



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TAV 2024

Cálculo I ∗ MAT1610

Interrogación 2

1. a) 1) Calcule $\left(\frac{1+x}{1+x^2} + x^x \right)'$.

Una Solución:

Si $y = x^x$ entonces $\ln(y) = x \ln(x)$ y

$$\begin{aligned}\frac{y'}{y} &= \ln(x) + x \frac{1}{x} \\ &= \ln(x) + 1\end{aligned}$$

así, $y' = x^x (\ln(x) + 1)$ y

$$\begin{aligned}\left(\frac{1+x}{1+x^2} + x^x \right)' &= \frac{1+x^2 - (1+x)2x}{(1+x^2)^2} + x^x (\ln(x) + 1) \\ &= \frac{-x^2 - 2x + 1}{(1+x^2)^2} + x^x (\ln(x) + 1)\end{aligned}$$

2) Calcule $\frac{dy}{dx}$ si $y^3 - xy = 6$

Una Solución:

Derivando en ambos lados de la ecuación se tiene que $3y^2 \frac{dy}{dx} - y - x \frac{dy}{dx} = 0$ y

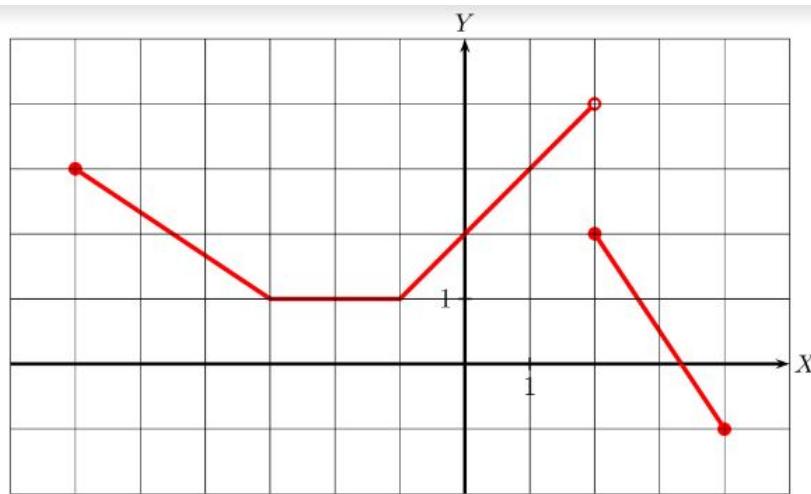
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{3y^2 - x}$$

- b) Sea $y = f(x)$ la función cuya gráfica está formada por segmentos de rectas como en la imagen y $g(x) = f(e^x + x - 1)$. Determine, si existen, los valores:

$$f'(2), f'(-2), g'(0), f'(-1), f''(\pi)$$

Justifique en cada caso.

Una Solución:



- $f'(2)$ no existe ya que ya que f no es continua en $x = 2$ ($\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 4 \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$)
- $f'(-2) = 0$ ya que, $f'(x) = 0$ para $x \in (-3, -1)$ pues la función es constante en ese intervalo
- $g'(x) = f'(e^x + x - 1)(e^x + 1)$, entonces $g'(0) = f'(0)(e^0 + 1) = 2f'(0)$ y como f es lineal en el intervalo $(-1, 2)$, su derivada es constante e igual a la pendiente de la recta que contiene a dicho segmento, $f'(0) = \frac{3-2}{1-0} = 1$ y por ello $g'(0) = 2 \cdot 1 = 2$
- $f'(-1)$ no existe ya que la recta tangente desde la derecha tiene pendiente 1 y pendiente 0 desde la izquierda por lo que f no admite derivada en $x = -1$

$$\left(\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(-1+h) - 1}{h} = 0 \neq \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(-1+h) - 1}{h} = 1 \right)$$

- $f''(\pi) = 0$ como f es lineal en $(2, 3)$, su derivada en dicho intervalo es constante y por ello su segunda derivada es cero en todo ese intervalo.

