Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Verano del 2024

MAT1610 ⋆ Cálculo I
Interrogación 3
Solución

1. *a*) Mediante la interpretación de la integral definida como área y sus propiedades, en un intervalo cerrado. Calcule

$$\int_{-a}^{a}\left\{|x|+2\sqrt{a^2-x^2}-\operatorname{sen}(x)+1\right\}dx$$

b) Aplicando la definición de la integral de Riemann y sin calcular el límite ni la sumatoria, demuestre

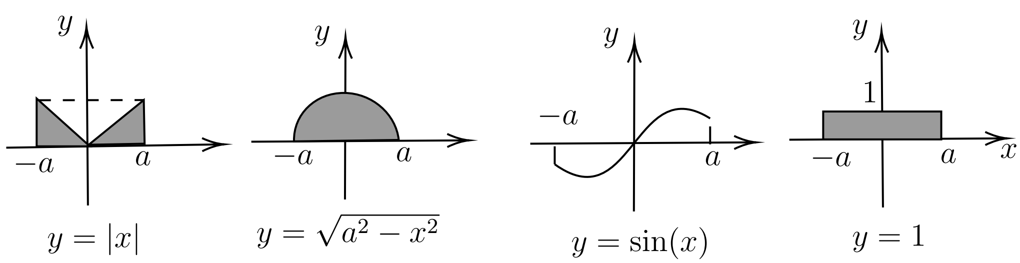
$$\int_0^a x^p dx = a^{p+1}\int_0^1 x^p dx$$

Ayuda: Divida el intervalo $[0,a]$ en n partes iguales.

Solución.

a)

$$\int_{-a}^{a}\left\{|x|+2\sqrt{a^2-x^2}-\operatorname{sen}(x)+1\right\} = \int_{-a}^{a}|x|dx+2\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}dx-\int_{-a}^{a}\operatorname{sen}(x)dx+\int_{-a}^{a}dx$$



Así resulta

$$\int_{-a}^{2}\left\{x+2\sqrt{a^2-x^2}-\operatorname{sen}(x)+1\right\} = \frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}a^2+2\cdot\frac{1}{2}\pi a^2-0+1[a-(-a)] = a^2+\pi a^2+2a$$

b) Demostración.

Efectuando la partición de $[0,a]$ en n partes iguales, se tiene $\Delta x = \dfrac{a}{n}$, entonces

$$\int_0^a x^p dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta x = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} x_k^p\,\frac{a}{n}$$

$$\text{donde :}\quad x_k = k\Delta x = \frac{ka}{n},\ asi$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{ka}{n}\right)^p\frac{a}{n} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p\frac{a^{p+1}}{n}$$

$$= a^{p+1}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p\frac{1}{n} = a^{p+1}\int_0^1 x^p dx$$

donde en esta última integral se tiene que: $\Delta x = \dfrac{1}{n}, x_k = \dfrac{k}{n}$.

Criterios para la asignación de puntaje.

a)

Criterio 1 (a) (0.5 ptos.) por separar en cuatro integrales, por propiedad de la suma.

(Criterio 2 (a) (0.5 ptos.) por el valor de la primera integral.

Criterio 3 (a) (0.5 ptos.) por el valor de la segunda integral.

Criterio 4 (a) (0.5 ptos.) por el valor de la tercera integral. .

Criterio 5 (a) (0.5 ptos.) por el valor de la cuarta integral.

Criterio 6 (a) (0.5 ptos.) por el valor correcto de la integral.

(no asignar este puntaje si no a justificado los criterios anteriores y recuerde que no puede justificar con antiderivadas.)

b)

Criterio 1 (b) (1.0 pto.) Por escribir correctamente la integral de Riemann, tomando la subdivisión sugerida es decir $\Delta x = \dfrac{a}{n}$.

Criterio 2 (b) (0.5 pto.) Por indicar el x_k para esta partición del intervalo $[0, a]$.

Criterio 3 (b) (1.0 pto.) Por extraer el factor común a^{p+1} y la integral resultante.

