PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Escuela de Ingeniería
**ICE1513 — Dinámica**
Segundo Semestre 2018

# Taller 06

## Cinética II

**Problema 1.**

Una partícula de masa $m$ se suspende de un resorte de masa despreciable y rigidez constante $k$ y largo natural $l_o$ a un eje capaz de girar. Si el eje gira con velocidad angular constante $\omega$; se produce un ángulo $\theta$ entre el resorte y el eje vertical (ver Figura 1). Se pide determinar:

a) El largo del resorte cuando está girando.

b) Una expresión para $\theta$ en función de $\omega$, $k$, $m$, $l_o$, y $g$.

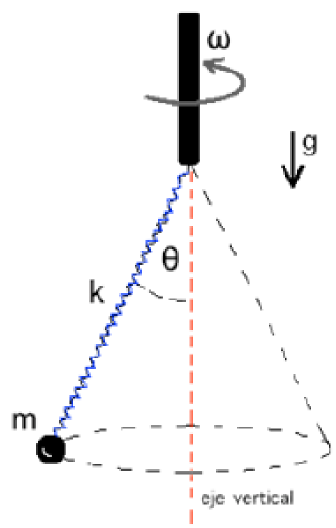


Figura 1: Péndulo circular con resorte.

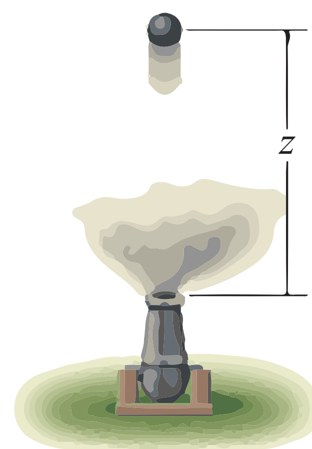


Figura 2: Cañón con bala y roce viscoso.

**Problema 2.**

Un proyectil de masa $10\,kg$ parte con una velocidad inicial de $50\,m/s$. Determine la altura máxima Tomando la resistencia del aire como $F_D = 0{,}01v^2$.

**Problema 3.**

Una partícula $P$ de masa $m$ se lanza de manera tangencial por el interior de un recipiente cilíndrico de radio $R$ y altura $h$, como muestra la Figura 3. El cilindro está lleno con un fluido ligero y viscoso. El roce (fricción seca) de $P$ con la pared cilíndrica es despreciable, pero el roce viscoso es $\vec{F}_r = -c\,\vec{v}$. Si la partícula comienza con velocidad tangencial $v_0$; se pide determinar:

a) La velocidad vertical $v_z\,(t)$ y la posición $z\,(t)$ en función del tiempo.

b) La velocidad angular $\omega\,(t) = \dot{\theta}\,(t)$ de $P$ en función del tiempo.

c) El valor de $c$ para que $P$ alcance justo a dar una sola vuelta (suponiendo que el recipiente es lo suficientemente alto $h \gg R$).

**Hint:** Recuerde que si $z = z\,(t)$, entonces $\ddot{z} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dot{z}$.

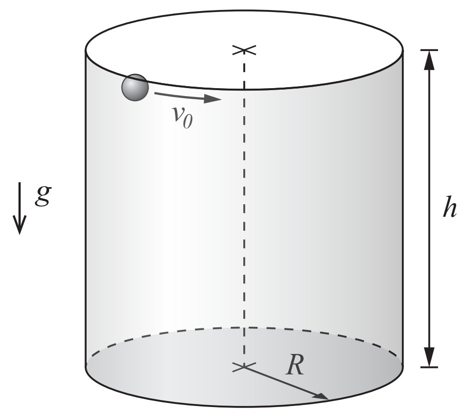


Figura 3: Partícula recorriendo un cilindro lleno con un fluido viscoso.

**Soluciones.**

Problema 1

Se comienza por un *Diagrama de cuerpo libre* (DCL) de la partícula como muestra la Figura 4. Es importante notar que la tensión que recibe la partícula por parte del resorte tiene relación con el estiramiento del mismo. Gracias a la $2^a$ ley de Newton tenemos que:

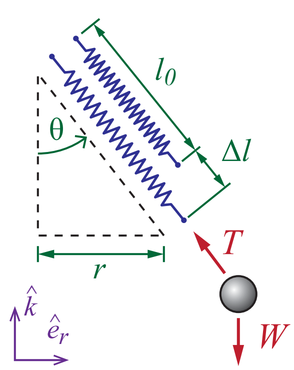


Figura 4: Diagrama de cuerpo libre del péndulo circular junto a la geometría del resorte.

