Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas
ICS2123 – Modelos Estocásticos
Profesores Alejandro Cataldo y Álvaro Lorca
Primer Semestre 2019

Tarea 3:
Cadenas de Markov en Tiempo Continuo

Instrucciones

- Entregue sus soluciones antes del Martes 28 de Mayo a las 12:00hrs en el Segundo Piso del edificio Raúl Devés.
- Entregue su solución para cada problema en un conjunto diferente de hojas.
- Pueden trabajar en parejas si es que lo prefieren (recuerden especificar la sección de cada uno).
- Recuerden citar explícitamente cualquier fuente de información que utilicen en sus soluciones.
- Esta vez las preguntas se harán a través del foro, por lo que les pido que no manden dudas por mail sobre la tarea.

Problema 1 (20 puntos)

Cersei Lannister está buscando a Arya Stark para hacerla su prisionera. Arya intenta escapar moviéndose entre tres lugares: Desembarco del Rey (llamemos ciudad A), Invernalia (ciudad B) y Braavos (ciudad C). Se sabe que Cersei visita cada una de estos lugares esperando encontrar a Arya. Es así como se puede establecer que su estadía en cada lugar dura un tiempo distribuido exponencialmente de media $\frac{1}{\lambda_C}$ [días], y al abandonar un lugar Cersei se dirigirá con igual probabilidad a cualquiera de los otras dos lugares.

Por su parte, se sabe que debido a la impaciencia del Arya, puede abandonar espontáneamente cualquier lugar en el que se encuentre escondida en un tiempo distribuido exponencialmente de media $\frac{1}{\lambda_A}$ [días]. Además, la inteligencia de Arya la ha llevado a definir el siguiente patrón para sus movimientos: desde Desembarco del Rey (ciudad A) saldrá siempre hacia Invernalia (ciudad B), desde Invernalia (ciudad B) siempre a Braavos (ciudad C), y desde Braavos (ciudad C) saldrá equiprobablemente a Desembarco del Rey (ciudad A) o Invernalia (ciudad B).

Todo lo anterior da a Cersei la posibilidad de atrapar a Arya. Así, cada vez que Arya es atrapada, es llevada a la cárcel de Desembarco del Rey por Cersei, quien se queda también en esa ciudad. Afortunadamente, se sabe que Arya demora un tiempo distribuido exponencialmente de media $\frac{1}{\lambda}$ [días] en escapar de la cárcel, en cuyo caso sigue su patrón de movimientos para volver a escapar de Cersei.

Se sabe que el tiempo de traslado entre lugares, para ambos personajes, es despreciable.

(a) **(5 puntos)** Construya una Cadena de Markov en Tiempo Continuo que permita modelar la evolución de los movimientos de estos dos personajes. Identifique todos los estados posibles y las tasas de transición entre los estados. Deje su respuesta expresada en un grafo o matriz.

(b) **(5 puntos)** Suponga que la Arya está en Braavos (ciudad C) y Cersei en Invernalia (Ciudad B). Calcule la probabilidad de que Arya escape a Desembarco del Rey (ciudad A), antes de que Cersei se mueva de Invernalia.

(c) **(5 puntos)** Escriba las ecuaciones de equilibrio para cada uno de los estados.

(d) **(5 puntos)** Asuma conocidas las probabilidades estacionarias. ¿Qué proporción del tiempo en que Cersei está en Desembarco del Rey, en el largo plazo, Cersei no está persiguiendo a Arya?

Problema 2 (20 puntos)

Para la tarea 3 de Modelos Estocásticos, los alumnos del ramo envían mails con dudas sobre la pregunta 2 a una tasa λ [mails/día]. Estos los recibe la ayudante encargada de dicha pregunta, quien luego hace un borrador con la respuesta al mail (en un tiempo que distribuye exponencial de tasa γ), y se la envía al ayudante coordinador para que esta sea aprobada y posteriormente enviada al alumno en cuestión, lo cual le demora un tiempo que distribuye exponencial de tasa α (los borradores son aprobados con probabilidad 1).

