Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
10 de Abril de 2017

MAT1630 ⋆ Cálculo III

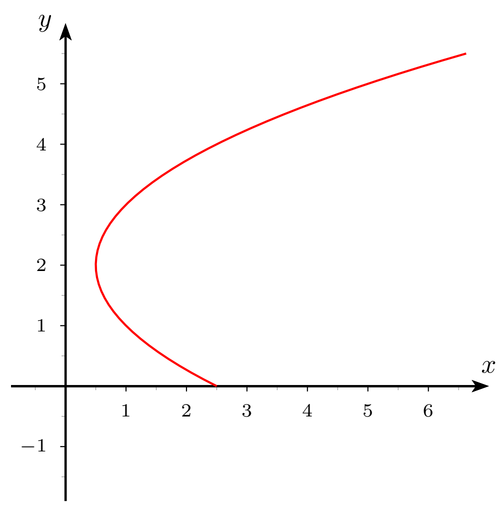
Solución Interrogación 1

1. Sea C la curva de todos los puntos (x, y) en el primer cuadrante de $\mathbb{R}^2$ que satisfacen lo siguiente: [distancia entre (x, y) y el eje y]= [distancia entre (x, y) y el punto $(1, 2)$]. Escriba de manera paramétrica la curva C y bosquéjela.

   Solución. Notemos que

$$\begin{aligned} C &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, [\text{distancia entre}\,(x,y)\,\text{y el eje}\,y] = [\text{distancia entre}\,(x,y)\,\text{y el punto}\,(1,2)]\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x = \frac{y^2 - 4y + 5}{2}\} \end{aligned}$$

   Es una parábola, y su bosquejo está dado por:



   Y una parametrización puede ser

$$x(t) = \frac{t^2 - 4t + 5}{2}, \quad y(t) = t, \quad t \in [0, +\infty[.$$

2. Si C es un curva plana parametrizada por $(2\cos^3(\theta), 2\,\mathrm{sen}^3(\theta)), \theta \in [0, \pi/2]$, encuentre el área de la superficie obtenida al rotar la curva C en torno al eje x.

   Solución. Calculamos la norma del vector tangente a la curva dada,

$$T(\theta) = 2\left(-3\cos(\theta)^2 \sin(\theta), 3\sin(\theta)^2 \cos(\theta)\right).$$
$$\|T(\theta)\| = 6|\sin(\theta)\cos(\theta)|.$$

   Notamos que la distancia de la curva con respecto al eje x corresponde a $2\sin(\theta)^3$.
   Por tanto el área de la superficie de revolución que se genera al rotar la curva con respecto al eje x es

$$A = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin(\theta)^3 6|\sin(\theta)\cos(\theta)|d\theta = 24\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\theta)^4 \cos(\theta) d\theta = 24\pi \int_0^1 x^4 dx = \frac{24\pi}{5}.$$

3. *a*) Considere la curva $C = \{(x, 1/x) : x \geq 1\}$. Sea V el sólido obtenido al rotar el área bajo la curva C en torno al eje x. ¿Es el volumen de este sólido finito o infinito?. Sea S la superficie de revolución obtenida al rotar la curva C en torno al eje x. ¿Es el área de esta superficie finita o infinita?. Justifique su respuesta.

   b) Sea C la curva en polares parametrizada por $r = e^{-\theta}, \theta \geq 0$. Bosqueje la curva. ¿Es el largo de esta curva finito o infinito? Si es infinito demuéstrelo, si es finito calcule el largo de la curva.

Solución:

a) Considerando la curva parametrica dada, con parámetro x, el volumen de el sólido V es:

$$\mathrm{Vol}(V) = \int_C \pi y^2 \; dx = \pi \int_1^\infty \frac{1}{x^2} \; dx = \lim_{R\to\infty} \pi \int_1^R \frac{1}{x^2} \; dx = \lim_{R\to\infty} -\frac{1}{R} + 1 = 1.$$

Por otro lado, el elemento de arco de la curva C es

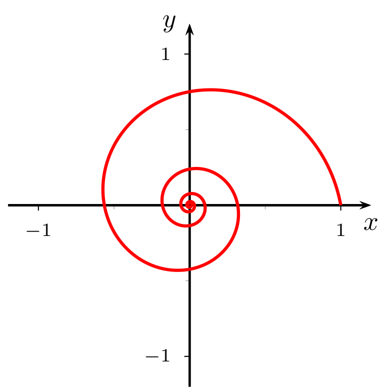
$$ds = \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt = \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} dx.$$

Y el area de la superficie de rotación S es:

$$\begin{aligned} Area(S) &= \int_C 2\pi y \; ds = 2\pi \int_1^\infty \frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}} \; dx \\ &\geq 2\pi \int_1^\infty \frac{1}{x} \; dx = \lim_{R\to\infty} 2\pi \int_1^R \frac{1}{x} \; dx = \lim_{R\to\infty} 2\pi \ln(R) - 0 = \infty \end{aligned}$$

Donde la desigualdad se cumple ya que $\frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}} \geq \frac{1}{x}$ para todo $x > 0$, en particular en todo el intervalo de integración. Por lo tanto el area de S es infinita.

b) La curva C es un espiral que comienza en $(1, 0)$ y al aumentar el ángulo θ el radio disminuye hacia 0.



