

Cálculo I ∗ MAT1610

Interrogación 2

- El puntaje en la evaluación se entrega según pauta, siempre y cuando haya un desarrollo que justifique su respectiva solución y el desarrollo sea correcto.
- No se asignará puntaje diferente al establecido por la pauta.
- Errores de arrastre son sancionados con el puntaje hasta antes del primer error, salvo que la pauta especifique lo contrario.

1. a) (8 ptos) Determine los valores de a y b para que la siguiente función admita derivada en $x = 0$. Todos sus resultados deben ser justificados mediante el cálculo de límites.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos(x)}{x} & \text{si } x < 0, \\ ae^{2x} + b(x+1) & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

- b) (6 ptos) Determine todos los puntos $P(x, y)$ sobre la curva $y = \frac{1}{x+1}$ donde su tangente tiene pendiente -9 .

Solución.

- a) Para que la función admita derivada en $x = 0$ se deben cumplir las siguientes condiciones:
- f continua en $x = 0$. La condición de continuidad nos asegura que

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

donde

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - \cos(x)}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (ae^{2x} + b(x+1)) = a + b \\ f(0) &= a + b \end{aligned}$$

De las relaciones anteriores se deduce que $a + b = 0$ o bien $a = -b$.

- f derivable en $x = 0$. La condición de derivabilidad nos asegura que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} \text{ existe} \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} \text{ existen}$$

donde

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1 - \cos(h)}{h} - (a + b)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1 - \cos(h)}{h^2} = \frac{1}{2} \\ \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{ae^{2h} + b(h + 1) - (a + b)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{ae^{2h} - a + bh}{h} = 2a + b\end{aligned}$$

donde $a + b = 0$ y $b = -a$. De las relaciones anteriores se deduce que $2a + b = 1/2$.

Como $a + b = 0$ y $2a + b = 1/2$, podemos afirmar que f admite derivada en $x = 0$ para $a = 1/2$ y $b = -1/2$.

- b) Los puntos en cuestión son de la forma $P(x, f(x))$ donde $f(x) = \frac{1}{x+1}$ para los x que satisfacen la ecuación $f'(x) = -9$. Usando la ley del cociente tendremos que

$$f'(x) = \frac{(1)'(x+1) - (x+1)'1}{(x+1)^2} = -\frac{1}{(x+1)^2}$$

Luego, la ecuación

$$f'(x) = -9 \Leftrightarrow -\frac{1}{(x+1)^2} = -9$$

tiene por soluciones a $x = -4/3$ y $x = -2/3$. De lo anterior, los puntos pedidos son

$$P(-4/3, f(-4/3)) = P(-4/3, -3) \quad \text{y} \quad P(-2/3, f(-2/3)) = P(-2/3, 3)$$

Evaluación.

- **C1(a)** Asignar (1 ptos) por obtener que $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$.
- **C2(a)** Asignar (1 ptos) por obtener que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = a + b$.
- **C3(a)** Asignar (1 ptos) por obtener que $a = b$. Este puntaje se asignará siempre y cuando se cumplen los criterios **C1(a)** y **C2(a)**.
- **C4(a)** Asignar (1 ptos) por obtener que $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 1/2$.
- **C5(a)** Asignar (1 ptos) por obtener que $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 2a + b$. Este puntaje se asignará siempre y cuando se cumple el criterio **C3(a)**.
- **C6(a)** Asignar (1 ptos) por obtener que $2a + b = 1/2$. Este puntaje se asignará siempre y cuando se cumplen los criterios **C4(a)** y **C5(a)**.
- **C7(a)** Asignar (1 ptos) por obtener el valor de $a = 1/2$. Este puntaje se asignará siempre y cuando se cumple el criterio **C6(a)**.
- **C8(a)** Asignar (1 ptos) por obtener el valor de $b = -1/2$. Este puntaje se asignará siempre y cuando se cumple el criterio **C6(a)**.

- **C1(b)** Asignar (2 ptos) por calcular $f'(x) = -1/(1+x)^2$ o equivalente.
- **C2(b)** Asignar (1 ptos) por la solución $x = -4/3$ de la ecuación $1/(1+x)^2 = -9$.
- **C3(b)** Asignar (1 ptos) por la solución $x = -2/3$ de la ecuación $1/(1+x)^2 = -9$.
- **C4(b)** Asignar (1 ptos) por las coordenadas de uno de los puntos: $P(-4/3, -3)$. No es necesario que esté escrito P , en las coordenadas del punto, para asignar el puntaje.
- **C5(b)** Asignar (1 ptos) por las coordenadas de uno de los puntos: $P(-2/3, 3)$. No es necesario que esté escrito P , en las coordenadas del punto, para asignar el puntaje.

