Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Ciencias Económicas y Administrativas

Primer Semestre 2013

NOTA

Curso	**:**	**Probabilidad y Estadística**
Sigla	**:**	**EAS200A**
Profesores	**:**	**Rafael Águila (Sec 01), Ricardo Olea (Sec 02 y Sec 04), Victor Correa (Sec 03)**

Pauta Control 6

Problema 1

Suponga que existen dos posibles grupos de instrumentos financieros, los cuales tienen rentabilidades aleatorias de acuerdo a las siguientes distribuciones de probabilidad.

Rentabilidad Grupo I	Probailidades
-1	0.3
0	0.2
$+1$	0.5

Rentabilidades Grupo II	Probabilidades
-1	0.5
0	0.2
$+1$	0.3

Suponga que $X_1, \ldots, X_n$ es una muestra aleatoria (independiente) de instrumentos financieros del Grupo I e $Y_1, \ldots, Y_m$ es una muestra aleatoria de instrumentos del Grupo II.

(a) **[2.0 Ptos.]** Defina como $\overline{X}_n$ e $\overline{Y}_m$ a las rentabilidades promedio de los instrumentos del Grupo I y Grupo II respectivamente. Justifique por que la distribución Normal puede representar el comportamiento probabilisticos de los dos promedios definidos anteriormente.

(b) **[4.0 Ptos.]** ¿Cual es la probabilidad que la diferencia entre los promedios de las rentabilidades sea inferior a 1? Considere $n = m = 50$.

Ayuda: Si $X \sim \text{Normal}(\mu_X, \sigma_X^2)$ e $Y \sim \text{Normal}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ son variables aleatorias independientes, entonces

$$X \pm Y \sim \text{Normal}(\mu_X \pm \mu_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2)$$

Solución:

(a) La independencia e idéntica distribución de $X_1, \ldots, X_n$ e $Y_1, \ldots, Y_m$, y que sus valores esperados y varianza estén bien definidos, nos permite aplicar el teorema del límite central **[0.5 Ptos.]** que dice que:

$$\frac{\overline{X}_n - \mu_X}{\sigma_X/\sqrt{n}} \overset{\text{aprox}}{\sim} \text{Normal}(0, 1) \Rightarrow \overline{X}_n \overset{\text{aprox}}{\sim} \text{Normal}(\mu_X, \sigma_X^2/n) \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

y

$$\frac{\overline{Y}_m - \mu_Y}{\sigma_Y/\sqrt{m}} \overset{\text{aprox}}{\sim} \text{Normal}(0, 1) \Rightarrow \overline{Y}_n \overset{\text{aprox}}{\sim} \text{Normal}(\mu_Y, \sigma_Y^2/n) \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

con $\mu_X = \text{E}(X_i)$, $\sigma_X^2 = \text{Var}(X_i)$, $\mu_Y = \text{E}(Y_j)$ y $\sigma_X^2 = \text{Var}(Y_j)$, para $i = 1, \ldots, n$ y $j = 1, \ldots, m$. **[0.5 Ptos.]**

(b) Se pide $P(|\overline{X}_n - \overline{Y}_m| < 0.1)$, con $n = m = 50$. **[0.5 Ptos.]**

Del enunciado tenemos que

$$\begin{aligned}
\mu_X &= \mathrm{E}(X) = (-1)\cdot 0.3 + (0)\cdot 0.2 + (+1)\cdot 0.5 = +0.2 \quad \textbf{[0.4 Ptos.]}\\
\mu_Y &= \mathrm{E}(X) = (-1)\cdot 0.5 + (0)\cdot 0.2 + (+1)\cdot 0.5 = -0.2 \quad \textbf{[0.4 Ptos.]}\\
\sigma_X^2 &= \mathrm{Var}(X) = (-1-\mu_X)^2\cdot 0.3 + (0-\mu_X)^2\cdot 0.2 + (+1-\mu_X)^2\cdot 0.5 = 0.76 \quad \textbf{[0.4 Ptos.]}\\
\sigma_X^2 &= \mathrm{Var}(X) = (-1-\mu_Y)^2\cdot 0.5 + (0-\mu_Y)^2\cdot 0.2 + (+1-\mu_Y)^2\cdot 0.3 = 0.76 \quad \textbf{[0.4 Ptos.]}
\end{aligned}$$

Considerando la ayuda, se tiene que

$$\overline{X}_{50} - \overline{Y}_{50} \overset{\text{aprox}}{\sim} \text{Normal}(0.4,\, 0.0304) \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

Luego

$$\begin{aligned}
P(|\overline{X}_n - \overline{Y}_m| < 0.1) &= P(\overline{X}_n - \overline{Y}_m < 0.1) - P(\overline{X}_n - \overline{Y}_m < -0.1) \quad \textbf{[0.2 Ptos.]}\\
&= \Phi\left(\frac{0.1-0.4}{0.0304}\right) - \Phi\left(\frac{-0.1-0.4}{0.0304}\right) \quad \textbf{[0.2 Ptos.]}\\
&= \Phi(-1.720618) - \Phi(-2.867697) \quad \textbf{[0.2 Ptos.]}\\
&= 1 - \Phi(1.720618) - 1 + \Phi(2.867697) \quad \textbf{[0.2 Ptos.]}\\
&= \Phi(2.867697) - \Phi(1.720618) \quad \textbf{[0.2 Ptos.]}\\
&\approx \Phi(2.87) - \Phi(1.72) \quad \textbf{[0.1 Ptos.]}\\
&= 0.9979 - 0.9573 \quad \textbf{[0.2 Ptos.]}\\
&= 0.0406 \quad \textbf{[0.1 Ptos.]}
\end{aligned}$$

+ 1 Punto Base