Por más que a la ayudante encargada le gustaría responder los mails inmediatamente, también es alumna de la universidad y debe intentar salvar sus ramos. Por ello, si hay 5 o más mails en espera para ser leídos, decide pedirle ayuda a un amigo suyo, también ayudante del ramo. El otro ayudante también se demora un tiempo que distribuye exponencial de tasa γ, sin embargo, si hay 7 o más mails en espera para ser leídos, reduce su tasa a $\frac{\gamma}{2}$ porque se estresa. Más aún, si hay 10 o más mails en espera, el amigo decide no responder más mails con probabilidad q. Cabe notar que la ayudante encargada siempre mantiene su tasa de respuesta constante.

(a) **(8 puntos)** Modele la cantidad de mails siendo procesados, tanto por los ayudantes amigos como por el ayudante coordinador, como una Cadena de Markov de tiempo continuo. Para ello, identifique el conjunto de estados posibles y especifique todas las transiciones posibles con sus respectivas tasas de transición instantáneas. Se recomienda realizar un grafo.

(b) **(6 puntos)** ¿Cuáles son las condiciones necesarias sobre las tasas para que el sistema alcance el equilibrio en el largo plazo? Si es que hay, enúncielas. Suponiendo que las condiciones se cumplen, escriba las condiciones de equilibrio en el largo plazo del sistema.

(c) Considerando que conoce las probabilidades límite, determine las expresiones para los siguiente indicadores del sistema:

(i) **(2 puntos)** Cantidad promedio de mails en espera para ser leídos.

(ii) **(2 puntos)** Tiempo promedio que un mail espera para ser respondido y enviado al alumno que lo envió.

(iii) **(2 puntos)** Tasa media de mails no leídos por el amigo ayudante.

Problema 3 (20 puntos)

El centro de alumnos de ingeniería quiere estudiar la fila que se forma en sus microondas a la hora de almuerzo. Saben que los alumnos llegan según un Proceso Poisson de tasa λ [alumnos/hora]. Hay 5 microondas instalados, pero uno no funciona, y el tiempo que los alumnos calientan su comida distribuye Exponencial de tasa μ [alumnos/hora], con $4\mu < \lambda$. Si cuando llega el alumno la cola es menor o igual a 6 personas, este siempre se incorpora a la fila. Si la cola es de $n-1$ estudiantes, para $n > 7$, se une con probabilidad p_n; de lo contrario, decide no hacer la fila y comerse su almuerzo frío.

Además, sabemos que cualquier alumno puede aburrirse de esperar y decidir abondonar la cola. Este tiempo distribuye Exponencial con tasa β para cada alumno, y sabemos que es independiente para cada uno de ellos.

Cuando hay más de 5, pero menos de 9 personas, los alumnos espontáneamente calientan menos tiempo su comida, resultando en que la tasa pase a ser 1.2μ. Se debe considerar que, sin embargo, al terminar de calentar un alumno, ven que en la cola hay menos de 6 personas, se vuelve a la tasa original de tiempo de uso del microondas μ. Si los alumnos ven que hay 9 o más personas en la cola, calientan aún menos tiempo su comida, alcanzando una tasa de uso del microondas de 1.5μ. Sin embargo, si cuando terminan de calentar observan que hay menos de 9 persona en cola, la tasa vuelve a ser 1.2μ.

El Centro de Alumnos quiere modelar este sistema como una Cadena de Markov en Tiempo Continuo y obtener expresiones para ciertas medidas de desempeño en el largo plazo.

(a) Obtenga expresiones para cada una de las medidas de desempeño siguientes, asumiendo que conoce las probabilidades límite.

 (i) **(1 puntos)** Número promedio de alumnos en los microondas en un instante cualquiera en el largo plazo.

 (ii) **(1 puntos)** Tasa promedio de atención de alumnos por parte de los microondas en conjunto.

 (iii) **(1 puntos)** Tasa media de pérdida de alumnos en la cola en el largo plazo.

 (iv) **(1 puntos)** Tiempo promedio de permanencia de un alumno cualquiera en el sistema en el largo plazo.

 (v) **(1 puntos)** Proporción de tiempo en que se alumnos abandonan la cola por aburrimiento en el largo plazo.

(b) **(5 puntos)** Defina la o las variables de estado del proceso y el espacio de estados.

(c) **(5 puntos)** Especifique las transiciones posibles desde cada estado y las tasas de salida de cada estado.

(d) **(5 puntos)** Discuta la existencia de probabilidades límite para esta cadena y escriba el sistema de ecuaciones correspondiente.

