Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Segundo Semestre 2023

MAT-1630 - Interrogación 3

1. Considere la superficie $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ parametrizada por $r(u,v) = \big(u,\ v + uv,\ \frac{1}{2}(u^2 + v^2)\big)$ para $u, v \in \mathbb{R}$.

   (a) (4 ptos.) Sea $\alpha > 0$, encuentre una ecuación para P_1 el plano tangente a $\mathcal{S}$ en el punto $r(\alpha, 0)$. Encuentre también una ecuación para P_2 el plano tangente a $\mathcal{S}$ en el punto $r(0, \alpha)$.

   (b) (2 ptos.) Sea $L = P_1 \cap P_2$ la recta que se obtiene al intersectar los dos planos anteriores. Encuentre una parametrización $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ de L.

Solución:

(a) Para obtener un vector normal a $\mathcal{S}$ en el punto $r(u,v)$ calculamos $\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}(u,v)$:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial r}{\partial u}(u,v) = (1, v, u),\\
&\frac{\partial r}{\partial v}(u,v) = (0, 1+u, v), \qquad \text{luego}\\
&\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}(u,v) = (v^2 - u(1+u), -v, 1+u).
\end{aligned}$$

Entonces, un vector normal a $\mathcal{S}$ en $r(\alpha, 0) = (\alpha, 0, \alpha^2/2)$ es $(-\alpha(1+\alpha), 0, 1+\alpha)$. Por escalarización, $\nu = (-\alpha, 0, 1)$ también es normal a $\mathcal{S}$ en $r(\alpha, 0)$. Así, obtenemos una ecuación para el plano P_1: son los (x,y,z) que satisfacen $((x,y,z) - r(\alpha,0)) \cdot \nu = 0$, que corresponde a la ecuación,

$$-\alpha x + z + \alpha^2/2 = 0.$$

De manera semejante, un vector normal a $\mathcal{S}$ en $r(0,\alpha) = (0, \alpha, \alpha^2/2)$ es el vector $\mu = (\alpha^2, -\alpha, 1)$. Así, obtenemos una ecuación para el plano P_2: son los (x,y,z) que satisfacen $((x,y,z) - r(0,\alpha)) \cdot \mu = 0$, que corresponde a la ecuación,

$$\alpha^2 x - \alpha y + z + \alpha^2/2 = 0.$$

(b) **Solución 1.** Para encontrar los puntos en la intersección de P_1 y P_2 observamos que primero se debe satisfacer la ecuación para P_1:

$$\begin{aligned}
&-\alpha x + z + \alpha^2/2 = 0, \qquad \text{o equivalentemente (recordad } \alpha > 0\text{)},\\
&x = z/\alpha + \alpha/2.
\end{aligned}$$

Adicionalmente se debe satisfacer la ecuación para P_2,

$$\begin{aligned}
&\alpha^2 x - \alpha y + z + \alpha^2/2 = 0, \qquad \text{lo que junto a lo anterior implica,}\\
&y = z/\alpha + \alpha/2 + \alpha x = (1+\alpha)(z/\alpha + \alpha/2).
\end{aligned}$$

Obtenemos así la siguiente parametrización de L:

$$\sigma(z) = \big(z/\alpha + \alpha/2,\ (1+\alpha)(z/\alpha + \alpha/2),\ z\big), z \in \mathbb{R}.$$

Solución 2. Como ν es vector normal a P_1 y μ es vector normal a P_2, entonces un vector paralelo a L es

$$\nu \times \mu = (-\alpha, 0, 1) \times (\alpha^2, -\alpha, 1) = (\alpha, \alpha^2 + \alpha, \alpha^2).$$

De las ecuaciones para P_1 y P_2 también podemos encontrar que (cuando $x = 0$) el punto $(0, 0, -\alpha/2)$ está en $L = P_1 \cap P_2$. De esto obtenemos la siguiente parametrización de L:

$$\sigma(t) = (0, 0, -\alpha/2) + t(\alpha, \alpha + \alpha^2, \alpha^2) = (t\alpha,\ t\alpha(1 + \alpha),\ t\alpha^2 - \alpha^2/2), t \in \mathbb{R}.$$

2. Si la tierra se modela por la esfera unitaria $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, la temperatura el 8 de noviembre a las 12 : 00 GMT, en cada punto, se puede aproximar por la función

$$T(x, y, z) = 30 + 10y - 40z^2 - 10z.$$

Determine el promedio de la temperatura sobre toda la tierra en ese momento.

