PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Escuela de Ingeniería
ICE1514 — Dinámica
Segundo semestre 2020

Taller 02

Pauta

Problema 1.

Se lanza una piedra hacia arriba desde la terraza de un edificio de $H = 40\ m$ de altura, con una rapidez inicial $v_o = 15\ m/s$. Suponiendo que la trayectoria de la piedra es solo vertical (puede ser modelada como una caída libre) y se define el sistema de referencia desde el pie del edificio determine:

a. El tiempo para que la piedra alcance su altura máxima.

b. La altura máxima de la piedra

c. El tiempo que tarda la piedra en volver a pasar por el punto del que fue lanzada

d. La velocidad de la piedra en el punto anterior

e. El tiempo que tarda en llegar al pie del edificio

f. La velocidad con que llega al pie del edificio

g. Si dos segundos luego de que la piedra fue lanzada se eleva un dron desde el suelo con velocidad constante de $v_d = 20\ m/s$. Determine la altura en que el dron y la piedra colisionaran.

Respuesta: Definiendo $y(t)$ en la Figura 2 y 1

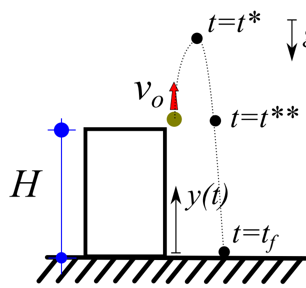

Figura 1: Trayectoria de la piedra

Ya que esto es una caída libre la aceleración $a(t) = -g$ y que la pelota es lanzada en $t = 0\ s$, se tiene

$$a = \frac{dv}{dt} = -g \ \ / \int_{t=0}^{t=t} dt$$

$$v(t) - v(t = 0) = -gt$$

Por lo tanto $v(t) = v_o - gt$. Definiendo $y(t = 0) = H$

$$v = \frac{dy}{dt} = v_o - gt \ \ / \int_{t=0}^{t=t} dt$$

$$y - y(t=0) = v_o t - \frac{1}{2} g t^2$$

Luego las ecuaciones de movimiento para la piedra serán

$$\begin{cases} v(t) = v_o - gt \\ y(t) = v_o t - \dfrac{1}{2} g t^2 + H \end{cases}$$

a. Si en $t = t^*$ se alcanza la altura máxima, se debe cumplir que: $v(t = t^*) = 0$. Por lo tanto:

$$0 = v_o - g t^* \longrightarrow t^* = \frac{v_o}{g} = 1{,}53\ s$$

b. Para la altura máxima H^{max} se tiene

$$H^{max} = y(t = t^*) = \frac{v_o^2}{g} - \frac{1}{2}\frac{v_o^2}{g} + H \longrightarrow H^{max} = \frac{1}{2}\frac{v_o^2}{g} + H = 51{,}47\ m$$

c. Si en $t = t^{**}$ la piedra vuelve a la altura que fue lanzada, se debe cumplir que $y(t = t^{**}) = H$. Luego

$$y(t = t^{**}) = v_o t^{**} + \frac{1}{2} g (t^{**})^2 + H = H \longrightarrow t^{**}(v_o - \frac{1}{2} g t^{**}) = 0 \begin{cases} t_1^{**} = 0 \\ t_2^{**} = \dfrac{2v_o}{g} \end{cases}$$

como $t_1^{**} = 0s$ es el instante en que se lanza la piedra, el instante en que vuelve la piedra a la altura inicial será: $t^{**} = \dfrac{2v_o}{g} = 3{,}06\ s$

d. La velocidad en el punto $t = t^{**}$ es $v(t = t^{**})$

$$v(t = t^{**}) = v_o - g\left(\frac{2v_o}{g}\right) = -v_o = -15\ m/s$$

e. Si en $t = t_f$ la piedra choca el suelo, entonces se debe cumplir que

$$y(t = t_f) = 0 = -\frac{1}{2} g t_f^2 + v_o t_f + H \longrightarrow t_f = \frac{v_o \pm \sqrt{v_o^2 + 2gH}}{g}$$

y $t_f > 0$, por lo tanto

$$t_f = \frac{v_o + \sqrt{v_o^2 + 2gH}}{g} = 4{,}77\ s$$

f. La velocidad con que llega al piso es

$$v(t = t_f) = -\sqrt{v_o^2 + 2gH} = -31{,}78\ m/s$$

g. Como la velocidad del dron es constante, y en $t = 2s$ $y_d(t = 2) = 0$

$$v_d(t) = \frac{y_d}{dt} = v_d / \int_2^t$$

$$y_d(t) - y(t = 2) = v_d(t - 2) \longrightarrow y_d(t) = v_d(t - 2)$$

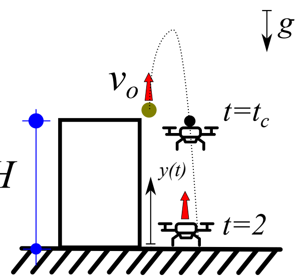

Figura 2: Colisión del dron con la piedra

si en $t = t_c$ colisionan el dron con la piedra se debe cumplir que

$$y_d(t = t_c) = y(t = t_c) \longrightarrow v_d(t_c - 2) = -\frac{1}{2}gt_c^2 + v_o t_c + H \longrightarrow t_c = \frac{v_o - v_d \pm \sqrt{(v_o - v_d)^2 + 2g(H + 2v_d)}}{g}$$

