PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Instituto de Física & Escuela de Ingeniería
FIS1513 / ICE1513 — Dinámica
Segundo Semestre 2018

Interrogación 01

Duración total: 150 minutos

Reglas generales:

1. Escriba su nombre, RUT, y sección, de manera clara y legible.
2. Las mochilas se deben dejar en el área designada para ello.
3. Está prohibido el uso de aparatos electrónicos: calculadora, celulares, etc.
4. No se podrá abandonar la sala hasta el término de la evaluación. Si necesita ir al baño se registrará su salida/entrada.
5. Se debe firmar el acta de asistencia y mostrar su TUC o cédula de identidad al momento de firmar.
6. **No se aceptan preguntas de ningún tipo**. Si cree que hay algún error, déjelo claramente explicado al final de la prueba.
7. Todo acto contrario a la honestidad académica realizado durante el desarrollo de esta evaluación, será sancionado con la suspensión inmediata de la actividad y con la reprobación de éste. Se considerarán infracciones a la honestidad académica las siguientes:

   Cometer fraude en la evaluación
   Adulterar el acta de asistencia
   Adulterar en forma posterior al término de la evaluación la hoja de respuestas
   Cualquier acto u omisión que sea calificado como infracción académica
   Cualquier acto u omisión que vaya en contra del *código de honor* `http://www.uc.cl/codigodehonor`

Reglas preguntas de selección múltiple:

1. Debe **seleccionar una sola respuesta** en las preguntas de selección múltiple. Para ello debe rellenar completamente el círculo de la respuesta seleccionada (de lo contrario su respuesta se considerará inválida). Los cálculos y desarrollo de las preguntas de selección múltiple no se consideran.
2. En las preguntas de selección múltiple: **las respuestas incorrectas descuentan** $1/4$ **de punto**.
3. Al finalizar la interrogación, entregue únicamente la hoja de respuestas (no entregue este cuadernillo).

Problema 1 [1 punto]

El gráfico de la Figura 1 describe la velocidad $v\,(t)$ de un objeto que se mueve a lo largo del eje x en función del tiempo t.

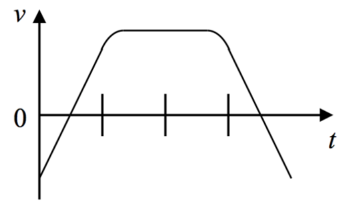
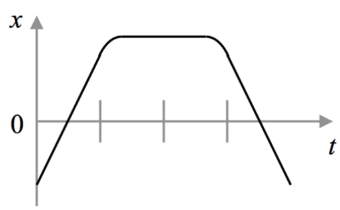


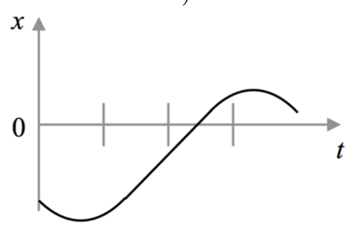
Figura 1: Gráfica v–t del objeto.

¿Cuál de las siguientes es una posible gráfica de posición vs. tiempo para este objeto?

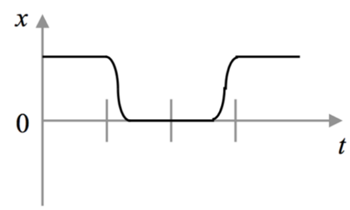
a)



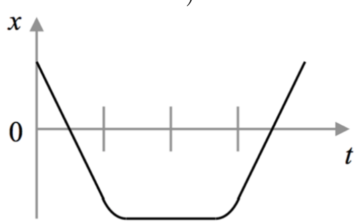
b)



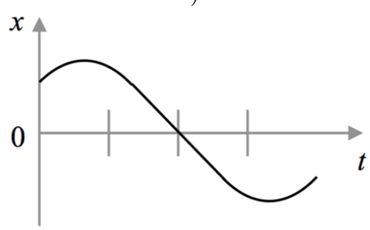
c)



d)

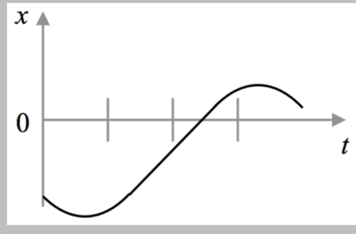


e)



<u>Solución</u>

Ya sea derivando la solución o integrando el enunciado, la única gráfica que coincide es:



Problema 2 [1 punto]

Un tren de carga viaja con velocidad constante v_0. El tren comienza a aplicar los frenos en $t = 80\,s$ y desacelera con la aceleración que muestra la Figura 2 hasta quedar detenido en $t = 240\,s$. ¿Cuál era la velocidad v_0 con que venía el tren?

