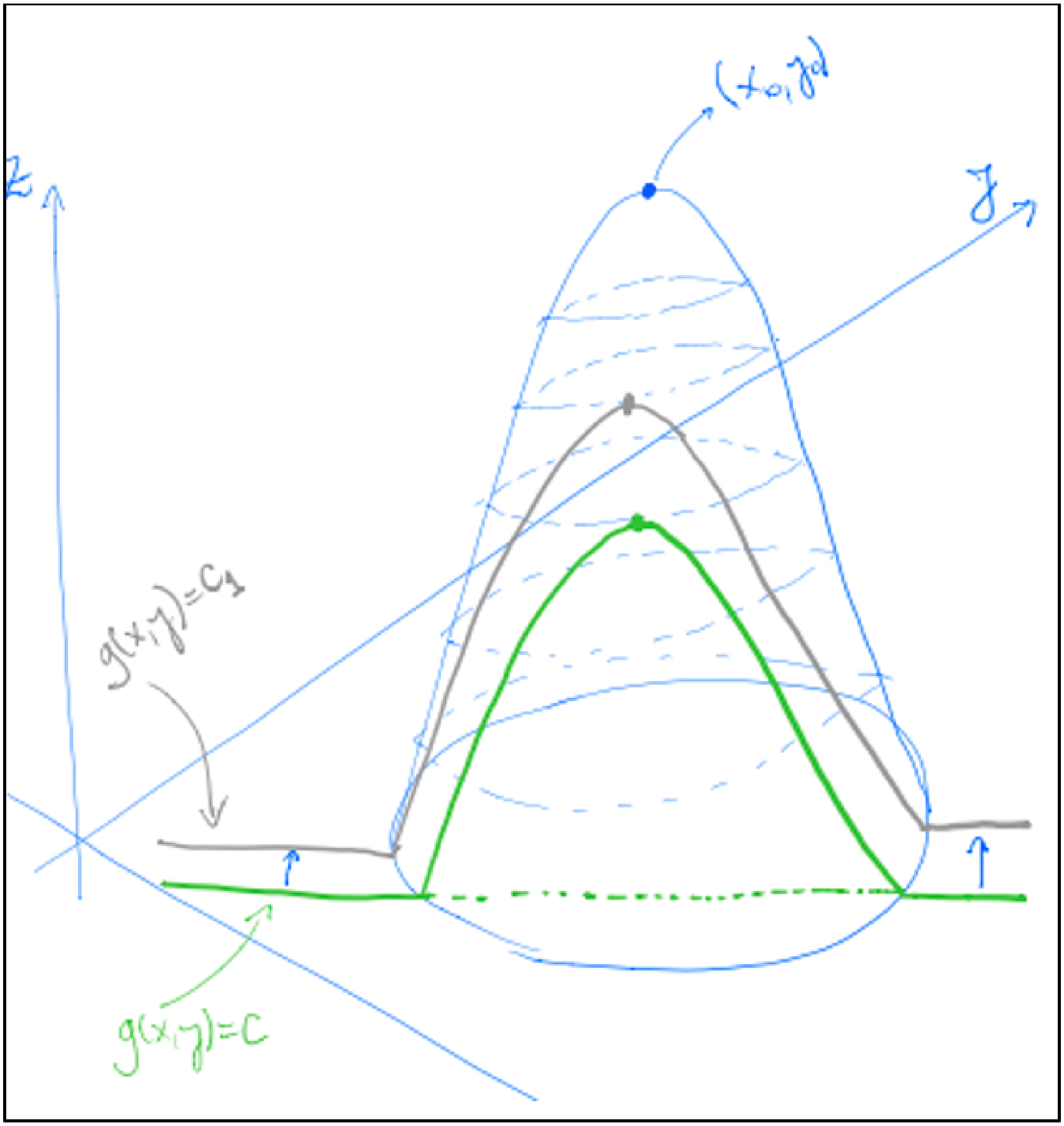
Material de Estudio EAF2010

Uso exclusivo para el curso EAF2010
No distribuir.

14 de marzo de 2023


(x_0, y_0)
z
y
$g(x,y)=c_1$
$g(x,y)=c$

Índice general

Prefacio III

1. Funciones de Varias Variables 1

2. Técnicas de Estática Comparativa 10

3. Optimización sin Restricciones 20

4. Optimización con Restricciones de Igualdad 35

5. Optimización con Restricciones de Desigualdad 44

6. Ecuaciones en Diferencias de Primer Orden 59

7. Ecuaciones en Diferencias de Segundo Orden o Superior 69

A. Matrices 74

B. Formulario 78

Prefacio

Dentro de este material de estudio encontrarán varios ejercicios del curso EAF2010 (previamente EAF200A). Se espera que los alumnos utilicen este material para complementar su aprendizaje con las cátedras del curso.

Los ejercicios contenidos en el material de estudio se encuentran separados según los contenidos que se ve en cada unidad del curso. Asimismo, en el titulo de cada uno de los ejercicios se especifica el subtema que cada ejercicio ayuda a profundizar, con la finalidad de que cada alumno refuerce los contenidos que estime necesarios. Particularmente, algunos de los ejercicios al final de cada capítulo tratan temas de varias unidades, por lo que se recomienda a los alumnos revisarlos para integrar su conocimiento y prepararse mejor para las evaluaciones del curso.

En el material también encontrarán una pauta tentativa a algunos de los ejrecicios, por lo tanto este archivo quedará en actualización para incorporar las soluciones a los ejercicios restantes. Aún así se recomienda a los alumnos que intenten resolverlos y tomarlo como un desafío, pues esto les ayudará a profundizar algunos de los contenidos vistos en el curso. De todas formas, si tienen dudas con la resolución de algunos de los ejercicios siempre pueden recurrir al Equipo Docente para resolver sus dudas.

El documento también contiene una serie de apéndices para que los alumnos puedan profundizar en ciertos puntos específicos del cursos. Es recomendable que los alumnos revisen los antes de realizar los ejercicios contenidos en el material de estudio.

