Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Ciencias Económicas y Administrativas

Segundo Semestre 2012

Curso	:	**Probabilidad y Estadística**
Sigla	:	**EAS200A**
Profesores	:	**Rafael Águila (Sec 01) y Ricardo Olea (Sec 02)**

Pauta Interrogación 1

Pregunta 1

Un grupo de estudiantes del Instituto Tecnológico de Massachusetts en Estados Unidos, elaboró un sistema de probabilidades para ganar la lotería estatal informaron medios internacionales el pasado mes. Según los jóvenes, mientras realizaban un proyecto para dicha institución y tras desarrollar varios cálculos matemáticos, llegaron a la conclusión que apostando cuando el pozo superara los dos millones de dólares, se garantizaba su fortuna. Esta lotería, es muy similar al juego del **Loto** que se juega en nuestro país, pero la diferencia está en que acá no existe un límite en el pozo mayor acumulado, en cambio, en la lotería de Massachusetts cuando este pozo supera los dos millones de dólares ($1.000 millones de pesos aproximadamente) y no habían ganadores, entonces se repartía en las categorías inferiores lo que implicaba que el juego se volvía favorable para el apostador, ya que la utilidad esperada era positiva. Para ver que pasa acá en Chile consideraremos el juego del **Loto** (por simplicidad sin comodín) con los siguientes premios por categoría:

Categoría	Número de Aciertos	Premio (en pesos chilenos)
Loto*	6	$ 1.000.000.000
Quina	5	$ 1.000.000
Cuaterna	4	$ 10.000
Terna	3	$ 700
Sin Premio	< 3	$ 0

∗ Si en esta categoría hay más de un ganador, este monto de reparte, el resto de los premios corresponde a lo que recibirá el apostador en caso de lograr los aciertos.

Recuerde que el juego del **Loto** selecciona una muestra **sin** reemplazo de 6 bolitas entre un grupo de 41 marcadas con los números 1 a 41.

(a) **[4,0 Ptos.]** Complete la siguiente tabla de probabilidades:

Categoría	Loto	Quina	Cuaterna	Terna	Sin Premio
Probabilidad			0,0019849		0,9688559

Redondee sus resultados a 7 decimales.

(b) **[2,0 Ptos.]** Calcule la utilidad esperada, observará que acá en Chile el juego no es favorable ya que al apostar uno espera perder dinero. (El costo de un juego es de $700 pesos)

Solución

(a) Tenemos que

$$\# S = \binom{41}{6} = 4.496.388 \quad \textbf{[1,0 Ptos.]}$$

$$\# \text{Loto} = \binom{6}{6} \cdot \binom{41-6}{0} = 1 \quad \textbf{[1,0 Ptos.]}$$

$$\# \text{Quina} = \binom{6}{5} \cdot \binom{41-6}{1} = 6 \cdot 35 = 210 \quad \textbf{[1,0 Ptos.]}$$

Luego,

$$P(\text{Loto}) = \frac{1}{4.496.388} = 0{,}0000002 \quad \textbf{[0,3 Ptos.]}$$
$$P(\text{Quina}) = \frac{210}{4.496.388} = 0{,}0000467 \quad \textbf{[0,3 Ptos.]}$$
$$P(\text{Terna}) = 1 - P(\text{Loto}) - P(\text{Quina}) - P(\text{Cuaterna}) - P(\text{Sin Premio}) = 0{,}0291123 \quad \textbf{[0,4 Ptos.]}$$

(b) Definamos como U a la variable aleatoria que denota la ganancia (premio - costo) al jugar un boleto, es decir,

u	\$ 999.999.300	\$ 999.300	\$ 9.300	0	$-$\$ 700
$p_U(u)$	$0,0000002$	$0,0000467$	$0,0019849$	$0,0291123$	$0,9688559$

[1,0 Ptos.]

