PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 02-2015
Profesores: S.Encina - G.Angulo - D.Pozo
J.Vera - A.Cataldo - R.Cuadrado

Solución Tarea 2

Fecha de Entrega: 23 de Septiembre.

Reglas de la Tarea

No seguir estas reglas generará una penalización en la nota de la tarea.

- La Tarea se desarrolla en forma grupal y estos grupos **deben** ser los mismos grupos con los que se trabaja en el proyecto semestral.
- Se debe contestar en hojas **independientes** cada una de las cuatro preguntas de la Tarea. Estas hojas deben ser **blancas y de tamaño carta**, y está a su decisión si escribirla en computador o a mano, mientras **esté ordenado**. En cada hoja debe colocar su **número de grupo**[1] **con letra clara y legible**. Las hojas de cada pregunta deben estar corcheteadas, entregando así **cuatro** grupo de hojas el día de la entrega (se deben entregar todas las preguntas, incluso si no se desea desarrollar alguna[2])
- El plazo de entrega vence impostergablemente el día miércoles 23 de Septiembre a las 12:30 horas puntualmente. Aquellas Tareas no entregadas en la fecha y hora indicadas, serán consideradas como **Tarea NO Entregada**.
- La Tarea se entrega en la **secretaría del segundo piso del edificio Raúl Devés**. Deben entregar las preguntas por separado en el buzón que corresponde a cada pregunta.
- Esta tarea es grupal y el desarrollo y discusión debe ocurrir dentro de cada grupo. No se distribuyan la resolución de las preguntas por separado, hagan realmente un trabajo grupal de desarrollo ya que el no hacerlo va contra la idea de aprendizaje colaborativo. Pueden discutir los problemas con los profesores y los ayudantes del curso, pero al final cada grupo debe entregar sus propias soluciones, desarrolladas y escritas por el grupo. La copia o intento de copia a otros grupos será sancionada con la **REPROBACIÓN AUTOMÁTICA** del curso, además de las otras sanciones que establezca la Dirección de la Escuela, la cual será informada de la situación.

Problema 1. (15 puntos)

a) (4 puntos) Considere el poliedro en forma estándar $P = \{x \in \mathbb{R}^n_+ : Ax = b\}$. Suponga que la matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es de rango completo. Para cada una de las siguientes afirmaciones, establezca si es verdadera o falsa. Si verdadera, demuestre; si falsa, de un contra-ejemplo.

   i) (2 puntos) Toda solución óptima posee a lo más m componentes no-cero.

   ii) (2 puntos) Considere el problema de minimizar $\max\{c^T x, d^T x\}$ sobre P. Si este problema tiene una solución óptima, existe un punto extremo de P que es solución óptima del problema.

b) (2 puntos) Considere el problema de optimización $\min c^T x$ con $Ax \leq b$. Si, desde una solución óptima, incrementamos algún componente de b, entonces el costo óptimo no puede empeorar. ¿Verdadero o falso? Demuestre o dé un contraejemplo.

[1] Deben escribir «Grupo XX», donde XX corresponde al número de grupo.
[2] En este caso, entregar una hoja en blanco con el número de la pregunta y el número del grupo indicados claramente.

c) (3 puntos) Considere un poliedro en forma estándar $\{x \in \mathbb{R}^n_+ : Ax = b\}$, donde las filas de la matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ son linealmente independientes. Suponga que hay dos bases distintas asociadas a la misma solución básica $\bar{x}$. Muestre que esta solución es degenerada.

d) (3 puntos) Muestre que el siguiente problema lineal de minimización $P)$ admite solución óptima.

$$\begin{array}{llccll} P) & \text{Min} & 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 - 4x_4 & & & \\ & \text{s.a.} & x_2 + x_4 & \leq & 8 & (1) \\ & & -x_1 + x_3 & \leq & 6 & (2) \\ & & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & \geq & 2 & (3) \\ & & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0 & (4,5,6,7) \end{array}$$

e) (3 puntos) Demuestre que $L^2_n = \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ : \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq t^2\}$ es un conjunto convexo.

Solución Problema 1.

a) i) Falso. Basta considerar

$$\begin{array}{lll} \text{máx} & x_1 + x_2 & \\ \text{s.a.} & x_1 + x_2 & \leq 1 \\ & x_1, x_2 & \geq 0 \end{array}$$

El punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ es óptimo y posee más de una componente no cero.

ii) Verdadero. Sea z_0 el valor óptimo del problema. Consideremos el problema

$$\begin{array}{lllcl} (P') := & \text{mín} & (1,0)\cdot(z,x) & & \\ & \text{s.a.} & c^T x & \leq & z \\ & & d^T x & \leq & z \\ & & z_0 & \leq & z \\ & & x & \in & P \end{array}$$

Por hipótesis (P') tiene solución óptima, y como (P') no posee ninguna línea, (P') posee vértices. Así, hay una solución óptima (z_0, x_0) que es vértice de (P').

Demostremos que x_0 es vértice de P. Por contradicción, sean $x_1, x_2 \in P$ tales que

$$x_0 = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$$

Sea $z_i = \text{máx}\{c^T x_i, d^T x_i\}$. Claramente $z_i \geq z_0$, y $(z_i, x_i) \in P'$.

Por optimalidad, necesariamente $z_i = z_0$, por lo que $(z_0, x_0)^T = \lambda(z_1, x_1)^T + (1-\lambda)(z_2, x_2)^T$, lo que contradice la elección de x_0.

b) Verdadero. Incrementando una componente de b, se obtiene un poliedro igual o mayor al original, lo que implica que se tienen más soluciones factibles. Por lo tanto, el costo óptimo no puede empeorar.

c) Se debe demostrar que $\bar{x}$ es degenerada, es decir, que tiene más de $n-m$ componentes nulas. Sean B_1, B_2 dos bases distintas asociadas a $\bar{x}$.