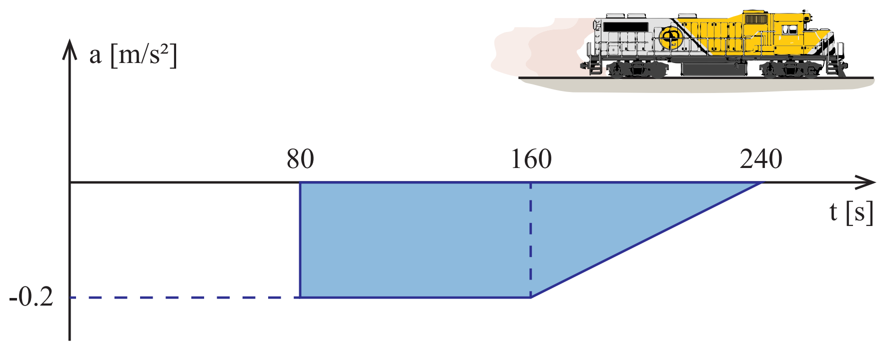


Figura 2: Esquema de frenado del tren de carga.

a) $v_0 = 32\,m/s$

b) $v_0 = 16\,m/s$

c) $v_0 = 24\,m/s$

d) $v_0 = 40\,m/s$

e) $v_0 = 48\,m/s$

Solución

La variación de velocidad es igual a la integral de la aceleración:

$$\Delta v_{t_1 \to t_2} = \int_{t_1}^{t_2} a\,(t)\,\mathrm{d}t$$

, y como sabemos que el tren se detiene al final de su carrera: $v_0 + \Delta v_{0 \to 240\,s} = 0$, es decir $v_0 = -\Delta v_{0 \to 240\,s}$. La solución se puede obtener (integrando) gráficamente calculando el área bajo la curva:

$$v_0 = -\Delta v_{0 \to 240\,s} = -\left\{ (80\,s)\left(-0{,}2\,m/s^2\right) + \frac{1}{2}\,(80\,s)\left(-0{,}2\,m/s^2\right) \right\}$$

$$v_0 = -\left(-16 - 8\right) = 24\,m/s$$

Problema 3 [1 punto]

La aceleración en el tiempo de un globo atmosférico está dada por:

$$\ddot{h}(t) = a(t) = \frac{1}{(t+3)^2}$$

El globo se libera desde una torre de $4\,m$ de altura con velocidad $\frac{2}{3}\,m/s$.
Es decir: $h(t=0) = 4\,m$ y $\dot{h}(t=0) = v(t=0) = \frac{2}{3}\,m/s$.

La velocidad del globo en el instante $t = 6\,s$ es:

a) $\dot{h}(6\,s) = v(6\,s) = \frac{2}{9}\,m/s$

b) $\dot{h}(6\,s) = v(6\,s) = \frac{4}{9}\,m/s$

c) $\dot{h}(6\,s) = v(6\,s) = \frac{5}{9}\,m/s$

d) $\dot{h}(6\,s) = v(6\,s) = \frac{8}{9}\,m/s$

e) $\dot{h}(6\,s) = v(6\,s) = \frac{35}{9}\,m/s$

Solución

La velocidad del globo es:

$$\begin{aligned}
\ddot{h} = \frac{\mathrm{d}\dot{h}}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{(t+3)^2} \\
\mathrm{d}\dot{h} &= \left[\frac{1}{(t+3)^2}\right] \cdot \mathrm{d}t \\
\int \mathrm{d}\dot{h} &= \int \left[\frac{1}{(t+3)^2}\right] \cdot \mathrm{d}t \\
\dot{h} &= -\frac{1}{t+3} + C_1
\end{aligned}$$

Como sabemos que $\dot{h}(t=0) = \frac{2}{3}\,m/s$, entonces:

$$\begin{aligned}
\dot{h}(0) = -\frac{1}{0+3} + C_1 &= \frac{2}{3} \\
C_1 &= \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \\
C_1 &= 1
\end{aligned}$$

