Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Segundo semestre de 2024

MAT1279/MAT1299: Algebra Lineal

Solución Examen

Justifique claramente sus respuestas.

1. *a*) **(3pts)** Considere las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Verifique si la matriz A es equivalente por filas a la matriz B.
Verifique si A es una matriz invertible y justifique su respuesta.

b) **(3pts)** Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por

$$T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 - x_3 \\ x_1 + x_3 \end{bmatrix}$$

Demuestre que la transformación T es invertible y encuentre explícitamente la fórmula de T^{-1}.
(Sugerencia: utilice la matriz asociada a la transformación)

Solución.

a) Para determinar si A y B son equivalentes por filas, realizamos operaciones elementales sobre A para reducirla a su forma escalonada:

$$\begin{aligned} &\text{Paso 1: } F_1 \leftrightarrow F_3 \quad \text{(intercambio de filas 1 y 3)}, \\ &\text{Paso 2: } F_2 \to F_2 - F_1 \quad \text{(restar la fila 1 a la fila 2)}, \\ &\text{Paso 3: } F_3 \to F_3 + F_2 \quad \text{(sumar la fila 2 a la fila 3)}. \end{aligned}$$

Aplicando estas operaciones, tenemos

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Estas operaciones conducen a la matriz en su forma escalonada reducida. La matriz A tiene 3 pivotes y la B tiene dos, por lo tanto las matrices A y B no son equivalentes por filas. La matriz A es invertible con $\det(A) \neq 0$. En contraste, la matriz B no es invertible porque tiene una fila de ceros ($\det(B) = 0$).

También se puede calcular el determinante de matriz A (sin la necesidad de escalonearla) $\det(A) = 18$ y argumentar que una matriz invertible no puede ser equivalente a una matriz no ivertible como B.

b) La matriz A asociada a T es:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Una matriz escalonada de A es

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

donde todas sus columnas poseen pivotes, luego A es invertible por lo cual T es invertible. También se puede justificart la existencia de la matriz invertible calculando el determinante de la matriz A: $\det(A) = -1 \neq 0$

La inversa de A es

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego

$$T^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -x_1 + x_2 + x_3 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix}$$

Criterios de corrección:

- 1 pto por una forma escalonada correcta de A o por calcular su determinante.
- 1 pto por justificar que A y B no son equivalentes por filas.
- 1 pto por deducir que A es invertible.
- 1 pto por determinar correctamente la matriz A.
- 0.5 pto por argumentar que T es invertible (calcular la inversa también lo demuestra).
- 1 pto por obtener la matriz inversa de manera correcta.
- 0.5 pto por determinar correctamente T^{-1}.

2. Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & d & 1 \\ c & 1 & 1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ donde $c, d \in \mathbb{R}$.

   a) **(3pts)** Encuentre todos los valores de c y d tales que el sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tenga infinitas soluciones.

   b) **(3pts)** Con parámetros c y d que cumplen las condiciones establecidas en la parte a), determine el rango de A, una base para el espacio Fil A y una base para el especio Col A.

Solución.

a) Apliquemos operaciones elementales de fila para reducir la matriz aumentada $[A\,\mathbf{b}]$ a forma escalonada:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & d & 1 & -1 \\ c & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d-1 & 0 & -2 \\ 0 & 1-c & 1-c & 1-c \end{bmatrix}.$$

Considerando la tercera ecuación, resulta que el sistema lineal es inconsistente si $d = 1$. Sigamos entonces con la condición $d \neq 1$, continuando con las operaciones elementales de fila:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d-1 & 0 & -2 \\ 0 & 1-c & 1-c & 1-c \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & d-1 & 0 & -2 \\ 0 & 1-c & 1-c & 1-c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(intercambio de filas)}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & d-1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1-c & (1-c)(1+\frac{2}{d-1}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(usando que } d-1 \neq 0\text{)}.$$

Para que el sistema tenga infinitas soluciones, además de tener un sistema consistente, debemos tener por lo menos una variable libre. Entonces hay que elegir $c = 1$.
Por lo tanto con $c = 1$ y $d \neq 1$

$$[A\,\mathbf{b}] \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & d-1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

con $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ consistente y con infinitas soluciones.

b) Las columnas pivote (uno y dos) de la matriz A forman un conjunto linealmente independiente (pues uno no es un múltiplo del otro) y generan Col A, o sea, forman una base $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ d \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ para el espacio Col A.

El espacio Fil A se genera por las filas no nulas de la matriz escalonada, y estas filas forman un conjunto linealmente independiente (pues uno no es un múltiplo del otro). Resulta que $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\d-1\\0\end{bmatrix}\right\}$ es una base para el espacio Fil A para cualquier $d \neq 1$. Es correcto también considerar los siguientes conjuntos como una base de Fil A: $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$, o bien $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$.

El rango de A es igual a la dimensión de los espacios fila y columna de A. Por lo tanto el rango de A es igual a 2.

