Ecuaciones Diferenciales * MAT1640

PAUTA INTERROGACIÓN 3

Problema 1
Resuelva el problema de valor inicial

$$y'' - y = e^x f(x)\,, \quad y(0) = 0\,, \quad y'(0) = 1$$

donde $f(x)$ es la función definida en todo $\mathbb{R}$ por $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 2 \leq x \\ 0 & \text{si } x < 2 \end{cases}$

Solución.

Aplicando TL a la ecuación se obtiene que

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) - Y(s) = L(e^x f(x)) \Rightarrow (s^2 - 1)Y(s) - sy(0) - y'(0) = F(s-1)$$

donde $F(s) = L[f](s) = \frac{1}{s}\, e^{-2s}$.
Aplicando las condiciones iniciales se obtiene la ecuación equivalente

$$Y(s) = \frac{1}{s^2-1}(1 + F(s-1)) = \frac{1}{s^2-1} + \frac{1}{(s-1)^2(s+1)}\, e^{-2(s-1)}\,.$$

Ahora calculamos las trasformadas inversas. De la descomposición $\frac{1}{s^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1}\right)$ se obtiene que

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s^2-1}\right](x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \operatorname{senh}(x) \tag{1}$$

El otro factor es igual a

$$\left[\frac{1}{(s-1)^2}\right] \cdot e^4 \left[\frac{1}{(s+1)}\, e^{-2(s+1)}\right] = e^4\, L[h_1 * h_2](s)$$

donde $h_1(x) = e^x x\,, \quad h_2(x) = e^{-x} u_2(x)$.

Ahora se calcula la convolución. Si $x < 2$ la función $u_2(x) = 0$, luego $(h_1 * h_2)(x) = 0$ para $x < 2$. Para $x \geq 2$ se tiene que

$$\begin{aligned} (h_1 * h_2)(x) &= \int_0^x e^{x-t}(x-t)e^{-t}u_2(t)\,dt = e^x \int_2^x e^{-2t}(x-t)\,dt \\ &= \frac{1}{2}(x-2)e^{x-4} + \frac{1}{4}e^{-x} - \frac{1}{4}e^{x-4}\,. \end{aligned}$$

Resumiendo la solución $y(x)$ se define a pedazos

$$\begin{aligned} y(x) &= \operatorname{senh}(x)\,, \text{ si } x < 2 \\ y(x) &= \operatorname{senh}(x) + \left(\frac{x}{2} - \frac{5}{4}\right)e^x + \frac{1}{4}e^{-x+4} \text{ si } x \geq 2 \end{aligned}$$

Problema 2
Calcule la solución del sistema

$$\begin{aligned} y_1'' - 2\,y_1' - 2\,y_2 &= 0 \\ y_1' - 2y_1 + y_2' &= -2e^{-x} \end{aligned}$$

con condición inicial $y_1(0) = 3$, $y_1'(0) = 2$, $y_2(0) = 0$. Se sugiere utilizar transformada de Laplace.

Solución. La idea es aplicar TL a cada ecuación.

$$\begin{aligned} s^2 Y_1[s] - y_1(0)s - y_1'(0) - 2sY_1[s] + 2y_1(0)) - 2Y_2[s] &= 0 \\ sY_1[s] - y_1(0) - 2Y_1[s] + sY_2[s] - y_2(0) &= -L[2e^{-x}](s) = -\frac{2}{s+1} \end{aligned}$$

Agregando las condiciones iniciales se obtiene que

$$\begin{aligned} (s^2 - 2s)Y_1[s] - 2Y_2[s] &= 3s - 4 \\ (s-2)Y_1[s] + sY_2[s] &= \frac{3s+1}{s+1} \end{aligned}$$

Solucionamos el sistema algebraico,

$$\begin{aligned} Y_1[s] &= \frac{3s^3 - s^2 + 2s + 2}{(s^2+2)(s-2)(s+1)} \\ Y_2[s] &= \frac{2s+4}{(s+1)(s^2+2)} = \frac{2}{s^2+2} + \frac{2}{(s+1)(s^2+2)} \end{aligned}$$

Para y_2 se obtiene directamente que

$$y_2(x) = \frac{2}{\sqrt{2}} L^{-1}\left[\frac{\sqrt{2}}{s^2+2}\right](x) + \frac{2}{\sqrt{2}} L^{-1}\left[\frac{\sqrt{2}}{(s^2+2)} \cdot \frac{1}{s+1}\right](x)$$

Luego, $y_2(x) = \sqrt{2}\,\mathrm{sen}(\sqrt{2}x) + \sqrt{2}\,(h * g)(x)$ donde $h(x) = e^{-x}$ y $g(x) = \mathrm{sen}(\sqrt{2}x)$.

Calculando la convolución se obtiene que

$$(h * g)(x) = e^{-x} \int_0^x e^t \mathrm{sen}(\sqrt{2}t)\, dt = \frac{1}{3}\mathrm{sen}(\sqrt{2}x) - \frac{\sqrt{2}}{3}\cos(\sqrt{2}x) + \frac{\sqrt{2}}{3}e^{-x}$$

y por lo tanto,

$$y_2(x) = \frac{4}{3}\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(\sqrt{2}x) - \frac{2}{3}\cos(\sqrt{2}x) + \frac{2}{3}e^{-x}$$

Basta con calcular una de ellas por Laplace. Aqui se muestra la forma de calcular y_2.

Problema 3
Considere el sistema

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + y_2 \\ y_2' &= -2y_1 + y_2 \\ y_3' &= 2y_3 \end{aligned}$$

a) Describa el sistema en forma matricial $\frac{d\hat{y}}{dx} = A\hat{y}$ y calcule una matriz fundamental.

b) Calcule la solución con condición inicial $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 2$, $y_3(0) = 3$.