Es decir, la ecuación de la velocidad es:

$$\dot{h}(t) = -\frac{1}{t+3} + 1$$

, que evaluada en el instante $t = 6\,s$ resulta:

$$\dot{h}(6) = -\frac{1}{6+3} + 1 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}\,m/s$$

Problema 4 [1 punto]

Un avión (A) está aterrizando mientras otro (B) está haciendo maniobras de taxi en el aeropuerto. El avión (B) está siguiendo una curva circular a velocidad (tangencial) constante $v_t = 20\,m/s$. Los ejes absolutos (globales) del problema se muestran en la Figura 3.

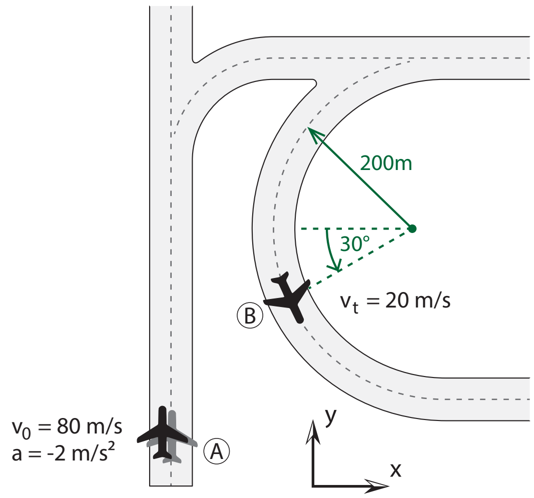


Figura 3: Vista aérea del aeropuerto.

¿Cuál es el vector de aceleración del avión B para un observador en A; es decir $\ddot{\mathbf{u}}_{B/A}$?

a) $\ddot{\mathbf{u}}_{B/A} = -\sqrt{3}\hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}}$

b) $\ddot{\mathbf{u}}_{B/A} = \sqrt{3}\hat{\mathbf{i}} - 1\hat{\mathbf{j}}$

c) $\ddot{\mathbf{u}}_{B/A} = \sqrt{3}\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}$

d) $\ddot{\mathbf{u}}_{B/A} = -\sqrt{3}\hat{\mathbf{i}} + 1\hat{\mathbf{j}}$

e) $\ddot{\mathbf{u}}_{B/A} = -\sqrt{3}\hat{\mathbf{i}} - 1\hat{\mathbf{j}}$

Solución

El avión en B se mueve con velocidad constante. Como $s = r \cdot \theta$, y luego $\dot{s} = v_t = v_\theta = r \cdot \dot{\theta}$, entonces:

$$\dot{\theta} = \frac{\dot{s}}{r} = \frac{v_\theta}{r} = \frac{20\,m/s^2}{200\,m} = \frac{1}{10}\,rad/s$$

La aceleración (según un movimiento circular uniforme) es:

$$\ddot{\mathbf{u}} = \left(-r\dot{\theta}^2\right)\hat{\mathbf{e}}_r + \left(r\ddot{\theta}\right)\hat{\mathbf{e}}_\theta = \left(-\frac{v_\theta^2}{r}\right)\hat{\mathbf{e}}_r + \left(r\ddot{\theta}\right)\hat{\mathbf{e}}_\theta = \left(-\frac{20^2}{200}\right)\hat{\mathbf{e}}_r + (0)\,\hat{\mathbf{e}}_\theta = -2\,\hat{\mathbf{e}}_r$$

Podemos escribir el vector director $\hat{\mathbf{e}}_r$ en función de $\hat{\mathbf{i}}$ y $\hat{\mathbf{j}}$ para dicho instante:

$$\hat{\mathbf{e}}_r = \cos(210°)\,\hat{\mathbf{i}} + \sin(210°)\,\hat{\mathbf{j}} = -\cos(30°)\,\hat{\mathbf{i}} - \sin(30°)\,\hat{\mathbf{j}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\,\hat{\mathbf{i}} - \frac{1}{2}\,\hat{\mathbf{j}}$$

