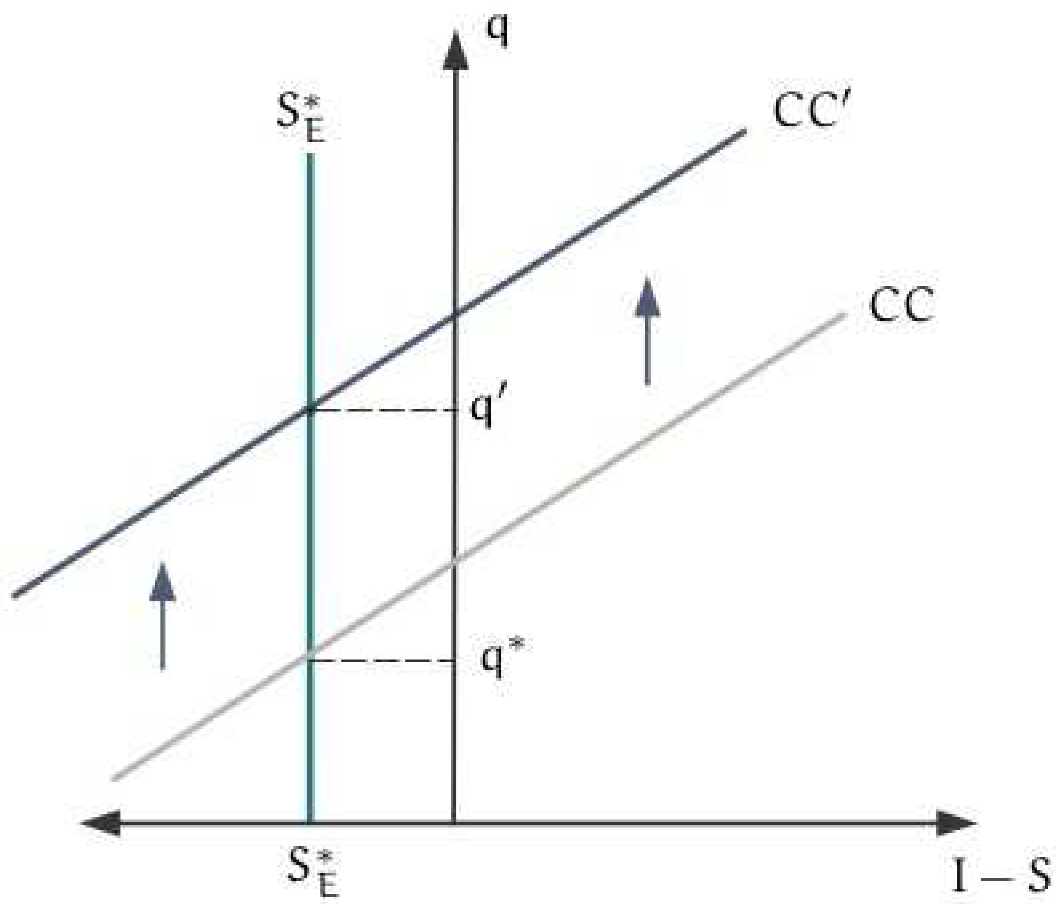
Como la indicación decía que este segundo efecto más que compensaba al primero, el resultado final es que el TCR sube. La intuición detrás de esta respuesta es que, al entrar menos dólares por exportación, la cantidad de dólares en la economía es menor y, como la demanda es la misma, sube el precio de la moneda extranjera.

Con respecto a la parte b.), cuando hay un boom de consumo e inversión, lo que sucede es que la brecha entre ahorro e inversión aumenta, es decir, aumenta el déficit en la cuenta corriente. Por lo tanto, lo que sucede es que cae el tipo de cambio. Además es de esperar que parte de esta inversión sea implementada en el sector exportador, por lo que en el mediano plazo se puede esperar un mayor nivel de XN para cada tipo de cambio real y esto refuerza el efecto sobre la apreciación. Esto se puede apreciar en la siguiente figura.



e.) **Respuesta**

En el caso que la caída en los términos de intercambio es permanente, sabemos que el equilibrio entre ahorro y inversión no se modifica, ya que este sería un efecto sobre el ingreso permanente y modifica el comportamiento de los agentes de manera correspondiente. No obstante la depreciación del tipo de cambio real sigue produciéndose, debido a que las XN valen menos, tal como se ilustra en la figura siguiente.



8.2 Aranceles y tipo de cambio real.

a.) i. **Respuesta**

Antes el costo de importar era $(1+0,11)(1+IVA)$, mientras que ahora es $(1+0,06)(1+IVA)$. Dividiendo ambas expresiones obtenemos que es costo de importar ahora es, aproximadamente, $0,955$. Por lo tanto, el costo de importar ha caído en un $4,5\,\%$.

ii. **Respuesta**

Las importaciones, al ser menos costosas, suben en $18600*0,045*1 = 837,8\ \ MMUS\$$. Para calcular esto tenemos que si el costo de importar cae en un $4,5\,\%$, es como si cayera el tipo de cambio en un $4,5\,\%$, valor que multiplicamos por la elasticidad para obtener el aumento porcentual en las importaciones. Esto significa que el déficit de CC aumenta en $837,8\ \ MMUS\$$, pero como la rebaja arancelaria es compensada y al ahorro público y privado no le pasa nada (es decir, después de compensar el déficit de la CC, este debe ser igual al que habia antes de la rebaja anrancelaria), hay que depreciar el tipo de cambio, para así mejorar el saldo de CC en $837,8\ \ MMUS\$$.

Un aumento de un $1\,\%$ del tipo de cambio real provoca un $0,01*15500 = 155\ \ MMUS\$$ aumento en las exportaciones y una disminución de $0,01*18600 = 186\ \ MMUS\$$ en las importaciones. Es decir, un aumento del TCR en un $1\,\%$ reduce el déficit corriente en $341\ \ MMUS\$$. Por lo tanto, por proporciones, se tiene:

$$\Delta TCR = \frac{837,8\ \ MMUS\$ \cdot 1\,\%}{341\ \ MMUS\$} \approx 2,46\,\%$$

Es decir, para poder conseguir la misma posición corriente, se debe depreciar el tipo de cambio real en un $2,46\,\%$.

iii. **Respuesta**
Si volvemos a realizar este cálculo con las nuevas elasticidades tenemos que el déficit que hay que compensar es de $670,2 \;\; \text{MMUS\$}$. Un aumento del TCR en un $1\,\%$ mejora el saldo de CC en $226,3 \;\; \text{MMUS\$}$, por lo tanto el TCR tiene que subir en un $2,96\,\%$ para compensar el aumento del déficit corriente por la rebaja arancelaria (nótese que para llegar a este resultado se procede de la misma forma que en la parte anterior).

iv. **Respuesta**
No existen valores de elasticidades razonables que causen un alza mayor, porque la compensación vía TCR del aumento de las importaciones, producto de la rebaja arancelaria, se da por el aumento de las exportaciones y reducción de las importaciones.

b.) i. **Respuesta**
La recaudación fiscal inicial es $18600 * 0,11 = 2046$, mientras que la actual es $(18600 + 837,8) * 0,06 = 1166,3$, por lo tanto la recaudación cae en $879,7 \;\; \text{MMUS\$}$, lo que implica una reducción del ahorro público y un aumento del ingreso de los privados en la misma cantidad (si, por simplicidad, ignoramos el efecto posterior y de segundo orden de la disminución adicional de las importaciones producto de la depreciación).

ii. **Respuesta**
Si las personas ahorran un $40\,\%$ de sus ingresos después de impuestos, entonces el ahorro privado sube en $0,4 * 879,7 = 351,9 \;\; \text{MMUS\$}$. Por lo tanto el ahorro nacional cae en $879,7 - 351,9 = 527,8 \;\; \text{MMUS\$}$.

iii. **Respuesta**
De la parte anterior concluimos que el ahorro externo aumenta en $527,8 \;\; \text{MMUS\$}$ (dado que, con una inversión constante, se tiene $\Delta S_E = -\Delta S_N$), cantidad que se debe compensar. Con las elasticidades de $e_x = 1$ y $e_m = -1$ tenemos que un aumento de un $1\,\%$ del TCR reduce el déficit corriente en $341 \;\; \text{MMUS\$}$. Por lo tanto, para compensar el cambio, se tiene:

$$\Delta \text{TCR} = \frac{527,8 \;\; \text{MMUS\$} \cdot 1\,\%}{341 \;\; \text{MMUS\$}} \approx 1,55\,\%$$

Esto es, el TCR debe depreciarse en un $1,55\,\%$ para compensar el déficit de CC. Así, a raíz de la caída del ahorro, la depreciación es menos pronunciada.

8.3 Tipo de cambio real y términos de intercambio.

a.) **Respuesta**
El producto es $\text{PIB} = C + I + X - M = 100$. Dado que $X = M$, tenemos que la balanza comercial es cero y dado que $F = 0$, la cuenta corriente también.

b.) **Respuesta**

Si cae el valor de las exportaciones, ya sea por su cantidad física o por su precio, el producto nacional cae en la misma cantidad, por ende, es análogo para el estudio. $\Delta X = -10$ y $\Delta Y = -10$ también. La balanza comercial y la cuenta corriente tendrán un deficit de -10 en ambos caso ya que suponemos que el resto de las variables no reacciona al cambio en las exportaciones.
El nuevo precio de las exportaciones, consistente con la caída del valor, corresponde a:

$$P'_X = \frac{X'}{Q_X} = \frac{X' \cdot P_X}{X} = \frac{20 \cdot 100}{30} = 66,67$$

c.) **Respuesta**
Si los agentes consumen según su ingreso permanente vamos a tener que el consumo varía dependiendo de la persistencia del shock al ingreso de la economía.

Sabemos que los efectos transitorios cambian poco el ingreso permanente y genera pequeños cambios en el consumo y luego no hay ajuste al shock por lo que se financia vía una Cuenta Corriente deficitaria. Si, en cambio, el efecto es permanente, esto tienen un efecto proporcional en el consumo y se amortigua el efecto sobre la CC.
Según los supuestos tradicionales vistos en los capítulos anteriores, podemos generalizar este resultado dependiendo de la persistencia de shock al ingreso. Si asumimos utilidad logarítmica, infinidad de períodos y que el descuento intertemporal β es igual a $\frac{1}{1+r}$, tendremos que $C_t = \overline{C}$ donde se cumple, en base a la suavización de consumo, que:

$$\begin{aligned}
\sum_{\tau=0}^{N} \frac{\overline{C}}{(1+r)^{\tau}} &= (1+r)A_t + \sum_{\tau=0}^{N} \frac{Y_{\tau+t}}{(1+r)^{\tau}} \\
\overline{C}\left(\frac{1+r}{r}\right)\left[\frac{(1+r)^{N+1}-1}{(1+r)^{N+1}}\right] &= (1+r)A_t + \sum_{\tau=0}^{N} \frac{Y_{\tau+t}}{(1+r)^{\tau}} \\
\overline{C} &= \left(\frac{r}{1+r}\right)\left[(1+r)A_t + \sum_{\tau=0}^{N} \frac{Y_{\tau+t}}{(1+r)^{\tau}}\right] \\
\overline{C} &= r\left[A_t + \sum_{\tau=0}^{\infty} \frac{Y_{\tau+t}}{(1+r)^{\tau+1}}\right]
\end{aligned}$$

Ahora bien, si el ingreso sigue un proceso AR(1), del tipo $Y_t = \rho Y_{t-1} + \epsilon_t$, podemos describir el cambio en el consumo frente a un shock al ingreso en t, según:

$$\begin{aligned}
\overline{C} &= r\left[A_t + \sum_{\tau=0}^{\infty} \frac{Y_t \cdot \rho^{\tau}}{(1+r)^{\tau+1}}\right] \\
\frac{\partial \overline{C}}{\partial Y_t} &= \frac{r}{1+r}\left[\sum_{\tau=0}^{\infty} \frac{\rho^{\tau}}{(1+r)^{\tau}}\right] = \frac{r}{1+r-\rho}
\end{aligned}$$

Si el efecto es permanente, se tiene $\rho = 1$, con lo que el cambio es 1:1 y cae el consumo proporcionalmente a la caída del producto. Si ρ es cero, el cambio sería $fracr1 + r$ implicando que si efectivamente cae en $0,5$, debería tenerse que la tasa de interés es de $100\,\%$. En caso contrario (como sería lo lógico), se sabe inmediatamente que la persistencia debe ser mayor a cero.

Es de esperar en este escenario que el ajuste se lleve acabo a través del consumo de importaciones, aunque hemos ignorado que existe una restricción intertemporal relacionada al consumo de bienes transables como no transables.

d.) **Respuesta**
En equilibrio de la balanza comercial con $X = M = 30$, tenemos que $q = 1$. Para que se cierre la brecha entre exportaciones y importaciones, el tipo de cambio real debe depreciarse de manera de bajar las importaciones en el mismo monto que las exportaciones, según:

$$X = M \Longrightarrow 20 = 30 - 50\log q \Longrightarrow q = e^{1/5} = 1,221$$

Así, si el TCR se deprecia un $22,1\,\%$, se mantiene el equilibrio.

e.) **Respuesta**
Si la caída es transitoria, no es necesario un cambio en el tipo de cambio real, debido a que no se requiere un ajuste en las cuentas y se financiará el déficit con una cuenta corriente negativa. Por lo tanto, $\Delta q = 0$.

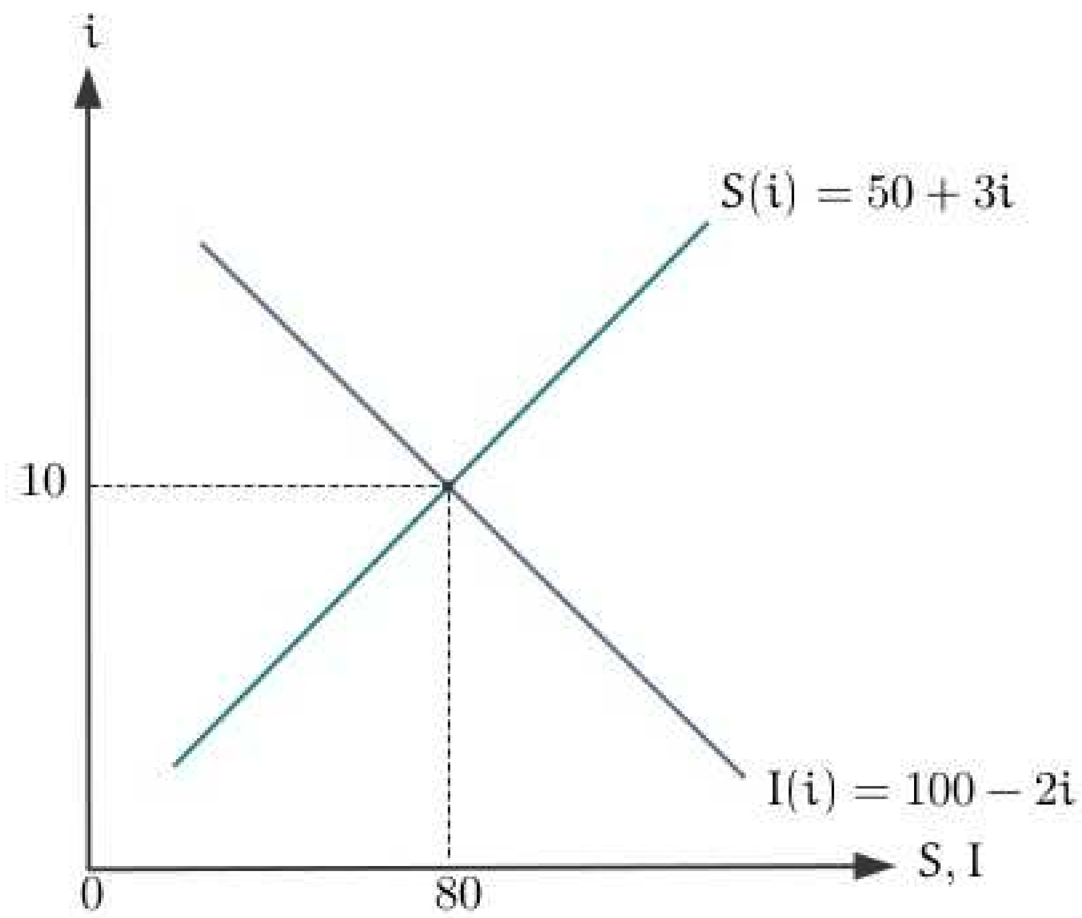
f.) **Respuesta**
Vemos que lo fundamental en entender el ajuste necesario es saber la naturaleza del shock que le está afectando a la economía.

Si este es permanente, es de esperar que varíe el tipo de cambio real señalizando que se debe generar un ajuste de manera de cumplir con las restricciones intertemporales.

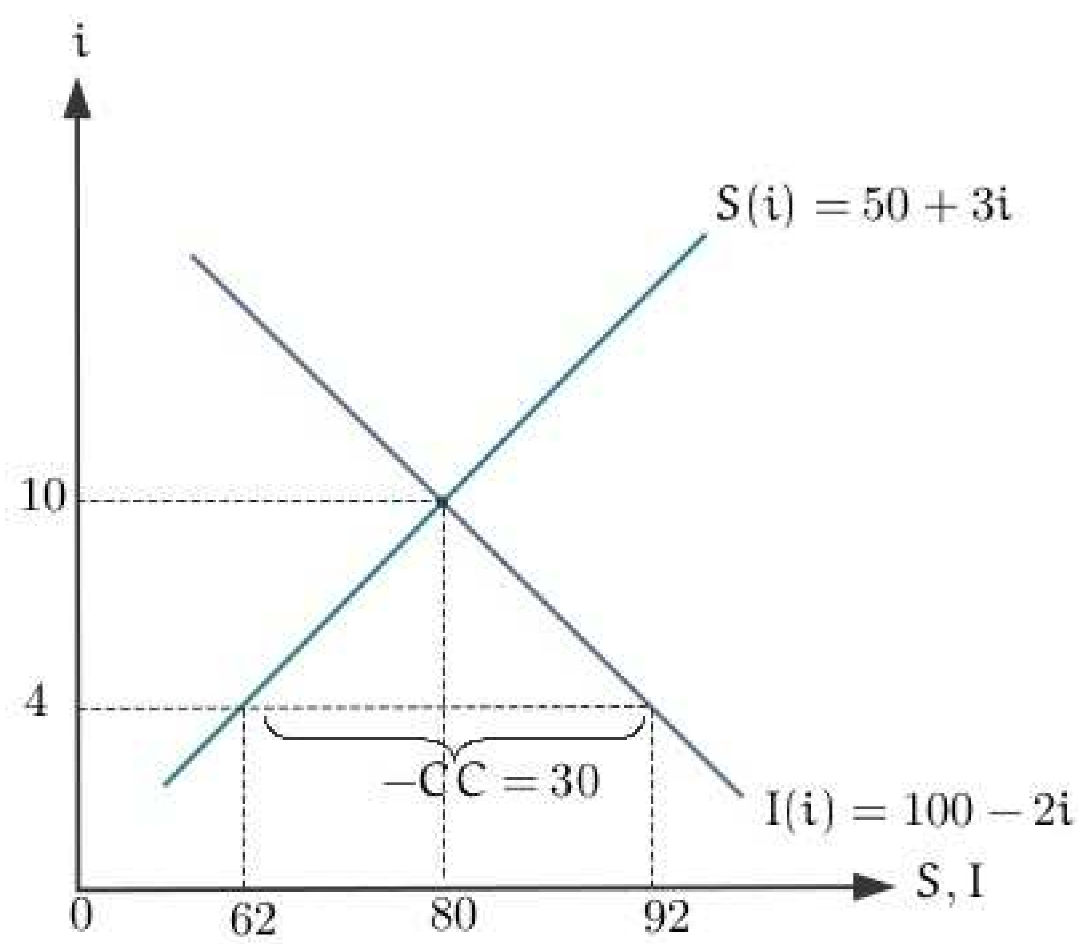
Si el shock es de naturaleza transitoria, será óptimo asumir el ajuste por la vía de la cuenta corriente y no por cambios en el consumo y el tipo de cambio real.

8.4 Cuenta corriente, apertura financiera y tipo de cambio real.

a.) **Respuesta**
Haciendo $S = I$ se llega a $i = 10$ y $S = I = 80$.



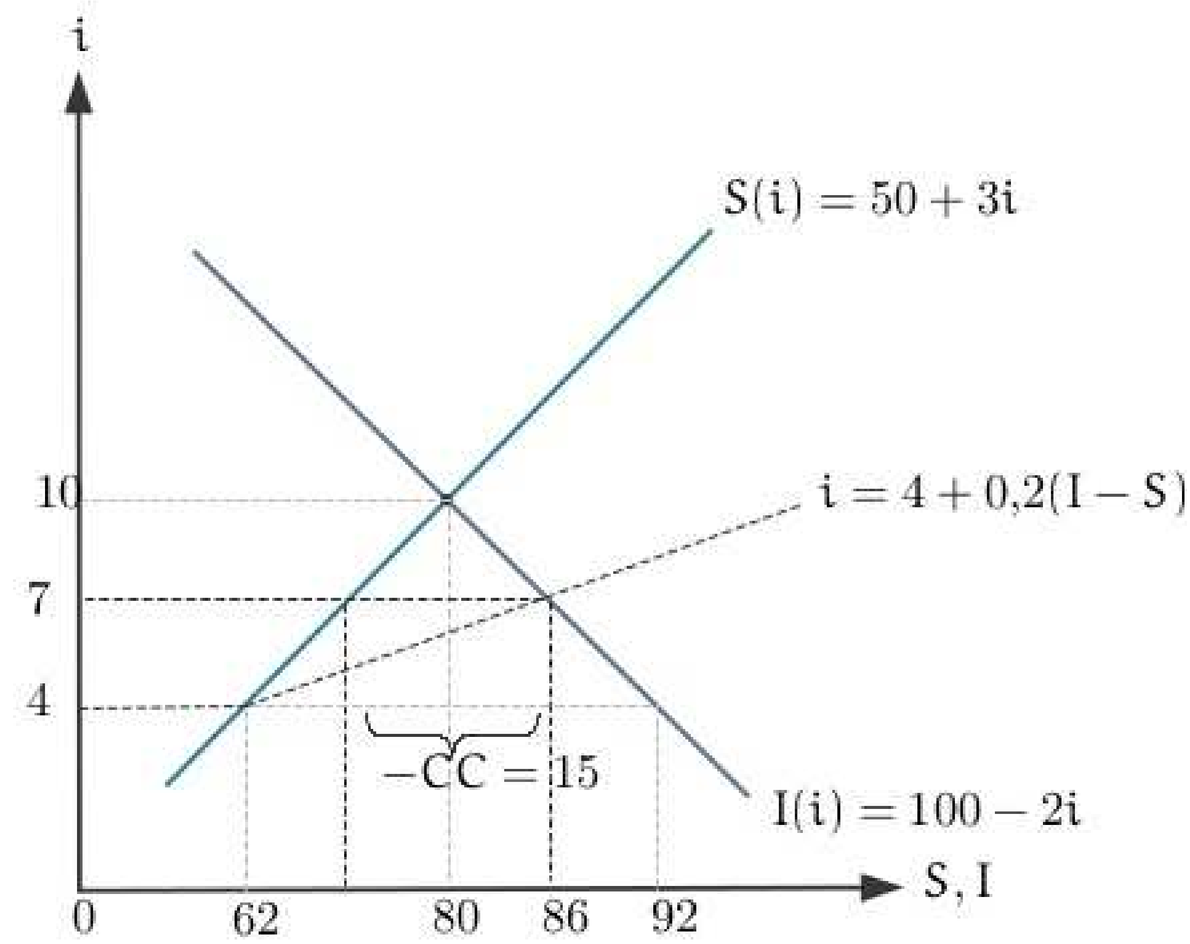
b.) **Respuesta**
En este caso, para $i^* = 4$ se tiene $S = 62$, $I = 92$ y un déficit en la cuenta corriente (ahorro externo) de $-CC = 30$, por lo tanto, esta economía se endeuda con el resto del mundo, lo que es natural pues la tasa de interés internacional es menor a la tasa de autarquía, reflejando la relativa escasez de recursos en el país en dicho período respecto al resto del mundo.



c.) **Respuesta**
Sabemos que $I = -CC + S$, por lo tanto, se tiene lo siguiente.

$$\begin{aligned}
100 - 2(4 - 0,2CC) &= -CC + 50 + 3(4 - 0,2CC) \\
-2CC &= 92 - 62 \\
-CC &= 15
\end{aligned}$$

Así, el déficit de cuenta corriente es de 15, menor que cuando hay perfecta movilidad de capitales. Reemplazando, se tiene que la tasa de interés corresponde a $i = 7\%$ y los niveles de ahorro nacional e inversión son $S = 71$ e $I = 86$, respectivamente.



d.) **Respuesta**

(**Nota: eso es un error pues debería ser** $NX = 3q - 45$.)

Lo relevante en este caso es tomar nota del déficit $(I - S)$ que debe ser financiado por las NX. En a.) la economía es cerrada y $I - S = 0$ por lo que el tipo de cambio real consistente con esa situación, es de $q = 15$. Para b.), $I - S = 30$ por lo que $q = 5$ y finalmente en c.) dado que $I - S = 15$, entonces $q = 10$. El tipo de cambio real es más depreciado cuando la economía es cerrada pues debe ser consistente con un saldo corriente igual cero y, dada la tasa internacional, $I - S > 0$ genera una apreciación real al dejar entrar capitales. Asimismo, al existir imperfecta movilidad de capitales, este efecto es menor.

8.5 Ajuste de cuenta corriente y tasas de interés.

a.) **Respuesta**

Usando $r = 5\,\%$ en $I(r)$ obtenemos que $I = 25$. Para calcular el producto reemplazamos en:

$$Y = C + G + I + X - M$$

donde obtenemos que $Y = 100$. Para calcular el ingreso, PNB, recordemos que:

$$PNB = PIB - F$$

Por lo tanto $PNB = 97$. Para calcular el saldo de la cuenta corriente recordemos que la cuenta corriente, CC, es:

$$CC = X - M - F$$

Como sabemos que el tipo de cambio real q es igual a 1, usando $X(q)$ y $M(q)$ en la ecuación anterior, obtenemos que $CC = -8$. Es decir, el país tiene un déficit en la cuenta corriente. Sabemos además que $S_E = -CC$. Por lo tanto tenemos que el ahorro externo de la economía, S_E, es igual a 8. Para calcular el ahorro nacional, S_N, utilizamos:

$$I = S_N + S_E$$

de donde obtenemos que $S_N = 17$. Asimismo, a partir de las ecuaciones anteriores, tenemos que el ahorro público es $S_G = T - G = 5$ y el ahorro privado es $S_P = S_N - S_G = 12$.

b.) **Respuesta**

Ahora los impuestos subieron a 22, mientras que todo el resto permanece constante. Como la economía sigue en pleno empleo el producto Y permanece en 100. Primero calculamos el tipo de cambio real. Usando nuevamente:

$$Y = C + G + I + X - M$$

pero ahora con $T = 22$. Al reemplazar en la ecuación anterior, nos da que el tipo de cambio real es:

$$q = \frac{41}{40}$$

Es decir, un aumento en los impuestos produce una depreciación del tipo de cambio real. Para calcular el saldo de la cuenta corriente, tenemos de:

$$CC = X - M - F$$

que $CC = -\frac{32}{5}$. Es decir, el déficit en la cuenta corriente disminuye porque aumentan las exportaciones y caen las importaciones.

El impacto de esta política es una depreciación del tipo de cambio real, lo que lleva a una reducción en el déficit de la cuenta corriente. El tipo de cambio se deprecia en un $2{,}5\,\%$ cuando la recaudación tributaria sube en $2\,\%$ del PIB. Por lo tanto, por cada punto que sube la recaudación tributaria, el tipo de cambio se deprecia en un $1{,}25\,\%$.

c.) **Respuesta**
Ahora $q = 1$, mientras que el producto se puede mover. Reemplazando en

$$Y = C + G + I + X - M$$

con $q = 1$ y $T = 22$, despejamos Y, lo que nos da $Y = 98$. Y el saldo de la cuenta corriente:

$$CC = X - M - F = -\frac{34}{5}$$

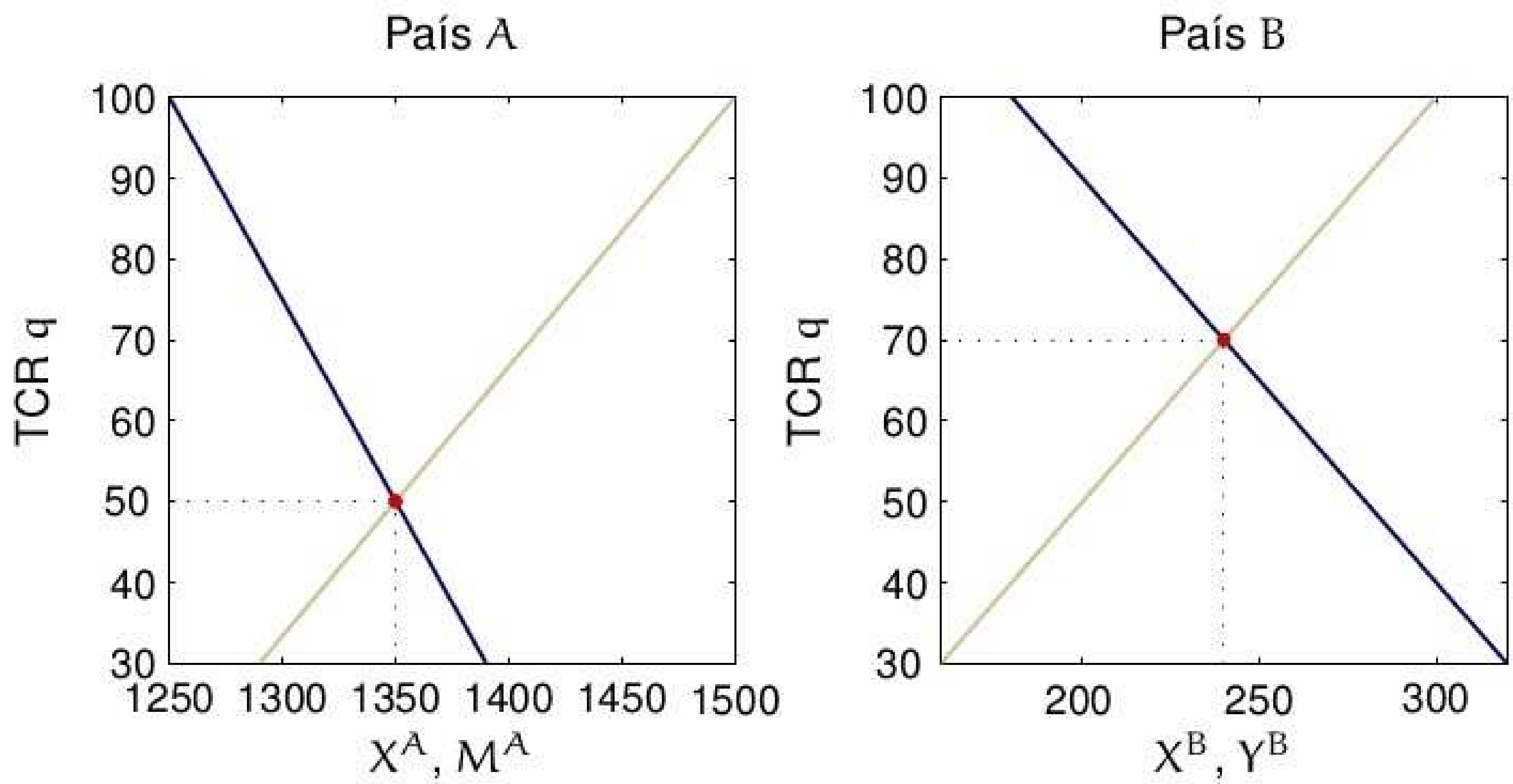
El impacto de esta política de mantener el tipo de cambio real fijo y subir la recaudación tributaria es que baja el producto en $2\,\%$ de 100 a 98. Mientras que el déficit en la cuenta corriente baja de $CC = -8$ a $CC = -\frac{34}{5}$.

d.) **Respuesta**
Usando $r = 7$ y $r^* = 5$ obtenemos que $q = \frac{100}{102} \approx 0{,}98$. El nuevo producto se obtiene reeemplazando en: $Y = C + G + I + X - M$ lo cual nos da $Y = 96{,}4$. El saldo de la cuenta corriente se obtiene reemplazando en: $CC = X - M - F$ usando el hecho que $Y = 96{,}43$ y $q = \frac{100}{102}$. Esto nos da $CC = -7{,}71$.
Por lo tanto el PIB cae en $3{,}57\,\%$, mientras que el saldo de la cuenta corriente se reduce en en $3{,}58\,\%$. Por lo tanto por cada $1\,\%$ que se reduce el deficit en la cuenta corriente como porcentaje del PIB, el PIB cae en aproximadamente un $1\,\%$. Esta política es efectiva en reducir el deficit en la cuenta corriente pero tiene como costo la apreciación del tipo de cambio y la caída del producto.

8.6 Equilibrio con dos países.

a.) **Respuesta**
Dado que ambas economías se encuentran en autarquía financiera, se debe dar que las exportaciones sean iguales a las importaciones.

Usando la información entregada sobre $X(q)$ y $M(q)$ para cada país (y recordando que $Y^A = 3000$ e $Y^B = 300$), se tiene que los niveles de tipo de cambio son $q^A = 50$ y $q^B = 70$. A su vez, se tiene que $X^A = M^A = 1350$ y $X^B = M^B = 1350$.
Gráficamente se puede ver el equilibrio en el mercado de bienes-divisas:



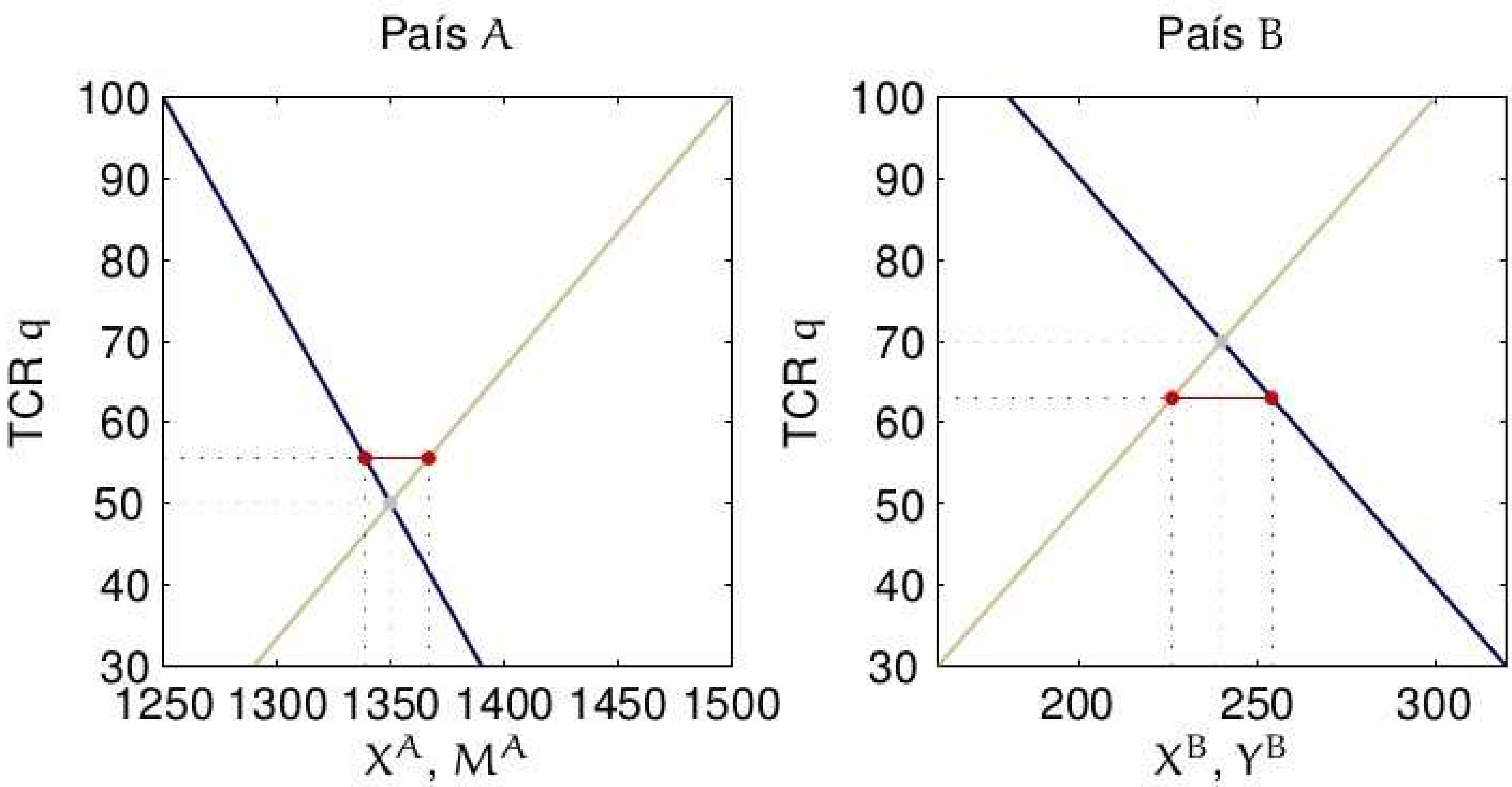
b.) **Respuesta**

Una vez que se libera la cuenta financiera, el tipo de cambio real fluctúa de tal manera que la diferencia entre exportaciones o importaciones calce con la disponibilidad de recursos dada por el equilibrio entre la demanda y oferta por capital, $S(r^*) - I(r^*)$.

En otras palabras, el tipo de cambio real es tal que induce cierto volumen de exportaciones e importaciones que inducen a su vez un saldo en la cuenta corriente igual al ahorro externo que resulta de las decisiones de ahorro nacional e inversión. Dado que $S_E = -XN + F = -CC$ podemos usar la información sobre CC de la pregunta 7.5 para encontrar el tipo de cambio real.

En el país A hay un superávit corriente de 28 y en el país B se tiene un déficit de 28. Por lo que el tipo de cambio debe hacer que $X^A(q^A) - M^A(q^A) = 28$ y $X^B(q^B) - M^B(q^B) = -28$.

Resolviendo se encuentra que $q^A = 55,6$ y $q^B = 63$. Se ve que en un país que es deudor, se genera una apreciación, dado que se produce una fuerte entrada de capitales. El caso es opuesto para un país acreedor.



c.) **Respuesta**

El nuevo tipo de cambio real será $\mathrm{q}^{\mathrm{B}} = 59$. El S_{E} se mantiene invariante, por lo que se requiere que las exportaciones también crezcan. Para esto es necesario que el tipo de cambio real se deprecie para mantener el equilibrio y así bajar las importaciones y subir las exportaciones para compensar la mayor cantidad de importaciones por el efecto de la rebaja de aranceles. El análisis gráfico es similar al anterior.

9. Más sobre Tipo de Cambio Real y Cuenta Corriente*

9.1 La cuenta corriente y el tipo de cambio intertemporal.

a.) **Respuesta**
Para el primer período, con $r = 4$, se tiene:

$$\begin{aligned} I = S_N + S_E &= 42 - 2r \\ I = 24 + S_E &= 34 \\ S_E &= 10 \end{aligned}$$

Sabemos además que:

$$S_E = -CC = M + rF - X$$

Donde M son las importaciones, rF los pagos a las deudas y X las exportaciones. En este caso $F = 0$. Usando:

$$\begin{aligned} X &= 60q - 20 \\ M &= 108 - 60q, \end{aligned}$$

Llegamos a:

$$10 = 108 - 60q - 60q + 20$$

Despejando q, llegamos a $q = 0{,}983$. En el segundo período debo pagar el déficit en la cuenta corriente más los intereses (es decir, debo tener un superávit), por lo tanto:

$$-10(1 + r) = 108 - 60q - 60q + 20$$

Con $r = 4$ llegamos a $q = 1{,}153$. El tipo de cambio debe subir para exportar más e importar menos y así llegar a un superávit en el segundo período.

b.) **Respuesta**
Si el déficit de la cuenta corriente no puede ser mayor a un $4\,\%$ entonces llegamos a que $S_E = 4$, con lo que $I = 28$. Por lo tanto, $r = 7$ (lo que viene de la relación entre inversión e interés). Para calcular el tipo de cambio, tenemos:

$$4 = 108 - 60q - 60q + 20$$

Despejando q, llegamos a $q = 1{,}033$. Para el segundo período tenemos que pagar el déficit más los intereses, por lo tanto:

$$-4(1 + r) = 108 - 60q - 60q + 20$$

Despejando q, obtenemos $q = 1{,}102$.

c.) **Respuesta**
La política de control del déficit deprecia la moneda en el primer período (respecto a la situación de no-control), dado que restringe la entrada de capitales y hace subir el precio de la moneda extranjera.

En el segundo período, como se debe pagar una menor deuda de la época previa, el valor de la moneda es más fuerte que en ausencia de control.

Así, el efecto del control permite suavizar la trayectoria del tipo de cambio a lo largo del tiempo.

d.) **Respuesta**

Sabemos que:

$$Y = C + I + XN$$

De acuerdo a la parte a.):

En el primer período, tenemos un déficit de 10, con:

$$100 = C_1 + 34 - 10 \Longrightarrow C_1 = 86$$

Para el segundo período, la inversión previa nos dio una rentabilidad de un $110\,\%$. Además, la inversión es cero, ya que ahora se acaba el mundo. Con:

$$100 + 1{,}1 \cdot 34 = C_2 + 10{,}4 \Longrightarrow C_2 = 127$$

Recuerde que en el segundo período la economía tiene un superávit tal que le permite pagar el déficit más los intereses de lo que incurrió en el primer período.

De acuerdo a la parte b.):

En el primer período tenemos un déficit de 4, con:

$$100 = C_1 + 28 - 4 \Longrightarrow C_1 = 76$$

Para el segundo período, la inversión anterior entregó una rentabilidad de un $110\,\%$. Además, finalmente la inversión es cero, ya que no hay futuro. Así,

$$100 + 1{,}1 \cdot 28 = C + 4{,}28 \Longrightarrow C_2 = 126{,}52$$

9.2 Desalineamientos del tipo de cambio real.

a.) **Respuesta**

Partimos calculando la cuenta corriente fijando el equilibrio de ahorro-inversión con la tasa de interés internacional.

$$S_E = I(r) - S = I_0 - br^* - sY$$

Al mismo tiempo sabemos que el ahorro externo es el negativo de la cuenta corriente (y para este caso, también del saldo comercial, dado que $F = 0$) por lo que se tiene:

$$S_E = I(r) - S = -CC(q) = -BC(q)$$

Luego, podemos determinar el tipo de cambio real. Reemplazando las formas funcionales para X y M:

$$\begin{aligned}
-(I(r^*)-S) &= X(q)-M(q)-r^*D_0\\
-(I_0-br^*-sY) &= dq-X_0-M_0+fq\\
(d+f)q &= (X_0+M_0+sY-I_0)+br^*\\
\\
q_0 &= \left[\frac{X_0+M_0+sY-I_0}{d+f}\right]+\frac{b}{d+f}r^*
\end{aligned}$$

Vemos que el tipo de cambio de equilibrio q_0 es una función de la tasa de interés mundial más las variables fijas relacionadas al producto. La pendiente con respecto a la tasa de interés internacional está dada por los parámetros que describen la sensibilidad de las exportaciones netas y la inversión a la tasa de interés.

b.) **Respuesta**

La economía adquiere deuda en el primer período igual al ahorro internacional, según:

$$D_t = I_0 - br^* - sY > 0$$

Asumimos que se cumple que $S_E > 0$, razón por la que la deuda es positiva (en caso contrario, contraería activos internacionales). Esto implica que en el segundo período, el flujo de capitales dado por el equilibrio inversión-ahorro lleva a que entren $I_0 - br^* - sY$ recursos lo que financia un déficit en cuenta corriente por un monto de:

$$CC_t = XN_t - r^*D_t$$

Nótese que el saldo de Balanza Comercial corresponde a $BC(q)_t = XN_t$.

Reemplazando términos se encuentran las expresiones buscadas.

$$\begin{aligned}
-(I(r^*)-S) &= X(q)-M(q)-r^*D_1\\
-(I_0-br^*-sY) &= dq-X_0-M_0+fq-r^*D_1\\
(d+f)q &= (X_0+M_0+sY-I_0)+r^*(b+D_1)\\
\\
q_1 &= \left[\frac{X_0+M_0+sY-I_0}{d+f}\right]+\frac{b+D_1}{d+f}r^*
\end{aligned}$$

c.) **Respuesta**

Sabemos que la cuenta corriente debe ser igual a $-S_E$ por lo que todos los períodos habrá un déficit en cuenta corriente por el mismo monto S_E y, mientras aumenta el déficit, el tipo de cambio real debe ir depreciándose ($q_0 < q_1$) de manera de que aumenten las exportaciones netas junto con los pagos por intereses relacionados al mayor stock de deuda que seguirá creciendo en el tiempo.

Esto será sostenible en la medida que, mientras la deuda siga creciendo, se siga consiguiendo divisas vía una devaluación continua del tipo de cambio real en el tiempo. Es esperable que esto no se pueda mantener para siempre debido a que podría bajar la sensibilidad de las exportaciones netas eventualmente o que sea demasiado costoso en términos de consumo de bienes transables que no permita continuar con esta trayectoria.

d.) **Respuesta**

Si el gobierno no aumenta el ahorro, y al mismo tiempo no se puede ajustar el tipo cambio real, habrá un descalce entre el equilibrio Ahorro-inversión dado por la tasa de interés internacional y el equilibrio en CC dado por q.

La única forma de hacer calzar ambos es a través de una reducción del producto que aumente las exportaciones netas. Sin embargo, en este modelo simple, el ahorro es también una función constante del ingreso, por lo que empeora el equilibrio I-S.

Suponiendo que el gobierno logra aumentar s de tal manera de hacer que $I - S = XN(\overline{q})$, podemos encontrar $s^*(\overline{q})$.

$$\begin{aligned}
-(I(r^*) - S) &= X(q) - M(q) - r^*D_1 \\
-(I_0 - br^* - s^*Y) &= d\overline{q} - X_0 - M_0 + f\overline{q} - r^*D_1 \\
s^* &= \frac{1}{\overline{Y}}[(d+f)\overline{q} - X_0 - M_0 - I_0 - r^*(D_1 + b)]
\end{aligned}$$

e.) **Respuesta**

Cada período se requiere de una tasa de ahorro mayor, de manera de financiar la inversión y así poder mantener el tipo de cambio real en $\overline{q}$. Por lo tanto, es fácil ver que no será sostenible en la medida que la condición de $s \in [0,1]$ ya no se pueda cumplir (a partir del período en el que se requiera más recursos a los que se puede proveer de aumentar s).

$$I - s\overline{Y} + X(\overline{q}) - M(\overline{q}) - r^*D_n > \overline{Y}$$

Es fácil pensar en que en el mundo real no se puede pasar de un cierto nivel de ahorro $\tilde{s}$ por razones sociales o políticas y después de este no queda otra solución que permitir la flotación del tipo de cambio real.

9.3 Tipo de cambio intertemporal.

a.) **Respuesta**

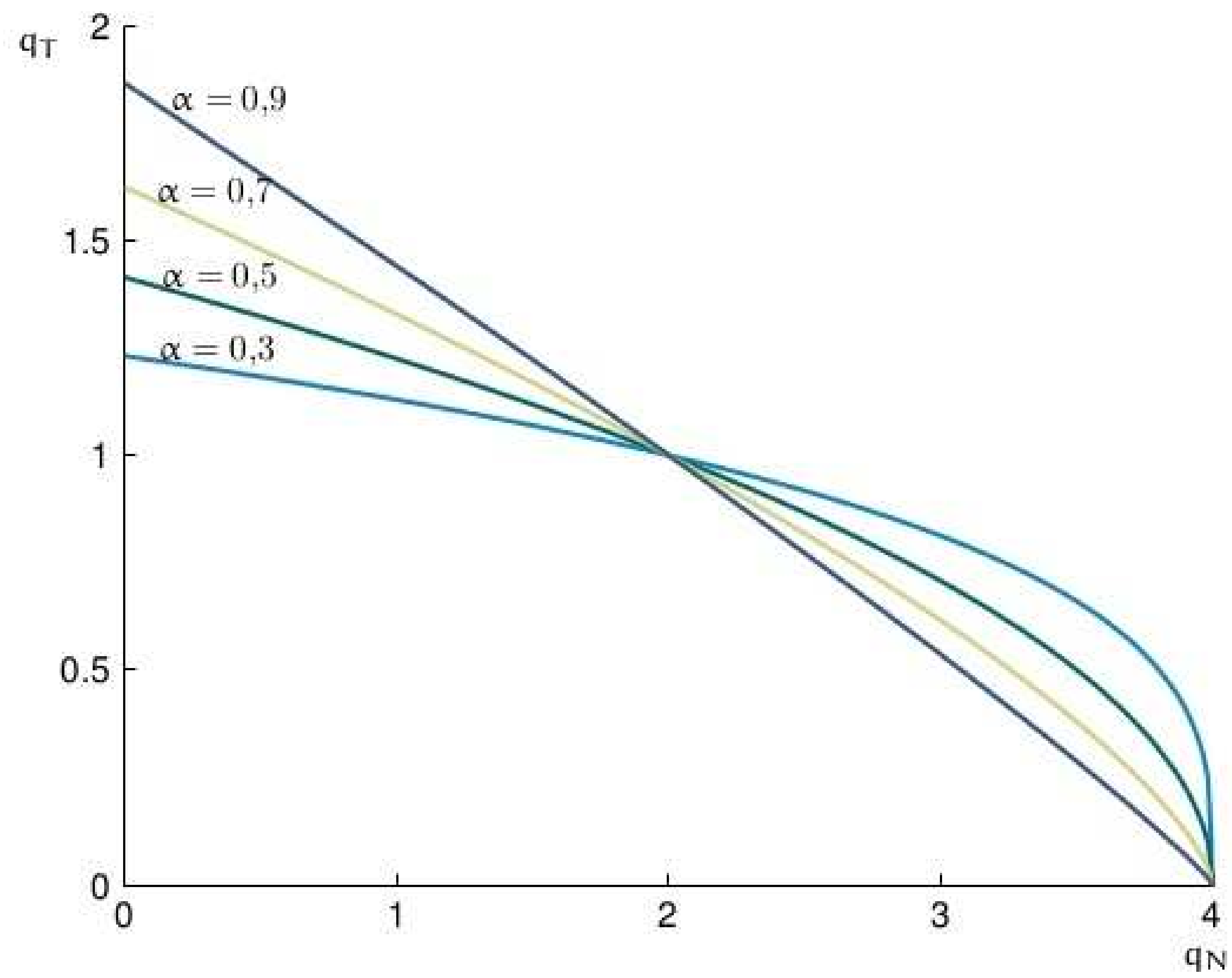
La condición sobre $\overline{\ell}$ nos permite juntar la producción de no transables con la de transables. Tenemos, entonces, tres ecuaciones: $q_T = \ell_T^{\alpha}$ y $q_N = a\ell_N$, pero como $\overline{\ell} = 2$, entonces la tercera es:

$$\ell_T = 2 - \ell_N = 2 - \frac{q_N}{a}$$

Por lo tanto, podemos escribir $q_T(q_N)$ de la siguiente manera:

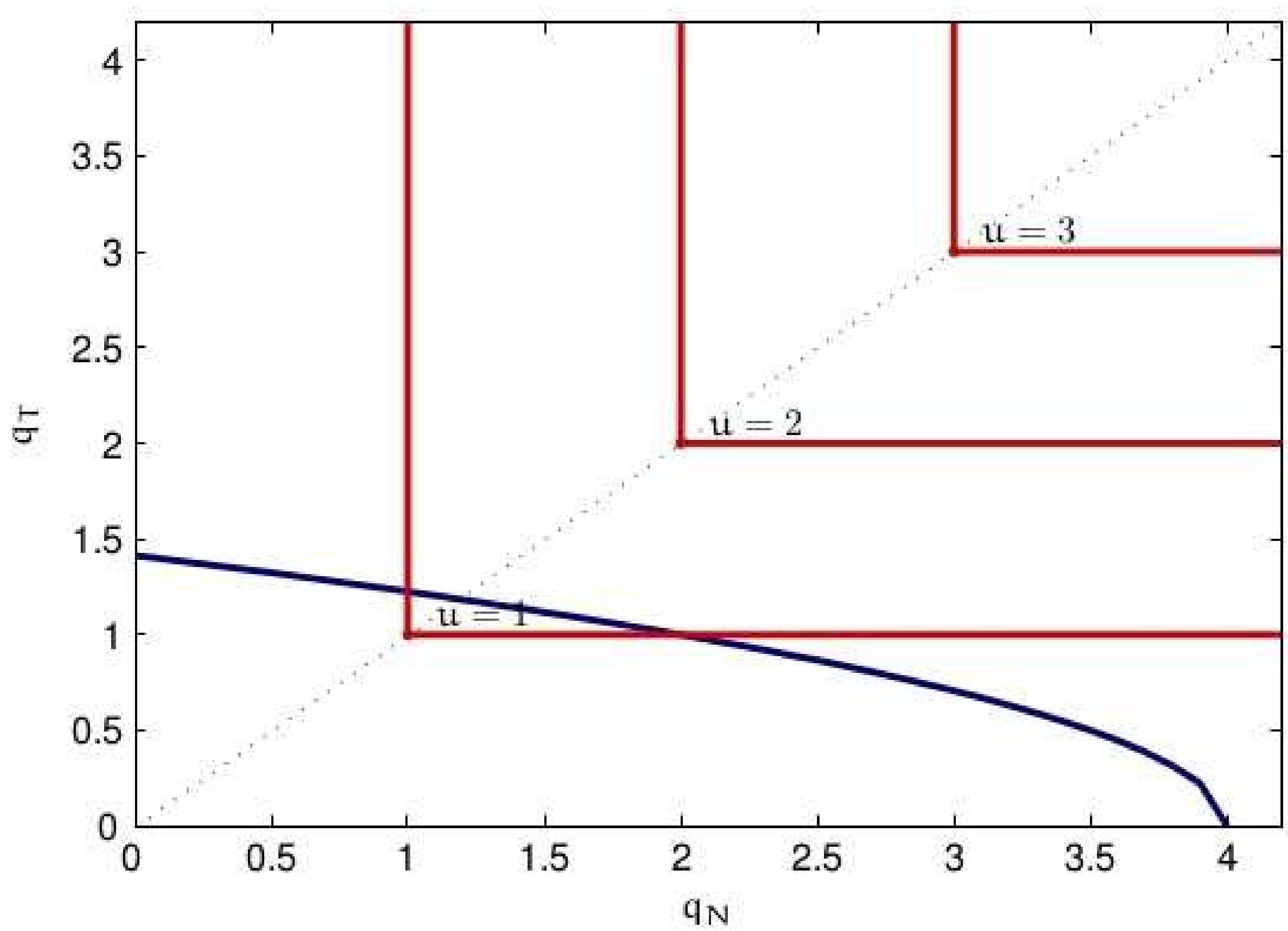
$$q_T = \left(2 - \frac{q_N}{a}\right)^{\alpha}$$

Esto lo graficamos para $a = 2$ y para 4 valores distintos de α: $\alpha_1 = 0,3$, $\alpha_2 = 0{,}5$, $\alpha_3 = 0{,}7$ y $\alpha_4 = 0{,}9$.



b.) **Respuesta**

Dado que la función de utilidad toma el valor del mínimo consumo, entonces en el óptimo tendremos que la economía local se ubicará en el consumo de ambos en igual proporción. Esto se ve en la linea diagonal de la figura siguiente.



c.) **Respuesta**
Sabemos que, para los bienes no transables, el consumo debe ser igual a su producción, por lo tanto, podremos obtener los niveles de producción de ambos sectores y, con esto, los salarios. Dado que la función de consumo nos lleva a igualar $c_N(t) = c_T(t)$, también nos determina la balanza comercial.

$$q_T(1) = 1 = \ell_T^{\alpha} \rightarrow \ell_T = 1, \ell_N = 1 \quad \omega_T = p_T \alpha$$
$$q_N(1) = a(2 - \ell_T) \rightarrow q_N = a \quad \omega_N = p_N a$$

Podemos entonces determinar el consumo de no transables y transables:

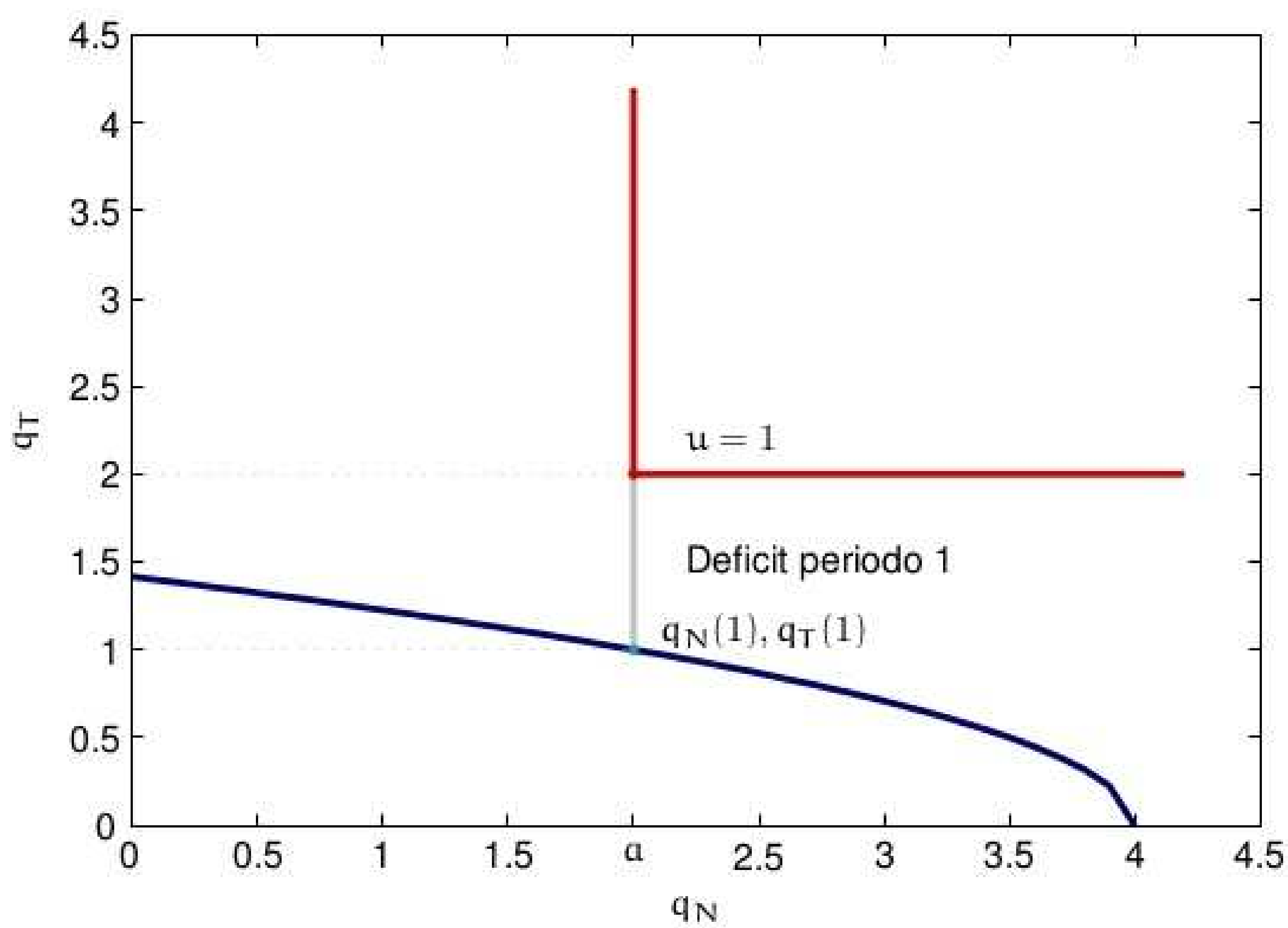
$$c_N(t) = q_N(1) = a \Rightarrow c_T(t) = a$$

Dado esto, podemos determinar el saldo en balanza comercial

$$CC = q_T - c_T(t) < 0$$

. Sabemos que es un déficit, pues $a > 1$ y la producción de transables fue de 1.

