Instituto de Economía
Pontificia Universidad Católica de Chile

EAE 210B Segundo semestre 2021

Profesores: Claudia Martínez A., Rodrigo Fuentes, Tibor Heumann, Stephen Blackburn

Control 2

60 minutos

NOTA: Los resultados finales NO TIENEN PUNTAJE. El puntaje se asignará exclusivamente por mostrar el procedimiento correcto en su desarrollo.

1. Pregunta 1 *(10 puntos)*

   Suponga que un individuo tiene una función del tipo Stone-Geary, es decir: $u = (x_1 - \gamma_1)^{0,5}(x_2 - \gamma_2)^{0,5}$. El individuo enfrenta precios dados de cada uno de los bienes iguales a (p_1, p_2).

   (a) *(1 punto)* Explique claramente qué representan los parámetros γ_1, γ_2.

   (b) *(3 puntos)* Derive las demandas compensadas para cada bien. Explique cuidadosamente sus pasos.

   (c) *(3 puntos)* Encuentre la función de gasto o de mínimo costo para alcanzar un nivel de utilidad arbitrario de u. Analice las propiedades de la función de gastos (1. creciente en precios y en u, 2. homogénea de grado 1 en precio de los bienes, 3. cóncava (no estrictamente) en precios).

   (d) *(3 puntos)* A partir de la función de gasto, muestre cuáles serán las demandas marshallianas asociadas a estos bienes (suponiendo que $m \geq p_1\gamma_1 + p_2\gamma_2$).

   Respuesta.

   (a) Los parámetros γ_1, γ_2 representan consumo de subsitencias porque es a medida de que $x_1 \rightarrow \gamma_1$ y que $x_2 \rightarrow \gamma_2$ las utilidades marginales de x_1 y x_2 tienden a infinito. Pueden también argumentar por el lado de las TMSS y por la indefinición de la función de utilidad.

   (b) Deben plantear el Lagrnageano y luego derivar las CPO:

   $$\frac{(x_1 - \gamma_1)^{-0,5}(x_2 - \gamma_2)^{0,5}}{(x_1 - \gamma_1)^{0,5}(x_2 - \gamma_2)^{-0,5}} = \frac{(x_2 - \gamma_2)}{(x_1 - \gamma_1)} = \frac{p_1}{p_2}$$

   De allí reemplazando en la ecuación de la restricción se obtiene las demandas compensadas:

   $$x_i^H = u\left(\frac{p_j}{p_i}\right)^{1/2} + \gamma_i \quad i \neq j$$

(c) La función de gastos es

$$G(p_1,p_2,u) = 2(p_1p_2)^{1/2}u + p_1\gamma_1 + p_2\gamma_2$$

.

$$\frac{\partial G}{\partial u} = 2(p_1p_2)^{1/2} > 0$$

$$\frac{\partial G}{\partial p_i} = u\left(\frac{p_j}{p_i}\right)^{1/2} + \gamma_i \quad i \neq j > 0$$

Sea $\lambda > 0$, entonces

$$2(\lambda p_1 \lambda p_2)^{1/2}u + \lambda p_1\gamma_1 + \lambda p_2\gamma_2 = \lambda[2(p_1p_2)^{1/2}u + p_1\gamma_1 + p_2\gamma_2] = G(p_1,p_2,u)$$

Cóncava, determinante del hessiano tiene que ser menor o igual cero:

$$|H| = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 G}{\partial p_1^2} & \frac{\partial^2 G}{\partial p_1 \partial p_2} \\ \frac{\partial^2 G}{\partial p_1 \partial p_2} & \frac{\partial^2 G}{\partial p_2^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1^H}{\partial p_1} & \frac{\partial x_1^H}{\partial p_2} \\ \frac{\partial x_2^H}{\partial p_1} & \frac{\partial^2 G}{\partial p_2^2} \end{vmatrix}$$

Siendo $\frac{\partial x_1^H}{\partial p_1} < 0$ efecto sustitución siempre negativo o se puede derivar la demanda compensada obtenida anteriormente, lo que implica que $\frac{\partial x_1^H}{\partial p_1} < 0$. Para los elementos de fuera de la diagonal:

$$\frac{\partial x_1^H}{\partial p_2} = \frac{\partial x_2^H}{\partial p_1} = \frac{u}{2(p_1p_2)^{1/2}},$$

por lo tanto $|H| = 0$

(d) Primero deben encontrar la función de utilidad indirecta haciendo $G(p_1,p_2,u) = m$ y $u = v(p_1,p_2,m)$:
y luego aplicar identidad de Roy: $x_i = \gamma_i + \frac{m - p_i\gamma_i - p_j\gamma_j}{2p_i}$.

■

2. Pregunta 2 *(20 puntos)*

El llamado camino de la seda era una ruta comercial que unía a China con los países de occidente desde el siglo I d.C.. Se transportaban diferentes mercancías desde China hasta el mismísimo imperio romano. A medida que el comerciante pasaba por diferentes imperios (como el Persa, por ejemplo) debía pagar impuestos para poder continuar su camino. Imagine que un noble romano es un frecuente consumidor de seda (bien x_1). Llame x_2 al consumo de todos los otros bienes por este individuo.