Como sabemos que $\ddot{\mathbf{u}}_B = \ddot{\mathbf{u}}_A + \ddot{\mathbf{u}}_{B/A}$, entonces:

$$\ddot{\mathbf{u}}_{B/A} = \ddot{\mathbf{u}}_B - \ddot{\mathbf{u}}_A = (-2\,\hat{\mathbf{e}}_r) - \left(-2\,\hat{\mathbf{j}}\right) = \left(-2\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}\,\hat{\mathbf{i}} - \frac{1}{2}\,\hat{\mathbf{j}}\right]\right) - \left(-2\,\hat{\mathbf{j}}\right) = \sqrt{3}\,\hat{\mathbf{i}} + 3\,\hat{\mathbf{j}}$$

Problema 5 [1 punto]

Una partícula se mueve en línea recta con velocidad $v(s) = \frac{3}{s+2}$ m/s, donde s es la posición que se mide en metros. En $t = 0$, la partícula se encuentra en $s = 4$ m. Determine el tiempo que toma la partícula para viajar de $s = 4$ m a $s = 10$ m.

a) 6 s

b) 12 s

c) 18 s

d) 24 s

e) 30 s

Solución

Sea t_f el tiempo en el que la partícula llega a $s = 10$ m. Tenemos que $\frac{ds}{dt} = v$, por lo que separando variables e integrando llegamos a:

$$
\begin{aligned}
\int_0^{t_f} dt &= \int_4^{10} \frac{ds}{v(s)} \\
t_f &= \int_4^{10} \frac{s+2}{3} ds \\
t_f &= \frac{1}{3}\left[\frac{s^2}{2} + 2s\right]_4^{10} \\
t_f &= \frac{1}{3}(50 + 20 - 8 - 8) \\
t_f &= 18 \text{ s}
\end{aligned}
$$

Problema 6 [1 punto]

Un barco parte del reposo en $t = 0$ y se mueve en un círculo de 4 m de radio con una rapidez que se incrementa de acuerdo a $v(t) = 0{,}2t$, donde t es el tiempo medido en segundos y $v(t)$ está en m/s. Determine la magnitud de la aceleración total cuando el barco ha dado exactamente un cuarto de vuelta.

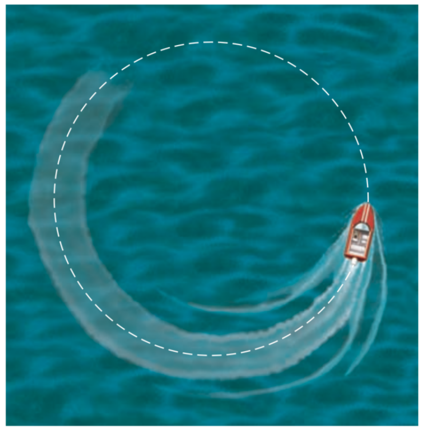


Figura 4: Barco visto desde arriba.

a) $0{,}2\sqrt{\pi^2+1}$

b) 2π

c) $0{,}1(\pi^2-1)$

d) $0{,}1\pi^2+2$

e) $\pi - 1$

Solución

Tenemos que $\frac{ds}{dt} = v$, donde s es la distancia recorrida por el barco. Separando las variables e integrando llegamos a:

$$\begin{aligned} \int_0^s ds' &= \int_0^t 0{,}2t'dt' \\ s(t) &= 0{,}1t^2 \end{aligned}$$

por lo que el tiempo t_f que pasa para que el barco dé un cuarto de vuelta está dado por:

$$\begin{aligned} \frac{2\pi R}{4} &= 0{,}1t_f^2 \\ \rightarrow t_f &= \sqrt{20\pi} \end{aligned}$$

La aceleración tangencial se obtiene trivialmente como $\frac{dv}{dt} = a_t = 0{,}2$, que es constante. La velocidad cuando el barco ha dado un cuarto de vuelta es simplemente $v_f = 0{,}2\sqrt{20\pi}$, por lo que la magnitud de la aceleración centrípeta en ese instante está dada por:

$$a_c = \frac{v_f^2}{R} = \frac{0{,}04(20\pi)}{4} = 0{,}2\pi.$$

Nos queda que la magnitud de la aceleración en este instante es $\sqrt{a_t^2 + a_c^2} = 0{,}2\sqrt{\pi^2+1}$.

