Código de Honor: Como miembro de la comunidad de la Pontificia Universidad Católica de Chile, me comprometo a respetar los principios y normativas que la rigen. Asimismo, me comprometo a actuar con rectitud y honestidad en esta evaluación.

Adicionalmente declaro estar en condiciones de salud adecuadas para rendir esta evaluación y que me presento a ésta bajo mi responsabilidad. En caso de sentirme mal o tener alguna complicación, deberé informarlo inmediatamente al ayudante o profesor en sala.

Nombre Alumno: ____ Firma: __________________

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

Profesora: Marcela Valenzuela

PRUEBA 1
Primer Semestre 2024
Tiempo: 120 minutos
Total puntos: 70

Instrucciones:

- No olvide colocar nombre en cada hoja.
- Se puede usar calculadora, pero no computadores, celulares o relojes inteligentes. No se pueden usar apuntes, libros o cualquier otro material.
- Conteste cada pregunta en hojas separadas para facilitar la corrección.
- Las preguntas que sean contestadas con lápiz grafito (a mina) no tendrán derecho a recorección.
- Revise ambos lados de cada hoja.
- Respuestas correctas, sin justificación recibirán **cero puntos**.
- Acuérdese de incluir el código de honor firmado.
- Qué les vaya muy bien!

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Primer Semestre 2024

Profesora: Marcela Valenzuela

PRUEBA 1 - Fórmulas

Algebra de portafolios

Retorno esperado portafolio N activos:	$E(R_p) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i E(R_i)$
Varianza de un portafolio N activos	$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \omega_i \omega_j \sigma_{ij}$
Covarianza entre dos variables aleatorias: (donde π_i es la probabilidad del estado i)	$Cov(X,Y) = \sigma_{XY} = \sum_{i=1}^{n} \pi_i (x_i - E(X))(y_i - E(Y))$
Covarianza	$Cov(aX + bY, U) = aCov(X,U) + bCov(Y,U)$
Correlación entre dos variables aleatorias:	$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$
Si $Z = aX + bY$, a, b constantes:	$E(Z) = aE(X) + bE(Y)$
Si $Z = aX + bY$, a, b constantes:	$V(Z) = a^2 V(X) + b^2 V(Y) + 2abCov(X,Y)$

Activos derivados

Put-call parity:	$C - P = S - PV(K)$
Modelo Binomial número de acciones (acción "S"):	$\Delta = \frac{A_u - A_d}{S_u - S_d}$
Modelo Binomial inversión en bono libre de riesgo:	$B = \frac{A_d - S_d \times \Delta}{1 + r_f}$

donde A_u y A_d son los pagos del activo derivado ("A") en los estados up y $down$ respectivamente.

Fórmula de Black & Scholes:

$$\text{Valor actual de opción call} = C_0 = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2)$$

$$\text{donde } d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \ \ y \ \ d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

- S_0 : valor actual del activo
- K : precio de ejercicio
- r : tasa de interés libre de riesgo
- T : tiempo faltante para fecha de ejercicio (en años)
- σ : desviación estándar de retorno anual compuesto continuamente
- $N(z)$: probabilidad de que una variable normal estándar tenga un valor menor a z

Decisiones bajo incertidumbre

Función de utilidad esperada:	$U(\cdot) = E[u(w)] = \pi_1 u(w_1) + \pi_2 u(w_2) + \ldots + \pi_n u(w_n)$
Coeficiente de aversión absoluta al riesgo (ARA):	$A(w) = -\frac{u''(w)}{u'(w)}$
Coeficiente de aversión relativa al riesgo: (RRA)	$R(w) = -w\frac{u''(w)}{u'(w)} = wA(w)$

Análisis media-varianza

- retorno requerido al activo i dado el portafolio p: $E(R_i) = R_f + \rho_{ip} \times \frac{\sigma_i}{\sigma_p} \times (E(R_p) - R_f)$
- Porcentaje óptimo para invertir en el portfolio tangente (T) cuando la utilidad es $U = E[R] - \frac{1}{2}RRA\sigma^2$:

$$w_T^* = \frac{E[R_T] - R_F}{RRA \times \sigma_T^2}$$

1. [20 puntos total] Preguntas conceptuales

a) **(4 puntos)** Un portafolio óptimo jamás va a incluir un activo cuyo retorno esperado y riesgo (medido por la desviación estándar) sea dominado por otro activo con mayor retorno esperado y menor riesgo. Comente si es verdadero o falso y justifique su respuesta.

b) **(4 puntos)** Un activo con una alta desviación estándar puede contribuir menos al riesgo de un portafolio que un activo con una menor desviación estándar. Comente si es verdadero o falso y justifique su respuesta.

c) **(4 puntos)** La diversificación reduce el retorno esperado del portafolio a medida que reduce el riesgo del portafolio. Comente si es verdadero o falso y justifique su respuesta.

d) **(4 puntos)** Suponga un mercado de capitales con tres posibles estados de la naturaleza en donde existen únicamente los siguientes activos:

1. Activo libre de riesgo, con pagos (1,1,1),
2. Seguro de desempleo, con pagos (1,0,0)
3. Bono corporativo riesgoso, con pagos (0,1,1).

