ICS 2121 Métodos de Optimización, Sem 2020-2
Prof. Jorge Vera

Examen. Parte 1

Esta parte del examen se refiere a la situación que describimos a continuación, y que es similar a la del problema de la Tarea 3 y a la presentada en clases en el ejemplo de Optimización Robusta, pero con algunas simplificaciones. La situación viene de un problema real abordado en la literatura y también desarrollado en la realidad por una empresa del sector en Chile.

La situación se refiere a la planificación de operaciones que debe realizar un aserradero en la industria forestal. Para introducir el contexto, digamos que un aserradero debe procurar abastecimientos de troncos de diversas características, los que son cortados según un cierto patrón de corte (recuerde que los troncos tienen perfil más o menos circular mientras que las tablas son rectangulares). Esto da origen a los distintos productos, que son tablas de distintas medidas. El aserradero debe, entonces, decidir cuántos troncos de distintos tipos comprar y cómo cortarlos, de modo de cumplir con la demanda, y todo esto al mínimo costo. Esto último incluye costos de procesamiento, de inventario de productos finales, además del costo de compra de los troncos. A continuación se presenta el modelo simplificado básico de la situación.

Useremos los siguientes conjuntos, parámetros y variables:
Conjuntos:

M**:** Conjunto de los productos finales, tipos de tablas.

K**:** Conjunto de tipos de troncos (materia prima).

T**:** Conjunto de periodos de tiempo.

Variables:

s_{kt}**:** Volumen de troncos tipo $k \in K$ a comprar y procesar en el periodo $t \in T$ (m^3).

w_{mt}**:** Volumen de tablas tipo $m \in M$ en inventario en el periodo $t \in T$ (m^3).

Parámetros:

CT_{kt}**:** Costo de compra de troncos tipo $k \in K$ en $t \in T$ ($\$/m^3$).

CA_{kt}**:** Costo de procesamiento de troncos tipo $k \in K$ en $t \in T$ ($\$/m^3$).

CB_{mt}**:** Costo de inventario de tablas tipo $m \in M$ en $t \in T$ ($\$/m^3$).

R_{km}**:** Rendimiento de procesamiento de troncos tipo $k \in K$ como volumen de tablas tipo $m \in M$ por unidad de troncos (m^3 tabloas/ m^3 ltroncos).

PA_t**:** Capacidad de procesamiento en $t \in T$ (m^3).

PB_t**:** Capacidad de inventario en $t \in T$ (m^3).

D_{mt}**:** Demanda estimada por tablas tipo $m \in M$ en $t \in T$ (m^3).

$w0_{m0}$**:** Inventarios iniciales de las tablas tipo $m \in M$.

El Modelo:

$$
\begin{aligned}
\min z = & \sum_{t \in T} \left[\sum_{k \in K} (CT_{kt} + CA_{kt}) s_{kt} + \sum_{m \in M} CB_{mt} w_{mt} \right] && && (1)\\
s.t. & \sum_{k \in K} s_{kt} \leq PA_t && \forall t \in T && (2)\\
& \sum_{m \in M} w_{mt} \leq PB_t && \forall t \in T && (3)\\
& w_{mt-1} + \sum_{k \in K} R_{km} s_{kt} - w_{mt} = D_{mt} && \forall m \in M, \forall t \in T && (4)\\
& w_{mt}, s_{kt} \geq 0 && \forall m \in M, \forall k \in K, \forall t \in T && (5)
\end{aligned}
$$

(Observación: Note que esto es ligeramente diferente al caso de la Tarea 3 ya que no considera costos fijos).

Junto con este enunciado, se entrega un código Python llamado `Tactico.py`. Este código implementa, en Python y Gurobi, el modelo anterior para un caso particular. Observe que el modelo codificado usa unas variables adicionales r_{mt} para calcular la transformación de troncos a tablas, pero pueden ser eliminadas reemplazando su definición en las restricción de inventario (no es necesario hacerlo realmente, es decisión de ustedes).

Lo que ocurre en la situación que queremos analizar acá es que el problema está sujeto a diversas incertidumbres, siendo una de las más importantes el hecho que los rendimientos de la transformación de troncos a tablas son esencialmente variables debido a la naturaleza biológica de los troncos (vea la clase de Optimización Robusta del jueves 3 para entender el contexto más general). El impacto de esta incertidumbre y cómo tomar decisiones frente a ella es lo que queremos estudiar aquí.

