

MAT1640 - EDO

Ecuaciones Diferenciales (Clase 2)

Benjamín Palacios

Pontificia Universidad Católica de Chile

2do semestre 2022

Repaso de la 1a clase

EDO: $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$

- n : orden de la ecuación
- $y(x)$: sol. de la ec. en intervalo $I \subset \mathbb{R}$ si $y : I \rightarrow \mathbb{R}$, es n -veces derivable satisface la EDO.
- Se dividen en
 - 1 lineales: $a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x) = 0$
 - 2 no-lineales en caso contrario
- EDOs de orden n tienen generalmente familias n -paramétricas de soluciones (pueden no tener soluciones)

Estudiaremos EDOs en forma normal

$$y^{(n)} = G(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

EDOs se utilizan para modelar situaciones del mundo real en las ciencias e industria.

EDOs de primer orden

Una **EDO de primer orden** es una ecuación de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

- Generalmente las EDO's tienen múltiples soluciones
- En la práctica, usualmente se busca una solución específica que cumpla una restricción predeterminada:

para $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ dados, fijamos $y(x_0) = y_0 \quad \leftarrow$ **Condición inicial**

Buscamos entonces resolver un **problema de valor inicial (PVI)**.

Def. Un PVI consiste en encontrar $y(x)$, función derivable, y un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ con $x_0 \in I$, tal que

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y) & \text{para todo } x \in I; \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

- **Solución general:** representación general de la solución de la ecuación (familia monoparamétrica de soluciones).
- **Solución particular:** solución de un PVI

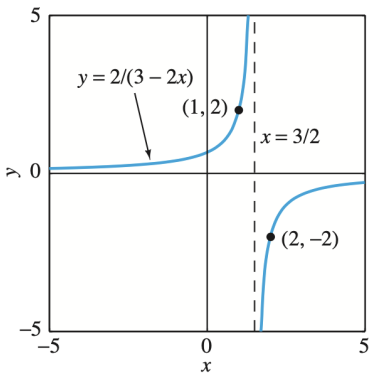
Ejemplo. Resolver el PVI:

$$\frac{dy}{dx} = y^2; \quad y(1) = 2.$$

Solución:

$$y(x) = \frac{2}{3 - 2x}$$

en intervalo $I = (-\infty, 3/2)$



La **más simple** de las ecuaciones anteriores es aquella donde f es función solamente de la variable independiente

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

Buscamos entonces **antiderivadas** de la función $f(x)$, es decir,

$$y(x) = \int f(x) dx$$

Teorema. Si $F(x)$ es una antiderivada particular de f , entonces obtenemos una familia monoparamétrica de soluciones

$$\underbrace{y(x) = F(x) + C}_{\text{solución general}}, \quad \text{para todo } C \in \mathbb{R}.$$

Si además queremos resolver el problem de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

escogemos una **solución particular** tal que $y(x_0) = F(x_0) + C = y_0$.

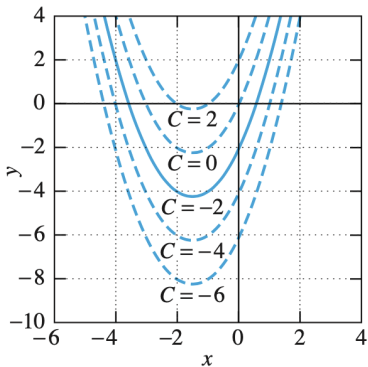
Ejemplo. Resolver el PVI:

$$y' = 2x + 3; \quad y(1) = 2.$$

Solución:

$$y(x) = x^2 + 3x - 2$$

en todo \mathbb{R}



Usando **integración sucesiva** podemos resolver algunas **ecuaciones de orden mayor**.

Ejemplo. Consideremos $\frac{d^2y}{dx^2} = g(x)$.

Si llamamos $v(x) = y'(x)$, entonces $v'(x) = y''(x) = g(x)$, luego debemos resolver sucesivamente

$$\frac{dv}{dx} = g(x) \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dx} = v(x).$$

Si G es antiderivada de g , y H es antiderivada de G , entonces

$$y(x) = H(x) + Cx + D, \quad \text{con} \quad C, D \in \mathbb{R}.$$

Podemos resumir esto usando la siguiente notación:

$$y(x) = \int \left(\int g(x) dx \right) dx$$

Aplicación. [Movimiento en caída libre]

- $y(t)$: altura de un cuerpo en tiempo t ;
- $v(t)$: velocidad instantánea;
- $a(t)$: aceleración

Sabemos que las funciones anteriores se relacionan de la forma:

$$y'(t) = v(t) \quad \text{y} \quad y''(t) = a(t) = -g \quad (\text{aceleración de gravedad});$$

Luego, $v'(t) = -g$ y entonces usando integración sucesiva

$$v(t) = \int (-g) dt = -gt + C$$

$$y(t) = \int v(t) dt = \int (-gt + C) dt = -\frac{1}{2}gt^2 + Ct + D$$

con C y D constantes.