Pauta Problema 1

(a) Sean (i,j) las posiciones de Cersei y Arya respectivamente, con $i,j \in \{a,b,c\}$ y el estado Cárcel, al cual se va cuando los dos personajes coinciden en un mismo lugar. La matriz con todas las tasas de transición instantáneas es la siguiente:

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccc} (a,b) & (a,c) & (b,a) & (b,c) & (c,a) & (c,b) & Carcel \end{array} \\
\begin{array}{c} (a,b) \\ (a,c) \\ (b,a) \\ (b,c) \\ (c,a) \\ (c,b) \\ Carcel \end{array} &
\begin{bmatrix}
0 & \lambda_A & 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda_C}{2} & \frac{\lambda_C}{2} \\
\frac{\lambda_A}{2} & 0 & 0 & \frac{\lambda_C}{2} & 0 & 0 & \frac{\lambda_C}{2}+\frac{\lambda_A}{2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda_C}{2} & 0 & \frac{\lambda_C}{2}+\lambda_A \\
0 & \frac{\lambda_C}{2} & \frac{\lambda_A}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda_C}{2}+\frac{\lambda_A}{2} \\
0 & 0 & \frac{\lambda_C}{2} & 0 & 0 & \lambda_A & \frac{\lambda_C}{2} \\
\frac{\lambda_C}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda_B}{2}+\lambda_A \\
\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}$$

Se toma el supuesto de que, dado que la Cárcel está en Desembarco del Rey, al salir de la Cárcel Arya se desplaza de forma automática a Invernalia.

(b) Nos preguntan por $P_{(b,c),(b,a)}$:

$$P_{(b,c),(b,a)} = \frac{\frac{\lambda_A}{2}}{\lambda_A + \lambda_C}$$

(c) Las ecuaciones de equilibrio son:

$$(\lambda_A + \lambda_C)\cdot P_{(a,b)} = \lambda \cdot P_{Carcel} + \frac{\lambda_C}{2}\cdot P_{(c,b)} + \frac{\lambda_A}{2}\cdot P_{(a,c)}$$

$$(\lambda_A + \lambda_C)\cdot P_{(a,c)} = \lambda_A \cdot P_{(a,b)} + \frac{\lambda_C}{2}\cdot P_{(b,c)}$$

$$(\lambda_A + \lambda_C)\cdot P_{(b,a)} = \frac{\lambda_A}{2}\cdot P_{(b,c)} + \frac{\lambda_C}{2}\cdot P_{(c,a)}$$

$$(\lambda_A + \lambda_C)\cdot P_{(b,c)} = \frac{\lambda_C}{2}\cdot P_{(a,c)}$$

$$(\lambda_A + \lambda_C)\cdot P_{(c,a)} = \frac{\lambda_C}{2} P_{(b,a)}$$

$$(\lambda_A + \lambda_C)\cdot P_{(c,b)} = \frac{\lambda_C}{2}\cdot P_{(a,b)} + \lambda_A \cdot P_{(c,a)}$$

$$\lambda\cdot P_{Carcel} = \frac{\lambda_C}{2}\cdot P_{(a,b)} + (\frac{\lambda_C}{2}+\frac{\lambda_A}{2})\cdot P_{(a,c)} + (\frac{\lambda_C}{2}+\lambda_A)\cdot P_{(b,a)} + (\frac{\lambda_C}{2}+\frac{\lambda_A}{2})\cdot P_{(b,c)} + (\frac{\lambda_C}{2})\cdot P_{(c,a)} + (\frac{\lambda_C}{2}+\lambda_A)\cdot P_{(c,b)}$$