Evaluación. Se asignará el puntaje si los cálculos/resultados son correctos, con un desarrollo que justifique su respuesta.

- **Criterio 1(a1)** Asignar **(0.5 pto)** por calcular correctamente la derivada de $\frac{1+x}{1+x^2}$.
- **Criterio 2(a1)** Asignar **(0.4 pto)** por aplicar correctamente logaritmo y propiedad en la expresión $y = x^x$.
- **Criterio 3(a1)** Asignar **(0.6 pto)** por calcular correctamente la derivada x^x .
- **Criterio 1(a2)** Asigna **(1.0 pto)** por derivar correctamente en ambos lados de la ecuación
- **Criterio 2(a2)** Asigna **(0.5 pto)** por determinar correctamente $\frac{dy}{dx}$.
- **Criterio 1(b)** Asigna **(0.6 pto)** por determinar la existencia y/o el valor de cada ítem (respuesta y argumento o cálculos correcto) de $f'(2)$

- **Criterio 2(b)** Asigna **(0.6 pto)** por determinar la existencia y/o el valor de cada ítem (respuesta y argumento o cálculos correcto) $\deg'(-2)$
- **Criterio 3(b)** Asigna **(0.6 pto)** por determinar la existencia y/o el valor de cada ítem (respuesta y argumento o cálculos correcto) $\deg'(0)$
- **Criterio 4(b)** Asigna **(0.6 pto)** por determinar la existencia y/o el valor de cada ítem (respuesta y argumento o cálculos correcto) $\deg'(-1)$.
- **Criterio 5(b)** Asigna **(0.6 pto)** por determinar la existencia y/o el valor de cada ítem (respuesta y argumento o cálculos correcto) $\deg''(\pi)$

2. a) Determine la aproximación lineal de $f(x) = e^x \sec(x)$ en $x = 0$. Use esta aproximación lineal para determinar el valor aproximado de $f(-0,2)$.

Una Solución:

$$f(0) = e^0 \sec(0) = 1$$

$$f'(x) = e^x \sec(x) + e^x \sec(x) \tan(x)$$

$$f'(0) = e^0 \sec(0) + e^0 \sec(0) \tan(0) = 1 + 0 = 1$$

Por lo tanto, la aproximación lineal de $f(x) = e^x \sec(x)$ en $x = 0$ es

$$L(x) = 1(x - 0) + 1 = x + 1$$

Para x cerca de 0, $f(x) \approx x + 1$, entonces $f(-0,2) \approx -0,2 + 1 = 0,8$

- b) Determine los valores de mínimo y máximo global de $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 2)$ sobre el intervalo $[-2, 2]$.

Una Solución:

como la ecuación $x^2 - 2x + 2 = 0$ no tiene solución real (discriminante $-4 < 0$) entonces f está definida para cualquier valor real y por ser composición de funciones continuas, es continua en \mathbb{R} , en particular, lo es en $[-2, 2]$. Por el teorema de valor extremo en un intervalo cerrado, f alcanza máximo y mínimo global en dicho intervalo.

Se tiene que $f'(x) = \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 2}$, entonces el número crítico es $x = 1$ y, como la ecuación $x^2 - 2x + 2 = 0$ no tiene solución real (discriminante $-4 < 0$), el dominio de f' es \mathbb{R} , en consecuencia, $x = 1$ es el único número crítico.

$$f(1) = \ln(1) = 0$$

$$f(-2) = \ln(10) \quad y \quad f(2) = \ln(2)$$

y,

$$f(1) = 0 < f(2) = \ln(2) < f(-2) = \ln(10).$$

Entonces,

el valor de mínimo global de $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 2)$ sobre el intervalo $[-2, 2]$ es $f(1) = 0$

el valor de máximo global de $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 2)$ sobre el intervalo $[-2, 2]$ es $f(-2) = \ln(10)$

Evaluación. Se asignará el puntaje si los cálculos/resultados son correctos, con un desarrollo que justifique su respuesta.