Gráficamente:



d.) **Respuesta**
Dado que sólo importan los precios relativos, podemos escribir los precios de los bienes no transables en términos relativos de los bienes transables, con $p = \frac{p_N}{p_T}$ y el precio de los transables sería entonces 1.

Con esto, los salarios son α y pa en los sectores transables y no transables, respectivamente.

e.) **Respuesta**

Sabemos que, dado que en el segundo período se acaba el mundo, se debe cumplir los compromisos, por lo que la balanza comercial debe ser el opuesto del período 1 más los intereses adquiridos en el transcurso del tiempo.

Formalmente la economía tiene una restricción presupuestaria en términos de transables el que cubre dos períodos:

$$c_T(1) + \frac{c_T(2)}{1+r^*} = q_T(1) + \frac{q_T(2)}{1+r^*}$$

Por lo tanto, reemplazando con la información del primer período, podemos demostrar lo pedido:

$$\begin{aligned}
c_T(1) + \frac{c_T(2)}{1+r^*} &= q_T(1) + \frac{q_T(2)}{1+r^*} \\
a + \frac{c_T(2)}{1+r^*} &= 1 + \frac{q_T(2)}{1+r^*} \\
q_T(2) &= \underbrace{CC}_{>0} + c_T(2)
\end{aligned}$$

Así, la balanza comercial será igual a $(a-1)(1+r)$ y es debido a que no hay más períodos. También implica que el consumo de transables será menor que la producción en el segundo período para devolver la deuda anterior.

Para demostrar que $q_T(2) > 1$, utilizamos el método del absurdo: proponemos lo contrario y mostramos que es una contradicción.

Tomamos $q_T(2) \leqslant 1$:

Si $q_T(2) \leqslant 1 \Rightarrow \ell_T \leqslant 1$, dada la función de producción y que $\alpha \in (0,1)$. Al mismo tiempo, si estamos en la frontera eficiente de producción, esto implica que

$$\ell_N \geqslant 1 \Rightarrow q_N(2) = a\ell_N \geqslant a > 1$$

Sin embargo sabemos que $q_N(2) = c_N(2) = c_T(2)$ lo que implica que $c_T(2) > 1$ también.

Pero sabemos que:

$$\begin{aligned}
q_T(2) &= CC + c_T(2) q_T(2) > c_T(2) \\
q_T(2) &> c_T(2) > 1 \\
q_T(2) &> 1
\end{aligned}$$

Esto último es una contradicción con el supuesto inicial de $q_T(2) \leqslant 1$, por lo que queda enteramente demostrado que $q_T(2) > 1$.

f.) **Respuesta**

Podemos ver cuánto se produce en cada sector en este período tomando nota que se debe cumplir la restricción intertemporal para los transables y que se desea maximizar la utilidad tomando como dado el comportamiento en el primer período.

Se puede ver que

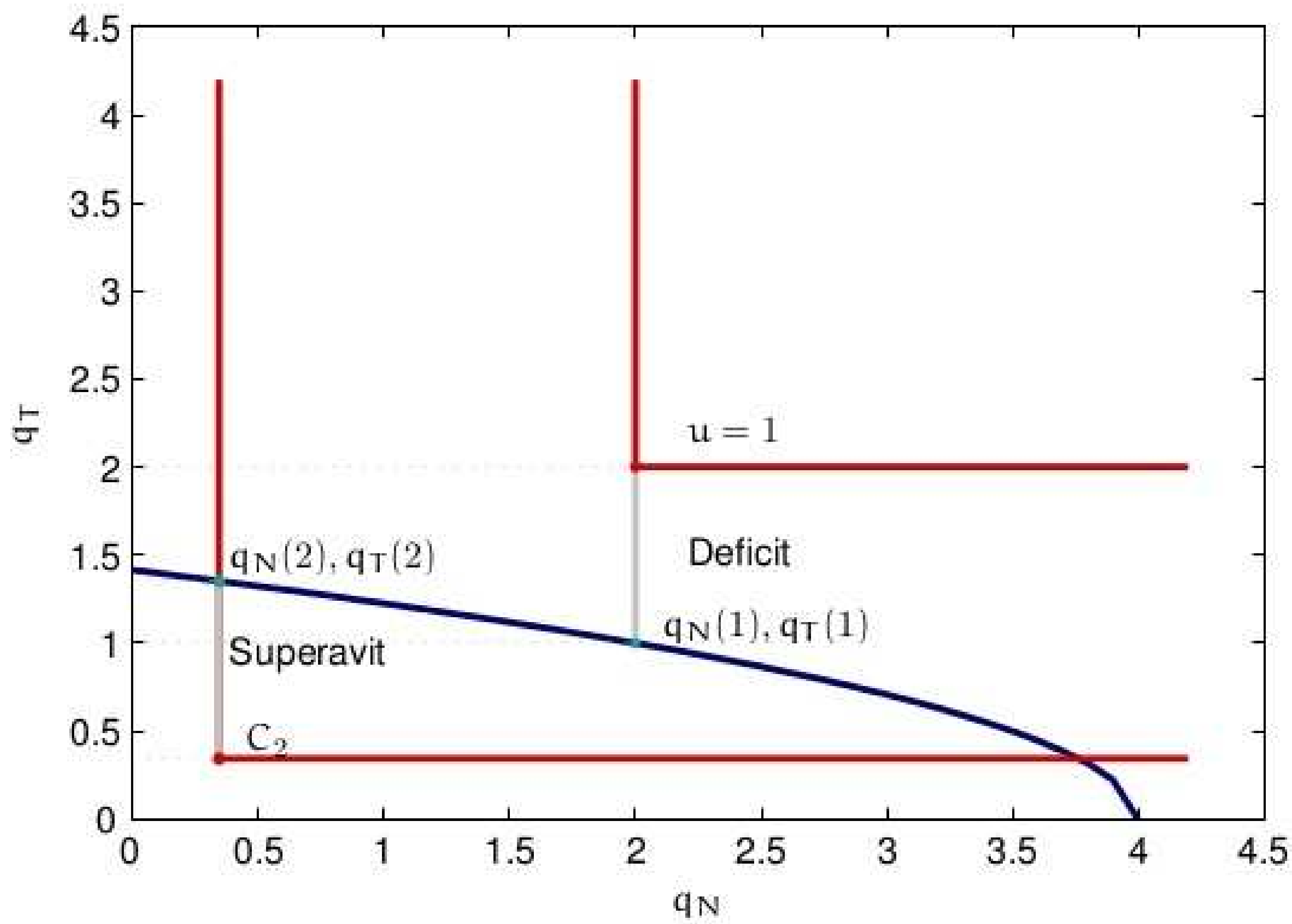
$$q_T = \ell_T^\alpha = (a-1)(1+r) + c_T(2)$$

Pero óptimamente $c_T(2) = c_N(2) = a(2-\ell_T)$. Así, se tiene:

$$\begin{aligned} \ell_T^\alpha &= (a-1)(1+r) + a(2-\ell_T) \\ \ell_T^\alpha + a\ell_T &= (a-1)(1+r) + 2a \end{aligned}$$

Esto define una ecuación no lineal en función de ℓ_T, valor que determina la producción en cada sector, las productividades y finalmente, con lo derivado anteriormente, la balanza comercial y el consumo.

Usando este resultado podemos encontrar la producción óptima para el período 2.



9.4 Tipo de cambio real y tasa de interés internacional.

Respuesta

Esta pregunta la respondemos en dos partes. La primera busca derivar una solución para p, algo de la intuición sobre su determinación y la relación con la tasa de interés. En la segunda parte se deriva la relación entre p y r analíticamente en torno al equilibrio.

Partimos asumiendo una cantidad dada del factor trabajo podemos denotar $\bar{L} = L_T + L_N$. El capital en esta economía no está sujeto a una restricción de cantidad debido a que hay perfecta movilidad de capital y esta estará dado por la tasa de interés internacional y la productividad de ambos sectores del país y L.

En términos de notación, $p = P_N/P_T$ y $k_T = K_T/L_T$. Esto, junto al supuesto de competencia perfecta y libre movilidad de los factores lleva a que se deban cumplir las siguientes ecuaciones:

Sector Transable:

$$\begin{aligned} f'(k_T) = r \Longrightarrow (1-\alpha_T)a_T k_T^{-\alpha_T} &= r \\ a_T k_T^{\alpha_T} - r k_T &= w \end{aligned}$$

Sector No Transable:

$$\begin{aligned} pf'(k_N) = r \Longrightarrow p(1-\alpha_N)a_N k_N^{-\alpha_N} &= r \\ p\left[a_N k_N^{\alpha_N} - r k_N\right] &= w \end{aligned}$$

Donde $k_T = K_T/L_T$ y $k_N = K_N/L_N$. Dado estas ecuaciones y dada la tasa de interés internacional, quedan determinados k_T, w, k_N y el precio relativo p (4 ecuaciones, 4 incógnitas). Como se hace nota en el De Gregorio , p no es afectado por la demanda, sino factores de productividad y la tasa de interés internacional.

Tomando la CPO del capital para el sector transable y despejando para k_T en función de r, tenemos que:

$$k_T = g(r) = \left(\frac{(1-\alpha_T)a_T}{r}\right)^{\frac{1}{\alpha_T}}$$

Por lo que queda determinado k_T por la tasa de interés internacional. Podemos usar esto para calcular el salario de equilibrio en el sector transable, a partir de:

$$\left(\frac{(1-\alpha_T)a_T^2}{r}\right) - \left(\frac{(1-\alpha_T)a_T}{r^{1-\alpha_T}}\right)^{\frac{1}{\alpha_T}} = w$$

Donde vemos que $w = w(r)$ con $w'(r) < 0$.

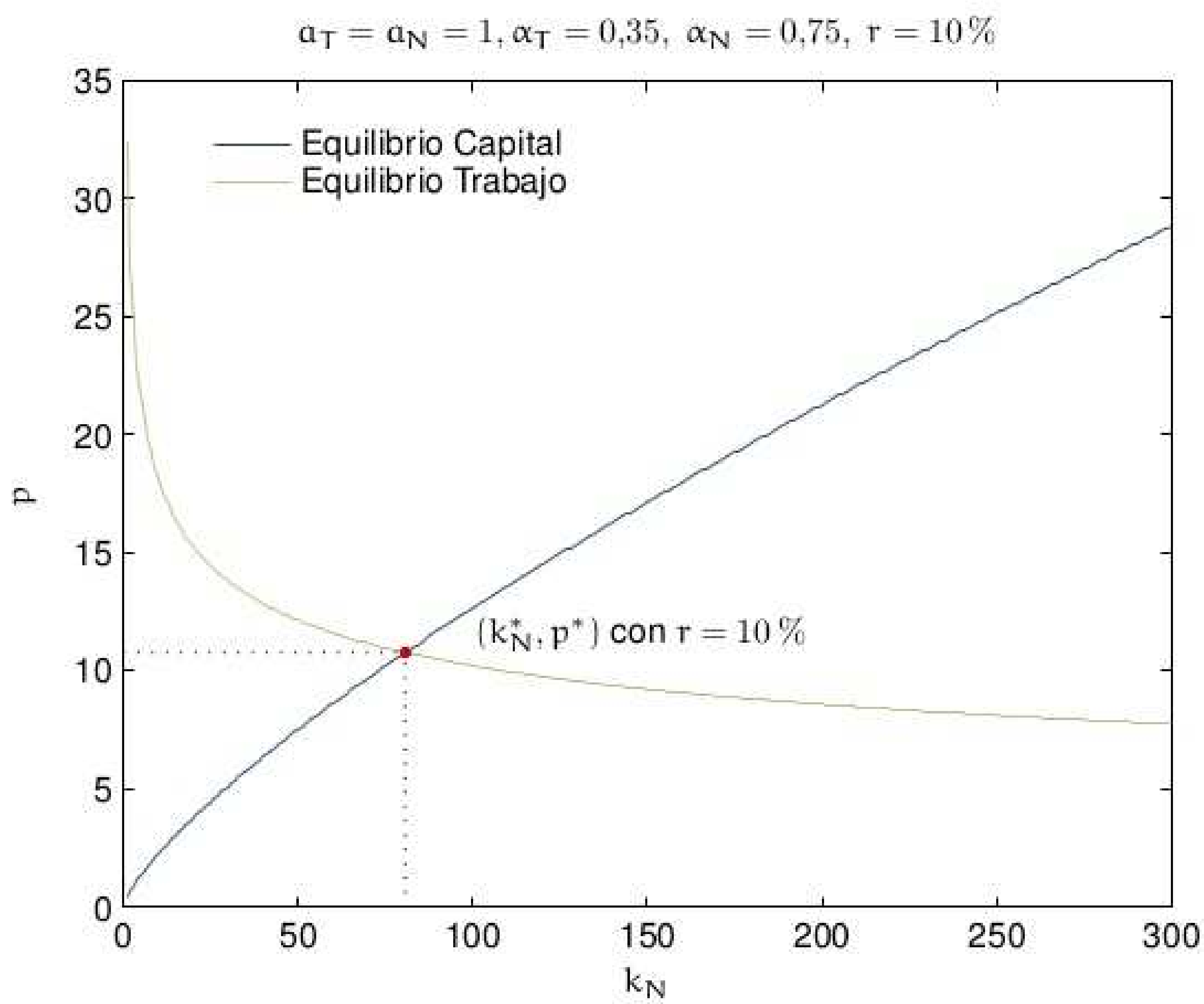
Repitiendo la misma lógica para el sector no transable encontramos que $k_N = k_N(p, r)$.

$$k_N = k_N(r, p) = \left(p\frac{(1-\alpha_N)a_N}{r}\right)^{\frac{1}{\alpha_N}}$$

Dado que existe libre movilidad entre sectores podemos usar lo que sabemos sobre w, para determinar la cantidad de k_N conjuntamente con p.

$$w(r) \;\; = \;\; pk_N \left[a_N \left(\frac{pa_N(1-\alpha_N)}{r} \right)^{\frac{(1-\alpha_N)}{\alpha_N}} - r \right]$$

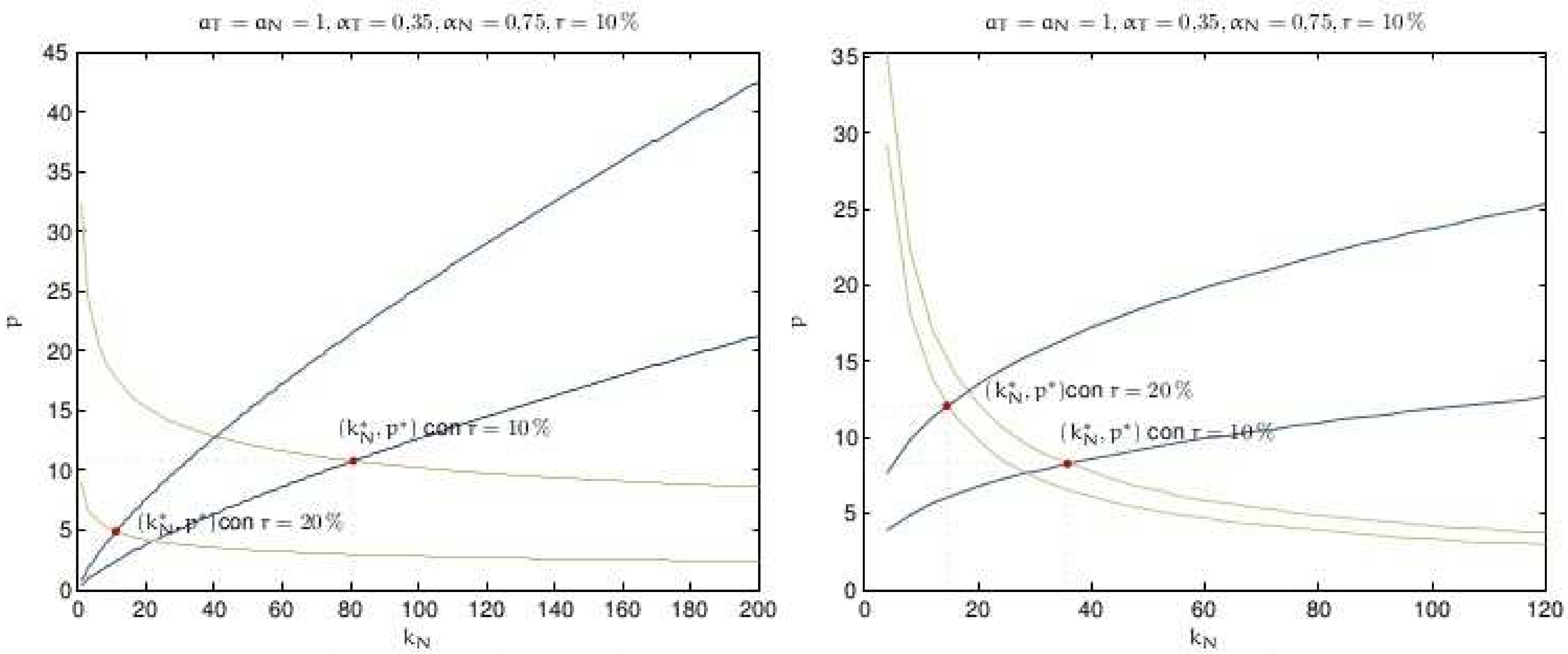
No se puede despejar p en función de r. Sin embargo, con estas últimas dos ecuaciones podemos graficar el equilibrio para k_N y p de la siguiente manera:



El equilibrio en el mercado laboral tiene pendiente negativa debido a que a medida que aumenta k_T, con r constante, aumenta la productividad del trabajo y debe caer el precio de los no transables para mantener el equilibrio entre el valor de la productividad marginal del trabajo en cada sector.

El equilibrio para el capital se da con pendiente positiva debido a que a medida que sube k_T, baja la productividad marginal y dado que r esta fijo debe subir el precio de los no transables para mantener el equilibrio.

Donde ambos cruzan es el equilibrio para p y k_N.



Vemos que dependiendo de los parámetros, los precios relativos p, sube o baja.

Otra forma de ver esto mismo es log diferenciando las condiciones de equilibrio para encontrar la relación entre p y r (en torno al equilibrio):

$$
\begin{aligned}
a_T f(k_T) &= r k_T + w \\
\log(a_T) + \log(f(k_T)) &= \log(r k_T + w) \\
\cancel{\frac{d a_T}{a_T}} + \frac{f'(k_T)}{f(k_T)} dk_T &= \frac{d r k_T}{r k_T + w} + \frac{d k_T r}{r k_T + w} + \frac{dw}{r k_T + w} \\
\frac{r k_T}{f(k_T)} \frac{d k_T}{k_T} &= \frac{dr}{r} \frac{r k_T}{f(k_T)} + \frac{d k_T}{k_T} \frac{k_T r}{f(k_T)} + \frac{dw}{w} \frac{w}{f(k_T)} \\
\frac{dr}{r} \frac{r k_T}{f(k_T)} &= -\frac{dw}{w} \frac{w}{f(k_T)} \\
\frac{dr}{r} \theta_{KT} &= -\frac{dw}{w} \theta_{LT}
\end{aligned}
$$

Donde se usó la condición de cero utilidades. θ_{KT} es la proporción del ingreso que es del capital en el sector transable y θ_{LT} es la proporción del ingreso que es del factor trabajo.

Ahora haciendo lo mismo para la condición de equilibrio en el sector no transable tenemos:

$$
\begin{aligned}
p a_N f(k_N) &= r k_N + w \\
\log(p) + \log(a_N) + \log(f(k_N)) &= \log(r k_N + w) \\
\frac{dp}{p} + \cancel{\frac{da_N}{a_N}} + \frac{f'(k_N)}{f(k_N)} dk_N &= \frac{dr k_N}{r k_N + w} + \frac{dk_N r}{r k_N + w} + \frac{dw}{r k_N + w} \\
\frac{dp}{p} &= \frac{dr}{r}\frac{r k_N}{a_N f(k_N)} + \frac{dw}{w}\frac{w}{a_N f(k_N)} \\
\frac{dp}{p} &= \frac{dr}{r}\theta_{KN} + \frac{dw}{w}\theta_{LN}
\end{aligned}
$$

Remplazando por $\frac{dw}{w}$:

$$
\begin{aligned}
\frac{dp}{p} &= \frac{dr}{r}\theta_{KN} - \frac{dr}{r}\frac{\theta_{KT}}{\theta_{LT}}\theta_{LN} \\
\frac{dp}{p} &= \frac{dr}{r}\left(\frac{\theta_{KN}\theta_{LT} - \theta_{KT}\theta_{LN}}{\theta_{LT}}\right) \\
\frac{dp}{p} &= \frac{dr}{r}\left(\frac{\theta_{KN}(1-\theta_{KT}) - \theta_{KT}(1-\theta_{KN})}{\theta_{LT}}\right) \\
\frac{dp}{p} &= \frac{dr}{r}\left(\frac{\theta_{KN} - \theta_{KT}}{\theta_{LT}}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\frac{dp}{dr} = \frac{p}{r}\left(\frac{\theta_{KN} - \theta_{KT}}{\theta_{LT}}\right)
$$

Usando la forma funcional de $f()$, podemos ver que las participaciones de los factores en el producto son :

$$
\begin{aligned}
\theta_{KN} &= (1 - \alpha_N) \\
\theta_{KT} &= (1 - \alpha_T) \\
\theta_{LT} &= \alpha_T
\end{aligned}
$$

$$
\frac{dp}{dr} = \frac{p}{r}\left(\frac{\alpha_T - \alpha_N}{\alpha_T}\right)
$$

Vemos que la derivada será positiva (como en la figura del panel izquierdo) cuando $\alpha_T > \alpha_N$, esto es, cuando sea más intensivo en capital el sector no transable. Lo opuesto ocurre (como en la figura del panel derecho) cuando $\alpha_T < \alpha_N$.

No es difícil imaginar que el sector no transable será en general más intensivo en trabajo, especialmente en países en desarrollo. De esta manera, el alza de la tasa de interés internacional lleva a que p baje.

11. El Modelo Neoclásico de Crecimiento

11.1 Crecimiento

a.) **Respuesta**
Sabemos que el crecimiento del stock de capital esta dado por la regla de movimiento

$$\dot{K} = I - \delta K$$

Podemos usar los datos entregados para encontrar la tasa de crecimiento del capital:

$$\begin{aligned}
\dot{K} &= I - \delta K \\
\dot{K} &= \frac{I}{Y} Y - \delta K \\
\dot{K} &= 0{,}3Y - \delta K \\
\frac{\dot{K}}{K} &= 0{,}3\frac{Y}{K} - \delta \\
\frac{\dot{K}}{K} &= \frac{0{,}3}{2{,}5} - 0{,}05
\end{aligned}$$

Finalmente encontramos que $\frac{\dot{K}}{K} = 7\,\%$.

b.) **Respuesta**
La función de producción es $Y = AK^{1-\alpha}L^{\alpha}$. Log diferenciando, tenemos

$$\begin{aligned}
Y &= AK^{1-\alpha}L^{\alpha} \\
\frac{\Delta Y}{Y} &= \frac{\Delta A}{A} + (1-\alpha)\frac{\Delta K}{K} + \alpha\frac{\Delta L}{L} \\
0{,}055 &= \frac{\Delta A}{A} + 0{,}4 \times 0{,}07 + 0{,}6 \times 0{,}02
\end{aligned}$$

Donde encontramos que la productividad total de factores x creció en $1{,}5\,\%$.

c.) **Respuesta**
Tomando el resultado anterior, podemos despejar la tasa de inversión en función del crecimiento que buscamos:

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta Y}{Y} &= \frac{\Delta A}{A} + (1-\alpha)\frac{\Delta K}{K} + \alpha\frac{\Delta L}{L} \\
\frac{\Delta Y}{Y} &= \frac{\Delta A}{A} + (1-\alpha)\left[i\frac{Y}{K} - \delta\right] + \alpha\frac{\Delta L}{L} \\
0{,}08 &= 0{,}015 + 0{,}4 \times [i \times 0{,}4 - 0{,}05] + 0{,}6 \times 0{,}02 \\
0{,}053 &= 0{,}4 \times [i \times 0{,}4 - 0{,}05] \\
i &= 0{,}45625
\end{aligned}$$

Lo que, tras despejar la tasa de inversión i nos dice que se debe pasar de $30\,\%$ a aproximadamente $45{,}6\,\%$ para lograr la meta de $8\,\%$ de crecimiento del producto.

d.) **Respuesta**
Las variables agregadas crecen con la eficiencia y la cantidad de personas $n + x/\alpha$.

Las per cápita crecen a x/α.

Dado que $x = 1{,}5\,\%$, $\alpha = 0{,}6$ y $n = 2\,\%$, es trivial encontrar los valores.

El resultado principal de la teoría neoclásica es que el crecimiento se genera mediante la acumulación de capital. Pero al presentar rendimientos decrecientes este factor, en el largo plazo no crecerá en términos per cápita a menos que haya crecimiento de la productividad total de factores, como es en este problema. Pero aún así en este ejercicio, en el corto plazo (crecimiento actual) se crece a una tasa mayor que el largo plazo (incluso por sobre del crecimiento de la productividad total de factores ajustada y de la población), lo que nos dice que la economía se encuentra en una etapa de acumulación de capital antes de alcanzar el estado estacionario.

e.) **Respuesta**
Dado que se trata de una economía cerrada, tener un s de 30 % parece adecuado de acuerdo a la tasa de inversión. Usando la ecuación (11.15) del De Gregorio , tenemos que en el largo plazo la relación entre capital y trabajo es el siguiente:

$$\frac{K}{Y} = \frac{s}{n + \delta + x/\alpha}$$

Lo que reemplazando, con la información que tenemos, nos da una relación capital-producto de $3{,}15$ de largo plazo.

f.) **Respuesta**
Al igual que el caso sin crecimiento de la productividad, tenemos que se debe cumplir que $f' = n + \delta + x/\alpha$. Al reemplazar los datos para los parámetros vemos que $30\,\%$ parece ser más que lo eficiente.

11.2 Cuando los capitalistas ahorran más que los trabajadores.

a.) **Respuesta**
El nivel de k estacionario estará dado por $\dot{k} = 0$ con $\dot{k} = sf(k) - (\delta + n)k$ (ya en términos per capita). Pero antes de eso hay que definir algunas cosas.
Sabemos que $Y = w_K K + w_L L$ y por enunciado $w_K = Pmg_K$, $w_L = Pmg_L$ expresando Y en términos per capita llegamos a

$$\frac{Y}{L} = w_K \frac{K}{L} + w_L$$
$$y = w_K k + w_L$$

Definimos el ahorro $sy = sw_k k$ o más bien $sy = sPmg_k k$ ya que sólo los capitalistas ahorran, ósea el ahorro es parte sólo del ingreso de los capitalistas, por lo tanto el ingreso de los trabajadores no incide en el ahorro de la economía.

Ya podemos calcular el capital de estado estacionario. En la ecuación $\dot{k} = sf(k) - (\delta + n)k$ con $\dot{k} = 0$:

$$sf(k) = (\delta + n)k$$

$$sPmg_k k = (\delta + n)k$$

$$sPmg_k = (\delta + n)$$

$$k^* = (\frac{s\alpha}{\delta + n})^{\frac{1}{1-\alpha}}$$ [1]

Ahora debemos calcular el nivel de capital de regla dorada, el cual se origina de la maximización del consumo:

$$max \;\; c^* = f(k^*) - (\delta + n)k^*$$

Da como solución

$$f'(k^*) = (\delta + n)$$

Por lo tanto,

$$k = (\frac{\alpha}{\delta + n})^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Entonces, si $s = 1$ efectivamente se alcanza el nivel de capital de regla dorada.

b.) **Respuesta**
Los equilibrios dinámicamente ineficientes ocurren cuando el nivel de capital de estado estacionario es mayor al nivel de capital de regla dorada, por lo tanto se ahorra más de lo que se debiera. En este modelo no es posible un estado estacionario con un capital mayor al de regla dorada dado que va a ser el máximo nivel de ahorro que alcanza la economía ($s = 1$, no existe tasa mayor que 1) y esto es natural debido a que los únicos que ahorran en esta economía son los que producen y por lo tanto esto impide que haya un exceso de ahorro que lleve a un equilibrio dinámicamente ineficiente.

11.3 Análisis posguerra.

a.) **Respuesta**
La reducción del capital disminuye el nivel per capita de capital y aumenta su productividad marginal, lo que hará que aumente la tasa de crecimiento del producto per capita pero con un nivel mas bajo. Claramente el bienestar es menor, ya que la economía solo crece más rápido para recuperar lo que perdió, y debido al aumento de la productividad del capital producto de su escaces.

b.) **Respuesta**
Al disminuir la cantidad de mano de obra el nivel de producción agregado cae pero sube el nivel de capital per capita. Esto implica un crecimiento menor en términos per capita.

11.4 Modelo de Solow con migración

[1] De la función Cobb-Douglas $Y = K^\alpha L^\alpha - 1$

a.) **Respuesta**

La ecuación describe los flujos de inmigrantes dándole sentido al porqué se trasladan los trabajadores. Esta ecuación nos dice que a mayor nivel de K mayor es la cantidad de inmigrantes en el país en una razón uno-a-uno. Esto ocurre porque a mayor nivel de capital es mayor el ingreso per cápita del país, lo que lo hace atractivo para el trabajador extranjero aumentando la inmigración. Por otro lado, la ecuación nos dice que a mayor cantidad de trabajadores que hay en el país, L, mas emigran del país en un razón $\bar{k}$. La razón de esto es que a mayor masa laboral los trabajadores empiezan a buscar alternativas en donde trabajar fuera del país y lo hacen en una proporción de $\bar{k}$.

Al ser la función de inmigración lineal, podemos hacer la transformación a per capita sin problemas:

$$m(\frac{K}{L}, 1) = k - \bar{k}$$

Donde $\bar{k}$ corresponde al nivel de capital per capita que hace que no haya inmigración per capita ($m = 0$). Incluir migración a este modelo es similar a hablar de flujo de capital humano debido a que cada traslado de trabajador lleva consigo la llegada o partida de un capital humano acumulado. Por ende movilidad laboral implica cierta movilidad de capitales. El supuesto de este modelo, es que aunque la economía es cerrada, las personas pueden moverse entre ellas. Es decir las personas son mas moviles que el capital físico.

b.) **Respuesta**

Para este modelo, la población crece no solo con los trabajadores sino con los migrantes. La ecuación de migrantes per capita ($m = k - \bar{k}$) está expresada como un flujo, es decir, $m > 0$ cuando el nivel de capital per cápita sea mayor al que hace que $m = 0$, y será negativo, $m < 0$, cuando el nivel de capital per cápita sea menor al nivel que logra $m = 0$. Así, el crecimiento de la población será:

$$\dot{L}/L = n + M/L = n + m$$

Así, el crecimiento de la población se deberá a un crecimiento de los trabajadores proveniente de fertilidad neta y al flujo de inmigrantes.

c.) **Respuesta**

El parámetro k_0 se puede interpretar como la acumulación de capital que lleva consigo el trabajador. Que aunque es capital humano, para este modelo usaremos un capital per capita de referencia, k.

El cambio en el capital doméstico está dado por:

$$\dot{K} = sF(K, L) - \delta K + k_0 M$$

Esto corresponde al planteamiento básico de Solow pero con el nuevo elemento k_0M que es el capital traído por inmigrantes o llevado por emigrantes y que contribuye a $\dot{K}$.

Debido a que sabemos que

$$\dot{k} = \dot{K}/L - (n+m)k$$

y tomando en cuenta que:

$$\dot{K}/L = sf(k) - \delta k + k_0 m$$

podemos obtener la ecuación de movimiento para el capital per cápita:

$$\begin{aligned}
\dot{k} &= sf(k) - \delta k + k_0 m - (n+m)k \\
\dot{k} &= sf(k) - (\delta + n)k - m(k - k_0)
\end{aligned}$$

Aquí operamos como antes pero con la diferencia que la tasa efectiva de depreciación es ahora aumentada por $m(k - k_0)$ si m es mayor a cero y disminuida si m es negativo. La parte mk es el crecimiento de inmigrantes que se consumen parte del capital per cápita, así como lo hace el crecimiento de la población, y por lo tanto se suma a la tasa de depreciación efectiva. Por su lado, mk_0 es el efecto de los inmigrantes netos que traen una cantidad de capital k_0. Esto tiene signo negativo y disminuye la tasa de depreciación efectiva.

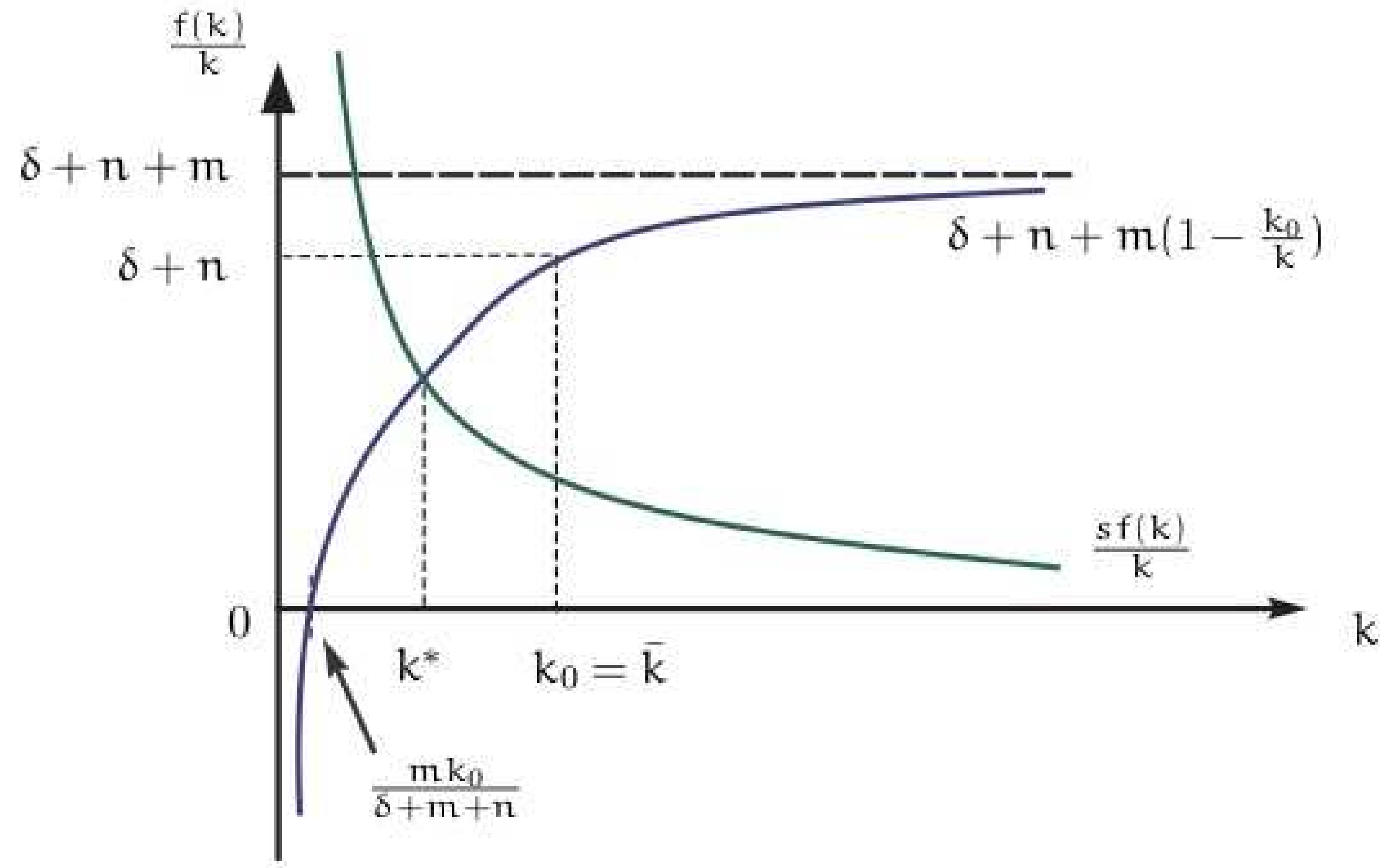
Encontramos el capital de estado estacionario forzando $\dot{k} = 0$ y obtenemos una condición general para este modelo con migración donde m depende positivamente de k:

$$\begin{aligned}
0 &= sf(k) - (\delta + n)k - m(k - k_0) \\
(\delta + n + m)k &= sf(k) + mk_0 \\
k^* &= \frac{sf(k) + mk_0}{\delta + n + m}
\end{aligned}$$

Existe convergencia condicional y ésta depende en gran medida del valor k_0 y así, de cuánto contribuyen los inmigrantes en capital a la economía. Eso es lo que diferencia esta presentación del modelo de Solow frente a otras presentaciones del mismo. Adicionalmente, se tiene que:

$$\begin{aligned}
k = k_0 \Longrightarrow \delta + n + m(1 - \frac{k_0}{k}) = \delta + n + m(1-1) &= \delta + n \\
k = \bar{k} \Longrightarrow m = k - \bar{k} = 0 \Longrightarrow \delta + n + m(1 - \frac{k_0}{k}) &= \delta + n
\end{aligned}$$

Es decir, $k_0 = \bar{k}$, lo que se ratifica en la gráfica siguiente:



En términos de crecimiento, esto queda expresado a continuación.

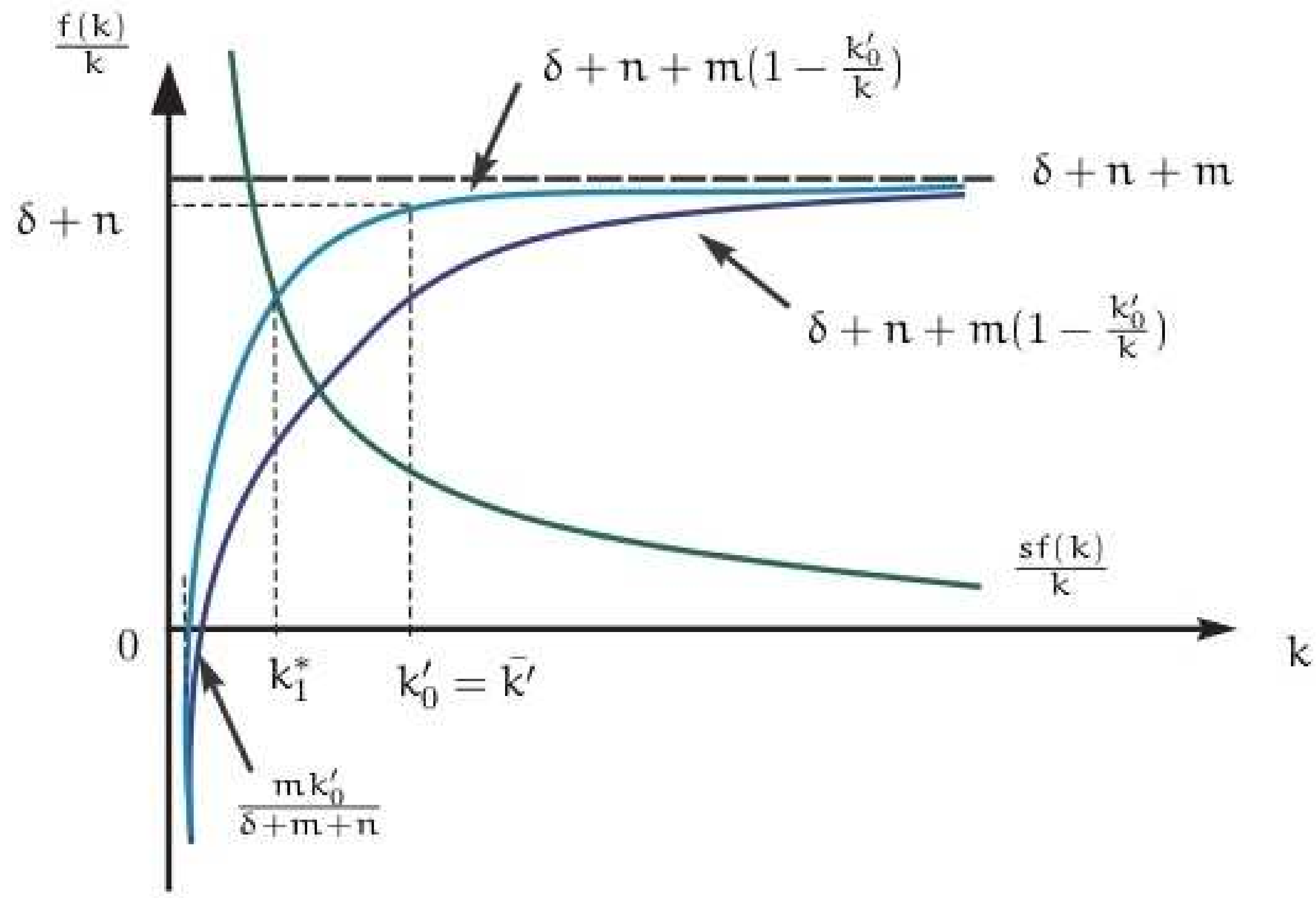
$$\dot{k}/k = s\frac{f(k)}{k} - (\delta+n) - m(1-\frac{k_0}{k})$$

La respuesta positiva de la migración neta al ingreso per cápita implica que la tasa de crecimiento de la población es una función positiva de k. Cuando $k=\bar{k}$ tenemos que $m=0$ y por lo tanto no hay migración y estamos donde estábamos antes. Si $k>\bar{k}$ entonces tenemos un $m>0$ y así migración hacia nuestra economía y por lo tanto la curva efectiva de depreciación se ubica sobre el nivel que habría tenido en el modelo básico de Solow, $\delta+n$. Esto porque m depende positivamente de k. A su vez, si $k<\bar{k}$ la curva de depreciación efectiva se ubica debajo de $\delta+n$. Finalmente el crecimiento del capital per cápita se ve en la diferencia entre estas dos curvas.

Sin embargo, es relevante apreciar que el desplazamiento del nivel de capital de estado estacionario depende de las variables del modelo. Así, una inmigración (o una emigración) puede significar un desplazamiento del estado estacionario, tanto a la izquierda como a la derecha, todo dependiendo de su posición previa en relación a k y k_0 y del valor de m, δ y n. En este panorama, entonces, es que no se puede asegurar si el efecto de la migración es positiva para la economía, pues los efectos son ambiguos y característicos de cada país.

d.) **Respuesta**

Para un nuevo nivel $k_0'<k_0$, se produce un desplazamiento de la curva $\delta+n+m(1-\frac{k_0'}{k})$, lo que genera una nueva condición de migración, determinada por $\bar{k}'<\bar{k}$, con lo que la tasa de depreciación efectiva es menor a la del caso básico inicial del modelo de Solow y nuestro estado estacionario cae. De esta forma, el crecimiento del capital per cápita es menor porque hay menos contribución de inmigrantes en capital para la economía aumentando la tasa de depreciación efectiva. Por lo tanto seguimos teniendo convergencia condicional en el sentido que países más cerca (lejos) de su estado estacionario crecen más lento (rápido). Lo que cambia es la convergencia, ya que el nivel del estado estacionario ahora es menor.



e.) **Respuesta**

Derivando la expresión del estado estacionario vemos que:

$$\frac{\partial k^*}{\partial k_0} = \frac{m}{\delta + n + m}$$

Si tomamos a $m > 0$, es decir, hay un flujo neto de inmigrantes positivo, un aumento de la cantidad de capital que traen (k_0) conlleva a tener un estado estacionario mayor y viceversa. Esto se produce porque al ser mayor la cantidad de capital que traen, contribuyen a la acumulación de capital de la economía, aumento del ingreso per cápita y disminución de la tasa de depreciación efectiva.

11.5 Modelo de Solow con deuda pública.

a.) **Respuesta**

El rol de los bonos en esta economía es esconder parte del ahorro de los hogares en algo que no se use para acumular capital. Dado que el gobierno no lo ahorra, es como si a cada nivel de capital se acumula menos capital debido a que parte se destina a financiar el gobierno no productivo.

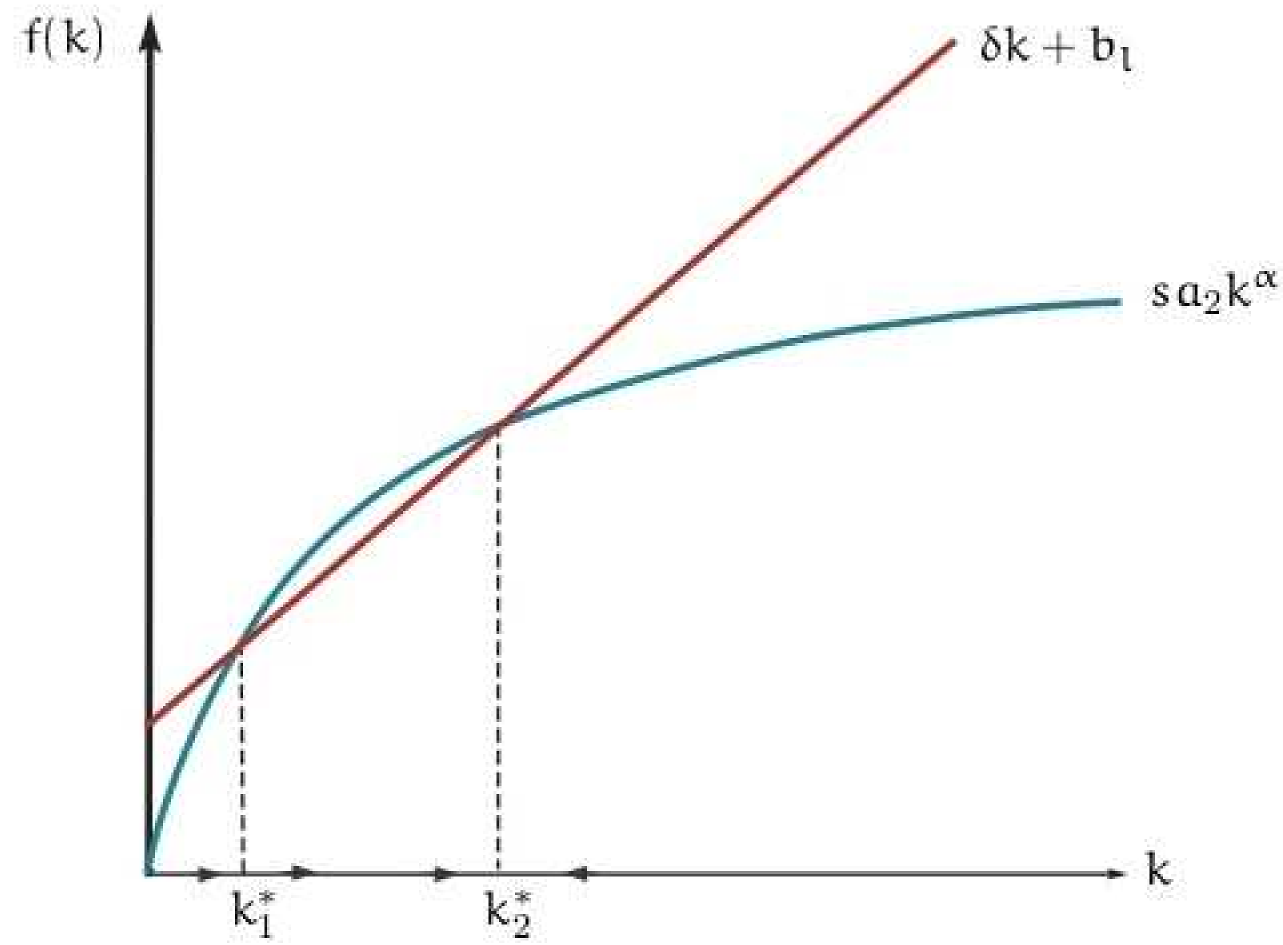
La restricción presupuestaria del individuo es:

$$y = c + i + b$$

donde b es el nivel de deuda pública per-cápita de los habitantes del país. Reescribiendo esta ecuación obtenemos:

$$\dot{k} = sf(k) - \delta k - b$$

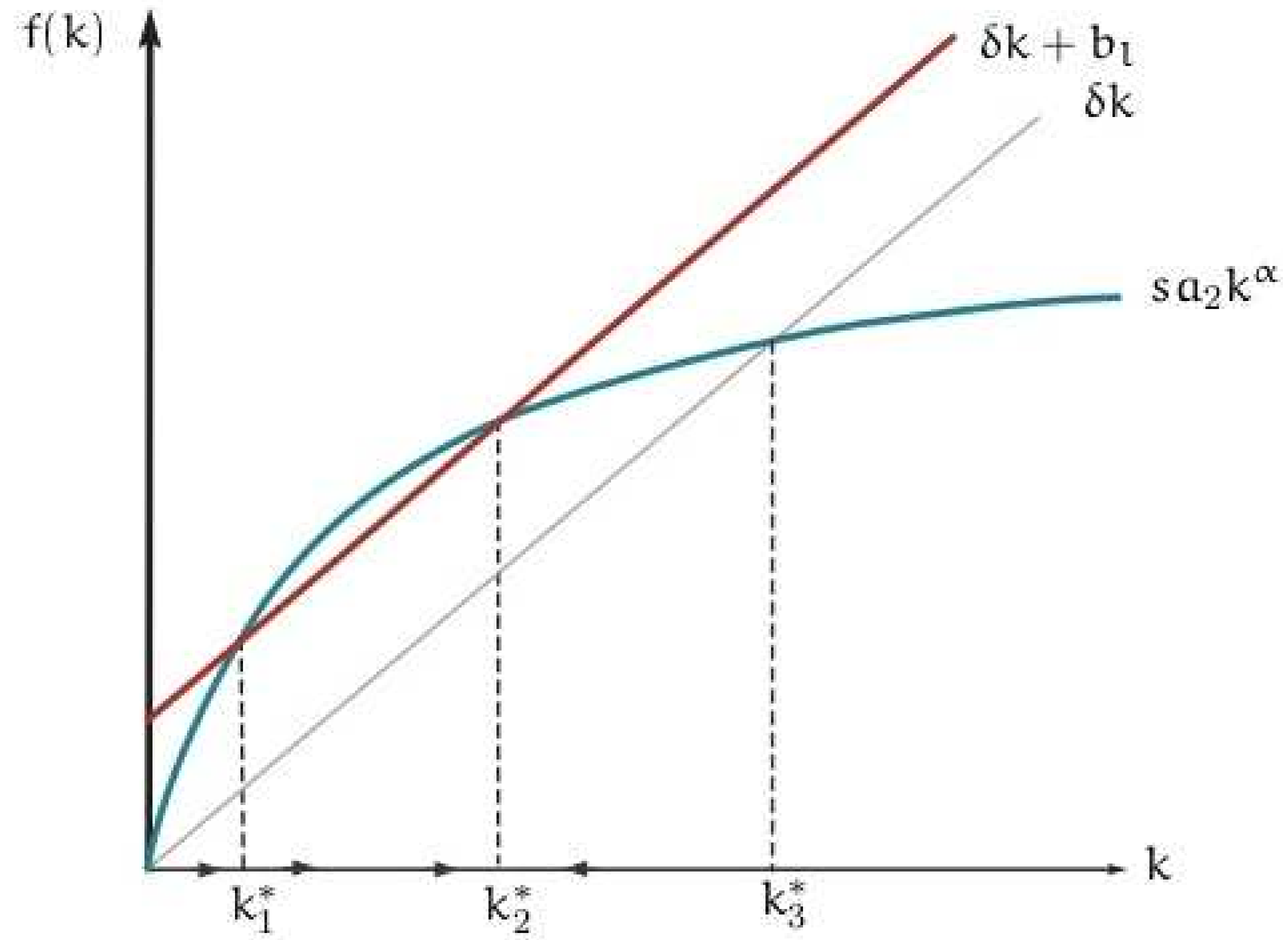
Gráficamente se obtiene que hay dos estados estacionarios:



Vemos que solo el segundo equilibrio es estable en k_2^*. La intuición es que si un país se encuentran es k_1 y recibe una donación de capital que lo desplaza de k_1 a la derecha, la dinámica del crecimiento lo llevará al nuevo estado estacionario de k_2, esto porque el ahorro va a ser mayor que la depreciación y la deuda pública lo que lleva al país a acumular capital.