Solución.

a) El sistema se describe matricialmente como

$$\frac{d\hat{y}}{dx} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} , \quad \hat{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} .$$

Mirando la tercera ecuación se observa que ella es independiente de las otras dos.
Su solución y_3 se puede calcular directamente:

$$y_3(x) = e^{2x}$$

Ahora sólo resta calcular la solución del sistema de 2×2

$$\frac{d\hat{y}}{dx} = A\hat{y} , \quad \hat{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

donde A es matriz con entradas reales $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$. Ahora calculamos sus valores y vectores propios asociados.
Polinomio característico es $q(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 3$. Sus raíces son complejas, a saber, $\lambda = 1 \pm i\sqrt{2}$.
Vector propio asociado $v = \begin{bmatrix} 1 \\ i\sqrt{2} \end{bmatrix}$.

Por lo tanto $\hat{\omega}(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ i\sqrt{2} \end{bmatrix} e^{1+i\sqrt{2}}$ es una solución. En particular, la parte real y la parte imaginaria del vector $\hat{\omega}(x)$ son las soluciones (reales) l.i. que buscamos. En resumen, haciendo el cálculo:

$$\hat{\phi}_1(x) = e^x \begin{bmatrix} \cos(\sqrt{2}\,x) \\ -\sqrt{2}\,\operatorname{sen}(\sqrt{2}\,x) \end{bmatrix} , \quad \hat{\phi}_2(x) = e^x \begin{bmatrix} \operatorname{sen}(\sqrt{2}\,x) \\ \sqrt{2}\cos(\sqrt{2}\,x) \end{bmatrix} .$$

Por lo tanto, una matrix fundamental es la siguiente matriz de 3×3 :

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} \hat{\phi}_1(x) & \hat{\phi}_2(x) & \hat{0} \\ 0 & 0 & e^x \end{bmatrix} .$$

b) Ahora calculemos la solución que satisface las condiciones iniciales en $x = 0$, esto es,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 3 \end{bmatrix}$$

En resumen la solución es

$$\hat{y}(x) = e^x \begin{bmatrix} \cos(\sqrt{2}\,x) \\ -\sqrt{2}\,\operatorname{sen}(\sqrt{2}\,x) \\ 0 \end{bmatrix} + \sqrt{2}e^x \begin{bmatrix} \operatorname{sen}(\sqrt{2}\,x) \\ \sqrt{2}\cos(\sqrt{2}\,x) \\ 0 \end{bmatrix} + 3e^{2x} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Problema 4
Considere la matriz N de 2×2 dada por

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Calcule e^{Nx}.

(b) Calcule la solución del problema

$$\frac{d\hat{y}}{dx} = N\hat{y} + \hat{F}(x)\,, \quad \hat{y}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{con } \hat{F}(x) = \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix}$$

Solución.

a) Calculamos los vectores propios de N.

El polinomio característico es $q(\lambda) = (\lambda - 2)^2$, luego $\lambda = 2$ es un valor propio de multiplicidad algebraica 2.

Hay sólo un vector propio asociado a $\lambda = 2$ y es cualquier ponderación del vector $\hat{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Esto genera una solución $\hat{\phi}_1 = e^{2x}\hat{v}_1$.

Utilizando la técnica del valor propio generalizado buscamos un vector no nulo solución de la ecuación $(A - 2I)^2\hat{x} = \hat{0}$.

Haciendo el cálculo se obtiene que $(A - 2I)^2 = 0_M$ matriz nula. En consecuencia cualquier vector no nulo sirve, por ejemplo elijamos $\hat{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. De esta manera se construye la segunda solución linealmente independiente: $\hat{\phi}_2 = e^{2x}(x\hat{v}_1 + \hat{v}_2)$.

Luego, una matrix fundamental es

$$\Phi(x) = e^{2x}\begin{bmatrix} \hat{v}_1 & x\hat{v}_1 + \hat{v}_2 \end{bmatrix} = e^{2x}\begin{bmatrix} 1 & x \\ 1 & 1+x \end{bmatrix}.$$

Pero sabemos que la única matriz fundamental con la condición $\Phi_1(0) = I$ es la exponencial e^{xN}. Luego

$$e^{xN} = \Phi(x)\Phi(0)^{-1} = e^{2x}\begin{bmatrix} 1 & x \\ 1 & 1+x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = e^{2x}\begin{bmatrix} 1-x & x \\ -x & 1+x \end{bmatrix}$$

b) Aplicando la fórmula de cuadratura $\hat{y}(x) = e^{Nx}\hat{y}(0) + e^{Nx}\int_0^x e^{-Nt}\hat{F}(t)\,dt$

Entonces

$$\hat{y}(x) = e^{2x}\begin{bmatrix} 1-x & x \\ -x & 1+x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + e^{Nx}\int_0^x e^{-2t}\begin{bmatrix} 1+t & -t \\ t & 1-t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix} dt$$

Luego,

$$\hat{y}(x) = e^{2x}\begin{bmatrix} x \\ 1+x \end{bmatrix} + e^{Nx}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\int_0^x te^{-2t}\,dt$$

Finalmente

$$\hat{y}(x) = e^{2x}\begin{bmatrix} x \\ 1+x \end{bmatrix} + e^{Nx}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\left(-\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + \frac{1}{4}\right) = e^{2x}\begin{bmatrix} x \\ 1+x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\left(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{2x}\right)$$

La solución es

$$\hat{y}(x) = \begin{bmatrix} e^{2x}(\frac{1}{4} + x) - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \\ \\ e^{2x}(\frac{5}{4} + x) - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$