Supongamos que $\bar{x}$ es no degenerada. Por definición, sabemos que $\bar{x}_i = 0, \forall i \notin B_1$ (variables no básicas) y, del mismo modo, $\bar{x}_j = 0, \forall j \notin B_2$.

Para las variables básicas: $\bar{x}_i \geq 0, \forall i \in B_1$ y $\bar{x}_j \geq 0, \forall j \in B_2$

Como las bases son distintas, necesariamente existe $k \in B_1$ tal que $k \notin B_2$ o viceversa. Como $k \in B_1$, entonces $\bar{x}_k \geq 0$ (variable básica), y como $k \notin B_2$, entonces $\bar{x}_k = 0$ (variable no básica).

Pero como ambas bases definen a $\bar{x}$, se tiene que $\bar{x}_k = 0$ con $k \in B_1$, es decir, se tiene una variable básica nula. Luego, hemos llegado a la contradicción.

Así, se tienen más de $n-m$ componentes nulas en $\bar{x}$, por lo que es una solución degenerada.

d) I. **Función objetivo continua**: la función objetivo es lineal, por lo que es continua.

II. Espacio de $P)$, Ω

1) **No vacío**: se puede ver que el punto $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 0$ cumple todas las restricciones. Luego Ω no es vacío.
2) **Cerrado**: no hay ninguna restricción estricta. Como todas las restricciones que definen Ω son del tipo $\leq$ y $\geq$, el espacio contiene a todos los bordes, con lo que es cerrado.

III.1 **Dominio acotado**: Es posible ver de las restricciones reordenadas

$$\begin{array}{rcl} x_2 + x_4 & \leq & 8 \\ x_3 & \leq & 6 + x_1 \\ 2 & \leq & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ 0 & \leq & x_1, x_2, x_3, x_4 \end{array}$$

que x_1 no presenta cota superior, por lo que el **dominio NO es acotado**. Por ende, debemos tratar con el Teorema Práctico de Existencia de Soluciones en la Programación Lineal.

III.2 **Función objetivo acotada**: Como tenemos un problema de minimización, debemos encontrar una constante $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$c^T x \geq k, \qquad \forall x \in \Omega$$

con Ω el dominio factible. Lo primero que es fácil reconocer, es lo acotado que son las variables x_2 y x_4, de las restricciones 1, 5 y 7:

$$\left.\begin{array}{r} x_2 + x_4 \leq 8 \\ x_2 \geq 0 \\ x_4 \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} 0 \leq x_2 \leq 8 & (*1) \\ 0 \leq x_4 \leq 8 & (*2) \end{array}\right.$$

De (*2), podemos notar que $-x_4 \geq -8$ (*3) Debemos reconocer la similitud entre la función objetivo y la restricción (2) en cuanto a signos de las variables x_1 y x_3 y el límite de la restricción.

$$\begin{array}{r} -x_1 + x_3 \leq 6 \\ x_1 - x_3 \geq -6 \\ 2x_1 - 2x_3 \geq -12 \end{array}$$

Además, reconociendo (*1), tenemos que

$$2x_1 + 5x_2 - 2x_3 \geq 2x_1 - 2x_3 \geq -12(*4)$$

Por otro lado

Ahora, considerando (*3) y (*4), se :

$$\left.\begin{array}{r} 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 \geq -12 \\ -x_4 \geq -8 \end{array}\right\} \Rightarrow \; 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 - 4x_4 = c^T x \geq -44$$

Luego, la función objetivo no puede ser más pequeña que -44. Por lo tanto, la función objetivo se encuentra acotada en el sentido que nos interesa (minimización).

Por todo lo anterior, el Teorema Práctico de Existencia de Soluciones de la Programación Lineal asegura la existencia de una solución óptima para P.

NOTA: En caso de demostrarlo con el vector de escape, deben expresar claramente cuál es el vector de escape que demostraría la condición H.

e) Sean $(y, t_y), (x, t_x) \in L_n^2$ y $\lambda \in [0, 1]$.

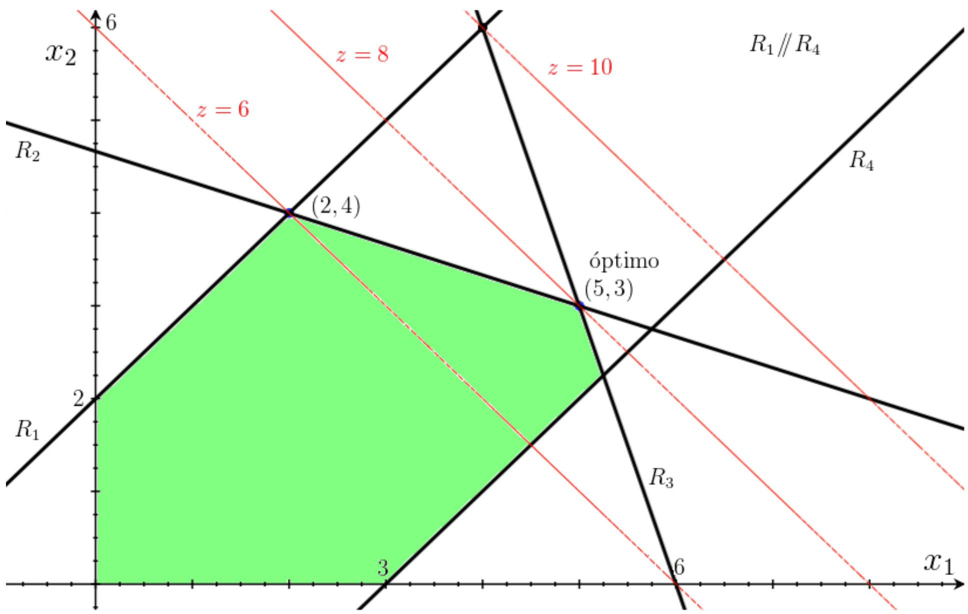
Tenemos que $(z, t_z) = \lambda(x, t_x) + (1 - \lambda)(y, t_y)$ satisface que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} z_i^2 &= \sum_{i=1}^{n}\big(\lambda x_i + (1-\lambda) y_i\big) \\
&= \lambda^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + (1-\lambda)^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2 + 2\lambda(1-\lambda)\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\
&\leq \|\lambda x\|_2^2 + \|(1-\lambda) y\|_2^2 + 2\|\lambda x\|_2 \|(1-\lambda) y_i\|_2 \\
&= (\|\lambda x\|_2 + \|(1-\lambda) y\|_2)^2 \\
&\leq \big(\lambda t_x + (1-\lambda) t_y\big) = t_z^2
\end{aligned}$$

