Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad De Matemáticas
Primer semestre 2023

Interrogación 2
MAT1630 - Cálculo III

1. Considere $r(s)$ una curva parametrizada en longitud de arco que satisface
$$\vec{r}''(s) = \lambda(s)\vec{r}(s), \tag{1}$$
donde λ es una función escalar diferenciable y tal que $\lambda \neq 0$.
   (a) Anotamos como $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}, \mathbf{B}$ los vectores tangente, normal y binormal de $\vec{r}$, respectivamente; κ, τ denotan la curvatura y la torsión de $\vec{r}$. Derivando la ecuación (1) muestre que
$$(\lambda + \kappa^2)\mathbf{T} + \left(\frac{\lambda'}{\lambda}\kappa - \kappa'\right)\mathbf{N} - \kappa\tau\mathbf{B} = 0.$$
   (b) Suponga que la curvatura de $\vec{r}(s)$ es estrictamente positiva. Utilice la parte anterior para demostrar que la curva es plana.
   (c) Si la curvatura de $\vec{r}(s)$ es estrictamente positiva y en $s = 0$ se tiene que el vector tangente unitario es $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y el vector normal unitario es $(0, 1, 0)$, muestre que en todo punto de la curva el plano osculador de la curva es paralelo al plano $x - z = 4$.

2. Determine si los siguientes campos son conservativos y en caso que lo sean, determine una función potencial.
   (a) $F(x, y) = (-y,\, x)$.
   (b) $F(x, y, z) = (y^2z^3,\, 2xyz^3,\, 3xy^2z^2)$.

3. Calcule las siguientes integrales
   (a) $\int_C xy^4\, ds$ donde $C = \{(x, y) :\, x^2 + y^2 = 16,\, x > 0\}$.
   (b) $\int_{L_1 \cup L_2} (y + z)\, dx + (x + z)\, dy + (x + y)\, dz$ donde L_1 es el segmento recto desde $(0, 0, 0)$ hasta $(1, 0, 1)$, y L_2 es el segmento desde $(1, 0, 1)$ hasta $(0, 1, 2)$.
   (c) $\int_P F \cdot dr$ donde $F = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+1}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+1}}\right)$ y P es una curva que va desde $(-1, 2)$ hasta $(1, 2)$.

4. Muestre que
$$\int_C (x - y)dx + e^{\tan y}dy = \frac{\pi}{2},$$
donde C es la parte de la circunferencia unitaria en que $y > 0$ y está orientada positivamente.

1. (a) Notemos primero que (1) es equivalente a

$$\kappa \mathbf{N} = \lambda \vec{r}(s).$$

Derivando esto obtenemos

$$\kappa' \mathbf{N} + \kappa \mathbf{N}' = \lambda' \vec{r}(s) + \lambda \vec{r}' = \frac{\lambda'}{\lambda} \kappa \mathbf{N} + \lambda \mathbf{T}.$$

Utilizando Frenet-Serret tenemos que

$$\kappa' \mathbf{N} + \kappa(-\kappa \mathbf{T} + \tau \mathbf{B}) = \frac{\lambda'}{\lambda} \kappa \mathbf{N} + \lambda \mathbf{T}.$$

Podemos reescribir esto como

$$(\lambda + \kappa^2) \mathbf{T}, + \left(\frac{\lambda'}{\lambda} \kappa - \kappa' \right) \mathbf{N} - \tau \kappa \mathbf{B} = 0.$$

(b) De la parte anterior tenemos (tomado producto punto con $\mathbf{B}$) que $\tau\kappa = 0$. Como $\kappa \neq 0$ entonces $\tau = 0$ y la curva es plana.

(c) Si en $s = 0$ se tiene que el vector tangente unitario es $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y el vector normal unitario es $(0, 1, 0)$, el vector binormal es $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Como este es constante para todo s (porque la curva es plana), tenemos que el plano osculador tiene este vector normal. Por otro lado, el vector normal al plano $x - z = 4$ es $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, por lo tanto es paralelo al plano osculador.

2. (a) Si fuera conservativo, se tendría que cumplir que $\frac{\partial}{\partial y}(-y) = \frac{\partial}{\partial x}(x)$, pero como $\frac{\partial}{\partial y}(-y) = -1$ y $\frac{\partial}{\partial x}(x) = 1$, este campo no es conservativo.

   (b) Consideremos $f(x, y, z) = y^2 z^3 x$. Entonces $\nabla f = (y^2 z^3, 2yz^3, 3y^2 z^2 x) = F$, es decir F es conservativo.

3. (a) Parametrizamos $C = 4(\cos t, \sin t)$ con $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Por lo tanto

$$\int_C xy^4\, ds = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (4\cos t)(4\sin t)^4 \sqrt{4^2\sin^2 t + 4^2\cos^2 t}dt = 4^6 \left.\frac{\sin^5 t}{5}\right|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\frac{4^6}{5}.$$

(b) Podemos parametrizar $L_1 = t\,(1,0,1)$ con $t \in [0,1]$, por lo tanto, la integral

$$\int_{L_1} (y+z)\,dx + (x+z)\,dy + (x+y)\,dz = \int_0^1 (t+t)dt = 1.$$

Podemos parametrizar $L_2 = (1-t)\,(1,0,1) + t\,(0,1,2)$ con $t \in [0,1]$, por lo tanto, la integral

$$\int_{L_2} (y+z)\,dx + (x+z)\,dy + (x+y)\,dz = \int_0^1 ((1+2t)(-1) + 2(1) + 1(1))dt = 1.$$

Concluimos que

$$\int_{L_1\cup L_2} (y+z)\,dx + (x+z)\,dy + (x+y)\,dz = 1+1 = 2.$$

(c) Observamos que $F = \nabla\sqrt{x^2+y^2+1}$. Por lo tanto

$$\int_P F\cdot dr = \sqrt{1^2+2^2+1} - \sqrt{(-1)^2+(2)^2+1} = 0.$$

4. Consideremos $L = (t, 0)$ con $t \in [-1, 1]$. Como $C \cup L$ es una curva cerrada podemos aplicar el teorema de Green en la región encerrada (que llamamos D).

$$\int_{C\cup L} (x-y)dx + e^{\tan y}dy = \int\int_D \left(\frac{\partial e^{\tan y}}{\partial x} - \frac{\partial (x-y)}{\partial y} \right) dxdy = \int\int_D 1 = \frac{\pi}{2}.$$

La última igualdad viene de observar que es el área de medio círculo.

Por otro lado

$$\int_L (x-y)dx + e^{\tan y}dy = \int_{-1}^{1} tdt = 0.$$

Concluimos que

$$\int_C (x-y)dx + e^{\tan y}dy + 0 = \frac{\pi}{2}.$$