El que los rendimientos puedan ser diferentes a los considerados en el modelo básico se traduce en que la producción podría no ser adecuada para cumplir con la demanda. Por esa razón, el modelo necesita ser modificado. Para eso, vamos a introducir la posiblidad de dejar demanda insatisfecha, pero a un costo. Sea CI_{mt} el costo unitario de demanda insatisfecha para las tablas tipo m en el periodo t. El modelo se puede modificar con el "truco habitual": permitir que las variables de inventario, w_{mt}, tomen valores positivos o negativos e interpretarlas como inventario real si son positivas y demanda perdida si son negativas. Entonces, escribimos:

$$w_{mt} = w_{mt}^{+} - w_{mt}^{-}, \quad w_{mt}^{+} \geq 0, w_{mt}^{-} \geq 0, \quad \forall m \in M, \forall t \in T.$$

El modelo modificado es ahora:

$$
\begin{aligned}
\min z = & \sum_{t \in T} \left[\sum_{k \in K} (CT_{kt} + CA_{kt}) s_{kt} + \sum_{m \in M} CB_{mt} w_{mt}^{+} + CI_{mt} w_{mt}^{-} \right] && && (6)\\
s.t. & \sum_{k \in K} s_{kt} \leq PA_t && \forall t \in T && (7)\\
& \sum_{m \in M} w_{mt}^{+} \leq PB_t && \forall t \in T && (8)\\
& w_{mt-1} + \sum_{k \in K} R_{km} s_{kt} - w_{mt} = D_{mt} && \forall m \in M, \forall t \in T && (9)\\
& w_{mt} = w_{mt}^{+} - w_{mt}^{-} && \forall m \in M, \forall t \in T && (10)\\
& w_{mt}^{+}, w_{mt}^{-}, s_{kt} \geq 0 && \forall m \in M, \forall k \in K, \forall t \in T && (11)
\end{aligned}
$$

El archivo `Tactico2.py` contiene la codificación en Python de este modelo.

Pregunta 1 (5 pts):

Debiera notar que en el archivo `Tactico2.py` el costo de demanda insatisfecha, CI_{mt}, está definido como $CI_{mt} = \gamma CB_{mt}$, es decir es un múltiplo del costo de inventario. Esto suele asumirse muchas veces debido a lo complejo de determinar los impactos de ventas no satisfechas. En la forma que se le entregó el código, observará que $\gamma = 1$. Si ejecuta el código observará que el óptimo es ¡no producir nada! Esto último se debe a que el costo de dejar demanda insatisfecha es muy bajo. Lo que les pedimos aquí es lo siguiente: determinen el valor de γ menor posible que haga que el modelo alcance el mismo costo del modelo original, es decir, que no deje demanda insatisfecha (si $\gamma = 10^{35}$, de seguro no habrá demanda insatisfecha, pero no es ese el número que queremos). No es necesario que sean totalmente óptimos en encontrar ese γ pero deben encontrar un valor suficientemente ajustado. Llamemos $\bar{\gamma}$ al valor que determinaron. Ahora, redefinan los costos de demanda insatisfecha de la siguiente forma:

$$CI_{mt} = 0,1 \times \bar{\gamma} \times CB_{mt}$$

Este será el costo a usar en las siguientes preguntas.

Respuesta: Esto hay que hacer según las instrucciones. El valor óptimo del problema original es igual a 44457641,4490. Tendremos este valor como referencia.

El análisis se puede hacer partiendo con un valor de γ alto y verificar que, efectivamente entrega el mismo valor, y luego comenzar a decrecer γ hasta que cambie el valor óptimo. Se puede, por ejemplo, hacer en un esquema de búsqueda binaria, pero no tiene que ser necesariamente eso, pero se espera una búsqueda razonablemente ordenada. La siguiente tabla muestra los ensayos realizados por el profesor:

γ	valor óptimo
1000000	44457641,4490
100000	44457641.4490
10000	44457641.4490
1000	44447694,9392
1500	44457641,4490
1250	44457641,4490
1125	44454884,7344
1200	44457641,4490
1150	44456322,6935
1175	44457641.4490
1170	44457473.0607

Nos quedaremos con un valor de $\gamma = 1175$. Por supuesto, la búsqueda puede continuar para encontrar un valor más preciso pero esto es satisfactorio. Entonces, el valor a usar en el modelo definitivo es $\bar{\gamma} = 1175$. El valor óptimo alcanzado, en este caso, es igual a 36609122,1053. Si se despliegan las variables $wm_{m,t}$ es posible observar que tienen valores positivos en varias combinaciones de meses y productos, lo que indica que se está dejando demanda insatisfecha.