Sin embargo esto no sucede para países que se encuentran en k_2^*, donde la restricción de los rendimientos decrecientes impide que siga acumulándose el capital al estar restringido por la depreciación de éste y la deuda pública. Por lo tanto el único estado estacionario estable es el k_2^*.

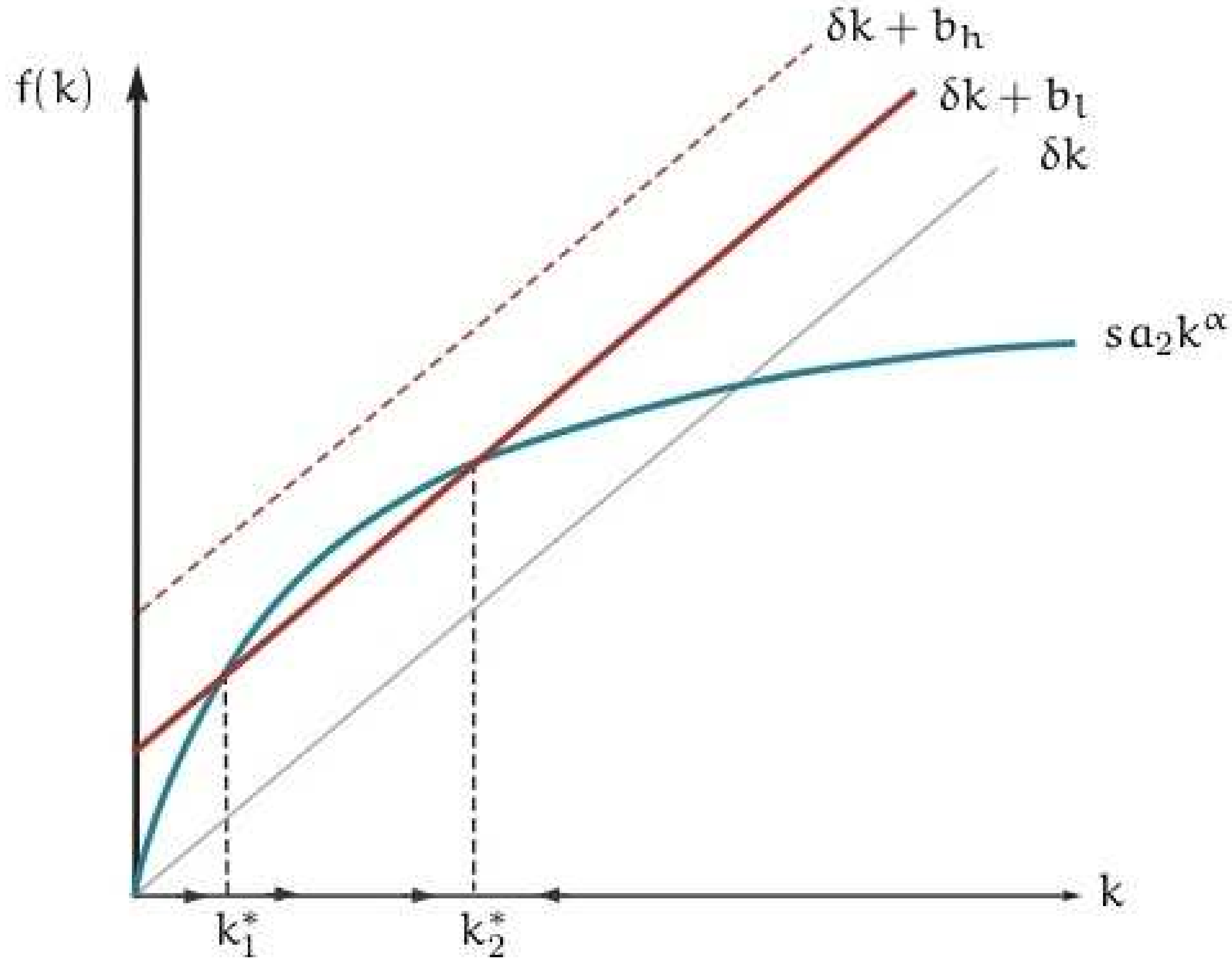
b.) **Respuesta**
Es trivial ver graficamente que si se utilizara todo los recursos no consumidos en cada período en acumular capital, entonces se llegaría al punto $k_3^* > k_2^*$.



La intuición es que la deuda pública produce un "crowding out" de la inversión, reduciendo de esta forma la acumulación de capital. Es decir, lo que se acumularía con el ahorro sería absorbido en parte por la exigencia de la deuda pública lo que restringiría la acumulación de capital. Obviamente el supuesto clave es que la deuda publica este financiando una actividad no productiva.

c.) **Respuesta**

Para valores grandes de b, se puede ver del gráfico anterior, la linea $\delta k + b_2$ es suficientemente alto que no existe ningún equilibrio. El ahorro no es suficiente para mantener ningún nivel de stock de capital o lo que es lo mismo, la deuda absorbe completamente la capacidad del ahorro de acumular capital, por lo que el equilibrio es $k = 0$.



11.6 Crecimiento e impuestos

a.) Respuesta

$$
\begin{aligned}
y &= c + i + g && (12.1)\\
f(k) &= (1-s)(1-\tau)f(k) + \dot{k} + \delta k + \tau f(k) && (12.2)
\end{aligned}
$$

lo que termina siendo:

$$\frac{\dot{k}}{k} = (1-\tau)sAk^{-\alpha} - \delta \qquad (12.3)$$

Esta ecuación se podría derivar directamente de ahorro $[(1-\tau)sf(k)]$ igual inversión $[\dot{k} + \delta k]$.

b.) Respuesta

Despejando para k de la ecuación (12.3)

$$
\begin{aligned}
k^* &= \left[\frac{s(1-\tau)A}{\delta}\right]^{1/\alpha} && (12.4)\\
y^* &= Ak^{*(1-\alpha)} = A\left[\frac{s(1-\tau)A}{\delta}\right]^{(1-\alpha)/\alpha} && (12.5)
\end{aligned}
$$

y para c^*:

$$
\begin{aligned}
c^* &= f(k^*) - \delta k^* - \tau f(k^*) \\
&= (1-\tau)f(k^*) - \delta k^* \\
&= \frac{[(1-\tau)A]^{1/\alpha}}{\delta^{(1-\alpha)/\alpha}}\left(s^{(1-\alpha)/\alpha} - s^{1/\alpha}\right) \qquad (12.6)
\end{aligned}
$$

c.) **Respuesta**
A mayores impuestos, menor será el κ de largo plazo, o sea, la economía que tiene menos impuestos crece mas rápido, esto se ve claramente pues acumula capital mas rápido que la otra economía. Sumado a esto τ reduce el ingreso disponible de las personas, con ello el ahorro y la inversión de la economía son menores, lo que reduce el crecimiento para la economía con más impuestos.

d.) **Respuesta**
Sabemos que para una economía sin impuestos ni gasto del gobierno el κ^{RD} se da cuando se maximiza el consumo:

$$\text{Máx} \quad c^* = f(\kappa^*) - \delta\kappa$$

$$\text{Máx} \quad c^* = A\kappa^{1-\alpha} - \delta\kappa$$

$$\frac{\partial c^*}{\partial \kappa} = (1-\alpha)A\kappa^{-\alpha} - \delta = 0$$

$$\kappa^{RD} = \left(\frac{(1-\alpha)A}{\delta}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

Ahora tenemos que encontrar τ, tal que κ encontrado en b., sea igual al κ^{RD}.

$$\kappa^* = \kappa^{RD}$$

$$\left(\frac{s(1-\tau)A}{\delta}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \left(\frac{(1-\alpha)A}{\delta}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$1-\tau = \frac{1-\alpha}{s}$$

$$\tau = \frac{s+\alpha-1}{s}$$

Si $s+\alpha$ es menor que 1, para poder encontrar lo pedido el monto debería ser un subsidio.

e.) **Respuesta**

Derivando la ecuación (12.6) con respecto a τ llegamos a:

$$\tau = \frac{\epsilon}{1+\epsilon} \tag{12.7}$$

La intuición de por qué τ no es cero, radica en que el impuesto contribuye a la productividad de las empresas. Básicamente si no hay impuestos no hay infraestructura para la producción.

12. El Modelo de Crecimiento: Extensiones

12.1 Modelo de Solow y trampas de pobreza.

a.) **Respuesta**

Utilizando ecuación (12.19) del De Gregorio para despejar $\tilde{k}$,

$$\begin{array}{rcl} a_1 < & \tilde{k}^{1-\alpha}(\delta/s) & < a_2 \\ \frac{sa_1}{\delta} < & \tilde{k}^{1-\alpha} & < \frac{sa_2}{\delta} \\ \left(\frac{sa_1}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} < & \tilde{k} & < \left(\frac{sa_2}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \end{array}$$

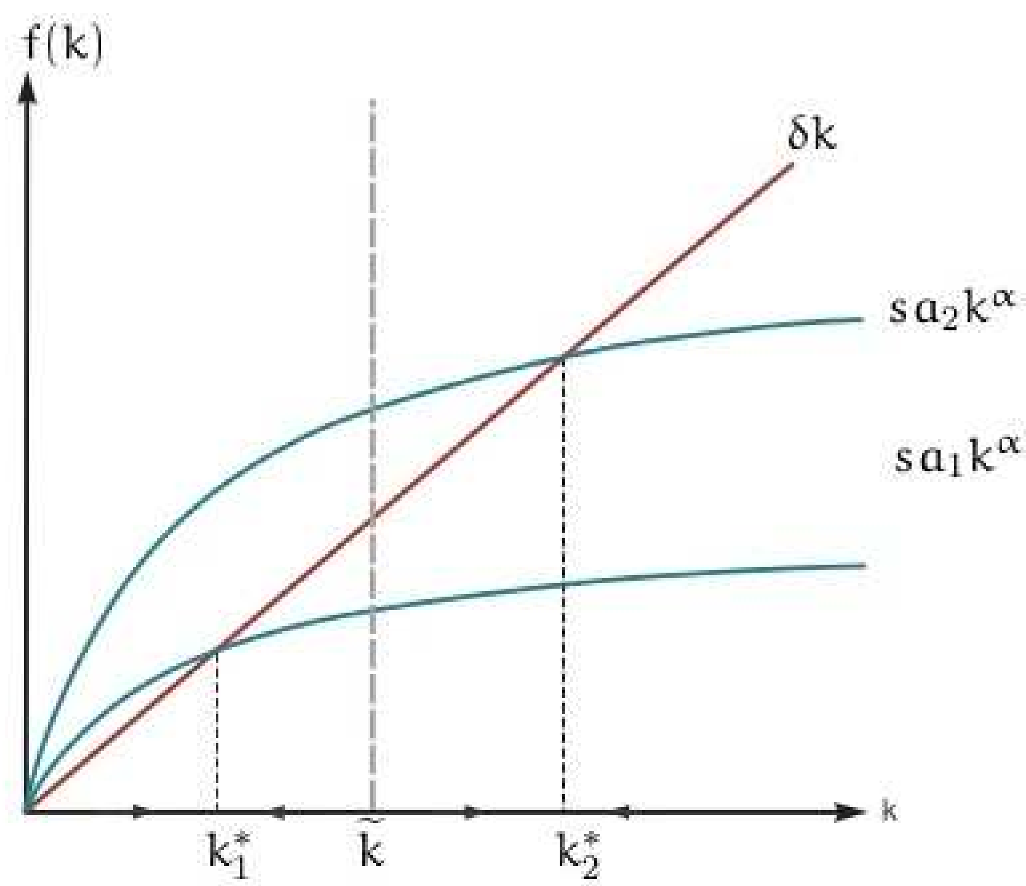
El capital de estado estacionario para el caso general es:

$$\begin{aligned} \dot{k} &= sy - \delta k \\ 0 &= sak^{\alpha} - \delta k \\ \delta k &= sak^{\alpha} \\ \delta &= sak^{\alpha-1} \\ k^* &= \left(\frac{sa}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \end{aligned}$$

Luego, $\tilde{k}$ se encuentra entre,

$$k_1^* < \tilde{k} < k_2^*$$

Esto nos garantiza que existirán dos estados estacionarios.



Obtenemos el producto de estado estacionario para el caso general

$$
\begin{aligned}
y &= ak^{\alpha} \\
y^* &= a\left(\frac{sa}{\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \\
y^* &= a^{\frac{1}{1-\alpha}}\left(\frac{s}{\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}
\end{aligned}
$$

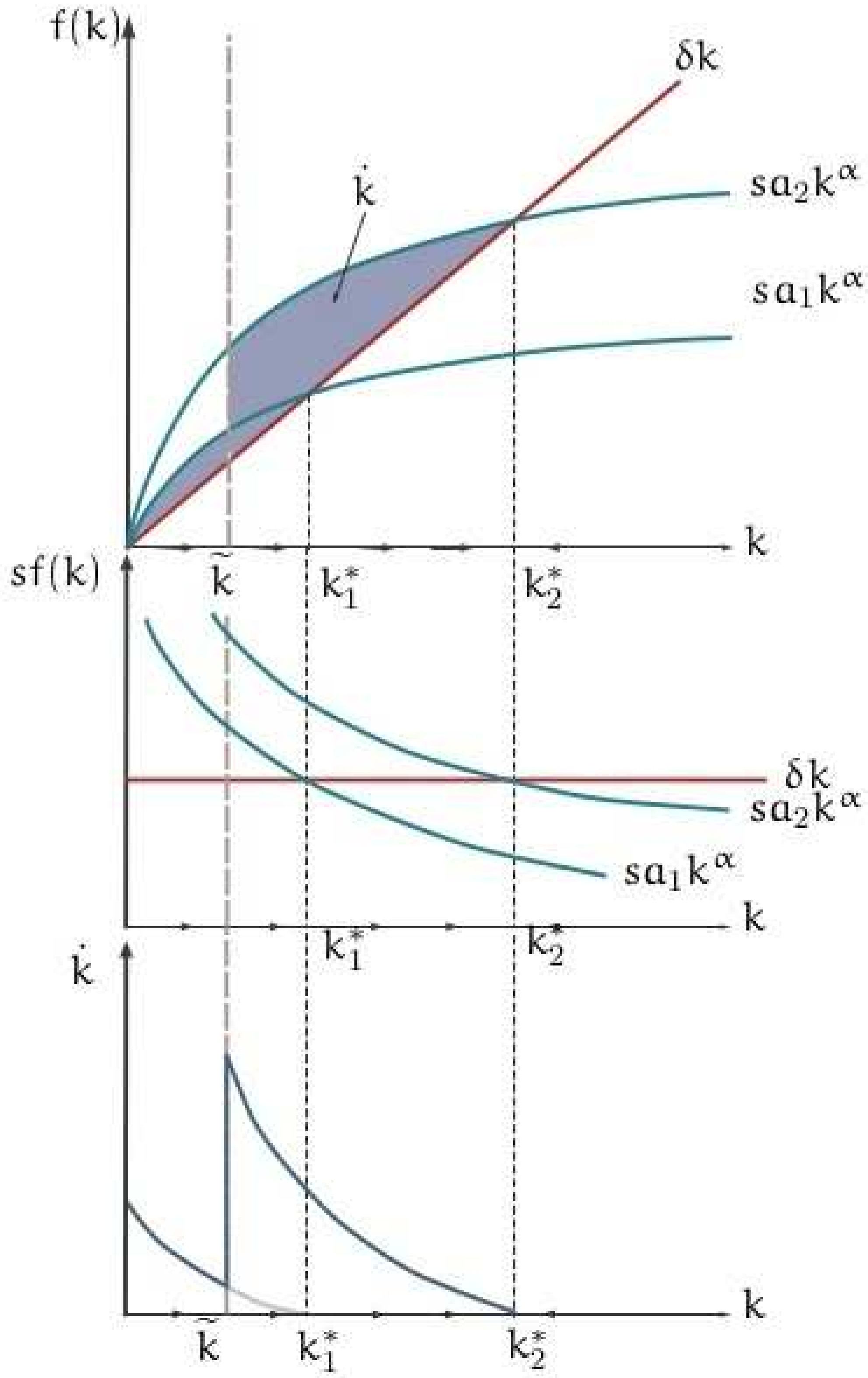
Si reemplazamos los valores de a para cada caso, tenemos que

$$
\begin{aligned}
y_1^* &= a_1^{\frac{1}{1-\alpha}}\left(\frac{s}{\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \\
y_2^* &= a_2^{\frac{1}{1-\alpha}}\left(\frac{s}{\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}
\end{aligned}
$$

Para averiguar que sucede si cambiamos la restricción, utilizamos los resultados anteriores y obtenemos:

$$
\begin{aligned}
\tilde{k}^{1-\alpha}(\delta/s) < a_1 < a_2 \\
\tilde{k} < k_1^* < k_2^*
\end{aligned}
$$

Ahora, ambos estados estacionarios son mayores que $\tilde{k}$, esto hace que exista un solo equilibrio,k_2^*, porque ahora existirá un único valor alcanzable para a.

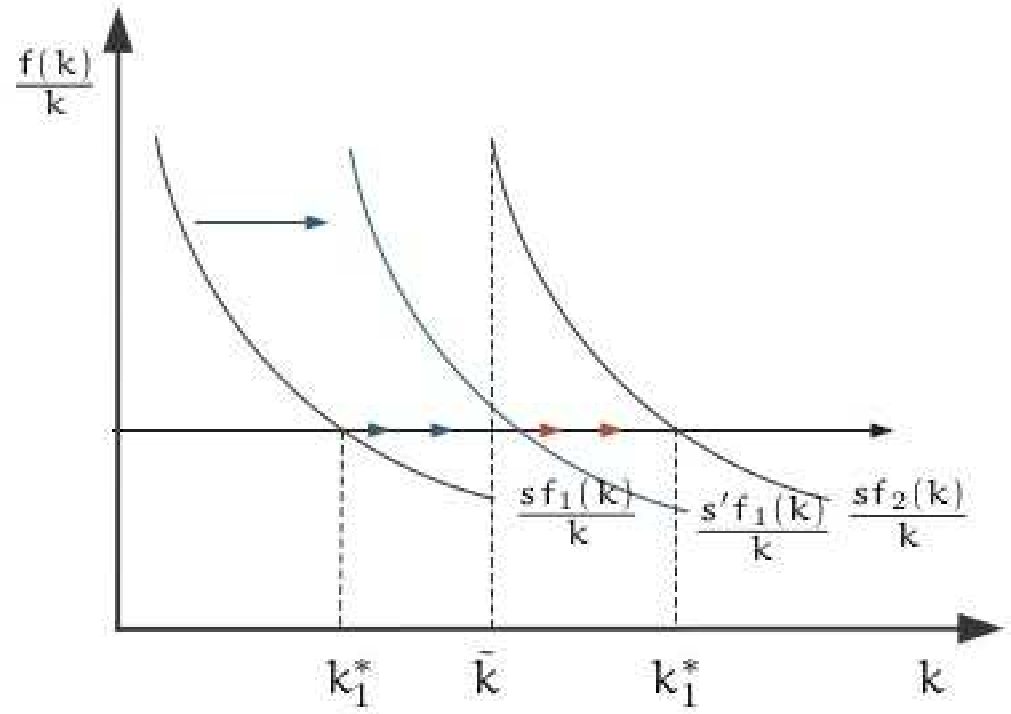


b.) **Respuesta**

Suponiendo que estamos en el estado estacionario de bajo ingreso, tenemos que

$$k_1^* < \tilde{k}$$
$$\left(\frac{sa_1}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} < \tilde{k}$$

Como podemos observar, un aumento en la tasa de ahorro s hará que el capital de estado estacionario de bajo ingreso aumente. Si s aumenta lo suficiente, incluso transitoriamente, como para hacer que $k_1^* > \tilde{k}$, esta economía saldrá de la trampa de pobreza.

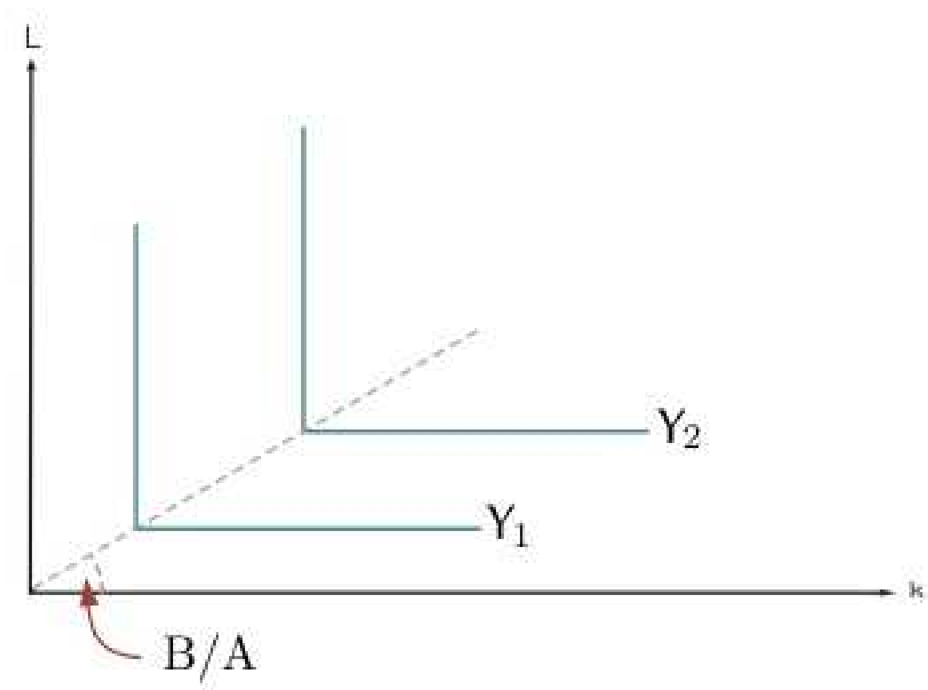


Un aumento en la tasa de ahorro significativo mueve k_1^*, haciendo que sea mayor que $\bar{k}$ (en azul). Luego, como estamos en la zona de "alta" productividad, el nuevo estado estacionario es k_2^*, por lo que la economía crece hasta llegar a este punto (en verde).

12.2 La controversia de Harrod-Domar

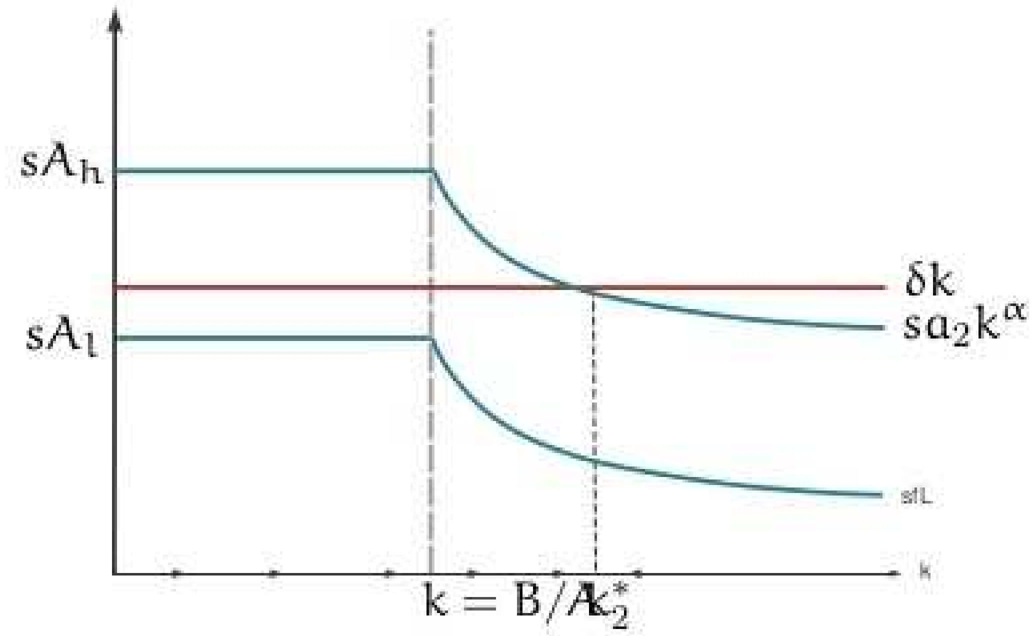
a.) **Respuesta**

Podemos ver $Y = \text{mín}(AK, BL)$ en términos per capita como $y = \text{mín}(Ak, B)$ y vemos que en este modelo habrán recursos ociosos en la medida que estemos fuera del vértice de la isocuanta dada en la figura abajo.



Esto implica si no estamos en la razón exacta habrán recursos ociosos. Las implicancias para el estadio estacionario es que debemos caer justo en $sy = (\delta + n)k$ donde se de esta razón.

De otra forma $s\,\text{mín}(Ak, B)/k = (\delta + n)$ en el estado estacionario y para que existan recursos ociosos debe ser cierto que $k = B/A$ al mismo tiempo. Estudiamos dos casos en la siguiente figura.



Tenemos que el capital al comienzo no tiene rendimiento decreciente y $sf(k)/k = sA$ donde ($k < B/A$) pero eventualmente comienza caer dado que después de que $k < B/A$ y $sf(k)/k = sB/k$, donde la unidad adicional de capital no afecta la producción y cae monotonicamente el producto marginal.

Si el ahorro es muy alto, $sf(k)/k$ cruza $n + \delta$ pero en algún lugar donde $k > B/A$.(tuvo que bajar!)

Si el ahorro es muy bajo nunca cruza y el capital per capita tiende a cero y el desempleo aumenta para siempre.

La única forma de evitar ambos escenarios es partir justo con $sA = \delta + n$ y así cuando $k = B/A$, se queda ahí la economía y ningún recurso queda ocioso.

b.) **Respuesta**
Harrod y Domar pensaban que lo mas probable era que la economía no estuviera justo en ese punto ya que los parámetros eran todos exógenos. Sin embargo en la vida real, el ahorro es endógeno y la productividad marginal del capital probablemente depende de la cantidad de capital, por lo que no es tan raro pensar que justo estemos en el caso que menciona H-D como improbable!

12.3 Crecimiento endógeno o exógeno.

a.) **Respuesta**
Para calcular el crecimiento del capital en términos per-cápita debemos escribir las ecuaciones en términos per cápita. En tal caso, tenemos que la ecuación para el producto se puede reescribir como

$$\begin{aligned} \frac{Y}{L} &= A\frac{K}{L} + B\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha}\left(\frac{L}{L}\right)^{1-\alpha} \\ y &= f(k) = Ak + Bk^{\alpha} \qquad (13.1) \end{aligned}$$

Por otra parte, sabemos que el producto Y puede ser escrito como $Y = C + I + G$. En este caso no hay gobierno, así que esta relación queda como

$$Y = (1-s)Y + \dot{K} + \delta K$$

lo que nos lleva a la ecuación de inversión típica:

$$sY = \dot{K} + \delta K \tag{13.2}$$

La ecuación (13.2) puede escribirse en términos per cápita como

$$sf(k) = \frac{\dot{K}}{L} + \delta k$$

Recordando que

$$\begin{aligned}\frac{\dot{K}}{L} &= \left(\frac{\dot{K}}{L}\right) + \frac{\dot{L}}{L}\frac{K}{L} \\ &= \dot{k} + nk\end{aligned}$$

y despejando $\dot{k}$ tenemos finalmente que

$$\dot{k} = sf(k) - (n+\delta)k \tag{13.3}$$

Combinando la ecuación (13.3) con la ecuación (13.1) podemos escribir γ_k.

$$\gamma_k = \frac{\dot{k}}{k} = sA + \frac{sB}{k^{1-\alpha}} - (n+\delta) = sA - (n+\delta) + \frac{sB}{k^{1-\alpha}} \tag{13.4}$$

De la ecuación (13.4) vemos que la tasa de crecimiento tiene 2 componentes. En primer lugar hay un factor constante de crecimiento dado por $sA-(n+\delta)$. En segundo lugar, hay un factor $\frac{sB}{k^{1-\alpha}}$ que, a medida que aumenta k, se hace cada vez menor, teniéndose que si $k \to \infty$ entonces $\gamma_k = sA - (n+\delta)$ que es mayor que cero, por lo que sabemos que k siempre aumentará a esa tasa sin llegar a un estado estacionario.

b.) i. **Respuesta**
Definiendo

$$\gamma_{k_0} = sA - (n+\delta) + \frac{sB}{k^{1-\alpha}}$$

tenemos que al variar s de $s \to s + \Delta s$, podemos calcular

$$\gamma_{k_1} = (s+\Delta s)A - (n+\delta) + \frac{(s+\Delta s)B}{k^{1-\alpha}} = \gamma_{k_0} + \Delta s\left[A + \frac{B}{k^{1-\alpha}}\right]$$

es decir, γ_k aumenta en $\Delta s\left[A + \frac{B}{k^{1-\alpha}}\right]$, valor que disminuye a medida que aumenta k, convergiendo a un aumento en el largo plazo de $\Delta s \times A$. Es decir, es un aumento permanente.

ii. **Respuesta**
En este caso varía n de $n \to n - \Delta n$, con lo que podemos calcular

$$\gamma_{k_2} = sA - (n - \Delta n + \delta) + \frac{sB}{k^{1-\alpha}} = \gamma_{k_0} + \Delta n$$

Es decir, la tasa de crecimiento del capital aumenta y lo hace de forma permanente (porque el capital no converge a estado estacionario).

c.) **Respuesta**

El modelo tradicional de Solow tiene como función de producción $f(k) = Bk^{\alpha}$, lo que equivale a considerar que $A = 0$. Con esto, de la ecuación (13.4) tenemos que

$$\gamma_k = \frac{sB}{k^{1-\alpha}} - (n + \delta)$$

Se ve que, para un valor dado de k, la tasa de crecimiento del capital aumentará cuando aumente s o disminuya n. Sin embargo, este valor de todas formas converge a cero cuando se alcanza el nivel de estado estacionario para el capital, momento en el cual se cumple

$$k^* = \left[\frac{sB}{n + \delta}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Luego, si aumentamos s o disminuimos n lo que se logra es aumentar el nivel de capital de estacionario, valor en el que se permanecerá cuando sea alcanzado, llegando a una tasa de crecimiento del capital igual a cero. Es decir, en este caso el aumento es transitorio.

d.) i. **Respuesta**

Sí existe crecimiento endógeno. Este modelo se llama *Sobelow*, que es un cruce entre el modelo de Solow-Swan y de Rebelo. Existe crecimiento endógeno porque no es necesario un shock externo de productividad total para que en el largo plazo haya crecimiento. Sin embargo, hay que notar que la condición para que haya crecimiento de largo plazo es que $sA \geqslant n + \delta$, es decir, que la tecnología sea lo suficientemente grande.

ii. **Respuesta**

Un país pobre tendrá stock de capital menor. Esto significará que el país pobre crecerá a una tasa de crecimiento mayor que la del país rico. Sin embargo, en el largo plazo, ambos países, ricos y pobres crecerán a la tasa γ_k encontrada en la primera parte. La diferencia es que el país rico probablemente tendrá un desarrollo tecnológico mayor, por lo que $A_{rico} > A_{pobre}$. Por lo que el país rico aún así seguirá creciendo a tasas mayores.

12.4 Crecimiento con tasa de ahorro variable.

a.) **Respuesta**

Sabemos que el ingreso es igual al consumo mas la inversión y que la variación del capital debe ser igual a la variación de la inversión (que corresponde al ahorro) menos la depreciación del capital, por lo tanto tenemos que:

$$\begin{aligned} y &= c + i \\ \dot{k} &= sy - \delta k \\ \dot{k} &= s(k)f(k) - \delta k \end{aligned}$$

Existen tres equilibrios uno de los cuales es $y = k = 0$

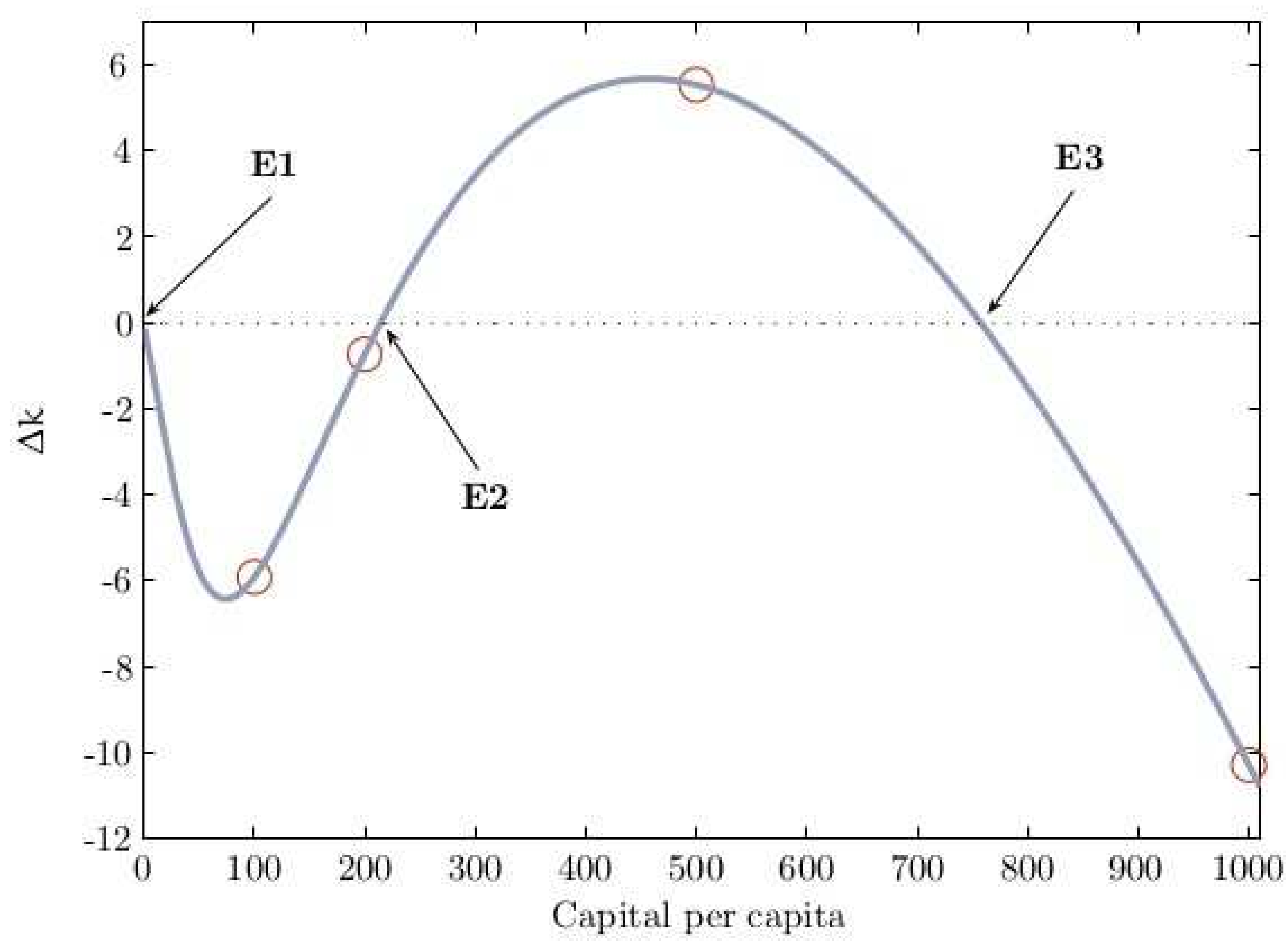
b.) **Respuesta**

Como ahora $s = s(k)$, o sea el ahorro depende de k, lo que vamos a obtener al despejar $\dot{k}$ es que este ya no depende del parametro s, si no que queda expresada en k, como se puede ver en el caso de Etiopia:

$$\dot{k} = s(k)f(k) - \delta k$$
$$\dot{k} = (\frac{k}{k+20})^{10} 5k^{0,5} - 0,14k$$

Luego en el caso en que $k = (0, 100, 200, 500, 1000)$ tenemos que:

$$\begin{aligned} k &= 100 \quad & \dot{k} &= -5,9 \\ k &= 200 \quad & \dot{k} &= -0,24 \\ k &= 500 \quad & \dot{k} &= 5,53 \\ k &= 1000 \quad & \dot{k} &= -10,30 \end{aligned}$$



c.) **Respuesta**

El equilibrio 1 con $k = 0$, es estable pues si el capital es un poco mayor que 0 ahorro menos que lo que se deprecia, o visto en forma más matemática $\dot{k}$ es negativo, y por lo tanto me muevo en la dirección que retorna al equilibrio. El equilibrio 2 es inestable y el 3 es estable, los argumentos son del mismo tipo que para el equilibrio 1.

d.) **Respuesta**
Si el préstamo hacienda a 100, no servirá para sacar a Etiopía de su situación, pues como el ahorro será menor que la depreciación en el largo plazo volverán al equilibrio $y = k = 0$

e.) **Respuesta**
Si el préstamo hacienda a 300, El ahorro será mayor que la depreciación, y el capital aumentará para llegar en el largo plazo al equilibrio 3, superando así Etiopía su trampa de pobreza.

13. Evidencia Empírica

13.1 Salarios y retorno al capital en el modelo de Solow.

a.) **Respuesta**
Las expresiones

$$r = \frac{\partial F}{\partial K}$$
$$w = \frac{\partial F}{\partial L}$$

sólo se dan bajo competencia perfecta.

b.) **Respuesta**
Tenemos que $Y = F(K, L) = LF(K, 1) = Lf(k)$, por lo tanto derivando respecto a L tenemos que

$$\frac{\partial F(K, L)}{\partial L} = w = f(k) - Lf'(k)\frac{K}{L^2} = f(k) - kf'(k).$$

Por otra parte tenemos que si:

$$\max_{\{K\}} F(K, L) - rK - wL$$

factorizando por L obtenemos que:

$$\max_{\{k\}} L(f(k) - rK - w)$$

La condición de primer orden es $f'(k) = r$.

c.) **Respuesta**
Sabemos que la función tiene retornos constantes a escala, es decir:

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L)$$

derivando respecto a λ obtenemos que:

$$F_K K + F_L L = F(K, L)$$

sabemos que bajo competencia se tiene que $r = F_K$ y $w = F_L$. Por lo tanto, bajo los supuestos de competencia perfecta se tiene:

$$rK + wL = F(K, L)$$

d.) **Respuesta**

Sabemos que el pago del capital esta dado por $r = f(k)$. Para determinar qué sucede con éste pago cuando la economía se aproxima al estado estacionario, derivamos esa expresión respecto a k. Esto nos da:

$$\frac{\partial r}{\partial k} = f''(k) < 0$$

es decir a medida que mantenemos fijo el stock de trabajo y aumentamos la cantidad de capital su rentabilidad cae, esto porque cada unidad extra de capital rinde menos.

Para determinar qué sucede con el salario, derivamos la expresión del salario y la derivamos respecto a k, esto nos da:

$$\frac{\partial w}{\partial k} = -kf''(k) > 0$$

e.) **Respuesta**

Si la función de producción es Cobb-Douglas entonces $Y = F(K, L) = K^{\alpha}L^{1-\alpha}$. Expresando la función en términos per-cápita se tiene que $y = k^{\alpha}$. Por lo tanto se tiene que:

$$\gamma_r = \frac{\dot{r}}{r} = \frac{f''(k)\dot{k}}{f'(k)} = \frac{\alpha(\alpha-1)k^{\alpha-2}\dot{k}}{\alpha k^{\alpha-1}} = (\alpha-1)\frac{\dot{k}}{k}$$

Por otro lado,

$$\gamma_w = \frac{\dot{w}}{w} = \frac{-\alpha(\alpha-1)k^{\alpha-1}\dot{k}}{(1-\alpha)k^{\alpha}} = \alpha\frac{\dot{k}}{k}$$

f.) **Respuesta**

$$\gamma_r = (\alpha-1)\gamma_k$$

Por supuesto, a medida que el capital crece, éste presenta cada vez menores retornos. Por lo tanto la tasa de retorno cada año debería ser menor.

g.) **Respuesta**

$$\gamma_w = \alpha\gamma_k$$

Este resultado nos indica que la tasa de crecimiento de los salarios debería ir cayendo en el tiempo. Sin embargo los datos muestran que vienen creciendo constantemente, por lo tanto el resultado teórico no es consistente con los datos observados. El punto es que este modelo no incorpora el avance tecnológico, el cual hace aumentar la productividad y por ende, los salarios.

14. Crecimiento Económico con Ahorro Óptimo*

14.1 Inmigración, crecimiento y distribución del ingreso.

a.) **Respuesta**
El hamiltoneano de este problema es:

$$H = \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma}e^{-\rho t} + \lambda(t)\{(w_h - \delta)h + w - c\}$$

Las condiciones de primer orden son:

$$\frac{\partial H}{\partial c} = c_t^{-\sigma}e^{-\rho t} - \lambda(t) = 0 \quad (15.1)$$

$$\frac{\partial H}{\partial h} = \lambda(t)(w_h - \delta) = -\dot{\lambda(t)} \quad (15.2)$$

Derivando (15.1) respecto al tiempo y reemplazando esa expresión en (15.2) obtenemos:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{w_h - \delta - \rho}{\sigma}$$

b.) **Respuesta**
Sabemos que $Y = F(L, H)$ y además que $H = Nh$ y $L = N$. Dado que la funcion de produccion tiene retornos constantes a escala, se tiene que :

$$Y = F(N, Nh) \Rightarrow \frac{Y}{N} = F(1, h) \Rightarrow y = f(h)$$

Las firma maximizan sus utilidades:

$$\max_{\{h\}} \pi = f(h) - w_h h - w$$

de donde obtenemos que $f'(h) = w_h$. Además en el largo plazo las firmas no tiene utilidades, por lo tanto $w = f(h) - f'(h)h$.

c.) **Respuesta**
Las dos ecuaciones que describen la dinámica del modelo son:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1 + f'(h) - \delta - \rho}{\sigma}$$

$$\dot{h} = f(h) - \delta)h - c$$

Donde a partir de la primera ecuación se determina el valor de h^* de estado estacionario y a partir de la segunda el valor de c^*. La dinámica es la misma que en el modelo tradicional de Ramsey.

d.) **Respuesta**

Dividiendo la expresión de w_h por la expresión de w y derivando respecto a h obtenemos:

$$\frac{\partial w_h/w}{\partial h} = \frac{f''(h)f(h)}{(f(h) - f'(h)h)^2} < 0$$

donde la última expresión es menor a cero porque hemos supuesto que la función de producción es estrictamente cóncava.

Esto significa que a medida que la economía se acerca al estado estacionario el diferencial de salario disminuye. La intuición detrás de este resultado radica que más gente decide educarse, con el animo de maximizar su utilidad suavizando su consumo. Esto trae consigo que la productividad del salario calificado cae y el diferencial de salario disminuye.

e.) **Respuesta**

Cuando llegan los inmigrantes el nivel de capital per capita cae y sube el salario calificado dado que es relativamente mas escaso ahora. La expresión exacta es: $\hat{h} = \frac{Nh^*}{N+M}$. A medida que la gente se empieza a educar (los inmigrantes y los nativos) el salario calificado cae. Formalmente sabemos que $w_h = f'(h^*)$, como h al principio cae w_h sube y después h sube por lo tanto w_h cae.

El salario no calificado al principio cae con la llegada de los inmigrantes pues ahora hay más oferta de trabajo. A medida que la gente va adquiriendo capital humano el salario no calificado sube. La intuición detrás radica en que la productividad de éste es mayor cuando aumenta el nivel de capital humano.[2]
La condición que determina el nuevo valor de h es la misma que antes $\frac{\dot{c}}{c} = \frac{w_h - \delta - \rho}{\sigma}$, por lo tanto el nuevo valor de equilibrio de capital humano es el mismo antes y después de la llegada de los inmigrantes.

f.) **Respuesta**

El ingreso de los nativos antes de la llegada de los inmigrantes es $F(Nh, N)$ donde h es de equilibrio, después de la llegada de los inmigrantes el ingreso de los nativos es $F(Nh, N+M) - MF_l(Nh, N+M)$ donde el segundo término es el salario de todos los inmigrantes, suponiendo que el salario es igual a la productividad marginal de ellos. Por lo tanto la diferencia entre el ingreso de los nativos antes y después de la llegada de los inmigrantes es

$$D = F(Nh, N+M) - F(Nh, N) - MF_l(Nh, N+M)$$

Para analizar si los nativos están mejor o peor con la llegada de los inmigrantes tenemos que ver si D es mayor o menor a cero. Usando el hecho que para una función estrictamente concavá se cumple $\forall$ x, y que $f(x) < f(y) + f'(y)(x - y)$, entonces manteniendo H constante y variando L se tiene que:

$$\frac{F(Nh, N+M) - F(Nh, N)}{MF_l(Nh, N+M)} > 0$$

[2]Se podría pensar que los trabajadores hacen mejor su trabajo cuando el que los supervisan "saben" más. Formalmente tenemos que $\frac{\partial w}{\partial h} = -hf''(h) > 0$.

de donde se concluye que los nativos están mejor con la llegada de los inmigrantes.

De (14.78) del De Gregorio , se tiene que con la llegada de los inmigrantes tanto ellos como los nativos aumentan su nivel de capital humano. Esto viene del hecho que para ambos $\dot{h} \neq 0$ y como los nativos parten con más h, entonces los inmigrantes nunca alcanzan a los nativos en nivel de capital humano. La razón de esto radica en que los nativos parten con más capital humano que los inmigrantes.

14.2 Distorsiones y crecimiento

a.) **Respuesta**

La restricción presupuestaria de los individuos es:

$$Y + T = C + (1+\tau)I_1 + I_2$$

donde T es la transferencia de suma alzada y τI_1 representa lo que el individuo tiene que pagar por invertir I_1.

b.) **Respuesta**

Desarrollando la restricción presupuestaria tenemos que:

$$Y + T = C + (1+\tau)(\dot{K}_1 + \delta K_1) + (\dot{K}_2 + \delta K_2)$$

a partir de esto conviene definir un capital ampliado como $A = (1+\tau)K_1 + K_2$.

Entonces el hamiltoneano de este problema es:

$$H = \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma}e^{-\rho t} + \lambda(t)\left[K_1^{\alpha}(A - K_1(1+\tau))^{1-\alpha} - \delta A - C + T\right]$$

Las condiciones de primer orden son:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial c} &= c^{-\sigma}e^{-\rho t} - \lambda(t) = 0 \\
\frac{\partial H}{\partial K_1} &= \lambda\left[\alpha K_1^{\alpha-1}K_2^{1-\alpha} - (1-\alpha)(1+\tau)K_1^{\alpha}K_2^{-\alpha}\right] = 0 \\
\frac{\partial H}{\partial A} &= \lambda(t)\left[(1-\alpha)K_1^{\alpha}K_2^{-\alpha} - \delta\right] = -\dot{\lambda(t)}
\end{aligned}$$

Después de algunas simplificaciones se llega a:

$$\begin{aligned}
c^{-\sigma} &= \lambda(t) \\
\frac{K_2}{K_1} &= \frac{(1-\alpha)(1+\tau)}{\alpha} \\
\frac{\dot{c}}{c} &= \frac{1}{\sigma}\left[\epsilon(1+\tau)^{-\alpha} - \delta - \rho\right]
\end{aligned}$$

donde:

$$\epsilon = \alpha^{\alpha}/(1-\alpha)^{1-\alpha}$$

De la relación entre K_2 y K_1 se tiene que en estado estacionario la división de ambos es constante, por lo tanto ambos crecen a la misma tasa. Como $y = k_1^{\alpha} k_2^{1-\alpha}$ entonces diferenciando totalmente se llega a que el producto crece a la misma tasa que la tasa de crecimiento del capital.

La economía tiene crecimiento endógeno porque la función de producción presenta retornos constantes a escala, es decir cada vez que aumento el nivel de capital, la función aumenta la producción en la misma proporción.

c.) **Respuesta**
Si definimos que $\gamma_c = \frac{\dot{c}}{c}$ entonces la relación entre el crecimiento y el impuesto es:

$$\gamma_c = \frac{1}{\sigma}\left[\epsilon(1+\tau)^{-\alpha} - \delta - \rho\right]$$

De esta relación se tiene que mayores tasas de impuestos reducen la tasa de crecimiento, pues desincentivan la acumulación del capital.

El impuesto que maximiza la tasa de crecimiento es cero.

d.) **Respuesta**
La restricción presupuestaria del gobierno es:

$$\tau I_1 = s I_2$$

e.) **Respuesta**
La nueva restricción presupuestaria del individuo es:

$$Y = C + (1+\tau)(\dot{K}_1 + \delta K_1) + (1-s)(\dot{K}_2 + \delta K_2)$$

Bajo este esquema conviene definir el capital ampliado como $A = (1+\tau)K_1 + (1-s)K_2$. Razonando de la misma forma como se hizo en la parte (b) se llega a:

$$\frac{K_2}{K_1} = \frac{(1-\alpha)(1+\tau)}{\alpha(1-s)}$$

f.) **Respuesta**
Igualando esta expresión con $\tau K_1 = sK_2$ se llega después de un poco de álgebra a lo siguiente:

$$s = \frac{\tau\alpha}{1-\alpha+\tau}$$

Reemplazando esta expresión en la expresión de $\frac{\dot{c}}{c}$ se obtiene que:

$$\gamma)_c = \frac{1}{\sigma}\left[(1+\alpha)(\frac{\alpha}{1-\alpha+\tau})^{\alpha} - \rho - \delta\right]$$

De donde se desprende que un aumento en la tasa de impuesto reduce la tasa de crecimiento de la economía.

14.3 Servicios públicos y derechos de propiedad en el modelo de Ramsey.

a.) **Respuesta**

Las componentes de la restricción presupuestaria son el ingreso esperado, $p(G)f(k_t)$, la acumulación del capital, $\dot{k}$, el consumo en el periodo t, c_t, la depreciación del capital δk_t y un impuesto de suma alzada τ.

