



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TAV 2024

Interrogación 3 MAT1640 PAUTA

1. Encuentre los valores propios y las funciones propias de

$$y'' + \lambda y = 0 \quad , \quad y(-\pi) = y(\pi) \quad , \quad y'(-\pi) = y'(\pi).$$

Una solución:

La ecuación característica es $m^2 + \lambda = 0$ y tenemos tres casos que considerar:

Caso $\lambda < 0$. Escribiendo $\alpha = \sqrt{-\lambda}$ tenemos que la solución general es

$$y(t) = c_1 e^{\alpha t} + c_2 e^{-\alpha t}$$

y las condiciones de borde imponen

$$\begin{cases} c_1 e^{\alpha\pi} + c_2 e^{-\alpha\pi} = c_1 e^{-\alpha\pi} + c_2 e^{\alpha\pi} \\ \alpha c_1 e^{\alpha\pi} - \alpha c_2 e^{-\alpha\pi} = \alpha c_1 e^{-\alpha\pi} - \alpha c_2 e^{\alpha\pi} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (c_1 - c_2) e^{\alpha\pi} = (c_1 - c_2) e^{-\alpha\pi} \\ (c_1 + c_2) e^{\alpha\pi} = (c_1 + c_2) e^{-\alpha\pi} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 - c_2 = 0 \\ c_1 + c_2 = 0 \end{cases}$$

de donde se concluye $c_1 = 0 = c_2$ y no hay solución no trivial.

Caso $\lambda = 0$. La solución general es

$$y(t) = c_1 + c_2 t$$

y las condiciones de borde imponen

$$\begin{cases} c_1 + c_2 \pi = c_1 - c_2 \pi \\ c_2 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = -c_2 \\ c_2 = c_2 \end{cases}$$

de donde $c_2 = 0$ y c_1 es libre. Luego, tenemos las soluciones no triviales $y(t) = c_1$, $c_1 \neq 0$. Es decir, $\lambda = 0$ es valor propio con función propia $y(t) = 1$.

Caso $\lambda > 0$. Escribiendo $\alpha = \sqrt{\lambda}$ tenemos que la solución general es

$$y(t) = c_1 \sin(\alpha t) + c_2 \cos(\alpha t)$$

y las condiciones de borde imponen

$$\begin{cases} c_1 \sin(\alpha\pi) + c_2 \cos(\alpha\pi) = -c_1 \sin(\alpha\pi) + c_2 \cos(\alpha\pi) \\ c_1 \alpha \cos(\alpha\pi) - c_2 \alpha \sin(\alpha\pi) = c_1 \alpha \cos(\alpha\pi) + c_2 \alpha \sin(\alpha\pi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2c_1 \sin(\alpha\pi) = 0 \\ 2c_2 \alpha \sin(\alpha\pi) = 0 \end{cases}$$

de donde se concluye que existen soluciones no triviales si $\alpha = k$ con k entero no cero, y que estas soluciones son combinaciones lineales de $\sin(kt)$ y $\cos(kt)$.

Resumiendo, los valores propios son $\lambda = k^2$, $k = 0, 1, 2, \dots$ y las funciones propias son generadas por $\{1\}$ y $\{\cos(kt), \sin(kt)\}$.

Asignación de puntaje:

- Identificar los tres casos: **0,5 puntos**.
- Identificar que no hay soluciones no triviales si $\lambda < 0$: **0,5 puntos**.
- Identificar que $\lambda = 0$ es valor propio: **1 punto**.
- Identificar funciones propias generadas por constante: **1 punto**.
- Identificar que $\lambda = k^2$ son valores propios: **1 punto**.
- Identificar funciones propias generadas por $\sin(kt)$: **1 punto**.
- Identificar funciones propias generadas por $\cos(kt)$: **1 punto**.

