PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
DEPTO. DE ING. HIDRÁULICA Y AMBIENTAL
ICH1104 MECÁNICA DE FLUIDOS

SEGUNDO SEMESTRE DE 2019 INTERROGACIÓN Nº1
Lunes 9 de septiembre de 2019

Sin Apuntes, con calculadora. Tiempo total: 2:30 hrs.

NOMBRE……………………………………………………………………………………..

SECCIÓN………………………………………..

INSTRUCCIONES

La prueba es estrictamente individual, sin apuntes ni formularios. Puede usar calculadora.

No se permiten consultas durante la interrogación.

Al iniciar la prueba ponga su nombre en esta página. **No separe las hojas de este cuadernillo.**

Este cuadernillo contiene el enunciado de cuatro problemas. **Este cuadernillo NO se entrega**. Se corregirá sólo lo entregado en el cuadernillo de sus respuestas definitivas. Ud. es responsable de completar el cuadernillo definitivo y presentarlo de manera que se facilite la corrección.

PROBLEMA 1

Un cubo de lado “**a**” se desliza por un plano inclinado de largo infinito, el cual está cubierto por una película lubricante de espesor “**e**”. El movimiento del cubo se debe solo a la fuerza de gravedad. El ángulo de inclinación del plano es **α**. Asuma que el cubo es de un material solido de densidad **ρ**. Asuma que el lubricante es un fluido Newtoniano de viscosidad **μ**. Determine la velocidad máxima que puede alcanzar el cubo en su movimiento.

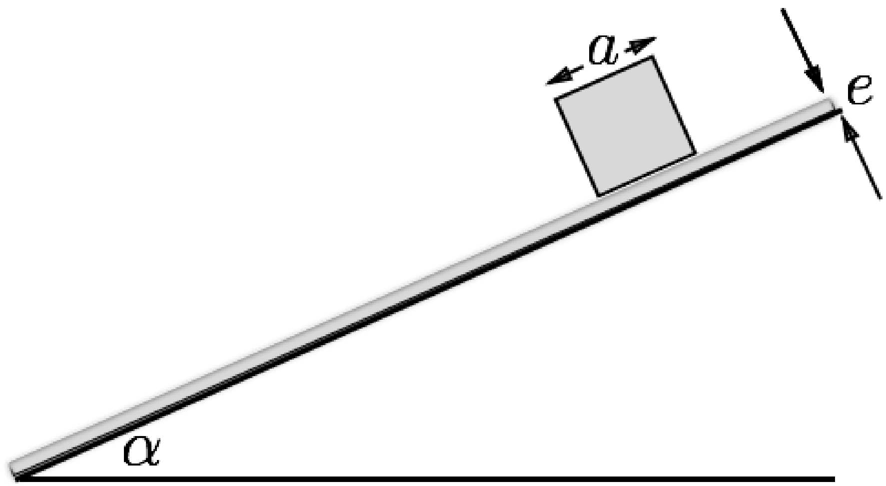


Figura 1: Esquema del cubo deslizándose por gravedad sobre una película de fluido Newtoniano

La velocidad máxima se alcanza cuando la fuerza roce iguala la componente del peso paralela al plano W_x

$$\sum F : F_r - W_x = 0 \text{ [1 pto]}$$

Para encontrar la fuerza roce, debemos encontrar el esfuerzo de corte que actúa en la base del cubo:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

Podemos aproximar el gradiente de velocidades de manera lineal, con velocidad máxima igual a V.

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} = \mu \frac{V-0}{e-0} = \mu \frac{V}{e} \text{ [2 ptos]}$$

La fuerza de roce queda descrita por:

$$F_r = \tau A = \mu \frac{V}{e} a^2 \text{ [1 pto]}$$

El peso del total del cuerpo es igual a:

$$W = \rho a^3 g$$

Y su componente paralela al plano es:

$$W_x = \rho a^3 g\, sin(\alpha)$$

Finalmente igualando ambas fuerzas:

$$F_r = W_x$$

$$\mu \frac{V}{e} a^2 = \rho a^3 g\, sin(\alpha)$$

$$\boldsymbol{V = \frac{\rho e a g\, sin(\alpha)}{\mu}\ [2\ ptos]}$$

PROBLEMA 2

PARTE A

Para las preguntas a) y b), se considera un flujo incompresible en dos dimensiones.