Finalmente, se espera que este material facilite y complemente el aprendizaje de los alumnos del curso EAF200A y les permita prepararse mejor para los cursos posteriores de la carrera. Les deseamos mucha suerte en el curso y en lo que resta de la carrera.

Se agradece la colaboración de los profesores Rafael Águila, Felipe Del Canto, Caio Machado, Bernardo Quiroga, José Tessad, Bernardita Viala y Matías Villagra al facilitar los ejercicios que han utilizado en versiones anteriores del curso.

Cualquier problema que se encuentre al documento por favor indicar a los correos electrónicos: rpino2@uc.cl y jtessada@uc.cl.

Capítulo 1

Funciones de Varias Variables

1.1. Dominio de Funciones

Determine los valores de x e y para los cuales las siguientes funciones están definidas en los reales.

1. $\frac{x^2+y^2}{y-x+2}$
2. $\sqrt{2-(x^2+y^2)}$
3. $\sqrt{(4-x^2-y^2)(x^2+y^2-1)}$

1.2. Curvas de Nivel

Determine y grafique a mano alzada, las curvas de nivel: $f(x,y)=c$, para $c=-1$, $c=0$ y $c=+1$ de las siguientes funciones

1. $f(x,y)=x^2-y^2$
2. $f(x,y)=xy$

1.3. Derivadas parciales de segundo orden

Derivadas parciales de segundo orden Obtenga las derivadas de primer y segundo orden para las siguientes funciones y verifique que se cumple el teorema de Young.

1. $f(x,y)=x^7-y^7$
2. $f(x,y)=x^{\beta}\ln(y)$, con $\beta\in\mathbb{R}$
3. $f(x,y)=\left(x^2-ay^2\right)^{\delta}$, con $\delta\in\mathbb{R}$

1.4. Funciones de Utilidad y TMS

Para cada una de las siguientes funciones de utilidad encuentre las tasas marginales de sustitución (TMS) usando el diferencial total (donde x_1 y x_2 son los bienes consumidos y u es el nivel de utilidad).

1. $u(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2, \quad a, b \in \mathbb{R}^+$.

   Respuesta. Al sacar el diferencial e igualar a 0, lo que estamos haciendo es encontrar todos los puntos en donde la utilidad se mantiene constante. Es por ello que podemos obtener una relación de cambio en la cantidad de bienes x_1, x_2 que mantiene la utilidad constate, lo que llamamos tasa marginal de sustitución (TMS)

   $$dU = \frac{\partial U}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2} dx_2 = 0$$
   $$0 = adx_1 + bdx_2$$

   Reordenando:

   $$\frac{a}{b} = -\frac{dx_2}{dx_1} = TMS_{12}$$

2. $u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}, \quad \alpha, \beta \in (0, 1)$.

   Respuesta.

   $$dU = \frac{\partial U}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2} dx_2 = 0$$
   $$0 = (\alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta}) dx_1 + (x_1^{\alpha} \beta x_2^{\beta-1}) dx_2$$

   Reordenando:

   $$\frac{\alpha x_2}{\beta x_1} = -\frac{dx_2}{dx_1} = TMS_{12}$$

3. $u(x_1, x_2) = aln(x_1) + bx_2, \quad a, b \in \mathbb{R}^+$.

   Respuesta.

   $$dU = \frac{\partial U}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2} dx_2 = 0$$
   $$0 = \left(\frac{a}{x_1}\right) dx_1 + bdx_2$$

   Reordenando:

   $$\frac{a}{bx_1} = -\frac{dx_2}{dx_1} = TMS_{12}$$

1.5. TMST e Interpretación Económica

Considere los siguientes procesos productivos:

a. Un metro cuadrado de lana sintética (L) se puede fabricar con medio kilo de nylon (N) o dos kilos de polyester(P)

b. Un miligramo de Tropigrafeno (T), un elemento químico encontrado en las montañas de Costa Rica, puede fabricarse si se combinan tres miligramos de Kriptonita (K) con un miligramo de Vanadio (V)

Para cada proceso responda lo siguiente:

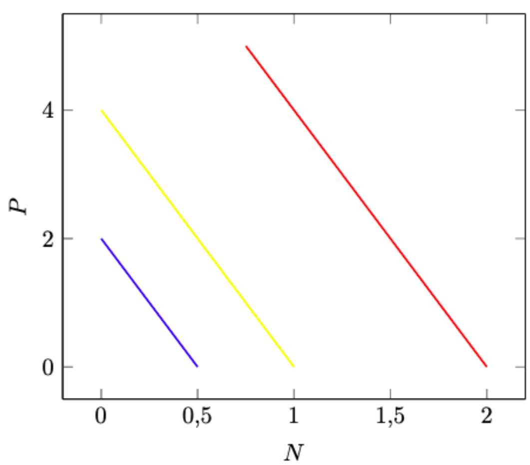
i. Determine la función de producción de cada proceso
   Respuesta. (a) $L(N, P) = 2N + \frac{1}{2}P$
   (b) $T(K, V) = \min\{K/3, V\}$

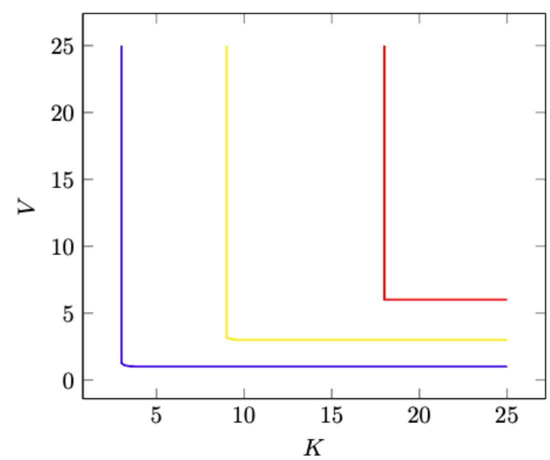
ii. Encuentre la TMST para cada tecnología e interprétela

Respuesta. (a) $TMST_{NP}(N,P) = PMgN/PmgP = \frac{2}{1/2} = 44$ unidades de polyester siempre se puede sustituir por una unidad de nylon, de manera a mantener la producción constante. Por esto cuando la TMS es constante, como en este caso, decimos que los factores son sustitutos perfectos.

