Gustavo Quinderé Saraiva

Ejercícios Para practicar

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
May 24, 2024

Contenidos

1

Por qué Existen las empresas

Ejercicio 1.1 *Uno de los insumos más importantes para la industria papelera es la celulosa. Muchas empresas productoras de papel producen también celulosa (por lo que se dice que están integradas), mientras que otras empresas producen solamente papel y compran la celulosa de proveedores externos. Según la visión de Ronald Coase, qué factores determinan la decisión de las papeleras de integrar o no integrar la producción de celulosa?*

Pauta: La decisión de si realizar una tarea internamente o dejar que sea el mercado quien la realice comparte la misma naturaleza que la decisión de se crear una empresa en vez de transar en el mercado. Así que, los determinantes según Coase tienen que ver con la comparación de los costos de transar en el mercado (costos de buscar socios comerciales, de negociar y escribir contratos así como de supervisarlos) y los costos de gestionar una empresa más grande (por ejemplo, costos de coordinación).

Ejercicio 1.2 *Supón que para producir recolectar naranjas un trabajador del campo puede reclutar a cada día un trabajador distinto a un costo de $10 por día para recolectar naranjas. Pero si contrata un único trabajador por un largo periodo de tiempo, este tendría un costo diario de solo $8. Explique por qué un contrato de largo plazo podría ser menos costoso a una empresa.*

Pauta: Reclutar un trabajador distinto todos los días puede ser más costoso debido:

- El costo de reclutamiento (hacer la entrevista, verificar si el trabajador tiene antecedentes buenos, etc.)
- El costo de entrenamiento.
- El costo de negociar un contrato.
- Los trabajadores tienen aversión al riesgo, por lo que estarían dispuestos a recibir menos si tuvieran la seguridad de que serían contratados por un largo periodo de tiempo, no solo 1 día, etc.

Mientras, si uno recluta en empleado por un largo periodo de tiempo, uno solo incurre en estos costos una única vez.

Ejercicio 1.3 *En Brasil, los impuestos sobre las ventas actualmente funcionan mediante una tasa de impuesto "baja" acumulativa a lo largo del proceso de producción, lo que lleva a que el gobierno recaude más que el valor de la alícuota sobre el precio final del producto. Abajo va un ejemplo:*

- *Una polera tiene una alícuota de 10%.*

- *En la primera etapa el productor del campo vende el algodón para la industria de costura por, digamos, $50, repasando el impuesto al comprador, por lo que el la industria de costura paga $ 50+$5=$55 en total por el insumo.*

- *La industria de costura transforma el algodón en tejido y lo vende para la fábrica de ropas por R$ 60, más el impuesto de 10%: por lo que la fábrica de ropas termina pagando $60+ $6=$66 por el insumo.*

- *La fábrica de ropas vende, entonces, la polera para una tienda, a un precio de $100. Nuevamente, el impuesto está en 10% ($10), por lo que la tienda paga $100+$10=$110 por la polera.*

- *La tienda venda la polera por $200: con el impuesto de de 10%, el consumidor final termina pagando $220.*

Ojo que, aunque la alícuota de impuestos sea de solo 10%, al final el gobierno recolecta más de %10 sobre el precio final del producto. De hecho, en este ejemplo el gobierno ha recolectado $\$5 + \$6 + \$10 + \$20 = \$41$ *en total.*

La reforma tributaria que actualmente tramita en el congreso de Brasil propone la sustitución de estos impuestos en cadena por un IVA, semejante al que hay en Chile. En este mecanismo se implementa una alícuota de impuesto más alta, sin embargo, en cada etapa del proceso de producción el productor recibe un crédito por el impuesto ya pagado en la etapa anterior. Abajo va un ejemplo:

- *Una polera tiene una alícuota de 20%.*

- *En la primera etapa el productor del campo vende el algodón para la industria de costura por, digamos, $50, repasando el impuesto al comprador, por lo que el la industria de costura paga $ 50+$10=$60 en total por el insumo.*

- *La industria de costura transforma el algodón en tejido y lo vende para una fábrica de ropas por R$ 80. Como la alícuota es de 20% el precio final es $80+ $16=$96. Sin embargo, la industria de costura ya ha pagado $10 de impuesto, por lo que mantiene para sí $10 (es decir, en esta etapa el gobierno solo recolecta $6).*

- *La fábrica de ropas vende, entonces, la polera para una tienda, a un precio de $100. Nuevamente, el impuesto está en 20% ($20), por lo que la tienda termina pagando $100+$20=$120 por la polera. Sin embargo, la fábrica ya ha pagado un impuesto de $16, por lo que del total del impuesto recaudado, mantiene* $16 *para sí: es decir, el gobierno solo recolecta $4 en esta fase.*

- *La tienda venda la polera por $300 al consumidor final: con el impuesto de de 20%, el consumidor final paga $60 de impuesto. Pero como la tienda ya ha pagado un impuesto de $20, del total de $60, la tienda mantiene $20 para sí, por lo que en esta fase el gobierno solo recolecta $40.*

En este ejemplo, el gobierno termina recolectando en total $\$10 + \$6 + \$4 + \$40 = \$60$.

a) *(10 puntos) En las clases hemos visto que uno de los factores que determinan el tamaño óptimo de una empresa según la teoría de Ronald Coase son los costos de transacción, el que incluye los costos de tributación. De los mecanismos de impuesto sobre el consumo mencionados anteriormente, ¿en cuál de ellos crees que la industria tendría más incentivos en hacer una integración vertical? Justifica tu respuesta utilizando el par de ejemplos mencionados en el enunciado.* ***Pauta:*** *En el mecanismo de impuesto acumulado, las empresas* *tienen más incentivos en hacer integración vertical, ya que así terminan pagando menos impuestos. De hecho, en el ejemplo anterior, si hubiera un integración vertical (es decir, si todo el proceso productivo ocurriera dentro de la misma empresa) y el precio del producto final sin impuesto fuera lo mismo: $200, la industria terminaría pagando solo $20 de impuesto (10% de 200), mientras que, sin la integración vertical pagaría $41. Mientras, en el sistema IVA, no importa el nivel de integración vertical: ceteris paribus (es decir, suponiendo que el precio del producto final no cambia), la industria siempre termina pagando $60 de impuesto. Además, el sistema de IVA está vulnerable al* ***fraude del operador desaparecido****. Este tipo de evasión fiscal es más difícil de se detectar a la medida que se aumenta el número de transacciones hechas a lo largo de la cadena productiva, por lo que, de cierta forma, el IVA puede incluso incentivar que la producción sea aún menos integrada verticalmente.*

b) *(10 puntos) ¿En cuál de estos mecanismos de tributación crees que las empresas tendrían más incentivos en evadir impuestos a través de la omisión de transacciones efectuadas a lo largo del proceso productivo? Justifica tu respuesta utilizando el par de ejemplos del enunciado.* ***Pauta:*** *En el primero mecanismo las empresas tienen más incentivos en omitir transacciones, para así evitar pagar impuestos. Mirando el primero ejemplo, si cada empresa no declarara ninguna de las transacciones, terminaría no pagando 0 impuestos. Pero en el mecanismo de IVA, si una empresa no declarara una compra de insumos, esta no recibirá créditos fiscales, lo que disminuiría sus ganancias. Por eso, en el sistema IVA las empresas tienen más incentivos en declarar las compras que han efectuado: es cómo si el gobierno diera incentivos a las empresas registrar las transacciones. Si un comprador registra una compra de insumos, pero el vendedor no, el gobierno puede hacer una auditoria para detectar si hubo fraude.*

2

Teoría de Los juegos

2.1 Juegos Simultáneos

Ejercicio 2.1 *Imagina que hay dos firmas trabajando justas para desarrollar una nueva tecnología. Cada firma puede hacer un esfuerzo alto o bajo en el proyecto y el pago final de ellas va a depender del nivel de esfuerzo elegido por cada firma. Sin embargo, esforzarse es costoso, por lo que cada firma tiene incentivos en hacer free riding, es decir, dejar que su compañero haga todo el esfuerzo. Más precisamente, los pagos de cada firma están determinados por la tabla de pagos abajo:*

	Firma 2	
Firma 1	esfuerzo alto	esfuerzo bajo
esfuerzo alto	7,7	5,8
esfuerzo bajo	8,5	6,6

Table 2.1: Un juego en que hay el problema de "*free rider.*

a) *Suponiendo que las firmas son racionales,*[1] *¿qué estrategia crees que van a adoptar las firmas?* ***Pauta:*** *Como en el dilema de los prisioneros, en este juego los agentes tienen una estrategia estrictamente dominante de no cooperar, es decir, de elegir esfuerzo bajo. Por lo tanto, si los agentes son racionales, ambos deben elegir esfuerzo bajo.* ***Obs.:*** *Muchos alumnos dicen que los agentes deben elegir bajo esfuerzo por que esto es el único equilibrio de Nash del juego. Aunque esto esté correcto, el presupuesto de que los agentes eligen un par de estrategias que forma un equilibrio de Nash es más fuerte que el presupuesto de que los agentes son racionales.*

b) *¿Es el resultado de su predicción Eficiente de Pareto?*[2] ***Pauta:*** *No. Both players could be made strictly better off if they were both to choose high effort, so the equilibrium allocation is inefficient.*

Ejercicio 2.2 *Una empresa tiene 3 accionistas. El accionista 1 controla 25% of the las acciones, el accionista 2 controla 35%, y el accionista 3 controla 40%. La empresa tiene oferta de compra de dos otras empresas, las que llamaremos empresas A y B. Hay también una 3a opción, que sería rechazar ambas ofertas. El accionista 1 clasifica estas 3 opciones de mejor*

[1] Acuérdense que un agente es racional si elige la estrategia que maximiza su pago dado sus creencias sobre qué estrategias van a elegir los demás participantes del juego.

[2] Acuérdense que una asignación es Pareto Eficiente si no existe otra asignación factible que haga un jugador mejor sin perjudicar a alguno de los demás.

para peor de la siguiente form: aceptar la oferta de A, Aceptar la oferta de B, rechazar ambas ofertas, lo que llamaremos de opción C. El accionista 2 prefiere B a C a A; y el accionista 3 prefiere C a B a A. La tabla 2.2 abajo sumariza las preferencias de cada accionista.

	Accionistas		
Shareholder	1a opción	2a opción	3a opción
1	A	B	C
2	B	C	A
3	C	B	A

Table 2.2: Preferencias de los accionistas

Supón que un accionista recibe un pago de 2 si su opción preferida es elegida, un pago de 1 si la segunda opción que le agrada más es elegida, y un pago de 0 si se elige la opción que menos le agrada. Los tres accionistas eligen sus votos de manera simultánea. El poder de voto de cada accionista es proporcional a la fracción de acciones que poseen. La alternativa con mayor votación es implementada.

Escriba este juego en formato estratégico (es decir, escriba el juego en forma matricial) y encuentre todos los equilibrios de Nash en estrategias ***puras****.*

Pauta: *The game can be expressed in strategic format as depicted in table 2.3: Underlining*

P3 chooses A

	P2		
P1	**A**	**B**	**C**
A	2,0,0	2,0,0	2,0,0
B	2,0,0	1,2,1	2,0,0
C	2,0,0	2,0,0	0,1,2

P3 chooses B

	P2		
P1	**A**	**B**	**C**
A	2,0,0	1,2,1	1,2,1
B	1,2,1	1,2,1	1,2,1
C	1,2,1	1,2,1	0,1,2

P3 chooses C

	P2		
P1	**A**	**B**	**C**
A	2,0,0	0,1,2	0,1,2
B	0,1,2	1,2,1	0,1,2
C	0,1,2	0,1,2	0,1,2

Table 2.3: Game expressed in strategic format.

the best responses from this game, one can easily check that the unique pure strategy Nash equilibria from this game are: $\{A, A, A\}$, $\{B, B, B\}$, $\{C, C, C\}$, $\{A, C, C\}$ and $\{B, B, C\}$.

Of course, some of these Nash equilibria are not very robust. Consider, for instance, the NE $\{A, A, A\}$. In this strategy profile both shareholders 2 and 3 play a weakly dominated strategy, but this is still a Nash equilibrium and students were supposed to list it in order to get full credit.

Ejercicio 2.3 *Considere un modelo de duopolio de Bertrand con productos diferenciados, donde la demanda de la firma 1 está dada por $q_1(p_1, p_2) = 2 - 2p_1 + p_2$, y la demanda de la firma 2 está dada por $q_2(p_2, p_1) = 3 - 2p_2 + p_1$, donde p_1 es el precio practicado por la firma 1, y p_2 es el precio practicado por la firma 2. Supón que estas firmas no tienen costos variables (o sea, ambas tienen costo marginal constante y igual a cero).*

a) *¿Son los productos de estas firmas complementarios o sustitutos? ¿Por qué?* ***Pauta:*** *They are substitutes, since an increase in the price of one product causes an increase in the demand of the other product.*

b) *Encuentre los precios y las ganancias de equilibrio de este modelo.* ***Pauta:*** *Given p_2 chosen by firm 2, firm 1 will choose p_1 to maximize (notice that since there are no costs, each firm will only maximize its revenue, i.e., price times quantity):*

$$\max_{p_1}(2 - 2p_1 + p_2)p_1$$

Taking the FOC, we get:

$$\begin{aligned}[p_1]: \quad & 2 - 4p_1 + p_2 = 0 \\ & \iff p_1 = \frac{2 + p_2}{4}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Now, given p_1 chosen by firm 1, firm 2 will choose p_2 to maximize

$$\max_{p_2} (3 - 2p_2 + p_1) p_2$$

Taking the FOC, we get:

$$\begin{aligned}[p_2]: \quad & 3 - 4p_2 + p_1 = 0 \\ & \iff p_2 = \frac{3 + p_1}{4}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Plugging 2.2 into 2.1, we get:

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{2 + \frac{3+p_1}{4}}{4}. \\ 4p_1 &= \frac{8 + 3 + p_1}{4} \\ 16p_1 &= 11 + p_1 \\ p_1^* &= \frac{11}{15}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Plugging 2.3 into 2.2, we get

$$\begin{aligned} p_2 &= \frac{3 + \frac{11}{15}}{4} \\ p_2 &= \frac{56}{60} \\ p_2^* &= \frac{14}{15} \end{aligned}$$

Plugging these prices into the objective function from each player, we get that the profits from firm 1 will be given by

$$\pi_1 = \left(2 - 2\frac{11}{15} + \frac{14}{15}\right) \frac{11}{15} = 1.07,$$

and the profit from firm 2 will be given by

$$\pi_2 = \left(3 - 2\frac{14}{15} + \frac{11}{15}\right) \frac{14}{15} = 1.74,$$

so not surprisingly, firm 2 gets a higher profit, since for every pair of prices p_1, p_2 such that $p_1 = p_2$, firm 2 faces a higher demand.

Ejercicio 2.4 *Considere un mercado que tiene dos firmas, F_1 y F_2. Supón que existen dos potenciales compradores, un consumidor "exigente" y un "tacaño", ambos con demanda unitaria (o sea, cada uno desea comprar no más que una unidad del producto vendido por una de las empresas). Las dos firmas ofertan productos verticalmente diferenciados: ambos consumidores prefieren el producto producido por la firma F_1 que el producido por la firma F_2. Sin embargo, el grado en que os consumidores prefieren el producto de F_1 es distinto:*

- *El consumidor tacaño valora el producto 1 en $w > 0$, y el producto 2 en $w - \varepsilon$, donde $\varepsilon > 0$ es un valor muy pequeño.*
- *El consumidor exigente valora el producto 1 en $w' < 2(w - \varepsilon)$, y el producto 2 en 0.*

En otras palabra, el consumidor exigente tiene una preferencia muy fuerte por el producto de alta calidad, mientras que el consumidor tacaño está casi que indiferente entre el producto de calidad alta y baja, así que estaría dispuesto a comprar el producto de baja calidad. Ojo que si las dos firmas ofertaran sus productos al mismo precio, ambos consumidores comprarían de la firma 1.

Se asume que ambas firmas tienen cero costo marginal de producción, y que ambas no tienen restricción de capacidad. Para simplificar el problema, supón que, siempre que un consumidor está exactamente indiferente entre comprar un producto o no, él elige comprarlo.

a) *Supón que las firmas eligen sus precios simultáneamente. Muestra que este juego no tiene equilibrio de Nash en estrategias puras (pista: considere los siguientes casos: Caso 1) $p_2 > w$, Caso 2) $\frac{w'}{2} < p_2 \leq w$ y Caso 3) $p_2 \leq \frac{w'}{2}$).* ***Pauta:***

C1se 1) $p_2 > w$: In this case, firm 2 cannot attract any customer. The best response from F_1 is to set $p_1 = w$ in order to attract both customers and get a payoff of $2w$. But in this case, firm 2 has incentives to deviate and choose $p_2 = w - \varepsilon < w$. So we conclude that we cannot have a NE in which $p_2 > w$.

C2se 2) $\frac{w'}{2} < p_2 \leq w$: In this case, if firm F_1 chooses a price $p_1 = p_2 - \varepsilon$, it captures both customers and earns a profit of $2(p_2 - \varepsilon)$, which is greater than w' the maximum profit it can hope to get if it only tries to attract the high end customer. So F_1's best response is to choose $p_1 = p_2 - \varepsilon$, which yields zero profits to firm F_2. In this case, firm F_2 has incentives to deviate and choose $p_2 = p_1 - \varepsilon$, i.e., it will have incentives to undercut the price from firm F_1 in order to attract the low end customer and earn a positive profit. So we conclude that we cannot have and equilibrium in which $\frac{w'}{2} < p_2 \leq w$.

C3se 3) $p_2 \leq w'/2$: In this case, if F_1 tries to capture both customers, it will get at most $2p_2 \leq 2w'/2 = w'$, whereas if it charged $p_1 = w'$ it could capture the high end customer and get a profit of w'. So firm 1 has incentives to choose $p_1 = w'$ and earn a profit of w'. Given the best response form F_1, firm F_2 has incentives to deviate and choose $p_2 = w - \varepsilon > w'/2$ in order to capture more surplus from the low end customer. So we conclude that we cannot have and equilibrium in which $p_2 \leq w'/2$.

b) ***(IGNORAR ESTA PARTE)*** *Ahora, utilizando la metodología de teoría de juegos cooperativos, encuentra el intervalo de pagos que cada firma puede capturar en una asignación del core, asumiendo que las firmas tienen la opción de aplicar precios distintos a distintos consumidores. ¿ La existencia de la firma F_2 en este mercado afecta el máximo valor que la firma F_1 puede capturar en una asignación del Core? Explica tu respuesta.* ***Pauta:*** *In equilibrium, the following inequalities must hold:*

$$\underbrace{0}_{V(\{F_1\})} \leq \pi_{F_1} \leq \underbrace{(w' + w)}_{V(\{F_1,F_2,C_1,C_2\})} - \underbrace{(w - \varepsilon)}_{V(\{F_1,C_1,C_2\})}$$
$$\iff 0 \leq \pi_{F_1} \leq w' + \varepsilon.$$

and

$$\underbrace{0}_{V(\{F_2\})} \leq \pi_{F_2} \leq \underbrace{(w' + w)}_{V(\{F_1,F_2,C_1,C_2\})} - \underbrace{w' + w}_{V(\{F_2,C_1,C_2\})}$$
$$\iff 0 \leq \pi_{F_1} \leq 0.$$

So in equilibrium firm F_1 can capture a profit of at most $w' + \varepsilon$, whereas firm F_2 is not able to extract any surplus. Even though F_2 captures zero surplus, F_2 does affect the maximum profit that can be captured by firm F_1. Indeed, without F_2, the interval of profits that can be captured by F_1 is given by

$$\underbrace{0}_{V(\{F_1\})} \leq \pi_{F_1} \leq \underbrace{(w' + w)}_{V(\{F_1,C_1,C_2\})} - \underbrace{0}_{V(\{C_1,C_2\})}$$
$$\iff 0 \leq \pi_{F_1} \leq w + w',$$

so that F_1 is able to capture more profits. Intuitively, F_2 causes the market to be contestable: with F_2, firm F_1 cannot set its prices too high, lest it loses its customers to F_2.

c) ***(IGNORAR ESTA PARTE)*** *Ahora imagina que ambas firmas tienen restricción de capacidad. Más precisamente, supón que cada firma no puede producir mas de una unidad del producto final. Encuentra el intervalo de pagos que cada firma puede capturar en una asignación del core. En la presencia de restricción de capacidad, ¿pueden ambas firmas tener ganancias positivas en una asignación del core?* ***Pauta:*** *In equilibrium, the following inequalities must hold:*

$$\underbrace{0}_{V(\{F_1\})} \leq \pi_{F_1} \leq \underbrace{(w' + w - \varepsilon)}_{V(\{F_1,F_2,C_1,C_2\})} - \underbrace{(w - \varepsilon)}_{V(\{F_1,C_1,C_2\})}$$
$$\iff 0 \leq \pi_{F_1} \leq w'.$$

and

$$\underbrace{0}_{V(\{F_2\})} \leq \pi_{F_2} \leq \underbrace{(w' + w - \varepsilon)}_{V(\{F_1,F_2,C_1,C_2\})} - \underbrace{w'}_{V(\{F_2,C_1,C_2\})}$$
$$\iff 0 \leq \pi_{F_1} \leq w - \varepsilon.$$

So in the presence of capacity constraints, both firms can earn positive economic profits.

d) ***(IGNORAR ESTA PARTE)*** *Compare el resultado del ítem anterior con el equilibrio de Nash que se obtiene cuando las firmas simultáneamente eligen sus precios, y los consumidores eligen el producto que les da la mayor utilidad, y cada firma no puede producir más que una unidad del producto final (o sea, utiliza la misma metodología de Teoría de Juegos no cooperativos utilizada en el ítem a), pero ahora supón que las firmas tienen restricción de capacidad). Para contestar esta parte, haga el supuesto de que, siempre que ambos consumidores demandan el producto de una firma, la firma solo va a servir el consumidor exigente. Supón también que, siempre que un consumidor está exactamente indiferente entre comprar de F_1 y F_2, él elige comprar de F_1.* ***Pauta:*** *Using non-cooperative game theory, we can see that firm 1 has a strictly dominant strategy of setting $p_1 = w'$ (notice that firm F_2 cannot hope to capture the high end customer, as she values the product of F_2 at zero). In this case, the best response of firm F_2 is to choose $p_2 = w - \varepsilon$ and extract all the surplus from the cheapskate. So under the non-cooperative Game Theory approach, firms are able to capture all the surplus from customers, as in this case they hold all the bargaining power in negotiations by making "take it or leave-it" offers; whereas under cooperative Game Theory we are somewhat agnostic as to how negotiations take place.*

Ejercicio 2.5 ***(Oligopolio de Cournot)*** *En las clases hemos visto el modelo de Cournot donde con dos firmas. En este ejercicio vamos a extender este modelo para el caso en que pueden existir más de dos firmas en el mercado.*

Imagina que hay $n \geq 2$ firmas en el mercado, cada una tiene el mismo costo marginal $c > 0$. El precio practicado por las firmas se obtiene a través de la función de demanda inversa, $P(Q) = 1 - Q$, donde Q es la cantidad total producida en le mercado. Se denota la cantidad producida por la firma i por q_i.

Entonces, dadas las cantidades producidas por sus rivales, cada firma i va a elegir el q_i que maximiza

$$\max_{q_i}(1 - \sum_{j=1}^{n} q_j)q_i - cq_i.$$

Las firms eligen sus cantidades simultáneamente.

a) Tome la condición de primer orden (CPO) del problema de optimización de cada firma para mostrar que en equilibrio debemos tener $q_i^* = (1 - \sum_{j=1}^{n} q_j^*) - c$ para cada firma $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$. ***Pauta:*** *Taking the FOC for every firm i we get:*

$$(1 - \sum_{j} q_j) - q_i - c = 0. \tag{2.4}$$

Notice that equation 2.4 being satisfied for every firm i is equivalent of saying that the equilibrium quantity produced by each firm $(q_1^*, q_2^*, \cdots, q_n^*)$ must satisfy the following system of equations:

$$\begin{cases} (1 - \sum_j q_j^*) - q_1^* - c = 0 \\ (1 - \sum_j q_j^*) - q_2^* - c = 0 \\ \vdots \\ (1 - \sum_j q_j^*) - q_n^* - c = 0 \end{cases}$$

Rearranging the terms from each of those expressions gives us the desired result.

b) Ahora agregue todas estas CPO's para obtener $\sum_{i=1}^{n} q_i = \frac{n(1-c)}{n+1}$. ***Pauta:*** *If we add all these equations we get:*

$$(\sum_{i=1}^{n} 1 - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_j) - \sum_{i=1}^{n} q_i - \sum_{i=1}^{n} c = 0$$

$$(n - n\sum_{j=1}^{n} q_j) - \sum_{i=1}^{n} q_i - nc = 0$$

$$n(1-c) = (n+1)\sum_{i} q_i$$

$$\sum_{i} q_i = \frac{n(1-c)}{n+1}$$

c) Ahora reemplace $\sum_{j=1}^{n} q_j$ encontrado en el ítem anterior en la CPO de cada firma para obtener la cantidad de equilibrio producida por cada firma. ***Pauta:*** *Replacing this sum* *into 2.4 we get:*

$$\begin{aligned}(1-\frac{n(1-c)}{n+1})-q_i-c=0\\ q_i=\frac{n+1-n+nc-(n-1)c}{n+1}\\ q_i^*=\frac{1-c}{n+1}\end{aligned} \tag{2.5}$$

d) *Ahora encuentra el precio y las ganancias de equilibrio de cada firma.* ***Pauta:*** *Since the equilibrium aggregate quantity is given by*

$$Q^*=n\frac{(1-c)}{n+1},$$

we have that the equilibrium price is given by

$$P^*=1-Q^*=1-\frac{n}{n+1}(1-c).$$

Therefore, the equilibrium profit from each firm is given by

$$\begin{aligned}\pi_j^*&=\left[\left(1-\frac{n}{n+1}(1-c)\right)-c\right]\frac{1-c}{n+1}\\ &=\left[\left(\frac{n+1-n+nc}{n+1}\right)-c\right]\frac{1-c}{n+1}\\ &=\left[\frac{1+nc-c(n+1)}{n+1}\right]\frac{1-c}{n+1}\\ &=\frac{(1-c)^2}{(n+1)^2}.\end{aligned} \tag{2.6}$$

Obs.: Notice that, when $n=2$, we get the same results as we got for the duopoly case.

e) *Encuentre los precios y las ganancias de equilibrio cuando $n\to\infty$.* ***Pauta:*** *By performing comparative statics on the parameter n, the number of firms in the market, you should conclude that, as n increases, profits go down, the aggregate quantity produced goes up and prices go down. In particular, as the number of firms goes to infinity, we have that Q^* converges to $1-c$ and price converges to c (because $\frac{n}{n+1}$ converges to one as n goes to infinity), and profits converge to zero (because the numerator from expression 2.6 stays constant, while the denominator goes to infinity as n converges to infinity).*

So we get the intuitive result that, the more firms there are in the market, the closer the model gets to the perfectly competitive market. Moreover, in the limit, as the number of firms that are in the market goes to infinity, the model generates the same results as a perfectly competitive market.

Ejercicio 2.6 *(50 puntos) Los socios de una pequeña empresa están decidiendo elegir qué computadoras comprar para sus respectivas oficinas. Como cada socio podría, en principio, tener una preferencia distinta por computadoras, ellos deciden dejar a cargo de cada socio elegir las computadoras que más les gustan. Al final, van a repartir los costos de las computadoras igualmente. Para analizar esta situación formalmente, supón que hay n socios y, por simplicidad,* *ellos tienen las mismas preferencias por computadoras. La tabla abajo resume los precios de cada una de las 3 computadoras disponibles y cuánto cada socio evalúa cada computadora. La valoración de una computadora representa el máximo que un socio estaría dispuesto a pagar por una computadora.*

Computadora	**Valor**	**Precio**	**Surplus**
Computadora 1	\$ 21	\$ 14	\$ 7
Computadora 2	\$ 26	\$ 21	\$ 5
Computadora 3	\$ 29	\$ 30	-\$ 1

El "surplus" que aparece en la tercera columna es simplemente la valoración de la computadora menos su precio. Por ejemplo, la computadora 1 tiene un precio de \$14, y cada socio la valora en \$21, por lo que la compra de esta computadora generaría un surplus de $21 - 14 = 7$. *La ganancia de un jugador es igual al valor de la computadora que él elige, menos el monto que tiene que pagar: el gasto total dividido por* n. *Por ejemplo, si hubiera al todo 3 socios, y cada uno eligiera una computadora distinta, las ganancias finales de cada jugador estarían dadas por:*

$$21 - \frac{14 + 21 + 30}{3} = -0.67$$

para el socio que elige la computadora 1,

$$26 - \frac{14 + 21 + 30}{3} = 4.33$$

para el socio que elige la computadora 2 y

$$29 - \frac{14 + 21 + 30}{3} = 7.33$$

para el socio que elige la computadora 3. Como todos pagan la misma cantidad, tenemos que el socio que elige la computadora más cara y de mejor calidad (la computadora 3) terminaría con las mayores ganancias.

a) *(10 puntos) Supón que hay solo 2 socios* ($n = 2$). *¿Qué computadoras van a elegir cada socio, suponiendo que son racionales y eligen sus respectivas computadoras simultáneamente? Muestre su trabajo.* ***Pauta:*** *En este caso, cada socio va a elegir la computadora* $x \in \{1, 2, 3\}$ *que maximiza*

$$\max_{x \in \{1,2,3\}} \{valor(x) - \frac{1}{2}precio(x) - \underbrace{\frac{1}{2}precio(computadora\ elegida\ por\ el\ otro\ jugador)\}}_{constante}$$

Como el último termino de esta expresión es una constante con respeto a x *(es decir, no depende de* x*), la estrategia óptima de un socio no va a depender de lo que hace el otro socio, es decir, podemos ignorar esta constante de nuestra función objetivo. En este caso, cada socio va a elegir la computadora* x *que maximiza*

$$\max_{x}\{valor(x) - \frac{1}{2}precio(x)\}$$

Para $x = 1$, *la expresión arriba es igual a*

$$21 - \frac{1}{2}14 = 14.$$

Para $x = 2$, la expresión arriba es igual a

$$26 - \frac{1}{2}21 = 15.5.$$

Y para $x = 3$, la expresión se convierte en

$$29 - \frac{1}{2}30 = 14.$$

Por eso se puede ver que cada jugador tiene una estrategia estrictamente dominante en elegir la computadora 2, así que, si los jugadores son racionales, todos van a elegir esta estrategia. Ojo que, como todo equilibrio de Nash debe sobrevivir al proceso de eliminación iterada de estrategias estrictamente dominantes, esto es el único EN del juego.

b) *(10 puntos) Supón ahora que hay 4 socios ($n = 4$). ¿Qué computadoras van a elegir los socios, suponiendo que son racionales? Muestre su trabajo.* ***Pauta:*** *En este caso, cada jugador va a elegir la computadora $x \in \{1, 2, 3\}$ que maximiza*

$$\max_x \{valor(x) - \frac{1}{4}precio(x) - \underbrace{\frac{1}{4}(\text{suma de los precios de las demás computadoras})}_{constante}\}$$

Lo que es equivalente a maximizar

$$\max_x \{valor(x) - \frac{1}{4}precio(x)\}.$$

Para $x = 1$, la expresión arriba se convierte en

$$21 - \frac{1}{4}14 = 17.25.$$

Para $x = 2$, tenemos

$$26 - \frac{1}{4}21 = 20.75.$$

Y para $x = 3$, tenemos

$$29 - \frac{1}{4}30 = 21.5.$$

Por lo que es una estrategia estrictamente dominante para cada jugador elegir la computadora 3, así que, si los jugadores son racionales, todos van a elegir esta estrategia. Eso también implica que el único EN consiste en todos los socios elegir la computadora 3.

c) *(10 puntos) ¿Son los perfiles de estrategias obtenidos en los ítems a) y b) Pareto eficientes? Brevemente justifique su respuesta.* ***Pauta:*** *No. En ambos casos, si todos los socios eligieran la computadora 1, todos estarían mejores: obtendrían un pago de \$7 al revés de \$5 (ítem "a") o -\$1 (ítem "b").*

d) *(10 puntos) ¿Qué mecanismo de gestión los socios podrían implementar para generar una asignación más eficiente? Justifique.* ***Pauta:*** *Posibles respuestas:*

- *Los socios podrían determinar que cada uno debe pagar su propia computadora, utilizando la compensación que reciben de la empresa.*
- *Los socios podrían imponer una quota que limitara los gastos máximos por persona. Si una persona quisiera adquirir una computadora que superara la quota, tendría que pagar la diferencia utilizando recursos propios.*

- *Los socios podrían determinar que solo se podría comprar la computadora 1, ya que es la que genera mayor surplus.* ***Obs.: Aunque esta solución funcione en este ejemplo, no sería la solución ideal en la mayoría de las situaciones prácticas, ya que la gente suele tener preferencias heterogéneas por computadoras, por lo que sería más eficiente dejar que algunos compraran computadoras más caras y pagaran la diferencia de precios utilizando recursos propios.***

e) *(10 puntos) A nivel nacional y mundial, se estima que aproximadamente 85% de las empresas familiares no logran pasar a la 3a generación.*[3] *¿Cómo el modelo presentado en este ejercicio podría ayudar a explicar (parcialmente) la baja taja de supervivencia de las empresas familiares?* ***Pauta:*** *Algunas posibles respuestas:*

- *En empresas dirigidas por familias, hay muchas veces disputas entre sus miembros sobre cuántos recursos de la empresa cada uno puede apropiarse, especialmente después de una sucesión mal planteada que no delimita las atribuciones de cada hijo. Al mismo tiempo, estas empresas suelen traer elementos de la relación familiar a la gestión interna de la empresa, lo que resulta muchas veces en la no imposición de límites y control sobre las acciones de los dirigentes. Al final, terminan en una situación semejante a la tragedia de los comunes, donde los agentes agotan un recurso escaso por no internalizar los impactos negativos que su consumo excesivo tiene en los demás. En casos extremos, esto puede resultar en la falencia de la empresa. Mientras, en empresas no familiares, las relaciones suelen ser más impersonales, por lo que los gestores se sienten más cómodos imponiendo límites y exigiendo responsabilidad de los miembros, por lo que probablemente evitarían este mecanismo ineficiente.*
- *En este caso uno puede fácilmente implementar un mecanismo que motiva la cooperación (ver respuesta al ítem anterior). Sin embargo, en empresas familiares, muchas veces los gestores que toman cargo de una empresa por herencia no tienen vocación o motivación para hacer un buen trabajo, por lo que proponen mecanismos ineficientes como el descrito en esta pregunta.*
- *Cuando el sistema de sucesión de la empresa es mal planteado, los herederos de la empresa suelen no tener el entrenamiento adecuado o vocación para administrarla, por lo que eligen extraer el máximo de recursos de la empresa para si mismos, sin llevar en cuenta las externalidades negativas que esto genera a los demás herederos. Por eso, terminan en una situación semejante a la tragedia de los comunes, lo que resulta en una asignación final ineficiente.*

Ejercicio 2.7 *(50 puntos) En la mayoría de los ejemplos vistos en clase, trabajamos en casos donde los agentes tienen solo una variable estratégica (e.j., la empresa debe elegir el precio que maximiza sus ganancias, o los trabajadores deben elegir su nivel de esfuerzo, etc.). Pero en la mayoría de los casos prácticos las empresas deben elegir multiples variables estratégicas, como el precio de cada uno de sus productos, sus respectivos niveles de calidad, la cantidad de anuncios que ponen en la internet, los sueldos de sus empleados, etc. En esta pregunta abordaremos un ejemplo de un caso dónde cada empresa tiene 2 variables estratégicas.*

Imagine un mercado dominado por dos empresas, empresa 1 y empresa 2, las que compiten directamente en la venta de una aplicación de celular. Las empresas van a elegir simultáneamente su precio y esfuerzo en mejorar la calidad de sus respectivas aplicaciones. Sea p_i *y* e_i *el*

[3] https://www.tributariolaboral.cl/610/w3-article-92594.html

precio y esfuerzo, respectivamente, elegido por la empresa i, donde $i \in \{1, 2\}$. Asumimos que la demanda de la empresa 1 como función de (p_1, e_1, p_2, e_2) está dada por

$$q_1(p_1, e_1, p_2, e_2) = 10 - p_1 + \frac{1}{2}p_2 + e_1 - \frac{1}{2}e_2,$$

mientras que la demanda de la empresa 2 como función de (p_1, e_1, p_2, e_2) está dada por

$$q_2(p_1, e_1, p_2, e_2) = 10 - p_2 + \frac{1}{2}p_1 + e_2 - \frac{1}{2}e_1,$$

es decir, las demandas por cada empresa son simétricas.

Como los costos marginales de la venta de apps suelen ser bajos (esto es especialmente verdad cuando los apps no ofrecen servicios online o servicios de asistencia técnica), vamos a suponer que ambas firmas tienen costo marginal cero. El costo de realizar un esfuerzo e_i está dado por e_i^2. Por lo tanto, las ganancias de las empresas 1 y 2 como función de (p_1, e_1, p_2, e_2) están dadas por

$$\pi_1(p_1, e_1, p_2, e_2) = q_1(p_1, e_1, p_2, e_2) \cdot p_1 - e_1^2$$

y

$$\pi_2(p_1, e_1, p_2, e_2) = q_2(p_1, e_1, p_2, e_2) \cdot p_2 - e_2^2,$$

respectivamente.

a) (10 puntos) Toma la condición de primer orden para encontrar el nivel óptimo de p_i y e_i que la empresa $i \in \{1, 2\}$ debe elegir, dado la estrategia adoptada por su rival (es decir, encuentre la función de mejor respuesta de cada empresa). ***Obs.: Como las funciones objetivo de las empresas son simétricas, uno solo necesita hacer los cálculos para una de las empresas. Pero hay que explicitar cuál sería la función de mejor respuesta de las dos empresas.*** ***Pauta:*** *Las empresa 1 va a maximizar*

$$(10 - p_1 + \frac{1}{2}p_2 + e_1 - \frac{1}{2}e_2) \cdot p_1 - e_1^2$$

con respeto a p_1 y e_1, tomando p_2 y e_2 como dados. Tomando la CPO, obtenemos:

$$[p_1]: \quad -2p_1 + 10 + \frac{1}{2}p_2 + e_1 - \frac{1}{2}e_2 = 0$$

y

$$[e_1]: \quad p_1 - 2e_1 = 0.$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, tratando e_2 y p_2 como exógenos, encontramos las funciones de mejor respuesta de la empresa 1:

$$\hat{p_1}(p_2, e_2) = \frac{20 + p_2 - e_2}{3},$$

y

$$\hat{e_1}(p_2, e_2) = \frac{20 + p_2 - e_2}{6}.$$

Dado la simetría del problema de cada empresa, tenemos que las funciones de mejor respuesta de la empresa 2 será análoga (solo hay que cambiar los índices):

$$\hat{p_2}(p_1, e_1) = \frac{20 + p_1 - e_1}{3},$$

y

$$\hat{e_2}(p_1, e_1) = \frac{20 + p_1 - e_1}{6}.$$

b) *(10 puntos) Verifique si las funciones de mejor respuesta obtenidas en el ítem anterior efectivamente corresponden a la estrategia óptima de cada empresa dado la estrategia adoptada por su rival, verificando si se cumplen las condiciones de segundo orden.* ***Obs.: Nuevamente, dado la simetría del problema de cada empresa, uno solo necesita hacer los cálculos para una de las empresas.*** ***Pauta:*** *Tratando p_2 y e_2 como constantes exógenas, podemos ver que la matriz Hessiana de la función objetivo de la firma 1 está dada por*

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix},$$

la que es negativa definida, ya que su menor principal de orden 1 es $D_1 \equiv -2 < 0$, y su menor principal de orden 2 es $D_2 \equiv 4 - 1 = 3 > 0$. Por lo tanto, la función objetivo es cóncava con respeto a p_1 y e_1, por lo que las condiciones de primer orden son suficientes para la optimalidad global. Por simetría, lo mismo se aplica a la firma 2.

c) *(10 puntos) Resuelva el sistema de mejores respuestas obtenido en el ítem anterior para encontrar el Equilibrio de Nash del juego. Muestre su trabajo.* ***Pauta:*** *Para encontrar el EN, debemos resolver el siguiente sistema de ecuaciones:*

$$p_1 = \frac{20 + p_2 - e_2}{3},$$

$$e_1 = \frac{20 + p_2 - e_2}{6},$$

$$p_2 = \frac{20 + p_1 - e_1}{3},$$

$$e_2 = \frac{20 + p_1 - e_1}{6}.$$

En principio puede parecer difícil resolver este sistema, pero si utilizamos el hecho de que $e_i = p_i/2$, podemos resolverlo fácilmente para encontrar los precios y niveles de esfuerzo de equilibrio: $p_1^* = p_2^* = 8$, y $e_1^* = e_2^* = 4$. ***Obs.: un alumno podría argumentar que, dado la simetría del problema, "podemos asumir que en equilibrio debemos tener: $p_1 = p_2 = p$ y $e_1 = e_2 = e$". Esta afirmación está incorrecta, ya que, en principio, podemos tener múltiples equilibrios, algunos de los cuales no son simétricos, incluso cuando la estructura de pagos es simétrica. Entonces, al hacer eso, el alumno estaría encontrando solo el equilibrio simétrico del juego, pero en principio, podrían haber otros equilibrios de Nash no simétricos. Por lo tanto, los alumnos que han resuelto el problema por este método reciben una penalización de 1 punto, ya que este método no descarta la posibilidad de que pueden haber otros EN.***

d) *(10 puntos) Reemplaza los precios y niveles de esfuerzo de equilibrio obtenidos en el ítem anterior en la función objetivo de cada empresa para encontrar las ganancias de equilibrio.* ***Pauta:*** *Reemplazando las estrategias de equilibrio de las empresas en sus respectivas funciones objetivo, podemos ver fácilmente que cada empresa debe obtener una ganancia final de \$48.*

e) *(10 puntos) ¿Es el equilibrio de Nash encontrado Pareto eficiente? Justifique.* ***Pauta:*** *La asignación final* ***no*** *es Pareto eficiente, ya que uno puede encontrar otros pares de estrategias que resultarían en mayores pagos a ambas empresas. Por ejemplo, si ambas empresas eligen un precio igual a 10 y esfuerzo igual a 4, obtendrían un pago de 54, el que sería mayor que el pago de 48 obtenido en el equilibrio de Nash.* ***Obs.: Si el alumno justificara***

su respuesta presentando un argumento intuitivo de que la asignación no será Pareto eficiente ya que cada jugador no internaliza la externalidad negativa que la disminución en sus precios o el aumento en su esfuerzo tienen en su rival, recibiría puntaje parcial. Ojo que en esta análisis de eficiencia, no estamos llevando en cuenta los pagos de los consumidores, ya que son agentes que no fueron formalmente incorporados al modelo.

Ejercicio 2.8 ***(Norma Euro 6 y su efecto en el precio de los autos nuevos)***

Considere un mercado compuesto por 2 empresas de auto, las empresas 1 y 2. Supón que el producto ofertado por cada empresa es homogéneo, pero la variable estratégica de las empresas es cantidad y no precio. Las empresas simultáneamente eligen la cantidad de autos que van a producir. Sea q_1 la cantidad producida por la empresa 1 y sea q_2 la cantidad producida por la empresa 2.

Suponiendo que la demanda inversa por autos está dada por

$$P(Q) = 42 - 2Q,$$

donde $Q = q_1 + q_2$ es la cantidad total producida, tenemos que, si las empresas eligen q_1 y q_2, ambas van a elegir el precio

$$p(q_1, q_2) = 42 - 2(q_1 + q_2).$$

Supón que la empresa 1 tiene costo marginal de producción $c_1 = 4$ y que la empresa 2 tiene costo marginal de producción $c_2 = 2$. En este caso, dado q_2, la empresa 1 va a elegir el q_1 que maximiza sus ganancias, dadas por

$$(42 - 2(q_1 + q_2))q_1 - \mathbf{4}q_1.$$

Análogamente, dado q_1, la empresa 2 va a elegir el q_2 que maximiza

$$(42 - 2(q_1 + q_2))q_2 - \mathbf{2}q_2.$$

a) *(10 puntos) Encuentre las* ***cantidades producidas*** *de equilibrio. Muestre su trabajo.* ***Pauta:*** *$q_1^* = 6$ y $q_2^* = 7$ (los alumnos deberían mostrar su trabajo).*

b) *(10 puntos) Utilizando su respuesta al ítem anterior, encuentre el* ***precio de equilibrio*** *y la* ***ganancia de equilibrio de la industria*** *(es decir, encuentre la suma de las ganancias de equilibrio de cada empresa).* ***Pauta:*** *$\pi_1^* = 72$, $\pi_2^* = 98$ y $P^* = 16$, por lo que las ganancias de la industria estarían dadas por $\pi_1^* + \pi_2^* = 170$ (los alumnos deberían mostrar su trabajo).*

c) *(10 puntos) Ahora supón que, aunque los consumidores estén indiferentes entre comprar el auto de cada empresa, los autos de la empresa 1 emiten menos contaminación. En particular, los autos de la empresa 1 cumplen con la norma Euro 6, pero los autos de la empresa no. Por eso, el gobierno prohíbe la venta de los autos de la empresa 2, haciendo que la empresa 1 actúe como monopolista, eligiendo el Q que maximiza*

$$(42 - 2Q)Q - 4Q.$$

Resuelva este problema de optimización y muestre que, con la salida de la firma 2 del mercado, la industria termina obteniendo ganancias totales mayores y termina cobrando un precio mayor que el precio cobrado en duopolio. ***Pauta:*** *Tras resolver este problema de optimización, obtenemos como cantidad final producida $Q^M = 9.5$. Reemplazando en la función de demanda inversa, obtenemos como precio de equilibrio $P^M = 23$. Reemplazando* *estos valores en la función objetivo, obtenemos como ganancias de monopolio 180.5, por lo que la industria terminaría cobrando un precio más alto y obteniendo ganancias más altas.*

Obs.: *Es posible que algunos alumnos hagan el redondeo del valor* 9.5 *para* 8 *o para* 10*, para evitar la producción de medio auto. No quitar puntaje de un alumno que lo hacen así, si es que el alumno deja bien claro que hizo el redondeo.*

d) (10 puntos) Presente una intuición para los resultados obtenidos en el ítem anterior. ***Pauta:*** *El efecto que la salida de la empresa 2 del mercado es ambiguo para las ganancias finales de la industria: por un lado, la salida de la firma 2 implica que no hay más competencia entre las empresas, lo que posibilita a la industria obtener ganancias más grandes. Por otro lado, la empresa 2 tiene un costo marginal de producción más bajo, por lo que su salida del mercado puede implicar menores ganancias a la industria. En este ejemplo, el primer efecto domina el segundo, lo que implica que la industria termina con ganancias más altas.*

Al respecto del efecto de la salida de la empresa 2 sobre el precio, note que este debe aumentar debido a 2 razones: 1) la eliminación de competencia entre empresas motiva que la empresa monopolista cobre un precio más alto; 2) cómo la empresa 1 tiene un mayor costo marginal de producción, debe cobrar un precio más grande para que tenga un mark up positivo (el alumno solo necesitaba presentar uno de estos efectos complementarios).

Obs.: *no quitar puntaje por error de arrastre.*

Ejercicio 2.9 ***(Preguntas cortas)*** *Responda si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando su respuesta.*

a) (10 puntos) Considere un juego con 2 jugadores. Si cada uno de los jugadores está jugando su estrategia dominante, entonces esta combinación de estrategias representa un equilibrio de Nash del juego. ***Pauta:*** *Verdadero. Si ambos jugadores están jugando sus estrategias dominantes, ninguno tiene incentivos para cambiar su elección, lo que cumple con la definición de equilibrio de Nash.*

b) (10 puntos) En un equilibrio de Nash, todos los jugadores deben estar jugando una estrategia dominante. ***Pauta:*** *Falso. En un equilibrio de Nash, no es necesario que todos los jugadores estén jugando una estrategia dominantes; están jugando estrategias que son óptimas dadas las elecciones de los demás. El "game of chicken" es un ejemplo de un juego que tiene 2 equilibrios de Nash en estrategias puras, y, sin embargo, ningún jugador tiene una estrategia dominante.*

c) (10 puntos) Si en el proceso de eliminación iterada de estrategias estrictamente dominadas se eliminan todas las estrategias de los jugadores, excepto una, para cada uno de los jugadores, entonces esta combinación de estrategias representará el único equilibrio de Nash del juego. ***Pauta:*** *Verdadero. De hecho, hemos visto que un EN debe sobrevivir el proceso de eliminación iterada de estrategias estrictamente dominadas. Por lo tanto, si solo queda un perfil de estrategias que sobrevive este proceso, este debe ser el único EN del juego.*

d) (10 puntos) Si un juego tiene un único equilibrio de Nash en estrategias puras, entonces esta combinación de estrategias es la única que sobrevivirá a la eliminación iterada de estrategias estrictamente dominadas. ***Pauta:*** *Falso. De hecho, considere el siguiente contra-ejemplo:*

$J1\backslash J2$	L	R
U	2,2	2,1
D	1,4	3,1

en este juego ningún jugador tiene una estrategia dominada. Sin embargo, el único equilibrio del juego en estrategias puras es (U, L).

e) (10 puntos) En el dilema del prisionero, si cada jugador cree que el otro no va a confesar, entonces lo mejor que puede hacer es no confesar. ***Pauta:*** *Falso. En el dilema de los prisioneros los jugadores tienen una estrategia estrictamente dominante: confesar. Por eso, no importa lo que haga el otro, cada jugador tendrá incentivos en confesar.*

f) (10 puntos) Un juego finito siempre tiene un equilibrio de Nash en estrategias puras. ***Pauta:*** *Falso. Un juego finito siempre tiene un EN, posiblemente en estrategias mixtas. Pero es posible que un juego solo tenga equilibrio en estrategias puras. De hecho, considere el ejemplo abajo:*

J1\J2	L	R
U	1,0	0,1
D	0,1	1,0

2.2 Juegos Secuenciales

Ejercicio 2.10 *(Amenazas creíbles vs amenazas no creíbles) Considere el juego secuencial de la figura 2.1 abajo.*

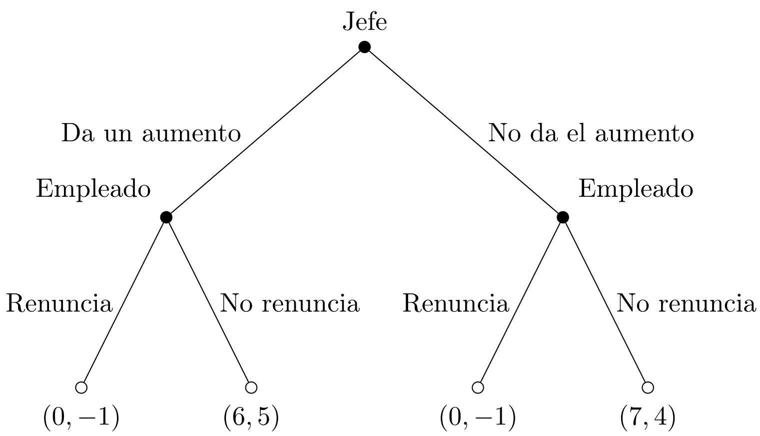


Figure 2.1: Un juego entre un jefe y su empleado. La primera entrada de payoffs corresponde al payoff del jefe, mientras que la segunda entrada de payoffs corresponde al payoff del empleado.

En este juego el jefe decide si da un aumento o no al empleado. Dada la decisión del jefe, el empleado decide si renuncia a su trabajo o no.

a) (10 puntos) Supón que el trabajador adoptara la siguiente estrategia: renuncia su trabajo si su jefe no le da un aumento, de lo contrario, no renuncia. Cuál sería la mejor respuesta del jefe, dada esta estrategia del empleado. Justifique su respuesta. ***Pauta:***

- ***Solución 1:*** *Escribir la tabla de payoffs del juego (es decir, escribir el juego en formato estratégico) y subrayar las mejores respuestas. Haciendo eso, uno puede ver que la mejor respuesta del jefe es darle el aumento al empleado.*

- ***Solución 2:*** *Dado la estrategia del empleado, tenemos que, si el jefe no da un aumento, el empleado elige renunciar, lo que genera un payoff de 0 al jefe. Mientras, si el jefe diera el aumento, el empleado no renunciaría, lo que generaría un payoff de 6 al jefe. Cómo* $6 > 0$*, la mejor respuesta del jefe sería dar el aumento.*

b) (10 puntos) Ahora supón que el trabajador hace la siguiente amenaza a su jefe: "si no me das un aumento, renuncio". Si el ***trabajador*** *es secuencialmente racional, debería el jefe creer en su amenaza. Justifique su respuesta.*

Pauta:

- ***Solución 1:*** *No, no es creíble si el empleado es secuencialmente racional. De hecho, si el jefe no le da el aumento, prefiere no renunciar* ($4 > -1$)*.*

- ***Solución 2:*** *Depende. Es posible que en la práctica una amenaza cambia los payoffs de los agentes. De hecho, si hago una amenaza y no cumplo con mis promesas, eso puede generarme una mala reputación. Entonces es posible que, en este ejemplo, al hacer una amenaza, se cambiara el payoff del trabajador conforme ilustrado en la figura 2.2*

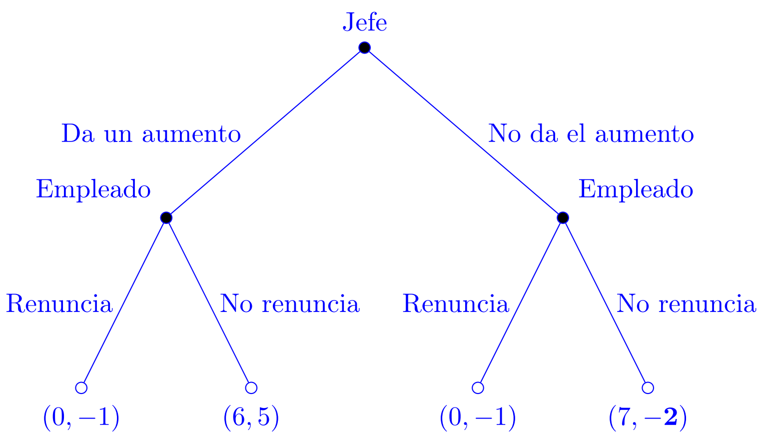


Figure 2.2: El juego entre un jefe y su empleado después que este recibe una amenaza.

En este caso, ahí sí sería secuencialmente racional para el empleado renunciar si este no recibe un aumento.

Estos tipos de amenazas se utilizan mucho en la política y en situaciones de conflicto: ¿por qué Putin amenaza utilizar armas nucleares si no es (aparentemente) de su interés hacerlo? Probablemente por que, si hace la amenaza y no la cumple, la gente lo percibirá como débil y mentiroso, lo que le dá incentivos en explotar a todos como un lunático por si acaso el Occidente no cumple con sus demandas. Teniendo esto en miente, los países de NATO se vuelven más reacios en ayudar Ucrania directamente en la guerra, ya que, después de hecha la amenaza, Putin tiene más incentivos en seguir adelante con su estrategia de lunático. Entonces una amenaza puede servir como un "commitment device", es decir, cómo un mecanismo de comprometimiento.