Lo que demuestra que $(x, t_z) \in L_n^2$ y, por lo tanto, L_n^2 es un conjunto convexo.

Problema 2. (15 puntos)

Entre sus apuntes de ejercicios de geometría lineal para el ramo, se ha encontrado con el siguiente gráfico. Sin embargo, con tanta hoja suelta, no fue capaz de encontrar el modelo original.



a) (3 puntos) A partir de la información disponible en el gráfico, indique claramente cuál es el modelo de programación lineal respectivo que tiene asociado ese gráfico. Intente no usar fracciones en ninguno de sus coeficientes c_i, a_{ij} o b_j.

b) (3 puntos) Demuestre (a pesar de lo que indique la imagen) que el problema determinado en (a) admite solución óptima.

c) (3 puntos) Utilizando nociones de convexidad, (y a pesar de lo que indique la imagen) indique si el modelo presentado presenta óptimo global o no.

d) (3 puntos) Utilizando los criterios de Simplex[3], defina si la solución que usted identificó en su gráfico como óptimo es factible. De serlo, indique si es efectivamente la óptima o no.

e) (3 puntos) Para ser un poco más aventurero/a con su descubrimiento, quiere averiguar cuánto puede valer c_1 (el coeficiente que acompaña a x_1 en la función objetivo) para que la solución no sea única. ¿Afecta esto con lo que usted mencionó en (c)?

[3]No es necesario que explicite sus cálculos para encontrar matrices inversas.

Solución Problema 2.

a) El modelo que la imagen representa es:

$$\begin{array}{lll} \text{máx} & x_1 + x_2 & \\ \text{s.a.} & -x_1 + x_2 & \leq 2 \\ & x_1 + 3x_2 & \leq 14 \\ & 3x_1 + x_2 & \leq 18 \\ & -x_1 + x_2 & \geq -3 \\ & x_1, x_2 & \geq 0 \end{array}$$

b)
- ◇ La función objetivo es continua, al ser una expresión lineal.
- ◇ El dominio es no vacío, dado que el punto $(0,0)$ pertenece a él.
- ◇ El dominio es compacto, pues:
  - El dominio es cerrado, al incluir su borde en todas las restricciones del problema.
  - El dominio es acotado, dado que

$$0 \leq x_1 \leq 14 \qquad \text{de la restricción (2)}$$

$$0 \leq x_2 \leq {}^{14}\!/_3 \qquad \text{de la restricción (2)}$$

Por lo tanto, el Teorema de B-W me asegura que el problema determinado admite solución óptima.

c) Si alteramos la función objetivo a su equivalente $\text{mín} -x_1 - x_2$, esta función objetivo es convexa, dado que es una expresión lineal. El dominio también es un conjunto convexo, al estar determinado solamente con restricciones lineales que admiten puntos factibles en un solo poliedro. Por lo tanto el problema equivalente es convexo. Dado que el problema equivalente es convexo, y tiene soluciones, entonces todo mínimo local del problema es también mínimo global. Así, la función original $\text{máx}\, x_1 + x_2$, todo máximo local es también máximo global.

d) Primero, escribimos el problema en su forma estándar:

$$\begin{array}{llrl} FE) & \text{mín} & -x_1 - x_2 & \\ & \text{s.a.} & -x_1 + x_2 + x_3 & = 2 \\ & & x_1 + 3x_2 + x_4 & = 14 \\ & & 3x_1 + x_2 + x_5 & = 18 \\ & & x_1 - x_2 + x_6 & = 3 \\ & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 & \geq 0 \end{array}$$

Luego, determinamos la base. Si $x_1 = 5$ y $x_2 = 3$, tenemos que $x_3 = 4, x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 1$. Luego la base $x_B = \{x_1, x_2, x_3, x_6\}$, y la no base $x_R = \{x_4, x_5\}$. La matriz básica, su invertida y la matriz no-básica son:

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -{}^1\!/_8 & {}^3\!/_8 & 0 \\ 0 & {}^3\!/_8 & -{}^1\!/_8 & 0 \\ 1 & -{}^1\!/_2 & {}^1\!/_2 & 0 \\ 0 & {}^1\!/_2 & -{}^1\!/_2 & 1 \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para determinar si la base es factible o no, utilizamos el criterio de factilibidad de Simplex:

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} 0 & -{}^1\!/_8 & {}^3\!/_8 & 0 \\ 0 & {}^3\!/_8 & -{}^1\!/_8 & 0 \\ 1 & -{}^1\!/_2 & {}^1\!/_2 & 0 \\ 0 & {}^1\!/_2 & -{}^1\!/_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 14 \\ 18 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \geq \vec{0}$$

Como $\bar{b} \geq \vec{0}$, entonces la base asociada al $(5,3)$ es factible.