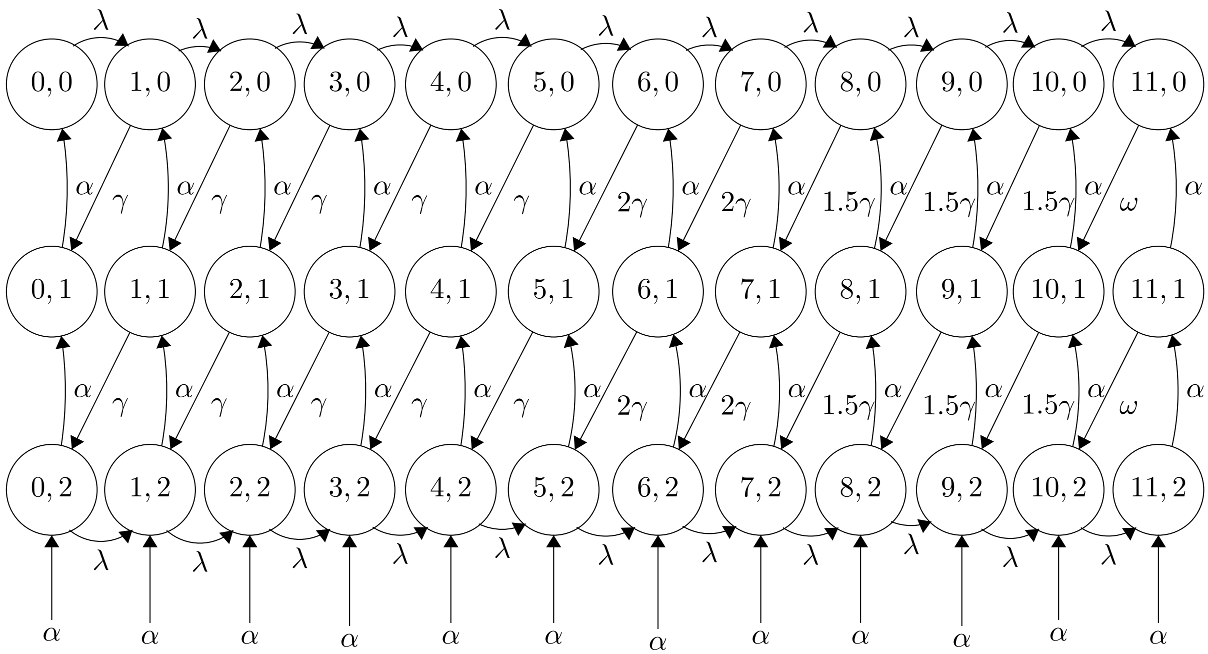
$$\sum P_i = 1$$

(d) La proporción del tiempo que Cersei pasa en Desembarco del Rey que no está persiguiendo a Arya está dada por la siguiente expresión:

$$\frac{P_{Carcel}}{P_{(a,b)} + P_{(a,c)} + P_{Carcel}}$$

Pauta Problema 2

(a) El grafo se muestra a continuación:



Donde ω es equivalente a:

$$\omega = \gamma + (1-q)\frac{\gamma}{2}$$

Los nodos quedan definidos como:

- (i, j) = (cantidad de mails siendo procesados por amigos ayudantes, cantidad de mails siendo procesados por coordinador).

Aclaración: mails procesados se consideró a los borradores o mails que no habían sido enviados ni leidos a su destinatario. Para los mails enviados por alumnos los destinatarios son los ayudantes amigos. Por otro lado, para los borradores el destinatario es el coordinador.

Así, las tasas instantáneas son las siguientes:

$$q_{(i,j),(i,j-1)} = \alpha \quad i = 0, ..., \infty \quad j = 1, ..., \infty$$

$$q_{(i,j),(i+1,j)} = \lambda \quad i = 0, ..., \infty \quad j = 1, ..., \infty$$

$$q_{(i,j),(i-1,j+1)} = \gamma \quad i = 1, ..., 4 \quad j = 1, ..., \infty$$

$$q_{(i,j),(i-1,j+1)} = 2\gamma \quad i = 6, 7 \quad j = 1, ..., \infty$$

$$q_{(i,j),(i-1,j+1)} = 1.5\gamma \quad i = 8, 9, 10 \quad j = 1, ..., \infty$$

$$q_{(i,j),(i-1,j+1)} = \gamma + (1-q)\frac{\gamma}{2} \quad i = 11, ..., \infty \quad j = 1, ..., \infty$$

