Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Interrogación 3

26 de Octubre de 2017

Profesores: Gabriel Diéguez - Fernando Suárez

Instrucciones

- Use lápiz pasta. Por el uso de lápiz mina usted pierde el derecho a recorreción.
- Rellene sus datos en cada hoja de respuesta que utilice.
- Cada pregunta debe responderse en hojas separadas.
- Entregue al menos una hoja por pregunta.
    - Si entrega la pregunta **completamente en blanco**, tiene nota mínima 1.5 en vez de 1.0 en la pregunta entregada.

Pregunta 1

Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo. Demuestre que G es bipartito si y sólo si no contiene ningún ciclo de largo impar.

Solución

($\Rightarrow$) Supongamos que G contiene un ciclo de largo impar, digamos $C = (v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_k, v_1)$, con k un natural impar, demostraremos que G no puede ser bipartito. Supongamos que G es bipartito con particiones V_1 y V_2 y supongamos sin pérdida de generalidad que $v_1 \in V_1$. Dado que C es un ciclo, necesariamente $v_i v_{i+1} \in E(G)$ para $1 \leq i < k$ y $v_k v_1 \in (G)$, por lo que debe ocurrir que $v_2 \in V_2, v_3 \in V_1, v_4 \in V_2$, etc. En general debe ocurrir que para los vértices del ciclo C, $v_i \in V_1$ si i es impar, y $v_i \in V_2$ si i es par, luego $v_k \in V_1$ lo que es una contradicción con el hecho de suponer que V_1 es una partición que contiene a v_1 ya que $v_k v_1 \in E(G)$.

($\Leftarrow$) Supongamos que G no contiene ningún ciclo de largo impar, demostraremos que es posible definir una partición de los vértices de G en dos conjuntos independientes. Sea v un vértice cualquiera de $V(G)$, definimos los siguientes conjuntos:

$$V_1 = \{u \in V(G) \mid \text{existe un camino de largo impar de } v \text{ a } u\}$$
$$V_2 = \{u \in V(G) \mid \text{existe un camino de largo par de } v \text{ a } u\}$$

Si existiera una arista entre dos vértices de V_1 digamos u_1 y u_2, entonces, dado que existen caminos $v - u_1$ y $v - u_2$ ambos de largo impar, existiría una caminata cerrada de largo impar formada por los dos caminos anteriores más la arista $v_1 v_2$ y por el lema visto en clases existiría un ciclo de largo impar contradiciendo nuestra suposición. Si existiera una arista entre dos vértices de V_2 digamos w_1 y w_2, entonces, dado que existen caminos $v - w_1$ y $v - w_2$ ambos de largo par, existiría una caminata cerrada de largo impar formada por los dos caminos anteriores más la arista $w_1 w_2$ y nuevamente por el lema visto en clases existiría un ciclo de largo impar contradiciendo nuestra suposición. Finalmente no existe arista entre vértices de V_1 y no existe aristas entre vértices de V_2 y como G es conexo se tiene que $V_1 \cup V_2 = V(G)$ por lo que G es bipartito con particiones V_1 y V_2.

Pauta

- 3 pts. por ($\Rightarrow$).
- 3 pts. por ($\Leftarrow$).
- Puntajes intermedios a criterio del corrector.

Pregunta 2

Sean f_1, f_2, g_1 y g_2 funciones de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$. ¿Son correctas las siguientes afirmaciones? Demuestre o dé un contraejemplo.

a) Si $f_1 \in \mathcal{O}(g_1)$ y $f_2 \in \mathcal{O}(g_2)$, entonces $f_1 \circ f_2 \in \mathcal{O}(g_1 \circ g_2)$.

b) Sea g_1 tal que es asintóticamente no decreciente y b-armónica para todo $b \in \mathbb{N}^+$.

   Si $f_1 \in \mathcal{O}(g_1)$ y $f_2 \in \mathcal{O}(g_2)$, entonces $f_1 \circ f_2 \in \mathcal{O}(g_1 \circ g_2)$.