Criterios de corrección:

- 1 pto por determinar una forma escalonada de $[A\,\mathbf{b}]$.
- 0.5 pto por argumentar sobre la condición d.
- 0.5 pto por condición $d \neq 1$.
- 0.5 pto por argumentar sobre la condición c.
- 0.5 pto por condición $c = 1$.
- 1 pto por dar una base para el espacio Col A.
- 1 pto por dar una base para el espacio Fil A.
- 1 pto por rango de A.

3. Sean $\mathcal{A} = \{\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}\}$ y $\mathcal{B} = \{\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}\}$ dos bases de $\mathbb{R}^2$ con $\mathbf{a_1} = \mathbf{2b_1} - \mathbf{b_2}$ y $\mathbf{a_2} = \mathbf{b_1} + \mathbf{b_2}$.

   a) **(2pts)** Determine la matriz de cambio de coordenadas de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{A}$.

   b) **(2pts)** Determine las coordenadas en la base $\mathcal{A}$ de $\mathbf{x} = \mathbf{b_1} - \mathbf{3b_2}$.

   c) **(2pts)** Determine las coordenadas en la base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{y} = \mathbf{a_1} + \mathbf{a_2}$.

Solución.

a) La matriz para el cambio de coordenadas de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{A}$ es la inversa de la matriz $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}$ del cambio de $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$. Obtenemos

$$P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}} = \begin{bmatrix}[\mathbf{a_1}]_{\mathcal{B}} & [\mathbf{a_2}]_{\mathcal{B}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

y

$$P_{\mathcal{A}\leftarrow\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Otra manera es usar el sistema para encontrar $\mathbf{b_1} = \dfrac{\mathbf{a_1} + \mathbf{a_2}}{\mathbf{3}}$ y $\mathbf{b_2} = \dfrac{-\mathbf{a_1} + \mathbf{2a_2}}{\mathbf{3}}$ para determinar la matriz $P_{\mathcal{A}\leftarrow\mathcal{B}}$

b)

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{A}} = P_{\mathcal{A}\leftarrow\mathcal{B}}[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/3 \\ -5/3 \end{bmatrix}.$$

c) Se pueden usar de manera directa las relaciones $\mathbf{a_1} = \mathbf{2b_1} - \mathbf{b_2}$ y $\mathbf{a_2} = \mathbf{b_1} + \mathbf{b_2}$ para determinar las coordenadas $[\mathbf{y}]_{\mathcal{B}}$ de $\mathbf{y}$ en la base $\mathcal{B}$ o, de manera equivalente,

$$[\mathbf{y}]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}[\mathbf{y}]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Criterios de corrección:

- 1 pto por evidenciar el calculo de $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}$.
- 1 pto por el cáclulo correcto de $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}$.
- 1 pto por relación abstracta entre $[\mathbf{x}]_{\mathcal{A}}$ y $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$.
- 1 pts por el resultado $[\mathbf{x}]_{\mathcal{A}}$.
- 1 pto por relacionar correctamente $[\mathbf{y}]_{\mathcal{A}}$ con $[\mathbf{y}]_{\mathcal{B}}$.
- 1 pts por el resultado $[\mathbf{y}]_{\mathcal{B}}$.

4. Sea $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

a) **(3.5pts)** Calcule los valores y vectores propios de A.

b) **(2.5pts)** Determine las matrices D y P que diagonalicen la matriz A.

Solución.

Primero calculamos el determinante de la matriz $A - xI$.

$$\text{Det}\begin{bmatrix} -x & 0 & 2 \\ -3 & 2-x & 3 \\ -1 & 0 & 3-x \end{bmatrix} = (2-x)(x-1)(x-2).$$

Al igualarlo a cero encontramos que los valores propios de A son 2 y 1.
Los espacios propios de cada valor propio son:

$$E_2 = Nul\begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \text{Gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}.$$

$$E_1 = Nul\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \text{Gen}\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}.$$

Como la multiplicidad geométrica y la multiplicidad algebraica de cada valor propio son iguales, entonces la matriz es diagonalizable. Con lo obtenido anteriormente las matrices pedidas de diagonalización son $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Note que las siguientes opciones también son correctas:

$D = \text{diag}(2,2,1)$ y $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, O bien $D = \text{diag}(1,2,2)$ y $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, O bien $D = \text{diag}(2,1,2)$ y $P = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, entre otras combinaciones correctas respetando el orden.

Criterios de corrección:

- 1 pto por calcular $\det(A - xI)$.
- 0.5 pto por obtener el valor propio 2.
- 0.5 pto por obtener el valor propio 1.
- 0.5 pto por obtener un vector propio del valor propio 2.
- 0.5 pto por obtener otro vector propio del valor propio 2.
- 0.5 pto por obtener un vector propio del valor propio 1.
- 1 pto por obtener una matriz D para la diagonalización.
- 0.5 punto por respetar el orden en formar una matriz P con los vectores encontrados en la parte a (incluso si hay errores en los vectores propios encontrados).
- 1 punto por obtener una matriz P para la diagonalización.