Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Primer semestre de 2015

Pauta Interrogación 3
MAT1630 Cálculo 3.

1. a) Usando integrales triples, determine el volumen del sólido que se encuentra sobre el plano XY, dentro de la esfera $x^2+y^2+z^2=4$ y bajo el cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

   b) Considere la integral
$$\int_0^1\left[\int_{\sqrt{x}}^1\left[\int_0^{1-y} f(x,y,z)dz\right]dy\right]dx,$$
   donde $f:\mathbb{R}^3\mapsto\mathbb{R}$ es continua. Determine el volumen del dominio de integración y plantee la integral en la forma
$$\int\left[\int\left[\int f(x,y,z)dy\right]dx\right]dz.$$

   Solución. a): Usando coordenadas esféricas
$$x=\rho\operatorname{sen}(\phi)\cos(\theta),\quad y=\rho\sin(\phi)\operatorname{sen}(\theta),\quad z=\rho\operatorname{sen}(\phi),$$
   el dominio queda descrito por
$$\phi\in[\pi/4,\pi/2],\quad \theta\in[0,2\pi],\quad \rho\in[0,2].$$
   Ya sea recordando lo visto en clases o haciendo el cálculo correspondiente, el Jacobiano de la transformación es $\rho^2\operatorname{sen}\phi$, por lo que la integral a calcular es
$$\int_0^{2\pi}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^2\rho^2\operatorname{sen}(\phi)d\rho d\phi d\theta$$
   que, facilmente se ve que es $\frac{8\pi\sqrt{2}}{3}$.
   b) El volumen del dominio se obtiene haciendo $f\equiv 1$. Encontramos que el volumen es
$$\int_0^1\left[\int_{\sqrt{x}}^1\left[\int_0^{1-y}dz\right]dy\right]dx.$$
   La integral arriba es igual a $1/12$.
   Como la función es continua, podemos usar Fubini para hacer el cambio en los límites de

integración. Primero, notamos que el plano $z = 1-y$ y la superficie $y = \sqrt{x}$ se intersecan en una curva que puede ser parametrizada por $(x, 0, 1-\sqrt{x})$, que proyectada sobre el plano XZ da $z = 1-\sqrt{x}$ o $x = (1-z)^2$. De manera que cuando $z \in [0,1]$ está fijo, x varia entre 0 y $(1-z)^2$. Finalmente, para z, x fijos y se mueve entre $\sqrt{x}$ e $1-z$. La integral queda

$$\int_0^1 \left[\int_0^{(1-z)^2} \left[\int_{\sqrt{x}}^{1-z} f(x,y,z)dy \right] dx \right] dz.$$

$\square$

2. a) Calcule

$$\int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

con $\vec{F}(x,y,z) = (y-z, z-x, x-y)$ y $\vec{r}(t) = (a\cos(t), b\,\mathrm{sen}(t), bt), t \in [0, 2\pi]$ donde a y b son constantes positivas.

b) Sea $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ una función de clase C^1 tal que

$$\nabla f(x,y,z) = (2xyz\exp(x^2), z\exp(x^2), y\exp(x^2))$$

y $f(0,0,0) = 5$. Encuentre f.

Solución. a) Tenemos que $\frac{d\vec{r}}{dt}(t) = (-a\,\mathrm{sen}(t), b\cos(t), b)$, por lo tanto

$$\int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} -ab\,\mathrm{sen}^2(t) + abt\,\mathrm{sen}(t) + b^2 t\cos(t) - ab\cos^2(t) + ab\cos(t) - b^2\,\mathrm{sen}(t)dt$$

$$= \int_0^{2\pi} -ab + abt\,\mathrm{sen}(t) + b^2 t\cos(t) + ab\cos(t) - b^2\,\mathrm{sen}(t)dt$$

$$= -2\pi ab + ab(-t\cos(t) - \mathrm{sen}(t))|_0^{2\pi} + b^2(t\,\mathrm{sen}(t) + \cos(t))|_0^{2\pi} = -4\pi ab.$$

b) Integrando la componente z de ∇f con respecto a z obtenemos que $f(x,y,z) = yz\exp(x^2) + g(x,y)$. Derivando nuestra expresión para f con respecto a y e igualando a la componente y de ∇f obtenemos $\frac{\partial g}{\partial y} \equiv 0$, por lo tanto g depende solo de x, es decir, nuestra expresión es de la forma $f(x,y,z) = yz\exp(x^2) + g(x)$. Nuevamente, derivando con respecto a x e igualando a la componente x de ∇f encontramos que g es constante. Ocupando que $f(0,0,0) = 5$ encontramos $g \equiv 5$ y $f(x,y,z) = yz\exp(x^2) + 5$.