(b) Las condiciones necesarias para que el sistema alcance el equilibrio en el largo plazo son las siguientes:

$$\lambda \leq \gamma + (1-q)\frac{\gamma}{2}$$

$$\gamma + (1-q)\frac{\gamma}{2} \leq \alpha$$

Es decir, que las tasas de atención sean mayores o iguales a las tasas de entrada. Las condiciones de equilibrio en el largo plazo son:

$$P_{0,0}\lambda = P_{0,1}\alpha$$

$$P_{i,0}(\lambda + \gamma) = P_{i-1,0}\lambda + P_{i,1}\alpha \quad i = 1, ..., 4$$

$$P_{i,0}(\lambda + 2\gamma) = P_{i-1,0}\lambda + P_{i,1}\alpha \quad i = 6, 7$$

$$P_{i,0}(\lambda + 1.5\gamma) = P_{i-1,0}\lambda + P_{i,1}\alpha \quad i = 8, 9, 10$$

$$P_{i,0}(\lambda + \gamma + (1-q)\frac{\gamma}{2}) = P_{i-1,0}\lambda + P_{i,1}\alpha \quad i = 11, ..., \infty$$

$$P_{i,j}(\lambda + \gamma + \alpha) = P_{i-1,j}\lambda + P_{i,j+1}\alpha + P_{i+1,j-1}\gamma \quad i = 1, 2, 3 \quad j = 1, ..., \infty$$

$$P_{4,j}(\alpha + \lambda + \gamma) = P_{5,j-1}2\gamma + P_{3,j}\lambda + P_{4,j+1}\alpha \quad j = 1, ..., \infty$$

$$P_{5,j}(\lambda + 2\gamma + \alpha) = P_{4,j}\lambda + P_{6,j-1}2\gamma + P_{5,j+1}\alpha \quad j = 1, ..., \infty$$

$$P_{6,j}(\lambda + 2\gamma + \alpha) = P_{5,j}\lambda + P_{6,j+1}\alpha + P_{7,j-1}1.5\gamma \quad j = 1, ..., \infty$$

$$P_{i,j}(1.5\gamma + \lambda + \alpha) = P_{i-1,j}\lambda + P_{i,j+1}\alpha + P_{i+1,j-1}1.5\gamma \quad i = 7, 8 \quad j = 1, ..., \infty$$

$$P_{9,j}(\lambda + 1.5\gamma + \alpha) = P_{8,j}\lambda + P_{9,j+1}\alpha + P_{10,j-1}(\gamma + (1-q)\frac{\gamma}{2} \quad j = 1..., \infty$$

$$P_{i,j}(\lambda + \alpha + \gamma + (1-q)\frac{\gamma}{2}) = P_{i-1,j}\lambda + P_{i,j+1}\alpha + P_{i+1,j-1}(\gamma + (1-q)\frac{\gamma}{2}) \quad i = 10, ..., \infty \quad j = 1..., \infty$$

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} P_{i,j} = 1$$

(c) (i) Nos piden:

$$L_q = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=2}^{\infty} P_{i,j}\cdot(i-1)$$

Aquí también se consideró correcto lo siguiente:

$$L_q = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=2}^{5} P_{i,j}\cdot(i-1) + \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=6}^{10} P_{i,j}\cdot(i-2) + \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=11}^{\infty} P_{i,j}\cdot(i-2)\cdot(1-q) + \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=11}^{\infty} P_{i,j}\cdot(i-1)\cdot q$$

En el primer caso, se consideró que los dos ayudantes leen el mismo mail al mismo tiempo, y el primero que termina manda el borrador. Por otro lado, en el segundo término, se considera que el ayudante amigo funciona como una caja de atención diferente, por lo que se pueden atender dos mails simultáneamente. Cabe destacar que bajo las dos modelaciones las respuestas en (a) y (b) son iguales.

(ii) Sean L' los mails promedio en espera para ser respondidos por el ayudante coordinador:

$$L' = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} P_{i,j}\cdot j$$

Sea L los mails en espera para ser enviados como borrador por los ayudantes:

$$L = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} P_{i,j}\cdot i$$

Sea W el tiempo promedio de espera de un mail para ser respondido y enviado al alumno:

$$W = \frac{L}{\lambda} + \frac{L'}{\lambda_s}$$

Donde:

$$\lambda_s = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{5} P_{i,j}\cdot\gamma + \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=6}^{7} P_{i,j}\cdot 2\gamma + \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=8}^{10} P_{i,j}\cdot 1.5\gamma + \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=11}^{\infty} P_{i,j}\cdot(\gamma + (1-q)\frac{\gamma}{2})$$