Obs.: *Existe una otra razón por qué personas como Putin hacen amenazas que parecen no ser creíbles, que es algo que vamos a estudiar en los juegos de "Cheap Talk": Supón que con una cierta probabilidad Putin es sano y con otra probabilidad él es insano. En este caso, no importa qué tipo de persona Putin es, él siempre quiere que los otros piensen que él es insano, para que nadie se atreva a pelear con él. Entonces, habrá un equilibrio* *en que, no importa su tipo, si él es sano o insano, Putin tiene incentivos en amenazar utilizar armas nucleares como táctica de represalia. A este tipo de equilibrio le llamamos de "babling equilibrium", ya que la señal (en este caso, la amenaza) no agrega ninguna información relevante sobre el tipo de persona que Putin es en realidad.*

Ejercicio 2.11 ***Cooperación y contratos formales*** *Supón que un jefe elige el sueldo que le paga a un proveedor de servicio. El sueldo puede ser alto o bajo. Tras observar el sueldo, el proveedor decide si se esfuerza o no. Este juego está dibujado en formato secuencial en la figura 2.3 abajo, donde la primera entrada de payoffs corresponde al payoff del jefe, y la segunda del proveedor.*

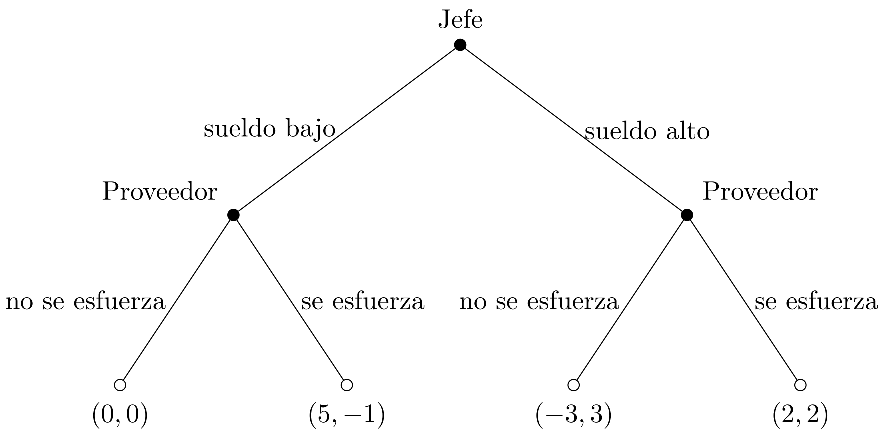


Figure 2.3: Un juego entre un jefe y su proveedor.

a) *(10 puntos) Escriba este juego en formato estratégico (es decir, la tabla de pagos) y encuentre todos los equilibrios de Nash del juego.* ***Pauta:*** *Escribiendo la tabla de payoffs de este juego y subrayando las mejores respuestas, se puede ver que este juego tiene solamente un equilibrio de Nash en estrategias puras: que el jefe pague un sueldo bajo y que el proveedor no se esfuerce independientemente de lo que haga el jefe.*

	Proveedor			
Jefe	Se esfuerza, Se esfuerza	Se esfuerza, No	No, Se esfuerza	No, No
Sueldo Bajo	$\underline{5}, -1$	$\underline{5}, -1$	$0, \underline{0}$	$\underline{0}, \underline{0}$
Sueldo Alto	$2, 2$	$-3, \underline{3}$	$\underline{2}, 2$	$-3, \underline{3}$

Table 2.4: Un juego hipotético.

b) *(10 puntos) Encuentre el equilibrio del juego obtenido por inducción hacia atrás; muestre su trabajo. ¿Es este equilibrio eficiente de Pareto? Justifique.* ***Pauta:*** *Haciendo inducción hacia atrás, se puede ver que en cada uno de los nodos de decisión del proveedor le conviene elegir no esforzarse (en el nodo izquierdo tenemos $0 > -1$, y en el derecho tenemos $3 > 2$). Entonces, dado que el jefe sabe que el proveedor es secuencialmente racional, él sabe que el proveedor si o si va a elegir no esforzarse, por lo que le conviene al jefe pagarle un sueldo bajo ($0 > -3$). Por lo tanto, en equilibrio el jefe paga sueldo bajo y el empleado no se esfuerza independientemente de lo que haga el jefe.*

Uno también podría dibujar el árbol y hacer inducción hacia atrás dibujando las setas, o dibujando el juego reducido.

Uno también podría argumentar que, cómo todo juego secuencial finito de información perfecta tiene por lo menos uno ENPS en estrategias puras (ojo que este teorema no es necesariamente verdad para juegos de información imperfecta) y como este juego tiene solamente un EN en estrategias puras, y como todo ENPS es necesariamente un EN, se concluye que el EN encontrado en el ítem anterior debe ser un ENPS.

Ojo que este equilibrio NO es Pareto eficiente. De hecho, si el jefe pagara un sueldo alto y el proveedor se esforzara, ambos estarían mejores (ambos obtendrían un payoff de 2 al revés de 0).

c) *(10 puntos) Supón que el proveedor hace la siguiente promesa al jefe: "yo me esfuerzo si y solamente si me pagas un sueldo alto". Suponiendo que los agentes juegan este juego una solo vez y que además son secuencialmente racionales, ¿debería el jefe creer en tal promesa? Justifique su respuesta.* ***Pauta: Posibles respuestas:***

- *No, por qué, conforme hemos mostrado en el ítem anterior esta estrategia no sería parte de un ENPS.*
- *No, por qué, en cada uno de los nodos de decisión del proveedor le conviene elegir no esforzarse (en el nodo izquierdo tenemos $0 > -1$, y en el derecho tenemos $3 > 2$). Entonces, si el jefe sabe que el proveedor es secuencialmente sabrá que él no va a cumplir con tal promesa.*

d) *(10 puntos) Ahora supón que, antes de ser contratado, el proveedor debe firmar un contrato que estipula que, si este recibe un sueldo alto y no se esfuerza tras recibir tal sueldo, debe pagar una multa. Esto genera el nuevo juego que está dibujado en la figura 2.4 abajo.*

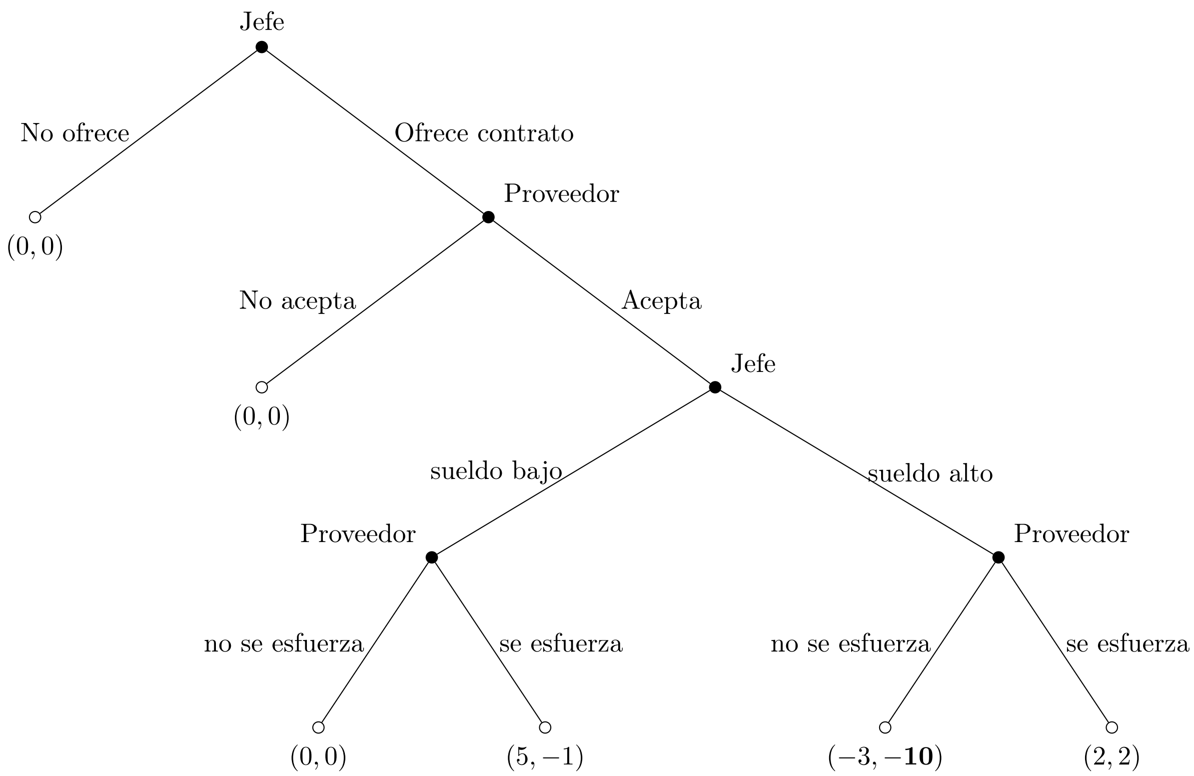


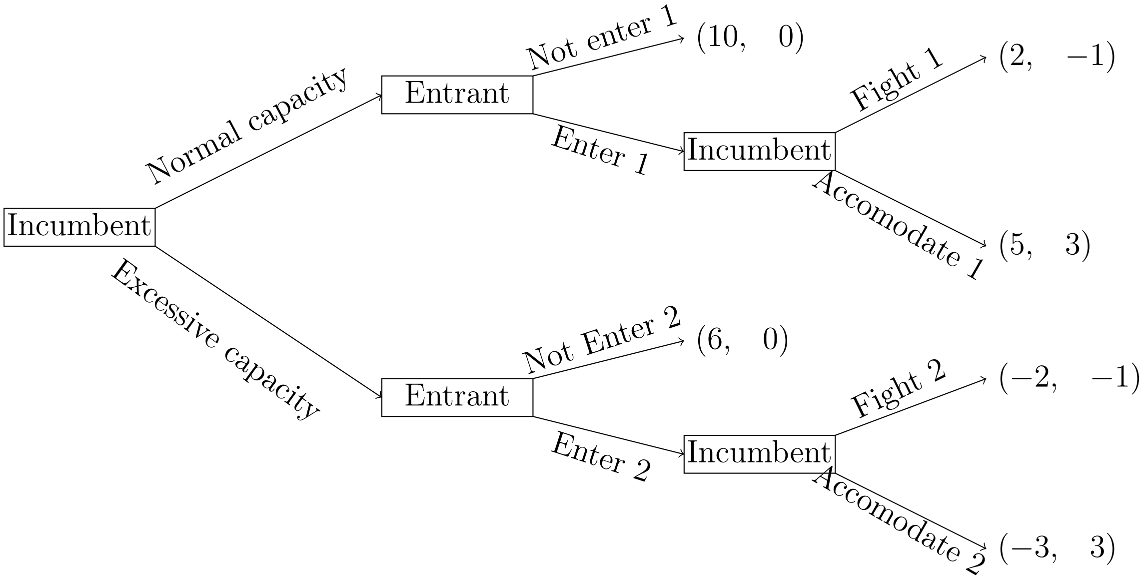
Figure 2.4: Un juego entre un jefe y su proveedor.

¿Cuál sería el equilibrio de este juego al aplicarse inducción hacia atrás? ¿Están los agentes mejores o peores en este equilibrio, comparado con el equilibrio encontrado en el ítem b?

Pauta: *Dibujando las setas correspondientes a inducción hacia atrás se puede ver que el único ENPS de este juego corresponde a que el jefe ofrezca el contrato y pague un sueldo alto, mientras que el proveedor lo acepta el contrato y se esfuerza ssi el jefe le paga un sueldo alto.*

Obs.: *Es probable que muchos alumnos contesten solo el* ***camino del equilibrio*** *el que en este caso corresponde a que el jefe ofrezca el contrato, el proveedor lo acepte, el jefe paga un sueldo alto y el empleado se esfuerza. Eso también está ok. Pero es importante que el alumno escriba cuál es el equilibrio y no solo lo dibuje en el árbol, o solo presente el payoff de equilibrio.*

Ejercicio 2.12 *Consider the game depicted below, in which an incumbent firm is considering whether or not to invest in idle capacity. In this game, the first payoff entry corresponds to the payoff from the incumbent while the second payoff corresponds to the payoff from the entrant. Numbers were added to some actions in order to avoid ambiguity when writing the strategies from each agent.*



a) Write down this game in strategic format.

Pauta: *The strategic form representation of this game is displayed in table 2.5.*

	Entrant			
Incumbent	NE1, NE2	NE1, E2	E1, NE2	E1, E2
NC, F1, F2	$\underline{10}, \underline{0}$	$\underline{10}, \underline{0}$	$2, -1$	$2, -1$
NC, F1, A2	$\underline{10}, \underline{0}$	$\underline{10}, \underline{0}$	$2, -1$	$2, -1$
NC, A1, F2	$\underline{10}, 0$	$\underline{10}, 0$	$5, \underline{3}$	$\underline{5}, \underline{3}$
NC, A1, A2	$\underline{10}, 0$	$\underline{10}, 0$	$5, \underline{3}$	$\underline{5}, \underline{3}$
EC, F1, F2	$6, \underline{0}$	$-2, -1$	$\underline{6}, \underline{0}$	$-2, -1$
EC, F1, A2	$6, 0$	$-3, \underline{3}$	$\underline{6}, 0$	$-3, \underline{3}$
EC, A1, F2	$6, \underline{0}$	$-2, -1$	$\underline{6}, \underline{0}$	$-2, -1$
EC, A1, A2	$6, 0$	$-3, \underline{3}$	$\underline{6}, 0$	$-3, \underline{3}$

Table 2.5: Strategic form representation of the deterrence game by investment in inflexible capacity.

b) *Find all the Nash equilibria in pure strategies from this game.*

Pauta: *We can find all the Nash equilibria from this game by underlining the pay-offs corresponding to the best responses from matrix 2.5. In this case, the NE are:* $\{(NC, F1, F2), (NE1, NE2)\}$, $\{(NC, F1, A2), (NE1, NE2)\}$, $\{(NC, F1, A2), (NE1, E2)\}$, $\{(NC, F1, F2), (NE1, E2)\}$, $\{(NC, A1, F2), (E1, E2)\}$, $\{(NC, A1, A2), (E1, E2)\}$, $\{(EC, F1, F2), (E1, NE2)\}$ *and* $\{(EC, A1, F2), (E1, NE2)\}$.

c) *Which of these Nash equilibria can be obtained by backwards induction?*

Pauta: *One can easily apply backwards induction to this game depicted in the arrows from figure 2.5 below to obtain the unique SPNE from this game:* $\{(EC, A1, F2), (E1, NE2)\}$.

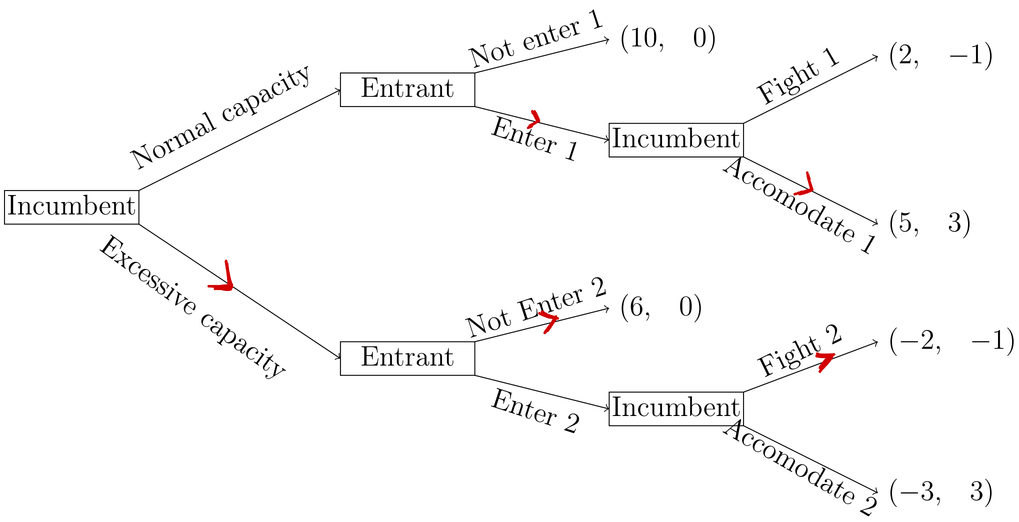


Figure 2.5: Applying backwards induction to the game.

d) *Notice that all the pay-offs from the incumbent located at the lower part of the game tree are lower than the incumbent's corresponding pay-offs located at the upper part of the tree. So what would be rationale, if any, of choosing excessive capacity? Explain it intuitively.*

Pauta: *By investing in excessive capacity, the incumbent creates a commitment device that induces the firm's opponent not to enter into the market. So while excessive capacity "hurts the incumbent" it changes its incentives, which in turn may affect the actions from its opponent.*

Ejercicio 2.13 *Consider the sequential move game depicted in figure 2.6 in which two firms must decide whether or not to enter into a market and whether to produce in a large (q_H) or small (q_L) scale.*

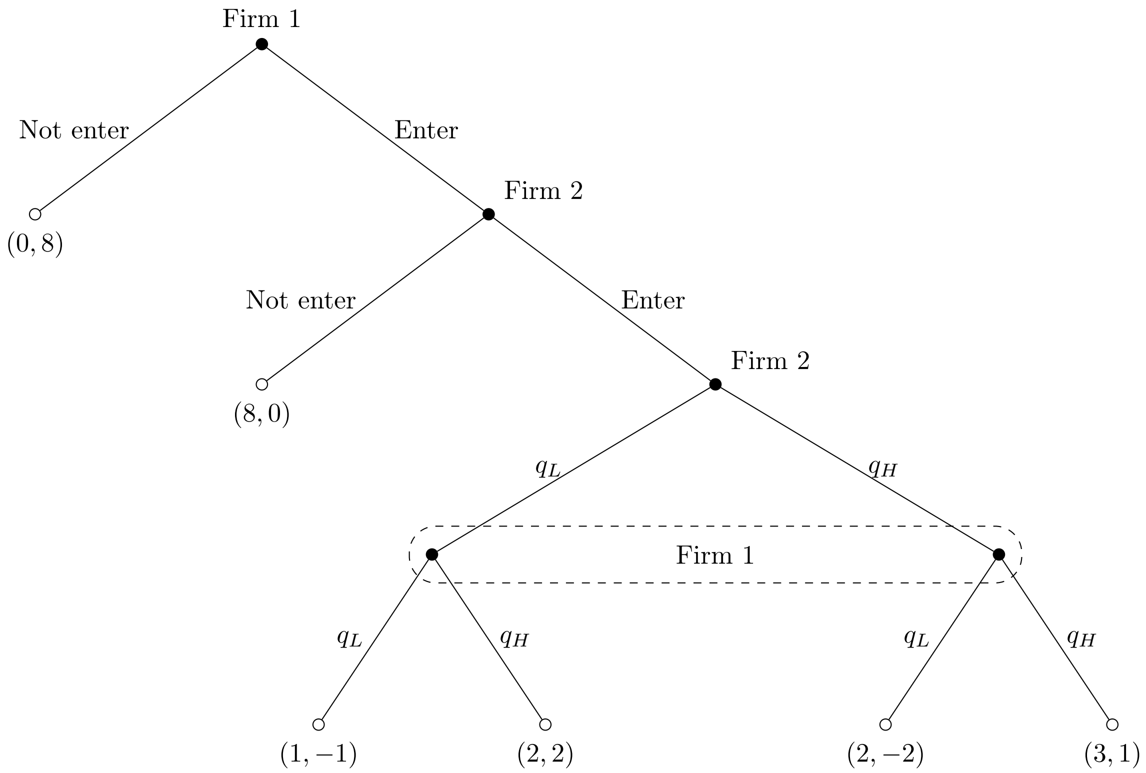


Figure 2.6: A non cooperative game between two potential entrants.

Find the SPNE from this game (figure 2.6) and show your work.

Pauta: Writing the last subgame from this game in strategic format, we get table 2.6.

	Firm 2	
Firm 1	q_L	q_H
q_L	1,-1	2,-2
q_H	2,2	3,1

Table 2.6: Last subgame in strategic format.

From this table one can easily see that firm 1 has a dominant strategy of choosing q_H, while firm 2 has a dominant strategy of choosing q_L. So the unique NE from this subgame consists in player 1 choosing q_H and player 2 choosing q_L, which gives each player a payoff of 2. Therefore, we can write the reduced game associated with this game as depicted in figure 2.7.

From this reduced game we can clearly see that firm 2's best choice is to enter, and then firm 1's best choice is also to enter into the market. So we conclude that the unique SPNE from this game consists in firm 1 entering and choosing q_H, and firm 2 choosing to enter and then choosing q_L.

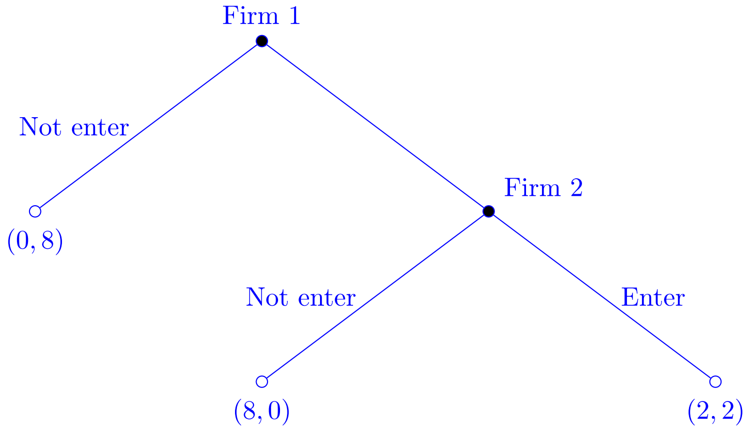


Figure 2.7: Reduced game.

Ejercicio 2.14 *Two firms, 1 and 2, engage in price competition for two consumers, each of with has unit demand. The two consumers both value the good at $v > 0$. Firm 1 has costs of production of $c_1 \in (0, v)$, while firm 2 has costs of $c_2 \in (c_1, v)$. Suppose that the product is homogeneous, so that customers only purchase the product from the firm that charges the lowest price. If both firms happen to charge the same price, and that price is lower than v, then customer 1 purchases the product from firm 1, while customer 2 purchases the product from firm 2 (in other words, the demand is split evenly among the firms). Find the Nash equilibrium from this game.*

Pauta: First notice that if a firm in this market operated as a monopolist, it would choose $p = v$. This information will be useful when computing the best responses.

Case 1: $p_2 > v$.

If $p_2 > 12$, firm 1's best response is $p_1 = v$, in which case firm 2 would have incentives to deviate and choose $p_2 = v - \varepsilon$. Therefore, we cannot have an equilibrium in which $p_2 > v$.

Case 2: $c_2 < p_2 \leq v$.

If $c_2 < p_2 \leq v$, firm 1's best response is $p_1 = p_2 - \varepsilon$, in which case firm 2 would have incentives to deviate and choose $p_2 = p_1 - \varepsilon$. Therefore, we cannot have an equilibrium in which $c_2 < p_2 \leq v$.

Case 3: $p_2 = c_2$.

If $p_2 = c_2$, firm 1's best response is $p_1 = p_2 - \varepsilon$, in which case firm 2 would have no incentives to deviate: indeed if it chose a price higher than c_2, it would get zero demand, and therefore, zero profits, the same payoff it gets if it does not deviate. If it tried to undercut p_1 it would capture the entire demand, but it would get negative profits, as it would be charging a price below its marginal cost. Because firm 2 has no incentives to deviate, we conclude that $p_2 = c_2$ and $p_1 = c_2 - \varepsilon$ **is** a NE.[4]

Case 4: $c_1 < p_2 < c_2$.

If $c_1 < p_2 < c_2$, firm 1's best response is $p_1 = p_2 - \varepsilon$, in which case firm 2 would have no incentives to deviate: if it chose a price above p_1 it would get zero demand and therefore zero profits, the same payoff it gets if it does not deviate. If it charged a price below p_1 it would capture the entire demand, but it would get negative profits, as it would be charging a price below its marginal cost. Therefore, any $c_1 < p_2 < c_2$ and $p_1 = p_2 - \varepsilon$ is a NE. Notice, however,

[4]Notice that this answer is slightly imprecise if the set of actions from each player are the real numbers. However, if we assume that there is a minimum price unit like in real life, such as one cent, then we do not have to deal with this technically. Moreover, notice that in real life most economic variables are discrete: the only reason we work with continuous random variables is to simplify our lives. So there is no point in making a fuss about this technicality.

that these NE are not very realistic, as they imply that firm 2 plays a weakly dominated strategy (recall that choosing a price below one's marginal cost is a weakly dominated strategy in simultaneous move games).

Case 5: $p_2 = c_1$.

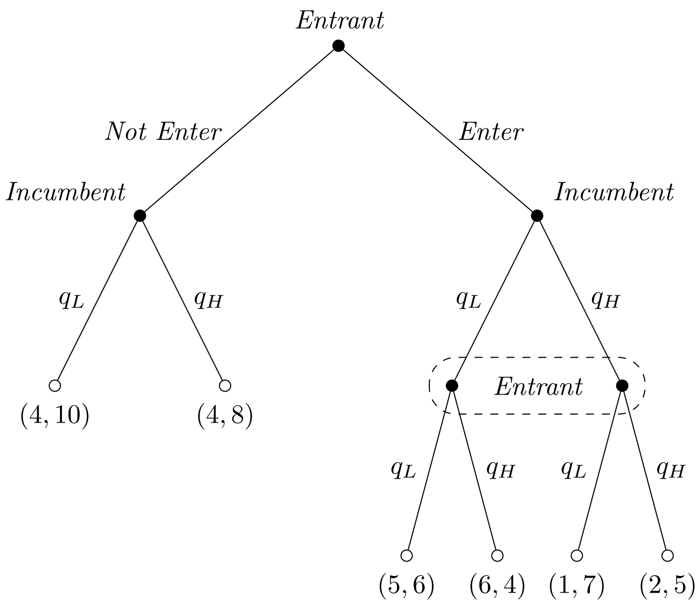
If $p_2 = c_1$, firm 1's best response is any $p_1 \geq c_1$, in which case either each firm would get half of the demand (if $p_1 = c_1$), or firm 2 captures the entire demand (if $p_1 > c_1$). In either case, firm 2 gets a negative profit, so that firm 2 would have incentives to deviate by choosing a price above c_1. So we cannot have a NE in which $p_2 = c_1$.

Case 6: $p_2 < c_1$.

If $p_2 = c_1$, firm 1's best response is any $p_1 \geq c_1$, in which case firm 2 would capture the entire demand but get negative profits, so that it would have incentives to deviate. So we cannot have a NE in which $p_2 < c_1$.

So for all effects and purposes, the only "interesting" NE from this game consists in firm 1 charging $p_1 = c_2 - \varepsilon$ and firm 2 charging $p_2 = c_2$, where ε is the minimum monetary unit (e.g., one cent).

Ejercicio 2.15 *Assume a firm must decide on whether or not to enter into a market. If it chooses to enter into the market, it must compete with the incumbent by simultaneously choosing a high or a low production quantity. The extensive form representation of the game is given below:*



a) Write down this game in strategic form and find all of its Nash equilibria in pure strategies.

b) Find the subgame perfect Nash equilibrium from this game.

Pauta:

a) The strategic form representation of this game is depicted in table 2.7.

From this table, we can easily check that the only pure strategy NE from this game are: $\{(NE, q_L), (q_L, q_H)\}$ and $\{(NE, q_H), (q_L, q_H)\}$.

b) Notice that the last subgame from this game can be written in strategic format as depicted in table 2.8.

One can easily see that in this subgame, playing q_H is a strictly dominant strategy for both players (this subgame is equivalent to the prisoner's dilemma game). Moreover, if the entrant

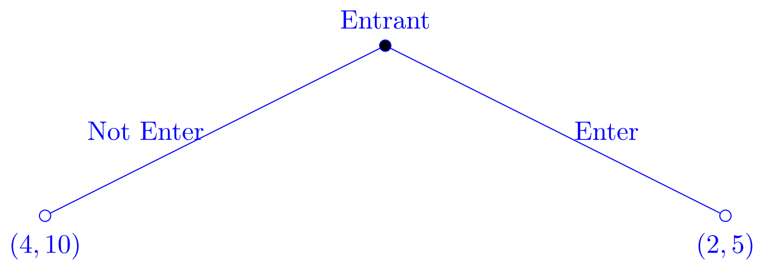
	Incumbent			
Entrant	q_L, q_L	q_L, q_H	q_H, q_L	q_H, q_H
Not Enter, q_L	$4, \underline{10}$	$\underline{4}, \underline{10}$	$4, 8$	$\underline{4}, 8$
Not Enter, q_H	$4, \underline{10}$	$\underline{4}, \underline{10}$	$4, 8$	$\underline{4}, 8$
Enter, q_L	$5, 6$	$1, \underline{7}$	$5, 6$	$1, \underline{7}$
Enter, q_H	$\underline{6}, 4$	$2, \underline{5}$	$\underline{6}, 4$	$2, \underline{5}$

Table 2.7: The entrance game in strategic format.

	Incumbent	
Entrant	q_L	q_H
q_L	$5, 6$	$1, \underline{7}$
q_H	$\underline{6}, 4$	$\underline{2}, \underline{5}$

Table 2.8: The last subgame written in strategic format.

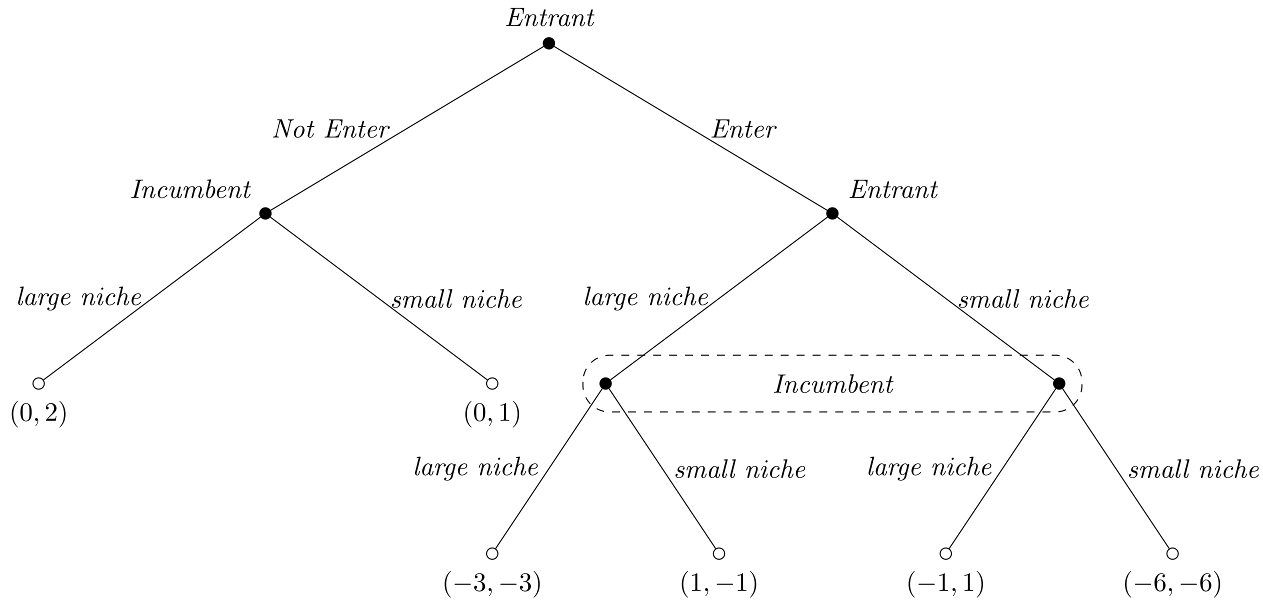
doesn't enter into the market, then the incumbent's best response is to choose q_L. So we can write the following reduced game:



From this reduced game, we can see that it will be on the entrant's interest not to enter into this market. So the only SPNE we have for this game consists on $\{(NE, q_H), (q_L, q_H)\}$.

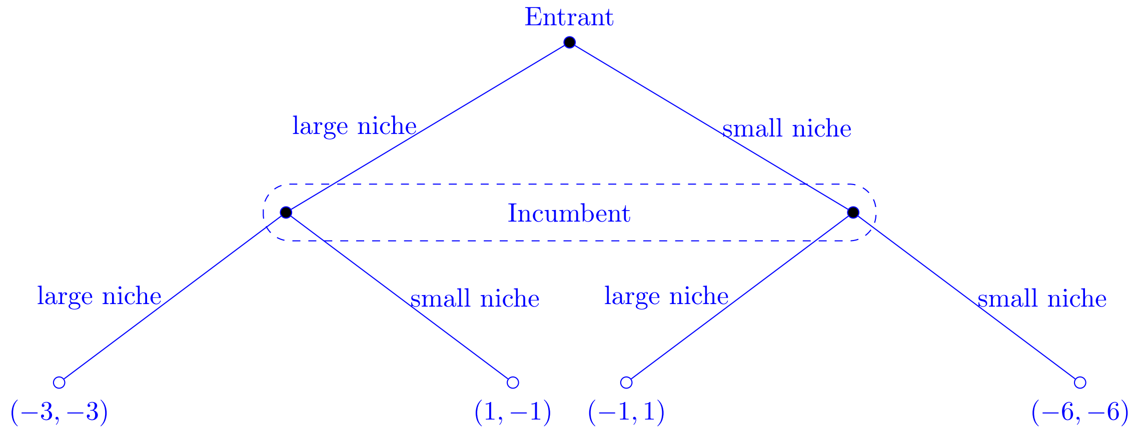
Ejercicio 2.16 *Suppose there are two types of costumers in a market: costumers from a small niche and costumers from a large niche. Since the large niche has many consumers, specializing in the sale to consumers from the large niche is more profitable than specializing in the sale to costumers from the small niche. However, a firm doesn't wish to share the same niche with another firm.*

A firm is deciding on whether or not to enter into this market. If it enters, then the incumbent and entrant must simultaneously decide which niche to specialize. The extensive form representation from this game is depicted below:



Find all of the subgame perfect Nash equilibrium from this game (in pure strategies).

Pauta: First you should find all the Nash equilibria from the following subgame:

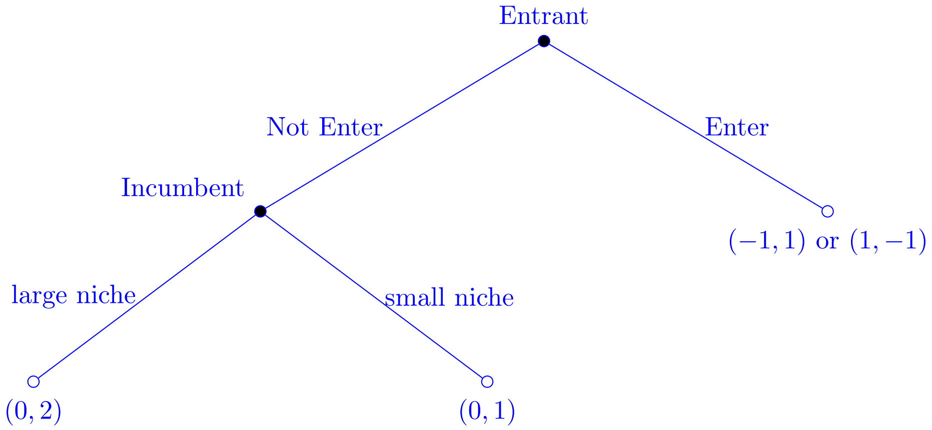


You can do that by writing this game in strategic format, as depicted in table 2.9

	Incumbent	
Entrant	Large Niche	Small Niche
Large Niche	$-3, -3$	$\underline{1}, \underline{-1}$
Small Niche	$\underline{-1}, \underline{1}$	$-6, -6$

Table 2.9: The last subgame written in strategic format.

From this table, you can easily conclude that this game has two NE in pure strategies: $\{LargeNiche, SmallNiche\}$ and $\{SmallNiche, LargeNiche\}$. So we can replace this subgame by each of these payoffs and solve the reduced game depicted below by backwards induction:



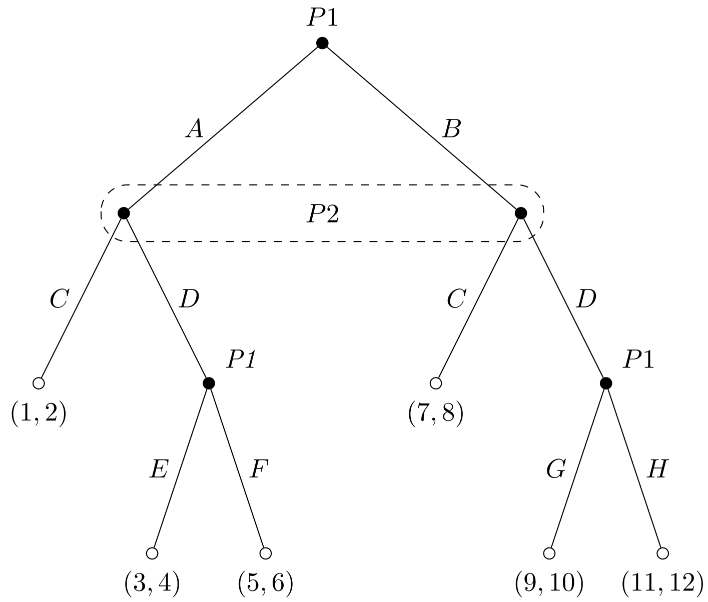
By doing so, we will find 2 SPNE (in pure strategies):

1) Entrant plays (Not Enter, small niche) and incumbent plays (large Niche, large Niche).

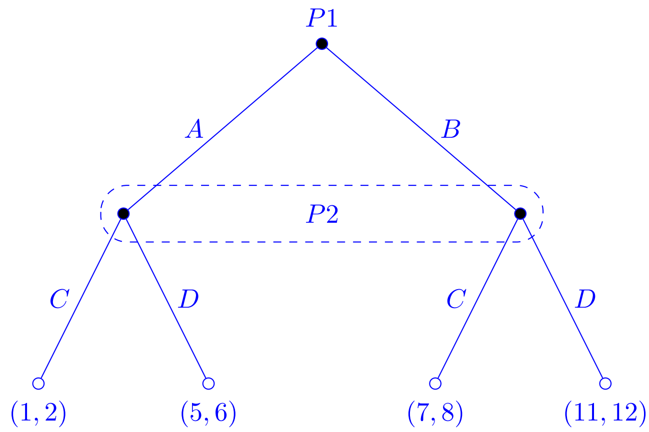
2) Entrant plays (Enter, large niche) and incumbent plays (large Niche, small Niche).

So there is an equilibrium in which the entrant enters the market and takes the large niche, and another one in which it does not enter, as it expects the large niche to be taken by the incumbent.

Ejercicio 2.17 *Find all of the subgame perfect Nash equilibria from the game below:*



Pauta: By solving the last subgames from this game, we get the following reduced form game:



If one writes this reduce game in strategic format, one can see that it has a unique NE in dominant strategies, which is given by player 1 choosing B and player 2 choosing D. So the unique SPNE from this game consists on player 1 choosing (B, F, H) and player 2 choosing D.

Ejercicio 2.18 *Consider the Bertrand duopoly model with homogeneous goods. Letting p_1 and p_2 denote the prices of firm 1 and 2, respectively, we have that the aggregate demand function for the homogeneous good is given by $Q(p_1, p_2) = 20 - \min\{p_1, p_2\}$. Because the product is homogeneous, all customers will only purchase a product from the firm that charges the lowest price. In the eventuality both firms charge the same price, the demand is split evenly among the firms. Both firms have constant marginal costs. The marginal cost form firm 1 is given by 10, while the marginal cost from firm 2 is given by 4. Find the pure strategy Nash equilibrium from this game.*

Pauta: Notice that if firm 1 operated as a monopolist, it would choose p_1 that maximizes

$$\max_{p_1}(20 - p_1)p_1 - 10(20 - p_1).$$

Taking the FOC., we get:

$$\begin{aligned} 20 - 2p_1 + 10 &= 0 \\ p_1 &= 15. \end{aligned}$$

If firm 2 operated as a monopolist, it would choose p_2 that maximizes:

$$\max_{p_2}(20 - p_2) - 4(20 - p_2).$$

Taking the FOC., we get:

$$20 - 2p_2 + 4 = 0$$
$$p_2 = 12.$$

In the following cases we denote ε as a very small number, which corresponds to the lowest monetary unit (like 1 cent).

Case 1: $p_1 > 12$.

If $p_1 > 12$, firm 2's best response is $p_2 = 12$, in which case firm 1 would have incentives to deviate and choose $p_1 = 12 - \varepsilon$. Therefore, we cannot have an equilibrium in which $p_1 > 12$.

Case 2: $10 < p_1 \leq 12$.

If $10 < p_1 \leq 12$, firm 2's best response is $p_2 = p_1 - \varepsilon$, in which case firm 1 would have incentives to deviate and choose $p_1 = p_2 - \varepsilon$. Therefore, we cannot have an equilibrium in which $10 < p_1 \leq 12$.

Case 3: $p_1 = 10$.

If $p_1 = 10$, firm 2's best response is $p_2 = 10 - \varepsilon$, in which case firm 1 would have no incentives to deviate: indeed if it chose a price higher than 10, it would get zero demand, and therefore, zero profits, the same payoff it gets if it does not deviate. If it chose a price below p_2 it would capture the entire demand, but it would get negative profits, as it would be charging a price below its marginal cost. Because firm 1 has no incentives to deviate, we conclude that $p_1 = 10$ and $p_2 = 10 - \varepsilon$ **is** a NE.[5]

Case 4: $4 < p_1 < 10$.

If $4 < p_1 < 10$, firm 2's best response is $p_2 = p_1 - \varepsilon$, in which case firm 1 would have no incentives to deviate: if it chose a price above p_2 it would get zero demand and therefore zero profits, the same payoff it gets if it does not deviate. If it charged a price below p_2 it would capture the entire demand, but it would get negative profits, as it would be charging a price below its marginal cost. Therefore, any $4 < p_1 < 10$ and $p_2 = p_1 - \varepsilon$ is a NE. Notice, however, that these NE are not very realistic, as they imply firm 1 plays a weakly dominated strategy (recall that choosing a price below one's marginal cost is a weakly dominated strategy in simultaneous move games).

Case 5: $p_1 = 4$.

If $p_1 = 4$, firm 2's best response is $p_2 = 4$, in which case each firm would get half of the demand. This means that firm 1 gets a negative profit, so that firm 1 would have incentives to deviate and choose a price above 4. So we cannot have a NE in which $p_1 = 4$.

Case 6: $p_1 < 4$.

If $p_1 = 4$, firm 2's best response is any $p_2 \geq 4$, in which case firm 1 would capture the entire demand, but would get negative profits, so that it would have incentives to deviate. So we cannot have a NE in which $p_1 < 4$.

So for all effects and purposes, the only "interesting" NE from this game consists in firm 1 charging $p_1 = 10$ and firm 2 charging $p_2 = 10 - \varepsilon$, where ε is the minimum monetary unit (e.g., one cent).

[5] Notice that this answer is slightly imprecise if the set of actions from each player are the real numbers. However, if we assume that there is a minimum price unit like in real life, such as one cent, then we do not have to deal with this technically. Moreover, notice that in real life most economic variables are discrete: the only reason we work with continuous random variables is to simplify our lives. So there is no point in making a fuss about this technicality.

3

Juegos Simultáneos de Información Incompleta

Ejercicio 3.1 ***(Cuando un rival no observa la demanda de su oponente)*** *Supón que dos firmas, firma 1 y firma 2, produciendo productos diferenciados deben simultáneamente elegir sus precios. La firma 1 tiene demanda $q_1(p_1, p_2) = 2 - 2p_1 + p_2$, mientras que la firma 2 tiene demanda $q_2(p_2, p_1) = 4 - 3p_2 + bp_1$, donde $b = 1$ con probabilidad $1/2$, y $b = 2$ con probabilidad $1/2$. Se supone que el parámetro b de la firma 2 es conocido solo por la firma 2; la firma 1 solo sabe que, con probabilidad 1/2, $b = 1$, y con probabilidad $1/2$, $b = 2$. Por simplicidad, supón que ambas firmas tienen cero costo marginal. Encuentre el equilibrio de Nash Bayesiano en estrategias puras de este juego.*

Pauta: *Let p_1 be the price chosen by firm 1, p_2^L be the price chosen by firm 2 when $b = 1$ (i.e., when b is low), and p_2^H be the price chosen by firm 2 when $b = 2$ (i.e., when b is high). Then, given p_1 chosen by firm 1, we have that firm 2 will maximize*

$$\max_{p_2^L}(4 - 3p_2^L + p_1)p_2^L, \tag{3.1}$$

when $b = 1$, and will maximize

$$\max_{p_2^H}(4 - 3p_2^H + 2p_1)p_2^H, \tag{3.2}$$

when $b = 2$. Given p_2^L chosen by firm 2 when it has a low type and p_2^H chosen by firm 2 when it has a high type, we have that firm 1 will choose p_1 to maximize:

$$\max_{p_1} \frac{1}{2}\left(2 - 2p_1 + p_2^L\right)p_1 + \frac{1}{2}\left(2 - 2p_1 + p_2^H\right)p_1. \tag{3.3}$$

Taking the FOC from problem 3.1, we get:

$$\begin{aligned} [p_2^L]: &\quad 4 - 6p_2 + p_1 = 0 \\ p_2^L &= \frac{4 + p_1}{6}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Taking the FOC from problem 3.2, we get:

$$\begin{aligned} [p_2^H]: &\quad 4 - 6p_2 + 2p_1 = 0 \\ p_2^H &= \frac{4 + 2p_1}{6}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Taking the FOC from problem 3.3, we get

$$\begin{aligned}[p_1]: \quad & \frac{1}{2}\left[2 - 4p_1 + p_2^L + 2 - 4p_1 + p_2^H\right] = 0 \\ & 4 - 8p_1 + p_2^L + p_2^H = 0. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Replacing 3.4 and 3.5 into 3.6 we get

$$\begin{aligned} 4 - 8p_1 + \frac{4 + p_1}{6} + \frac{4 + 2p_1}{6} &= 0 \\ 24 - 48p_1 + 4 + p_1 + 4 + 2p_1 &= 0 \\ p_1 &= \frac{32}{45}. \\ p_1 &= 0.71 \end{aligned}$$

Replacing this value into 3.4, we get

$$\begin{aligned} p_2^L &= \frac{4 + \frac{32}{45}}{6} \\ p_2^L &= 0.785. \end{aligned}$$

and into 3.5, we get:

$$\begin{aligned} p_2^H &= \frac{4 + 2\frac{32}{45}}{6} \\ p_2^H &= 0.9037. \end{aligned}$$

Ejercicio 3.2 *(**Mercado de "cacharros" (Market of lemons)**) Considera el siguiente modelo donde un vendedor está intentando vender su auto a un comprador. El auto puede ser o de calidad alta o baja, es decir "bueno", o un "cacharro". Cuando el auto es bueno, el comprador lo valora en \$3,000 y el vendedor lo valora en \$2,000, pero cuando el auto es un cacharro el comprador lo valora en \$1,000, mientras que el vendedor lo valora en \$0 (es decir, cuando el auto es un cacharro, el vendedor lo quiere vender a cualquier costo). El vendedor y comprador deben simultáneamente elegir si transan o no. Si ambos deciden transar, el auto es vendido al precio exógeno de mercado p, el que es de conocimiento común a ambos jugadores. Si por lo menos uno de ellos decide no transar, el auto no es vendido, por lo que en este caso el comprador termina con 0 ganancias, y el vendedor obtiene su valor de reserva por el auto (\$2,000 si el auto es bueno, y \$0 si es un cacharro).*

Por lo tanto, tenemos que las tablas de pagos de este juego cuando el auto es bueno y cuando el auto es un cacharro están dadas por las tablas 11.1 y 11.2, respectivamente.

	Vendedor	
Comprador	Transa	No Transa
Transa	$3000 - p, p$	$0, 2000$
No Transa	$0, 2000$	$0, 2000$

Table 3.1: Tabla de pagos cuando el auto es bueno.

Supón que el auto es bueno con probabilidad π y un cacharro con probabilidad $1 - \pi$. Como en la práctica el vendedor conoce mejor las condiciones de su producto, vamos a suponer que

	Vendedor	
Comprador	Transa	No Transa
Transa	$1000 - p, p$	$0, 0$
No Transa	$0, 0$	$0, 0$

Table 3.2: Tabla de pagos cuando el auto es un cacharro (es decir, un *limón*).

solo el vendedor conoce el tipo de su auto. El comprador solo sabe que con probabilidad π el auto es bueno y con probabilidad $1 - \pi$ el auto es un cacharro.

Muestre que si $\pi < \frac{1}{2}$, entonces, para cada precio exógeno p, el único equilibrio donde los agentes transan, ocurren cuando solo cacharros son vendidos.

Pauta:

Because the buyer always values the car more than the seller, an efficient equilibrium would consist on the buyer transacting and the seller transacting no matter the condition of the car. Wether such an equilibrium can be implemented will of course depend on the exogenous parameters: π and p. So let us first assume that $p \geq \$2000$. In that case the seller has a (weakly) dominant strategy of transacting both when the car is a peach and when it is a lemon. Given the strategy chosen by the seller, the buyer's expected payoff from choosing to transact is given by

$$\pi(3000 - p) + (1 - \pi)(1000 - p) = 1000 + 2000\pi - p,$$

while his expected payoff from not transacting is just 0. So he will choose to transact if and only if

$$\begin{aligned} 1000 + 2000\pi - p \geq 0 \\ \iff \pi \geq \frac{p - 1000}{2000}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

So as long as condition 11.1 is satisfied and $p \geq 2000$, we have that the strategy profile $\{(Transact), (Transact, Transact)\}$ is a Bayesian Nash equilibrium. Now notice that since we are assuming that $p \geq 2000$, we have that

$$\frac{p - 1000}{2000} \geq \frac{2000 - 1000}{2000} = \frac{1}{2}.$$

So a necessary condition for inequality 11.1 to be satisfied is that $\pi \geq 1/2$, (i.e., there can not be too many lemons in the market). So if $\pi < 1/2$ the Bayesian Nash equilibrium becomes $\{(Not\ Transact), (Transact, Transact)\}$, which is inefficient, given that agents do not end up transacting, even though the buyer has a higher valuation for the car than the seller.

Now suppose that $0 < p < \$2000$. Then the seller has a (weakly) dominant strategy of not transacting when the car is a peach and transacting when the car is a lemon (we can write that strategy succinctly as $(Transact, Not\ Transact)$). Then, given the strategy chosen by the seller, the buyer's expected payoff from choosing to transact is

$$\pi 0 + (1 - \pi)(1000 - p),$$

while his expected payoff from not transacting is 0. So the buyer will transact iff

$$\begin{aligned} (1 - \pi)(1000 - p) \geq 0 \\ \iff p \leq 1000. \end{aligned} \tag{3.8}$$

So, for $0 < p < \$2000$*, we have that, if condition 11.2 is satisfied, the Bayesian Nash equilibrium to this game is given by* $\{(Transact), (Transact, Not\ Transact)\}$*, while if condition 11.2 is not satisfied the Bayesian Nash equilibrium is* $\{(Not\ Transact), (Transact, Not\ Transact)\}$[1]

So we conclude that if $\pi < \frac{1}{2}$*, the only equilibrium in which some transaction takes place is when only lemons are sold, which is an inefficient outcome. The model here presented is somewhat incomplete, as we assumed the price was exogenously fixed.*

Ejercicio 3.3 ***(Subasta de primer precio, 25 puntos)*** *Considera un modelo bien sencillo de subastas. Hay 2 jugadores competiendo por la compra de un producto. Los jugadores pueden tener valoración alta o baja por el producto. Cada jugador valora el producto de la subasta en* \$14 *con probabilidad* 1/4 *y valoran el producto en* \$4 *con probabilidad* 3/4*. Cada jugador conoce su valoración, pero no la valoración de su oponente; cada jugador solo sabe que su oponente tienen valoración alta con probabilidad* 1/4 *y valoración baja con probabilidad* 3/4*.*

Supón que el mecanismo de venda del producto es una subasta primer precio, así que el participante que hace la mayor oferta gana el producto y paga su oferta. Para simplificar el problema, supón que los jugadores solo pueden elegir las siguientes ofertas: \$1 *o* \$6*. Si los participantes hacen exactamente la misma oferta, se asume que el participante gana el producto con probabilidad* 1/2 *y el participante ganador paga su oferta, mientras que el perdedor no paga nada.*

Supón que los agentes hacen sus ofertas simultáneamente.

a) (5 puntos) Enumere todas las estrategias disponibles para cada jugador. ***Pauta:*** *Cada jugador puede elegir 4 estrategias distintas:*

- *i) Hacer oferta de* \$1 *independiente de su tipo*
- *ii) Hacer oferta de* \$6 *independiente de su tipo*
- *iii) Hacer oferta de* \$1 *cuando tiene valoración alta (\$14) y acer oferta de* \$6 *cuando tiene valoración baja (\$4)*
- *iv) Hacer oferta de* \$6 *cuando tiene valoración alta (\$14) y acer oferta de* \$1 *cuando tiene valoración baja (\$4)*

b) (10 puntos) ¿Cuáles de estas estrategias serían estrictamente dominadas? Justifique su respuesta. ***Pauta:*** *Un agente con valoración \$4 nunca tendría incentivos en hacer una oferta de \$6, ya que, en este caso recibe un pago esperado negativo independientemente de la estrategia adoptada por su oponente (¿por qué?), mientras que si hiciera una oferta de* \$1 *obtendría un pago esperado mayor o igual a cero para toda estrategia elegida por su oponente. Por lo tanto, las estrategias aii y aiii son estrictamente dominadas por las estrategias aiv y ai, respectivamente.*

Finalmente, uno puede mostrar que, si un agente tiene valoración alta, su mejor respuesta siempre será elegir una oferta de \$6. De hecho, en la situación donde es más ventajoso elegir una oferta de \$1 *(cuando su oponente adopta la estrategia ai) elegir una oferta baja cuando uno tiene una valoración alta resulta en un pago esperado de* $\frac{1}{2}(14-1) = 6.5$*, mientras que si eligiera una oferta de* \$6*, obtendría un pago de* $14 - 6 = 8$*. Por lo tanto, la estrategia ai es estrictamente dominada por la estrategia aiv.* ***Puntaje: 4 puntos si el alumno detecta solo una estrategia dominada y lo justifica bien, 8 puntos si detecta solo 2 estrategia dominadas y lo justifica bien.***

[1] This game has other Bayesian Nash equilibria, such as $\{(\text{Not Transact}), (\text{Not Transact}, \text{Not Transact})\}$, but these type of equilibria are not very robust, as they involve having the seller playing a weakly dominated strategy.

c) *(10 puntos) Encuentre todos los equilibrios de Nash Bayesianos para este juego.* ***Pauta:*** ***Solución 1:*** *Como aiv es una estrategia estrictamente dominante, ambos jugadores seleccionaren esta estrategia constituye el único Equilibrio de Nash Bayesiano del juego.*

Solución 2: *Supón que el jugador 1 adopta la estrategia aiv. En este caso, si el jugador 2 es del tipo alto (o sea, si tiene alta valoración por el producto), su pago esperado de hacer una oferta alta es*

$$\frac{3}{4}(14-6)+\frac{1}{4}\frac{1}{2}(14-6)=7,$$

mientras que su recompensa esperada de hacer una oferta baja está dada por

$$\frac{3}{4}\frac{1}{2}(14-1)=4.875,$$

así que, el jugador 2 tiene incentivos en hacer una oferta alta (de \$6) cuando es del tipo alto.

Igualmente, uno puede ver fácilmente que si el jugador tuviera una valoración baja, tendría incentivos en hacer una oferta de \$1 (independiente de la estrategia de su oponente).

Por eso se concluye que la mejor respuesta del jugador 2 es adoptar la estrategia aiv (¿por qué?). Por simetría, el jugador 1 no tendría incentivos en desviarse, por lo que se concluye que ambos jugadores elegir la estrategia aiv es un eq. de Nash Bayesiano.

Para asegurarse de que uno encuentra todos los equilibrios del juego, uno debería repetir el mismo procedimiento suponiendo que el jugador 1 adoptara alguna de las otras estrategias que no fueron detectadas como dominadas en el ítem anterior. Por ejemplo, si yo no mi hubiera dado cuenta que la estrategia ai era dominada, yo supongo que el jugador 1 adopta esta estrategia, busco la mejor respuesta del jugador 2, y veo si, dada esta mejor respuesta, el jugador 1 tendría incentivos en desviarse.