y $t_c > 2$ por lo tanto

$$t_c = \frac{v_o - v_d + \sqrt{(v_o - v_d)^2 + 2g(H + 2v_d)}}{g} = 3{,}56\ s$$

Entonces, la altura de colisión será

$$H_c = y_d(t = t_c) = v_d(\frac{v_o - v_d + \sqrt{(v_o - v_d)^2 + 2g(H + 2v_d)}}{g} - 2) = 31{,}22\ m$$

Problema 2.

Determine el gráfico de velocidad $v(t)$ para un auto cuya aceleración en el tiempo es mostrada en la Figura 3. Considere además que el auto se encuentra en reposo en $t = 0s$ y que se encuentra situado en la posición del sistema de referencia ($u(t = 0s) = 0$). Determine además la distancia recorrida en $t = 2\ s$.

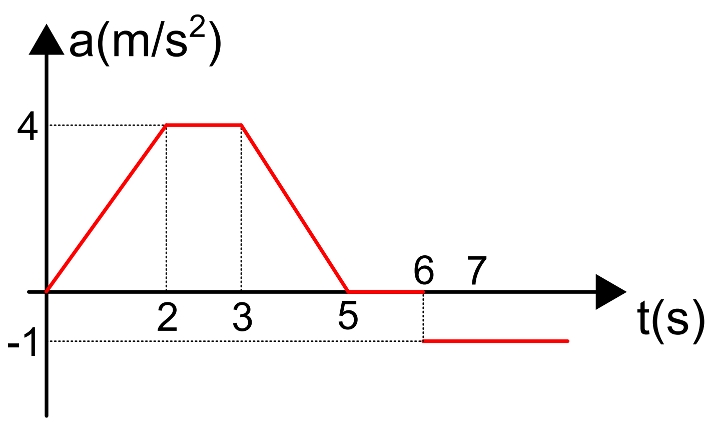

Figura 3: Gráfico de aceleración en función al tiempo

Respuesta: la aceleración del auto será:

$$a(t) = \begin{cases} 2t & 0 < t < 2 \\ 4 & 2 < t < 3 \\ 10 - 2t & 3 < t < 5 \\ 0 & 5 < t < 6 \\ -1 & 6 < t \end{cases}$$

y

$$\frac{dv}{dt} = a(t) / \int_{t=0}^{t} dt$$

Por lo tanto

$$v(t) = \begin{cases} \int_{t=0}^{t} 2t dt & 0 < t < 2 \\ \int_{t=2}^{t} 4 dt + v(t=2) & 2 < t < 3 \\ \int_{t=3}^{t} 10 - 2t dt + v(t=3) & 3 < t < 5 \\ \int_{t=5}^{t} 0 dt + v(t=5) & 5 < t < 6 \\ \int_{t=6}^{t} -1 dt + v(t=6) & 6 < t \end{cases}$$

$$v(t) = \begin{cases} t^2 + 0 & 0 < t < 2 \\ 4(t-2) + v(t=2) & 2 < t < 3 \\ 10(t-3) - (t^2 - 3^2) + v(t=3) & 3 < t < 5 \\ v(t=5) & 5 < t < 6 \\ -(t-6) + v(t=6) & 6 < t \end{cases}$$

$$v(t) = \begin{cases} t^2 & 0 < t < 2 \\ 4t - 4 & 2 < t < 3 \\ 10t - t^2 - 13 & 3 < t < 5 \\ 12 & 5 < t < 6 \\ -t + 18 & 6 < t \end{cases}$$

y como $v(t) = \frac{du}{dt}$, entonces

$$u(t) = \begin{cases} \int_{t=0}^{t} t^2 dt + u(t=0) & 0 < t < 2 \\ \int_{t=2}^{t} 4t - 4 dt + u(t=2) & 2 < t < 3 \\ \int_{t=3}^{t} 10t - t^2 - 13 dt + u(t=3) & 3 < t < 5 \\ \int_{t=5}^{t} 12 dt + u(t=5) & 5 < t < 6 \\ \int_{t=6}^{t} -t + 18 dt + u(t=6) & 6 < t \end{cases}$$

$$
u(t) = \begin{cases} \dfrac{t^3}{3} & 0 < t < 2 \\ \dfrac{4}{2}(t^2 - 2^2) - 4(t-2) + u(t=2) & 2 < t < 3 \\ 5(t^2 - 3^2) - \dfrac{1}{3}(t^3 - 3^3) + 13(t-3) + u(t=3) & 3 < t < 5 \\ 12(t-5) + u(t=5) & 5 < t < 6 \\ -\dfrac{1}{2}(t^2 - 6^2) + 18(t-6) + u(t=6) & 6 < t \end{cases}
$$

$$
u(t) = \begin{cases} \dfrac{t^3}{3} & 0 < t < 2 \\ 2t^2 - 4t + \dfrac{8}{3} & 2 < t < 3 \\ 5t^2 - \dfrac{1}{3}t^3 - 13t + \dfrac{35}{3} & 3 < t < 5 \\ 12t - 30 & 5 < t < 6 \\ -\dfrac{1}{2}t^2 + 18t - 48 & 6 < t \end{cases}
$$

