Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Ciencias Económicas y Administrativas

Primer Semestre 2013

Curso	**:**	**Probabilidad y Estadística**
Sigla	**:**	**EAS200A**
Profesores	**:**	**Rafael Águila (Sec 01), Osvaldo Ferreiro (Sec 02), Victor Correa (Sec 03) y Ricardo Olea (Sec 04)**

Pauta Interrogación 2

Pregunta 1

Considere una variable aleatoria X cuya función de densidad $f_X(x) = (a+1)\,x^a$ para $0 \leq x \leq 1$.

(a) **[1.5 Ptos.]** ¿El parámetro a puede tomar cualquier valor en $\mathbb{R}$? Justifique su respuesta.

(b) **[1.5 Ptos.]** Calcule la probabilidad de que la variable aleatoria X sea menor o igual a $1/2$.

(c) **[1.5 Ptos.]** Determine el valor esperado de X.

(d) **[1.5 Ptos.]** Si $Y = \dfrac{1}{X}$, determine la función de densidad de Y.

Solución

(a) Tenemos que f_X debe cumplir con las siguientes condiciones:

i. $f_X(x) > 0$, para $x \in \Theta_X$. **[0.2 Ptos.]**

ii. $\int_{x\in\Theta_X} f_X(x)\,dx = 1$. **[0.2 Ptos.]**

Para que (i) se cumpla $a > -1$. **[0.5 Ptos.]**

Mientras que para que (ii) se cumpla necesitamos que $a \neq -1$ **[0.2 Ptos.]** por lo siguiente:

$$\int_0^1 (a+1)\,x^a\,dx = \begin{cases} \left. x^{(a+1)}\right|_0^1, & \text{si } a \neq -1 \\ \left. 0\right|_0^1, & \text{si } a = -1 \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{si } a \neq -1 \\ 0, & \text{si } a = -1 \end{cases} \quad \textbf{[0.3 Ptos.]}$$

Por lo tanto, $a > -1$. **[0.1 Ptos.]**

(b) Se pide

$$P(X \leq 1/2) = \int_0^{1/2} (a+1)\,x^a\,dx = \left. x^{(a+1)}\right|_0^{1/2} = 2^{-(a+1)} \quad \textbf{[1.5 Ptos.]}$$

(c) Se pide

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\, dx \quad \textbf{[0.3 Ptos.]} \\
&= \int_{0}^{1} x\,(a+1)\, x^{a}\, dx \quad \textbf{[0.3 Ptos.]} \\
&= \int_{0}^{1} (a+1)\, x^{(a+1)}\, dx \quad \textbf{[0.3 Ptos.]} \\
&= \frac{(a+1)}{(a+2)}\, x^{(a+2)} \bigg|_{0}^{1} \quad \textbf{[0.3 Ptos.]} \\
&= \frac{(a+1)}{(a+2)} \quad \textbf{[0.3 Ptos.]}
\end{aligned}
$$

(d) Si $Y = g(X) = \frac{1}{X} \rightarrow X = g^{-1}(Y) = \frac{1}{Y}$ **[0.2 Ptos.]**, entonces $\Theta_Y = [1, +\infty]$ **[0.3 Ptos.]**

Luego, como $g(\cdot)$ es una función invertible en $[0, 1]$, entonces

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) &= f_X\left[g^{-1}(y)\right] \left|\frac{d}{dy}\, g^{-1}(y)\right| \quad \textbf{[0.3 Ptos.]} \\
&= (a+1)\, y^{-a} \cdot \left|-y^{-2}\right| \quad \textbf{[0.3 Ptos.]} \\
&= (a+1)\, y^{-(a+2)}, \quad \textbf{[0.2 Ptos.]} \quad y \geq 1,\ a > -1. \quad \textbf{[0.2 Ptos.]}
\end{aligned}
$$

+ 1 Punto Base

Pregunta 2

Suponga que el número X de clientes por minuto que ingresan a la casa matriz de un banco es una variable aleatoria cuya distribución es Poisson(5).

(a) **[2.0 Ptos.]** ¿Cuál es la probabilidad que en tres minutos ingresen entre 4 y 12 clientes?