4

Coordinación

Ejercicio 4.1 *(Coordinación cuando los incentivos están alineados) Supón que hay 2 socios en una empresa: socio 1 y socio 2 que interactúan una solo vez. Los socios eligen simultáneamente su nivel de esfuerzo, donde $e_i \in \{0, 1\}$ es el nivel de esfuerzo del socio $i \in \{0, 1\}$.*

Si ambos agentes se esfuerzan, es decir, si ambos eligen $e_i = 1$, ambos reciben un beneficio igual a 10. Pero si por lo menos uno no se esfuerza, no reciben este beneficio.

Además, con probabilidad $3/4$ un agente puede tener un costo de esfuerzo c_i igual a 4, y con probabilidad $1/4$ tienen un costo de esfuerzo igual a 8. Por lo tanto, el pago de cada agente como función de su esfuerzo y sus costos están dados por

$$\pi_i(e_1, e_2, c_1, c_2) = 10e_1e_2 - c_1e_1 - c_2e_2.$$

a) Encuentre los equilibrios del juego suponiendo que, al momento de tomar sus decisiones los agentes conocen ambos costos, y calcule los pagos esperados de cada agente en equilibrio. ¿Cuál de estos equilibrios sería más eficiente y, por lo tanto, más probable de ser jugado en la práctica? ***Pauta:*** *Este juego admite múltiples EN. De hecho, dada cualquier realización de costos, si uno se esfuerza, la mejor respuesta para el otro jugador es esforzarse, ya que*

$$10 \times 1 \times 1 - c_i \times 1 - c_{-i} \times 1 > 10 \times 0 \times 1 - c_i \times 0 - c_{-i} \times 1,$$

donde $c_i \in \{4, 8\}$ es el costo del socio y $c_{-i} \in \{4, 8\}$ es el costo del otro socio. Similarmente, independientemente de la configuración de costos, si uno socio no se esfuerza, el otro tiene incentivos en no esforzarse, ya que

$$10 \times 0 \times 0 - c_i \times 0 - c_{-i} \times 0 = 0 > 10 \times 1 \times 0 - c_i \times 1 - c_{-i} \times 0 = -c_i.$$

Sin embargo, el único EN eficiente consisten en esforzarse solo cuando ambos socios tienen costo bajo, es decir, costo $c_i = 4$.

b) Ahora imagine que los socios solo conocen su costo, pero no el costo del otro socio. Encuentre los equilibrios de Nash Bayesianos para este caso, y indique cuales de ellos sería los más eficientes. ***Pauta:*** *En este juego, los agentes pueden elegir 4 estrategias distintas:*

i) No esforzarse independientemente de su costo.

ii) Esforzarse solo cuando tienen costo bajo.

iii) Esforzarse solo cuando tienen costo alto.

iv) Esforzarse independientemente de su costo.

Intuitivamente, la estrategia biii no es muy inteligente, ya que uno tendría más incentivos en esforzarse cuando su costo de esfuerzo es bajo. De hecho, uno puede mostrar que esta estrategia nunca es una mejor respuesta a la estrategia adoptada por su rival, por lo que no vamos a considerarla en el análisis.

Supón que el socio 1 adopta la estrategia bi. En este caso, el socio 2 claramente tiene incentivos en también adoptar la estrategia bi (¿por qué?). Por lo tanto, un EN Bayesiano (ENB) consiste en ambos jugadores no esforzarse. En este equilibrio, ambos jugadores terminan con un pago esperado de 0.

De forma semejante y utilizando el mismo argumento del ítem anterior, uno puede ver claramente que si uno agente adopta la estrategia biv, el otro también tiene incentivos en adoptar la estrategia biv. Por lo tanto, ambos socios eligiendo la estrategia biv es un ENB. Ojo que el pago esperado de este equilibrio es

$$10 - \underbrace{2(\frac{3}{4} \times 4 + \frac{1}{4} \times 8)}_{\textit{costos esperados}} = 0,$$

por lo que este equilibrio es igualmente eficiente comparado con el equilibrio en que los agentes nunca se esfuerzan.

Pero veamos si logramos encontrar un más eficiente. Supón que el socio 1 adopta la estrategia bii. Entonces si el socio 2 tiene costo bajo (es decir, $c_2 = 4$), su pago esperado en elegir esfuerzo alto está dado por

$$\frac{3}{4}(10-4) + \frac{1}{4}0 - 4 = \frac{1}{2},$$

mientras que su pago esperado en no esforzarse estaría dado por

$$\frac{3}{4}(-4) + \frac{1}{4}0 = -3,$$

así que, en esta contingencia (es decir, cuando el socio 2 tiene costo bajo), el socio 2 tendría incentivos en adoptar la estrategia bii.

Veamos ahora la mejor respuesta del socio 2 cuando este tiene costo alto. En este caso, el pago esperado del socio 2 de no esforzarse estaría dado por

$$\frac{3}{4}(-4) + \frac{1}{4}0 = -3,$$

mientras que su pago esperado de esforzarse estaría dado por

$$\frac{3}{4}(10-4) + \frac{1}{4}0 - 8 = -3.5,$$

por lo que el socio 2 preferiría no esforzarse. Por lo tanto, también en esta contingencia el socio 2 tendría incentivos en seguir la estrategia bii.

Por lo tanto se concluye que ambos eligiendo la estrategia bii es un ENB. Sin embargo, este equilibrio genera un pago esperado de solamente

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 (10-4-4) + 2\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)(-4) = -3/8,$$

lo que es menor a 0, el pago esperado obtenido si ambos agentes eligen siempre esforzarse o siempre no esforzarse. Por lo tanto, ambos agentes eligiendo la estrategia biv o ambos eligiendo la estrategia bi constituyen los equilibrios más eficientes.

c) *Imagine que, igual que en ítem anterior, los socios no conocen el costo del otro socio, y con probabilidad $p > 8/15$ conocen su propio costo. Encuentre 3 equilibrios de Nash Bayesianos para este juego, y indique cuál de ellos serían lo más eficiente para $p = 2/3$.* ***Pauta:*** *Vimos en los ítems a y b hemos visto que es un equilibrio para ambos nunca esforzarse independiente de los señales observados. También es un equilibrio siempre esforzarse independiente de los señales observados. Es decir, en ambos casos hay dos equilibrios donde los agentes ignoran los señales observados. Si nosotros disminuimos el nivel de información de los agentes, estes tendrán aún más incentivos en ignorar los señales observados, ya que son menos precisos. Por lo tanto, tenemos que acá estos dos perfiles de estrategia seguirán siendo un equilibrio.*

Los pagos esperados de los agentes cuando ambos adoptan la estrategia de esforzarse independientemente de sus señales estaría dado por

$$10 - 2(\frac{3}{4} \times 4 + \frac{1}{4} \times 8) = 0,$$

el que es igual al pago esperado cuando nadie se esfuerza independientemente de sus señales:

$$0.$$

Veamos ahora, si logramos encontrar otro equilibrio. Supón que el socio 1 solo se esfuerza cuando recibe una señal de que él tiene costo bajo. En este caso, cuando el socio 2 tiene costo bajo, su pago esperado en elegir esforzarse estaría dado por

$$\frac{3}{4}p(10-4) + \left(1 - \frac{3}{4}p\right)0 - 4 = \frac{18p - 16}{4},$$

mientras si optara por elegir esforzarse obtendría un pago de

$$\frac{3}{4}p(-4) = -3p.$$

Uno puede ver claramente que, cuando $p > 8/15$, tenemos que

$$\frac{18p - 16}{4} > -3p,$$

por lo que el socio preferiría esforzarse cuando tiene un costo bajo.

Ahora miremos el caso en que el socio tiene un costo alto. En este caso, su pago esperado en no esforzarse estaría dado por

$$\frac{3}{4}p(-4) = -3p,$$

mientras que su pago esperado por esforzarse estaría dado por

$$\frac{3}{4}p(10-4) + (1 - \frac{1}{4}p)0 - 8 = \frac{18p}{4} - 8,$$

el que siempre es menor que $-3p$ para todo $p \in [0, 1]$. Por lo tanto, concluimos que, si el socio 1 adopta la estrategia de elegir esforzarse solo cuando observa costo bajo, el socio 2 tiene incentivos en hacer lo mismo.

Sin embargo, este equilibrio genera un pago esperado de solamente

$$\left(\frac{3}{4}\underbrace{p}_{\frac{2}{3}}\right)^2 (10-4-4) + 2\left(\frac{3}{4}\underbrace{p}_{\frac{2}{3}}\right)\left(1 - \frac{3}{4}\underbrace{p}_{\frac{2}{3}}\right)(-4) = -3/2,$$

lo que es menor a 0, el pago esperado obtenido si ambos agentes eligen siempre esforzarse o siempre no esforzarse. Por lo tanto, ambos agentes eligiendo la estrategia biv o ambos eligiendo la estrategia bi constituyen los equilibrios más eficientes.

d) *Imagine que ahora los socios no conocen ninguno de sus costos. Pero antes de tomar sus decisiones reciben una señal: cuando el agente tiene cost $c_i \in \{4, 8\}$, con probabilidad $p = 5/6$ recibe una señal que indica que su costo es c_i, pero con probabilidad $p = 1/6$ recibe una señal que indica que su costo es $c_j \in \{4, 8\}$ con $c_j \neq c_i$ (es decir, con probabilidad $1/6$ recibe una información equivocada). Encuentre 3 equilibrios de Nash Bayesianos para este juego.* ***Obs.: Acá uno debe utilizar la fórmula de probabilidad condicional, es decir*** $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$.

e) *Encuentre los equilibrio del juego suponiendo que, al momento de tomar sus decisiones los agentes no conocen ningún de los costos y tampoco reciben una señal de cuál serían sus costos, y calcule los pagos esperados de cada agente en cada uno de los equilibrios. Cuál de estos equilibrio es Pareto eficiente y, por lo tanto, más probable de ser jugado en la práctica.*
Pauta: *Este sería el caso más sencillo: en este caso podemos representar el juego conforme la tabla abajo, donde cada entrada de pagos corresponden a los pagos esperados de cada agente:*

J1\J2	No Esfuerzo	Esfuerzo
No Esfuerzo	(0,0)	(-5,-5)
Esfuerzo	(-5,-5)	(0,0)

Por lo que se puede ver que los equilibrios serían ambos agentes elegir no esforzarse o ambos elegir esforzarse.

Ejercicio 4.2 *(Coordinación de ventas de franjas horarias en los aeropuertos) Para que las empresas de aviación puedan operar en un aeropuerto, deben tener licencias de slots para despegar y aterrizar sus vuelos. Imagina que una empresa de aviación tiene dos slots: slot 1 y slot 2, que puede vender a las empresas de aviación A, B o C.*

La empresa A solo está interesada en comprar el slot 1, mientras que la empresa B solo está interesada en comprar el slot 2. Ya la empresa C, está interesada en comprar ambos slots. Más precisamente, la empresa C valora tener ambos slots en \$8 y valora tener solo uno de los slots en \$0 (es decir, está dispuesta a pagar \$8 por ambos slots y \$0 por solo uno de los slots).

Con probabilidad $1/2$, la empresa A valora el slot 1 en \$8, y con probabilidad $1/2$ valora el slot 1 en \$1. Similarmente, con probabilidad $1/2$, la empresa B valora el slot 2 en \$8, y con probabilidad $1/2$ la valora en \$1.

La empresa de aviación que está vendiendo los slots encarga a dos de sus funcionarios del equipo de ventas, Juana y Mario, hacer la venta. Juana se pone encargada en intentar vender el slot 1 a la empresa A y Mario está encargado de intentar vender el slot 2 a la empresa B. Si ambos terminan no vendiendo sus respectivos slots, ambos slots son vendidos a la empresa C al precio de \$8.

Juana observa el tipo de la firma A (es decir, si la firma A está dispuesta a pagar \$8 o \$1 por el slot 1), mientras que Mario observa el tipo de la firma B (es decir, si la firma B está dispuesta a pagar \$8 o \$1 por el slot 2). Pero Juana no observa el tipo de la firma B y Mario tampoco observa el tipo de la firma A.

Observado el tipo de sus firmas, Juana y Mario deben decidir simultáneamente si venden a sus respectivas firmas o no. Sus pagos son proporcionales a los ingresos que reciben por las *ventas. Más precisamente, si Juana vende su slot al precio* $p_J \in \{1, 8\}$ *y Mario vende su slot al precio* $p_M \in \{1, 8\}$*, tanto Juana como Mario reciben un payoff de*

$$p_J + p_M.$$

Si solo uno de los agentes vende su slot al precio $p_i \in \{1, 8\}$*, **ambos** reciben un payoff de*

$$p_i.$$

Si ninguno de los agentes vende su slot a la empresa que les fue asignada negociar, entonces el jefe de Juana y Mario vende ambos slots a la empresa C*, lo que genera un payoff de*

$$\$8,$$

tanto para Juana como para Mario.

a) *(20 puntos) Encuentre **todos** los equilibrios de este juego (en estrategias puras).* ***Pauta:***

I) *Supón que Mario elige vender solo si su comprador tiene valoración alta.*
En este caso, si el comprador de Juana tiene valoración alta y Juana decide vender, tendrá un payoff esperado de

$$8 + \frac{1}{2}8 = 12,$$

mientras que si no vendiera tendría un payoff esperado de

$$\frac{1}{2}8 + \frac{1}{2}8 = 8,$$

por lo que preferiría vender.
Pero si el comprador potencial de Juana tuviera una valoración baja, el payoff esperado de Juana en vender sería

$$1 + \frac{1}{2}8 = 5,$$

mientras que si no vendiera tendría un payoff esperado de

$$\frac{1}{2}8 + \frac{1}{2}8 = 8,$$

por lo que preferiría no vender.
Por lo tanto, concluimos que: si Mario solo vende si su comprador tiene valoración alta, Juana solo vende si su respectivo comprador tiene valoración alta. Por simetría, Mario no tiene incentivos en hacer desviación, por lo que se concluye que uno de los equilibrios consiste en cada vendedor vender solo si su respectivo comprador tiene valoración alta.

II) *Supón que Mario vende a su respectivo comprador independientemente de su valoración. En este caso, uno puede ver fácilmente que Juana también tendría incentivos en vender sí o sí. De hecho, el único potencial beneficio en no vender es la posibilidad de vender los 2 slots al comprador* C*. Pero la venta de ambos slots al comprador* C *nunca será posible si Mario siempre vende su slot al comprador* B*. Por lo tanto, se concluye que otro equilibrio es: "ambos venden su slot a sus respectivos compradores potenciales, independientemente de sus tipos".* ***Obs.: Uno también puede contestar a esta pregunta utilizando los mismos pasos del ítem anterior.***

III) Supón que Mario nunca vende su slot, independientemente del tipo del comprador B. En este caso, el mayor payoff que María puede obtener si vende es \$8, mientras que si no vende, obtiene un payoff de \$8, por lo Juana tendría incentivos en no vender, por lo que se concluye que ambos el perfil de estrategia en que ambos no venden, independientemente de sus tipos también es un equilibrio. ***Ojo que, en este caso, Juana está indiferente entre siempre vender y vender solo cuando su comprador es del tipo alto. Sin embargo, si Juana elige la estrategia "solo vender cuando su comprador tiene valoración alta", Mario tiene incentivos en hacer desviación y "solo vender cuando su comprador tiene valoración alta", conforme argumentado en el primero ítem.***

IV) En principio también deberíamos considerar la estrategia "solo vender si mi comprador tiene valoración alta". Sin embargo, esta estrategia no es muy inteligente, así que, jamás tendremos un equilibrio en que uno de los agentes elige tal estrategia.

b) (10 puntos) Encuentre los payoffs esperados de cada equilibrio encontrado en el ítem anterior y determine cuál de los equilibrios encontrados sería el más eficiente, es decir, determine cuál de ellos generaría el mayor payoff esperado a los empleados. ***Pauta:***

- *Payoff esperado del equilibrio en que cada jugador solo vende si su respectivo comprador tiene valoración alta:*
$$\frac{1}{2}\frac{1}{2}16 + 2\frac{1}{2}\frac{1}{2}8 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}8 = 10.$$
- *Payoff esperado del equilibrio en que cada jugador siempre vende independiente de la valoración de su respectivo comprador:*
$$\frac{1}{2}\frac{1}{2}16 + 2\frac{1}{2}\frac{1}{2}9 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}2 = 9.$$
- *Payoff esperado del equilibrio en que cada jugador nunca vende independiente de la valoración de su respectivo comprador:*
$$8.$$

Por lo tanto, el equilibrio más eficiente es aquello en que uno vende solo si la valoración de su respectivo comprador es alta.

c) (10 puntos) Imagine que el jefe de la empresa decide ofrecer un mecanismo de compensación en torneos semejante a lo que hizo la empresa de energía Enron décadas atrás: aquello que logra vender su respectivo slot al mayor precio mantiene su trabajo, el otro es despedido. En caso de empate, cada empleado es despedido con probabilidad $1/2$. En palabras, comente cuál podría ser una consecuencia negativa de se implementar una política de este tipo en este contexto. ***Pauta:***

Posibles respuestas:

- ***Respuesta más completa y relacionada al modelo:*** *Puede no ser ventajoso hacer una venta. De hecho, en el ítem anterior, hemos visto que el equilibrio que genera mayores ganancias en valor esperado es aquello en que cada agente solo vende si su respectivo potencial comprador tiene valoración alta. Pero con esta política de torneos, tanto Juana como Mario tienen incentivos en hacer la venta sí o sí (es decir, vender, no importa el tipo del comprador, se convierte en una estrategia dominante a ambos* *jugadores), lo que disminuiría las ganancias esperadas de la empresa. Esto fue justamente algo que perjudicó Enron en la vida real: sus funcionarios tenían incentivos en hacer transacciones sí o sí, independiente del contrato firmado ser beneficioso a la empresa en el largo plazo o no, para evitar que fueran despedidos.*

- ***Aspectos no considerados en el modelo:***
  - ***Aspectos Psicológicos:*** *Tal política podría generar estrés y ansiedad a los empleados, lo que podría disminuir su productividad o dañar la reputación de la empresa.*
  - ***Sabotaje:*** *Un empleado podría intentar impedir la venta de su colega para así ganar el torneo.*
  - ***Problema de retención:*** *Con una política draconiana de este tipo, menos personas calificadas estarían dispuestas a trabajar en tal empresa (semejante a lo que está ocurriendo hoy día con Twitter).*

d) *(10 puntos) Muchos economistas han defendido la utilización de un mecanismo de subastas para asignar los slots en los aeropuertos. El mecanismo funcionaría semejante al mecanismo de subastas utilizados para comprar y vender licencias de bandas del spectrum de radio en los EE.UU. En una versión simplificada del mecanismo, cada empresa elegiría su disposición a comprar y vender por cada combinación de slots, y el subastador elegiría la asignación que "maximizara" los ingresos de los vendedores y compradores a través de un algoritmo. Comente cómo un mecanismo centralizado como este podría ayudar en el proceso de coordinación de ventas.* ***Pauta: Posibles respuestas:***

- *Con una subasta, la empresa lograría descubrir más rápidamente la disposición a pagar de cada comprador potencial a través de las ofertas que ellos hacen en la subasta, lo que le ayudaría a la empresa elegir su estrategia óptima de precio de reserva (es decir, el mínimo precio que estaría dispuesta a vender cada slot).*
- *Con este mecanismo, el subastador ya calcularía inmediatamente, a través de su algoritmo, la asignación que maximizaría las ganancias del vendedor, por lo que este no tendría que gastar tiempo pensando estratégicamente a quien vender, tampoco gastaría tiempo recolectando información al respecto de la disposición a pagar de los compradores, ya que, dependiendo del tipo de subasta, los agentes tienen una estrategia dominante de revelar sus verdaderas preferencias, en caso del vendedor, este tendría incentivos en revelar sus verdaderas preferencias sobre el mínimo que estaría dispuesto a vender cada slot (en este caso, 0).* ***Obs.: No hemos visto esto en las clases, pero en el mecanismo de Vickrey–Clarke–Groves (VCG), los agentes tienen una estrategia débilmente dominante de revelar sus verdaderas disposiciones a comprar y vender al subastador. A pesar de que no hemos visto el mecanismo VCG en las clases, en el enunciado se les digo que el subastador ya elige automáticamente la asignación que "maximizaría" las ganancias de cada vendedor, por lo que es posible deducir esta respuesta por el enunciado, es decir, que cada empresa puede "relajar" y alienar su decisión de comprar y vender al subastador, una vez que se le haya reportado sus verdaderas preferencias. También hemos visto en las clases un par de mecanismos en que los agentes tenían una estrategia dominante, como el mecanismo de Gale y Shapley: los alumnos tienen incentivos en revelar sus verdaderas preferencias al coordinador del matching y dejar a su cargo elegir la asignación final a través del algoritmo de Gale y Shapley. Otro mecanismo en que los agentes tienen una estrategia dominante es la subasta de segundo***

precio, que es un caso particular del mecanismo VCG cuando hay solo 1 producto y 1 vendedor: cada comprador tiene incentivos en revelar al subastador su disposición máxima a pagar por el producto, independientemente de la decisión tomada por los otros agentes.

- *La subasta ayuda a las empresas descubrir quién está dispuesto a vender y quién está dispuesto a comprar los slots: es decir, el mecanismo elimina la necesidad de que los agentes hagan un networking para saber quién está en el mercado.*

Ejercicio 4.3 ***(Venta de bandas de frecuencia electromagnéticas, 75 puntos)*** *El espectro de radio es un commodity invisible pero esencial para las empresas de telecomunicación. De hecho, para que puedan transmitir un señal sin causar interferencia, una firma debe ser la dueña de los derechos de transmisión para tal frecuencia en una determinada area. Cómo existe un numero limitado de intervalos de frecuencia, estas deben ser asignadas de manera eficiente. Por lo general esto se logra a través de subastas complejas en las cuales multiples compradores y vendedores transan sus licencias de espectro, o a través de la venta directa de las licencias entre las empresas interesadas. La demanda y la propiedad de estas licencias cambian constantemente, muchas veces debido a cambios tecnológicos. Recientemente, por ejemplo, se ha observado un aumento en la demanda por frecuencias de radio medianas por empresas de celular, como Entel, VTR y WOM para que estas puedan consolidar su red de 5G.*[1]

Imagínate que un canal de televisión tiene 2 bandas de frecuencia, las bandas 1 y 2, que puede vender a las empresas de telecomunicación A, B y C.

La empresa A solo está interesada en comprar la banda 1, mientras que la empresa B solo está interesada en comprar la banda 2. Ya la empresa C, está interesada en comprar ambas bandas. Más precisamente, la empresa C valora tener ambas bandas en \$5 y valora tener solo una banda en \$0 (es decir, está dispuesta a pagar \$5 por ambas bandas y \$0 por solo una banda).

Con probabilidad $1/2$, la empresa A valora la banda 1 en \$10, y con probabilidad $1/2$ valora la banda 1 en \$2. Similarmente, con probabilidad $1/2$, la empresa B valora la banda 2 en \$10, y con probabilidad $1/2$ la valora en \$2.

El canal de televisión que está vendiendo las bandas encarga a dos de sus funcionarios del equipo de ventas, Juan y María, hacer la venta. Juan se pone encargado en intentar vender la banda 1 a la empresa A y a María está encargada de intentar vender la banda 2 a la empresa B. Si ambos terminan no vendiendo sus respectivas bandas, ambas bandas son vendidas a la empresa C al precio de \$5.

Juan observa el tipo de la firma A (es decir, si la firma A está dispuesta a pagar 10 o 2 por la banda 1), mientras que María observa el tipo de la firma B (es decir, si la firma B está dispuesta a pagar 10 o 2 por la banda 2). Pero Juan no observa el tipo de la firma B y María no observa el tipo de la firma A.

Observado el tipo de sus firmas, Juan y María deben decidir simultáneamente si venden a sus respectivas firmas o no. Sus pagos son proporcionales a los ingresos que reciben por las ventas. Más precisamente, si Juan vende su banda al precio $p_J \in \{2, 10\}$ y María vende su banda al precio $p_M \in \{2, 10\}$, tanto Juan como María reciben un pago de

$$p_J + p_M.$$

Si solo uno de los agentes vende su banda al precio $p_i \in \{2, 10\}$, ambos reciben un pago de

$$p_i.$$

[1] Las frecuencias altas son buenas para transmitir una alta cantidad de datos, pero no puede viajar largas distancias. Las frecuencias bajas son buenas para transmitir señales a larga distancia, pero no son buenas para transmitir largas cantidades de datos. Las frecuencias medianas son consideradas ideales para el 5G.

Si ninguno de los agentes venden su banda a la empresa que les fue asignada negociar, entonces Juan y María recurren a su "outside option" y venden ambas las bandas a la empresa C, lo que genera un pago total de

$$\$5,$$

Tanto para Juan como para María.[2]

a) *(10 puntos) Enumere las posibles estrategias de Juan y María para este juego.* ***Pauta:*** *Cada jugador puede adoptar las siguientes estrategias:*

   i) *Vender independientemente de la valoración de su empresa.*

   ii) *No vender independientemente de la valoración de su empresa.*

   iii) *Vender solo si su respectiva empresa tiene valoración alta (\$10), de lo contrario, no vender.*

   iv) *Vender solo si su respectiva empresa tiene valoración baja (\$2), de lo contrario, no vender.*

b) *(10 puntos) Encuentre los dos Equilibrios de Nash Bayesianos para este juego. Muestre su trabajo.* ***Pauta:*** *Claramente si el un jugador adopta la estrategia ai el otro tendrá incentivos en adoptar la misma estrategia ai, ya que, si uno jugado siempre vende, independientemente de su tipo, el beneficio marginal del otro jugador de no vender es cero (ya que solo una banda tiene cero valor a la empresa C), mientras que el beneficio marginal de vender a su respectiva empresa es positivo. Por lo tanto, ambos eligiendo la estrategia ai constituye un ENB.*

   Obviamente, si la valoración de su respectiva empresa es \$10 uno siempre debe vender. De hecho, en la mejor de las hipoteses, si no vende obtiene un máximo de \$5, mientras que el beneficio marginal de no vender sería \$10. por lo tanto, podemos ignorar las estrategias aii y aiv, ya que son estrictamente dominadas por las estrategias aiii y ai, respectivamente.

   Ahora supón que Juan adopta la estrategia de solo vender si la valoración de su respectiva empresa es alta (es decir, adopta la estrategia aiii). Cómo argumentado en el párrafo anterior, si la valoración de la empresa que corresponde a María es alta, ella tendrá incentivos en vender. Pero si su valoración es baja, su pago esperado de no vender está dado por

$$\underbrace{\frac{1}{2}}_{\textit{prob. Juan no vende}} \times 5 + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\textit{prob. Juan vende}} \times 10 = 7.5,$$

   mientras que su pago esperado de vender está dado por

$$\underbrace{\frac{1}{2}}_{\textit{prob. Juan no vende}} \times 2 + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\textit{prob. Juan vende}} \times (10 + 2) = 7,$$

   así que, María preferiría no vender.

   Por lo tanto, se concluye que si Juan adoptara la estrategia aiii, María tendría incentivos en adoptar la misma estrategia. Por simetría, Juan no tendría incentivos en desviarse, por lo que tenemos que ambos eligiendo la estrategia aiii también es un equilibrio.

[2] En este contexto el "outside option" es el costo de oportunidad de negociar con las empresas A o B.

c) (10 puntos) ¿Cuál sería el pago esperado de Juan y María en cada equilibrio? (hay que encontrar el pago esperado no condicional, es decir, antes de los agentes conocieren el tipo de las empresas con las cuales están negociando). ***Pauta:*** *Supón que Juan y María ambos eligen la estrategia ai. En este caso, sus pagos esperados estarían dados por*

$$\underbrace{\frac{1}{2}10+\frac{1}{2}2}_{\text{ingresos esperados de Juán}} + \underbrace{\frac{1}{2}10+\frac{1}{2}2}_{\text{ingresos esperados de María}} = 12,$$

mientras que si ambos adoptaran la estrategia aiii, sus pagos esperados estarían dados por

$$\underbrace{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}_{\text{ambos tienen valoración alta}} \times 20 + \underbrace{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}_{\text{ambos tienen valoración baja}} \times 5 + \underbrace{2\cdot\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}_{\text{solo uno tiene valoración alta}} \times 10 = 45/4 = 11.25,$$

d) (5 puntos) Basado en su respuesta al ítem anterior, ¿cuál equilibrio sería más eficiente y, por lo tanto, más probable de ser jugado en la práctica? ***Pauta:*** *El equilibrio en que ambos venden no importando su tipo sería más eficiente, ya que resulta en un mayor pago esperado.*

e) (10 puntos) Ahora imagínate que el costo de descubrir los tipos de las empresas A y B es extremadamente alto, por lo que Juan y María deben tomar las acciones de vender o no vender, sin conocer el tipo de cada empresa (es decir, sin conocer el precio final que van a terminar vendiendo). Encuentre la estrategia dominante de Juan y María para este juego. ***Pauta: Solución 1:*** *Al vender, uno genera un ingreso de* $\frac{1}{2}10+\frac{1}{2}2 = 6$ *por su venta, es decir, uno genera un beneficio marginal de \$6, mientras que si no vendiera, el máximo pago que lograría obtener sería 5, por lo que cada vendedor tiene una estrategia dominante en vender a su respectiva empresa.*

Solución 2: *Escribir la tabla de pagos* 2×2 *con los pagos esperados, y subrayar las mejores respuestas de cada jugador para ver que cada jugador tiene una estrategia dominante de vender.*

f) (10 puntos) Encuentre los pagos esperados de equilibrio del ítem anterior, y los compare con el pago esperado de equilibrio más alto obtenido en el ítem c. Explique intuitivamente (y en pocas palabras) por qué un pago esperado es mayor que el otro. ***Pauta:*** *Los pagos esperados son los mismos, ya que en el equilibrio más eficiente obtenido en el ítem c los agentes tienen incentivos en ignorar su señal.*

g) (10 puntos) Ahora imagine el extremo opuesto: Juan y María conocen el tipo de las empresas con las cuales negocian y además pueden comunicar el tipo de estas empresas entre ellos, así que, tanto Juan como María conocen el tipo de ambas empresas A y B. Supón que ellos deciden simultáneamente si venden o no sus respectivas bandas (después de conocer el tipo de ***ambas*** *empresas). Encuentre los EN para este juego. ¿Cuál de estos equilibrios sería más eficiente? Justifique su respuesta.* ***Pauta: Solución 1:*** *Obviamente, si por lo menos uno de los agentes tiene valoración alta, es beneficioso que el agente que tiene valoración alta transar, ya que el beneficio marginal de transar es \$10, mientras que el máximo beneficio marginal de no transar es \$5. Resta saber qué hacer si uno de los agentes tiene valoración baja. En este caso, uno puede ver que tal subjuego tiene 2 equilibrios: ambos eligen no vender (lo que sería lo más eficiente) y ambos eligen vender (lo menos eficiente). Por lo tanto, hay al todo 2 equilibrios:*

Solución 2 (que dá más trabajo): *Construir una tabla de pagos para cada contingencia, es decir, cuando ambos tienen valoración alta, ambos tienen valoración baja, y cuando solo* *uno de ellos tiene valoración alta. Cuando uno de los agentes tiene valoración alta, este agente tiene una estrategia dominante en vender. Por eliminación iterada de estrategias dominadas, el otro agente deberá vender. Si ambos tienen valoración baja, habrá dos equilibrios para este subjuego: ambos eligen no vender (lo que sería lo más eficiente) y ambos eligen vender (lo menos eficiente).*

I) Los vendedores ignoran las señales y siempre venden, no importando sus tipos

II) Cada jugador decide vender si por lo menos una de las empresas A o B tiene valoración alta, de lo contrario no venden.

h) (10 puntos) Encuentra los pagos esperados de equilibrio más eficiente obtenido en el ítem anterior, y los compara con el pago esperado de equilibrio más alto obtenido en el ítem c. Explique intuitivamente (y en pocas palabras) por qué un pago esperado es mayor que el otro.
Pauta: *Ya hemos visto que el pago esperado obtenido cuando los agentes ignoran su señal está dado por \$12. Mientras, si ambos adoptan la estrategia gII, reciben un pago esperado de*

$$\underbrace{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}_{\text{ambos tienen valoración alta}}\times 20+\underbrace{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}_{\text{ambos tienen valoración baja}}\times 5+\underbrace{2\cdot\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}_{\text{solo uno tiene valoración alta}}\times 12 = 49/4 = 12.25,$$

por lo que el equilibrio en que ambos adoptan la estrategia gII es más eficiente. Por lo tanto, este equilibrio es más eficiente que los equilibrios obtenidos cuándo los agentes no conocían ambos tipos. Esto ocurre por qué, con más información uno puede potencialmente tomar mejores decisiones. Obviamente, si la información no es tan relevante, más información podría no ayudar a los agentes mejorar sus pagos esperados. Pero en este ejemplo, la información adicional sí es relevante, ya que posibilita que los vendedores hagan se coordinen para no vender en la contingencia en que ambos tienen valoración baja.

Ejercicio 4.4 *(Coordinación de clases online vs presenciales) Imagine que una escuela tiene $n \geq 2$ profesores (es decir, hay $n \in \{2, 3, 4, \cdots\}$ profesores), los que deben simultáneamente elegir si hacen una clase en formato presencial o online. Supón que el objetivo de cada profesor es aumentar el bien estar de los alumnos, así que, los incentivos de los profesores están perfectamente alineados.*

En la clase presencial los alumnos aprenden más, por lo que ellos reciben un beneficio de $20/n$ por cada clase que miran en formato presencial, mientras que solo reciben un beneficio de $6/n$ por cada clase en formato remoto. Pero la desventaja de la clase en formato presencial es que los alumnos deben arcar con un costo de transporte de desplazarse hasta el campus. Supón que, si al menos uno de los n profesores elige hacer la clase en formato presencial, todos los alumnos deben pagar un costo de transporte igual a $c = \$2$. Este costo de transporte no aumenta si más profesores eligen hacer la clase en formato presencial, ya que basta que un profesor haga la clase en formato presencial para que los alumnos tengan que ir todos a la universidad. Pero si ***todos*** *los profesores eligen hacer la clase en formato online, el costo de transporte es cero.*

Por lo tanto, los pagos de ***cada*** *profesor i están dados por*

$$\pi_i = p \cdot \frac{20}{n} + (n-p) \cdot \frac{6}{n} - 2,$$

si exactamente $p \geq 1$ profesores eligen hacer la clase en formato presencial, mientras que el pago de cada profesor estará dado por

$$\pi_i = n \cdot \frac{6}{n} = 6,$$

si ***todos*** *los profesores eligen hacer la clase en formato online (es decir, si $p = 0$).*

a) (10 puntos) Supón que $n \leq 7$. Muestre que en este caso los profesores tienen una estrategia dominante. ***Pauta:*** *Considere un profesor i y supón que $p_{-i} \geq 1$ de sus colegas deciden hacer la clase en formato presencial. En este caso, el pago del profesor en hacer una clase presencial estará dado por*

$$(p_{-i}+1)\frac{20}{n} + (n - p_{-i} - 1)\frac{6}{n} - 2,$$

Mientras que su pago en hacer una clase en formato online estará dada por

$$p_{-i}\frac{20}{n} + (n - p_{-i})\frac{6}{n} - 2.$$

Por lo tanto, el profesor tendrá incentivos en hacer una clase online ssi

$$\begin{aligned}(p_{-i}+1)\frac{20}{n} + (n - p_{-i} - 1)\frac{6}{n} - 2 &\geq p_{-i}\frac{20}{n} + (n - p_{-i})\frac{6}{n} - 2 \\ \iff \frac{20}{n} &\geq \frac{6}{n} \\ \iff 20 &\geq 6,\end{aligned}$$

lo que siempre es verdad.

Ahora supón que todos los demás profesores eligen hacer clases online (es decir, si $p_{-i} = 0$). Entonces, el profesor i tendrá incentivos en hacer clases presenciales ssi:

$$\begin{aligned}\frac{20}{n} + (n-1)\frac{6}{n} - 2 &\geq 6 \\ \iff \frac{20}{n} - 2 &\geq \frac{6}{n} \\ \iff \frac{14}{n} &\geq 2, \\ \iff n &\leq 7.\end{aligned}$$

Por lo tanto, si hay menos de 7 profesores en el total, ellos todos tienen una estrategia dominante de elegir hacer las clases en formato presencial.

b) (10 puntos) Digamos que haya una protesta en los metros de la ciudad, lo que aumenta los costos de transporte de $c = \$2$ a $c = \$10$. Suponiendo que $n \leq 7$, muestre que los profesores ya no tienen más una estrategia dominante. ***Pauta:*** *Considere un profesor i y supón que $p_{-i} \geq 1$ de sus colegas deciden hacer la clase en formato presencial. En este caso, el pago del profesor en hacer una clase presencial estaría dado por*

$$(p_{-i}+1)\frac{20}{n} + (n - p_{-i} - 1)\frac{6}{n} - 2,$$

mientras que su pago en hacer una clase en formato online estaría dado por

$$p_{-i}\frac{20}{n} + (n - p_{-i})\frac{6}{n} - 2.$$

Por lo tanto, el profesor tendrá incentivos en hacer una clase online ssi

$$\begin{aligned}(p_{-i}+1)\frac{20}{n} + (n - p_{-i} - 1)\frac{6}{n} - 2 &\geq p_{-i}\frac{20}{n} + (n - p_{-i})\frac{6}{n} - 2 \\ \iff \frac{20}{n} &\geq \frac{6}{n} \\ \iff 20 &\geq 6,\end{aligned}$$

lo que siempre es verdad. Por lo tanto, se concluye que, si por lo menos uno de los profesores hace clases en formato presencial, todos los demás tienen incentivos en hacer lo mismo.

Ahora supón que todos los demás profesores eligen hacer clases online (es decir, si $p_{-i} = 0$). Entonces, el profesor i tendrá incentivos en hacer clases presenciales ssi:

$$\begin{aligned} \frac{20}{n} + (n-1)\frac{6}{n} - 10 &\geq 6 \\ \iff \frac{20}{n} - 10 &\geq \frac{6}{n} \\ \iff \frac{14}{n} &\geq 10, \\ \iff n &\leq 1.4. \end{aligned}$$

Como $n \geq 2$, tenemos que la condición no se cumple, por lo que el profesor tendría incentivos en hacer clases en formato online. Por lo tanto tenemos que si todos los demás profesores eligen hacer clases en formato online, un profesor también tiene incentivos en hacer clases en formato online.

Por lo tanto, la estrategia óptima de un profesor va a depender de lo que hacen los demás, así que, el juego no tiene estrategias dominantes.

c) *(10 puntos) Volviendo al caso donde el costo de transporte es $c = \$2$ (es decir, cuando no hay desorden en el metro), encuentra* **todos** *los equilibrios de Nash simétricos del juego cuando $n > 7$.* ***Pauta:*** *Utilizando argumentos semejantes al utilizado en el ítem a, tenemos que si por lo menos uno de los profesores elige hacer clases en formato presencial, todos los demás tienen incentivos en hacer lo mismo, por lo que se concluye que uno de los EN es que todos hagan clases en formato presencial.*

De manera semejante, conforme argumentado en el ítem a, si todos los demás profesores hacen clases en formato online, el profesor tiene incentivos en hacer clases en formato online ssi $n \geq 7$. Como estamos suponiendo que $n > 7$, eso implica que el profesor tendría incentivos en también hacer clases online. Por lo tanto, el otro EN es que todos hagan clases en formato presencial.

Obs.: *este juego también admite equilibrio en estrategias mixtas pero no era necesario encontrarlo.*

d) *(10 puntos) ¿Cuál de los equilibrios de Nash encontrados en el ítem anterior sería el más eficiente? Justifique analíticamente.* ***Pauta:*** *El equilibrio donde todos hacen clases online genera un pago de 6 a cada jugador, mientras que el equilibrio en que todos hacen clases en formato presencial genera un pago de $20 - 2 = 18$ a todos los jugadores, por lo que el equilibrio más eficiente seria aquello en que todos los profesores hacen clases en formato presencial.*

e) *(10 puntos) ¿Cuál de los equilibrios obtenidos en el ítem c crees que sería el más probable de ser jugado en práctica? Justifique su respuesta.* ***Pauta:***

Respuesta 1: *El equilibrio donde todos los profesores hacen las clase en formato presencial, ya que este sería el equilibrio más eficiente.*

Respuesta 2: *La respuesta más correcta y más consistente con evidencias teóricas (e.j., [1]) y experimentales (e.j., [2]) sería decir que el equilibrio donde todos hacen las clases en formato presencial es más probable, ya que, cuando hay por lo menos uno profesor que decide hacer las clases en formato presencial, el óptimo a los demás es hacer lo mismo. En una situación donde hay muchos profesores, lo más probable es que por lo menos uno de* *ellos hagan clases en formato presencial. Anticipando eso, los profesores tienen incentivos en hacer clases en formato presencial.* ***Obs.:*** *Ojo que, si el costo de transporte fuera extremadamente alto, digamos \$16, esto sería el equilibrio menos eficiente. Aún así, sería más probable que los profesores eligieran este equilibrio, ya que hay una probabilidad alta de que por lo menos uno de los profesores vaya a la escuela dictar sus clases. Este es un ejemplo interesante que muestra que a veces el equilibrio más eficiente ni siempre es el más jugado en la práctica.*

f) (10 puntos) Explique cómo un sistema de coordinación centralizado podría ayudar a los profesores elegir una asignación más eficiente. ***Pauta:*** *Cuando hay múltiples equilibrios en un juego, como en este ejemplo, los agentes pueden no lograr coordinarse para elegir el equilibrio más eficiente, o pueden no lograr adivinar la estrategia adoptada por los demás agentes, lo que lleva a asignaciones finales ineficientes. En estos casos, un coordinador central que determina a todos los profesores si las clases serán en línea o presenciales podría evitar estos problemas de coordinación.* ***Argumento complementario: De hecho, como argumentado en la respuesta 2 del ítem anterior, si el costo de transporte fuera muy alto, algo como \$16, el equilibrio más ineficiente sería aquello donde todos los profesores enseñan en formato presencial, y sin embargo, esto sería el equilibrio más probable de ser jugado en la práctica cuando hay muchos profesores. El decanato de la escuela podría evitar eso obligando a los profesores que enseñaran online.***

Ejercicio 4.5 *Una empresa de inversión está considerando vender un activo financiero. Ella puede vender el activo en la fecha actual (periodo $\tau = 0$) a un precio de $P_0 = 4$, o esperar para vender el activo el próximo periodo (periodo $\tau = 1$).*

Supón que el precio en el próximo periodo ($\tau = 1$) puede ser $P_1 = 6$ o $P_1 = 2$. Supón que $P_1 = 6$ con probabilidad $3/4$ y que $P_1 = 2$ con probabilidad $1/4$, y que esta información es de conocimiento común.

Desconsiderando factores como el pago de dividendos, la tasa de interés, factores de descuento etc., vamos a suponer que el ingreso final de la empresa es simplemente el precio al cual termina vendiendo su activo. Entonces si la empresa decide vender su activo en la fecha $\tau = 0$ obtiene un ingreso de \$4. Si la empresa espera para vender su activo en el periodo siguiente ($\tau = 1$) puede obtener un ingreso de \$2 o \$6, dependiendo del estado de la naturaleza.

Supón que el jefe de la empresa decide adoptar la siguiente estructura de centralización parcial: El jefe le pide a uno de sus analistas hacer una proyección sobre cuál será el precio P_1 en la fecha $\tau = 1$. Al hacer su proyección el analista recibe una señal $\hat{P}_1 \in \{2, 6\}$. Con probabilidad $\frac{9}{10}$, $\hat{P}_1 = P_1$, es decir, con probabilidad $\frac{9}{10}$ la proyección dell analista está correcta, y con probabilidad $\frac{1}{10}$, $\hat{P}_1 \neq P_1$, es decir, con probabilidad $\frac{1}{10}$ el analista hace una proyección equivocada. Por lo tanto, la señal del analista no es 100% precisa y el jefe está iterado de eso.

El analista recibe esta señal y la transmite al jefe a través de un reporte técnico. El costo de se obtener esta señal está dado por $g \geq 0$ y el costo de transmitir la información de la señal al jefe está dado por $t = 0.1$. . En la empresa hay un administrador de fondos encargado de hacer la compra y venta de activos. Recibida la señal, el jefe pide que el administrador tomar una de las siguientes acciones: vender el activo en la fecha actual ($\tau = 0$) o esperar para vender el activo en el periodo siguiente ($\tau = 1$). Supón que el jefe adopta la siguiente estrategia: manda al administrador vender en la fecha $\tau = 0$ si la señal es $\hat{P}_1 = 2$, de lo contrario (es decir, si $\hat{P}_1 = 6$) le manda esperar para vender el activo en la fecha $\tau = 1$.

a) (10 puntos) Determine la ganancia esperada de la empresa si el jefe adopta tal estrategia, llevando en consideración los costos $g \geq 0$ y $t = 0.1$ de se obtener y transmitir información *al jefe, respectivamente.* ***Pauta:*** *La ganancia esperada de la empresa si el jefe adopta esta estrategia está dada por:*

$$\frac{3}{4}\left(\frac{9}{10}\cdot 6+\frac{1}{10}\cdot 4\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{9}{10}\cdot 4+\frac{1}{10}\cdot 2\right)-\underbrace{0.1}_{t}-g=5.2-g.$$

b) *(10 puntos) Ahora supón que el jefe decide implementar un mecanismo de rutina. Más precisamente, supón que ahora el analista no obtiene ninguna información (y, por lo tanto, no transmite ninguna información) y el administrador de fondos debe decidir si vende en la fecha $\tau = 0$ o espera para vender en la fecha $\tau = 1$, sin observar cualquier señal. ¿Qué estrategia debería adoptar el administrador si su objetivo es maximizar las ganancias esperadas de la empresa? Justifique su respuesta.* ***Pauta:*** *En este caso, si el administrador decide vender en la fecha $\tau = 0$, obtiene un payoff de \$ 4. Si decide esperar para vender en la fecha $\tau = 1$ obtendrá un payoff esperado de*

$$\frac{3}{4}6+\frac{1}{4}2=5.$$

Como $5 > 4$, en equilibrio el administrador elige esperar para vender el activo en la fecha $\tau = 1$.

c) *(10 puntos) Encuentre el máximo valor de g tal que el jefe prefiere adoptar el mecanismo de centralización parcial descrito en el enunciado, al revés de adoptar el mecanismo de rutina descrito en el ítem b.* ***Pauta:*** *El equilibrio de centralización parcial genera mayores ganancias que el equilibrio de rutina ssi*

$$5.2-g\geq 5 \iff g\leq 0.2.$$

d) *(5 puntos) ¿Cómo el nivel de capacitación del analista debería afectar el costo g de adquisición de información? Justifique en pocas palabras.* ***Pauta:*** *Un profesional con una mayor capacitación logra hacer previsiones estadísticas con mayor facilidad, ya que no necesita gastar tiempo aprendiendo a utilizar herramientas estadísticas básicas para hacer su trabajo, por qué ya lo sabe.*

e) *(5 puntos) Ahora supón que el jefe requiere que, no solo el analista, sino que también el administrador de fondos haga un pronóstico sobre el precio de mercado P_1 en la fecha siguiente. En este caso, tanto el analista como el administrador, reciben una señal, potencialmente distinta, sobre el precio P_1, y comunican esta señal al jefe. Sin hacer cuentas numéricas, explique las ventajas y desventajas (es decir, los costos y beneficios) de se utilizar esta estructura organizacional centralizada.* ***Pauta:*** *Por un lado el jefe estaría mejor informado y, por lo tanto, podría tomar decisiones mejores. Por otro lado, habría un mayor costo en se obtener y transmitir información. Si estos costos fueran lo suficientemente altos, podría ser preferible al jefe utilizar el formato de organización parcial o de rutina.*

Una empresa minera está considerando extraer cobre en un campo. Con probabilidad 1/4 el campo tiene abundancia en cobre, lo que generaría una ganancia a la empresa de \$10 si esta decidiera extraer cobre. Con probabilidad complementaria (3/4) el campo tiene poco cobre, por lo que la extracción de cobre en la región resultaría en una pérdida de −\$8 a la empresa. Si la empresa decide no hacer extracción en la región, obtiene ganancia \$0. Todo eso es de conocimiento de la empresa.

a) (10 puntos) Qué acción debe tomar la empresa (extraer o no extraer cobre en el campo) suponiendo que ella adopta un mecanismo de rutina, es decir, toma su decisión sin obtener ninguna información adicional. ***Pauta:*** No debe hacer extracción en la región, ya que, al hacerlo, obtiene un payoff esperado negativo y igual a -2.

b) (20 puntos) Ahora supón que la empresa considera contratar un geólogo para detectar la presencia de minerales en la región. Supón que con probabilidad 4/5 la señal que el geólogo recibe corresponde al verdadero estado de la naturaleza (si el campo tiene cobre o no), mientras que con probabilidad complementaria (1/5) la señal "miente", es decir, reporta el estado de la naturaleza incorrecto. Supón que el costo de contratar este experto está dado por $g \geq 0$ (es decir, del punto de vista de la empresa, g incorpora tanto el costo de obtener como de transmitir información). Encuentre el máximo valor de g tal que le conviene a la empresa contratar el geólogo. ***Pauta:*** Claramente, si la señal dice que no hay cobre en la región, la empresa no debe hacer extracción de minerales (ya que sus creencias serían aún más fuertes de que no hay minerales en la región comparado con el caso en que no obtiene información, y vimos que en este caso, la empresa no debe hacer extracción).

Perceba que la probabilidad no condicional de que la señal indique que hay minerales en la región está dada por

$$\begin{aligned} Prob(c) &= Prob(c|\text{Cobre})Prob(\text{Cobre}) + Prob(c|\text{No Cobre})Prob(\text{No Cobre}) \\ &= \frac{4}{5}\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\frac{3}{4} = \frac{7}{20}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Aplicando el teorema de Bayes, uno puede mostrar fácilmente que la probabilidad de que el campo tenga abundancia en cobre condicional a que la señal del geólogo indique eso está dada por

$$Prob(Cobre|\text{c}) = \frac{Prob(c|\text{Cobre})Prob(\text{Cobre})}{Prob(c)} = \frac{\frac{4}{5}\frac{1}{4}}{\frac{7}{20}} = 4/7.$$

Con esta probabilidad, uno puede ver fácilmente que la empresa obtiene ganancia esperada positiva si explora la mina cuando recibe una señal que indica que el campo tiene abundancia en cobre:

$$\mathbb{E}[\pi_1|c] = \frac{4}{7}10 + \frac{3}{7}(-8) = \frac{16}{7} > 0.$$

Por lo tanto, la probabilidad esperada que la empresa obtiene en contratar el geólogo está dada por

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\pi_1] &= Prob(c)\mathbb{E}[\pi_1|c] + (1 - Prob(c))0 - g \\ &= \frac{7}{20}\left(\frac{16}{7}\right) - g \\ &= \frac{4}{5} - g. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la empresa preferirá contratar al geólogo ssi $\mathbb{E}[\pi_1] \geq 0$, es decir, ssi

$$g \leq \frac{4}{5} = 0.8.$$

c) (30 puntos) En el ítem anterior, vimos qué pasaba si la empresa tuviera la opción de obtener una única señal a través de la contratación de un experto. Pero en la práctica es común que las empresas mineras obtengan múltiple señales sobre la calidad de un campo minero, las que pueden tener distintos niveles de costo y precisión. Supón, entonces, que ahora la empresa considera contratar 2 geólogos (y no solo 1) para detectar la presencia de minerales en la región, cada uno ocupando su propio método de detección. Para dejar el modelo sencillo, supongamos que la señal obtenida por cada geólogo tiene el mismo nivel de precisión que en el ítem anterior, es decir, que con probabilidad 4/5 la señal de cada geólogo es consistente con la realidad y, con probabilidad complementaria (1/5), la señal indica el estado de la naturaleza incorrecto. Supón que la señal obtenida por cada geólogo es independiente, así que, es perfectamente posible que las señales obtenidas por cada geólogo sean distintas. El costo de contratar cada geólogo está dado por $g \geq 0$. Así, si la empresa decide contratar ambos geólogos, tendrá un costo total de $2g$; si contrata solo 1 geólogo tiene un costo de g y si no contrata ningún geólogo tiene un costo de \$0. Encuentre los intervalos para g tales que: 1) es óptimo a la empresa contratar los 2 geólogos, 2) es óptimo a la empresa contratar solo 1 geólogo y 3) tal que es óptimo a la empresa no contratar ningún geólogo. ***Pauta:*** Supón que la empresa contrata ambos geólogos.

Claramente, si ambas señales dicen que no hay cobre en la región, la empresa no debe hacer extracción de minerales (ya que sus creencias serían aún más fuertes de que no hay minerales en la región comparado con el caso en que no obtiene información, y vimos que en este caso, la empresa no debe hacer extracción).

Aplicando la regla de Bayes, uno puede mostrar fácilmente que, si cada señal dice una cosa distinta, la empresa debe seguir con sus mismas creencias iniciales y, por lo tanto, tampoco debe extraer minerales en esta contingencia (un alumno también podría argumentar que, intuitivamente, si las señales son contradictorias, no revelan ninguna información, ya que ambas tienen el mismo nivel de precisión; por lo tanto, las creencias del jefe deben seguir iguales).

Por lo tanto, la única contingencia en que la minera tendrá incentivos explotar el campo, es cuando ambos geólogos reciben la misma señal de que el campo tiene cobre. La probabilidad de este suceso está dada por:

$$
\begin{aligned}
Prob(cc) &= \underbrace{Prob(cc|\text{Cobre})}_{\frac{4}{5}\frac{4}{5}} Prob(\text{Cobre}) + \underbrace{Prob(cc|\text{No Cobre})}_{\frac{1}{5}\frac{1}{5}} Prob(\text{No Cobre}) \\
&= \frac{4}{5}\frac{4}{5}\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\frac{1}{5}\frac{3}{4} = \frac{19}{100}. \qquad (4.2)
\end{aligned}
$$

Aplicando el teorema de Bayes, uno puede mostrar fácilmente que la probabilidad de que el campo tenga abundancia en cobre condicional a que ambas señales indiquen eso está dada por

$$Prob(Cobre|\text{cc}) = \frac{Prob(cc|\text{Cobre})Prob(\text{Cobre})}{Prob(cc)} = \frac{\frac{16}{100}}{\frac{19}{100}} = 16/19.$$

Con esta probabilidad, uno puede ver fácilmente que la empresa obtiene ganancia esperada positiva si explora la mina cuando ambas señales indican que el campo tiene abundancia en cobre:

$$\mathbb{E}[\pi_2|cc] = \frac{16}{19}10 + \frac{3}{19}(-8) = \frac{136}{19} > 0.$$

Por lo tanto, la probabilidad esperada que la empresa obtiene en contratar el geólogo está dada por

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\pi_2] &= Prob(cc)\mathbb{E}[\pi_2|cc] + (1 - Prob(cc))0 - 2g \\
&= \frac{19}{100}\left(\frac{136}{19}\right) - 2g \\
&= \frac{136}{100} - 2g.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la empresa preferirá contratar 2 geólogos a contratar ninguno ssi $\mathbb{E}[\pi_2] \geq 0$, es decir, ssi

$$g \leq \frac{136}{200} = 0.68.$$

La empresa preferirá contratar 2 geólogos a contratar solo 1 ssi $\mathbb{E}[\pi_2] \geq \mathbb{E}[\pi_1]$, es decir, ssi

$$\frac{136}{100} - 2g \geq \frac{4}{5} - g \iff g \leq 0.56.$$

Combinando eso con el resultado del ítem anterior, tenemos que la empresa va a preferir contratar 2 geólogos cuando $g \leq 0.56$, contratar 1 geólogo cuando $g \in [0.56, 0.8]$ y ningún geólogo cuando $g \geq 0.8$. O sea, cuanto mayor el costo de adquirir información, menos información la minera obtiene.

