EAF2010 - Aplicaciones Matemáticas

Examen Final

2 de diciembre de 2022

Puntaje total: 100 puntos

Pregunta 1: El metro de Doha (40 puntos)

Para una consultoría internacional a usted le estan pidiendo analizar la cantidad óptima de viajes que el metro de Doha debiese hacer durante un día en el contexto del mundial de fútbol masculino de 2022. La demanda por viajes en metro depende del horario del día. Suponga que existen solo dos horarios en el día, el horario punta y el horario valle. Denote por x_p la cantidad de viajes en horario punta y por x_v la cantidad de viajes en horario valle, todo medido en miles de viajes (es decir, si $x_p = 2$ y $x_v = 1$, por ejemplo, quiere decir que se hacen 2 mil viajes en horario punta y mil viajes en horario valle). Las demandas por viajes de metro, en miles, para los distintos períodos del día están definidas de la siguiente manera:

$$p_p = 76 - 2x_p$$

$$p_v = 30 - x_v$$

Donde p_p representa el precio de mil viajes en metro en horario punta y p_v el precio de mil viajes en horario valle. El costo de operación pago por la empresa por cada mil viajes es de \$12 (el costo es igual en ambos períodos del día). Es decir, el costo total de la empresa es dado por $12(x_p + x_v)$ y sus ingresos son iguales a $p_p x_p + p_v x_v$. Suponga que la capacidad actual (capacidad instalada) es de 12 trenes de metro, y cada tren puede hacer mil viajes en el horario punta y mil viajes en el horario valle (cada tren es usado en los dos horarios).

Asuma que la empresa elige la cantidad de viajes (en miles) que va a ofertar en cada horario del día (x_p y x_v) para maximizar sus beneficios (lucro) sujeto a las restricciones de capacidad que existen en cada uno de los períodos del día (pueden cumplirse con igualdad o no). Para simplificar, puedes suponer que se puede ofrecer cantidades no enteras de viaje (es decir, x_p y x_v pueden ser cualquier número real mayor o igual a cero que cumple con las demás restricciones del problema).

1. (10 puntos) Plantee el problema de optimización que enfrenta la empresa.

$$Beneficios = (p_p - c)x_c + (p_v - c)x_v$$

$$Beneficios = (76 - 2x_c - 12)x_c + (30 - x_v - 12)x_v$$

$$\max_{x_c, x_v} (76 - 2x_c - 12)x_c + (30 - x_v - 12)x_v$$

sujeto a:

$$x_p \geq 0$$

$$x_v \geq 0$$

$$12 - x_p \geq 0$$

$$12 - x_v \geq 0$$

2. (10 puntos) ¿Las condiciones de Kuhn-Tucker son suficientes para un máximo global del problema? Justifique.

Para que las condiciones de KT sean suficientes, debe cumplirse que el lagrangeano debe ser cóncavo. En base a estos tendremos que el punto que encontremos es un máximo global. Entonces, si el lagrangeano es:

$$\mathcal{L} = 76x_p - 2x_p^2 - 12x_p + 30x_v - x_v^2 - 12x_v - \lambda_1(x_p - 12) - \lambda_2(x_v - 12) + \lambda_3(x_p) + \lambda_4(x_v)$$

Tenemos que las restricciones (todas) son lineales, por lo tanto, para asegurar que el lagrangeano sea cóncavo, nos basta con que la función objetivo sea cóncava (cóncavo+lineal=cóncavo). Revisemos la cóncavidad de la función objetivo: Para esto, debemos comprobar que la matriz Hessiana sea semidefinida negativa:

$$Hf(x_p, x_v) = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$f_{x_p,x_p} = -4 < 0$$

$$f_{x_p,x_p} = -2 < 0$$

$$det(Hf) = 8 > 0$$

Utilizando los menores principales, tenemos que los de orden $1(f_{x_p,x_p} = -4 < 0 \ f_{x_p,x_p} = -2 < 0)$. Por otro, lado el menor principal de orden 2 ($det(Hf) = 8 > 0$) Por lo tanto, tenemos que la matriz es semidefinida negativa, por lo tanto, la función es cóncava lo que nos garantiza que el lagrangeano también lo es.