Para determinar si la base es óptima, utilizamos el criterio de optimalidad de Simplex.

$$\bar{c}_R^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1/8 & 3/8 & 0 \\ 0 & 3/8 & -1/8 & 0 \\ 1 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 \end{pmatrix} \geq \vec{0}^T$$

Como todos los costos reducidos son no negativos, se tiene que la base asociada es óptima.

e) Para esto, se puede calcular el criterio de optimalidad parametrizado en c_1:

$$\bar{c}_R^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -c_1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1/8 & 3/8 & 0 \\ 0 & 3/8 & -1/8 & 0 \\ 1 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -c_1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -1/8 & 3/8 \\ 3/8 & -1/8 \\ -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{-c_1}{8} + \frac{3}{8} & \frac{3c_1}{8} - \frac{1}{8} \end{pmatrix} \geq \vec{0}^T$$

Así, se tiene que

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{3}{8} \geq \dfrac{c_1}{8} \\ \dfrac{3c_1}{8} \geq \dfrac{1}{8} \end{array}\right\} \to 1/3 \leq c_1 \leq 3$$

es el rango para que la solución incluya a $(5,3)$, y en sus límites sus vértices vecinos también serán óptimos.

Luego, si $c_1 = 1/3$ se tiene que tanto (5,3) y (2,4) serán óptimos; y si $c_1 = 3$ se tiene que tanto (5,3) y $(21/4, 9/4)$ serán óptimos.

Problema 3. (18 puntos)

a) (14 puntos) Considere el siguiente problema de optimización lineal.

$$\begin{array}{lrcl} \text{mín} & 8x_1 + 4x_2 & & \\ \text{s.a.} & -x_1 - x_2 & \geq & 3 \\ & -x_2 & \leq & 8 \\ & x_1 - x_2 & \geq & 5 \\ & x_1, x_2 & \leq & 0 \end{array}$$

i) (3 puntos) A partir del punto $(-3, 0)$, ejecute Fase I de Simplex algebráico para encontrar un punto factible al problema.

ii) (3 puntos) A partir del punto $(-3, 0)$, ejecute Fase I de Simplex , utilizando el método *Tableau*, para encontrar un punto factible al problema.

iii) (3 puntos) A partir del punto encontrado en (i), ejecute Fase II de Simplex algebráico para encontrar el punto óptimo al problema.

iv) (3 puntos) A partir del punto encontrado en (ii), ejecute Fase II de Simplex, utilizando el método *Tableau*, para encontrar el punto óptimo al problema.

v) (2 puntos) Grafique el recorrido completo, iteración a iteración, que ocupó en su desarrollo.

b) (4 puntos) Considere el siguiente problema no lineal, con 5 variables y 6 restricciones. Escriba un problema diferenciable equivalente lo más sencillo posible[4]:

$$\begin{aligned}
\text{máx} \quad & \frac{\alpha}{\exp\left(\text{mín}\left\{\left|3x_2+4x_4-7x_5\right|+b \;\;,\;\; x_2+{}^{x_3}/_5 \;\;,\;\; \left|2x_1+{}^{x_3}/_4\right|\right\}+3x_1+\left(\sum_{i=1}^{5} i\cdot x_i\right)\right)} \\
\text{s.a.} \quad & \\
& 20x_1-21x_2+3x_5 \le 40 \\
& x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 \ge 0
\end{aligned}$$

Donde $\alpha < 0$ y $b \in \mathbb{R}$

Solución Problema 3.

a) i) Para ello, construimos la forma estándar del problema, considerando el reemplazo $x_1 = -x_6$ y $x_2 = -x_7$.

$$\begin{array}{llrcl}
FE) & \text{mín} & -8x_6-4x_7 & & \\
& \text{s.a.} & x_6+x_7-x_3 & = & 3 \\
& & x_7+x_4 & = & 8 \\
& & -x_6+x_7-x_5 & = & 5 \\
& & x_i & \ge & 0 \qquad \forall i=3,\ldots,7
\end{array}$$

Luego, notamos que el punto $(x_1,x_2)=(-3,0)$ representa en este problema el punto $(x_6,x_7)=(3,0)$, que sólo invalida la última restricción. Luego, no es necesario colocar las tres variables auxiliares de Fase I, si no que necesitaríamos solamente 1:

$$\begin{array}{llrcl}
FI) & \text{mín} & t_3 & & \\
& \text{s.a.} & x_6+x_7-x_3 & = & 3 \\
& & x_7+x_4 & = & 8 \\
& & -x_6+x_7-x_5+t_3 & = & 5 \\
& & x_i & \ge & 0 \qquad \forall i=3,\ldots,7 \\
& & t_3 & \ge & 0
\end{array}$$

Los valores de las variables son $(x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,t_3)=(0,8,0,3,0,8)$. Así, las variables básicas son x_6, x_4 y t_3, mientras que las variables no básicas son x_7, x_3 y x_5.

$$B=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix} \qquad R=\begin{bmatrix}1&-1&0\\1&0&0\\1&0&-1\end{bmatrix}$$

Para determinar si la base es óptima, utilizamos el criterio de optimalidad de Simplex.

$$\begin{aligned}
\bar{c}_R^T &= \begin{pmatrix}0&0&0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0&0&1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&0\\1&0&0\\1&0&-1\end{bmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}0&0&0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0&0&1\end{pmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix}1&-1&0\\1&0&0\\2&-1&-1\end{bmatrix}}_{\bar{R}} \\
&= \begin{pmatrix}-2&1&1\end{pmatrix} \not\geq \vec{0}^T
\end{aligned}$$

El criterio de optimalidad nos dice que esta base no es óptima, y el de entrada nos dice que x_7 es la variable que entra. Para el criterio de salida, calculamos $\bar{b}$:

[4] Se espera que lo más no lineal presente en el modelo equivalente que resulte sea una multiplicación de variables.