- **Criterio 1(a)** Asignar (0.2 pto) por calcular correctamente la derivada de $f(0)$.
- **Criterio 2(a)** Asignar (1.0 pto) por calcular correctamente la derivada $f(x)$.
- **Criterio 3(a)** Asignar (0.3 pto) por calcular correctamente $f'(0)$.
- **Criterio 4(a)** Asignar (0.8 pto) por determinar ecuación de la aproximación lineal.
- **Criterio 5(a)** Asignar (0.7 pto) por Usar correctamente aproximación lineal para obtener $f(-0,2)$

- **Criterio 1(b)** Asignar **(1.0 pto)** por calcular correctamente la función derivada.
- **Criterio 2(b)** Asignar **(0.5 pto)** por determinar correctamente los número críticos.
- **Criterio 3(b)** Asignar **(0.3 pto)** por determinar correctamente imagen de número crítico.
- **Criterio 4(b)** Asignar **(0.2 pto)** por usar (indicar) continuidad y teorema valor extremo.
- **Criterio 5(b)** Asignar **(0.3 pto)** por determinar correctamente imagen del extremo izquierdo del intervalo.
- **Criterio 6(b)** Asignar **(0.3 pto)** por determinar correctamente imagen del extremo derecho del intervalo.
- **Criterio 7(b)** Asignar **(0.2 pto)** por determinar correctamente valor máximo global extremos en el intervalo.
- **Criterio 8(b)** Asignar **(0.2 pto)** por determinar correctamente valor mínimo global extremos en el intervalo.

3. Considere la función $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$, cuyas primeras dos derivadas son

$$f'(x) = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2} \text{ y } f''(x) = \frac{8}{(x-2)^3}$$

Determine, si existen:

- a) El dominio de f . $\mathbb{R} - \{2\}$

- b) Las asíntotas (verticales, horizontales, oblicuas). Las asíntotas verticales:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} = +\infty \text{ y } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} = -\infty$$

$x = 2$ es asíntota vertical. Las asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 2 + \frac{4}{x}}{1 - \frac{2}{x}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 2 + \frac{4}{x}}{1 - \frac{2}{x}} = -\infty$$

Por lo tanto, f no tiene asíntotas horizontales

Las asíntotas oblicuas:

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}}{1 - \frac{2}{x}} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 4 - x^2 + 2x}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x - 2} = 0. \text{ Ecuación } y = x$$

$$a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}}{1 - \frac{2}{x}} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x + 4 - x^2 + 2x}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x - 2} = 0. \text{ Ecuación } y = x$$

- c) Los números críticos. $f'(x) = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2} = 0$ si $x(x-4)$, es decir, $x = 0$ o $x = 4$.

f' se indetermina en $x = 2$ pero, dicho valor no es parte del dominio. Así, los únicos números críticos de f son $x = 0$ y $x = 4$.

- d) Los intervalos donde f es creciente y los intervalos donde f es decreciente.

Intervalo	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, 4)$	$(4, \infty)$
Signo de f'	+	-	-	+

$f'(x) > 0$ en $(-\infty, 0); (4, \infty)$ entonces f es creciente en $(-\infty, 0); (4, \infty)$.

$f'(x) < 0$ en $(0, 2); (2, 4)$ entonces f es decreciente en $(0, 2); (2, 4)$.

- e) Los valores máximos locales y valores mínimos locales de f .

f' cambia de positiva a negativa en $x = 0$ por lo que $f(0) = -2$ es un valor máximo local de f .

f' cambia de negativa a positiva en $x = 4$ por lo que $f(4) = 6$ es un valor mínimo local de f .

