Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Ciencias Económicas y Administrativas

Segundo Semestre 2010

Curso	:	**Probabilidad Estadística**
Sigla	:	**EAS200A**
Pauta	:	**Interrogación 1**
Profesores	:	**Rafael Aguila (Sec 01), Ricardo Olea (Sec 02)**

Problema 1

Una empresa sometió a votación entre todos sus trabajadores un nuevo plan de primas. Se observó que era partidario del plan el 65 % de todos los trabajadores del turno de noche y el 40 % de todas las mujeres. Además, el 50 % de todos los trabajadores estaba en el turno de noche y el 30 % de todos eran mujeres. Por último, el 20 % de todos los trabajadores del turno de noche eran mujeres.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que un empleado seleccionado aleatoriamente sea una mujer partidaria del plan?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que un empleado seleccionado aleatoriamente sea una mujer o un trabajador del turno de noche?

(c) ¿Es el sexo del trabajador independiente de que trabaje o no en el turno de noche?

(d) ¿Cuál es la probabilidad de que una empleada trabaje en el turno de noche?

Solución

Definamos los siguientes eventos:

A: Partidario del nuevo Plan.
M: Empleado Mujer
N: Empleado trabajo en turno de noche.

Del enunciado se tiene la siguiente información:

$$\begin{aligned}
P(A \,|\, N) = 0{,}65 &\to P(\overline{A} \,|\, N) = 0{,}35 \\
P(A \,|\, M) = 0{,}40 &\to P(\overline{A} \,|\, M) = 0{,}60 \\
P(N) = 0{,}50 &\to P(\overline{N}) = 0{,}50 \\
P(M) = 0{,}30 &\to P(\overline{M}) = 0{,}70 \\
P(M \,|\, N) = 0{,}20 &\to P(\overline{M} \,|\, N) = 0{,}80
\end{aligned}$$

(a) La probabilidad solicitada esta dada por

$$\begin{aligned}
P(M \cap A) &= P(A \,|\, M) \cdot P(M) \quad \textbf{[1.0 Ptos.]} \\
&= 0{,}40 \cdot 0{,}30 \\
&= 0{,}12 \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}
\end{aligned}$$

(b) Se pide

$$\begin{aligned}
P(M \cup N) &= P(M) + P(N) - P(M \cap N) \quad \textbf{[0.5 Ptos.]} \\
&= P(M) + P(N) - P(M \,|\, N) \cdot P(N) \quad \textbf{[0.5 Ptos.]} \\
&= 0{,}30 + 0{,}50 - 0{,}20 \cdot 0{,}50 \\
&= 0{,}70 \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}
\end{aligned}$$

(c) Tenemos que

$$P(M \mid N) = 0{,}20 \neq 0{,}30 = P(M)$$

Por lo tanto el sexo no es independiente de trabajar o no en un turno de noche. **[1.5 Ptos.]**

(d) Se pide

$$\begin{aligned} P(N \mid M) &= \frac{P(N \cap M)}{P(M)} \quad \textbf{[0.5 Ptos.]} \\ &= \frac{P(M \mid N) \cdot P(N)}{P(M)} \quad \textbf{[0.5 Ptos.]} \\ &= \frac{0{,}20 \cdot 0{,}50}{0{,}30} \\ &= \frac{1}{3} = 0{,}333333 \quad \textbf{[0.5 Ptos.]} \end{aligned}$$

+ 1 Punto Base

Problema 2

Un lote compuesto por 6 artículos contiene 2 defectuosos. Si dichos artículos se inspeccionan aleatoriamente, extrayendo uno a uno y sin reposición hasta encontrar los dos artículos defectuosos. Determine el valor esperado y varianza de la variable aleatoria X definida como el número de artículos inspeccionados.

Solución

Tenemos que el recorrido (soporte) de la variable aleatoria X es $\Theta_X = \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

Su función de probabilidad está dada por:

$$
\begin{aligned}
P(X = 2) &= \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15} \quad \textbf{[0.5 Ptos.]} \\
P(X = 3) &= 2 \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{15} \quad \textbf{[0.5 Ptos.]} \\
P(X = 4) &= 3 \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{15} \quad \textbf{[0.5 Ptos.]} \\
P(X = 5) &= 4 \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{15} \quad \textbf{[0.5 Ptos.]} \\
P(X = 5) &= 5 \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{5}{15} \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \sum_{x=2}^{x} x \cdot P(X = x) \\
&= 2 \cdot \frac{1}{15} + 3 \cdot \frac{2}{15} + 4 \cdot \frac{3}{15} + 5 \cdot \frac{4}{15} + 6 \cdot \frac{5}{15} \\
&= \frac{70}{15} = 4{,}67 \quad \textbf{[1.5 Ptos.]}
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= \sum_{x=2}^{x} [x - E(X)]^2 \cdot P(X = x) \\
&= (2 - 4{,}67)^2 \cdot \frac{1}{15} + (3 - 4{,}67)^2 \cdot \frac{2}{15} + (4 - 4{,}67)^2 \cdot \frac{3}{15} + (5 - 4{,}67)^2 \cdot \frac{4}{15} + (6 - 4{,}67)^2 \cdot \frac{5}{15} \\
&= \frac{70}{15} = 1{,}022 \quad \textbf{[2.0 Ptos.]}
\end{aligned}
$$

+ 1 Punto Base

Problema 3

Para celebrar el Bicentenario de Chile usted ofreció su casa a amigos y familiares para pasar uno de los cuatro días feriados. Ese día como anfitrión tiene pensado ofrecer una empanada de entrada y por esa razón cuando los invitó aprovecho de preguntar por sus preferencias. De los 6 invitados confirmados (incluyéndolo a usted), 2 manifestaron preferencia por la tradicional empanada de pino, uno prefiere una empanada tipo napolitana y el resto les daba lo mismo. Suponga que el día de la reunión usted encarga 3 empanadas de pino y 3 empanadas napolitanas, pero cuando llega a su casa se da cuenta que la forma en que cerraron las empanadas fue la misma para ambos tipo y solo hay forma de saber de que son, probándolas. ¿Cuál es la probabilidad que la preferencias de todas las personas sean respetadas?

Solución

Sea A el evento en que las preferencias se respetan.

Cada asignación de empanadas es igual mente probable. Necesitamos determinar la cardinalidad de A y Ω.

Para determinar la cardinalidad de A necesitamos que a las tres personas que les da lo mismo el tipo de empanadas les toque una de pino y dos napolitanas, es decir

$$\frac{3!}{1!\cdot 2!} = 3 \quad \textbf{[1.5 Ptos.]}$$

Mientras que las dos empanadas de pino que quedan sean distribuidas entre los dos que prefieren ese tipo, es decir,

$$\binom{2}{2} = \frac{2!}{2!\cdot 0!} = 1 \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

igualmente la napolitana restante se le asigne a la persona que la desea, es decir,

$$\binom{1}{1} = \frac{1!}{1!\cdot 0!} = 1 \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

Por lo tanto

$$\#A = 3\cdot 1\cdot 1 \quad \textbf{[0.3 Ptos.]}$$

Por otra parte, el número de reparticiones posibles está dada por:

$$\#\Omega = \frac{6!}{3!\cdot 3!} = 20 \quad \textbf{[3.0 Ptos.]}$$

Finalmente

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{3}{20} = 0{,}15 \quad \textbf{[0.2 Ptos.]}$$

+ 1 Punto Base