(b) En este caso, la función de producción no es diferenciable en todo punto (y además tiene derivadas parciales cero en varios puntos), así que no podemos directamente aplicar el teorema de la función implícita. Todavía, uno puede ver que si $K/3 > V$, una reducción marginal en K no afecta la producción total (en este caso, $TMS_{KV} = 0$). De manera similar, si $V > K/3$, una reducción marginal en V no afecta la producción total (en este caso, $TMS_{VK} = 0$). Los factores son complementos perfectos en este caso.

iii. Grafique el mapa de isocuantas para los niveles de producto 1, 2, 4 de lana sintética (L) y 1, 3, 6 de Tropigrafeno (T)





Respuesta.

(Las isocuantas azules corresponden a lo nivel de producción mas bajo, y las rojas al nivel de producción mas alto).

1.6. Derivadas Parciales y Funciones de Varias Variables

El mercado de los burritos está descrito por una función de demanda $B^d = f(p,m)$ y por una función de oferta $B^s = g(p,h)$ donde B^d es la cantidad demandada de burritos, B^s es la cantidad ofrecida de burritos, p es el precio de los burritos, m es el ingreso promedio de los hogares, y h es un indicador del costo de la harina de maíz.

1. Explique el signo que deberían tener las derivadas parciales de las funciones de demanda y oferta con respecto a p, m y h de acuerdo a lo que usted ha aprendido hasta ahora en cursos de economía

Respuesta. $\frac{\partial f}{\partial p} < 0$ La cantidad demandada debería ser decreciente en precio del bien. Si aumenta el precio, debería disminuir la cantidad demandada.
$\frac{\partial g}{\partial p} > 0$ La cantidad ofrecida debería aumentar con los precios. Si aumenta el precio del bien debería querer producir más del bien.
$\frac{\partial f}{\partial m} > 0$ Si los burritos son un bien normal, es decir, a mayor ingreso mayor consumo. También existen bienes inferiores, en donde la demanda caería al aumentar el ingreso.(Tendríamos que la derivada sería negativa)

$\frac{\partial g}{\partial h} < 0$ Al aumentar el precio del maíz se hace más caro producir burritos por lo que la cantidad ofrecida es menor a un mismo precio.

2. Defina $F(p, m, h)$ como la función de exceso de oferta de burritos en el mercado. ¿Cómo obtendría esa función usando $f(\cdot)$ y $g(\cdot)$?

   Respuesta.
$$F(p, m, h) = B^s - B^d = g(p, h) - f(p, m)$$

3. Si el mercado de burritos está en equilibrio, ¿qué valor debería tener la función $F(\cdot)$? Explique cómo usted podría calcular el valor del precio de equilibrio usando esta condición.

   Respuesta. El mercado está en equilibrio cuando $B^s = B^d$ es decir: $F(p, m, h) = g(p, h) - f(p, m) = 0$ Esto nos permite calcular el precio de equilibrio como el valor tal que $B^s = B^d$ para un par de valores m y h.

4. Encuentre las derivadas parciales del precio de equilibrio p^e con respecto a m y h. ¿Puede determinar el signo de estas derivadas?

   Respuesta. Tenemos que cuando, $B^s = B^d$
$$g(p^e, h) - f(p^e, m) = 0$$
   Notemos que p^e es una función de m y h, $p^e = p^e(m, h)$ Calculando las derivadas:
   Con respecto a m.
$$\frac{\partial p^e}{\partial m} = \frac{\partial g}{\partial p}\frac{\partial p^e}{\partial m} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p^e}{\partial m} - \frac{\partial f}{\partial m} = 0$$
$$\frac{\partial p^e}{\partial m}(\frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}) = \frac{\partial f}{\partial m}$$
$$\frac{\partial p^e}{\partial m} = \frac{\frac{\partial f}{\partial m}}{\frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}}(*)$$
   Con respecto a h.
$$\frac{\partial p^e}{\partial h} = \frac{\partial g}{\partial p}\frac{\partial p^e}{\partial h} + \frac{\partial g}{\partial h} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p^e}{\partial h} = 0$$
$$\frac{\partial p^e}{\partial h}(\frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}) = -\frac{\partial g}{\partial h}$$
$$\frac{\partial p^e}{\partial h} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial h}}{\frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}}(**)$$
   Note que (*) tiene el mismo signo que $\frac{\partial f}{\partial m}$ ya que $\frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}$ debe ser positivo porque $\frac{\partial g}{\partial p} > 0$ y $\frac{\partial f}{\partial p} < 0$
   En el caso de (**) el signo es positivo porque $\frac{\partial g}{\partial h} < 0$ y denominador es positivo, mismo caso (*).

1.7. Derivadas Parciales e Interpretación Económica

(Basado en ejemplo 15.21 de Sydsaeter et al, primera edición) Supongamos que el bienestar W de un grupo de habitantes en una sociedad depende de dos variables: el total de bienes consumidos “x” y el nivel de contaminación “c”, tal que $W = f(x, c)$

1. ¿Qué signo esperaría usted que tuvieran las derivadas parciales de f con respecto a x y c? Explique la intuición económica detrás de esto.

2. ¿Qué signo esperaría usted que tuvieran las derivadas de segundo orden $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial c^2}$? Explique la intuición económica detrás de esto.

3. Supongamos que $\frac{\partial^2 f}{\partial c \partial x} < 0$, ¿cuál es la interpretación matemática de este supuesto? ¿Qué implica esto en cuanto a la economía del problema?

4. Como los bienes deben ser producidos de alguna manera, podemos pensar que la contaminación es una función $c(x)$. ¿Qué signo espera tenga la derivada c'?

5. Encuentre la ecuación que muestra el efecto de un mayor consumo en el bienestar con el supuesto adicional introducido en la parte anterior. Interprete los términos en esta ecuación.

