PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
DEPTO. DE ING. HIDRÁULICA Y AMBIENTAL
ICH1104. MECÁNICA DE FLUIDOS

PRIMER SEMESTRE DE 2012 — INTERROGACIÓN N°3

Jueves 21 de junio de 2012. — Sin Apuntes. Tiempo total: 2:00 hrs.

NOMBRE........PAUTA........

INSTRUCCIONES

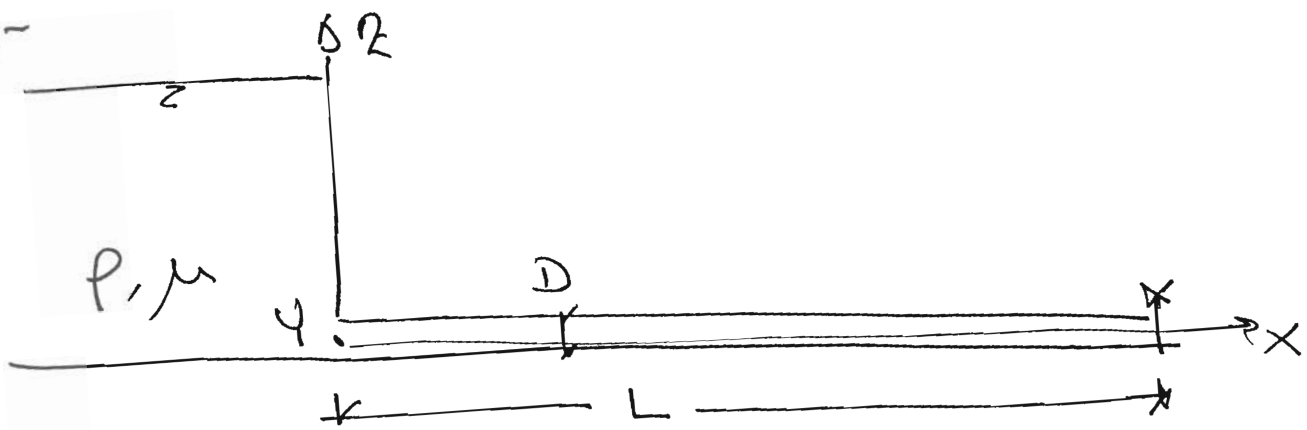
Coloque su nombre en esta página. **No separe las hojas de este cuadernillo.**

Entregue en este cuadernillo sus respuestas en forma ordenada. Ocupe una hoja nueva para cada problema e indique claramente el problema que está contestando. Escriba con tinta o lápiz pasta. Explique su solución con las frases necesarias para poder seguirla. Ud. es responsable de que se entienda.

Sólo debe entregar este cuadernillo al final de la interrogación para ser corregido, de manera que debe asegurarse que sus respuestas sean completas, estén bien escritas y se pueda identificar claramente lo que contesta.

Problema	1	2	3	Final
Corrector				
Nota				

1.-



a.-

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \cancel{v\frac{\partial u}{\partial y}} + \cancel{w\frac{\partial u}{\partial z}} = \cancel{f_{mx}} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\\
&\cancel{\frac{\partial v}{\partial t}} + u\cancel{\frac{\partial v}{\partial x}} + v\cancel{\frac{\partial v}{\partial y}} + w\cancel{\frac{\partial v}{\partial z}} = \cancel{f_{my}} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\\
&\cancel{\frac{\partial w}{\partial t}} + u\cancel{\frac{\partial w}{\partial x}} + v\cancel{\frac{\partial w}{\partial y}} + w\cancel{\frac{\partial w}{\partial z}} = f_{mz} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\\
&\frac{\partial u}{\partial x} + \cancel{\frac{\partial v}{\partial y}} + \cancel{\frac{\partial w}{\partial z}} = 0
\end{aligned}\right\}$$

Como $\vec{V} = u\hat{i}$ con $v = w = 0$, además

flujo unidireccional en la tubería

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} = 0$$

La gravedad es $\vec{f}_m = -g\hat{k} \Rightarrow f_{mx} = f_{my} = 0$

Si se incluye la ecuación de continuidad $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$

a.:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\\
0 &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}
\end{aligned}\right\}$$ Sistema de ecuaciones para este caso.

b).- La ecuación para P es:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}$$