Solución

a) La afirmación es falsa. Basta con un contra-ejemplo. Sean las funciones:

- $f_1(n) = e^n$
- $g_1(n) = e^n$
- $f_2(n) = 2n$
- $g_2(n) = n$

Se puede notar que tanto $f_1 \in \mathcal{O}(g_1)$ como $f_2 \in \mathcal{O}(g_2)$. Al realizar la composición de funciones, se obtiene:

- $f_1 \circ f_2(n) = e^{2n}$
- $g_1 \circ g_2(n) = e^n$

De donde sabemos que $f_1 \circ f_2 \notin \mathcal{O}(g_1 \circ g_2)$.

b) Dadas las tres propiedades enunciadas, podemos escribir:

$$(\exists c_1 \in \mathbb{R}^+)(\exists n_1 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_1) \qquad f_1(n) \leq c_1 \cdot g_1(n)$$

$$(\exists c_2 \in \mathbb{R}^+)(\exists n_2 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_2) \qquad f_2(n) \leq c_2 \cdot g_2(n)$$

$$(\exists n_3 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_3) \qquad g_1(n+1) \geq g_1(n)$$

Luego, por estas tres propiedades y tomando $n_4 = max\{n_1, n_2, n_3\}$ se puede inferir:

$$(\forall n \geq n_4) \qquad f_1(f_2(n)) \leq c_1 \cdot g_1(c_2 \cdot g_2(n))$$

Luego, como g_1 es $b-$armónica para todo b, y en particular para c_2, existe $c_3 \in \mathbb{R}^+$ tal que:

$$(\forall n \geq n_4) \qquad f_1(f_2(n)) \leq c_1 \cdot g_1(c_2 \cdot g_2(n)) \leq c_1 \cdot c_3 \cdot g_1(g_2(n))$$

Con lo que se logra concluir que $f_1 \circ f_2 \in \mathcal{O}(g_1 \circ g_2)$.

Pauta

a)
- 1 pto. por decir que es falso.
- 2 ptos. por contraejemplo o demostración.

b)
- 1 pto. por decir que es verdadero.
- 2 ptos. por contraejemplo o demostración.

Puntajes intermedios a criterio del corrector.

Pregunta 3

Sea $G = (V, E)$ un grafo.

a) Demuestre que o bien G es conexo, o bien lo es su complemento.

b) Demuestre que si G es conexo, entonces los dos caminos más largos en G comparten al menos un vértice.

c) Demuestre que si $|V| > |E|$, entonces G tiene una componente conexa que es un árbol.

Solución

a) Nos enfocaremos en el caso cuando el grafo es disconexo ya que en otro caso la propiedad se cumple de manera trivial. Sea G un grafo disconexo, queremos mostrar que $\bar{G}$ es conexo. Sean v y w vértices de G. Si la arista vw no está G entonces pertenece a $\bar{G}$. En otro caso, si vw pertenece a G entonces v y w pertenecen a la misma componente conexa en G. Luego, como G es disconexo debe existir un vértice u en otra componente conexa distinta tal que uv y uw no están en G. Luego vuw es un camino entre v y w en $\bar{G}$. Como v y w son arbitrarios, concluimos que $\bar{G}$ es conexo.

b) Demostraremos por contradicción.

Sean $C_1 = (v_1, \ldots, v_m)$ y $C_2 = (u_1, \ldots, u_n)$ los 2 caminos más largos en G, suponemos no comparten ningún vértice. Dado que G es conexo debe existir un camino C^* entre dos vértices de C_1 y C_2. Sea $C^* = (v_i, x_1, \ldots, x_{k-1}, u_j)$ el más corto de estos caminos, es claro que los únicos vértices de C_1 y C_2 que pueden aparecer en C son v_i y u_j. Sin pérdida de generalidad, asumamos que $i \geq \frac{m}{2}$ y $j \geq \frac{n}{2}$ y consideremos $C_3 = (v_1, \ldots, v_i, x_1, \ldots, x_{k-1}, u_j, \ldots, u_n)$, que consiste en las primeras i aristas de C_1 seguidas de las p aristas de C^* más las j aristas de C_2. C_3 es un camino de largo $i + j + k > \frac{m}{2} + \frac{n}{2} + k > \frac{m+n}{2}$. Por lo tanto, C_3 es un camino estrictamente más largo que el promedio de C_1 y C_2, y por ende más largo que C_1 o C_2, lo cual es una contradicción.

c) Sea $G(V, E)$, si G tiene sólo un vértice, este es una componente conexa por si solo y a su vez un árbol. En el caso donde no ocurra esto, por contradicción todas nuestras componentes conexas contienen un ciclo. Sea $G'(V', E')$ una componente arbitraria, G' es tal que $|V'| \leq |E'|$, ya que G' contiene a lo menos un ciclo. Sumando todos nuestros vértices y aristas de las distintas componentes, llegamos a que $|V| \leq |E|$, lo que es una contradicción con lo planteado en el enunciado.

