# Interrogación 2

FIS1533 Electricidad y Magnetismo

Profesores: B. Koch, B. Seifert, P. Ochoa, R. Soto, S. Wallentowitz

13.10.2015, 18:30-20:30

NO USAR NINGÚN APARATO ELECTRÓNICO NI APUNTES!

1. Se tiene una esfera maciza sin carga libre de radio $R$ hecha de un material dieléctrico. La esfera está polarizada, y el campo eléctrico en su interior es $\vec{E} = -\frac{kr}{\varepsilon_0}\hat{r}$. La carga total ligada en la superficie de la esfera es:

   *a*) $Q_b = -kR^2/2$

   *b*) $Q_b = kR^2/2$

   *c*) $Q_b = -4\pi R^3 k$

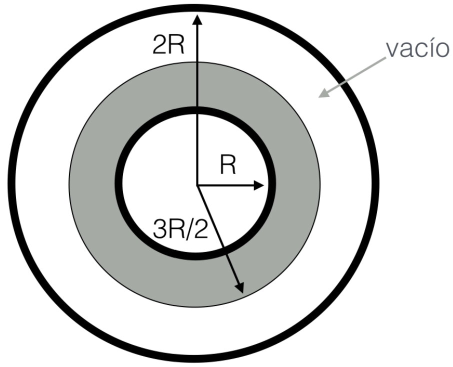
   *d*) $Q_b = 4\pi R^3 k$

   *e*) $Q_b = 0$

   Solución: como la carga libre es cero, $\vec{D} = \vec{0}$ en todo el espacio. Puesto que $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$, tenemos que $\vec{P} = kr\hat{r}$ dentro de la esfera. La densidad superficial de carga ligada es $\sigma_b = \vec{P}\cdot\hat{n} = kR$, y por ende la carga total ligada en la superficie es $Q_b = \sigma_b(4\pi R^2) = 4\pi R^3 k$.

   Una forma alternativa de resolver este problema sería calculando la densidad de carga ligada volumétrica $\rho_b = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P}$, integrándola en todo el volumen, y notando que esta carga tiene que tener el signo opuesto pero la misma magnitud que la que hay en la superficie

2. Se tiene un cascarón esférico metálico de radio $R$ con carga positiva $Q$, rodeado por un dielétrico con permitividad relativa $\varepsilon_r$ hasta $r = 3R/2$. Todo esto se rodea con otro cascarón esférico metálico con radio $r = 2R$ y carga $-Q$, como mostrado en el dibujo.




La capacitancia entre los dos conductores de este sistema es:

a) $C = 4\pi R\varepsilon_0(\varepsilon_r + 1)$

b) $C = \frac{2}{3}\pi R\varepsilon_0(\varepsilon_r + 1)$

c) $C = \pi R\varepsilon_0(\varepsilon_r + 1)$

d) $C = 4\pi R\varepsilon_0\left(\frac{6\varepsilon_r}{2+\varepsilon_r}\right)$

e) $C = 2\pi R\varepsilon_0\left(\frac{6+\varepsilon_r}{3\varepsilon_r}\right)$

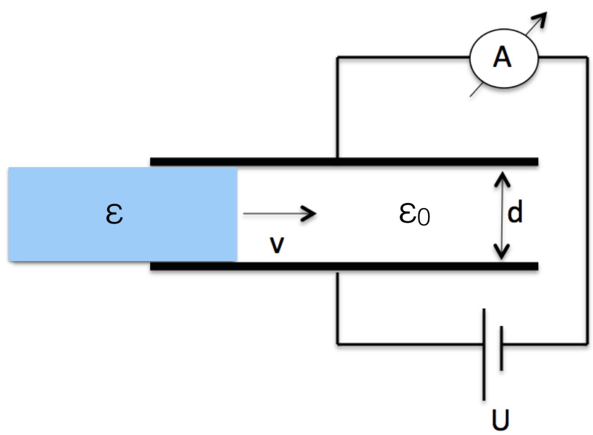
Solución: la ley de Gauss nos dice que $\oint \vec{D}\cdot\vec{dA} = Q_{fenc}$. Si hacemos una superficie gaussiana con radio $R < r < 2R$, $Q_{fenc} = Q$. Por ende, $\vec{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\hat{r}$ para $R < r < 2R$, y $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi r^2\varepsilon_r\varepsilon_0}\hat{r}$ para $R < r < 3R/2$ y $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi r^2\varepsilon_0}\hat{r}$ para $3R/2 < r < 2R$ (ya que el dieléctrico es lineal). Nos queda que $\Delta V = \int \vec{E}\cdot\vec{dl} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_R^{3R/2}\frac{dr}{\varepsilon_r r^2} + \int_{3R/2}^{2R}\frac{dr}{r^2}\right] = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{3\varepsilon_r} + \frac{1}{6}\right] = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}\left[\frac{2+\varepsilon_r}{6\varepsilon_r}\right]$. Por ende, $C = \frac{Q}{\Delta V} = 4\pi\varepsilon_0 R\left[\frac{6\varepsilon_r}{2+\varepsilon_r}\right]$.

3. Se tiene un capacitor de placas paralelas con separación entre las placas muy pequeña comparada a sus dimensiones. Este capacitor se carga con una batería hasta que su carga y voltaje iniciales son $Q_0$ y $V_0$ respectivamente. Luego se desconecta el capacitor de la batería, la distancia entre las placas se incrementa un factor de 4, y se introduce un dieléctrico con permitividad relativa $\varepsilon_r = 3$ en todo el espacio entre las placas. Los nuevos valores de la carga y el voltaje en el capacitor son:

   *a*) $Q_0, \frac{3}{4}V_0$
   *b*) $3Q_0, \frac{3}{4}V_0$
   *c*) $\frac{4}{3}Q_0, 3V_0$
   *d*) $\frac{3}{4}Q_0, \frac{4}{3}V_0$
   *e*) $Q_0, \frac{4}{3}V_0$

   Solución: la capacitancia de un capacitor de placas paralelas separadas por vacío está dada por $C_0 = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$. Después de separar las placas y de introducir el dieléctrico, la nueva capacitancia está dada por $C_1 = \frac{\varepsilon A}{4d}$, por lo que $\frac{C_1}{C_0} = \frac{\varepsilon_r}{4} = \frac{3}{4}$. La carga en las placas se conserva, ya que el capacitor se desconetó de la batería antes de hacer los cambios. Por ende, $V_1 = \frac{Q_0}{C_1} = \frac{Q_0}{\frac{3}{4}C_0} = \frac{4}{3}V_0$.

4. Un capacitor tiene largo $L$ y ancho $L$ y separación entre las dos placas $d$. El espacio entre las placas es inicialmente vacío. El capacitor esta conectado a una fuente de voltaje ideal con voltaje $U$ y un amperímetro que puede medir corriente, como indica la figura. Al introducir un dieléctrico en el capacitor se puede generar una corriente $I$.




¿Con qué velocidad $v$ hay que introducir el dieléctrico para que se genera la corriente $I$?

a) $v = \frac{Id}{UL(\varepsilon-\varepsilon_0)}$
b) $v = \frac{2Id}{UL(\varepsilon)}$
c) $v = \frac{Id^2}{UL^2(\varepsilon-\varepsilon_0)}$
d) $v = \frac{Id(\varepsilon-\varepsilon_0)}{UL}$
e) $v = \frac{2Id}{UL(\varepsilon-\varepsilon_0)}$

Solución: $C = C_\varepsilon + C_0 = \varepsilon\frac{A_\varepsilon}{d} + \varepsilon_0\frac{A_0}{d}$. Definiendo $z$ como el largo del material dieléctrico dentro del capacitor tenemos que:

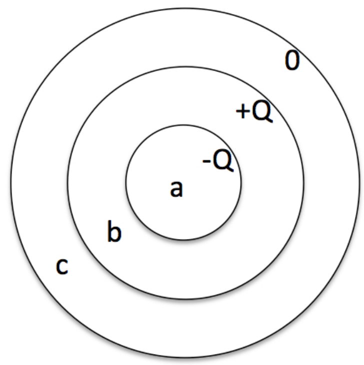
$$C = \varepsilon\frac{Lz}{d} + \varepsilon_0\frac{L(L-z)}{d}$$

Usando que $Q = UC$ y que $I = dQ/dt$ tenemos:

$$I = U\frac{dC}{dt} = U\frac{L}{d}\left(\varepsilon\frac{dz}{dt} - \varepsilon_0\frac{dz}{dt}\right) = U\frac{L}{d}(\varepsilon-\varepsilon_0)\frac{dz}{dt}$$

Finalmente usamos que la velocidad $v = dz/dt$, por lo tanto $v = \dfrac{Id}{UL(\varepsilon-\varepsilon_0)}$

5. Tres cascarones conductores cilíndricos concéntricos con largo $L$, con cargas $(-Q, +Q, 0)$ y radios $(R, 2R, 3R)$ forman tres espacios separados. Como indica la figura, los tres espacios se identifican con las letras $(a, b, c)$. En cada espacio se puede poner un dieléctrico con la constante dieléctrica relativa (permitividad relativa) $(\varepsilon_a, \varepsilon_b, \varepsilon_c)$.




¿Cuál de las siguientes configuraciones tiene la mayor cantidad de energía guardada en el campo?

*a*) $\varepsilon_a = 1, \varepsilon_b = 1, \varepsilon_c = 4$

*b*) $\varepsilon_a = 1, \varepsilon_b = 4, \varepsilon_c = 1$

*c*) $\varepsilon_a = 4, \varepsilon_b = 1, \varepsilon_c = 1$

*d*) $\varepsilon_a = 2, \varepsilon_b = 2, \varepsilon_c = 2$

*e*) $\varepsilon_a = 1, \varepsilon_b = 2, \varepsilon_c = 3$

Solución: Usando Gauss, sabemos que sólo hay campo en la región "b". La energía del campo eléctrico es proporcional a $\int dV \varepsilon_b E_b^2$. Además sabemos que $E = D/\varepsilon_b \propto Q/\varepsilon_b$. De esta forma tenemos que la energía es proporcional a $1/\varepsilon_b$. Las alternativas correctas son las que tienen un menor $\varepsilon_b$, es decir, alternativas a y c.

6. Cobre (Cu) tiene una conductividad de $\sigma \approx 6 \cdot 10^7\,\Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1}$ a temperatura del ambiente. En los metales los portadores de carga son electrones ($e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$, $m_e \approx 9 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$) que se mueven a temperatura ambiente con una velocidad del orden de magnitud $v \approx 10^6\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. En Cu la densidad de electrones libres es $\mathscr{N} \approx 9 \cdot 10^{28}\,\mathrm{m}^{-3}$. ¿Cuál es el tiempo promedio $\tau$ entre dos colisiones consecutivas del electrón en cobre?

   *a*) $\tau \approx 24\,\mathrm{fs}$

   *b*) $\tau \approx 18\,\mathrm{ns}$

   *c*) $\tau \approx 0{,}24\,\mathrm{ps}$

   *d*) $\tau \approx 1{,}8\,\mathrm{ps}$

   *e*) $\tau \approx 24\,\mathrm{ps}$

Tiempo entre colisiones:

