**Pontificia Universidad Católica de Chile**
**Facultad de Matemáticas**
**Segundo Semestre 2023**

## MAT-1630 - Examen - Solución

1. Sea $C$ la curva de intersección entre el paraboloide $z = (x+1)^2 + (y-2)^2$ y el plano $z = 2x - 4y + 9$, recorrida contrareloj al mirarla desde arriba.

   (a) Determine el vector binormal $B$ de la curva $C$.

   (b) Encuentre una parametrización de $C$.

   (c) Encuentre la recta tangente a $C$ en el punto $(0, 2, 1)$

   **Solución:**

   (a) Como $C$ es una curva plana, contenida en el plano $(x, y, z) \cdot (-2, 4, 1) = 9$, el vector binormal (que es unitario) es paralelo a $(-2, 4, 1)$. Por la orientación de $C$ se concluye que $B = \frac{1}{\sqrt{21}}(-2, 4, 1)$

   (b) La ecuación del paraboloide es $z = x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4$. La ecuación del plano es $z = 2x - 4y + 9$, concluimos (al igualar $z$) que los puntos en $C$ satisfacen $x^2 + y^2 = 4$. Con esto, tomando $x = 2\cos(t), y = 2\sin(t)$ obtenemos la parametrización (recorrida a contrarreloj)

   $$r(t) = (2\cos(t), 2\sin(t), 4\cos(t) - 8\sin(t) + 9), \quad t \in [0, 2\pi].$$

   (c) El punto $(0, 2, 1)$ en la parametrización anterior corresponde a $r(\pi/2)$. Calculamos $r'(\pi/2) = (-2\sin(t), 2\cos(t), -4\sin(t) - 8\cos(t)) = (-2, 0, -4)$. Y concluimos que la recta tangente a $C$ en el punto $(0, 2, 1)$ es la recta parametrizada por

   $$\sigma(\tau) = (0, 2, 1) + \tau(-2, 0, -4), \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

2. Sea $F(x, y) = (e^y - 2xy + 3, xe^y - x^2 - 1)$ y $C$ la curva $r(t) = (t^4 - 3t^5 + 5t, (t-1)\operatorname{sen} t)$, con $t \in [0, 1]$.

   (a) Demuestre que $F$ es conservativo.

   (b) Use lo anterior para calcular el trabajo $\int_C F \cdot d\vec{r}$.

   **Solución:**

   (a) Si denotamos $P = e^y - 2xy + 3$ y $Q = xe^y - x^2 - 1$ tenemos que $P_y = e^y - 2x$ y $Q_x = e^y - 2x$. Como el campo es continuamente derivable en $\mathbb{R}^2$ y $P_y = Q_x$ concluimos que el campo es conservativo.
   Otra posibilidad es encontrando el potencial. Calculamos

   $$f(x, y) = \int P dx = xe^y - x^2 y + 3x + h(y),$$

   luego igualamos

   $$\partial_y f(x, y) = xe^y - x^2 + h'(y) = Q = xe^y - x^2 - 1.$$

   Obtenemos $h'(y) = 1$ y concluimos $f(x, y) = xe^y - yx^2 + 3x - y$ es el potencial de $F$.

(b) Tenemos $r(1) = (3,0)$ y $r(0) = (0,0)$, por el teorema fundamental del cálculo

$$\begin{aligned}\int_C F \cdot d\vec{r} = \int_C \nabla f \cdot d\vec{r} = f(r(1)) - f(r(0)) = f(3,0) - f(0,0) \\ = [3 - 0 + 9 - 0] - [0 - 0 + 0 - 0] = 12.\end{aligned}$$

3. Sea $S$ la superficie correspondiente a la sección del paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ con $z \geq 0$, orientada con la normal que apunta hacia arriba. Considere el campo vectorial

$$F(x,y,z) = (xz\sin(yz) + x^3, \cos(yz), 3zy^2 - e^{x^2+y^2})$$

Calcule la integral de flujo $\iint_S F \cdot d\vec{S}$.

**Solución:** Como el campo es complicado primero veremos cual es su divergencia.

$$\operatorname{div}(F) = z\sin(yz) + 3x^2 - z\sin(yz) + 3y^2 = 3(x^2 + y^2).$$

Consideremos entonces $V$ el volumen encerrado por la superficie $S$ y el disco $D = \{(x,y,0) : x^2 + y^2 \leq 2\}$. Orientando $D$ con la normal hacia abajo, el teorema de la divergencia nos dice que

$$\iint_S F \cdot d\vec{S} + \iint_D F \cdot d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div}(F) dV.$$

Calculamos

$$\begin{aligned}\iint_D F \cdot d\vec{S} = \iint_{x^2+y^2\leq 2} F(x,y,0) \cdot (0,0,-1) dA = \iint_{x^2+y^2\leq 2} e^{x^2+y^2} dA \\ = \int_0^{2\pi} \int_0^2 e^{r^2} r dr d\theta = 2\pi \frac{1}{2} e^{r^2}\Big|_0^2 = \pi(e^4 - 1).\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\iiint_V \operatorname{div}(F) dV = \iiint_V 3(x^2 + y^2) dV = \iint_{x^2+y^2\leq 2} \int_0^{4-x^2-y^2} 3(x^2 + y^2) dz dA \\ = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 - r^2) 3r^2 r dr d\theta = 2\pi(3r^4 - \frac{1}{2} r^6)\Big|_0^2 = 32\pi.\end{aligned}$$

