Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Calculo III - MAT1630
Profesor: Giancarlo Urzua
Ayudante: Jorge Andrés Matamala O. (jnmatamala@uc.cl)

Ayudantía Repaso I3

Stokes, divergencia, flujo y parametrizaciones

Problema 1

Sea

$$F(x, y, z) = (y^3 - z\ sen(x), -cos(z)\ cos(y) - x^3, sen(z)\ sen(y) + cos(x))$$

Usea el teorema de Stokes para calcular

$$\int_C F \cdot dr$$

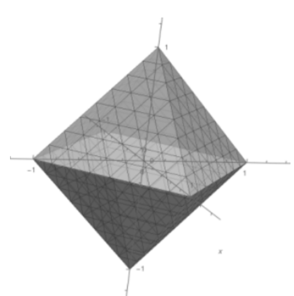
donde C es la curva parametrizada por

$$r(t) = (2sen(t)\ ,\ 2cos(t),\ e^{sen(sen^2(t))}) \qquad t \in [0, 2\pi]$$

que yace en el cilindro $x^2 + y^2 = 4$

Problema 2

Calcule el flujo del campo $F(x, y, z) = (x, y, z)$ a través de la superficie $|x| + |y| + |z| = 1$



Problema 3

Calcule $\int_C F \cdot dr$ donde el campo F está definido como

$$F(x,y,z) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, e^{sen^2(z)})$$

y la curva C está parametrizada por $r(t) = (2cos(t), 2sen(t), cos^3(t) - sen^5(t))$, con $t \in [0, 2\pi]$

Problema 4

Considere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ un campo escalar tal que $div(\nabla f) = 0$

1. Muestre que $\int_C \nabla f \cdot d\vec{S} = 0$, donde C es la circunferencia de radio r centrada en el origen y el diferencial de área está orientado hacia fuera.
2. Muestre que

$$\int_C \nabla f \cdot d\vec{S} = r \int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial r} dt$$

3. Usando lo anterior, demuestre que

$$f(0,0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Rcos(t), Rsen(t))dt$$

HINT: Considere en su análisis $\int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial r} dtdr$

Problema 5

Sea la superficie S que se obtiene al unir $S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 - 1, z \leq 0\}$ con $S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, 0 \leq z\}$ y orientada según los vectores normales apuntando al exterior de S y sea $F(x,y,z) = (e^{y^2+z^2}, e^{z^2+x^2}, e^{x^2+y^2})$. Calcular

$$\int_S \nabla \times \vec{F} dS$$

Problema 6

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un sólido acotado tal que el punto $(0,0,0)$ **no** está en la frontera de Ω. Demuestre que

$$\iint_{\partial\Omega} \frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \cdot d\vec{S} = \begin{cases} 4\pi, & \text{si } 0 \in \Omega \\ 0, & \text{si } 0 \notin \Omega \end{cases}$$