2. a) (8 ptos) Considere las funciones

$$g(x) = \ln(x) \quad y \quad h(x) = \sin(x)$$

y sea $f(x) = (g \circ h)(x)$, para $x \in (0, \pi)$. Demuestre que f satisface la ecuación

$$f''(x) + (f'(x))^2 = -1.$$

b) (6 ptos) Sea $f(x) = \cos(\pi e^x)$, determine la linealización de f en $x = 0$ y úsela para estimar el valor de $f(0,1)$.

Solución.

a) Es claro que $f(x) = \ln(\sin(x))$, luego

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \cot(x) \\ f''(x) &= -\csc^2(x) \end{aligned}$$

De este modo,

$$f''(x) + (f'(x))^2 = -\csc^2(x) + \cot^2(x) = \frac{-1 + \cos^2(x)}{\sin^2(x)} = \frac{-\sin^2(x)}{\sin^2(x)} = -1$$

ya que $1 - \cos^2(x) = \sin^2(x)$.

b) Una linealización para f , en torno a $x = 0$, está dada por

$$L(x) = f'(0)(x - 0) + f(0) = -1,$$

ya que

$$f(0) = -1, \quad f'(x) = -\sin(\pi e^x)\pi e^x, \quad f'(0) = 0$$

Luego, $f(0,1) \approx L(0,1) = -1$.

Evaluación.

- **C1(a).** Asignar (3 pto) por determinar correctamente $f'(x) = \cot(x)$ o $f'(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$.
- **C2(a).** Asignar (3 pto) por determinar correctamente $f''(x) = -\csc^2(x)$ o $f''(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}$.
- **C3(a).** Asignar (2 pto) por calcular $f''(x) + (f'(x))^2$, obteniendo como resultado 1. Este puntaje se asignará siempre y cuando se cumplan los criterios **C1(a)**. y **C2(a)**.
- **C1(b).** Asignar (1 pto) por determinar correctamente $f(0) = -1$.
- **C2(b).** Asignar (2 pto) por determinar correctamente $f'(x) = -\sin(\pi e^x)\pi e^x$.
- **C3(b).** Asignar (1 pto) por determinar correctamente $f'(0) = 0$. Este puntaje se asignará siempre y cuando se cumple el criterio **C2(b)**.
- **C4(b).** Asignar (1 pto) por determinar correctamente una linealización para f . Este puntaje se asignará siempre y cuando se cumplen los criterios **C1(b)**, **C2(b)** y **C3(b)**.
- **C5(b).** Asignar (1 pto) por determinar el valor aproximado de $f(0,1)$ dado por la linealización. Este puntaje se asignará siempre y cuando se cumple el criterio **C4(b)**.

3. a) (8 ptos) Determine los valores de mínimo absoluto (mínimo global) y máximo absoluto (máximo global) de

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+3}$$

en el intervalo $[0, 2]$.

- b) (8 ptos) Suponga $y(x)$ es una función derivable y que satisface la identidad

$$\frac{1}{y} = y \arcsin(x) + x + 1$$

en un intervalo abierto alrededor de $x = 0$. Determine el valor de $y'(0)$.

Solución.

- a) Para determinar los valores extremos (mínimo y máximo absoluto) el *Método del intervalo cerrado*. Aplicando regla del cociente tendremos que

$$f'(x) = \frac{(x+1)'(x^2+3) - (x^2+3)'(x+1)}{(x^2+3)^2} = -\frac{(x+3)(x-1)}{(x^2+3)^2}$$

Dado que f está definida sobre el intervalo $[0, 2]$ podemos notar que f posee un único números críticos. De este modo, los valores extremos para f (por ser continua y derivable) se dan en los extremos del intervalo:

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{1}{3} && \text{valor de mínimo absoluto} \\ f(1) &= \frac{2}{4} = \frac{1}{2} && \text{valor de máximo absoluto} \\ f(2) &= \frac{3}{7} \end{aligned}$$