(iii) Sea $\lambda_{e'}$ la tasa de mails rechazados por el ayudante amigo:

$$\lambda_{e'} = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=11}^{\infty} P_{i,j}\lambda\cdot q$$

Pauta Problema 3

(a) Nos piden:

(i) Número promedio de personas en el sistema en un instante cualquiera, en el largo plazo:

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n$$

(ii) Tasa promedio de atención de alumnos en los microondas , en el largo plazo. Utilizando probabilidades totales:

$$\mu P_1 + 2\mu P_2 + 3\mu P_3 + \sum_{n=4}^{9} 4\mu P_n + \sum_{n=10}^{12} 4.8\mu P_n + \sum_{n=13}^{\infty} 6\mu P_n$$

(iii) Tasa media de pérdida de alumnos, en el largo plazo:

$$\sum_{n=11}^{\infty} P_n\beta(n-4) + \sum_{n=11}^{\infty}(1-p_n)P_n\lambda$$

Si solo se consideró la pérdida dada por abandonar la cola, el resultado también fue considerado correcto. Además, se tomó correcto si el aburrimiento se consideró desde que la cola tenía 1 persona (Esto corre para el resto del problema).

(iv) Primero se debe calcular la tasa de entrada efectiva:

$$\lambda_e = \lambda \sum_{n=0}^{10} P_n + \lambda \sum_{n=11}^{\infty} p_n P_n$$

Luego, por la ecuación de Little:

$$W = \frac{L}{\lambda_e} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} nP_n}{\lambda \sum_{n=0}^{10} P_n + \lambda \sum_{n=11}^{\infty} p_n P_n}$$

(v) Siempre que hay cola existe la posibilidad de que se pierdan clientes por aburrimiento:

$$\sum_{n=11}^{\infty} P_n$$

(b) Definamos las variables de estado como $X(t) = 0, 1, 2, 3...$ la cantidad de clientes en el sistema (microondas + cola).

(c) Las transiciones posibles son:
De un estado $i \rightarrow i+1$ para todo $i = 0, 1, 2, 3...$
De un estado $i \rightarrow i-1$ para todo $i = 1, 2, 3...$

$$v_0 = \lambda$$

$$v_1 = \lambda + \mu$$

$$v_2 = \lambda + 2\mu$$

$$v_3 = \lambda + 3\mu$$

$$v_4 = \lambda + 4\mu$$

$$v_5 = \lambda + 4\mu$$

$$v_n = \lambda + 4\mu \qquad n = 6, 7, 8, 9$$

$$v_{10} = \lambda + 4.8\mu$$

$$v_n = \lambda p_n + 4.8\mu + (n-4)\beta \qquad n = 11, 12$$

$$v_n = \lambda p_n + 6\mu + (n-4)\beta \qquad n = 13, ...$$

(d) Al ser un proceso de nacimiento y muerte, para que las probabilidades límites existan se debe cumplir que:

$$p_n\lambda < 6\mu + (n-4)\beta$$

las ecuaciones de equilibrio serán:

$$\lambda P_0 = (\mu)P_1$$

$$(\mu + \lambda)P_1 = (2\mu)P_2\lambda P_0$$

$$(2\mu + \lambda)P_2 = (3\mu)P_3 + \lambda P_1$$

$$(3\mu + \lambda)P_3 = (4\mu)P_4 + \lambda P_2$$

$$(4\mu + \lambda)P_4 = (4\mu)P_5 + \lambda P_3$$

$$(4\mu + \lambda)P_n = (4\mu)P_{n+1} + \lambda P_{n-1} \quad n = 5, 6, ..8$$

$$(4\mu + \lambda)P_9 = (4.8\mu)P_{10} + \lambda P_8$$

$$(4.8\mu + \lambda)P_{10} = (4.8\mu + 7\beta)P_{11} + \lambda P_9$$

$$(4.8\mu + \lambda p_{11} + 7\beta)P_{11} = (4.8\mu + 8\beta)P_{12} + \lambda P_{10}$$

$$(4.8\mu + \lambda p_{12} + 8\beta)P_{12} = (6\mu + 9\beta)P_{13} + \lambda p_{11}P_{11}$$

$$(6\mu + \lambda p_n + (n-4)\beta)P_n = (6\mu + (n-3)\beta)P_{n+1} + \lambda p_{n-1}P_{n-1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$$