Formulas

Trini Correa

Funciones de varias variables y técnicas de estática comparativa

elasticidad precio

$$\varepsilon_{y,x} = \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{x}{y}$$

elasticidad sustitución

$$\frac{\partial (K/L)}{\partial TMS} \cdot \frac{TMS}{K/L}$$

$$\frac{\partial (\ln (K/L))}{\partial (\ln (TMS))}$$

elasticidad producto total

$$\varepsilon_{PT(q)} = \frac{PMgL_1}{PMgL_2} + \frac{PMgK_1}{PMgK_2}$$

derivada implicita

$$y' = -\frac{f_x}{f_y}$$

diferencial

$$dU = \frac{\partial U}{\partial u} du + \frac{\partial U}{\partial \sigma} d\sigma = 0$$

→ tms

recordar $-\frac{dy}{dx}$

plano tangente

$$L(x,y) = z = f(a,b) + f_x(a,b) \cdot (x-a) + f_y(a,b) \cdot (y-b)$$

regla de la cadena con dos variables

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\begin{tikzcd}
 & y \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
x \arrow[d] & & y \arrow[d] \\
t & + & t
\end{tikzcd}$$

homogeneidad

$$y(tx, ty) = t^k y(x,y)$$

la tms es homogénea de grado 0

las derivada de una homogénea es de grado k-1

$f(\lambda L, \lambda K) > \lambda^\theta f(L,K)$	$\theta > 1$	rendimientos crecientes a escala
$f(\lambda L, \lambda K) = \lambda^\theta f(L,K)$	$\theta = 1$	rendimientos constantes a escala
$f(\lambda L, \lambda K) < \lambda^\theta f(L,K)$	$\theta < 1$	rendimientos decrecientes a escala

teorema de euler

$$x \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + y \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = K f(x,y)$$

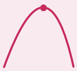
lebiniz

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(t,x)\, dx = f(t, b(t))\, b'(t) - f(t, a(t))\, a'(t) + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f(t,x)}{\partial t} dx$$

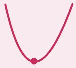
$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b} f(t,x)\, dx = -f(t, a(t))\, a'(t)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{a}^{b(t)} f(t,x)\, dx = f(t, b(t))\, b'(t)$$

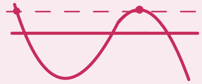
Optimización con restricciones de igualdad y desigualdad



cóncava
máximo
global



convexo
mínimo
global



cuasi cóncava o convexa
mínimo o máximo local

Weierstrass

si la restricción es continua y compacta, es decir, su conjunto es cerrado y acotado entonces la función alcanza un mínimo o maximo global.

definición conjunto convexo

$\vec{x}, \vec{y} \in D$; $\forall$ escalar t, tal que $0 \leq t \leq 1 \Longrightarrow t\vec{x} + (1-t)\vec{y} \in D$

funciones cóncavas y convexas

$t \in [0,1]$

convexa $F(t\vec{x} + (1-t)\vec{y}) \leq tF(\vec{x}) + (1-t)F(\vec{y})$

cóncava $F(t\vec{x} + (1-t)\vec{y}) \geq tF(\vec{x}) + (1-t)F(\vec{y})$

*si son estrictamente cóncavas o convexas el signo en ambos casos seria solo mayor o menor (sin el igual)

*si f es convexa -f es cóncava

¡Importante!

si una función es cóncava entonces sus máximos locales máximos globales, si es estrictamente cóncava además son únicos, asimismo para las funciones convexa y sus mínimos.

funciones cuasi-convexas

$F: D \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$; D convexo $= \emptyset$, se cumplen las siguientes equivalencias

1. f es cuasi-convexa
2. $\forall\ \vec{x}, \vec{y} \in D$ y $\forall t \in [0,1]$, si $F(\vec{x}) \geq F(\vec{y})$ entonces $F(t\vec{x} + (1-t)\vec{y}) \leq F(\vec{x})$
3. el conjunto bajo nivel: $P^c = \{(x,y) \mid F(x,y) \leq c\}$ es convexo $\forall$ "c"

*si son estrictamente cuasi el signo en ambos casos seria solo mayor o menor (sin el igual)

funciones cuasi-cóncava

*si f es cuasi-convexa -f es cuasi-cóncava

$f: D \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$; D convexo = ∅, se cumplen las siguientes equivalencias

1. f es cuasi-cóncava
2. $\forall \vec{x}, \vec{y} \in D$ y $\forall t \in [0,1]$, si $f(\vec{x}) \geq f(\vec{y})$ entonces $f(t\vec{x} + (1-t)\vec{y}) \leq f(\vec{x})$
3. el conjunto bajo nivel: $P^c = \{(x,y) \mid f(x,y) \geq c\}$ es convexo $\forall$ "c"

★¡Importante!★ una función cóncava o convexa es cuasi-cóncava o cuasi-convexa, pero no al revés

matriz hessiana orlada (para cuasi convexidad)

$$\begin{bmatrix} 0 & f_x & f_y \\ f_x & f_{xx} & f_{xy} \\ f_y & f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$$

= H1

| | = H2

| | = H3

función cuasi-cóncava
siempre h1 = 0
h2 ≤ 0
h3 ≥ 0

función cuasi-convexa
siempre h1 = 0
h2 ≥ 0
h3 ≤ 0

método de lagrange: restricciones de igualdad

Paso 1: derivar la restricción e igualaria a cero para ver las condiciones de clasificación de restricción (ccr).

