PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS2121-Métodos de Optimización
Semestre: 01-2019
Profesor: Gustavo Angulo
Ayudantes: Sebastián Vásquez, José Manuel Comber

Interrogación 3

Duración: 2 horas y 30 minutos.

Considere un grafo dirigido $D = (N, A)$, donde N es el conjunto de nodos y A es el conjunto de arcos. Existe un conjunto K de commodities que deben ser ruteados a través de la red. Más precisamente, hay $d_k > 0$ unidades del commodity k que deben ser enviadas desde el origen $s_k \in N$ al destino $t_k \in N$, siendo $v_k > 0$ su volumen unitario. Además, hasta $b_a^k \geq 0$ unidades del commodity k pueden atravesar el arco a, siendo $c_a^k > 0$ el costo unitario asociado. Por otro lado, el volumen total de los commodities que utilizan el arco a no puede exceder la capacidad $u_a > 0$. Existe la posibilidad de expandir la capacidad de la red, incurriendo en un costo fijo $f_a > 0$ por arco. En tal caso, el arco a aumenta su capacidad unitaria en $\bar{b}_a^k > 0$ para el commodity k y su capacidad volumétrica total en $\bar{u}_a > 0$. Suponga que todos los parámetros son números enteros y que inicialmente es posible rutear todos los commodities sin necesidad de expandir la red. Considere la siguiente formulación:

$$\min \quad \sum_{a \in A} f_a x_a + \sum_{k \in K} \sum_{a \in A} c_a^k y_a^k \tag{1}$$

$$\text{s.a} \quad \sum_{a \in \delta^+(i)} y_a^k - \sum_{a \in \delta^-(i)} y_a^k = \begin{cases} d_k & i = s_k \\ -d_k & i = t_k \\ 0 & i \neq s_k, t_k \end{cases} \qquad k \in K,\ i \in N \tag{2}$$

$$y_a^k \leq b_a^k + \bar{b}_a^k x_a \quad k \in K,\ a \in A \tag{3}$$

$$\sum_{k \in K} v_k y_a^k \leq u_a + \bar{u}_a x_a \quad a \in A \tag{4}$$

$$x_a \in \{0, 1\} \quad a \in A \tag{5}$$

$$y_a^k \geq 0 \quad k \in K,\ a \in A. \tag{6}$$

Pregunta 1 (20 puntos)

Suponga que desea obtener una reformulación de Dantzig-Wolfe para (1)-(6), donde (3) y (4) se consideran complicantes y x se mantiene en el problema maestro. Sea $P_k = \{y^k \in \mathbb{R}^A : y^k \text{ satisface } (2), (6)\} = \text{conv}(V_k) + \text{cone}(R_k)$, donde $V_k = \{h^{kl} : l \in L_k\}$ y $R_k = \{w^{kg} : g \in G_k\}$.

1. **(3 puntos)** De (2) y (6), indique por qué los poliedros P_k pueden ser no acotados.

   Solución: Si el grafo tiene algún ciclo dirigido, entonces, a partir de una solución y^k factible, podemos construir otra solución factible aumentando arbitrariamente el flujo a través del ciclo, pues este aumento mantiene conservación de flujo (2) y no negatividad (6). En tal caso, P_k es no acotado.

2. **(3 puntos)** Indique cómo se representa un elemento cualquiera de P_k en términos de los elementos de V_k y R_k.

   Solución: Por el teorema de Minkowski-Weyl, tenemos $y^k = \sum_{l \in L_k} \lambda_l^k h^{kl} + \sum_{g \in G_k} \mu_g^k w^{kg}$, donde $\sum_{l \in L_k} \lambda_l^k = 1$, $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$.

3. **(3 puntos)** Escriba una reformulación del tipo Dantzig-Wolfe de (1)-(6) a partir de la representación anterior.

