P1):

a) Fuerza Resultante

$$\boxed{F_H = P_{CG}\, A_P}$$

$$\boxed{P_{CG} = h_{CG}\, \rho g} \quad \wedge \quad A_P = 8R \times 2R + 2R \times (h-2R)$$

$$A_P = 12R^2 + 2hR$$

$$A_P\, h_{CG} = \frac{1}{2}(h-2R) \times 2R \times (h-2R) + (h-2R+R) \times 8R \times 2R$$

$$h_{CG}\,(12R^2 + 2hR) = R(h^2 - 4hR + 4R^2) + 16R^2(h-R)$$

$$h_{CG}\,(12R^2 + 2hR) = h^2 R + 12hR^2 - 12R^3$$

$$h_{CG} = \frac{h^2R + 12hR - 12R^3}{12R^2 + 2hR}$$

$$F_V = \rho g \frac{V_c}{2} \quad , \quad V_c = \pi (4R)^2 \times 2R + \pi R^2 \times (h-2R)$$

$$\boxed{F_V = \rho g \left[16\pi R^3 + \frac{1}{2}\pi R^2 (h-2R)\right]}$$

b) ρ_s máximo.

En el equilibrio: $E = W$; $E = \rho g V_c$

$$W = \rho_s g \left[\pi R^2 \times 6R + \pi (4R)^2 \times 2R\right]$$

$$\rho g \left[32\pi R^3 + \pi R^2 (h-2R)\right] = \rho_s g\, 38\pi R^3$$

Se hundirá completamente si $h = 8R$.

$\boxed{\rho_s = \rho}$ → para ρ_s máximo.

c) Cuerpo flotando con $h=R$

En el equilibrio $E = W$ con $h = R$

$$\boxed{\rho_S = \frac{31}{38}\rho}$$

d) Estabilidad

¿ z_{CE} ; z_{CC} ?

La condición de estabilidad es

$$(CC)(CG) < \frac{I_O}{V_C} \quad , \quad V_C = \pi(4R)^2 R = 16\pi R^3$$

I_O es el momento de inercia de un disco de radio $4R$

$$I_O = \frac{\pi(2\times 4R)^4}{64}$$

$$\underline{I_O = 64\pi R}$$

$$z_{CC} = \frac{R}{2}$$

$$V_S z_{CG} = \pi(4R)^2 2R\times R + \pi R^2 \times 6R \times 3R = 50\pi R^4$$

$$V_S = \pi(4R)^2 2R + \pi R^2 \times 6R$$

$$z_{CG} = \frac{50\pi R^4}{38\pi R^3} = \frac{25}{19}R$$

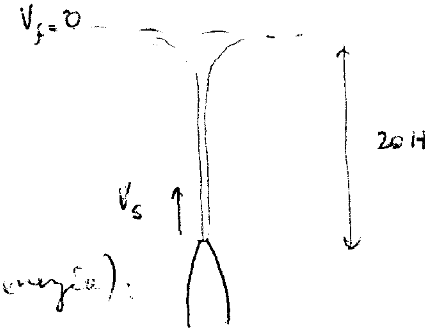
Condición de Estabilidad: $\left(\frac{25}{19}R - \frac{R}{2}\right) < \frac{64\pi R^4}{16\pi R^3}$

$$\frac{31}{38}R < 4R$$

Se cumple la condición de estabilidad ∴ __es estable__ !

P2]

a) Caudal y potencia de la bomba



Velocidad con que debe salir el chorro (balance de energía):

$$z_s + \frac{V_s^2}{2g} + \frac{\cancel{p_s}}{\cancel{\gamma}} = z_f + \cancel{\frac{V_f^2}{2g}} + \cancel{\frac{p_f}{\gamma}}$$

$$\rightarrow \quad \frac{V_s^2}{2g} = z_f - z_s = 20H$$

$$\rightarrow \quad V_s = \sqrt{40gH}$$

$$\rightarrow \quad Q = V_s \frac{S}{6} = \frac{S}{6}\sqrt{40gH}$$

La bomba debe ser capaz de vencer las diferencias de cota y las pérdidas que se producen en la válvula.

$$\Delta H_B = 20H + \frac{H}{5} = \frac{101}{5} H \quad [m]$$

En watts: $\dot{W}_B = \rho g Q \Delta H_B = \rho g \frac{S}{6}\sqrt{40gH} \; \frac{101}{5} H \quad [W]$

b) Ver dibujo.