*Asignación de puntaje parcial: para cada hito podrá asignarse puntaje parcial, en múltiplos de **0,5 puntos**, si el hito se alcanza parcialmente o con errores. Si un hito se logra con errores, de modo que estos errores cambian las respuestas esperadas para los siguientes hitos, estos hitos siguientes pueden tener puntaje completo asignado siempre y cuando el desarrollo de la respuesta sea en lo esencial igual al esperado.*

2. Suponga una partícula de masa 1 se desliza, producto de la fuerza de gravedad, a lo largo de un cable delgado cuya forma está dada por $f(x) = \sin(x)$. Se puede mostrar que la posición $x(t)$ y la velocidad $y(t)$ de la partícula satisfacen

$$\begin{aligned}x' &= y \\y' &= -g \frac{\cos(x)}{1 + \cos^2(x)} - \beta y\end{aligned}$$

donde $g > 0$ es la fuerza de gravedad y $\beta \geq 0$ es un coeficiente de fricción. Encuentre los puntos críticos e indique su estabilidad, cuando $\beta = 0$ y cuando $\beta > 0$.

Una solución:

Un punto crítico debe satisfacer $y = 0$ y $\cos(x) = 0$. Luego los puntos críticos son $(\pi/2 + k\pi, 0)$ con $k \in \mathbb{Z}$.

El Jacobiano es

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -g \frac{-\sin(x) + \sin(x) \cos^2(x)}{(1 + \cos^2(x))^2} & -\beta \end{bmatrix}$$

por lo que

$$J(\pi/2 + k\pi, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ g(-1)^k & -\beta \end{bmatrix}.$$

Esta matriz tiene traza $\tau = -\beta$ y determinante $\Delta = g(-1)^{k+1}$.

Caso $\beta = 0$. En este caso $\tau = 0$ y $\Delta = -g$ cuando k es par, y $\Delta = g$ cuando k es impar. Por lo tanto $(\pi/2 + k\pi, 0)$ es inestable cuando k es par, pero para k impar necesitamos más información. Vemos que

$$\partial_x y = 0 = \partial_y \left(-g \frac{\cos(x)}{1 + \cos^2(x)} \right)$$

por lo que el sistema es Hamiltoniano. Podemos entonces concluir que para k impar el punto crítico $(\pi/2 + k\pi, 0)$ es estable.

Caso $\beta > 0$. Nuevamente $\Delta = -g$ cuando k es par, y $\Delta = g$ cuando k es impar, pero ahora $\tau = -\beta < 0$. Por lo tanto $(\pi/2 + k\pi, 0)$ es inestable cuando k es par y asintóticamente estable para k impar.

Asignación de puntaje:

- Identificar puntos críticos: **0,5 puntos**.
- Calcular el Jacobiano: **0,5 puntos**.
- Evaluar Jacobiano en puntos críticos: **1 punto**.
- Identificar que los puntos son inestables para k par: **1 punto**.
- Identificar que los puntos son estables para k impar y $\beta = 0$: **2 punto**.
- Identificar que los puntos son asintóticamente estables para k impar y β positivo: **1 punto**.

*Asignación de puntaje parcial: para cada hito podrá asignarse puntaje parcial, en múltiplos de **0,5 puntos**, si el hito se alcanza parcialmente o con errores. Si un hito se logra con errores, de modo que estos errores cambian las respuestas esperadas para los siguientes hitos, estos hitos siguientes pueden tener puntaje completo asignado siempre y cuando el desarrollo de la respuesta sea en lo esencial igual al esperado.*

3. Considere una pelota elástica de masa m que se deja caer desde una posición $x = 0$ sobre el piso. La ecuación del movimiento es $x'' = -g$ donde g es la fuerza de gravedad. Este modelo, sin embargo, deja de ser válido al momento t_0 en que la pelota rebota en el suelo. Si asumimos que la colisión es completamente elástica, entonces debemos admitir que el momento $mx'(t) = -mgt$ se revierte completamente en t_0 . Luego, una fórmula para el momento (que incorpora esta colisión) podría ser

$$\rho = \begin{cases} -mgt & , 0 \leq t < t_0 \\ -mg(t - t_0) + mgt_0 & , t_0 \leq t \end{cases} = -mgt + 2mgt_0 U(t - t_0)$$

de donde deducimos que la fuerza es

$$\frac{d\rho}{dt} = -mg + 2mgt_0 \delta_{t_0}$$

y que entonces un modelo plausible que incorpora esta colisión es

$$x'' = -g + 2gt_0 \delta_{t_0} \quad , \quad x(0) = 0 \quad , \quad x'(0) = 0.$$

Encuentre la solución de este PVI. ¿Predice este modelo que la pelota vuelve a su posición inicial?.