Este ciudadano es un típico representante de su clase; tiene una función de utilidad dada por $u = (x_1+2)x_2$, posee un ingreso igual a m y enfrenta precios de la seda igual a p_1 y un precio de los otros bienes igual a $p_2 = 1$.

(a) *(4 puntos)* Encuentre la función de utilidad indirecta de este consumidor. ¿Hay posibilidades de que este noble ciudadano no consuma seda? Explique.

(b) *(4 puntos)* Sea el precio de un metro de seda igual a 100 monedas de oro, y el ingreso del individuo de 1000 monedas de oro por mes. Sin embargo, el imperio Persa anuncia que pondrá un impuesto a cada metro de seda que pase por su territorio de forma tal que el precio del metro de seda aumentará en un porcentaje $t > 0$. Determine cuánto está dispuesto a pagar como máximo el noble romano al emperador persa para que no coloque dicho impuesto. ¿A qué medida de bienestar corresponde dicho pago?

(c) *(4 puntos)* Suponga que no es posible hacer la transacción anterior y que el imperio Persa coloca un impuesto que hace subir el precio de la seda en 300% ($t = 3$). En respuesta a esta situación, el Emperador de Roma decide compensar a este noble con un ingreso mayor de forma que su bienestar no cambie. ¿En cuánto debe aumentar el ingreso del noble romano? Explique sus pasos.

(d) *(4 puntos)* Volvamos a la situación en que no hay compensación por parte del emperador romano y que el imperio Persa coloca un impuesto tan alto que el ciudadano romano no compra seda. Obtenga la demanda compensada por seda en esta situación.

(e) *(4 puntos)* Ante esa situación de ventas iguales a cero, los mercaderes de la seda encuentran otra ruta para evitar el pago del impuesto persa, pero implica que el precio de la seda llega a Roma a 200 monedas de oro el metro. Utilizando la demanda compensada que obtuvo en el item anterior, calcule el cambio en el bienestar del noble romano respecto al caso en que no consumía seda.

Respuesta.

(a) Primero deben obtener las demandas marshallianas:

$$x_1^M = \begin{cases} \frac{(m-2p_1)}{2p_1} & \text{if} \quad m > 2p_1 \\ 0 & \text{if} \quad m \leq 2p_1 \end{cases}$$

$$x_2^M = \begin{cases} \frac{(m+2p_1)}{2p_2} & \text{if} \quad m > 2p_1 \\ \frac{m}{p_2} & \text{if} \quad m \leq 2p_1 \end{cases}$$

Mostrar que x_1 puede ser igual a 0.

La función de utilidad indirecta es igual a:

$$v\left(m, p_1, p_2\right) = \begin{cases} \frac{(m+2p_1)^2}{4p_1p_2} & \text{if} \quad m > 2p_1 \\ \frac{2m}{p_2} & \text{if} \quad m \leq 2p_1 \end{cases}$$

(b) De la función de utilidad indirecta obtenemos la función de gasto:

$$E(u, p_1, p_2) = \begin{cases} 2\sqrt{up_1p_2} - 2p_1 \text{ si } u \geq 4\frac{p_1}{p_2} \\ \frac{p_2 u}{2} \text{ si } u \leq 4\frac{p_1}{p_2} \end{cases}$$

Al poner el impuesto, el noble romano obtiene una utilidad:

$$v(1000, 100(1+t), 1) = \frac{(1000 + (1+t)200)^2}{400(1+t)}$$

Debemos calcular la variación equivalente:

$$VE = 1000 - E(v(1000, 100(1+t), 1), 100, 1) = \Big(\frac{(1000 + (1+t)200)}{\sqrt{(1+t)}} - 200\Big) - 1000$$

El valor absoluto de la variacion equivalente (es decir, VE multiplicado por -1) es lo que esta dispuesto a pagar. Notar que esta solución solo es valida par $t \leq 5$, para $t \geq 5$ el individuo no consume seda, y por lo tanto tenemos que evaluar la VE en $t = 5$.

(c) Ahora calculamos la variación compensatoria. Notamos que, previo al impuesto la utilidad del individuo es:

$$v(1000, 100, 1) = \frac{(1000 + 200)^2}{400} = 3600.$$

Por lo tanto, la variación compensatoria es:

$$VC = 1000 - E(3600, (1+t)100, 1) = 1000 - \Big(2\sqrt{3600(1+t)100} - 200(1+t)\Big).$$

Evaluando en $t = 3$ obtenemos que $VC = -600$. En esto debe aumentar el ingreso para dejar al individuo en el mismo nivel de u inicial.

(d) La curva de demanda compensada es:

$$x_1^H = \frac{u^{1/2}}{p_1^{1/2}} - 2 = \frac{2000^{1/2}}{p_1^{1/2}} - 2$$

si $m > 2p_1$ y $x_1^H = 0$ si $m \leq 2p_1$

(e) Esto corresponde a la integral entre $p_1 = \infty$ o que en este caso es $p_1 = 500$ (con ese precio consume 0) y 200. El aumento en bienestar es igual a 135.1.

■