La ecuación puede ser vista de dos maneras:

- $\Rightarrow$ $p(G)f(k_t) - \tau = c_t + \left(\dot{k} + \delta k_t\right)$, esto es, ingreso disponible esperado = consumo + inversión.
- $\Rightarrow$ $\dot{k} + \delta k_t = (p(G)f(k_t) - \tau - c_t)$, esto es, inversión bruta en período t = ahorro esperado en periodo t

b.) **Respuesta**

El problema óptimo del consumidor-productor es:

$$\text{Máx}U = \int_0^\infty \frac{c_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} e^{-\rho t} dt \ \ \text{s.a} \ \ \dot{k_t} = p(G)f(k_t) - c_t - \delta k_t - \tau$$

Trivialmente se puede ver que si G esta fijo, entonces $p(G)$ es una constante que multiplica la función de producción y el problema se reduce a la derivación desarrollado en el De Gregorio y también en el problema 14.6. Al derivar las condiciones de primer orden del Hamiltoniano, se obtiene la ecuación de la dinámica del consumo:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\sigma}\left[p(G)f'(k_t) - \delta - \rho\right] \tag{15.3}$$

La ecuación de dinámica del capital esta dada por la restricción presupuestaria (ec. (2)).

$$\dot{k_t} = p(G)f(k_t) - c_t - \delta k_t - \tau \tag{15.4}$$

En estado estacionario $\dot{c} = 0$ y $\dot{k} = 0$. Para un nivel de G dado, el capital k^* y consumo c^* de estado estacionario (*EE*) se obtienen de:

$\dot{c} = 0 \Rightarrow$

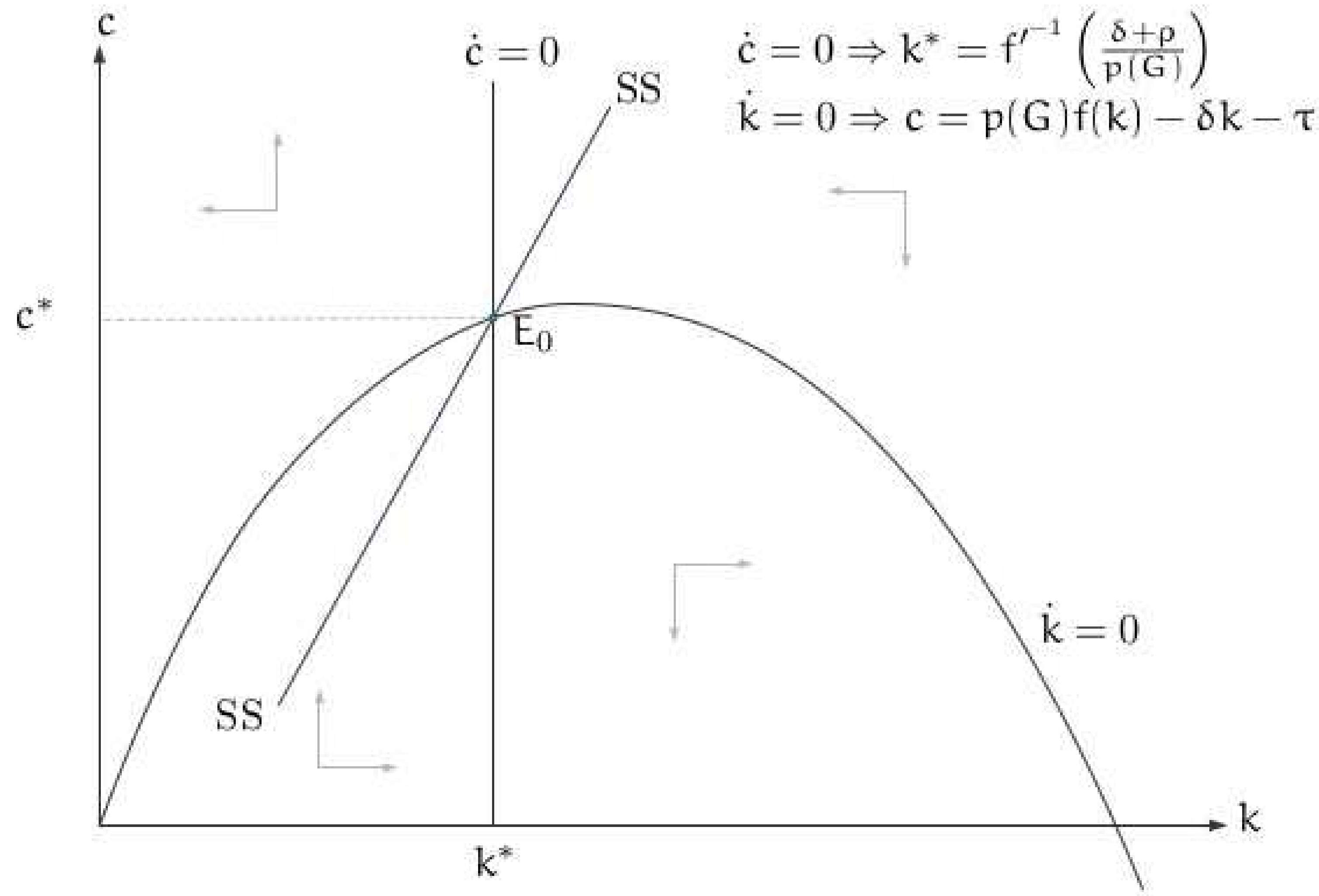
$$p(G)f'(k_t) = \delta + \rho \Rightarrow k^* = f'^{-1}\left(\frac{\delta + \rho}{p(G)}\right) \tag{15.5}$$

Donde $\frac{\partial c}{\partial k} = 0$ y $\frac{\partial k}{\partial G} > 0$. Vemos que el nivel de capital de estado estacionario depende del gasto del gobierno positivamente dado que $f' > 0 \Rightarrow f'^{-1} < 0$.

$$\dot{k} = 0 \Rightarrow p(G)f(k_t) = c_t + \delta k_t + \tau \Rightarrow c = p(G)f(k_t) - \delta k_t - \tau \tag{15.6}$$

Podemos ver que $\frac{\partial c}{\partial k} = p(G)f'(k) - \delta - \tau \lesseqgtr 0$ pero que $\frac{\partial^2 c}{\partial^2 k} = p(G)f''(k) < 0$.

Podemos graficar el equilibrio de la siguiente manera:



c.) **Respuesta**

Un aumento del gasto de gobierno G implica directamente dos cosas, primero un incremento de la probabilidad de mantener la propiedad de la producción $p(G)$, y segundo, sobre la base de un presupuesto equilibrado, implica que también habrá un aumento del impuesto de suma alzada τ que es constante en el tiempo igual a G.

De la ecuación 15.5 vemos que tiene la siguiente relación con G:

$$\frac{\partial k^*}{\partial G} = -\underbrace{\Phi'}_{-}\underbrace{p'(G)}_{+} > 0$$

Donde $\Phi = f'^{-1}\left(\frac{\delta+\rho}{p(G)}\right)$. Vemos entonces que inambiguamente se desplaza a la derecha la condición de equilibrio entregada por $\dot{c} = 0$.

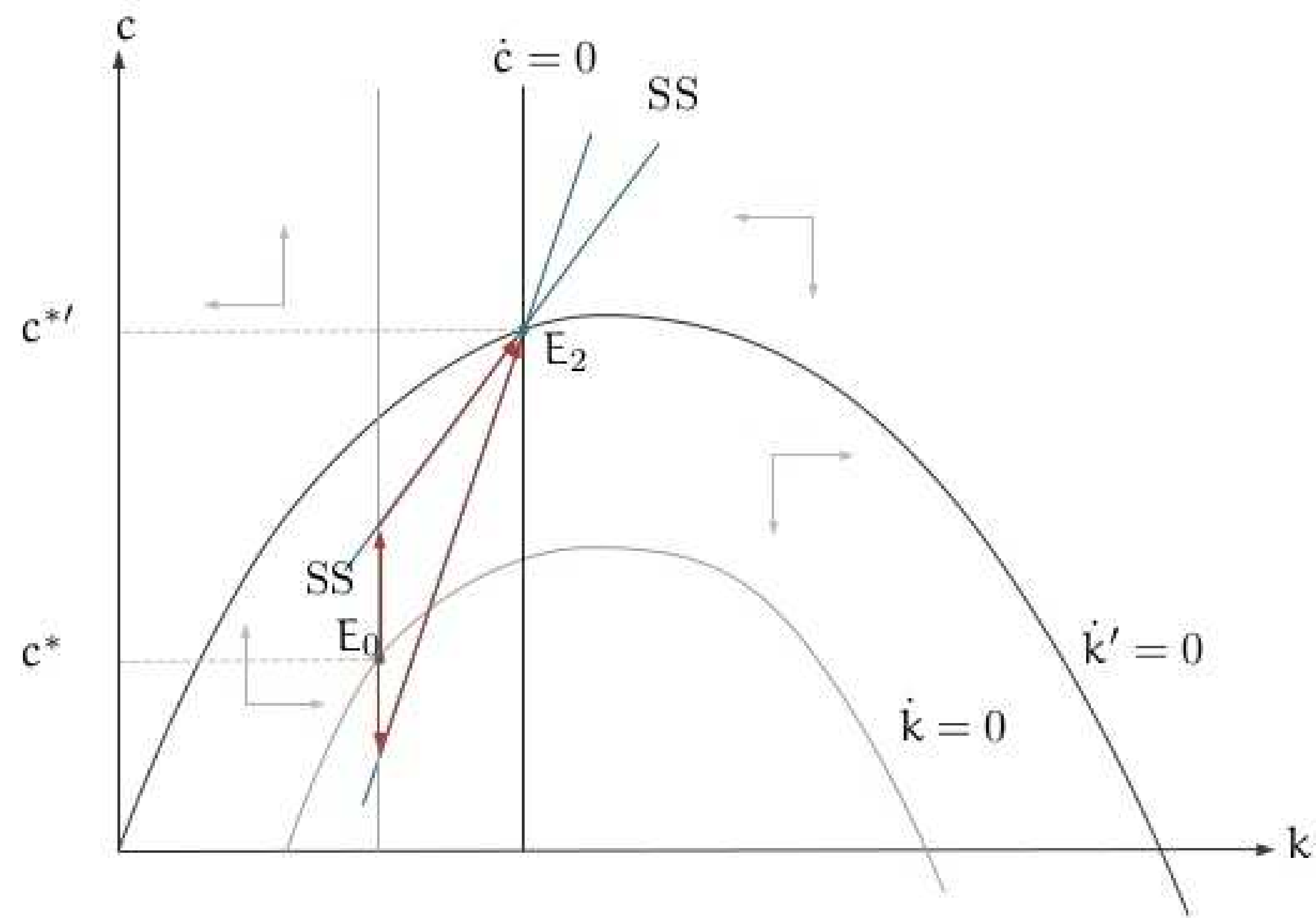
De la ecuación 15.6 vemos que tiene la siguiente relación con G:

$$\frac{\partial c}{\partial G} = \underbrace{\frac{\partial p(G)}{\partial G} f(k_t)}_{+} - \frac{\partial \tau}{\partial G} = \frac{\partial p(G)}{\partial G} f(k_t) - 1 \lesseqgtr 0 \tag{15.7}$$

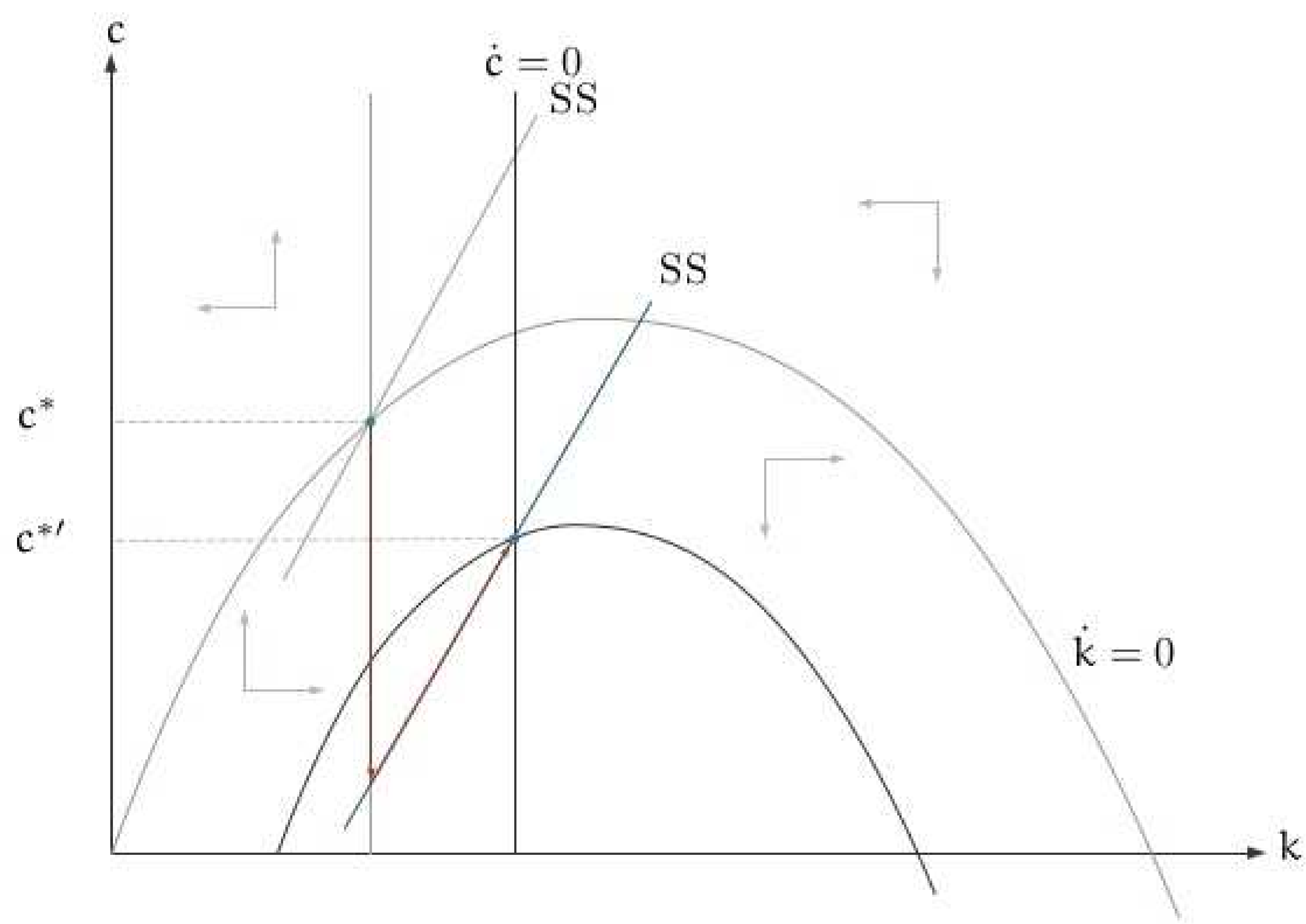
Vemos que dependiendo de las propiedades de la función p y el nivel de $f(k_t)$, la relación entre G y la condición de equilibrio para $\dot{k} = 0$ sera positiva o negativa.

Resumido, tenemos que más derechos de propiedad siempre aumenta el nivel de capital de equilibrio. Esto es claro debido a que aumenta la productividad marginal del capital (esperado).

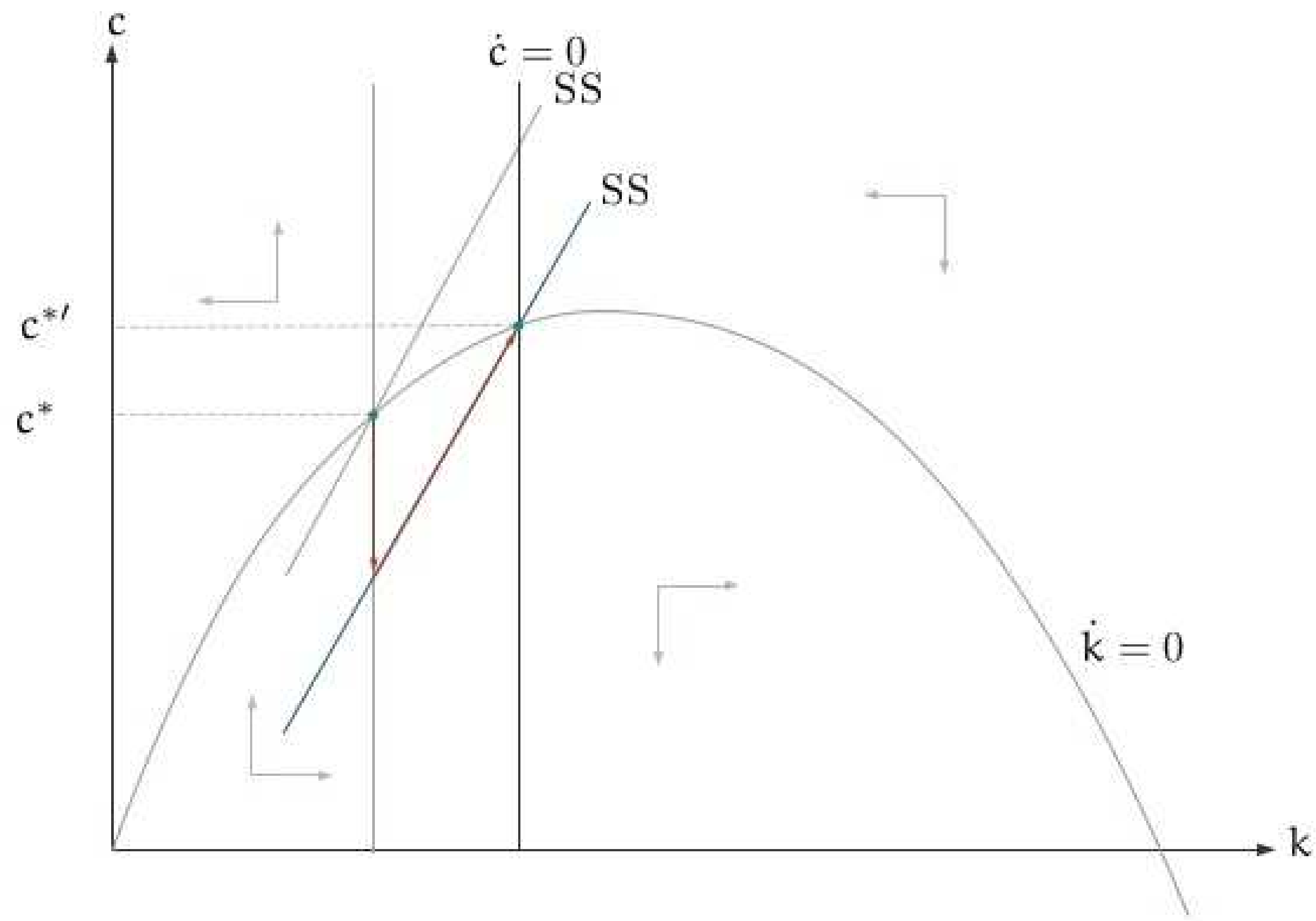
Lo que no se sabe bien es que ocurre con el consumo de steady state. Tenemos tres casos:



Caso 1: $\frac{\partial c}{\partial G} > 0$. Esto implica un consumo de estado estacionario mayor. Lo que no se sabe es si predomina el efecto de incentivo al ahorro o al mayor consumo en $t = 0$. Esto depende de la pendiente que tiene SS. Si los agentes son pacientes, entonces el saddle path tiene mayor pendiente, se ahorra más y se llega al estado estacionario más rápidamente. El caso opuesto esta también graficado.



Caso 2: $\frac{\partial c}{\partial G} < 0$. El capital de estado estacionario aumenta pero el consumo baja. Debido a que la productividad marginal del capital aumenta se dedican mas recursos a la inversion, pero el ingreso disponible baja debido al aumento en los impuestos. El consumo cae y el estado estacionario sigue con un consumo mas bajo en E_2 que en E_1.



Caso 3: $\frac{\partial c}{\partial G} = 0$. El consumo y capital de steady state aumentan pero el ingreso disponible no cambia por lo que debe caer el consumo de manera de poder ahorrar mas y aumentar el stock de capital hasta llegar a E_2.

d.) **Respuesta**

Financiamiento del gasto.

1. Si el aumento del gasto se financia con deuda pública y el aumento del impuesto se deja para más adelante, como el impuesto es de suma alzada, la restricción presupuestaría de la economía doméstica no cambia ya que el valor presente de los impuestos sigue siendo el mismo (el suficiente para financiar la deuda pública y el gasto de gobierno) por lo cual la decisión de consumo del individuo no se ve afectada. Luego la respuesta de la parte anterior no debería cambiar. Este resultado es conocido como Equivalencia Ricardiana.
2. En este caso los impuestos al ingreso son distorcionantes, exigiendo mayor rentabilidad al capital para poder pagar los impuestos, luego el *timing* de los impuestos en este caso provoca una distorsión en la trayectoria de consumo y acumulación de capital y afecta la trayectoria del ingreso. Luego, en este caso los resultados anteriores cambian y la Equivalencia Ricardiana no se cumple.

14.4 **Respuesta**

El valor presente de esta firma es

$$V = \int_0^\infty [f(k) - i]\, e^{-rt} dt \qquad (15.8)$$

Y se busca maximizar V sujeto a la regla de movimiento del capital $\dot{k} = i - \delta k$.

Podemos plantear el hamiltoniano de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= [f(k) - i]\, e^{-rt} + \lambda(t)\,[i - \delta k_t] \\
\frac{\partial H}{\partial i} &= -e^{-rt} + \lambda(t) = 0 \\
&\rightarrow \dot{\lambda(t)} = -re^{-rt} \\
\frac{\partial H}{\partial k} &= f' e^{-rt} - \delta\lambda(t) = -\dot{\lambda(t)} \\
&\rightarrow \\
&f'\cancel{e^{-rt}} - \delta\cancel{e^{-rt}} = r\cancel{e^{-rt}}
\end{aligned}$$

Reordenando, tenemos lo que se pedía:

$$f' = \delta + r \tag{15.9}$$

14.5 Crecimiento y gasto de gobierno productivo (basado en Barro, 1990).

a.) **Respuesta**

En este esquema el hogar tiene ingresos por su trabajo wL y ingresos por los intereses sobre sus activos Ar. Estos los puede consumir o ahorrar. La restricción agregada es

$$\dot{A} = (wL + Ar)(1 - \tau) - C \tag{15.10}$$

y en términos per capita es simplemente

$$\dot{a} = w(1 - \tau) + r(1 - \tau)a - c \tag{15.11}$$

Planteamos el hamiltoniano:

$$\mathcal{H} = u(c_t) \cdot e^{-\rho t} + \lambda(t)[w(1 - \tau) - c + r(1 - \tau)a] \tag{15.12}$$

Obtenemos las CPOs:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c_t} = u'(c_t) \cdot e^{-\rho t} - \lambda(t) &= 0 \\
u'(c_t) \cdot \cancel{e^{-\rho t}} &= \lambda'(t) \cdot \cancel{e^{-\rho t}} \qquad \text{dado que } \lambda(t) = \lambda'(t)e^{-\rho t} \\
u'(c_t) &= \lambda'(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial a_t} = \lambda(t)(r(1 - \tau)) &= -\dot{\mu}(t) \\
\lambda(t)(r(1 - \tau)) &= -\frac{\partial \lambda(t)}{\partial t} \\
\lambda'(t) \cdot e^{-\rho t}(r(1 - \tau)) &= -\frac{\partial\left[\lambda'(t) \cdot e^{-\rho t}\right]}{\partial t} \\
\lambda'(t) \cdot \cancel{e^{-\rho t}}(r(1 - \tau)) &= -(\dot{\eta}(t) \cdot \cancel{e^{-\rho t}} - \rho\lambda'(t) \cdot \cancel{e^{-\rho t}}) \\
-\dot{\eta}(t) &= \lambda'(t)(r(1 - \tau) - \rho)
\end{aligned}$$

Combinando las CPO, obtenemos:

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial \lambda'(t)}{\partial t} &= \lambda'(t)(r(1-\tau)-\rho) \\
-\frac{\partial u'(c_t)}{\partial t} &= u'(c_t)(r(1-\tau)-\rho) \\
-u''(c_t)\dot{c} &= u'(c_t)(r(1-\tau)-\rho) \\
\frac{\dot{c}}{c} &= -\frac{u'(c_t)}{cu''(c_t)}(r(1-\tau)-\rho)
\end{aligned}$$

Ahora, añadiendo el hecho que $u'(c_t) = c_t^{-\sigma}$ y que $u''(c_t) = -\sigma c_t^{-\sigma-1}$, obtenemos:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\sigma}(r(1-\tau)-\rho) \tag{15.13}$$

Finalmente, desarrollando el problema de optimización de cada firma individual se encuentre el equilibrio descentralizado para esta economía.

Las firmas enfrentan cada una el siguiente problema:

$$\begin{aligned}
\max_{\{k\}} \pi_i &= y - (r+\delta)\cdot k_i & (15.14) \\
&= k^{\alpha} g^{1-\alpha} - (r+\delta)k & (15.15)
\end{aligned}$$

Obteniendo la CPO:

$$\begin{aligned}
f_k &= \alpha k^{\alpha-1} g^{1-\alpha} & (15.16) \\
f_k &= \alpha \left(\frac{g}{k}\right)^{1-\alpha} & (15.17)
\end{aligned}$$

Pero tenemos que $\tau y = g$, por lo que :

$$\begin{aligned}
\frac{g}{k} &= \frac{\tau k^{\alpha} g^{1-\alpha}}{k} & (15.18) \\
\frac{g}{k} &= \tau \left(\frac{g}{k}\right)^{1-\alpha} & (15.19) \\
\frac{g}{k}^{\alpha} &= \tau & (15.20) \\
\frac{g}{k} &= \tau^{\frac{1}{\alpha}} & (15.21)
\end{aligned}$$

Usando esto en la ecuación (15.17), tenemos que

$$f_k = \alpha \tau^{\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)} \tag{15.22}$$

Entonces, de la optimización:

$$r = \alpha \tau^{\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)} \tag{15.23}$$

Tenemos en equilibrio que

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\sigma}\left((1-\tau)\alpha\tau^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - \rho\right) \tag{15.24}$$

Dado que τ, α y ρ son todos parámetros, se puede dar un crecimiento positivo y que no cae nunca. La idea es que no hay retornos decrecientes dado que el gasto publico los mitiga.

b.) **Respuesta**
Buscamos maximizar la ecuación (15.24) variando τ, de lo cual resulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \frac{\dot{c}}{c}}{\partial \tau} &= -\tau^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} + \frac{1-\alpha}{\alpha}(1-\tau)\tau^{\frac{1-\alpha}{\alpha}-1} = 0 && (15.25)\\ &= (1-\alpha)(1-\tau) = \tau\alpha && (15.26)\\ \tau &= \frac{1}{2\alpha} && (15.27)\end{aligned}$$

c.) **Respuesta**
En este problema el planificador central optimiza la utilidad de los hogares sujeto a la regla de movimiento del capital.

La restricción agregada es $\dot{k}_t = y_t - c_t - g_t = y_t - c_t - \tau y_t$ donde podemos escribir a $y_t = \tau^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} k_t$.
Planteamos el hamiltoniano:

$$\mathcal{H} = u(c_t) \cdot e^{-\rho t} + \lambda(t)[(1-\tau)\tau^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} k_t - c_t] \tag{15.28}$$

Obtenemos las CPOs:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c_t} = u'(c_t) \cdot e^{-\rho t} - \lambda(t) &= 0\\ u'(c_t) \cdot \cancel{e^{-\rho t}} &= \lambda'(t) \cdot \cancel{e^{-\rho t}}\\ u'(c_t) &= \lambda'(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial k_t} = \lambda(t)((1-\tau)\tau^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}) &= -\dot{\mu}(t)\\ \lambda(t)((1-\tau)\tau^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}) &= -\frac{\partial \lambda(t)}{\partial t}\\ \lambda'(t) \cdot e^{-\rho t}((1-\tau)\tau^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}) &= -\frac{\partial\left[\lambda'(t) \cdot e^{-(\rho t)}\right]}{\partial t}\\ \lambda'(t) \cdot \cancel{e^{-\rho t}}((1-\tau)\tau^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}) &= -(\dot{\eta}(t) \cdot \cancel{e^{-\rho t}} - \rho\lambda'(t) \cdot \cancel{e^{-\rho t}})\\ -\dot{\eta}(t) &= \lambda'(t)((1-\tau)\tau^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - \rho)\end{aligned}$$

Combinando las CPO, obtenemos:

$$
\begin{aligned}
-\frac{\partial \lambda'(t)}{\partial t} &= \lambda'(t)((1-\tau)\tau^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - \rho) \\
-\frac{\partial u'(c_t)}{\partial t} &= u'(c_t)((1-\tau)\tau^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - \rho) \\
-u''(c_t)\dot{c} &= u'(c_t)((1-\tau)\tau^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - \rho) \\
\frac{\dot{c}}{c} &= -\frac{u'(c_t)}{cu''(c_t)}(r(1-\tau) - \rho)
\end{aligned}
$$

Ahora, añadiendo el hecho que $u'(c_t) = c_t^{-\sigma}$ y que $u''(c_t) = -\sigma c_t^{-\sigma-1}$, obtenemos:

$$
\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\sigma}((1-\tau)\tau^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - \rho) \tag{15.29}
$$

γ_c es claramente mas alto que en el caso decentralizado ya que no esta ($\alpha < 1$) multiplicando.

Finalmente, desarrollando el problema de optimización del nivel de τ encontramos el mismo resultado anterior: $\tau = 1/2\alpha$.
Maximizando la ecuación (15.29) con respecto a τ, obtenemos:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \frac{\dot{c}}{c}}{\partial \tau} &= -\tau^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} + \frac{1-\alpha}{\alpha}(1-\tau)\tau^{\frac{1-\alpha}{\alpha}-1} = 0 \\
&= (1-\alpha)(1-\tau) = \tau\alpha \\
\tau &= \frac{1}{2\alpha}
\end{aligned}
$$

14.6 Bienes transables y no transables

a.) Respuesta

El hamiltoniano del problema es:

$$
H = \frac{[{c_T}^{\phi}{c_N}^{1-\phi}]^{1-\sigma}}{1-\sigma}e^{-\rho t} + \lambda[y + r^*b - c_T - qc_N] \tag{15.30}
$$

Las condiciones de primer orden son:

$$
[{c_T}^{\phi}{c_N}^{1-\phi}]^{-\sigma}\phi {c_T}^{\phi-1}{c_N}^{1-\phi}e^{-\rho t} = \lambda \tag{15.31}
$$

$$
[{c_T}^{\phi}{c_N}^{1-\phi}]^{-\sigma}(1-\phi){c_T}^{\phi}{c_N}^{-\phi}e^{-\rho t} = \lambda q \tag{15.32}
$$

$$
\lambda r^* = -\dot{\lambda} \tag{15.33}
$$

Dividiendo la ecuación (15.31) y (15.32), se tiene la relación estática entre el consumo de bienes transables y no transables como función de q y de los parámetros:

$$c_T = \frac{\phi}{1-\phi} c_N q \tag{15.34}$$

Si el precio relativo de los bienes no transables respecto de los transables (tipo de cambio real, q) aumenta, se consume más de los bienes transables debido a que es más barato respecto de los no transables.

Utilizando las expresiones (15.31), (15.32) y (15.34) junto con el hecho de que $c_t = c_T^{\phi} c_N^{1-\phi}$ se tiene:

$$c_t{}^{-\sigma}\phi\left(\frac{1-\phi}{\phi q}\right)^{1-\phi} e^{-\rho t} r^* = -\frac{\partial}{\partial t}\left[c_t{}^{-\sigma}\phi\left(\frac{1-\phi}{\phi q}\right)^{1-\phi} e^{-\rho t} r^*\right]$$

$$c_t{}^{-\sigma} q^{-(1-\phi)} e^{-\rho t} r^* = c_t{}^{-\sigma} q^{-(1-\phi)} e^{-\rho t}\left[\sigma\frac{\dot{c_t}}{c_t} + (1-\phi)\frac{\dot{q}}{q} + \rho\right]$$

$$\hat{c_t} = \frac{r^* - \rho - (1-\phi)\hat{q}}{\sigma} \tag{15.35}$$

que corresponde a la ecuación de Euler para la evolución del consumo como función de la tasa de interés internacional y de otros parámetros del modelo.

b.) **Respuesta**

Log diferenciando la ecuación (15.34) y dividiendo de nuevo por la misma ecuación, se llega a:

$$\hat{c_T} = \hat{c_N} + \hat{q} \tag{15.36}$$

Cuando el tipo de cambio real se aprecia, el consumo de bienes transables aumenta respecto al de no transables, pues es más barato consumir transables versus no transables.

c.) **Respuesta**

Cuando c_t no crece, de acuerdo a la ecuación (15.35) se tiene que la tasa de interés de equilibrio de la economía es $r^* - (1-\phi)\hat{q}$, que es la tasa que iguala al factor de descuento y mantiene el consumo constante (aunque la participación de transables y no transables cambia de acuerdo a $\hat{q}$). Esta tasa no es igual a r^*, sino que difiere dependiendo de la evolución del precio relativo de los bienes no transables. Si los bienes no transables están subiendo de precio respecto de los transables, es decir, el tipo de cambio real se aprecia, tendremos que la tasa de interés real es menor que la internacional, la razón es que r^* es la tasa de interés real en términos de bienes transables, en consecuencia la tasa de interés real desde el punto de vista del consumo del individuo doméstico es menor porque parte de sus bienes tiene precios crecientes.

Notar que si $r^* = \rho$, en una economía de un solo bien el precio del presente es igual a la valoriación del individuo y prefiere tener consumo parejo. En cambio, si los bienes no transables están subiendo de precio, el consumo agregado será decreciente, ya que el mayor precio futuro de los bienes no transables hace más barato el presente.

15. Demanda por Dinero e Inflación

15.1a.) **Respuesta**

Definiendo en minúsculas las variables escritas en logaritmo $[x = \ln(X)]$ tenemos que la función de demanda por dinero para un período t se puede escribir como

$$m_t - p_t = 0{,}8y_t - 0{,}5i_t \tag{16.1}$$

Por otra parte, se puede mostrar que para variaciones pequeñas de las variables mayúsculas (X), el cambio porcentual $\hat{X}$ se puede aproximar por $\hat{X} = x_{t+1} - x_t = \Delta x$. Con esto en mente, escribamos la ecuación (16.1) en diferencias, tomando la relación para $t+1$ y restando le la relación en t. De esta forma, tendremos

$$(m_{t+1} - m_t) - (p_{t+1} - p_t) = 0{,}8(y_{t+1} - y_t) - 0{,}5(i_{t+1} - i_t)$$

lo que podemos reescribir como

$$\Delta m - \Delta p = 0{,}8\Delta y - 0{,}5\Delta i \tag{16.2}$$

notación conveniente para responder a las preguntas.

En este caso $\Delta i = -1$ y $\Delta y = 4$. Además se quiere mantener constante el nivel de precios, lo que significa que $\Delta p = 0$. Usando la ecuación (16.2) tenemos que $\Delta m = 3{,}7$.

b.) **Respuesta**

En este caso $\Delta p = 5$. Con eso, se tiene que $\Delta m = 3{,}7 + 5 = 8{,}7$.

c.) **Respuesta**

En este caso $\Delta y = 5$, $\Delta p = 10$ y $\Delta m = 8$. Usando nuevamente (16.2) llegamos a que Δi tiene que ser igual a 12, es decir, un aumento de 12 % en la tasa de interés.

15.2 Teoría cuantitativa del dinero y ajustes.

a.) **Respuesta**

Como la economía lleva 10 años con inflación de 8 % las expectativas de inflación probablemente son de 8 % también.

$$\pi^e = 8\,\%$$

b.) **Respuesta**

$$i_n = 8\,\% + 5\,\% = 13\,\%$$

$$\frac{\Delta M}{M} = 8\,\% + \frac{\Delta PIB}{PIB} = 8\,\% \tag{16.3}$$

c.) **Respuesta**

$$\begin{aligned} S_n &= 8\,\% \\ TCN &= 8-2=6\,\% \end{aligned}$$

d.) **Respuesta**
Para bajar π, según la teoría cuantitativa simple del dinero, debe desacelerarse el aumento del dinero de manera de llegar a la inflación meta de 0.

$$\frac{\Delta M}{M} = \pi_{meta} + \frac{\Delta PIB}{PIB} \tag{16.4}$$

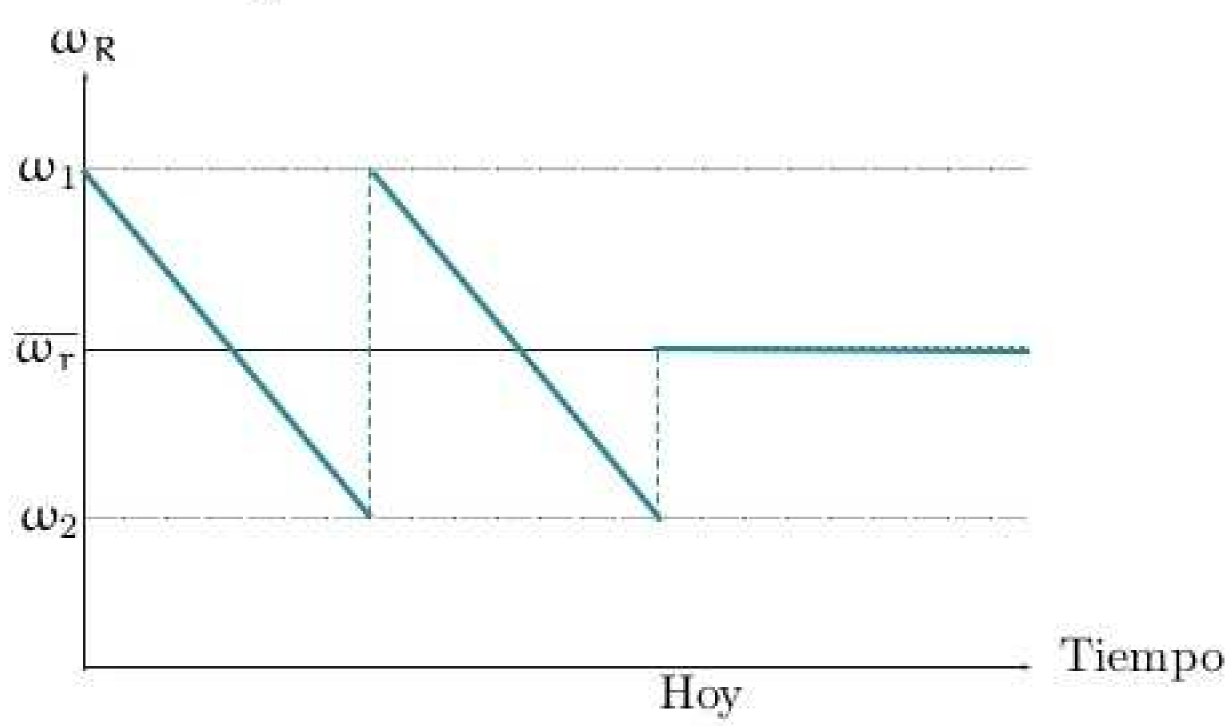
Para poder hacer esto, se debe reducir el aumento del dinero a cero.

e.) **Respuesta**
Los salarios se ajustaran de manera de mantener el valor del salario real fijo en promedio durante el periodo. Esto implica que aumentaran en 8 % en linea con las expectativas de inflación esperada.

f.) **Respuesta**
En este caso cae el producto en 8 %.

g.) **Respuesta**
Respuesta
Si todos creen en la meta de 0 %, los salarios se reajustaran en 4 % para mantener el salario real constante. Gráficamente se puede ver de la siguiente manera:

Figura 16.1: Evolución del Salario Real



15.3 Baumol-Tobin y descuentos electrónicos.

a.) **Respuesta**
El proceso de maximización lleva a que el agente mide el costo de oportunidad del dinero contra el costo de cada "viaje".

$$\min_{n} C(n) = \quad iY/2n + Zn \tag{16.5}$$

$$\frac{\partial C(n)}{\partial n} = -\frac{iY}{2n^2} + Z = 0 \tag{16.6}$$

$$\tag{16.7}$$

$$n^* = \sqrt{\frac{iY}{2Z}} \tag{16.8}$$

b.) **Respuesta**
La idea del modelo es que el dinero se requiere para hacer transacciones pero que tiene un costo de oportunidad. Supone entonces que el dinero cumple un función de "medio de cambio" y por lo tanto justifica una demanda por dinero. Se le podría criticar que no es exclusivo en poder ser utilizado como medio de intercambio. El modelo no escoge el dinero endogenamente como medio de cambio. Además evidentemente se observa que existen otras formas de hacer transacciones en la realidad.

c.) **Respuesta**
El aumento de cajeros automáticos se puede modelar como una disminución en el costo de ir a buscar dinero. Lo que aumente el numero n^* optimo de viajes y reduce los saldos reales promedios que tiene el agente.

d.) **Respuesta**
Esto se podría incluir en el modelo y en la maximización de la siguiente manera:

$$\min_{n,T} C(n,T) = \quad \frac{i(Y-T)}{2n} + Zn + \tau T \tag{16.9}$$

Dado que τ es menor a Z y no presenta costo de oportunidad, domina el llevar dinero en el bolsillo alguno. Esto equivale a no usar dinero y siempre pagar con tarjeta. $\Rightarrow Y = T$

e.) **Respuesta**
Como vimos en el caso anterior, cuando son sustitutos el dinero y las tarjetas, no se demanda dinero, por lo que tenemos que $[1-\lambda]Y = T$. La demanda or dinero entonces es función positiva de λ y sear igual que el caso inicial.

$$n^* = \sqrt{\frac{i\lambda Y}{2Z}} \tag{16.10}$$

A medida que λ tiende a cero, el dinero en esta economía se vuelve obsoleto para se utilizado como medio de intercambio y este enfoque de inventarios no tiene sentido.

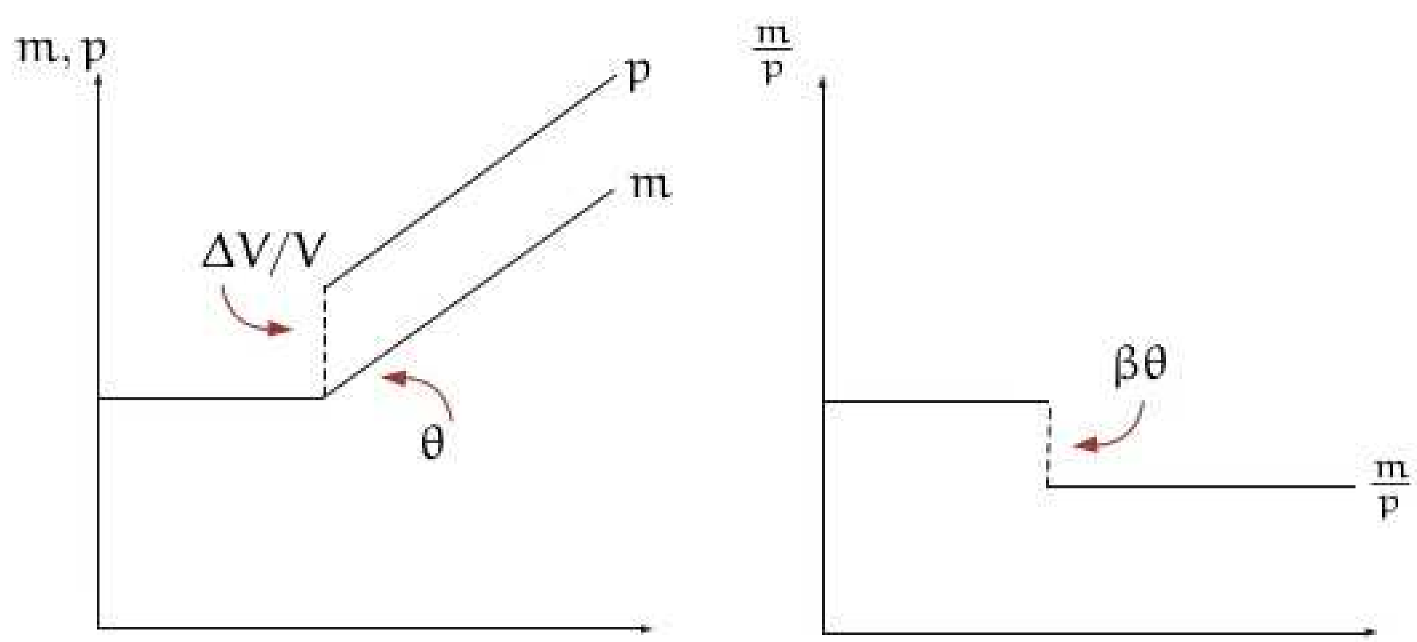
15.4 Evolución de la cantidad de dinero real.

a.) **Respuesta**
La tasa de interés nominal es $i = r + \pi^e$ (efecto Fisher) por lo que si el aumento en la cantidad de dinero afecta las expectativas de inflación mediante la ecuación cuantitativa, se tiene que $\frac{\Delta M}{M} = \Delta\pi^e = \Delta i = \theta$.

Con una tasa de interés más alta, la demanda por dinero baja para cada nivel de producto y aumenta la velocidad del dinero.

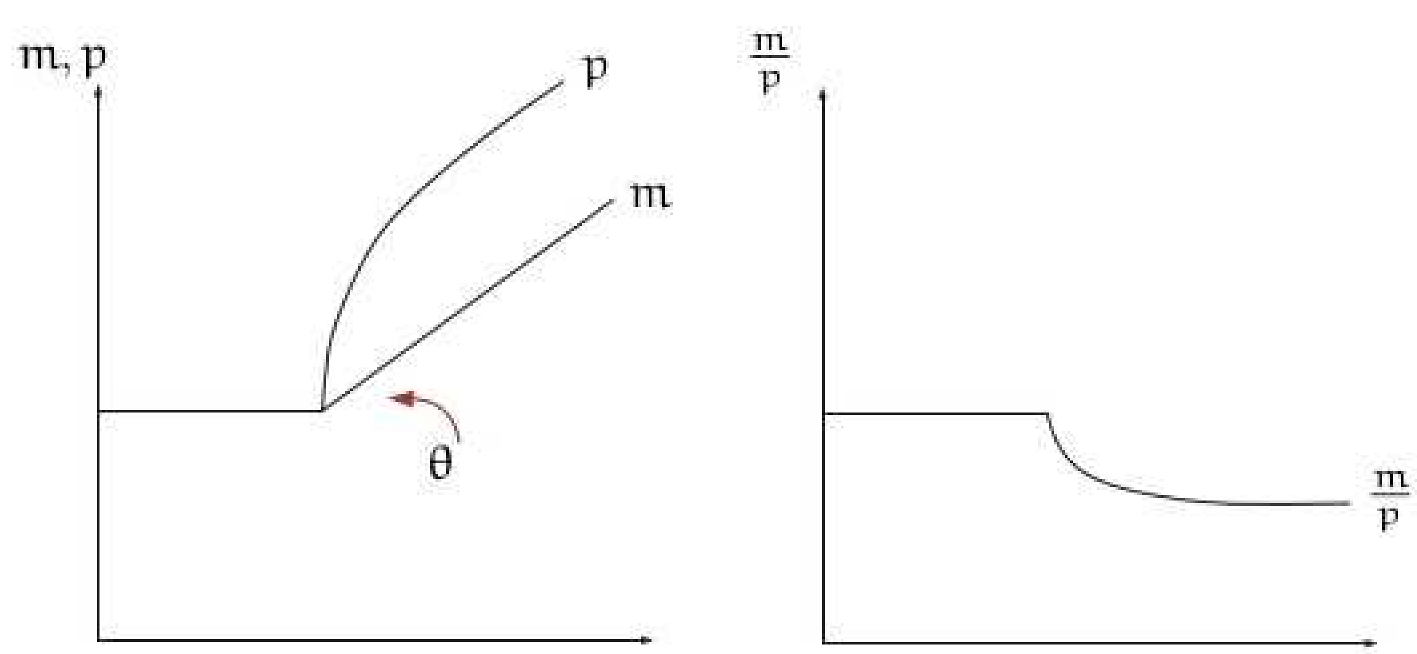
$$\uparrow V = \frac{y}{\downarrow L(\uparrow i, y)}$$

b.) **Respuesta**



c.) **Respuesta**
La diferencia en saldos reales corresponde al aumento en velocidad ya que m y p van a moverse juntos por la ecuación cuantitativa en el tiempo. El cambio de una vez por el efecto de menor demanda por dinero genera un cambio en saldos reales de $-\beta\theta$.

d.) **Respuesta**



Dado que no se pueden ajustar los precios instantáneamente, la inflación sera mas alta que el aumento en M por un tiempo.

16. Oferta de Dinero y Política Monetaria

16.1 Demanda por dinero y la Gran Depresión.

a.) **Respuesta**
La ecuación cuantitativa del dinero nos dice que

$$MV = PT$$

es decir, que la oferta de dinero por la velocidad del dinero (número de veces que el dinero cambia de mano) es igual al nivel de precios por el número de transacciones de la economía. Como T es muy difícil de contabilizar, una aproximación razonable es reemplazar T por Y (PIB, valor de la producción total de la economía), teniendo claro que el mercado secundario (por ejemplo, compra-venta de autos usados) no queda registrado. Siendo así, tenemos que

$$MV = PY$$

Es directo verificar que ante V constante y P rígidos a la baja, una caída de M provocará una caída en Y (PIB) de manera que la identidad se siga cumpliendo.

b.) **Respuesta**
Las quiebras de los bancos elevaron el cociente entre efectivo y los depósitos al reducir la confianza de la gente en el sistema bancario. La gente temía que siguieran registrándose quiebras bancarias y comenzó a ver en el efectivo un tipo de dinero más deseable que los depósitos a la vista. Al retirar sus depósitos, agotaron las reservas de los bancos. El proceso de creación de dinero se invirtió, al responder los bancos a la disminución de las reservas reduciendo sus volúmenes de préstamos pendientes de amortizar.

c.) **Respuesta**
Las quiebras bancarias elevaron el cociente entre las reservas y los depósitos al obligar a los bancos a ser más cautos. Después de observar numerosos pánicos bancarios, los bancos se resistieron a operar con una pequeña cantidad de reservas, por lo que éstas aumentaron muy por encima del mínimo legal. De la misma manera que las economías domésticas respondieron a la crisis bancaria aumentando su cantidad relativa de efectivo, los bancos respondieron manteniendo una mayor proporción de reservas. Estos cambios provocaron conjuntamente una gran reducción del multiplicador del dinero.

d.) **Respuesta**
Que existiera un seguro estatal a los depósitos significaría que, por ejemplo, el Banco Central desempeñaría un papel más activo previniendo las quiebras bancarias, actuando de *prestamista de última instancia* cuando los bancos necesitaron efectivo durante los pánicos bancarios. Esa medida habría contribuido a mantener la confianza en el sistema bancario, por lo que $(\overline{c})$ no habría aumentado (tanto) y, por consiguiente, las reservas no se habrían agotado tan rápidamente, de forma tal que los bancos no habrían necesitado aumentar el encaje. Con estas medidas se habría evitado la gran disminución del multiplicador del dinero.

16.2 Equilibrio en el mercado monetario.

a.) **Respuesta**

La oferta de dinero de dinero se define como:

$$M = \left(\frac{1+\bar{c}}{\bar{c}+\theta}\right) H$$

donde M es la oferta de dinero, $\bar{c}$ la razón entre circulantes y depósitos que usan los agentes y θ el encaje (porcentaje de los depósitos que se mantienen como reservas). Para este caso $\bar{c} = 0$ porque los agentes no usan circulante y por enunciado $\theta = 0,2$. Además sabemos que $H = 100$. Con esto, la oferta de dinero quedaría como:

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{0,2}100 \\ M &= 5 * 100 \\ M^* &= 500 \end{aligned}$$

b.) **Respuesta**

Utilizando la ecuación para la demanda por dinero dada por el enunciado, la igualamos a la oferta de dinero recién obtenida. Además sabemos por enunciado que $Y = 5000$ por lo tanto la tasa de interés será:

$$\begin{aligned} M_{of} &= M_{dda} \\ 500 &= 5000(0,2 - 0,8i) \\ 0,8i &= 0,2 - (1/10) \\ i^* &= 0,125 \end{aligned}$$

c.) **Respuesta**

A partir de la teoría cuantitativa podemos ver que:

$$P = \frac{MV}{y}$$

Donde M es la cantidad de dinero, V la velocidad de circulación (que en este caso no varía), P el nivel de precios y y el PIB real.

Además vemos que el crecimiento de la cantidad de dinero está dada por $\gamma_(M) = 615/500 - 1$ (*donde el crecimiento de una variable* x *sería* $\frac{\Delta x}{x} = \gamma_x$) y además la velocidad del circulación no varía. Entonces log-linealizando la teoría cuantitativa y reemplazando por los valores encontrados tenemos:

$$\pi \equiv \frac{\Delta P}{P}$$
$$\pi = \frac{\Delta M}{M} - \frac{\Delta y}{y}$$
$$\pi = 0,23 - \frac{\Delta y}{y}$$

Además si consideramos que el primer período es el año base del PIB real, tenemos que $PIBreal = PIBnominal$ y que por lo tanto el deflactor corresponde a $P = 1$. Con esto, el crecimiento del PIB real corresponderia a $\gamma_y = 5750/5000 - 1$. Así, obtenemos la inflación:

$$\pi = 0,23 - \gamma_y = 0,23 - 0,15 = 0,08$$

La tasa de crecimiento del nivel de precios (materializado con el deflactor implícito) corresponde a un 8 por ciento.

d.) **Respuesta**
Como lo dijimos en la parte (c.), el crecimiento del PIB real corresponde a:

$$\gamma_y = \frac{\Delta y}{y} = 0,15$$

16.3 Dinero y señoreaje.

a.) **Respuesta**
Sea S el señoreaje, el cual se define como:

$$S = \frac{\Delta H}{P}$$

donde H es la base monetaria y P es el nivel de precios. Como el multiplicador es $\tilde{\theta}$, entonces es conveniente expresar el señoreaje en función de la masa monetaria. Recordemos que la cantidad de dinero o masa monetaria es:

$$M = \tilde{\theta} H.$$

Por lo tanto el señoreaje expresado en función de M queda como:

$$S = \frac{\Delta M}{\tilde{\theta} P}$$

Si la inflación es de un 10 % entonces el señoreaje como fracción del producto es, usando la última relación:

$$S = \pi L(i, y) = 0,10\frac{a}{\tilde{\theta}}\bar{y}N(b - (r + 0,1))$$

Los supuestos que se tienen que cumplir son que la tasa a la cual crece la cantidad de dinero sea igual a la inflación, lo cual se cumple solo en el largo plazo.

b.) **Respuesta**
Para calcular la inflación óptima tenemos que derivar:

$$S = \pi L(i, y) = \pi \frac{a}{\bar{\theta}} \bar{y} N(b - (r + \pi))$$

respecto a π y despejar. Esto nos da:

$$\pi = \frac{b - r}{2}$$

Si la tasa de interés real sube entonces la inflación óptima disminuye. La razón detrás es que al subir la tasa de interés real la gente decide mantener menos circulante, por lo cual el señoreaje que pueden obtener el gobierno es menor.

c.) **Respuesta**
Ninguno, pues el señoreaje, que es igual a la perdida de poder adquisitivo de los individuos, se aplica sobre el dinero que la gente tiene en sus manos. En este caso como circulante, y el multiplicador sólo tiene efecto sobre los depósitos.

16.4 Hiperinflación y política fiscal

a.) **Respuesta**
La restricción presupuestaria es:

$$d = \frac{\dot{M}}{M}\frac{M}{P} = \sigma e^{-\alpha \pi_i^e}. \quad (17.1)$$

Usando la ecuación (16.26) se tiene que:

$$m(\sigma - \pi) = -\alpha \dot{\pi}^e e^{-\alpha \pi^e}. \quad (17.2)$$

En estado estacionario $\dot{\pi}^e = 0$, en consecuencia simplificando m a ambos lados tenemos que $\pi = \sigma$.
En estado estacionario el señoreaje es $\pi e^{-\alpha \pi}$, el que al maximizar se llega a que la máxima inflación es $1/\alpha$, lo que implica que:

$$d^M = 1/(e\alpha). \quad (17.3)$$

Si $d < d^M$ habrán dos estados estacionarios.

b.) **Respuesta**
Esta ecuación dice que cuando la inflación es mayor a la inflación esperada está última subirá, y viceversa. Diferenciando (16.26) se tiene que:

$$-\alpha \dot{\pi}^e = \pi - \sigma. \quad (17.4)$$

Usando (16.27) tenemos que:

$$\dot{\pi}^e = \frac{\beta}{1 - \alpha\beta}(\sigma - \pi^e). \quad (17.5)$$

Usando esta ecuación es fácil ver que el equilibrio de baja inflación es el estable.

c.) **Respuesta**

Si d sube, del gráfico se puede ver que σ sube, y la inflación esperada comienza a subir al igual que σ ya que la demanda comienza a caer, este proceso continuará hasta que la inflación llegue a su nuevo estado estacionario que es mayor inflación y crecimiento del dinero.

Si d sube más allá de d^M, entonces no hay estado estacionario y la tasa de crecimiento del dinero así como la inflación comienzan a subir hasta que hay una hiperinflación. σ debe acelerarse para que con inflación creciente, pero siempre ajustándose lento a σ, con lo cual el déficit se financia pero con un proceso explosivo de precios.

