Control 5: CMTD

ICS2123 - Modelos estocásticos

Primer Semestre 2018

Jose y su amiga Daniela tienen trabajos que los hacen moverse dentro de dos sectores de la ciudad: sector norte y sector sur. Cada día José y Daniela se pueden mover, de forma independiente, a otro sector de la cuidad. Los movimientos tanto de José como de Daniela se pueden modelar como cadenas de Markov en tiempo discreto. Las probabilidades de transición de un día a otro para cada uno de ellos son:

	José		Daniela	
	Norte	Sur	Norte	Sur
Norte	0	1	0.5	0.5
Sur	0.4	0.6	1	0

Cada vez que José y Daniela se encuentran en el mismo sector de la ciudad, José la invita a almorzar. Modele los movimientos de ambos en una única CMTD y calcule la probabilidad de que en el largo plazo ambos se junten a almorzar.

Solución

El problema se puede modelar como una CMTD bidimensional. Consideramos $X_n = (J_n,\ D, n)$ con J_n la posición de José y D_n la posición de Daniela en un día n.

De este modo los estados posibles son cuatro: (N,N), (N,S), (S,N), (S,S). La matriz de transición en una etapa quedaría definida por

$$\begin{array}{c} \\ NN \\ NS \\ SN \\ SS \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} NN & NS & SN & SS \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0{,}4\cdot 0{,}5 & 0{,}4\cdot 0{,}5 & 0{,}6\cdot 0{,}5 & 0{,}6\cdot 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0 & 0{,}6 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Entonces la matriz nos queda

$$\begin{array}{c} \\ NN \\ NS \\ SN \\ SS \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} NN & NS & SN & SS \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0 & 0{,}6 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

De la matriz anterior se puede observar que la cadena es recurrente positiva, por lo que existe probabilidad límite y hay distribución estacionaria. Por lo tanto, la probabilidad que nos piden encontrar es la suma de $\pi_{NN} = \pi_1$ y $\pi_{SS} = \pi_4$. Luego se plantean las ecuaciones del estado estacionario

$$
\begin{aligned}
\Pi_1 &= 0{,}2\Pi_3 + 0{,}4\Pi_4 \\
\Pi_2 &= 0{,}2\Pi_3 \\
\Pi_3 &= 0{,}5\Pi_1 + \Pi_2 + 0{,}3\Pi_3 + 0{,}6\Pi_4 \\
\Pi_4 &= 0{,}5\Pi_1 + 0{,}3\Pi_3 \\
1 &= \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + \Pi_4
\end{aligned}
$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene

$$
\begin{aligned}
\Pi_1 &= \frac{4}{21} \\
\Pi_2 &= \frac{2}{21} \\
\Pi_3 &= \frac{10}{21} \\
\Pi_4 &= \frac{5}{21}
\end{aligned}
$$

Luego, la probabilidad de que José y Daniela se encuentren para almorzar estará dada por

$$
\Pi_1 + \Pi_4 = \frac{4}{21} + \frac{5}{21} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}
$$