Control 3: FIS1514 - Dinámica

Instituto de Física

Pontificia Universidad Católica de Chile

Profs: E. Arévalo, B. Loewe, D. Teca,

Primer Semestre 2025

Duración de 40 minutos, sin apuntes ni aparatos electrónicos
Marcar con nombre, rut, sección y numero de estudiante cada cuadernillo
Usar un cuadernillo por problema

---

1. Una pelota de masa m inicialmente a una altura $h_i = h$ con respecto al suelo se deja caer desde el reposo. La pelota luego rebota en el suelo y vuelve a elevarse, llegando a una altura máxima $h_f = \alpha^2 h$, donde $\alpha < 1$. La aceleración de gravedad es g.
   a) Despreciando el roce con el aire, calcule el impulso que el suelo hace sobre la pelota. Recuerde que el impulso es un vector.
   b) Si el rebote toma un tiempo τ, determine la fuerza promedio que el suelo ejerce sobre la pelota.

a) Calculemos primero el momento lineal con el cual la pelota llega al suelo antes de rebotar: $\vec{v}_I = -v_I\hat{j}$. Como la pelota parte del reposo, su energía inicial es puramente potencial $E_1 = mgh$, donde hemos puesto el 0 de energía potencial en el suelo. Justo antes de rebotar, la energía es puramente cinética $E_2 = mv_I^2$. Usando la conservación de la energía mecánica, $E_1 = E_2$, vemos que $mgh = mv_I^2/2$ y por lo tanto $v_I = \sqrt{2gh}$. Luego el momento lineal de la pelota justo antes del rebote es

$$\vec{p}_I = m\vec{v}_I = -m\sqrt{2gh}\,\hat{j}. \tag{1}$$

Después del rebote, la pelota tiene velocidad $\vec{v}_{II} = v_{II}\hat{j}$ y su energía es puramente cinética: $E_3 = mv_{II}^2/2$. Cuando la pelota llega a su nueva altura máxima $\alpha^2 h$, su energía es nuevamente puramente potencial: $E_4 = mg\alpha^2 h$. Ocupando nuevamente la conservación de la energía mecánica, $E_3 = E_4$, vemos que $mv_{II}^2/2 = mg\alpha^2 h$ y por lo tanto $v_{II} = \alpha\sqrt{2gh}$. Luego el momento lineal de la pelota justo después del rebote es

$$\vec{p}_{II} = m\vec{v}_{II} = m\alpha\sqrt{2gh}\,\hat{j}. \tag{2}$$

Con esto, podemos calcular el impulso entregado por el suelo $\vec{I}$ directamente

$$\vec{I} = \vec{p}_{II} - \vec{p}_I = m\alpha\sqrt{2gh}\,\hat{j} - (-m\sqrt{2gh}\,\hat{j}). \tag{3}$$

Así,

$$\vec{I} = m\sqrt{2gh}(1+\alpha)\hat{j}. \tag{4}$$

b) La fuerza promedio $\bar{\vec{F}}$ satisface $\vec{I} = \tau\bar{\vec{F}}$. Luego

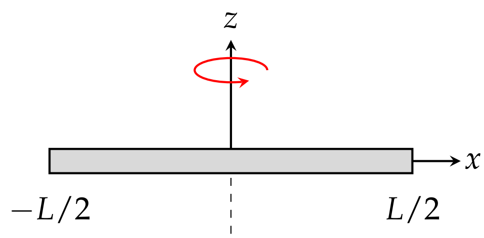
$$\bar{\vec{F}} = \frac{m}{\tau}\sqrt{2gh}(1+\alpha)\hat{j} \tag{5}$$

■

2. Sea una barra uniforme de densidad de masa lineal λ y longitud total L, ubicada de manera que su centro de masa coincide con el origen del eje x. Consideramos que el eje de rotación es el eje z, perpendicular al plano xy y que atraviesa la barra verticalmente por su centro.

   a) Calcule el momento de inercia de la barra respecto a un eje perpendicular a ella que pasa por su centro de masa.

   b) Utilizando el teorema de los ejes paralelos, determine el momento de inercia cuando el eje de rotación se encuentra a una distancia arbitraria del centro de masa, pero que **no** coincida con uno de los extremos de la barra.



a) Momento de inercia respecto al centro de masa

El momento de inercia en z es $I_z = \int (x^2 + y^2)\, dm$. Para la barra $y = 0$ y $dm = \lambda\, dx$, por lo tanto, el momento de inercia es

$$\begin{aligned} I_z^{\mathrm{CM}} &= \int_{-L/2}^{L/2} x^2\, \lambda\, dx = \lambda \int_{-L/2}^{L/2} x^2\, dx = \lambda \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-L/2}^{L/2} \\ &= \lambda \cdot \frac{1}{3}\left[\left(\frac{L}{2}\right)^3 - \left(-\frac{L}{2}\right)^3\right] \\ &= \lambda \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{L^3}{4} = \frac{1}{12}\lambda L^3 \end{aligned}$$

Como $\lambda = \dfrac{m}{L}$, el momento de inercia es:

$$\boxed{I_z^{\mathrm{CM}} = \frac{1}{12} m L^2}$$

b) Momento de inercia a una distancia d del CM (Teorema de ejes paralelos)

El teorema de ejes paralelos establece: $I_z = I_z^{\mathrm{CM}} + Md^2$.

Tomemos por ejemplo $d = \dfrac{L}{4}$:

$$I_{z'} = \frac{1}{12} mL^2 + m\left(\frac{L}{4}\right)^2 = \frac{1}{12} mL^2 + \frac{1}{16} mL^2 = \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{16}\right) mL^2 = \frac{7}{48} mL^2$$

Por lo tanto, el momento de inercia a un cuarto del centro de masa es

$$\boxed{I_{z'} = \frac{7}{48} mL^2}$$

■