Nombre: ______________________

RUT: ______________________

N lista: ________

Problema 1 [6 puntos]

Una motorista realiza diferentes saltos desde una rampa de inclinación θ a otra rampa de inclinación α separadas una distancia L. El punto más alto de la rampa de inclinación α esta situado a una altura h más alto que el punto más alto de la rampa de inclinación θ (ver Figura 1). Responda a las siguientes preguntas:

a) Determine, en función de θ, h, L y g, la rapidez mínima para que la motorista realice el salto, es decir, para que alcance el punto A en la figura. (3 pts.)

b) Determine, en función de θ, h y L, el ángulo α para que el aterrizaje sobre el punto A sea lo más suave posible (es decir, que la motorista alcance el punto A con una velocidad que forme el mismo ángulo α con la horizontal). (2 pts.)

c) Determine la altura máxima h a partir de la cual independientemente de la rapidez que lleve la motorista no pueda realizar el salto. (1 pts.)

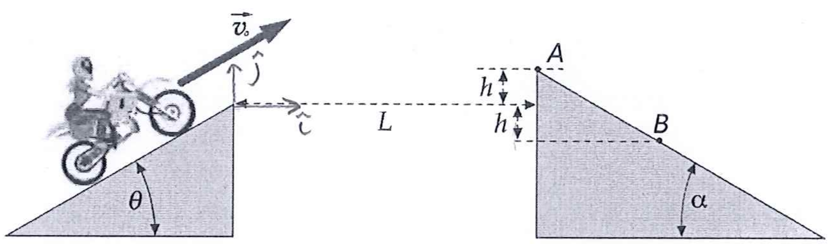


Figura 1: Motorista acrobática.

a) Para realizar este salto debe cumplirse que cuando $x = L$; $y = h$

Solo existe aceleración en $y \rightarrow \vec{a} = -g\hat{j}$

Posición en x: $x(t) = \cancel{x_0}^{\,0} + V_0 \cos\theta\, t \Rightarrow L = V_0 \cos\theta\, t \Rightarrow t = \frac{L}{V_0 \cos\theta}$ ①

Posición en y: $y(t) = \cancel{y_0}^{\,0} + V_0 \sin\theta\, t - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow h = \frac{\sin\theta\, L}{\cos\theta} - \frac{1}{2} g \frac{L^2}{V_0^2 \cos^2\theta}$ ②

Despejamos V_0: $L\tan\theta - h = \frac{g L^2}{2 V_0^2 \cos^2\theta}$

$$V_0 = \frac{L}{\cos\theta}\sqrt{\frac{g}{2(L\tan\theta - h)}}$$ ③

① 1.25 ptos
② 1.25 ptos
③ 0.5 ptos

b) El ángulo de aterrizaje en A es $\alpha = \arctan\left(\frac{-V_{YA}}{V_{XA}}\right)$ → ① → ②

¿Cuanto valen V_x y V_y en A? Cuando aterriza en A $t = \frac{L}{V_0 \cos\theta}$ → ③

$$V_y = V_{oy} - g\,t = V_0 \sin\theta - g t = V_0 \sin\theta - g \frac{L}{V_0 \cos\theta}$$

$$V_x = V_{ox} = V_0 \cos\theta$$

Entonces: $\alpha = \arctan\left(\frac{-V_{YA}}{V_{XA}}\right) = \text{atan}\left(\frac{-V_0 \sin\theta + g\frac{L}{V_0\cos\theta}}{V_0 \cos\theta}\right) = \arctan\left(\frac{V_0^2 \sin\theta\cos\theta - gL}{V_0^2\cos^2\theta}\right)$

$\alpha = \arctan\left(\tan\theta - \frac{gL}{V_0^2\cos^2\theta}\right)$. Además, para aterrizar en A debe cumplirse $V_0 = \frac{L}{\cos\theta}\sqrt{\frac{g}{2(L\tan\theta - h)}}$ → ④

Sustituyendo V_0^2 en la expresión de α:

$$\alpha = \arctan\left(\tan\theta - \frac{gL}{\cancel{\cos^2\theta}} \cdot \frac{\cancel{\cos^2\theta}\, 2(L\tan\theta - h)}{L^2 \cancel{g}}\right) = \arctan\left(\tan\theta - \frac{2h}{L}\right) \rightarrow ⑤$$

Alternativamente, podría definirse el ángulo como $\alpha = \arccos\frac{|\vec{V}\cdot\vec{V}_x|}{|\vec{V}|\cdot|\vec{V}_x|}$ → (1 y 2)