Para calcular el largo calculamos el elemento de arco que en coordenadas polares es

$$ds = \sqrt{r^2 + r'^2} \; d\theta = \sqrt{e^{-2\theta/2\pi} + \frac{e^{-2\theta/2\pi}}{4\pi^2}} \; d\theta = \sqrt{1 + \frac{1}{4\pi^2}} \; e^{-\theta/2\pi} \; d\theta$$

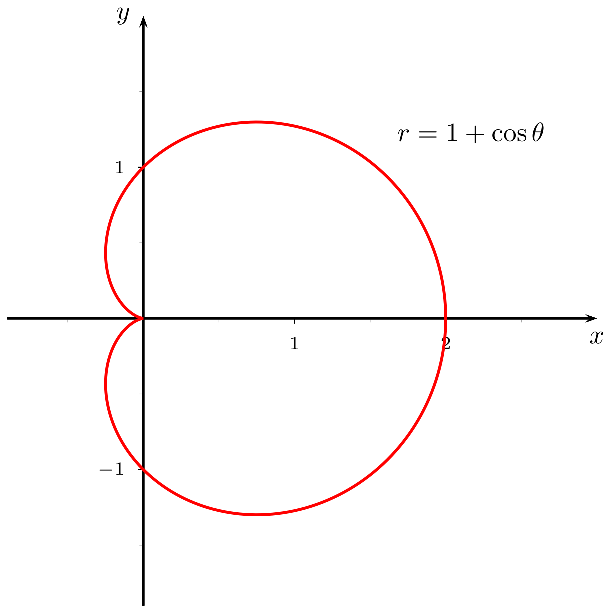
Así el largo de curva es

$$L(C) = \int_C ds = \int_0^\infty \sqrt{1+\frac{1}{4\pi^2}} \; e^{-\theta/2\pi} \; d\theta = \lim_{R\to\infty} \int_0^R \sqrt{1+\frac{1}{4\pi^2}} \; e^{-\theta/2\pi} \; d\theta$$

$$= \lim_{R\to\infty} -\sqrt{1+\frac{1}{4\pi^2}} \; \frac{e^{-R/2\pi}}{2\pi} + \sqrt{1+\frac{1}{4\pi^2}} \; \frac{e^0}{2\pi} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{4\pi^2}}}{2\pi}.$$

4. Bosqueje la curva plana parametrizada en polares como $r = 1 + \cos(\theta), \theta \in [0, 2\pi]$ y calcule el área encerrada por esta curva.

Solución. La curva es una cardiode, la gráfica de la curva se muestra a continuación.



Ahora bien, el área encerrada por la curva es

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r^2 \, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}[1 + \cos\theta]^2 d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta) \, d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(1 + 2\cos\theta + \frac{1}{2}(1 + \cos(2\theta))\right) d\theta \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\theta + 2\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2\theta)\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{3}{2}\pi \, . \end{aligned}$$

5. *a*) (4pts) Encuentre una representación paramétrica de la curva obtenida al intersectar el casquete esférico de radio 2 centrado en el origen, con la superficie parametrizada por $\{(t\cos(t), t\operatorname{sen}(t), z) : t > 0, z > 0\}$.

   b) (2pts) Calcule el vector tangente a la curva de a) en el punto $(0, \pi/2, \sqrt{4 - \pi^2/4})$.

Solución.

a) Los puntos $P(x, y, z)$ de la curva deben satisfacer simutaneamente $x = t\cos(t),\ y = t\operatorname{sen}(t),\ z = z$ con $t > 0,\ z > 0$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.
Una parametrización obvia es $\overrightarrow{r}(t) = \left(t\cos(t),\ t\operatorname{sen}(t),\ \sqrt{4 - t^2}\right)$.
La curva baja sobre el casquete esférico desde $(0, 0, 2)$ hasta $(2\cos(2), 2\operatorname{sen}(2), 0)$, sin incluir los extremos, por lo tanto $t \in (0, 2)$.

b) Para esta parametrización el punto $\left(0, \frac{\pi}{2}, \sqrt{4 - \frac{\pi^2}{4}}\right)$ se obtiene para $t = \frac{\pi}{2}$.

Se tiene que $\overrightarrow{r}'(t) = \left(\cos(t) - t\operatorname{sen}(t), \operatorname{sen}(t) + t\cos(t), -\frac{t}{\sqrt{4 - t^2}}\right)$,

por lo tanto $\overrightarrow{r}'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(-\frac{\pi}{2}, 1, \frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{4 - \frac{\pi^2}{4}}}\right)$ es un vector tangente en el punto dado.

6. Reparametrizar la curva $r(t) = (\cosh(t), \operatorname{sen}(t), \cos(t))$ respecto a la longitud de arco medida desde $(1, 0, 1)$ en la dirección en que se incrementa t.

Solución. Tenemos que

$$r'(t) = (\sinh(t), \cos(t), -\sin(t)), \quad \|r'(t)\| = \sqrt{\sinh^2(t) + 1},$$

como $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$ y $\cosh(t) \geq 0$, obtenemos que $\|r'(t)\| = \cosh(t)$.
Luego, como $r(0) = (1, 0, 1)$, calculamos la función longitud de arco:

$$s(t) = \int_0^t \|r'(u)\| du = \int_0^t \cosh(u) du = \sinh(t).$$

Así,

$$t(s) = \sinh^{-1}(s) = \operatorname{arc}\sinh(s) = \ln(s + \sqrt{s^2 + 1}).$$

Por lo tanto, la parametrización por longitud de arco o la arcoparametrización de la curva es:

$$r(s) = (\cosh(\operatorname{arc}\sinh(s)), \sin(\operatorname{arc}\sinh(s)), \cos(\operatorname{arc}\sinh(s))), \quad s \in [0, \infty).$$