Solución: Buscamos el promedio de T sobre la esfera unitaria. Parametrizando la esfera unitaria en coordenadas esféricas obtenemos

$$Area(S) = \iint_S 1\ dS = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\varphi\ d\theta\ d\varphi = 4\pi$$

$$\iint_S T\ dS = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \big(30 + 10 \operatorname{sen}\varphi \cos\theta - 40 \cos^2\varphi - 10 \cos\varphi\big)\ \operatorname{sen}\varphi\ d\theta\ d\varphi = 30 * 4\pi - \frac{40}{3} * 4\pi$$

Y el promedio es

$$\bar{T} = \frac{1}{Area(S)} \iint_S T\ dS = \frac{50}{3}.$$

3. Sea S la superficie obtenida al rotar la curva $r(t) = (t^2 + 1, 0, t)$, $t \in [-1, 1]$ en torno al eje z.

   (a) Encuentre una parametrización de S.

   (b) Calcule la integral de flujo de $F(x, y, z) = \left(xz,\ yz,\ \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ hacia afuera.

   Solución.

   (a) Al ser superficie de rotación en torno al eje z, parametrizamos con t y el ángulo de rotación. En cada altura el radio es $t^2 + 1$, y obtenemos

   $$\phi(t, \theta) = ((t^2 + 1) \cos\theta, (t^2 + 1) \sin\theta, t)$$

   con $t \in [-1, 1]$ y $\theta \in [0, 2\pi]$

   (b) Usando la parametrización anterior calculamos

   $$\phi_\theta = (-(t^2 + 1) \sin\theta, (t^2 + 1) \cos\theta, 0) \quad , \quad \phi_t = (2t \cos\theta, 2t \sin\theta, 1).$$

   Como queremos el flujo exterior, elegimos la normal hacia afurea

   $$\phi_\theta \times \phi_t = (t^2 + 1)(\cos\theta, \sin\theta, -2t)$$

   y obtenemos

   $$\iint_S F \cdot d\vec{S} = \int_{-1}^{1} \int_0^{2\pi} (t^2+1) \left(t(t^2 + 1) \cos\theta, t(t^2 + 1) \sin\theta, \frac{t}{t^2 + 1}\right) \cdot (\cos\theta, \sin\theta, -2t)\ d\theta dt$$

   $$= \int_{-1}^{1} \int_0^{2\pi} t(t^2 + 1)^2 - 2t^2\ d\theta dt = 2\pi((t^2 + 1)^3/6 - 2t^3/3) = -8\pi/3.$$

4. Sea C la circunferencia dada por la intersección de la esfera $x^2+y^2+z^2 = 2$ y el paraboloide $z = x^2 + y^2$, recorrida contrareloj al mirarla desde arriba. Y sea

$$F(x, y, z) = \left(e^{x+z} + y,\ z \cos(y) + 3x,\ \operatorname{sen}(y) - z^2\right).$$

(a) [5 puntos] Plantee 4 formas de calcular el trabajo realizado por la fuerza $F(x, y, z)$ al recorrer C una vez, integrando sobre distintas curvas o superficies. (Plantee las 4 integrales parametrizadas, pero sin calcularlas.)

(b) [1 punto] Calcule el trabajo realizado por F.