16.5 Señoreaje y crecimiento del producto

a.) **Respuesta**

Del hecho que no hay crecimiento del producto, podemos expresar la demanda por dinero como:

$$L(i, y) = L(r + \pi^e, y) = L(r + \pi^e)$$

Siguiendo a Friedman, supondremos *"perfect foresight"*, luego $\pi^e = \pi$. Además, normalizamos la tasa de interés real a 0 dado que es constante. Luego,

$$L = L(\pi)$$

En particular, para la economía A, la demanda por dinero será

$$\begin{aligned} L_A(i, y) &= \alpha - \beta i + \gamma y \\ &\alpha - \beta(r_A + \pi_A) + \gamma y \\ &\alpha - \cancelto{0}{\beta r_A} - \beta\pi_A + \gamma\overline{y} \\ L_A(\pi_A) &= \alpha - \beta\pi_A + \gamma\overline{y} \end{aligned}$$

Para la economía B,

$$\begin{aligned} L_B(i, y) &= Ay^{\gamma} i^{-\beta} \\ &Ay^{\gamma}(\cancelto{0}{r_B} + \pi_B)^{-\beta} \\ &\underbrace{Ay^{\gamma}}_{B}\pi_B^{-\beta} \\ L_B(\pi_B) &= B\pi_B^{-\beta} \end{aligned}$$

El señoreaje puede expresarse como:

$$S = \frac{\Delta M}{P} = \frac{\Delta M}{M/L(\pi)} = \frac{\Delta M}{M} L(\pi) = \pi L(\pi) \tag{17.6}$$

Luego,

$$S_A = \pi_A L(\pi_A) = \pi_A(\alpha + \gamma\overline{y} - \beta\pi_A) \tag{17.7}$$
$$S_B = \pi_B L(\pi_B) = B\pi_B^{1-\beta} \tag{17.8}$$

Para analizar la relación entre S y π, tomamos la primera y segunda derivada de 17.7

$$\frac{\partial S_A}{\partial \pi_A} = \alpha - 2\beta\pi_A + \gamma\overline{y} = 0$$
$$\pi_A^* = \frac{\alpha + \gamma\overline{y}}{2\beta} \tag{17.9}$$
$$\frac{\partial^2 S_A}{\partial \pi_A^2} = -2\beta \not< 0$$

Si $\beta > 0$ y $\alpha > 0$, $\frac{\partial S_A}{\partial \pi_A}$ será positiva cuando $\pi_A \in [0, \frac{\alpha}{2\beta}[$ y será negativa para valores de π superiores a $\frac{\alpha}{2\beta}$. Esto y el hecho que la segunda derivada sea negativa para todo π_A nos garantiza que esta función se comportará como una *curva de Laffer*. Además, $\gamma > 0$ para que las demandas por dinero tengan sentido.

Para el caso de la economía B, tenemos que el señoreaje es siempre creciente en la inflación a una elasticidad constante e igual a $(1-\beta)$. Esto es porque la demanda por dinero tiene una elasticidad constante con respecto a la inflación de $-\beta$.
Podemos verificar lo anterior, tomando la primera y segunda derivada de 17.8

$$\frac{\partial S_B}{\partial \pi_B} = B(1-\beta)\pi_B^{-\beta} = 0 \Rightarrow \beta = 1 \text{ o } \pi = 0$$

Para que tenga sentido el ejercicio debe ser cierto que $\beta > 0$ y por tanto, la demanda por dinero depende negativamente de la inflación (tasa de interés).
Condición 1:$\beta > 0$
Al mismo tiempo, debe ser que el señoreaje en algún punto baje al subir la inflación por lo que $\frac{\partial S_B}{\partial \pi_B} < 0$ por lo cual debe ser que $\beta > 1$. Si no se cumple esta segunda condición, el señoreaje es siempre creciente en π.
Condición 2:$\beta > 1$

b.) **Respuesta**
De (17.9), la tasa de inflación que maximiza S_A será $\pi_A^* = \frac{\alpha+\gamma\overline{y}}{2\beta}$.

En el caso de B podemos que dados las condiciones 1 y 2, la inflación optima sera $\pi = 0$. Notemos que la condición de segundo orden nos indica que en $\beta > 1$, no sera un máximo dado que al mirar la condición de segundo orden

$$\frac{\partial^2 S_B}{\partial \pi_B^2} = -B\beta(1-\beta)\pi_B^{-\beta-1} \not< 0$$

Pero tomamos una solución esquina donde $\pi = r = 0$

c.) **Respuesta**

Si el crecimiento del producto es distinto de cero, el señoreaje se puede expresar como

$$S = \left(\pi + \epsilon_{L,y}\frac{\Delta y}{y}\right) m = \left(\pi + \epsilon_{L,y} g\right) m$$

Entonces,

$$\epsilon^{A}_{L,y} = \frac{\partial L(\pi_A, y)}{\partial y}\frac{y}{L(\pi_A, y)} = \frac{\gamma y}{\alpha - \beta(\pi_A) + \gamma y}$$

$$\epsilon^{A}_{L,y} = \gamma y / L(\pi, y)$$

$$\epsilon^{B}_{L,y} = \frac{\partial L(\pi_B, y)}{\partial y}\frac{y}{L(\pi_B, y)} = A\gamma y^{\gamma-1}(\pi_B)^{-\beta}$$
$$\epsilon^{B}_{L,y} = \gamma$$

Luego el señoreaje se puede expresar como,

$$S_A = \left(\pi_A + \frac{\gamma y}{\alpha - \beta(\pi_A) + \gamma y} g\right) m$$

$$S_B = (\pi_B + \gamma g)\, m$$

d.) **Respuesta**

Maximizando para A,

$$S_A = \left(\pi_A + \frac{\gamma y}{\alpha - \beta(\pi_A) + \gamma y} g\right) L(\pi, y)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S_A}{\partial \pi_A} &= -\beta\left(\pi_A + \frac{\gamma y}{L(\pi, y)} g\right) + L(\pi, y)(1 + \frac{\gamma y g \beta}{L^2(\pi, y)}) = 0 \\
&= -\beta \pi_A L(\pi, y) - \beta\gamma y g + L(\pi, y) + \gamma y g \beta = 0 \\
&= L(\pi, y)(1 - \beta\pi_A) = 0 \\
\pi^*_A &= \frac{1}{\beta}
\end{aligned}$$

En el caso de B, tenemos que con $\pi = 0$ sigue maximizando la recaudación por señoreaje que ahora es positiva dado el crecimiento económico.

$$S_B = \gamma g(\alpha + \gamma y)$$

17. Política Monetaria y Mercados Financieros

17.1 Bonos ceros y riesgo de no pago.

a.) **Respuesta**
Con una tasa fija de $\bar{r}$ el precio de cada activo se puede escribir como:

$$p_a = \frac{1000}{(1+\bar{r})^4} \tag{18.1}$$

$$p_b = \sum_{i=1}^{4} \frac{250}{(1+\bar{r})^i} \tag{18.2}$$

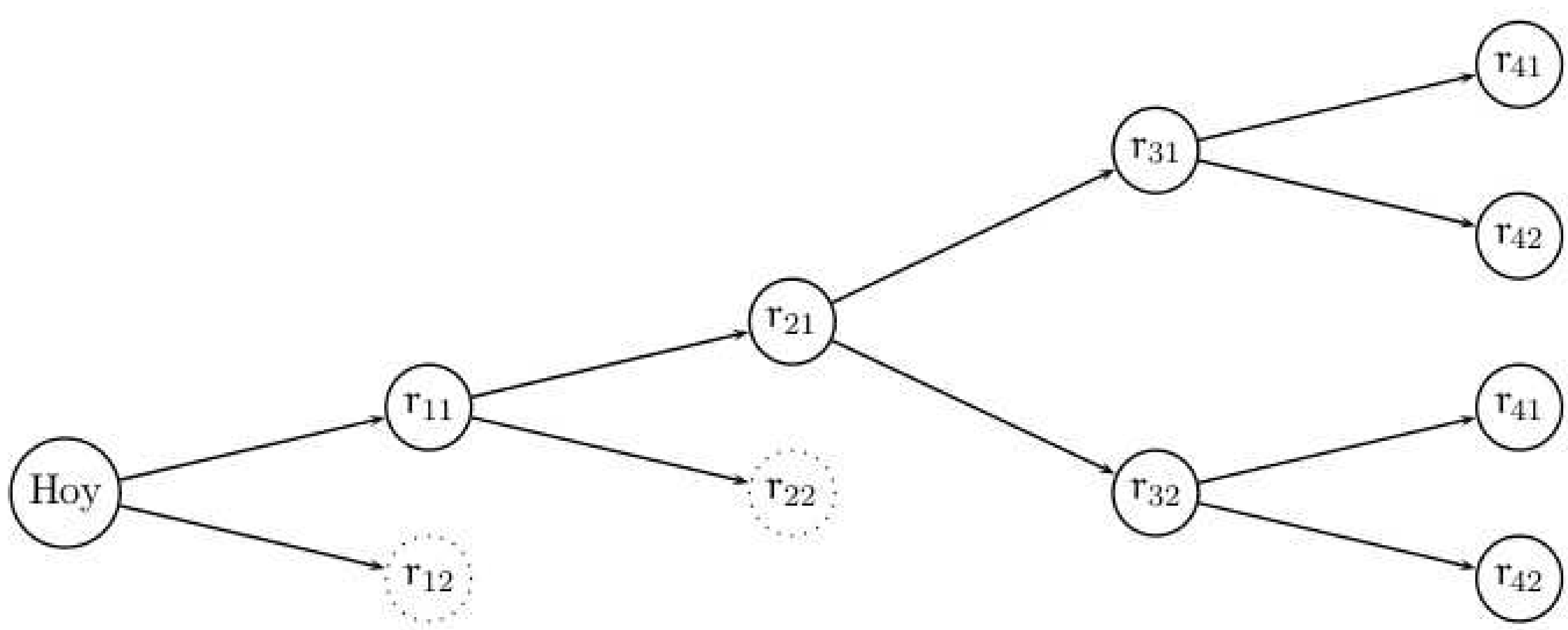
En el caso que la tasa de interés puede cambiar en cada periodo, tenemos que los precios serían :

$$p_a = \frac{1000}{\prod_{j=1}^{4}(1+r_j)} \tag{18.3}$$

$$p_b = \sum_{i=1}^{4} \frac{250}{\prod_{j=1}^{4}(1+r_j)} \tag{18.4}$$

b.) **Respuesta**
El activo paga 1000 en el ultimo periodo, pero lo que importa en este problema es la trayectoria de tasas de interés.

Tenemos una serie de eventos que pueden ocurrir como esta descrito en el siguiente gráfico:



De esta manera sabemos las tasas para el periodo 1 y 2 pero no las tasas en el periodo 3 y 4. Existen cuatro escenarios posibles con 25 % probabilidad cada uno.

$$p_a = \frac{1}{4R_{12}}\left[\frac{1000}{(1+r_{31})(1+r_{41})} + \frac{1000}{(1+r_{31})(1+r_{42})} + \frac{1000}{(1+r_{32})(1+r_{41})} + \frac{1000}{(1+r_{32})(1+r_{42})}\right] \tag{18.5}$$

Donde $R_{12} = (1 + r_{11})(1 + r_{21})$

c.) **Respuesta**
Sabemos que el bono tiene un retorno dado por la ecuación $750 = \frac{1000}{(1+r)^3}$. Lo cual nos entrega $r = \sqrt[3]{0{,}750} - 1 \simeq 10\,\%$
Este retorno parece ser alto al comparar con las tasas esperadas.

Si es deseable comprar el bono o no depende de la evolución de las tasas de interés que representan el costo alternativo de la inversion en el bono. Esto es lo mismo que encontrar el valor esperado descontado del flujo que entrega el bono y después comparar con el precio del bono.

Esto lo podemos encontrar desarrollando el valor esperado descontado del bono.

Existen cuatro escenarios posible con los siguientes descuentos:

Evento	Probabilidad	Descuento
1	$\pi_1 = 0{,}8 \cdot 0{,}3$	$(1{,}05)(1{,}05)(1{,}05) = 1{,}158$
2	$\pi_2 = 0{,}8 \cdot 0{,}7$	$(1{,}05)(1{,}05)(1{,}15) = 1{,}268$
3	$\pi_3 = 0{,}2 \cdot 0{,}3$	$(1{,}05)(1{,}10)(1{,}05) = 1{,}213$
4	$\pi_4 = 0{,}2 \cdot 0{,}7$	$(1{,}05)(1{,}10)(1{,}15) = 1{,}328$

Calculando el valor esperado:

$$\sum_{i=1}^{4} \pi_i \frac{1000}{R_i} \simeq 804$$

Considerando que el bono cuesta sólo 750, existe una diferencia que es posible arbitrar adquiriendo el bono

d.) i. **Respuesta**
Imprecision: El retorno al deposito tiene el mismo plazo que el bono. Además, se debe notar que la utilidad del individuo no depende del tiempo.

El agente económico maximiza su utilidad esperada por lo que podemos comparar el bono y el deposito en esta dimension.

La utilidad esperado del bono es $0{,}6 \cdot \frac{(1000)^{0{,}1}}{0{,}1} + 0{,}4 \frac{(0)^{0{,}1}}{0{,}1} \simeq 12$. La alternativa es recibir con seguridad 550, que entrega utilidad de aproximadamente 18.

ii. **Respuesta**
Debido a la concavidad de la función de utilidad este agente económico le produce des-utilidad el riesgo por lo que prefiere los 550 seguro que los 1000 con 60 % de probabilidad.

iii. **Respuesta**
En la pregunta anterior, los agentes no les importaba el riesgo dado que no eran aversos al riesgo y se fijaban solamente en el valor esperado.

17.2 Bonos soberanos y riesgo país.

a.) **Respuesta**
La expresión del precio de un bono que madura en T períodos es

$$P_T = \frac{\overline{Z}}{\prod_{i=1}^{T}(1 + r_{t+i-1})}$$

Donde r_{t+i-1} representa la tasa forward.

b.) **Respuesta**
Para el primer período

$$P_1 = 100 = \frac{120}{(1 + r_t)}$$

Por lo tanto en este período coinciden la tasa forward y de retorno

$$r_t = \overline{r_1} = 0,2$$

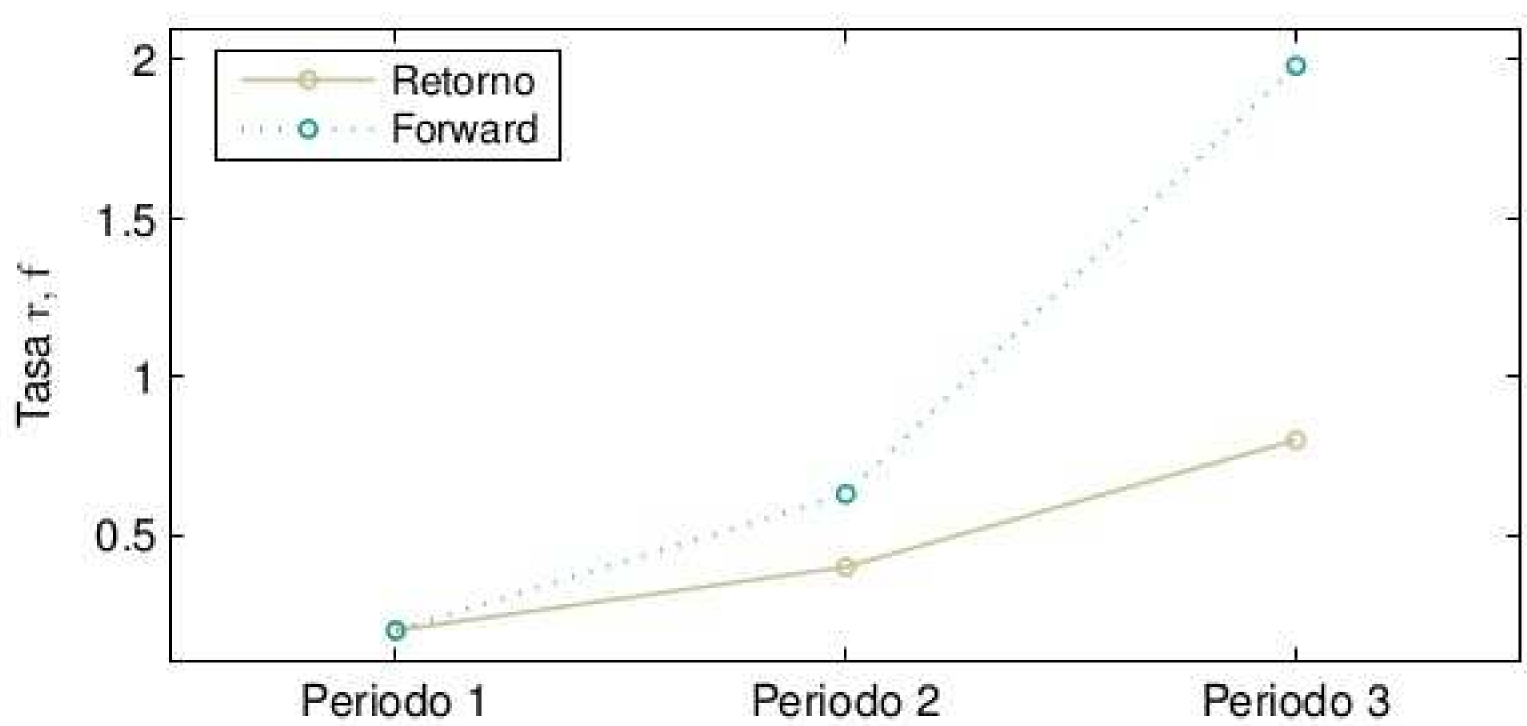
Para el período 2 sabemos que como se duplica el retorno de los bonos $\overline{r_2} = 0,4$ y por lo tanto

$$(1 + r_t)(1 + r_{t+1}) = (1 + \overline{r_2})^2$$
$$(1 + 0,2)(1 + r_{t+1}) = (1 + 0,4)^2$$
$$\Rightarrow \quad r_{t+1} = 0,63$$

Luego igualmente para el tercer período se duplica el retorno, por lo tanto $\overline{r_3} = 0,8$, entonces para calcular la tasa forward del tercer período

$$(1 + r_t)(1 + r_{t+1})(1 + r_{t+2}) = (1 + \overline{r_3})^3$$
$$(1 + 0,2)(1 + 0,63)(1 + r_{t+2}) = (1 + 0,8)^3$$
$$\Rightarrow \quad r_{t+2} = 1,98$$

Curva de Retorno y Forward



c.) **Respuesta**

Obtendremos los precios mediante las tasas de retorno

$$P_2{}^A = \frac{120}{(1+\overline{r_2})^2} = \frac{120}{1,4^2} = 61,22$$

$$P_3{}^A = \frac{120}{(1+\overline{r_3})^3} = \frac{120}{1,8^3} = 20,58$$

d.) **Respuesta**

En el caso del pais B el pago se realizará con seguridad por lo tanto

$$P_3{}^B = \frac{F}{(1+r_t)(1+r_{t+1})(1+r_{t+2})}$$

Ahora veamos el caso del pais A, y supongamos que el pago se realizará solo con una probabilidad p, por lo tanto

$$P_3{}^A = \frac{pF}{(1+r_t)(1+r_{t+1})(1+r_{t+2})} + 0(1-p)$$

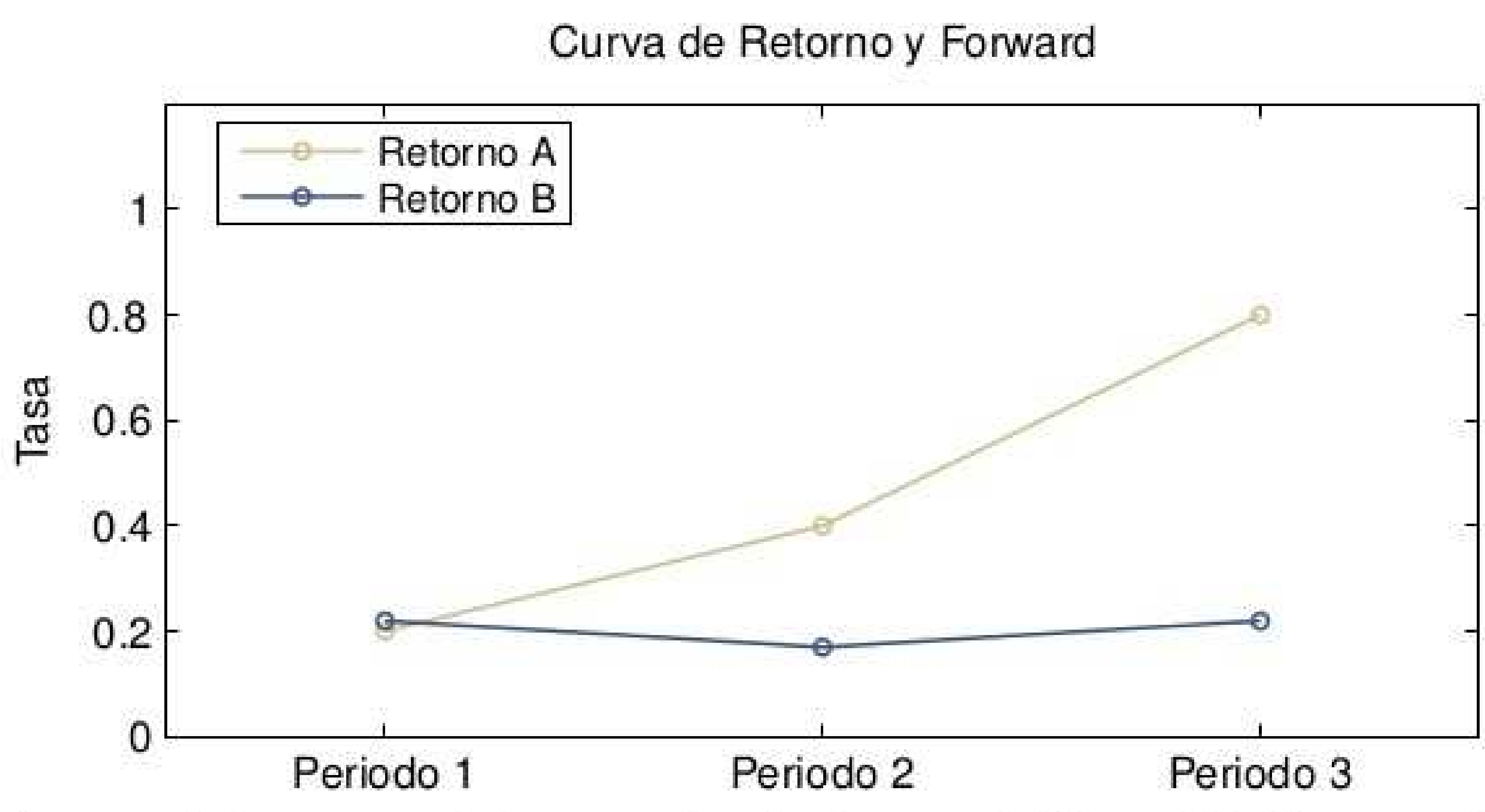
e.) **Respuesta**

Primero obtendremos las tasas de retorno para el pais B

$$P_1{}^B = 98 = \frac{120}{(1+\overline{r_1})} \quad \Rightarrow \quad \overline{r_1} = 0,22$$

$$P_2{}^B = 87 = \frac{120}{(1+\overline{r_2})^2} \quad \Rightarrow \quad \overline{r_2} = 0,17$$

$$P_3{}^B = 66 = \frac{120}{(1+\overline{r_3})^3} \quad \Rightarrow \quad \overline{r_3} = 0,22$$



Luego obtenemos el riesgo país de A con el diferencial de tasas de retorno. Para el período 1 es de 0 %, para el período 2 es de 23 % y en 3 es de 58 %.

$$0,2-0,22=-0,02\approx 0$$
$$0,4-0,17=0,23$$
$$0,8-0,22=0,58$$

f.) **Respuesta**
Obtendremos probabilidad que el mercado le asigna al pais A de no pago. Sabemos que

$$P_3{}^A=\frac{pF}{(1+\overline{r}_3)^3}+0(1-p)$$

Utilizando la tasa de retorno del ítem anterior

$$20,58=\frac{120p}{(1+0,22)^3}+0(1-p) \quad \Rightarrow \quad p=0,31$$

Por lo tanto la probabilidad de no pago es de 69 %.

17.3 Tasas de retorno y tasas *forward* I.

Respuesta
Tenemos como incognita las tasa de interés para los próximos tres periodos. sin embargo tenemos precios de bonos a distintos plazos que nos entregan tres ecuaciones.

$$40 = \frac{52}{(1+i^e_{1t})} \tag{18.6}$$
$$40 = \frac{88}{(1+i^e_{1t})(1+i^e_{1t+1})} \tag{18.7}$$
$$40 = \frac{116}{(1+i^e_{1t})(1+i^e_{1t+1})(1+i^e_{1t+2})} \tag{18.8}$$

El primero bono nos entrega la tasa esperada i^e_{1t}:

$$40 = \frac{52}{(1+i^e_{1t})} \tag{18.9}$$
$$i^e_{1t} = \frac{52}{40}-1=0{,}3 \tag{18.10}$$

El segundo bono nos entrega la tasa esperada i^e_{1t+2}:

$$40 = \frac{88}{(1+i^e_{1t})(1+i^e_{1t+1})} \tag{18.11}$$
$$40 = \frac{88}{(1{,}3)(1+i^e_{1t+1})} \tag{18.12}$$
$$i^e_{1t+1} = \frac{88}{1{,}3\cdot 40}-1\simeq 0,69 \tag{18.13}$$

El tercer bono nos entrega la tasa esperada i^e_{1t+2}:

$$40 = \frac{116}{(1+i^e_{1t})(1+i^e_{1t+1})(1+i^e_{1t+2})} \quad (18.14)$$

$$40 = \frac{116}{(1{,}3)(1{,}69)(1+i^e_{1t+2})} \quad (18.15)$$

$$i^e_{1t+2} = \frac{116}{1{,}3 \cdot 1{,}69 \cdot 40} - 1 \simeq 0{,}32 \quad (18.16)$$

17.4 Tasas de retorno y tasas *forward* II.

a.) **Respuesta**

Ver tabla. La primera columna muestra los periodos de pago, la segunda columna muestra las tasas que rinden los bonos a un periodo en el futuro, la tercera columna muestra la tasa que rinden bonos a la fecha j a partir de hoy, la cuarta columna muestra el precio de los bonos del periodo cero a la fecha j, la quinta columna muestra el precio de los bonos de un periodo a partir del futuro.

La forma de solucionar para la tabla era saber la relación entre el precio de un bono de un periodo, de varios periodos y las respectivas tasas forward. Las ecuación fundamental es

$$\text{Precio } d^0_4 = \frac{1}{(1+r^1_1)(1+r^2_1)(1+r^3_1)(1+r^4_1)} = \frac{1}{(1+r^1_4)^4}$$

Tasas de Bonos tipo $d^j_1, d^0_2, d^0_3, d^0_4$				
Period j	Tasa Forward	Tasa Retorno	Precio del Bono $d_{1,t}$	Precio Bono $d_{t,t}$
1	*0.02*	0.02	*98.04*	*98.04*
2	0.02	*0.02*	*96.12*	*98.04*
3	*0.018*	*0.019*	94.42	*98.23*
4	*0.05*	*0.027*	*89.93*	95.24

b.) **Respuesta**

El precio de los bonos de largo plazo se determina en el equilibro de oferta y demanda por estos. La teoría de las expectativas nos dice que este equilibrio sera tal que el precio reflejara las tasas marginales esperadas hasta la fecha de maduración del bono. Sin embargo si hay alguna distorsión como la mencionada en el enunciado, puede que este precio se desvié del predicho por la teoría. Al eliminarse la distorsión legal que genera esta sobre demanda por bonos largos, de precio de estos debe bajar y su tasa subir. En efecto si uno espera que la disposición no sea permanente puede arbitrar aprovechando esta falla de mercado.

17.5 Curva de retorno.

a.) **Respuesta**
El yield curve muestra las tasas promedias que se esperan hasta la fecha indicada, mientras la curva forward muestra exclusivamente las tasas marginales de un momento en el futuro a otro.

b.) **Respuesta**
Se puede ver que ha aumentado ya que subió la tasa corta en el yield curve.

c.) **Respuesta**
La figura de De Gregorio muestra una curva de rendimiento relativamente plana, por lo que no se esta premiando mucho esperar para recibir un mayor retorno en el futuro. Esto implica que el mercado espera que las tasas futuras se mantengan a niveles similares a las de hoy y de esto se puede concluir que no se esperan presiones inflacionarias y la consecuente reacción por parte del FED subiendo las tasas cortas en el futuro.

17.6 Precios de bonos y duración

a.) **Respuesta**
Este bono se compone de n cupones los cuales cada uno puede representar un bono *bullet* con distintos plazos. Además quedaría el bono original que paga 100 a su maduración y el cual seria un bono *bullet* al ya no tener cupones.

El numero total de bonos *bullet* es de $n+1$.

b.) **Respuesta**
El precio de este bono se puede representar por el valor presente de sus flujos futuros descontados a la tasa relevante.

$$P = \sum_{i=1}^{n} \frac{C}{\Pi_{j=1}^{i}(1+f_{1t+j}^{e})} + \frac{100}{\Pi_{j=1}^{n+1}(1+f_{1t+j}^{e})} \tag{18.17}$$

En términos de una tasa de retorno r_t

$$P = \sum_{i=1}^{n} \frac{C}{(1+r^{e})^{i}} + \frac{100}{(1+r^{e})^{n+1}} \tag{18.18}$$

Dado que determinamos que el retorno de este instrumento en $R = 1 + r^{e}$, podemos escribir el precio de la siguiente manera:

$$P = \sum_{i=1}^{n} \frac{C}{R^{i}} + \frac{100}{R^{n+1}} \tag{18.19}$$

$$P = \frac{C}{R}\left[1-\left(\frac{1}{R}\right)^{n}\right] + \frac{100}{R^{n+1}} \tag{18.20}$$

se puede comprobar fácilmente que el precio P esta inversamente relacionado al retorno R.

Si el banco central sale a comprar estos bonos, aumenta la demanda por estos, subiendo su precio, bajando su retorno y aumentando la cantidad de dinero.

c.) **Respuesta**
La duración se puede escribir de la siguiente manera:

$$D = \frac{VP(C_1) \cdot 1 + VP(C_2) \cdot 2VP(C_3) \cdot 3 + \ldots VP(C_n) \cdot n + VP(F)}{VP}$$

Donde $VP(C_i)$ es el valor presente del flujo C en el periodo i, $VP(F)$ es el valor presente del pago final de 100 y VP es el valor presente del bono total.

Dado que el valor presente del bono es igual a su precio podemos reemplazar VP por P y descontamos usando el retorno R tenemos:

$$D = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{C \cdot i}{R^i} + \frac{100}{R^{n+1}}}{P}$$

d.) **Respuesta**
Podemos ver al calcular la derivada de P con respecto al retorno R

$$\frac{\partial P}{\partial R} = -\sum_{i=1}^{n} i \frac{C}{R^{i+1}} - (n+1)\frac{100}{R^{n+2}} \tag{18.21}$$

$$\frac{\partial P}{\partial R} = \frac{-\sum_{i=1}^{n} i \frac{C}{R^i} - (n+1)\frac{100}{R^{n+1}}}{P} \frac{P}{R} \tag{18.22}$$

$$\frac{\partial P}{\partial R} = -\frac{DP}{R} \tag{18.23}$$

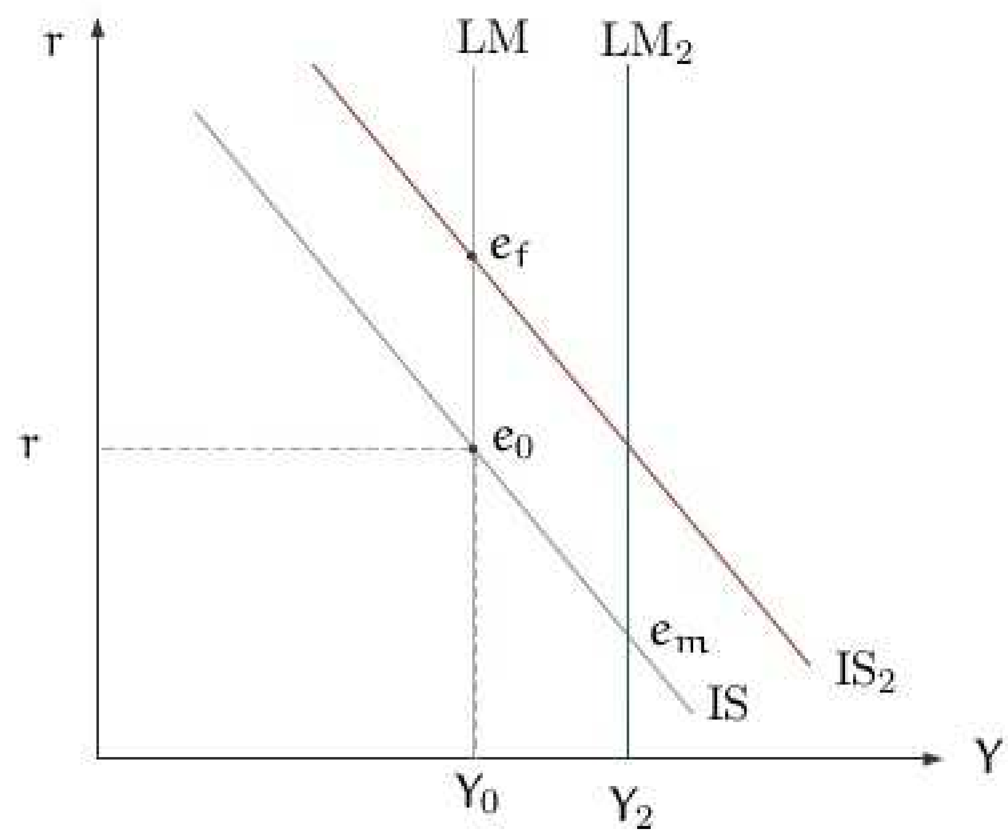
Vemos que entre mayor duración, mayor es el efecto negativo del retorno sobre el precio del potafolio/bono con cupones.

19. El Modelo Keynesiano de Economía Cerrada: IS-LM

19.1 Casos extremos de IS y LM.

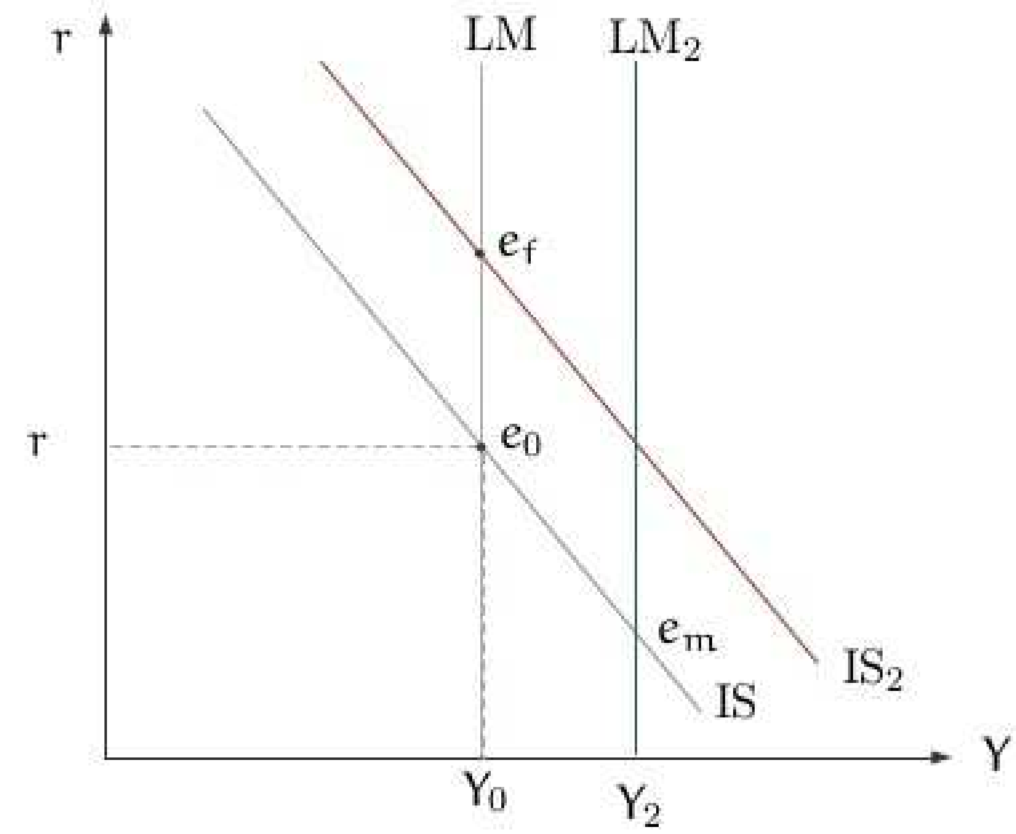
a.) **Respuesta**

La pendiente de la IS esta dada por la relación entre la tasa de interés y el equilibrio en el mercado de bienes. En la formulación base, solo la inversion depende de la tasa de interés y esta da su pendiente negativa dado $\frac{\partial I}{\partial r} < 0$. Si esta relación no existe, la IS no tiene pendiente y la política monetaria no tendría ningún efecto sobre la demanda. En el caso de la política fiscal el efecto seria total ya que no existe efecto de crowding out de la inversion!



b.) **Respuesta**

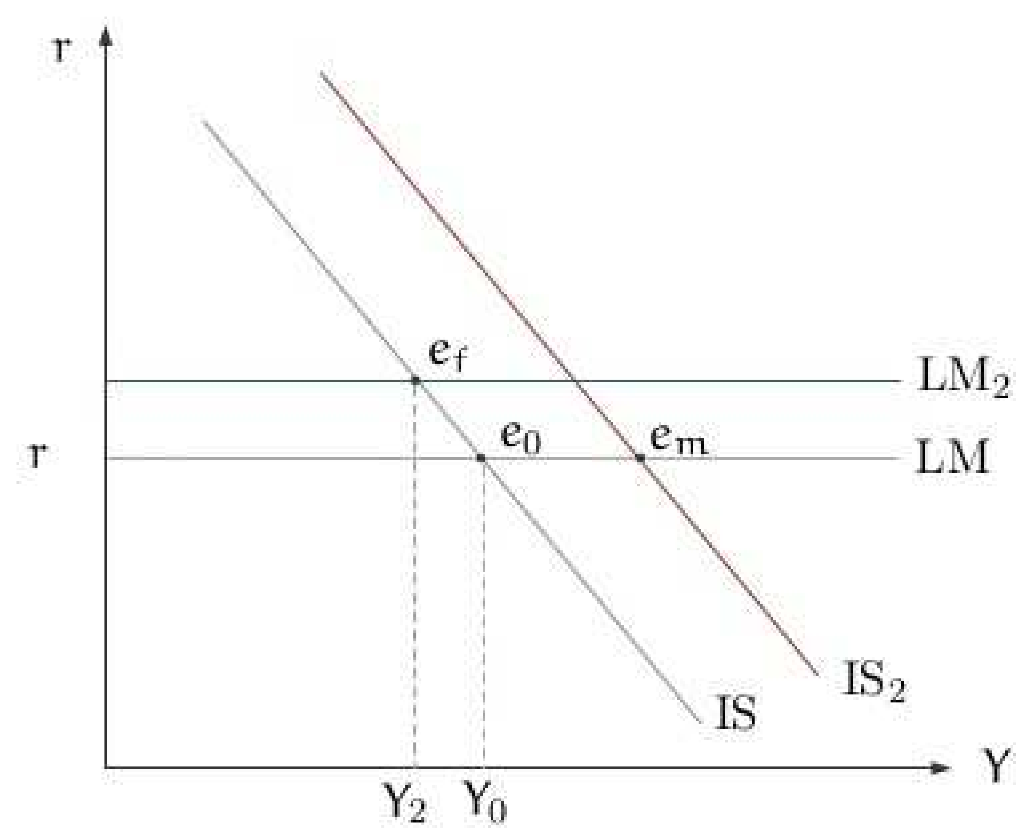
El equilibrio en el mercado del dinero no influye la tasa de interes, por lo que a cada nivel de producto existe un nivel de M y en el plan (Y, r), es totalmente insensible a la tasa de interés.



La política fiscal es inútil pero la monetaria tiene mucho efecto.

c.) **Respuesta**

La LM tiene pendiente positiva, debido que a cada nivel de ingreso es necesario una tasa d einteres mas alta para vaciar el mercado del dinero. Si la demanda por dinero no es afectada por el ingreso, entonces la tasa de interes que quilibria el mercado del dinero no cambia al variar el ingreso, lo que se ve con una LM totalmente horizonal.



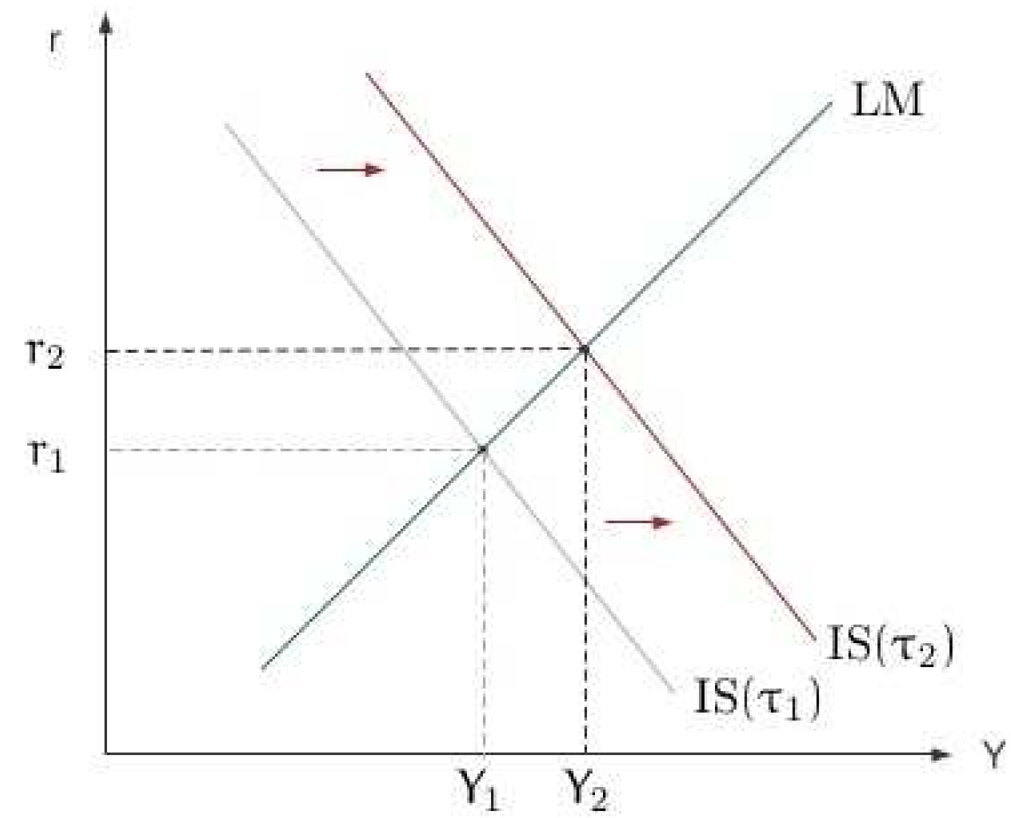
d.) **Respuesta**

Pequeños cambios en la tasa de interés generan grandes cambios en la demanda por dinero por lo que se requieren grandes cambios en el producto para generar cambios pequeños en al tasa de interés sobre la LM.

19.2 Impuesto y nivel de actividad en el modelo IS/LM.

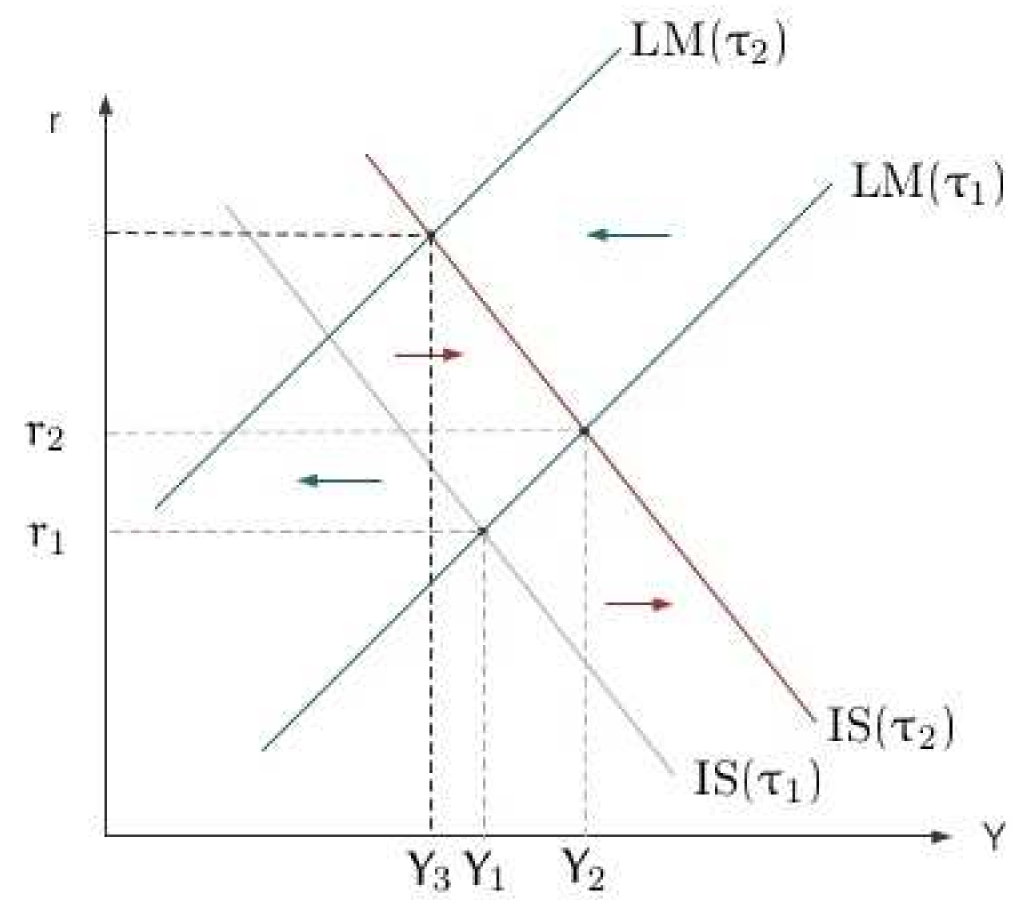
a.) **Respuesta**

Una reducción de impuestos aumenta el ingreso disponible de las personas, lo cual lleva a los individuos a aumentar su consumo. Este aumento en el consumo hace aumentar la producción de las firmas y de esa forma aumentar el producto. Por otra parte, el aumento en el consumo lleva a los individuos a demandar más dinero lo cual lleva a un aumento en la tasa de interés. Esto se puede apreciar en el siguiente gráfico, donde el producto aumenta de Y_1 a Y_2 y la tasa de interés aumenta de r_1 a r_2.



b.) **Respuesta**

Si ahora la demanda por dinero depende del ingreso disponible y no del ingreso total, entonces una rebaja de impuestos puede ser contractiva. En este caso, como se puede ver en el gráfico 2, el producto final Y_2 es menor que el inicial, Y_1. La razón de esto se debe a la sensibilidad de la de la tasa de interés respecto a la demanda por dinero; un aumento de la demanda por dinero, producto de un mayor ingreso disponible, aumenta la tasa de interés, podemos ver en el gráfico que la LM se desplaza a la izquierda, es decir para cada menores impuestos necesito menor producto para alcanzar el equilibrio en el mercado del dinero. Entonces una reducción de impuesto lleva a un aumento en la demanda por dinero, lo que hace que la tasa de interés suba. Esto lleva a una disminución en la inversión, lo que hace que el producto caiga. Sin embargo el mayor ingreso disponible hace que el consumo aumente, (este es el movimiento de la IS). Por lo tanto si el aumento del consumo es menor que la disminución de la inversión entonces la rebaja de impuestos puede ser contractiva.



19.3 Política fiscal y ahorro.

a.) **Respuesta**
Sabemos:

$$Y = C + I + G \tag{20.1}$$

por lo tanto reemplazando (19.24), (19.25), (19.26) en (20.1) obtenemos el producto de esta economía, lo cual nos da:

$$Y = \frac{1}{1-c}\left[\bar{C} - cT_0 + \bar{I} + G_0\right]$$

El ahorro privado es:

$$S_p = Y - T - C$$

reemplazando el producto y el consumo nos da:

$$S_p = \bar{I} + G_0 - T_0$$

El ahorro de gobierno es:

$$S_g = T_0 - G_0$$

Por lo tanto el ahorro nacional es:

$$S_n = S_p + S_g = \bar{I}$$

lo cual es bastante intuitivo porque esta es una economía cerrada. Aunque no lo dice el enunciado no hay exportaciones ni importaciones, por lo tanto es cerrada.

b.) **Respuesta**

Si ahora el gobierno decide aumentar los impuestos de T_0 a T_1 entonces el ahorro privado, de gobierno, nacional queda como:

$$\begin{aligned} S_p &= \bar{I} + G_0 - T_1 \\ S_g &= T_1 - G_0 \\ S_n &= \bar{I} \end{aligned}$$

es decir cae el ahorro privado, sube el ahorro de gobierno, pero el ahorro nacional se mantiene igual. Por otra parte el producto queda:

$$Y = \frac{1}{1-c}\left[\overline{C} - cT_1 + \bar{I} + G_0\right]$$

es decir el producto cae cuando el gobierno sube los impuestos. La razón de esto es que la gente tiene menos recursos para consumir.

c.) **Respuesta**
Si el gobierno decide ahora bajar el gasto de gobierno de G_0 a $G_1 =$ en la misma magnitud que el aumento de los impuestos, es decir $G_0 - G_1 = T_1 - T_0$. En ese caso el ahorro privado, de gobierno, nacional queda como:

$$\begin{aligned} S_p &= \bar{I} + G_1 - T_0 \\ S_g &= T_0 - G_1 \\ S_n &= \bar{I} \end{aligned}$$

es decir cae el ahorro privado, sube el ahorro de gobierno, pero el ahorro nacional se mantiene igual.
Por otra parte el producto queda:

$$Y = \frac{1}{1-c}\left[\overline{C} - cT_0 + \bar{I} + G_1\right]$$

es decir el producto cae cuando el gobierno baja el gasto de gobierno. Sin embargo ahora cae más que cuando aumenta los impuestos.

d.) **Respuesta**
En este caso el producto, el ahorro nacional, pivado y de gobierno son:

$$\begin{aligned} Y &= \frac{1}{1-c-b}\left[\bar{C} - cT_0 + \bar{I} + G_0\right] \\ S_p &= \frac{1-c}{1-c-b}\left[\bar{I} + G_0 - (1-b)T_0 + \bar{C}b\right] \\ S_g &= T_0 - G_0 \\ S_n &= \frac{1-c}{1-c-b}\left[\bar{I} + bG_0 + \bar{C}b\right] \end{aligned}$$

Si el gobierno decide aumentar los impuestos de T_0 a T_1, entonces el producto, el ahorro nacional, pivado y de gobierno son:

$$\begin{aligned}
Y &= \frac{1}{1-c-b}\left[\bar{C} - cT_1 + \bar{I} + G_0\right] \\
S_p &= \frac{1-c}{1-c-b}\left[\bar{I} + G_0 - (1-b)T_1 + \bar{C}b\right] \\
S_g &= T_1 - G_0 \\
S_n &= \frac{1-c}{1-c-b}\left[\bar{I} + bG_0 + \bar{C}b\right]
\end{aligned}$$

nuevamente cae el ahorro privado y sube el ahorro de gobierno, pero el ahorro nacional no varia.

19.4 Elección de instrumentos.

a.) **Respuesta**
Es razonable asumir $\bar{\alpha} > 1$ porque los individuos no tienen todo el dinero como efectivo y además porque los bancos tienen alguna obligación de reserva.

b.) **Respuesta**
En este caso se tiene que:

$$Var(m) = \alpha^2 \sigma_\alpha^2$$

c.) **Respuesta**
En este caso se tiene que:

$$Var(M/P) = Var(kY - hi) = k^2 \sigma_y^2$$

Elegirá fijar la tasa de interés si $k^2\sigma_y^2 < \alpha^2\sigma_\alpha^2$, de lo contrario elegirá fijar la base monetaria.

19.5 Estabilizadores automáticos I.

a.) **Respuesta**
El producto que equilibra el mercado de valor agregado es el usual

$$\begin{aligned}
Y &= C + I + G && (20.2) \\
Y &= \overline{C} + c_1 Y - c_1 T + \bar{I} - d_1 r + \overline{G} && (20.3) \\
&\dots && (20.4) \\
Y &= \frac{\overline{C} - c_1 T + \bar{I} + \overline{G} - d_1 r}{1 - c_1} && (20.5)
\end{aligned}$$

$$Y^* = \frac{A - d_1 r}{1 - c_1}$$

b.) **Respuesta**
En equilibrio es trivial ver que $Y = Y^*$ por definición de Y^*.

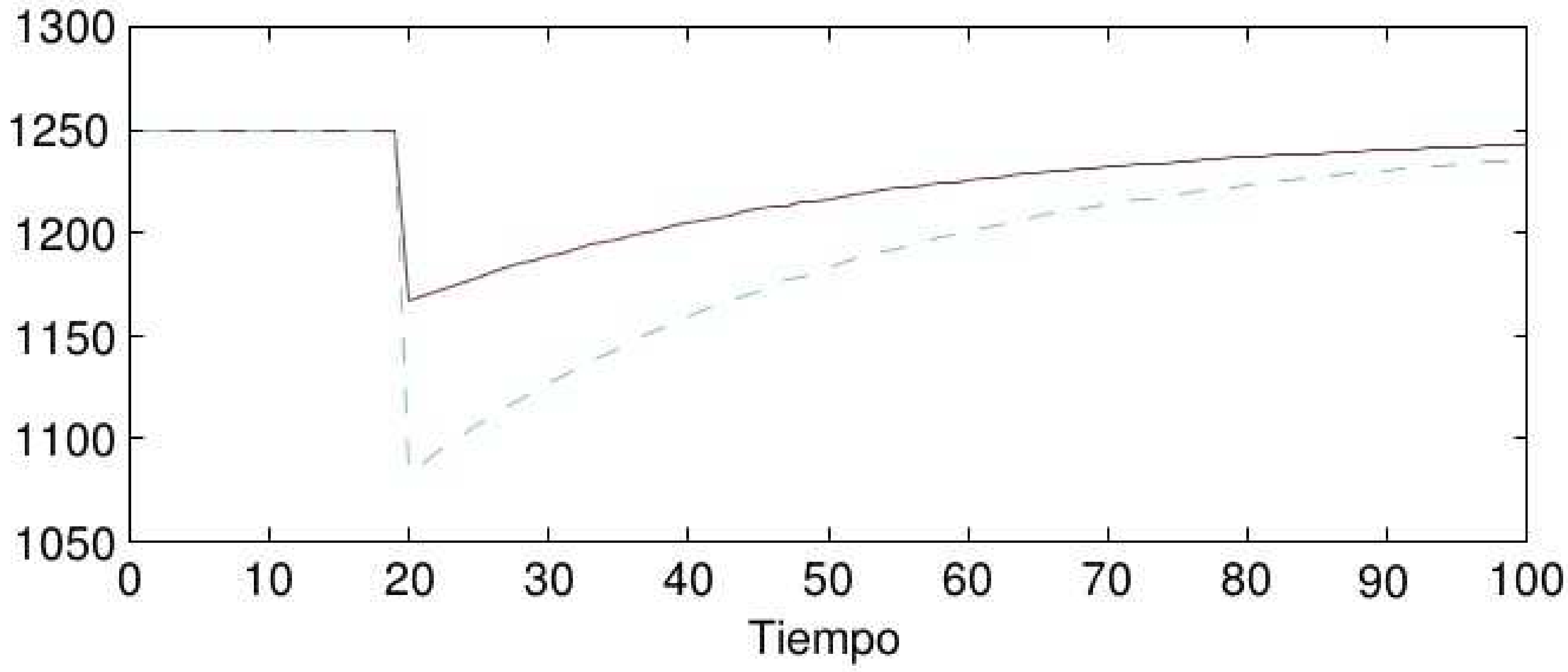
c.) **Respuesta**

El gasto es contra cíclico en esta formulación ya que disminuye cuando el producto esta sobre el de equilibrio y aumenta cuando esta por debajo. En una economía con shocks a la demanda autónoma por ejemplo, los ciclos se verían amortiguados cuando el gasto se comporta de esta manera.