1.8. Diferencial Total Aplicado al Fútbol

Un consultor de futbolistas ha determinado mediante herramientas de big data que la **valoración real de mercado de un jugador**, V (medida en millones de dólares) del pase de un futbolista es función de su habilidad h (medida como su capacidad de dribleo, una variable continua positiva), su capacidad goleadora g (medida en número de goles), su simpatía percibida s (medida como el índice de popularidad en redes sociales provista por el equipo de inteligencia artificial de Facebook, una variable continua mayor a 1) y el nivel general de precios del mercado de fútbol europeo p (medido como una suerte de IPC de los precios de los pases):

$$V(h, g, s, p) = \frac{e^g}{p}\left(\left[\lambda h^\beta + (1-\lambda)s^\beta\right]^{\frac{1}{\beta}}\right), \qquad \lambda \in (0,1), \beta > 0$$

1. Encuentre la ecuación que describe el valor marginal de un gol adicional para un jugador cualquiera.

   Respuesta.
$$\frac{\partial V}{\partial g} = V_g = \frac{e^g}{p}\left(\left[\lambda h^\beta + (1-\lambda)s^\beta\right]^{\frac{1}{\beta}}\right) = V$$

2. Encuentre la ecuación que describe el valor marginal de un aumento en el número de dribleos para un jugador cualquiera.

   Respuesta.
$$\frac{\partial V}{\partial h} = V_h = \frac{e^g}{p}\left(\left[\lambda h^\beta + (1-\lambda)s^\beta\right]^{\frac{1-\beta}{\beta}} \lambda h^{\beta-1}\right)$$

3. El volante Eulerinho del FC Sydsæter interesa al club Sporting Arrow para la próxima temporada. Los dirigentes del Sporting Arrow llegaron a un acuerdo para adquirir el pase de Eulerinho al valor de mercado ayer. Hoy se jugó la fecha final del campeonato, y Eulerinho metió el único gol en el triunfo de su equipo, tras lo cual salió lesionado.

   a) Su fama de "rebelde" mantiene a Eulerinho dentro de los jugadores menos queridos por la afición, con una simpatía constante e igual a 1.
   b) El "IPC del fútbol" no cambió.
   c) El conteo de goles de Eulerinho **tras** el partido fue de 21 goles en toda la temporada.
   d) La lesión de Eulerinho ha reducido su habilidad de 10 a 9 dribleos.

Se pide que, **sin calcular**, obtenga una expresión para **el cambio aproximado** en el valor del pase de Eulerinho entre ayer y hoy.

Respuesta.

$$dz = V_h dh + V_g dg + V_s ds + V_p dp$$

$$= \frac{e^g}{p}\left(\left[\lambda h^\beta + (1-\lambda)s^\beta\right]^{\frac{1-\beta}{\beta}} \lambda h^{\beta-1}\right)[9-10] + \frac{e^g}{p}\left(\left[\lambda h^\beta + (1-\lambda)s^\beta\right]^{\frac{1}{\beta}}\right)[21-20] + 0 + 0$$

$$= \frac{e^g}{p}\left(\left[\lambda h^\beta + (1-\lambda)s^\beta\right]^{\frac{1}{\beta}}\right) - \frac{e^g}{p}\left(\left[\lambda h^\beta + (1-\lambda)s^\beta\right]^{\frac{1-\beta}{\beta}} \lambda h^{\beta-1}\right)$$

1.9. TMS y Aproximación por Plano Tangente

Suponga la siguiente función de utilidad de una persona que consume dos bienes,

$$U = \sqrt{x} + 2\sqrt{y}$$

1. Calcule la tasa marginal de sustitución. Use derivación implícita.
2. Si la persona consume normalmente 4 unidades del bien x y 9 unidades del bien y, ¿cuántas unidades del bien x cree usted que debería estar dispuesta a sacrificar por una unidad adicional del bien y?
3. Encuentre la gradiente en el punto $(x; y) = (4; 9)$. Use el resultado para aproximar cuánto cambia la utilidad al moverse al punto $(x; y) = (4,2; 8)$

1.10. Derivadas Parciales y Aproximación por Plano Tangente

Considere una función de demanda dada por $A = 6p_a^{-2}p_b^{3/2}$ donde A es la cantidad demandada de viajes en avión, p_a es el precio de los viajes en avión y p_b es el precio de los viajes en bus. Suponga que los precios actuales en el mercado son $p_a = 3$ y $p_b = 4{,}5$.

1. Calcule la cantidad viajes en avión demandada a los precios de mercado observados
2. Obtenga las derivadas parciales de la demanda por viajes en avión con respecto a los precios de viajes (ambos)
3. Obtenga las derivadas parciales de segundo orden de la función de demanda con respecto a los precios de ambos bienes (incluida la derivada cruzada)
4. Use las derivadas parciales recién calculadas para obtener una aproximación de la cantidad demandada si p_a sube en 0,5 y p_b baja en 0,5.
5. Repita el paso anterior, partiendo de los mismos valores iniciales, pero para el caso en que ambos precios bajan en 0,25
6. Calcule ahora los valores exactos de la cantidad demandada en ambos casos. ¿Qué tan buena era su aproximación?

1.11. Aproximación por Plano Tangente

a) El radio de la base y la altura de un cono circular recto miden 10 cm y 25 cm, respectivamente, con un posible error en la medición de 0,1 cm en cada uno. Utilice diferenciales para estimar en forma aproximada. el mayor error posible en el volumen calculado del cono.

b) Las dimensiones de una caja rectangular son 75, 60 y 40 cm, y cada medida no difiere 0.2 cm del valor real. Mediante diferenciales estime el error más grande posible cuando el volumen de la caja se calcula a partir de esas medidas.

1.12. Modelamiento de Funciones Económicas (Equilibrio de Mercado)

Consideremos el modelo de oferta y demanda de un determinado bien:

$$\begin{aligned} Q^d &= n^d - Pm^d && ;\ n^d, m^d > 0 \\ Q^s &= -n^s + Pm^s && ; n^s, m^s > 0 \end{aligned}$$

donde Q^d es la cantidad demandada y Q^s es la cantidad ofrecida del bien Q, P es el precio de mercado, y n^d, m^d, n^s y m^s son constantes.