a) Definir un flujo permanente, impermanente, uniforme y variado. [1 pto]

- Permanente: las derivadas de tiempo son nulas
- Impermanente: las derivadas de tiempo no son nulas
- Uniforme: las derivadas de espacio son nulas
- Variado: las derivadas de espacio no son nulas

b) Basándose en la figura 2, clasifique cada uno de los 3 escurrimientos presentados. En cada caso, indique si se trata de un escurrimiento acelerado o no; en el caso positivo indique si la aceleración es local/convectiva. [2 ptos]

Flujo 1: Permanente y variado. Aceleración convectiva.

Flujo 2: uniforme e impermanente. Aceleración temporal

Flujo 3: variado e impermanente. Aceleración temporal y convectiva

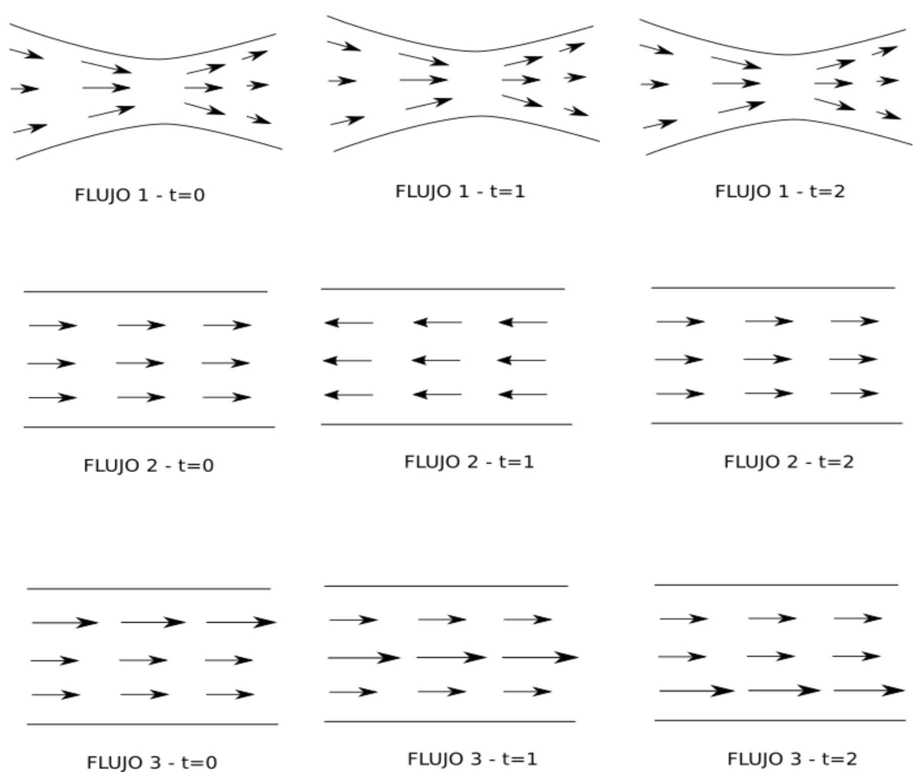


Figura 2: Campo de velocidades para 3 flujos en distintos tiempos.

PARTE B

Un escurrimiento bidimensional tiene el siguiente campo de velocidad $\vec{U} = (u, v)$ donde:

$$u(x, y, t) = \frac{by^2 - 1}{a + \exp(-x)}$$

$$v(x, y, t) = xy$$

con *a*,*b* constantes, *x*,*y* las coordenadas cartesianas del plano y *t* la variable tiempo.

c) Definir una trayectoria, una línea de corriente y una línea de humo. ¿Qué característica necesita el flujo para que su descripción matemática sea equivalente? [1 pto]

- Trayectoria: vamos siguiendo una partícula
- Línea de corriente: línea que en un tiempo dado es siempre tangente al vector velocidad
- Línea de humo: línea que une las posiciones de todas las partículas que en un instante dado pasaron por un punto dado.
- Para que las 3 tengan la misma descripción matemática se necesita que el flujo sea permanente.