En la medida que las fluctuaciones del ingresos son indeseables, este comportamiento contra cíclico seria bueno para el bienestar.

d.) **Respuesta**

La respuesta del gobierno en un caso seria 0 y en el segundo seria aumentar el gasto de tal manera de disminuir la caida en el producto.



19.6 Estabilizadores automáticos II.

a.) **Respuesta**

$$Y = C + I + G$$

$$Y = \bar{C} + c(Y - \tau Y - T) + \bar{I} + \tau\bar{Y} + T$$

$$Y = \left(\frac{\bar{C} - T(1-c) + \bar{I} + \tau\bar{Y}}{(1 - c + c\tau)}\right)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \bar{C}} = \frac{1}{1 - c + c\tau}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \bar{I}} = \frac{1}{1 - c + c\tau}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \bar{Y}} = \frac{\tau}{1 - c + c\tau}$$

El multiplicador de

$$\bar{Y}$$

es menor ya que al aumentar el producto de pleno empleo el gasto de gobierno solo cambia en

$$\tau\bar{Y}$$

b.) **Respuesta**

Al agregar el efecto aleatorio sobre la inversión, el producto de equilibrio queda:

$$Y = \left(\frac{\bar{C} - T(1-c) + \bar{I} + \epsilon + \tau\bar{Y}}{(1-c+c\tau)}\right)$$

luego

$$V(Y) = \frac{\sigma^2}{(1-c+c\tau)^2}$$

$$\frac{\partial V(Y)}{\partial \tau} = \frac{-2\sigma^2}{(1-c+c\tau)^3}$$

El signo es negativo y por lo tanto la varianza se reduce

$$\frac{\partial V(Y)}{\partial T} = 0$$

puesto que la varianza del producto no depende de T

El impuesto proporcional, disminuye la varianza del producto, mientras que el fijo no tiene efectos sobre la varianza, por esta razón al primero se le llama estabilizador automático.

c.) **Respuesta**

$$L = \frac{\alpha\sigma^2}{1-c+c\tau} + \beta\tau$$

$$\frac{\partial L}{\partial \tau} = -\frac{2\alpha\sigma^2}{(1-c+c\tau)^3 + \beta} = 0$$

$$(1-c+c\tau)^{-3} = \frac{\beta}{2\alpha\sigma^2}$$

$$(1-c+c\tau) = \left(\frac{2\alpha\sigma^2}{\beta}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\tau^* = \frac{\left(\frac{2\alpha\sigma^2}{\beta}\right)^{\frac{1}{3}} + c - 1}{c}$$

falta verificar la condición de segundo orden pero:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \tau^2} = \frac{6\alpha\sigma^2}{(1-c+c\tau)^4} > 0$$

y por lo tanto τ^* es efectivamente un mínimo de la función de pérdida. Podemos ver que si α sube τ^* sube ya que la pérdida por varianza del producto se hace más importante y por lo tanto es óptimo subir el impuesto variable que es regulador autoático, por el contrario si sube β, se hace más importante la pérdida por distorsiones y esto implica que será óptimo situar el impuesto distorsionador en un nivel menor.

19.7 IS-LM en dos períodos.

a.) **Respuesta**
La inversión puede depende positivamente de la tasa de interés futura ya que pueden anticipar algunas inversiones para hacerlas a una tasa mas baja. Por otro lado puede que la tasa de interés nos entregue información con respecto al nivel de la actividad y por lo tanto el retorno de las inversiones en el futuro.

La inversión también depende del gasto futuro, ya que este puede realizar políticas o llevar a cabo un mejoramiento de la estructura, lo cual mejora las expectativas en el presente y promueve una mayor inversión. Además como existe un efecto multiplicador en esta esquema, aumentos en el gasto futuro implican un crecimiento que llevara a un mayor retorno esperado para las inversiones.

b.) **Respuesta**
La curva LM para ambos periodos es la misma, por lo que calculando tenemos para $t = 1, 2$:

$$\begin{aligned}
M^s &= M^d \\
M &= \psi_0 + \psi_1 Y_t - \psi_2 i_t \\
LM: \ i_t &= \frac{\psi_0 + \psi_1 Y_t - M}{\psi_2}
\end{aligned}$$

Encontrando la curva IS para el segundo periodo, obtenemos:

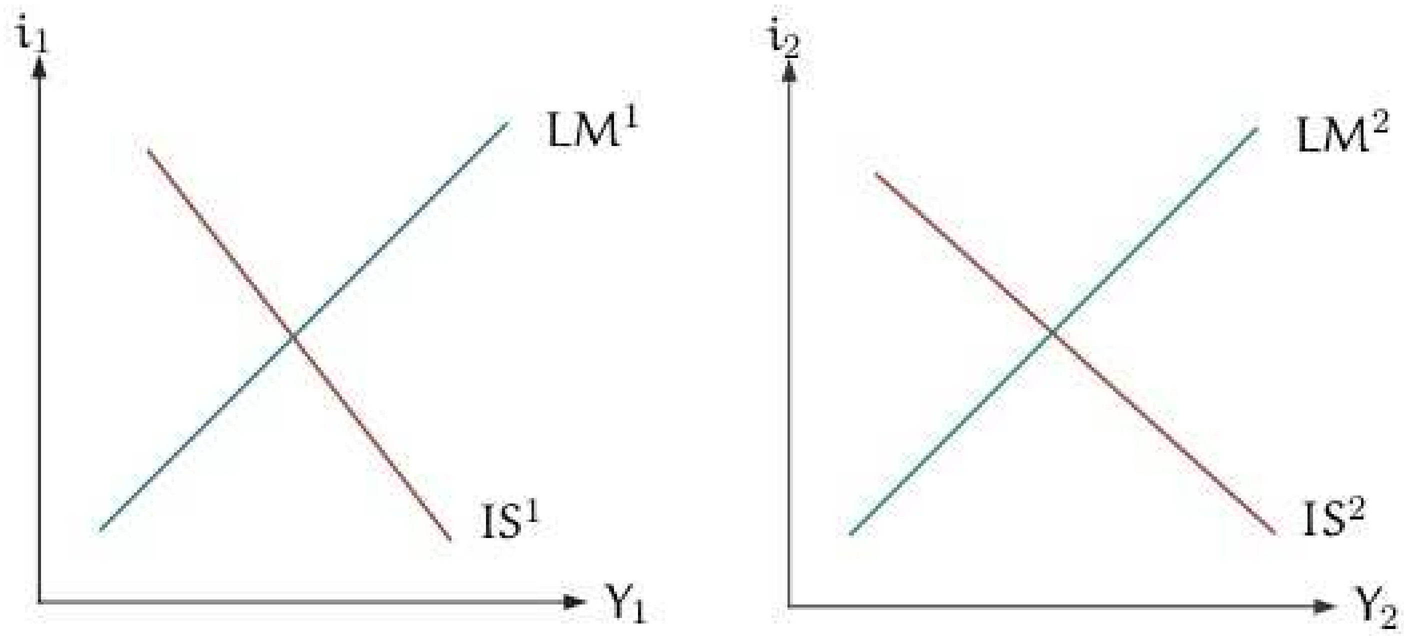
$$\begin{aligned}
Y_2 &= \alpha_0 + \alpha_1 Y_2 (1-\tau_2) + \phi_0 - \phi_1 i_2 + \overline{g_2} \\
Y_2 (1 - \alpha_1 (1-\tau_2)) &= \alpha_0 + \phi_0 - \phi_1 i_2 + \overline{g_2} \\
IS_2: \ Y_2 &= \frac{1}{1-\alpha_1(1-\tau_2)} \cdot \underbrace{(\alpha_0 + \phi_0 - \phi_1 i_2 + \overline{g_2})}_{A_2(i_2)} \\
IS_2: \ Y_2 &= \frac{A_2(i_2)}{1-\alpha_1(1-\tau_2)}
\end{aligned}$$

De igual manera, obtenemos la relación IS del primer periodo:

$$\begin{aligned}
Y_1 &= \alpha_0 + \alpha_1 Y_1 (1-\tau_1) + +\phi_0 - \phi_1 i_1 + \phi_2 i_2 + \phi_3 g_2 + \phi_4 Y_2 + \overline{g_1} \\
Y_1 (1 - \alpha_1 (1-\tau_1)) &= \alpha_0 + \phi_0 - \phi_1 i_1 + \phi_2 i_2 + \phi_3 g_2 + \phi_4 Y_2 + \overline{g_1} \\
IS_1 :\ Y_1 &= \frac{1}{1-\alpha_1(1-\tau_1)} \cdot \underbrace{(\alpha_0 + \phi_0 - \phi_1 i_1 + \phi_2 i_2 + \phi_3 g_2 + \phi_4 Y_2 + \overline{g_1})}_{A_1(i_1)} \\
IS_1 :\ Y_2 &= \frac{A_1(i_1)}{1-\alpha_1(1-\tau_1)}
\end{aligned}$$

El gráfico es el usual.

Figura 20.1: Grafico IS-LM



c.) **Respuesta**

Primero, encontramos los productos de equilibrio para observar como afectan cambios en el gasto autónomo en el producto final. En el caso del segundo periodo:

$$\begin{aligned}
i_2 &= \frac{\psi_0 + \psi_1 Y_2 - M}{\psi_2} \\
Y_2 &= \frac{1}{1-\alpha_1(1-\tau_2)} \cdot [\alpha_0 + \phi_0 - \phi_1 i_2 + \overline{g_2}] \\
\Rightarrow Y_2 &= \frac{1}{1-\alpha_1(1-\tau_2)} \cdot \left[\alpha_0 + \phi_0 - \phi_1 \left(\frac{\psi_0 + \psi_1 Y_2 - M}{\psi_2}\right) + \overline{g_2}\right] \\
Y_2 &= \frac{1}{1-\alpha_1(1-\tau_2) + \frac{\phi_1\psi_1}{\psi_2}} \cdot \left[\alpha_0 + \phi_0 - \phi_1 \left(\frac{\psi_0 - M}{\psi_2}\right) + \overline{g_2}\right]
\end{aligned}$$

Por lo que a $\frac{1}{1-\alpha_1(1-\tau_2)+\frac{\phi_1\psi_1}{\psi_2}}$ lo llamaremos $\mathbf{m_2}$. Encontrando el producto de equilibrio para el primer periodo, obtenemos:

$$\begin{aligned}
i_1 &= \frac{\psi_0 + \psi_1 Y_1 - M}{\psi_2} \\
Y_1 &= \frac{1}{1-\alpha_1(1-\tau_1)} \cdot (\alpha_0 + \phi_0 - \phi_1 i_1 + \phi_2 i_2 + \phi_3 g_2 + \phi_4 Y_2 + \overline{g_1}) \\
\Rightarrow Y_1 &= \frac{1}{1-\alpha_1(1-\tau_1)} \cdot \left(\alpha_0 + \phi_0 - \phi_1 \left(\frac{\psi_0 + \psi_1 Y_1 - M}{\psi_2}\right) + \phi_2 i_2 + \phi_3 g_2 + \phi_4 Y_2 + \overline{g_1}\right) \\
Y_1 &= \frac{1}{1-\alpha_1(1-\tau_1) + \frac{\phi_1\psi_1}{\psi_2}} \cdot \left(\alpha_0 + \phi_0 - \phi_1 \left(\frac{\psi_0 - M}{\psi_2}\right) + \phi_2 i_2 + \phi_3 g_2 + \phi_4 Y_2 + \overline{g_1}\right)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que $\frac{1}{1-\alpha_1(1-\tau_1)+\frac{\phi_1\psi_1}{\psi_2}}$ es igual a $\mathbf{m_1}$. Comparando ambos multiplicadores, observamos que, si la tasa de impuesto en ambos periodos fuese la misma, estos serían iguales. Por lo tanto, la única diferencia radica en la tasa de impuestos de cada periodo.

d.) **Respuesta**
Cambios en el primer periodo no afectan el equilibrio en el segundo periodo en este modelo, por lo que $\Delta Y_2 = 0$. En el caso del primer periodo, tenemos:

$$\begin{aligned}
Y_1 &= \mathbf{m_1} \cdot \left(\alpha_0 + \phi_0 - \phi_1 \left(\frac{\psi_0 - M}{\psi_2}\right) + \phi_2 i_2 + \phi_3 g_2 + \phi_4 Y_2 + \overline{g_1} + \theta\right) \\
\frac{\partial Y_1}{\partial \theta} &= \mathbf{m_1}
\end{aligned}$$

Entonces, el aumento en total de Y_1 es de $\theta \cdot \mathbf{m_1}$.

e.) **Respuesta**
Hay que especificar que un aumento del gasto de gobierno en el segundo periodo afecta de tres maneras al producto hoy, y todas estas maneras son a través de la inversión. La primera es que, ante un aumento del gasto en 2, hay un aumento del producto en 2, del cual la inversión depende directamente. También depende directamente del gasto en el siguiente periodo; nuevamente se afecta la inversión. Por último, una variación del gasto afecta la tasa de interés de equilibrio, por lo que la inversión nuevamente se mueve. Calculando cada movimiento, tenemos:

$$\begin{aligned}
Y_2 &= \mathbf{m_2} \cdot \left[\alpha_0 + \phi_0 - \phi_1 \left(\frac{\psi_0 - M}{\psi_2}\right) + g_2\right] \\
\Rightarrow \Delta Y_2 &= \mathbf{m_2} \cdot \theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i_2 &= \frac{\psi_0 + \psi_1 Y_2 - M}{\psi_2} \\
\Rightarrow \Delta i_2 &= \frac{\psi_1}{\psi_2}(\mathbf{m_2} \cdot \theta)
\end{aligned}$$

Para Y_1 nos queda:

$$\begin{aligned} Y_1 &= \mathbf{m_1} \cdot \left[\alpha_0 + \phi_0 - \phi_1 \left(\frac{\psi_0 - M}{\psi_2}\right) + \phi_2 i_2 + \phi_3 g_2 + \phi_4 Y_2 + \overline{g_1}\right] \\ \Rightarrow \Delta Y_1 &= \mathbf{m_1} \cdot \left[\phi_2 \left(\frac{\psi_1}{\psi_2} \cdot \mathbf{m_2}\theta\right) + \phi_3\theta + \phi_4 \mathbf{m_2}\theta\right] \end{aligned}$$

f.) **Respuesta**

19.8 *Supply Side.*

a.) **Respuesta**
Encontramos el producto:

$$y = \frac{160 - 0{,}8Z + I + G}{1 - 0{,}8(1 - t)}, \tag{20.6}$$

con $t = 0{,}25$ y $Z = 200$ llegamos a:

$$Y = 1000 \tag{20.7}$$

La cantidad de impuestos recaudados (IR), y el ahorro de gobierno (AG) son:

$$\begin{aligned} IR &= 200 + 0{,}25 * 1000 = 450 \\ AG &= 450 - 200 = 250 \end{aligned} \tag{20.8}$$

b.) **Respuesta**
Tenemos que, con $t = 0{,}25$:

$$\frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{-0{,}8}{1 - 0{,}8(1 - t)} = -2, \tag{20.9}$$

esto quiere decir que por cada peso que bajan los impuestos de suma alzada el producto sube en dos. Por lo tanto el producto sube a $Y = 1200$ cuando el impuesto de suma alzada baja en 100. La cantidad de impuestos recaudados (IR), y el ahorro de gobierno (AG) son:

$$\begin{aligned} IR &= 100 + 0{,}25 * 1200 = 400 \\ AG &= 400 - 200 = 200 \end{aligned} \tag{20.10}$$

c.) **Respuesta**
El ingreso por impuestos cae en 50. No cae en 100 porque esta baja de impuestos lleva a aumentar el producto que lleva a recaudar mas impuestos.

d.) **Respuesta**
Que la baja de impuestos no fue suficiente para aumentar los ingresos del fisco. O mejor dicho en este modelo la baja de impuestos no lleva aumentar los ingresos fiscales.

e.) **Respuesta**
Tendría que suceder que:

$$t\frac{\partial Y}{\partial z} > 1, \tag{20.11}$$

lo que quiere decir que la mayor cantidad de impuesto recaudada sea mayor a la cantidad que se baje.

20. El Modelo de Mundell-Fleming: IS-LM en Economías Abiertas

20.1 Multiplicador y Apertura I.

a.) **Respuesta**
La demanda total por bienes domésticos es:

$$Z = C + I + G + X - M$$

El nivel de renta de equilibrio está determinado por el equilibrio en el mercado de bienes, demanda igual producción:

$$\begin{aligned}
Y &= C + I + G + X - M \\
Y &= c_0 + c_1(Y - T) + d_0 + d_1 Y - d_2 i - m_1 Y + X \\
Y &= \frac{1}{(1 - c_1 - d_1 + m_1)} * (c_0 + d_0 + G - c_1 T - d_2 i + X)
\end{aligned}$$

b.) **Respuesta**
El saldo de la Balanza Comercial está dado por:

$$X - M = X - \frac{m_1}{(1 - c_1 - d_1 + m_1)} * (c_0 + d_0 + G - c_1 T - d_2 i + X)$$

c.) **Respuesta**
Un incremento de una unidad en G aumenta la renta de equilibrio en $\frac{1}{(1-c_1-d_1+m_1)}$, el cual es el multiplicador de economía abierta. Aumenta el déficit Comercial en $\frac{m_1}{(1-c_1-d_1+m_1)}$, lo cual es el incremento en la demanda por bienes extranjeros, ocasionada por un aumento en Y.

d.) **Respuesta**
El multiplicador Keynesiano es definido como el efecto de un incremento marginal en el gasto público en el producto. Por lo tanto es $\frac{1}{(1-c_1-d_1+m_1)}$.

e.) **Respuesta**
Mientras la economía se abre más, el efecto de un incremento de G disminuye, ya que gran parte del incremento se va a consumir en bienes extranjeros. El multiplicador Keynesiado disminuye, como se puede apreciar matemáticamente en la fórmula anterior.

f.) **Respuesta**
Podemos reescribir el equilibrio original en el producto:

$$Y = \frac{1}{(1 - c_1 - d_1 + m_1)} * (c_0 + d_0 + G - c_1 T - d_2 i + m_2 Y*)$$

Como podemos apreciar, un incremento de la renta extranjera tiene un efecto positivo en la renta nacional. El incremento marginal es de $\frac{m_2}{(1 – c_1 – d_1 + m_1)}$.

$$X – M \;=\; m_2 Y * - \frac{m_1}{(1 – c_1 – d_1 + m_1)} * (c_0 + d_0 + G – c_1 T – d_2 i + m_2 Y *)$$

Hay dos efectos en la Balanza Comercial: Por un lado, los extranjeros son más ricos, por lo tanto quieren comprar más de nuestros bienes. Por otro lado, este incremento en la demanda de bienes nacionales aumenta el producto nacional, por lo que aumenta nuestra demanda por bienes importados, lo cual hace disminuir el primer efecto. En el total, la Balanza Comercial mejora. El efecto marginal en la balanza comercial es $m_2 (\frac{1 - m_1}{(1 – c_1 – d_1 + m_1)}) > 0$

20.2 Multiplicador y Apertura II.

a.) **Respuesta**
El producto de equilibrio

$$\begin{aligned}
Y &= 200 + 0{,}9(1 - 0{,}1)Y + 2000 - 1000(0{,}05) + 500 + 0{,}2(20000) + 30(3) - (0{,}06Y - 10(3)) \\
Y &= 6770 + 0{,}81Y - 0{,}06Y \\
Y &= 27080
\end{aligned}$$

Para la balanza comercial:

$$\begin{aligned}
NX &= X - Q \\
NX &= 0{,}2Y^* + 30\varepsilon - (0{,}06Y - 10\varepsilon) \\
NX &= 0{,}2(20000) + 30(3) - 0{,}06(27080) + 10(3) \\
NX &= 2495{,}2
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad Superávit \quad Comercial$

b.) **Respuesta**
Cerrada:

$$\begin{aligned}
Y &= C_0 + C_1(1 - T)Y + I_0 - I_1 r + \overline{G} \\
Y - C_1(1 - T)Y &= \underbrace{C_0 + I_0 - I_1 r + \overline{G}}_{A} \\
Y(1 - C_1(1 - T)Y &= A \\
Y &= \frac{A}{1 - C_1(1 - T)} \\
\frac{\partial Y}{\partial A} &= \frac{1}{1 - C_1(1 - T)}
\end{aligned}$$

Reemplazando: $\frac{1}{1 - 0{,}9(1 - 0{,}1)} = 5{,}26$

Abierta:

$$\begin{aligned}
Y &= C_0 + C_1(1-T)Y + I_0 - I_1 r + \overline{G} + X_1 Y^* + X_2\varepsilon - q_1 Y + q_2\varepsilon \\
Y - C_1(1-T)Y + q_1 Y &= \underbrace{C_0 + I_0 - I_1 r + \overline{G} + X_1 Y^* + \varepsilon(X_2 + q_2)}_{A} \\
Y(1 - C_1(1-T) + q_1) &= A \\
Y &= \frac{A}{1 - C_1(1-T) + q_1} \\
\frac{\partial Y}{\partial A} &= \frac{1}{1 - C_1(1-T) + q_1}
\end{aligned}$$

Reemplazando:$\frac{1}{1-0{,}9(0{,}9)+0{,}06} = 4$

La diferencia se debe a la propensión Marginal a Importar (q_1), ya que ante un aumento de la Renta, una parte es gastada en bienes extranjeros.

c.) **Respuesta**

$$\begin{aligned}
Y &= C_0 + C_1(1-T)Y + I_0 - I_1 r + \overline{G} + X_1 Y^* + (X_2 + q_2)\varepsilon - q_1 Y \\
\overline{G} &= Y(1 - C_1(1-T) + q_1) - C_0 - I_0 + I_1 r - X_1 Y^* - (X_2 + q_2)\varepsilon
\end{aligned}$$

Reemplazando:

$$\begin{aligned}
\overline{G} &= 60000(1 - 0{,}9(0{,}9) + 0{,}06) - 200 - 2000 + 1000(0{,}05) - 20000(0{,}2) - (10 + 30)(3) \\
\overline{G} &= 8730
\end{aligned}$$

Por lo tanto, debe aumentar en 8230 Otra forma → Como sabemos que el multiplicador es 4

$$\begin{aligned}
2{,}5\triangle G &= \triangle Y \\
\triangle G &= \frac{\triangle Y}{4} \\
\triangle Y &= 60000 - 27080 \\
\triangle Y &= 32920 \\
\triangle G &= \frac{32920}{4} \\
\triangle G &= 8230
\end{aligned}$$

d.) **Respuesta**

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow Y^{*\prime} &= 20000 \cdot 1{,}2 \\
Y^{*} &= 24000 \\
\Rightarrow q_{1\prime} &= 0{,}06 \cdot 1{,}5 \\
q_{1} &= 0{,}09 \\
\mapsto Y &= 200 + 0{,}9(1-0{,}1)Y + 0{,}2Y - 2000(0{,}05) + 500 + 0{,}2(24000) + 40(3) - (0{,}09Y) \\
Y &= 200 + 0{,}81Y + 5350 + 0{,}2Y - 0{,}09Y \\
5520 &= Y(1 - 0{,}2 - 0{,}81 + 0{,}09) \\
Y &= 69000
\end{aligned}
$$

Multiplicador:

$$
\begin{aligned}
Y &= C_0 + C_1(1-T)Y + I_0 - I_1 r + \overline{G} + X_1 Y^{*} + X_2 \varepsilon - q_1 Y + q_2 \varepsilon \\
Y - C_1(1-T)Y - I_0 Y + q_1 Y &= \underbrace{C_0 + \overline{G} - I_1 r + X_1 Y^{*} + (X_2 + q_2)\varepsilon}_{A} \\
Y &= \frac{A}{1 - C_1(1-T) - I_0 + q_1} \\
\frac{\partial Y}{\partial A} &= \frac{1}{1 - C_1(1-T) - I_0 + q_1}
\end{aligned}
$$

Reemplazando:

$$
\frac{1}{1 - 0{,}9(0{,}9) - 0{,}2 + 0{,}09} = 12{,}5
$$

e.) **Respuesta**
Comercial:

$$
\begin{aligned}
NX &= 0{,}2Y^{*} + 30\varepsilon - (0{,}09Y - 10\varepsilon) \\
NX &= 0{,}2(24000) + 40(3) - 0{,}09(69000) \\
NX &= -1290 \quad \Rightarrow \quad deficit\,Comercial
\end{aligned}
$$

Fiscal:

$$
\begin{aligned}
Y \cdot t - G &= 0{,}1(69000) - 500 \\
Y \cdot t - G &= 6400 \quad \Rightarrow \quad Superávit Fiscal
\end{aligned}
$$

f.) **Respuesta**
Las dos restricciones que tenemos son:
$Fiscal, \quad Yt - G = 6400$
$Comercial, \quad X_1 Y^{*} + (X_2 + q_2)\varepsilon - q_1 Y = -1290$
Son importantes, ya que al aumentar, no solo empeora el presupuesto fiscal, sino que al aumentar la renta se consumen más importaciones y también empeora la Balanza Comercial.

Primero:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(Yt-G)}{\partial G} &= \frac{\partial(Yt-G)}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial G}-1\\
\frac{\Delta(Yt-G}{\Delta G} &= 0{,}2\cdot Multiplicador-1\\
\Delta(Yt-G) &= (0{,}2Multiplicador-1)\Delta G\\
6400 &= (0{,}2\cdot 12{,}5-1)\Delta G\\
556{,}52 &= \Delta G\, Máx
\end{aligned}$$

Segundo:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial NX}{\partial G} &= \frac{\partial NX}{\partial X}\frac{\partial Y}{\partial G}\\
\frac{\Delta NX}{\Delta G} &= -0{,}09\cdot 12{,}5\\
\Delta NX &= (-0{,}09\cdot 12{,}5\Delta G)\\
-1290 &= -0{,}09\cdot 12{,}5\Delta G\\
1146{,}6 &= \Delta G\, Máx
\end{aligned}$$

La restricción relevante es la de G, por lo que el G máx será de 556.52

20.3 Tipo de cambio, política fiscal y movilidad imperfecta de capitales.

a.) **Respuesta**

La ecuación de la Balanza de Pagos es [3]:

$$FC_0+v(i-i^*)+XN_0+\alpha e-m\overline{Y}=0 \tag{21.1}$$

No es necesario explicitar la ecuación de equilibrio en el mercado del dinero; ya que este mercado esta siempre en equilibrio. Tengo dos incógnitas (e,i) y 2 ecuaciones. Estaría de mas la ecuación del mercado del dinero.

b.) **Respuesta**

La otra ecuación es:

$$\hat{Y}=C_0+c(\hat{Y}-T)+I_0-bi+G+XN_0+\alpha e-m\hat{Y}. \tag{21.2}$$

Despejando αe de la ecuación (21.2) e introduciéndolo en la ecuación (21.1) despejamos i lo que nos da:

$$i=\frac{vi^*-\overline{Y}(1-c)+C_0-cT+I_0+G-FC_0}{v+b} \tag{21.3}$$

Introduciendo (21.3) en (21.1) despejamos e, lo que nos da:

$$e=\frac{\overline{Y}v(m-1+c)+v(C_0+I_0+G-cT)+b(m\hat{Y}-FC_0-vi^*)-(v+b)XN_0}{\alpha(v+b)} \tag{21.4}$$

[3] Esto porque el tipo de cambio es flexible

c.) **Respuesta**

$$\frac{\partial e}{\partial G} = \frac{\nu}{\alpha(\nu + b)} \quad (21.5)$$

$$\frac{\partial i}{\partial G} = \frac{1}{\alpha(\nu + b)} \quad (21.6)$$

d.) i. **Respuesta**
El efecto del tipo de cambio: verdadero, eso significa que b es muy grande.
El efecto de la tasa de interes: verdadero, eso significa que b es muy grande.

ii. **Respuesta**
Falso.

iii. **Respuesta**
Cuando hay perfecta movilidad de capitales entonces $\nu \to \infty$. El efecto del tipo de cambio: falso.
El efecto de la tasa de interés: verdadero.

a.) **Respuesta**
Recordar que $dG = dT$.

$$\frac{\partial e}{\partial G} = \frac{\nu(1 - c)}{\alpha(\nu + b)} \quad (21.7)$$

$$\frac{\partial i}{\partial G} = \frac{(1 - c)}{(\nu + b)} \quad (21.8)$$

La afirmación es falsa, tiene efectos pero menores que si no fuera equilibrado.

20.4 Equilibrio externo e interno.

a.) **Respuesta**
Denotamos por $\overline{Y}$ al producto de equilibrio y BC a la balanza comercial. Igualando (1) con el nivel producto y reemplazando las ecuaciones (2) a (7) obtenemos:

$$\begin{aligned}
\overline{Y} &= \frac{\overline{C} + \overline{I} + \overline{G} + \overline{X} - \overline{M}}{1 - (1 - \tau)(c - m)} \\
BC &= \frac{(\overline{X} - \overline{M})\left[1 + c(1 - \tau)\right] - m(1 - \tau)\left[\overline{C} + \overline{I} + \overline{G}\right]}{1 - (1 - \tau)(c - m)}
\end{aligned}$$

b.) **Respuesta**
Para calcular el efecto de un aumento sobre el producto, derivamos la expresión del producto respecto a G, esto nos da:

$$\frac{\partial \overline{Y}}{\partial G} = \frac{1}{1 - (1 - \tau)(c - m)} > 0$$

Es decir un aumento del gasto de gobierno aumenta el nivel de actividad.

Por otra parte el país se encuentra en un déficit comercial, por lo tanto una aumento del gasto de gobierno, que aumenta el nivel de producto tiene como consecuencia un aumento del deficit comercial. Para ver este resutlado más formalmente derivamos la expresión de BC calculada en la parte anterior con respecto a G, esto nos da:

$$\frac{\partial BC}{\partial G} = \frac{-m(1-\tau)}{1-(1-\tau)(c-m)} < 0$$

Esto significa que el aumento del gasto de gobierno aumenta el producto pero aumenta el déficit comercial. Por lo tanto no es una política suficiente para resolver el problema.

c.) **Respuesta**

La ecuación (8) nos indica que el nivel de exportaciones depende positivamente del Tipo de cambio real (TCR), pues un aumento del TCR hace más lucrativo las exportaciones, pues por la misma cantidad de moneda extranjera los empresarios obtienen más moneda nacional. Por lo tanto el signo esperado de a_x es positivo.

Por otra parte (9) nos indica que las importaciones aumenta con el nivel de ingreso disponible (mientras más rico el el país más bienes que no existen va a querer, como de lujo y otros.) y cae con el TCR, pues un aumento del TCR hace las importaciones más caras y eso hace que la demanda por bienes importados disminuya. Por lo tanto el signo esperado de a_m es positivo.

Repitiendo el procedimiento para calcular el producto, de la parte (a), obtenemos que:

$$\begin{aligned}
\overline{Y} &= \frac{\overline{C}+\overline{I}+\overline{G}+\overline{X}-\overline{M}+(a_x+a_m)q}{1-(1-\tau)(c-m)} \\
BC &= \frac{(\overline{X}-\overline{M}+(a_x+a_m)q)\,[1-c(1-\tau)]-m(1-\tau)\left[\overline{C}+\overline{I}+\overline{G}\right]}{1-(1-\tau)(c-m)}
\end{aligned}$$

El efecto de un aumento del tipo de cambio real sobre el producto es que lo aumenta, pues al subir el TCR sube las exportaciones y caen las importaciones, subiendo el producto. Más formalmente se tiene que:

$$\frac{\partial \overline{Y}}{\partial q} = \frac{a_x+a_m}{1-(1-\tau)(c-m)} > 0$$

El efecto de un aumento del tipo de cambio real sobre la Balanza Comercial es que reduce el déficit o aumenta el superávit, pues al subir el TCR sube las exportaciones y caen las importaciones. Más formalmente se tiene que:

$$\frac{\partial BC}{\partial q} = \frac{(a_x+a_m)(1-c(1-\tau))}{1-(1-\tau)(c-m)} > 0$$

Es decir un aumento del tipo de cambio aumenta el producto y reduce el déficit de la balanza comercial, algo que parece más razonable.

20.5 Expectativas de devaluación y sus consecuencias.

a.) **Respuesta**

A partir de cuentas nacionales se sabe que:

$$Y = C + I + G + X - M$$

Reemplazando las ecuaciones (20.42), (20.43), (20.44), (20.45) del De Gregorio en la ecuación anterior y usando el hecho que en perfecta movilidad de capitales $i = i^*$ se tiene que:

$$Y^* = \frac{\bar{C} + \bar{I} + \bar{G} - bi^* + \bar{X} - \bar{M} + (a_x + a_m)\bar{e}}{1 - c(1-t) + m(1-t)}$$

El gasto (A) de esta economía es:

$$A = C + I + G$$

Reemplazando el valor obtenido para Y en las ecuaciones (20.42), (20.43) en la ecuación anterior se obtiene:

$$A = \frac{(\bar{C} + \bar{I} + \bar{G} - bi^*)m(1-t) + c(1-t)(\bar{X} - \bar{M} + (a_x + a_m)\bar{e})}{1 - c(1-t) + m(1-t)}$$

La balanza comercial es:

$$BC = X - M$$

esto nos da reemplazando el valor de Y en (20.45) y este junto a (20.44) en la ecuación anterior:

$$BC = \frac{(1 - c(1-t))(\bar{X} - \bar{M} + (a_x + a_m)\bar{e}) - (\bar{C} + \bar{I} + \bar{G} - bi^*)m(1-t)}{1 - c(1-t) + m(1-t)}$$

b.) **Respuesta**

Si el público espera una devaluación de un d % entonces se tiene que:

$$BC_1 + K = BC_2 \tag{21.9}$$

donde BC_1 es la balanza comercial calculada en la parte anterior y BC_2 es la nueva balanza comercial con el tipo de cambio devaluado en un d %. Es decir se tiene que:

$$\begin{aligned} BC_1 &= \frac{(1 - c(1-t))(\bar{X} - \bar{M} + (a_x + a_m)\bar{e}) - (\bar{C} + \bar{I} + \bar{G} - bi^*)m(1-t)}{1 - c(1-t) + m(1-t)} \\ BC_2 &= \frac{(1 - c(1-t))(\bar{X} - \bar{M} + (a_x + a_m)\bar{e}(1+d)) - (\bar{C} + \bar{I} + \bar{G} - bi^*)m(1-t)}{1 - c(1-t) + m(1-t)} \end{aligned}$$

Usando (21.9) mas los valores de BC_1 y BC_2 se tiene que:

$$(1 - c(1-t))(a_x + a_m)\bar{e} + K(1 - c(1-t) + m(1-t)) = (1 - c(1-t))(a_x + a_m)\bar{e}(1+d)$$

de donde se tiene que:

$$\tilde{e}-\bar{e}=\frac{K(1-c(1-t)+m(1-t))}{(1-c(1-t))(a_x+a_m)}$$

Usando el hecho que $\tilde{e}=\bar{e}(1+d)$ se tiene que:

$$d=\frac{K(1-c(1-t)+m(1-t))}{\bar{e}(1-c(1-t))(a_x+a_m)}$$

c.) **Respuesta**
Si la gente espera que va a haber devaluación entonces la tasa de interés sube por condición de arbitraje, de lo contrario entra muchos capitales atacando la moneda. Es decir se tiene que $i=i^*+d$. En cuyo caso el producto, el gasto y la balanza comercial queda:

$$\begin{aligned}
Y_{eq} &= \frac{\bar{C}+\bar{I}+\bar{G}-b(i^*+d)+\bar{X}-\bar{M}+(a_x+a_m)\bar{e}}{1-c(1-t)+m(1-t)}\\
BC &= \frac{(1-c(1-t))(\bar{X}-\bar{M}+(a_x+a_m)\bar{e})-(\bar{C}+\bar{I}+\bar{G}-b(i^*+d))m(1-t)}{1-c(1-t)+m(1-t)}\\
A &= \frac{(\bar{C}+\bar{I}+\bar{G}-b(i^*+d))m(1-t)+c(1-t)(\bar{X}-\bar{M}+(a_x+a_m)\bar{e})}{1-c(1-t)+m(1-t)}
\end{aligned}$$

d.) **Respuesta**
En este caso las reservas caen pero no pasa nada con el crédito doméstico. Sabemos que:

$$M=R^*+D$$

por lo tanto si no pasa nada con D entonces se tiene que $\Delta M=\Delta R$. Es decir:

$$\Delta R=k\Delta Y-h\Delta i=\frac{b\bar{e}d+(a_x+a_m)\bar{e}d}{1-c(1-t)+m(1-t)}-hd$$

Las reservas caen porque la gente empieza a cambiar su moneda por la extranjera, sabiendo que ésta va subir de precio.

e.) **Respuesta**
Un aumento del gasto público tiene como efecto que aumenta el déficit de la BC pues aumenta el producto y de esa forma las importaciones. Formalmente a partir de la expresión de BC se tiene que:

$$\frac{\partial BC}{\partial G}=\frac{-m(1-t)}{1-c(1-t)+m(1-t)}<0$$

Por otra parte una reducción del gasto público reduce el déficit en la BC, pues reduce el producto y de esa forma disminuye las importaciones.

f.) **Respuesta**

Una expansión monetaria reduce la tasa de interés, por lo tanto $i < i^*$ lo cual atrae muchos capitales, pero como el tipo de cambio es fijo entonces al entrar capital va haber un presión hacia el tipo de cambio apreciándolo, lo que obliga al Banco Central a comprar todo el dinero que entra provocando una caída abrupta de las reservas, lo cual no es sostenible. Por lo tanto el economista no tiene razón.

g.) **Respuesta**

Si ahora el Banco Central devalúa se tiene que el tipo de cambio sube en un d % y $i = i^*$. En cuyo caso el producto y la balanza comercial quedan:

$$\begin{aligned}
Y^* &= \frac{\bar{C} + \bar{I} + \bar{G} - bi^* + \bar{X} - \bar{M} + (a_x + a_m)\bar{e}(1+d)}{1 - c(1-t) + m(1-t)} \\
BC &= \frac{(1 - c(1-t))(\bar{X} - \bar{M} + (a_x + a_m)\bar{e}(1+d)) - (\bar{C} + \bar{I} + \bar{G} - bi^*)m(1-t)}{1 - c(1-t) + m(1-t)}
\end{aligned}$$

h.) **Respuesta**

Después de que se dispara la inflación el tipo de cambio fijo queda nuevamente en $\bar{e}$, con la única diferencia que las reservas son ahora menores. Por lo tanto si la gente ahora espera una devaluación entonces el producto, la tasa de interés y la balanza comercial queda:

$$\begin{aligned}
i &= i^* + d' \\
Y^* &= \frac{\bar{C} + \bar{I} + \bar{G} - b(i^* + d') + \bar{X} - \bar{M} + (a_x + a_m)\bar{e}}{1 - c(1-t) + m(1-t)} \\
BC &= \frac{(1 - c(1-t))(\bar{X} - \bar{M} + (a_x + a_m)\bar{e}) - (\bar{C} + \bar{I} + \bar{G} - b(i^* + d'))m(1-t)}{1 - c(1-t) + m(1-t)}
\end{aligned}$$

Si las reservas después de la primera devaluación son menores a hd' entonces podría haber problemas, pues en este caso las reservas caerían en mayor cantidad a las que realmente existen. Lo que finalmente se puede traducir en una crisis cambiaria.

20.6 Movilidad imperfecta de capitales y ajustes de la tasa de interés.

a.) **Respuesta**

Dado que se busca el producto y tipo de cambio de equilibrio en función de parámetros y la tasa de interés, tenemos dos ecuaciones y dos incógnitas.

$$Y = c\,(Y - T) + I_o - bi + G + \alpha e - mY \tag{21.10}$$

$$0 = \alpha e - mY + \nu(i - i^*) \tag{21.11}$$

Este es un sistema para Y, e.

Resolviendo para Y tenemos que

$$Y = \frac{I_o - cT + G - bi - \nu(i - i^*)}{1 - c} \tag{21.12}$$

A su vez es se puede usar el resultado de Y para encontrar el valor de e.

$$e = \frac{1}{\alpha}\left(mY - \nu(i - i^*)\right) \tag{21.13}$$

Reemplazando Y, tenemos una expresión para el tipo de cambio:

$$e = \frac{m\left(A - bi\right) - \nu(1 - m - c)(i - i^*)}{1 - c} \tag{21.14}$$

b.) **Respuesta**
Vemos que $\frac{\partial Y}{\partial \nu} = \frac{i - i^*}{1 - c}$ por lo que el efecto sobre el producto depende si existe presión por flujos de capital de entrada o salida.

Esto es relevante si se racionalaliza un pais emergente como falto de capital $(i > i^*)$, aumentar movilidad de capital (profundidad financiera) sera bueno para el producto.

c.) **Respuesta**
El efecto de una política monetaria en este tipo de esquema tiene mayor impacto sobre el producto que una economia cerrada pero menor que una economia con perfecta movilidad de capitales.

Se puede confirmar el resultado mencionado en el De Gregorio con respecto a la pendiente de la IS con movilidad imperfecta de capitales. En este caso es:

$$\frac{\partial i}{\partial Y} = -\frac{1 - c}{b + \nu}$$

Lo cual es menor que en el caso que $\nu = 0$ en economía cerrada por lo que un aumento en la tasa de interés causara mayor efectos sobre el producto en este caso.

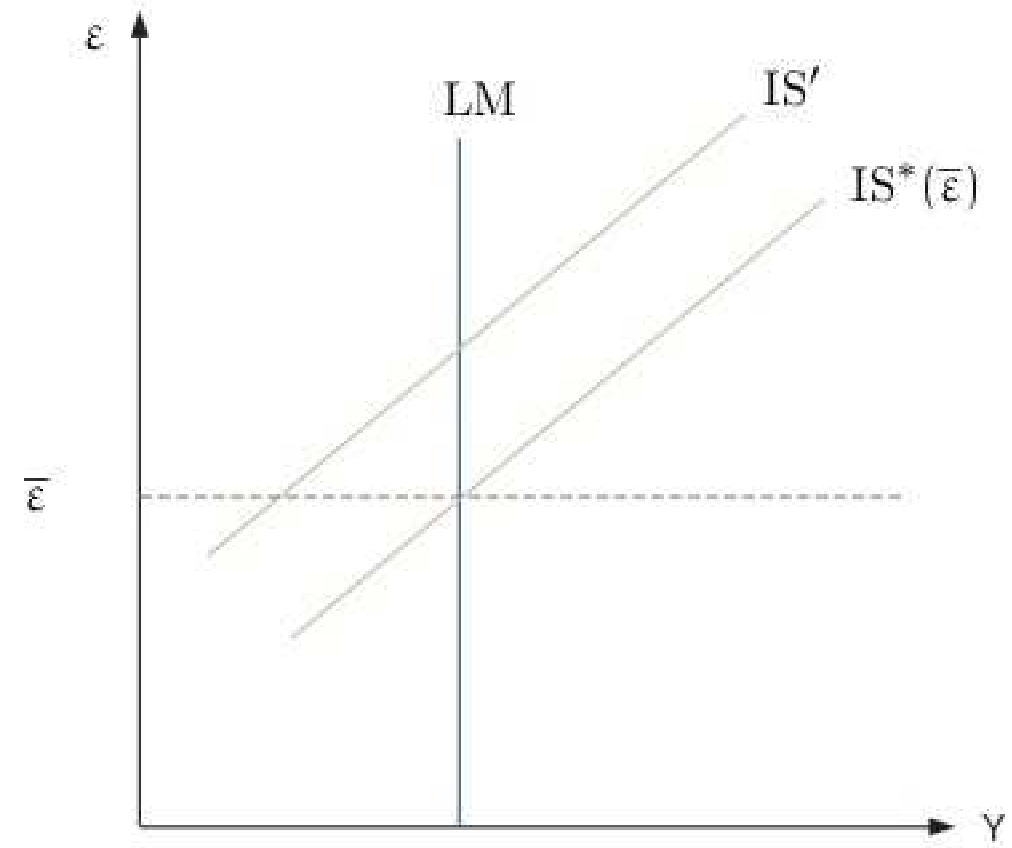
La intuición de este resultado es que al subir la tasa de interés frente a una política monetaria contractiva, se genera una contracción de la inversion pero también una apreciación que lleva a disminuir las exportaciones netas. Si no hubiera flujos de capital, no existe este segundo efecto.

Al comparar con el caso de perfecta movilidad se tiene que la IS se vuelve completamente plana $(\nu \to \infty)$ y el efecto de una política monetaria contractiva es aun mas grande que en el caso de una economía cerrada o con movilidad imperfecta de capitales.

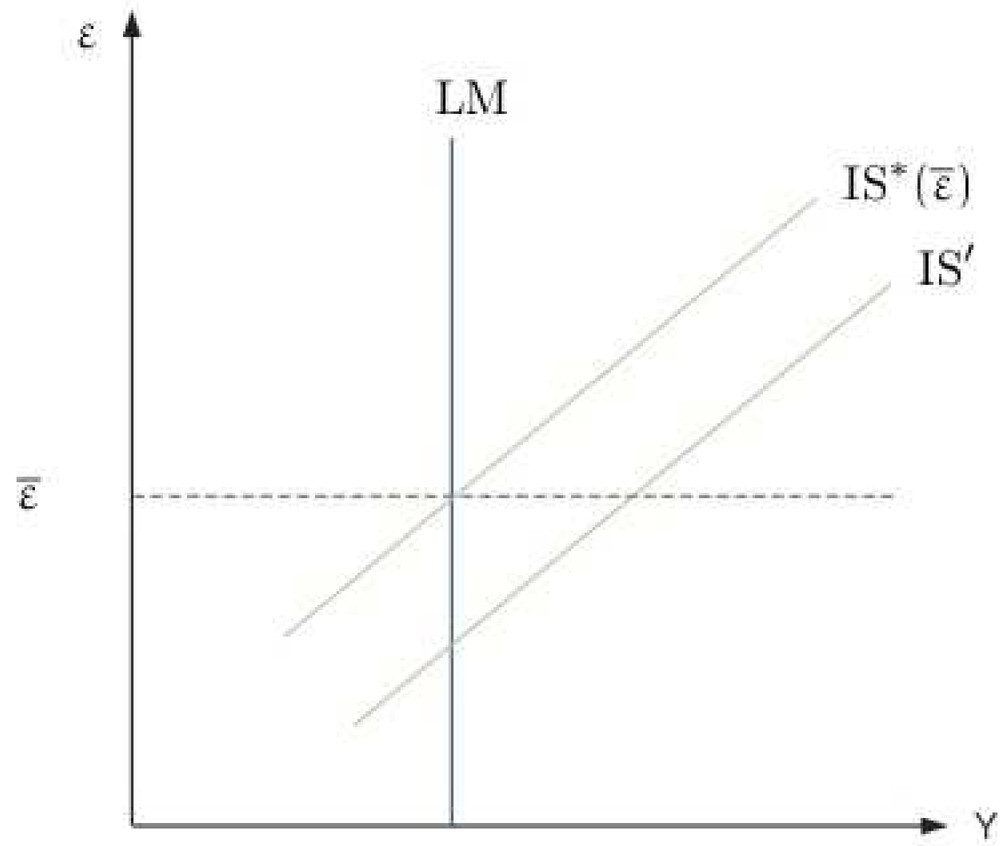
20.7 Políticas con tipo de cambio fijo.

a.) **Respuesta**
Una peridia de mercado lleva a que a cada nivel de tipo de cambio, las exportaciones netas sean menores. Esto se puede racionalizar como un shock negativo a la demanda. (Ver figura 20.17 del De Gregorio)
Si estábamos en equilibrio (balanza comercial igual a cero) con un nivel $\bar{\varepsilon}$ ahora ya no lo estaremos y $-XN(\bar{\varepsilon}) \to$ deficit comercial. En el modelo IS-LM en el plano (Y, ε) tenemos que se desplaza la IS hacia la izquierda.

Esto no es sustentable en el tiempo y se debe tomar alguna política que reduce la presión sobre el tipo de cambio. Lo que ocurrirá de manera de mantener el equilibrio es una contracción monetaria que baje el producto de equilibrio hasta que ε sea el tipo de cambio de equilibrio. Otra posibilidad es anular el shock negativo con mayor gasto publico pero no sera deseable si el shock es permanente. Finalmente, alejándose de lo discutió en el capitulo, otra posibilidad es aumentar los impuestos a as importaciones de manera de equilibra las exportaciones netas en torno a ε.



b.) **Respuesta**
Un aumento de la demanda por bienes domésticos lleva a que se desplaze la IS debido al aumento en el consumo. Esto presiona al tipo de cambio a apreciarse y se podría contrarrestar disminuyendo el gasto publico (aumentando el ahorro publico).



c.) **Respuesta**
Esto también lleva a aumentar la demanda agregada y desplaza la IS hacia la derecha y a un equilibrio con o mayor producto o un tipo de cambio mas apreciado dado $\overline{Y}$. Al aumentar el producto, se genera un aumento de demanda por dinero a cambio de menos divisa internacional. Dado el regimen de tipo cambio fijo, se acumulan mas reservas de manera de que se mantenga el tipo de cambio en ε. Denuevo esto no es sostenible en el tiempo.

La figura es igual a la anterior.

d.) **Respuesta**
Este es un shock positivo a la demanda y la respuesta es la misma que la anterior. Se puede aumentar los impuestos, disminuir aranceles o disminuir el gasto del gobierno de manera de manipular la demanda agregada de forma de volver al equilibrio.

e.) **Respuesta**
Opuesto a la parte b.

20.8 Colapso de un régimen de tipo de cambio fijo.

a.) **Respuesta**
Las reservas se agotaran cuando $R_0 = \epsilon t$ por lo tanto las reservas se agotan en el tiempo de:

$$T = \frac{R_0}{\epsilon} \tag{21.15}$$

b.) **Respuesta**
La tasa de interés es ahora:

$$i = i^* + \epsilon \tag{21.16}$$

La demanda por dinero es:

$$L = k\overline{Y} - hi^* - i\epsilon \tag{21.17}$$

, es mayor que antes, porque la tasa de interés es mas alta, ya que la gente tiene expectativas de la devaluación o depreciación.

c.) **Respuesta**
La demanda por dinero es:

$$L = k\overline{Y} - hi^* - i\epsilon \tag{21.18}$$

La oferta de dinero es:

$$D_t = D_0 + \epsilon t \tag{21.19}$$

Igualando y recordando que $k\overline{Y} - hi^* = D_0 + R_0$[4], legamos a:

$$T' = \frac{R_0 - h\epsilon}{\epsilon} \tag{21.20}$$

El tiempo de crisis es menor, porque la tasa de interés es mayor y porque la gente tiene expectativas de devaluation.

[4]Recuerde que en t=0 cuando el tipo de cambio es fijo se cumple esta igualdad, por equilibrio del mercado monetario, es decir la demanda es igual a la oferta

22. Oferta, Demanda Agregada y Políticas Macroeconómicas

22.1 Principio de Taylor.

a.) **Respuesta**

- Ecuación (22.1): **Curva de Phillips**. Esta ecuación en particular corresponde a la Curva de Phillips aumentada por expectativas, donde ϵ_t corresponde a un *shock* inflacionario, π y π^e corresponden a la inflación y su valor esperado, respectivamente, e $y - \bar{y}$ corresponde a la brecha de producto.[5] Esta ecuación se deriva de un modelo con rigideces en el ajuste de salarios y precios y describe la relación entre producto e inflación.
- Ecuación (22.3): **IS** escrita como desviaciones del producto respecto del pleno empleo. A es una constante que considera el gasto autónomo, entre otros el gasto fiscal. El segundo término ($\phi(i - \pi^e)$) corresponde al termino que resume el comportamiento de la inversión y el consumo ante cambios en la tasa de interés real. El parámetro ϕ es positivo indicando que el consumo e inversión disminuyen cuando aumenta la tasa de interés real. Por último, μ es un *shock* de demanda.
- Ecuación (22.8): **Regla de Taylor**, esta ecuación describe el comportamiento (aproximado) de la autoridad cuando su instrumento es la tasa de interés. La razón a/b representa la aversión de la autoridad a la inflación y $\bar{r} + \bar{\pi}$ corresponde a la tasa *neutral* de interés.