1. Obtenga el precio y cantidad de equilibrio en este mercado como función de los parámetros de la demanda
2. Describa que ocurre con el precio y cantidad de equilibrio en las siguientes situaciones
   a) Solo aumenta parámetro n^d (todos los otros parámetros permanecen constantes)
   b) Solo aumenta parámetro m^d
   c) Solo aumenta parámetro n^s
   d) Solo aumenta parámetro m^s

1.13. Modelamiento de Funciones Económicas (Utilidad del Agente)

En economía y finanzas se utiliza bastante funciones de utilidad del tipo:

$$U(c_1, c_2) = \frac{c_1^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \frac{c_2^{1-\sigma}}{1-\sigma}$$

Estas funciones se usan para considerar decisiones en que hay consumo en distintos momentos del tiempo o cuando no tenemos certeza de qué ocurrirá en un período futuro.

1. Calcule las utilidades marginales de ambos consumos. ¿Para qué valores de σ son positivas estas utilidades marginales?

   Respuesta.
$$\frac{\partial U}{\partial c_1} = c_1^{-\sigma}$$
$$\frac{\partial U}{\partial c_2} = c_2^{-\sigma}$$
   Ambas son positivas para cualquier valor de σ

2. Calcule las derivadas parciales de segundo orden. ¿Para qué valores de σ es decreciente la utilidad marginal?

   Respuesta.
$$\frac{\partial^2 U}{\partial c_1^2} = -\sigma c_1^{-\sigma-1}$$
$$\frac{\partial^2 U}{\partial c_2^2} = -\sigma c_2^{-\sigma-1}$$
   Son negativas si $\sigma > 0$, Para que tengamos Umg decrecientes necesitamos que $\sigma > 0$

3. Calcule la tasa marginal de sustitución usando el diferencial total

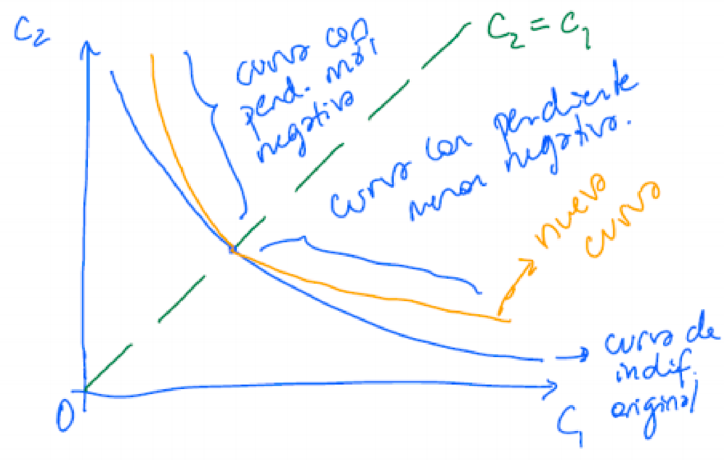
   Respuesta.
$$dU = \frac{\partial U}{\partial c_1} dc_1 + \frac{\partial U}{\partial c_2} dc_2$$
$$dU = c_1^{-\sigma} dc_1 + c_2^{-\sigma} dc_2$$
   Igualamos $dU = 0$ para ver pendiente de curva de indiferencia
$$0 = c_1^{-\sigma} dc_1 + c_2^{-\sigma} dc_2$$
$$\frac{dc_2}{dc_1} = -\frac{c_1^{-\sigma}}{c_2^{-\sigma}} = -\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{\sigma}$$
$$TMS_{12} = \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{\sigma}$$

4. ¿Como cambia la tasa marginal de sustitución cuando cambia σ?

   Respuesta. Definamos $T = \frac{dc_2}{dc_1}$ en una curva de indiferencia. Usamos esta propiedad para encontrar ($\frac{da^b}{db} = a^b \ln a$):
$$\frac{dT}{d\sigma} = -\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{\sigma} \ln\left(\frac{c_2}{c_1}\right)$$
   El término $-(\frac{c_2}{c_1})^{\sigma}$ es negativo. La parte $\ln\left(\frac{c_2}{c_1}\right)$ es negativa si $c_1 > c_2$ y positiva si $c_2 > c_1$. Entonces
$$\frac{dT}{d\sigma} < 0 \text{ si } c_2 > c_1$$
$$\frac{dT}{d\sigma} > 0 \text{ si } c_2 < c_1$$
   Como T es negativo, esto implica que al aumentar σ, T se hace más negativo si $c_2 > c_1$. Si $c_1 > c_2$, entonces T se vuelve menos negativo.

5. Partiendo de un punto en que $c_1 = c_2$ muestre gráficamente qué ocurre con la forma de la curva de indiferencia si σ aumenta de 0,5 a 0,75. ¿Qué interpretación económica tiene este resultado?

   Respuesta.



La nueva curva de indiferencia tiene una pendiente más negativa al aumentar σ cuando $c_2 > c_1$. Cuando $c_1 > c_2$, el aumento de σ hace que la pendiente sea menos negativa

1.14. Modelamiento de Funciones Económicas (Preferencias por Educación)

Suponga que en una economía, con información simétrica, existen dos tipos de individuos: los de habilidad alta (tipo 1) y los de habilidad baja (tipo 2). Ahora, estos individuos son idénticos en todo excepto en el costo que tienen de educarse y, por ende, sus preferencias por educación también son distintas. Sea la función de utilidad de un individuo representativo: $U(e, w) = \sqrt{w} - \theta_i\ c(e)$. Así, la utilidad depende del costo de educarse, que a la vez depende de los años que escoja estudiar individuo (e), el sueldo que recibe (w) y un parámetro θ_i no negativo, que varía dependiendo del tipo de individuo. Suponga que el costo de educarse es una función lineal de los años de educación, tal que: $c(e) = e$.