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} \geq \vec{0}$$

$$\text{mín}\left\{\frac{3}{1}, \frac{8}{1}, \frac{8}{2}\right\} = 3 \rightarrow x_6 \text{ es la variable que sale de la base.}$$

Así, nos encontramos con una nueva base, en que las variables básicas son x_7, x_4 y t_3, mientras que las variables no básicas son x_6, x_3 y x_5.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Para determinar si la base es óptima, utilizamos el criterio de optimalidad de Simplex.

$$\begin{aligned} \bar{c}_R^T &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{\bar{R}} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \ngeq \vec{0}^T \end{aligned}$$

El criterio de optimalidad nos dice que esta base no es óptima, y el de entrada nos dice que x_3 es la variable que entra. Para el criterio de salida, calculamos $\bar{b}$:

$$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \geq \vec{0}$$

$$\text{mín}\left\{\bullet, \frac{5}{1}, \frac{2}{1}\right\} = 2 \rightarrow t_3 \text{ es la variable que sale de la base.}$$

Así, nos encontramos con una nueva base, en que las variables básicas son x_7, x_4 y x_3, mientras que las variables no básicas son x_6, t_3 y x_5.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Para determinar si la base es óptima, utilizamos el criterio de optimalidad de Simplex.

$$\bar{c}_R^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \bar{R} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \geq \vec{0}$$

El criterio de optimalidad nos dice que esta base es óptima y, por ende, se termina la Fase I de Simplex. Además, dado que $z^* = 0$ la base óptima a la que se llega es factible en Fase II, y esa base es x_7, x_4 y x_3 y sus valores son, respectivamente:

$$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \geq \vec{0}$$

ii) De la (i) ya tenemos la forma estándar en Fase I del problema, por lo que restaría comenzar armando el tableau, e iterando. Las variables básicas son x_6, x_4 y t_3, mientras que las variables no básicas son x_7, x_3 y x_5 (las tablas a continuación distribuyen las columnas de manera que queden B y R juntas.

x_6	x_4	t_3	x_7	x_3	x_5	z
0	0	1	0	0	0	$\cdot$
1	0	0	1	-1	0	3
0	1	0	1	0	0	8
-1	0	1	1	0	-1	5

Pivoteando:

x_6	x_4	t_3	x_7	x_3	x_5	z
0	0	0	-2	1	1	-8
1	0	0	1	-1	0	3
0	1	0	1	0	0	8
0	0	1	2	-1	-1	8

Criterio de entrada: Entra a la base aquella variable no básica que tenga costos reducidos menores (entre las que poseen costos reducidos negativos). En este caso, entra $\bar{c}_{x_7} = -2$ al ser la única con costo negativo.

Criterio de salida: Utilizando el criterio del cuociente $\min\{3/1, 8/1, 8/2\}$, la variable que sale es x_6.

x_7	x_4	t_3	x_6	x_3	x_5	z
-2	0	0	0	1	1	-8
1	0	0	1	-1	0	3
1	1	0	0	0	0	8
2	0	1	0	-1	-1	8

Pivoteando:

x_7	x_4	t_3	x_6	x_3	x_5	z
0	0	0	2	-1	1	-2
1	0	0	1	-1	0	3
0	1	0	-1	1	0	5
0	0	1	-2	1	-1	2

Criterio de entrada: Entra a la base aquella variable no básica que tenga costos reducidos menores (entre las que poseen costos reducidos negativos). En este caso, entra x_3 al ser la única con costo reducido negativo.

Criterio de salida: Utilizando el criterio del cuociente $\min\{5/1, 2/1\}$, la variable que sale es t_3.

x_7	x_4	x_3	x_6	t_3	x_5	z
0	0	-1	2	0	1	-2
1	0	-1	1	0	0	3
0	1	1	-1	0	0	5
0	0	1	-2	1	-1	2

Pivoteando:

x_7	x_4	x_3	x_6	t_3	x_5	z
0	0	0	0	1	0	0
1	0	0	-1	1	-1	5
0	1	0	1	-1	1	3
0	0	1	-2	1	-1	2

Luego, la solución es óptima, y por lo tanto la base factible en Fase II (ya que $z^* = 0$). La base factible encontrada es x_7, x_4 y x_3 y sus valores son, respectivamente, 5, 3 y 2.

iii) Para la base determinada en (i), se calculan los costos reducidos:

$$
\begin{aligned}
\vec{c}_R^{\,T} &= \begin{pmatrix} -8 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -8 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}}_{\bar{R}} \\
&= \begin{pmatrix} -12 & -4 \end{pmatrix} \not\geq \vec{0}^T
\end{aligned}
$$

El criterio de optimalidad nos dice que esta base no es óptima, y el de entrada nos dice que x_6 es la variable que entra. El criterio de salida nos dice que

$$
\text{mín}\left\{\bullet, \frac{3}{1}, \bullet\right\} = 3 \rightarrow x_4 \text{ es la variable que sale de la base.}
$$