Corrección:

- 2 puntos por valor.
- 3 puntos por argumentación y método que usaron para encontrarlo.

Pregunta 2 (15 pts):
Ahora estamos listos para construir un modelo de decisiones que tome en cuenta de mejor manera la incertidumbre. Vamos a suponer aquí, que "se sabe" que los rendimientos del proceso, los parámetros R_{km}, pueden ser modelados siguiendo una distribución Normal cuya media la asumiremos igual a los datos que vienen en el código, y que llamaremos $\bar{R}_{km}$, pero la desviación estándar depende de qué tan bien estimado esté el modelo del rendimiento, así que la asumiremos igual a $\sigma_{km} = \beta \times \bar{R}_{km}$, donde β representa el coeficiente de variación. Para que el modelo normal tenga sentido, es bueno asumir que se cumpla, al menos, que $\bar{R}_{km}(1-3\beta) > 0$ (¿por qué?), lo que implica que β debiera ser $< 1/3$, lo que asumiremos de aquí en adelante.

Observen que en este proceso industrial, el aserradero debe decidir qué tipo de troncos proveer y procesar, eso es la planificación. Sin embargo, cuando la incertidumbre se manifieste en el futuro, ahí se sabrá si el proceso tuvo éxito en satisfacer demanda o no. Esto hace la situación modelable mediante un esquema de Optimización Bajo Incertidumbre de 2 etapas con Recurso. Les pedimos aquí que formulen este modelo estocástico de 2 etapas y lo codifiquen como un modelo de SAA usando como base el modelo de `Tactico2.py`, con el costo de demanda insatisfecha determinado por ustedes en la Pregunta 1. Codificar el SAA no debiera costarles mucho, usen el código del problema del granjero en dos etapas como inspiración. En su informe reporte el modelo SAA y también incluya la imagen del código que realizó.

Suponga que los datos actuales del aserradero son tales que $\beta = 0,27$, es decir las estimaciones de rendimiento tienen una desviación estándar con variabilidad de un 27%. Ejecute el problema para distinto número de escenarios hasta obtener una estimación razonable del costo del modelo, tanto en costo de primera etapa como de segunda etapa. Tenga cuidado en observar que lo que el SAA hace es una estimación estadística de los costos: distinto número de escenarios y distintas repeticiones con distintos números aleatorios (que se controlan mediante la "semilla") darán distintos costos; prueben para ver que efectivamente puede ser así. Luego, queremos que nos entreguen estimaciones que ustedes consideren razonables desde el punto de vista estadístico. En su respuesta debiera explicar bien cómo llegaron a la estimación final de costos, su metodología y fundamento, mostrar los resultados y, en particular, gráficos de cómo cambian los costos obtenidos en función del número de escenarios.

Respuesta: En primer lugar se define el problema estocástico de dos etapas:

$$
\begin{aligned}
P) \min z = & \sum_{t \in T} \sum_{k \in K} \left[(CT_{kt} + CA_{kt}) s_{kt} + E(Q(s_{kt})) \right] & \\
s.t. \ & \sum_{k \in K} s_{kt} \leq PA_t & \forall t \in T \\
& s_{kt} \geq 0 & \forall k \in K, \forall t \in T
\end{aligned}
$$

donde:

$$
\begin{aligned}
Q(s_{kt}) = \ & \min \sum_{t \in T} \sum_{m \in M} \left[CB_{mt} w_{mt}^{+} + CI_{mt} w_{mt}^{-} \right] & \\
s.t. \ & \sum_{m \in M} w_{mt}^{+} \leq PB_t & \forall t \in T \\
& w_{mt-1} - w_{mt} = D_{mt} - \sum_{k \in K} R_{km} s_{kt} & \forall m \in M, \forall t \in T \\
& w_{mt} = w_{mt}^{+} - w_{mt}^{-} & \forall m \in M, \forall t \in T \\
& w_{mt}^{+}, w_{mt}^{-} \geq 0 & \forall m \in M, \forall t \in T
\end{aligned}
$$