Si la válvula se abre $Q = \frac{Q_0}{T} t$

Pero $Q = u \frac{\pi D^2}{4}$

Entonces $u = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4Q_0}{\pi T D^2} t$

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{4Q_0}{\pi T D^2}$$

La ecuación queda:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{4Q_0}{\pi T D^2}$$

$$\int_{P_0=\gamma H}^{P} \partial P = -\frac{4Q_0\rho}{\pi T D^2}\int_0^{x} \partial x$$

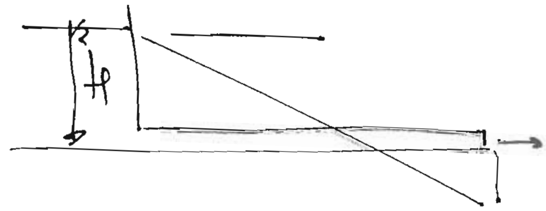
Condición de borde

$x=0 \Rightarrow P = \gamma H$

$$P - \gamma H = -\frac{4Q_0\rho}{\pi T D^2} x$$

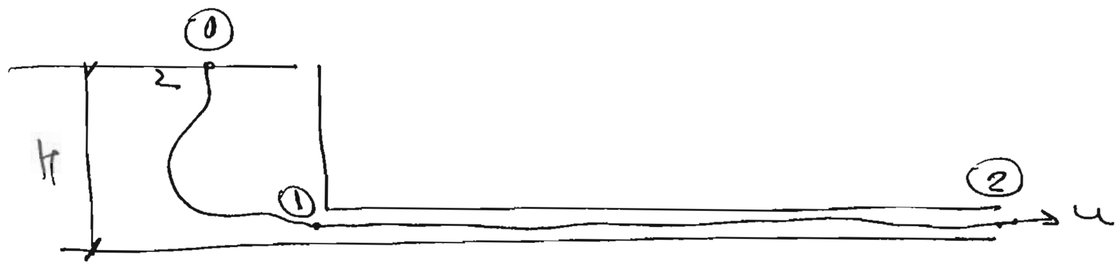
$$\underline{\underline{P(x) = \gamma H - \frac{4Q_0\rho}{\pi T D^2} x}}$$

En particular en la válvula $x = L$



$$\underline{\underline{P_L = \gamma H - \frac{4Q_0\rho}{\pi T D^2} L}}$$

2.-



La ec. de Euler en la línea de corriente:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} \qquad t \geq t_0$$

$$-\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + u\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$-\int_1^2 \frac{\partial u}{\partial t}\,\partial x = \frac{1}{\rho}\int_1^2 \partial P + \int_1^2 u\,\partial u$$

$$-\frac{\partial u}{\partial t}\underbrace{(x_2 - x_1)}_{L} = \frac{1}{\rho}\left(\cancelto{0}{P_2} - \cancelto{\gamma H}{P_1}\right) + \int \left(\frac{u_2^2}{2} - \cancelto{0}{\frac{u_1^2}{2}}\right)$$

$$u_2 = u$$

$$-L\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\cancel{\rho} g H}{\cancel{\rho}} + \frac{u^2}{2}$$

$$-2L\frac{\partial u}{\partial t} = -2gH + u^2$$

$$\int_0^u \frac{\partial u}{2gH - u^2} = \int_{t_0}^{t} \frac{\partial t}{2L} = \frac{t - t_0}{2L}$$

Esta integral no es obvia, mirla por qué consultarla.

$$\int \frac{du}{2gH - u^2} = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{2gH}} \log\left|\frac{\sqrt{2gH} + u}{\sqrt{2gH} - u}\right| = \frac{t - t_0}{\cancel{2}L}$$

d).- En regimen permanente, entre 1, 2:

$$z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g}$$

donde $z_1 = z_2$

$$\frac{P_1}{\gamma} = H$$

$$V_1 = 0$$

$$P_2 = 0 \text{ (atm.)}$$

$$\therefore \quad H = \frac{V_2^2}{2g} \Rightarrow \quad \underline{\underline{V = \sqrt{2gH} = u_0}}$$

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
DEPTO. DE ING. HIDRÁULICA Y AMBIENTAL
ICH1104. MECÁNICA DE FLUIDOS

PRIMER SEMESTRE DE 2012 — INTERROGACIÓN N°3

Jueves 21 de junio de 2012. — Sin Apuntes. Tiempo total: 2:00 hrs.

NOMBRE........PAUTA........