$$\sum f_z = 0: \qquad T\cos\theta = mg$$
$$\sum f_r = m\cdot a_r: \qquad -T\sin\theta = m\left(-r\omega^2\right)$$

, donde con la primera ecuación se obtiene la tensión en el resorte en función del ángulo:

$$T = \frac{mg}{\cos\theta}$$

, que reemplazado en la segunda ecuación resulta en:

$$T\sin\theta = mr\omega^2 \qquad \rightarrow \qquad r = \frac{T\sin\theta}{m\,\omega^2} = \left(\frac{mg}{\cos\theta}\right)\left(\frac{\sin\theta}{m\,\omega^2}\right)$$
$$r = \frac{g}{\omega^2}\tan\theta$$

Por otro lado, de la geometría del problema se tiene:

$$\sin\theta = \frac{r}{l}$$
$$l = l_0 + \Delta l = \frac{r}{\sin\theta} = \frac{g}{\omega^2\cos\theta}$$

Despejando $l_0$ se obtiene:

$$l_0 = \frac{g}{\omega^2\cos\theta} - \Delta l = \frac{g}{\omega^2\cos\theta} - \frac{T}{k} = \frac{g}{\omega^2\cos\theta} - \frac{mg}{k\cos\theta}$$
$$l_0 = \frac{g}{\cos\theta}\left[\frac{1}{\omega^2} - \frac{m}{k}\right]$$

, es decir:

$$\cos\theta = \frac{g}{l_0}\left[\frac{1}{\omega^2} - \frac{m}{k}\right]$$

Finalmente:

$$l = \frac{g}{\omega^2\cos\theta} = \frac{g}{\omega^2\left(\frac{g}{l_0}\right)\left[\frac{1}{\omega^2} - \frac{m}{k}\right]} = \frac{l_0 k}{k - m\omega^2}$$
$$l = \frac{l_0}{1 - \left(\frac{m}{k}\right)\omega^2}$$

, y el ángulo es:

$$\theta = \operatorname{acos}\left(\frac{g}{l_0}\left[\frac{1}{\omega^2} - \frac{m}{k}\right]\right)$$

<u>Problema 2</u>
Con la segunda ley de Newton, cuando el proyectil va subiendo, se tiene:

$$m\cdot a = -mg - F_D = -mg - 0{,}01v^2$$
$$a\left(v\right) = -g - \left(\frac{1}{m}\right)\left(0{,}01v^2\right) = -g - \frac{v^2}{1000}$$

Es decir, tenemos una expresión para la aceleración en función únicamente de la velocidad. Sabemos que $v = \mathrm{d}z/\mathrm{d}t$, lo que multiplicado por $\mathrm{d}v$ es:

$$v\,\mathrm{d}v = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}v = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}z$$
$$v\,\mathrm{d}v = a\,\mathrm{d}z$$

, lo que es tremendamente útil ya que conocemos $a\,(v)$, y la condición inicial ($z_0 = 0$ y $v_0 = 50\,m/s$), y con ello se puede determinar la condición en el instante de interés ($z^\star = h$ y $v^\star = 0$): Finalmente:

$$\begin{aligned}
v\,\mathrm{d}v = a\,\mathrm{d}z &= \left(-g - \frac{v^2}{1000}\right)\mathrm{d}z \\
\int_{50\,m/s}^{0}\left(\frac{-v}{g+\frac{v^2}{1000}}\right)\mathrm{d}v &= \int_0^h \mathrm{d}z \\
-\frac{1000}{2}\log\left(v^2+1000g\right)\Big|_{v=50\,m/s}^{v=0} &= z\Big|_{z=0}^{z=h} \\
-500\log(9810)+500\log\left(50^2+9810\right) &= h \\
-500\,(9{,}1912-9{,}4182) = (-500)\,(-0{,}227) &= h \\
113{,}5\,m &= h
\end{aligned}$$

<u>Problema 3</u>

La fuerza viscosa tiene una componente tangencial y otra en $z$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_r = f_{c\theta}\,\hat{\mathbf{e}}_\theta + f_{cz}\,\hat{\mathbf{k}} &= c\,\mathbf{v} = c\,v_\theta\,\hat{\mathbf{e}}_\theta + c\,v_z\,\hat{\mathbf{k}} \\
f_{c\theta} = c\,v_\theta \qquad &\text{y} \qquad f_{cz} = c\,v_z
\end{aligned}$$