3. (10 puntos) Encuentre la solución del problema. *(Ayuda: En el óptimo, $x_p > 0$ y $x_v > 0$, es decir, las restricciones de no-negatividad son inactivas.)*

$$\mathcal{L} = 76x_p - 2x_p^2 - 12x_p + 30x_v - x_v^2 - 12x_v - \lambda_1(x_p - 12) - \lambda_2(x_v - 12) + \lambda_3(x_p) + \lambda_4(x_v)$$

Condiciones de KT:

$$[x_p] = 76 - 4x_p - 12 - \lambda_1 + \lambda_3 = 0$$

$$[x_v] = 30 - 2x_v - 12 - \lambda_2 + \lambda_4 = 0$$

$$\lambda_1(12 - x_p) = 0$$

$$\lambda_2(12 - x_v) = 0$$

$$\lambda_3(x_p) = 0$$

$$\lambda_4(x_v) = 0$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \geq 0$$

$$12 - x_p \geq 0$$

$$12 - x_v \geq 0$$

$$x_p \geq 0$$

$$x_v \geq 0$$

Vamos a usar solo los casos en donde las restricciones de no negatividad esten inactivas, por lo tanto, tendremos siempre que $\lambda_3, \lambda_4 = 0$

Caso 1: Ambas restricciones activas $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$
Obtenemos que:

$$x_p = x_v = 12$$

$$\lambda_1 = 16, \lambda_2 = -6$$

Caso no posible lambda negativo.

Caso 2: Restricción punta no activa, restricción valle activa $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \geq 0$
De la primera CPO:

$$x_p = 16$$

Caso no posible, excede la capacidad.

Caso 3: Restricción punta activa, restricción valle no activa $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 = 0$
De la segunda CPO:

$$x_v = 18/2 = 9$$

$$x_p = 12$$

$$\lambda_1 = 16, \lambda_2 = 0$$

Caso 4: Ambas restricciones no activas $\lambda_1, \lambda_2 = 0$

$$x_v = 18/2 = 9$$
$$x_p = 16$$

Caso no posible.

Solución del caso 4:

$$(x_p, x_v, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \lambda_4) = (12, 9, 16, 0, 0, 0)$$

4. (10 puntos) Interprete los multiplicadores de Lagrange de las restricciones de capacidad. Si fuera posible agregar un tren adicional en solamente uno de los horarios, ¿en qué horario convendría agregar un tren?

   Conviene aumentar la cantidad de trenes en el horario punta ya que su mutiplicador de lagrange asociado es mayor que cero. Lo que tiene sentido, ya que, nos dice que dada la demanda de trenes en ese horario aún podemos obtener mayores beneficios. Caso contrario en el horario valle en donde el multiplicador asociado es igual a 0.

Pregunta 2: La dinámica de los usuarios de Twitter (30 puntos)

Muchos bienes que consumimos están sujetos a externalidades de red. Un ejemplo clásico es el uso de Twitter: Mientras más horas las personas estén usando Twitter mayor el incentivo de los agentes de gastar más horas en Twitter. Denote por $x_t \geq 0$ el número total de horas (en millones de horas) que todos usuarios de Twitter estuvieron usando dicha red social en una fecha t. Suponga que el número de horas total en Twitter en la fecha $t+1$ depende del número total de horas en Twitter en la fecha t, de acuerdo con la siguiente ecuación en diferencias:

$$x_{t+1} = \text{mín}\left\{x_t^2, 2\right\} \tag{1}$$

Esta función captura dos hechos: (i) Hay un límite de horas que los usuarios pueden estar en Twitter durante un día, pues las personas tienen que dormir, trabajar, estudiar, etc (se supone que este límite es 2 millones de horas, sumando entre todos los usuarios); (ii) Siempre que los usuarios no se vean restringidos en su uso de Twitter, el número de horas consumidas de Twitter en $t+1$ es una función creciente del número de horas consumidas en t.

