

MAT1610 – CÁLCULO 1  
Interrogación 3

- (1) (a) Calcule el área de la región  $\mathcal{R}$  delimitada por las curvas  $y = x^2 \ln x$  e  $y = 2 \ln x$ .
- (b) Determine el volumen del sólido obtenido por rotación de la región  $\mathcal{R}$  alrededor de la recta  $x = -1$ .

**Solución.**

- (a) Para determinar la región delimitada por las curvas dadas, determinamos los puntos de intersección de estas. Las soluciones de la ecuación

$$x^2 \ln x = 2 \ln x,$$

son  $x = 1$  y  $x = \sqrt{2}$ . De hecho el área de la región es

$$A = \int_1^{\sqrt{2}} (2 - x^2) \ln x \, dx.$$

Por integración por partes, tenemos

$$\begin{aligned} A &= \left[ \left( 2x - \frac{x^3}{3} \right) \ln x \right]_1^{\sqrt{2}} - \int_1^{\sqrt{2}} \left( 2 - \frac{x^2}{3} \right) dx \\ &= \left[ \left( 2x - \frac{x^3}{3} \right) \ln x \right]_1^{\sqrt{2}} - \left[ 2x - \frac{x^3}{9} \right]_1^{\sqrt{2}} \\ &= \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{2}}{3} \ln 2 - \frac{16}{9} \sqrt{2} + \frac{17}{9}. \end{aligned}$$

**Puntaje.**

- 1 punto por establecer la integral que corresponde al área.
- 1 punto por la integración.
- 1 punto por calcular el valor.

- (b) El volumen del sólido es

$$V = \int_1^{\sqrt{2}} 2\pi(x+1)(2-x^2) \ln x \, dx$$

**Puntaje.**

- 3 puntos para expresar correctamente el volumen.

- (2) (a) Calcule la integral  $\int_1^3 x f''(x) dx$  sabiendo que  $f(1) = 2$ ,  $f(3) = 5$ ,  $f'(1) = 3$ ,  $f'(3) = 9$  y que la función  $f''$  es continua.
- (b) Evalúe  $\int \cos(\ln x) dx$ .

**Solución.**

- (a) Notamos que al hacer una integración por partes, se obtiene

$$\begin{aligned} \int_1^3 x f''(x) dx &= [x f'(x)]_1^3 - \int_1^3 f'(x) dx \\ &= [x f'(x)]_1^3 - [f(x)]_1^3 \\ &= 3f'(3) - f'(1) - f(3) + f(1) \\ &= 21. \end{aligned}$$

**Puntaje.**

- 2 punto por establecer correctamente la integración por partes.
- 1 por calcular

- (b) Sea  $u = \ln x$ . Entonces  $du = \frac{dx}{x}$ , lo que equivale a  $dx = e^u du$ . En este caso obtenemos

$$\cos(\ln x) dx = \int e^u \cos u du.$$

Para calcular esta nueva integral hacemos una integración por partes tal que

$$\int e^u \cos u du = e^u \sin u - \int e^u \sin u du,$$

y para calcular la última integral hacemos una integración por partes nuevamente y obtenemos

$$\int e^u \cos u du = e^u \sin u + e^u \cos u - \int e^u \cos u du,$$

reordenando y despejando, llegamos a

$$\int e^u \cos u du = \frac{1}{2} e^u (\sin u + \cos u) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Volviendo a la variable inicial tenemos que

$$\int \cos(\ln x) dx = \frac{x}{2} (\sin(\ln x) + \cos(\ln x)) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

**Puntaje.**

- 1 punto por plantear las dos integraciones por partes.
- 1 punto por resolver despejando al integral.
- 1 punto por calcular correctamente la integral. Descontar 0.5 si olvida la constante  $C$ .

(3) Calcule

(a)

$$\int \frac{6}{(x+3)(x^2+4)} dx.$$

(b)

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^4(x) \sec^4(x) dx.$$

**Solución.**

(a) Por decomposición en fracciones parciales, tenemos

$$\frac{1}{(x+3)(x^2+4)} = \frac{1}{13(x+3)} + \frac{-x+3}{13(x^2+4)}.$$

Luego

$$\int \frac{1}{(x+3)(x^2+4)} dx = \frac{1}{13} \int \frac{1}{x+3} dx - \frac{1}{13} \int \frac{x}{x^2+4} dx + \frac{1}{13} \int \frac{1}{x^2+4} dx.$$

Calculando cada una de las integrales, obtenemos

$$\int \frac{1}{(x+3)(x^2+4)} dx = \frac{1}{13} \ln|x+3| - \frac{1}{26} \ln(x^2+4) + \frac{1}{26} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

**Puntaje.**

- 1 punto por hacer la decomposición en fracciones parciales.
- 0.5 punto por la integración de  $\int \frac{dx}{x+3}$ .
- 0.5 punto por la integración de  $\int \frac{x}{x^2+4} dx$ .
- 1 punto por la integración de  $\int \frac{dx}{x^2+4}$ .
- Descontar 0.5 punto si olvida la constante  $C$ .

(b) Consideramos la sustitución  $u = \tan x$  para obtener

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^4(x) \sec^4(x) dx = \int_0^{\sqrt{3}} u^4(u^2+1) du = \frac{198}{35}.$$

**Puntaje.**

- 1 punto por hacer la sustitución adecuada.
- 1 punto por determinar la integral en términos de la sustitución (descontar 0.5 si hace mal el cambio de límites de integración).
- 1 punto por calcular el valor.

(4) (a) Calcule

$$\int \frac{1}{x^2 \sqrt{3-x^2}} dx.$$

(b) Demuestre que para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x) dx.$$

**Solución.**

(a) Usando la sustitución  $x = \sqrt{3} \sin \theta$  para  $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  tenemos que  $dx = \sqrt{3} \cos \theta d\theta$ . Luego

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{3-x^2}} = \int \frac{\sqrt{3} \cos \theta d\theta}{3 \sin^2 \theta \sqrt{3} \cos \theta} = \frac{1}{3} \int \frac{d\theta}{\sin^2 \theta} = \frac{1}{3} \cot \theta + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Como  $x = \sqrt{3} \sin \theta$ , entonces  $\cot \theta = \frac{\sqrt{3-x^2}}{x}$  y finalmente,

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{3-x^2}} = -\frac{\sqrt{3-x^2}}{13x} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

**Puntaje.**

- 1 Punto por la sustitución.
- 1 punto por el calculo de  $\int \frac{d\theta}{\sin^2 \theta}$ .
- 1 punto por el resultado final.

(b) Por integración por partes

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx = [-\cos x \sin^{(n-1)}(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x) \cos^2 x dx,$$

y como  $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$  entonces tenemos

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{(n-2)}(x) dx - (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx,$$

o sea

$$n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{(n-2)}(x) dx,$$

y se obtiene que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x) dx.$$

**Puntaje.**

- 1 punto por la integración por partes.
- 1 punto por despejar de manera correcta la integral pedida.
- 1 punto par evaluación correcta de los bodes de integración.
- Se acepta tambien soluciones otras que por integración por partes.