(También se puede usar prueba segunda derivada)

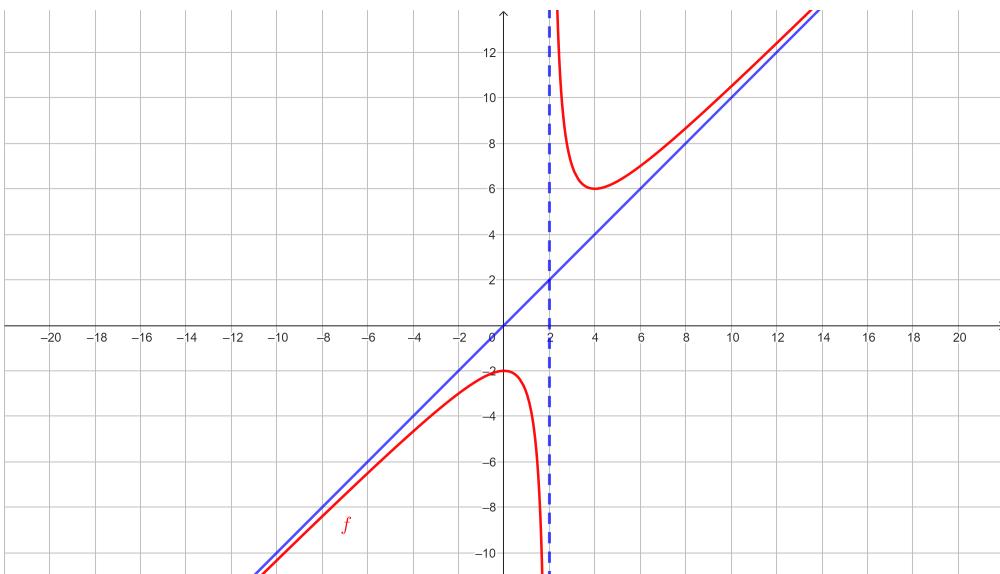
- f) Los intervalos donde f es cóncava hacia arriba y los intervalos donde f es cóncava hacia abajo.

Intervalo	$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
Signo de f''	-	+

$f''(x) < 0$ en $(-\infty, 2)$ entonces f es cóncava hacia abajo en $(-\infty, 2)$.

$f''(x) > 0$ en $(2, \infty)$ entonces f es cóncava hacia arriba en $(2, \infty)$. No existen puntos de inflexión

- g) Un esbozo de la gráfica de f .



Evaluación. Se asignará el puntaje si los cálculos/resultados son correctos, con un desarrollo que justifique su respuesta.

- **Criterio 1(a)** Asignar **(0.2 pto)** por determinar correctamente el dominio de f .
- **Criterio 1(b)** Asignar **(0.3 pto)** por determinar correctamente la ecuación de la asíntota vertical (solo se asigna si calcula límites laterales, basta con uno)
- **Criterio 2(b)** Asignar **(0.2 pto)** por determinar correctamente el límite hacia infinito positivo.
- **Criterio 3(b)** Asignar **(0.2 pto)** por determinar correctamente el límite hacia infinito negativo.
- **Criterio 4(b)** Asignar **(0.2 pto)** por concluir que no existen asíntotas horizontales (solo se asigna si se asignaron los puntajes de dos items anteriores)
- **Criterio 5(b)** Asignar **(0.5 pto)** por determinar correctamente una ecuación de la asíntota oblicua a izquierda

- **Criterio 6(b)** Asignar **(0.5 pto)** por determinar correctamente una ecuación de la asíntota oblicua a derecha.
- Criterio 1(c) Asignar **(0.3 pto)** por determinar correctamente los números críticos.
- Criterio 1(d) Asignar **(0.5 pto)** por determinar una tabla de signo o análisis equivalente para f' .
- Criterio 2(d) Asignar **(0.3 pto)** por determinar correctamente los intervalos donde f es creciente.
- Criterio 3(d) Asignar **(0.3 pto)** por determinar correctamente los intervalos donde f es decreciente.
- Criterio 1(e) Asignar **(0.4 pto)** por determinar correctamente valor máximo local
- Criterio 2(e) Asignar **(0.4 pto)** por determinar correctamente valor mínimo local
- Criterio 1(f) Asignar **(0.4 pto)** por determinar tabla de signo o equivalente para f'' .
- Criterio 2(f) Asignar **(0.4 pto)** por determinar correctamente los intervalos donde f es cóncava hacia arriba.
- Criterio 3(f) Asignar **(0.4 pto)** por determinar correctamente los intervalos donde f es cóncava hacia abajo.
- Criterio 1(g) Asignar **(0.5 pto)** por la gráfica que refleje la información obtenida. (se asigna si es correcta y es consistente con la información dada en el análisis)