Una solución alternativa : Sea $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Sea $\sigma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ una curva de clase C^1 que une $(0,0,0)$ con (x,y,z). Se sabe que la integral

$$\int_\sigma \nabla f ds$$

es independiente de la elección de la curva σ y vale

$$\int_\sigma \nabla f ds = f(\sigma(1)) - f(\sigma(0)).$$

Podemos considerar $\sigma(t) = (tx, ty, tz)$, $t \in [0,1]$ (recta que une los puntos $(0,0,0)$ con (x,y,z)), entonces

$$\int_\sigma \nabla f ds = f(\sigma(1)) - f(\sigma(0)) = f(x,y,z) - f(0,0,0) = f(x,y,z) - 5,$$

y por lo tanto

$$f(x,y,z) = \int_\sigma \nabla f ds + 5.$$

La integral

$$\begin{aligned} \int_\sigma \nabla f ds &= \int_0^1 \nabla f(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) dt \\ &= \int_0^1 (2t^3 xyz e^{(tx)^2}, tze^{(tx)^2}, tye^{(tx)^2}) \cdot (x,y,z) dt \\ &= \int_0^1 (2t^3 x^2 yz e^{(tx)^2} + 2tyze^{(tx)^2}) dt. \end{aligned} \tag{1}$$

Debemos considerar dos casos, $x = 0$, $x \neq 0$.

Si $x = 0$, entonces (1) queda

$$\int_\sigma \nabla f ds = \int_0^1 2tyz dt = yz \tag{2}$$

y por lo tanto $f(0,y,z) = yz + 5$.

Si $x \neq 0$, entonces (1) queda

$$\begin{aligned} \int_\sigma \nabla f ds &= \int_0^1 (2t^3 x^2 yz e^{(tx)^2} + 2tyze^{(tx)^2}) dt \\ &= \frac{yz}{x^2} \int_0^1 (tx)^2 e^{(tx)^2} 2x^2 t dt + \frac{yz}{x^2} \int_0^1 e^{(tx)^2} (2x^2 t) dt \\ &= \frac{yz}{x^2} \int_0^{x^2} u e^u du + \frac{yz}{x^2} \int_0^{x^2} e^u du \quad (u = (tx)^2) \\ &= \frac{yz}{x^2} \left(x^2 e^{x^2} - \int_0^{x^2} e^u du \right) + \frac{yz}{x^2} \int_0^{x^2} e^u du \\ &= yze^{x^2} \end{aligned} \tag{3}$$

y por lo tanto $f(x,y,z) = yze^{x^2} + 5$. Se concluye entonces de (2) y (3) que para todo (x,y,z)

$$f(x,y,z) = yze^{x^2} + 5.$$

$\square$

3. Calcule

$$\int_{\vec{r}} \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2+y^2},$$

donde $\vec{r}(t) = (t, 1-t^2), t \in [-1,1]$.

Solución. Denotando $P(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}$ y $Q(x,y) = -\frac{x-y}{x^2+y^2}$ encontramos que

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{para } (x,y) \neq (0,0),$$

por lo tanto $\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 0$ para todo $(x,y) \neq (0,0)$. Usando el Teorema de Green vemos que

$$\int_{\vec{r}} \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2+y^2} = -\int_{\vec{\gamma}_1} \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2+y^2}$$

con

$$\vec{\gamma}_1 = (\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta)), \quad \theta \in [0, \pi],$$

o alternativamente

$$\int_{\vec{r}} \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2+y^2} - \int_{\vec{\gamma}_2} \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2+y^2} + \int_{\vec{\gamma}_3} \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2+y^2} = 0$$

con

$$\vec{\gamma}_2 = (\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta)), \quad \theta \in [\pi, 2\pi], \qquad \vec{\gamma}_3 = (\frac{1}{2}\cos(\theta), \frac{1}{2}\operatorname{sen}(\theta)), \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Por otro lado

$$\int_{\vec{\gamma}_1} \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2+y^2} = -\int_{\pi}^{2\pi} dt = -\pi,$$

o alternativamente,

$$\int_{\vec{\gamma}_2} \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2+y^2} = -\int_{\pi}^{2\pi} dt = -\pi,$$

y similarmente

$$\int_{\vec{\gamma}_3} \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2+y^2} = -2\pi,$$

por lo que encontramos que

$$\int_{\vec{r}} \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2+y^2} = \pi$$

$\square$

4. a) Determine el área de la superficie $z = xy$ que se encuentra dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

b) Determine el área de la superficie dada por $\phi(u, v) = (u^2, uv, v^2/2)$ con $u \in [0, 1]$ y $v \in [0, 2]$.

Solución. a) Usando la parametrización

$$x = r\cos(\theta), \quad y = r\operatorname{sen}(\theta), \quad z = r^2\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta)$$

el dominio de integración queda $r \in [0, 1], \theta \in [0, 2\pi]$. Derivando la parametrización con respecto a r y θ obtenemos

$$T_r = (\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta), 2r\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta)),$$
$$T_\theta = (-r\operatorname{sen}(\theta), r\cos(\theta), r^2(\cos^2(\theta) - \operatorname{sen}^2(\theta))).$$

Después del álgebra tenemos que $||T_r \times T_\theta|| = r\sqrt{1 + r^2}$. El área de la superficie es

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 r\sqrt{1 + r^2}dr = 2\pi\int_0^1 r\sqrt{1 + r^2}dr = \frac{2\pi}{3}(2\sqrt{2} - 1).$$

b) Derivando la parametrización con respecto a u y v encontramos

$$T_u = (2u, v, 0), \quad T_v = (0, u, v),$$

por lo que

$$||T_u \times T_v|| = \sqrt{(4u^2 + v^2)(u^2 + v^2) - u^2v^2} = 2u^2 + v^2.$$

El área de la superficie es

$$\int_0^2\int_0^1 2u^2 + v^2dudv = 4$$

□