Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
17 de enero de 2012

MAT 1640 - Ecuaciones Diferenciales

Interrogación N° 2

1. *a*) Escriba la ecuación diferencial homogénea de menor orden posible que tenga entre sus soluciones a la función $f(t) = t + \operatorname{sen}(2t)$.

   Solución : Debemos hallar el aniquilador de $f(t)$. Este es

   $$P(D) = D^2 (D^2 + 4) = D^4 + 4D^2.$$

   Luego, la ecuación deseada es

   $$(D^4 + 4D^2)\, y = 0 \qquad \text{o, equivalentemente,} \qquad y^{(iv)} + 4y'' = 0$$

   b) Demuestre que el conjunto de funciones

   $$\left\{ \arctan(x), \ \arctan(2x), \ \arctan\left(\frac{3x}{1-2x^2}\right) \right\}$$

   es *l.d.* y muestre una forma de expresar alguno de sus elementos como combinación lineal de los otros. .

   Respuesta : Denotando por $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ las funciones del enunciado (en el orden en que aparecen) tenemos que

   $$y_1'(x) = \frac{1}{1+x^2}\,; \qquad y_2'(x) = \frac{2}{1+4x^2}\,; \qquad \text{e}$$

   $$\begin{aligned} y_3'(x) &= \frac{1}{1 + \left(\dfrac{9x^2}{(1-2x^2)^2}\right)} \cdot \frac{3\,(1+2x^2)}{(1-2x^2)^2} = \frac{3\,(1+2x^2)}{(1-2x^2)^2 + 9x^2} \\ &= \frac{3\,(1+2x^2)}{(1+4x^2)^2\,(1+x^2)} = y_1'(x) + y_2'(x)\,. \end{aligned}$$

   Y, como $y_1(0) = y_2(0) = y_3(0) = 0$, tenemos que

   $$y_3(x) = y_1(x) + y_2(x) \qquad \text{y por tanto las funciones son } l.d. \quad \square$$

2. Encuentre la solución general de la ecuación

$$x^2y''(x) \; - \; xy'(x) \; + \; 2y(x) \; = \; x$$

si se sabe que $y_1 \; = \; x\cos(\ln(x))$ es solución de la ecuación homogénea asociada.

Respuesta : La solución general es

$$Y(t) \; = \; y_H(t) \; + \; y_P(t),$$

donde y_H es la solución general de la *ecuación homogénea asociada*, $x^2y''(x) \; - \; xy'(x) \; + \; 2y(x) \; = \; 0$ e y_P es cualquier solución particular.

- Para hallar y_H buscamos una segunda solución de la forma $y_2(x) \; = \; v(x)y_1(x)$ (y que sea independiente con la primera)

  Derivando dos veces y exigiendo que y_2 satisfaga la ecuación homogénea llegamos a

  $$0 \; = \; x^2y_2'' \; - \; xy_2' \; + \; 2y_2 \; = \; x^2y_1v'' \; + \; (2x^2y_1' - xy_1)v' \; + \; (x^2y''(x) - xy_1' + 2y_1)v,$$

  donde el último paréntesis es cero pues y_1 es solución.

  De este modo tenemos que

  $$x^2y_1v'' \; + \; (2x^2y_1' - xy_1)v' \; = \; 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{v''}{v'} \; = \; \frac{xy_1 \; - \; 2x^2y_1'}{x^2y_1}$$

  pero, como $y_1 \; = \; x\cos(\ln(x))$ tenemos que $y_1' \; = \; \cos(\ln(x)) \; - \; \operatorname{sen}(\ln(x))$.
  Sustituyendo obtenemos

  $$\frac{v''}{v'} \; = \; \frac{2}{x}\tan(\ln(x)) \; - \; \frac{1}{x}.$$

  Integrando,

  $$\ln v' \; = \; \ln\left(\frac{\sec^2(\ln(x))}{x}\right) \qquad \Rightarrow \qquad v' \; = \; \frac{\sec^2(\ln(x))}{x}.$$

  E integrando de nuevo llegamos finalmente a que

  $$v(x) \; = \; \tan(\ln(x)) \qquad \Rightarrow \qquad y_2(x) \; = \; x\operatorname{sen}(\ln(x))$$

  y por tanto,

  $$y_H(x) \; = \; C_1\,x\cos(\ln(x)) \; + \; C_2\,x\operatorname{sen}(\ln(x)).$$

- Para hallar y_P usamos el *método de variación de parámetros*, para lo cual primero debemos escribir la ecuación en forma normal:

$$y''(x) - \frac{1}{x}\,y'(x) + \frac{2}{x}\,y(x) = \frac{1}{x}.$$

  Entonces,

$$y_p = -y_1(x)\int \frac{y_2(x)}{W}\cdot\frac{1}{x}\,dx + y_2(x)\int \frac{y_1(x)}{W}\cdot\frac{1}{x}\,dx,$$

  donde W es el *wronskiano*,

$$W = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x\cos(\ln(x)) & x\,\mathrm{sen}(\ln(x)) \\ \cos(\ln(x)) - \mathrm{sen}(\ln(x)) & \cos(\ln(x)) + \mathrm{sen}(\ln(x)) \end{vmatrix} = x,$$

  de modo que

$$\begin{aligned} y_p &= -x\cos(\ln(x))\int \mathrm{sen}(\ln(x))\cdot\frac{dx}{x} + x\,\mathrm{sen}(\ln(x))\int \cos(\ln(x))\cdot\frac{dx}{x} \\ &= -x\cos(\ln(x))\,(-\cos(\ln(x))) + x\,\mathrm{sen}(\ln(x))\,\mathrm{sen}(\ln(x)) = x. \end{aligned}$$