Despejando obtenemos que

$$\begin{aligned}\iint_S F \cdot d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div}(F) dV - \iint_D F \cdot d\vec{S} \\ = 32\pi - \pi(e^4 - 1) = \pi(33 - e^4).\end{aligned}$$

4. Consider la curva $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ parametrizada por

$$r(t) = \begin{cases} (0, \cos(\pi t), t) & t \in [0, 1/2] \\ (\frac{1}{2}\sin(\pi(t - \frac{1}{2})), 0, \frac{1}{2}\cos(\pi(t - \frac{1}{2}))) & t \in [1/2, 1] \\ (\frac{1}{2}(2 - t), t - 1, 0) & t \in [1, 2] \end{cases}$$

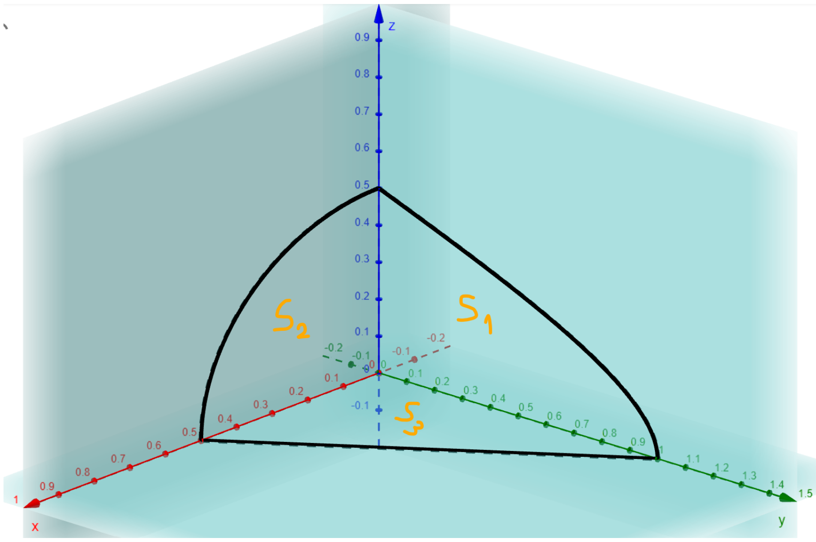
(a) Grafique la curva $\mathcal{C}$, indicando los puntos en que intersecta los ejes coordenados. Encuentre una superficies $S$ de tres caras planas cuyo borde sea $\mathcal{C}$. (Basta con indicar $S$ en el dibujo).

(b) Considere el campo vectorial $F(x,y,z) = (y + 3z, 5z + 2x, x + 9y)$. Use el teorema de Stokes y la superficie $S$ de la parte anterior para calcular la intergral de trabajo

$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot d\vec{r}.$$

**Solución:**

(a) La figura es una curva cerrada que pasa por los puntos $(0,1,0)$ luego $(0,0,\frac{1}{2})$, luego $(\frac{1}{2},0,0)$ y vuelve finalmente al punto $(0,1,0)$. Las tres caras de la superficie $S$ son: en el plano $yz$ delimitado por el grafico de $\cos(z)$, en el plano $xz$ es un cuarto de circulo de radio $\frac{1}{2}$ y en el plano $xy$ es un triangulo rectangulo.




(b) Por teorema de Stokes

$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot d\vec{r} = \iint_S \nabla \times F \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \nabla \times F \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \nabla \times F \cdot d\vec{S} + \iint_{S_3} \nabla \times F \cdot d\vec{S}$$

donde, dada la orientación de la curva, las superficies $S_1, S_2, S_3$ se tienen que orientar con sus normales apuntando hacia el primer octante. Es decir con normal $(1,0,0)$ para $S_1$, normal $(0,1,0)$ para $S_2$ y normal $(0,0,1)$ para $S_3$.
Calculamos

$$[\nabla \times F](x,y,z) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y+3z & 5z+2x & x+9y \end{vmatrix} = (9-5, 3-1, 2-1) = (4,2,1).$$

Tenemos así que

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} F \cdot d\vec{r} = \iint_S \nabla \times F \cdot d\vec{S} &= \iint_{S_1} \nabla \times F \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \nabla \times F \cdot d\vec{S} + \iint_{S_3} \nabla \times F \cdot d\vec{S} \\ &= \iint_{S_1} 4dS + \iint_{S_2} 2dS + \iint_{S_3} 1dS \\ &= 4\text{Área}(S_1) + 2\text{Área}(S_2) + \text{Área}(S_3). \end{aligned}$$

Geométricamente, $\text{Área}(S_2) = \frac{1}{4}\pi(\frac{1}{2})^2$ y $\text{Área}(S_3) = \frac{1}{2}(1 \times \frac{1}{2})$. Mientras que

$$\text{Área}(S_1) = \int_0^{\frac{1}{2}} \cos(\pi t) dt = \frac{1}{\pi}.$$

Juntando todo concluimos

$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot d\vec{r} = \frac{4}{\pi} + \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}.$$