PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Escuela de Ingeniería
ICE1514 — Dinámica
Segundo semestre 2019

Taller 02

Cinemática II

Problema 1.

Eugenio luego de ver la película *Romeo y Julieta* decide ir a la casa de Paula (su polola) y tirarle una piedra a su ventana con una carta de amor. La ventana de Paula está a una altura H y distancia D del lanzador. Eugenio conoce las propiedades físicas del vidrio y la única forma de romper el vidrio es pegarle de forma horizontal.
Determine la rapidez y ángulo con que debe lanzar la piedra en función de D, H, y g.

Problema 2.

Un avión debe lanzar ayuda humanitaria de modo que caiga en el punto A. El avión se desplaza a velocidad constante v_0 y a altura H. Determine el ángulo θ bajo la horizontal que marca el instante en que debe soltar el paquete.
Nota: El paquete no es lanzado con ángulo θ, sino que inicialmente sigue la trayectoria del avión.

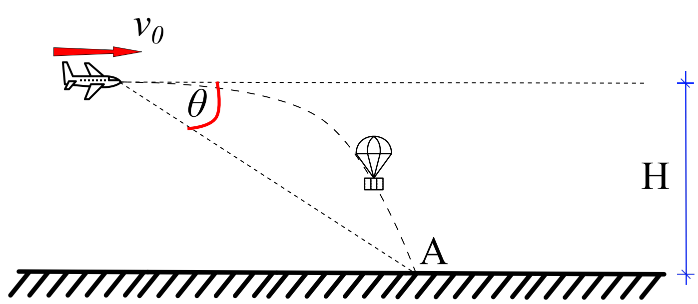

Figura 1: Bombardero disparando al tren

Problema 3.

Stuart jugaba con sus amigos a las penitencias y le tocó realizar el reto del "helicóptero". En dicho reto debe describir una trayectoria circular de radio R y su desplazamiento debe ser $s(t) = R\ ln(1 + \alpha t)$.
Determine las componentes tangencial y normal de la aceleración (a_θ y a_r, respectivamente).

Problema 4.

Una partícula se mueve con:

$$\dot{\theta} = \omega \qquad \text{y} \qquad r = r_o e^{\beta t}$$

, donde la velocidad angular ω es constante, y además β y r_o son también constantes.
Determine los valores de β para que su aceleración radial sea nula.

Soluciones.

Problema 1.

Tomando el origen del sistema en Eugenio, como indica la Figura 2(a), se sabe del enunciado del problema que:

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{u}(t^\star) = \begin{Bmatrix} D \\ H \end{Bmatrix} \quad ; \quad \dot{\mathbf{u}}(t^\star) = \begin{Bmatrix} ? \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Notar que para que golpee el vidrio de forma horizontal, la velocidad en "y" es cero, pero la velocidad en "x" es algún valor (por ahora) desconocido.
El vector de velocidad inicial se obtiene descomponiendo $\mathbf{v}_0 = \dot{\mathbf{u}}_0$ en su magnitud por su director, como muestra la Figura 2(b):

$$\mathbf{v}_0 = v_0 \begin{Bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{Bmatrix}$$

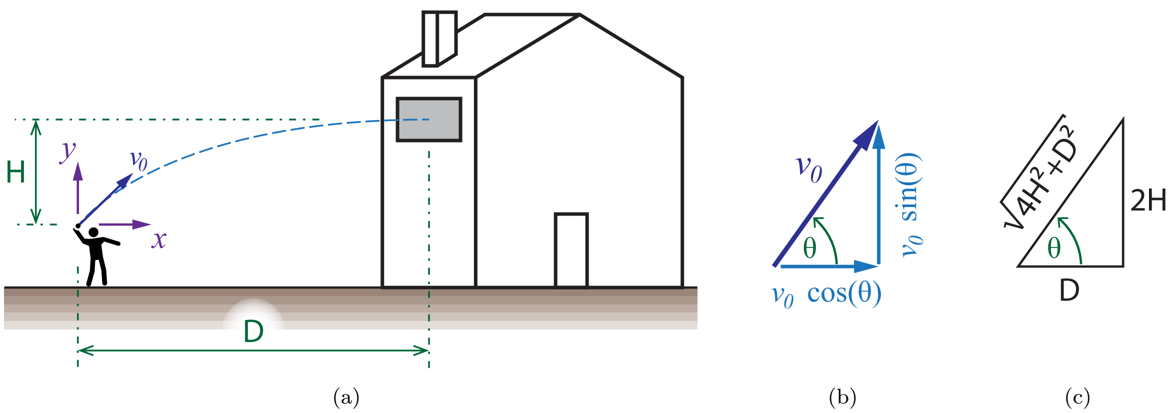

Figura 2: Problema de Eugenio tirando piedra a la ventana de Paula de manera que golpee el vidrio de forma horizontal: (a) descripción del problema; (b) descomposición de $\mathbf{v_0}$ en su magnitud y dirección; y (c) obtención de $\sin(\theta)$ y $\cos(\theta)$ a partir de que $\tan(\theta) = 2H/D$.