Una solución:

Aplicando transformada de Laplace obtenemos

$$s^2 X = g \left(-\frac{1}{s} + 2t_0 e^{-st_0} \right) \Rightarrow X = g \left(-\frac{1}{s^3} + 2t_0 \frac{1}{s^2} e^{-st_0} \right)$$

y entonces

$$x(t) = g \left(-\frac{1}{2} t^2 + 2t_0(t - t_0)U(t - t_0) \right).$$

Para responder la pregunta propuesta, observemos que para $t \geq t_0$

$$x(t) = -\frac{g}{2} (t^2 - 4tt_0 + 4t_0^2) = -\frac{g}{2} (t - 2t_0)^2$$

por lo que la pelota vuelve a su posición inicial $x = 0$ en $t = 2t_0$.

Asignación de puntaje:

- Calcular transformada de segunda derivada: **0,5 puntos**.
- Calcular transformada de constante: **0,5 puntos**.
- Calcular transformada de delta de Dirac: **0,5 puntos**.
- Despejar X correctamente: **0,5 puntos**.
- Identificar transformada inversa de $1/s^3$: **1 punto**.
- Identificar transformada inversa de e^{-st_0}/s^2 : **1,5 puntos**.
- Obtener solución correcta: **0,5 puntos**.
- Responder pregunta correctamente: **1 punto**.

*Asignación de puntaje parcial: para cada hito podrá asignarse puntaje parcial, en múltiplos de **0,5 puntos**, si el hito se alcanza parcialmente o con errores. Si un hito se logra con errores, de modo que estos errores cambian las respuestas esperadas para los siguientes hitos, estos hitos siguientes pueden tener puntaje completo asignado siempre y cuando el desarrollo de la respuesta sea en lo esencial igual al esperado.*

4. Considere el sistema masa/resorte dado por

$$x'' + x' + \omega^2 x = \sin(\alpha t) \quad (*)$$

donde α y ω son positivos.

a) Introduciendo la variable $y = x'$ la ecuación homogénea $x'' + x' + \omega^2 x = 0$ es equivalente al sistema

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -\omega^2 x - y. \end{aligned}$$

Indique la estabilidad del punto crítico $(0, 0)$. A partir de su respuesta: si x_c es una solución del problema homogéneo $x'' + x' + \omega^2 x = 0$, ¿Qué puede decir acerca de $\lim_{t \rightarrow \infty} x_c$?.

b) Usando coeficientes indeterminados, encuentre una solución particular de (*) de la forma $x_p = c_1 \sin(\alpha t) + c_2 \cos(\alpha t)$.

c) Recordando que la amplitud Θ de $c_1 \sin(\alpha t) + c_2 \cos(\alpha t)$ está dada por

$$\Theta = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$$

encuentre una expresión, en términos de α y ω , para la amplitud Θ de la solución encontrada en el inciso anterior.

d) En referencia al inciso anterior, y considerando ω fijo de modo que Θ es función de α , determine (si existe) el valor de $\alpha > 0$ para el cual la amplitud es la mayor posible.