INSTRUCCIONES

Coloque su nombre en esta página. **No separe las hojas de este cuadernillo.**

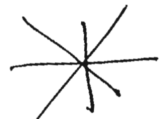
Entregue en este cuadernillo sus respuestas en forma ordenada. Ocupe una hoja nueva para cada problema e indique claramente el problema que está contestando. Escriba con tinta o lápiz pasta. Explique su solución con las frases necesarias para poder seguirla. Ud. es responsable de que se entienda.

Sólo debe entregar este cuadernillo al final de la interrogación para ser corregido, de manera que debe asegurarse que sus respuestas sean completas, estén bien escritas y se pueda identificar claramente lo que contesta.

Problema	1	2	3	Final
Corrector				
Nota				

2.- $F(z) = k \ln z$ es un flujo radial

a.- Pozo o sumidero: $F(z) = \dfrac{Q}{2\pi} \ln z$



Remolino $F(z) = iM \ln z$

La situación descrita puede representarse con:

$$F(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln z + iM \ln z$$

b.- $\phi = \phi_1 + \phi_2$; $\chi = \chi_1 + \chi_2$

Para ϕ_1, χ_1:

$$f_1(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln z = \frac{Q}{2\pi} \ln re^{i\theta} = \frac{Q}{2\pi}(\ln r + i\theta)$$

$$= \frac{Q \ln r}{2\pi} + \frac{Q\theta}{2\pi} i$$

$$\therefore \quad \phi_1 = \frac{Q \ln r}{2\pi} \quad ; \quad \chi_1 = \frac{Q\theta}{2\pi}$$

Para ϕ_2, χ_2:

$$f_2(z) = iM \ln z = iM \ln re^{i\theta} = iM(\ln r + i\theta)$$

$$= iM \ln r - M\theta$$

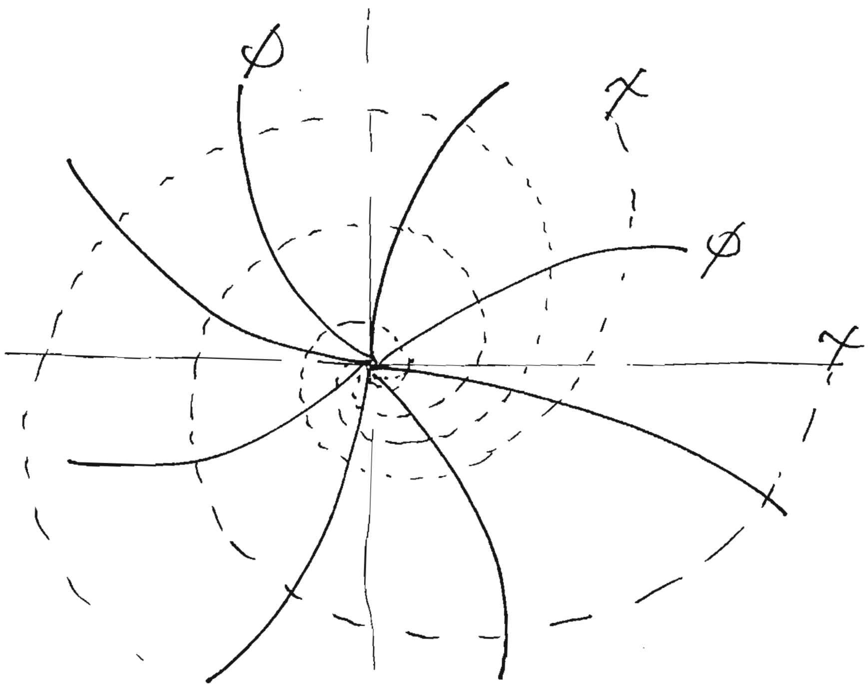
$$\therefore \quad \phi_2 = -M\theta \quad ; \quad \chi_2 = M \ln r$$

Entonces:

$$\left.\begin{aligned} \phi &= \frac{Q}{2\pi} \ln r - M\theta \\ \chi &= \frac{Q\theta}{2\pi} + M \ln r \end{aligned}\right\}$$