Paso 2: evaluar el punto obtenido en la restricción, si se cumple el punto seria un punto crítico.

Paso 3: escribir el lagrangeano. $\mathcal{L}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = f(x,y,z) - \lambda_1(g(x,y,z) - \lambda_2(h(x,y,z)$

Paso 4: derivar el lagrangeano respecto todas sus variables y encontrar los puntos críticos.

Paso 5: reemplazar los puntos críticos obtenidos en la función para ver los candidatos a mínimos y máximos.

Paso 6: ver si los candidatos son mínimos o máximos globales o locales (hessians orlando, hessiano, weierstrass).

función valor

Es el máximo o mínimo global evaluado en la función objetivo. $f(x^*, y^*) = f^*$

matriz hessiana orlada

$$\begin{bmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & \mathcal{L}_{xx} & \mathcal{L}_{xy} \\ g_y & \mathcal{L}_{xy} & \mathcal{L}_{yy} \end{bmatrix}$$

| | = H3

$\mathcal{L}(x,y) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$

h3 > 0 es un maximo local
h3 < 0 es un mínimo local

matriz hessiana

$$\begin{bmatrix} \mathcal{L}_{xx} & \mathcal{L}_{xy} & \mathcal{L}_{xz} \\ \mathcal{L}_{yx} & \mathcal{L}_{yy} & \mathcal{L}_{yz} \\ \mathcal{L}_{zx} & \mathcal{L}_{zy} & \mathcal{L}_{zz} \end{bmatrix}$$

= H1

| | = H2

| | = H3

$H2 = f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2$

$\text{Det} = f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2$

matriz definida negativa: máximo absoluto y estrictamente cóncava

$h1 < 0$

$h2 > 0$

$h3 < 0$

matriz defina positiva: mínimo absoluto y estrictamente convexa

$h1, h2, h3 > 0$

matriz semidefinida negativa: máximo y cóncava

$h1 \leq 0$

$h2 \geq 0$

$h3 \leq 0$

matriz semidefinida positiva: mínimo y convexa

$h1, h2, h3 \geq 0$

punto silla

$h2 < 0$

cóncava y convexa a la vez (línea recta)

$h2 = 0$

kkt: restricciones de desigualdad

max $x\ y$

s.a. $x \leq 0$ *si no dar vuelta

$y \leq 0$

restricciones

→ activa $\lambda > 0$

→ inactiva u holgada $\lambda = 0$

condiciones

$\mathcal{L}_x = 0$ $\quad \mathcal{L}_y = 0$

$\mathcal{L}_\lambda \geq 0, \quad \lambda \geq 0, \quad \lambda \cdot \text{restricción} = 0$

kkt: restricciones de igualdad y desigualdad

max $x\ y$

s.a. $y \leq 0$ *si no dar vuelta

$x = 0$

lagrangeano

$\mathcal{L}(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = xy - \lambda_1(x) - \lambda_2(y)$

condiciones

$\mathcal{L}_x = 0 \quad \mathcal{L}_y = 0$

$\mathcal{L}_{\lambda_1} = 0$

$\mathcal{L}_{\lambda_2} \geq 0 \quad \lambda_2 \geq 0 \quad \lambda_2 \cdot \text{restricción} = 0$

teorema de la envolvente

$$\frac{\partial f^*(x,y)}{\partial a_i} = \frac{\partial \mathcal{L}(x^*, y^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*, a)}{\partial a_i}$$

→

máx/mín $f(x,y)$

s.a $g(x,y) = c \;/\; g(x,y) \leq c$

$$\frac{\partial f^*(x,y)}{\partial c} = \frac{\partial \mathcal{L}(x^*, y^*, \lambda^*, c)}{\partial c} = \lambda$$

interpretación económica de los multiplicadores

- lambda es el precio sombra, es lo que me cuesta aumentar mi producción en una unidad más. se puede observar en el teorema de la envolvente que al derivar respecto a la constante nos va a dar lambda.
- en kkt me conviene soltar las restricciones activas, ya que lambda es distinto a cero entonces si aumenta mi producción.

¡Importante!

$\boxed{\min f(x,y) = \max -f(x,y)}$

* en kkt siempre maximizar.
* además, para toda optimización toda minimización se puede transformar en maximización.
* las restricciones no cambian.