La gráfica pedida es la siguiente

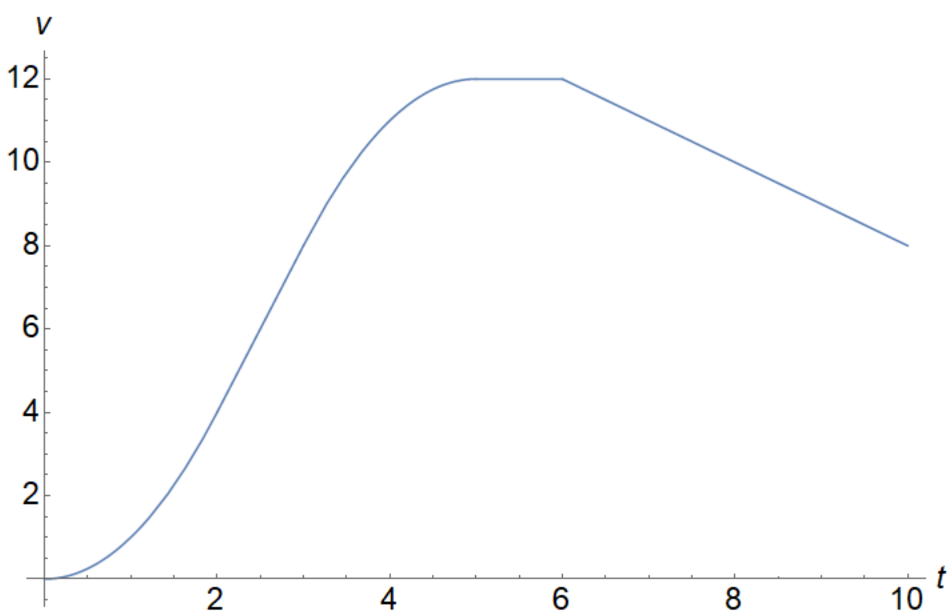

Figura 4: $v(t)$ v/s t

Por otra parte, el desplazamiento presenta la siguiente gráfica

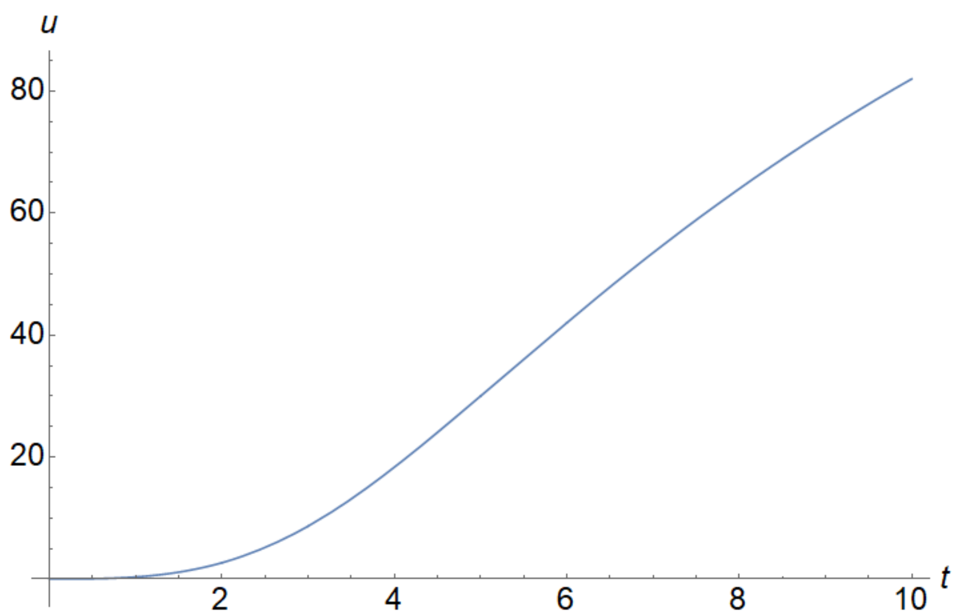

Figura 5: $u(t)$ v/s t

Por lo tanto, la distancia recorrida a luego de 2 s es

$$u(t=2) = 2 * 2^2 - 4 * 2 + \frac{8}{3} = \frac{2^3}{3} = 2{,}67\ m$$