Donde: $\left\{\begin{array}{l}\vec{V} = V_0\cos\theta\,\hat{i} + (V_0\sin\theta - g t)\hat{j} \\ \vec{V}_x = V_0\cos\theta\,\hat{i}\end{array}\right.$

Entonces: $\alpha = \arccos\frac{V_0\cos\theta}{(V_0^2 + g^2t^2 - 2V_0 g t \,\text{sen}\,\theta)^{1/2}}$. Sustituyendo $\left\{\begin{array}{l} t = \frac{L}{V_0 \sin\theta} \quad ③ \\ V_0 = \frac{L}{\cos\theta}\sqrt{\frac{g}{2(L\tan\theta - h)}} \quad ④\end{array}\right.$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{L\left[g/2(L\tan\theta - h)\right]^{1/2}}{\left[\frac{Lg}{2\cos^2\theta(L\tan\theta - h)} + \frac{2g}{\tan^2\theta}(L\tan\theta - h) - 2gL\right]^{1/2}}\right) \rightarrow ⑤$$

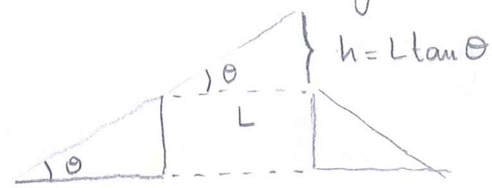
(Podría simplificarse también)

---

① 0.25 ptos, ② 0.5 ptos, ③ 0.5 ptos, ④ 0.5 ptos, ⑤ 0.25 ptos

c) La altura máxima será la altura que tendría la rampa desde la que despega la motorista cuando $x = L$, ya que independientemente de la velocidad con que salte, siempre perderá algo de altura debido a la aceleración negativa en Y.

$$\underline{h = L \tan\theta} \;//$$



Alternatvamente:

En el apartado a) se vió que $h = L\tan\theta - \frac{1}{2}\frac{g L^2}{V_0^2 \cos^2\theta}$

En esta expresión, cuando $V_0 \to \infty$; $h \to L\tan\theta$

1 pto por cualquiera de las dos resoluciones

Nombre: Pauta

RUT: ______________________ N lista: ________

Problema 2 [6 puntos]

El brazo ranurado y el resorte de la Figura 2 obligan al rodillo A (de volumen despreciable) a desplazarse por el contorno de una leva en forma de cardiode. El cardiode está definido por la función $r(\theta) = r_0(2 - \cos(\theta))$, donde r_0 es una constante. Note que tanto la leva como el brazo ranurado están pivotados respecto al punto O (lo cual significa que ambos pueden rotar libremente respecto a este punto).

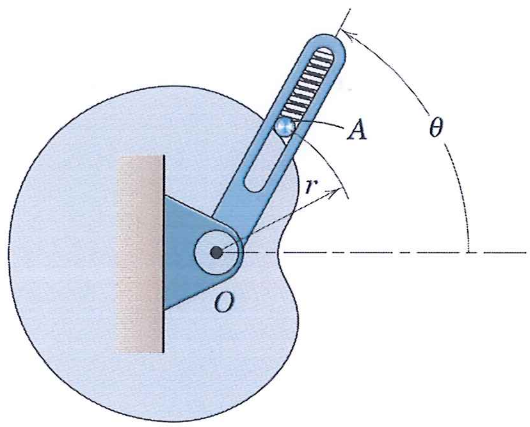


Figura 2: Mecanismo leva – brazo ranurado

a) Si la leva se mantiene fija en el espacio y el brazo ranurado gira en sentido anti horario con una velocidad angular constante ω_0, determine una expresión para $\theta(t)$. Considere que $\theta(t = 0) = 0$. [1 punto]

b) Para el movimiento descrito en el punto anterior (a), determine la velocidad del rodillo A en función del tiempo, en el sistema de coordenadas polares mostrado en la figura. [2 puntos]

c) Para el movimiento descrito en el punto (a), determine la aceleración del rodillo A en función del tiempo, en el sistema de coordenadas polares mostrado en la figura. [2 puntos]

d) Ahora considere que la leva rota con una velocidad angular constante ω_L en el sentido horario, y el brazo ranurado gira con una velocidad angular contante ω_B en sentido anti horario, determine el módulo de la aceleración del rodillo A en función de θ. [1 puntos]

