PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
TEMPORADA ACADÉMICA DE VERANO 2018

MAT1630 – Cálculo III

Solución Interrogación N° 2

1. Dada la curva C parametrizada por $\lambda(t) = (tcos(t), tsen(t)),\ t \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$,
   encuentre el área de la superficie sobre C y bajo el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

   Solución. El área A está dada por

$$A = \int_{\lambda} z(x(t), y(t))ds = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} t\sqrt{1+t^2}\, dt = \frac{1}{3}(1+t^2)^{3/2}\Big|_0^{3\pi/2} = \frac{1}{3}\left[\left(1 + \left(\frac{3\pi}{2}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right]$$

Puntaje Pregunta 1.

- 2 puntos por concluir que $A = \int_{\lambda} z(x(t), y(t))ds$
- 2 puntos por calcular $z(x(t), y(t)) \cdot \|\lambda'(t)\| = t \cdot \sqrt{1+t^2}$
- 2 puntos por calcular la integral $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} t\sqrt{1+t^2}\, dt$

2. *a*) Si $\overrightarrow{r} = (x,y)$ y $r = \|\overrightarrow{r}\|$, demuestre que para toda función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1$ el campo $\overrightarrow{F} = f(r)\overrightarrow{r}$ es conservativo en toda región contenida en un abierto que no contiene el origen.

b) Sea $\overrightarrow{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ dada por

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = (ye^{yz}cos(xy), ze^{yz}sen(xy) + xe^{yz}cos(xy), ye^{yz}sen(xy))$$

Encuentre $\displaystyle\int_\lambda \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{\lambda}$ si el punto final e inicial de λ son $(\pi,1,0)$ y $(\frac{\pi}{4},2,1)$ respectivamente. Justifique.

Solución.

a) $\overrightarrow{F}(xf(r), yf(r))$. Se cumple que $\dfrac{\partial}{\partial x}(yf(r)) = yf'(r)\frac{x}{r} = xf'(r)\frac{y}{r} = \dfrac{\partial}{\partial y}(xf(r))$

Como el dominio no contiene el origen vemos que se satisfacen las condiciones del teorema que implican que $\overrightarrow{F}$ es conservativa.

Puntaje Pregunta 2a).

- 2 puntos por verificar que $\partial Q/\partial x = \partial P/\partial y$.
- 1 punto por concluir que el campo es conservativo.

b) Buscamos f tal que $\overrightarrow{F} = \nabla f$.

Como $\dfrac{\partial}{\partial x}f$ debe ser igual a $ye^{yz}cos(xy)$, $f(x,y,z) = e^{yz}sen(xy) + g(y,z)$. Por lo tanto $\dfrac{\partial}{\partial y}f(x,y,z) = ze^{yz}sen(xy) + xe^{yz}cos(xy) + \dfrac{\partial}{\partial y}g(y,z) = ze^{yz}sen(xy) + xe^{yz}cos(xy)$. Luego $g(y,z)$ no depende de y, es decir $f(x,y,z) = e^{yz}sen(xy) + h(z)$, entonces $\dfrac{\partial}{\partial z}f(x,y,z) = ye^{yz}sen(xy) + h'(z) = ye^{yz}sen(xy)$. Vemos que $\overrightarrow{F} = \nabla(e^{yz}sen(xy))$

Por el teorema fundamental para integrales de linea

$$\int_\lambda \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{\lambda} = f(\pi,1,0) - f\left(\frac{\pi}{4},2,1\right) = -e^2$$

Puntaje Pregunta 2b).

- 2 puntos por determinar la función potencial f.
- 1 punto por calcular la integral de línea.

3. Calcular el trabajo producido por el campo de fuerzas dada por $\overrightarrow{F} = (8x+z, 2xz^2, -4y^2)$, a lo largo de la curva definida por las ecuaciones $z = 9 - 2x^2 - 4y^2$, $z = 1$. La curva está recorrida de modo que reflejada en el plano xy tiene orientación positiva.