Conductividad (modelo de Drude):

$$\sigma = \frac{N q^2 \tau}{m_e}$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{\sigma m_e}{N q^2}$$

$$= \frac{6 \cdot 10^{7}\ \Omega^{-1} m^{-1} \cdot \cancel{9} \cdot 10^{-31}\ kg}{\cancel{9} \cdot 10^{28}\ m^{-3} \cdot 1{,}6 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19-19}\ C^2}$$

$$= \frac{6}{1{,}6 \cdot 1{,}6} \cdot 10^{7-31-28+19+19} \frac{kg \cdot m^2}{\Omega\ A^2 s^2}$$

$$\left( \Omega = \frac{V}{A} = \frac{\frac{N}{C} \cdot m}{A} = \frac{N \cdot m}{A^2 \cdot s} = \frac{kg \cdot \frac{m}{s^2} \cdot m}{A^2 \cdot s} = \frac{kg \cdot m^2}{A^2 \cdot s^3} \right)$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{6}{1{,}6 \cdot 1{,}6} \cdot 10^{-14}\ \cancel{\frac{1}{\Omega}} \cdot \underbrace{\cancel{\left(\frac{kg \cdot m^2}{A^2 s^3}\right)}}_{=\Omega} \cdot s$$

$$= \frac{6}{2{,}56} \cdot 10^{-14}\ s$$

$600 : 256 = 2{,}383 \approx 2{,}4$

512

880

668

2120

2048

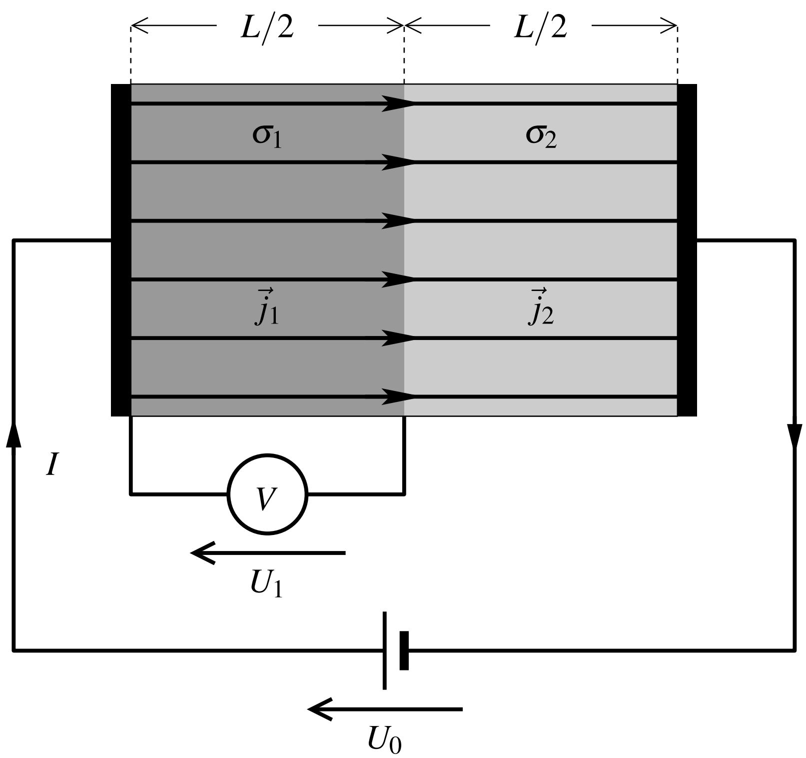
720

668

52

$\Rightarrow \tau \approx 2{,}4 \cdot 10^{-14}\,s = 24\,fs$

7. Dos conductores con conductividades $\sigma_1$ y $\sigma_2 = 2 \cdot \sigma_1$ están conectados y se aplica a través de una pila con voltaje $U_0$ la corriente $I$, ver gráfico.




¿Cuál es el voltaje $U_1$?

*a*) $U_1 = \frac{2}{3} \cdot U_0$

*b*) $U_1 = \frac{1}{3} \cdot U_0$

*c*) $U_1 = \frac{1}{2} \cdot U_0$

*d*) $U_1 = U_0$

*e*) $U_1 = \frac{3}{4} \cdot U_0$

Dos conductividades

Por continuidad es obvio que:

$$j_1 = j_2 = j$$

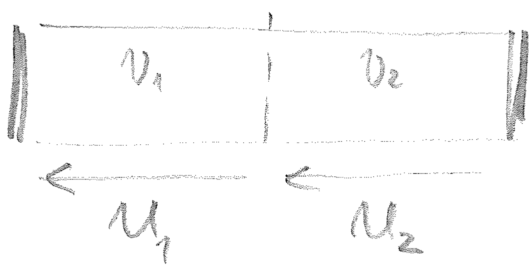
Con „Ley de Ohm" microscopica ($\vec{j} = \sigma \vec{E}$):

$$E_1 = \frac{j}{\sigma_1} \; ; \; E_2 = \frac{j}{\sigma_2}$$

Con $\sigma_2 = 2 \cdot \sigma_1 \Rightarrow E_2 = \frac{E_1}{2}$

$$\Rightarrow U_1 = \frac{L}{2} \cdot E_1$$

$$U_2 = \frac{L}{2} \cdot E_2 = \frac{L}{4} \cdot E_1 = \frac{U_1}{2}$$



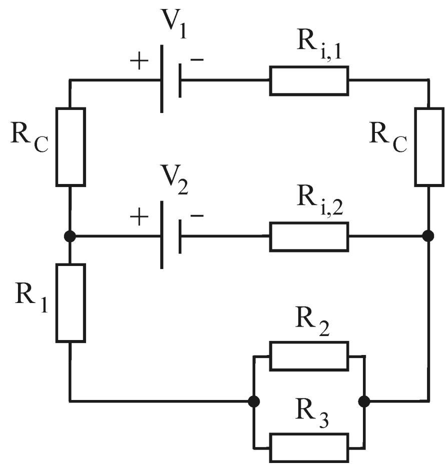

Con $U_1 + U_2 = U_0$

$$\Downarrow$$

$$U_1 + \frac{U_1}{2} = U_0$$

$$\Rightarrow U_1 \left(\frac{3}{2}\right) = U_0 \Rightarrow \underline{U_1 = \left(\frac{2}{3}\right) \cdot U_0}$$

8. Para el siguiente circuito calcule la potencia disipada en $R_2$. Use que: $V_1 = 10\ V$, $V_2 = 5\ V$, $R_{i,1} = 1\ \Omega$, $R_{i,2} = 15\ \Omega$, $R_C = 2\ \Omega$, $R_1 = 1/5\ \Omega$, $R_2 = 2\ \Omega$, $R_3 = 4/3\ \Omega$