4. a) Una partícula se desplaza a lo largo de la hipérbola $xy = 8$. Cuando se encuentra en el punto $(4, 2)$ la coordenada y varía a razón de 3cm/s ¿Cuál es la razón de cambio de la coordenada x del punto en ese instante?

Una Solución:

La ecuación de movimiento de la partícula en un instante t cualquiera, está regulado por

$$x \frac{dy}{dt} + y \frac{dx}{dt} = 0$$

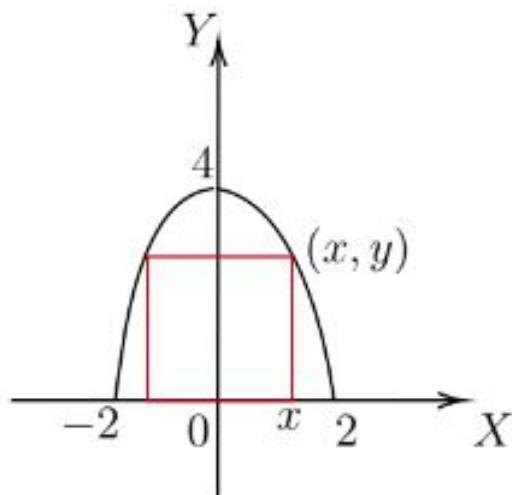
En el instante t en el que la partícula se encuentra en el punto $(4, 2)$, la ecuación es

$$4 \cdot 3 + 2 \frac{dx}{dt} = 0$$

de donde: $\frac{dx}{dt} = -6\text{cm/seg}$

- b) Determine el rectángulo de área máxima que se puede inscribir entre la parábola $y = 4 - x^2$ y el eje X , $y \geq 0$.

Una Solución:



$$A(x) = 2xy = 2x(4 - x^2)$$

$$A'(x) = 8 - 6x^2$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Dado que $A''(x) = -12x$ y $A''\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{24}{\sqrt{3}} < 0$, por tanto en el punto: $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$ el área es máxima. Así las dimensiones del rectángulo de mayor área son:

$$\frac{4}{\sqrt{3}} \times \frac{8}{3}$$

Evaluación. Se asignará el puntaje si los cálculos/resultados son correctos, con un desarrollo que justifique su respuesta.

- **Criterio 1(a)** Asignar **(1.0 pto)** por obtener la ecuación de movimiento en un instante t cualquiera.
- **Criterio 2(a)** Asignar **(1.0 pto)** por obtener la ecuación de movimiento en el instante en el que la partícula.
- **Criterio 3(a)** Asignar **(1.0 pto)** por la razón de cambio de la coordenada pedida, correcta. se encuentra en el punto $(4, 2)$
- **Criterio 1(b)** Asignar **(1.0 pto)** por obtener la función de área del rectángulo inscrito.
- **Criterio 2(b)** Asignar **(0.5 pto)** por determinar la derivada y 0.5 por el punto crítico.
- **Criterio 3(b)** Asignar **(0.5 pto)** por determinar por el punto crítico.
- **Criterio 4(b)** Asignar **(0.5 pto)** por verificar que la segunda derivada en el punto es negativa
- **Criterio 5(b)** Asignar **(0.5 pto)** por determinar las dimensiones del rectángulo (o la ubicación de los vértices).

Toda respuesta debe ir acompañada con un desarrollo que justifique su solución. En caso contrario la respuesta será evaluada con puntaje mínimo

TIEMPO: 120 MINUTOS
SIN CONSULTAS
SIN CALCULADORA
PROHIBIDO TENER CELULAR Y/O RELOJES INTELIGENTE PRENDIDOS