Criterio 4 (b) (0.5 pto.) Por indicar el x_k para la partición del intervalo $[0, 1]$

2. *a*) Calcule

$$i) \quad \lim_{x\to 1} \frac{\displaystyle\int_1^x t\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)dt}{2x - x^2 - 1} \qquad ii) \quad \lim_{x\to 0}(1+\operatorname{sen} x)^{\dfrac{1}{2x}}$$

b) Considere que: $0 \leq \cos(x) \leq 1$, $\forall x \in [0,1]$, para demostrar que

$$\ln(2) \leq \int_0^1 \frac{1+\cos x}{1+x}dx \leq \ln(4)$$

Solución.

a) i)

$$\lim_{x\to 1} \frac{\displaystyle\int_1^x t\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)dt}{2x - x^2 - 1}\left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{x\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{2-2x}\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - x\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\cdot\frac{\pi}{2}}{-2} = \frac{0 - 1\cdot 1\cdot\frac{\pi}{2}}{-2} = \frac{\pi}{4}$$

ii)

$$L = \lim_{x\to 0}(1+\operatorname{sen} x)^{\frac{1}{2x}} \Leftrightarrow \ln L = \lim_{x\to 0}\ln(1+\operatorname{sen} x)^{\frac{1}{2x}}$$

$$\ln L = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\operatorname{sen} x)}{2x}\left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+\operatorname{sen} x}\cdot\cos x}{2}$$

$$\ln L = \frac{1}{2} \Rightarrow L = e^{1/2} \Rightarrow \lim_{x\to 0}(1+\operatorname{sen} x)^{\frac{1}{2x}} = \sqrt{e}$$

b) Dado que $0 \leq \cos(x) \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 1+\cos(x) \leq 2$
y que $1 + x > 0, \forall x \in [0,1]$ entonces

$$\frac{1}{1+x} \leq \frac{1+\cos(x)}{1+x} \leq \frac{2}{1+x}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx \leq \int_0^1 \frac{1+\cos(x)}{1+x}dx \leq 2\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx$$

$$\ln(1+x)\Big|_0^1 \leq \int_0^1 \frac{1+\cos(x)}{1+x}\,dx \leq 2\ln(1+x)\Big|_0^1$$

$$\ln(2) \leq \int_0^1 \frac{1+\cos(x)}{1+x}\,dx \leq 2\ln(2)$$

$$\ln(2) \leq \int_0^1 \frac{1+\cos(x)}{1+x}\,dx \leq \ln(4)$$

Criterios para la asignación de puntaje.

a)

Criterio 1 (a)i (0.5 ptos.) por aplicar correctamente la regla de L'Hopital $(\frac{0}{0})$, incluído el T. fundamental.

(Criterio 2 (a)i (0.5 ptos.) por L'Hopital $(\frac{0}{0})$, nuevamente, y la segundas derivadas correctas.

Criterio 3 (a)i (0.5 ptos.) por la evaluación correcta del límite y su resultado.

Criterio 4 (a)ii (0.5 ptos.) por notar que es de la forma (1^∞) y aplicar logaritmo.

Criterio 5 (a)ii (0.5 ptos.) por aplicar L'Hopital con las derivadas correctas.

Criterio 6 (a)ii (0.5 ptos.) por la evaluación correcta del límite y su resultado.

b)

Criterio 1 (b) (1.0 pto.) Por establecer la desigualdad que acota entre dos funciones a la función del integrando.

Criterio 2 (b) (1.0 pto.) Por aplicar la propiedad e integrar la desigualdad establecida, en el intevalo $[0, 1]$.

Criterio 3 (b) (1.0 pto.) Por el cálculo correcto de la antiderivada y llegar a la demostración pedida.

3. Calcule las siguientes integrales

a) $\displaystyle\int x\arctan(x)dx$

b) $\displaystyle\int \frac{x-1}{(x+1)(x^2+1)}dx$

c) $\displaystyle\int \frac{1-x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx$, hacer $x=\operatorname{sen}(t)$

Solución.

a) Por partes, tomando cómo

$$u=\arctan(x)\Rightarrow du=\frac{1}{1+x^2}.$$
$$dv=xdx\Rightarrow v=\frac{x^2}{2}$$

se tiene:

$$\int x\arctan(x)dx=\frac{x^2}{2}\arctan(x)-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}dx$$

ahora para la integral

$$\int\frac{x^2}{1+x^2}dx=\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=x-\arctan(x)$$

finalmente

$$=\frac{x^2}{2}\arctan(x)-\frac{1}{2}(x-\arctan(x))+C.$$

b) Por fracciones parciales

$$\frac{x-1}{(x+1)\left(x^2+1\right)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$$
$$x-1=A\left(x^2+1\right)+(Bx+C)(x+1)$$

de donde obtenemos: $A=-1; B=1; C=0$ y por tanto queda

$$\int\frac{x-1}{(x+1)\left(x^2+1\right)}dx=\int\left[\frac{-1}{x+1}+\frac{x}{x^2+1}\right]dx$$
$$=-\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+C$$

c) Haciendo $x=\operatorname{sen}(t)\Rightarrow dx=\cos(t)dt$, resulta

$$\int\frac{1-x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int\frac{1-\operatorname{sen}^3 t}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}}\cos(t)dt$$
$$=\int\left(1-\operatorname{sen}^3(t)\right)dt=\int dt-\int\operatorname{sen}^2(t)\operatorname{sen}(t)dt$$

ahora sea: $\cos(t)=u\Rightarrow-\operatorname{sen}(t)dt=du$, entonces

$$=t-\int\left(1-u^2\right)(-du)=t+u-\frac{u^3}{3}+C$$
$$=\operatorname{arcsen}(x)+\sqrt{1-x^2}-\frac{1}{3}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3+C$$

Criterios para la asignación de puntaje.

a)

Criterio 1 (a) (0.5 pto.) Por establecer la elección de las partes.