- b) Evaluando la ecuación en $x = 0$ tendremos que

$$\frac{1}{y(0)} = y(0) \arcsin(0) + 0 + 1 \Leftrightarrow y(0) = 1$$

Ahora, derivando implícitamente la ecuación tendremos

$$-\frac{y'}{y^2} = y' \arcsin(x) + \frac{y}{\sqrt{1-x^2}} + 1$$

que al ser evaluada en $x = 0$ nos da una ecuación para $y'(0)$:

$$-\frac{y'(0)}{y^2(0)} = y'(0) \arcsin(0) + \frac{y(0)}{\sqrt{1-0^2}} + 1 \Leftrightarrow -y'(0) = 2$$

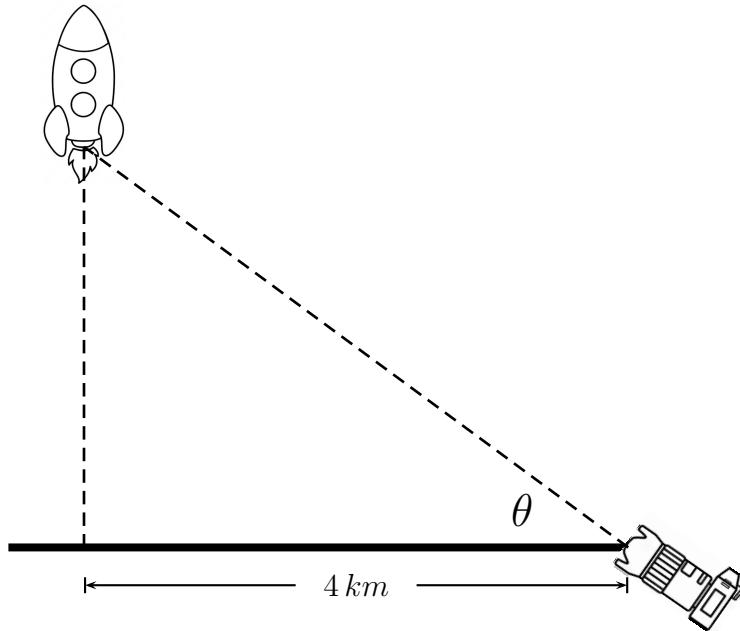
Por lo tanto, $y'(0) = -2$.

Evaluación.

- **C1(a).** Asignar (1 pto) por determinar $(x-1)'$.
- **C2(a).** Asignar (1 pto) por determinar $(x^2+3)'$.
- **C3(a).** Asignar (1 pto) por determinar $f'(x)$. Este puntaje se asignaá siempre y cuando se cumplen los criterios **Criterio C1(a)** y **C2(a)**.

- **C4(a).** Asignar **(1 pto)** por escribir que f tiene un único números críticos. Este puntaje se asignaá siempre y cuando se cumple el criterio **Criterio C3(a)**.
 - **C5(a).** Asignar **(1 pto)** por calcular $f(0)$.
 - **C6(a).** Asignar **(1 pto)** por calcular $f(1)$.
 - **C7(a).** Asignar **(1 pto)** por concluir que $f(0)$ es mínimo absoluto. Este puntaje se asignaá siempre y cuando se cumple el criterio **Criterio C4(a)**.
 - **C8(a).** Asignar **(1 pto)** por concluir que $f(1)$ es máximo absoluto. Este puntaje se asignaá siempre y cuando se cumple el criterio **Criterio C4(a)**.
-
- **C1(b).** Asignar **(3 pto)** por determinar el valor de $y(0) = 1$.
 - **C2(b).** Asignar **(3 pto)** por derivar correctamente en forma implícita la ecuación.
 - **C3(b).** Asignar **(2 pto)** por obtener el valor de $y'(0)$. Este puntaje se asignará siempre y cuando se cumple el criterio **Criterio C3(b)**.

4. a) (10 ptos) El lanzamiento de un cohete es seguido por una cámara situada a 4 km del punto de lanzamiento (en el suelo). Cuando el cohete ha subido verticalmente 3 km y viaja a 600 m/seg, ¿con qué rapidez varía el ángulo θ de inclinación de la cámara (medido respecto a la horizontal)?



Nota. Para realizar sus cálculos use las mismas unidades de medida.

- b) (6 ptos) Sea $f(x)$ una función derivable en todo \mathbb{R} , estrictamente positiva, $f'(x) > 0$ y tal que $f(0) = e^{-1}$ con e el número de Euler. Demuestre que la función $g(x) = f(x)^{f(x)}$ tiene un máximo absoluto (máximo global).

Solución.