, donde se puede ver que están desacopladas. La partícula describe un movimiento circular en $\hat{\mathbf{e}}_r - \hat{\mathbf{e}}_\theta$, y usando la $2^a$ ley de Newton resulta:

$$\sum \mathbf{f} = m\,\mathbf{a}$$

$$(-N)\,\hat{\mathbf{e}}_r + (-c\,v_\theta)\,\hat{\mathbf{e}}_\theta + (-mg - c\,v_z)\,\hat{\mathbf{k}} = m\left(-R\,\dot{\theta}^2\right)\hat{\mathbf{e}}_r + m\left(R\,\ddot{\theta}\right)\hat{\mathbf{e}}_\theta + m\ddot{z}\,\hat{\mathbf{k}} \tag{1}$$

, que constituyen 3 ecuaciones desacopladas.

La primera ecuación de (1), ecuación en $\hat{\mathbf{e}}_r$, sirve para calcular la fuerza normal de la partícula con el cilindro.

La tercera ecuación de (1) nos permite calcular $\dot{z}$ y $z$:

$$\begin{aligned}
-mg - c\dot{z} &= m\ddot{z} \\
-g - \frac{c}{m}\dot{z} &= \frac{\mathrm{d}\dot{z}}{\mathrm{d}t} \\
-\mathrm{d}t &= \left(\frac{1}{g+\frac{c}{m}\dot{z}}\right)\mathrm{d}\dot{z} \\
\left(\frac{m}{c}\right)\log\left(mg + c\dot{z}\right) &= -t + C_1 \\
\dot{z} &= Ae^{-\frac{c}{m}t} - \frac{mg}{c}
\end{aligned}$$

, pero sabemos de las condiciones iniciales que $\dot{z}\,(t=0) = \dot{z}_0 = 0$, y con ello:

$$\begin{aligned}
0 &= Ae^0 - \frac{mg}{c} \\
A &= \frac{mg}{c} \\
\rightarrow \qquad \dot{z} &= \frac{mg}{c}\left[e^{-\frac{c}{m}t} - 1\right]
\end{aligned}$$

Integrando nuevamente la expresión para $\dot{z}\,(t)$ se obtiene:

$$z = -\left(\frac{m^2 g}{c^2}\right)e^{-\frac{c}{m}t} - \left(\frac{mg}{c}\right)t + C_2$$

, pero sabemos de las condiciones iniciales que $z\left(t=0\right)=z_0=h$, y con ello:

$$z_0 = -\left(\frac{m^2 g}{c^2}\right) e^0 + 0 + C_2 = h$$

$$C_2 = h + \frac{m^2 g}{c^2}$$

$$\rightarrow \qquad z = -\left(\frac{m^2 g}{c^2}\right)\left[e^{-\frac{c}{m}t} - 1\right] - \left(\frac{mg}{c}\right) t + h$$

Repitiendo el análisis con la segunda ecuación de (1) nos permite calcular $\dot{\theta}$ y $\theta$:

$$-c\, v_\theta = -cR\dot{\theta} = mR\ddot{\theta} = mR\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}t}$$

$$-\frac{c}{m}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\dot{\theta}}\,\mathrm{d}\dot{\theta}$$

$$-\frac{c}{m}t + C_1 = \log\left(\dot{\theta}\right)$$

$$Ae^{-\frac{c}{m}t} = \dot{\theta}$$

, donde la condición inicial es $v_0 = R\omega_0$, y con ello:

$$\frac{v_0}{R} = Ae^0 = A$$

$$\rightarrow \qquad \dot{\theta} = \left(\frac{v_0}{R}\right) e^{-\frac{c}{m}t}$$

Integrando nuevamente la expresión para $\dot{\theta}\left(t\right)$ se obtiene:

$$\theta = \int \left[\left(\frac{v_0}{R}\right) e^{-\frac{c}{m}t}\right] \mathrm{d}t + C_1$$

$$\theta = -\left(\frac{v_0 m}{Rc}\right) e^{-\frac{c}{m}t} + C_1$$

Si $h \gg R$, entonces podemos suponer que $v_\theta \gtrsim 0$, lo que ocurre cuando $t\rightarrow\infty$. Para que la partícula alcance a dar una sola vuelta en dicha condición:

$$\Delta\theta = \theta\left(t\rightarrow\infty\right) - \theta_0 = \left[-\left(\frac{v_0 m}{Rc}\right) e^{-\frac{c}{m}\infty} + C_1\right] - \left[-\left(\frac{v_0 m}{Rc}\right) e^0 + C_1\right]$$

$$2\pi = \frac{mv_0}{Rc}$$

$$c = \frac{mv_0}{2\pi R}$$