Para el problema SAA se usa la distribución propia del rendimiento del proceso, es decir, la distribución normal de los parámetros R_{km}, para generar N escenarios diferentes. Denotamos cada escenario por $R_{km}^1, ..., R_{km}^N$

y se definen las variables w_{mt}^{+n}, w_{mt}^{-n} para el escenario n correspondiente. El problema resultante es:

$$
\begin{aligned}
\min z = & \sum_{t\in T}\left[\sum_{k\in K}(CT_{kt}+CA_{kt})s_{kt} + \frac{1}{N}\sum_{n\in N}\sum_{m\in M}(CB_{mt}w_{mt}^{+n} + CI_{mt}w_{mt}^{-n})\right] & \\
s.t. & \sum_{k\in K} s_{kt} \leq PA_t & \forall t\in T \\
& \sum_{m\in M} w_{mt}^{+n} \leq PB_t & \forall t\in T, \forall n\in N \\
& w_{mt-1}^{n} - w_{mt}^{n} = D_{mt} - \sum_{k\in K} R_{km}^{n} s_{kt} & \forall m\in M, \forall t\in T, \forall n\in N \\
& w_{mt}^{n} = w_{mt}^{+n} - w_{mt}^{-n} & \forall m\in M, \forall t\in T, \forall n\in N \\
& w_{mt}^{+n}, w_{mt}^{-n}, s_{kt} \geq 0 & \forall k\in K, \forall m\in M, \forall t\in T, \forall n\in N
\end{aligned}
$$

El código utilizado se encuentra en el archivo ”Tactico2-stagev2.py” adjunto.

Para probar que SAA hace es una estimación estadística de los costos, es decir, distinto número de escenarios y distintas repeticiones con distintos números aleatorios, entregan distintos valores objetivos, se analiza el comportamiento considerando 1, 10, 50 y 100 repeticiones para un número fijo de escenario. Los resultados se exponen a continuación.

Escenario	Repeticiones	Valor óptimo total	Valor primera etapa	Valor recourse
1	1	41542047.8147	32041956.3697	9500091.4450
1	10	36513093.7835	30037234.7402	6475859.0432
1	50	38566940.7458	30706101.2302	7860839.5156
1	100	37975876.0689	29942017.7772	8033858.2916

Table 1: Valores óptimos para distintas repeticiones con $\beta = 0.27$ y un escenario.

Escenario	Repeticiones	Valor óptimo total	Valor primera etapa	Valor recourse
10	1	40285360.8608	27360627.4791	12924733.3817
10	10	41215775.7681	29990190.4561	11225585.3119
10	50	41166606.7402	29690860.3797	11475746.3604
10	100	40915065.7615	29792994.2382	11122071.5233

Table 2: Valores óptimos para distintas repeticiones con $\beta = 0.27$ y 10 escenarios.

Escenario	Repeticiones	Valor óptimo total	Valor primera etapa	Valor recourse
50	1	42052299.1136	29492939.4073	12559359.7063
50	10	41197070.1161	29341118.5951	11855951.5210
50	50	41732612.9444	29610444.3618	12122168.5825
50	100	41586515.4522	29544953.3142	12041562.1379

Table 3: Valores óptimos para distintas repeticiones con $\beta = 0.27$ y 50 escenarios.

En base a los resultados anteriores, podemos concluir que el mejor resultado se obtiene para un número de réplicas cercano a 100, ya que para valores menores el valor objetivo varía considerablemente.

Es necesario analizar también la influencia de la cantidad de escenarios. Para ello, se incluye una tabla y gráfico de cómo cambian los costos obtenidos en función del número de escenarios.

Escenarios	Valor óptimo total	Valor primera etapa	Valor recourse
1	35039493.0718	28841330.3001	6198162.7717
10	42081791.9000	32200971.3573	9880820.5426
25	42359800.6581	29895025.4100	12464775.2480
50	42220884.1924	29660424.2324	12560459.9599
75	41650495.8751	29419472.4004	12231023.4745
100	42059067.2987	29526517.9993	12532549.2993
200	42447766.3733	29429802.4885	13017963.8847
400	42028113.6326	30101166.1984	11926947.4341

Table 4: Valores óptimos para distintos escenarios con $\beta = 0.27$.