1. Obtenga las derivadas parciales de primer orden. ¿Qué tipo de preferencia tiene el individuo por educarse?

   Respuesta. Obtengamos las derivadas parciales:

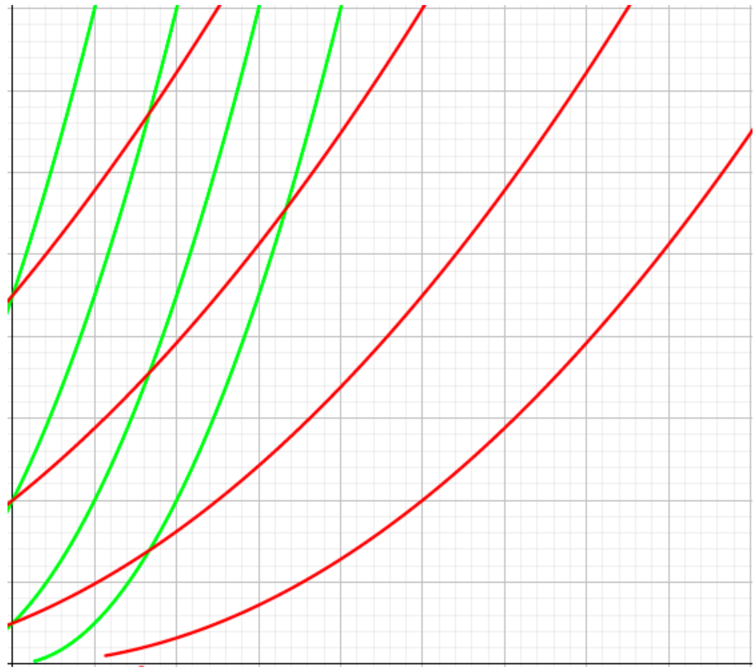
   $$\frac{\partial U}{\partial w} = \frac{1}{2\sqrt{w}} \qquad ; \qquad \frac{\partial U}{\partial e} = -\theta_i$$

   Notemos que w es no negativo por lo que el sueldo tiene una utilidad marginal positiva. Además, θ_i también es no negativo, por lo que la educación tiene utilidad marginal negativa. Así, es evidente que estas preferencias son un bien y un mal. Justamente la educación es un mal por el costo de educarse.

   De ahora en adelante, asuma que $\theta_1 = \frac{1}{5}$ y $\theta_2 = 1$.

2. En un mismo gráfico dibuje las curvas de indiferencia de los individuos tipo 1 y tipo 2. Observando las pendientes, ¿Quién tiene un costo relativo de educarse mayor? **(Ayuda: se le recomienda trabajar con e en el eje de las x, y con w en el eje de las y)**

   Respuesta. Planteamos la curva de nivel para obtener las curvas de indiferencias. Entonces: $\sqrt{w} - \theta_i\ e = c$ para $c \in \{0, 1, 2, 3\}$



Las curvas rojas son para los tipo 1 y las curvas verdes para los tipo 2. Además notemos que utilidad aumenta conforme la curva de indiferencia se desplaza a la izquierda. Observando las pendientes, vemos que los tipo 2 tienen una pendiente o TMSS mayor que los tipo 1. Esto implica que al aumentar un año la educación, los tipo 1 necesitan aumentar menos su salario para mantener su utilidad constante. Bajo este argumento, es evidente que los tipo 2 tienen un mayor costo relativo de educarse.

3. Obtenga el costo relativo de educarse, o sea $\frac{dw}{de}$. ¿Qué ocurre con el costo relativo conforme aumenta w? Particularmente, ¿Qué ocurre cuando w tiende a infinito o cuando tiende a cero? **Interprete sus resultados**.

Respuesta. Obtenemos el diferencial total de U y lo igualamos a cero, para obtener la pendiente de la curva de indiferencia.

$$dU = \frac{\partial U}{\partial w}dw + \frac{\partial U}{\partial e}de = 0$$

Despejamos el costo relativo de educarse:

$$\frac{dw}{de} = 2\theta_i\sqrt{w}$$

Para ver que ocurre con el costo relativo de educarse conforme aumenta w, necesitamos obtener la derivada del costo relativo a educarse respecto de w:

$$\frac{d^2w}{dwde} = \frac{\theta_i}{\sqrt{w}}$$

Como w y θ_i son estrictamente no negativos, necesariamente la derivada debe ser positiva. Esto implica que conforme aumentan el salario, si los individuos quisieran estudiar un año más, tendrían que aumentar cada vez más su salario para mantener constante su utilidad. O sea el costo relativo a educarse, aumentar conforme aumentan los años de educación.

Luego, veamos que ocurre cuando w tiende a cero e infinito respectivamente:

$$\lim_{w\to 0} \frac{dw}{de} = 0$$

$$\lim_{w \to \infty} \frac{dw}{de} = \infty$$

Las implicancias de los resultados son las siguientes. Cuando no se tiene salario, el costo relativo de educarse es nulo, porque no existe al no tener salario no existe un costo de oportunidad por educarse. Cuando se tiene un salario infinitamente alto, el costo relativo de educarse es infinitamente alto, esto se puede explicar porque un año de educación adicional, implica un sacrificio infinitamente alto de salario, además el salario tiene una utilidad marginal decreciente, lo que es consistente con lo que encontramos anteriormente.

4. ¿Cuál es la interpretación para el parámetro θ_i?

   Respuesta. Al final el parámetro θ_i mide inversamente la dificultad de educarse para cada individuo. Valores grandes de θ_i implican que tiene mucha dificultad para educarse, por lo que su ponderación del costo de educarse es más grande. Análogamente, valores pequeños de θ_i implican que tiene poca dificultad para educarse, por lo que su costo de educarse, tiene una baja ponderación.