Solución:

(a) Primero observamos que la intersección de ambas superficies ocurre cuando $2 = x^2 + y^2 + z^2 = z + z^2$, con $z > 0$, es decir $z = 1$. Y satisface $x^2 + y^2 = 1$ por lo que podemos parametrizarla como $r(t) = (\cos t, \sin t, 1)$ con $t \in [0, 2\pi]$ que tiene la orientación pedida, y la integral de fuerza buscada es

$$\int_C F \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \Big(e^{\cos\theta+1} + \operatorname{sen}\theta, \cos(\operatorname{sen}\theta) + 3\cos\theta, \operatorname{sen}(\operatorname{sen}\theta) - 1\Big) \cdot (\sin\theta, \cos\theta, 1)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta+1}\sin\theta + \operatorname{sen}^2\theta + \cos(\operatorname{sen}\theta)\cos\theta + 3\cos^2\theta + \operatorname{sen}(\operatorname{sen}\theta) - 1\, dt.$$

Para encontrar las otras expresiones usaremos el Teorema de Stokes, observamos que F es continuamente diferenciable en todo $\mathbb{R}^3$ y calculamos $\nabla \times F = (0, e^{x+z}, 2)$.

Sea S_1 el trozo del paraboloide encerrado por la curva C. Podemos pensarlo como gráfico y parametrizarlo por

$$\phi_1(x, y) = (x, y, x^2 + y^2) \quad \text{con} \quad (x, y) \in D = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$$

Para que C esté orientada positivamente con respecto a S_1, necesitamos que S_1 esté orientada hacia arriba, por lo que usamos la normal $\phi_x \times \phi_y = (-2x, -2y, 1)$ y usando el Teorema de Stokes obtenemos

$$\int_C F \cdot d\vec{r} = \iint_{S_1} \nabla \times F \cdot d\vec{S} = \iint_D \Big(0, e^{x+x^2+y^2}, 2\Big) \cdot (-2x, -2y, 1)\, dxdy$$

$$= \iint_D -2ye^{x+x^2+y^2} + 2\, dxdy.$$

Sea S_2 el trozo de la esfera encerrado por la curva C. Podemos pensarlo como gráfico y parametrizarlo por

$$\phi_1(x, y) = (x, y, \sqrt{2 - x^2 - y^2}) \quad \text{con} \quad (x, y) \in D = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$$

Para que C esté orientada positivamente con respecto a S_2, necesitamos que S_2 esté orientada hacia arriba, por lo que usamos la normal $\phi_x \times \phi_y = \left(\frac{x}{\sqrt{2-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{2-x^2-y^2}}, 1\right)$ y usando el Teorema de Stokes obtenemos

$$\int_C F \cdot d\vec{r} = \iint_{S_2} \nabla \times F \cdot d\vec{S} = \iint_D \Big(0, e^{x+\sqrt{2-x^2-y^2}}, 2\Big) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{2 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{2 - x^2 - y^2}}, 1\right) dxdy$$

$$= \iint_D e^{x+\sqrt{2-x^2-y^2}} \frac{y}{\sqrt{2 - x^2 - y^2}} + 2\, dxdy.$$

Por último observamos que C está contenida en el plano $z = 1$, y definimos S_3 como el trozo del plano encerrado por la curva C. Podemos pensarlo como gráfico y parametrizarlo por

$$\phi_1(x, y) = (x, y, 1) \quad \text{con} \quad (x, y) \in D = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$$

Para que C esté orientada positivamente con respecto a S_1, necesitamos que S_1 esté orientada hacia arriba, por lo que usamos la normal $\phi_x \times \phi_y = (0,0,1)$ y usando el Teorema de Stokes obtenemos

$$\int_C F \cdot d\vec{r} = \iint_{S_3} \nabla \times F \cdot d\vec{S} = \iint_D \left(0, e^{x+1}, 2\right) \cdot (0,0,1)\ dxdy = \iint_D 2\ dxdy.$$

(b) Usando la cuarta expresión, vemos que

$$\int_C F \cdot d\vec{r} = \iint_{S_3} \nabla \times F \cdot d\vec{S} = \iint_D 2\ dxdy$$

$$= 2Area(D) = 2\pi$$