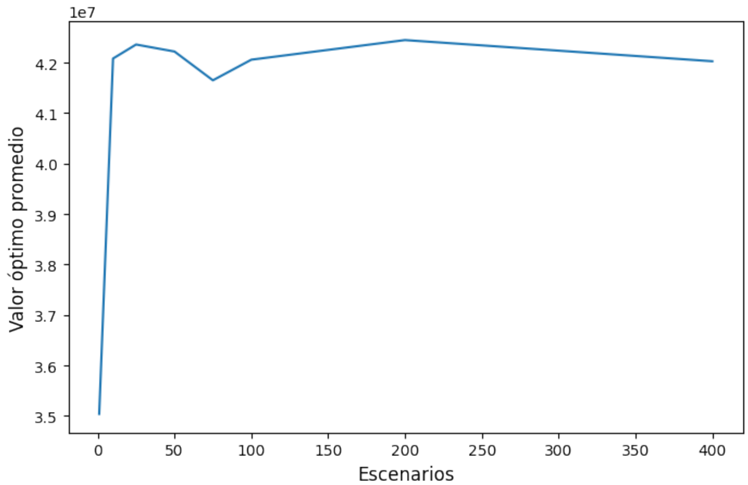

Figure 1: Valores óptimos para distintos escenarios.

En base al gráfico anterior, es posible concluir que el valor objetivo oscila cuando el número de escenarios es menor a 100, y luego tiende a estabilizarse en un valor óptimo cercano a los 42 millones. Esto implica que a medida que aumenta el número de escenarios, para un beta fijo, el valor de la función objetivo tiende a permanecer estable.

Finalmente, podemos hacer una estimación en base a 100 réplicas y 100 escenarios. Los valores obtenidos corresponden a:

Escenario	Repeticiones	Valor óptimo total	Valor primera etapa	Valor recourse	Desv. estándar valor total
100	100	41817197.1967	29533672.4207	12283524.7760	548605.4712

Table 5: Estimación de costo para $\beta = 0.27$.

Corrección:

- 4 puntos por formulación problema estocástico de 2 etapas.
- 4 puntos por formulación y codificación del modelo SAA.
- 7 puntos por análisis.

Pregunta 3 (10 pts):
Ahora se presenta la siguiente situación: una empresa del área de "analytics" le propone a la empresa forestal usar modelos estadísticos alternativos y mejorar la estimación de los rendimientos, más específicamente,

disminuir β (para simplificar, supondremos que las medias siguen siendo las mismas dadas en los datos). Específicamente, la consultora dice que puede bajar ese β a un 15%. ¿Cuánto estarían dispuestos a invertir en esa consultoría? Expliquen con precisión todos los supuestos y análisis para su argumento.

Respuesta:

Se debía realizar una comparación entre los resultados obtenidos por el modelo original con $\beta = 0.27$ y un modelo nuevo con $\beta = 0.15$. Esta comparación entre los valores objetivos se podía realizar de distintas formas (promedios, intervalos de confianza, gráficos de distribución) pero es importante que este análisis sea completo y que evalúe cómo se comportan los valores objetivos de los distintos modelos. También es importante que el análisis sea consistente con la respuesta del inciso anterior, es decir, si concluyeron que N escenarios y M repeticiones eran suficientes para obtener una estimación estable del valor objetivo, entonces en esta sección se debe usar estos mismos N y M o mayores para obtener estimaciones confiables.

En primer lugar, se puede analizar el valor objetivo promedio. Se debería obtener un valor objetivo promedio para $\beta = 0.15$ menor que para $\beta = 0.27$. Ante esto, se podría definir el dinero máximo dispuesto a pagar por la consultoría como la simple diferencia entre estos valores:

$$x = v_{\beta=0.27} - v_{\beta=0.15}$$

En segundo lugar, se puede analizar la dispersión de los valores objetivos obtenidos. La dispersión de los valores objetivos para $\beta = 0.15$ deberían ser considerablemente menores que para $\beta = 0.27$. Ante esto, es posible discutir el valor agregado que una solución con menor dispersión tendría para la organización, es decir, que la organización puede estar dispuesta a pagar con el fin de disminuir el riesgo o variabilidad de su solución (aversión al riesgo). No es necesario para la solución, pero también es posible también cuantificar el valor agregado que entrega una solución más estable añadiendo términos que penalizan la dispersión de la solución y suponiendo un ponderador o peso que tendría este término en la función objetivo (medidas de riesgo).