Por tanto, la solución general de la ecuación es

$$Y(x) = C_1\,x\cos(\ln(x)) + C_2\,x\,\mathrm{sen}(\ln(x)) + x \quad \square$$

3. Una *peso* de 5 libras se conecta a un resorte que cuelga del techo haciendo que se estire 1 pie para quedar en reposo. Luego se saca el peso de 5 libras y se lo reemplaza por uno de 8 libras. En $t = 0$, el peso se suelta desde un punto que está a 1/2 pie bajo la posición de equilibrio con una velocidad dirigida hacia arriba de 3 pie/seg. Si el medio ofrece una resistencia numéricamente igual a la velocidad instantánea, expresar la ecuación del movimiento en la forma $A\,\mathrm{sen}(\omega t + \alpha)$. ¿Vuelve el peso a pasar por la posición de equilibrio? Si así es, indique el tiempo en que pasa por primera vez por ella. *(Use g=32)*.

<u>Solución</u> : La constante k de restauración del resorte satisface $5\,\mathrm{lbs} = k \cdot 1$ pie, de modo que $k = 5$.

La constante de amortiguación es, de acuerdo al enunciado, $c = 1$

El movimiento es, pues, gobernado por el P.V.I.

$$\frac{8}{32}\,x'' + x' + 5x = 0; \qquad x(0) = \frac{1}{2}; \qquad x'(0) = -3$$

o, equivalentemente,

$$x'' + 4x' + 20x = 0; \qquad x(0) = \frac{1}{2}; \qquad x'(0) = -3.$$

Siendo las raíces de la ecuación característica $-2 \pm 4i$, la solución general de la ecuación asociada es

$$x(t) = e^{-2t}(\,C_1\cos(4t) + C_2\,\mathrm{sen}(4t)\,).$$

Las condiciones iniciales implican que $C_1 = 1/2$; $C_2 = -1/2$, de modo que

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{e^{-2t}}{2}\,(\,\cos(4t) - \mathrm{sen}(4t)\,) \\ &= \frac{e^{-2t}}{\sqrt{2}}\,(\,\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(4t) - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{sen}(4t)\,) \\ &= \frac{e^{-2t}}{\sqrt{2}}\,(\,\mathrm{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)\cos(4t) + \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\mathrm{sen}(4t)\,) \\ &= \frac{e^{-2t}}{\sqrt{2}}\,\mathrm{sen}\left(4t + \frac{3\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

Siendo el movimiento subamortiguado, la masa vuelva a pasar infinitas veces por el origen. La primera de ellas ocurre cuando

$$4t + \frac{3\pi}{4} = \pi \qquad \Rightarrow \qquad t = \frac{\pi}{16}\ \text{segundos}$$

4. Usando transformadas de Laplace resuelva los siguientes problemas:

a) $y'' + 4y = g(t); \qquad y(0) = y'(0) = 0,$ donde

$$g(t) = \begin{cases} 0 & 0 \le t < 5 \\ (t-5)/5 & 5 \le t < 10 \\ 1 & t \ge 10 \end{cases}$$

<u>Solución</u> : Escribimos

$$g(t) = \frac{1}{5}\left[u_5(t)\,(t-5) - u_{10}(t)\,(t-10)\right]$$

Luego,aplicando Transformada de Laplace y usando las condiciones iniciales tenemos que

$$(s^2+4)\,\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = \frac{e^{-5s} - e^{-10s}}{5s^2} \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{L}\{y(t)\}(s) = \frac{1}{5}\left(e^{-5s} - e^{-10s}\right)\frac{1}{s\,(s^2+4)}\,.$$

Por fracciones parciales,

$$\frac{1}{s\,(s^2+4)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+4}\right) = \frac{1}{4}\,\mathcal{L}\left\{\underbrace{t + \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}(2t)}_{h(t)}\right\}(s)$$

Y la solución es, pues,

$$y(t) = \frac{1}{5}\left[u_5(t)\,h(t-5) - u_{10}(t)\,h(t-10)\right]$$

b) $2y'' + y' + 2y = \delta(t-5); \qquad y(0) = y'(0) = 0$, donde $\delta(t)$ denota el *delta de Dirac.*

Solución : Aplicamos Transformada de Laplace y usamos las condiciones iniciales para obtener

$$(2s^2+s+2)\,\mathcal{L}\{y(t)\}(s) \;=\; e^{-5s} \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{L}\{y(t)\}(s) \;=\; e^{-5s}\,\frac{1}{2s^2+s+2}\,.$$

Completando cuadrados,

$$\mathcal{L}\{y(t)\}(s) \;=\; \frac{e^{-5s}}{2}\cdot\frac{1}{\left(s+\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{16}}\,.$$

Tenemos que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s+\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{16}}\right\} \;=\; \frac{4}{\sqrt{15}}\,e^{-t/4}\sin\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\,t\right)$$

y por tanto,

$$y(t) \;=\; \frac{2}{\sqrt{15}}\,u_5(t)\,e^{-t/4}\sin\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\,(t-5)\right)$$