Una solución:

a) La matriz es

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -1 \end{bmatrix}$$

con traza $\tau = -1$ y determinante $\Delta = \omega^2 > 0$. Por lo tanto, el punto crítico es asintóticamente estable. En particular, toda cualquier solución x_c del problema homogéneo debe tener $\lim_{t \rightarrow \infty} x_c = 0$.

b) Calculamos

$$\begin{aligned} x_p' &= c_1 \alpha \cos(\alpha t) - c_2 \alpha \sin(\alpha t) \\ x_p'' &= -c_1 \alpha^2 \sin(\alpha t) - c_2 \alpha^2 \cos(\alpha t) \end{aligned}$$

y al poner esta información en la ecuación y agrupar términos obtenemos el requisito

$$\sin(\alpha t) = \sin(\alpha t) (-c_1 \alpha^2 - c_2 \alpha + c_1 \omega^2) + \cos(\alpha t) (-c_2 \alpha^2 + c_1 \alpha + c_2 \omega^2)$$

de donde

$$\begin{aligned} c_1 (\omega^2 - \alpha^2) - c_2 \alpha &= 1 \\ c_1 \alpha + c_2 (\omega^2 - \alpha^2) &= 0 \end{aligned}$$

y entonces

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{(\omega^2 - \alpha^2)^2 + \alpha^2} \begin{bmatrix} \omega^2 - \alpha^2 & \alpha \\ -\alpha & \omega^2 - \alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{(\omega^2 - \alpha^2)^2 + \alpha^2} \begin{bmatrix} \omega^2 - \alpha^2 \\ -\alpha \end{bmatrix}.$$

Es decir, la solución particular es

$$x_p(t) = \frac{1}{(\omega^2 - \alpha^2)^2 + \alpha^2} ((\omega^2 - \alpha^2) \sin(\alpha t) - \alpha \cos(\alpha t))$$

c) Calculamos

$$\Theta = \sqrt{\frac{(\omega^2 - \alpha^2)^2 + \alpha^2}{\left((\omega^2 - \alpha^2)^2 + \alpha^2\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \alpha^2)^2 + \alpha^2}}$$

d) Derivando obtenemos

$$\Theta'(\alpha) = -\frac{2(\omega^2 - \alpha^2)(-2\alpha) + 2\alpha}{2\left((\omega^2 - \alpha^2)^2 + \alpha^2\right)^{3/2}} = \alpha \frac{2(\omega^2 - \alpha^2) - 1}{\left((\omega^2 - \alpha^2)^2 + \alpha^2\right)^{3/2}}$$

con puntos críticos $\alpha = 0$ y

$$\alpha_* = \sqrt{\omega^2 - \frac{1}{2}}$$

en $[0, \infty)$. Luego, tenemos dos casos. En efecto, si $\omega^2 \leq 1/2$ el único punto crítico es $\alpha = 0$ y por lo tanto no tenemos máximo en el intervalo $(0, \infty)$ (la amplitud es decreciente en este intervalo, y podemos notar que el máximo teórico es $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \Theta = \omega^{-2}$). En cambio, si $\omega^2 > 1/2$ el máximo en el intervalo $(0, \infty)$ se alcanza en $\alpha_* > 0$ y el valor de este máximo es

$$\Theta(\alpha_*) = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 - \frac{1}{4}}}.$$

Asignación de puntaje:

- Determinar que el origen es asintóticamente estable: **1 punto**.
- Indicar que x_c tiende asintóticamente a 0: **0,5 puntos**.
- Calcular derivadas de x_p : **1 puntos**.
- Encontrar ecuaciones para c_1 y c_2 : **1 punto**.
- Determinar los valores de c_1 y c_2 : **1 punto**.
- Encontrar expresión para Θ : **0,5 puntos**.
- Identificar que máximo se obtendría en α_* : **0,5 puntos**.
- Reconocer que se requiere $\omega^2 > 1/2$ para máximo en $(0, \infty)$: **0,5 puntos**.

*Asignación de puntaje parcial: para cada hito podrá asignarse puntaje parcial, en múltiplos de **0,5 puntos**, si el hito se alcanza parcialmente o con errores. Si un hito se logra con errores, de modo que estos errores cambian las respuestas esperadas para los siguientes hitos, estos hitos siguientes pueden tener puntaje completo asignado siempre y cuando el desarrollo de la respuesta sea en lo esencial igual al esperado.*