c) <u>Caudal y potencia de la bomba</u>

El caudal se mantiene igual ; $Q = \frac{S}{6}\sqrt{40 g H}$

La bomba ahora debe además vencer las pérdidas por fricción:

$$\Delta H_B = 20H + \frac{H}{5} + 3H = \frac{116}{5} H \quad [m]$$

Potencia en watts $\dot{W}_B = \rho g Q \Delta H_B = \rho g \frac{S}{6}\sqrt{40 g H} \frac{116}{5} H \quad [W]$

d) <u>Presión justo antes de la bomba.</u>

Entre el pto. de toma de agua (o), y justo antes de la bomba (B^-).

$$z_{B^-} + \frac{p_{B^-}}{\gamma} + \frac{V_{B^-}^2}{2g} = z_o + \cancel{\frac{p_o}{\gamma}} + \cancel{\frac{V_o^2}{2g}} - 2\frac{\Delta H_f}{3} - \Delta H_s$$

$$\Rightarrow \frac{p_{B^-}}{\gamma} = (z_o - z_{B^-}) - \frac{4Q^2}{2g S^2} - 2H - \frac{H}{5}$$

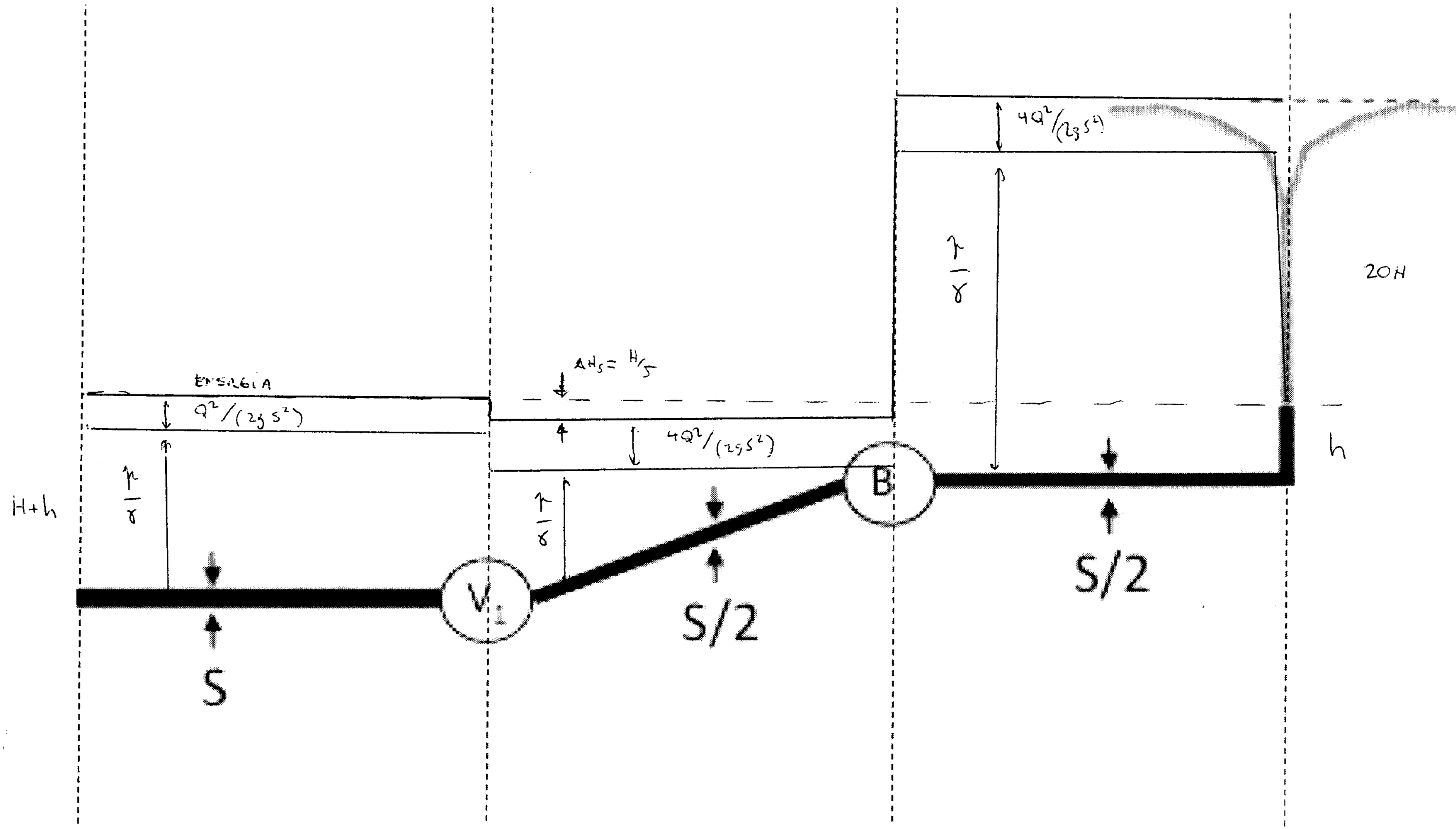
$$\Rightarrow \frac{p_{B^-}}{\gamma} = h - \frac{11}{5}H - \frac{4Q^2}{2g S^2} \simeq -\frac{11}{5}H - \frac{4Q^2}{2g S^2} \qquad (h \ll H)$$