Así, nos encontramos con una nueva base, en que las variables básicas son x_7, x_6 y x_3, mientras que las variables no básicas son x_4 y x_5.

$$
B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}
$$

Para determinar si la base es óptima, utilizamos el criterio de optimalidad de Simplex.

$$
\begin{aligned}
\vec{c}_R^{\,T} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & -8 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 12 & 8 \end{pmatrix} \geq \vec{0}^T
\end{aligned}
$$

El criterio de optimalidad nos dice que esta base es óptima y, por ende, se termina la Fase II de Simplex. La base óptima determinada es la definida en esta iteración (x_7, x_6 y x_3) y sus valores son:

$$
\bar{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} \geq \vec{0}
$$

Por lo tanto, el óptimo del problema original es $(x_1, x_2) = (-3, -8)$.

iv) Para la base determinada en (ii), se calculan los costos reducidos:

x_7	x_4	x_3	x_6	x_5	z
-4	0	0	-8	0	0

Pivoteando a la base:

x_7	x_4	x_3	x_6	x_5	z
0	0	0	-12	-4	20

Criterio de entrada: Entra a la base aquella variable no básica que tenga costos reducidos menores (entre las que poseen costos reducidos negativos). En este caso, entra x_6 al ser la menor de las negativas.

Criterio de salida: Utilizando el criterio del cuociente $\text{mín}\{3/1\}$ sale de la base x_4.

x_7	x_6	x_3	x_4	x_5	z
0	-12	0	0	-4	20
1	-1	0	0	-1	5
0	1	0	1	1	3
0	-2	1	0	-1	2

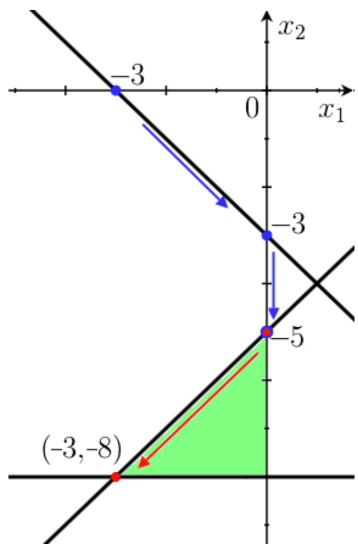
Pivoteando:

x_7	x_6	x_3	x_4	x_5	z
0	0	0	12	8	56
1	0	0	1	0	8
0	1	0	1	1	3
0	0	1	2	1	8

Luego, la solución es óptima y, por ende, se termina la Fase II de Simplex. La base óptima determinada es la definida en esta iteración (x_7, x_6 y x_3) y sus valores son, respectivamente, 8, 3 y 8.

Por lo tanto, el óptimo del problema original es $(x_1, x_2) = (-3, -8)$**.**

v) El camino en azul, y los puntos azules, representan las iteraciones y bases de la Fase I. El camino en rojo, y los puntos rojos, representan las iteraciones y bases de la Fase II.



b) Primero, como $\alpha < 0$, se tiene el siguiente modelo equivalente,

$$
\begin{array}{ll}
\text{mín} & \dfrac{1}{\exp\Bigg(\text{mín}\Bigg\{\left|3x_2+4x_4-7x_5\right|+b \;\;,\;\; x_2+{}^{x_3}\!/5 \;\;,\;\; \left|2x_1+{}^{x_3}\!/4\right|\Bigg\}+3x_1+\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{5} i\cdot x_i\right)\Bigg)} \\
\text{s.a.} & \\
& \begin{array}{rl} 20x_1-21x_2+3x_5 & \leq 40 \\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 & \geq 0 \end{array}
\end{array}
$$

Como el denominador es siempre positivo, el modelo es equivalente al que sigue,

$$
\begin{array}{ll}
\text{máx} & \exp\Bigg(\text{mín}\Bigg\{\left|3x_2+4x_4-7x_5\right|+b \;\;,\;\; x_2+{}^{x_3}\!/5 \;\;,\;\; \left|2x_1+{}^{x_3}\!/4\right|\Bigg\}+3x_1+\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{5} i\cdot x_i\right)\Bigg) \\
\text{s.a.} & \\
& \begin{array}{rl} 20x_1-21x_2+3x_5 & \leq 40 \\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 & \geq 0 \end{array}
\end{array}
$$

Aplicando logaritmo natural sobre la función objetivo (función monotona creciente sobre el recorrido de la función objetivo), el modelo queda

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & \text{mín}\Big\{\big|3x_2 + 4x_4 - 7x_5\big| + b \;\; , \;\; x_2 + {}^{x_3}\!/_5 \;\; , \;\; \big|2x_1 + {}^{x_3}\!/_4\big|\Big\} + 3x_1 + \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{5} i \cdot x_i\right) \\ \text{s.a.} & \\ & \begin{array}{rl} 20x_1 - 21x_2 + 3x_5 & \leq 40 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \geq 0 \end{array} \end{array}$$

