PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Escuela de Ingeniería
ICE1514 — Dinámica
Segundo semestre 2020

Taller 06

Movimiento Armónico Simple

Problema 1.

Dos péndulos (de oscilaciones pequeñas) comienzan a oscilar con las condiciones iniciales (en $t = 0\,s$) que se indican en la Figura 1. Asumiendo que $g = 10\,m/s^2$, se pide determinar:

a) El período de oscilación para cada péndulo T_1 y T_2.

b) Las ecuaciones $\theta_1(t)$ y $\theta_2(t)$ para cada péndulo.

c) ¿Cuánto tarda el péndulo 2 en alcanzar su amplitud máxima?

d) Determine el primer instante en que los dos péndulos tienen el mismo ángulo de deflexión.

e) Si ahora el péndulo 2 comienza con velocidad $v_0 = \frac{1}{2}\,m/s$, y lo hace en la posición $\theta_0 = -\sqrt{3}/4\,rad$: determine la amplitud del movimiento del péndulo.

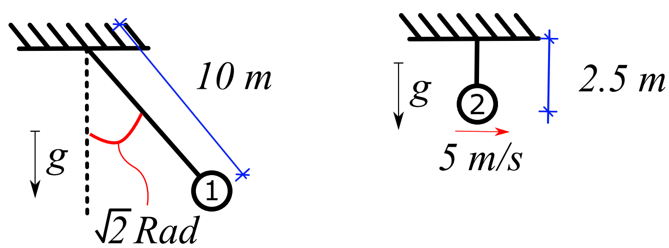


Figura 1: Posiciones iniciales de péndulos

Solución

a. Se conoce que la frecuencia angular de un péndulo viene dada por $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$. Luego, los períodos de los péndulos vienen de

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{L_1}} = 1\,\frac{1}{s} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{L_2}} = \sqrt{4} = 2\,\frac{1}{s}$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 2\pi\ s \quad T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \pi\ s$$

b. La ecuación de un movimiento armónico simple es la siguiente.

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t) + \frac{\dot{\theta}_0}{\omega} \sin(\omega t)$$

Donde θ_0 y $\dot{\theta}_0$ son las condiciones iniciales. Para el péndulo 1 las condiciones iniciales son:

$$\theta_0^1 = \sqrt{2}\,rad \qquad \dot{\theta}_0^1 = \frac{v}{r} = \frac{0}{10} = 0\,\frac{1}{s}$$

Para el péndulo 1 sus condiciones iniciales son:

$$\theta_0^2 = 0\, rad \qquad \dot{\theta}_0^2 = \frac{v}{r} = \frac{5}{2{,}5} = 2\ \frac{1}{s}$$

Por lo tanto

$$\theta_1(t) = \sqrt{2}\cos(t)$$

$$\theta_2(t) = \sin(2t)$$

c. Dado que la ecuación de movimiento (giro) del péndulo 2 corresponde a un seno, debe pensarse en qué momento la función alcanza su máxima amplitud, lo que ocurre luego de que ha pasado 1/4 de revolución. Entonces, el péndulo 2 tarda en alcanzar su máxima amplitud en $T_2/4$ por lo tanto en $\pi/4$ segundos.

d. Los dos péndulos tendrán el mismo ángulo de deflexión cuando en $t = t^*$ se cumpla

$$\theta_1(t = t^*) = \theta_2(t = t^*) \longrightarrow \sqrt{2}\cos t^* = \sin(2t^*)$$

$$\sqrt{2}\cos t^* - 2\sin t^* \cos t^* = 0 \longrightarrow \cos t^*(\sqrt{2} - 2\sin t^*) = 0$$

$$\begin{cases} \cos t^* = 0 \\ \sin t^* = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} t^* = \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}, \ldots \\ t^* = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi, \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi \text{ con } k = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

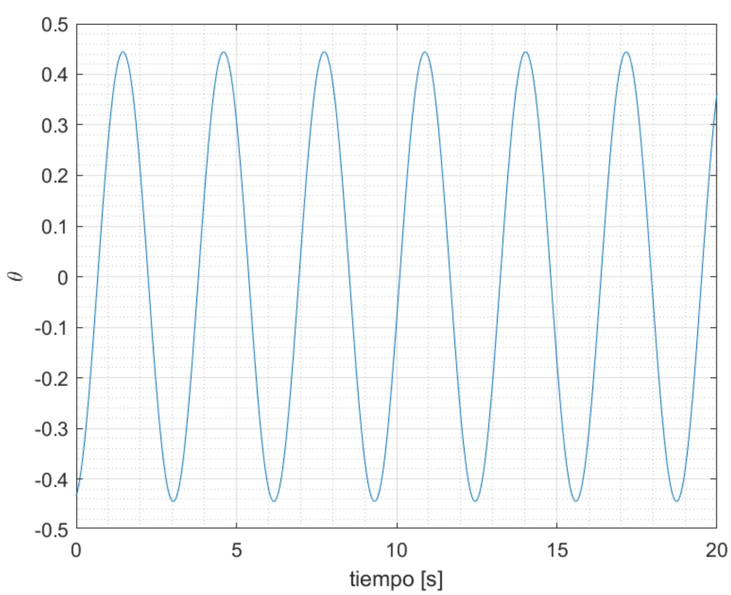
Por lo tanto el primer instante es cuando $t = \dfrac{\pi}{4}\ s$

e. Las nuevas condiciones iniciales del péndulo dos son:

$$\theta_0^2 = -\sqrt{3}/4\, rad \qquad \dot{\theta}_0^2 = \frac{0{,}5}{2{,}5} = 0{,}2\ \frac{1}{s}$$

Por lo tanto la nueva ecuación de movimiento.

$$\theta(t) = -\frac{\sqrt{3}}{4}\cos(2t) + \frac{1}{10}\sin(2t)$$



Entonces, la amplitud es

$$Amplitud = \sqrt{\frac{3}{16} + \frac{1}{100}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = 0{,}444 \, rad$$