e) Ver figura.

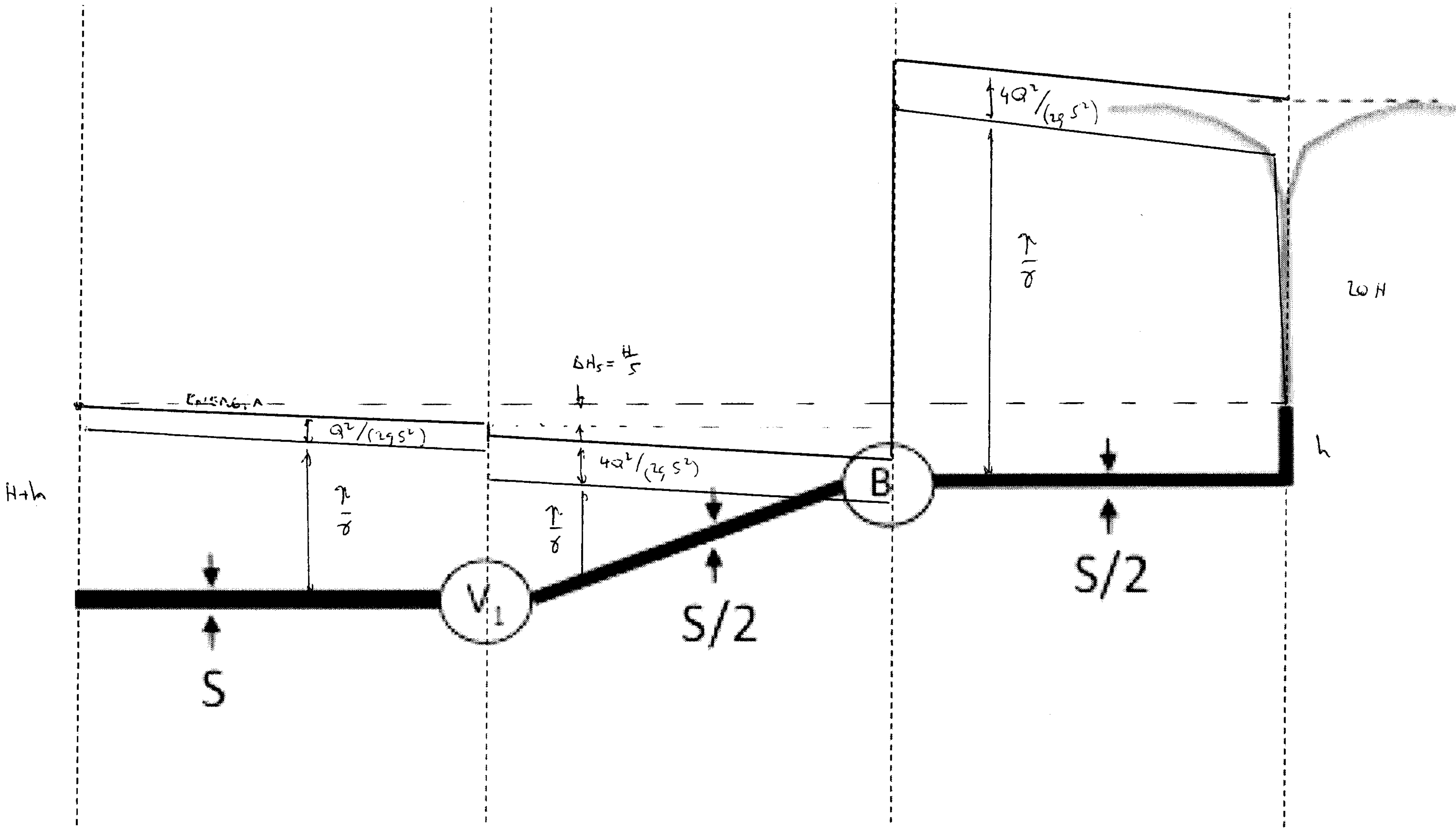
f) <u>Fza del chorro</u>

$$F_c = \rho Q V_s = \rho \frac{S}{6}\sqrt{40 g H}\sqrt{40 g H} = \rho \frac{S}{6} 40 g H = \frac{20 S}{3}\rho g H$$

