PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer Semestre 2022

MAT1203 - ÁLGEBRA LINEAL

Clase 23: La dimensión de un espacio vectorial

1. Para cada subespacio encuentre una base para el subespacio y indique la dimensión.D

   (a) $\left\{ \begin{bmatrix} s-2t \\ s+t \\ 3t \end{bmatrix} \ : \ s,t \in \mathbb{R} \right\}$

   (b) $\left\{ \begin{bmatrix} 2c \\ a-b \\ b-3c \\ a+2b \end{bmatrix} \ : \ a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$

   (c) $\left\{ \begin{bmatrix} p-2q \\ 2p+5r \\ -2q+2r \\ -3p+6r \end{bmatrix} \ : \ p,q,r \in \mathbb{R} \right\}$

   (d) $\{(a,b,c) \ : \ a-3b=c=0, b-2c=0, 2b-c=0\}$

2. Encuentre la dimensión del subespacio de todos los vectores en $\mathbb{R}^3$ cuyas entradas primera y tercera son iguales.

3. Encuentre la dimensión del subespacio generado por los vectores dados.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

4. Determine las dimensiones del espacio nulo A y el espacio columna de las matrices que se muestran a continuación:

   (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 9 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

   (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5. Los primeros cuatro polinomios de Hermite son 1, $2t$, $-2+4t^2$, y $-12t+8t^3$. Estos polinomios surgen de forma natural en el estudio de ciertas ecuaciones diferenciales importantes en física matemática.

   (a) Demuestre que los primeros cuatro polinomios de Hermite forman una base de $\mathbb{P}_3$.

   (b) Sea $\mathcal{B}$ la base de $\mathbb{P}_3$ que consta de los polinomios de Hermite y sea $\mathbf{p}(t) = -1+8t^2+8t^3$. Encuentre el vector de coordenadas de $\mathbf{p}$ con respecto de $\mathcal{B}$.