1.15. Modelamiento de Funciones Económicas (Políticas Sociales)

En un reciente trabajo publicado el profesor Francisco Gallego junto a otros investigadores estudian el efecto que tiene en rendimiento escolar el sustituir libros impresos por libros electrónicos entregados a un computador. En esta pregunta escribiremos funciones de producción que reflejen algunas de las hipótesis que ellos estudian en el trabajo mencionado. (Nota: la cita completa del artículo es: Rosangela Bando, Francisco Gallego, Paul Gertler, Dario Romero Fonseca, 2017, “Books or laptops? The effect of shifting from printed to digital delivery of educational content on learning,” *Economics of Education Review*, 61, págs. 162-173.) Nos concentraremos en la parte de oferta de libros y el costo de entregarlos.

En este caso pensaremos en el costo de entregar una cierta cantidad de libros L a los alumnos. Llamaremos e a la fracción de libros que son entregados en formato electrónico, tal que el total de libros entregados en formato electrónico es eL y en formato impreso es $(1-e)L$. El costo de entregar libros electrónicos tiene un costo fijo a y un costo variable b por libro (el costo variable no es función de L), mientras que el costo de libros impresos tiene un costo fijo c y un costo variable d por libro (el costo variable no es función de L).

1. Escriba la función de costos totales de entregar L libros como función de L y e, además de los parámetros de costos fijos y marginales.

   Respuesta.

   $$C(L, e) = a + beL + c + d(1-e)L$$

   Donde: $a + beL$ es el costo de libros electrónicos
   Y $c + d(1-e)L$ es el costo de los libros impresos

2. Encuentre la función de costos marginales, esto es el aumento en la función de costos totales al aumentar la cantidad de libros producidos. Interprete sus resultados.

   Respuesta. Costo marginal:

   $$\frac{\partial C}{\partial L} = be + (1-e)d = d + e(b-d)$$

3. ¿Cómo cambia el costo marginal al cambiar e? Explique la intuición detrás del resultado

Respuesta. Ahora necesitamos

$$\frac{\partial^2 C}{\partial e \partial T} = b - d$$

El costo marginal de entregar un libro aumenta al aumentar la fracción de libros en formato electrónico si y solo si (ssi) el costo marginal de un libro electrónico, b, es más alto que el costo marginal de un libro impreso, d.

1.16. Modelamiento de Funciones Económicas (Utilidad Esperada)

En finanzas se utiliza bastante funciones de utilidad del tipo:

$$U(\mu, \sigma) = \mu - \frac{A}{2}\sigma^2 \qquad \text{con } A > 0$$

donde μ es el retorno esperado de una inversión financiera y σ es una medida de la variabilidad o qué tan inciertos son los retornos que entregará esta inversión.

1. Calcule la utilidad marginal de μ y de σ. ¿Qué interpretación económica o financiera tiene el signo de estas utilidades marginales?

   Respuesta. Tomando las derivadas parciales:

   $$\frac{\partial U}{\partial \mu} = 1$$

   $$\frac{\partial U}{\partial \sigma} = -A\sigma$$

   La interpretación es la siguiente: cuando sube el retorno sube la utilidad del agente, pero cuando sube la volatilidad baja la utilidad, pues no le gusta riesgo a este agente.

2. Calcule la tasa marginal de sustitución usando el diferencial total de una curva de indiferencia asociada a esta función de utilidad. (Nota: alternativamente usted puede trabajar con la pendiente de la curva de indiferencia, recordando que la TMS es esta pendiente pero con el signo cambiado: $TMS = -d\sigma/d\mu$ en este caso).

   Respuesta. Tomando el diferencial total

   $$dU = \frac{\partial U}{\partial \mu} d\mu + \frac{\partial U}{\partial \sigma} d\sigma$$

   Igualamos a cero de forma de obtener la curva de indiferencia:

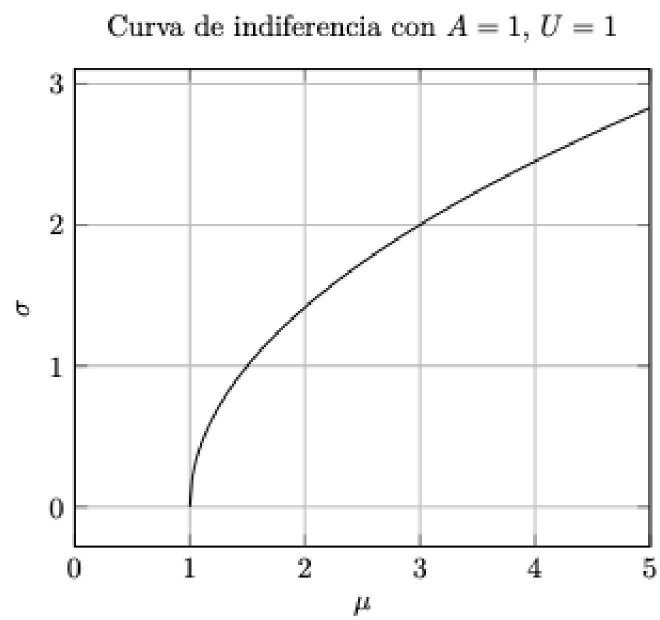
   $$dU = \frac{\partial U}{\partial \mu} d\mu + \frac{\partial U}{\partial \sigma} d\sigma = 0$$

   Y reemplazando las derivadas parciales obtenidas en el inciso anterior:

   $$TMS = -\frac{\partial \sigma}{\partial \mu} = \frac{1}{-A\sigma}$$

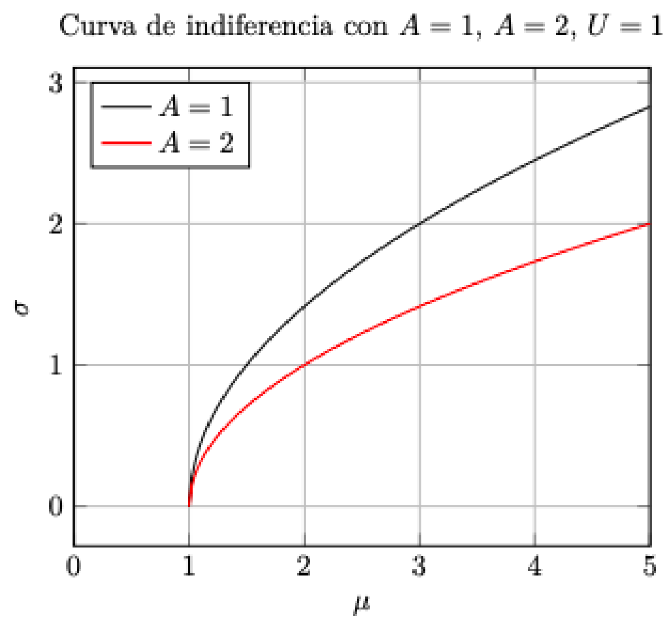
3. Dibuje la curva de indiferencia cuando $A = 1$ y $U = 1$. Sea cuidadoso en definir los puntos en que cruza los ejes, si es que los cruza.