SÓLO PÉRDIDAS EN LA VÁLVULA



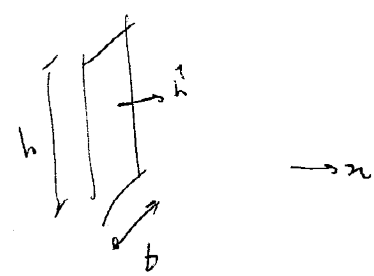
Con pérdidas en la válvula y tuberías



P3

a) Velocidad superficial

Velocidad media: $\bar{U} = \frac{1}{S} \int_S \vec{V} \cdot \hat{n} \, ds$



$$\rightarrow \bar{U} = \frac{1}{bh} \int_0^h u(z) \, b \, dz$$

$$= \frac{1}{h} \int_0^h \left(\frac{z}{h}\right)^{\frac{1}{7}} U_h \, dz$$

$$= U_h \int_0^h \left(\frac{z}{h}\right)^{\frac{1}{7}} d\left(\frac{z}{h}\right)$$

$$= \frac{U_h}{\frac{1}{7}+1} \left(\frac{z}{h}\right)^{\frac{1}{7}+1} \Bigg|_0^h$$

$$\Rightarrow \bar{U} = \frac{7}{8} U_h \qquad U_h = \frac{8}{7} \bar{U}$$

b) Flujo de cm

$$F_{cm_x} = \int_S \vec{V} \rho \vec{V} \cdot \hat{n} \, ds = \int_0^h u(z) \rho \, u(z) \, b \, dz$$

$$= \rho b \int_0^h \left(\frac{z}{h}\right)^{\frac{2}{7}} U_h^2 \, h \, d\left(\frac{z}{h}\right)$$

$$= \rho h b U_h^2 \frac{1}{\frac{2}{7}+1} \left(\frac{z}{h}\right)^{\frac{2}{7}+1} \Bigg|_0^h$$

$$F_{cm_x} = \frac{7}{9} \rho h b U_h^2 = \frac{7}{9} \rho h b \frac{8^2}{7^2} \bar{U}^2 = \frac{64}{63} \rho Q \bar{U}$$

Coeficiente de Boussinesq: $\int_S \vec{v}\rho\vec{v}\cdot\hat{n}\,ds = \beta\rho Q\bar{U}$

$$\Rightarrow \beta = \frac{64}{63}$$

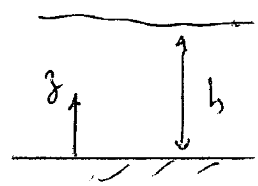
c) <u>Flujo de energía</u>

$$F_E = \int_S \left(gz + \frac{1}{2}u^2(z) + \hat{h} \right)\rho\vec{v}\cdot\hat{n}\,ds$$

$\hat{h} = \frac{p}{\rho}$ en el caso de agua sin cambios de temperatura.

En esta aplicación asumiremos una distribución hidrostática de presiones en las secciones (1) y (2):

$$p(z) = \rho g(h-z)$$



$$\Rightarrow gz + \frac{p}{\rho} = \cancel{gz} + gh - \cancel{gz} = gh$$

Luego tenemos: $F_E = \int_S gh\,\rho\, u(z)\,ds + \int_S \frac{1}{2}u^2(z)\,\rho\, u(z)\,ds$

El 1er término: $\int_S gh\,\rho\, u(z)\,ds = \underline{\rho g h Q}$

El 2do término: $\int_S \frac{1}{2}\rho\, u^3(z)\,ds = \frac{1}{2}\rho\int_0^h \left(\frac{z}{h}\right)^{\frac{3}{7}} U_h^3\, bh\, d\left(\frac{z}{h}\right)$

$$= \frac{1}{2}\rho b h U_h^3 \frac{1}{\frac{3}{7}+1}\left(\frac{z}{h}\right)^{\frac{3}{7}+1}\Bigg|_0^h$$

$$= \frac{1}{2}\frac{7}{10}\rho b h U_h^3 = \frac{1}{2}\frac{\cancel{7}}{10}\frac{8^3}{7^{\cancel{3}\,2}}\rho b h \bar{U}^3$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}\frac{512}{490}\rho Q\bar{U}^2}$$