d) Considerando que $\mathrm{a} = 0$ y $\mathrm{b} = 0$, encuentre la expresión de la línea de corriente que se apoya en el punto $\overrightarrow{X_0} = (0{,}1)$ para el tiempo $\mathrm{t} = 1$. [2 ptos]

La línea de corriente se define con:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$$

En nuestro caso tenemos:

$$\frac{(a + \exp(-x))dx}{(by^2 - 1)} = \frac{dy}{xy}$$

$$(ax + x\exp(-x))dx = (by - \frac{1}{y})dy$$

Si integramos:

$$\left[\frac{ax^2}{2} - (x+1)\exp(-x)\right]_0^x = \left[\frac{by^2}{2} - \ln(y)\right]_1^y$$

Finalmente:

$$\left[\frac{ax^2}{2} - (x+1)\exp(-x)\right]_0^x = \left[\frac{by^2}{2} - \ln(y)\right]_1^y$$

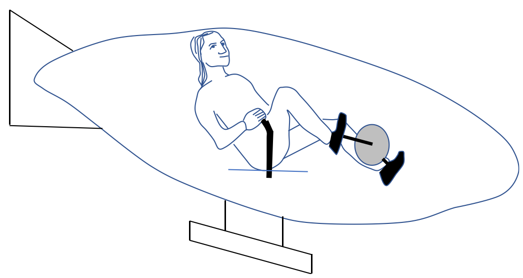
Luego:

$$\frac{ax^2}{2} - (x+1)\exp(-x) - 1 = \frac{by^2}{2} - \ln(y) - \frac{b}{2}$$

PROBLEMA 3

Estudiantes del curso quieren desarrollar un submarino impulsado con propulsión humana de longitud total 5 m, que alcanzará una velocidad de 0.44 m/s bajo el agua.

Para evaluar su diseño, proponen desarrollar un modelo físico a escala que probarán en un túnel de viento en el laboratorio, con el propósito de medir la fuerza de arrastre del fluido sobre el submarino.



e) Determine una expresión adimensional de la fuerza de arrastre F_D. Asuma que esta fuerza es función de la peso específico y viscosidad dinámica del fluido, de la longitud del submarino como escala de longitud representativa, y de la velocidad del fluido con respecto al submarino. Use la longitud, densidad, y velocidad como base para el análisis dimensional.

$$F_D = f(\rho, V, D, \mu)$$

Usando el teorema de Buckingham, encontramos una expresión de sólo dos parámetros adimensionales:

$$\frac{F_D}{\rho V^2 L^2} = \varphi(Re)$$

El número de Reynolds se expresa como:

$$Re = \rho V L/\mu = V L/\nu$$

f) Si el modelo físico se construye a una escala geométrica 1:5, calcule la velocidad del aire en el túnel de viento para los experimentos. Considere una temperatura del aire igual a 20°C y que el modelo del submarino se mantiene fijo en la sección central del túnel.

$$L_m/L_p = 1/5$$

Igualando el número de Reynolds entre el modelo físico y el prototipo, podemos despejar la velocidad del aire en el túnel de viento:

$$\frac{V_m L_m}{\nu_{aire}} = \frac{V_p L_p}{\nu_{agua}};$$

$$\frac{V_m}{10^{-5}} = \frac{5V_p}{10^{-6}}$$

Despejamos la velocidad, si la velocidad en el prototipo es de 0.44m/s. V_m=22 m/s

g) La fuerza de arrastre medida en el experimento es de 5.7N. Calcule el valor de la fuerza en el prototipo, y comente sobre la validez de este resultado.

Igualando el parámetro de la fuerza:

$$\frac{F_{Dm}}{1.2 \times 22^2 \times 1^2} = \frac{F_{Dp}}{1000 \times 0.44^2 \times 5^2}$$

Despejamos la fuerza en el prototipo: F_{Dp}=47.5N

Como el número de Reynolds es idéntico, este resultado debería ser directamente aplicable al prototipo, mientras los factores iniciales considerados en el análisis dimensional sigan siendo válidos.

