Melissa Aguilar C.
mjaguilar@uc.cl

Ejercicios

Problema 1. Sea la recta

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix} \tag{1}$$

y el plano:

$$\beta \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Encontrar el valor de a para que la recta esté contenida en el plano.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & a \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & a \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 2 & 7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & -2a+7 \end{array}\right] \tag{3}$$

Luego, para $a = 7/2$ la recta está contenida en el plano.

Problema 2. Se tiene el siguiente sistema de ecuaciones con x, y, z como variables y $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 2x - 2ay + 4z &= 0 \\ -y + 3z &= 3 \\ ax - 4y - az &= 2 \end{aligned}$$

Encontrar los valores de a, para que:

- El sistema solución única.
- No tenga solución.
- Tenga infinitas soluciones.

Ampliando la matriz:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2a & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 3 \\ a & -4 & -a & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2a & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 3 \\ 1 & -4/a & -1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4/a & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 3 \\ 2 & -2a & 4 & 0 \end{array}\right] \tag{4}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4/a & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & -8/a - 2a & 6 & -4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4/a & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3a/(8+2a^2)+6 & 3a/(8+2a^2)-4 \end{array}\right] \tag{5}$$

Luego, si $3a/(8+2a^2)+6$ es igual a 0, el sistema no tendría solución, esto no de cumple para ningún valor en los reales. Por lo tanto, siempre es distinto de 0, entonces la matriz tiene 3 pivotes y tendría solución ya que no depende de la columna de las constantes.

Problema 3. Sea $T:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, tal que $T(x,y,z,w) = (4x-8y+w, -x+3y+5z+3w, 4y+z+2w)$

- Encontrar la matriz de transformación lineal
- Encontrar si la matriz asociada a la transformación lineal es inyectiva y/o sobre.
- Encontrar la solución de la ecuación $A\vec{x}=0$ (A: matriz asociada a la transformación lineal).

La matriz asociada a la transformación lineal A:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Pivoteando la matriz:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 & 3 \\ 4 & -8 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 20 & 13 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 20 & 13 \\ 0 & 0 & -19 & -11 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Viendo la matriz pivoteada, la transformación lineal sería sobreyectiva. Ahora, el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} -x+3y+5z+3w &= 0 \\ 4y+20z+13w &= 0 \\ -19z-11w &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

Luego: $z=-11w/19$, $y=-110w/76-13w/4$y $x=-330w/76-39w/4-55w/19+3w$. Entonces, el vector:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -330w/76-39w/4-55w/19+3w \\ 110w/76-13w/4 \\ -11w/19 \\ w \end{pmatrix} \tag{8}$$

Con w como variable libre.

Problema 4. Determinar el valor de a para que el vector

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ a \end{pmatrix}$$

sea generado por los vectores:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{9}$$

Pivoteando:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & a \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & a \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & a \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 4 & -1 \\ 0 & 14 & -1 \\ 1 & 1 & a \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 4 & -1 \\ 0 & 14 & -1 \\ 0 & 5 & a-1 \end{array}\right] \tag{10}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 4 & -1 \\ 0 & 14 & -1 \\ 0 & 0 & a-9/14 \end{array}\right] \tag{11}$$

Luego viendo la matriz ampliada, para $a = 9/14$, los vectores seráin L.I, mientras que para $a \neq 9/14$ la solución sería inconsistente. Por lo tanto, los vectores nunca serían L.D.

Problema 5. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, tal que:

$$T\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, T\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{12}$$

Encontrar la matriz asociada de la transformación lineal. Determinar si es inyectiva y/o sobreyectiva.

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{13}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{14}$$

Aplicando la transformación lineal:

$$T\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = 4T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{15}$$

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{16}$$

Luego:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 4T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{17}$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{18}$$

Sumando las dos ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{19}$$

Con este resultado podemos obtener la columna faltante:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{20}$$

Por lo tanto:

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \tag{21}$$

Finalmente, la matriz sería:

$$\begin{pmatrix} -11 & 5 \\ -2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \tag{22}$$

La matriz es inyectiva, porque tiene pivotes en todas sus columnas.

Problema 6. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tal que $T(x, y, z) = (4x + 2y, -x + 4y + 2z, -3y + z)$

La matriz sería la siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Encontrar T^{-1}

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 12 & 2 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 1 & 4 \end{array}\right] \tag{23}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4/6 & 1/6 & 4/6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -4/6 & -1/6 & 2/6 \\ 0 & 0 & 1 & 4/6 & 1/6 & 4/6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4/18 & 1/18 & -2/18 \\ 0 & 0 & 1 & 4/6 & 1/6 & 4/6 \end{array}\right] \tag{24}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 10/18 & -2/18 & 4/18 \\ 0 & 1 & 0 & 4/18 & 1/18 & -2/18 \\ 0 & 0 & 1 & 4/6 & 1/6 & 4/6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 10/72 & -2/72 & 4/72 \\ 0 & 1 & 0 & 4/18 & 1/18 & -2/18 \\ 0 & 0 & 1 & 4/6 & 1/6 & 4/6 \end{array}\right] \tag{25}$$

Luego $T^{-1}(x,y,z) = (10x/72 - 2y/72 + 4z/72, 4x/18 + y/18 - 2z/18, 4x/6 + y/6 + 4z/6)$