Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Hidráulica y Ambiental
ICH1104 - Mecánica de Fluidos

Pauta Ayudantía 10

Ayudantes: Vicente Jander (vgjander@uc.cl) / Francisco Sobarzo (fjsobarzo@uc.cl) / Rafael Labra (ralabra@uc.cl)

Solución

Problema 2

a)

La función compleja, en este caso de superposición de flujo con fuente, se escribe de la siguiente forma:

$$F(z) = Uz + Aln(z)$$

Con z como el término complejo.

Dado que se trabaja con curvatura, conviene utilizar la definición polar del término complejo:

$$z = re^{i\theta} = rcos\theta + irsin\theta$$

Por lo tanto, la función compleja puede escribirse como:

$$F(z) = Urcos\theta + iUrsin\theta Aln(re^{i\theta}) = [Urcos\theta + Aln(r)] + i[Ursin\theta + A\theta]$$

Sabemos por definición que la función compleja puede escribirse como:

$$F(z) = \phi(r,\theta) + i\psi(r,\theta)$$

Por lo tanto:

$$\phi(r,\theta) = Urcos\theta + Aln(r)$$
$$\psi(r,\theta) = Ursin\theta + A\theta$$

Las velocidades en cada dirección son:

$$v_r = -\frac{\partial\phi}{\partial r} = -Ucos\theta - \frac{A}{r}$$

$$v_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = Usin\theta$$

Debemos encontrar el punto de estancamiento, que es donde la velocidad adquiere valor nulo. En el caso de la velocidad angular, dado que es multiplicado por un seno de un ángulo, se infiere que el valor de ese ángulo debe ser π. Al reemplazarse en la velocidad radial:

$$v_r = -Ucos\pi - \frac{A}{r} = 0$$

$$\frac{A}{r} = U$$

$$\frac{A}{U} = r$$

Dado que en $\theta = \pi$, el radio que se tiene es b;

$$\frac{A}{U} = b$$

Para conocer la forma de la colina, debemos encontrar la línea de corriente que la rodea. Por definición, un valor de línea de corriente permanece constante en la misma línea. Es decir, si escogemos la línea que pertenece a la superficie del cerro, la igualdad del valor de la línea debe respertarse.

Es decir:

$$\psi(r,\theta) = cte. \qquad \psi(b,\pi) = A\pi = bU\pi = cte$$

Como el valor es constante, podemos escoger un punto cualquiera de la línea:

$$bU\pi = Ursin\theta + bU\theta$$

$$r = \frac{b(\pi - \theta)}{sin\theta}$$

Aplicando trigonometría, que relaciona el radio del cerro desde el origen y la altura del cerro:

$$y = rsin\theta = b(\pi - \theta)$$

La altura de colina es máxima si el ángulo elegido se hace 0, asumiendo longitud infinita de montaña. Por lo tanto,

$$b\pi = 60metros$$

$$b = 19{,}1metros$$

La altura en el punto (2) se obtiene con $\theta = \frac{\pi}{2}$. Por lo tanto, la altura:

$$y_2 = rsin\frac{\pi}{2} = \frac{b(\pi - \frac{\pi}{2})}{sin(\pi/2)} = \frac{b\pi}{2} = 30metros$$

Por lo tanto, la altura en 2 corresponde a **30 metros**.

b)

Dado que, por pitágoras:

$$V^2 = V_r^2 + V_\theta^2$$

Reemplazando los términos de velocidad encontrados anteriormente:

$$V^2 = U^2(1 + \frac{2bcos\theta}{r} + \frac{b^2}{r^2})$$

Reemplazamos U=70, r=30 y $\theta = \pi/2$

$$V_2 = 83km/h$$

c)

Para obtener la presión en el punto (2), utilizamos Bernoulli entre (1) y (2).

$$z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g}$$

Eliminamos $z_2 - z_1$ corresponde a la diferencia de altura entre ambos puntos, que es la altura calculada previamente. El V_2 se conoce del apartado anterior, y se realiza el supuesto de que la presión en 1 es atmosférica, por lo que también se elimina.

Por lo tanto:

$$\frac{U^2}{2g} = r_2 sin\frac{\pi}{2} + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g}$$

$$\frac{P_2}{\rho g} = -0{,}393m$$

d)

Utilizamos Bernoulli entre el punto 1 y cualquier otro:

$$\overbrace{z_1}^{\text{se elimina por estar en el origen}} + \overbrace{\frac{P_1}{\rho g}}^{\text{se elimina por presión atmosférica}} + \frac{V_1^2}{2g} = z + \frac{P}{\rho g} + \frac{V^2}{2g}$$

$$\frac{U_1^2}{2g} = b(\pi - \theta) + \frac{P}{\rho g} + \frac{U^2}{2g}(1 + \frac{2bcos\theta}{r} + \frac{b^2}{r^2})$$

De esta ecuación se despeja la presión, y luego se integra sobre el cerro para ver la aplicación de fuerzas.

$$F_T = \int_{\theta=\pi}^{\theta=0} P(\theta)dS = \int_{\theta=\pi}^{\theta=0} P(\theta)r(\theta)d\theta$$

Problema 3

a)

Para encontrar el flujo por unidad de largo, podemos hacer resta entre los valores de las lineas de corriente. De este modo:

$$q_1 = \Psi_1 - \Psi_0 = 1 - 0 = 1$$
$$q_2 = \Psi_2 - \Psi_1 = 2 - 1 = 1$$
$$q_3 = \Psi_3 - \Psi_2 = 3 - 2 = 1$$
$$q_4 = \Psi_4 - \Psi_3 = 4 - 3 = 1$$

b)

$$V_x = u = \frac{d\Phi}{dx}$$

Podemos discretizar la expresión anterior:

$$u = \frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \frac{8-7}{5}$$

$$V_a = V_b = 0{,}2\ ms^{-1}$$

c)

Para este ejercicio se puede ocupar Bernoulli:

$$z_a + \frac{P_a}{\rho g} + \frac{V_a^2}{2g} = z_b + \frac{P_b}{\rho g} + \frac{V_b^2}{2g}$$

Luego, eliminando términos:

$$\frac{P_b}{\rho g} = \frac{P_a}{\rho g} - 15$$