Para simplificar la función mín, ocupamos una variable auxiliar

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & \mu + 3x_1 + \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{5} i \cdot x_i\right) \\ \text{s.a.} & \\ & \begin{array}{rl} 20x_1 - 21x_2 + 3x_5 & \leq 40 \\ \mu & \leq \text{mín}\Big\{\big|3x_2 + 4x_4 - 7x_5\big| + b \;\; , \;\; x_2 + {}^{x_3}\!/_5 \;\; , \;\; \big|2x_1 + {}^{x_3}\!/_4\big|\Big\} \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \geq 0 \\ \mu & \in \mathbb{R} \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & \mu + 3x_1 + \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{5} i \cdot x_i\right) \\ \text{s.a.} & \\ & \begin{array}{rl} 20x_1 - 21x_2 + 3x_5 & \leq 40 \\ \mu - b & \leq \big|3x_2 + 4x_4 - 7x_5\big| \\ \mu & \leq x_2 + {}^{x_3}\!/_5 \\ \mu & \leq \big|2x_1 + {}^{x_3}\!/_4\big| \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \geq 0 \\ \mu & \in \mathbb{R} \end{array} \end{array}$$

Definimos dos variables binarias para eliminar los valores absolutos (que representan conjuntos disjuntos),

$$y_1 = \begin{cases} 1 & \text{si } 3x_2 + 4x_4 - 7x_5 \geq \mu - b \\ 0 & \text{si } 3x_2 + 4x_4 - 7x_5 \leq -(\mu - b) \end{cases} \qquad y_2 = \begin{cases} 1 & \text{si } 2x_1 + {}^{x_3}\!/_4 \geq \mu \\ 0 & \text{si } 2x_1 + {}^{x_3}\!/_4 \leq -(\mu) \end{cases}$$

Así, el modelo quedaría

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & \mu + 3x_1 + \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{5} i \cdot x_i\right) \\ \text{s.a.} & \\ & \begin{array}{rl} 20x_1 - 21x_2 + 3x_5 & \leq 40 \\ 3x_2 + 4x_4 - 7x_5 & \geq (\mu - b)y_1 - M_1(1 - y_1) \\ 3x_2 + 4x_4 - 7x_5 & \leq -(\mu - b)(1 - y_1) + N_1 y_1 \\ \mu & \leq x_2 + {}^{x_3}\!/_5 \\ 2x_1 + {}^{x_3}\!/_4 & \geq \mu y_2 - M_2(1 - y_2) \\ 2x_1 + {}^{x_3}\!/_4 & \leq -\mu y_2 + N_2 y_2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \geq 0 \\ \mu & \in \mathbb{R} \\ y_1, y_2 & \in \{0, 1\} \end{array} \end{array}$$

donde $M_1, M_2, N_1, N_2 \ggg 1$ son números suficientemente grandes.

Problema 4. (15 puntos)

No es fácil dirimir cuál es el rol de un canal de televisión público. Hay meses en que llueven las críticas a los contenidos de su programación y al escaso aporte del canal para la cultura del país. Ante tal situación, la

Comisión Nacional de la Televisión le ha solicitado al presidente del directorio de un canal particular nuevo, su amigo Enrique, que la programación del canal de todos cumpla con los siguientes requisitos:

- ◇ Se autofinancie.
- ◇ Se transmita al menos tres horas de programación cultural o informativa o educativa a la semana durante el bloque prime (entre 22 y 24 horas).
- ◇ Que como máximo hayan 10 horas de programas faranduleros a la semana.
- ◇ Que al menos el 50 % de los **programas** que se transmiten sean de factura nacional (hechos en Chile).
- ◇ Que al menos un 10 % de las **horas** que se transmiten en un día sean de entretención.
- ◇ Que se vea en pantalla el máximo de programación cultural, informativa y educativa posible respetando lo antes señalado.

Ante tal petición, Enrique, de gran verborrea, le contesta al Consejo que tiene tiempo para planificar todo sin problemas. Sin embargo, la realidad es que nuestro amigo está complicado con su tiempo apretado, y no está seguro qué estructura de programación le permite cumplir con todos estos requisitos. Es por esto que él ha acudido a usted para que le ayude a solucionar este dilema: el de definir los programas que el canal transmite de lunes a domingo.

Para poder hacer esto, un amigo de Enrique le ha proporcionado la siguiente información referente a la forma en que debe operar el canal y los parámetros involucrados:

- ◇ La programación de lunes a viernes es la misma a toda hora.
- ◇ La programación del sábado es la misma que la del domingo.
- ◇ Los programas disponibles para mostrar en pantalla están identificados de la siguiente forma: $1, \ldots, n$ son culturales o informativos o educativos, $n+1, \ldots\ldots, m$ son de entretención y $m+1, \ldots, M$ son de farándulas.
- ◇ Los programas duran 1 hora.
- ◇ Un programa no es transmitido más de una vez al día.
- ◇ Un programa que se trasmite durante los días hábiles no es transmitido durante el fin de semana.
- ◇ Su canal transmite las 24 horas del día.
- ◇ Le entrega una lista de los programas realizados en Chile en una lista CH, que indica $CH_i = 1$ ($i = 1, \ldots, n, \ldots, m, \ldots, M$) si es así, y $CH_i = 0$ si no
- ◇ Le entrega una lista de los ingresos de cada programa, en que IP_i corresponde al ingreso del programa i si se transmite en horario prime, y en que I_i corresponde al ingreso del mismo programa si se transmite en otro horario.
- ◇ Además, le facilita una lista C con los costos C_i de transmitir el programa i, independiente del horario en que se transmita.
- ◇ Todo programa de entretención debe ir seguido de uno cultural o informativo o educativo.
- ◇ Por cada tres horas de programas culturales o educativos o informativos que contenga los días hábiles se permite una hora de programas de entretención durante cada uno de los días del fin de semana. Así, si se transmiten 10 horas de culturales en cada día hábil se pueden dar hasta 3 horas de entretenidos tanto el sábado como el domingo.

i) (12 puntos) Ahora el que tengamos una televisión con contenido depende de cómo sea su modelo de programación lineal mixto. Diséñelo y detállelo claramente, explicando cada variable y restricción presentada.

ii) (3 puntos) ¿Qué le respondería a Enrique si este le dijese que junto con todas las restricciones señaladas anteriormente debe incluir una que diga que por cada tres horas o más de programas de entretención que haya en un día deben haber exactamente tres horas de programas faranduleros ese mismo día?