Respecto del parámetro a, se puede decir que para que la reacción de la autoridad (aumento o disminución de la tasa de interés nominal) tenga efectos reales, tiene que ser mayor que uno. Lo anterior es conocido como el *Principio de Taylor*. Es decir, la magnitud de la reacción de la autoridad monetaria es, en términos relativos, mayor cuando se trata de desviaciones de la inflación de meta respecto de las desviaciones del producto.

b.) **Respuesta**

En el equilibrio, cuando la economía no recibe los azotes de los componentes estocásticos de (22.1) y (22.3), el valor esperado de la inflación que se determina a partir de las expectativas de los agentes, es igual a la inflación efectiva y a la meta ($\pi^e = \bar{\pi} = \pi$). Dado lo anterior, mas la información entregada por el enunciado tenemos que:

$$
\begin{aligned}
y &= \bar{y} \\
\pi &= \bar{\pi} = 0 \\
i &= \bar{i} = \bar{r} = A/\phi
\end{aligned}
$$

c.) **Respuesta**

[5] Como y e $\bar{y}$ están medidos en logaritmo la brecha corresponde a una desviación porcentual.

$$
\begin{aligned}
\pi_t &= \pi_t^e + \theta(A - \phi(\bar{\imath} + a\pi_t - \pi_t^e) + \mu_t) + \epsilon_t \\
\pi_t &= \pi_t^e + \theta A - \theta\phi\bar{\imath} - \theta\phi a\pi_t + \theta\phi\pi_t^e + \theta\mu + \epsilon_t \\
\pi_t(1 + \theta\phi a) &= \pi_t^e(1 + \theta\phi) + \theta\mu_t + \epsilon_t \\
\pi_t &= \frac{1 + \theta\phi}{1 + \theta\phi a}\pi_t^e + \frac{\theta\mu_t}{1 + \theta\phi a} + \frac{\epsilon_t}{1 + \theta\phi a}
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\partial\pi_t}{\partial\pi_t^e} = \frac{1 + \theta\phi}{1 + \theta\phi a} > 0
$$

Cuando $a > 1$ un aumento en la inflación esperada genera un aumento mas que proporcional en la inflación, lo que en un esquema con dinámica generaría trayectorias explosivas. La razón es que un aumento en la inflación esperada genera un aumento en la inflación esperada, lo que conduce a un aumento en la tasa de interés hoy, pero la tasa real cae, con lo cual el producto sube, y la inflación efectiva sube hoy más de lo que lo hace la inflación esperada.

d.) **Respuesta**

Partiendo de (22.1) y reemplazando con (22.3) y (22.8):

$$
\begin{aligned}
\pi_t &= \pi_{t-1} + \theta(y_t - \bar{y}_t) + \epsilon_t \\
\pi_t &= \pi_{t-1} + \theta(A - \phi(i - \pi_{t-1}) + \mu) + \epsilon_t \\
\pi_t &= \pi_{t-1} + \theta(A - \phi((\bar{\imath} + a\pi_t) - \pi_{t-1}) + \mu) + \epsilon_t \\
\pi_t &= \frac{(1 + \theta\phi)\pi_{t-1}}{1 + \theta\phi a} + \cancel{\frac{\theta A - \theta\phi\bar{\imath}}{1 + \theta\phi a}} + \frac{\theta\mu_t + \epsilon_t}{1 + \theta\phi a} \\
\therefore \pi_t &= \frac{(1 + \theta\phi)\pi_{t-1}}{1 + \theta\phi a} + \frac{\theta\mu_t + \epsilon_t}{1 + \theta\phi a}
\end{aligned}
$$

De lo anterior es posible ver que, partiendo de una inflación igual a cero, si a es menor que uno, la expresión que acompaña a π_{t-1} será mayor que uno. Si ocurriese lo anterior cualquier *shock* tanto de oferta como de demanda haría que la inflación fuese creciendo más en cada periodo convirtiendo la inflación en un proceso explosivo. En el caso de que a fuese igual a 1, el proceso quedaría determinado por los errores aleatorios, lo cual es conocido como "*random walk*". Por último, si $a > 1$ entonces el *shock* se irá disipando en el tiempo. De esta forma, para que el problema este determinado matemáticamente, se debe cumplir que la reacción de la autoridad monetaria sea mayor a desviaciones de inflación que a las de producto.

22.2 *Shocks* de demanda.

a.) **Respuesta**

Si la autoridad sigue una regla de Taylor, la reacción ante una diferencia entre la inflación efectiva y la meta viene dado por el parámetro a. Matemáticamente:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial i}{\partial(\pi-\overline{\pi})} &= \frac{\partial[\overline{r}+\overline{\pi}+a(\pi-\overline{\pi})+b(y-\overline{y})]}{\partial(\pi-\overline{\pi})} \\
\frac{\partial i}{\partial(\pi-\overline{\pi})} &= a
\end{aligned}
$$

b.) **Respuesta**

Para poder responder esta pregunta debemos encontrar la regla que minimiza la pérdida de la autoridad (22.11), sabiendo que lo anterior se encuentra sujeto a la Curva de Phillips (22.1), además de considerar que el instrumento que va a utilizar la autoridad es la tasa de interés, por lo que debemos considerar la IS. Sabiendo lo anterior despejaremos y y π en función de la tasa de interés y el resto de los parámetros.
Entonces con (22.1) y (22.3) obtenemos:

$$
\begin{aligned}
y &= \overline{y}+A-\phi(i-\pi^e)+\mu \\
\pi &= \pi^e+\theta(A-\phi(i-\pi^e)+\mu)+\epsilon
\end{aligned}
$$

Con lo anterior, reemplazamos en la función de pérdida y minimizamos utilizando la tasa de interés:

$$
\begin{aligned}
z &= \lambda(y-\overline{y})^2+(\pi-\overline{\pi})^2 \\
z &= \lambda(\cancel{\overline{y}}+A-\phi(i-\pi^e)+\mu-\cancel{\overline{y}})^2+(\pi^e+\theta(A-\phi(i-\pi^e)+\mu)+\epsilon-\overline{\pi})^2
\end{aligned}
$$

Luego

$$
\begin{aligned}
\min_{i} z \quad &\Longrightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial i}=0 \\
\frac{\partial z}{\partial i} &= -2\lambda\phi[A-\phi(i-\pi^e)+\mu]-2\phi\theta[\pi^e+\theta(A-\phi(i-\pi^e)+\mu)+\epsilon-\overline{\pi}]
\end{aligned}
$$

De lo anterior, y reconociendo que $A/\phi=\overline{r}$ y que $\overline{\imath}=\overline{r}+\overline{\pi}$, obtenemos:

$$
\begin{aligned}
i &= \overline{r}+\pi^e+\frac{\theta}{\phi(\theta^2+\lambda)}(\pi^2-\overline{\pi}+\epsilon)+\frac{\mu}{\phi} \\
i &= \overline{\imath}+\left(1+\frac{\theta}{\phi(\theta^2+\lambda)}\right)(\pi^e-\overline{\pi})+\frac{\theta}{\phi(\theta^2+\lambda)}\epsilon+\frac{\mu}{\phi} \qquad (23.1)
\end{aligned}
$$

Correspondiendo (23.1) a la función de reacción óptima de la autoridad. Luego haciendo un análisis similar al de la parte a):

$$
\frac{\partial i}{\partial(\pi^e-\overline{\pi})} = \left(1+\frac{\theta}{\phi(\theta^2+\lambda)}\right)
$$

c.) **Respuesta**
Primero que nada, cabe destacar que el resultado obtenido en b) es resultado de un proceso de optimización que incorpora, entre otros, las expectativas inflacionarias de los agentes de esta economía, por lo tanto, no es de extrañar la aparición de éstas en la función de reacción de la autoridad. Por otro lado, tampoco es de extrañar que el término que acompaña la brecha de inflación sea mayor que uno, dado que para que la reacción de la autoridad tenga efectos reales, el cambio en la tasa de interés tiene que ser mayor al cambio en la brecha de inflación, reforzando la intuición detrás del principio de Taylor.

22.3 Reglas de política monetaria.

a.) **Respuesta**
La RPM es la IS con i fijo: $y - \bar{y} = A - \phi(i - \bar{\pi}) + \nu$. Esta RPM es vertical. Además:

$$\begin{aligned} \bar{\pi} &= -A/\phi + i && (23.2) \\ \pi &= \bar{\pi} + \theta\nu + \epsilon && (23.3) \\ y - \bar{y} &= u && (23.4) \end{aligned}$$

b.) **Respuesta**
La RPM es:

$$y - \bar{y} = -\frac{\phi a}{1 + b\phi}(\pi - \bar{\pi}) + \frac{u}{1 + b\phi}. \qquad (23.5)$$

Resolviendo, y con un poco de álgebra (y dedicación), se llega a:

$$\begin{aligned} \pi - \bar{\pi} &= \frac{\theta}{1 + b\phi + a\theta\phi}\nu + \frac{1 + b\phi}{1 + b\phi + a\theta\phi}\epsilon && (23.6) \\ y - \bar{y} &= -\frac{1}{1 + b\phi + a\theta\phi}\nu - \frac{a\phi}{1 + b\phi + a\theta\phi}\epsilon. && (23.7) \end{aligned}$$

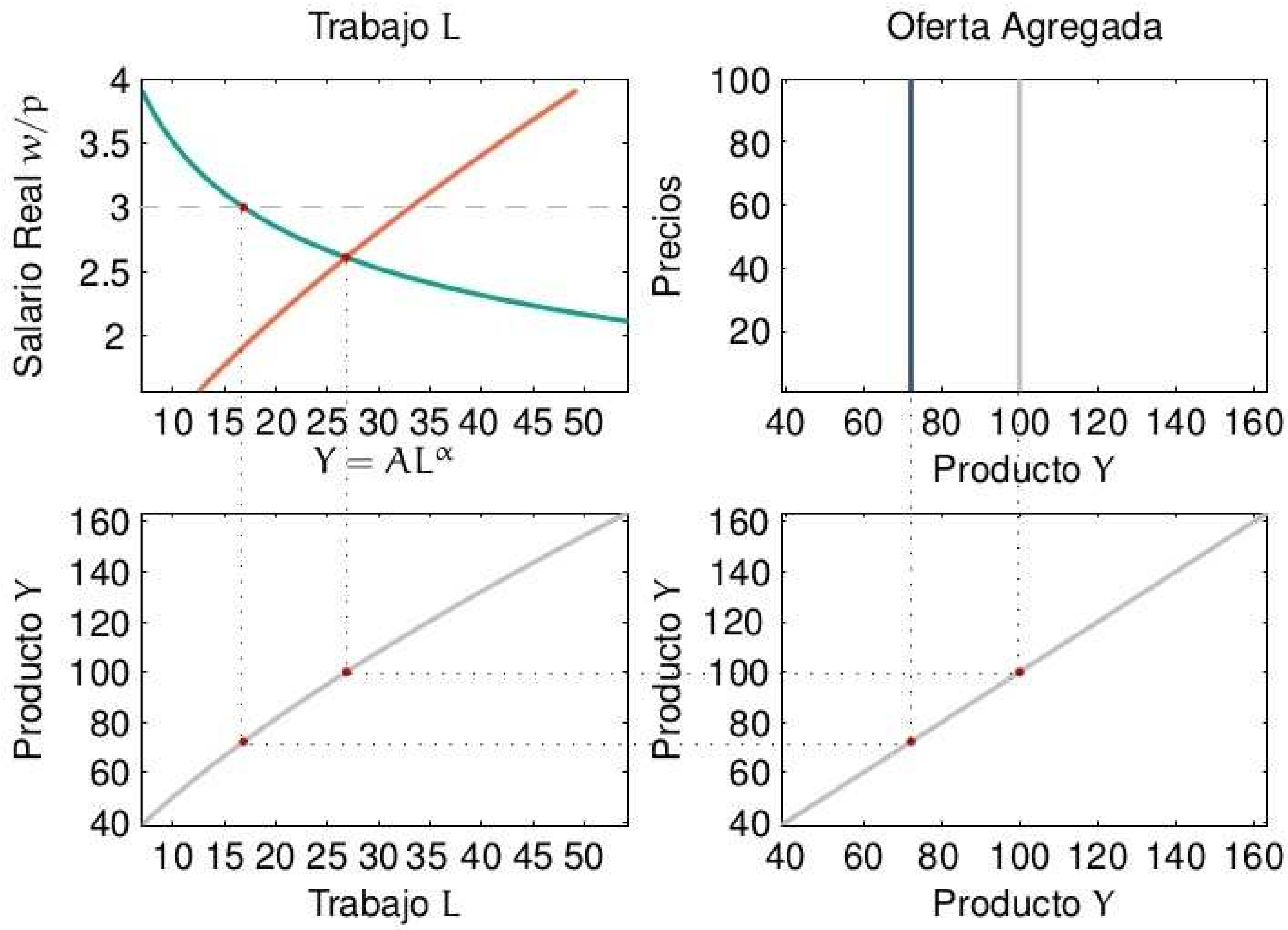
c.) **Respuesta**
Como indica el enunciado, no es necesario desarrollar las varianzas para verificar, por simple inspección, que esta dependerá de los valores que tengan los parámetros. Se puede ver directamente que la varianza de la inflación es menor en el segundo caso, la razón es que los cambios en la inflación son acomodados por la Regla de Taylor, lo que no ocurre cuando la tasa está fija. Esto trae como consecuencia que si hay un shock inflacionario, que no afectaría al producto bajo la regla de tasa fija, si lo hará cuando se sigue una regla de Taylor ya que la tasa de interés sube. Por su parte, desde el punto de vista del producto, los shocks de demanda son atenuados con cambios en la tasa de interés.

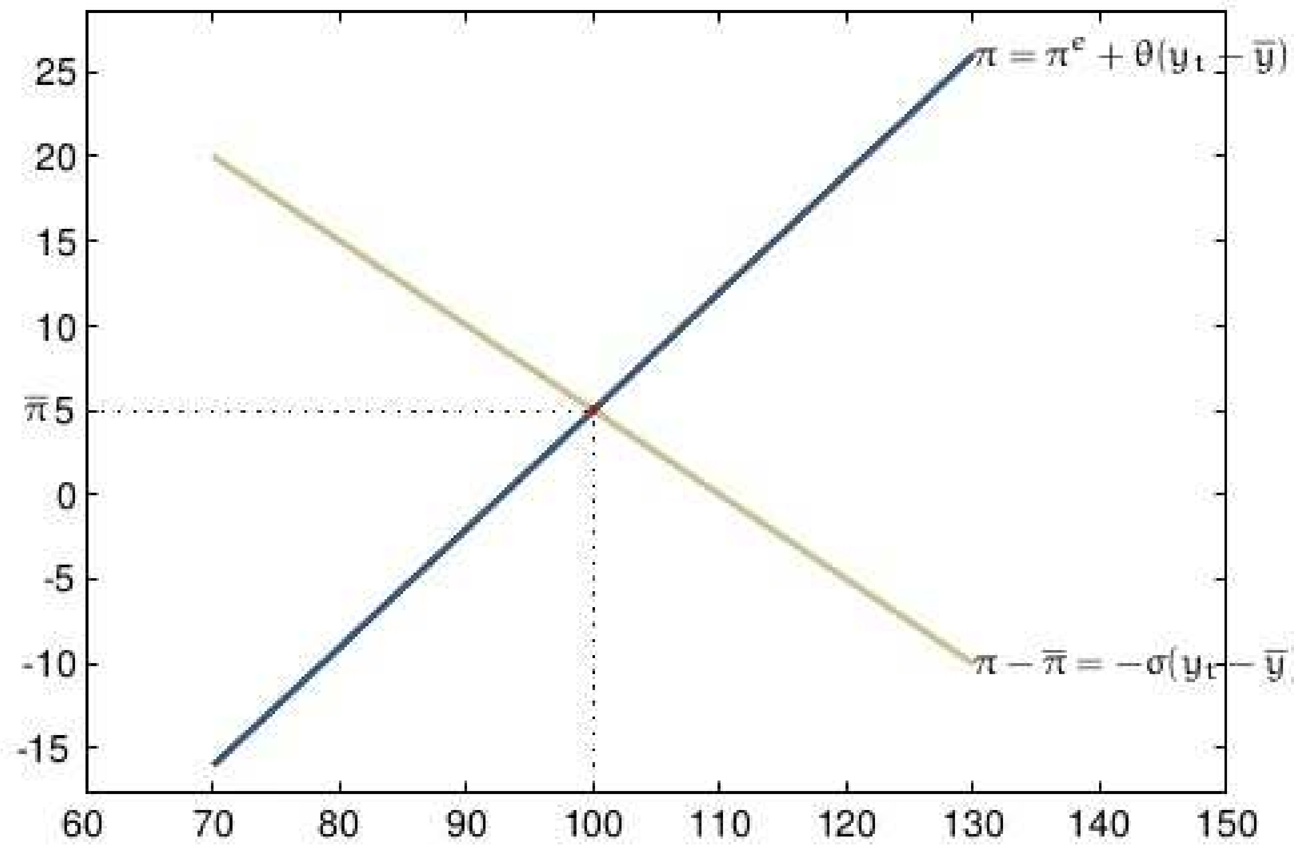
En el caso de la regla de tasa de interés constante, los shocks inflacionarios sólo afectan π y por lo tanto no a y. En el caso de la regla de Taylor, un shock inflacionario conduce a un alza de la tasa de interés que reduce el producto. De ahí que sólo para shocks inflacionarios, el producto sería más variable bajo reglas de Taylor que tasas de interés, aunque la inflación siempre es menos variable con regla de Taylor.

22.4 Caída del producto de pleno empleo.

a.) **Respuesta**

Una caída del producto desde su nivel de pleno empleo puede ocurrir si aumenta de manera significativa alguna rigidez o imperfección en el mercado del trabajo . Un ejemplo mencionado en el capitulo 18 de De Gregorio es el nivel del salario mínimo. Se podría dar el caso que el salario mínimo de la economía aumente debió a razones políticas alcanzando un menor nivel de producto respecto del nivel de pleno empleo.



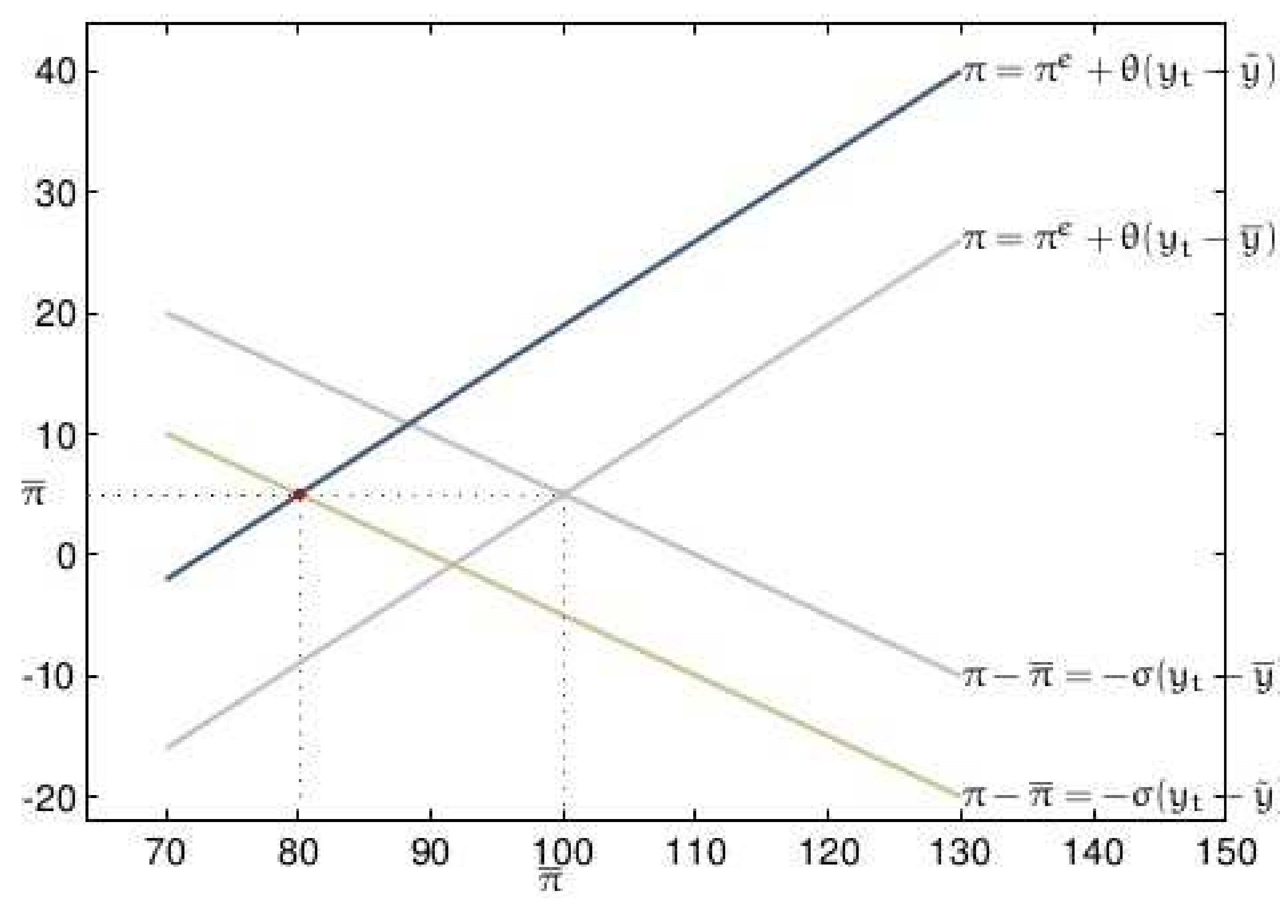


b.) **Respuesta**

La caída en el producto potencial lleva a que a cada nivel de producto, la brecha es mas grande y por lo tanto existe mayor presión inflacionaria por el lado de la oferta agregada.

Al mismo tiempo, la RPM, al tomar en cuenta el hecho que bajo $\overline{y} \rightarrow \tilde{y}$, lleva a que a cada nivel de producto se tolere menos inflación.

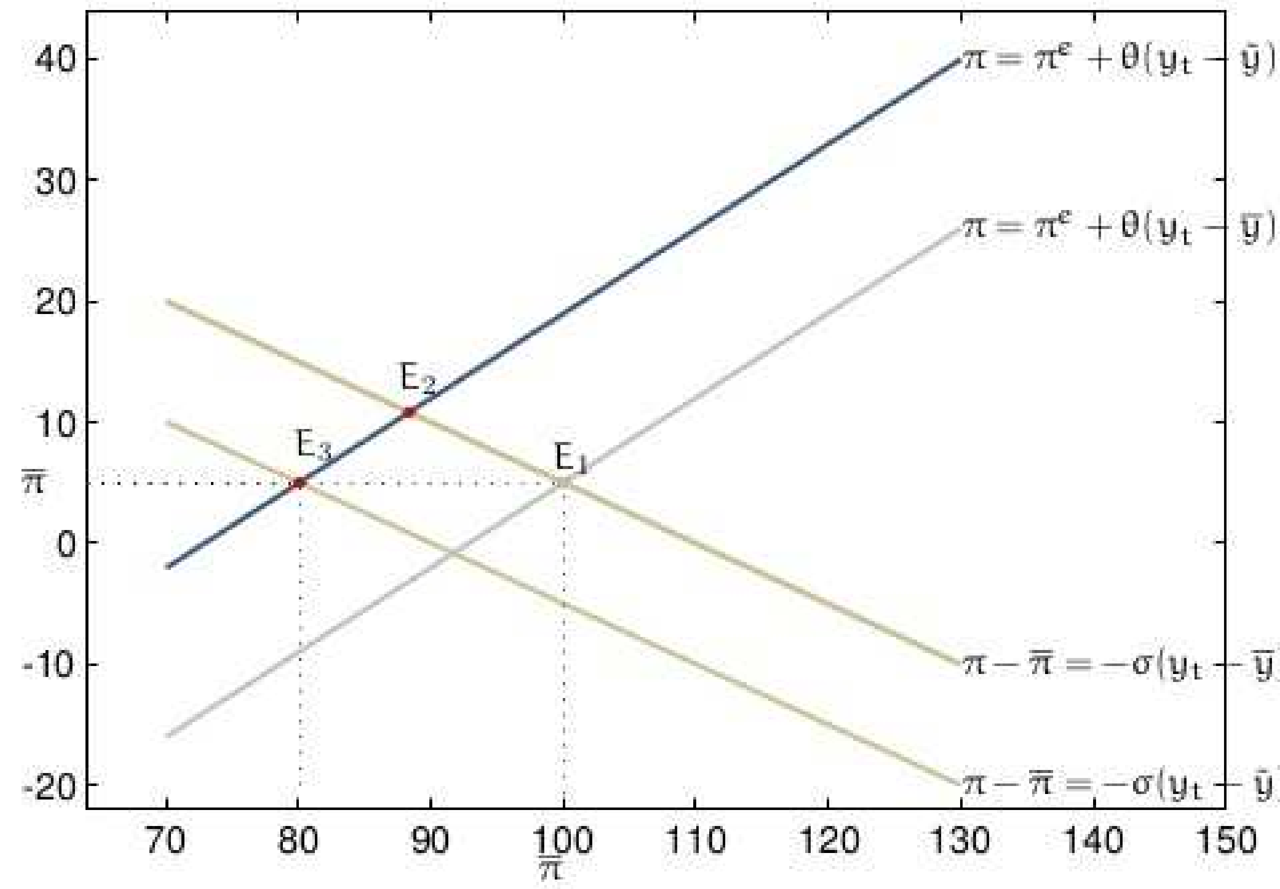
El efecto conjunto es que baja el producto pero dado que la autoridad se da cuenta, la inflación se mantiene en $\overline{\pi}$



c.) **Respuesta**

Para la oferta agregada, al igual a la pregunta anterior, sube la presión inficionaría para cada nivel de producción.

Sin embargo, como la autoridad no se da cuenta de que al observar un nivel de brecha del producto, la verdadera presión inflacionaria es mayor debido a que el producto de empleo es menor y por lo tanto la brecha mayor se ha incrementado. Esto lleva consigo un aumento en la inflación mientras el producto cae!



23. Fluctuaciones en Modelos del Ciclo Económico Real*

23.1 Sustitución intertemporal I.

a.) **Respuesta**

El problema estático es el siguiente:

$$\max_{L,C} \quad \theta \log(C_t) + (1-\theta)\left(\frac{1-L_t}{1-\sigma}\right)^{1-\sigma} \text{ s.a. } C_t = w_t L_t$$

Dejando los sub índice de tiempo, podemos escribir las condiciones de primer orden del problema :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}: \quad & \theta \log(C_t) + (1-\theta)\left(\frac{1-L_t}{1-\sigma}\right)^{1-\sigma} + \mu\left(w_t L_t - C_t\right) \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C} &= \frac{\theta}{C} - \mu = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} &= -(1-\theta)(1-L)^{-\sigma} + w\mu = 0
\end{aligned}$$

$$\frac{\theta}{C} = \frac{(1-\theta)(1-L)^{-\sigma}}{w}$$

Usando que la restricción presupuestaria nos indica que $C = wL$ por lo que:

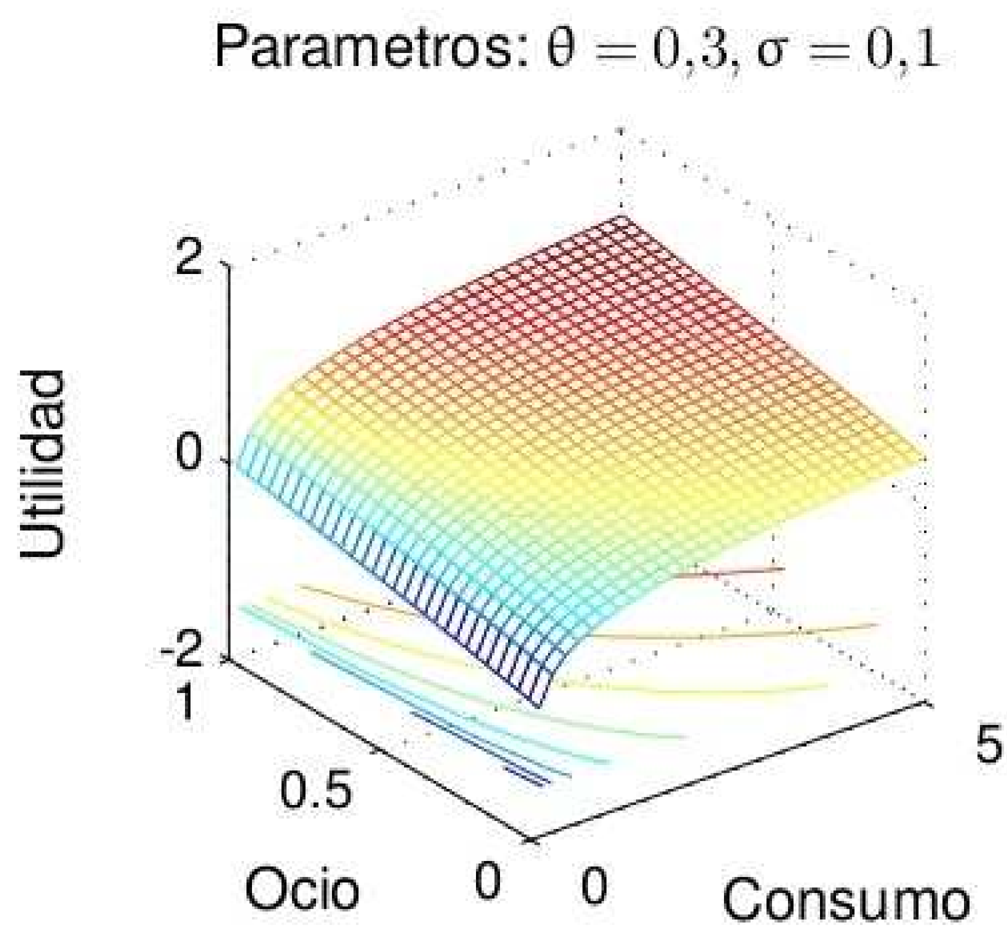
$$\frac{\theta}{\cancel{w}L} = (1-\theta)(1-L)^{-\sigma}\frac{\cancel{1}}{\cancel{w}}$$

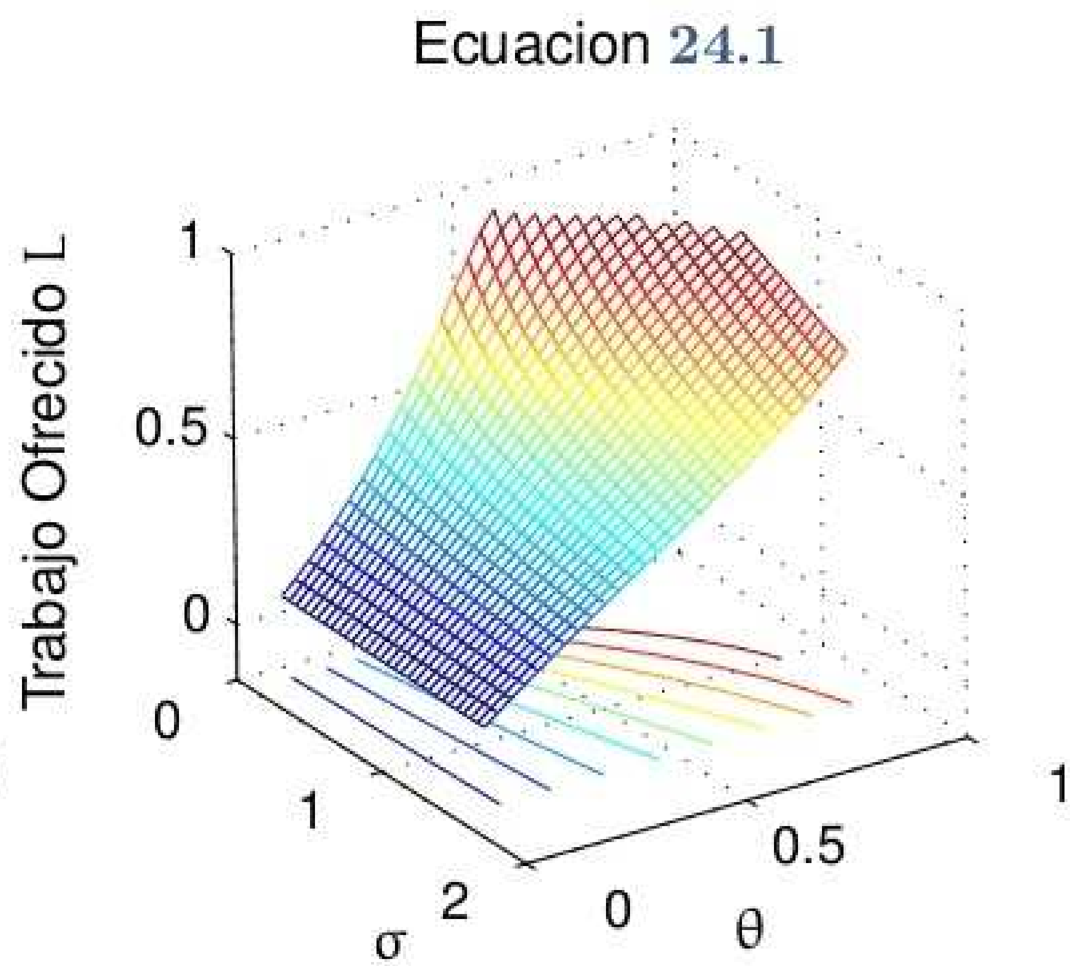
Y tenemos finalmente que se debe dar que

$$\left(\frac{1-\theta}{\theta}\right)\frac{L}{(1-L)^{\sigma}} = 1 \qquad (24.1)$$

Es decir la oferta de trabajo es independiente del salario. Esto es consecuencia que se anulan los efectos de sustitución e ingreso.

Podemos representar la utilidad y la relación entre trabajo y los parámetros θ y σ, gráficamente:





Vemos que L es

b.) **Respuesta**

Planteamos el problema de la siguiente manera:

$$\max_{L,C} \quad \theta\Big[\log(C_t) + \frac{\log(C_{t+1})}{1+\rho}\Big] + (1-\theta)\Big[\left(\frac{1-L_t}{1-\sigma}\right)^{1-\sigma} + \frac{1}{1+\rho}\left(\frac{1-L_t}{1-\sigma}\right)^{1-\sigma}\Big]$$

$$\text{s.a. } C_t + \frac{C_{t+1}}{1+r} = w_t L_t + \frac{w_{t+1}L_{t+1}}{1+r}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_t} &= \frac{\theta}{C} - \mu = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_{t+1}} &= \frac{\theta}{C}\frac{1}{1+\rho} - \mu = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L_t} &= -(1-\theta)\left(1-L_t\right)^{-\sigma} + w_t\mu = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L_{t+1}} &= -(1-\theta)\left(1-L_{t+1}\right)^{-\sigma}\frac{1}{1+\rho} + \frac{w_{t+1}}{1+r}\mu = 0
\end{aligned}$$

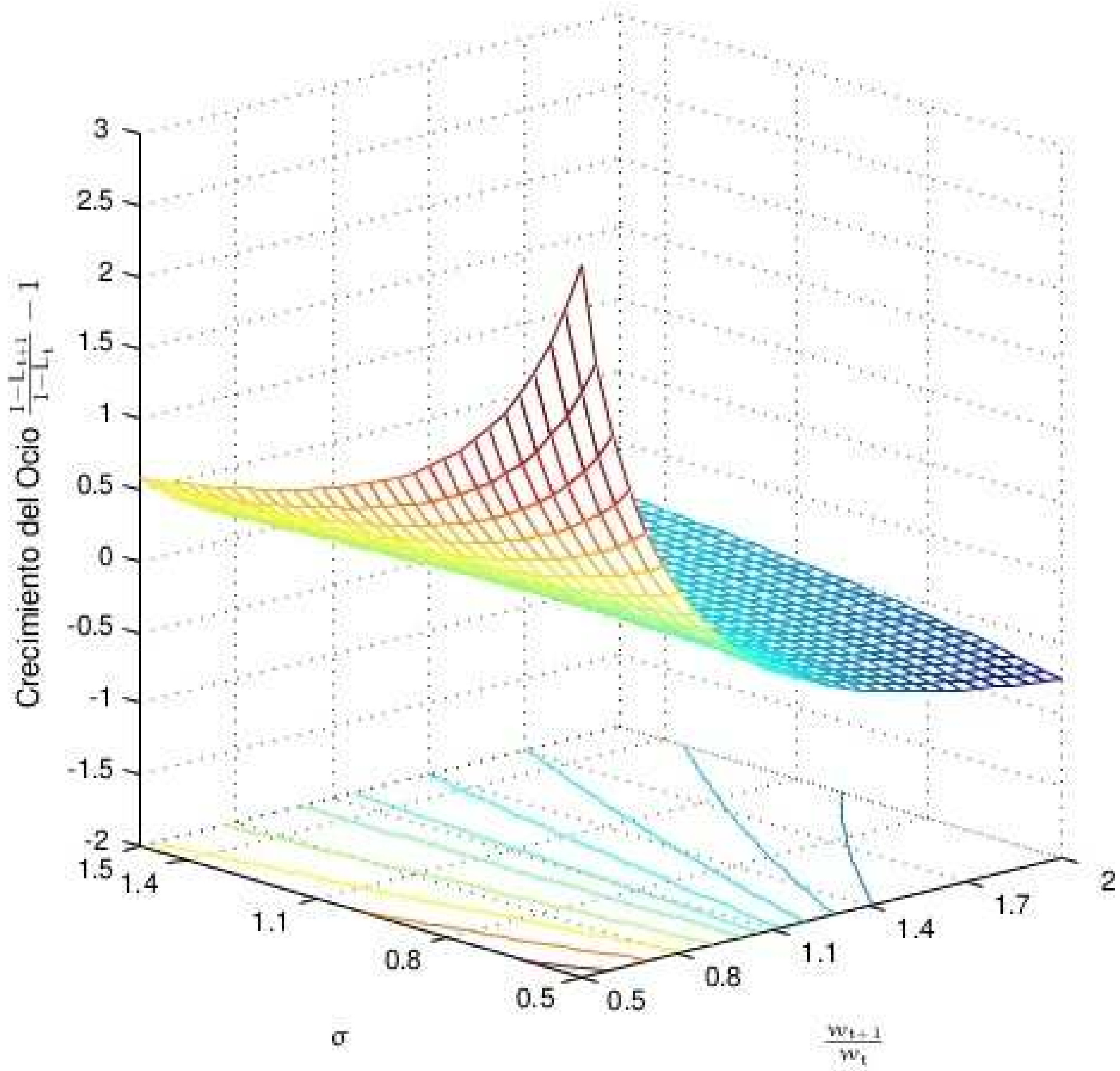
Tenemos entonces que se debe cumplir

$$C_{t+1} = C_t\left(\frac{1+r}{1+\rho}\right) \Rightarrow C_t = C_{t+1} \tag{24.2}$$

También

$$\left(\frac{1-L_t}{1-L_{t+1}}\right)^{-\sigma} = \frac{w_t}{w_{t+1}}\left(\frac{1+\rho}{1+r}\right) \Rightarrow \frac{1-L_{t+1}}{1-L_t} = \left(\frac{w_t}{w_{t+1}}\right)^{\frac{1}{\sigma}} \tag{24.3}$$

Y la conclusión es directa: si los salarios están subiendo, $L_{t+1} > L_t$. La oferta de trabajo subirá más para un valor de σ mayor.



Vemos que el ocio crece mas cuando los salarios están cayendo y existe alta sustitución intertemporal (σ bajo). Cuando los salarios están creciendo mucho, el ocio cae debido a que los hogares sustituyen mas ocio hoy por mas trabajo manana.

23.2 Sustitución intertemporal II.

Respuesta

Las condiciones de primer orden del problema son las siguientes:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}: \quad & \theta\frac{C^{1-\sigma}}{1-\sigma} + (1-\theta)\left(\frac{1-L_t}{1-\sigma}\right)^{1-\sigma} + \mu\left(w_t L_t - C_t\right) \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C} &= \theta C^{-\sigma} - \mu = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} &= -(1-\theta)(1-L)^{-\sigma} + w\mu = 0
\end{aligned}$$

$$\theta C^{-\sigma} = \frac{(1-\theta)(1-L)^{-\sigma}}{w}$$

Usando que la restricción presupuestaria nos indica que $C = wL$ por lo que:

$$w^{1-\sigma}\frac{\theta}{1-\theta} = \left(\frac{L}{1-L}\right)^{\sigma}$$

Y tenemos finalmente que se debe dar que

$$w = \left(\frac{L}{1-L}\right)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}\left(\frac{1-\theta}{\theta}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}} \tag{24.4}$$

Vemos que en esto caso, el salario si afecta la oferta laboral. Además podemos ver que la relación dependerá si $\sigma \lessgtr 1$ lo que controla si domina le efecto ingreso o el efecto sustitución.

23.3 CER en dos períodos.

a.) **Respuesta**

Maximizando el beneficio del productor en cada período se tiene:

$$\max \Pi = Y - w_t L_t \qquad \text{s.a.} Y = a_t L_t$$

Tenemos como resultado que el salario debe ser igual a la productividad marginal $\Rightarrow a_t = w_t$.

Por el lado del consumidor tenemos problema análogo al problema 23.1 pero con utilidad logaritmica:

$$\mathcal{L} = \sum_{i=0}^{1}\left[\beta^i\left(\theta\log(C_i) + (1-\theta)\log(1-L_i)\right) - \frac{\mu}{(1+r)^i}\{C_i - w_i L_i\}\right] \tag{24.5}$$

De las condiciones de primer orden (ver problemas 23.1 y 23.2) y fijando el tiempo 0 como periodo t, se tiene:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial C_t} = \frac{\theta}{C} - \mu = 0 \tag{24.6}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial C_{t+1}} = \frac{\theta}{C}\frac{1}{1+\rho} - \mu = 0 \tag{24.7}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial L_t} = -\frac{(1-\theta)}{1-L_t} + w_t\mu = 0 \tag{24.8}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial L_{t+1}} = -\frac{(1-\theta)}{1-L_{t+1}}\beta + \frac{w_{t+1}}{1+r}\mu = 0 \tag{24.9}$$

$$\tag{24.10}$$

Juntando ecuaciones 24.6 y 24.7 tenemos la ecuación de euler típica para el consumo:

$$C_{t+1} = \beta(1+r)C_t \tag{24.11}$$

Juntando ecuaciones 24.8 y 24.9 tenemos la relación entre ocio/trabajo y salarios en el tiempo:

$$\frac{1-L_{t+1}}{1-L_t} = \frac{\beta(1+r)w_t}{w_{t+1}} \tag{24.12}$$

$$\text{Despejando:}\; L_{t+1} = 1-(1-L_t)\beta(1+r)\frac{w_t}{w_{t+1}} \tag{24.13}$$

Usando la ecuación 24.11 y 24.8 en la restricción presupuestaria podemos encontrar una ecuación que relaciona consumo C_t con L_t

$$C_t = w_t(1-L_t)\frac{\theta}{1-\theta} \tag{24.14}$$

En lo que sigue mostramos como al juntar ecuaciones 24.11, 24.13, 24.14 y la restricción presupuestaria se puede despejar una oferta de trabajo en función de los salarios y los parámetros.

Primero podemos mostrar que con 24.11 y la restricción presupuestaria es fácil mostrar que el consumo en t es una proporción del valor presente del ingreso total (o ingreso permananete)

$$C_t = \frac{1}{1+\beta}\left[w_t L_t + \frac{w_{t+1}L_{t+1}}{1+r}\right] \tag{24.15}$$

Luego usando las ecuaciones

$$\begin{aligned}
C_t &= \frac{1}{1+\beta}\left[w_t L_t + \frac{w_{t+1}L_{t+1}}{1+r}\right] \\
w_t(1-L_t)\frac{\theta}{1-\theta} &= w_t L_t + \frac{w_{t+1}}{1+r}\left\{1-(1-L_t)\beta(1+r)\frac{w_t}{w_{t+1}}\right\} \\
L_t\left(1+\beta+(1+\beta)\frac{\theta}{1-\theta}\right) &= \left(\beta+(1+\beta)\frac{\theta}{1-\theta} - \frac{w_{t+1}}{w_t}\frac{1}{1+r}\right) \\
L_t\left(\frac{1+\beta}{1-\theta}\right) &= \frac{\beta+\theta}{1-\theta} - \frac{w_{t+1}}{w_t}\frac{1}{(1+r)}
\end{aligned}$$

$$L_t = \frac{\beta+\theta}{1+\beta} - \frac{w_{t+1}}{w_t}\frac{(1-\theta)}{(1+r)(1+\beta)} \tag{24.16}$$

Lo que corresponde a la oferta de trabajo del primer período, donde $\frac{\partial L_t}{\partial w_t} > 0$(oferta con pendiente positiva). Se puede ver ademas que cuando no se valora el ocio, ($\theta \to 1$), $L_t \to 1$ lo que es intuitivo ya que en este caso el costo marginal de trabajar mas es cero mientras el beneficio es positivo.

Podemos encontrar la oferta de trabajo en $t+1$ usando la ecuacion 24.16 en 24.13:

$$L_{t+1} = 1 + \beta(1+r)\left[\frac{\theta+\beta}{1+\beta} - \frac{w_{t+1}(1-\theta)}{w_t(1+r)(1+\beta)} - 1\right]\frac{w_t}{w_{t+1}} \tag{24.17}$$

Donde se puede mostar facilemente que $\frac{\partial L_{t+1}}{\partial w_{t+1}} > 0$.
El equilibrio se da cuando $Y_t = a_t L_t$ y el consumo es igual al ingreso de cada período:

$$C_t = Y_t = a_t L_t \tag{24.18}$$

$$C_{t+1} = Y_{t+1} = a_{t+1} L_{t+1} \tag{24.19}$$

La tasa de interés esta determinada por la ecuación 24.11 de donde se obtiene que:

$$r = \left(\frac{Y_{t+1}}{Y_t}\right)\frac{1}{\beta} - 1 = \left(\frac{a_{t+1}L_{t+1}}{a_t L_t}\right)\frac{1}{\beta} - 1 \tag{24.20}$$

b.) **Respuesta**
Supongamos que se incrementa la productividad del primer período, es decir, a_t y el ingreso w_t. La tasa de interés cae senalizando que el consumo en el futuro se ha hecho relativamente mas escaso por lo que una tasa baja seria la unica consistente con el mayor consumo en el presente. Ver capitulo 6 del De Gregorio .

Lo que sucede con el empleo se puede apreciar en las ofertas de trabajo dado que el salario es igual a la productividad. El aumento de productividad a_t, aumenta L_t y disminuye L_{t+1}; esto porque el ocio es más caro en el presente y más barato en el futuro. Luego, Y_t crece (efecto empleo y productividad) e Y_{t+1} cae (efecto empleo).

c.) **Respuesta**
En el caso de ser permanente, el ingreso se incrementa en ambos períodos; luego C_t y C_{t+1} suben en la misma cantidad (ver reacción del consumo ante aumento de ingreso permanente). Como el consumo y el ingreso aumentan en la misma cantidad la tasa de interés no cambia. En este caso el empleo se mantiene porque el incremento en productividad es permanente no afectando la trayectoria de ingresos del individuo.

23.4 CER en economías abiertas.

Respuesta
Tomando la ecuacion 24.11, la restriccion presupuestaria y remplazando $\beta = \frac{1}{1+\rho}$ y $r = r^*$ tenemos:

$$C_t = \frac{1}{1+\beta}\left[a_t L_t + \frac{a_{t+1}L_{t+1}}{1+r^*}\right] \tag{24.21}$$

Como vimos en el ejercicio anterior, $L_t(w_t, w_{t+1}, r^*)$ y $L_{t+1}(w_t, w_{t+1}, r^*)$ estan dadas una vez que sabemos las productividades y por lo tanto los salarios. Dado r^*, esta dado el ingreso permanente de la economia y los consumos en cada periodo.

Como sabemos del capitulo 7 del De Gregorio , la cuenta corriente esta determinada por

$$CC_t = B_{t+1} - B_t = Y_t - C_t - r^* B_t$$

Sabemos que $B_t = 0$ y que $B_{t+2} = 0$ por lo que podemos escribir las siguientes expresiones para la cuenta corriente en cada periodo:

$$\begin{aligned} CC_t &= B_{t+1} - B_t = Y_t - C_t \\ &= Y_t - \frac{1}{1+\beta}\left[Y_t + \frac{Y_{t+1}}{1+r^*}\right] \\ &= \frac{\beta Y_t}{1+\beta} + \frac{Y_{t+1}}{(1+r^*)(1+\beta)} \end{aligned}$$

Para el periodo en $t+1$, tenemso simplemente que $CC_{t+1} = -(1+r^*)CC_t$, donde ya han sido determinado todo los valores dado los parametros, en especial la productividad.

23.5 Trabajo indivisible

a.) **Respuesta**
La utilidad esperada del agente representativo es simplemente:

$$\mathcal{U} = pu(C_T, 1-H) + (1-p)u(C_D, 1) \tag{24.22}$$

b.) **Respuesta**
El consumo factible debe obedecer la siguiente restriccion:

$$pC_T + (1-p)C_D \tag{24.23}$$

c.) **Respuesta**
Maximizando la funcion de utilidad descrita en 24.22, sujeto a la restriccion 24.23, tenemos como es de esperar que la utilidad marginal entre ambos estados sea igual.

$$u_{C_T}(C_T, 1-H) = u_{C_D}(C_D, 1)$$

Podmeos ver que para que se cumpla la condicion de optimalidad anteror y al mismo tiempo sean iguales los niveles de consumo $C_T = C_D$, debe ser cierto que la funcion $u(C, L)$ sea separable en sus argumentos. Por ejemplo una funcion que cumple con esta propiedad seria la utilizada en ejercicios anteriores donde

$$u(C, 1-L) = \theta \log(C) + (1-\theta)\log(1-L) \tag{24.24}$$

24. Los Mercados del Trabajo y del Crédito en el Ciclo Económico

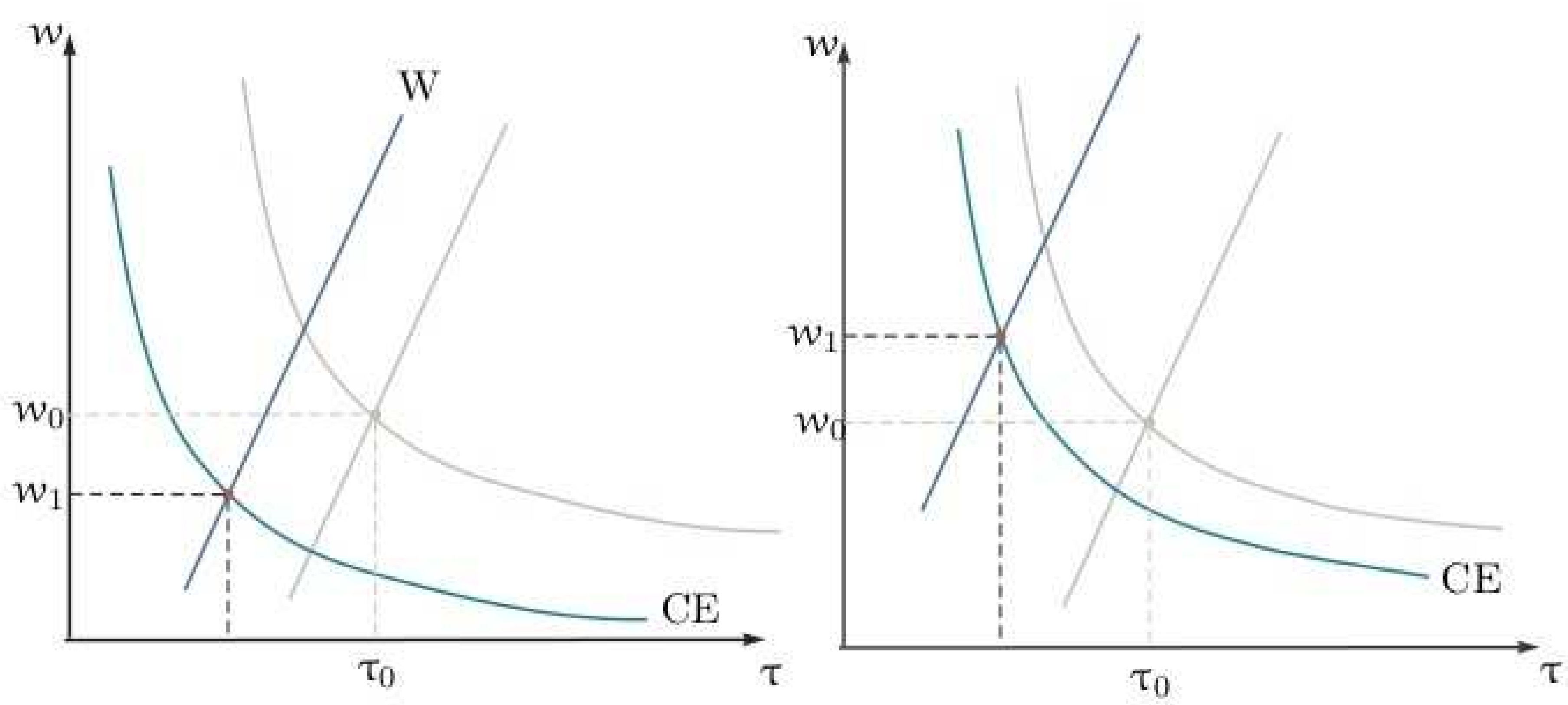
24.1 Estática comparativa en el modelo de emparejamientos .

a.) **Respuesta**
El aumento de los costos de abrir una vacante lleva a que se abran menos vacantes ya que baja el valor presente de dicha actividad. El valor de un empleo J aumenta para compensar el costo incurrido en conseguir llenar la vacante. Inambiguamente cae entonces τ.

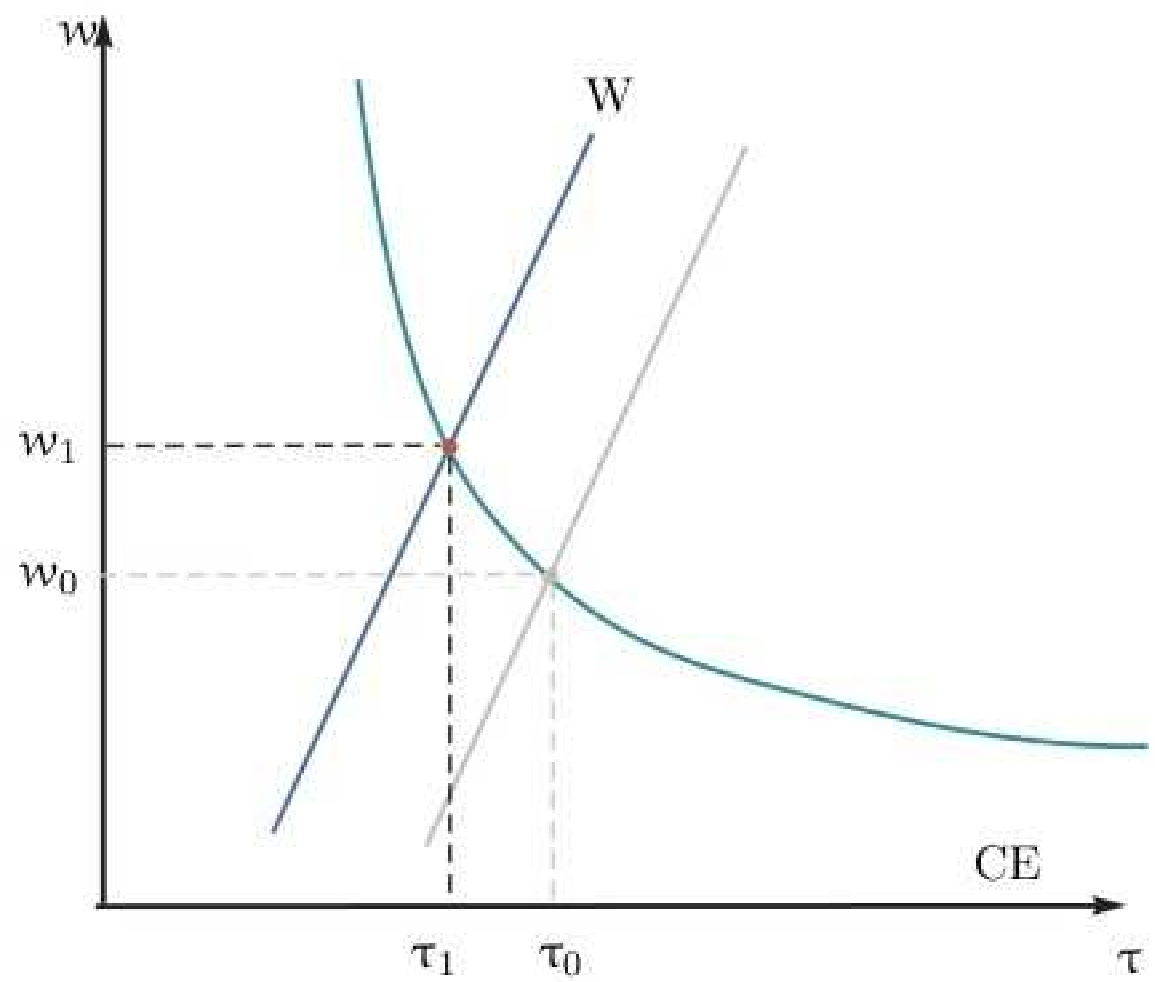
En la determinación del salario vemos que el resultado es ambiguo ya que mientras la condición de creación de empleo requiere un salario mas bajo a cada nivel de τ, el valor de la relación laboral aumenta y así la condición de negociación entre trabajador y empleador.

$$w = y - \frac{(r+s)}{a} C\tau^{\beta} \rightarrow \frac{\partial w}{\partial C} < 0$$
$$w = \frac{y + x + C\tau}{2} \rightarrow \frac{\partial w}{\partial C} > 0$$

Gráficamente vemos los dos casos en la figura abajo:



b.) **Respuesta**
Aumentan los desempleados y también los salarios.