a) $P = 0,957\ W$

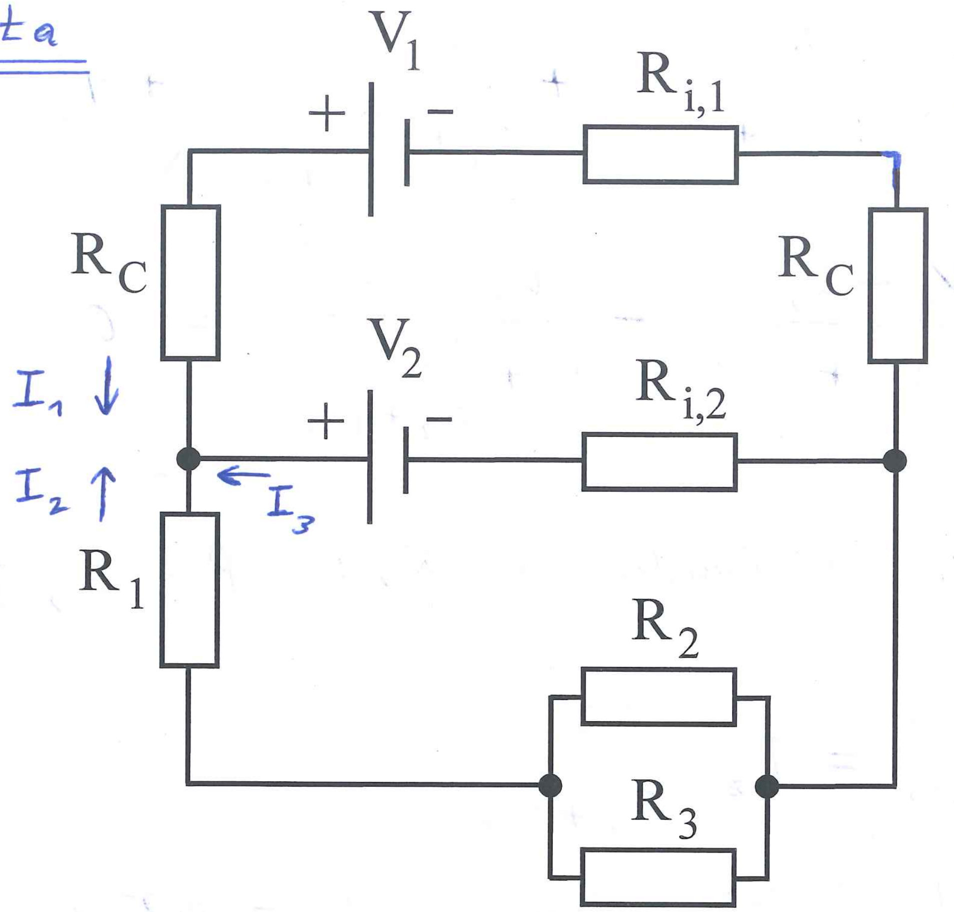
b) $P = 1,086\ W$

c) $P = 1,5\ W$

d) $P = 2,0\ W$

e) $P = 0,84\ W$

Pauta




1) unión $$I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

2) malla 1 $$V_1 - I_1\left(2R_c + R_{i,1}\right) - V_2 + I_3 R_{i,2} = 0$$

3) malla 2 $$V_2 - I_3 R_{i,2} + I_2\left(R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}\right) = 0$$

$$② \Rightarrow \quad I_1 = \frac{V_1 - V_2 + I_3 R_{i,2}}{2R_c + R_{i,1}}$$

$$③ \Rightarrow \quad I_2 = \frac{I_3 R_{i,2} - V_2}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}}$$

$$① \Rightarrow \quad I_3 \left( \frac{R_{i,2}}{2R_c + R_{i,1}} + \frac{R_{i,2}}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} + 1 \right)$$

$$+ \frac{V_1 - V_2}{2R_c + R_{i,1}} - \frac{V_2}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2+R_3}} = 0$$

<u>Potencia disipada en $R_2$:</u> $\quad P = R_2 I_{R_2}^2$

$$I_{R_2} = I_2 \frac{R_3}{R_2 + R_3}$$

---

$V_1 = 10V$ $\quad R_{i,1} = 1\Omega$ $\quad R_1 = 1/5\,\Omega$

$V_2 = 5V$ $\quad R_{i,2} = 15\Omega$ $\quad R_2 = 2\Omega$

$R_c = 2\Omega$ $\quad R_3 = 4/3\,\Omega$

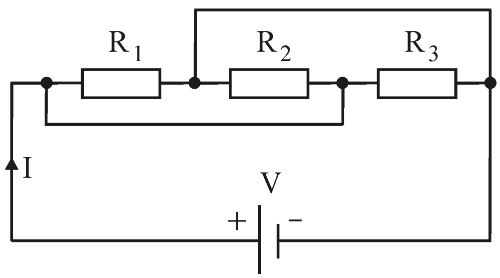
$$\Rightarrow I_3 = \frac{5A - 1A}{3 + 15 + 1} = \frac{4}{19} A$$

$$I_2 = \left(\frac{4}{19} \cdot 15 - 5\right) A = 5A\left(\frac{12}{19} - 1\right) = -\frac{35}{19} A$$

$$I_{R_2} = -\frac{35}{19} \cdot \frac{2}{5} A = -\frac{14}{19} A$$

$$P = 2\Omega \cdot \left(\frac{14}{19}\right)^2 A^2 = \frac{392}{361} W \approx \underline{\underline{1{,}086\, W}}$$