Se observa que ambas líneas son del tipo:

$$\phi, \chi = \alpha \ln r + \beta \theta$$

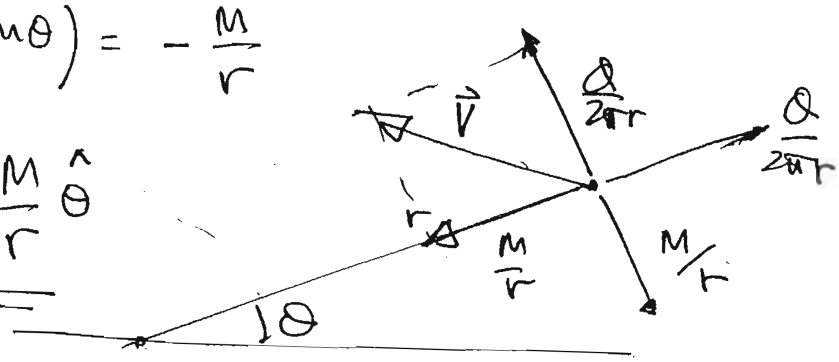


2.- La velocidad es $\vec{V} = -\vec{\nabla}\phi = -\frac{\partial \phi}{\partial r}\hat{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\hat{\theta}$

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{Q}{2\pi}\ln r - M\theta\right) = \frac{Q}{2\pi r}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{Q}{2\pi}\ln r - M\theta\right) = -\frac{M}{r}$$

$$\therefore \quad \vec{V} = -\frac{Q}{2\pi r}\hat{r} + \frac{M}{r}\hat{\theta}$$



$$V_r = -\frac{Q}{2\pi r} \quad ; \quad V_\theta = \frac{M}{r}$$

d.- Vorticidad:

$$\vec{\nabla}\times\vec{V} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta r}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \theta}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\cancel{r}\frac{M}{\cancel{r}} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(-\frac{Q}{2\pi r}\right)$$

$$= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}M + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(Q/2\pi r\right)$$

$$= 0$$

$$\nabla\cdot\vec{V} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r V_r\,\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}$$

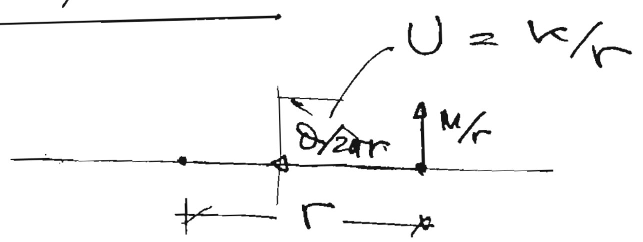
$$= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{Q\cancel{r}}{2\pi\cancel{r}}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{M}{r}\right)$$

$$= -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{Q}{2\pi}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{M}{r}\right) = \underline{0}$$

$\therefore\ \vec{\nabla}\times\vec{V} = 0$; $\vec{\nabla}\cdot\vec{V} = 0$ en todo el espacio

7 por lo tanto en $r = 1$; $\theta = \pm\pi/2$

e.- $$\vec{V} = -\frac{Q}{2\pi r}\hat{r} + \frac{M}{r}\hat{\theta}$$



$$|V| = \sqrt{\frac{Q^2}{4\pi^2 r^2} + \frac{M^2}{r^2}} = \frac{1}{r}\underbrace{\sqrt{\frac{Q^2}{4\pi^2} + M^2}}_{K} = \underline{\underline{\frac{K}{r}}}$$