   Solución: La reformulación queda

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{a \in A} f_a x_a + \sum_{k \in K} \sum_{a \in A} c_{ka} \left(\sum_{l \in L_k} \lambda_l^k h_a^{kl} + \sum_{g \in G_k} \mu_g^k w_a^{kg} \right) \\
\text{s.a} \quad & \sum_{l \in L_k} \lambda_l^k h_a^{kl} + \sum_{g \in G_k} \mu_g^k w_a^{kg} \leq b_{ka} + b'_{ka} x_a \quad k \in K,\ a \in A \\
& \sum_{k \in K} v_k \left(\sum_{l \in L_k} \lambda_l^k h_a^{kl} + \sum_{g \in G_k} \mu_g^k w_a^{kg} \right) \leq u_a + u'_a x_a \quad a \in A \\
& \sum_{l \in L_k} \lambda_l^k = 1 \quad k \in K \\
& x_a \in \{0, 1\} \quad a \in A \\
& \lambda^k \geq 0 \quad k \in K \\
& \mu^k \geq 0 \quad k \in K.
\end{aligned}
$$

4. **(5 puntos)** Suponga que ha resuelto el problema maestro lineal de su reformulación definido por un subconjunto de columnas. Dado un vector dual óptimo, indique el costo reducido de las variables de su reformulación.

   Solución: Dados $L'_k \subseteq L_k$ y $G'_k \subseteq G_k$ para $k \in K$, sea $(\alpha, \beta, \sigma, \rho)$ una solución dual óptima para el problema

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{a\in A} f_a x_a + \sum_{k\in K}\left(\sum_{l\in L'_k}\left(\sum_{a\in A} c_{ka} h_a^{kl}\right)\lambda_l^k + \sum_{g\in G'_k}\left(\sum_{a\in A} c_{ka} w_a^{kg}\right)\mu_g^k\right)\\
\text{s.a} \quad & \sum_{l\in L'_k} \lambda_l^k h_a^{kl} + \sum_{g\in G'_k} \mu_g^k w_a^{kg} \le b_{ka} + b'_{ka} x_a \quad k\in K,\ a\in A \quad (\alpha_a^k)\\
& \sum_{k\in K}\left(\sum_{l\in L'_k}\left(v_k h_a^{kl}\right)\lambda_l^k + \sum_{g\in G'_k}\left(v_k w_a^{kg}\right)\mu_g^k\right) \le u_a + u'_a x_a \quad a\in A \quad (\beta_a)\\
& \sum_{l\in L'_k} \lambda_l^k = 1 \quad k\in K \quad (\sigma_k)\\
& x_a \le 1 \quad a\in A \quad (\rho_a)\\
& x \ge 0\\
& \lambda^k \ge 0 \quad k\in K\\
& \mu^k \ge 0 \quad k\in K.
\end{aligned}
$$

El costo reducido de λ_l^k corresponde a

$$\sum_{a\in A} c_{ka} h_a^{kl} - \sum_{a\in A} \alpha_a^k h_a^{kl} - \sum_{a\in A} \beta_a v_k h_a^{kl} - \sigma_k.$$

El costo reducido de μ_g^k corresponde a

$$\sum_{a\in A} c_{ka} w_a^{kg} - \sum_{a\in A} \alpha_a^k w_a^{kg} - \sum_{a\in A} \beta_a v_k w_a^{kg}.$$

5. **(3 puntos)** Considere el problema de pricing usual sobre P_k. Sabemos que si el valor óptimo es negativo, entonces agregamos la columna asociada a un vértice óptimo. ¿Qué debería hacer en este caso si el valor objetivo es no acotado?

   Solución: El problema de pricing corresponde a

   $$\min\left\{\sum_{a\in A} c_{ka} h_a^k - \sum_{a\in A} \alpha_a^k h_a^k - \sum_{a\in A} \beta_a v_k h_a^k - \sigma_k :\ h^k \in P_k\right\}.$$

   Si el valor óptimo es no acotado, entonces existe $\hat{w}^k \in R_k$ tal que

   $$\sum_{a\in A} c_{ka} \hat{w}_a^k - \sum_{a\in A} \alpha_a^k \hat{w}_a^k - \sum_{a\in A} \beta_a v_k \hat{w}_a^k < 0,$$

   es decir, el costo reducido es negativo. Luego, se debe agregar la columna correspondiente a dicho vector.

6. **(3 puntos)** Indique por qué, en este problema, el problema de pricing tiene siempre valor óptimo finito. Concluya entonces que la reformulación vista en clases es suficiente en este caso.