5

Motivación

Ejercicio 5.1 *Una empresa ofrece un contrato a un trabajador igual a $\alpha + \beta e$, donde "e" es el nivel de esfuerzo que elige el trabajador si este decide aceptar el contrato de la empresa. El costo para el trabajador de elegir un nivel de esfuerzo $e \geq 0$ está dado por $C(e) = e^2$. Las ganancias de la empresa si el trabajador decide aceptar su oferta y elegir un nivel de esfuerzo $2e$ está dada por $\pi(e, \alpha, \beta) = 2e - (\alpha + \beta e)$, donde el primer término, $2e$, corresponde a los ingresos de la empresa como función del nivel de esfuerzo e del trabajador.*

Supón que el trabajador recibe un pago de $\underline{w} \geq 0$ si decide no trabajar para la empresa, es decir, $\underline{w}$ corresponde al "outside option" o costo de oportunidad del trabajador en no aceptar la oferta de la empresa.

a) Utilizando inducción hacia atrás, encuentra el equilibrio de Nash perfecto en subjuegos para este modelo. ***Pauta:*** *En el último subjuego, es decir, en la contingencia en que el agente haya aceptado la oferta del empleador, el agente va a elegir su nivel de esfuerzo que maximiza*

$$\alpha + \beta e - e^2.$$

Tomando la CPO, obtenemos que el nivel óptimo de esfuerzo del agente estará dado por $e(\alpha, \beta) = \frac{\beta}{2}$.

b) ¿Cuál es el máximo valor de $\underline{w}$ tal que el trabajador elige trabajar para esta empresa en equilibrio? ***Pauta:*** *Dada la mejor respuesta del agente, la empresa (es decir, el principal) va a elegir α y β que maximizan*

$$2 \underbrace{\beta/2}_{e(\alpha,\beta)} - \alpha - \beta \underbrace{\frac{\beta}{2}}_{e(\alpha,\beta)} \tag{5.1}$$

sujeto a la restricción de participación

$$\alpha + \beta \underbrace{\beta/2}_{e(\alpha,\beta)} - \left(\underbrace{\beta/2}_{e(\alpha,\beta)} \right)^2 \geq \underline{w}. \tag{5.2}$$

Obviamente esta restricción se debe cumplir con igualdad en el óptimo, de lo contrario la empresa podría disminuir α sin cambiar el nivel de esfuerzo óptimo del agente, y este seguiría con incentivos en aceptar el contrato.

Por lo tanto, suponiendo que la restricción 5.6 se cumple con igualdad, tenemos que

$$\alpha = \underline{w} - \beta^2/4. \tag{5.3}$$

Reemplazando eso en la función objetivo de la empresa, tenemos que esta va a elegir β de forma a maximizar

$$\max_{\beta} \beta - (\underbrace{\underline{w} - \beta^2/4}_{\alpha}) - \frac{\beta^2}{2}.$$

Tomando la condición de primer orden, obtenemos $\beta = 2$. Reemplazando en la ecuación 5.7, obtenemos que en equilibrio la firma elige $\alpha = \underline{w} - 1$.

Reemplazando eso en la función objetivo de la empresa, tenemos que la empresa obtiene un pago de

$$1 - \underline{w},$$

el que será positivo ssi $\underline{w} \leq 1$. Por lo tanto, la empresa tendrá incentivos en contratar este empleado ssi $\underline{w} \leq 1$. Intuitivamente, si el empleado tiene una alternativa que es mucho mejor, es muy costoso para la empresa atraer este empleado.

c) *Ahora supón que los ingresos de la empresa están dados por $y = 2e + \varepsilon$, donde $\varepsilon \sim N(0, 1)$, es decir los ingresos de la empresa, dependen de e y más un factor estocástico que sigue una distribución normal estándar. Dé un ejemplo de una situación práctica donde los ingresos de la empresa dependen no solo del esfuerzo del trabajador, sino que de factores estocásticos que están fuera del controle del trabajador.* ***Pauta:*** *Los pagos a los CEO's suelen ser proporcionales a la performance de la empresa. Sin embargo, la empresa puede tener una buena performance independiente de lo que haga el ejecutivo, e.g., si hay un aumento exógeno en la demanda. Similarmente, un gestor de fondos de inversión puede tener suerte en sus "apuestas", sin necesariamente haber hecho inversiones de forma responsable y sana.*

d) ***(Desafío)*** *Ahora supón que el empleado tiene una función de utilidad con aversión al riesgo absoluta constante (CARA) dada por*

$$U(x) = -\exp\{-\eta x\},$$

donde $\eta > 0$ corresponde al nivel de aversión al riesgo del consumidor.

Muestre que, en este caso, la utilidad esperada del agente en aceptar el contrato ofrecido por la empresa y elegir un nivel de esfuerzo e está dado por

$$-exp\{-\eta(\alpha + \beta e - e^2 - \eta\beta^2/2)\},$$

así que, si el trabajado elige trabajar para la empresa, va a elegir el nivel de esfuerzo que maximiza

$$\alpha + \beta e - e^2 - \eta\beta^2/2.$$

Obs.: Para mostrar eso, uno puede seguir los pasos de los siguientes apuntes:https://www.tau.ac.il/ spiegel/teaching/corpfin/mean-variance.pdf

e) *Suponiendo que $\underline{w} = 0$, encuentre el equilibrio para el caso presentado en el ítem anterior, cuando las ganancias de la empresa dependen no solo de e, sino que también de un componente aleatorio ε, y suponiendo que la empresa hace una oferta de contrato igual a $\alpha + \beta y/2$, donde $y = 2e + \varepsilon$ corresponde a los ingresos de la empresa.* ***Pauta:*** *El trabajador sigue eligiendo $e = \frac{\beta}{2}$, pero ahora para que esté indiferente entre aceptar el contrato o no debemos tener*

$$\alpha = \underbrace{\underline{w}}_{=0} - \beta^2/4 + \eta\beta^2/2. \tag{5.4}$$

Reemplazando eso en la función objetivo de la empresa, tenemos que esta va a elegir β de forma a maximizar

$$\max_{\beta} \beta - \underbrace{(-\beta^2/4 + \eta\beta^2/2)}_{\alpha} - \frac{\beta^2}{2}.$$

Tomando la CPO, obtenemos

$$\beta = \frac{2}{1+2\eta}.$$

Reemplazando en la ecuación 5.4, obtenemos

$$\alpha = \left(\frac{2}{1+2\eta}\right)^2 \left(\frac{\eta}{2} - \frac{1}{4}\right).$$

f) Haciendo estática comparativa, muestra cómo cambia el α y β óptimos de la empresa, dado un aumento en la aversión al riesgo del consumidor, η. ***Pauta:***

$$\frac{\partial \beta}{\partial \eta} = \frac{-4}{(1+2\eta)^2} < 0,$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \eta} = \frac{-6}{(1+2\eta)^3}\left(\frac{\eta}{2} - 1/4\right) + \frac{2}{2(1+2\eta)^2} \lesseqgtr 0$$

g) ¿En qué situaciones prácticas crees que el trabajador tendría mayor aversión al riesgo? Justifica tu respuesta. ***Pauta:*** *Cuando tiene menos opciones de diversificar su riesgo. Esto pasa, por ejemplo, si el trabajador trabaja solo para esta empresa. En cambio, si él trabajara para diversas otras empresas, tendría más incentivos en tomar riesgos. Como un ejemplo práctico, personas que trabajan en la "gig economy" enseñado tutorías online curren el riesgo de que no les paguen algunas de sus tutorías. Pero cómo diversifican sus riesgos enseñando a hartas personas, la contingencia en que no reciben su pago por una tutoría no es tan mala, por lo que están dispuestos a incurrir en este riesgo.*

Ejercicio 5.2 *Una empresa ofrece un contrato a un trabajador igual a $\alpha + \beta e$, donde "e" es el nivel de esfuerzo que elige el trabajador si este decide aceptar el contrato de la empresa. El costo para el trabajador de elegir un nivel de esfuerzo $e \geq 0$ está dado por $C(e) = 2e^2$. Las ganancias de la empresa si el trabajador decide aceptar su oferta y elegir un nivel de esfuerzo e están dadas por $\pi(e, \alpha, \beta) = e - (\alpha + \beta e)$, donde el primer término, e, corresponde a los ingresos de la empresa como función del nivel de esfuerzo e del trabajador.*

Supón que el trabajador recibe un pago de $\underline{w} \geq 0$ si decide no trabajar para la empresa, es decir, $\underline{w}$ corresponde al "outside option" o costo de oportunidad del trabajador en no aceptar la oferta de la empresa. Si el trabajador decide no trabajar para la empresa, la empresa obtiene ganancia $0.

a) (10 puntos) Utilizando inducción hacia atrás, encuentra el nivel de α y β elegido por la empresa en equilibrio. ***Pauta:*** *En el último subjuego, es decir, en la contingencia en que el agente haya aceptado la oferta del empleador, el agente va a elegir su nivel de esfuerzo que maximiza*

$$\alpha + \beta e - 2e^2.$$

Tomando la CPO, obtenemos que el nivel óptimo de esfuerzo del agente estará dado por $e(\alpha, \beta) = \frac{\beta}{4}$.

b) *(10 puntos) Encuentre las ganancias de equilibrio de la empresa.* ***Pauta:*** *Dada la mejor respuesta del agente, la empresa (es decir, el principal) va a elegir α y β que maximizan*

$$\underbrace{\beta/4}_{e(\alpha,\beta)} - \alpha - \beta \underbrace{\frac{\beta}{4}}_{e(\alpha,\beta)} \tag{5.5}$$

sujeto a la restricción de participación

$$\alpha + \beta \underbrace{\beta/4}_{e(\alpha,\beta)} - 2\left(\underbrace{\beta/4}_{e(\alpha,\beta)}\right)^2 \geq \overline{w}. \tag{5.6}$$

Obviamente esta restricción se debe cumplir con igualdad en el óptimo, de lo contrario la empresa podría disminuir α sin cambiar el nivel de esfuerzo óptimo del agente, y este seguiría con incentivos en aceptar el contrato.

Por lo tanto, suponiendo que la restricción 5.6 se cumple con igualdad, tenemos que

$$\alpha = \overline{w} - \beta^2/8. \tag{5.7}$$

Reemplazando eso en la función objetivo 5.5, tenemos que la empresa va a elegir β de forma a maximizar

$$\max_{\beta} \frac{\beta}{4} - (\underbrace{\overline{w} - \beta^2/8}_{\alpha}) - \frac{\beta^2}{4}.$$

Tomando la condición de primer orden, obtenemos $\beta = 1$. Reemplazando en la ecuación 5.7, obtenemos que en equilibrio la firma elige $\alpha = \overline{w} - \frac{1}{8}$.

Reemplazando α y β en la función objetivo de la empresa, obtenemos que la ganancia óptima de la empresa está dada por

$$1/8 - \overline{w},$$

si la empresa decide contratar el trabajador y 0 si decide no contratarlo. Por lo tanto, las ganancias de la empresa estarían dadas por:

$$\pi^* = \max\{0, 1/8 - \overline{w}\}.$$

c) *(10 puntos) ¿Cuál es el máximo valor de $\underline{w}$ tal que el trabajador elige trabajar para esta empresa en equilibrio?* ***Pauta:*** *Sería $1/8$, ya que si $\overline{w} > 1/8$, la empresa tendría ganancias negativas si contratara el trabajador.*

d) *(10 puntos) Ahora supón que el agente tiene aversión al riesgo y la empresa no observa perfectamente su nivel de esfuerzo, solo sus resultados de producción. La empresa entonces solo puede hacer un contrato contingente al nivel de producción del trabajador, no de su nivel de esfuerzo. Explique intuitivamente cómo la no observación de una señal perfecta por parte de la empresa, más la aversión al riesgo por parte del trabajado deberían afectar las decisiones óptimas de contrato ofrecidas por la empresa.* ***Pauta:*** *Disminuiría el β ofrecido por la empresa, ya que haría que el beneficio por el esfuerzo se volvería menos atractivo. De hecho, si uno tiene aversión al riesgo, prefiere pagos fijos a pagos volátiles. Además, si la empresa no observa perfectamente el nivel de esfuerzo del trabajador, su pago proporcional al esfuerzo se vuelve volátil. Por lo tanto, la parte del sueldo que es contingente al nivel de esfuerzo se vuelve menos atractivo.*

Ejercicio 5.3 *(Políticas de motivación y sus efectos inesperados)*

Supón que un proveedor de insumos observa que la producción de muchos de los pedidos de sus compradores están retrasados. Para lidiar con el problema, el CEO de la empresa decide dar una recompensa, es decir, un bonus, aquellos que trabajan horas extras para terminar la producción de los pedidos retrasados. ¿Cómo cree que esta política afectaría la productividad de los empleados, es decir, cómo afectaría el número de pedidos retrasados? Justifique.

Pauta: *Posibles respuestas:*

- *Si el bonus por el trabajo extra es atractivo, lo más probable es que, semejante al cobra effect, los trabajadores reduzcan su productividad, para así hacer que la empresas tenga pedidos retrasados y así poder recibir el bonus por el trabajo en hora extra.*
- *El bonus puede generar un problema de riesgo moral, en el sentido de que la existencia del bonus puede señalar a los empleados que no es tan costo a la empresa tener pedidos retrasados: es decir, el sistema puede señalar a los empleados que no es necesariamente su obligación evitar retrasos, ya que la empresa siempre puede pagar horas extras a un empleado para garantizar el cumplimiento de sus labores.*

Ejercicio 5.4 *(Los costos de un monitoreo perfecto) Una empresa ofrece un sueldo lineal a un trabajador dado por $\alpha + \beta y$, en que "y" es el nivel de producción del trabajador, el que también corresponde a los ingresos de la empresa. Supón que*

$$y = e + \varepsilon,$$

donde $e \geq 0$ es el nivel de esfuerzo elegido por el trabajador (endógeno), mientras que ε es un choque aleatorio exógeno que sigue una distribución $N(0, 2)$.

Tras observar el contrato, el trabajador puede aceptarlo o rechazarlo. Si el trabajador acepta el contrato, él debe elegir su nivel de esfuerzo $e \geq 0$. Al momento de elegir "e", el trabajador no conoce ε, pero sabe que $\varepsilon \sim N(0, 2)$. La empresa tampoco observa ε al momento de tomar su decisión sobre qué contrato ofrecer.

El costo para el trabajador de elegir un nivel de esfuerzo $e \geq 0$ está dado por $C(e) = e^2$. Supón que el trabajador tiene una función utilidad con aversión absoluta al riesgo constante (CARA) dada por

$$U(x) = -\exp\{-x\}.$$

En este caso, se puede mostrar que la utilidad esperada del trabajador como función de e, α y β está dada por

$$\exp\{\alpha + \beta e - e^2 - \beta^2\},$$

por lo que el trabajador va a elegir el nivel de esfuerzo "e" que maximiza

$$\alpha + \beta e - e^2 - \beta^2,$$

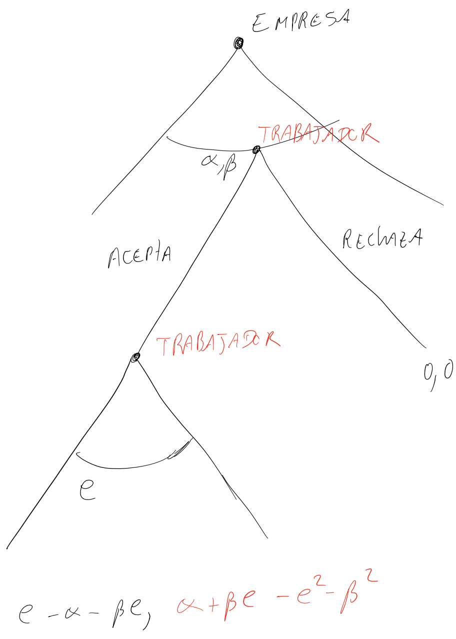
y eso se puede tomar como dado (no es necesario probarlo).

Supón que si el trabajador no acepta la oferta de la empresa, tanto la empresa como el trabajador reciben un payoff de 0. Por lo tanto, el trabajador preferirá trabajar para la empresa si y solamente si α, β y e son tales que

$$\alpha + \beta e - e^2 - \beta^2 \geq 0,$$

y la empresa estará dispuesta a contratar el empleado si y solamente si

$$e - \alpha - \beta e \geq 0.$$



a) *(10 puntos) Escriba el juego en formato secuencial, es decir, dibuje el árbol del juego, escribiendo los payoffs esperados de cada jugador como función de "α", "β" y "e".* ***Pauta:***

b) *(10 puntos) Haciendo inducción hacia atrás, encuentre los niveles de "α", "β" y "e" de equilibrio (es decir, encuentre el ENPS para este juego). Muestre su trabajo.* ***Pauta:*** *Tomando la CPO del problema de optimización del trabajador, tenemos que él elige $e = \frac{\beta}{2}$. Por lo tanto, la empresa va a elegir α y β que resuelve el siguiente problema:*

$$\max_{\alpha,\beta} \underbrace{\frac{\beta}{2}}_{e} - \alpha - \beta \underbrace{\beta/2}$$

$$s.a \quad \alpha + \beta \underbrace{\beta/2} - \left(\frac{\beta}{2}\right)^2 - \beta^2 \geq 0.$$

Un alumno puede resolver este problema de optimización por KKT. Pero una alternativa es observar que la restricción de participación

$$\alpha + \beta \underbrace{\beta/2} - \left(\frac{\beta}{2}\right)^2 - \beta^2 \geq 0$$

se debe cumplir con igualdad en equilibrio, de lo contrario la empresa podría disminuir α sin afectar el nivel de esfuerzo óptimo $e = \beta/2$, y el trabajador seguiría teniendo incentivos en trabajar para la empresa. Entonces, reemplazando $\alpha = \frac{3\beta^2}{4}$ en la función objetivo de la empresa, tenemos que esta va a optimizar

$$\max_{\beta} \frac{\beta}{2} - \frac{5\beta^2}{4}. \tag{5.8}$$

Tomando la CPO, obtenemos

$$\beta^* = 0.2,$$

por lo que

$$\alpha^* = 0.03,$$

y

$$e^* = 0.1.$$

No era necesario contestar eso acá, pero esta información será útil en el último ítem: reemplazando β^* en la función objetivo de la empresa (5.8), tenemos que la ganancia de equilibrio de la empresa está dada por $\pi^* = 0.05$.

Puntaje: *3 puntos por encontrar e^* correctamente, 3.5 puntos por encontrar β correctamente y 3.5 puntos por encontrar α correctamente.*

c) (10 puntos) Supón ahora que la empresa compra una tecnología sofisticada de monitoreo (e.g., utilizando cámaras y aplicaciones de inteligencia artificial) a un costo $c_1 = 0.1$ que le permite observar perfectamente el nivel de esfuerzo "e" de su empleado sin ningún ruido (es decir, ahora $\varepsilon = 0$). Sin embargo, además del costo c_1, la tecnología tiene la desventaja de disminuir la utilidad del empleado, ya que el monitoreo le hace sentirse cómo si estuviera siendo constantemente vigilado, semejante al programa televisivo Big Brother, lo que torna su trabajo menos entretenido y más agotador. Supón que este costo está dado por $c_2 \geq 0$ y que tal costo no depende del nivel de esfuerzo del empleado. En este caso, si el jefe ofreciera el contrato:

$$w(e) = \alpha + \beta e,$$

el empleado tendría utilidad

$$u(e, \alpha, \beta) = \alpha + \beta e - e^2 - c_2,$$

mientras que el jefe obtendría utilidad

$$\pi(e, \alpha, \beta) = e - \alpha - \beta e - c_1.$$

La opción externa del empleado sigue siendo 0.

Encuentre la ganancia de equilibrio de la empresa como función de c_2 dado que la empresa implementa esta tecnología. ***Pauta:*** *Repitiendo los mismos pasos del ítem anterior, tenemos que en equilibrio la empresa elige*

$$\beta = 1,$$

y

$$\alpha = c_2 - \frac{1}{4},$$

mientras que el trabajador elige $e = 1/2$.

Reemplazando estos valores en la función objetivo de la empresa

$$\pi(e, \alpha, \beta) = e - \alpha - \beta e - 0.1,$$

tenemos que las ganancias de equilibrio de la empresa están dadas por

$$\tilde{\pi} = 0.15 - c_2.$$

Puntaje: *3 puntos por encontrar e^* correctamente, 3 puntos por encontrar β correctamente y 3 puntos por encontrar α correctamente, 1 punto por encontrar $\tilde{\pi}$ correctamente.*

d) *(10 puntos) Ahora encuentre el máximo valor para c_2 tal que la empresa tendría incentivos en implementar esta tecnología sofisticada de monitoreo. Muestre su trabajo.* ***Pauta:*** *Como mostrado al final de la respuesta del ítem b, cuando el monitoreo no es perfecto la empresa recibe ganancias de $\pi^* = 0.05$. Por lo tanto, la empresa va a preferir el monitoreo perfecto cuando*

$$\begin{aligned} &\tilde{\pi} \geq \pi^* \\ \iff &0.15 - c_2 \geq 0.05 \\ \iff &\boxed{c_2 \leq 0.1}. \end{aligned}$$

Puntaje: *-3 puntos por error de arrastre.*

Ejercicio 5.5 *Supón que una empresa ofrece un sueldo como función del esfuerzo $e \geq 0$ del trabajador:*

$$w(e) = \alpha + \beta e,$$

el que es perfectamente observable por la empresa. El costo de esfuerzo del trabajador está dado por $\frac{1}{8}e^2$.

Supón que los ingresos de la empresa como función de e están dados por

$$\log(4e),$$

y que la opción externa del trabajador esté dada por $\underline{w}$, mientras que la opción externa de la empresa esté dada por \$0 (acuérdese que estamos ocupando la notación en que $\log(\cdot)$ corresponde al logaritmo natural).

a) *(20 puntos) Encuentre el máximo $\underline{w}$ tal que en equilibrio la empresa contrata el trabajador.* ***Pauta:*** *Se puede mostrar que (los alumnos deberían mostrar su trabajo):*

$$\underline{w} \leq \log(8) - \frac{1}{2}$$

b) *(10 puntos) Supón ahora que el esfuerzo e no fuera perfectamente observable, y que el empleado tuviera que basar su decisión en una medida de performance aleatoria. Supón además que el empleado tenga aversión al riesgo. Intuitivamente, explique cómo crees que estos supuestos afectarían los incentivos del jefe en elegir un β alto, es decir, una compensación por productividad alta.* ***Pauta:*** *El jefe tendría incentivos en pagarle al empleado un β más bajo, ya que, cuando el empleado tiene aversión al riesgo, se vuelve más costoso atraer a un empleado con un sueldo variable.*

5.1 Motivación Bajo Responsabilidad Limitada

Ejercicio 5.6 *Hay un principal y agente, ambos neutrales al riesgo, con el agente pudiendo elegir esforzarse ($e = 1$) o no ($e = 0$) en un entorno donde e no es verificable, pero el beneficio generado por el agente sí es verificable. El agente tiene una utilidad de reserva $\underline{u}$ y su costo de esforzarse está dado por $c > 0$. Si el agente se esfuerza, él genera un beneficio de π_H a la empresa con probabilidad p_1 y un beneficio de π_L con probabilidad $1 - p_1$. Si el agente no se esfuerza, él genera un beneficio de π_H a la empresa con probabilidad p_0 y un beneficio de π_L con probabilidad $1 - p_0$, donde $\pi_H > \pi_L$ y que $p_1 > p_0$, así que, es de interés de la empresa que el empleado se esfuerce.*

Tanto el agente como el principal son neutrales al riesgo. Se supone que el principal primero hace una oferta de contrato (w_H, w_L). Tras observar la oferta, el agente decide aceptarla o no. Si él acepta la oferta, él elige su nivel de esfuerzo $e \in \{0, 1\}$. El objetivo del principal es elegir valores de w_H y w_L que motivan el empleado a aceptar el contrato (la restricción de participación se debe cumplir) y le motivan a esforzarse (la restricción de compatibilidad de incentivos debe cumplirse).

a) *Muestre que, si no existe una restricción sobre el sueldo mínimo w_L y w_H que la empresa puede cobrar al agente, entonces cualquier (w_H, w_L) tal que*

$$w_L \leq \underline{u} - \frac{p_0 c}{p_1 - p_0}$$

$$w_H = \frac{\underline{u} + c - (1-p_1)w_L}{p_1},$$

es óptimo para la empresa y tales niveles de sueldo generan una ganancia esperada dada por $p_1\pi_H + (1-p_1)\pi_L - \underline{u} - c$. ***Pauta:*** *El problema de optimización de la empresa está dado por*

$$\max_{(w_H, w_L)} p_1(\pi_H - w_H) + (1-p_1)(\pi_L - w_L).$$

sujeto a la restricción de compatibilidad de incentivos

$$p_1 w_H + (1-p_1)w_L - c \geq p_0 w_H + (1-p_0)w_L \iff (p_1 - p_0)(w_H - w_L) \geq c$$

y sujeto a la restricción de participación:

$$p_1 w_H + (1-p_1)w_L - c \geq \underline{u}.$$

Claramente, la restricción de participación debe ser activa. De hecho, si tuviéramos

$$p_1 w_H + (1-p_1)w_L - c > \underline{u},$$

entonces habría un $\varepsilon > 0$ tal que

$$p_1 w_H + (1-p_1)w_L - c - \varepsilon \geq \underline{u}.$$

Entonces, si la restricción de participación se cumple, es decir, si

$$(p_1 - p_0)(w_H - p_L) \geq c,$$

esta restricción seguiría cumpliéndose si la empresa cobrara $w_H^* = w_H - \varepsilon$ y $w_L^* = w_L - \varepsilon$ y, además, la restricción de compatibilidad de incentivos también se cumpliría, ya que

$$p_1 w_H^* + (1-p_1)w_L^* - c = p_1 w_H + (1-p_1)w_L - c - \varepsilon \geq \underline{u},$$

y las ganancias de la empresa serían mayores:

$$p_1(\pi_H - w_H^*) + (1-p_1)(\pi_L - w_L^*) = p_1(\pi_H - w_H) + (1-p_1)(\pi_L - w_L) + \varepsilon.$$

Por lo tanto, debemos tener

$$p_1 w_H + (1-p_1)w_L - c = \underline{u} \iff w_H = \frac{\underline{u} + c - (1-p_1)w_L}{p_1}.$$

Reemplazando

$$w_H = \frac{\underline{u} + c - (1-p_1)w_L}{p_1} \tag{5.9}$$

en la función objetivo de la empresa, se puede ver que esta se vuelve una constante igual a

$$\pi^* = p_1\pi_H + (1-p_1)\pi_L - \underline{u} - c.$$

que no depende de w_H *o* w_L*, así que, cualquier par* (w_H, w_L) *que cumpla con la restricción* (5.9) *y, además, la restricción*

$$\begin{aligned} &(p_1 - p_0)(\underbrace{w_H}_{\frac{\underline{u}+c-(1-p_1)w_L}{p_1}} - w_L) \geq c \\ \iff &w_L \leq \underline{u} - \frac{p_0 c}{p_1 - p_0}. \end{aligned}$$

Son óptimos.

b) *Cómo cambia las ganancias de la empresa dado un aumento en "$\underline{u}$" o "c". Interprete este resultado.* ***Pauta:*** *Un aumento en "$\underline{u}$" o "c" disminuye las ganancias de la empresa. De hecho, un aumento en $\underline{u}$ es equivalente a aun aumento en la opción externa del empleado. En este caso, la empresa debe ofrecer un sueldo esperado más alto para que pueda atraer al empleado, aumentando así sus costos.*

Mientras, un aumento en c equivale a un aumento en el costo de esforzarse, lo que obliga la empresa a aumentar w_H para que el trabajador tenga incentivos en esforzarse, lo que representa un aumento en los costos de la empresa.

c) *Ahora supón que el gobierno impone un sueldo mínimo de "a" tal que $a \geq \underline{u} - \frac{p_0 c}{p_1 - p_0}$. En este caso, debemos tener $w_L \geq a$ y $w_H \geq a$. Muestre que, en este caso, el empresario se ve obligado a aumentar w_H y w_L, lo que disminuye sus ganancias de equilibrio.* ***Pauta:*** *En este caso, el principal va a optimizar*

$$\max_{(w_H, w_L)} p_1(\pi_H - w_H) + (1-p_1)(\pi_L - w_L).$$

sujeto a las restricciones de responsabilidad limitada:

$$w_H \geq a,$$

$$w_L \geq a,$$

sujeto a la restricción de compatibilidad de incentivos

$$p_1 w_H + (1-p_1)w_L - c \geq p_0 w_H + (1-p_0)w_L$$

y sujeto a la restricción de participación:

$$p_1 w_H + (1-p_1)w_L - c \geq \underline{u}.$$

Intuitivamente, esperamos que la restricción de responsabilidad limitada sea activa debido a nuestro supuesto de que "a" es lo suficientemente alto, de tal manera que el principal no puede ignorar tal restricción. Por lo tanto, debemos tener $w_L = a$.

Además, obviamente debemos tener $w_H > w_L$ (de lo contrario el trabajador no tendría incentivos en esforzarse), por lo que podemos ignorar la restricción $w_H \geq a$.

También vamos a ignorar la restricción de participación

$$p_1 w_H + (1-p_1)w_L - c \geq \underline{u},$$

ya que, intuitivamente, esperamos que la restricción de responsabilidad limitada obliga la empresa a ofrecerle al empleado un contrato mejor que su opción externa.

Así, podemos reescribir el problema de optimización del principal como

$$\max_{(w_H,w_L)} p_1(\pi_H - w_H) + (1-p_1)(\pi_L - w_L).$$

sujeto a

$$w_L = a,$$

$$p_1 w_H + (1-p_1)\underbrace{w_L}_{=a} - c \geq p_0 w_H + (1-p_0)\underbrace{w_L}_{=a}$$

En este caso, la restricción de compatibilidad de incentivos debe ser activa, de lo contrario la empresa podría disminuir w_H, aumentando sus ganancias, y la restricción de compatibilidad de incentivos seguiría cumpliéndose.

Si esta restricción es activa, tenemos que

$$w_H = a + \frac{c}{p_1 - p_0}, \quad w_L = a.$$

Uno puede verificar fácilmente que las demás restricciones se cumplen, ya que

$$w_H = a + \underbrace{\frac{c}{p_1 - p_0}}_{>0} > a,$$

y

$$p_1 \underbrace{w_H}_{a+\frac{c}{p_1-p_0}} + (1-p_1)\underbrace{w_L}_{a} - c = a + \frac{p_0 c}{p_1 - p_0} \geq \underline{u} \iff a \geq \underline{u} - \frac{p_0 c}{p_1 - p_0}.$$

En este caso, las ganancias de equilibrio de la empresa están dadas por

$$\begin{aligned}
&p_1\left(\pi_H - \overbrace{(a + \frac{c}{p_1 - p_0})}^{w_H}\right) + (1-p_1)(\pi_L - \overbrace{a}^{w_L}) \\
&= p_1\pi_H + (1-p_1)\pi_L - \underbrace{a}_{\geq \underline{u} - \frac{p_0 c}{p_1 - p_0}} - p_1\frac{c}{p_1 - p_0} \\
&\leq p_1\pi_H + (1-p_1)\pi_L - \underline{u} + \frac{p_0 c}{p_1 - p_0} - \frac{p_1 c}{p_1 - p_0} \\
&\leq p_1\pi_H + (1-p_1)\pi_L - \underline{u} - a.
\end{aligned}$$

6

Trabajo en equipos

Ejercicio 6.1 *(Trabajo en Equipos cuando el esfuerzo genera externalidad positiva) Dos personas, $i = 1, 2$ trabajan en equipo y generan producción*

$$Y = (e_1 + e_2)$$

que se vende a un precio p. Supongamos que los trabajadores son neutrales al riesgo con una función de utilidad:

$$E\left(u\left(Y, e_i\right)\right) = \alpha + \beta p\left(e_1 + e_2\right) - \frac{1}{2}e_i^2$$

donde β es la parte que cada trabajador obtiene de los ingresos totales. La empresa no observa la producción asociada al esfuerzo de cada individuo: sólo se observa la producción agregada. Los trabajadores eligen su esfuerzo simultáneamente y no coordinan acciones. Cualquier compensación también debe satisfacer por cada Y

$$w_1 + w_2 = pY$$

donde w_1 es el salario del trabajador 1 y w_2 es el salario del trabajador 2.

a) *Definimos el valor añadido que los dos trabajadores pueden generar a través de su proyecto conjunto en términos de esfuerzo e_1, e_2 y el precio p:*

$$S = p\left(e_1 + e_2\right) - \frac{1}{2}e_1^2 - \frac{1}{2}e_2^2$$

Encuentre los niveles de esfuerzo para los trabajadores 1 y 2 que maximizan el valor añadido del proyecto. Si los dos trabajadores deciden dividir el valor agregado en partes iguales, ¿cuál es el valor que obtiene cada trabajador en función de p?

Pauta: *El valor añadido es:*

$$S = p\left(e_1 + e_2\right) - \frac{1}{2}e_1^2 - \frac{1}{2}e_2^2$$

Para encontrar los niveles óptimos de esfuerzo e_1 y e_2, resolvemos:

$$\max_{e_1, e_2} p\left(e_1 + e_2\right) - \frac{1}{2}e_1^2 - \frac{1}{2}e_2^2$$

De las condiciones de primer orden de este problema de maximización:

$$p = e_1$$

$$p = e_2$$

El valor añadido es entonces:

$$S = 2p^2 - p^2 = p^2.$$

y lo máximo que podría cobrar cada trabajador es $\frac{1}{2}p^2$.

b) *Defina los problemas de maximización de la utilidad que enfrentan los trabajadores 1 y 2 bajo un contrato de compensación* (α, β). *Encuentre los niveles de esfuerzo de maximización de la utilidad para los dos trabajadores.*

Pauta: *El problema de maximización de la utilidad del trabajador 1 es:*

$$\max_{e_1} \alpha + \beta p (e_1 + e_2) - \frac{1}{2}e_1^2$$

De las condiciones de primer orden, tenemos:

$$\beta p = e_1$$

De manera similar, obtenemos

$$\beta p = e_2$$

c) *Encuentre el valor de* β *que asegura que los trabajadores 1 y 2 elijan niveles de esfuerzo que maximicen el valor agregado del proyecto. ¿Cuál es el salario total que reciben los dos trabajadores en términos de* p *y el salario base* α?

Pauta: *De a) y b), concluimos que* $\beta = 1$. *Así, el salario que recibe cada trabajador es:*

$$\begin{aligned} w_1 &= w_2 = \\ &= \alpha + \underbrace{\beta}_{1} p(\underbrace{e_1}_{p} + \underbrace{e_2}_{p}) \\ &= \alpha + 2p^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, los gastos laborales total son:

$$w_1 + w_2 = 2\alpha + 4p^2$$

d) *Encuentre el valor de* α *que asegura que el valor añadido del proyecto sea igual al salario total de los dos trabajadores.*

Pauta: *De arriba tenemos:*

$$p^2 = 2\alpha + 4p^2$$

que implica

$$-3p^2 = 2\alpha$$

y $\alpha = -\frac{3}{2}p^2$.

e) *¿Cuál es el salario de cada trabajador en función de* p?

Pauta: *De(4), tenemos:*

$$2p^2 - \frac{3}{2}p^2 = \frac{1}{2}p^2$$

que es exactamente el 50% del valor agregado máximo que pueden generar los trabajadores.

Ejercicio 6.2 ***(Trabajo en equipos con múltiples jugadores)*** *Una startup tiene un equipo formado por* n *empleados. Los empleados deben simultáneamente elegir su nivel de esfuerzo. Las ganancias de la empresa como función del nivel de esfuerzo de cada participante están dadas por*

$$\pi(e_1, e_2) = e_1 + e_2 + \cdots + e_n,$$

donde $e_i \in \mathbb{R}_+$ *es el nivel de esfuerzo del empleado* i.

Supón que el costo de esfuerzo de cada empleado está dado $C(e_i) = e_i^2$.

a) *Supón que la empresa utiliza una política de compensación que paga a cada empleado una fracción equitativa de las ganancias de la empresa. En este caso, el pago de cada jugador i como función de su nivel de esfuerzo e_i y del nivel total de esfuerzo de los empleados está dado por*

$$\frac{1}{n}(e_1 + e_2 + \cdots + e_n) - e_i^2.$$

Encuentre la estrategia dominante de cada empleado como función de n. ***Pauta:*** *Tomando la condición de primer orden (CPO), uno puede ver fácilmente que los agentes tienen una estrategia dominante de elegir $e_i = \frac{1}{2n}$ (Los alumnos deberían mostrar su trabajo, idealmente justificando pq las condiciones de segundo orden se cumplen).*

b) *Para encontrar una asignación eficiente de Pareto, uno puede elegir los e_i's que maximizan la suma de utilidad de los empleados. En este caso, uno pueden resolver el siguiente problema de optimización:*

$$\max_{e_1, e_2, \cdots, e_n} (e_1 + e_2 + \cdots + e_n) - e_1^2 - e_2^2 - \cdots - e_3^2.$$

Encuentra el óptimo para este problema y muestre que todos los empleados estarían mejores si implementaran estos niveles de esfuerzo comparado con el caso en que jugaran el equilibrio de Nash obtenido en el ítem a. ***Pauta:*** *Optimizando este problema, obtenemos*

$$e_1 = e_2 = \cdots = e_n = \frac{1}{2}.$$

Si todos eligieran esta estrategia, cada jugador terminaría con un pago

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Mientras, si todos eligieran el EN obtenido en el primer ítem, obtendrían un pago de

$$\frac{1}{2n} - \left(\frac{1}{2n}\right)^2 = \frac{1}{2n}\underbrace{\left(1 - \frac{1}{2n}\right)}_{\leq 1} \leq \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{2 \times 2} = \frac{1}{4}.$$

c) *¿Cómo cambia la diferencia del esfuerzo total $e_1 + e_2 + \cdots + e_n$ obtenido en el ítem a vs el esfuerzo total (Pareto Eficiente) obtenido en el ítem b, a la medida que aumentamos n? Justifique analíticamente y presente una intuición para este resultado.* ***Pauta:*** *Uno podría calcular la diferencia absoluta de los pagos totales:*

$$\frac{n}{2} - \frac{n}{2n} = \frac{n-1}{2},$$

y tomar la derivada de eso para verificar que la diferencia crece a la medida que se aumenta n.

Pero también sería válido utilizar otras métricas para comparar estas diferencias, como la diferencia porcentual:

$$\frac{\frac{n}{2} - \frac{n}{2n}}{\frac{n}{2}} = \frac{n-1}{n},$$

tomando la derivada, se puede ver que es positiva, así que, un aumento en n aumenta la diferencia porcentual entre el esfuerzo óptimo y el de equilibrio.

Intuitivamente, si hay mucha gente en una empresa, el impacto del esfuerzo de un solo trabajador es bajo en la performance de la empresa, por lo que el trabajador tiene menos *incentivos en esforzarse. En otras palabras, el beneficio marginal del esfuerzo es bajo (cuando el jefe no puede observar o verificar el esfuerzo individual del empleado, solo el esfuerzo colectivo).*

d) *¿Por qué crees que las startups y las empresas pequeñas suelen pagar más equity a sus empleados, comparado con empresas más grandes? Presente por lo menos una justificación, preferiblemente, que esté relacionada a los ítems anteriores de la pregunta.*

Pauta: *Hay diversas razones por las cuales las startups suelen dar mucha compensación a sus empleados en la forma de acciones. Pero la más relacionada a los ítems anteriores está en el hecho de que, en empresas pequeñas, las decisiones tomadas por un solo empleado tienen un impacto significativo en la performance de la empresa en el mercado, por lo que los empleados tienen más incentivos en esforzarse para aumentar la valoración de la empresa, y con eso, sus compensaciones. Mientras, en empresas muy grandes como Amazon, las decisiones de un solo empleado suelen no tener un impacto tan significativo en la valoración de mercado la empresa, así que, para estas empresas, este tipo de compensación suele no ser tan efectivo como mecanismo de motivación.*

La siguiente respuesta también es válida, pero está más relacionada al próximo ítem: En las startups, el empleado solo puede rescatar sus acciones si la empresa tiene suceso y logra convertirse en una empresa de capital abierto. Mientras, en empresas más grandes, el empleado "solo" necesita mantener su empleo por un largo periodo de tiempo para poder rescatar sus acciones. Por lo tanto, en las startups, este mecanismo de compensación motiva más a los empleados a adoptar estrategias eficientes, ya que los empleados solo reciben pagos positivos si se esfuerzan, mientras, en empresas más grandes, este mecanismo de compensación les da un pago positivo a los empleados aunque el esfuerzo total sea bajo, lo que motiva a los empleados no esforzarse tanto (ver último ítem para más detalles).

Una otra justificación no muy relacionada a esta pregunta, pero igualmente importante, es la siguiente: para evitar que sus empleados migren a otra empresa, las empresas de tecnología necesitan pagarles sueldos altos (¿por qué es tan importante retener trabajadores en empresas de tecnología?). Pero como las startups no han acumulado muchas reservas (de hecho, muchas de ellas están endeudadas) intentan atraer empleados con promesas de pagos futuros altos, en la forma de acciones. Por lo tanto, este mecanismo de pagos es menos costoso en el corto plazo, lo que ayuda a las empresas con menor capital competir con empresas más grandes en el reclutamiento de empleados calificados.

e) *Ahora supón que el jefe de la empresa decide implementar la siguiente estructura de remuneración:*

- *Paga a cada empleado* $(e_1 + e_2 + \cdots + e_n)/n$ *si el nivel total de esfuerzo es mayor o igual a* $n/2$.
- *De lo contrarios, les paga* 0.

Muestre que, para este caso, es un EN que cada trabajador elija un nivel de esfuerzo $e_i = \frac{1}{2}$.

Pauta: *Supón que todos los demás empleados eligen* $e_i = \frac{1}{2}$. *Si un empleado decide no hacer desviación y elegir* $e_i = \frac{1}{2}$ *obtendrá un payoff de* $\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$. *Mientras, si eligiera algo inferior a* $\frac{1}{2}$, *esto implicaría que el esfuerzo total sería inferior a* $n/2$, *por lo que el empleado recibiría una compensación (sueldo) de \$0, por lo que su payoff serían inferiores a su payoff en no hacer desviación* $(\frac{1}{4})$. *Ahora supón que el empleado considera elegir un nivel de esfuerzo mayor o igual a* $\frac{1}{2}$. *Es decir él considera elegir un nivel de esfuerzo* $e_i = \frac{1}{2} + \varepsilon$, *donde $\varepsilon \geq 0$. En este caso, su payoff estaría dado por*

$$u(\varepsilon) \equiv \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\varepsilon - \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)^2.$$

Tomando la derivada de esta expresión con respeto a ε, tenemos que

$$u'(\varepsilon) = \frac{1}{n} - 2\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right) = \frac{1}{n} - 2 - 2\varepsilon \leq \frac{1}{n} - 2 \leq \frac{1}{2} - 2 < 0,$$

es decir, la utilidad es estrictamente decreciente en ε, por lo que el trabajador tiene incentivos (estrictos) en elegir $\varepsilon = 0$. Por lo tanto, el trabajador no tiene incentivos en hacer desviación eligiendo $e_i > \frac{1}{2}$.

Por simetría, esto se aplica a todos los trabajadores, por lo que nadie tiene incentivos en hacer desviación. Por lo tanto, $e_1 = e_2 = \cdots = e_n = \frac{1}{2}$ es un EN.

Ejercicio 6.3 *Dos empleados, Alice y Bob, trabajan en un proyecto para su jefe. Si no alcanzan una meta específica, el jefe decidirá despedir a ambos. El esfuerzo que cada uno pone en el proyecto les genera un costo individual, y el beneficio que obtienen de mantener su trabajo depende del esfuerzo conjunto.*

Sea $e_A \geq 0$ el esfuerzo elegido por Alice y $e_B \geq 0$ el esfuerzo elegido por Bob (ojo que el nivel de esfuerzo puede ser cualquier número real positivo). El costo de esfuerzo de cada agente $i \in \{A, B\}$ está dado por $C(e_i) = e_i^2$. El jefe determina que el esfuerzo total $e_A + e_B$ debe ser mayor o igual a 5, de lo contrario, ambos empleados reciben un beneficio de \$0 (ya que son despedidos). Pero si ambos empleados cumplen con la meta, cada empleado recibe un beneficio de \$9, así que, la utilidad de cada empleado está dada por

$$u_A(e_A, e_B) = \begin{cases} 9 - e_A^2 & si\ e_A + e_B \geq 5 \\ 0 - e_A^2 & si\ e_A + e_B < 5 \end{cases}$$

$$u_B(e_A, e_B) = \begin{cases} 9 - e_B^2 & si\ e_A + e_B \geq 5 \\ 0 - e_B^2 & si\ e_A + e_B < 5 \end{cases}$$

a) (10 puntos) Muestre que, en equilibrio, un agente $i \in \{A, B\}$ nunca elegiría $e_i > 3$. ***Pauta:*** *El payoff máximo que uno puedo obtener si elige $e_i > 3$ está dado por*

$$9 - e_i^2 < 9 - 3^2 = 0.$$

Mientras, el menor payoff que uno puede obtener si uno elige $e_i = 0$ está dado por 0. Por lo tanto, elegir $e_i = 0$ domina estrictamente elegir $e_i > 3$.

b) (10 puntos) Muestre que no podemos tener un equilibrio en que $e_A + e_B > 5$ (se puede argumentar con palabras). ***Pauta:*** *Supón por contradicción que $e_A^* + e_B^* > 5$. Entonces existe un $\varepsilon > 0$ tal que $e_A^* + e_B^* + \varepsilon = 5$. En este caso, el agente A tendría incentivos en hacer desviación unilateral y elegir $e_A = e_A^* - \varepsilon$ (de forma análoga, el agente B también tendría incentivos en hacer desviación y elegir $e_B = e_B^* - \varepsilon$).*

En palabras, los agentes no quieren esforzarse más de lo necesario para lograr la quota, ya que eso no les genera ningún beneficio adicional, solamente costos.

*c) (10 puntos) Encuentre **todos** los equilibrios del juego y dibuje los puntos de equilibrio en un gráfico, poniendo la coordinada e_A en el eje vertical, y la coordinada e_B en el eje horizontal.* ***Pauta:*** *Ya hemos visto que no podemos tener un equilibrio en que $e_A > 5$ (ítem b). Por lo tanto, solo necesitamos mirar los siguientes casos:*

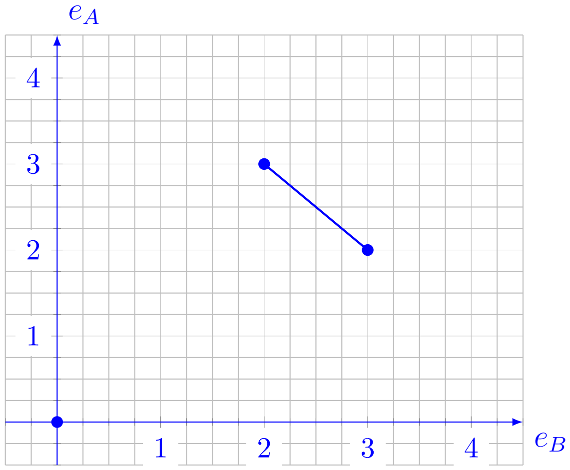


Figure 6.1: Los puntos destacados corresponden a todos los puntos de equilibrio

C1so 1) *Supón que $e_A < 2$. Sabemos que el jugador B nunca elegirá $e_B > 3$ (ver ítem a). Por lo tanto, debe elegir un valor $e_B \leq 3$. Pero dado que $e_A < 2$, el jugador B nunca logrará alcanzar la meta si elige $e_B \in [0, 3]$. Por lo tanto, la mejor respuesta de B es elegir $e_B = 0$. Claramente, la mejor respuesta de A a esta estrategia es elegir $e_A = 0$. Así, se concluye que el único equilibrio que puede ocurrir cuando $e_A < 2$ sería cuando $e_A = e_B = 0$.*

C2so 2) *Supón que $e_A \in [2, 3]$. En este caso, la mejor respuesta el jugador B sería elegir $e_B = 5 - e_A$ y el jugador A no tendría incentivos en hacer desviación.[1] Así, se concluye que $e_A \in [2, 3]$ y $e_B = 5 - e_A$ corresponde a un EN.*

Todos los puntos de equilibrio están dibujados en el gráfico 6.1.

Ejercicio 6.4 *(Trabajo en equipos y coordinación) Supón que 2 agentes, agente 1 y agente 2, forman una cooperativa. Ellos deben elegir simultáneamente sus respectivos niveles de esfuerzo: $e_1, e_2 \in \{0, 1\}$.*

Sus beneficios por el esfuerzo están dados por

$$\pi(e_1, e_2) = 4(e_1 + e_2) + 7e_1e_2,$$

mientras que sus costos por esfuerzo están dados por

$$C(e_i) = 6e_i.$$

Se supone que cada agente paga por sus costos individualmente, es decir, si, por ejemplo, el agente 1 elige un esfuerzo de $e_1 = 1$, mientras que el agente 2 elige un esfuerzo de $e_2 = 0$, solamente el agente 1 pagará el costo $C(1) = 6$. Si ambos agentes se esfuerzan, cada uno solo arca con su propio esfuerzo, es decir cada uno tiene 6 sustraído de sus pagos (no 12). Por lo tanto, este es un juego donde los agentes podrían tienen incentivos en "free ride" en el esfuerzo del otro agente.

Supón que los agentes no pueden elegir un contrato que paga cada uno contingente a su nivel de esfuerzo (e.g., pq uno no puede probar a un juez su nivel de esfuerzo, aunque esto sea

[1] Hay una pequeña excepción ahí en los puntos extremos, ya que en estos puntos uno de los agentes estará exactamente indiferente en no hacer desviación y hacer desviación y elegir $e_i = 0$.

observable por ambos agentes). Entonces los agentes deciden formar el siguiente contrato: el agente 1 obtiene una fracción $s_1 \in [0,1]$ de los ingresos

$$\pi(e_1, e_2) = 4(e_1 + e_2) + 7e_1e_2,$$

mientras, el agente 2 obtiene la fracción complementaria $(1 - s_1)$ de los ingresos.

a) *Monte la tabla de pagos de los jugadores dado este contrato, escribiendo los pagos como función de s_1.* ***Pauta:***

$J_1 \backslash J_2$	$e_2 = 0$	$e_2 = 1$
$e_1 = 0$	*0,0*	$s_1 4$,$(1-s_1)4-6$
$e_1 = 1$	$s_1 4-6$,$(1-s_1)4$	$s_1 15-6$,$(1-s_1)15-6$

b) *Muestre que, para todo $s_1 \in (\frac{6}{15}, \frac{9}{15})$, sería mejor para ambos agentes elegir $e_1 = e_2 = 1$, vs elegir $e_1 = e_2 = 0$.* ***Pauta:*** *Ambos estarían mejores si eligieran $e_1 = e_2 = 1$ ssi*

$$s_1 15 - 6 \geq 0 \iff s_1 \geq 6/15,$$

y

$$(1 - s_1)15 - 6 \geq 0 \iff s_1 \leq 9/15.$$

c) *Muestre que, para todo $s_1 \in [0,1]$ el único EN consiste en ambos agentes elegir $e_1 = e_2 = 0$.*
Pauta: *Claramente, si un agente elige $e_i = 0$ el otro agente tiene incentivos en elegir esfuerzo bajo, ya que*

$$s_1 4 - 6 \leq -2 \leq 0,$$

y

$$(1 - s_1 4) - 6 \leq -2 \leq 0.$$

Con eso se concluye que 1) $e_1 = e_2 = 0$ es un EN, 2) Si existe otro EN, ambos agentes deberían jugar $e_1 = e_2 = 1$ (pq hemos visto que si uno juega $e_i = 0$, el otro tiene incentivos en hacer lo mismo). Pero para que $e_1 = e_2 = 1$ sea un EN, el jugador 1 no puede tener incentivos en hacer desviación:

$$s_1 15 - 6 \geq s_1 4 \iff s_1 \geq 6/11,$$

ni tampoco el jugador 2:

$$(1 - s_1)15 - 6 \geq (1 - s_1)4 \iff s_1 \leq 5/11.$$

Cómo estas dos condiciones son necesarias para que $e_1 = e_2 = 1$ sea un EN, y cómo es imposible que ambas condiciones se cumplan al mismo tiempo (es decir, es imposible tener $s_1 \geq 6/11$ y $s_1 \leq 5/11$), se concluye que $e_1 = e_2 = 1$ no puede ser un EN.

d) *Ahora supón que los agentes trabajan sob la supervisión de un jefe. El jefe les propone el siguiente contrato:*

Si las ganancias totales $\pi(e_1, e_2)$ son mayores o iguales a 15, cada trabajador recibe una compensación de 7 (mientras que el jefe recibe una compensación de 1). De lo contrario, cada agente recibe una compensación de 0 (mientras que el jefe recibe toda la fracción de los ingresos $\pi(e_1, e_2)$). Construye la tabla de pagos y muestre que, en este caso, es un EN para ambos agentes eligier un nivel de esfuerzo alto (es decir, $e_1 = e_2 = 1$).

Pauta: *En este caso, la tabla de pagos estaría dada por*

$J_1 \backslash J_2$	$e_2 = 0$	$e_2 = 1$
$e_1 = 0$	$\underline{0},\underline{0}$	$0,-6$
$e_1 = 1$	$-6,0$	$\underline{7-6},\underline{7-6}$

Subrayando las mejores respuestas de cada jugador, uno puede ver fácilmente que el juego tiene 2 EN: $e_1 = e_2 = 0$ *y* $e_1 = e_2 = 1$.

e) *En las clases iniciales, hemos visto algunas razones del porqué existen las firmas: las firmas ayudan a disminuir diversos tipos costos de transacción, como el costo de creación de contratos. ¿Cómo este ejemplo podría ayudar a explicar el papel de la firma en la disminución de los costos contractuales?* ***Pauta:*** *En principio, uno no necesitaría trabajar en una empresa bajo la supervisión de un jefe para lograr cooperar con sus compañeros de trabajo: bastaría firmar un contrato que les castigara si no cooperaran. De hecho, en este ejemplo, el jefe recibe un pago positivo incluso cuando ambos cooperan, así que, en principio, introducir un jefe a la empresa parece no ser una buena idea, ya que el jefe se apropia de parte del valor añadido. Sin embargo, muchas veces la implementación de contratos que motivan la cooperación es costoso. De hecho, en este ejemplo, si ambos no cooperan, ambos son castigados, y no sería secuencialmente racional que los empleados se castiguen a ellos mismos. En la práctica sería como prender fuego al poco que han producido como forma de castigarles a ellos mismo, lo que muchas veces es costoso de se implementar a través de un contrato formal. Pero con la figura del jefe y un sistema de jerarquía, se vuelve más fácil implementar la cooperación, ya que ahora el jefe sí tiene incentivos de castigar a los empleados si estos no cumplen con sus tareas, lo que puede ayudar a explicar por qué, en general, la gente se organiza a través de empresas para realizar la producción: eso elimina la necesidad de se crear un contrato formal a cada vez que el jefe quiere que sus empleados hagan una tarea específica.*

7

Incentivos Multitarea

Ejercicio 7.1 *Uber tiene un programa que ofrece pagos extras a los motoristas cuando ellos hacen muchas rutas durante horarios de pico. Uber utiliza el número de rutas hechas por el motorista y además sus calificaciones como una señal de su esfuerzo.*

a) En el contexto de multitareas, explique por qué estas señales pueden no capturar tan bien la calidad del trabajo de un motorista. ***Pauta:*** *El motorista puede estar logrando hacer muchos trayectos en un corto espacio de tiempo por no estar obedeciendo las leyes de tránsito, lo que representa un riesgo a los pasajeros. Además, se han reportado mundialmente hartos casos de motoristas que comparten sus cuentas con otras personas, lo que podría explicar el grand volume de trayectos hechos por un usuario. Las cuentas compartidas también representan un riesgo a la seguridad de los pasajeros, ya que los que utilizan las cuentas compartidas no pasan por un "background check" (pueden incluso no tener licencia para manejar).*

b) ¿Qué tecnologías podría utilizar la plataforma para mejor capturar la performance del motorista en otras dimensiones? ***Pauta:*** *Uber puede utilizar el GPS de los autos para monitorear si están pasando del límite de velocidad. También puede notificar a los pasajeros que reporten malas prácticas a Uber, cosa que ya hacen hoy día.*

Sobre las cuentas compartidas, un criterio de detección es el numero de rutas hechas por un motorista en una semana. Si el numero de rutas es excesivo, puede hacer una inspección para detectar y remover el usuario de la plataforma, y posiblemente demandarlo.