9. Determine la corriente I del siguiente circuito, donde $V = 12\ V$, $R_1 = 2\ \Omega$, $R_2 = 3\ \Omega$, $R_3 = 4\ \Omega$




a) $I = 0,9\ A$

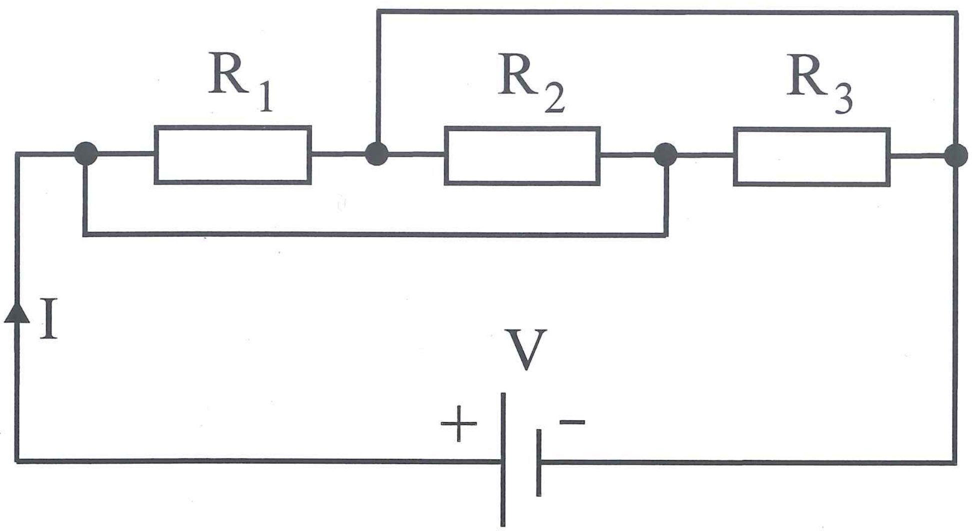
b) $I = 12\ A$

c) $I = 13\ A$

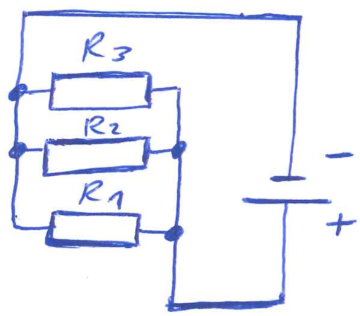
d) $I = 1,1\ A$

e) $I = 1\ A$

Pauta




Las resistencias están en paralelo:




$$R_{total} = \left(R_1^{-1} + R_2^{-1} + R_3^{-1}\right)^{-1}$$

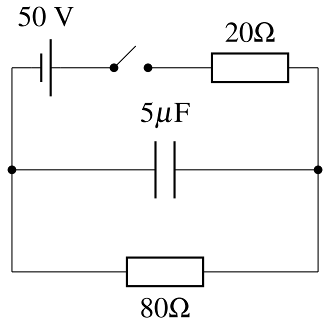
$$I = \frac{V}{R_{total}} = V\left(R_1^{-1} + R_2^{-1} + R_3^{-1}\right)$$

---

$V = 12V$, $R_1 = 2\Omega$, $R_2 = 3\Omega$, $R_3 = 4\Omega$

$$I = 12\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)A = 12 \cdot \frac{13}{12} A = \underline{\underline{13\,A}}$$

10. El siguiente circuito tiene el capacitor inicialmente descargado. A $t = 0$ el interruptor se cierra. ¿Cuál es la corriente que atraviesa la batería inmediatamente después de cerrar el interruptor $I_0$ y después de que el interruptor ha estado cerrado un largo rato $I_\infty$?