Determine si el mercado descrito está completo o no, explicando claramente por qué.

e) **(4 puntos)** Suponga un mercado de capitales con dos posibles estados de la naturaleza en donde existen únicamente los siguientes activos:

1. Acción de la empresa JOSEX, con precio hoy de $20 y posibles pagos de ($15, $22)
2. Opción call sobre JOSEX con strike de $17, cuyo precio hoy es $2

Encuentre el valor de los activos puros Arrow Debreu para cada estado de la naturaleza.

Respuesta

a) Falso. La desviación estándar incluye tanto riesgos sistemáticos como idiosincráticos. Un activo que parezca dominado puede estar correlacionado con otros activos de manera que lo haga útil (es decir, reduciendo la varianza) en un portafolio diversificado.

b) Verdadero. La contribución de una acción al riesgo del portafolio depende de su correlación con el portafolio o del riesgo sistemático, no del riesgo total.

c) Falso. La diversificación puede reducir el riesgo del portafolio mientras se mantiene constante el retorno esperado (por ejemplo, una cartera de muchas acciones con retorno/riesgo idénticos pero correlación imperfecta).

d) Si bien existen tres activos para tres estados de la naturaleza, el mercado no está completo porque estos no son linealmente independientes (el activo libre de riesgo es la suma del bono corporativo y el seguro). Esto implica que no se pueden construir todos los resultados a partir de los activos (es imposible recrear (0,1,0) por ejemplo).

e) Los pagos de la opción son (\$0, \$5), por lo que el precio de AD2 es \$0,4. Reemplazando en la ecuación de pagos de la acción, encontramos que el precio de AD1 es \$0,75

2. [15 puntos total] Forwards y futuros

Suponga que se encuentra planeando unas vacaciones en Australia dentro de dos años y está explorando algunas posibilidades para intercambiar su dinero a dólares australianos (AUD) de manera anticipada. Considerando que las tasas de interés son 5% anual en Australia y del 7% anual en Chile, y que el tipo de cambio spot es 620 CLP por AUD, responda las siguientes preguntas:

a) **(5 puntos)** ¿Cuál sería la tasa de cambio forward a 2 años para convertir sus pesos chilenos a australianos?

b) **(10 puntos)** Si el tipo de cambio forward a 2 años es de 630 CLP por AUD, ¿qué estrategia implementaría para beneficiarse de esta tasa de cambio forward y aprovechar esta oportunidad de arbitraje?

Respuesta

(a) tasa de cambio forward

- Precio actual de AUD en CLP: $620.
- F_0 es la tasa de cambio forward de AUD en CLP
- La tasa de cambio forward a 2 años es dada por:

$$F_0 = 620\frac{(1+0.07)^2}{(1+0.05)^2} = 644$$

$\longrightarrow$ 644 CLP por AUD

(b) Supongamos primero que la tasa de cambio forward a 2 años es en cambio de 630 pesos chilenos por dólar australiano. Un arbitrador puede:

- Pedir prestados hoy 1,000 AUD al 5% anual durante 2 años. En dos años debe pagar:

$$1000(1+0.05)^2 = 1102.5$$

- Convertir hoy los 1,000 AUD a pesos chilenos:

$$1000 \times 620 = 620,000$$

- Invertir los pesos chilenos al 7%
- Tomar posición larga en un contrato forward para comprar 1102.5 AUD por:

$$1102.5 \times 630 = 694,575$$

- Al final de 2 años: Los 620,000 pesos chilenos que están invertidos al 7% crecen a:

$$620,000 \times (1+0,07)^2 = 709838$$

  De este total, 694,575 pesos chilenos se utilizan para pagar el contrato forward obteniendo 1,102.5 AUD. Con ese dinero, se pagan el capital e intereses de los 1,000 AUD prestados:

$$1000(1+0.05)^2 = 1102.5$$

- Beneficio sin riesgo de $709838 - 694,575 = 15,263$

3. [10 puntos total] Opciones

Usted recibe 1000 acciones de la firma donde se desempeña como CEO como parte de su paquete de compensación. Suponga que actualmente la acción de la compañía se vende a $50,000 por acción y usted quiere mantener sus acciones por un año y luego venderlas para invertir en su propio emprendimiento para lo que necesita $45 millones como capital inicial. Usted está preocupado del riesgo que involucra su estrategia, si el precio de la acción de la compañia cae por debajo $45,000 usted no será capaz de financiar su emprendimiento (no tiene capital adicional). Por esta razón, usted condidera tres estraregias:

A. Tomar una posición corta en una call que vence en un año más cuyo activo subyacente es la acción de la compañía y con precio de ejercicio igual a $55,000 por acción. La call descrita se vende actualmente en $3 cada una.

B. Tomar una posición larga en una put que vence en un año más cuyo activo subyacente es la acción de la compañía y con precio de ejercicio igual a $45,000 por acción. La put descrita se vende actualmente en $3 cada una.

C. Tomar las estrategias A y B descritas simultáneamente.

Evalúe cada una de estas estrategias con respecto a su objetivo de tener el dinero necesario para su emprendimiento. Cuál recomendaría?

Respuesta

Los pagos de cada estrategia son:

	Posición	Si $S_T \leq 55M$	$S_T > 55M$
Estrategia A:	Acción	$1000 * S_T$	$1000 * S_T$
	Call	$3 * 1000$	$-1000(S_T - 55M) + 3 * 1000$
	Total	$1000(S_T + 3)$	$1000(55M + 3)$

	Posición	Si $S_T \leq 45M$	$S_T > 45M$
Estrategia B:	Acción	$1000 * S_T$	$1000 * S_T$
	Put	$1000 * (45M - S_T) - 3 * 1000$	$-3 * 1000$
	Total	$1000(45M - 3)$	$1000(S_T - 3)$

Estrategia C:

Posición	Si $S_T \leq 45M$	$45M < S_T < 55M$	$S_T > 55M$
Acción	$1000 * S_T$	$1000 * S_T$	$1000 * S_T$
Put	$1000 * (45M - S_T) - 3 * 1000$	$-3 * 1000$	$-3 * 1000$
Call	$3 * 1000$	$3 * 1000$	$-1000(S_T - 55M) + 3 * 1000$
Total	$1000 * 45M$	$1000 * S_T$	$1000 * 55M$

Dados sus objetivos, la mejor estrategia es la C dado que asegura tener el capital de \$45MM y le entrega la posibilidad de tener \$55MM.

4. [25 puntos total] Media - Varianza

Existen dos activos riesgosos "Big" and "Small" y un activo libre de riesgo (R_F), según la siguiente tabla:

	$E(R)$	σ	Correlación con Big
Big	10%	20%	1
Small	20%	30%	ρ

Además, todo inversionista es averso al riesgo, con la siguiente función de utilidad:

$$U = E(R_p) - \frac{RRA}{2}\sigma_p^2,$$

donde $RRA > 0$ es el coeficiente de aversión al riesgo.

(a) **(5 puntos)** Asuma que $\rho = -1$. ¿Cuál debiera ser la rentabilidad del activo libre de riesgo si asumimos que no hay oportunidades de arbitraje en este mercado?

(b) **(5 puntos)** Asuma ahora que $\rho = -0.5$. Su amigo le dice que Ud. debiera invertir en el activo libre de riesgo y el portafolio tangente, el cual tiene retorno $R_T = 12\%$ y volatilidad $\sigma_T = 22\%$. Muestre gráficamente que su amigo está equivocado y que ese no puede ser el portafolio tangente. Luego muéstrelo numéricamente construyendo un portafolio compuesto por Big y Small que domine al portafolio tangente en términos de media y varianza.

(c) **(5 puntos)** Nuevamente considere que $\rho = -0.5$. Asuma ahora que la tasa libre de riesgo es $R_f = 5\%$ y que el verdadero portafolio tangente es $R_T = 14\%$ y volatilidad $\sigma = 12\%$. Si su amigo tiene un RRA=10, recomiende proporciones óptimas de riqueza a invertir en Big, Small y en el activo libre de riesgo.

(d) **(5 puntos)** Suponga ahora que Ud. solo tiene acceso a prestar dinero a tasa $R_f = 5\%$, pero **no** tiene acceso a endeudarse, dibuje su nueva frontera eficiente (nuevamente considerando $\rho = -0.5$ y portafolio tangente con $R_T = 14\%$ y volatilidad $\sigma = 12\%$)

(e) **(5 puntos)** Nuevamente considere que $\rho = -0.5$. Asuma ahora que la tasa libre de riesgo para prestar dinero ($R_f = 5\%$) es distinta a la tasa libre de riesgo para endeudarse ($R_d = 8\%$). Asumiendo que Ud. tiene acceso a prestar dinero a tasa R_f y a endeudarse a tasa R_d, dibuje su nueva frontera eficiente.