Coeficiente de Coriolis: $\int_S \frac{\rho}{2} u^2(y)\, \rho\, \vec{v}\cdot\hat{n}\, dS = \frac{1}{2}\alpha\, \rho\, Q\, \bar{U}^2$

$$\rightarrow \quad \alpha = \frac{512}{490}$$

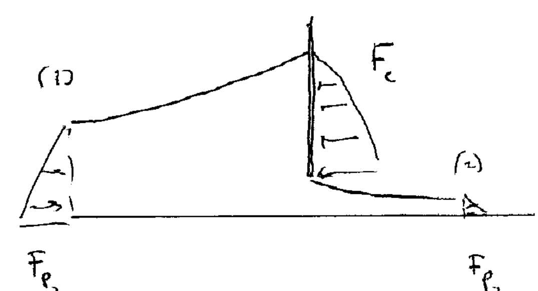
d) Fuerza sobre la compuerta.

Balance de CDM entre (1) y (2):

$$\int_{S_1} \vec{v}\rho\,\vec{v}\cdot\hat{n}\,dS + \int_{S_2} \vec{v}\rho\,\vec{v}\cdot\hat{n}\,dS = \sum \vec{F}_{ext}$$

Fzas externas: Presiones hidrostáticas en (1) y (2)
Presiones sobre el fondo y paredes
Gravedad
Se desprecian las fzas viscosas.
Fuerza sobre la compuerta.

En la dirección x:



$$F_{p_1} = \frac{1}{2}\rho g h_1^2 b$$

$$F_{p_2} = -\frac{1}{2}\rho g h_2^2 b$$

F_c: Fuerza que ejerce la compuerta sobre el fluido.

d) JUNTANDO TODO:

$$\int_{S_1} \vec{V}\rho\, \vec{V}\cdot\hat{n}\, dS + \int_{S_2} \vec{V}\rho\, \vec{V}\cdot\hat{n}\, dS = \sum \vec{F}_{ext}$$

$$-\beta\rho Q \bar{U}_1 + \beta\rho Q \bar{U}_2 = \frac{1}{2}\rho g h_1^2 b - \frac{1}{2}\rho g h_2^2 b + F_c$$

$$\Rightarrow F_c = \frac{1}{2}\rho g b\left(h_2^2 - h_1^2\right) + \beta\rho Q\left(\bar{U}_2 - \bar{U}_1\right)$$

$$F_c = \frac{1}{2}\rho g b\left(h_2^2 - h_1^2\right) + \frac{\beta\rho Q^2}{b}\left(\frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_1}\right)$$

e) $E_1 = E_2 + \Omega_{12}$

$$E_1 = \rho g h_1 Q + \frac{1}{2}\cdot\frac{512}{490}\rho Q \bar{U}_1^2 \qquad \alpha = \frac{512}{490}$$

$$E_2 = \rho g h_2 Q + \frac{1}{2}\frac{512}{490}\rho Q \bar{U}_2^2$$

$$\Rightarrow \rho g Q\left(h_1 - h_2\right) + \frac{1}{2}\frac{512}{490}\rho Q\left(\bar{U}_1^2 - \bar{U}_2^2\right) = \Omega_{12}$$

$$\Rightarrow \Omega_{12} = \rho g Q\left(h_1 - h_2\right) + \frac{1}{2}\frac{512}{490}\cdot\rho Q\left(\frac{Q^2}{b^2 h_1^2} - \frac{Q^2}{b^2 h_2^2}\right)$$

$$\Omega_{12} = \rho g Q\left(h_1 - h_2\right) + \frac{1}{2}\frac{512}{490}\frac{\rho Q^3}{b^2}\left(\frac{h_2^2 - h_1^2}{h_1^2 h_2^2}\right)$$

EN TÉRMINOS DE ALTURAS:

$$\frac{\Omega_{12}}{\rho Q} = \Delta H_{12} = h_1 - h_2 + \frac{1}{2}\frac{512}{490}\cdot\frac{Q^2}{g b^2}\left(\frac{h_2^2 - h_1^2}{h_1^2 h_2^2}\right)$$