Usted observará durante seis períodos de 3 minutos el número de clientes que ingresa. Para cada una de las siguientes preguntas defina previamente una distribución de probabilidad adecuada y responda:

(b) **[1.0 Ptos.]** ¿Cuál es la probabilidad de que en cada uno de los 6 períodos, se observe que ingresan entre 4 y 12 clientes?

(c) **[1.0 Ptos.]** ¿Cuál es la probabilidad de que en al menos uno de los 6 períodos, se observe que ingresan entre 4 y 12 clientes?

(d) **[2.0 Ptos.]** ¿Cuál es el número esperado de intervalos en los se observará que ingresan entre 4 y 12 clientes? ¿Cuál es la varianza?

Observación: Realice sus cálculos con 6 decimales.

Solución

(a) Sea Y el número de clientes que entran al banco cada 3 minutos, del enunciado se deduce que

$$Y \sim \text{Poisson}(15) \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

Se pide

$$\begin{aligned} P(4 \leq Y \leq 12) &= P(Y \leq 12) - P(Y \leq 3) \quad \textbf{[0.5 Ptos.]} \\ &= 0.267611 - 0.000211, \quad \text{por tabla Poisson} \quad \textbf{[0.5 Ptos.]} \\ &= 0.2674 \quad \textbf{[0.5 Ptos.]} \end{aligned}$$

(b) Sea Z el número de períodos en que ingresan entre 4 y 12 clientes, es decir,

$$Z \sim \text{Binomial}(n = 6,\, p = 0.2674) \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

Se pide

$$\begin{aligned} P(Z = 6) &= \binom{6}{6} p^6\,(1-p)^{6-6} \quad \textbf{[0.2 Ptos.]} \\ &= 0.2674^6 \quad \textbf{[0.2 Ptos.]} \\ &= 0.0003655682 \quad \textbf{[0.1 Ptos.]} \end{aligned}$$

(c) Se pide

$$\begin{aligned} P(Z \geq 1) &= 1 - P(Z < 1) \quad \textbf{[0.2 Ptos.]} \\ &= 1 - P(Z = 0) \quad \textbf{[0.2 Ptos.]} \\ &= 1 - \binom{6}{0} p^0\,(1-p)^{6-0} \quad \textbf{[0.2 Ptos.]} \\ &= 1 - (1 - 0.2674)^6 \quad \textbf{[0.2 Ptos.]} \\ &= 0.8454028 \quad \textbf{[0.2 Ptos.]} \end{aligned}$$

(d) Se pide

$$\text{E}(Z) = n \cdot p = 6 \cdot 0.2674 = 1.6044 \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

y

$$\text{Var}(Z) = n \cdot p \cdot (1-p) = 6 \cdot 0.2674 \cdot (1 - 0.2674) = 1.175383 \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

+ 1 Punto Base

Pregunta 3

Supongamos que usted tiene un negocio donde mensualmente espera, de manera independiente mes a mes, por lo menos cubrir los costos con probabilidad π. En el último año, usted ha observado 9 meses en que por lo menos ha cubierto sus costos.

(a) **[3.0 Ptos.]** Cuál debería ser el valor de π tal que la probabilidad de lo que usted observó el último año sea máxima.

Suponga que usted está probando un nuevo producto para su negocio, pero por su alto costo de mantención solo esta dispuesto a vender una unidad mensualmente ya que si la vende su utilidad es de +100UF y en caso contrario tendrá una pérdida de -50UF.

(b) **[0.5 Ptos.]** Si va a trabajar este producto durante un año y la probabilidad de venta mensual de este artículo coincide con la calculada en (a), exprese la ganancia anual $g(X)$ en función del número meses X en que logró vender el producto.

(c) **[1.0 Ptos.]** Determine la esperanza y desviación estándar de la ganancia anual.

(d) **[0.5 Ptos.]** Si en el año la ganancia es de 300UF, entonces usted debería preocuparse. ¿Por qué?

(e) **[1.0 Ptos.]** Determine la probabilidad de que la ganancia anual sea mayor que 900UF.

Solución

(a) Definamos como X al número de meses durante un año en que por lo menos se cubrieron los costos.

Del enunciado se deduce que

$$X \sim \text{Binomial}(n = 12, \pi) \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

Se pide el valor de π que hace máxima la probabilidad de observa 9 meses en que por lo menos se cubren los costos.