4.- En el infinito: $B_\infty = \frac{P_{atm}}{\gamma} = \frac{P_0}{\gamma} = 0$

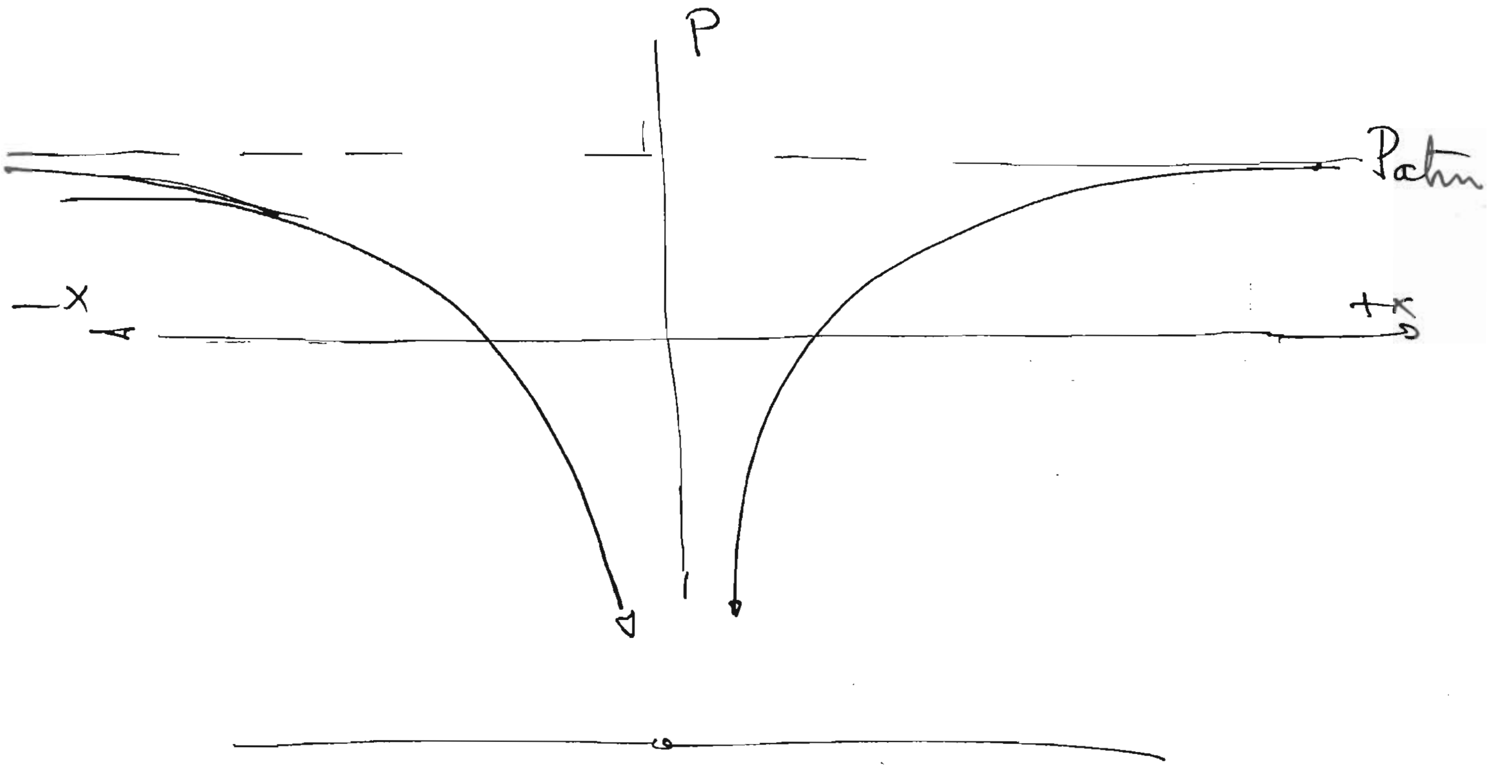
$$B_x = \frac{P}{\gamma} + \frac{V^2}{2g}$$

Como $B_\infty = B_x$

$$\frac{P}{\gamma} = \frac{P_0}{\gamma} - \frac{V^2}{2g}$$

$$\therefore P = P_0 - \frac{V^2 \rho}{2} \quad \text{donde } V^2 = \frac{K^2}{r^2}$$

$$P = P_0 - \frac{\rho}{2}\frac{K^2}{r^2} \quad \text{donde } K^2 = \frac{Q^2}{4\pi^2} + M^2$$



3.- a) Si $\vec{V} = w\hat{k}$ con $u = v = 0$

flujo unidireccional se

en NS:

en la ec. x: $\frac{\partial u}{\partial t} = u\frac{\partial u}{\partial x} = v\frac{\partial u}{\partial y} = w\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$

" " " y: $\frac{\partial v}{\partial t} = u\frac{\partial v}{\partial x} = v\frac{\partial v}{\partial y} = w\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0$

" " " z: $u\frac{\partial w}{\partial x} = v\frac{\partial w}{\partial y} = 0$

Continuidad $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$

Permanente: $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} = 0$

b) $f_m = -g\hat{k} \Rightarrow f_{mx} = f_{my} = 0$

$\frac{\partial P}{\partial z} \approx \frac{\Delta P}{\Delta z} = \frac{-P_0 + P_{atm}}{h}$ pero $P_0 = \frac{F}{A}$

$\therefore \underline{\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{-F}{Ah}}$

c) La ecuación de continuidad queda $\frac{\partial w}{\partial z} = 0$

Entonces $\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0$

Por simetría $\frac{\partial w}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$