Criterio 2 (a) (0.5 pto.) Por la diferencial du y el valor correcto de la integral de dv.

Criterio 3 (a) (0.5 pto.) Por la integral de udv .

Criterio 4 (a) (0.5 pto.) Por el resultado final correcto , de la integral en cuestión, incluye la constante(si no coloca la constante no asignar los 0.5 ptos).

b)

Criterio 1 (b) (0.5 pto.) Por el cálculo correcto de las constantes, por separar en sus fracciones parciales.

Criterio 2 (b) (0.5 pto.) Por el resultado correcto de la primera integral.

Criterio 3 (b) (0.5 pto.) Por el resultado correcto de la segunda integral.

Criterio 4 (b) (0.5 pto.) Por el resultado final correcto, incluye la constante(si no coloca la constante no asignar los 0.5 ptos). *c*)

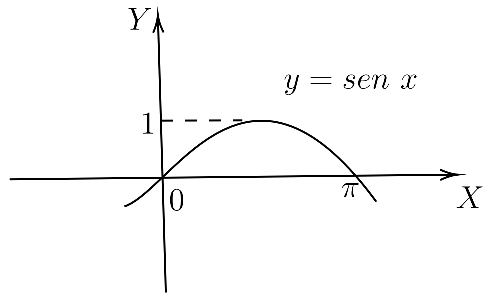
Criterio 1 (c) (0.5 pto.) Por usar el cambio de variable sugerido.

Criterio 2 (c) (0.5 pto.) Por obtener $t - \int \operatorname{sen}^3 t\, dt$.

Criterio 3 (c) (0.5 pto.) Por la integral del $\operatorname{sen}^3 t$.

Criterio 4 (c) (0.5 pto.) Por el resultado final correcto, incluye la constante(si no coloca la constante no asignar los 0.5 ptos)

4. Considere la región encerrada entre la curva $y = \text{sen}(x),\ \forall x \in [0, \pi]$ y el eje X,



para calcular

a) El área de la región.

b) El volumen dal sólido que se genera al girar la región en torno al eje X.

c) El volumen dal sólido que se genera al girar la región en torno al eje Y.

Solución.

a)

$$\text{Área } = \int_0^\pi \text{sen}(x)dx = -\cos(x)\Big|_0^\pi = -(-1-1) = 2$$

b)

$$\begin{aligned} V_x &= \pi \int_0^\pi \text{sen}^2(x)dx = \pi \int_0^\pi \frac{1-\cos(2x)}{2}dx \\ &= \frac{\pi}{2}\left[x - \frac{\text{sen}(2x)}{2}\right]\Big|_0^\pi = \frac{\pi}{2}(\pi - 0) = \frac{\pi^2}{2} \end{aligned}$$

c) $V_y = 2\pi \displaystyle\int_0^\pi x\,\text{sen}(x)dx$

Integrando por partes : $u = x \Rightarrow du = dx$

$$dv = \text{sen}(x)dx \Rightarrow v = -\cos(x)$$

$$\begin{aligned} v_y &= 2\pi\left(-x\cos(x)|_0^\pi + \int_0^\pi \cos(x)dx\right) \\ &= 2\pi\left(-\pi(-1) + \text{sen}(x)|_0^\pi\right) \\ &= 2\pi^2 \end{aligned}$$

<u>Criterios para la asignación de puntaje.</u>

a)

Criterio 1 (a) (0.5 ptos.) por expresar la integral que calcula el área en cuestión.

Criterio 2 (a) (1.0 pto.) por el cálculo correcto de la integral.

Criterio 3 (a) (0.5 ptos.) por el valor correcto del área.

b)

Criterio 1 (b) (0.5 ptos.) por expresar la integral que calcula el volumen en cuestión.

Criterio 2 (b) (1.0 pto.)por el cálculo correcto de la integral.

Criterio 3 (b) (0.5 ptos.) por el valor correcto del volumen V_x.

$c)$

Criterio 1 (c) (0.5 ptos.) por expresar la integral que calcula el área en cuestión.

Criterio 2 (c) (1.0 pto.)por el cálculo correcto de la integral.

Criterio 3 (c) (0.5 ptos.) por el valor correcto del volumen V_y.