Solución. La curva contenida en el plano $z = 1$, es la elipse $2x^2 + 4y^2 = 8 \Longleftrightarrow \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{2} = 1$ la cual podemos parametrizar por $\gamma(t) = (2\cos(t), \sqrt{2}\,\mathrm{sen}(t), 1)$, $t \in [0, 2\pi]$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{F}(\gamma(t)) &= (16\cos(t) + 1, 4\cos(t), -8\,\mathrm{sen}^2(t)) \\
\gamma'(t) &= (-2\,\mathrm{sen}(t), \sqrt{2}\cos(t), 0) \\
\overrightarrow{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) &= -32\,\mathrm{sen}(t)\cos(t) - 2\,\mathrm{sen}(t) + 4\sqrt{2}\cos^2(t)
\end{aligned}$$

Entonces, el trabajo producido por el campo de fuerza $\overrightarrow{F}$ es

$$\begin{aligned}
W &= \int_\gamma \overrightarrow{F} \cdot d\gamma = \int_0^{2\pi} \overrightarrow{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} (-32\,\mathrm{sen}(t)\cos(t) - 2\,\mathrm{sen}(t) + 4\sqrt{2}\cos^2(t))\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(-16\,\mathrm{sen}(2t) - 2\,\mathrm{sen}(t) + 4\sqrt{2}\left(\frac{1+\cos(2t)}{2}\right)\right) dt \\
&= \frac{4\sqrt{2}}{2}(2\pi) = 4\sqrt{2}\pi\ .
\end{aligned}$$

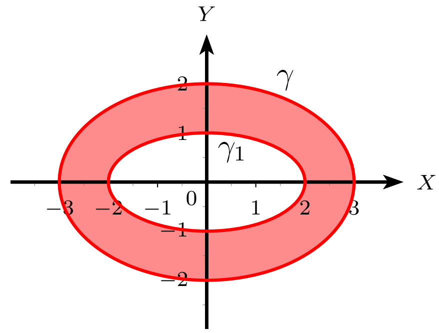
Puntaje Pregunta 3.

- 2 puntos por parametrizar la curva incluido el intervalo en donde está definida.
- 2 puntos por calcular $\overrightarrow{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$.
- 2 puntos por calcular la integral de línea.

4. Calcule usando el Teorema de Green $\displaystyle\iint_D (x-1)\,dxdy$, donde

$$D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \tfrac{x^2}{4}+y^2 \geqslant 1\,,\ \tfrac{x^2}{9}+\tfrac{y^2}{4}\leqslant 1\right\}.$$

Solución. Geometricamente la región D se aprecia en la siguiente figura



Sean

$$\gamma\ :\quad \begin{cases} x(t) &= 3\cos(t) \\ y(y) &= 2\,\mathrm{sen}(t)\end{cases}\ ,\qquad t\in[0,2\pi]$$

$$\gamma_1\ :\quad \begin{cases} x(t) &= 2\cos(t) \\ y(y) &= \mathrm{sen}(t)\end{cases}\ ,\qquad t\in[0,2\pi]$$

Usando el Teorema de Green, se tiene que

$$\int_\gamma Pdx+Qdy = \int_{\gamma_1} Pdx+Qdy+\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\,dA$$

Se sigue que $x-1=\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}$, entonces podemos elegir $F=(P,Q)=\left(y,\dfrac{x^2}{2}\right)$. Entonces,

$$\begin{aligned}\iint_D (x-1)\,dxdy &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\,dA = \int_\gamma Pdx+Qdy-\int_{\gamma_1} Pdx+Qdy \\ &= \int_\gamma ydx+\frac{x^2}{2}dy-\int_{\gamma_1} ydx+\frac{x^2}{2}dy \\ &= \int_0^{2\pi} 2\,\mathrm{sen}(t)(-3\,\mathrm{sen}(t))+\frac{9}{2}\cos^2(t)(2\cos(t))\,dt \\ &\qquad -\int_0^{2\pi} \mathrm{sen}(t)(-2\,\mathrm{sen}(t))+\frac{1}{2}(4\cos^2(t))\cos(t)\,dt \\ &= \int_0^{2\pi}(-6\,\mathrm{sen}^2(t)+9\cos(t)(1-\mathrm{sen}^2(t))\,dt \\ &\qquad -\int_0^{2\pi}(-2\,\mathrm{sen}^2(t)+2\cos(t)(1-\mathrm{sen}^2(t))\,dt = -6\pi-(-2\pi)=-4\pi\,.\end{aligned}$$

Puntaje Pregunta 4.

- 1 puntos por paramatrizar las curvas γ y γ_1.
- 1 puntos por utilizar el teorema de Green.
- 1 punto por elegir un campo de vectores $F=(P,Q)$ que cumpla con $Q_x-P_y=x-1$.
- 3 puntos por calcular las integrales de línea.