Conocemos el vector de aceleración de la piedra, y luego integramos dos veces para obtener velocidad y aceleración:

$$\ddot{\mathbf{u}}(t) = \begin{Bmatrix} 0 \\ -g \end{Bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \begin{Bmatrix} 0 \\ -g \end{Bmatrix} t + \begin{Bmatrix} C_{1x} \\ C_{1y} \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{u}(t) = \begin{Bmatrix} 0 \\ -g \end{Bmatrix} \frac{t^2}{2} + \begin{Bmatrix} C_{1x} \\ C_{1y} \end{Bmatrix} t + \begin{Bmatrix} C_{2x} \\ C_{2y} \end{Bmatrix}$$

Usando las condiciones iniciales del problema (ya obtenidas), resulta:

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \begin{Bmatrix} 0 \\ -g \end{Bmatrix} t + v_0 \begin{Bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{Bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{u}(t) = \begin{Bmatrix} 0 \\ -g \end{Bmatrix} \frac{t^2}{2} + v_0 \begin{Bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{Bmatrix} t$$

Sabemos la posición y la velocidad (en el eje "y") en el momento de impacto con el vidrio:

$$\dot{\mathbf{u}}(t^\star) = \begin{Bmatrix} ? \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -g \end{Bmatrix} t^\star + v_0 \begin{Bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{Bmatrix} \qquad \rightarrow \qquad t^\star = \frac{v_0 \, \sin(\theta)}{g}$$
$$\mathbf{u}(t^\star) = \begin{Bmatrix} D \\ H \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -g \end{Bmatrix} \frac{(t^\star)^2}{2} + v_0 \begin{Bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{Bmatrix} t^\star$$

, reemplazando la expresión de $t^\star$ en la segunda ecuación se obtiene:

$$D = \frac{v_0^2 \, \cos(\theta) \, \sin(\theta)}{g}$$
$$H = \frac{v_0^2 \, \sin^2(\theta)}{g} - \frac{v_0^2 \, \sin^2(\theta)}{2\,g} = \frac{v_0^2 \, \sin^2(\theta)}{2\,g}$$

Es interesante notar que las expresiones para D y H son muy similares: una división de ellas tiene el potencial de obtener una expresión sencilla para θ. Alternativamente se podría haber despejado v_0^2 en ambas expresiones e igualar.

$$\frac{H}{D} = \left[\frac{v_0^2 \, \sin^2(\theta)}{2\,g}\right] \cdot \left[\frac{g}{v_0^2 \, \cos(\theta) \, \sin(\theta)}\right] = \frac{\tan(\theta)}{2} \qquad \rightarrow \qquad \theta = \operatorname{atan}\left(\frac{2H}{D}\right)$$

Para obtener la velocidad inicial v_0 en función de D y H, debemos encontrar expresiones para $\sin(\theta)$ y/o $\cos(\theta)$ en función de D y H. Como sabemos que $\tan(\theta) = 2H/D$, entonces usando relaciones trigonométricas en un triángulo (como muestra la Figura 2(c)), se obtiene:

$$\sin(\theta) = \frac{2H}{\sqrt{4H^2 + D^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{D^2}{4H^2}}}$$

, que reemplazado en la expresión para H, se obtiene:

$$H = \frac{v_0^2}{2\,g} \cdot \frac{1}{1 + \frac{D^2}{4H^2}}$$
$$v_0 = \sqrt{\frac{g}{2H}\left(4H^2 + D^2\right)}$$

Problema 2.

El paquete al momento de ser lanzado se encontrará a altura H y continuará brevemente la trayectoria del avión; es decir:

$$\mathbf{u}_0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ H \end{Bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \dot{\mathbf{u}}_0 = v_0 \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Conocemos el vector de aceleración de la piedra, y luego integramos dos veces para obtener velocidad y aceleración:

$$\ddot{\mathbf{u}}(t) = \begin{Bmatrix} 0 \\ -g \end{Bmatrix}$$
$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \begin{Bmatrix} 0 \\ -g \end{Bmatrix} t + \begin{Bmatrix} C_{1x} \\ C_{1y} \end{Bmatrix}$$
$$\mathbf{u}(t) = \begin{Bmatrix} 0 \\ -g \end{Bmatrix} \frac{t^2}{2} + \begin{Bmatrix} C_{1x} \\ C_{1y} \end{Bmatrix} t + \begin{Bmatrix} C_{2x} \\ C_{2y} \end{Bmatrix}$$

Usando las condiciones iniciales del problema, resulta:

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \begin{Bmatrix} 0 \\ -g \end{Bmatrix} t + v_0 \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{u}(t) = \begin{Bmatrix} 0 \\ -g \end{Bmatrix} \frac{t^2}{2} + v_0 \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} t + \begin{Bmatrix} 0 \\ H \end{Bmatrix}$$

En el tiempo $t^\star$ el paquete llega a su objetivo (el punto A):

$$\mathbf{u}\left(t^\star\right) = \begin{Bmatrix} 0 \\ -g \end{Bmatrix} \frac{\left(t^\star\right)^2}{2} + v_0 \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} t^\star + \begin{Bmatrix} 0 \\ H \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} D \\ 0 \end{Bmatrix}$$

, donde D es la distancia horizontal desde el punto de lanzamiento del paquete al objetivo. Despejando el tiempo $t^\star$ de la primera y segunda ecuación se obtiene:

$$t^\star = \frac{D}{v_0} \qquad \text{y} \qquad t^\star = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

Igualando ambos tiempos:

$$D = v_0 \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

Usando trigonometría básica podemos expresar θ en función de H (altura conocida) y de la distancia D:

$$\tan\left(\theta\right) = \frac{H}{D} = H \cdot \frac{1}{v_0 \sqrt{\frac{2H}{g}}} = \frac{1}{v_0} \sqrt{\frac{Hg}{2}}$$

Es decir, el paquete debe soltarse cuando se visualiza el punto A a un ángulo θ bajo el horizonte, definido por:

$$\theta = \operatorname{atan}\left(\frac{1}{v_0} \sqrt{\frac{Hg}{2}}\right)$$

Curiosidades: En la 2^a guerra mundial los bombarderos hacían uso de este sistema. Un periscopio con un espejo inclinado se calibra según la velocidad del bombardero y a la altura de vuelo, y así mirar según el ángulo θ. Cuando el operador visualizaba el objetivo en el periscopio (el cual mira hacia adelante gracias al espejo) se dejaban caer las bombas.
El sistema en funcionamiento (restaurado para fines históricos) puede ser visto en:
`https://www.youtube.com/watch?v=QXlU6TjUL-Y`. La vista del operador se muestra en 1:50.

Problema 3.

Una longitud de arco de un círculo es siempre igual a $s = r \cdot \theta$, que en nuestro caso resulta:

$$s\left(t\right) = R \cdot \theta = R \, \ln\left(1 + \alpha \, t\right) \qquad \rightarrow \qquad \theta = \ln\left(1 + \alpha \, t\right)$$

Ahora que se tiene una expresión para $\theta\left(t\right)$ y se sabe que la trayectoria es circular, se pueden obtener todos los términos necesarios para la aceleración en coordenadas polares:

$$\begin{array}{ccc} r = R & \dot{r} = 0 & \ddot{r} = 0 \\ \theta = \ln\left(1 + \alpha \, t\right) & \dot{\theta} = \dfrac{\alpha}{1 + \alpha \, t} & \ddot{\theta} = \dfrac{-\alpha^2}{\left(1 + \alpha \, t\right)^2} \end{array}$$

Con ello, la aceleración en coordenadas polares es:

$$\mathbf{a}\left(t\right) = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) \hat{\mathbf{e}}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right) \hat{\mathbf{e}}_\theta$$
$$\mathbf{a}\left(t\right) = \left[\frac{-R\alpha^2}{\left(1 + \alpha \, t\right)^2}\right] \hat{\mathbf{e}}_r + \left[\frac{-R\alpha^2}{\left(1 + \alpha \, t\right)^2}\right] \hat{\mathbf{e}}_\theta$$

Es decir:

$$a_r = a_\theta = \frac{-R\alpha^2}{\left(1 + \alpha \, t\right)^2}$$

Problema 4.

Derivando las expresiones del enunciado, resulta:

$$
\begin{aligned}
r &= r_0\, e^{\beta\, t} & \dot{r} &= r_0\beta\, e^{\beta\, t} & \ddot{r} &= r_0\beta^2\, e^{\beta\, t} \\
\theta &= ? & \dot{\theta} &= \omega & \ddot{\theta} &= 0
\end{aligned}
$$

Con ello, la aceleración en coordenadas polares es:

$$\mathbf{a}\,(t) = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{\mathbf{e}}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\hat{\mathbf{e}}_\theta$$

Igualando a cero el término asociado a la aceleración radial:

$$
\begin{aligned}
a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = r_0\beta^2\, e^{\beta\, t} - \left(r_0\, e^{\beta\, t}\right)\left(\omega^2\right) &= 0 \\
r_0\, e^{\beta\, t}\left(\beta^2 - \omega^2\right) &= 0
\end{aligned}
$$

Es decir, la aceleración radial será nula si $\omega = \beta$, o bien $\omega = -\beta$; i.e. hay una solución asociada a cada sentido de giro.