Luego

$$\text{E}(U) = \sum_{u \in \Theta_U} u \cdot p_U(u) = -\$413{,}0724 \quad \textbf{[1,0 Ptos.]}$$

+ 1 Punto Base

Pregunta 2

Este año las celebraciones de fiestas patrias duraran más de lo habitual, y por lo tanto tendremos que lamentar una mayor cantidad de accidentes de tránsitos. A partir de información históricos obtenidos desde CONASET se puede inferir que el tiempo esperado transcurrido entre accidente de tránsito en el país es de 10 minutos durante los días de fiestas patrias. Oficialmente para las estadísticas de tránsito, el inicio de las festividades comienzan a las 18:00 horas del viernes 14 de septiembre. Suponga que T denota al tiempo transcurrido desde el inicio de las festividades hasta que ocurre el primer accidente de tránsito en el país y que esta se comporta como una variable aleatoria cuya función de densidad está dada por

$$f_T(t) = \lambda \cdot \exp(-\lambda\, t), \quad t \geq 0, \quad \lambda > 0$$

(a) **[3,0 Ptos.]** Según los datos históricos, cuál debería ser el valor de λ. Calcule previamente el valor esperado teórico de T, para cuál será necesario manejar la técnica de integración por parte:

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

(b) **[3,0 Ptos.]** ¿Cuál es la probabilidad que el primer accidente ocurra después de las 18:20 horas?

Solución

(a) El valor esperado teórico de T está dado por:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(T) &= \int_{-\infty}^{\infty} t\, f_T(t)\, dt \quad \textbf{[0,3 Ptos.]} \\
&= \int_0^{\infty} t\, \lambda\, e^{-\lambda\, t}\, dt \quad \textbf{[0,3 Ptos.]} \\
&= t \cdot \left(-e^{-\lambda\, t}\right)\Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \left(-e^{-\lambda\, t}\right)\, dt \quad \textbf{[0,3 Ptos.]} \\
&= -\left[\lim_{t\to\infty} \frac{t}{e^{\lambda\, t}} - \frac{0}{1}\right] + \int_0^{\infty} e^{-\lambda\, t}\, dt \quad \textbf{[0,3 Ptos.]} \\
&= -\left[\lim_{t\to\infty} \frac{1}{\lambda\, e^{\lambda\, t}} - 0\right] + \int_0^{\infty} e^{-\lambda\, t}\, dt, \quad \text{por L'Hopital} \quad \textbf{[0,3 Ptos.]} \\
&= -[0 - 0] + \left[-\frac{e^{-\lambda\, t}}{\lambda}\right]_0^{\infty} \quad \textbf{[0,3 Ptos.]} \\
&= -\frac{1}{\lambda}[0 - 1] \quad \textbf{[0,3 Ptos.]} \\
&= \frac{1}{\lambda} \quad \textbf{[0,3 Ptos.]}
\end{aligned}$$

Del enunciado nos dicen que

$$\textbf{[0,3 Ptos.]} \quad \mathrm{E}(T) = 10 \Rightarrow \lambda = 0{,}1 \quad \textbf{[0,3 Ptos.]}$$

(b) se pide

$$\begin{aligned}
P(T > 20) &= 1 - P(T \leq 20) \quad \textbf{[0,3 Ptos.]} \\
&= 1 - F_T(20) \quad \textbf{[0,3 Ptos.]}
\end{aligned}$$

donde

$$
\begin{aligned}
F_T(k) &= \int_{-\infty}^{k} f_T(t)\,dt \quad \textcolor{red}{\textbf{[0,3 Ptos.]}}\\
&= \int_{0}^{k} \lambda\, e^{-\lambda\, t}\,dt \quad \textcolor{red}{\textbf{[0,3 Ptos.]}}\\
&= -e^{-\lambda\, t}\Big|_{0}^{k} \quad \textcolor{red}{\textbf{[0,3 Ptos.]}}\\
&= 1 - e^{-\lambda\, k}, \quad \textcolor{red}{\textbf{[0,3 Ptos.]}} \quad k \geq 0 \quad \textcolor{red}{\textbf{[0,3 Ptos.]}}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
P(T > 20) &= 1 - 1 + e^{-0,1\cdot 20} \quad \textcolor{red}{\textbf{[0,3 Ptos.]}}\\
&= e^{-2} \quad \textcolor{red}{\textbf{[0,3 Ptos.]}}\\
&= 0{,}1353353 \quad \textcolor{red}{\textbf{[0,3 Ptos.]}}
\end{aligned}
$$