En forma ilustrativa, podemos obtener los siguientes resultados para 100 escenarios y 100 repeticiones:

	Valor objetivo	
	Promedio	Desviación Estándar
$\beta = 0.27$	41817197.1967	548605.4712
$\beta = 0.15$	38675685.9991	341785.3422

Podemos ver que el valor de lo que estaríamos dispuestos a pagar se podría definir como

$$x = v_{\beta=0.27} - v_{\beta=0.15} = \$41.817.197,1967 - \$38.675.685,9991 = \$3.141.511,2$$

Sin embargo, como ocurre una reducción significativa en la dispersión del nuevo valor objetivo, se podría estar dispuesto a pagar más que este valor dada la reducción de 37.7% en la desviación estándar de la solución (si se explica el beneficio de menor dispersión).

Independiente de lo estocástico del valor objetivo, se deberían obtener valores relativamente "cercanos" a los especificados arriba.

Corrección:

- 4 puntos por comparar promedios de los valores objetivos.
- 2 puntos por análisis.
- 4 puntos por concluir cuánto estarían dispuestos a pagar en base a los análisis realizados.

Pregunta 4 (10 pts):
Ustedes quedaron satisfechos con el análisis de la consultora en estadísticas, pero ahora aparece en la empresa un personaje misterioso (que podría tener el aspecto de Marty McFly o Doctor Who, según lo que uno se imagine). Esta persona les afirma que puede decirles **con certeza absoluta** cuánto serán los verdaderos rendimientos en el futuro. ¿Cuánto estarían dispuestos a pagarle a misterioso personaje (que, posiblemente, no necesita dinero en todo caso)? Expliquen con precisión todos los supuestos y análisis para su argumento.

Respuesta:
Al igual que la pregunta anterior, la comparación de valores objetivos se puede hacer de distintas formas (se pueden poner en casos y comparar valores por medio de promedios, por ejemplo), pero lo importante es hacer un análisis completo y consistente.

Caber destacar que si este personaje misterioso ofrece certeza absoluta sobre el rendimiento, significaría un $\beta = 0\%$, donde se puede notar que en ese caso no existe variabilidad en los resultados independiente de los escenarios. Sin embargo, no sabemos cuál será este dato que sabemos con certeza, es decir, no sabemos si corresponde a la media usado en los incisos anteriores o si corresponde a otro valor. Para este desarrollo supondremos que los rendimientos adoptan el valor de su media, pero es completamente posible utilizar otros valores como, por ejemplo, escenarios pesimistas o conservadores (la media menos uno, dos o tal vez tres desviaciones estándar por ejemplo).

Es importante notar que se podría estar dispuesto a pagar la cantidad de dinero que se está perdiendo por el hecho de tener incertidumbre. Por lo tanto, una opción para obtener lo solicitado sería calculando la diferencia de costos al usar el modelo de ciertos escenarios con un $\beta = 27\%$ y al usar el mismo modelo con un $\beta = 0\%$. También se puede hacer el cálculo suponiendo que ya se había invertido en la consultoría, en ese caso se hace la diferencia de costos entre el modelo con $\beta = 15\%$ y con $\beta = 0\%$.
En forma ilustrativa, podemos obtener los siguientes resultados:

	Valor objetivo	
	Promedio	Desviación Estándar
$\beta = 0.27$	41817197.1967	548605.4712
$\beta = 0.15$	38675685.9991	341785.3422
$\beta = 0.0$	36609122.11	0

Si se considera que no se ha realizado la consultoría del inciso anterior, podemos ver que el valor de lo que estaríamos dispuestos a pagar se podría definir como

$$x = v_{\beta=0.27} - v_{\beta=0} = \$41.817.197,1967 - \$36.609.122,11 = \$5.208.075,09$$

Si se considera que ya se realizó la consultoría del inciso anterior, podemos ver que el valor de lo que estaríamos dispuestos a pagar se podría definir como

$$x = v_{\beta=0.15} - v_{\beta=0} = \$38.675.685,9991 - \$36.609.122,11 = \$2.066.563,89$$

En ambos casos, como ocurre una reducción total en la dispersión del nuevo valor objetivo, se podría estar dispuesto a pagar más que este valor (si se explica el beneficio de menor dispersión).

Por último, es importante notar que los valores objetivo dependen únicamente del γ escogido en el primer inciso, por lo que los valores presentados deberían ser bastante cercanos al de arriba.

Corrección:

- 4 puntos por justificación y supuestos
- 3 puntos por comparar promedios de los valores objetivos.
- 3 puntos por concluir cuánto estarían dispuestos a pagar en base a los análisis realizados.