Pauta

a) 2 pts.

b) 2 pts.

c) 2 pts.

Puntajes intermedios a criterio del corrector.

Pregunta 4

Se quiere multiplicar dos enteros x e y. Considere el siguiente algoritmo:

function MULTIPLICAR(x, y)
$n \leftarrow \max(\text{largo}(x), \text{largo}(y))$
if $n = 1$ **then**
  return $x \cdot y$
end if
$x_L \leftarrow$ los $\lceil n/2 \rceil$ dígitos más a la izquierda de x
$x_R \leftarrow$ los $\lfloor n/2 \rfloor$ dígitos más a la derecha de x
$y_L \leftarrow$ los $\lceil n/2 \rceil$ dígitos más a la izquierda de y
$y_R \leftarrow$ los $\lfloor n/2 \rfloor$ dígitos más a la derecha de y
$P_1 \leftarrow$ MULTIPLICAR (x_L, y_L)
$P_2 \leftarrow$ MULTIPLICAR (x_R, y_R)
$P_3 \leftarrow$ MULTIPLICAR $(x_L + x_R, y_L + y_R)$
  return $P_1 \cdot 10^n + (P_3 - P_1 - P_2) \cdot 10^{n/2} + P_2$

a) Encuentre una recurrencia $T(n)$ para la cantidad de comparaciones que realiza el algoritmo MULTIPLICAR.

b) Determine la complejidad del algoritmo en el peor caso en notación asintótica. Si utiliza alguna sustitución de variables, debe generalizar su solución.

c) Corrobore su resultado anterior de acuerdo al teorema maestro.

Solución

a)

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 2T(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + 1 & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

b) Realizamos un cambio de variable, $n = 2^k$, por lo que queda:

$$T(2^k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 3T(2^{k-1}) + 1 & \text{si } k > 0 \end{cases}$$

De forma recursiva ocurre que:

$$T(2^k) = 3(T(2^{k-1}) + 1$$

$$T(2^k) = 9(T(2^{k-2}) + 1 + 3$$

$$T(2^k) = 27(T(2^{k-3}) + 1 + 3 + 9$$

Generalizando tenemos:

$$T(2^k) = 3^i(T(2^{k-i}) + \sum_{j=0}^{i-1} 3^j$$

Utilizando serie geométrica:

$$\sum_{j=0}^{k-1} 3^j = 1 + \sum_{j=0}^{k-1} 3^j = 1 + \frac{3^k - 3}{3 - 1}$$

Dado que $n = 2^k$, tenemos que k = $\log_2 n$. Reemplazando se obtiene:

$$T(n) = 3^{log_2 n} + \frac{3^{log_2 n}}{2} - \frac{1}{2}$$

Por propiedades de logaritmo, usamos cambio de base y queda:

$$T(n) = \frac{3}{2}(n^{log_2 3}) - \frac{1}{2}$$

Por lo tanto se concluye que $T(n) \in \Theta(n^{log_2 3} | POTENCIA_2)$. Es evidente que $T(n)$ y $n^{log_2 3}$ son asintóticamente no decrecientes, y que esta última es además $2-$armónica. Por lo tanto, concluimos que $T(n) \in O(n^{log_2 3})$.

c) Por teorema maestro se tiene que $a_1 = 2$, $a_2 = 1$, $b = 2$ y $d = 0$. Como $a_1 + a_2 = 3 > 1 = b^d$,se tiene que $T(n) \in \Theta(n^{log_b a_1 + a_2}) = T(n) \in \Theta(n^{log_2 3})$, lo cual concuerda con el resultado obtenido en b).

Pauta

a)
- 0.5 ptos. caso base.
- 1.5 ptos. caso recursivo.

b)
- 1 pto. por sustitución y desarrollo.
- 1 pto. por determinar la complejidad correcta.

c)
- 1.5 ptos. por utilizar correctamente el teorema maestro.
- 0.5 ptos. por comparar con el resultado obtenido en b).

Puntajes intermedios a criterio del corrector.