   Solución: Por dualidad, tenemos $\alpha^k \le 0$ y $\beta \le 0$. Por lo tanto, la función objetivo del problema de pricing está acotada inferiormente por $-\sigma_k$, por lo que tiene valor óptimo finito. Por lo tanto, nunca se agregarán columnas asociadas a variables μ_g^k.

Pregunta 2 (20 puntos)

Considere la relajación lagrangiana de (1)-(6) obtenida de penalizar (2) en la función objetivo.

1. **(4 puntos)** Escriba la función dual asociada a un vector de penalización π y la forma del dual lagrangiano correspondiente.

   Solución: Para $k \in K$ e $i \in N$, sea $p^k \in \mathbb{R}^N$ definido por $p^k_{s_k} = d_k$, $p^k_{t_k} = -d_k$ y $p^k_i = 0$ para $i \neq s_k, t_k$. Así, para $\pi \in \mathbb{R}^{K\times N}$, tenemos

$$\begin{aligned}
\theta(\pi) = \quad & \min \quad \sum_{a\in A} f_a x_a + \sum_{k\in K}\sum_{a\in A} c^k_a y^k_a + \sum_{k\in K}\sum_{i\in N} \pi^k_i \left(\sum_{a\in\delta^+(i)} y^k_a - \sum_{a\in\delta^-(i)} y^k_a - p^k_i \right) \\
& \text{s.a} \quad y^k_a \le b^k_a + \bar{b}^k_a x_a \quad k \in K,\ a \in A \\
& \qquad \sum_{k\in K} v_k y^k_a \le u_a + \bar{u}_a x_a \quad a \in A \\
& \qquad x_a \in \{0,1\} \quad a \in A \\
& \qquad y^k_a \ge 0 \quad k \in K,\ a \in A.
\end{aligned}$$

   Finalmente, el dual lagrangiano corresponde a $\max\left\{\theta(\pi) :\ \pi \in \mathbb{R}^{K\times N}\right\}$.

2. **(4 puntos)** Indique por qué la función dual es separable y escríbala como suma de funciones adecuadas y definidas de forma precisa.

   Solución: La función objetivo es lineal y las restricciones son separables sobre $a \in A$. Por lo tanto $\theta(\pi) = \sum_{a\in A}\theta_a(\pi) - \sum_{k\in K}\sum_{i\in N}\pi^k_i p^k_i$, donde para $a = (i,j) \in A$ definimos

$$\begin{aligned}
\theta_a(\pi) = \quad & \min \quad f_a x_a + \sum_{k\in K} c^k_a y^k_a + \sum_{k\in K}\left(\pi^k_i - \pi^k_j\right) y^k_a \\
& \text{s.a} \quad y^k_a \le b^k_a + \bar{b}^k_a x_a \quad k \in K \\
& \qquad \sum_{k\in K} v_k y^k_a \le u_a + \bar{u}_a x_a \\
& \qquad x_a \in \{0,1\} \\
& \qquad y^k_a \ge 0 \quad k \in K.
\end{aligned}$$

3. **(4 puntos)** Muestre que cada una de las funciones previamente definidas se puede evaluar resolviendo dos problemas de programación lineal.

   Solución: Claramente, tenemos $\theta_a(\pi) = \min\left\{\theta^0_a(\pi), \theta^1_a(\pi)\right\}$, donde para $q = 0, 1$ definimos

$$\begin{aligned}
\theta^q_a(\pi) = \quad & \min \quad f_a q + \sum_{k\in K} c^k_a y^k_a + \sum_{k\in K}\left(\pi^k_i - \pi^k_j\right) y^k_a \\
& \text{s.a} \quad y^k_a \le b^k_a + \bar{b}^k_a q \quad k \in K \\
& \qquad \sum_{k\in K} v_k y^k_a \le u_a + \bar{u}_a q \\
& \qquad y^k_a \ge 0 \quad k \in K.
\end{aligned}$$

4. **(4 puntos)** ¿Cómo se compara la cota obtenida del dual lagrangiano con la cota de la relajación lineal de (1)-(6)?

