Pontificia Universidad Católica De Chile
Facultad De Matemáticas
Departamento De Matemática
TAV 2023

Álgebra Lineal - MAT1203
Pauta de corrección Interrogación 1

1. Sean $p, q \in \mathbb{R}$ y $Ax = b$ un sistema de ecuaciones tal que la forma escalonada reducida de $[A \mid b]$ es la matriz,

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & p & q \end{array}\right]$$

Determine si existen valores de p y de q para que:

(a) el sistema no tenga solución.
(b) el sistema tenga solución única y en tal caso encuéntrela.
(c) el sistema tenga infinitas soluciones y en tal caso encuéntrelas.

Solución

a) Según el teorema visto en clases, para que no tenga solución debe ocurrir que $p = 0$ y $q \neq 0$, de esta forma la última columna de la matriz ampliada es columna pivote.

b) Para ningún valor de p y q habrá solución única ya que la tercera columna de la FER no es pivote lo que implica que la tercera variable es libre, por lo que cuando existe solución, éstas serán infinitas.

c) El sistema tiene infinitas soluciones si $p \neq 0$ o $p = q = 0$. En el caso que $p \neq 0$, las soluciones son:

$$\begin{aligned} &x_1 = 1 - \tfrac{q}{p} + x_3. \\ &x_2 = 1 - x_3 \\ &x_4 = \tfrac{q}{p} \\ &x_3 \text{ libre.} \end{aligned}$$

Por otro lado, si $p = q = 0$, entonces hay dos variables libres: $\begin{aligned} &x_1 = 1 + x_3 - x_4 \\ &x_2 = 1 - x_3 \\ &x_3, x_4 \text{ libres.} \end{aligned}$

Puntaje

- 2 puntos por responder correcta y justificadamente cada ítem. Asignar sólo 1 punto si no hay justificación.

2. Si la suma de las columnas de A es el vector $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ y la forma escalonada reducida de A es $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, ¿cuál es el conjunto solución de $A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$?

Solución Sea $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{bmatrix}$ la matriz del enunciado. Tenemos que $A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ por lo que $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ es una solución particular de $Ax = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Por otro lado, como la FER de A es equivalente a A, la solución de $Ax = 0$ está dada por la solución del sistema de la matriz ampliada

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

la que corresponde a $\begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_3 = -x_4 \\ x_2, x_3 \text{ libres} \end{cases}$. En notación vectorial:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ -x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, todas las soluciones del sistema no homogéneo $Ax = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ son de la forma

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, s, t \in \mathbb{R}.$$

Puntaje

- 2 puntos por determinar una solución particular del sistema no homogéneo.
- 2 puntos por determinar el conjunto solución de $Ax = 0$.
- 2 puntos por determinar el conjunto solución de $Ax = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

3. Encuentre el valor de h que hace a los siguientes vectores linealmente dependientes:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ h \end{bmatrix}.$$

Solución Los vectores son LD si y sólo si el sistema correspondiente a la matriz ampliada $\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 0 \\ -2 & -6 & 2 & 0 \\ 4 & 7 & h & 0 \end{bmatrix}$ tiene infinitas soluciones. Buscamos su forma escalonada:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 0 \\ -2 & -6 & 2 & 0 \\ 4 & 7 & h & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h+4 & 0 \end{bmatrix}$$

De esta forma, los vectores son LD si y sólo si $h = -4$.

Puntaje

- 2 puntos por establecer alguna manera de determinar si los vectores son LD. No importa si no desarrolla la idea.
- 2 puntos por desarrollar la idea anterior hasta obtener el resultado.
- 2 puntos por obtener el resultado correcto.

4. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal que convierte el vector $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y el vector $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Determine la matriz estándar de la transformación T.

(b) Justifique si T es inyectiva y/o sobreyectiva.

Solución

a) Notamos que

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

por lo que

$$T\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = T\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} - T\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Por otro lado,

$$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \frac{4}{3}\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$$

de esta forma

$$T\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \frac{4}{3}T\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix} - T\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix} = \frac{4}{3}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\7/3\\4/3\end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, la matriz estándar de T es

$$\begin{bmatrix}1 & -1\\-2 & 7/3\\-1 & 4/3\end{bmatrix}.$$

b) Ya que las columnas de la matriz estándar no son múltiplos escalares entre sí, éstas son linealmente independientes por lo que T es inyectiva.
Por otro lado como la matriz tiene má filas que columnas, T no puede ser sobreyectiva. Esto debido a que la matriz no tiene pivotes en cada fila.

Puntaje

- 1,5 puntos por determinar cada columna de la matriz estándar. (3 puntos en total).
- 1,5 puntos por responder correctamente sobre la inyectividad de T.
- 1,5 puntos por responder correctamente sobre la sobreyectividad de T.