Ecuaciones en diferencia

forma génerica:

$$x_{t+1} = a x_t + b$$

$x_1 = a x_0 + b \xrightarrow{\text{Reemplazando}} x_1 = a x_0 + b$

$x_2 = a x_1 + b \xrightarrow{\text{Reemplazando}} x_2 = a^2 x_0 + ab + b$

$x_3 = a x_2 + b \xrightarrow{\text{Reemplazando}} x_3 = a^3 x_0 + a^2 b + ab + b$

solución de primer orden: homogeneás y particular (b≠t)

$x_{t+1} = a x_t + b$ — si b=0 es homogénea

si $a \neq 1$

$$x_t = a^t x_0 + b\left(\frac{1-a^t}{1-a}\right)$$

si $a = 1$

$$x_t = x_0 + tb$$

no homogénea = particular

fórmula genérica no homogéna: primer (b=t) y segundo orden

$$x_t = \underbrace{x_t^h}_{\text{homogénea}} + \underbrace{x_t^p}_{\text{particular}}$$

se calcula cada parte con las otras fórmulas puestas

solución de segundo orden: homogénea

1. anotar el problema como la ecuación característica:

$$q^2 + a_1 q + a_0 = 0$$

2. resolver ecuación en q ($q_1 = c_1, q_2 = c_2$)

$$y_t = q^t (c_1 + c_2 t)$$

3. reemplazar en formula

soluciones complejas

$$y_t = r^t [c_1 \cos(\theta t) + c_2 \sin(\theta t)]$$

donde, $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\theta = \arctan(b/a)$
y c_1, c_2 son constantes

$$r = |m_1| = \begin{cases} < 1 & \text{secuencia converge} \\ = 1 & \text{secuencia no converge no diverge} \\ > 1 & \text{secuencia diverge} \end{cases}$$

soluciones reales distintas

$$y_t = c_1 q_1^t + c_2 q_2^t$$

soluciones reales iguales

$$y_t = q^t (c_1 + c_2 t)$$

solución de primer y segundo orden: particular

1. anotar función
2. anotar guess
3. reemplazar x por guess
   ojo con los tiempos
4. sistema de ecuaciones
5. encontrar a_0 y a_1
6. reemplazar a_0 y a_1 en guess

¿cómo encontrar el guess para n=1?

término no homogéneo b_t	guess
ba^t	Aa^t
$\sin(bt)$ o $\cos(bt)$	$A\sin(bt) + B\cos(bt)$
bt^n	$A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \dots + A_n t^n$
$bt^n a^t$	$a^t(A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \dots + A_n t^n)$
$ca_t \sin(bt)$ o $ca^t \cos(bt)$	$a^t(A\sin(bt) + B\cos(bt))$

estado estacionario, estabilidad y puntos fijos

el estado estacionario que es aquel en donde $f(X^*)=X^*$. un sistema dinámico es estable cuando $t \rightarrow \infty$ entonces el sistema converge a X^* su estado estacionario.

lím $f(X) \neq 1 \neq \infty$, converge=estable
lím $f(X)=\infty$, diverge=inestable
lím $f(X)=0$, no se aleja ni acerca al equilibrio

* al calcular estado estacionario no se reemplaza el X_1, pero al calcular el límite si

Si $|f'(X_*)| < 1$, entonces X^* es localmente estable

Si $|f'(X_*)| > 1$, entonces X^* no es localmente estable

tasa de crecimiento

$$\frac{\text{mañana}}{\text{hoy}}$$

Ecuaciones diferenciales

solución de primer orden: homogeneás y particular ($b \neq t$)

si $b=0$ es homogénea

$X'=aX$
solución $X=Xe^{at}$

$X'=aX+b$
solución $X=e^{at}(X+b/a)-b/a$

fórmula genérica no homogéna: primer ($b=t$) y segundo orden

$$X_t = \underbrace{X_t^h}_{\text{homogénea}} + \underbrace{X_t^p}_{\text{particular}}$$

se calcula cada parte con las otras fórmulas puestas

camino a la solucion homogénea

1. expresar la derivada en dy/dt
2. despejar dt
3. integrar la igualdad (ecuación)
4. resolver el in elevando a e
5. distinguir la constante que obtuvimos al integrar
6. despejar y

solución de primer orden: particular

1. anotar función
2. anotar guess
3. reemplazar X por guess y derivar según t
4. sistema de ecuaciones
5. encontrar a_0 y a_1
6. reemplazar a_0 y a_1 en guess

¿cómo encontrar el guess para n=1?

Término no homogéneo b_t	Guess
be^{tk}	Ae^{tk}
$\sin(bt)$ o $\cos(bt)$	$A\sin(bt) + B\cos(bt)$
bt^n	$A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \ldots + A_n t^n$

tasa de crecimiento

$$\frac{k'}{k}$$

estabilidad y puntos fijos

$y'(t) = f(y(t))$

sea y^* un punto fijo de $y(t)$.

entonces:

si $y'(y^*)=0$; $y''(y^*) < 0$, entonces y^* es localmente estable
si $f'(y^*)=0$; $y''(y^*) \geq 0$, entonces y^* es inestable

entonces, si cerca de y^*
$f(y^*)$ cambia de signo de positivo a negativo, entonces y^* es localmente estable

$f(y^*)$ cambia de signo de negativo a positivo, entonces y^* no es localmente estable

estado estacionario

$y'(t) + ay(t) = b$

$y'(t)=0$

$y(t) = e^{-at}(y(0) - y^*) + y^*$

¡Importante!

* si y^* es el único punto fijo y es localmente estable, entonces es globalmente estable