*a*) $I_0 = 0,5$ A y $I_\infty = 0,625$ A

*b*) $I_0 = 2,5$ A y $I_\infty = 0,5$ A

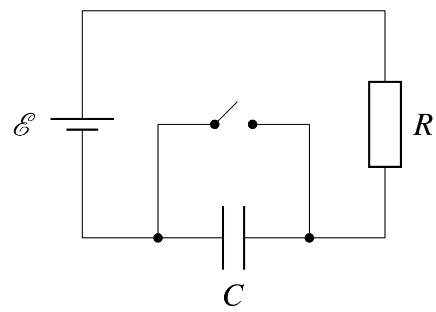
*c*) $I_0 = 0$ A y $I_\infty = 0,5$ A

*d*) $I_0 = 0,5$ A y $I_\infty = 2,5$ A

*e*) $I_0 = 2,5$ A y $I_\infty = 0$ A

Solución: Inicialmente el capacitor está descargado, entonces no hay caída de potencial a través del capacitor y la corriente a través de la segunda resistencia (la de 80Ω) es cero. Por lo tanto $I_0 = 50V/20\Omega = 2,5$ A. A tiempo muy largo, el capacitor está totalmente cargado y no hay corriente a través de él. En este caso $I_\infty = 50V/(20\Omega + 80\Omega) = 0,5$ A. La respuesta correcta es la B.

11. En el siguiente circuito el interruptor ha estado cerrado por un largo rato y a $t = 0$ se abre. ¿Cuál debiese ser el valor de la resistencia $R$ en términos de $C$ y $T$ para que a $t = T$ la caída de voltaje en la resistencia sea $\mathscr{E}/2$?




a) $R = \dfrac{T}{2C}$
b) $R = \dfrac{2T}{C}$
c) $R = \dfrac{T}{C \ln 2}$
d) $R = \dfrac{T}{2C} \ln 2$
e) No se puede determinar.

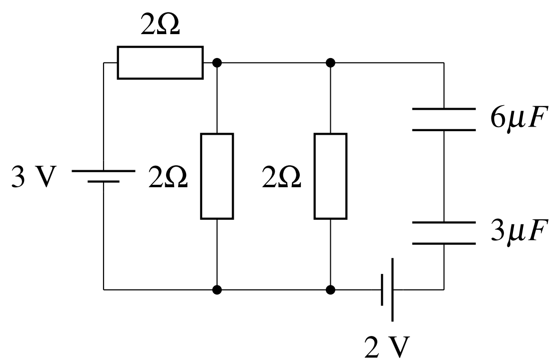
El capacitor está inicialmente descargado, ya que cuando está cerrado el interruptor no hay corriente a través del capacitor. Una vez abierto el interruptor la corriente a través del capacitor (y de la resistencia) está dada por:

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R} e^{-t/RC}$$

La caída de voltaje en la resistencia es $V_R = IR = \mathscr{E} e^{-t/RC}$. A $t = T$ $V_R = \mathscr{E}/2$, por lo que tenemos que:

$$\mathscr{E}/2 = \mathscr{E} e^{-T/RC} \implies e^{T/RC} = 2 \implies R = \frac{T}{C \ln 2}$$

12. Considere el siguiente circuito donde los capacitores están totalmente cargados. ¿Cuál es la energía almacenada en el capacitor de $3\mu$F?




*a*) $0{,}5\times10^{-6}$ J

*b*) $0{,}67\times10^{-6}$ J

*c*) $0{,}5$ J

*d*) $0{,}65\times10^{-3}$ J

*e*) $6\times10^{-6}$ J

Solución: Como los capacitores están totalmente cargados, no hay corriente a través de ellos. La diferencia de potencial (voltaje) los dos puntos $a$ y $b$ es simplemente:

$$|V_{ab}| = \left|\frac{(2 \parallel 2)}{2+(2 \parallel 2)} \times 3\text{ V} - 2\text{ V}\right| = 1\text{ V}$$

El voltaje a través del capacitor de $3\mu$F es simplemente $\frac{6}{3+6}\times 1\text{ V} = \frac{2}{3}$ V. La energía en el capacitor de $3\mu$F es entonces:

$$U = \frac{1}{2}3\mu F \times \left(\frac{2}{3}\text{ V}\right)^2 = \frac{2}{3}\times10^{-6}\text{ J} = 0{,}67\times10^{-6}\text{ J}$$