   Solución: El poliedro asociado a la relajación lineal correspondiente a $\theta_a(\pi)$ es, en general, no integral. Luego, el dual lagrangiano entrega una cota que es mayor o igual a la de la relajación lineal de (1)-(6), pudiendo ser estrictamente mayor.

5. **(4 puntos)** Indique cómo obtener un supergradiente de la función dual.

   Solución: Para $\pi \in \mathbb{R}^{K \times N}$, sea $(\hat{x}, \hat{y})$ una solución óptima del problema asociado a $\theta(\pi)$. Tenemos entonces que $z \in \mathbb{R}^{K \times N}$ definido por $z_i^k = \sum_{a \in \delta^+(i)} \hat{y}_a^k - \sum_{a \in \delta^-(i)} \hat{y}_a^k - p_i^k$ es un supergradiente de la función dual en π.

Pregunta 3 (20 puntos)

Considere la relajación lineal de (1)-(6), la cual desea resolver mediante descomposición de Benders utilizando y como variables de primera etapa.

1. **(5 puntos)** Indique la forma de la descomposición, donde el problema maestro queda en función del valor óptimo de un subproblema adecuado.

   Solución: La descomposición queda de la forma

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{k \in K} \sum_{a \in A} c_a^k y_a^k + \eta \\
\text{s.a} \quad & Q(y) \leq \eta \\
& \sum_{a \in \delta^+(i)} y_a^k - \sum_{a \in \delta^-(i)} y_a^k = \begin{cases} d_k & i = s_k \\ -d_k & i = t_k \\ 0 & i \neq s_k, t_k \end{cases} \qquad k \in K,\ i \in N \\
& y_a^k \geq 0 \quad k \in K,\ a \in A,
\end{aligned}$$

   donde

$$\begin{aligned}
Q(y) = \quad \min \quad & \sum_{a \in A} f_a x_a \\
& y_a^k \leq b_a^k + \bar{b}_a^k x_a \quad k \in K,\ a \in A \\
& \sum_{k \in K} v_k y_a^k \leq u_a + \bar{u}_a x_a \quad a \in A \\
& x_a \leq 1 \quad a \in A \\
& x \geq 0.
\end{aligned}$$

2. **(5 puntos)** Indique por qué el subproblema es separable y escríbalo como suma de funciones adecuadas y definidas de forma precisa.

   Solución: La función objetivo es lineal y las restricciones son separables sobre $a \in A$.

Por lo tanto $Q(y) = \sum_{a \in A} Q_a(y)$, donde para $a \in A$ definimos

$$
\begin{array}{rll}
Q_a(y) = & \min & f_a x_a \\
& & y_a^k \leq b_a^k + \bar{b}_a^k x_a \quad k \in K \quad (\gamma_a^k) \\
& & \displaystyle\sum_{k \in K} v_k y_a^k \leq u_a + \bar{u}_a x_a \quad (\nu_a) \\
& & x_a \leq 1 \quad (\phi_a) \\
& & x_a \geq 0.
\end{array}
$$

3. **(5 puntos)** Formule los problemas duales asociados a las funciones previamente definidas.

Solución: Por dualidad, tenemos

$$
\begin{array}{rll}
Q_a(y) = & \max & \displaystyle\sum_{k \in K} \left(y_a^k - b_a^k \right) \gamma_a^k + \left(\sum_{k \in K} v_k y_a^k - u_a \right) \nu_a - \phi_a \\
& \text{s.a} & \displaystyle\sum_{k \in K} \bar{b}_a^k \gamma_a^k + \bar{u}_a \nu_a - \phi_a \leq f_a \\
& & \gamma_a^k \geq 0 \quad k \in K \\
& & \nu_a \geq 0 \\
& & \phi_a \geq 0.
\end{array}
$$

4. **(5 puntos)** Determine la forma de las restricciones que deben ser agregadas al problema maestro.

Solución: Las restricciones tienen la forma

$$
\sum_{k \in K} \left(y_a^k - b_a^k \right) \hat{\gamma}_a^k + \left(\sum_{k \in K} v_k y_a^k - u_a \right) \hat{\nu}_a - \hat{\phi}_a \leq \eta,
$$

donde para cada $a \in A$, $(\hat{\gamma}_a, \hat{\nu}_a, \hat{\phi}_a)$ es un vértice dual.