PROBLEMA 4

La atmósfera adiabática puede modelarse como un gas ideal tal que:

$$P = \rho R T$$
$$\frac{P}{\rho^{\kappa}} = cte$$

Donde P es la presión absoluta, ρ es la masa específica, T es la temperatura absoluta, R es la constante de gas ideal, y κ es la constante adiabática.

Asumiendo que en las condiciones estudiadas el fluido se encuentra en equilibrio hidrostático sin aceleración, se pide:

a) Demostrar la siguiente relación entre el gradiente de vertical de temperaturas y el gradiente de presiones: [2 ptos]

$$\frac{1}{T}\frac{dT}{dz} = \frac{(\kappa - 1)}{\kappa}\frac{1}{P}\frac{dP}{dz}$$

Gas ideal: $P = \rho R T$ (1)

Proceso adiabático: $\frac{P}{\rho^{\kappa}} = cte$ (2)

Combinando ambas relaciones, obtenemos:

$$\frac{P}{\left(\frac{P}{RT}\right)^{\kappa}} = cte$$

Luego se tiene:

$$P^{1-\kappa} T^{\kappa} = cte \qquad (3). \quad [0{,}5 \text{ ptos}]$$

Derivando respecto de z:

$$\frac{d}{dz}\left(P^{1-\kappa}T^{\kappa}\right) = 0$$

$$\Longrightarrow T^{\kappa}\frac{d}{dz}\left(P^{1-\kappa}\right) + P^{1-\kappa}\frac{d}{dz}\left(T^{\kappa}\right) = 0$$

$$\Longrightarrow T^{\kappa}(1-\kappa)P^{-k}\frac{dP}{dz} + \kappa P^{1-\kappa}T^{\kappa-1}\frac{dT}{dz} = 0 \qquad \text{[1 pto]}$$

Dividiendo por $\kappa P^{1-\kappa}T^{\kappa}$ obtenemos:

$$\frac{(1-\kappa)}{\kappa}\frac{1}{P}\frac{dP}{dz} + \frac{1}{T}\frac{dT}{dz} = 0$$

Y finalmente:

$$\frac{1}{T}\frac{dT}{dz} = \frac{(\kappa-1)}{\kappa}\frac{1}{P}\frac{dP}{dz} \qquad (4) \qquad \text{[0,5 ptos]}$$

b) Determinar la distribución de temperaturas en la atmósfera adiabática. [2 ptos]

La ley hidrostática se escribe:

$$\nabla P = \rho\vec{g}$$

En la dirección vertical:

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g \qquad (5) \qquad \text{[0,5 ptos]}$$

Reemplazando la relación (4) en la ecuación (5), obtenemos:

$$\frac{1}{T}\frac{dT}{dz} = -\frac{(\kappa-1)}{\kappa}\frac{\rho g}{P} \qquad \text{[0,5 ptos]}$$

Y usando la ley de gas ideal (1):

$$\frac{1}{T}\frac{dT}{dz} = -\frac{(\kappa-1)}{\kappa}\frac{g}{RT} \qquad \text{[0,5 ptos]}$$

Luego integrando respecto de z:

$$\int dT = -\frac{(\kappa-1)}{\kappa}\frac{g}{R}\int dz$$

$$\Rightarrow T = T_0 - \frac{(\kappa-1)}{\kappa}\frac{g}{R}(z - z_0) \qquad (6) \qquad \text{[0,5 ptos]}$$

c) Ahora considerando que, para el rango de variaciones en la vertical, la temperatura puede asumirse constante e igual a T_o, se pide determinar el campo de presiones. [2 ptos]

A partir de la ley hidrostática considerando gas ideal y temperatura constante:

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{P}{RT}g \qquad \text{[0,5 ptos]}$$

Luego asumiendo que la temperatura es constante:

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dz} = -\frac{g}{RT_0} \qquad \text{[0,5 ptos]}$$

Separando variables e integrando:

$$\int \frac{dP}{P} = -\frac{g}{RT_0}\int dz \qquad \text{[0,5 ptos]}$$

Desde donde obtenemos:

$$ln\left(\frac{P}{P_0}\right) = -\frac{g}{RT_0}(z - z_0)$$

Y Finalmente:

$$P(z) = P_0 exp\left[-\frac{g}{RT_0}(z - z_0)\right] \qquad \text{[0,5 ptos]}$$