+ 1 Punto Base

Pregunta 3

Se tiene cinco cajas tal que cada una contiene cinco fichas (blancas y/o negras), cada caja se etiqueta con los números 1, 2, 3 , 4 y 5. La cantidad de fichas blancas en cada caja corresponde al número de su etiqueta.

(a) **[3,0 Ptos.]** Si se selecciona al azar una caja y luego se extraen al azar dos fichas simultáneamente desde su interior, ¿Cuál es la probabilidad que ambas fichas seleccionadas sean blancas?

(b) **[3,0 Ptos.]** Sabiendo que las dos fichas seleccionadas resultaron ser blancas. ¿Cuál es la probabilidad que hayan sido seleccionadas desde la caja etiquetada con el número tres?

Solución

(a) Definamos los siguientes eventos:

A_i: Caja i-ésima es seleccionada, con $i = 1, \ldots, 5$. **[0,4 Ptos.]**
B_j: j-ésima extracción es blanca, con $j = 1, 2$. **[0,4 Ptos.]**

Se pide $P(B_1 \cap B_2)$, la cual por el teorema de probabilidades totales es igual a:

$$\begin{aligned}
P(B_1 \cap B_2) &= P(B_1 \cap B_2 \cap A_1) + P(B_1 \cap B_2 \cap A_2) + P(B_1 \cap B_2 \cap A_3) + \\
&\quad P(B_1 \cap B_2 \cap A_4) + P(B_1 \cap B_2 \cap A_5) \quad \textbf{[0,5 Ptos.]} \\
&= P(B_2 \,|\, B_1 \cap A_1) \cdot P(B_1 \,|\, A_1) \cdot P(A_1) + P(B_2 \,|\, B_1 \cap A_2) \cdot P(B_1 \,|\, A_2) \cdot P(A_2) + \\
&\quad P(B_2 \,|\, B_1 \cap A_3) \cdot P(B_1 \,|\, A_3) \cdot P(A_3) + P(B_2 \,|\, B_1 \cap A_4) \cdot P(B_1 \,|\, A_4) \cdot P(A_4) + \\
&\quad P(B_2 \,|\, B_1 \cap A_5) \cdot P(B_1 \,|\, A_5) \cdot P(A_5) \quad \textbf{[0,5 Ptos.]} \\
&= \frac{0}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{4}{4} \cdot \frac{5}{5} \cdot \frac{1}{5} \quad \textbf{[0,4 Ptos.]} \\
&= \frac{0 + 2 + 6 + 12 + 20}{100} \quad \textbf{[0,4 Ptos.]} \\
&= 0{,}4 \quad \textbf{[0,4 Ptos.]}
\end{aligned}$$

(b) Se pide $P(A_3 \,|\, B_1 \cap B_2)$, la cual por el teorema de bayes es igual a

$$\begin{aligned}
P(A_3 \,|\, B_1 \cap B_2) &= \frac{P(A_3 \cap B_1 \cap B_2)}{P(B_1 \cap B_2)} \quad \textbf{[1,0 Ptos.]} \\
&= \frac{P(B_2 \,|\, B_1 \cap A_3) \cdot P(B_1 \,|\, A_3) \cdot P(A_3)}{P(B_1 \cap B_2)} \quad \textbf{[0,5 Ptos.]} \\
&= \frac{\frac{2}{4} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{5}}{0{,}4} \quad \textbf{[0,5 Ptos.]} \\
&= \frac{0{,}06}{0{,}40} \quad \textbf{[0,5 Ptos.]} \\
&= 0{,}15 \quad \textbf{[0,5 Ptos.]}
\end{aligned}$$

+ 1 Punto Base