(a) Se tiene que $\dot{\theta}(t) = \omega_0$ ← (0,25)

(0,25) → $\Rightarrow \theta(t) = \omega_0 t + \theta_0$; pero $\theta(t=0) = 0$ ← (0,25)

$\Rightarrow \boxed{\theta(t) = \omega_0 t}$ ← (0,25)

(b) La velocidad en coor. polares está dada por la siguiente expresión:

$$\vec{v} = \dot{r}\,\hat{r} + r\,\dot{\theta}\,\hat{\theta}$$ ← (0,25)

En este caso tenemos que $r(\theta) = r_0\,(2 - \cos(\theta))$

$\Rightarrow r(t) = r_0\,[2 - \cos(\omega_0 t)]$ y $\dot{r}(t) = \omega_0 r_0 \,\mathrm{sen}(\omega_0 t)$

(0,75) (0,75)

Luego evaluando en la expresión para la velocidad tenemos que:

$$\boxed{\vec{v}(t) = \omega_0 r_0 \left\{ \mathrm{sen}(\omega_0 t)\,\hat{r} + [2 - \cos(\omega_0 t)]\,\hat{\theta} \right\}}$$

(0,25)

(c) La aceleración en coor. polares está dada por la siguiente expresión:

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta} \leftarrow (0{,}25)$$

Ya sabemos que:

$$r(t) = r_0[2 - \cos(w_0 t)] \; ; \; \dot{r}(t) = w_0 r_0 \,\mathrm{sen}(w_0 t)$$

$$\Rightarrow \ddot{r}(t) = r_0 w_0^2 \cos(w_0 t) \leftarrow (0{,}75)$$

Donde

$$\dot{\theta} = w_0 \Rightarrow \ddot{\theta} = 0 \leftarrow (0{,}25)$$

Luego evaluando en la expresión para la aceleración tenemos que:

$$\vec{a}(t) = \left\{ r_0 w_0^2 \cos(w_0 t) - r_0 w_0^2 [2 - \cos(w_0 t)] \right\} \hat{r} + \dots$$

$$\dots + [2 w_0^2 r_0 \,\mathrm{sen}(w_0 t)] \hat{\theta}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a}(t) = 2 r_0 w_0^2 \left\{ [\cos(w_0 t) - 1]\hat{r} + \mathrm{sen}(w_0 t)\hat{\theta} \right\}}$$

$\uparrow (0{,}75)$

(d) En este caso dado que la leva rota con velocidad angular ω_L en sentido horario, tenemos que la coordenada radial r en función del ángulo θ está dada por:

$$r(\theta) = r_0\left[2 - \cos(\theta + \omega_L \cdot t)\right] \leftarrow (0{,}5)$$

Donde hemos considerado que cuando $\theta = 0$, la leva está en la posición mostrada en la figura.

Luego: $$\dot{r}(\theta) = r_0 \operatorname{sen}(\theta + \omega_L t)\cdot(\omega_B + \omega_L)$$

$$\Rightarrow \ddot{r}(\theta) = r_0(\omega_B + \omega_L)^2 \cos(\theta + \omega_L t)$$

$$\dot{\theta} = \omega_B \Rightarrow \ddot{\theta} = 0 \quad ; \quad \theta = \omega_B t \Rightarrow t = \frac{\theta}{\omega_B}$$

Por lo tanto en este caso la aceleración está dada por:

$$\vec{a} = \underbrace{\left\{ r_0(\omega_B+\omega_L)^2 \cos\left[\theta\left(1+\frac{\omega_L}{\omega_B}\right)\right] - r_0\left[2 - \cos\left[\theta\left(1+\frac{\omega_L}{\omega_B}\right)\right]\right]\omega_B^2 \right\}}_{a_r(\theta)} \hat{r} + \ldots$$

$$\ldots + \underbrace{\left[2 r_0 \operatorname{sen}\left[\theta\left(1+\frac{\omega_L}{\omega_B}\right)\right](\omega_B+\omega_L)\,\omega_B\right]}_{a_\theta(\theta)} \hat{\theta} \quad \leftarrow (0{,}4)$$

Luego $$\boxed{\|\vec{a}(\theta)\| = \sqrt{a_r^2(\theta) + a_\theta^2(\theta)}} \leftarrow (0{,}1)$$