- a) Si $y = y(t)$ corresponde a la altura del cohete en el instante de tiempo $t > 0$, medida en metros, se satisface que

$$\tan(\theta(t)) = \frac{y(t)}{4000}$$

Derivando esta ecuación respecto a t tendremos

$$\sec^2(\theta)\theta' = \frac{y'}{4000} \Rightarrow \theta' = \frac{y'\cos^2(\theta)}{4000}$$

Cuando $y = 3000\text{ m}$, se tiene que $y' = 600\text{ m/seg}$ y $\cos(\theta) = \frac{\text{cat. adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{4000}{5000} = \frac{4}{5}$.

Por lo tanto,

$$\theta' = \frac{600 \cdot (4/5)^2}{4000} = \frac{12}{125} = 0,096\text{ rad/seg}$$

- b) Para calcular $g'(x)$ debemos usar derivación logarítmica.

$$\ln(g(x)) = f(x) \ln(f(x)) \Rightarrow g'(x) = g(x)f'(x)(\ln(f(x)) + 1)$$

donde $g(x) = f(x)^{f(x)} > 0$, ya que $f(x) > 0$, y $f'(x) > 0$ por el enunciado del ejercicio. De lo anterior, todos los números críticos de g corresponde a la solución de la ecuación $\ln(f(x)) + 1 = 0$ que tiene por solución $f(x) = e^{-1}$.

Como $f'(x) > 0$, entonces $f(x)$ es creciente, por lo que pasa una única vez por cada valor de su recorrido. En particular la ecuación $f(x) = e^{-1}$ tiene a lo más una solución, que en nuestro caso está dada por $x = 0$, según enunciado del ejercicio.

Por lo anterior, g tiene un único número crítico en $x = 0$. Probemos ahora que $g(0)$ corresponde a un mínimo local, y por ende a un mínimo absoluto, por **criterio de la primera derivada para valores extremos**.

Como $f(x) > 0$ y $f'(x) > 0$ luego $h(x) = \ln(f(x)) + 1$ es una función creciente con $h(0) = 0$, ya que $h'(x) = f'(x)/f(x)$. De lo anterior, se deduce que:

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$g(x)$	+	+
$f'(x)$	+	+
$\ln(f(x)) + 1$	-	+
$g'(x)$	-	+

Por lo tanto $g(0)$ corresponde a un valor de mínimo local, y por tanto absoluto de g .

Evaluación. Para la parte (a) las unidades de medida pueden estar en metros o en kilómetros. El resultado final no depende de la unidad de medida elegida.

- **C1(a).** Asignar **(3 pto)** por establecer una ecuación (correcta) para θ e y : $\tan(\theta(t)) = \frac{y(t)}{8\,000}$.
- **C2(a).** Asignar **(3 pto)** por derivar correctamente $\tan(\theta(t)) = \frac{y(t)}{4\,000}$.
- **C3(a).** Asignar **(2 pto)** por el valor del $\cos(\theta)$ en el instante de tiempo pedido.
- **C4(a).** Asignar **(2 pto)** por el valor del θ' en el instante de tiempo pedido. El resultado esperado puede ser: $12/125$, $12/125 \text{ rad/seg}$, $0,096$, $0,096 \text{ rad/seg}$. Este puntaje se asignará siempre y cuando se cumplen los criterios **C2(a)** y **C3(a)**.

- **C1(b).** Asignar **(1 pto)** por determinar correctamente $g'(x)$.
- **C2(b).** Asignar **(1 pto)** por definir $h(x) = \ln(f(x)) + 1$.
- **C3(b).** Asignar **(1 pto)** por calcular $h(0) = 0$ o $g(0) = 0$.
- **C4(b).** Asignar **(1 pto)** por justificar que h o g tiene un único número crítico en $x = 0$.
- **C5(b).** Asignar **(1 pto)** por justificar que $g'(x) < 0$ para $x < 0$ y que $g'(x) > 0$ para $x > 0$. Este puntaje se asignará siempre y cuando se cumple el criterio **C4(a)**.
- **C6(b).** Asignar **(1 pto)** por concluir justificadamente que g tiene un mínimo global en $x = 0$. Una justificación Este puntaje se asignará siempre y cuando se cumplen los criterios **C5(a)** y **C6(a)**.

Toda respuesta debe ir acompañada con un desarrollo que justifique su solución. En caso contrario la respuesta será evaluada con puntaje mínimo

TIEMPO: 120 MINUTOS

SIN CONSULTAS

SIN CALCULADORA

PROHIBIDO TENER CELULAR Y/O RELOJES INTELIGENTE PRENDIDOS