Respuesta

(a) Rentabilidad del activo libre de riesgo. Primero contruyamos un portafolio con varianza igual a 0.

$$\sigma_p = w_B\sigma_B - w_S\sigma_S = w_B\sigma_B - (1-w_B)\sigma_S = 0$$

$\longrightarrow w_B = 0.6$

Así, sin oportunidades de arbitraje, el retorno esperado del activo libre de riesgo es igual al retorno del portafolio con varianza igual a cero:

$$R_F = 0.6R_B + 0.4R_S = 14\%$$

(b) Gráfico:

Numéricamente:

$$\begin{aligned} R_p &= w_B R_B + (1-w_B)R_S = 0.12 \\ &= w_B 0.1 + (1-w_B)0.2 = 0.12 \end{aligned} \tag{1}$$

$\longrightarrow w_1 = 0.8$

luego sacar volatilidad:

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 &= w_B^2\sigma_B^2 + (1-w_B)^2\sigma_S^2 + 2w_B w_S \rho\sigma_1\sigma_2 \\ &= 0.8^2 0.2^2 + 0.2^2 0.3^2 + 2\times 0.8\times 0.2\times(-0.5)\times 0.2\times 0.3 \\ &= 0,0196 \\ \longrightarrow \sigma_p &= 0.14 \end{aligned}$$

Encontramos un portafolio con retorno igual a $R_T = 12\%$ y volatilidad menor que $\sigma_T = 22\%$

(c) Portafolio óptimo:

$$\begin{aligned} w_T^* &= \frac{E[R_T]-R_F}{RRA\times\sigma_T^2} \\ &= \frac{0.14-0.05}{10\times 0.12^2} \\ &= 62.5\% \end{aligned}$$

los pesos del portafolio tangente son:

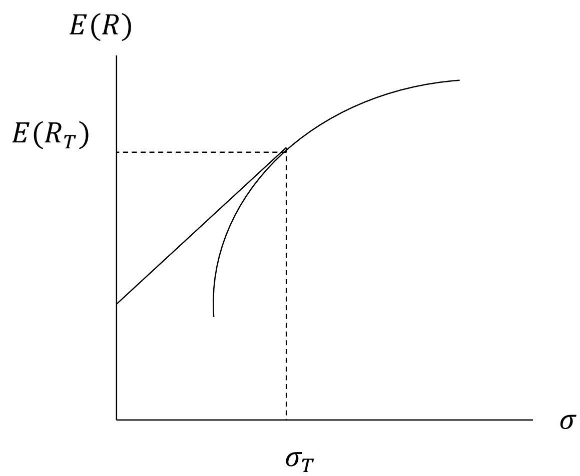
$$\begin{aligned} R_p &= w_B R_B + (1-w_B)R_S = 0.14 \\ &= w_B 0.1 + (1-w_B)0.2 = 0.14 \end{aligned} \tag{2}$$

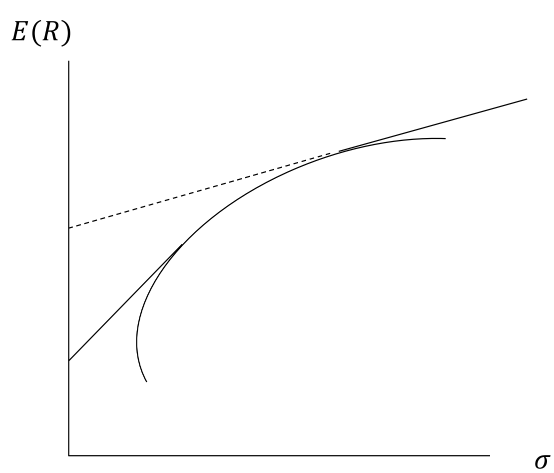
$\longrightarrow w_B = 0.6$ y $w_S = 0.4$ Por lo tanto las proporciones son

- Big: $0.625 * 0.6 = 37.5\%$
- Small: $0.625 * 0.4 = 25\%$
- ALR: 37.5%

(d) Al no tener posibilidad de endeudamiento la frontera eficiente es como sigue:

(e) Al tener una mayor tasa de endeudamiento la frontera eficiente es como sigue:


$E(R)$
$E(R_T)$
σ
σ_T


$E(R)$
σ