



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INDUSTRIAL Y SISTEMAS

ICS2123 - Modelos Estocásticos
1er semestre del 2019

Control 2

Problema 1

Suponga que el rendimiento de un equipo de fútbol en la copa Chile depende del resultado obtenido en el partido anterior de la siguiente forma: Si el equipo perdió la fecha anterior, la probabilidad de volver a perder es 0,5, y la de ganar es 0,1. Si el equipo empató la fecha pasada, tiene una probabilidad de 0,5 de volver a obtener ese resultado y 0,25 de obtener 3 puntos en la siguiente fecha. Finalmente, si el equipo ganó, tiene una probabilidad de 0,3 en seguir la racha ganadora y una probabilidad de 0,4 de perder el partido. Por otra parte, una importante página de apuestas le ofrece pagarle a usted 18 veces lo que apueste si el equipo en cuestión gana la tercera y cuarta fecha. No obstante, si este resultado no se cumple, usted perderá la apuesta.

- (a) Explique porqué se puede modelar el problema con una CMTD. Mencione los supuestos que considere necesarios.
(b) Modele el rendimiento del equipo con una CMTD.
(c) Si hasta ahora usted solo conoce el resultado de la primera fecha, en donde el equipo ganó. ¿Es conveniente apostarle al equipo?

Solución

(a)

1. Estacionariedad: Probabilidades no dependen de la fecha. (0.05 p)
2. Propiedad Markoviana: Probabilidad de resultado del próximo partido solo depende de la fecha anterior. (0.05 p)

(b)

$$P = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,4 & 0,1 \\ 0,25 & 0,5 & 0,25 \\ 0,4 & 0,3 & 0,3 \end{bmatrix}$$

La matriz podría tener otro orden. Para la solución se tomó como $f^{(n)} = [P(\text{perder}), P(\text{empatar}), P(\text{ganar})]^T$ (3 p)

(c)

Por enunciado, $f^{(1)} = [0, 0, 1]^T$ ya que la primera fecha ganó. Además, sabemos que por fórmula: $f^{(3)} = (P^{3-1})^T * f^{(1)}$. Por lo tanto, elevamos la matriz P a 2 y la transponemos. Finalmente:

$$(P^2)^T = \begin{bmatrix} 0,39 & 0,35 & 0,395 \\ 0,43 & 0,425 & 0,4 \\ 0,18 & 0,225 & 0,205 \end{bmatrix}$$

Luego, la probabilidad de ganar será la tercera componente del vector resultante de la multiplicación de $f^{(3)} = (P^{3-1})^T * f^{(1)}$, será de 0.205.

Luego,

$$P(\text{ganar } 3^\circ \wedge \text{ganar } 4^\circ) = P(\text{ganar } 3^\circ) * P(\text{ganar } 4^\circ / \text{ganar } 3^\circ)$$

$$P(\text{ganar } 3^\circ \wedge \text{ganar } 4^\circ) = 0,205 * (0,205 * 0,3)$$

Finalmente:

$$E[\text{ganancia}] = (\text{apuesta} * \text{multiplicador} * P(\text{ganar})) - (\text{apuesta} * P(\text{perder}))$$

$$E[\text{ganancia}] = (\text{apuesta} * 18 * 0,0126) - (\text{apuesta} * 0,9874)$$

$$E[\text{ganancia}] = \text{apuesta} * -0,76$$

Como la esperanza es negativa, no conviene apostar a esta apuesta. (3 p)