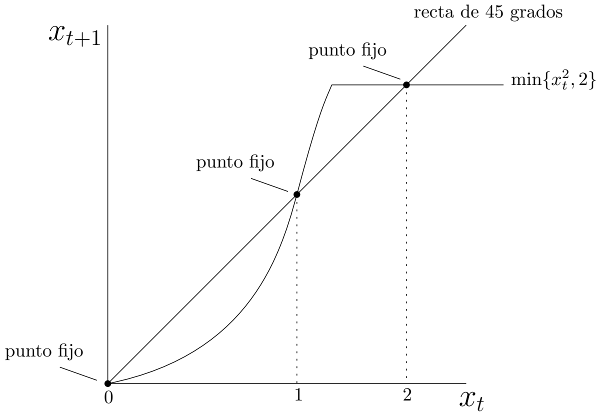
1. (10 puntos) Encuentre todos los puntos fijos de la ecuación en diferencias (1).

   Primero buscamos puntos fijos x con $x^2 < 2$:

   $$x^2 = x$$

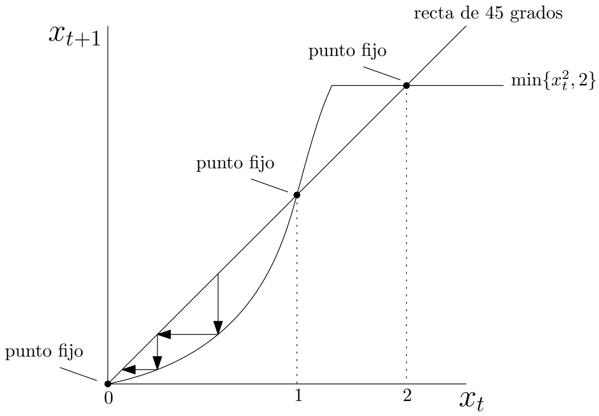
   Hay dos soluciones para la ecuación arriba con $x \geq 0$ (en el dominio del sistema): $x = 0$ y $x = 1$. Además, $x = 2$ en un punto fijo. Por lo tanto, hay 3 puntos fijos: $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$.

2. (10 puntos) Represente los puntos fijos encontrados en un gráfico con x_{t+1} en el eje vertical y x_t en el eje horizontal.

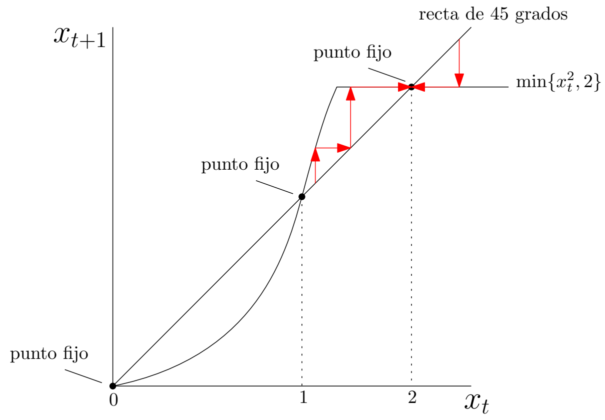


3. (10 puntos) Analice la estabilidad de cada uno de los puntos fijos encontrados en el ítem anterior. Puedes justificarlo con la ayuda del gráfico del ítem anterior.

   El gráfico abajo muestre que el punto fijo $x = 0$ es globalmente estable:



El gráfico abajo muestre que el punto fijo $x = 2$ es globalmente estable:



Además, de los dos gráficos anteriores queda claro que $x = 1$ es inestable: Si el sistema empieza un poco a la derecha o un poco a la izquierda de este punto fijo, converge a alguno de los otros dos puntos fijos.