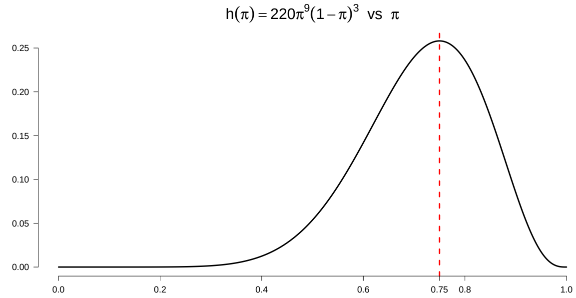
Tenemos que

$$p_X(9) = \binom{12}{9} \pi^9 \, (1-\pi)^{12-9} = 220 \, \pi^9 \, (1-\pi)^3 = h(\pi) \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

Derivando $h(\pi)$ con respecto a π y luego igualando a cero, tenemos que

$$\textbf{[1.0 Ptos.]} \quad h'(\pi) = 220 \cdot 9 \cdot \pi^8 \cdot (1-\pi)^3 + 220 \cdot \pi^9 \cdot 3 \cdot (1-\pi)^2 \cdot (-1) = 0 \to \pi = \frac{9}{12} = 0.75 \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Por lo tanto, si $\pi = 0.75$, la probabilidad de lo observado se maximiza.



(b) Tenemos que

$$g(X) = 100 \cdot X - 50 \cdot (12 - X) = 150 \cdot X - 600 \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

(c) Se pide $\mathrm{E}[g(X)]$ y $\sqrt{\mathrm{Var}[g(X)]}$, con $g(X)$ una transformación lineal de X.

Tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[g(X)] &= \mathrm{E}(150 \cdot X - 600) \quad \textbf{[0.1 Ptos.]} \\
&= 150 \cdot \mathrm{E}(X) - 600 \quad \textbf{[0.1 Ptos.]} \\
&= 150 \cdot 12 \cdot 0.75 - 600 \quad \textbf{[0.1 Ptos.]} \\
&= 750 \quad \textbf{[0.2 Ptos.]}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}[g(X)] &= \mathrm{Var}(150 \cdot X - 600) \quad \textbf{[0.1 Ptos.]} \\
&= 150^2 \cdot \mathrm{Var}(X) \quad \textbf{[0.1 Ptos.]} \\
&= 150^2 \cdot 12 \cdot 0.75 \cdot (1 - 0.75) \quad \textbf{[0.1 Ptos.]} \\
&= 50625 \quad \textbf{[0.1 Ptos.]} \\
\sqrt{\mathrm{Var}[g(X)]} &= 225 \quad \textbf{[0.1 Ptos.]}
\end{aligned}$$

(d) **Alternativa 1:** Por que la desviación entre el valor medio y observado es $750 - 300 == 450$ es decir, una desviación muy superior a la que cabe esperar según de la desviación media de la ganancia. **[0.5 Ptos.]**

Alternativa 2: Por que la media de la ganancia es 700 entonces una ganancia de 300 está alejada hacia abajo en dos desviaciones estándar, esto es: $750-2\cdot 225 = 300$, lo cual es poco probable. **[0.5 Ptos.]**

Alternativa 3: Tenemos que coeficiente de variación es igual a $\frac{225}{750} = 30\,\%$, es decir, se espera que las ganancias no se alejen a más de 30 % del valor medio, es decir, se encuentren en el intervalo $[525 - 975]$. Por lo tanto una ganancia solo de 300 no era esperable. **[0.5 Ptos.]**

(e) Se pide

$$\begin{aligned}
P[g(X) > 900] &= P(150 \cdot X - 600 > 900) \quad \textbf{[0.2 Ptos.]} \\
&= P(X > 10) \quad \textbf{[0.2 Ptos.]} \\
&= P(X = 11) + P(X = 12) \quad \textbf{[0.2 Ptos.]} \\
&= \binom{12}{11} 0.75^{11} \cdot 0.25^1 + \binom{12}{12} 0.75^{12} \cdot 0.25^0 \quad \textbf{[0.2 Ptos.]} \\
&= 0.12670541 + 0.03167635 \quad \textbf{[0.1 Ptos.]} \\
&= 0.1583818 \quad \textbf{[0.1 Ptos.]}
\end{aligned}$$

+ 1 Punto Base