Entonces la tres ecuaciones de NS se reducen a:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} \\ 0 &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} \\ 0 &= -g + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \end{aligned}\right\}$$

Como $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{F}{Ah}$ el sistema es:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \qquad (P = \text{cte en un plano horizontal})$$

$$\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = g - \frac{F}{\rho A h}$$

d) llamando $K = \rho g - \frac{F}{\rho A h}\rho = \rho g - \frac{F}{Ah}$

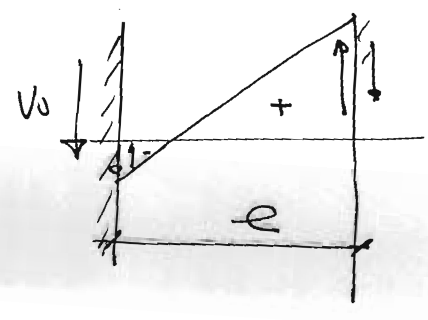
la ecuación es:

$$\mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = K$$

pero por ser flujo laminar: $\tau = \mu \frac{\partial w}{\partial x}$

$$\therefore \quad \frac{\partial \tau}{\partial x} = K \Rightarrow \underline{\tau = K x + \tau_0}$$

τ_0 por determinar después.



e) $$\tau = \mu \frac{\partial w}{\partial x} = kx + c_0$$

$$\partial w = \left(\frac{k}{\mu} x + \frac{c_0}{\mu} \right) \partial x$$

$$w = \frac{k x^2}{2\mu} + \frac{c_0 x}{\mu} + c_1$$

En la pared fija: $x = 0 \Rightarrow w = 0$

$\therefore c_1 = 0$

en el pistón que baja $x = e \rightarrow w = -V_0$

$$\therefore -V_0 = \frac{k e^2}{2\mu} + \frac{c_0 e}{\mu}$$

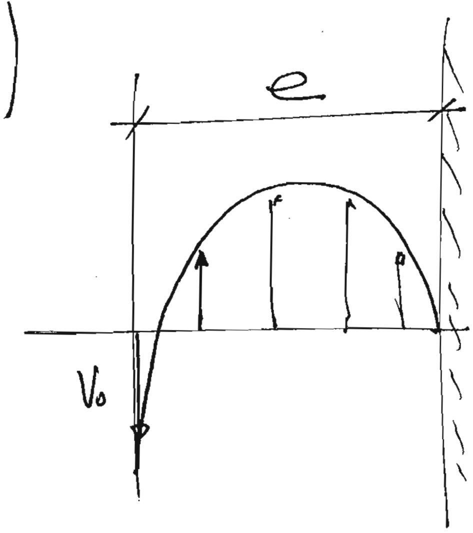
$$c_0 = -\left(V_0 - \frac{k e^2}{2\mu} \right) \frac{\mu}{e}$$

$$= -\frac{\mu V_0}{e} - \frac{k e}{2}$$

Así la velocidad queda dada por:

$$w = \frac{k x^2}{2\mu} + \frac{x}{\mu} \left(-\frac{\mu V_0}{e} - \frac{k e}{2} \right)$$

$$\underline{\underline{w = \frac{k x^2}{2\mu} - \frac{V_0}{e} x - \frac{k e}{2\mu} x}}$$



f.-

$$\frac{Q}{4a} = \int_0^e w\,dx = \int_0^e \left(\frac{kx^2}{2\mu} - \frac{V_0}{e}x - \frac{ke}{2\mu}x \right) dx$$

$$= \frac{k}{2\mu}\frac{x^3}{3}\Big|_0^e - \frac{V_0}{e}\frac{x^2}{2}\Big|_0^e - \frac{kex^2}{2\mu\, 2}\Big|_0^e =$$

$$= \frac{ke^3}{6\mu} - \frac{V_0 e^{\cancel{2}}}{2\cancel{e}} - \frac{ke^3}{4\mu} =$$

$$= \frac{ke^3}{\mu}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4}\right) - \frac{V_0 e}{2} = \frac{ke^3}{12\mu} - \frac{V_0 e}{2}$$

$$\therefore \quad Q = \left(\frac{ke^3}{12\mu} - \frac{V_0 e}{2}\right) 4a$$

Debe ser igual a $V_0 4a$ que es lo que baja el pistón interior.