Ejercicio 7.2

> *[...] sometimes, when she began to empty one of these sentences on me I unconsciously took the very attitude of reverence, and stood uncovered; and if words had been water, I had been drowned, sure.*
>
> – A Connecticut Yankee in King Arthur's Court, by Mark Twain.

Es muy común en ámbitos profesionales formales que la gente hable hable y no transmite ninguna información relevante.

a) Explique cómo esto está relacionado a los modelos multitarea, y cuales son los costos de estas prácticas. ¿Qué medidas el ejecutivo de una empresa podría tomar para evitar estas prácticas? ***Pauta:*** *En ámbitos profesionales, muchos tienen la noción de que cuanto más uno habla, mayor es su calificación, ya que señala que uno está transmitiendo mucha información relevante. Pero este esfuerzo de hablar mucho puede disminuir la utilidad de la empresa, ya que disminuye la velocidad de transmisión de información, y también disminuye la cantidad de información que es captada por el oyente, ya que se vuelve más costoso decodificar tantos "bits" de datos enviados por el interlocutor. Por ejemplo, si uno habla "fue* *esto que dijo el presidente de la república de Chile Miguel Juan Sebastián Piñera Echenique", uno podría transmitir la misma información mucho más rápido y clara hablando simplemente "fue esto que dijo el presidente".*

Estas prácticas podrían ser evitadas si el jefe de la empresa motivara a sus empleados ser más objetivos. Por ejemplo, durante una reunión, uno puede interrumpir el presentador de forma educada y pedir que vaya directo al punto. Si el empleado no cumple con eso, le habla de forma un poco más contundente. Uno también pueden hacer reuniones más cortas. Empresarios celebridad como Elon Musk y Mark Cuban piden eso de sus empleados, ya que su tiempo es valioso.

b) *¿Consideras eso un problema común y corriente en Chile?* ***Pauta:*** *Sin comentarios :)*

c) *¿Consideras eso un problema común y corriente en los videos de YouTube?* ***Pauta:*** *Sí, pero por una razón un poco distinta. Debido a una política de Youtube, los youtubers solo pueden poner muchos anuncios en sus videos si sus videos son suficientemente largos (ej., ver [3]). Por eso, a veces hacen videos más largos que lo necesario, para que puedan agregar más anuncios a cada uno de sus videos.*

Ejercicio 7.3 *Consideramos una empresa donde el esfuerzo es inverificable o no observable. El resultado de una relación laboral entre la empresa y uno de sus trabajadores se genera mediante la siguiente tecnología:*

$$y = e_1 + e_2 + \varepsilon$$

donde ε representa exogenos factores fuera del control del trabajador. e_1 y e_2 son los niveles de esfuerzo elegidos por el trabajador para realizar las tareas 1 y 2. El precio al que la empresa vende su producción es p. El excedente social esperado:

$$E(y) = e_1 + e_2$$

El salario del trabajador está determinado por el siguiente contrato lineal:

$$w(y) = \alpha + \beta m$$

donde

$$m = e_1 + \gamma e_2 + \xi$$

$\gamma > 0$ y ξ es una variable aleatoria que presenta factores exogenos. El salario esperado es entonces:

$$E(y) = \alpha + \beta (e_1 + \gamma e_2)$$

En este contexto m es una métrica de rendimiento que se correlaciona positivamente con y. Situaciones como esta, cuando la empresa y el trabajador se preocupan por diferentes métricas de desempeño, ocurren muy a menudo en el mundo real. Una de las razones es que m puede ser una cosa más simple y más fácil de entender.

Suponga que tanto la empresa como el trabajador son neutrales al riesgo. En particular, suponga que la utilidad esperada del trabajador está dada por:

$$E(u(e)) = \alpha + \beta (e_1 + \gamma e_2) - \frac{1}{2}e_1^2 - \frac{1}{2}e_2^2$$

El trabajador tiene la opción de negarse a trabajar en la empresa, en cuyo caso obtiene una utilidad esperada de 0.

a) Defina el problema de maximización de la utilidad del trabajador para un contrato lineal caracterizado por un pago por hora α, y una tasa de bonificación β. Encuentre el esfuerzo que maximiza la utilidad del trabajador en función del pago fijo y la tasa, (α, β).

Pauta: *El problema de maximización de la utilidad es:*

$$\max_{e} \alpha + \beta (e_1 + \gamma e_2) - \frac{1}{2}e_1^2 - \frac{1}{2}e_2^2$$

De las condiciones de primer orden para e_1 y e_2, tenemos

$$\begin{aligned} e_1 &= \beta \\ e_2 &= \beta\gamma \end{aligned}$$

b) Use la expresión de 1 para el nivel de esfuerzo que maximiza la utilidad en función de α y β para definir el problema de maximización de beneficios de la empresa.

Pauta: *El problema de maximización de beneficios de la empresa, dados los resultados de 2, es:*

$$\max_{\alpha,\beta} p.(\beta + \beta\gamma) - \left(\alpha + \beta^2 + \beta^2\gamma^2\right)$$

sujeto a

$$\alpha + \beta^2 + \beta^2\gamma^2 - \frac{1}{2}\beta^2 - \frac{1}{2}\beta^2\gamma^2 = 0$$

donde la igualdad captura el hecho de que el trabajador debe recibir al menos una utilidad esperada de 0 para aceptar trabajar en la empresa.

c) Use los resultados de los ítems anteriores para encontrar el contrato (α, β) que maximiza las ganancias de la empresa.

Pauta: *Nosotros podemos expresar α en función de β. Desde la condición de participación:*

$$\alpha = -\frac{1}{2}\beta^2 - \frac{1}{2}\beta^2\gamma^2$$

Luego, simplificamos el problema sustituyendo esta expresión por α:

$$\begin{aligned} & p.(\beta + \beta\gamma) - \left(-\frac{1}{2}\beta^2 - \frac{1}{2}\beta^2\gamma^2 + \beta^2 + \beta^2\gamma^2\right) \\ = \;& p.(\beta + \beta\gamma) - \left(\frac{1}{2}\beta^2 + \frac{1}{2}\beta^2\gamma^2\right) \end{aligned}$$

De esta manera, eliminamos la restricción y reducimos el problema a la maximización de beneficions con respecto solo a β.

$$\max_{\beta} p.(\beta + \beta\gamma) - \left(\frac{1}{2}\beta^2 + \frac{1}{2}\beta^2\gamma^2\right)$$

De las condiciones de primer orden, encontramos que

$$p(1 + \gamma) = \beta\left(1 + \gamma^2\right)$$

lo que implica

$$\beta = p\frac{(1 + \gamma)}{(1 + \gamma^2)}$$

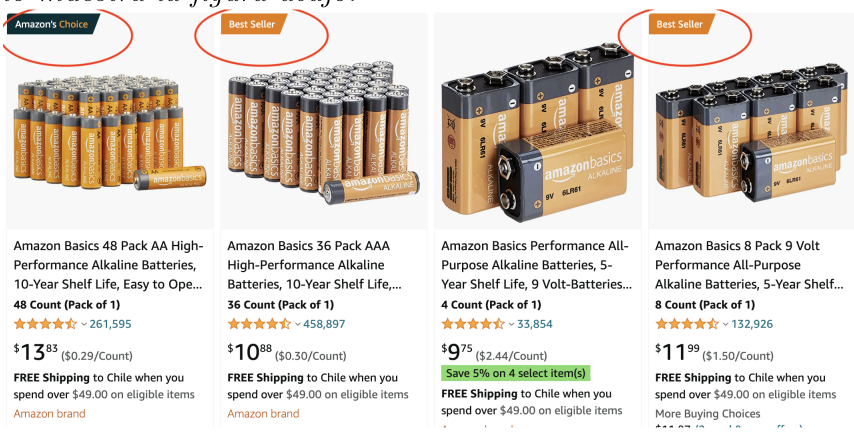
y

$$\alpha = -\frac{1}{2}\left(p\frac{(1 + \gamma)}{(1 + \gamma^2)}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(p\frac{(1 + \gamma)}{(1 + \gamma^2)}\right)^2\gamma^2$$

d) Interpreter cómo γ afecta el β de equilibrio.

Pauta: *γ introduce diferencias en los objetivos de la empresa y sus trabajadores. De hecho, se puede mostrar que si la empresa observara perfectamente e_1 y e_2 y pudiera hacer un contrato contingente a cada uno de estos niveles de esfuerzo, la empresa tendría incentivos en elegir $\beta_1 = \beta_2 = p$ (donde β_i sería el pago por cada nivel de esfuerzo e_i). Sin embargo, si la empresa observa solamente $e_1 + \gamma e_2$, elige $\beta = p\frac{1+\gamma}{(1+\gamma)^2}$. Ahora ojo que si $\gamma > 1$, entonces $\beta < p$, mientras que si $\gamma < 1$ entonces tendríamos $\beta > p$. Intuitivamente, si $\gamma \neq 1$, la compensación β les da incentivos a los empleados a dedicarse excesivo tiempo esforzándose en una única tarea (la más rentable), cuando en realidad sería de interés de la empresa que se esforzaran en ambas tareas. Eso hace que la empresa tenga incentivos en elegir un contrato distinto al contrato óptimo cuando el esfuerzo dedicado en cada tarea es observable.*

Ejercicio 7.4 *(50 puntos) Las plataformas digitales como Amazon y Linio utilizan calificaciones y número de ventas para medir la calidad de los productos transaccionados en su plataforma. Vendedores con calificaciones más altas suelen recibir prioridad en los resultados de búsqueda en la plataforma. Muchas veces, incluso, reciben recomendaciones de la plataforma, como muestra la figura abajo:*



Estas recomendaciones sirven como una forma de pago que la plataforma da a los vendedores por su buena performance. Sin embargo, estas medidas de performance están susceptibles a manipulación. De hecho, [4] y [5] muestran evidencias de que hay vendedores que solicitan calificaciones falsas elogiando sus productos a través de Facebook. Para que la calificación sea de compra verificada, los vendedores piden que los reclutados compren sus productos y les dejen una calificación positiva. Como forma de pago, el vendedor les da un reembolso por la compra del producto a través de medios digitales, como PayPal. Por un lado, estas prácticas aumentan las ganancias de la plataforma en el corto plazo, ya que las compras verificadas están sujetas al cobro de comisiones por la plataforma. Por otro lado, estos tipos de estafas dañan la reputación de la plataforma. Medidas recientes tomadas por Amazon en el combate a la fabricación de calificaciones falsas parecen mostrar que la plataforma tiene interés en resguardar su reputación.[1]

Teniendo esto en miente, vamos a estudiar un modelo sencillo donde un vendedor elige su nivel de esfuerzo en vender un buen producto y su nivel de esfuerzo de fabricar calificaciones falsas; mientras, la plataforma elige qué nivel de compensación dar al vendedor como función de la señal que recibe de su esfuerzo. Sea $e_1 \geq 0$ el nivel de esfuerzo de un vendedor en crear un buen producto, y sea $e_2 \geq 0$ su nivel de esfuerzo en obtener calificaciones falsas para este producto. Suponemos que los ingresos de la plataforma como función de e_1 y e_2 están dados por:

$$\pi(e_1, e_2) = e_1 + e_2 - e_2^2,$$

[1]Ver por ejemplo https://www.bbc.com/news/technology-62214752

donde el último término captura los efectos negativos que e_2 tiene en la reputación de la plataforma.

La plataforma no observa e_1 y e_2, solo la señal

$$n = e_1 + e_2.$$

La plataforma da un pago indirecto al vendedor: su visibilidad en la plataforma. Los parámetros que determinan la visibilidad del vendedor en la plataforma están dados por α y β, y suponemos que la utilidad del vendedor como función de α y β están dadas por

$$u(e_1, e_2) = \alpha + \beta(e_1 + e_2) - \frac{e_1^2}{2} - \frac{e_2^2}{2},$$

donde los últimos dos términos capturan los costos de esforzarse y los costos de fabricar calificaciones falsas, respectivamente.

En el primero periodo, la plataforma propone una política de compensación $\alpha+\beta n$. Después, el vendedor decide si acepta la oferta de vender a través de la plataforma o no. Si la acepta, va a elegir e_1 y e_2 que maximizan sus ganancias. De lo contrario, obtiene un "outside option" igual a $\underline{w}$.

a) *(10 puntos) Encuentre los niveles de e_1 y e_2 óptimos como función de α y β.* ***Pauta:*** *$e_1 = e_2 = \beta$ (muestra tu trabajo).*

b) *(10 puntos) Utilizando inducción al revés, encuentre el nivel óptimo de α y β como función de $\underline{w}$ que maximiza las ganancia de la empresa, dada por*

$$\pi(e_1.e_2) - \alpha - \beta(e_1 + e_2).$$

' ***Pauta:*** *$\beta = 1/2$, $\alpha = \underline{w} - \frac{1}{4}$ (muestra tu trabajo).*

c) *(10 puntos) ¿Cuál es el mayor $\underline{w}$ tal que la plataforma tiene incentivos en ofrecer un contrato que el vendedor considera como aceptable? Para contestar a esta pregunta, supón que la plataforma obtiene 0 ganancias si su oferta es rechazada.* ***Pauta:*** *$\underline{w} \leq 1/2$ (muestra tu trabajo).*

d) *(10 puntos) Ahora supón que la plataforma observa perfectamente e_1 y e_2, así que, puede ofrecer un contrato del tipo*

$$\alpha + \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2.$$

Una forma de eliminar completamente las calificaciones falsas de la plataforma sería dar un castigo muy severo aquellos que fabrican calificaciones falses, lo que correspondería a elegir $\beta_2 = -\infty$. ¿En este ejemplo, tendría la plataforma incentivos en adoptar este tipo de castigo muy duro? Justifique analíticamente. ***Pauta:*** *Por inducción al revés, tenemos que $e_1 = \beta_1$ y $e_2 = \beta_2$. Reemplazando eso en la función objetivo de la plataforma y resolviendo el problema, obtenemos*

$$\beta_1 = 1,$$

y

$$\beta_2 = 1/3.$$

e) *(10 puntos) ¿Cómo el resultado del ítem anterior podría ayudar a explicar por qué algunos productos de baja calidad aparecen en el top de los resultados de búsqueda en muchas plataformas digitales?* ***Pauta:*** *Cómo la plataforma gana ingresos por cada unidad vendida sob falsos pretextos (es decir, cada unidad vendida utilizada para obtener calificaciones falsas), la plataforma tiene incentivos en lo eliminar completamente la práctica. Sus incentivos en mitigar tal práctica van a depender de cuanto énfasis da a la reputación de la empresa.*

Ejercicio 7.5 *Un jefe pide a su empleado hacer un reporte sobre la situación financiera de la empresa y presentarlo a los stakeholders. El empleado va a elegir el nivel de esfuerzo e_1 en hacer un reporte de alta calidad y su nivel de esfuerzo e_2 en hacer una buena presentación. Supón que es de interés del jefe que tanto el reporte cuanto la presentación sean de alta calidad, pero el jefe valora más la calidad del reporte e_1 que la calidad de la presentación e_2. Más precisamente, el beneficio del jefe como función de e_1 y e_2 está dado por*

$$2e_1 + e_2.$$

Sin embargo, como es costoso evaluar cada atributo en forma individual, supón que el jefe solo observa la siguiente señal del esfuerzo agregado del empleado:

$$s = e_1 + e_2.$$

El jefe le paga al empleado un salario que es una función lineal de la señal s. Más precisamente, el jefe le paga

$$w(s) = \alpha + \beta s.$$

Por lo tanto, el payoff del jefe como función del contrato que ofrece al empleado y del nivel de esfuerzo elegido por el empleado está dado por

$$\pi(e_1, e_2, \alpha, \beta) = 2e_1 + e_2 - \left[\alpha + \beta(\underbrace{e_1 + e_2}_{=s})\right] \tag{7.1}$$

Supón que el costo de elegir e_1 está dado por $C(e_1) = e_1^2$, mientras que el costo de elegir e_2 está dado por $C(e_2) = e_2^2$. En este caso, el payoff del empleado como función del contrato ofrecido por el jefe y como función de e_1 y e_2 está dado por:

$$u(e_1, e_2, \alpha, \beta) = \alpha + \beta(e_1 + e_2) - e_1^2 - e_2^2.$$

En el primero periodo, el jefe propone una política de compensación $\alpha + \beta s$. Después, el empleado decide si acepta la oferta de trabajo o no. Si la acepta, va a elegir e_1 y e_2 que maximizan sus ganancias. De lo contrario, obtiene un "outside option" igual a $\underline{w}$.

a) *(10 puntos) Suponiendo que el empleado acepta la oferta del jefe, encuentre los niveles de e_1 y e_2 óptimos que el empleado elegiría como función de β.* ***Pauta:*** *$e_1 = e_2 = \beta/2$ (muestra tu trabajo).*

b) *(10 puntos) Utilizando inducción al revés, encuentre los niveles óptimo de α y β que elegiría el jefe como función de $\underline{w}$ (suponiendo que el jefe busca maximizar la expresión (7.1) sujeto a la restricción de que el empleado acepta su oferta).* ***Pauta:*** *$\beta = 3/2$, $\alpha = \underline{w} - \frac{9}{8}$ (muestra tu trabajo).*

c) *(10 puntos) ¿Cuál es el mayor $\underline{w}$ tal que el jefe tiene incentivos en ofrecer un contrato que el empleado considera como aceptable? Para contestar a esta pregunta, supón que el jefe obtiene 0 ganancias si el empleado rechaza su oferta.* ***Pauta:***

$$\begin{aligned}\underline{w} &\leq \beta^* + \frac{\beta^*}{2} - \frac{\beta^{*2}}{2} \\ &= \frac{3}{2} + \frac{3}{4} - \frac{9}{8} \\ &= \frac{9}{8},\end{aligned}$$

es decir, si $\underline{w} \leq \frac{9}{8}$ la empresa tiene ganancias positivas si adopta la política de contratar el empleado. De lo contrario, prefiere no contratarlo.

d) (20 puntos) Ahora supón que el jefe observa perfectamente e_1 y e_2, así que, puede ofrecer un contrato del tipo

$$\alpha + \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2.$$

Utilizando inducción al revés, encuentre los niveles de equilibrio de α, β_1 y β_2. ***Pauta:*** *Por inducción al revés, tenemos que $e_1 = \beta_1/2$ y $e_2 = \beta_2/2$. Reemplazando eso en la función objetivo del jefe y resolviendo el problema, obtenemos*

$$\beta_1 = 2,$$

$$\beta_2 = 1,$$

$$\alpha = \underline{w} - \frac{5}{4}.$$

Obs.: *Los alumnos deberían mostrar su trabajo en detalle.*

Ejercicio 7.6 *Un supervisor de una fábrica quiere que uno de sus trabajadores produzca el máximo número de piezas posibles y que estas sean de buena calidad. El trabajador va a elegir el nivel de esfuerzo e_1 en cantidades producidas y su nivel de esfuerzo e_2 en calidad. Supón que es de interés del supervisor que el trabajador se esfuerce en ambos atributos. Más precisamente, el beneficio del supervisor como función de e_1 y e_2 está dado por*

$$8e_1 + 8e_2.$$

Sin embargo, como es costoso evaluar la calidad de los productos, supón que el supervisor solo observa la siguiente señal del esfuerzo agregado del trabajador:

$$s = 8e_1 + 4e_2.$$

El supervisor le paga al trabajador un salario que es una función lineal de la señal s. Más precisamente, el supervisor le paga

$$w(s) = \alpha + \beta s.$$

Por lo tanto, el payoff del supervisor como función del contrato que ofrece al trabajador y de los niveles de esfuerzo que este elige está dado por

$$\pi(e_1, e_2, \alpha, \beta) = 8e_1 + 8e_2 - \left[\alpha + \beta(\underbrace{8e_1 + 4e_2}_{=s})\right] \tag{7.2}$$

Supón que el costo de elegir e_1 está dado por $C(e_1) = e_1^2$, mientras que el costo de elegir e_2 está dado por $C(e_2) = e_2^2$. En este caso, el payoff del trabajador como función del contrato ofrecido por el supervisor y como función de e_1 y e_2 está dado por:

$$u(e_1, e_2, \alpha, \beta) = \alpha + \beta(8e_1 + 4e_2) - e_1^2 - e_2^2.$$

En el primero periodo, el supervisor propone una política de compensación $\alpha + \beta s$. Tras observar esta propuesta, el trabajador decide si la acepta o no. Si la acepta, va a elegir e_1 y e_2 que maximizan su utilidad. De lo contrario, obtiene una "opción externa" igual a $\underline{w}$. A lo largo de la pregunta, supón que $\underline{w}$ sea bajo lo suficiente, de tal manera que el supervisor tenga incentivos en contratar el trabajador en equilibrio.

a) (10 puntos) Encuentre los niveles de e_1 y e_2 que maximizarían los ingresos del supervisor menos el costo de esforzarse del trabajador (es decir, encuentre los niveles de esfuerzo que serían Pareto eficientes). ***Pauta:*** *Los niveles de esfuerzo Pareto eficientes están dados por $e_1^{PE} = e_2^{PE} = 4$ (muestre su trabajo).*

b) (10 puntos) Suponiendo que el trabajador acepta la oferta del supervisor, encuentre los niveles de e_1 *y* e_2 *óptimos que él elegiría como función de* β. ***Pauta:*** $e_1 = 4\beta$, $e_2 = 2\beta$ *(muestre su trabajo).*

c) (10 puntos) Utilizando inducción hacia atrás, encuentre el nivel óptimo de β *que elegiría el supervisor (no es necesario encontrar* α*).* ***Pauta:*** $\beta = 6/5$ *(muestre su trabajo).*

d) (10 puntos) Utilizando los ítems anteriores, encuentre los niveles de e_1 *y* e_2 *que el trabajador termina eligiendo en equilibrio. Compare estos niveles de esfuerzo con los niveles de esfuerzo Pareto eficiente encontrados en el ítem a y presente una intuición que explica la discrepancia entre los niveles de esfuerzo encontrados en cada ítem.* ***Pauta:*** *Reemplazando* $\beta = \frac{6}{5}$ *en* $e_1 = 4\beta$ *y* $e_2 = 2\beta$*, tenemos que en equilibrio, el trabajador elige*

$$e_1 = 24/5 > 24/6 = 4 = e_1^{PE}$$

y

$$e_2 = 12/5 < 12/4 = 3 < 4 = e_2^{PE}.$$

Intuitivamente, cómo la medida de performance del empleado da una ponderación más fuerte al nivel de esfuerzo correspondiente al número de unidades producidas, el trabajador termina teniendo incentivos en enfocar la mayor parte de su esfuerzo en esta actividad.

Ejercicio 7.7 *Suponga que una consultora de tecnología decide adoptar el siguiente mecanismo de compensación para sus analistas: les paga un salario*

$$w = \alpha + \beta m,$$

donde

$$m = e_1 + \frac{1}{2}e_2$$

es una señal que captura el nivel de esfuerzo $e_1 \geq 0$ *del analista en desarrollar soluciones innovadoras (por ejemplo, mejorar algoritmos y optimizar procesos), pero también refleja parcialmente el esfuerzo* $e_2 \geq 0$ *en cortar esquinas de manera no ética (por ejemplo, violar normas de privacidad de datos).*

Suponga que a la consultora le gustaría que e_1 *fuera lo más alto posible, pero desea que* e_2 *fuera lo más bajo posible (es decir, lo más cercano a 0 posible), ya que cuanto mayor es* e_2*, mayor es la probabilidad de que la consultora enfrente problemas legales. Por lo tanto, vamos a suponer que los ingresos de la consultora como función de* e_1 *y* e_2 *estarán dados por*

$$e_1 - e_2.$$

Suponga que el costo para el analista en hacer el esfuerzo e_1 *está dado por* $\frac{1}{4}e_1^2$*, mientras que el costo asociado al esfuerzo* e_2 *está dado por* $\frac{1}{4}e_2^2$.

En una primera etapa, la consultora elige α *y* β*. Observado eso, el analista decide si acepta o rechaza el contrato ofrecido. Si no lo acepta, el analista recibe su opción externa* $\underline{w}$*, mientras que la empresa recibe 0. Si acepta la oferta, el analista elige* e_1 *y* e_2 *que maximizan su utilidad:*

$$u(e_1, e_2) = \alpha + \beta(e_1 + \frac{1}{2}e_2) - \frac{1}{4}e_1^2 - \frac{1}{4}e_2^2,$$

y la empresa obtiene una ganancia de

$$\pi(e_1, e_2) = e_1 - e_2 - \alpha - \beta(e_1 + \frac{1}{2}e_2).$$

a) (10 puntos) Dado que el analista ha aceptado el contrato ofrecido por la consultora de tecnología, encuentre los niveles de esfuerzo e_1 y e_2 que maximizan su utilidad en función de β. ***Pauta:*** *Claramente la función objetivo*

$$\alpha + \beta(e_1 + \frac{1}{2}e_2) - \frac{1}{4}e_1^2 - \frac{1}{4}e_2^2$$

es estrictamente cóncava, ya que su matriz Hessiana

$$\begin{bmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix}$$

es negativa definida. Por lo tanto la Condición de Primer Orden (CPO) es suficiente para la optimalidad (los alumnos no necesitaban mostrar eso). Tomando la CPO, obtenemos

$$e_1 = 2\beta$$

y

$$e_2 = \beta.$$

b) (10 puntos) En pocas palabras, explique cuáles son las ventajas y desventajas a la empresa de consultoría en aumentar β (acá, puedes ocupar los resultados del ítem anterior para dar respaldo a su respuesta). ***Pauta:***

- ***Ventajas:*** *al aumentar β, la empresa aumenta la probabilidad que el trabajador acepte el contrato y aumenta los incentivos del trabajador en aumentar e_1.*
- ***Desventajas:*** *un aumento en β corresponde a un sueldo más alto, lo que se refleja en costos más altos para la empresa. Además, en este ejemplo, un aumento en β implica un aumento en el esfuerzo e_2 que genera daños a la empresa (o sea, un aumento en β hace que el trabajador tenga más incentivos en ser deshonesto, tal cuál el ejemplo que vimos sobre las farmacias).*

c) (10 puntos) Aplicando inducción hacia atrás monte el problema de optimización de la consultora de tecnología, sujeto a la restricción de participación del analista. ***Pauta:*** *La consultora va a maximizar*

$$\max_{\alpha,\beta}(2\beta - \beta) - \alpha - \beta\left(2\beta + \frac{1}{2}\beta\right)$$
$$s.a.\ \ \alpha + \beta\left(2\beta + \frac{1}{2}\beta\right) - \frac{1}{4}(2\beta)^2 - \frac{1}{4}(\beta)^2 \geq \underline{w}$$

d) (10 puntos) Encuentre el α y β óptimo para el problema de optimización de la consultora formulado en el ítem anterior cómo función de $\underline{w}$. ***Pauta:*** *$\beta^* = 0.4$ y $\alpha^* = \underline{w} - 0.2$.* ***Obs.:*** *Los alumnos deberían mostrar su trabajo.*

8

Juegos Repetidos

Ejercicio 8.1 *Al final de la década de 1970's, se implementó una ley en los EE.UU limitando el control del gobierno sobre cosas como precios de las pasajes aéreas, rutas y permiso para entrar en el mercado de aviación, lo que ha llevado a una mayor competencia en el mercado, a un aumento en el número de vuelos, a una reducción en los precios de las pasajes y a un aumento en el número de pasajeros. Pero esta mayor competencia ha dejado muchas empresas en situación financiera inestable, como la Braniff International Airways. Mala de las piernas, estaba claro que esta empresa de aviación estaba prestes a quebrar. Sin embargo, en febrero de 1982, Robert Crandall, el que en la época era el presidente de American Airlines, tuvo la siguiente conversación por teléfono con Howard Putnam, el presidente de Braniff International Airways:*

***Crandall**: I think it's dumb as hell for Christ's sake, all right, to sit here and pound the * * * * out of each other and neither one of us making a * * * * * * * * dime.*

***Putnam**: Well–*

***Crandall**: I mean, you know, goddamn, what the * * * * is the point of it?*

***Putnam**: Nobody asked American to serve Harlingen. Nobody asked American to serve Kansas City, and there were low fares in there, you know, before. So–*

***Crandall**: You better believe it, Howard. But, you, you, you know, the complex is here– ain't gonna change a goddamn thing, all right. We can, we can both live here and there ain't no room for Delta. But there's, ah, no reason that I can see, all right, to put both companies out of business.*

***Putnam**: But if you're going to overlay every route of American's on top of over, on top of every route that Braniff has–I can't just sit here and allow you to bury us without giving our best effort.*

***Crandall**: Oh sure, but Eastern and Delta do the same thing in Atlanta and have for years.*

***Putnam**: Do you have a suggestion for me?*

***Crandall**: Yes. I have a suggestion for you. Raise your goddamn fares twenty percent. I'll raise mine the next morning.*

***Putnam**: Robert, we–*

***Crandall**: You'll make more money and I will too.*

***Putnam**: We can't talk about pricing.*

***Crandall**: Oh bull * * * *, Howard. We can talk about any goddamn thing we want to talk about.*

Al revés de aumentar los precios de las pasajes de Braniff, como había propuesto Crandall, Putnam presentó al gobierno una copia de la grabación, acusando su rival de tentativa de colusión. Como la coordinación de precios es ilegal en los EE.UU (gracias a la implementación del Sherman act en 1890), esta conversación podría potencialmente haber llevado el Sr. Crandall a ser arrestado. Aunque al final Crandall haya recibido un castigo muy pequeño (insignificante, *en la realidad), su acción de coordinar precios fue arriesgada.*

Pero lo curioso sobre este suceso es lo siguiente: ¿si Braniff ya estaba prestes a quebrar, por qué formar una cooperación entre los dos? De hecho, hemos visto en las clases que, en juegos finitos, es difícil implementar la cooperación, ya que los agentes hacen inducción al revés y terminan jugando el único equilibrio de Nash del "Stage Game". ¿Cómo explicaría, entonces, el comportamiento de Crandall en hacer esta propuesta indecente? ¿Habría actuado de forma irracional? ***Obs.: No haría este tipo de pregunta en una evaluación, ya que lo que se pregunta es muy especulativo.***

Pauta: Es posible que haya actuado de forma irracional. De hecho, hizo algo que podría haber resultado en su arresto. Pero existen otras posibilidades:

1. Quizás Crandall estuviera fingiendo ser irracional para motivar la cooperación de su rival. Cuando estuviera suficientemente cerca del fin del juego (es decir, cerca de la fecha en que Braniff quebrara), probablemente revelaría su verdadero tipo disminuyendo sus precios para capturar la mayor parcela del mercado y destruir su rival.

2. Aunque el juego sea finito, en general uno nunca sabe al cierto cuando el juego termina. En estes casos, uno puede interpretar el factor de descuento δ como la probabilidad de que el juego no termine en el próximo periodo. En este ejemplo, δ es bajo, por lo que los incentivos en cooperar (es decir, en hacer colusión) son bajos. Sin embargo, quizás en este ejemplo δ no fuera tan bajo.

Ejercicio 8.2 *Considera el juego simultaneo escrito en forma estratégica abajo:*

	player 2		
player 1	L	M	R
L	14,14	1,15	0,1
M	15,1	2,2	1,1
R	1,0	1,1	10,10

a) *Encuentre los EN de este juego en estrategias puras.*

b) *Ahora supón que los agentes juegan este juego por 2 periodos, y que los "payoffs" finales de cada agente están dados por la suma de pagos que obtienen en cada periodo. Supón que los jugadores adoptan la siguiente estrategia:*

   - *Jugar L en el periodo 1.*
   - *En el periodo 2 jugar R si ambos jugaron L en el periodo 1, de lo contrario jugan M.*

   Muestre que este perfil de estrategias es un ENPS (SPNE, en inglés).

Pauta:

a) Clearly, the pure strategy NE from this game are (M, M) and (R, R).

b) Clearly, agents have no incentives to deviate from the specified strategy profile in period 2. Indeed, in the event both agents have chosen L in period 1, we have that if player 2 adopts the described strategy, then in period 2 he will choose R, in which case player 1's best response is to choose R (after all, (R, R) is a NE from the stage game). And in the event one of the players have not choose L in period 1, then in period 2 player 2 will choose

M, in which case player 1 also has incentives to choose M (again, since (M, M) is a NE from the stage game). So no matter the history of plays, player 1 has no incentives to deviate from the above strategy profile in period 2. By symmetry, the same applies to player 2.

Now let's go back to period 1. In period 1, if a player does not deviate from the above strategy profile, she will get an overall payoff of

$$14 + 10 = 24,$$

while the best payoff she can possibly achieve by deviating is just

$$15 + 2 = 17,$$

so that players have no incentives to deviate in period 1.

Ejercicio 8.3 *Supón que el "stage game" abajo es jugado por un número infinito de periodos y que además cada agente tenga un factor de descuento $\delta \in [0, 1)$.*

	player 2		
player 1	L	M	R
L	10,10	1,11	0,1
M	11,1	8,8	2,2
R	1,0	2,2	0,0

a) *Supón que ambos jugadores eligen la siguiente estrategia "grim trigger":*

- *Jugar L en el periodo 1 y en cada periodo subsecuente si L ha sido jugado en todos los periodos anteriores.*
- *De lo contrario, jugar M.*

Encuentre el mínimo $\delta \in [0, 1)$ tal que este perfil de estrategia es un equilibrio de Nash Perfecto en subjuegos (ENPS).

b) *Ahora supón el siguiente perfil de estrategias: Hay dos posibles fases, la fase 1 y la fase 2. En la fase 1 ambos jugadores deben elegir L, y en la fase 2, ambos deben elegir R. Supón que los jugadores empiezan en la fase 1 (la fase de cooperación), y que si en algún momento uno de los jugadores hace una desviación en esta fase (es decir, si alguien elige algo distinto a L durante la fase 1), entonces se empieza la fase 2 (la fase de castigo), de lo contrario, los jugadores se mantienen en la fase 1. En la fase 2, ambos jugadores deben elegir R. Si uno de los jugadores hace una desviación en esta fase (es decir, si eligen algo distinto a R), se empieza la fase 2 nuevamente, de lo contrario, vuelven a la fase 1.*

Dicho en palabras, los jugadores deben cooperar jugando L. Pero si en algún momento uno de ellos hace una desviación, se empieza una fase de castigo donde ambos deben elegir R. (R, R) claramente no es un resultado deseable para ningún de los jugadores, así que, en principio, este castigo parece no ser creíble. Pero ojo que, este perfil de estrategias determina que uno es castigado por no castigar su oponente. De hecho, si uno no castiga su oponente, la fase de castigo se posterga por más un periodo.

Encuentra el mínimo factor de descuento tal que esto es un ENPS.

c) *De acuerdo con sus respuestas al ítem anterior, ¿cuál de los equilibrios requiere que los agentes tengan un factor de descuento más alto?*

d) *En tu opinión, ¿cuál de las estrategias crees que es más probable de ser jugada en la práctica?*

Pauta:

a) In the event at least one of the players has not chosen L in some previous period, their opponent will play M forever after, in which case each player will have incentives to play M forever after. So players have no incentives to deviate from the specified strategy profile during a punishment phase.

Now if players are either at period 1 or at a period in which both players have chosen L in all previous periods, then the present value from the payoff stream from not deviating is given by

$$10 + \delta 10 + \delta^2 10 + \cdots = \frac{10}{1-\delta},$$

while the payoff stream from the best deviation is given by

$$11 + \delta 8 + \delta^2 8 + \cdots = 11 + \frac{8\delta}{1-\delta}.$$

So a player won't deviate from the specified strategy profile if and only if

$$\frac{10}{1-\delta} \geq 11 + \frac{8\delta}{1-\delta}$$
$$\iff \delta \geq \frac{1}{3}.$$

b) Suppose players are currently at phase 2, i.e., at a phase in which they are both supposed to play R. Then, if a player does not deviate from the specified strategy profile, he'd get 0 at the current period, and then 10 in the next period, resulting in a present value payoff of $0+10\delta$ for these two periods. If, instead, he chose to play M (his best deviation in a phase 2 period), he'd get $2+0\delta$ in terms of present value payoff for the current and following period. We do not need to look at what would happen after those two periods, as the payoffs the player would get after returning to what their strategy profile dictates would be the same in either case. So a player will not have incentives to deviate during a phase 2 if and only if

$$10\delta \geq 2 \iff \delta \geq 1/5.$$

Now assume players have no incentives to deviate during phase 2 (the punishment phase). Then their present value payoff for not deviating during phase 1 is $10 + 10\delta$ for the current and following period, while their payoff from their best deviation is given by $11+0\delta$. Again, we do not consider the payoff following these two periods as they would be the same in either case. So a player will not have incentives to deviate during a cooperative phase (phase 1) if and only if

$$10 + 10\delta \geq 11$$
$$\iff \delta \geq \frac{1}{10}.$$

So players won't have incentives to deviate during either phase if and only if

$$\delta \geq \max\{1/10, 1/5\} \iff \delta \geq 1/5.$$

c) The SPNE from item a requires more stringent assumptions in order for it to be a an equilibrium, since the minimum discount factor required in order for it to be a SPNE is higher. It also has the feature that punishment lasts forever, which may not be desirable or realistic, as in practice people make mistakes, so they are willing to forgive "bad behavior" from their opponents.

In practice, however, implementing the SPNE from item b requires higher cognitive and coordination skills. But still, we can see real life situations in which this type of strategy seems to be implemented, such as when governments impose costly punishment for criminals, or when parents punish their kids for misbehaving (most parents probably don't enjoy grounding their kids, but sometimes they find it necessary in order to induce them to behave in the future).

Ejercicio 8.4 *Dos firmas, F_1 y F_2, participan de multiples subastas de primer precio secuencialmente. Antes de empezar las subastas, las firmas se comunican y deciden que les es mutuamente beneficioso alternar sus ofertas: en una subasta una de las firmas hace una oferta alta y la otra empresa hace una oferta baja, y después las firmas secuencialmente alternan sus roles de hacer una oferta alta o baja para evitar la competencia directa entre ellas, y así reducir el precio final pagado por el ganador de la subasta. Los pagos de las empresas en cada período están determinados por la tabla de payoffs abajo:*

	F_2	
F_1	Oferta baja	Oferta alta
Oferta baja	3,3	0,10
Oferta alta	10,0	1,1

Se asume que las firmas juegan este juego por infinitos períodos, es decir, se juega este juego en los períodos $t = 1, 2, 3, \cdots$. Además, se asume que las dos firmas tienen el mismo factor de descuento $\delta \in [0, 1)$.

Ahora considera el siguiente perfil de estrategias (grim-trigger): la firma F_1 debe hacer una oferta alta en todos los períodos impares, y una oferta baja en todos los períodos pares, mientras, la firma F_2 debe hacer oferta baja en todos los períodos impares, y ofertas altas en todos los períodos pares. Si en algún momento una de las firmas se desvía de este patrón, ambos jugadores hacen ofertas altas en todos los períodos subsecuentes (o sea, por lo que queda del juego).

a) *Encuentra el mínimo factor de descuento δ tal que este perfil de estrategia sea un SPNE (muestra tu trabajo).* ***Pauta:*** *Intuitively, the firm will have incentives to deviate in periods in which it is supposed to make a low bid. Indeed, if you deviate during a period in which you are the one who bids high and wins the auction, you get a lower payoff in the current period, and on top of that is punished on subsequent period.*[1]

So if a firm deviates during a period where it is supposed to make a low bid, it gets a continuation payoff stream, which, in present value is equal to:

$$1 + \delta + \delta^2 + \delta^3 + \cdots = \frac{1}{1-\delta}.$$

[1]The way the strategy is written, players are punished for being too nice (i.e., for bidding low when they are supposed to bid high), which does not make a lot of sense. But this hypothesis is without loss of generality: removing it would not change our results. The only reason the strategy was written like this was to simplify its description.

If he does not deviate, his continuation payoff stream, in present value, is given by

$$0 + 10\delta + 0\delta^2 + 10\delta^3 + \cdots = \frac{10\delta}{1-\delta^2}.$$

So a player will not have incentives to deviate if and only if

$$\begin{aligned} \frac{10\delta}{1-\delta^2} &\geq \frac{1}{1-\delta} \\ \iff \frac{10\delta}{(1-\delta)(1+\delta)} &\geq \frac{1}{1-\delta} \\ \iff 10\delta &\geq 1+\delta \\ \iff \delta &\geq \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

The player clearly does not have incentives to deviate during the (perpetual) punishment phase, as player play the NE of the stage game during the punishment phase.

So as long as $\delta \geq \frac{1}{9}$, this strategy profile is an SPNE.

b) *¿Tiene este juego otro SPNE? Si tu respuesta es afirmativa, ¿cuál sería un SPNE alternativo para este juego? Justifica tu respuesta (puedes utilizar los teoremas vistos en clase).* ***Pauta:*** *Yes, for any $\delta \in [0, 1)$, both firms bidding high in every period, no matter the history of plays, is a SPNE. This is because in finite repeated games, playing a NE from the stage game in every period, no matter the history of plays, is always an SPNE (no matter how low δ is).*

The game also has other SPNE for sufficiently high δ. For example, it can be easily shown that if $\delta \geq 7/9$, then both firms bidding low in every period, and then reverting to the NE from the stage game as soon as one of the firms deviates from bidding low is a SPNE. Students who elicited this SPNE were supposed to show their work.

c) *Este tipo de colusión es obviamente ilegal. Sin embargo, ocurren en la práctica. En las subastas de spectrum de radio conducidas por el FCC entre 1994 y 1998 se descubrió que algunos participantes estaban utilizando los últimos dígitos de sus ofertas para comunicarse con los otros jugadores, y de esta manera, coordinar sus ofertas. Esto llevó al FCC a adoptar restricciones que dificultaran la comunicación entre los participantes de la subasta. Utilizando tus respuestas para los ítems a y b, explica brevemente de que manera limitar la capacidad de comunicación entre los jugadores afecta la probabilidad de que los jugadores logren formar una colusión.*

Pauta: *Because the game has more than one SPNE for high enough δ, players may find it difficult to coordinate which SPNE they will play if they are not allowed to communicate with one another. In particular, they may fail to coordinate playing an SPNE in which there is collusion (like the one from item a).*

9

Contratos Relacionales

Ejercicio 9.1

> *There's an old saying in Tennessee— know it's in Texas, probably in Tennessee— that says, "Fool me once, shame on... shame on you. Fool me — you can't get fooled again.*
>
> – George W Bush, Nashville, Tenn., Sept. 17, 2002.

Considera el siguiente juego entre un consumidor y un mecánico:

	mecánico	
consumidor	Honest	Dishonest
Trust	3,3	-1,10
Don't Trust	4,-1	1,1

Ellos juegan este juego por infinitos periodos, y cada jugador tiene un factor de descuento $\delta \in [0, 1)$.

Considere el perfil de estrategias "grim trigger" donde los jugadores juegan $\{Trust, Honest\}$ en cada periodo, pero ellos juegan el EN del stage game si por lo menos uno de los jugadores no juega de acuerdo con $\{Trust, Honest\}$. ¿Sob qué condiciones es este perfil de estrategias un ENPS? (muestre su trabajo).

Pauta: In the event one of the players has already deviated, each player won't have incentives to deviate from the grim trigger strategy profile, as each will be playing a NE from the stage game in every period.

Now suppose the players are either at the first period, or at a period in which no deviation has been observed in the past. Then, if the customer does not deviate, he gets a payoff stream with present value equal to

$$3 + \delta 3 + \delta^2 3 + \cdots = \frac{3}{1-\delta},$$

whereas his best deviation would give him

$$4 + \delta 1 + \delta^2 1 + \delta^3 1 = 4 + \frac{\delta}{1-\delta}.$$

So the customer won't deviate iff

$$\frac{3}{1-\delta} > 4 + \frac{\delta}{1-\delta}$$
$$\iff \delta > \frac{1}{3}.$$

As to the mechanic, he won't deviate at such a period iff

$$\begin{aligned} & 3+3\delta+3\delta^2+3\delta^3+\cdots > 10+1\delta+1\delta^2+1\delta^3+\cdots \\ \iff & \frac{3}{1-\delta} > 10+\frac{\delta}{1-\delta} \\ \iff & \delta > \frac{7}{9}. \end{aligned}$$

So if $\delta > \max\{\frac{1}{3}, \frac{7}{9}\} = \frac{7}{9}$, then no player will have incentives to deviate. So we conclude that, if $\delta > 7/9$, then the strategy profile described in the question will be a SPNE.

Ejercicio 9.2 *Un principal y un agente interactúan de forma repetida e indefinida, siendo un período cualquiera denotado por la variable $t = 0, 1, ...$ y el agente elige $e_t \in \{0, 1\}$ para que el principal gane $\pi_t = 10e_t$ en el período t.*

Al empezar cada periodo t, el trabajador elige esforzarse o no. Observado eso, el jefe elige un sueldo $w_t \geq 0$ que paga al empleado. Las ganancias que el jefe obtiene al final del periodo t como función de w_t y e_t están dadas por

$$\pi_t = 10e_t - w_t,$$

mientras que la utilidad del trabajador al final del periodo está dada por

$$\pi_t = w_t - e_t.$$

Supón que tanto el jefe como el empleado tienen un factor de descuento $\delta \in [0, 1)$.

Supón que los jugadores adoptan la siguiente estrategia de gatillo:

Estrategia del Jefe:

1. *En el periodo 1 paga un sueldo $w_1 = s$.*
2. *En los periodos siguientes, paga un sueldo $w_t = s$ si el empleado se ha esforzado en todos los periodos anteriores y si el jefe le ha pagado $w_t \geq s$ en todos los periodos anteriores (es decir, si ambos han cooperado en todos los periodos anteriores), de lo contrario, le paga $w_t = 0$ (es decir, despide el empleado).*

Estrategia del Empleado:

1. *En el periodo 1 elige $e_1 = 1$.*
2. *En los periodos siguientes, elige $e_t = 1$ si él se ha esforzado en todos los periodos anteriores y si el jefe le ha pagado $w_t \geq s$ en todos los periodos anteriores (es decir, si ambos han cooperado en todos los periodos anteriores), de lo contrario elige $e_t = 0$ en todos los periodos siguientes.*

a) ¿Cuál es el mínimo s (en función de δ) tal que el empleado no tiene incentivos en desviarse?

Pauta: *El empleado no tendría incentivos en desviarse ssi su payoff en cada periodo fuera positivo durante la fase de cooperación es mayor o igual a cero, es decir, ssi*

$$s - 1 \geq 0 \iff s \geq 1.$$

b) *¿Cuál es el máximo s (en función de δ) tal que el jefe no tiene incentivos en desviarse?*
Pauta: *Cómo el jefe solo paga después de observar el esfuerzo en cada periodo, los incentivos en desviación van a venir del jefe. El jefe no tendría incentivos en desviarse durante los periodos de cooperación ssi:*

$$\begin{aligned}
&10 - s + \delta(10-s) + \delta^2(10-s) + \cdots \geq 10 + \delta 0 + \delta^2 0 \\
\iff &\frac{10-s}{1-\delta} \geq 10 \\
\iff &10 - s \geq 10 - 10\delta \\
\iff &\delta \geq s/10 \\
\iff &s \leq \delta 10.
\end{aligned}$$

Ojo que, cómo $\delta \leq 1$, debemos tener $s < 10$. La idea es que, para todo $s \in [1, \delta 10]$ este perfil de estrategias es un ENPS. Si s es excesivamente alto (es decir, si $s > \delta 10$), el jefe tendría incentivos en desviarse y no pagarle al empleado aunque esto se esfuerce. Si s es excesivamente bajo (es decir, si $s < 1$), el empleado tiene incentivos en buscar empleo en otro lugar.

Ejercicio 9.3 *Supón que dos colegas de trabajo juegan el juego de la tabla 9.5 abajo por infinitos periodos. En la tabla $e_i \in \{-1, 0, 1\}$ corresponde al nivel de esfuerzo de cada trabajador. Supón que ambos jugadores tienen factor de descuento $\delta \in [0, 1)$.*

	T2		
T1	$e_2 = 1$	$e_2 = 0$	$e_2 = -1$
$e_1 = 1$	5,5	1,7	-6,-6
$e_1 = 0$	7,1	2,2	-5,-5
$e_1 = -1$	-6,-6	-5,-5	-10,-10

Supón que ambos jugadores eligen la siguiente estrategia "Tit for tat" (ojo por ojo):

- *Elige $e_i = 1$ en el periodo 1.*
- *En cada periodo subsecuente, elige lo que eligió la otra persona en el periodo anterior.*

a) *Encuentre el mínimo factor de descuento tal que este perfil de estrategias es un equilibrio de Nash (**EN**) para este juego repetido.*

b) *Muestre que este perfil de estrategias **nunca** será un Equilibrio de Nash perfecto en subjuegos (**ENPS**) para cualquier valor de δ.*

Pauta:

a) Para que no haya incentivos en desviación en el periodo 1 (es decir, en el subjuego inicial) debemos tener

$$\begin{aligned}
&5 + 5\delta + 5\delta^2 + \cdots \geq 7 - 10\delta - 10\delta^2 - 10\delta^3 - \cdots \\
\iff &\frac{5}{1-\delta} \geq 7 - \frac{10\delta}{1-\delta} \\
\iff &5 \geq 7 - 7\delta - 10\delta \\
\iff &\delta \geq 2/17.
\end{aligned} \tag{9.1}$$

Por lo tanto, si $\delta \geq 2/17$, ningún agente tendrá incentivos en desviarse de este perfil de estrategia en el subjuego inicial, por lo que sería un EN para el juego completo (pero no necesariamente para cada subjuego).

b) Los agentes claramente tienen incentivos en desviarse durante la fase de castigo: de hecho, si mi colega elige $e_i = -1$ en todos los periodos siguientes, tengo incentivos en elegir $e_i = 0$ en todos los periodos siguientes, no $e_i = -1$.

Ejercicio 9.4 ***(20 puntos)*** *Supón que dos colegas de trabajo juegan el juego de la tabla 9.5 abajo por infinitos periodos. Supón que ambos jugadores tienen factor de descuento $\delta \in [0, 1)$.*

	T2	
T1	**No Cooperar**	**Cooperar**
No Cooperar	2,2	7,1
Cooperar	1,7	5,5

Supón que ambos jugadores eligen la siguiente estrategia "Tit for tat" (ojo por ojo):

- *Cooperar en el periodo 1.*
- *En cada periodo subsecuente, tomar la misma acción que su rival ha tomado en el periodo inmediatamente anterior.*

*a) (10 puntos) Encuentre el mínimo factor de descuento tal que este perfil de estrategias es un equilibrio de Nash (**EN**) para este juego repetido.*

*b) (10 puntos) Muestre que este perfil de estrategias **nunca** será un Equilibrio de Nash perfecto en subjuegos (**ENPS**) para cualquier valor de δ.*

Pauta:

a) Para que los jugadores no tengan incentivos en desviación durante una fase de cooperación, debemos tener

$$\begin{aligned} & 5 + 5\delta + 5\delta^2 + \cdots \geq 7 + 2\delta + 2\delta^2 + 2\delta^3 + \cdots \\ \iff & \frac{5}{1-\delta} \geq 7 + \frac{2\delta}{1-\delta} \\ \iff & \delta \geq 2/5. \end{aligned} \tag{9.2}$$

Por lo tanto, si $\delta \geq 2/5$, ningún jugador tendrá incentivos en desviación durante los periodos de cooperación, lo que implica que este perfil de estrategia es un NE.

b) Supón que los agentes se encuentran en un subjuego donde ambos no han cooperado en el periodo anterior. En este caso, el payoff en valor presente de seguir la estrategia ojo por ojo estará dado por

$$2 + 2\delta + 2\delta^2 + \cdots = \frac{2}{1-\delta}.$$

Mientras, el payoff en valor presente de siempre cooperar estará dado por

$$1 + 5\delta + 5\delta^2 + 5\delta^3 + \cdots = 1 + \frac{5\delta}{1-\delta}$$

Por lo tanto, no habrá incentivos en desviación ssi:

$$\frac{2}{1-\delta} \geq 1 + \frac{5\delta}{1-\delta} \iff \delta \leq 1/4,$$

una contradicción con la inequidad (9.2). Por lo tanto, este perfil de estrategias no puede ser un ENPS para cualquier $\delta \in [0, 1)$.

Ejercicio 9.5 *Supón que dos colegas de trabajo juegan el juego de la tabla 9.5 abajo por infinitos periodos. Supón que ambos jugadores tienen factor de descuento $\delta \in [0, 1)$.*

	T2	
T1	**No Cooperar**	**Cooperar**
No Cooperar	2,2	8,1
Cooperar	1,8	6,6

Supón que ambos jugadores eligen la siguiente estrategia de gatillo:

- *Cooperar en el periodo 1.*
- *En cada periodo subsecuente, cooperar si ambos han cooperado en todos los periodos anteriores. De lo contrario, no cooperar.*

Encuentre el mínimo factor de descuento tal que este perfil de estrategias es un equilibrio de Nash Perfecto en Subjuegos.

Pauta: *$\delta \geq 1/3$ (mostrar su trabajo).*

Ejercicio 9.6 *(Contratos relacionales y como ellos ayudan a disminuir los costos de transacción)*

Supón que una empresa contrata a un especialista en informática para hacer la migración del sitio web de la empresa. La empresa y el empleado simultáneamente deben decidir si cooperan o no. En este contexto, la empresa estaría cooperando si pagara al especialista conforme el prometido, mientras que, del punto de vista del especialista en informática, cooperar significa esforzarse para hacer un buen trabajo.

La tabla de pagos de este juego está dada por el cuadro 9.1 abajo, donde C corresponde a la estrategia de cooperar, mientras NC corresponde a la estrategia de no cooperar.