Solución Problema 4.

i) Variables de Decisión:

x_{it} : 1 si transmito el programa i entre t y $t+1$ de lunes a viernes.
y_{it} : 1 si transmito el programa i entre t y $t+1$ el sábado y domingo.

Ambas, con $i = 1, \ldots, M$, y con $t = 0, \ldots, 23$.

Restricciones:

(I) Que se autofinancie.

$$5 \cdot \left(\sum_{i=1}^{M} \sum_{t=0}^{21} x_{it}(I_i - C_i) + \sum_{i=1}^{M} \sum_{t=22}^{23} x_{it}(IP_i - C_i) \right) + 2 \cdot \left(\sum_{i=1}^{M} \sum_{t=0}^{21} x_{it}(I_i - C_i) + \sum_{i=1}^{M} \sum_{t=22}^{23} x_{it}(IP_i - C_i) \right) \geq 0$$

(II) Mínimo cultural en el bloque prime (se define el conjunto CUL con los subíndices de programas culturales).

$$5 \cdot \sum_{i \in CUL} (x_{i,22} + x_{i,23}) + 2 \cdot \sum_{i \in CUL} (y_{i,22} + y_{i,23}) \geq 3$$

(III) Máximo farandulero (se define el conjunto FAR con los subíndices de programas farandaleros).

$$5 \cdot \sum_{t=1}^{23} \sum_{i \in FAR} x_{it} + 2 \cdot \sum_{t=1}^{23} \sum_{\in FAR} y_{it} \leq 10$$

(IV) Factura nacional.

$$\sum_{i=1}^{M} \sum_{t=0}^{23} x_{it} CH_i + \sum_{i=1}^{M} \sum_{t=0}^{23} y_{it} CH_i \geq 24$$

(V) Mínimo de entretención (se define el conjunto ENT con los subíndices de programas de entretención).

$$\sum_{i \in ENT} \sum_{t=1}^{23} x_{it} \geq 2{,}4$$

$$\sum_{i \in ENT} \sum_{t=1}^{23} y_{it} \geq 2{,}4$$

(VI) No más de una vez al día.

$$\sum_{t=1}^{23} x_{it} \leq 1 \qquad \forall i = 1, \ldots, M$$

$$\sum_{t=1}^{23} y_{it} \leq 1 \qquad \forall i = 1, \ldots, M$$

(VII) Si va de lunes a viernes, no va el fin de semana.

$$\sum_{t=1}^{23} x_{it} + \sum_{t} y_{it} \leq 1 \qquad \forall i = 1, \ldots, M$$

ó bien $x_{it} + y_{it} \leq 1 \qquad \forall i = 1, \ldots, M \quad \forall t = 0, \ldots, 23.$

(VIII) Transmite las 24 horas.

$$\sum_{t=1}^{23} \sum_{i=1}^{M} x_{it} = 24$$

$$\sum_{t=1}^{23} \sum_{i=1}^{M} y_{it} = 24$$

(IX) Entretenido seguido de cultural.

$$\sum_{i\in ENT} x_{it} \leq \sum_{i\in CUL} x_{i,t+1} \qquad \forall t = 0,\ldots,22$$

$$\sum_{i\in ENT} x_{i,23} \leq \sum_{i\in CUL} x_{i,0}$$

$$\sum_{i\in ENT} x_{i,23} \leq \sum_{i\in CUL} y_{i,0}$$

$$\sum_{i\in ENT} y_{it} \leq \sum_{i\in CUL} y_{i,t+1} \qquad \forall t = 0,\ldots,22$$

$$\sum_{i\in ENT} y_{i,23} \leq \sum_{i\in CUL} y_{i,0}$$

$$\sum_{i\in ENT} x_{i,23} \leq \sum_{i\in CUL} y_{i,0}$$

(X) 3 horas de culturales permiten 1 hora de entretenidos

$$\sum_{i\in ENT} \sum_{t=1}^{23} y_{it} \leq \frac{1}{3} \sum_{i\in CUL} \sum_{t} x_{it}$$

(XI) Naturaleza de las variables.

$$x_{it}, y_{it} \in \{0,1\} \qquad \forall\ i = 1,\ldots,M \qquad \forall t = 0,\ldots,23$$

Función Objetivo:

$$\text{máx}\, z = \sum_{i\in CUL} \sum_{t=1}^{23} x_{it} + y_{it} \qquad \Leftrightarrow \text{máx}\, w = 5 \cdot \sum_{i\in CUL} \sum_{t=1}^{23} x_{it} + 2 \cdot \sum_{i\in CUL} \sum_{t=1}^{23} y_{it}$$

También se podría haber modelado como x_{it} solamente, que valga 1 si transmito el programa i entre t y $t+1$, y 0 si no. Sin embargo, es necesario imponer que, por ejemplo, $x_{i,0} = x_{i,24} = x_{i,48} = x_{i,72} = x_{i,96}$ o que $x_{i,120} = x_{i,144}$ y así.

ii) Habría que contestarle que su petición genera un problema infactible. Es decir, que no existirá manera de cumplir todas las restricciones simultáneamente. Esto se debe a que la restricción 5 obliga a que todos los días hayan 3 horas de programas entretenidos, pero la restricción 3 imposibilita el hecho de que hayan 21 horas de farándula a la semana.