Pregunta 3: Sistema Lineal (30 puntos)

Considere el siguiente sistema lineal homogéneo de 2 variables:

$$x_{t+1} = x_t - \frac{1}{2}y_t$$
$$y_{t+1} = \frac{3}{2}x_t - y_t$$

1. (10 puntos) Encuentre la solución general $\{x_t\}_{t\geq 0}$ y $\{y_t\}_{t\geq 0}$ como función de t y de coeficientes c_1 y c_2 arbitrarios.
2. (10 puntos) ¿El sistema es estable? Justifique.
3. (10 puntos) A partir de la solución en el ítem 1 y del estado inicial $(x_0, y_0) = (2, 1)$, encuentre los valores de c_1 y c_2 y obtenga la solución (trayectoria) de $\{x_t\}_{t\geq 0}$ y $\{y_t\}_{t\geq 0}$.

1. El sistema lineal se puede escribir en forma matricial

$$\begin{bmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0{,}5 \\ 1{,}5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix}$$

Con matriz asociada $A = \begin{bmatrix} 1 & -0{,}5 \\ 1{,}5 & -1 \end{bmatrix}$.

La solución general al sistema lineal corresponde a

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = c_1\lambda_1^t \mathbf{w}_1 + c_2\lambda_2^t \mathbf{w}_2$$

donde λ_1 y λ_2 son los valores propios de A, y $\mathbf{w}_1$ y $\mathbf{w}_2$ son los vectores propios respectivos.

Para encontrar los valores propios de A, se puede calcular y encontrar las raíces del polinomio característico

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= |A - \lambda I| \\ &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -0{,}5 \\ 1{,}5 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)(-1-\lambda) + 0{,}75 \\ &= -1 + \lambda^2 + 0{,}75 \\ &= \lambda^2 - 0{,}25 \end{aligned}$$

Entonces

$$p(\lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 = 0{,}25 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm 0{,}5$$

y obtenemos los valores propios $\lambda_1 = -0{,}5$ y $\lambda_2 = 0{,}5$.

Ahora corresponde calcular los vectores propios.

- Para $\lambda_1 = -0{,}5$, tenemos la matriz

$$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} 1{,}5 & -0{,}5 \\ 1{,}5 & -0{,}5 \end{bmatrix}$$

  Entonces un vector propio es de la forma $\begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 1{,}5 \end{bmatrix}$, o cualquier múltiplo de este vector, por ejemplo $\mathbf{w}_1 = (1, 3)$.

- Para $\lambda_2 = 0{,}5$, tenemos la matriz

$$A - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} 0{,}5 & -0{,}5 \\ 1{,}5 & -1{,}5 \end{bmatrix}$$

  Entonces un vector propio es de la forma $\begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{bmatrix}$, o cualquier múltiplo de este vector, por ejemplo $\mathbf{w}_2 = (1, 1)$.

Finalmente la forma general de $\{(x_t, y_t)\}$ es

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = c_1 \cdot (-0{,}5)^t \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + c_2 \cdot 0{,}5^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

o bien

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \cdot (-0{,}5)^t + c_2 \cdot 0{,}5^t \\ 3c_1 \cdot (-0{,}5)^t + c_2 \cdot 0{,}5^t \end{bmatrix}$$

2. El análisis de estabilidad de un sistema lineal se resume en revisar la magnitud o módulo de los valores propios. Como $|\lambda_1| < 1$ y $|\lambda_2| < 1$, entonces el sistema es estable.

3. Para el caso inicial $(x_0, y_0) = (2, 1)$ resolvemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 \\ 3c_1 + c_2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} c_1 + c_2 = 2 \\ 3c_1 + c_2 = 1 \end{array}$$

   Restando ambas ecuaciones tenemos $2c_1 = -1$, es decir $c_1 = -0{,}5$. Con esto obtenemos $c_2 = 2{,}5$.

   [Recordar que si se escogieron otros vectores propios, los valores de c_1 y c_2 tienen que cambiar también]

   La solución a este sistema con valor inicial $(x_0, y_0) = (2, 1)$ es

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = -0{,}5 \cdot (-0{,}5)^t \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + 2{,}5 \cdot 0{,}5^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

   o bien

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}5 \cdot (-0{,}5)^t + 2{,}5 \cdot 0{,}5^t \\ -1{,}5 \cdot (-0{,}5)^t + 2{,}5 \cdot 0{,}5^t \end{bmatrix}$$