	Especialista	
Empresa	C	NC
C	4, 1	0, 2
NC	5, 0	1, 1

Table 9.1: Payoff del especialista y de la empresa como función del par de acciones que toman. La primera entrada de cada coordinada de la tabla corresponde al payoff de la empresa, mientras que la segunda entrada corresponde al payoff del especialista.

a) (10 puntos) Encuentre el equilibrio de Nash de este juego (muestre su trabajo). ***Pauta:***

- ***Solución 1:*** *Subrayar las mejores respuestas y llegar a la conclusión que, tener ambos no cooperando es un EN.* ***Obs.:*** *Además de subrayar las mejores respuestas, hay que dejar claro cuáles son las estrategias de equilibrio. -1 punto si no hacen eso.*
- ***Solución 2:*** *Verificar que ambos jugadores tienen una estrategia estrictamente dominante en "No cooperar". De hecho, si la empresa cree que que el especialista Coopera, su payoff de no cooperar es superior ($5 > 4$). De igual manera, si la empresa piensa que el especialista no va a cooperar, prefiere no cooperar ($1 > 0$). Se puede utilizar el mismo raciocinio para el Especialista: $2 > 1$ y $1 > 0$, por lo que, independientemente de lo que haga la empresa, el trabajador siempre va a preferir no cooperar.*

b) *(10 puntos) Determine si el equilibrio encontrado es Pareto eficiente o no, justificando su respuesta.* ***Pauta:*** *No. De hecho, en equilibrio ambos jugadores obtienen un payoff de 1, mientras que si ambos cooperaran, la empresa estaría estrictamente mejor con un payoff de 4, y el especialista obtendría el mismo payoff de 1, por lo que es posible mejorar el payoff de la empresa sin perjudicar al especialista.*

c) *(10 puntos) Ahora supón que en una primera etapa la empresa puede invitar el especialista a firmar un contrato formal que motiva la cooperación. Más precisamente, si el especialista firma el contrato, él se compromete a cooperar, de lo contrario recibirá sanciones y lo mismo vale para la empresa. El costo que tiene la empresa de crear este contrato está dado por $g \geq 0$, por lo que, en la contingencia en que la empresa crea el contrato, tendrá g sustraído de su payoff, independientemente de si el empleado acepta firmar el contrato o no. Este juego está expresado en formato secuencial en la figura 9.1 (próxima página).*

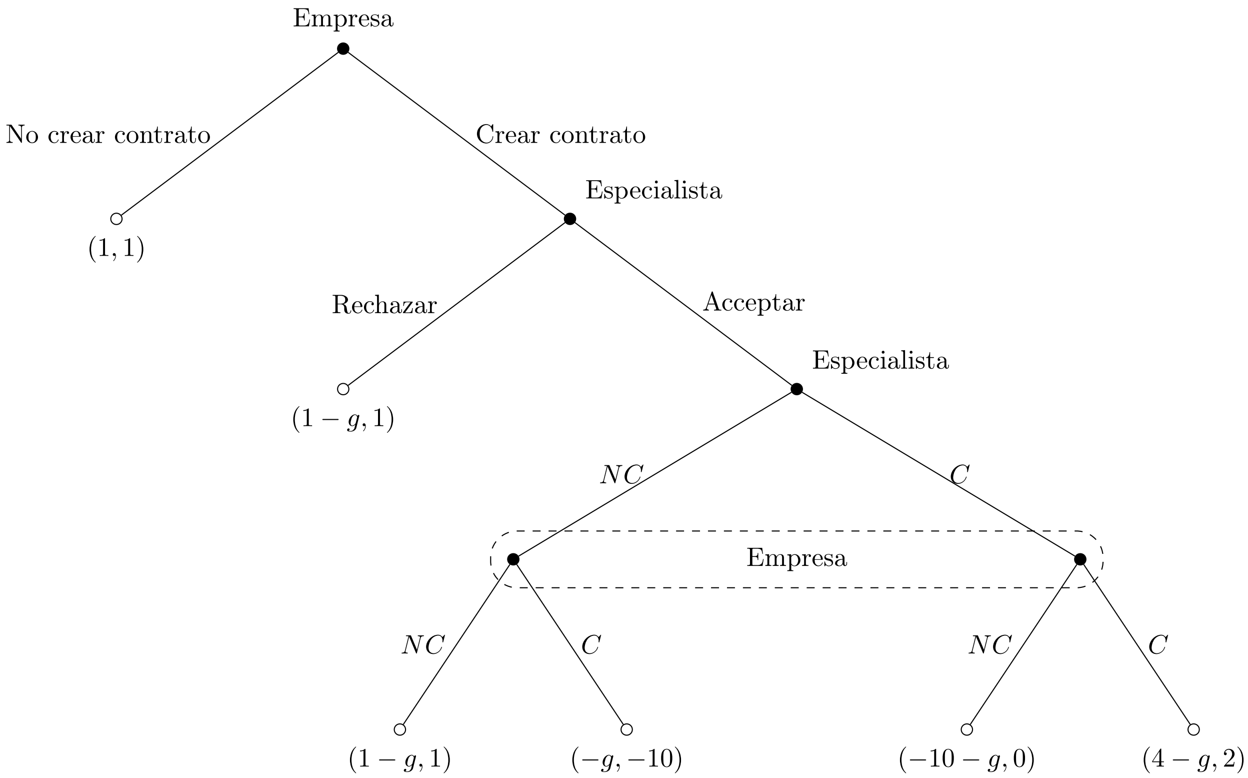


Figure 9.1: Un juego secuencial entre una empresa y un especialista en informática. La primera entrada de payoffs corresponde al payoff de la empresa, mientras que la segunda entrada corresponde al payoff del empleado.

Encuentre el máximo valor de g tal que la empresa tiene incentivos en ofrecer el contrato. Muestre su trabajo.

Pauta: *Este problema admite hartas respuestas distintas por qué el juego tiene multiples ENPS. Lo importante es que justifique bien su respuesta utilizando los principios de racionalidad secuencial.*

- ***Solución 1:*** *La tabla de payoffs del último juego está dada por el cuadro 9.2.*

  Por la tabla, se puede ver (subrayando las mejores respuestas) que, en este subjuego hay un equilibrio de Nash en que ambos eligen cooperar, el que es el equilibrio más

	Especialista	
Empresa	C	NC
C	4-g, 1	0-g, -10
NC	-10-g, 0	1-g, 1

Table 9.2: Último subjuego del juego de la figura 9.1.

eficiente de este subjuego.[1] *Por lo tanto, podemos reemplazar este payoff en el árbol de la figura 9.1 para escribir el juego reducido de la figura 9.2*

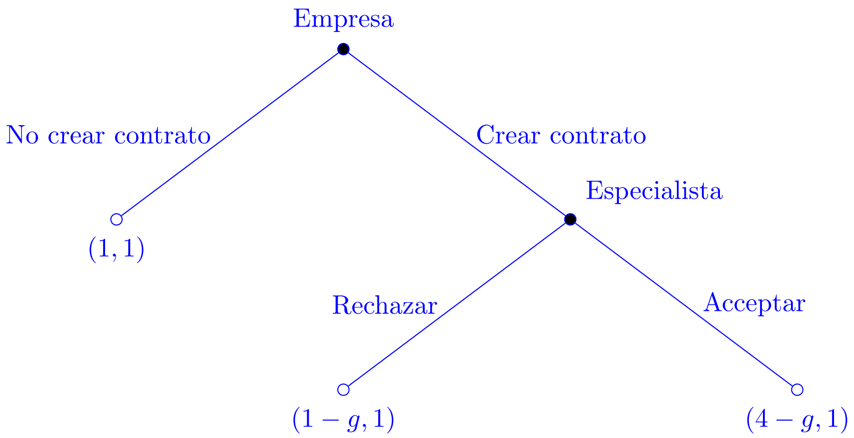


Figure 9.2: Juego reducido

Aplicando inducción hacia atrás, se puede ver que el especialista está indiferente entre aceptar y rechazar el contrato. Entonces podemos suponer que el especialista acepta el contrato. Si lo hace así, la empresa obtiene un payoff de $4-g$ si ofrece el contrato, y obtiene 1 si no lo ofrece. Entonces la empresa solo podría tener incentivos en ofrecer el contrato si $4-g \geq 1 \iff g \leq 3$.

- ***Solución 2:*** *El alumno también puede mostrar que, para cualquier valor de g hay un ENPS en que el analista rechaza la oferta de la empresa (ojo que el analista está siempre indiferente entre aceptar y rechazar). El alumno podría utilizar eso para decir que el jefe nunca tendrá incentivos en ofrecer el contrato mientras $g > 0$ y mientras el jefe tenga fuerte aversión al riesgo, ya que, cómo el analista está indiferente, el jefe no puede predecir con precisión qué acción el analista va a tomar si le ofrece el contrato.*
- ***Solución 3:*** *Cómo el analista está exactamente indiferente entre aceptar y rechazar el contrato, la empresa nunca va a estar 100% segura de que su contrato será aceptado. Por lo tanto, si la empresa tiene mucha aversión al riesgo, solo le conviene ofrecer el contrato si $g = 0$.*

d) *(10 puntos) Observe que en este modelo se supone que, terminado el trabajo de migración del sitio web, el especialista en informática y el jefe de la empresa nunca más vuelven a interactuar. Explique un posible beneficio que tendría la empresa si esta, al revés de contratar el especialista para prestar solo este servicio especifico lo contratara por un periodo más largo de tiempo para realizar otros servicios.* ***Pauta:*** *Posibles respuestas:*

[1] Además, ojo que la única razón por qué la empresa ofrecería tal contrato es por qué espera que se juegue el equilibrio más eficiente en el último periodo. Por lo tanto, es natural que el especialista espere que la empresa coopere en el último periodo, por lo que también debe cooperar.

- *Eso ayudaría a reducir los costos contractuales: uno necesitaría firmar solo un contrato al revés de firmar un contrato nuevo toda la vez que necesitara un servicio.*
- *Eso ayudaría a disminuir los demás costos de transacción (e.g., costos de búsqueda, costos de entrenamiento, etc.).*
- *En juegos repetidos la gente tiene más incentivos en cooperar sin la necesidad de creación de contratos formales costosos. De hecho, si los agentes volvieran a interactuar, uno podría ser castigado por no haber cooperado en los periodos anteriores. Dicho de otra forma, interacciones repetidas permiten represalias en periodos subsecuentes, lo que motiva la cooperación (veremos eso en más detalles al estudiar contratos relacionales).*

Ejercicio 9.7 *(Pago en 2 partes) Un principal y un agente interactúan de forma repetida e indefinida, siendo un período cualquiera denotado por la variable $t = 0, 1, ...$ y el agente elige $e_t \in \{0, 1\}$ para que el principal gane $\pi_t = 12e_t$ en el período t.*

Al empezar cada periodo t, el empleado elige su nivel de esfuerzo $e_t \in \{0, 1\}$ (es decir, el empleado elige su esfuerzo antes de recibir su sueldo). El costo de esforzarse (es decir, de elegir $e = 1$) está dado por \$8. Tras observar e_t, el empleador elige el sueldo w_t que le paga al empleado en el periodo t.

Las ganancias que el jefe obtiene al final del periodo t como función de w_t y e_t están dadas por

$$\pi_t = 12e_t - w_t,$$

mientras que la utilidad del trabajador al final del periodo está dada por

$$\pi_t = w_t - 8e_t.$$

*Supón que tanto el jefe como el empleado tienen **el mismo** factor de descuento $\delta \in [0, 1)$.*

a) (10 puntos) Supón que los jugadores adoptan la siguiente estrategia de gatillo:

Estrategia del Jefe:

i) En el periodo 1 paga un sueldo $w_1 = 10$ si el empleado ha elegido $e_1 = 1$.

ii) En los periodos siguientes, paga un sueldo $w_t = 10$ si el empleado se ha esforzado en el periodo t y en todos los periodos anteriores y si el jefe le ha pagado por lo menos \$10 en todos los periodos anteriores (es decir, si ambos han cooperado en todos los periodos anteriores), de lo contrario, le paga $w_t = 0$.

Estrategia del Empleado:

i) En el periodo 1 elige $e_1 = 1$.

ii) En los periodos siguientes, elige $e_t = 1$ si él se ha esforzado en todos los periodos anteriores y si el jefe le ha pagado por lo menos \$10 en todos los periodos anteriores (es decir, si ambos han cooperado en todos los periodos anteriores), de lo contrario elige $e_t = 0$.

Encuentre el mínimo δ tal que este perfil de estrategias es un ENPS. ***Pauta:*** *Cómo el jefe le paga al empleado después que este elige su esfuerzo, será el jefe la persona quien* *potencialmente tendrá incentivos en "hacer trampa". El jefe no tendrá incentivos en hacer desviación ssi*

$$
\begin{aligned}
& 12 + 0\delta + 0\delta^2 + \cdots \leq (12-10) + (12-10)\delta + (12-10)\delta^2 + \cdots \\
\iff & 12 \leq \frac{2}{1-\delta} \\
\iff & \boxed{\delta \geq \frac{5}{6}}.
\end{aligned}
$$

Puntaje: *-3 puntos por errores de álgebra.*

b) *(10 puntos) Supón ahora que el empleado recibe su sueldo en adelantado, es decir, el empleado recibe w_t antes de elegir e_t. Suponiendo que el jefe y el empleado adoptan un par de estrategias de gatillo semejante al par de estrategias del ítem anterior, encuentre el mínimo factor de descuento tal que este perfil de estrategias es un ENPS.* ***Pauta:*** *Cómo el empleado recibe en adelantado, ahora será el empleado la persona quien podrá tener incentivos en hacer desviación. Este tendrá incentivos en cooperar ssi*

$$
\begin{aligned}
& 10 + 0\delta + 0\delta^2 + \cdots \leq (10-8) + (10-8)\delta + (10-8)\delta^2 + \cdots \\
\iff & 10 \leq \frac{2}{1-\delta}, \\
\iff & \boxed{\delta \geq \frac{4}{5}}.
\end{aligned}
$$

es decir, si el castigo es más débil, el jefe debe pagar más al empleado para que este no tenga incentivos en desviarse.

Puntaje: *Ojo que yo deliberadamente no escribí formalmente cuál sería la estrategia de gatillo en este caso para evitar que la prueba se volviera muy larga. Dice solamente que los agentes adoptarían una estrategia* ***semejante*** *a del ítem anterior. Por lo tanto, lo ideal es que el alumnos describiera formalmente cuál sería la estrategia de los jugadores en este caso. Pero como este no es un curso de matemática, no hay que darles una penalización por no hacer eso. Pero sería simpático darles puntaje extra a los alumnos que escribieron las estrategias de los jugadores con rigor y, sin embargo, han cometido un error al intentar buscar el δ mínimo tal que este par de estrategias es un equilibrio. Por lo tanto, +2 puntos a los alumnos que han explicitado con rigor cuál sería la estrategia de gatillo de cada jugador (¡sospecho que habrán muy pocos casos así!). -3 puntos por errores de álgebra.*

c) *(10 puntos) Ahora supón que el jefe le paga al empleado en dos fases:*

I) *Al empezar el periodo t el jefe elige $w_{t,1}$ el monto en adelantado que le paga al empleado.*

II) *Tras observar $w_{t,1}$, el empleado elige su nivel de esfuerzo $e_t \in \{0,1\}$.*

III) *Tras observar e_t, el jefe elige el pago adicional al empleado, $w_{t,2}$.*

Para este juego, considere el siguiente perfil de estrategias de gatillo:

Estrategia del Jefe:

i) *En el periodo 1 paga el sueldo $w_{t,1} = 5$. Si el empleado elige $e_1 = 1$, el jefe le paga $w_{t,2} = 5$.*

ii) *En los periodos siguientes, paga un sueldo $w_{t,1} = 5$ si el empleado se ha esforzado en todos los periodos anteriores y si el jefe le ha pagado por lo menos $5 + 5 = 10$ en todos* *los periodos anteriores (es decir, si hubo cooperación en todos los periodos anteriores). Si además de eso el empleado se esfuerza en el periodo t y si $w_{t,1} \geq 5$, entonces al final del periodo t el jefe le paga $w_{t,2} = 5$, de lo contrario no le paga nada. Si en algún periodo anterior no hubo cooperación (es decir, si en algún periodo anterior el jefe hizo un pago total inferior a \$10 o si el empleado ha elegido no esforzarse), entonces el jefe elige $w_{t,1} = w_{t,2} = 0$.*

Estrategia del Empleado:

i) En el periodo 1 elige $e_1 = 1$ si el jefe ha elegido $w_1 \geq 5$, de lo contrario elige $e_1 = 0$.

ii) En los periodos siguientes, elige $e_t = 1$ si $w_{1,t} \geq 5$ y si hubo cooperación en todos los periodos anteriores (es decir, si el trabajador se ha esforzado en todos los periodos anteriores y si el jefe le ha pagado por lo menos \$10 (en total) en todos los periodos anteriores), de lo contrario elige $e_t = 0$.

Encuentre el mínimo factor de descuento δ, tal que este perfil de estrategias es un ENPS. ***Pauta:*** *En este caso, tanto el jefe como el empleado podrán potencialmente tener incentivos en hacer desviación. El empleado no tendrá incentivos en hacer desviación ssi*

$$
\begin{aligned}
& 5 + 0\delta + 0\delta^2 + \cdots \leq (10-8) + (10-8)\delta + (10-8)\delta^2 + \cdots \\
\iff & 5 \leq \frac{2}{1-\delta}, \\
\iff & \boxed{\delta \geq \frac{3}{5}}. \qquad (9.3)
\end{aligned}
$$

El jefe no tendrá incentivos en hacer desviación ssi

$$
\begin{aligned}
& (12-5) + 0\delta + 0\delta^2 + \cdots \leq (12-10) + (12-10)\delta + (12-10)\delta^2 + \cdots \\
\iff & 7 \leq \frac{2}{1-\delta}, \\
\iff & \boxed{\delta \geq \frac{5}{7}}. \qquad (9.4)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, este perfil de estrategias será un equilibrio ssi

$$
\begin{aligned}
& \delta \geq \max\{\frac{5}{7}, \frac{3}{5}\} \\
\iff & \boxed{\delta \geq \frac{5}{7}}.
\end{aligned}
$$

Puntaje: *¡Mucho cuidado! Es posible que un alumno llegue a la respuesta correcta de que es necesario y suficiente que $\delta \geq \frac{5}{7}$ y sin embargo no haya mirado los incentivos del empleado. -3 puntos a los alumnos que hacen eso. Además, -2 puntos a los alumnos que correctamente llegan a la conclusión de que las desigualdades (9.3) y (9.4) se deben cumplir, pero no dicen que debemos tener $\delta \geq \max\{\frac{5}{7}, \frac{3}{5}\} = \frac{5}{7}$.*

d) *(10 puntos) Utilizando sus respuestas a los ítems anteriores, explique cómo el pago en dos partes del ítem c podría facilitar la cooperación entre el jefe y el empleado.* ***Pauta:*** *Observe que para implementar los equilibrios de los ítems a y b necesitábamos un factor de descuento más alto (de hecho, ojo que $5/7 < 5/6$ y $5/7 < 4/5$), por lo que con este sistema de pagos en*

2 partes, es más probable que los agentes cooperen, ya que requiere menos "paciencia" por parte de los jugadores (es decir, requiere un factor de descuento menor).

Respuesta alternativa (intuitiva, sin utilizar matemática): *Intuitivamente, el sistema de pagos en que el jefe le paga todo al empleado después que este realiza su trabajo requiere que el jefe tenga un factor de descuento muy alto, para que este no tenga incentivos en "huir con toda la plata". Mientras el mecanismo de pago en adelantado requiere que el empleado tenga un factor de descuento muy alto para que este no tenga incentivos en "huir con toda la plata". Pero el sistema de pago en 2 partes requiere que ambos tengan un factor de descuento moderado: ahora el jefe no tiene tanto incentivos en huir con la plata, ya que solo puede "robar" un máximo de $5, y lo mismo vale para el empleado. Por lo tanto, si ambos tienen el mismo factor de descuento, este mecanismo de pago disminuye los incentivos en hacer trampa: es decir, ambos tienen potenciales incentivos en hacer trampa, pero estos incentivos son bajos para cada jugador.*

Puntaje: *Para que el alumno reciba puntaje completo utilizando la respuesta alternativa, debe expresarse muy bien (su respuesta debe ser por lo menos tan buena cuanto a la que escribí yo). Si el alumnos se expresa mal, puede quitarle cuantos puntos crees que seas justo (ej., si la frase no tiene ningún sentido, puede darle 0 al alumno).*

10

Salario Eficiencia

Consideramos la interacción entre un individuo y una empresa que es contratada para completar un proyectio: por ejemplo, la renovación de un edificio. Hay dos periodos, $t = 1, 2$: el proyecto comienza en $t = 1$ y termina en $t = 2$. A cambio de sus servicios, la empresa recibe del individuo un pago de $2w$ en dos cuotas iguales: w al inicio del trabajo y el otro pago de w al finalizar el proyecto. La empresa se compromete a un estándar de calidad s en la ejecución de la tarea. La empresa tiene dos opciones en $t = 1$: seguir el estándar s que implica un costo e o no seguir el estandar que implica un costo de 0. Cuando la empresa está lista, el individuo examina los resultados y detecta con una probabilidad q si el contratista ha seguido el estándar acordado s. Si el individuo detecta que la empresa no ha seguido el estándar s, la empresa no recibe el segundo pago de la suma acordada. En todos casos, la empresa compra los materiales necesarios para el trabajo por c. En el caso cuando la empresa detecta la ausencia del estandar de calidad, el particular y el contratista recurren a un arbitraje judicial. Con probabilidad u la empresa recibe una compensación $\underline{w}$ y con probabilidad $1 - u$ debe pagar $\underline{e}$ al individuo. Supón que tanto el individuo como la empresa tienen un factor de descuento $\delta \in [0, 1)$.

a) Defina los beneficios de la empresa cuando esta sigue el estándar s y cuando no lo hace.

Pauta: Caso 1: La empresa sigue el estandar s. En $t = 1$

$$\pi_1(w, e, c) = w - e - c$$

En $t = 2$:

$$\pi_2(w, e, c) = w$$

Los beneficios totales son:

$$\pi^e(w, e, c) = (1 + \delta)\, w - e - c$$

Caso 2: La empresa no sigue el estandar s. En $t = 1$

$$\pi_1(w, e, c) = w - c$$

En $t = 2$:

$$\pi_2(w, e, c) = (1 - q)\, w + q\, (u\underline{w} - (1 - u)\, \underline{e})$$

Los beneficios totales son:

$$\pi^{ne}(w, e, c) = w - c + \delta\, ((1 - q)\, w + q\, (u\underline{w} - (1 - u)\, \underline{e}))$$

b) Determine cuándo la empresa sigue el estándar y cuándo no: es decir, encuentre una condición para e en términos de w y los otros parámetros.

Pauta: La empresa sigue el estándar cuándo:

$$\pi^{e}(w,e,c) \geq \pi^{ne}(w,e,c)$$

$$\begin{gathered} w-c+\delta\left((1-q)\,w+q\left(u\underline{w}-(1-u)\,\underline{e}\right)\right) \leq (1+\delta)\,w-e-c \\ \delta wq-\delta q\left(u\underline{w}-(1-u)\,\underline{e}\right) \geq e \end{gathered}$$

c) Use la condición encontrada en el ítem anterior para determinar el pago que el individuo tiene que pagar a la empresa para asegurar que esta siga el estándar de calidad.

Pauta:

$$\begin{aligned} \delta wq-\delta q\left(u\underline{w}-(1-u)\,\underline{e}\right) &\geq e \\ \frac{e+\delta q\left(u\underline{w}-(1-u)\,\underline{e}\right)}{\delta q} &\leq w \\ \frac{1}{\delta q}e+\left(u\underline{w}-(1-u)\,\underline{e}\right) &\leq w \end{aligned}$$

d) Determine como el pago mínimo w encontrado en el ítem anterior varia dado un cambio en δ, q, u, $\underline{w}$ y $\underline{e}$.

Pauta:

- El pago disminuye en δ : cuando la empresa es muy impaciente, el valor del segundo pago disminuye y el individuo tiene que aumentar el monto total mucho.
- El pago disminuye en q : cuando la probabilidad de detección es baja, la recompensa por seguir el estándar debe aumentar: el aumento en el pago hace que aumenten las pérdidas potenciales asociadas con la detección que la empresa no ha seguido el estandar.
- El pago aumenta en el sesgo u de la corte en favor de la empresa y en el pago asociado $\underline{w}$
- El pago disminuye en el pago $\underline{e}$.

11

Selección Adversa

Ejercicio 11.1 ***(Mercado de "cacharros" (Market of lemons))*** *Considera el siguiente modelo donde un vendedor está intentando vender su auto a un comprador. El auto puede ser o de calidad alta o baja, es decir "bueno", o un "cacharro". Cuando el auto es bueno, el comprador lo valora en \$3,000 y el vendedor lo valora en \$2,000, pero cuando el auto es un cacharro el comprador lo valora en \$1,000, mientras que el vendedor lo valora en \$0 (es decir, cuando el auto es un cacharro, el vendedor lo quiere vender a cualquier costo). El vendedor y comprador deben simultáneamente elegir si transan o no. Si ambos deciden transar, el auto es vendido al precio exógeno de mercado p, el que es de conocimiento común a ambos jugadores. Si por lo menos uno de ellos decide no transar, el auto no es vendido, por lo que en este caso el comprador termina con 0 ganancias, y el vendedor obtiene su valor de reserva por el auto (\$2,000 si el auto es bueno, y \$0 si es un cacharro).*

Por lo tanto, tenemos que las tablas de pagos de este juego cuando el auto es bueno y cuando el auto es un cacharro están dadas por las tablas 11.1 y 11.2, respectivamente.

	Vendedor	
Comprador	Transa	No Transa
Transa	$3000 - p, p$	$0, 2000$
No Transa	$0, 2000$	$0, 2000$

Table 11.1: Tabla de pagos cuando el auto es bueno.

	Vendedor	
Comprador	Transa	No Transa
Transa	$1000 - p, p$	$0, 0$
No Transa	$0, 0$	$0, 0$

Table 11.2: Tabla de pagos cuando el auto es un cacharro (es decir, un *limón*).

Supón que el auto es bueno con probabilidad π y un cacharro con probabilidad $1 - \pi$. Como en la práctica el vendedor conoce mejor las condiciones de su producto, vamos a suponer que solo el vendedor conoce el tipo de su auto. El comprador solo sabe que con probabilidad π el auto es bueno y con probabilidad $1 - \pi$ el auto es un cacharro.

Muestre que si $\pi < \frac{1}{2}$, entonces, para cada precio exógeno p, el único equilibrio donde los agentes transan, ocurren cuando solo cacharros son vendidos.

Pauta:

Because the buyer always values the car more than the seller, an efficient equilibrium would consist on the buyer transacting and the seller transacting no matter the condition of the car.

Wether such an equilibrium can be implemented will of course depend on the exogenous parameters: π and p. So let us first assume that $p \geq \$2000$. In that case the seller has a (weakly) dominant strategy of transacting both when the car is a peach and when it is a lemon. Given the strategy chosen by the seller, the buyer's expected payoff from choosing to transact is given by

$$\pi(3000 - p) + (1 - \pi)(1000 - p) = 1000 + 2000\pi - p,$$

while his expected payoff from not transacting is just 0. *So he will choose to transact if and only if*

$$\begin{aligned} 1000 + 2000\pi - p &\geq 0 \\ \iff \pi &\geq \frac{p - 1000}{2000}. \end{aligned} \tag{11.1}$$

So as long as condition 11.1 is satisfied and $p \geq 2000$, we have that the strategy profile $\{(Transact), (Transact, Transact)\}$ is a Bayesian Nash equilibrium. Now notice that since we are assuming that $p \geq 2000$, we have that

$$\frac{p - 1000}{2000} \geq \frac{2000 - 1000}{2000} = \frac{1}{2}.$$

So a necessary condition for inequality 11.1 to be satisfied is that $\pi \geq 1/2$, (i.e., there can not be too many lemons in the market). So if $\pi < 1/2$ the Bayesian Nash equilibrium becomes $\{(Not\ Transact), (Transact, Transact)\}$, which is inefficient, given that agents do not end up transacting, even though the buyer has a higher valuation for the car than the seller.

Now suppose that $0 < p < \$2000$. Then the seller has a (weakly) dominant strategy of not transacting when the car is a peach and transacting when the car is a lemon (we can write that strategy succinctly as $(Transact, Not\ Transact)$). Then, given the strategy chosen by the seller, the buyer's expected payoff from choosing to transact is

$$\pi 0 + (1 - \pi)(1000 - p),$$

while his expected payoff from not transacting is 0. *So the buyer will transact iff*

$$\begin{aligned} (1 - \pi)(1000 - p) &\geq 0 \\ \iff p &\leq 1000. \end{aligned} \tag{11.2}$$

So, for $0 < p < \$2000$, we have that, if condition 11.2 is satisfied, the Bayesian Nash equilibrium to this game is given by $\{(Transact), (Transact, Not\ Transact)\}$, while if condition 11.2 is not satisfied the Bayesian Nash equilibrium is $\{(Not\ Transact), (Transact, Not\ Transact)\}$[1]

So we conclude that if $\pi < \frac{1}{2}$, the only equilibrium in which some transaction takes place is when only lemons are sold, which is an inefficient outcome. The model here presented is somewhat incomplete, as we assumed the price was exogenously fixed.

Ejercicio 11.2 *Supón que hay un continuo de vendedores y compradores en un mercado de autos usados. Supón que los autos tienen calidad distintas y solo la conocen el dueño de cada auto, no los consumidores. Supón que la calidad de cada auto, medida en unidades monetarias, está uniformemente distribuida entre \$2.000 y \$6.000. La información sobre esta distribución es de conocimiento común, pero solo los vendedores conocen efectivamente la calidad de sus propios autos. Todos los agentes son neutrales al riesgo. Supón que el precio de mercado de los autos está dado por $p = \$3.000$, es decir, todos los vendedores venden sus respectivos autos a este precio. Supón que los compradores tienen la misma valoración por auto que los vendedores.*

[1]This game has other Bayesian Nash equilibria, such as $\{(\text{Not Transact}), (\text{Not Transact}, \text{Not Transact})\}$, but these type of equilibria are not very robust, as they involve having the seller playing a weakly dominated strategy.

a) Si los compradores son ingenuos y piensan que todos los vendedores eligen vender sus autos al precio de mercado, ¿qué va a tomar cada comprador? ***Pauta:*** *Cada comprador va elegir comprar un auto, ya que, en este caso, el beneficio beneficio que esperaría tener al comprar un auto sería* $2.000+(6.000-2.000)/2=\$4.000$, *mientras que el costo de cada auto es solo* $\$3.000$.

b) Pero a este precio, ¿qué vendedores efectivamente elegirían vender sus autos? ***Pauta:*** *Solamente aquellos con calidad inferior a* $\$3.000$.

c) Si los compradores eligen comprar autos a este precio, ¿cuál sería el payoff esperado verdadero que obtendrían? ***Pauta:*** *Sus pagos esperados serían*

$$\underbrace{2.000+\frac{3.000-2.000}{2}}_{\textit{calidad promedia de los que venden}}-3.000=-500.$$

d) En base a su respuesta anterior, ¿crees que los compradores elegirían comprar un auto a este precio suponiendo que saben que los vendedores son racionales? ***Pauta:*** *No. De hecho, si los compradores son sofisticados y saben que solo aquellos con valoración suficientemente baja van a vender sus autos, sabrán que la calidad promedia de los autos vendidos será baja (solo \$2.500 y no \$4.000), y, por lo tanto, en promedio estarán obteniendo un perjuicio al comprar un auto usado.*

Ejercicio 11.3 *Considere un mercado que tiene un continuo de vendedores y compradores. Cada comprador es asignado a un único vendedor. Cada vendedor puede vender un producto que tiene calidad uniformemente distribuida entre \$10 y \$30. El vendedor conoce la calidad de su producto, pero el comprador no. El comprador solo sabe que la calidad del producto al vendedor está uniformemente distribuida entre \$10 y \$30. El comprador valora el producto en \$7 más que el vendedor (por ejemplo, si un producto tiene valoración* $\$12$ *a un vendedor, la valoración al el comprador sería* $\$12+\$7=\$19$*), por lo tanto, sería eficiente que todos transaran. Cada par de vendedores y compradores eligen simultáneamente si transan o no. Una transacción ocurre, ssi ambos deciden transar.*

Muestre que para todo $p\in[10,24]$, *transacciones ocurren con probabilidad positiva.* ***Pauta:*** *Si* $p\in[10,30]$, *entonces solo los vendedores con valoración entre* 10 *y* p *elegirían transar. En este caso, el payoff esperado de transar del punto de vista del comprador estaría dado por*

$$\underbrace{10+\frac{p-10}{2}+7}_{\textit{valoración esperada del comprador}}-p=\frac{24-p}{2},$$

lo que es mayor o igual a cero, el pago que un comprador obtiene si no transa, ssi $p\leq 24$. *Por lo tanto, los compradores van a elegir transar si* $p\in[10,24]$. *Ojo que, si* $p\leq 10$, *ningún vendedor elige transar, así que, en este caso no se vendría ningún producto.*

Ejercicio 11.4 *Supón que un paciente busca un plan de salud. El paciente puede ser de dos tipos:*

- ***Tipo arriesgado:*** *el paciente se enferma con probabilidad* $1/2$.
- ***Tipo poco arriesgado:*** *el paciente se enferma con probabilidad* $1/10$.

El costo de se tratar un paciente que se enferma es \$7. Ambos tipos tienen ingreso igual a \$16. Independiente de su tipo, el paciente tiene aversión al riesgo, y su función utilidad está dada por $u(x) = \sqrt{x}$, donde x es la cantidad de dinero disponible para el consumo. Por lo tanto, el payoff del paciente, independiente de su tipo, si este decide obtener un seguro de salud completo al precio p está dado por

$$\sqrt{16-p}.$$

Si el paciente decide no obtener seguro y es del tipo arriesgado, su payoff esperado estará dado por

$$\frac{1}{2}\sqrt{16}+\frac{1}{2}\sqrt{16-7}.$$

Si el paciente decide no obtener seguro y es del tipo poco arriesgado, su payoff esperado estará dado por

$$\frac{9}{10}\sqrt{16}+\frac{1}{10}\sqrt{16-7}.$$

Supón que la aseguradora de salud debe ofrecer el mismo plan (contrato) a ambos tipos (semejante a lo que hace Fonasa en Chile).

a) (15 puntos) Encuentre el máximo p tal que ambos tipos de pacientes deciden comprar el seguro. ***Pauta:*** *Para contestar a esta pregunta, uno podría encontrar el máximo p tal que el tipo arriesgado tuviera incentivos en contratar el plan, el máximo p tal que el tipo poco arriesgado tuviera incentivos en comprar el plan, y decir que p debería ser menor o igual al mínimo de estos 2 valores. Pero una forma más rápida de contestar a esta pregunta es notar que el tipo poco arriesgado es el que tiene menos incentivos en contratar el plan, por lo que una condición necesaria y suficiente para que ambos tengan incentivos en contratar el plan es que el tipo poco arriesgado tenga incentivos en hacerlo.*

El tipo poco arriesgado tendrá incentivos en contratar el plan ssi

$$\begin{aligned} &\sqrt{16-p} \geq \frac{9}{10}\sqrt{16}+\frac{1}{10}\sqrt{16-7} \\ \iff &\sqrt{16-p} \geq \frac{39}{10} \\ \iff &p \leq 16-\left(\frac{39}{10}\right)^2 = 0.79. \end{aligned}$$

b) (15 puntos) Supón que la aseguradora es neutral al riesgo (en la práctica, es natural suponer eso, ya que la aseguradora puede diversificar el riesgo). Entonces, si la probabilidad de que un paciente es del tipo arriesgado está dada por θ, el payoff esperado de la aseguradora en ofrecer una cobertura completa al precio p sería

$$p+\theta[\frac{1}{2}(-7)]+(1-\theta)[\frac{1}{10}(-7)],$$

mientras que su payoff esperado de no ofrecer cobertura sería 0. Supón que $\theta = \frac{1}{2}$. Muestre que no existe un p tal que ambas condiciones abajo se cumplen al mismo tiempo:

- *Ambos tipos de pacientes están dispuestos a comprar el plan.*
- *La aseguradora está dispuesta a ofrecer este plan.*

Pauta: *Supón que ambos tipos de pacientes tienen incentivos en contratar el plan. En este caso, las ganancias esperadas de la aseguradora estarán dadas por*

$$p + \theta(\frac{1}{2}(-7)) + (1-\theta)(\frac{1}{2}(-7)) =$$
$$p + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}(-7)) + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}(-7)) =$$
$$p - \frac{21}{10}.$$

Por lo tanto, la aseguradora tendrá incentivos en ofrecer el plan ssi

$$p - \frac{21}{10} \geq 0 \iff p \geq \frac{21}{10} > 0.79.$$

Pero sabemos por el ítem anterior que si $p > 0.79$ entonces el tipo poco arriesgado no tiene incentivos en contratar el plan. Por lo tanto, no hay equilibrio en que ambos tipos compran el plan ofrecido por la aseguradora.

c) *(10 puntos) En Chile, los trabajadores dependientes y pensionistas están obligados a contratar un plan de salud que tenga un costo de por lo menos 7% de sus ingresos. En pocas palabras explique una razón económica que lleva a muchos países a implementar políticas semejantes a esta que les obligan a los ciudadanos contratar un plan de salud.* ***Pauta:*** *Algunas respuestas consideradas aceptables:*

- *La obligatoriedad de un plan de seguro disminuye el riesgo de selección adversa. De hecho, si la compra del plan no fuera obligatoria, solo los más enfermos buscarían un plan, lo que generaría un efecto en cadena reduciendo aún más los incentivos de los pacientes sanos en contratar un plan (especialmente si el país adopta políticas de no discriminación, como por ejemplo en EE.UU. que prohíbe la discriminación de precios por condiciones pre existentes).*
- *Muchos subestiman los costos de tratamiento de enfermedades o la probabilidad de enfermarse y, por eso, terminan no contratando un plan, aunque lo óptimo fuera contratarlo. La obligatoriedad de la compra de un plan funciona, por lo tanto, una forma de corregir un comportamiento irracional del trabajador.*

Ejercicio 11.5 *Suponga que un banco está considerando otorgar préstamos a pequeñas empresas. Cada empresa puede ser de alto potencial (H) con probabilidad $\frac{1}{3}$ o de bajo potencial (L) con probabilidad $\frac{2}{3}$, y estas probabilidades son de conocimiento común. Sin embargo, solo la empresa conoce su propio potencial: el banco no.*

Supón que el banco elige una tasa de interés r. Si la empresa de alto potencial toma el préstamo, tiene un payoff en la fecha siguiente igual a $10 - 2r$, es decir, cuánto mayor la tasa de interés, menor su utilidad. Ya la empresa del tipo bajo sabe que no pagará su deuda, por lo que su payoff de aceptar el préstamo no depende de r y es simplemente igual a \$10. Además, suponga que la empresa de alto potencial tiene una opción externa de $u_H = \$8$, mientras que la empresa de bajo potencial tiene una opción externa de solo $u_L = \$2$.

El beneficio que el banco tiene si la empresa alta acepta su préstamo está dado por $5r$, mientras que la desutilidad que tiene en hacer un préstamo a una empresa del tipo bajo está dado por -\$10.

Suponga que el banco puede ofrecer una tasa de interés $r \geq 0$, o simplemente no ofrecer ningún préstamo y obtener una opción externa de \$0. Tras observar su tipo y la tasa de interés practicada por el banco r (si es que este decide hacer un préstamo), la empresa decide si acepta un préstamo del banco a esta tasa de interés o no.

a) *(10 puntos) Muestre que, para este juego no hay un equilibrio en que la el banco ofrece un préstamo a las empresas.* ***Pauta:*** *Obviamente, para cualquier $r \geq 0$, la empresa del tipo bajo tiene incentivos en aceptar el préstamo. Supón que la empresa del tipo alto también tiene incentivos en aceptar el préstamo. En este caso, el payoff esperado del banco está dado por*

$$\frac{5r}{3} + \frac{2}{3} \times (-10),$$

lo que es superior a su opción externa de \$0 ssi

$$\boxed{r \geq 4}. \tag{11.3}$$

Pero para que la empresa del tipo alto tenga incentivos en aceptar el contrato debemos tener:

$$10 - 2r \geq 8 \iff \boxed{r \leq 1}. \tag{11.4}$$

Cómo las desigualdades 11.3 y 11.4 no pueden cumplirse al mismo tiempo, tenemos que el banco tendrá incentivos en no hacer la concesión del préstamo.

b) *(10 puntos) Dé un ejemplo de una estrategia que el banco podría implementar en la práctica para evitar el problema de selección adversa observado en el ítem anterior.* ***Pauta:*** *Posibles respuestas:*

- *El banco podría investigar el historial crediticio de la empresa para saber si se trata de un buen pagador o no, lo que es costoso. También puede investigar la estabilidad financiera de la empresa.*
- *El banco también podría hacer un préstamo que requiere un alto colateral: de esta manera, solo la empresa del tipo alto (es decir, la empresa que sabe que pagará sus deudas) tendría incentivos en tomar el préstamo.*

12

Señalización

Ejercicio 12.1 *(Educación superior como mecanismo de señalización) Considere el modelo de señalización de escrito en forma extensiva en la figura 12.1. En el modelo tenemos un trabajador, el que tiene capacitación alta con probabilidad* $1/6$*, moderada con probabilidad* $2/6$ *y baja con probabilidad* $3/6$*. A la empresa le gustaría poder contratar un trabajador de calidad alta, pero no uno de calidad moderada o baja. Después de observar su tipo, el trabajador decide si obtiene educación superior o no. Vamos a suponer que la educación superior no agrega en nada el nivel de calificación del empleado, pero puede potencialmente servir como un mecanismo de señalización, ya que el costo de se obtener educación superior es distinto a distintos tipos.*

a) (10 puntos) Existe en este juego un equilibrio de Nash Bayesiano Perfecto (ENBP) en que la empresa contrata si y solamente si el empleado tiene educación alta. Justifique. ***Pauta:*** *No. De hecho, si la empresa adopta esta estrategia, el tipo alto y moderado tienen incentivos en obtener educación superior* ($2 > 0$ *y* $1 > 0$)*. En este caso, utilizando la regla de Bayes, la empresa debe tener las siguientes creencias al observar que que el trabajador tiene educación superior:*

$$Prob(Alto|educación) = \frac{1/6}{1/6 + 2/6} = \frac{1}{3},$$

$$Prob(Moderado|educación) = \frac{2}{3}.$$

Por lo tanto, si la empresa contrata un trabajador con educación superior, tiene un payoff esperado de

$$\frac{1}{3}4 + \frac{2}{3}(-3) = -2/3,$$

lo que es menor a cero, el payoff que la empresa obtendría si no contratara. Por lo tanto, la empresa tiene incentivos en hacer desviación.

b) (10 puntos) Encuentre un ENBP en que todos los tipos de trabajadores eligen ***no*** *obtener educación superior. Muestre su trabajo.* ***Pauta:*** *Si todos no obtienen educación superior, al observar que un trabajador no tiene educación superior, la empresa no actualiza sus creencias al respecto del tipo del trabajador, es decir, sigue creyendo que el trabajador es del tipo alto con probabilidad* $1/6$*, moderado con probabilidad* $2/6$*, y bajo con probabilidad* $3/6$*. En este caso, el payoff esperado de la empresa de contratar estará dado por*

$$4\frac{1}{6} - 3\frac{2}{6} - 9\frac{3}{6} = -\frac{29}{6},$$

lo que es mayor a 0*, el payoff de no contratar. Por lo tanto, al observar que el trabajador no tiene educación superior, la empresa no debe contratar.*

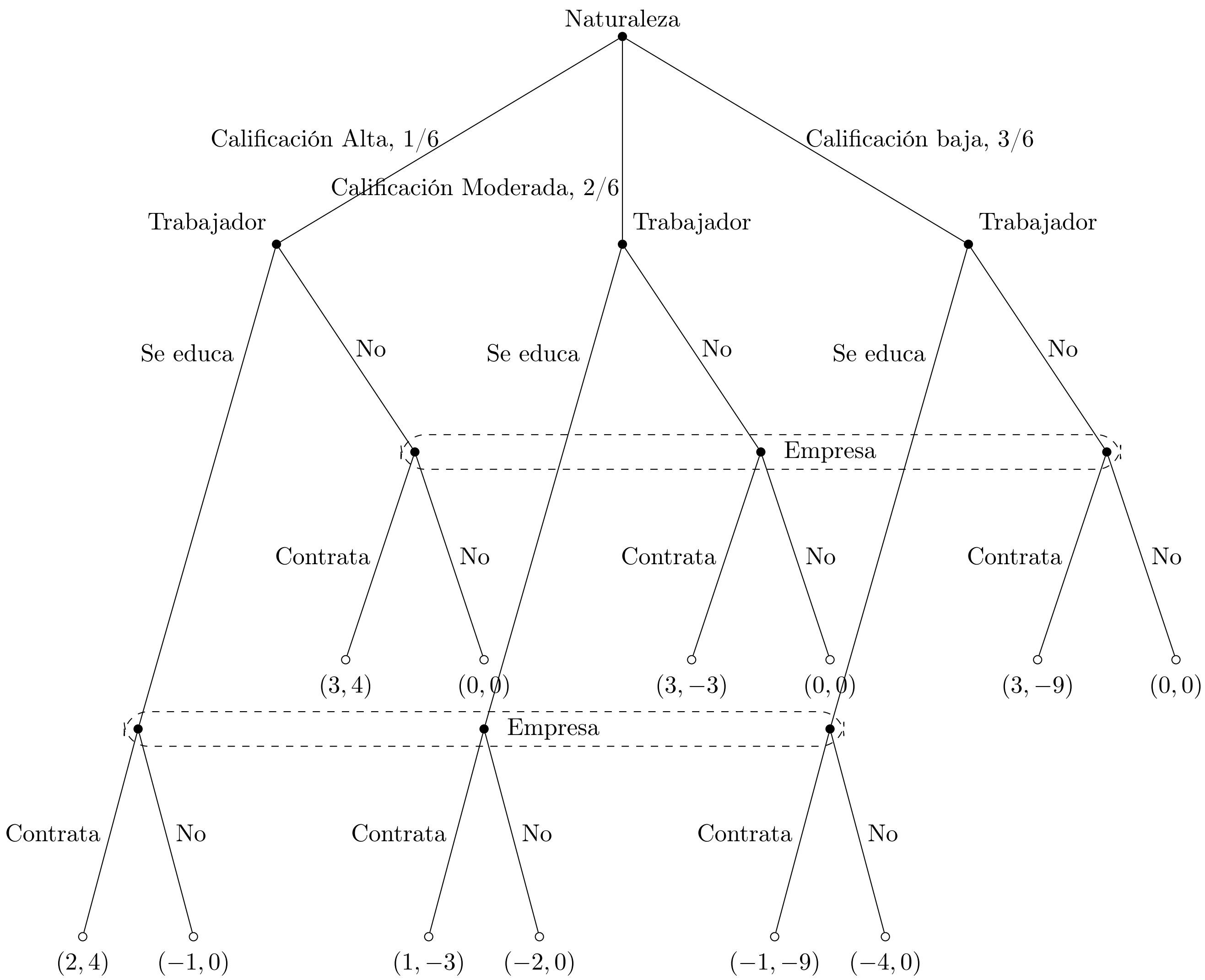


Figure 12.1: Un juego de señalización a través de educación. El primer payoff corresponde al payoff del trabajador, mientras que el segundo corresponde al palyoff de la empresa.

Dado que el suceso "obtener educación superior" ocurre con probabilidad 0, la empresa puede tener cualquier creencia sobre el tipo del trabajador para esta contingencia (hipotética). En particular, la empresa puede tener la siguiente creencia:

$$P(Moderado|Educación) = 1.$$

En este caso, la empresa tampoco debería contratar un trabajador con educación superior ($0 > -3$).

Pero si esta es la estrategia de la empresa, el trabajador va a preferir no obtener educación superior, ya que no importa su nivel de educación, él no será contratado, y obtener educación superior es costoso. Por lo tanto, se concluye que este juego tiene un equilibrio en que el trabajador no se educa independientemente de su tipo, y la empresa no contrata a nadie, independientemente de la señal que recibe.

c) *(10 puntos) Ahora imagínate que el trabajador más calificado es del tipo "Ñoño", en el sentido de que, él no solo es listo, sino que también es del tipo molesto que pide al profesor aumentar el nivel de dificultad de las evaluaciones. En palabras, explique cómo, en este contexto, un aumento en el nivel de dificultad de las evaluaciones y, por lo tanto, en el costo de obtención del grado de educación superior podría ser beneficioso al tipo alto.* ***Pauta:*** *Hemos visto que* *este juego no tiene un equilibrio separador en que el tipo alto logra distinguirse de los tipos moderados y bajo, lo que resulta en su no contratación. Pero si la señal fuera más costosa, el tipo moderado (y el tipo bajo) no tendría incentivos en obtener educación superior, lo que sería beneficioso al tipo alto, ya que ahora él podría obtener el diploma para usarlo como un mecanismo de señalización creíble de que él es del tipo listo. O sea, si obtener el diploma fuera muy fácil, toda la gente lo obtendría, y, como resultado, el diploma no tendría mucho valor como mecanismo de señalización.*

d) *(10 puntos) Además del mecanismo de señalización, ¿qué mecanismo alternativo visto en clase podría la empresa implementar para descubrir el tipo del trabajador?* ***Pauta:*** *La empresa podría implementar técnicas de screening, ofreciendo contratos tales que solo el tipo alto estaría dispuesto a aceptar, como ofreciendo contratos que requieren un nivel muy alto de esfuerzo, el cual el tipo bajo no estaría dispuesto a incurrir.*

Ejercicio 12.2 *(30 puntos) Imagínate que un consumidor está en el proceso de decidir si compra o no el producto de un vendedor. El producto puede tener calidad alta, moderada o baja, lo que es de conocimiento privado del vendedor. El producto tiene calidad alta con probabilidad* $2/6$*, moderada con probabilidad* $1/6$ *y baja con probabilidad* $3/6$*. Por simplicidad, supón que todos los tipos de vendedores eligen el mismo precio. El vendedor puede vender su producto con o sin garantía. Cómo los productos de peor calidad tienen mayor probabilidad de romperse, el costo de ofrecer la garantía es más grande a los vendedores de baja calidad. En este caso, la garantía puede ser utilizada como un mecanismo de señalización. La representación del juego en forma extensiva está dada por la figura 12.2.*

a) *(15 puntos) Encuentre un ENBP en que el tipo alto y moderado eligen ofrecer la garantía, pero el tipo bajo no. Muestre su trabajo.* ***Pauta:*** *Supón que los tipos moderado y alto ofrecen la garantía, pero el tipo bajo no. En este caso, por la regla de Bayes las creencias del consumidor a observar garantía debería ser*

$$P(Alto|Garantía) = \frac{P(Alto)}{P(Alto) + P(Moderado)} = \frac{2/6}{2/6 + 1/6} = \frac{2}{3},$$

$$P(Moderado|Garantía) = \frac{1}{3}$$

y

$$P(Bajo|No\ Garantía) = 1.$$

Por lo tanto, al observar garantía, el consumidor tiene un payoff esperado de

$$\frac{2}{3} \cdot 11 + \frac{1}{3} \cdot 4 = 26/3,$$

lo que es superior a 0, el payoff de no comprar. Por lo tanto, al observar que el producto tiene garantía, el consumidor debe comprar.

Pero si el producto no tiene garantía, el consumidor sabrá que el producto es de mala calidad con probabilidad 1, por lo que él elegirá no comprarlo en esta contingencia (el payoff de no comprar, 0, es mayor al payoff de comprar, -5*).*

Uno puede ver fácilmente que el vendedor no tiene incentivos en desviación. De hecho, el tipo alto prefiere vender con garantía, a no ofrecer garantía y no vender $(3 > -1)$*. Similarmente, el tipo moderado prefiere vender con garantía, a no ofrecer garantía y no vender* $(2 > -3)$*. Finalmente, el tipo bajo prefiere no ofrecer garantía y no vender, a vender el producto con garantía* $(-4 < -3)$*.*

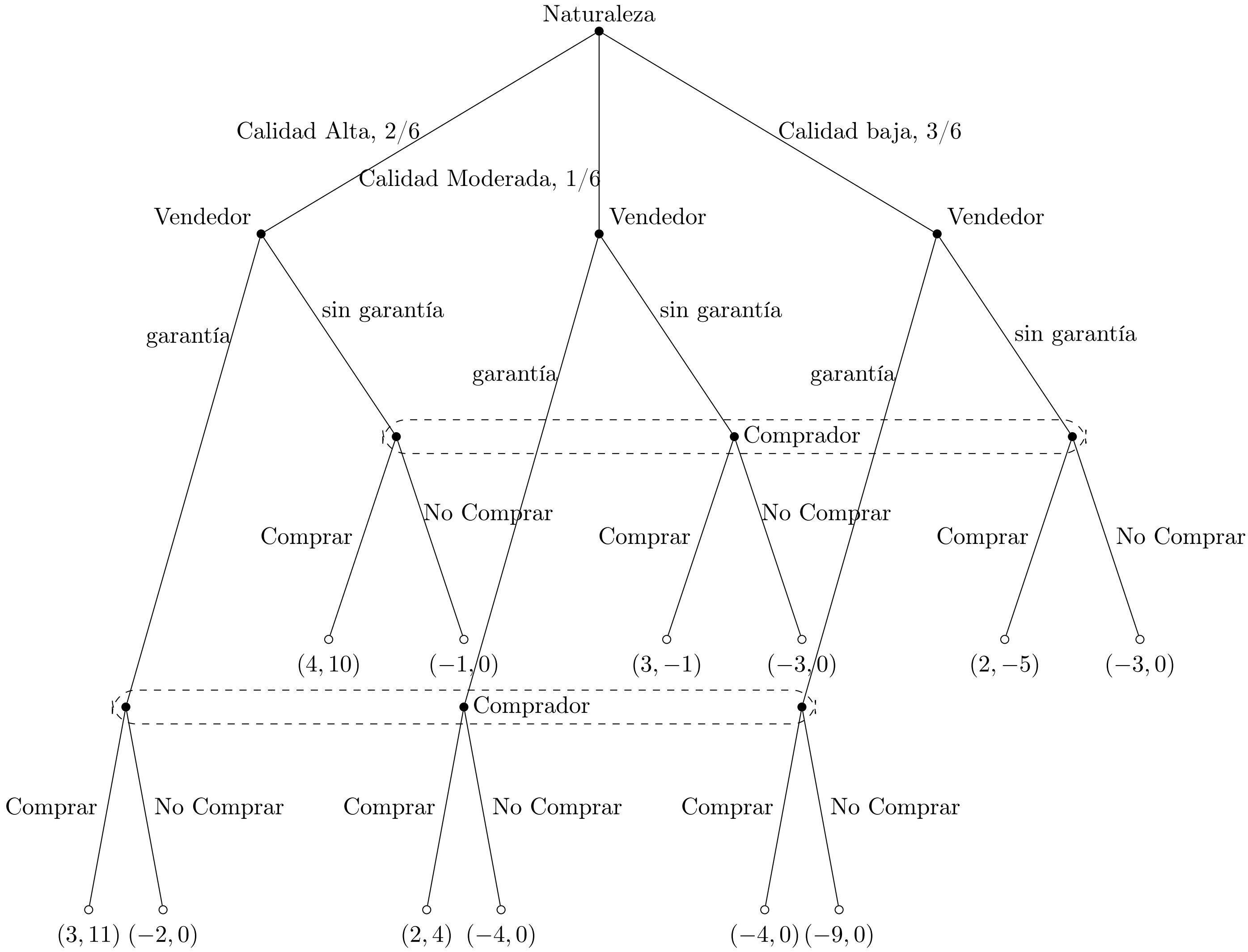


Figure 12.2: Un juego de señalización a través de garantías. El primer payoff corresponde al payoff del vendedor, mientras que el segundo corresponde al palyoff del comprador.

b) *(15 puntos) Encuentre un ENBP en que todos los tipos eligen no ofrecer la garantía. Muestre su trabajo.* ***Pauta:*** *Si todos no ofrecen garantía, al observar que un producto no tiene garantía, el consumidor no actualiza sus creencias al respecto de los tipos del vendedor, es decir, sigue creyendo que el vendedor es del tipo alto con probabilidad 2/6, moderado con probabilidad 1/6, y bajo con probabilidad 3/6. En este caso, su payoff esperado en comprar un producto sin garantía estaría dado por*

$$10\frac{2}{6} - 1\frac{1}{6} - 5\frac{3}{6} = \frac{4}{6},$$

lo que es mayor a 0, el payoff de no comprar. Por lo tanto, al no observar la garantía, el consumidor debe comprar el producto.

Dado que el suceso "ofrecer garantía" ocurre con probabilidad 0, el consumidor puede tener cualquier creencia sobre el tipo del consumidor para esta contingencia (hipotética). En particular, el consumidor puede tener la siguiente creencia:

$$P(Alto|Garantía) = 1.$$

En este caso, el consumidor también debería comprar un producto con garantía.