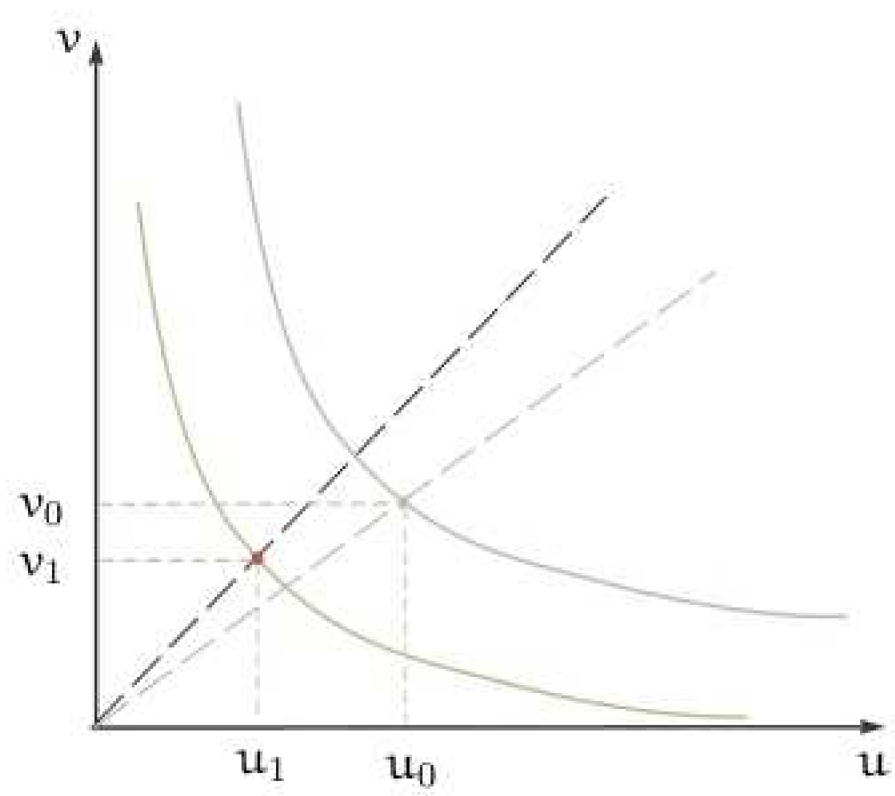
c.) **Respuesta**

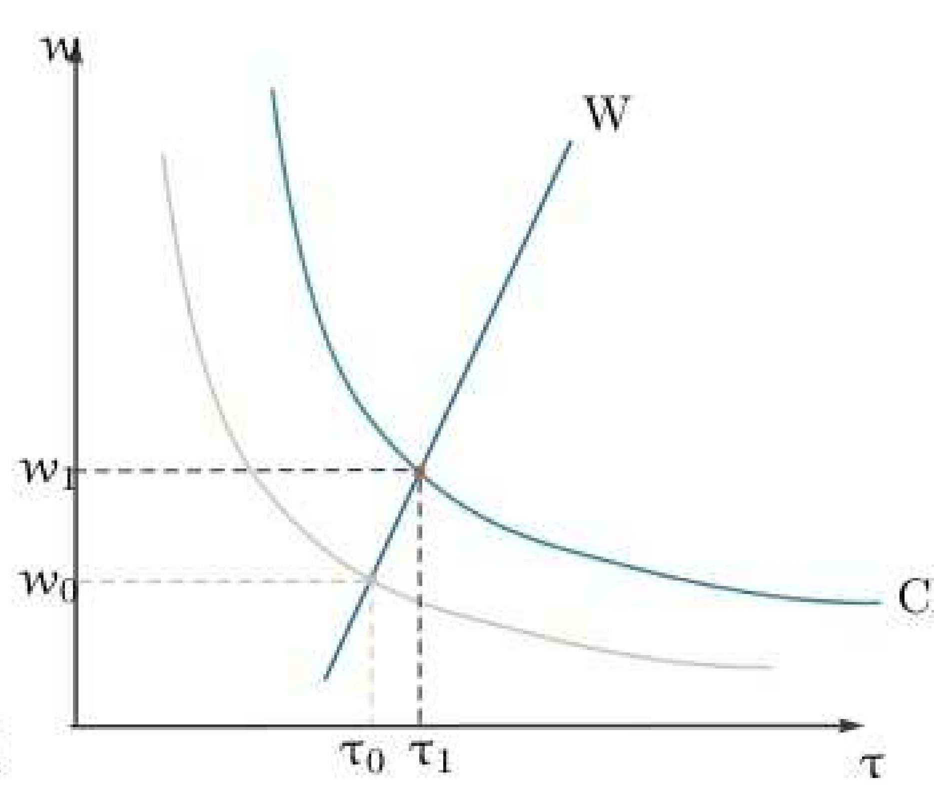
EL mejoramiento del proceso de emparejamientos trae un efecto directo sobre la curva de Beveridge. Podemos despejar ν de la ecuación (24.12) y tenemos

$$\nu = \left(\frac{s(1-u)}{a u^{\beta}}\right)^{\frac{1}{1-\beta}} \Rightarrow \frac{\partial \nu}{\partial a} < 0$$

Vemos que un aumento en a en este caso contra la curva de Beveridge hacia adentro.

Al mismo tiempo esto cambia los incentivos de la entrada de firmas ya que es ma fácil llenar una vacante por lo que a cada τ el salario debe ser mas alto de manera de eliminar las utilidades en exceso.





24.2 Flujos de empleo y tasa de desempleo de equilibrio.

a.) **Respuesta**
Usando la fórmula para el desempleo de equilibrio se tiene que:

$$u = \frac{s}{s+f} \tag{25.1}$$

y despejando para f se tiene que

$$s = \frac{fu}{1-u} = 0{,}0324. \tag{25.2}$$

Es decir la probabilidad de perder un empleo es 3,24 %. La duración del desempleo será $1/s$, es decir 2,5 meses y la duración del empleo 31 meses $(1/f)$.

b.) **Respuesta**
Usando ahora el hecho que el desempleo de hombres es 6 % y el de mujeres es 11 % se tendrá que $f = s(1-u)/u$, lo que da $f_h = 50,8\,\%$ y $f_m = 26{,}2\,\%$.
Si α es la participación de las mujeres debemos resolver:

$$\alpha 11 + (1-\alpha)6 = 7,5. \tag{25.3}$$

De donde se llega a que la participación de las mujeres en la fuerza de trabajo es (7,5-6)/(11-6)=0,3.

c.) **Respuesta**
Si α sube a 40 % entonces el desempleo agregado será $0,4 \times 11 + 0,6 \times 6 = 8$.
Ahora la probabilidad de encontrar un empleo, $f = s(1-u)/u$, caerá a 37,3 %.
Efectivamente un aumento de participación de la mujer puede llevar a una alza de la tasa de desempleo de equilibrio. Sin embargo y como se discute más adelante, no hemos explicado a que se debe este aumento de la tasa de participación de la mujer.

d.) **Respuesta**
Si la fuerza de trabajo son 6 millones y la participación de la mujer es 40 % entonces los desempleados son 480 mil, las vacantes son 15 mil, y los emparejamientos son $M = fU$, es decir 179.040. El índice de estrechez del mercado laboral será $V/U = 0,03125$. El valor de a es: $a = M/U^{0,8}V^{0,2}$, lo que da $a = 0{,}746$.

e.) **Respuesta**
Si a sube en 20 %, entonces tomará un valor de 0,8952. Manteniendo el índice de estrechez del mercado laboral en 0,03125 tenemos que f será $M/U = a\theta^{0,2} = 0,8952 \times 0,03125^{0,2} = 0,4476$, es decir la probabilidad de encontrar un empleo sube a 45 %, y la tasa de desempleo de equilibrio será $(s/(s+f))$ 6,8 %.
En este caso la mayor participación de la mujer puede ser el resultado de un mejor proceso de aparejamiento. Por ejemplo, si las mujeres tienen salas cunas para dejar a sus niños pueden buscar empleo más eficientemente, esto debería aumentar el empleo de las mujeres, y bajar el desempleo de equilibrio. Por lo tanto para asegurar que pasa con el desempleo ante el ingreso de las mujeres a trabajar hay que ser más explícitos en que es lo que lo causa este fenómeno.

24.3 Respuesta

Buscamos demostrar que se cumple la condición $\left.\frac{dx_1}{dr_1}\right|_U < \left.\frac{dx_1}{dr_1}\right|_C$.

Primero encontramos una expresión para $\left.\frac{dx_1}{dr_1}\right|_U$. Si la función de producción es $f(x_1) = x_1^{1-\theta}$ entonces $f'(x_1) = (1-\theta)x_1^{-\theta}$.

Dado la función en (24.32), tenemos:

$$
\begin{aligned}
p_1 a_1 f'(x_1) &= 1 + r \\
p_1 a_1 (1-\theta) x_1^{-\theta} &= 1 + r \\
x_1^{\theta} &= \frac{p_1 a_1 (1-\theta)}{1+r} \\
x_1 &= \left[\frac{p_1 a_1 (1-\theta)}{1+r}\right]^{\frac{1}{\theta}} \\
\frac{\partial x_1}{\partial r} &= -\frac{1}{\theta}\left[\frac{p_1 a_1 (1-\theta)}{1+r}\right]^{\frac{1}{\theta}} \left[\frac{1+r}{p_1 a_1 (1-\theta)}\right] \frac{p_1 a_1 (1-\theta)}{(1+r)^2} \\
\frac{\partial x_1}{\partial r} &= -\frac{1}{\theta} x_1 \left[\frac{\cancel{1+r}}{\cancel{p_1 a_1 (1-\theta)}}\right] \frac{\cancel{p_1 a_1 (1-\theta)}}{(1+r)^{\cancel{2}}}
\end{aligned}
$$

$$
\left.\frac{dx_1}{dr_1}\right|_U = -\frac{1}{\theta}\frac{x_1}{1+r}
$$

Ahora tomamos el caso restringido donde siempre se dará que x_1 sera igual al limit permitido por su colateral.De la ecuación (24.34) del De Gregorio tenemos:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{q_T T}{\alpha(1+r)} \\
\frac{\partial x_1}{\partial r} &= -\frac{\alpha q_T T}{(\alpha(1+r))^2} \\
\frac{\partial x_1}{\partial r} &= -\frac{q_T T}{\alpha(1+r)} \frac{\alpha}{\alpha(1+r)} \\
\frac{\partial x_1}{\partial r} &= -\frac{x_1}{(1+r)}
\end{aligned}
$$

Es directo comprobar lo que se pedida al ver que $\theta < 1$ por lo que $\frac{1}{\theta} > 1$ y tenemos :

$$
\left.\frac{dx_1}{dr_1}\right|_U = -\frac{1}{\theta}\frac{x_1}{1+r} < -\frac{x_1}{(1+r)} = \left.\frac{dx_1}{dr_1}\right|_C
$$

En le caso con algo de capital propio es fácil mostrar que se da el mismo resultado mientras se mantenga restringido en su decision por el colateral.

24.4 Fragilidad, eficiencia bancaria y exceso de financiamiento

a.) **Respuesta**

Si se conoce que la productividad es alta, el banco maximiza

$$\Pi = (r-\rho)(\overline{x}-\chi)$$

Esto claramente nos lleva a que $\chi_h^* = \underline{x}$ donde los beneficios seria $\Pi = (r-\rho)(\overline{x}-\underline{x})$.

En el caso de baja productividad es menos obvio cuantos proyectos financiar ya que parte de estos no podrá pagar su préstamo. Sin embargo como el banco paga menos de lo que cobra por los prestamos podría estar dispuesto a prestar a proyectos que aunque no puedan pagar la tasa r, igual entreguen un retorno ($\alpha(l)x_i > 1+\rho$) mayor al costo de estos fondos. De esta manera nos interesan los $\chi < x^*$.

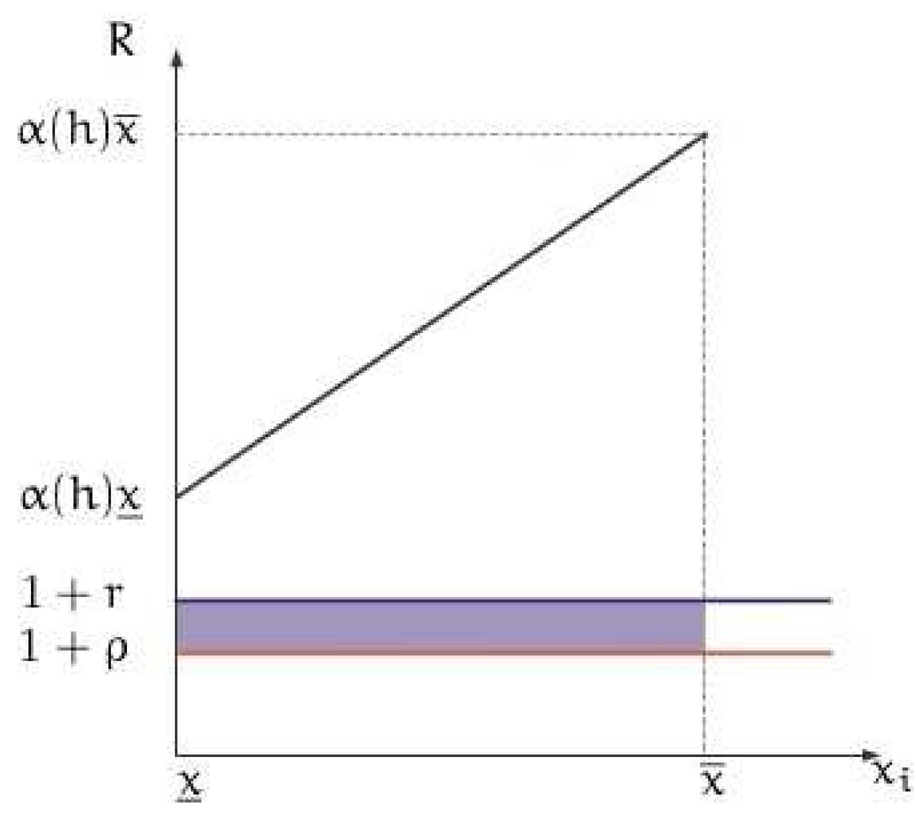
$$\text{máx}\,\Pi = (r-\rho)(\overline{x}-x^*) + \int_{\chi}^{x^*} [\alpha(l)x - (1+\rho)]dx \tag{25.4}$$

Lo que se puede escribir como

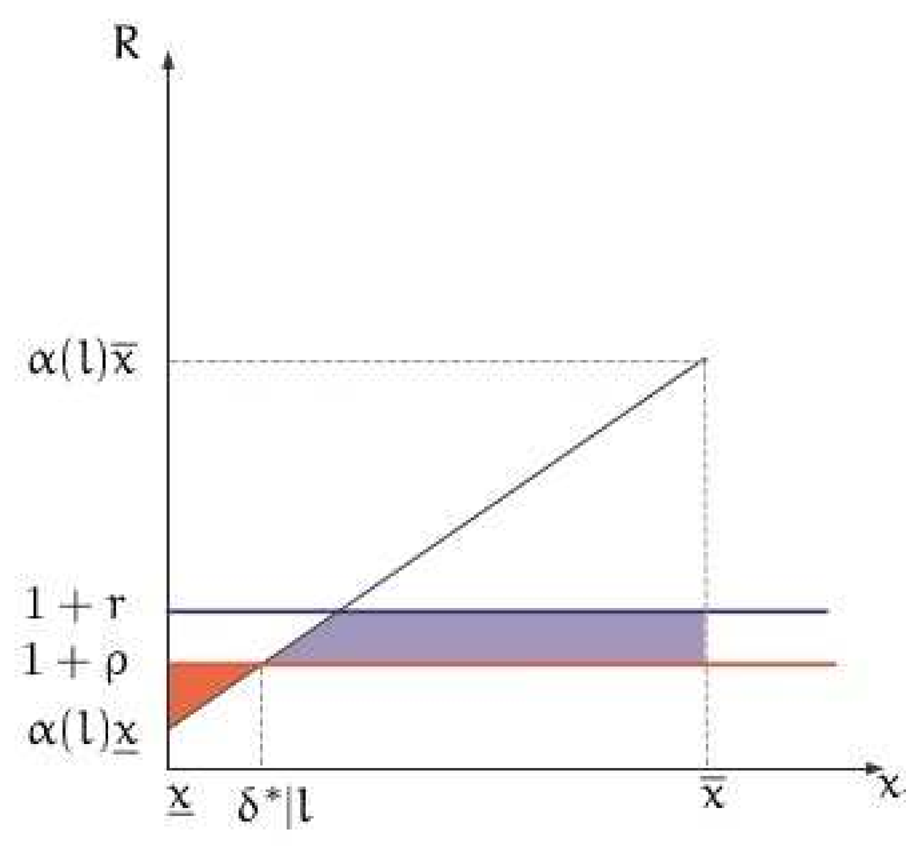
$$\Pi = (r-\rho)(\overline{x}-x^*) + \frac{\alpha(l)(x^{*2}-\chi^2)}{2} - (1+\rho)(x^*-\chi) \tag{25.5}$$

$$\begin{aligned} -\alpha(l)\chi + (1+\rho) &= 0 \\ \chi^* &= (1+\rho)/\alpha(l) \end{aligned}$$

Las utilidades en esta caso son $\Pi = (\overline{x}-x^*)(r-\rho) + \frac{(r-\rho)^2}{2\alpha(l)}$



(a) Estado Alta Productividad



(b) Estado Baja Productividad

Se puede ver que cuando hay alta productividad el banco le gustaría financiar todos los proyectos ($\delta^*|h = \underline{x}$) de tal manera de tener utilidades $\pi(\delta|h)$ de $(r-\rho)(\overline{x}-\underline{x})$. En el caso de baja productividad el banco le gustaría financiera los proyectos con rentabilidad mayor o igual al costo para el banco de financiar estos. Es decir que $\delta^*|l = x_*$ tal que $1+\rho = \alpha(l)x_*$.

b.) **Respuesta**

En este caso el banco maximiza las utilidades esperadas de la siguiente forma:

$$E(\Pi) = h(r-\rho)(\overline{x}-\chi) + (1-h)\left\{(r-\rho)(\overline{x}-x^*) + \frac{\alpha(l)(x^{*2}-\chi^2)}{2} - (1+\rho)(x^*-\chi)\right\} \tag{25.6}$$

Donde al maximizar se llega a:

$$\frac{\partial E(\Pi)}{\partial \chi} = -h(r-\rho) + (1-h)\{-\alpha(l)\chi^* + (1+\rho)\} = 0 \tag{25.7}$$

$$\chi^* = \frac{(1-h)(1+\rho) - h(r\rho)}{\alpha(l)(1-h)} \tag{25.8}$$

c.) **Respuesta**

Usando la ecuación (25.8):

$\frac{\partial \chi^*}{\partial \alpha(h)} = 0$ Mientras todos los proyectos puedan pagar $(1+r)$, la rentabilidad residual no influyen en la cantidad de proyectos finaciados ya que no es percibido por el banco. De esta manera no hay relación entre χ^* y $\alpha(h)$.

$\frac{\partial \chi^*}{\partial \alpha(l)} < 0$ UN amuento en la rentabilidad de los proyectos en el estado malo genera un χ^* mas pequeño por lo que se financian mas proyectos. Mas proyectos pueden pagar el costo del capital.

$\frac{\partial \chi^*}{\partial h} < 0$ Se financian mas proyectos debido a que aumenta en valor esperado de financiar el proyecto marginal.

$\frac{\partial \chi^*}{\partial r} < 0$ Al aumentar el beneficio de financiar un proyecto mas en el estado bueno $(r-\rho)$, se incentivo a financiar mas proyectos y χ^* cae.

$\frac{\partial \chi^*}{\partial \rho} > 0$ Idem al anterior pero al reves.

d.) **Respuesta**

En el caso que el gobierno ayude al banco en el estado malo, el banco enfrenta una costo de capital menor en los estados malos. Este ahora pasa de $1+\rho \to (1+\rho)(1-b)$. El problema de maximization es el siguiente:

$$\begin{aligned} E(\Pi) &= h(r-\rho)(\overline{x}-\chi) + (1-h)\Big\{(1+r-(1+\rho)(1-b))(\overline{x}-x^*) \\ &\quad + \frac{\alpha(l)(x^{*2}-\chi^2)}{2} - (1+\rho)(1-b)(x^*-\chi)\Big\} \\ \frac{\partial E(\Pi)}{\partial \chi} &= -h(r-\rho) + (1-h)\{-\alpha(l)\chi^* + (1+\rho)(1-b)\} = 0 \end{aligned}$$

$$\chi^* = \frac{(1-h)(1+\rho)(1-b) - h(r-\rho)}{(1-h)\alpha(l)} \tag{25.9}$$

25. Inconsistencia Intertemporal y Política Monetaria

25.1 La trampa de inflación alta.

a.) **Respuesta**

Definimos primero la perdida asociada a cada estado posible: $V^q(\pi^q, \overline{y})$ del equilibrio discrecional,$V^c(\pi^c, \overline{y})$ del equilibrio de compromiso, y la perdida asociada a la recesión $V^r(\pi^r, y^r)$.

Buscamos demostrar que el valor presente de la peridia asociada a bajar la inflación, dado $\pi^e = \pi^q$, es menor que el valor presente de seguir con el equilibrio discrecional solo cuando el descuento intertemporal es suficientemente bajo.

Definiendo el valor presente de la política de reducción (R) de la inflación como:

$$\Omega^R \quad = \quad V^r(\pi^r, y^r) + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^i V^c(\pi^c, \overline{y})$$

El escenario de *status quo* (S) es de mantener el equilibrio discrecional para siempre. Definiendo :

$$\Omega^S \quad = \quad \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^i V^q(\pi^q, \overline{y})$$

Por lo tanto buscamos demostrar que se cumple lo siguiente:

$$\Omega^S \quad > \quad \Omega^R \quad \text{ssi} \quad \rho < \frac{1}{1+\lambda\theta^2} \tag{25.1}$$

Ahora determinamos la perdida asociada a cada estado posible :

Del De Gregorio tenemos los valores de $V^q(\pi^q, \overline{y})$ y $V^c(\pi^c, \overline{y})$.

$$V^q(\pi^q, \overline{y}) \quad = \quad \lambda k^2 + \lambda^2\theta^2 k^2 \tag{25.2}$$

$$V^c(\pi^c, \overline{y}) \quad = \quad \lambda k^2 \tag{25.3}$$

La peridia en recepción es:

$$\begin{aligned} V^r(\pi^r, y^r) \quad &= \quad (\pi^r)^2 + \lambda(y - \overline{y} - k)^2 \\ &= \quad \lambda([\overline{y} + \theta(\pi^r - \pi^e)] - \overline{y} - k)^2 \quad \text{dado } \pi^r = 0 \\ &= \quad \lambda k^2(1 + \lambda\theta^2)^2 \end{aligned} \tag{25.4}$$

Usando las expresiones dadas por ecuaciones 25.2,25.2 y 25.4 determinamos expresiones para Ω^R y Ω^S:

$$
\begin{aligned}
\Omega^S &= \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+\rho}\right)^i V^q(\pi^q,\overline{y}) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+\rho}\right)^i \left(\lambda k^2+\lambda^2\theta^2k^2\right) \\
&= \left(\frac{1}{1-\frac{1}{1+\rho}}\right)\left(\lambda k^2+\lambda^2\theta^2k^2\right) \\
&= \left(\frac{1+\rho}{\rho}\right)\left(\lambda k^2+\lambda^2\theta^2k^2\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Omega^R &= V^r(\pi^r,y^r)+\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+\rho}\right)^i V^c(\pi^c,\overline{y}) \\
&= \lambda k^2(1+\lambda\theta^2)^2+\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+\rho}\right)^i \lambda k^2 \\
&= \lambda k^2(1+\lambda\theta^2)^2+\frac{1}{1+\rho}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{1+\rho}}\right)\lambda k^2 \\
&= \lambda k^2(1+\lambda\theta^2)^2+\frac{1}{\rho}\lambda k^2
\end{aligned}
$$

Reemplazando estos últimos dos resultados en 25.1:

$$
\begin{aligned}
\Omega^S &> \Omega^R \\
\left(\frac{1+\rho}{\rho}\right)\left(\lambda k^2+\lambda^2\theta^2k^2\right) &> \lambda k^2(1+\lambda\theta^2)^2+\frac{1}{\rho}\lambda k^2 \\
(1+\rho)\left(\lambda\cancel{k^2}+\lambda^2\theta^2\cancel{k^2}\right) &> \rho\lambda\cancel{k^2}(1+\lambda\theta^2)^2+\lambda\cancel{k^2} \\
\cancel{\lambda}+\lambda^{\cancel{2}}\theta^2+\rho\cancel{\lambda}+\rho\lambda^{\cancel{2}}\theta^2 &> \cancel{\lambda}+\cancel{\lambda}\left(1+\lambda\theta^2\right)^2\rho \\
\frac{\lambda\theta^2}{1+\lambda\theta^2}+\rho &> \rho(1+\lambda\theta^2) \\
\frac{\cancel{\lambda\theta^2}}{1+\lambda\theta^2} &> \rho\cancel{\lambda\theta^2}
\end{aligned}
$$

Tenemos entonces la demostración pedida:

$$
\therefore \qquad \rho < \frac{1}{1+\lambda\theta^2}
$$

b.) **Respuesta**

Definiendo el valor presente de mantener el equilibrio de baja inflación como Ω^L de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\Omega^L &= \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+\rho}\right)^i V^c(\pi^c,\overline{y}) \\ &= \frac{1+\rho}{\rho}\lambda k^2\end{aligned}$$

Por el otro lado inflar $V^I(\pi^I, y^I)$ tiene asociado la siguiente perdida (ecuación (25.7) del **De Gregorio**):

$$V^I(\pi^I, y^I) = \frac{\lambda k^2}{1+\lambda\theta^2}$$

Ω^I tiene el siguiente valor:

$$\begin{aligned}\Omega^I &= V^I(\pi^I, y^I) + \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+\rho}\right)^i V^q(\pi^q,\overline{y}) \\ &= \frac{\lambda k^2}{1+\lambda\theta^2} + \frac{1}{\rho}\left(\lambda k^2 + \lambda^2\theta^2 k^2\right)\end{aligned}$$

Buscamos demostrar que se cumple lo siguiente:

$$\Omega^I > \Omega^L \quad \text{ssi} \quad \rho < 1+\theta^2\lambda$$

Reemplazando

$$\begin{aligned}\frac{\lambda k^2}{1+\lambda\theta^2} + \frac{1}{\rho}\left(\lambda k^2 + \lambda^2\theta^2 k^2\right) &> \frac{1+\rho}{\rho}\lambda k^2 \\ \rho + (1+\theta^2\lambda)^2 &> (1+\rho)(1+\theta^2\lambda) \\ \cancel{\rho} + \cancel{1} + \cancel{2}\theta^2\lambda + \theta^4\lambda^2 &> \cancel{1} + \cancel{\rho} + \cancel{\theta^2\lambda} + \rho\theta^2\lambda \\ \theta^2\lambda(1+\theta^2\lambda) &> \rho\theta^2\lambda\end{aligned}$$

Tenemos entonces la demostración pedida:

$$\therefore \qquad \rho < 1+\theta^2\lambda$$

c.) **Respuesta**

Si los parámetros que describen las preferencias de la autoridad y las características de la curva de Phillips son tales que $\frac{1}{1+\theta^2\lambda} < \rho < 1+\theta^2\lambda$ la autoridad monetaria siempre llevara la economía al equilibrio de alta inflación independientemente de las expectativas de inflación que tengan los agentes.

Si parte de un escenario de baja inflación , encontrara óptimo inflar la economía y llevarla al equilibrio con inflación alta. Una vez instalado en este equilibrio, no encontrar óptimo bajar devuelta a una equilibrio de baja inflación porque sera muy costoso.

Por ende podemos concluir que la economía estar en una trampa de inflación!

d.) **Respuesta**
Este puede responder a tratar de evitar la gravedad del periodo de ajuste y así permitir una transición menos costosa y coordinar las expectativas en un equilibrio de baja inflación sin tener que *enseñarle* al publico que baje sus expectativas de inflación.

25.2 Política monetaria e indexación .

a.) i. **Respuesta**

$$\begin{aligned} L &= E_t\left\{\lambda(y_t-\bar{y})^2+\pi_t^2\right\} && (25.5) \\ y_t-\bar{y} &= \alpha\left(\pi_t-(1-\theta)\pi_t^e-\theta\pi_{t-1}\right)+\epsilon_t && (25.6) \end{aligned}$$

La autoridad minimiza la ecuación 25.7 sujeto a la ecuación 25.6:

$$\min_{\pi_t} \quad E_t\left\{\lambda(y_t-\bar{y})^2+\pi_t^2\right\} \quad \text{s.a. Phillips} \qquad (25.7)$$

Fijando $\theta = 0$ tenemos que le problema es el estándar:

$$\mathcal{L} = \lambda(y_t-\bar{y})^2+\pi_t^2+\mu(y-\bar{y}-\alpha\left(\pi_t-\pi_t^e\right))$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\pi} &= 2\pi-\mu\alpha=0 \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y} &= 2(y-\bar{y})+\mu=0 \end{aligned}$$

$$\pi = -\alpha\lambda(y-\bar{y})$$

Resolviendo para la inflación

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{\alpha\lambda} &= \alpha(\pi-\pi^e)+\epsilon \\ \pi &= \alpha^2\lambda(\pi^e-\pi)-\alpha\lambda\epsilon \\ \pi &= \frac{\alpha^2\lambda}{1+\alpha^2\lambda}\pi^e-\frac{\alpha\lambda}{1+\alpha^2\lambda}\epsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi^e &= \frac{\alpha^2\lambda}{1+\alpha^2\lambda}\pi^e \\ \pi^e &= 0 \end{aligned}$$

ii. **Respuesta**
La inflación de equilibrio después de la realización del shock es

$$\pi = -\frac{\alpha\lambda}{1+\alpha^2\lambda}\epsilon$$

iii. **Respuesta**
Vemos que la inflación optima esperada es cero y esto es producto de que no hay incentivo a empujar el producto mas aya del potencial.

b.) **Respuesta**
La autoridad minimiza la ecuación 25.7 sujeto a la ecuación 25.6:
Dejando $\theta \neq 0$

$$\mathcal{L} = \lambda(y_t - \bar{y})^2 + \pi_t^2 + \mu(y - \overline{y} - \alpha(\pi_t - (1-\theta)\pi_t^e - \theta\pi_{t-1})$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\pi} &= 2\pi - \mu\alpha = 0 \\
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y} &= 2(y - \overline{y}) + \mu = 0 \\
\pi &= -\alpha\lambda(y - \overline{y})
\end{aligned}$$

Vemos que las condiciones de primero orden son iguales al problema sin indexación. Se puede racionalizar esto dado que las expectativas como también los precios indexados están fijo en el periodo t, por lo que afectan la relación marginal entre inflación y brecha de producto que le gustaría tener a la autoridad monetaria.

Resolviendo para la inflación

$$\begin{aligned}
-\frac{\pi}{\alpha\lambda} &= \alpha(\pi_t - (1-\theta)\pi_t^e - \theta\pi_{t-1}) + \epsilon_t \\
\pi &= \alpha^2\lambda((1-\theta)\pi_t^e + \theta\pi_{t-1}) - \alpha\lambda\epsilon \\
\pi &= \frac{\alpha^2\lambda}{1+\alpha^2\lambda}((1-\theta)\pi_t^e + \theta\pi_{t-1}) - \frac{\alpha\lambda}{1+\alpha^2\lambda}\epsilon
\end{aligned}$$

Aplicando expectativas racionales:

$$\begin{aligned}
\pi^e(1+\alpha^2\lambda) &= \alpha^2\lambda(1-\theta)\pi_t^e + \alpha^2\lambda\theta\pi_{t-1} \\
\pi^e &= \frac{\alpha^2\lambda\theta}{1+\alpha^2\lambda\theta}\pi_{t-1}
\end{aligned}$$

Usando esto en el resultado anterior podemos encontrar la inflación de equilibrio:

$$\begin{aligned}
\pi &= \frac{\alpha^2\lambda}{1+\alpha^2\lambda}\left[\frac{\alpha^2\lambda\theta}{1+\alpha^2\lambda\theta}\pi_{t-1}(1-\theta) + \theta\pi_{t-1}\right] - \frac{\alpha\lambda}{1+\alpha^2\lambda}\epsilon_t \\
\pi &= \frac{\alpha^2\lambda\theta}{1+\alpha^2\lambda\theta}\pi_{t-1} - \frac{\alpha\lambda}{1+\alpha^2\lambda}\epsilon
\end{aligned}$$

Vemos que la inflación toma la forma de un AR(1) $\pi_t = \rho\phi_{t-1} + \nu$ donde $\rho = \frac{\alpha^2\lambda\theta}{1+\alpha^2\lambda\theta}$. Se puede verificar que ρ es creciente en θ y por lo tanto el tiempo que demora esta economía en converger depende negativamente de la indexación.

c.) **Respuesta**
Existirá un sesgo inflacionario el cual es proporcional a la inflación pasada. A medida que θ aumenta $\rho \to 1$ por lo que la inflación seria un random walk ya que no existe convergencia sino un constante drift con los shocks que le pegan a la economía. Si $\theta \to 0$ volvemos al equilibrio derivado en la primera parte de este problema.

25.3 Financiamiento inflacionario.

a.) **Respuesta**
El óptimo social se obtiene de maximizar:

$$\text{máx}\, W = \pi\left[\alpha - \frac{\beta}{2}\pi^e\right] - \frac{\phi}{2}\pi^2.$$

Donde se debe asumir $\pi = \pi^e$. De aquí se llega a:

$$\pi^O = \frac{\alpha}{\beta + \phi}.$$

b.) **Respuesta**
La solución de equilibrio (consistente intertemporalmente) se obtiene derivando (a.)) con respecto a π. La condición de primer orden es:

$$\alpha - \frac{\beta}{2}\pi^e - \phi\pi = 0.$$

En equilibrio $\pi = \pi^e$ puesto que no hay incertidumbre, en consecuencia:

$$\pi^C = \frac{\alpha}{\frac{\beta}{2} + \phi}.$$

c.) **Respuesta**
La inflación que maximiza el señoreaje es la que maximiza:

$$\pi\left[\alpha - \frac{\beta}{2}\pi\right].$$

Resolviendo se llega a:

$$\pi^M = \frac{\alpha}{\frac{\beta}{2}}.$$

d.) **Respuesta**
De comparar los tres valores para la inflación es fácil ver que:

$$\pi^O < \pi^C < \pi^M.$$

e.) **Respuesta**

El gobierno no puede comprometerse a una inflación menor a π^C, ya que de ser así siempre tendrá el incentivo de inflar más para obtener más señoreaje, puesto que $\pi^M > \pi^C$. Esto es fácil demostrar algebraicamente, pero no es necesario.

25.4 Interacciones repetidas e inconsistencia dinámica.

a.) **Respuesta**

En este caso, analizamos un juego de una etapa entre la autoridad y el público. Para encontrar el óptimo social debemos establecer el lagrangeano de este problema, es decir:

$$\begin{aligned} \max_{y,\pi} \mathcal{U} &= \lambda_i(y-\bar{y}) - \frac{1}{2}\pi^2 \\ sa &: \quad y = \bar{y} + \theta(\pi - \pi^e) \end{aligned}$$

Reemplazando la curva de Phillips en la función de utilidad obtenemos:

$$\max_{y,\pi} \mathcal{U} = \lambda_i\theta(\pi - \pi^e) - \frac{1}{2}\pi^2$$

La CPO será:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \pi} &= \lambda_i\theta - \pi = 0 \\ \pi &= \lambda_i\theta \end{aligned}$$

Que corresponde a la inflación en el óptimo social.

b.) **Respuesta**

El modelo que estamos analizando, corresponde a un modelo reputacional. Consideremos (25.8) y la siguiente situación:

$$\text{Autoridad}: \begin{cases} 1)\text{Prob} = p & \text{Misma preocupación que el público por } y \text{ y } \pi \\ 2)\text{Prob} = (1-p) & \text{Sólo se preocupa por } \pi \end{cases}$$

Luego, se maximiza una función del siguiente tipo:

$$\mathcal{U} = \sum_{i=0} \beta^i \Pi_i$$

Con Π_i como la utilidad de la autoridad dada por (25.8) en cada periodo.

Dada la maximización de la autoridad, en que el óptimo es $\pi = \lambda_i\theta$, resolvemos recursivamente, es decir, de atrás hacia adelante. Supongamos un modelo de 2 periodos.

Tendrémos entonces que π_1 puede ser cero ó $\lambda_1\theta$. Luego, al optimizar para el primer periodo podrá decidir entre uno de estos dos valores. Sin embargo, el público capatrá esta información y considerará a la autoridad como tipo 1 o 2 según la decisión que tome[6]. Finalmente tendremos:

$$\mathcal{U} = \lambda_1\theta(\pi_1 - \pi_1^e) - \frac{1}{2}\pi_1^2 + \beta[\lambda_2\theta(\pi_2 - \pi_2^e) - \frac{1}{2}\pi_2^2] \quad (25.8)$$

Reemplazando los valores óptimos:

$$\begin{aligned}\mathcal{U}^* &= \lambda_1\theta(\lambda_1\theta - \pi^e) - \frac{1}{2}(\lambda_1\theta)^2 - \beta\frac{1}{2}(\lambda_2\theta)^2 \\ &= \lambda_1\theta(\frac{1}{2} - \pi^e) - \beta\frac{1}{2}(\lambda_2\theta)^2\end{aligned}$$

Sin embargo, cabe la posibilidad de que la autoridad eliga $\pi_1 = 0$. Tendrémos entonces que:

$$\text{Autoridad}: \begin{cases} 1)\text{Prob} = q & \text{Se elige } \pi_1 = 0 \\ 2)\text{Prob} = (1-q) & \text{Se elige } \pi_1 \neq 0 \end{cases}$$

Tenemos entonces varias opciones:

1. Se puede estar frente a una autoridad tipo 2), con probabilidad $1 - p$.
2. Se puede estar frente a una autoridad tipo 1) que elige $\pi_1 = 0$.

La probabilidad de que sea una autirdad tipo 1 será $\frac{qp}{[(1-p)+qp]}$. Dado lo anterior, se tendrá que la utilidad, cuando se elige inflación igual a cero será:

$$\begin{aligned}\mathcal{U}(q) &= \lambda\theta(-\pi^e) + \beta\left[\lambda\theta\left[\lambda\theta - \frac{qp}{[(1-p)+qp]}\lambda\theta\right] - \frac{1}{2}(\lambda\theta)^2\right] \\ &= \beta(\lambda\theta)^2\left(\frac{1}{2} - \frac{qp}{[(1-p)+qp]}\right) - \lambda\theta\pi^e\end{aligned}$$

c.) **Respuesta**

Continuando con el caso anterior, analizamos para 2 periodos [7]. Debemos analizar los casos en que $\mathcal{U} \gtrless \mathcal{U}(q)$.

- Si $\mathcal{U} > \mathcal{U}(q)$: Tendremos entonces que se cumple:

$$\begin{aligned}\lambda\theta\left(\frac{1}{2} - \pi^e\right) - \beta\frac{1}{2}(\lambda\theta)^2 &> \beta(\lambda\theta)^2\frac{1}{2} - \lambda\theta\pi^e \\ \beta &< \frac{1}{2\lambda\theta}\end{aligned}$$

[6] La maximización del primer periodo es análoga a la del segundo periodo.

[7] El modelo es extensible para infinitos periodos.

- Si $\mathcal{U} < \mathcal{U}(q)$: Tendremos entonces que se cumple:

$$\begin{aligned}\lambda\theta\left(\frac{1}{2}-\pi^e\right)-\beta\frac{1}{2}(\lambda\theta)^2 &< \beta(\lambda\theta)^2\left(\frac{1}{2}-p\right)-\lambda\theta\pi^e \\ \beta &> \frac{1}{2\lambda\theta(1-p)}\end{aligned}$$

Finalmente, tendremos que la condición sobre β será:

$$\frac{1}{2\lambda\theta(1-p)} < \beta < \frac{1}{2\lambda\theta}$$

25.5 Inconsistencia intertemporal y curva de phillips.

a.) **Respuesta**
Introduciendo la ecuación (25.44) en (25.43) y derivando con respecto a π llegamos a la condición de primer orden:

$$a\pi - b\alpha = 0 \tag{25.9}$$

Despejando π llegamos a:

$$\pi = \frac{b\alpha}{a} \tag{25.10}$$

Para calcular el producto sabemos que $\pi = \pi^e$, por lo tanto de la ecuación (25.44) tenemos que:

$$y = \bar{y}$$

b.) **Respuesta**
El público le debe creer si la autoridad económica tiene credibilidad, de lo contrario el equilibrio de $\pi = \pi^e$ no se va a dar en $\pi = 0$. El problema es que si los agentes tiene expectativas de inflación mayores a cero y las inflación real del año es cero las firmas contratarán a menos trabajadores; y por lo tanto los agentes ajustarán sus expectativas.

c.) **Respuesta**
Elegiría α igual a cero. Esto porque en este caso no necesita no necesita estabilizar ya que tiene ciencia cierta de lo que va a suceder. Además el producto siempre esta en el producto potencial.

d.) **Respuesta**
Cuando la inflación es alta; las firmas ajustan sus precios más frecuentemente. Esto hace que movimientos en la demanda agregada afecten más al precio. Por lo tanto π alto hace la oferta agregada mas parada: es decir α es chico. La relación es a mayor π menor es

α. Lucas por otra parte dice que países con altas inflaciones, los cambios en los precios no afectan mucho al producto porque todos tienen incorporados esas inflaciones. Sin embargo en países con bajas inflaciones, sorpresas inficionarías tienen gran efecto en el producto; por lo tanto cuando la inflación es alta, α es bajo, y cuando π es bajo α es grande.

e.) **Respuesta**
Con la ecuación (**25.13**) y la ecuación (25.45) tenemos que:

$$a\pi = b(\pi^e)^{-\phi}\bar{\alpha}$$

Además sabemos que en el largo plazo $\pi = \pi^e$, por lo tanto la inflación es:

$$\pi = (\frac{b\bar{\alpha}}{a})^{\frac{1}{1+\phi}}$$

Cuando ϕ se va a ∞ entonces desaparece la curva de Phillips por que es demasiado sensible a las variaciones de la inflación esperada cuando difieren de la inflación actual. Cuando ϕ es cero entonces la inflación es como si α no dependiera de π, estamos de vuelta al caso original.

25.6 Contratos para bancos centrales.

a.) **Respuesta**

$$\begin{aligned}
\min_{(\pi,y)} \mathcal{L} &= \phi\frac{(y-y^*)^2}{2} + \frac{\mu}{2}\pi^2 + \lambda\left[y - \overline{y} - \alpha(\pi - \pi^e) - \epsilon\right] \\
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y} &= \phi(y-y^*) + \lambda = 0 \\
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \pi} &= \mu\pi - \alpha\lambda = 0
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad -\frac{\alpha\phi}{\mu}(y-y^*) = \pi \tag{25.11}$$

Los agentes de la economía son racionales y conocen las preferencias del BC por lo que usaran esta información sobre las CPO del BC al derivar sus propias expectativas de π^e.

$$\begin{aligned}
y &= \overline{y} + \alpha(\pi - \pi^e) + \epsilon \\
y^* - \frac{\mu}{\alpha\phi}\pi &= \overline{y} + \alpha\pi - \alpha\pi^e + \epsilon \\
\pi\left[\frac{\alpha^2\phi + \mu}{\alpha\phi}\right] &= y^* - \overline{y} + \alpha\pi^e - \epsilon \\
\pi &= \frac{\alpha\phi\,(y^* - \overline{y} - \epsilon) + \alpha^2\phi\pi^e}{\alpha^2\phi + \mu} \qquad (25.12)
\end{aligned}$$

Tomando esperanzas de expresión podemos encontrar las expectativas de inflación de los agentes.

$$\pi^e = \frac{\alpha\phi}{\mu}(y^* - \overline{y})$$

Reemplazando en la ecuación (25.16), nos da la inflación de equilibrio:

$$\pi = \frac{\alpha\phi}{\mu}(y^* - \overline{y}) - \frac{\alpha\phi}{\alpha^2\phi + \mu}\epsilon$$

Vemos que existirá un sesgo inficionarlo producto a que el banco central busque aumentar el producto mas aya de $\overline{y}$. Dado que el banco no puede creíblemente comprometerse a su meta de cero inflación, los agentes anticipan su comportamiento discrecional generando un sesgo inflacionario.

b.) **Respuesta**
Si no busca empujar el producto por sobre $\overline{y}$.

c.) **Respuesta**
En efecto es el mismo problema pero se puede ahora alterar los incentivos del BC a través del contrato contingente.

$$\begin{aligned}
\min_{(\pi,y)} \mathcal{L} &= -t_0 - t_1\pi + \phi\frac{(y-y^*)^2}{2} + \frac{\mu}{2}\pi^2 + \lambda\left[y - \overline{y} - \alpha(\pi - \pi^e) - \epsilon\right] \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} &= \phi(y - y^*) + \lambda = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \pi} &= -t_1 + \mu\pi - \alpha\lambda = 0
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad -\frac{\alpha\phi}{\mu}(y - y^*) + \frac{t_1}{\mu} = \pi \tag{25.13}$$

$$\begin{aligned}
y = y^* - \frac{\mu}{\alpha\phi}\pi + \frac{1}{\alpha\phi}t_1 &= \overline{y} + \alpha\pi - \alpha\pi^e + \epsilon & (25.14)\\
\pi\left[\frac{\alpha^2\phi + \mu}{\alpha\phi}\right] &= y^* - \overline{y} + \alpha\pi^e - \epsilon + \frac{t_1}{\alpha\phi} & (25.15)\\
\pi &= \frac{\alpha\phi\left(y^* - \overline{y} - \epsilon + \frac{t_1}{\alpha\phi}\right) + \alpha^2\phi\pi^e}{\alpha^2\phi + \mu} & (25.16)
\end{aligned}$$

$$\pi^e = \frac{\alpha\phi}{\mu}(y^* - \overline{y} + \frac{t_1}{\alpha\phi}) \tag{25.17}$$

Reemplazando en la ecuación (25.16), nos da la inflación de equilibrio:

$$\pi = \frac{\alpha\phi}{\mu}(y^* - \overline{y}) + \frac{t_1}{\mu} - \frac{\alpha\phi}{\alpha^2\phi + \mu}\epsilon \tag{25.18}$$

Con lo que para lograr $\pi = 0$ en valor esperado, se requiere que $t_1^* = -\alpha\phi(y^* - \overline{y})$

d.) **Respuesta**
Vemos que no cambia con respecto al caso sin contrato! El sesgo inflacionario producto del problema de inconsistencia dinámica no depende el shock ϵ por lo que la estructura de incentivos solo tienen elevar el costo marginal de la inflación en un monto fijo e igual al sesgo inflacionario para logra $\pi = 0$

25.7 Reputación y inconsistencia dinámica.

a.) **Respuesta**
Dado que el problema es de horizonte *finito*, es posible resolverlo usando *inducción*, es decir, lo relevante del problema es la decisión de la autoridad monetaria en el último período ($t = 2$) y, en base a eso, podremos resolver el resto de los períodos.

De acuerdo al enunciado, la autoridad elige la inflación dada la inflación esperada, luego, $\pi_2^e = \bar{\pi_2^e}$. Entonces, para $t = 2$

$$V = E\left[b(\pi_2 - \bar{\pi_2^e}) + c\pi_2 - \frac{a}{2}\pi_2^2\right]$$

Sabemos que $\pi_2 = \hat{\pi_2} + \epsilon_2$, luego

$$V = E\left[b(\hat{\pi_2} + \epsilon_2 - \bar{\pi_2^e}) + c(\hat{\pi_2} + \epsilon_2) - \frac{a}{2}(\hat{\pi_2} + \epsilon_2)^2\right]$$
$$V = E\left[b(\hat{\pi_2} + \epsilon_2 - \bar{\pi_2^e}) + c(\hat{\pi_2} + \epsilon_2) - \frac{a}{2}(\hat{\pi_2^2} + 2\hat{\pi_2}\epsilon_2 + \epsilon_2^2)\right]$$
$$V = E\left[b\hat{\pi_2} + b\epsilon_2 - b\bar{\pi_2^e} + c\hat{\pi_2} + c\epsilon_2 - \frac{a}{2}\hat{\pi_2^2} + a\hat{\pi_2}\epsilon_2 + \frac{a}{2}\epsilon_2^2\right]$$

Como $\hat{\pi_2}$ y $\bar{\pi_2^e}$ son variables no-aleatorias, entonces

$$V = b\hat{\pi_2} + bE[\epsilon_2] - b\bar{\pi_2^e} + \bar{c}\hat{\pi_2} + \bar{c}E[\epsilon_2] - \frac{a}{2}\hat{\pi_2^2} + a\hat{\pi_2}E[\epsilon_2] + \frac{a}{2}E[\epsilon_2^2]$$

Por enunciado, sabemos qu $E[\epsilon_2] = 0$ y $E[\epsilon_2^2] = \sigma_\epsilon^2$, luego

$$V = b(\hat{\pi_2} - \bar{\pi_2^e}) + \bar{c}\hat{\pi_2} - \frac{a}{2}(\hat{\pi_2^2} + \sigma_\epsilon^2) \tag{25.19}$$

Buscamos el valor de $\hat{\pi_2}$ que minimiza el valor de V, luego

$$\frac{\partial V}{\partial \hat{\pi_2}} = b + \bar{c} - a\hat{\pi_2} = 0$$
$$\hat{\pi_2} = \frac{b + \bar{c}}{a}$$

Reemplazando **25.20** en **25.19**

$$V = b\left(\frac{b+\bar{c}}{a} - \bar{\pi_2^e}\right) + \bar{c}\left(\frac{b+\bar{c}}{a}\right) - \frac{a}{2}\left(\left(\frac{b+\bar{c}}{a}\right)^2 + \sigma_\epsilon^2\right)$$
$$V = -b\bar{\pi_2^e} + \underbrace{b\left(\frac{b+\bar{c}}{a}\right) + \bar{c}\left(\frac{b+\bar{c}}{a}\right) - \frac{a}{2}\left(\frac{b+\bar{c}}{a}\right)^2 + \frac{a}{2}\sigma_\epsilon^2}_{A(a,b,\bar{c},\sigma_\epsilon^2)}$$
$$V = -b\bar{\pi_2^e} + A(a, b, \bar{c}, \sigma_\epsilon^2) \tag{25.20}$$

b.) **Respuesta**
Del enunciado sabemos que

$$\pi_2^e = \alpha + \beta\pi_1$$
$$\pi_2^e = \alpha + \beta(\hat{\pi_1} + \epsilon_1)$$

Además, la función objetivo en $t = 1$ es

$$V = b(\hat{\pi_1} - \bar{\pi_1^e}) + \bar{c}\hat{\pi_1} - \frac{a}{2}(\hat{\pi_1^2} + \sigma_\epsilon^2) - b\bar{\pi_2^e} + A(a, b, \bar{c}, \sigma_\epsilon^2) \tag{25.21}$$

Reemplazando

$$V = b(\hat{\pi_1} - \bar{\pi_1^e}) + \bar{c}\hat{\pi_1} - \frac{a}{2}(\hat{\pi_1^2} + \sigma_\epsilon^2) - b(\alpha + \beta(\hat{\pi_1} + \epsilon_1)) + A(a, b, \bar{c}, \sigma_\epsilon^2)$$

Derivando,

$$\frac{\partial V}{\partial \hat{\pi_1}} = b + \bar{c} - a\hat{\pi_1} - b\beta = 0$$
$$\hat{\pi_1} = \frac{b + \bar{c} - b\beta}{a} \tag{25.22}$$

c.) **Respuesta**

Dado que π_1 y π_2 son funciones lineales de c y ϵ que, a su vez, son variables aleatorias con distribución normal, podemos usar la siguiente expresión de expectativas condicionales

$$E[\pi_2 | pi_1] = E[\pi_2] + \frac{\text{cov}(\pi_2, \pi_1)}{\text{var}(\pi_1)} [\pi_1 - E[\pi_1]] \tag{25.23}$$

Por otro lado, sabemos que

$$\begin{aligned}
E[\pi_1] &= E[\hat{\pi_1} + \epsilon_1] = \frac{b + \bar{c} - b\beta}{a} \\
E[\pi_2] &= E[\hat{\pi_2} + \epsilon_2] = \frac{b + \bar{c}}{a} \\
\text{var}(\pi_1) &= \text{var}(\hat{\pi_1} + \epsilon_1) = \text{var}\left(\frac{b + \bar{c} - b\beta}{a} + \epsilon_1\right) = \frac{\sigma_c^2}{a^2} + \sigma_\epsilon^2 \\
\text{cov}(\pi_1, \pi_2) &= \text{cov}\left(\frac{b + \bar{c} - b\beta}{a} + \epsilon_1, \frac{b + \bar{c}}{a} + \epsilon_2\right) = \text{cov}(c/a, c/a) = \frac{\sigma_c^2}{a^2}
\end{aligned}$$

Reemplazando en 25.23 y despejando β, tenemos que

$$\beta = \frac{\frac{\sigma_c^2}{a^2}}{\frac{\sigma_c^2}{a^2} + \sigma_\epsilon^2}$$

d.) **Respuesta**

Como podemos ver, $\hat{\pi_1} < \hat{\pi_2}$. Esto se explica por la naturaleza finita del horizonte temporal. En el período 2 la autoridad monetaria no tiene *incentivos* para ser consistente, debido a que ya no hay reputación que perder. En cambio, en el período 1, la autoridad debe ganarse la credibilidad de los agentes, lo que hace que la inflación objetivo sea más baja en el primer período.