

Curso : Probabilidad y Estadística
Sigla : EAS200a
Profesores : Rafael Águila (Sec 01), M Ignacia Vicuña (Sec 02), Osvaldo Ferreiro (Sec 03),
 Ricardo Olea (Sec 04) y Victor Correa (Sec 05)

Pauta Control 3

La tasa de llegada a un taller mecánico de automóviles de lujo es de 1 automóvil/(hora) , con el fin de realizar correctamente la mantención, entregando a cada cliente el vehículo reparado durante el mismo día, el taller solo recepciona como máximo un total de 6 automóviles por día durante las 5 horas de recepción, esto es, de 10:00 a 15:00 horas.

- (a) [1.5 Ptos] Calcule la probabilidad que un cliente no pueda ser atendido.
- (b) [1.5 Ptos] Si a las 13:00 de un día ya se han recepcionado 4 automóviles. Calcule la probabilidad que un cliente que llega a las 14:30 pueda ser atendido en ese día.
- (c) [1.5 Ptos] Calcule la probabilidad que en los próximos 4 días todos los clientes puedan ser atendido.
- (d) [1.5 Ptos] Calcular el número de clientes al cual, el taller debería expandir su capacidad de recepción diaria, de tal modo que la probabilidad de no atender a un cliente sea a lo más del 5 %.

Distribución de Probabilidad Poisson(5)

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $P(X = x)$ | 0.007 | 0.034 | 0.084 | 0.140 | 0.175 | 0.175 | 0.146 | 0.104 | 0.065 | 0.036 | 0.018 |

Solución:

- (a) Sea X_t el número de clientes que llegan al taller en t horas.
 Entonces $X_t \sim \text{Poisson}(1 \cdot t)$. [0.5 Puntos]
 Se sabe que el taller recepciona máximo 6 automóviles por día, luego la probabilidad de que un cliente no pueda ser atendido está dada por

$$P(X_5 = 7) = 0.104 \quad \text{[1.5 Puntos]}$$

Ahora, si la interpretación fue, calcular la probabilidad de que clientes no puedan ser atendidos, esto será

$$\begin{aligned} P(X_5 > 6) &= 1 - P(X_5 \leq 6) \quad \text{[0.5 Puntos]} \\ &= 1 - (0.007 + 0.034 + 0.084 + 0.140 + 0.175 + 0.175 + 0.146) \quad \text{[0.5 Puntos]} \\ &= 1 - 0.761 = 0.239 \quad \text{[0.5 Puntos]} \end{aligned}$$

- (b) **Alternativa 1:** (Intervalo de tiempo no incluye 14:30)
 X_t el número de clientes que llegan al taller en el intervalo [10:00,14:30)

$$\begin{aligned} P(X_{4.5} \leq 5 | X_3 = 4) &= \frac{P(X_{4.5} \leq 5 \cap X_3 = 4)}{P(X_3 = 4)} = P(X_{1.5} \leq 1) \quad \text{[1.0 Puntos]} \\ &= \sum_{x=0}^1 \frac{e^{-1.5}(1.5)^x}{x!} \quad \text{[0.3 Puntos]} \\ &= 0.5578254 \quad \text{[0.2 Puntos]} \end{aligned}$$

Alternativa 2: (Intervalo de tiempo incluye 14:30)

X_t el número de clientes que llegan al taller en el intervalo [10:00,14:30]

$$\begin{aligned}
 P(X_{4.5} \leq 6 | X_3 = 4) &= \frac{P(X_{4.5} \leq 6 \cap X_3 = 4)}{P(X_3 = 4)} = P((X_{1.5} = 1) \cup (X_{1.5} = 2)) \quad [\textbf{1.0 Puntos}] \\
 &= \sum_{x=1}^2 \frac{e^{-1.5}(1.5)^x}{x!} \quad [\textbf{0.3 Puntos}] \\
 &= 0.5857167 \quad [\textbf{0.2 Puntos}]
 \end{aligned}$$

- (c) Defina Y el número de días en que el cliente no puede ser atendido en los próximos 4 días. **[0.3 Puntos]** Entonces $Y \sim Bin(4, 0.239)$. **[0.5 Puntos]**. Luego,

$$P(Y = 0) = (1 - 0.229)^4 = 0.35336 \quad [\textbf{0.7 Puntos}]$$

- (d) Sea n el número de clientes al cual el taller debería expandir su capacidad de recepción diaria **[0.2 Puntos]**

Luego el número de clientes que el taller debiera extender para que la probabilidad de no atender **un cliente** sea a lo mas 5% se calcula como:

$$P(X_5 = n) \leq 0.05 \quad [\textbf{0.8 Puntos}]$$

Note que para $n = 8$ se tiene $P(X_5 = 8) = 0.065 > 0.05$, y para $n = 9$ se tiene $P(X_5 = 9) = 0.036 < 0.05$, **[0.5 Puntos]** de esta manera el taller debiera expandir a 8 automóviles para que la probabilidad de que un cliente no pueda ser atendido no supere el 5%. **[0.5 Puntos]**

Si se interpretó como: calcular el número de clientes que el taller debiera extender para que la probabilidad de no atender **clientes** sea a lo mas 5% se calcula como:

$$\begin{aligned}
 P(X_5 > n) &\leq 0.05 \quad [\textbf{0.3 Puntos}] \\
 1 - P(X_5 \leq n) &\leq 0.05 \Rightarrow 0.95 \leq P(X_5 \leq n) \quad [\textbf{0.2 Puntos}]
 \end{aligned}$$

A partir de la tabla de probabilidades Poisson(5), se tiene que las probabilidades acumuladas son

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $F_X(x)$ | 0.007 | 0.041 | 0.125 | 0.265 | 0.440 | 0.615 | 0.761 | 0.865 | 0.930 | 0.966 | 0.984 |

[0.3 Puntos]

Luego el menor n tal que $0.95 \leq P(X_5 \leq n)$ es $n = 9$. **[0.5 Puntos]**. Por lo tanto, se requiere expandir la capacidad del taller a 9 automóviles diarios para que la probabilidad de no atender clientes no supere el 5%.