Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Economía y Administración

Primer Semestre 2024

Curso : **Inferencia Estadística**
Sigla : **EAA1520**
Profesores : **M Ignacia Vicuña (Sec 1-2), Martín Rafols (Sec 3) , Ricardo Olea (Sec 4)**

Pauta Control 1

Problema 1

Un consultor financiero es contratado por una empresa de tecnología para hacer un análisis de los salarios dentro de la empresa. Denote por $X_1, X_2, ..., X_{15}$ los salarios de los empleados que trabajan en el departamento de ingeniería y sea $Y_1, Y_2, ..., Y_{25}$ los salarios de los empleados que trabajan en el departamento de marketing. Suponga que los salarios X_i tienen distribución Normal(μ_X, σ^2) y los salarios Y_i distribuyen Normal $(\mu_Y, 4\sigma^2)$.

Defina los siguientes estadísticos:

$$T_1 = \sum_{i=1}^{15}(X_i - \overline{X})^2 \qquad T_2 = \sum_{i=1}^{25}(Y_i - \overline{Y})^2$$

(a) **[1.5 Ptos]** Calcule $P(T_2 < 72\sigma^2)$.

(b) **[1.5 Ptos]** Encuentre la distribución del estadístico $T = \frac{3}{7}\frac{T_1}{T_2}$ y especifique sus parámetros.

Suponga ahora que los salarios del departamento de ingeniería son modelados por la distribución Log-Normal(λ, ζ^2), y con la muestra observada se desea estimar los parámetros de la distribución. Si Y distribuye Log-Normal entonces la función de densidad está dada por

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\zeta^2}}\frac{1}{y}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln y - \lambda}{\zeta}\right)^2}$$

(c) **[3.0 Ptos]** Encuentre los estimadores máximos verosímiles de λ y ζ^2.

Solución:

(a) Note que el estadístico $\frac{T_2}{4\sigma^2}$ tiene distribución chi-cuadrado con 24 grados de libertad. **[0.5 Ptos.]** De esta manera,

$$P(T_2 < 72\sigma^2) \quad = \quad P\left(\frac{T_2}{4\sigma^2} < 18\right) \text{ [0.5 Ptos.]}$$

Buscando en la tabla acumulada de una chi-cuadrado con 24 grados de libertad se obtiene que

$$P(T_2 < 72\sigma^2) = 0.2 \qquad \text{[0.5 Ptos.]}$$

(b) Por parte (a) se tiene que $\frac{T_2}{4\sigma^2} \sim \chi^2(24)$. Por otro lado, $\frac{T_1}{\sigma^2} \sim \chi^2(14)$. **[0.5 Ptos.]** De esta manera,

$$\frac{\frac{T_1}{14\sigma^2}}{\frac{T_2}{4\sigma^2 24}} = \frac{96}{14}\frac{T_1}{T_2} \quad = \quad 16 \cdot \frac{3}{7}\frac{T_1}{T_2} \sim \text{Fisher(14,24)} \quad \text{[0.5 Ptos.]}$$

$$\rightarrow \quad \frac{3}{7}\frac{T_1}{T_2} \sim \frac{1}{16}\text{Fisher(14,24)} \quad \text{[0.5 Ptos.]}$$

(c) La función de verosimilitud de la muestra esta dada por

$$\begin{aligned} L(\lambda, \zeta^2) &= \prod_{i=1}^{25} \frac{1}{\sqrt{2\pi\zeta^2}} \frac{1}{Y_i} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln Y_i - \lambda}{\zeta}\right)^2} \textbf{ [0.2 Ptos.]} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^{25} \left(\frac{1}{\zeta^2}\right)^{25/2} \frac{1}{\prod_{i=1}^{25} Y_i} e^{-\frac{1}{2\zeta^2}\sum_{i=1}^{25}(\ln Y_i - \lambda)^2} \textbf{ [0.3 Ptos.]} \end{aligned}$$

Aplicando logaritmo natural y derivando con respecto a los parámetros λ y ζ^2 e igualando a cero se obtiene:

$$\begin{aligned} \ln L(\lambda, \zeta^2) &= -\frac{25}{2}\ln(2\pi) - \frac{25}{2}\ln(\zeta^2) - \sum_{i=1}^{25}\ln(Y_i) - \frac{1}{2\zeta^2}\sum_{i=1}^{25}(\ln Y_i - \lambda)^2 \textbf{ [0.5 Ptos.]} \\ \frac{\partial \ln L(\lambda, \zeta^2)}{\partial \lambda} &= \frac{2}{2\zeta^2}\sum_{i=1}^{25}(\ln Y_i - \lambda) = 0 \textbf{ [0.5 Ptos.]} \\ &\to \sum_{i=1}^{25}\ln(Y_i) - 25\lambda = 0 \\ &\to \widehat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{25}\ln(Y_i)}{25} \textbf{ [0.5 Ptos.]} \\ \frac{\partial \ln L(\lambda, \zeta^2)}{\partial \zeta^2} &= -\frac{25}{2\zeta^2} + \frac{1}{2\zeta^4}\sum_{i=1}^{25}(\ln Y_i - \lambda)^2 = 0 \textbf{ [0.5 Ptos.]} \\ &\to \frac{25}{2\zeta^2} = \frac{25}{2\zeta^2} + \frac{1}{2\zeta^4}\sum_{i=1}^{25}(\ln Y_i - \lambda)^2 \\ &\to \widehat{\zeta}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{25}(\ln Y_i - \widehat{\lambda})^2}{25} \textbf{ [0.5 Ptos.]} \end{aligned}$$