Pero si esta es la estrategia del consumidor, el vendedor va a preferir no ofrecer garantía, ya que el logra vender su producto independientemente si ofrece garantía o no, y ofrecer garantía es costoso. Por lo tanto, se concluye que este juego tiene un equilibrio en que el comprador compra el producto independientemente del status de garantía, mientras el vendedor no ofrece garantía, independientemente de su tipo.

Ejercicio 12.3 *(35 puntos) Imagínate que una empresa está buscando contratar a un determinado empleado. La empresa puede tener calidad baja o alta, pero solo la empresa conoce su tipo, el empleado no. Con probabilidad $p \in [0, 1]$, la empresa es de calidad alta, y con probabilidad $1-p$ es de calidad baja. Si la empresa decide no hacer una oferta al empleado, tanto la empresa cuanto el empleado reciben un payoff de* 0*. Pero si la empresa decide hacer la oferta pero esta es rechazada por el empleado, el empleado recibe un payoff de 0, mientras la empresa recibe un payoff de* -1*. El costo de ser rechazado viene del hecho de que, mientras la empresa espera la respuesta del empleado, podría haber contratado otras personas en su lugar; además ser rechazado genera un costo psicológico. Pero si la empresa contrata al empleado, tiene ingresos iguales a* 2 *y el empleado tiene utilidad* 3 *si la empresa es de alta calidad y* -2 *si la empresa es de baja calidad.*

a) (10 puntos) Escriba este juego en forma extensiva (es decir, dibuje el árbol de juego).

Pauta:

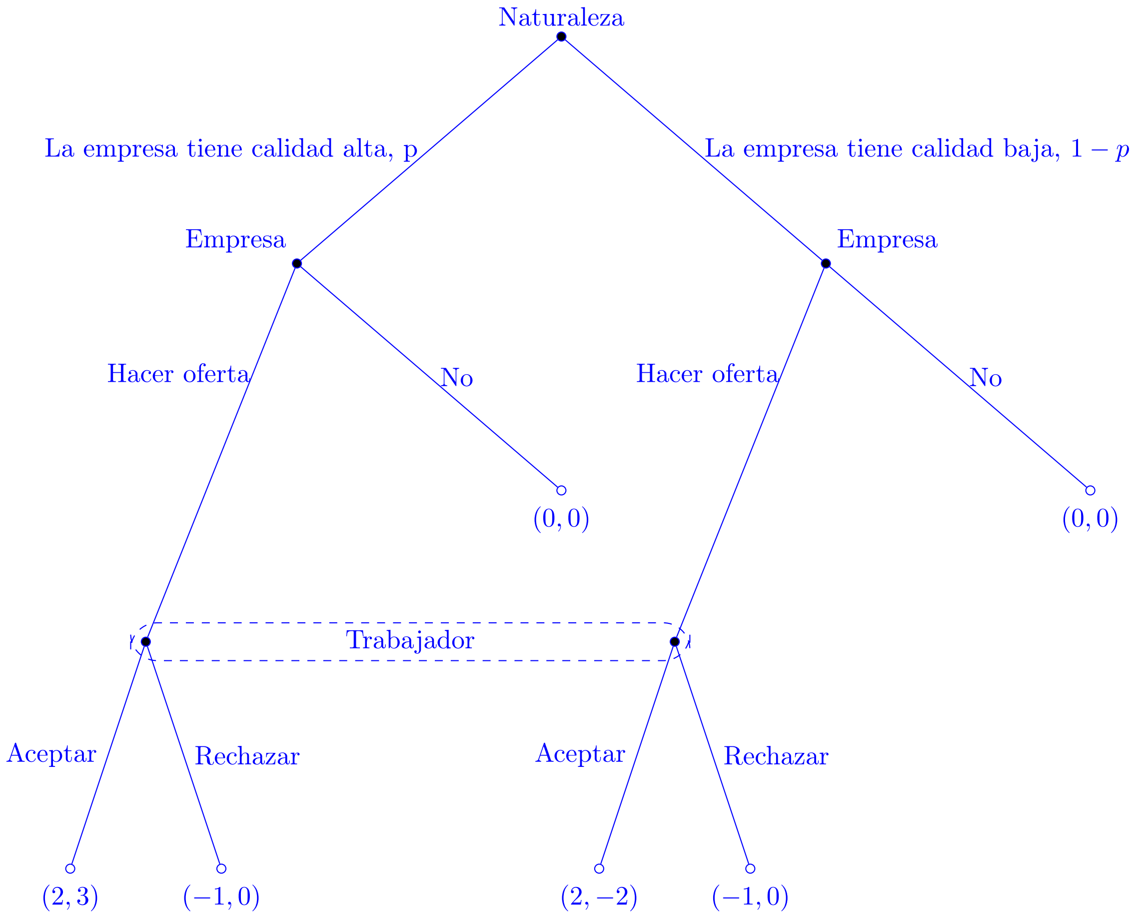


Figure 12.3: La primera entrada de payoffs corresponde a los payoffs de la empresa, y la segunda corresponde a los payoffs del empleado.

b) (10 puntos) ¿Es posible que exista un equilibrio separador en este ejemplo, es decir, un equilibrio donde un tipo elige hacer la oferta y el otro no? Justifique de forma clara y *precisa.* ***Pauta:*** *No. De hecho, supón que solo el tipo alto hace la oferta. En este caso, el trabajador tendría incentivos en aceptar una oferta, ya que sabría que la oferta vendría del tipo alto con probabilidad 1. Pero en este caso, la empresa del tipo bajo tendría incentivos en hacer desviación y también hacer la oferta ($2 > 0$). Ahora considere la situación al revés: supón que solo el tipo bajo hace la oferta. En este caso, al recibir una oferta el trabajador sabrá que se trata de la oferta de un tipo bajo con probabilidad 1, por lo que tiene incentivos en no aceptar la oferta. Pero en este caso, el tipo bajo tendría incentivos en desviación y no ofertar ($0 > -1$).*

c) *(15 puntos) ¿Para qué valores de $p \in [0,1]$ este juego tiene un equilibrio en que ambos tipos hacen la oferta? ¿Para qué valores de $p \in [0,1]$ este juego tiene un equilibrio en que ambos tipos no hacen la oferta? Justifique.* ***Pauta:*** *Si ambos hacen la oferta, entonces al recibir una oferta el trabajador tendría las mismas creencias sobre el tipo de la firma que sus creencias iniciales (es decir, que la empresa es del tipo alto con probabilidad p y bajo con probabilidad $1-p$). En este caso, el empleado acepta la oferta ssi*

$$3p - 2(1-p) \geq 0 \iff p \geq 2/5.$$

Entonces, si $p \geq 2/5$, las empresa no tiene incentivos en desviación ($2 > 0$), por lo que se concluye que, cuando $p \geq 2/5$, existe un equilibrio en que ambos tipos hacen la oferta. Ojo que si $p < 2/5$, el trabajador rechazaría la oferta, por lo que la empresa tendría incentivos en hacer desviación ($0 > -1$).

Utilizando el mismo raciocinio, uno puede mostrar que si $p \leq 2/5$ hay un equilibrio en que ambos no hacen la oferta.

Ejercicio 12.4 *(20 puntos) Supón que existen dos tipos de trabajadores: los de calidad alta y los de calidad baja. Un trabajador es del tipo alto con probabilidad $1/4$ y bajo con probabilidad $3/4$. Los trabajadores de calidad alta tienen productividad $6,000$, mientras que los de calidad baja tienen productividad de $4,000$. Supón inicialmente que los trabajadores no pueden señalar sus tipos. Supón además que en el mercado de trabajo hay competencia perfecta, así que, si no hay señalización, cada empleado recibe su productividad marginal esperada:*

$$\frac{1}{4} \times 6000 + \frac{3}{4} \times 4000 = 4500.$$

Ahora supón que los empleados pueden adquirir educación superior para señalar que son de alta calidad. El costo de se obtener educación superior es de \$1800 para el tipo bajo y \$1000 para el tipo alto. La racionalidad para este supuesto viene del hecho que al tipo alto le es más fácil obtener educación superior. Siguiendo los modelos tradicionales de señalización, supón que la educación superior no afecta la productividad de los trabajadores y solo sirve, por lo tanto, como un mecanismo de señalización. Las empresas actualizan sus creencias de forma racional, así que, si el trabajador adopta, por ejemplo, la estrategia de solo obtener educación superior cuando su tipo es alto, las empresas van a pagar \$6000 aquellos con educación superior, y 4000 aquellos que no tienen educación superior.

a) *(10 puntos) Muestre* ***si*** *hay un equilibrio en que solo el tipo alto obtiene educación superior.* ***Pauta:*** *Supón que solo el tipo alto obtiene educación superior. En este caso, las empresas pagarían 6000 a una persona con educación superior y 4000 a una persona sin educación superior. En este caso, si el tipo bajo no hace desviación (es decir, si no obtiene educación superior) obtiene un "payoff" de 4000, mientras que si hiciera desviación y obtuviera educación superior, obtendría $6000 - 1800 = 4200$, por lo que el tipo bajo tendría incentivos en hacer desviación. Por lo tanto, no hay equilibrio en que solo el tipo alto obtiene educación superior.*

b) (10 puntos) Comparado con la situación inicial en que no hay señalización, ¿cada tipo de trabajador está mejor o peor cuando la señalización es posible? Justifique. ***Pauta:*** *Para contestar a esta pregunta, debemos encontrar todos los equilibrios del juego. Ya hemos visto que no puede haber un equilibrio en que solo el tipo alto elige educación superior. Supongamos ahora que ambos obtienen educación superior. Esto tampoco puede ser un equilibrio, ya que el tipo bajo tendría incentivos en desviación* ($4500 - 1800 = 2700 < 4000$)*. Obviamente, tampoco podemos tener un equilibrio en que solo el tipo bajo obtiene educación superior (el tipo bajo tendría incentivos en hacer desviación). Por lo tanto, la única opción que nos resta sería si ambos tipos no obtuvieran educación. En este caso, como el suceso "obtener educación" ocurre con probabilidad* 0*, las empresas pueden tener cualquier creencia al respecto de esta contingencia. En particular, pueden creer que el empleado es del tipo bajo con probabilidad 1. En este caso, ningún de los empleados tendría incentivos en hacer desviación* ($4500 > 4000 - 1800$ *para el tipo bajo y* $4500 > 4000 - 1000$ *para el tipo alto). Por lo tanto, se concluye que, ningún tipo obtener educación es un equilibrio.*

Como el único equilibrio encontrado es aquello en que nadie se educa, en este contexto la señal de educación no tiene ninguna utilidad, ya que ambos tipos eligen no enviar la señal. Por lo tanto, los agentes estarían indiferentes entre tener la oportunidad de señalar o no.

Ejercicio 12.5 *(15 puntos) Considere el juego de señalización de la figura 12.4. En este juego, la persona que envía la señal puede ser un "valentón" o un "cobarde". Un valentón prefiere tomar "cerveza" en su desayuno, mientras que el tipo cobarde prefiere un "quiche". Sin embargo, puede ser ventajoso tolerar un desayuno que no es de su agrado si esto ayuda a señalar que eres del tipo valentón, lo que puede desmotivar que rivales vengan a pelear contigo (por lo menos en teoría). Más específicamente, Comer su desayuno preferido le dá una utilidad* 1 *a la persona que envía el mensaje, pero evitar un confronto (ej., un duelo) con el receptor del mensaje tiene un valor de* 2*. Los payoffs del receptor del mensaje no dependen de la comida elegida por el mensajero: el receptor prefiere confrontar el mensajero si este es cobarde, y no confrontarlo si este es un valentón. Finalmente, la probabilidad de que el mensajero es valiente es* 0.1*.*

Tiene este juego un ENBP en que ambos tipos eligen cerveza para el desayuno? Si la respuesta es afirmativa, encuentre tal equilibrio en detalle, de lo contrario, explique en detalle por qué esto no podría ser un equilibrio.

Pauta: Supón por contradicción que ambos tipos de mensajeros eligen cerveza en el café de la mañana. Entonces, recibida la señal de que el mensajero ha tomado cerveza, el receptor no actualiza sus creencias iniciales, es decir, mantiene sus creencias de que el mensajero es del tipo valentón con probabilidad .1. En este caso, el *payoff* esperado del receptor en pelear está dado por

$$.1 \times 0 + .9 \times 2 = 1.8,$$

lo que es mayor a su *payoff* esperado de 1 que obtendría si no peleara. Por lo tanto, al observar que el mensajero ha tomado cerveza, el receptor debe pelearlo.

Dado esta estrategia del mensajero, el suceso de que el mensajero come quiche en el desayuno ocurre con probabilidad 0, por lo que el receptor puede tener cualquier creencia sobre el tipo del mensajero cuando este come quiche. En particular, él puede creer que, cuando el mensajero come quiche, es del tipo cobarde con probabilidad 1. En este caso, el receptor pelearía con el mensajero, si observara este comiendo quiche.

El tipo valentón claramente no tiene incentivos en desviación, ya que está comiendo su desayuno preferido y además pelearía de cualquier forma. Si el mensajero es del tipo cobarde y toma cerveza, obtiene un *payoff* de -1. Pero si el tipo cobarde comiera quiche, su desayuno preferido, el receptor le pelearía, lo que le resultaría en un *payoff* de 1, por lo que tendrá incentivos en hacer desviación.

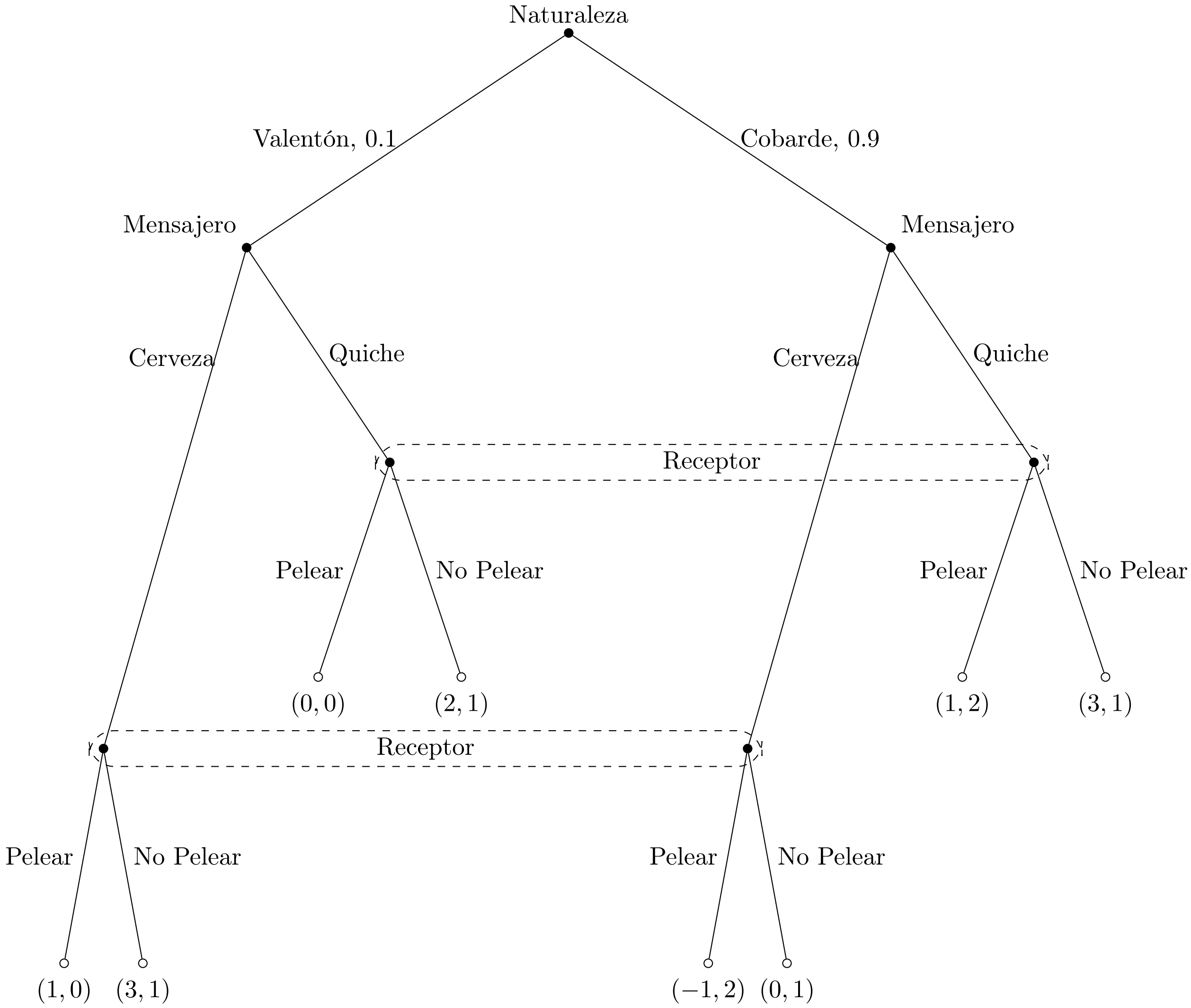


Figure 12.4: Un juego de señalización.

Por lo tanto, no existe un equilibrio donde ambos tipos toman cerveza. Ojo que esto cambiaría si la probabilidad de que el tipo es valentón fuera suficientemente alta. En este caso, el receptor no pelearía al observar el mensajero tomando cerveza, y, en este caso, el tipo cobarde no tendría incentivos en tomar cerveza para fingir que es un valentón y así, evitar una pelea.

Ejercicio 12.6 *Considere un modelo en que hay un trabajador y dos empresas. El trabajador puede ser de dos tipos: con probabilidad $\lambda \in [0, 1]$ él es del tipo H (alto), y con probabilidad $1-\lambda$ él es del tipo L (bajo). El trabajador conoce su tipo, pero las empresas no (las empresas solo saben que, con probabilidad λ el trabajador es del tipo alto, y con probabilidad complementaria es del tipo bajo).*

Un trabajador del tipo $i \in \{H, L\}$ genera ingresos θ_i a cualquiera empresa, donde $\theta_H > \theta_L$, o sea, los trabajadores del tipo H son más productivos que los trabajadores del tipo L. Ambos tipos de trabajadores tienen una opción externa igual a \$0.

Primeramente cada trabajador elige su nivel de educación $e \geq 0$. El costo para el tipo $i \in \{H, L\}$ de obtener un nivel de educación $e \geq 0$ está dado por $\frac{e}{\theta_i}$, por lo que es menos costoso al tipo alto invertir en educación.

Tras observar el nivel de educación elegido por el trabajador, cada empresa elige el sueldo w que ofrece al empleado. El empleado elige trabajar para la empresa que le ofrece el mayor sueldo. Si ambas empresas eligen el mismo sueldo el trabajador elige trabajar en una de las *empresas al azar. Las empresas deben asegurarse de que el payoff neto del empleado es superior a su opción externa de \$0, de lo contrario el trabajador haría inducción hacia atrás y decidiría no educarse y no trabajar para ninguna empresa.*

Cómo solo hay 2 tipos de trabajadores, podemos suponer sin pérdida de generalidad que cada empresa solo ofrecerá 2 contratos en equilibrio: uno pensado para el tipo bajo y otro pensado para el tipo alto. El contrato pensado para el tipo bajo paga w_L y requiere un nivel de educación e_L, mientras que el contrato pensado para el tipo alto paga w_H y requiere un nivel de educación e_H.

Para los siguientes ítems supón que $\theta_L = 3$ y $\theta_H = 4$ y que $\lambda = 1/3$.

a) *(20 puntos) Muestre que si $e_L = 0$, $e_H = 3$, $w_H = 4$ y $w_L = 3$ las restricciones de participación y de compatibilidad de incentivos de cada tipo de trabajador se cumplen, y, además, ambas empresas obtienen ganancias esperadas iguales a 0.* ***Pauta:***

- *Restricción de participación del tipo alto:*

$$\begin{aligned} & w_H - \frac{e_H}{\theta_H} \geq 0 \\ \iff & 4 - \frac{3}{4} \geq 0 \\ \iff & 13/4 \geq 0. \end{aligned}$$

- *Restricción de participación del tipo bajo:*

$$\begin{aligned} & w_L - \frac{e_L}{\theta_L} \geq 0 \\ \iff & 3 - \frac{0}{3} \geq 0 \\ \iff & 3 \geq 0. \end{aligned}$$

- *Restricción de compatibilidad de incentivos del tipo alto:*

$$\begin{aligned} & w_H - \frac{e_H}{\theta_H} \geq w_L - \frac{e_L}{\theta_H} \\ \iff & 13/4 \geq 3 \\ \iff & 13 \geq 12. \end{aligned}$$

- *Restricción de compatibilidad de incentivos del tipo bajo:*

$$\begin{aligned} & w_L - \frac{e_L}{\theta_L} \geq w_H - \frac{e_H}{\theta_L} \\ \iff & 3 \geq 4 - \frac{3}{3} \\ \iff & 3 \geq 3. \end{aligned}$$

El payoff esperado de cada empresa está dado por

$$\begin{aligned} & \lambda(\theta_H - w_H) + (1-\lambda)(\theta_L - w_L) = \\ & \lambda(4-4) + (1-\lambda)(3-3) = \\ & \lambda 0 + (1-\lambda)0 = 0. \end{aligned}$$

b) (10 puntos) El lunes (03/07/2023) se ha aprobado en Brasil una ley que obliga a las empresas pagar de forma equitativa a las mujeres y a los hombres que desempeñan las mismas funciones profesionales, bajo pena de multas. Una ley semejante ha sido adoptada en Colorado (EE.UU) en 2020.

Si bien estos tipos de leyes pueden ayudar a reducir la discriminación contra las minorías en el mercado de trabajo, ellas también dificultan la adopción de políticas de diferenciación salarial basado en el nivel de educación del empleado, ya que requieren que la empresa estableciera criterios muy rígidos y transparentes sobre qué considera como nivel de educación alto para así poder justificar diferenciaciones salariales. En este caso, la tendencia es que las empresas implementaran un equilibrio pooling en que ofrecen el mismo sueldo independientemente del nivel educacional del empleado, para así evitar demandas judiciales y evitar la creación y divulgación de criterios detallados y rígidos de remuneración.

Suponiendo que las empresas compiten a lá Bertrand, de tal forma que obtienen ganancias esperadas iguales a 0 en equilibrio, indique qué sueldo ellas elegirían en el equilibrio pooling más eficiente (es decir, en el equilibrio pooling en que ambos tipos de trabajadores eligen nivel de educación $e_i = 0$). ***Pauta:*** *Para que ambas empresas obtengan payoff esperado 0 debemos tener:*

$$
\begin{aligned}
&\lambda\theta_H + (1-\lambda)\theta_L - w = 0 \\
\iff &\frac{1}{3}4 + \frac{2}{3}3 - w = 0 \\
\iff &w = \frac{10}{3}.
\end{aligned}
$$

Claramente, si $w = \frac{10}{3}$ y $e = 0$, las restricciones de participación de ambos tipos de trabajadores se cumplen.

c) (10 puntos) En este ejemplo, ¿los trabajadores del tipo alto preferirían que se implementara el equilibrio pooling del ítem anterior o el equilibrio separador del ítem a? ¿Y los trabajadores del tipo bajo? Justifique su respuesta formalmente. ***Pauta:*** *El payoff que ambos tipos de trabajadores obtienen en el equilibrio pooling del ítem anterior es $w = \frac{10}{3}$. Mientras, en el equilibrio separador del ítem a el tipo alto obtiene un payoff esperado de*

$$w_H - \frac{e_H}{\theta_H} = 4 - \frac{3}{4} = 13/4.$$

Sin una calculadora, uno puede verificar que

$$
\begin{aligned}
&\frac{13}{4} < \frac{10}{3} \\
\iff &39 < 40,
\end{aligned}
$$

por lo que se concluye que el tipo alto estaría peor en el equilibrio separador.

De manera semejante, se puede mostrar que el tipo bajo estaría mejor en el equilibrio pooling ($w = \frac{10}{3} > 3$).

Obs.: *Cómo ejercicio de práctica, muestre que si λ fuera inferior a $1/4$ el tipo alto preferiría el equilibrio separador.*

12.1 Juegos de Cheap Talk (cuando la señalización no es costosa)

Ejercicio 12.7 *Considere el juego de señalización dibujado en la figura 12.5. En este juego, un vendedor final obtiene insumos de un proveedor. El vendedor puede ser de 2 tipos: con probabilidad* $1/2$ *es un tipo "agresivo" que logra fácilmente obtener otro proveedor (es decir, es un tipo que tiene un buen "outside option"). Con probabilidad* $1/2$ *es del tipo "conservador". El tipo conservador es del tipo que no logra fácilmente encontrar un proveedor alternativo (o por lo menos es del tipo que cree que es difícil encontrar un proveedor alternativo, es decir, uno puede interpretar el tipo conservador como pesimista). Después de observar su tipo, el vendedor decide si amenaza o no su rival en buscar otro proveedor si este no recibe un descuento. El costo de la amenaza es cero, por lo que este es un juego de "cheap talk".*

Recibida la señal si ha amenaza o no, el proveedor decide si da el descuento o no. Observada la acción del proveedor, el vendedor decide si busca otro proveedor o no.

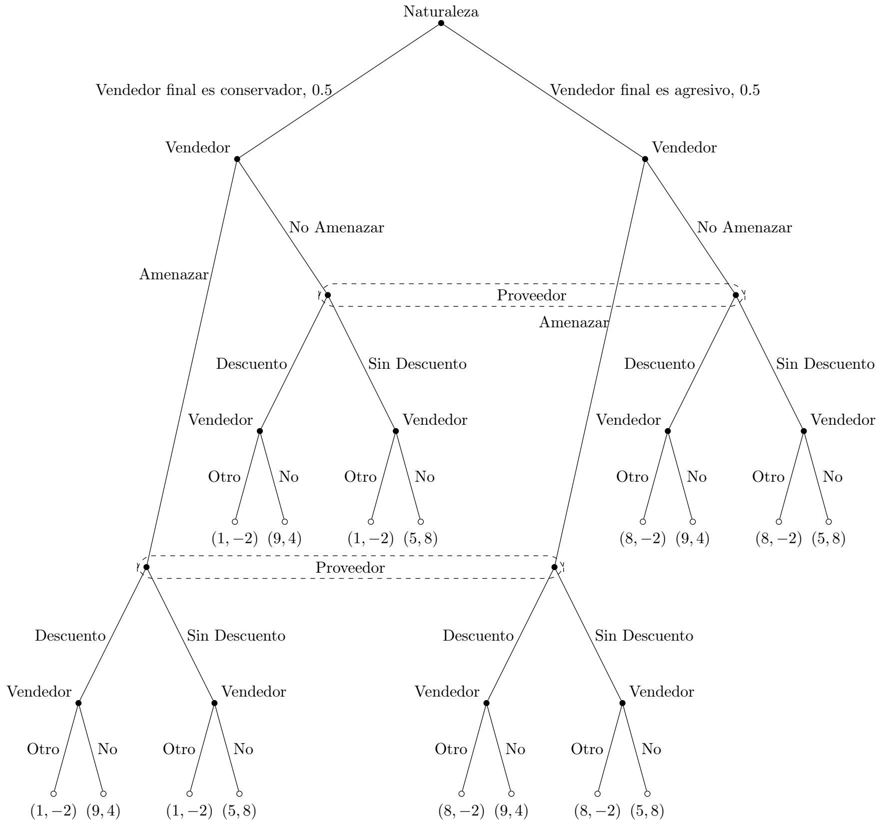


Figure 12.5: Un juego de "cheap talk". La primera entrada de *payoffs* corresponden a los *payoffs* del vendedor final, mientras que la segunda entrada corresponde a los *payoffs* del proveedor

a) *Aplique inducción al revés para obtener el juego en la forma reducida que aparece en la figura 12.6 abajo.*

   Pauta: *Marcando en rojo la mejor respuesta del vendedor en los últimos nodos, como muestra la figura 12.7, uno puede ver fácilmente que la forma reducida del juego está dada por la figura 12.6. Ojo que no se puede reducir el juego más que eso (¿por qué?).*

b) *Utilize la forma reducida de la figura 12.6, muestre que en este juego no hay un equilibrio separador (es decir, no hay un equilibrio en que uno de los tipos de los vendedores elige amenazar con probabilidad 1, mientras que el otro tipo no amenaza con probabilidad 1).*

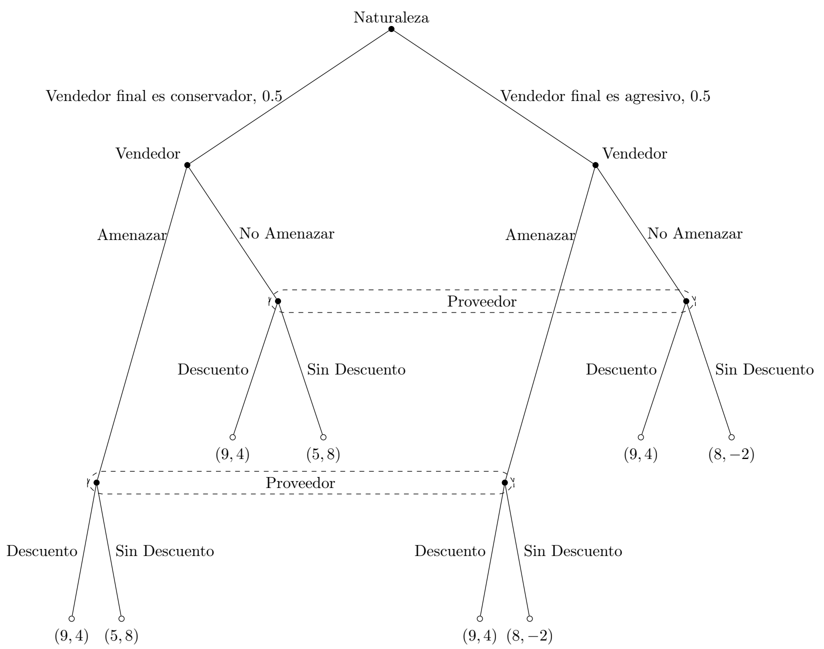


Figure 12.6: Un juego de “cheap talk”.

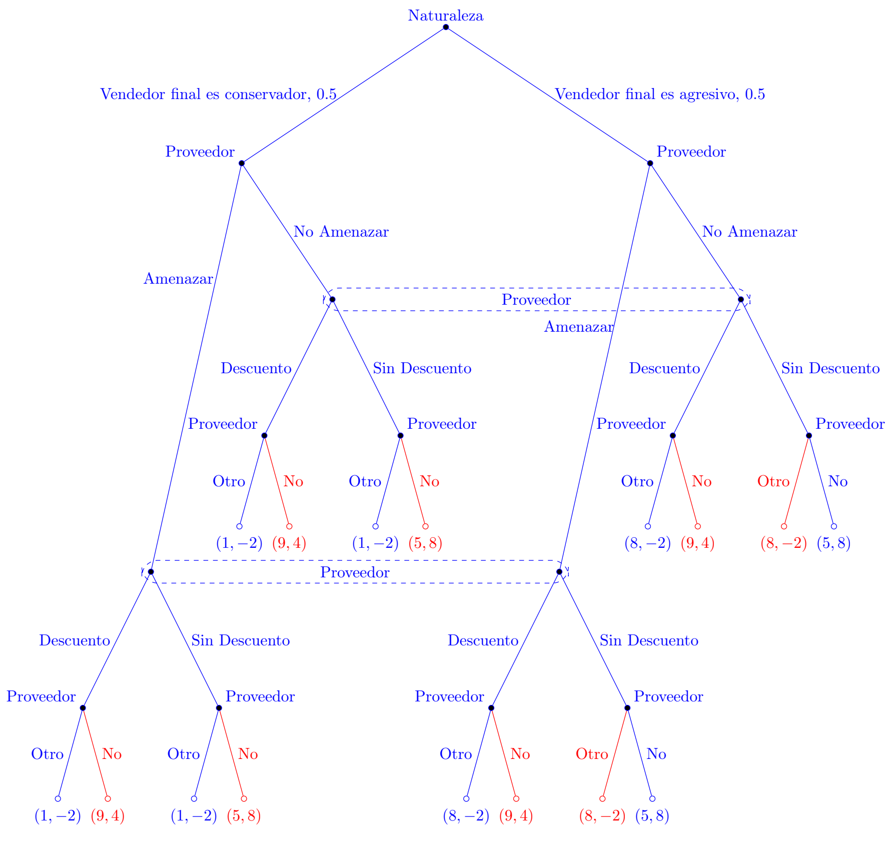


Figure 12.7: Aplicando inducción al revés para obtener el juego en formato reducido.

Pauta:

1) *Supón por contradicción que el tipo conservador siempre elige no amenazar, mientras que el tipo agresivo siempre amenaza. En este caso la actualización Bayesiana es trivial: al observar la señal el proveedor sabe exactamente el tipo del vendedor final. En este caso, el proveedor debe dar el descuento cuando es amenazado y no dar el descuento cuando no es amenazado. Pero si es así, el tipo conservador tendría incentivos en hacer desviación*

y amenazar (es decir, él tendría incentivos en fingir que es del tipo agresivo) para obtener \$9 al revés de \$5.

2) *Supón por contradicción que el tipo conservador siempre elige amenazar, mientras que el tipo agresivo siempre no amenaza (de manera informal, uno podría decir que esto corresponde al caso en que "perro que ladra no muerde"). En este caso la actualización Bayesiana es trivial. De hecho al observar la señal el proveedor sabe exactamente el tipo del vendedor final: si hay amenaza, el proveedor sabe que el tipo es conservador, y, por lo tanto, la amenaza no es creíble. De forma similar, si no hay amenaza, el proveedor sabe que el vendedor es del tipo agresivo que tiene incentivos en buscar otro proveedor si este no recibe el descuento. En este caso, el proveedor debe dar el descuento cuando no es amenazado y no dar el descuento cuando es amenazado (o sea, el proveedor está utilizando el principio de que "perro que ladra no muerde"). Pero si es así, el tipo conservador tendría incentivos en hacer desviación y noamenazar (es decir, él tendría incentivos en fingir que es del tipo agresivo) para obtener \$9 al revés de \$5.*

   Por lo tanto, no puede haber equilibrio separador.

c) *Muestre que hay un equilibrio en que ambos tipos no amenazan y otro en que ambos tipos amenazan.*

   Pauta: *Supón que ambos eligen no amenazar. En este caso, como el suceso amenazar ocurre con probabilidad 0, el proveedor puede tener cualquier creencia sobre el tipo del vendedor cuando este amenaza. En particular, puede creer que, si hay amenaza, el vendedor es del tipo conservador con probabilidad 1. En este caso si el proveedor observa una amenaza, él no va a dar el descuento.*

   Mientras, si no hay amenaza, por la regla de Bayes el proveedor debe tener las mismas creencias que tenia inicialmente antes de observar la señal: es decir, él cree que el vendedor es del tipo conservador con probabilidad $1/2$ y es agresivo con probabilidad $1/2$. En este caso, su payoff esperado de no ofrecer el descuento está dado por:

$$\frac{1}{2}8 + \frac{1}{2}(-2) = 3,$$

   lo que es menor a 4, el payoff esperado si ofreciera el descuento. Por lo tanto, el proveedor tiene incentivos en ofrecer el descuento cuando no observa una amenaza.

   Ojo que ambos tipos de vendedores prefieren no hacer desviación: si hicieran desviación no obtendrían el descuento.

   De manera similar, existe un equilibrio en que ambos tipos siempre amenazan y el proveedor ofrece descuento solo si hay amenaza.

Ejercicio 12.8 *(Este juego sexista nada más es que un juego de coordinación) Considera el juego de la batalla de los sexos donde los tipos de uno de los jugadores es desconocido por el otro. Acá vamos a hacer un supuesto un poco sexista (¡ojo que la versión original del juego ya es sexista!), vamos a suponer que el hombre es el agente que es ignorante con respeto a las preferencias de la mujer. La mujer descubre su tipo (si prefiere mirar un partido de boxing o una performance de ballet), y le envía al hombre una señal que indica su preferencia. Para dejar las cosas simple, vamos a suponer que si la mujer prefiere boxing a ballet, siempre va a preferir mirar el partido de boxing a mirar el partido de ballet, no importa lo que hace el hombre. De forma semejante, si ella prefiere ballet, ella preferirá mirar ballet no importa lo que haga el hombre. Mientras, el hombre prefiere la acción que toma la mujer. Esta situación estratégica*

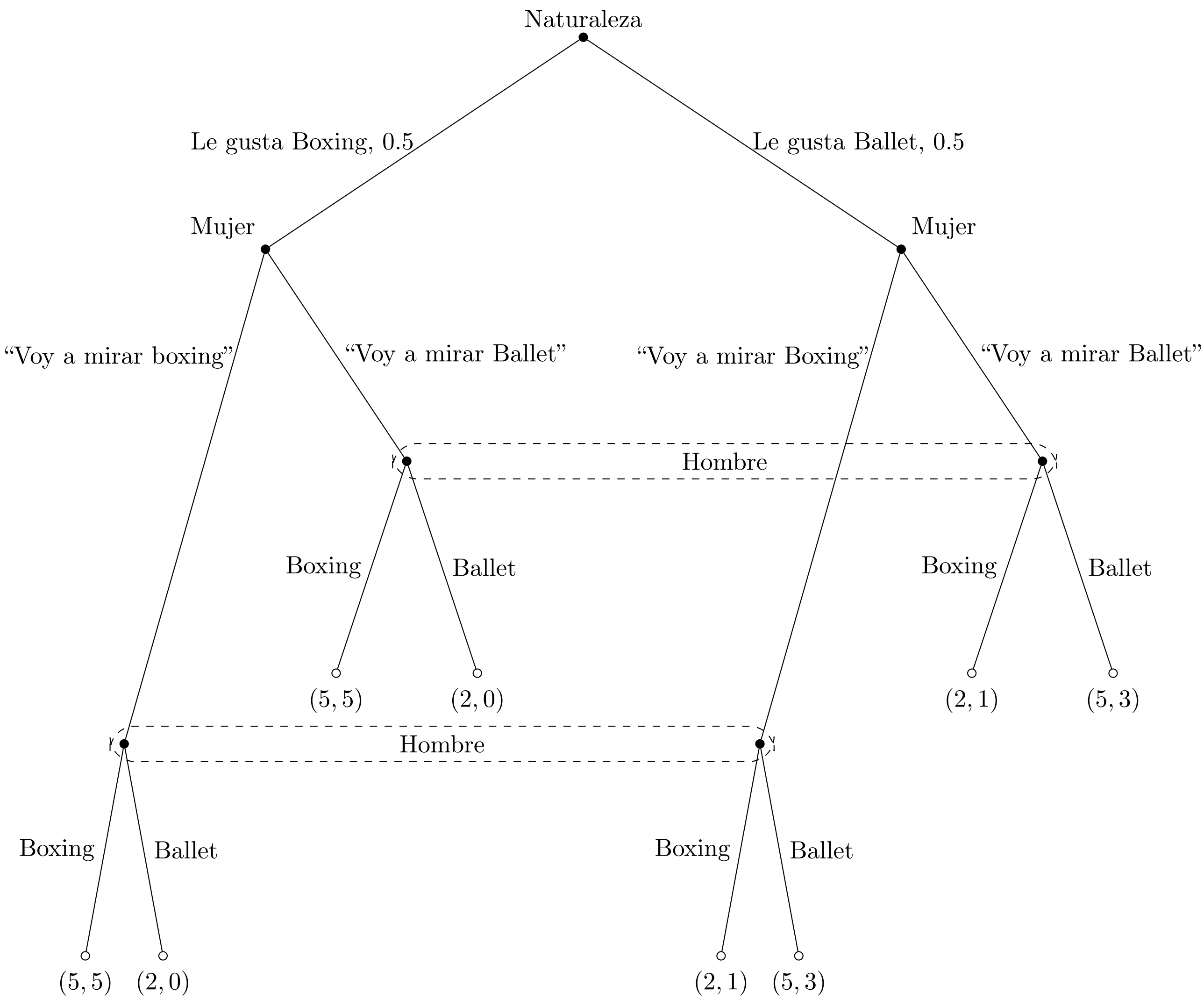


Figure 12.8: Un juego de Cheap talk. El primero payoff corresponde al payoff de la mujer, mientras que el segundo corresponde al payoff del hombre.

está descrita en la figura 12.8 abajo, donde la primera entrada de pagos corresponden a los pagos de la mujer, y la segunda, del hombre.

En este juego la persona que envía la señal (en este caso, la mujer) no incurre en ninguno costo de enviar la señal, por lo que esto es un juego de "cheap talk".

a) Encuentre un Equilibrio de Nash Bayesiano Perfecto para este juego. ***Pauta:*** *Por la figura 12.8 uno puede ver fácilmente que un ENBP consiste en la mujer decir que va a mirar boxing cuando esta es su opción preferida, y decirle al hombre que va a mirar ballet cuando esta es su opción preferida. Al recibir el mensaje, el hombre descubre el tipo de la mujer, y debe mirar boxing si ella le dice que esta es su opción preferida* ($5 > 0$)*, de lo contrario, debe mirar ballet* ($3 > 1$)*. La mujer claramente no tiene incentivos en desviación, ya que le gusta tomar la misma acción que toma el hombre (ambos desean estar juntos).*

b) En el equilibrio, ¿debe el hombre actualizar sus creencias al observar la señal enviada por la mujer? ¿Cómo esto es posible si es que esto es un juego de Cheap talk? ***Pauta:*** *Sí, debe actualizar sus creencias, ya que acá la señal sí es informativa. De hecho, en el ENBP encontrado, la mujer elige una señal distinta dependiendo de su tipo, así que, al observar la señal, el hombre logra detectar el tipo de la mujer. La razón por la que acá la señal es informativa es por qué acá los intereses de la mujer y del hombre están alineados: a ellos* *les gustaría coordinar para estar en el mismo lugar. Además, las preferencias de la mujer dependen de su tipo: si ella es del tipo que le gusta boxing, le gustaría que su pareja mirara boxing, de lo contrario, ballet. Estos dos aspectos en conjunto implican que és del interés de la mujer revelar sus verdaderas preferencias al hombre, por lo que el hombre debe creer en la señal.*

13

Screening

Ejercicio 13.1 *Considere una empresa que ofrece dos tipos de contratos a sus trabajadores:*

- *Contrato 1) Paga \$20 y requiere un nivel de esfuerzo* $e = 4$*.*
- *Contrato 2) Paga* $\$w_L$ *y no requiere esfuerzo* ($e = 0$)*.*

Existen dos tipos de trabajadores: eficiente y no eficiente.

- *Si el trabajador es eficiente, su costo por esforzarse está dado por* $C(e) = \frac{1}{2}e^2$*.*
- *Si el trabajador no es eficiente, su costo por esforzarse está dado por* $C(e) = e^2$*.*
- *La opción externa para ambos tipos de trabajadores es de \$0.*

Determine el intervalo para w_L *tal que, en equilibrio, el trabajador eficiente elige el contrato 1 y el trabajador no eficiente elige el contrato 2.* ***Pauta:*** *Si el tipo alto elige el contrato 1, obtiene un payoff neto de* $20 - 8 = 12$*, lo que es superior a su opción externa de* 0*. Por eso, la restricción de participación del tipo alto se cumple.*

De forma semejante, el payoff del tipo bajo en aceptar el contrato 2 está dado por $w_L - 0^2 = w_L$*, por lo que la restricción de participación del tipo bajo se cumple ssi* $w_L \geq 0$*.*

Miremos ahora las restricciones de compatibilidad de incentivos de los agentes:

Para que el tipo alto prefiera el contrato 1 al contrato 2, debemos tener

$$\begin{aligned} \underbrace{20-8}_{\text{payoff que el tipo alto obtiene aceptando el contrato 1}} &\geq w_L \\ \iff w_L &\leq 12 \end{aligned} \tag{13.1}$$

Para que el tipo bajo prefiera el contrato 2 al contrato 1, debemos tener

$$\begin{aligned} \underbrace{20-16}_{\text{payoff que el tipo alto obtiene aceptando el contrato 1}} &\leq w_L \\ \iff w_L &\geq 4. \end{aligned} \tag{13.2}$$

Por lo tanto, las desigualdades 13.1 y 13.2 implican que debemos tener $w_L \in [4, 12]$*.*

Ejercicio 13.2 *Supón que una empresa del sector privado quiere contratar a un empleado. El empleado es del tipo alto (H) con probabilidad* $\frac{1}{4}$ *y es del tipo bajo (L) con probabilidad* $3/4$*, y estas probabilidades son de conocimiento común. Sin embargo, solo el empleado conoce su tipo: la empresa no. Supón que el tipo alto genera un ingreso de* $\theta_H = \$10$ *a la empresa, mientras que el tipo bajo genera un ingreso de solo* $\theta_L = \$2$*. Supón además que el tipo alto tiene opción* *externa de* $u_H = \$5$*, mientras que el tipo bajo tiene opción externa de solo* $u_L = \$1$*. El tipo alto tiene una opción externa mayor por que él tiene más opciones de trabajar en el exterior o en el sector público.*

Supón que la empresa ofrece un sueldo $w \geq 0$ *determinado por el mercado. Tras observar* w*, la empresa debe decidir si contrata el empleado pagando este sueldo; simultáneamente el empleado decide si trabaja para la empresa o no. Supón que tanto la empresa como el empleado son neutrales al riesgo y toman la acción que maximiza sus ganancias esperadas.*

a) (10 puntos) Muestre que, para todo $w \geq 0$ *no hay un equilibrio en que el tipo alto termina siendo contratado por la empresa.* ***Pauta:*** *Supón por contradicción que hay un equilibrio en que el tipo alto es contratado por la empresa. Para que el tipo tenga incentivos en aceptar el sueldo ofrecido por la empresa,* w *debe ser mayor o igual a su opción externa, \$5, por lo que debemos tener* $w \geq 5$*. Observando que si* $w \geq 5$*, el tipo bajo también tendría incentivos a aceptar el sueldo* w*, los ingresos esperados de la empresa al ofrecer* $w \geq 5$ *estarían dados por*

$$\frac{1}{4}10 + \frac{3}{4}2 = 4,$$

lo que es menor al costo de w *que la empresa incurriría si eligiera* $w \geq 5$*, por lo que la empresa preferiría no contratar, una contradicción con el supuesto inicial de que en equilibrio el tipo alto termina siendo contratado.*$\rightarrow\leftarrow$

b) (10 puntos) En términos prácticos, explique por qué podría ser beneficioso a una economía que los tipos altos trabajaran en el sector privado al revés de migrar para el exterior o trabajar en el sector público. ***Pauta:*** *Muchas veces en el sector público los empleados no tienen muchos incentivos a esforzarse, ya que no pueden fácilmente ser despedidos (ej., si es muy burocrático hacerlo). Por lo tanto, si los tipos listos terminan todos en el sector público (un fenómeno común en Brasil), muchos talentos terminan siendo desperdiciados, algo que puede afectar el PIB del país.*

La misma idea se aplica a los trabajadores que deciden trabajar en el exterior: tal fenómeno es conocido como fuga de cerebros, que pasa cuando los tipos listos terminan teniendo incentivos en buscar oportunidades de trabajo mejores en el exterior. Perder sus trabajadores más calificados para el mercado exterior disminuye la capacidad que un país tiene para desarrollarse.

c) (10 puntos) Ahora supón que la empresa puede requerir que los empleados hagan un examen de admisión antes que sean contratados. Para que el tipo alto sea contratado, él debe incurrir en un costo $c_H = 2$*, mientras que el tipo bajo debe incurrir en un costo más alto de* $c_L = 6$*. Supón que la empresa ofrece 2 contratos: uno que paga* $w_H = 7$ *pero requiere que los empleados sean aprobados en el examen de admisión, y otro que les paga solo* $w_L = 1$ *pero no requiere que el trabajador sea aprobado en el examen de admisión. Muestre que, en este caso:*

I) El tipo alto tiene incentivos en aceptar el primer contrato, mientras que el tipo bajo tiene incentivos en aceptar el segundo contrato.

II) La empresa obtiene ganancias esperadas más altas de lo que obtendría si solo pudieran ofrecer un único contrato que paga $w \geq 0$*, sin requerir un test de admisión.*

Pauta: *Para la primera parte hay que mostrar que el tipo bajo está exactamente indiferente entre aceptar el contrato que le paga* $w_L = 1$ *y no requiere esfuerzo (su payoff sería \$1), aceptar el contrato que le paga* $w_H = 7$ *pero requiere que se esfuerce (su payoff neto es* $7 - 6 = 1$*) y aceptar su opción externa (la que también genera un payoff de* $u_L = 1$*). Por lo* *tanto, el tipo bajo tendría incentivos en aceptar el contrato que le paga $w_L = 1$ y no requiere esfuerzo.*

El tipo alto está indiferente entre aceptar el contrato que le paga $w_H = 7$ y requiere esfuerzo (esto le generaría un payoff neto de $7 - 1 = 5$) y aceptar su opción externa ($u_H = 5$), y preferiría estrictamente estas 2 opciones a aceptar el contrato pensado al tipo bajo (eso le generaría un payoff de 1, lo que es inferior a 5). Por lo tanto, el tipo alto tiene incentivos en aceptar el contrato que le paga $w_H = 7$ y requiere que él se esfuerce.

Por lo tanto, si la empresa implementara este par de contratos, obtendría el siguiente payoff esperado:

$$\frac{1}{4}(10-7) + \frac{3}{4}(2-1) = 3/2.$$

Vimos en el ítem a) que es imposible haber un equilibrio en que la empresa contratara al tipo alto. Entonces, supongamos que w es tal que solo el tipo bajo acepta el contrato. Para que el tipo bajo tenga incentivos en aceptar el contrato, debemos tener $w \geq 1$. Por lo tanto, el máximo que la empresa podría obtener en equilibrio sería

$$\frac{3}{4}(2-1) = 3/4.$$

d) *Volviendo al caso en que no hay test de admisión, considere el modelo original, pero ahora supón que la probabilidad de que el trabajador sea del tipo alto está dada por 3/4 y que la probabilidad de que el trabajador sea del tipo bajo esté dada por 1/4 (es decir hemos intercambiado las probabilidades). Muestre que, en este caso, no ocurre el problema de selección adversa encontrado en el ítem a, es decir, en este caso sí existen valores para w tal que los trabajadores del tipo alto terminarían siendo contratados por la empresa en equilibrio.* ***Pauta:*** *Hemos visto en el ítem a) que para que ambos tipos de trabajadores tengan incentivos en aceptar el contrato w (el que no exige esfuerzo) debemos tener $w \geq 5$.*

Ahora, para que la empresa tenga incentivos en contratar un empleado su payoff esperado debe ser mayor o igual a cero:

$$\frac{3}{4}(10-w) + \frac{1}{4}(2-w) \geq 0 \iff w \leq 8.$$

Por lo tanto, mientras $w \in [5, 8]$ tendremos que, en equilibrio, la empresa contrata a ambos tipos bajo el mismo sueldo.

e) *Basado en tus respuestas a los ítems anteriores, dé un ejemplo de una acción concreta que el gobierno podría adoptar para mitigar las ineficiencias causadas por el problema de selección adversa en el mercado de trabajo.* ***Pauta: Posibles respuestas:***

- *Mejorar el nivel educacional de la población para evitar el problema de selección adversa.*
- *Disminuir el funcionalismo público. De hecho, si los tipos altos tuvieron menos estabilidad de trabajo en el sector público tendrían más incentivos en trabajar de forma productiva en el sector privado.*
- *Un factor que puede causar la fuga de cerebros es la instabilidad política y social de un país. Dado que, en general, es más fácil para los tipos con alto nivel de educación huir de un país inestable, esto podría causar un ciclo vicioso de tal manera que todos los tipos listos deciden salir y vivir en el exterior. Por lo tanto, disminuir la instabilidad política y social (ej., combatir la violencia y proteger los derechos democráticos de los ciudadanos) ayudaría a evitar esta fuga.*

14

Promociones por torneos

Ejercicio 14.1 *Hay dos trabajadores (agentes) que trabajan para una empresa (el principal). El desempeño del agente $i \in \{1, 2\}$ al realizar la tarea está dado por*

$$\tilde{\pi}_i = e_i + \tilde{\theta} + \varepsilon_i,$$

donde $\varepsilon_i \geq 0$ es el esfuerzo y $\tilde{\theta}$ es un choque agregado aleatorio que afecta la performance de todos los trabajadores, mientras que ε_i es un choque idiosincrático que afecta solamente la performance del trabajador i. Todas las variables aleatorias son independientes, y además siguen una distribución normal padrón con media cero y varianza $\sigma^2 = 1/4$, es decir, $\tilde{\theta} \sim N(0, 1/4)$, $\tilde{\varepsilon}_1 \sim N(0, 1/4)$ y $\tilde{\varepsilon}_1 \sim N(0, 1/4)$.

Los ingresos totales de la empresa están dados por $\tilde{\pi}_1 + \tilde{\pi}_2$.

El costo de realizar el esfuerzo e_i está dado por $C(e_i) = e_i^2/2$. Cada agente tiene una utilidad de reserva (outside option) igual a $\underline{u} = \frac{1}{4}$.

El jefe no observa $\tilde{\theta}$, pero sí observa el desempeño $\tilde{\pi}_i$ de cada empleado, la información que utiliza para determinar quién gana el torneo. El juego ocurre en 3 etapas:

- *En la primera etapa el jefe elige el sueldo del ganador W y el sueldo del perdedor del torneo $L \in [0, W]$.*
- *Observado el sueldo, los agentes deciden si aceptan el contrato o no*
- *Suponiendo que ellos decidan aceptar el contrato, los trabajadores eligen su nivel de esfuerzo e_i. El trabajador con mejor performance gana el sueldo alto W, y el otro gana el sueldo bajo L.*

Ojo que en este modelo, el que elige el mayor esfuerzo no es necesariamente el que gana el torneo, ya que hay un choque exógeno y idiosincrásico ε_i que afecta sus productividades. Vamos a suponer que la empresa busca implementar un nivel de esfuerzo eficiente, nomás. Vamos a suponer también que los empleados son neutrales al riesgo. Más precisamente, vamos a suponer que su función de utilidad esperada está dada por $u(x) = x$. En este caso, la utilidad esperada del empleado 1 cuando este realiza un esfuerzo e_1 y su rival un esfuerzo e_2 está dada por:

$$LPr(\tilde{\pi}_1 \leq \tilde{\pi}_2) + WPr(\tilde{\pi}_1 > \tilde{\pi}_2) - \frac{e_1^2}{2}.$$

La utilidad esperada del empleado 2 se define de forma similar.

a) Dé un ejemplo práctico de un choque que podría ser calificado como un choque agregado que afecta igualmente la performance de ambos trabajadores, y otro que afecta la performance de solo uno de los trabajadores. ***Pauta:***

Ejemplo de un choque agregado: *Los trabajadores son vendedores, y ambos han aumentado sus ventas debido a un aumento exógeno en la demanda.*

Ejemplo de un choque idiosincrático: *Cada empleado debe presentar sus respectivos trabajos en una conferencia internacional, pero el vuelo de uno de ellos ha sido cancelado, así que, al trabajador que tuvo su vuelo cancelado y modificado, este llega cansado a la conferencia, lo que afecta de forma negativa la calidad de su presentación durante la conferencia, pero esto no afecta la performance del otro empleado, ya que su vuelo no tuvo intemperies.*

b) *Encuentre los niveles de e_1 y e_2 que sería Pareto eficiente, es decir, que maximiza la suma de ingresos menos la suma de los costos de producción.* ***Pauta:*** *El valor añadido esperado como resultado del esfuerzo está dado por*[1]

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[e_1 + \tilde{\theta} + \tilde{\varepsilon}_1 + e_2 + \tilde{\theta} + \tilde{\varepsilon}_2 - \frac{e_1^2}{2} - \frac{e_2^2}{2}] = \\ =&e_1 + \mathbb{E}[\tilde{\theta}] + \mathbb{E}[\tilde{\varepsilon}_1] + e_2 + \mathbb{E}[\tilde{\theta}] + \mathbb{E}[\tilde{\varepsilon}_2] - \frac{e_1^2}{2} - \frac{e_2^2}{2}.\end{aligned}$$

c) *Utilizando inducción al revés, encuentre los niveles de e_1 y e_2 que elegirían los trabajadores si hubieran aceptado la oferta de trabajo.* ***Pauta:***

Supón que el agente 2 elige e_2. Entonces el agente 1 va a elegir e_1 de tal forma a maximizar

$$LPr(\tilde{\pi}_1 \leq \tilde{\pi}_2) + WPr(\tilde{\pi}_1 > \tilde{\pi}_2) - \frac{e_1^2}{2},$$

donde

$$\begin{aligned}Pr(\tilde{\pi}_1 \leq \tilde{\pi}_2) &= Pr(e_1 + \tilde{\theta} + \tilde{\varepsilon}_1 \leq e_2 + \tilde{\theta} + \tilde{\varepsilon}_2) \\ &= Pr(\tilde{\varepsilon}_1 - \tilde{\varepsilon}_2 \leq e_2 - e_1).\end{aligned}$$

Una de las propiedades de la distribución normal es que si $X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$ y $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$, entonces

$$X + Y \sim N(\mu_x + \mu_y, \sigma_x^2 + \sigma_y^2).$$

Por lo tanto, denotando $F(\cdot)$ como la función de densidad acumula de una normal con media 0 y varianza 2, es decir, definiendo

$$F(k) \equiv \int_{-\infty}^{k} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} dx,$$

tenemos que

$$Pr(\tilde{\pi}_1 \leq \tilde{\pi}_2) = F(e_2 - e_1).$$

Por lo tanto, el trabajador 1 va a elegir el nivel de esfuerzo que maximiza

$$\begin{aligned}&L \underbrace{F(e_2 - e_1)}_{Pr(\tilde{\pi}_1 \leq \tilde{\pi}_2)} + W \underbrace{[1 - \overbrace{F(e_2 - e_1)}^{Pr(\tilde{\pi}_1 \leq \tilde{\pi}_2)}]}_{Pr(\tilde{\pi}_1 > \tilde{\pi}_2)} - \frac{e_1^2}{2} = \\ &= W - (W - L)F(e_2 - e_1) - \frac{e_1^2}{2}.\end{aligned}$$

[1] Nota técnica: ojo que estamos calculando las ganancias *ex-ante*, es decir, antes de conocer las realizaciones de las variables aleatorias $\tilde{\theta}$ y $(\tilde{e}_i)_{i\in\{0,1\}}$. También podrías buscar encontrar la asignación eficiente después de observar $\tilde{\theta}$ y $(\tilde{e}_i)_{i\in\{0,1\}}$, lo que llamaríamos de asignación eficiente *ex-post*. Sin embargo, dado que los agentes son neutrales al riesgo, los niveles de esfuerzo eficientes *ex-ante* y *ex-post* son idénticos.