Volvamos a la ecuación más general $y' = f(x, y)$.

¿ Cuándo el PVI: $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$; tiene solución y esta es única?

→ Problema de Existencia y Unicidad de soluciones

Ejemplos

- 1) $y' = \frac{1}{x}$, $y(0) = 0$ → Existen soluciones a la EDO pero no existe sol. al PVI
- 2) $y' = 2\sqrt{y}$, $y(0) = 0$ → El PVI tiene más de una solución.

Teorema. [de existencia y unicidad]

Si $f(x, y)$ y su derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ son funciones continuas en un rectángulo $R \subset \mathbb{R}^2$ tal que $(x_0, y_0) \in R$, entonces existe un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ tal que $x_0 \in I$ y el PVI

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

tiene una y sólo una solución en I .

Ejemplos

1) $\begin{cases} y' = y^2 \\ y(1) = 0 \end{cases} \longrightarrow$ Existe una única solución al PVI

2) $\begin{cases} y' = \frac{1}{x} \\ y(0) = 0 \end{cases} \longrightarrow$ El teorema nos dice que pueden existir múltiples soluciones o no existir ninguna (vimos que en este caso no hay soluciones)

3) $\begin{cases} y' = 2\sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases} \longrightarrow$ El teorema nos dice que pueden existir múltiples soluciones o no existir ninguna (vimos que en este caso hay al menos 2 soluciones)

Una vez que sabemos que existen soluciones ¿Cómo las encontramos ?

Para el caso general $y' = f(x, y)$ lo mejor que podemos hacer es **aproximar soluciones de manera gráfica**.

Recordemos:

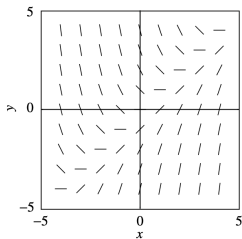
En el gráfico de $y(x)$, $y'(x)$ representa la pendiente a la recta tangente en el punto x .

Luego, si $y' = f(x, y)$, entonces la recta tangente que pasa por el punto $(x, y(x))$ tiene pendiente $m = f(x, y(x))$.

Interpretación gráfica de una solución $y(x)$ en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$:

$y(x)$ es una curva en el plano tal que para todo $x \in I$ la pendiente de la recta tangente es $m = f(x, y(x))$.

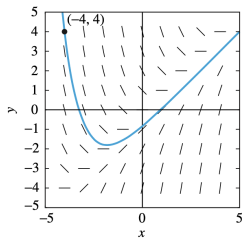
Def. El **campo de pendientes (o isoclinas)** es una colección representativa de puntos en el plano, $\{(x_i, y_i)\}_{i=1, \dots, N}$ tal que en cada punto (x_i, y_i) se dibuja un pequeño segmento de recta con pendiente $m_i = f(x_i, y_i)$.



Una **soluciones al PVI**

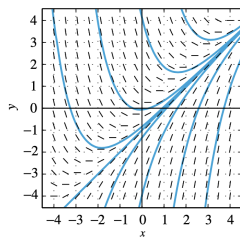
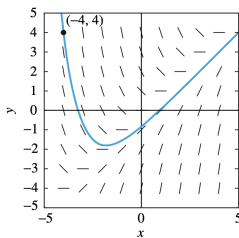
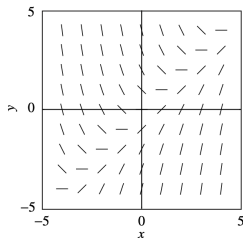
$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

se aproxima gráficamente como una **curva que pasa por (x_0, y_0) y cuya gráfica sigue tangencialmente las pendientes del campo de pendientes.**



Ejemplos.

$$1) \quad \begin{cases} y' = x - y \\ y(-4) = 4 \end{cases}$$



Ventaja del método gráfico:

→ permite inferir propiedades sobre el comportamiento de las soluciones.

2) [Modelo de crecimiento poblacional con capacidad de carga]

$$P'(t) = k(M - P(t))P(t) \quad (M: \text{población máxima sostenible})$$

Considere $k = 0.0004$ y $M = 150$.