Tomando la CPO, obtenemos

$$e_1 = (W - L)F'(e_2 - e_1).$$

Por simetría, también debemos tener que el e_2 óptimo como función de e_1 debe estar dado por

$$e_2 = (W - L)F'(e_1 - e_2).$$

En un equilibrio simétrico debemos tener $e_1 = e_2 = e^*$. Reemplazando en la expresión anterior, obtenemos

$$e^* = (W - L)F'(0),$$

donde $F'(0)$ es la función de densidad de probabilidad de una variable normal con media 0 y varianza 2 evaluada en el punto 0. Más precisamente:

$$F'(0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

Por lo tanto, en el equilibrio simétrico cada trabajador elige

$$e^* = \frac{W - L}{\sqrt{\pi}}$$

en la contingencia de que ambos han aceptado la oferta del principal.

d) *Supón que el jefe desea implementar una asignación Pareto eficiente (PE). Encuentre los valores de W y L que maximizan las ganancias de la empresa sujeto a la restricción de que la asignación final debe ser PE.* ***Pauta:*** *Por el ítem anterior, podemos ver que, para motivar el trabajador a adoptar una asignación PE, él debe elegir un W y un L tal que*

$$W - L = \sqrt{\pi}. \tag{14.1}$$

Pero el jefe también debe certificarse de que la restricción de participación de los empleados (también conocidas como restricciones de racionalidad individual) se cumplen. En este caso, ambos trabajadores tienen la misma restricción de participación, la que está dada por:

$$\underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{prog. ganar}} W + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{prog. perder}} L - \underbrace{\frac{\left(\frac{W-L}{\sqrt{\pi}}\right)^2}{2}}_{\text{costo del esfuerzo óptimo}} \geq \underline{u}. \tag{14.2}$$

Si la empresa desea implementar la asignación eficiente que maximiza sus ganancias, va a elegir W y L tal que la restricción (14.2) se cumple con igualdad, es decir, la siguiente condición se debe cumplir

$$\frac{1}{2}W + \frac{1}{2}L - \frac{\left(\frac{W-L}{\sqrt{\pi}}\right)^2}{2} = \underline{u} = \frac{1}{4}, \tag{14.3}$$

de lo contrario, el principal podría cambiar W hacia $W' = W - \varepsilon$ y cambiar L hacia $L' = L - \varepsilon$, de tal forma a no afectar la diferencia $W - L$, y, por lo tanto el nivel de esfuerzo de los agentes; además, si ε es suficientemente bajo, los nuevos niveles de W y L seguirían cumpliendo con la restricción de participación (14.2).

Por lo tanto, la empresa debe elegir W y L que cumplan con las condiciones (14.1) *y* (14.3). *Resolviendo este sistema de ecuaciones, obtenemos:*

$$L^* = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{\pi} > 0$$

$$W^* = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{\pi} > L^* > 0.$$

e) *El ítem anterior muestra que es posible para el jefe elegir una asignación PE utilizando el mecanismo de torneos. Pero lo más realista sería que jefe eligiera un contrato que maximizara sus ganancias. Encuentre los niveles de W y L que maximizarían las ganancias de la empresa.* ***Obs.: Ojo que hay que suponer que el jefe no puede elegir un L menor a cero, es decir, hay un límite en el nivel de castigo que el jefe puede elegir a sus empleados. Además, hay que suponer que $W \geq L$ (todos estos supuestos están en el enunciado).*** ***Pauta:*** *En este caso, el principal va a elegir W y L tal que resuelve el siguiente problema de maximización*

$$\max_{W,L} 2\left(\frac{W-L}{\sqrt{\pi}}\right) - L - W$$

$$s.a. \quad \frac{1}{2}W + \frac{1}{2}L - \left(\frac{W-L}{\sqrt{\pi}}\right)^2 \geq \underline{u} = \frac{1}{4} \tag{14.4}$$

$$L \geq 0 \tag{14.5}$$

$$W \geq L \tag{14.6}$$

Ojo que la función objetivo es estrictamente creciente en W y estrictamente decreciente en L, lo que implica que por lo menos una de las restricciones (14.4), (14.5) *o* (14.6) *deberán estar activas.*

Caso 1: *Supón que $L = W$ (es decir, la restricción 14.6 está activa), en este caso, la firma obtiene ganancias*

$$-L - W \leq 0,$$

por lo que $L = W$ aparenta no ser un buen candidato al óptimo.

Caso 2: *Supón que $L = 0$ (es decir, la restricción 14.5 está activa), entonces el principal va a elegir el mayor W que cumple con la restricción* (14.4)*, ya que la función objetivo es estrictamente creciente en W. Es decir el principal va a elegir W tal que*

$$\frac{1}{2}W - \frac{W^2}{2\pi} = \underbrace{\frac{1}{4}}_{\underline{u}}.$$

Encontrando las raíces de esta forma cuadrática, obtenemos $W' = -0.4387303$ y $W'' = 3.580323$, por lo que el mayor W (positivo) que cumple con la restricción 14.4 es $W = 3.580323$. Reemplazando $W = 3.580323$ y $L = 0$ en la función objetivo, tenemos que, para estos niveles de L y W, el principal obtiene ganancia igual a

$$\pi = \frac{2 \times 3.580323}{\sqrt{\pi}} - 3.580323 \approx 0.46.$$

Caso 3: *Supón que la restricción 14.4 está activa y ignoremos las demás restricciones. En este caso, el principal va a maximizar*

$$\max_{W,L} 2\left(\frac{W-L}{\sqrt{\pi}}\right) - (L+W)$$
$$s.a. \quad W + L = \frac{1}{2} + 2\left(\frac{W-L}{\sqrt{\pi}}\right)^2. \tag{14.7}$$

Reemplazando la restricción 14.7 en la función objetivo, y definiendo $X = W - L$ tenemos que el principal va a maximizar

$$\max_{X} 2\left(\frac{X}{\sqrt{\pi}}\right) - 2\left(\frac{X}{\sqrt{\pi}}\right)^2 - \frac{1}{2}.$$

Tomando la CPO, obtenemos

$$X = W - L = \sqrt{\pi},$$

es decir, el principal elige un nivel de $W - L$ que es Pareto eficiente. Semejante al ítem anterior, la condición $W - L = \sqrt{\pi}$ más la restricción 14.7 implican que

$$L^* = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{\pi} > 0$$

$$W^* = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{\pi} > L^* > 0,$$

es decir, el principal elige una asignación Pareto eficiente, el que genera una ganancia de 0.5 *al principal*

Por lo tanto, el candidato factible que genera mayores ganancias al principal es cuando este elige $L = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ y $W = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, lo que es Pareto eficiente.

f) *Ahora supón que el jefe busca implementar un contrato alternativo: al revés de hacer un torneo, decide pagarles a sus empleados una compensación lineal del tipo $w(\pi_i) = \alpha + \beta\pi_i$. Supón que el jefe no puede elegir un castigo muy fuerte, por lo que debemos tener $\alpha \geq 0$. Encuentre el nivel de α y β que maximizan las ganancias de la empresa sujeto a la restricción de que la asignación final debe ser PE.* ***Pauta:*** *Ya vimos en el ítem a que lo eficiente sería que ambos agentes eligieran esfuerzo igual a 1. Dado que un agente acepta el contrato, él va a elegir e_i que maximiza*

$$\max_{e_i} \alpha + \beta[e_i + \underbrace{\mathbb{E}(\tilde{\theta})}_{=0} + \underbrace{\mathbb{E}(\tilde{\varepsilon})}_{=0}] - \frac{e_i^2}{2}.$$

Tomando la CPO, obtenemos

$$e_i^* = \beta.$$

Por lo tanto, para que los agentes elijan el esfuerzo PE, el principal debe elegir $\beta = 1$. Pero también debe garantizar que la restricción de participación

$$\alpha + \underbrace{1}_{=\beta}[\underbrace{1}_{e_i=\beta=1} + 0 + 0] - \frac{1^2}{2} \geq \frac{1}{4}.$$

Obviamente, si el principal desea minimizar sus costos, va a elegir el menor α posible tal que esta condición se cumpla. Como el mínimo α que cumple con esta restricción es $\alpha = -\frac{1}{4}$, pero como debemos tener $\alpha \geq 0$, concluimos que el principal debe elegir $\alpha = 0$, lo que genera ganancias 0 al principal.

g) *Pero nuevamente, quizás lo más realista fuera que el jefe buscara implementar un nivel de α y β que maximizara sus ganancias, sin preocuparse con eficiencia. Encuentre los niveles de α y β de equilibrio que maximizarían las ganancias del principal.* ***Pauta:*** *Vimos en el ítem anterior que, en la contingencia que el un empleado ha aceptado el contrato, él va a elegir $e_i = \beta$. Por lo tanto, el principal va a elegir α y β que resuelven el siguiente problema de optimización con restricción:*

$$\begin{aligned}
&\max_{\alpha,\beta} \underbrace{2\beta}_{\textit{ingresos}} - 2(\alpha+\beta^2) \\
s.a. \quad &\alpha \geq 0 \quad \textit{(restricción de no negatividad)} \\
&\underbrace{\frac{1}{4}}_{\underline{u}} - \frac{\beta^2}{2} - \alpha \leq 0 \quad \textit{(restricción de participación)}
\end{aligned}$$

Escribiendo el Lagrange del problema, obtenemos

$$\mathbb{L}(\alpha,\beta) = 2\beta - 2(\alpha+\beta^2) - \lambda_1\left(\frac{1}{4} - \frac{\beta^2}{2} - \alpha\right) + \lambda_2\alpha.$$

Las CPO. correspondientes a este problema están dadas por

$$2 - 4\beta - \lambda_1\beta = 0 \tag{14.8}$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 = 2 \tag{14.9}$$
$$\lambda_1\left(\frac{1}{4} - \frac{\beta^2}{2} - \alpha\right) = 0 \tag{14.10}$$
$$\lambda_2\alpha = 0 \tag{14.11}$$
$$\alpha \geq 0 \tag{14.12}$$
$$\frac{1}{4} - \frac{\beta^2}{2} - \alpha \leq 0 \tag{14.13}$$

Caso 1) *Supón $\lambda_1 = 0$. Entonces, por la restricción (14.8), tenemos que $\beta = \frac{1}{2}$. Pero $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_1+\lambda_2 = 2$ implican que $\lambda_2 = 2$. Pero $\lambda_2 = 2$ y la condición de huelga $\lambda_2\alpha = 0$ implica que $\alpha = 0$. Pero $\beta = \frac{1}{2}$ y $\alpha = 0$ no cumplen con la condición (14.13), una contradicción.$\rightarrow\leftarrow$*

Caso 2) *Supón $\lambda_2 = 0$. Entonces, $\lambda_1 = 2$, lo que, por la restricción (14.8), tenemos que $\beta = \frac{1}{3}$. Pero $\lambda_2 = 2$, $\beta = \frac{1}{3}$ y la restricción (14.10) implican que $\alpha = \frac{1}{4} - \frac{1}{18} \approx 0.194 \geq 0$. Reemplazando estos valores, en la función objetivo, tenemos que el principal obtiene una ganancia igual a 0.0556 en el óptimo.*

h) *Explique una ventaja y una desventaja de cada uno de estos mecanismos del punto de vista del principal (se puede incluir aspectos no considerados en este modelo).* ***Pauta:*** *Conforme muestra este ejercicio, competencia por torneos puede generar mayores ganancias al principal. Sin embargo, la desventaja de este mecanismo comparado a un contrato lineal en performance es que él puede motivar sabotajes y puede tener efectos psicológicos negativos en los empleados, dos aspectos no considerados en este modelo simplificado.*

Ejercicio 14.2 *Hay dos trabajadores (agentes) que trabajan para una empresa (el principal). El desempeño del agente $i \in \{1,2\}$ al realizar la tarea está dado por*

$$\tilde{\pi}_i = e_i + \tilde{\theta} + \varepsilon_i,$$

donde $e_i \geq 0$ *es el esfuerzo y* $\tilde{\theta}$ *es un choque agregado aleatorio que afecta la performance de todos los trabajadores, mientras que* ε_i *es un choque idiosincrático que afecta solamente la performance del trabajador* i. *Todas las variables aleatorias son independientes, y además siguen una distribución normal padrón con media cero y varianza* $\sigma^2 = 1$, *es decir,* $\tilde{\theta} \sim N(0,1)$, $\tilde{\varepsilon}_1 \sim N(0,1)$ *y* $\tilde{\varepsilon}_1 \sim N(0,1)$.

Los ingresos totales de la empresa están dados por $\tilde{\pi}_1 + \tilde{\pi}_2$.

El costo de realizar el esfuerzo e_i *está dado por* $C(e_i) = 2e_i^2$. *Cada agente tiene una utilidad de reserva (outside option) igual a* $\underline{u} = 0$.

El jefe no observa $\tilde{\theta}$, *pero sí observa el desempeño* $\tilde{\pi}_i$ *de cada empleado, la información que utiliza para determinar quién gana el torneo. El juego ocurre en 3 etapas:*

- *En la primera etapa el jefe elige el sueldo del ganador* W *y el sueldo del perdedor del torneo* $L \in [0, W]$.
- *Observado el sueldo, los agentes deciden si aceptan el contrato o no*
- *Suponiendo que ellos decidan aceptar el contrato, los trabajadores eligen su nivel de esfuerzo* e_i. *El trabajador con mejor performance gana el sueldo alto* W, *y el otro gana el sueldo bajo* L.

Ojo que en este modelo, el que elige el mayor esfuerzo no es necesariamente el que gana el torneo, ya que hay un choque exógeno y idiosincrásico ε_i *que afecta sus productividades. Vamos a suponer que la empresa busca implementar un nivel de esfuerzo eficiente. Vamos a suponer también que los empleados son neutrales al riesgo. En este caso, la utilidad esperada del empleado 1 cuando este realiza un esfuerzo* e_1 *y su rival un esfuerzo* e_2 *está dada por:*

$$LPr(\tilde{\pi}_1 \leq \tilde{\pi}_2) + WPr(\tilde{\pi}_1 > \tilde{\pi}_2) - 2e_1^2.$$

La utilidad esperada del empleado 2 se define de forma similar.

a) *(10 puntos) Encuentre los niveles de* e_1 *y* e_2 *que sería Pareto eficiente, es decir, que maximiza la suma de ingresos menos la suma de los costos de producción.* ***Pauta:*** *El valor añadido esperado como resultado del esfuerzo está dado por*[2]

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[e_1 + \tilde{\theta} + \tilde{\varepsilon}_1 + e_2 + \tilde{\theta} + \tilde{\varepsilon}_2 - 2e_1^2 - 2e_2^2] =\\ = e_1 + \mathbb{E}[\tilde{\theta}] + \mathbb{E}[\tilde{\varepsilon}_1] + e_2 + \mathbb{E}[\tilde{\theta}] + \mathbb{E}[\tilde{\varepsilon}_2] - 2e_1^2 - 2e_2^2.\end{aligned}$$

Tomando la CPO, uno puede ver que los niveles eficientes de esfuerzo están dados por $e_1 = e_2 = \frac{1}{4}$.

b) *(10 puntos) Utilizando inducción retroactiva, encuentre los niveles de* e_1 *y* e_2 *que elegirían los trabajadores si hubieran aceptado la oferta de trabajo en un equilibrio simétrico.* ***Obs.: para contestar este ítem, hay que utilizar el hecho de que una variable aleatoria Normal con media*** 0 ***y varianza*** σ^2 ***tiene función de densidad de probabilidad***

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

Pauta:

[2] Nota técnica: ojo que estamos calculando las ganancias *ex-ante*, es decir, antes de conocer las realizaciones de las variables aleatorias $\tilde{\theta}$ y $(\tilde{e}_i)_{i\in\{0,1\}}$. También podrías buscar encontrar la asignación eficiente después de observar $\tilde{\theta}$ y $(\tilde{e}_i)_{i\in\{0,1\}}$, lo que llamaríamos de asignación eficiente *ex-post*. Sin embargo, dado que los agentes son neutrales al riesgo, los niveles de esfuerzo eficientes *ex-ante* y *ex-post* son idénticos.

Supón que el agente 2 elige e_2. Entonces el agente 1 va a elegir e_1 de tal forma a maximizar

$$LPr(\tilde{\pi}_1 \leq \tilde{\pi}_2) + WPr(\tilde{\pi}_1 > \tilde{\pi}_2) - 2e_1^2,$$

donde

$$\begin{aligned} Pr(\tilde{\pi}_1 \leq \tilde{\pi}_2) &= Pr(e_1 + \tilde{\theta} + \tilde{\varepsilon}_1 \leq e_2 + \tilde{\theta} + \tilde{\varepsilon}_2) \\ &= Pr(\tilde{\varepsilon}_1 - \tilde{\varepsilon}_2 \leq e_2 - e_1). \end{aligned}$$

Una de las propiedades de la distribución normal es que si $X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$ y $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$, entonces

$$X + Y \sim N(\mu_x + \mu_y, \sigma_x^2 + \sigma_y^2).$$

Por lo tanto, denotando $F(\cdot)$ como la función de densidad acumula de una normal con media 0 y varianza 2, es decir, definiendo

$$F(k) \equiv \int_{-\infty}^{k} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4}} dx,$$

tenemos que

$$Pr(\tilde{\pi}_1 \leq \tilde{\pi}_2) = F(e_2 - e_1).$$

Por lo tanto, el trabajador 1 va a elegir el nivel de esfuerzo que maximiza

$$\begin{aligned} L\underbrace{F(e_2 - e_1)}_{Pr(\tilde{\pi}_1 \leq \tilde{\pi}_2)} + W\underbrace{[1 - \overbrace{F(e_2 - e_1)}^{Pr(\tilde{\pi}_1 \leq \tilde{\pi}_2)}]}_{Pr(\tilde{\pi}_1 > \tilde{\pi}_2)} - 2e_1^2 &= \\ = W - (W - L)F(e_2 - e_1) - 2e_1^2. \end{aligned}$$

Tomando la CPO, obtenemos

$$e_1 = \frac{(W - L)}{4} F'(e_2 - e_1).$$

Por simetría, también debemos tener que el e_2 óptimo como función de e_1 debe estar dado por

$$e_2 = \frac{(W - L)}{4} F'(e_1 - e_2).$$

En un equilibrio simétrico debemos tener $e_1 = e_2 = e^*$. Reemplazando en la expresión anterior, obtenemos

$$e^* = \frac{(W - L)}{4} F'(0),$$

donde $F'(0)$ es la función de densidad de probabilidad de una variable normal con media 0 y varianza 2 evaluada en el punto 0. Más precisamente:

$$F'(0) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}.$$

Por lo tanto, en el equilibrio simétrico cada trabajador elige

$$e^* = \frac{W - L}{8\sqrt{\pi}}$$

en la contingencia de que ambos han aceptado la oferta del principal.

c) *(10 puntos) ¿Qué valor el principal debe elegir para $W-L$ para que el nivel de esfuerzo elegido por el trabajador sea Pareto eficiente?* ***Pauta:*** *Para motivar que los trabajadores elijan el nivel de esfuerzo eficiente, es decir $e_1 = e_2 = 1/4$, debemos tener*

$$e^* = \frac{W-L}{8\sqrt{\pi}} = \frac{1}{4} \iff W-L = 2\sqrt{\pi}.$$

Ejercicio 14.3 *Hay dos trabajadores $i \in \{1,2\}$ (agentes) que trabajan para una empresa (el principal). El desempeño de cada agente al realizar la tarea está dado por*

$$\tilde{\pi}_i = 2\left(e_i + \tilde{\theta}\right),$$

donde $e_i \in \{0,1\}$ representa el nivel de esfuerzo del agente i, y $\tilde{\theta}$ es un choque agregado aleatorio que afecta ambos agentes de manera igual.

Los ingresos totales de la empresa están dados por $\tilde{\pi}_1 + \tilde{\pi}_2$, por lo que es de interés a la empresa que ambos trabajadores se esfuercen.

La función costo para el agente 1 está dada por

$$C_1(e) = \begin{cases} 1, & si\ e=1 \\ 0, & si\ e=0 \end{cases},$$

mientras que la función costo del agente 2 está dada por

$$C_2(e) = \begin{cases} 3, & si\ e=1 \\ 0, & si\ e=0 \end{cases},$$

por lo que es menos costoso al agente 1 esforzarse, y esto es de conocimiento común.

El jefe no observa $\tilde{\theta}$ y tampoco e_i, pero sí observa el desempeño $\tilde{\pi}_i$ de cada empleado, la información que utiliza para determinar quién gana el torneo. Si ambos empleados obtienen la misma performance, se tira una moneda para determinar el ganador al azar (en este caso, cada trabajador gana el torneo con probabilidad $1/2$). La persona que gana el torneo obtiene \$$W$, y la persona que pierde obtiene \$$L$.

Para los siguientes ítems, supón que $W = 10$ y $L = 6$ y supón que cada agente elige su nivel de esfuerzo simultáneamente.

a) *(10 puntos) Escriba la tabla de payoffs de los agentes (trabajadores) correspondientes a este juego.* ***Pauta:*** *En el cuadro 14.1 escribimos la tabla de pagos con los payoffs esperados de cada trabajador.*

	Trabajador 2	
Trabajador 1	$e=0$	$e=1$
$e=0$	8,8	6,7
$e=1$	9,6	7,4

Table 14.1: *Payoffs esperados de los trabajadores 1 y 2 como función del par de estrategias que adoptan*

b) *(10 puntos) Encuentre el nivel de esfuerzo que elegiría cada agente en equilibrio (puede utilizar la tabla de payoffs obtenida en el ítem anterior y subrayar las mejores respuestas).* ***Pauta:*** *Posibles respuestas:*

	Trabajador 2	
Trabajador 1	$e = 0$	$e = 1$
$e = 0$	$8, \underline{8}$	$6, 7$
$e = 1$	$\underline{9}, \underline{6}$	$\underline{7}, 4$

Table 14.2: *Subrayando las mejores respuestas de cada jugador*

- *Subrayando las mejores respuestas de cada jugador (ver tabla 14.2, se puede ver fácilmente que el único equilibrio consiste en que solo el trabajador 1 se esfuerce:*
- *Mirando la tabla de pagos del ítem anterior, uno puede ver que el trabajador 1 tiene una estrategia estrictamente dominante de elegir* $e = 1$*, mientras que el trabajador 2 tiene una estrategia estrictamente dominante de elegir* $e = 0$*, por lo que el único equilibrio de Nash (EN) de este juego consiste en que el trabajador 1 se esfuerce (es decir, elija* $e = 1$*) y el trabajador 2 no.*
- *Supón que el trabajador elige* $e = 1$*. Entonces si el trabajador 2 elige* $e = 0$*, obtendría* 6*, mientras que si eligiera* $e = 1$*, obtendría un payoff esperado de* 4*, por lo que prefiere elegir* $e = 0$*. Dado la mejor respuesta del jugador 2, el trabajador 1 tiene incentivos en elegir* $e = 1$ *(ya que* $9 > 8$*). Cómo el trabajador 1 no tiene incentivos en hacer desviación, se concluye que el trabajador 1 elegir* $e = 1$ *y el trabajador 2 elegir* $e = 0$ *es un EN.*

c) *(10 puntos) En el presente contexto, presente una potencial ventaja y una potencial desventaja para la empresa de se implementar un mecanismo de promoción por torneos (puede utilizar su respuesta a los ítems anteriores como aporte).* ***Pauta:*** *El alumno solo necesitaba presentar una ventaja y una desventaja. Pero acá van algunas:*

Ventajas:

- *Elimina el efecto que choques agregados y externos tienen en el pago de los agentes. Eso hace que los agentes estén sujetos a menos riesgos, lo que aumenta sus incentivos a aceptar trabajar para la empresa si ellos tienen aversión al riesgo.*
- *Él incentiva a que los trabajadores se esfuercen.*

Desventajas:

- *En los torneos, solo los tipos muy listos (en este ejemplo, el trabajador 1) terminan teniendo incentivos en esforzarse, ya que los tipos menos listos creen que sería muy improbable o costoso ganar. Si es de interés que todos en la empresa se esfuercen, no solo los tipos listos, esta técnica de motivación puede no ser la más adecuada.*
- *Él incentiva el proceso de sabotaje.*

15

Contratos Incompletos

Ejercicio 15.1 *(Teorema de Coase) Un edificio tiene un gimnasio, y en el piso abajo hay un laboratorio de investigación clínica. La gente del gimnasio hace mucho ruido, lo que disminuye la productividad y la salud mental de los trabajadores del laboratorio. El ruido es tan insoportable, que el laboratorio prefiere pagar un costo de $100 y cambiar de edificio, a seguir soportando los ruidos molestos. Sin embargo, hay una solución menos costosa: el gimnasio puede pagar un costo de $50 para instalar pisos y paredes a prueba de ruidos. El gimnasio prefiere pagar este costo a tener que cambiar de ubicación: su costo para cambiar de edificio es $120.*

a) *Supón que el laboratorio tiene los derechos de propiedad de tener silencio, y supón que no hay costos de se hacer un contrato, ¿qué solución a este dilema van a elegir el laboratorio y el gimnasio?* ***Pauta:*** *El gimnasio va a incurrir en el costo de $50 para instalar material a prueba de ruidos, ya que prefiere eso a pagar el costo de $120 de cambiar de edificio.*

b) *Supón que el gimnasio tiene los derechos de propiedad de hacer ruido, y supón que no hay costos contractuales, ¿qué solución a este dilema van a elegir el laboratorio y el gimnasio?* ***Pauta:*** *El laboratorio va a pagar $50 al gimnasio para que este instale el material a prueba de ruidos. Ojo que, al final, los agentes siguen tomando acciones eficientes de Pareto, igual que en el ítem anterior: se construye el material a prueba de ruidos, ya que es la solución menos costosa. Lo único que cambian son las transferencias: en el ítem anterior, ninguna parte transfiere plata a la otra, pero acá, la parte afectada por la externalidad negativa transfiera dinero a la parte que genera la externalidad, para que al final se tomen acciones eficientes. Eso es función del teorema de Coase: cuando no existe costos de creación de contratos, no importa quién tiene los derechos de propiedad, al final las partes lograrán adoptar acciones eficientes de Pareto. Los derechos de propiedad solo afectan las transferencias monetarias entre las partes. Ojo que los derechos de propiedad deben estar bien definidos: no pueden ser ambiguos (ej., en el caso del calentamiento global, no está claro cuál es el derecho de emisión de CO2 cada país: los países todavía no han llegado a un acuerdo para definir los derechos de propiedad).*

c) *Supón que, igual que en el ítem anterior, el gimnasio sigue teniendo los derechos de propiedad de hacer ruido. Pero ahora supón que, para se hacer un contrato en que el laboratorio le paga al gimnasio para que este disminuya su ruido, el laboratorio tiene que contratar abogados y hacer un montón de trámites legales costosos; y el costo de hacer todo eso es $60. Además del costo legal, el laboratorio tendría que transferir los $50 al gimnasio, referentes al costo de se instalar la infraestructura a prueba de ruidos. ¿Qué solución a este dilema los agentes adoptarían en equilibrio? ¿Es la solución eficiente de Pareto? ¿Por qué el laboratorio no hace simplemente un contrato informal con el gimnasio?* ***Pauta:*** *Si el laboratorio* *hiciera un acuerdo legal para pagar al laboratorio para que este disminuyera el ruido, este terminaría teniendo un costo total de* $60+$50 = $110, *lo que es superior al costo de $100 de simplemente cambiar de edificio, por lo que la solución final sería que el laboratorio saliera del edificio. La asignación final no es eficiente de Pareto, ya que, si el gimnasio instalara la infraestructura a prueba de ruido y el laboratorio le pagara al gimnasio $50 de manera informal (sin la asistencia de abogados), el costo total para se arreglar el problema sería solo $50, mucho menos que los $100 que el laboratorio termina pagando en equilibrio. En este caso, si uno hace un acuerdo informal, siempre hay el riesgo que la otra parte huya con la plata. Por eso, tener instituciones legales que funcionan bien y con celeridad, ayudan a las partes llegaren a una asignación eficiente.*

d) *Una posible solución al problema del ítem anterior sería que el laboratorio comprara el gimnasio y instalara la infraestructura a prueba de ruidos. ¿Pero cuáles serían posibles desventajas de se adoptar esta solución?* ***Pauta:*** *Lo problema de esta solución es que:*

   1) *Al comprar el gimnasio, el laboratorio probablemente va a tener que incurrir en costos legales de todas formas, tal cuál los costos contractuales de $60 de obligar que el gimnasio gaste la plata transferida de forma correcta.*
   2) *El laboratorio probablemente no sabe cómo administrar un gimnasio. Por eso, para minimizar los costos de gestión, mantendrá el personal del gimnasio. Pero la parte ejecutiva del gimnasio perderá su poder de negociación, ya que, ya no son más dueñas del capital del gimnasio. Así, en la fecha* $t = 0$, *tienen menos incentivos en esforzarse para adquirir capital humano para tornarse más productivas (o sea, anteviendo el problema de "hold up", la parte ejecutiva termina teniendo menos incentivos en mejorar su productividad).*
   3) *Comprar un gimnasio es caro y el laboratorio puede tener restricciones de crédito.*

Ejercicio 15.2 *Considere una interacción estratégica entre 3 agentes: Una diseñadora de moda, un fabricante de telas y un gerente de tienda. La opción externa de cada agente es $0.*

Para producir ropas, la diseñadora debe hacer una inversión de $120 en la fecha $t = 0$ *en la creación de diseños. El gerente de la tienda no necesita hacer ninguna inversión para cooperar en la creación de valor y su trabajo es 100% dispensable; sin embargo, el gerente es el dueño de la tienda y, sin esta, no hay creación de valor. El fabricante de telas tampoco necesita hacer inversión en la fecha* $t = 0$, *pero su trabajo en la fecha* $t = 1$ *es indispensable para la creación de valor.*

Si la diseñadora hace inversión de $120 en la fecha $t = 0$ *y todos los agentes deciden cooperar para crear valor en la fecha* $t = 1$, *generarán ingresos totales de $270. Sin la inversión de la diseñadora, los agentes no logran crear valor en la fecha* $t = 1$. *Cómo los ingresos de $270 son superiores a los costos de inversión de $120, lo eficiente sería que los agentes llegaran a un acuerdo para que cooperaran en la creación de valor.*

a) *(10 puntos) En un escenario de contratos completos, explique un ejemplo de un contrato que las partes podrían firmar en la fecha* $t = 0$ *que garantizaría que al final ellos tomaran las acciones eficientes (es decir, las acciones que maximizaran la creación de valor).* ***Pauta:*** *El gerente puede hacer un contrato que prometer un pago de $140 a la diseñadora y $20 al fabricante en la fecha* $t = 1$ *y quedarse con el resto de los ingresos* $270 - 140 - 20 = 10$ *ssi la diseñadora hace inversión en la fecha* $t = 0$, *de lo contrario, no les paga nada.*

b) *(10 puntos) En la práctica, podría ser difícil para el gerente hacer un contrato vinculante basado en la inversión de la diseñadora, ya que puede ser complicado demostrar ante un juez* *que la diseñadora realmente invirtió en el diseño, aunque sea evidente en el producto final. En este caso, las otras partes no pueden hacer, en la fecha $t = 0$, una promesa vinculante de transferencias a la diseñadora en la fecha siguiente contingente al nivel de inversión que esta elige en la fecha $t = 0$. Por eso las partes renegocian los términos del contrato en la fecha $t = 1$. En una situación así, es natural suponer que, en la fecha $t = 1$ las partes van a negociar de tal forma que cada uno termina con $1/3$ de los ingresos, es decir, cada uno recibe un monto de $270/3 = 90$. En este caso, ¿tendría la diseñadora incentivos en hacer inversión en la fecha $t = 0$? Justifique su respuesta.* ***Pauta:*** *No, ya que, en este caso la diseñadora terminaría con un payoff negativo de $90 - 120 = -30$, por lo que esta preferiría no hacer inversión en la fecha $t = 0$ y simplemente obtener su opción externa de \$0.*

c) *(10 puntos) Siguiendo en el escenario de contratos incompletos del ítem anterior, supón que la diseñadora puede comprar la tienda del gerente a un precio \$P en la fecha $t = 0$. En este caso, en la fecha $t = 1$ la diseñadora solo necesita negociar con la fabricante de telas, así que, la diseñadora y la fabricante reciben, cada una, la mitad de los \$270 generados en la fecha $t = 1$ si es que ambos cooperan y la diseñadora efectivamente hizo inversión en la fecha $t = 0$. Encuentre el máximo \$P que la diseñadora estaría dispuesta a pagar por la tienda del gerente. Muestre su trabajo.* ***Pauta:*** *Si la diseñadora compra la tienda y después, en la fecha $t = 1$, coopera con el fabricante de telas, la diseñadora termina con un payoff neto de $270/2 - 120 - P = 15 - P$. Para que este payoff sea mayor o igual a la opción externa de la fabricante, debemos tener $15 - P \geq 0$, lo que ocurre ssi $P \leq 15$. Por lo tanto, el monto máximo que la diseñadora estaría dispuesta a comprar sería \$15.*

Ejercicio 15.3 *("Who gets what, and why?")Para entender bien la lógica por detrás de los modelos de contratos incompletos, uno debe conocer los conceptos básicos de teoría de juegos cooperativos. Diferente de teoría de juegos no cooperativos (lo que hemos visto a lo largo del curso) en teoría de juegos cooperativos nos abstraemos de los microfundamentos que llevan las partes a cooperar (o no) en equilibrio. Simplemente suponemos que, tras decidir formar una* ***coalición****,[1] los agentes de la coalición tomarán acciones que maximizan las ganancias totales (el "surplus"), sin explicar exactamente los mecanismos que utilizan para llegar a este acuerdo de cooperación.[2] Ojo que eso ni siempre es verdad en teoría de juegos no cooperativos, tal como muestra el ejemplo del dilema de los prisioneros: aunque el eficiente en el dilema de los prisioneros fuera que ambas partes cooperaran, en el equilibrio de la versión estática del modelo, ellos eligen no cooperar. Pero en teoría de juegos cooperativos, se supone que los miembros de una coalición sí logran alcanzar una asignación eficiente de alguna manera. Por ejemplo, pueden ir a una notaria y firman un contrato sin costo, que les obliga a tomar las acciones eficientes de Pareto.*

La teoría de juegos cooperativos también busca entender qué coaliciones se van a formar en equilibrio, es decir, qué conjunto de agentes se van a unir para crear valor. Por ejemplo,

[1]Una **coalición** es simplemente un subconjunto de los agentes del juego que deciden unirse para crear valor. Ejemplo: una empresa minorista puede juntarse con una empresa mayorista para crear valor.

[2]Esto se contrasta, por ejemplo, con los modelos de negociación de Ariel Rubinstein (no vistos en el curso), es decir, juegos secuenciales en que, a cada periodo, una persona hace la oferta y la otra parte puede aceptar o rechazar haciendo una contra-oferta, y los agentes tienen un factor de descuento, así que prefieren llegar a un acuerdo lo más rápido posible. Otro ejemplo: vimos que, en juegos repetidos las partes suelen tener incentivos en cooperar si su factor de descuento es suficientemente alto. Por su vez, en la teoría de juegos cooperativos, ignoramos la complejidad por detrás de los mecanismos específicos que llevan las partes a cooperar y simplemente suponemos que los agentes llegan a un acuerdo (suponiendo, claro, que las partes tienen la capacidad de crear valor si cooperan, de lo contrario, no formarían la coalición). La división de las ganancias (del *surplus*) va a depender de cuán esencial un agente es para la creación de valor en la coalición y de la facilidad que él tiene en encontrar mejores opciones, y además de algunos parámetros que reflejan su poder de negociación (ej., aspectos culturales que determinan si uno es un buen negociador o no). La teoría de juegos cooperativos es, por lo tanto, una teoría más basada en heurística, por así decir, que sirve para simplificar el análisis teórico.

en un modelo con las empresas A, B y C, las empresas A y B pueden formar un equipo (una coalición), o las empresas C y B, o todas las empresas juntas, etc. Qué agentes van a unirse para crear valor es algo endógeno. Pero acá trataremos de un modelo con solo 2 empresas, así que, será trivial identificar los agentes que se juntarán para crear valor.

Conforme mencionado anteriormente, si un conjunto de agentes decide se juntar para crear valor (es decir, si deciden formar una ***coalición****), ellos tomarán la acción que les genera el máximo valor añadido. Dado que un grupo de agentes forma una coalición, ¿cómo harán la división del valor que generan juntos? Eso va a depender básicamente de 3 factores:*

1. ***Cuán importante uno es para la creación de valor:*** *si soy esencial a la generación de valor (es decir, si sin mi participación, el valor creado es muy bajo), es natural que yo me quede con una fracción más grande grande del valor generado.*

2. ***La capacidad que uno tiene de encontrar opciones mejores:*** *si, puedo crear valor fácilmente en otro lugar, debo tener un mayor poder de negociación y, por lo tanto, al final, debo ser capaz de extraer una mayor parte del valor generado para mí. Si estamos hablando de un juego con solo 2 jugadores, mi capacidad de encontrar opciones alternativas mejores es simplemente mi opción externa (outside option). Pero si estamos hablando de juegos con múltiples agentes, eso consiste en mi capacidad de formar* ***coaliciones*** *mejores con otros agentes del juego, pero no trataremos de eso en esta pregunta, ya que nuestro modelo tendrá solamente 2 jugadores.*

3. ***Expertise en negociación:*** *Hay gente que tiene mayores habilidades en negociar (ej.: agente de ventas). Pero acá, vamos a suponer que todos los agentes tienen la misma capacidad de negociación, así que, vamos a ignorar este factor.*

Teniendo esto en mente, suponemos que los agentes negocian a la ***Nash-Bargaining****. Según este principio, cada agente gana la mitad del valor que ayudan a crear trabajando juntas, más el valor de su opción externa.*

Entonces, considerando un modelo con 2 empresas, la empresa A y la empresa B, sea $V(A)$ es el (máximo) valor que la empresa A puede crear sola (es decir, $V(A)$ es su opción externa), e sea $V(B)$ es el valor que B puede crear sola. Sea $V(A,B)$ el ***máximo*** *valor que ambas pueden crear si trabajan juntas (es decir, si forman una coalición), entonces, según* ***Nash Bargaining*** *tenemos que, si $V(A,B) > V(A) + V(B)$ (es decir, si la "unión hace la fuerza"), entonces los agentes tendrán incentivos en formar la coalición y la división de ganancias de equilibrio estará dada por:*

1. *El agente A obtiene $\frac{1}{2}[V(A,B) - V(B) - V(A)] + V(A)$, es decir, el agente A gana su opción externa más la mitad del valor generado por la cooperación.*

2. *El agente B obtiene $\frac{1}{2}[V(A,B) - V(B) - V(A)] + V(B)$, es decir, el agente B gana su opción externa más la mitad del valor generado por la cooperación.*

Ahora determinemos los primitivos en el modelo que generan la expresión $V(A,B)$. Supón que cada empresa A tiene K_A unidades de hardware, mientras que la empresa B tiene K_B unidades de software. K_A y K_B son exógenos y suponemos que

$$K_A + K_B > 8. \tag{15.1}$$

El modelo tiene 2 periodos $t = 0$ y $t = 1$. En la fecha $t = 0$ el ejecutivo de la empresa A puede dedicar x_A de inversión en capacitación. De manera similar, en la fecha $t = 0$ la empresa B puede dedicar x_B de inversión en capacitación. La función costo para esta inversión está *dada por $C(x_i) = x_i^2$ para cada empresa $i \in \{A, B\}$. Si ambas empresas cooperan para crear valor, generarán las siguientes ganancias cómo función de (x_A, x_B, K_A, K_B):*

$$(K_A + K_B)(x_A + x_B) - x_A^2 - x_B^2. \tag{15.2}$$

Supón que la opción externa de cada empresa consiste en vender la cantidad de capital que tienen, y que cada unidad de capital tiene un valor de mercado de \$1, así que

$$V(A) = K_A,$$

y

$$V(B) = K_B.$$

a) *Encuentre $V(A, B)$ cómo función de K_A y K_B suponiendo que estamos en una situación de mercados completos (es decir, suponiendo que los agentes pueden ir a una notaria y firmar un contrato que les obliga a cada una elegir los niveles de esfuerzo x_A y x_B en la fecha $t = 0$ que maximizan la suma de las ganancias de las empresas en la fecha $t = 1$ dado por la expresión (15.2)), y muestre que $V(A, B) > V(A) + V(B) = K_A + K_B$.* ***Pauta:*** *Optimizando la expresión (15.2), obtenemos*

$$\boxed{x_A^* = x_B^* = \frac{K_A + K_B}{2}}.$$

Reemplazando los valores óptimos en (15.2), obtenemos

$$V(A, B) = \frac{(K_A + K_B)^2}{2},$$

lo que es mayor o igual a $V(A) + V(B) = K_A + K_B$ ssi $K_A + K_B > 2$, lo que es verdad debido al supuesto hecho en la ecuación (15.1).

b) *Encuentre la división de ganancias de equilibrio cómo función de K_A y K_B aplicando Nash-Bargaining.* ***Pauta:*** *Sustituyendo los niveles de inversión de equilibrio en la división de surplus de cada empresa, se concluye que, en el escenario de contratos completos la empresa A termina con*

$$\pi_A^* = \frac{1}{2}\left[\underbrace{\frac{(K_A + K_B)}{2}}_{V(A,B)} - \underbrace{K_A}_{V(A)} - \underbrace{K_B}_{V(B)}\right] + K_A = \frac{1}{4}(K_A + K_B)^2 - \frac{1}{2}(K_A + K_B) + K_A,$$

De forma semejante:

$$\pi_B^* = \frac{1}{4}(K_A + K_B)^2 - \frac{1}{2}(K_A + K_B) + K_B.$$

c) *¿Cómo la división de ganancias es afectada cuando K_A aumenta? Interprete esta estática comparativa intuitivamente.* ***Pauta:*** *Ojo que*

$$\frac{\partial \pi_A^*}{\partial K_A} = \frac{1}{2}(K_A + K_B) + \frac{1}{2} > \frac{1}{2}(K_A + K_B) - \frac{1}{2} = \frac{\partial \pi_B^*}{\partial K_A} > \frac{1}{2}8 - \frac{1}{2} > 0,$$

o sea, un aumento en K_A aumenta las ganancias de ambas empresas por qué un aumento en K_A significa que ambas empresas pueden obtener un mayor valor añadido si cooperan. Pero ojo que acá el efecto es más fuerte para la empresa A, ya que, además del incremento en K_A aumentar el valor añadido por la cooperación, un aumento en K_A también le da una ventaja estratégica a la empresa K_A, ya que eso aumenta su opción externa, y, por lo tanto, su poder de negociación.

d) *Ahora supón que estamos en una situación de contratos incompletos. Es decir, el la fecha $t = 0$ cada empresa no puede hacer un compromiso de elegir un determinado x_i en la fecha $t = 1$ (ej., no es posible probar a un juez que uno hizo una inversión de x_i aunque la otra parte observe x_i). En este caso, los agentes van a hacer negociación sobre la división del valor generado en la fecha $t = 1$, después que cada agente ya haya hecho la inversión infundida x_i en la fecha anterior. En términos prácticos eso implica que la opción externa del agente $i \in \{A, B\}$ en la fecha $t = 1$ no es más K_i, sino que $V(i|x_i) = K_i - x_i^2$. De forma semejante, el valor de la coalición condicional a x_A y x_B estará dada por $V(A, B|x_A, x_B) = (K_A+K_B)(x_A+x_B)-x_A^2-x_B^2$.*[3] *Anteviendo eso (es decir, aplicando inducción hacia atrás), en la fecha $t = 0$ la empresa A va a elegir el x_A que maximiza:*

$$\max_{x_A} \underbrace{\frac{1}{2}\left[\underbrace{(K_A + K_B)(x_A + x_B) - x_A^2 - x_B^2}_{V(A,B|x_A,x_B)} - \underbrace{(K_A - x_A^2)}_{V(A|x_A)} - \underbrace{(K_B - x_B^2)}_{V(B|x_B)}\right]}_{\textit{valor generado}} + \underbrace{(K_A - x_A^2)}_{V(A|x_A)},$$

mientras que la empresa B va a elegir el x_B que maximiza

$$\max_{x_B} \frac{1}{2}\left[\underbrace{(K_A + K_B)(x_A + x_B) - x_A^2 - x_B^2}_{V(A,B|x_A,x_B)} - \underbrace{(K_A - x_A^2)}_{V(A|x_A)} - \underbrace{(K_B - x_B^2)}_{V(B|x_B)}\right] + \underbrace{(K_B - x_B^2)}_{V(B|x_B)}.$$

Encuentre los niveles de x_A y x_B que estas empresas elegirían en este escenario de contratos incompletos suponiendo que cada empresa se queda con su capital, y compare con los niveles óptimos obtenidos en el ítem anterior con contratos completos. Presente una intuición para la diferencia encontrada. ***Pauta:*** *Tomando la CPO, se puede ver que en este escenario de contratos incompletos, las empresas elegirían* $\boxed{x_A^{**} = x_B^{**} = \frac{K_A + K_B}{4}}$ *en la fecha $t = 0$, lo que es menor a lo que habíamos obtenido anteriormente:*

$$\boxed{x_A^* = x_B^* = \frac{K_A + K_B}{2}}.$$

Intuitivamente, eso ocurre por qué, con contratos incompletos, al hacer inversión alta en x_A, la empresa A se queda rehén de la empresa B: su opción externa es muy baja si x_A aumenta, ya que no puede revender el costo infundido de hacer inversión en x_A. La misma lógica se aplica a la empresa B. Así, para evitar que una empresa se quede rehén de la otra, cada empresa tiene incentivos en disminuir su inversión en x_i, lo que hace que los agentes terminen con una asignación ineficiente.

Vimos que en el escenario de contratos completos la empresa A termina con

$$\pi_A^* = \frac{1}{4}(K_A + K_B)^2 - \frac{1}{2}(K_A + K_B) + K_A,$$

lo que es superior a las ganancias que obtiene en el escenario de contratos incompletos cuando las partes siguen con sus dotaciones iniciales de capital:

$$\pi_A^{**} = \frac{3}{16}(K_A + K_B)^2 - \frac{1}{2}(K_A + K_B) + K_A.$$

[3]Para ser más preciso, $V(A, B|x_A, x_B) = \max\{(K_A + K_B)(x_A + x_B) - x_A^2 - x_B^2, K_A + K_B - x_A^2 - x_B^2\}$, ya que las empresas siempre tienen la opción de terminar la asociación y liquidar sus respectivos capitales. Pero ignoraremos esta restricción, ya que la condición $K_A + K_B > 8$ garantiza que la solución será interior.

De forma semejante:

$$\pi_B^* = \frac{1}{4}(K_A+K_B)^2 - \frac{1}{2}(K_A+K_B) + K_B > \frac{3}{16}(K_A+K_B)^2 - \frac{1}{2}(K_A+K_B) + K_B = \pi_B^{**}.$$

e) Ahora supón que en la fecha $t=-1$ la empresa B vende su capital K_B a la empresa A por un cierto valor P. Calcule cuánto sería $V(A,B|x_A,x_B)$, $V(A,x_A)$ y $V(B,x_B)$ en este caso. ***Obs.:*** *Cómo P representa un costo infundido, podemos ignorarlo en el cálculo de $V(A,B|x_A,x_B)$, $V(A,x_A)$ y $V(B,x_B)$.* ***Pauta:***

$$\begin{aligned}
&V(A|x_A) = (K_A+K_B)x_A - x_A^2\\
&V(B|x_B) = -x_B^2\\
&V(A,B|x_A,x_B) = (K_A+K_B)(x_A+x_B) - x_A^2 - x_B^2.
\end{aligned}$$

f) Encuentre los niveles de x_A y x_B de equilibrio suponiendo que la empresa A obtuvo el capital de la empresa B en la fecha $t=-1$. ***Pauta:*** *En este caso, la empresa A va a maximizar*

$$\max_{x_A} \underbrace{\frac{1}{2}\left[\underbrace{(K_A+K_B)(x_A+x_B)-x_A^2-x_B^2}_{V(A,B|x_A,x_B)} - \underbrace{\left((K_A+K_B)x_A - x_A^2\right)}_{V(A|x_A)} - \underbrace{(-x_B^2)}_{V(B|x_B)}\right]}_{\text{valor generado}} + \underbrace{\left((K_A+K_B)x_A - x_A^2\right)}_{V(A|x_A)}.$$

Tomando la condición de primer orden, obtenemos $x_A^{***} = \frac{1}{2}(K_A+K_B)$, es decir, al transferir todos los activos a a la empresa A, la empresa A recupera su poder de negociación ya que su opción externa mejora, lo que le permite a la empresa A elegir un nivel de capacitación más alto (en este caso, el nivel de capacitación Pareto eficiente).

De forma similar, la empresa B va a maximizar:

$$\max_{x_A} \underbrace{\frac{1}{2}\left[\underbrace{(K_A+K_B)(x_A+x_B)-x_A^2-x_B^2}_{V(A,B|x_A,x_B)} - \underbrace{\left((K_A+K_B)x_A - x_A^2\right)}_{V(A|x_A)} - \underbrace{(-x_B^2)}_{V(B|x_B)}\right]}_{\text{valor generado}} + \underbrace{-x_B^2}_{V(B|x_B)}.$$

Tomando la CPO, obtenemos

$$\boxed{x_B^{***} = \frac{1}{4}(K_A+K_B)}.$$

g) Del punto de vista de la empresa B, ¿cuál serían las ventajas y desventajas de vender sus activos a la empresa A? ***Pauta:*** *Ventajas:*

- *Al vender su capital a la empresa A, la empresa A no enfrenta más el problema de hold up, por lo que hace una inversión más grande en x_A aumentando el valor añadido de la coalición formada entre las empresas, lo que permite a ambas empresas obtener ganancias más grandes.*

Desventajas:

- *Al vender su capital a la empresa A, la empresa B pierde su poder de negociación, ya que su opción externa disminuye. Eso lleva que la empresa B termine con un porcentaje menor de las ganancias totales del mercado.*
- *En este ejemplo en que K_A y K_B son complementos perfectos en la producción, esta disminución en la opción externa de la empresa B no afecta su nivel de esfuerzo x_B. Pero en otros contextos en que K_A y K_B no son complementos perfectos (es decir, si la empresa B logra producir solo con capital K_B sin necesitar K_A) entonces esta venta sí podría dar incentivos a la empresa B disminuir x_B para evitar el problema de hold up de tal manera a disminuir el valor total creado por la coalición.*

Ejercicio 15.4 ***(Contratos Incompletos y la Estrategia de Amazon en Nueva York)*** *En 2018 Amazon planeó establecer una nueva sede en Nueva York, para lo cual el gobierno del estado propuso un subsidio de $3 mil millones para atraer a la empresa, con el objetivo de generar empleo y crecimiento económico. Sin embargo, en parte debido a las protestas y la oposición pública, en 2019 Amazon decidió no proceder con la construcción de la sede. Las protestas argumentaban que la nueva sede de Amazon aceleraría el proceso de gentrificación en la región y,*[4] *además, muchos consideraron injusto que, en medio de tanta desigualdad, el gobierno ofreciera un subsidio tan generoso a una de las empresas más grandes de EE.UU.*

Discuta la lógica detrás de la decisión de Amazon de no construir la sede en Nueva York. ¿Cómo se relaciona esta decisión con la teoría de contratos incompletos y el deseo de evitar situaciones de hold up? ***Pauta:*** *Dado que el costo de establecer la nueva sede de Amazon implica una gran inversión infundida, si la compañía decide proceder, podría encontrarse en una situación vulnerable frente a los manifestantes. De hecho, estos podrían comenzar a exigir que Amazon les compensara por los daños y las desigualdades que genera en la ciudad. Aunque los manifestantes no sean entidades corporativas propiamente dichas, tienen la capacidad de influir negativamente en Amazon a través de protestas, boicots, litigios y la promoción de legislación adversa mediante cabildeo. Las concesiones que Amazon podría verse obligada a hacer incluyen la creación de más empleos de los inicialmente previstos o la implementación de iniciativas filantrópicas y de conservación ambiental, en un esfuerzo por ejercer una ciudadanía corporativa responsable. Por lo tanto, para evitar quedar atrapada por las demandas de los manifestantes (es decir, para eludir el problema conocido como "hold up"), Amazon decidió que lo más prudente sería no establecer la sede en Nueva York.*

[4] La gentrificación ocurre cuando un proceso de renovación y reconstrucción urbana se acompaña del desplazamiento de los habitantes más pobres por un flujo de personas de clase media o alta en las áreas de intervención.

Bibliography

[1] Eduardo M. Azevedo and Eric Budish. Strategy-proofness in the large. The Review of Economic Studies, 86:81–116, 2019.

[2] John B. Van Huyck, Raymond C. Battalio, and Richard O. Beil. Tacit coordination games, strategic uncertainty, and coordination failure. The American Economic Review, 80(1):234–248, 1990.

[3] Anna Kerkhof. Advertising and content differentiation: Evidence from youtube. 2020.

[4] Gustavo Saraiva. Incentives to fake reviews in online platforms. 2020.

[5] Sherry He, Brett Hollenbeck, and Davide Proserpio. The market for fake reviews. Marketing Science, 41(5):896–921, 2022.