   Respuesta. Cuando $\sigma = 0$, el valor de μ debe ser 1. Por otro lado, no es posible que la curva de indiferencia intercepte el eje de horizontal ($\mu = 0$) ya que no hay valores de σ que permitan $U = 1$ en ese caso. La pendiente de la curva es positiva, y la curva de indiferencia esta dada por $\mu = 1 + \frac{A}{2}\sigma^2 \Leftrightarrow \sigma = \sqrt{2(\mu - 1)/A}$.



4. ¿Cómo cambia la tasa marginal de sustitución cuando aumenta A? Interprete la intuición de este resultado.

   Respuesta. En este caso la TMS se vuelve menos negativa, o la pendiente de la curva de indiferencia se hace más pequeña (disminuye en valor). Esto significa que la curva ahora gira hacia la derecha, siempre desde el punto en que $\sigma = 0$ y $\mu = 1$ (vea el gráfico abajo). Esto implica que ahora para mantener el mismo nivel de utilidad, el inversionista quiere una mayor cantidad de retorno por cada unidad en que aumenta la variabilidad de estos retornos: "requiere mayor compensación."Nota: esto es lo que en finanzas conocemos como aversión al riesgo y este parámetro A es como lo reflejamos en este tipo de funciones de utilidad.



1.17. Modelamiento de Funciones Economicas (Demanda por atributos)

Considere el problema de un consumidor que valora las vitaminas (V) y proteínas (P) contenidas en las frutas y carne que consume. En particular, su utilidad es:

$$U(V, P) = 2\sqrt{VP}$$

Las frutas contienen muchas vitaminas y algo de proteína; la carne contiene mucha proteína y algo de vitaminas. Así, podemos expresar V y P como:

$$V = 4x_1 + x_2$$
$$P = x_1 + 16x_2,$$

donde x_1 denota los gramos de fruta y x_2 denota los gramos que carne que consume.

a) Utilizando la regla de la cadena obtenga la utilidad marginal de la fruta y carne ($\partial U/\partial x_1$ y $\partial U/\partial x_2$).

Respuesta.
La utilidad marginal de V y P es:
$\partial U/\partial V = \sqrt{P/V}$
$\partial U/\partial P = \sqrt{V/P}$
El aporte marginal de la fruta y carne a vitaminas y proteínas es:
$\partial V/\partial x_1 = 4$; $\partial V/\partial x_2 = 1$
$\partial P/\partial x_1 = 1$; $\partial P/\partial x_2 = 16$
Luego,

$$U_1 = \frac{\partial U}{\partial x_1} = 4\sqrt{P/V} + \sqrt{V/P} = 4\sqrt{\frac{x_1 + 16x_2}{4x_1 + x_2}} + \sqrt{\frac{4x_1 + x_2}{x_1 + 16x_2}}$$

y

$$U_2 = \frac{\partial U}{\partial x_2} = \sqrt{P/V} + 16\sqrt{V/P} = \sqrt{\frac{x_1 + 16x_2}{4x_1 + x_2}} + 16\sqrt{\frac{4x_1 + x_2}{x_1 + 16x_2}}$$

b) Exprese la utilidad en función de x_1 y x_2. ¿Cuántos gramos de fruta debe consumir para alcanzar U=200 si se fija $x_2 = 0$?, ¿y cuántos gramos de carne debe consumir para alcanzar U=200 si se fija $x_1 = 0$?

Respuesta.
$U(x_1, x_2) = 2\sqrt{(4x_1 + x_2) \cdot (x_1 + 16x_2)}$
Para alcanzar $U = 200$ debe consumir $x_1 = 50$ si $x_2 = 0$
Para alcanzar $U = 200$ debe consumir $x_2 = 25$ si $x_2 = 0$

c) Obtenga una expresión para la pendiente de la curva de indiferencia resultante (esto es, $\frac{dx_2}{dx_1}$ para dejar utilidad constante).

Respuesta.
Para un nivel k de utilidad se requiere $2\sqrt{(4x_1 + x_2) \cdot (x_1 + 16x_2)} - k = 0$
La pendiente de la curva de nivel es

$$g'(x_1) = -\frac{U_1}{U_2} = -\frac{4\sqrt{\frac{x_1+16x_2}{4x_1+x_2}} + \sqrt{\frac{4x_1+x_2}{x_1+16x_2}}}{\sqrt{\frac{x_1+16x_2}{4x_1+x_2}} + 16\sqrt{\frac{4x_1+x_2}{x_1+16x_2}}}$$

d) ¿Cuál es la pendiente de la curva de indiferencia si se fija $x_2 = 0$?, ¿y cuál es la pendiente de la curva de indiferencia si se fija $x_1 = 0$? Grafique la curva de nivel (aproximadamente, pero respetando intercepto y forma).

Respuesta.
Reemplazando se obtiene

$$g'(x_1) = -\frac{4\sqrt{\frac{1}{4}} + \sqrt{4}}{\sqrt{\frac{1}{4}} + 16\sqrt{4}}$$

cuando $x_2 = 0$ (muy pequeña en valor absoluto), y

$$g'(x_1) = -\frac{4\sqrt{16} + \sqrt{\frac{1}{16}}}{\sqrt{16} + 16\sqrt{\frac{1}{16}}}$$

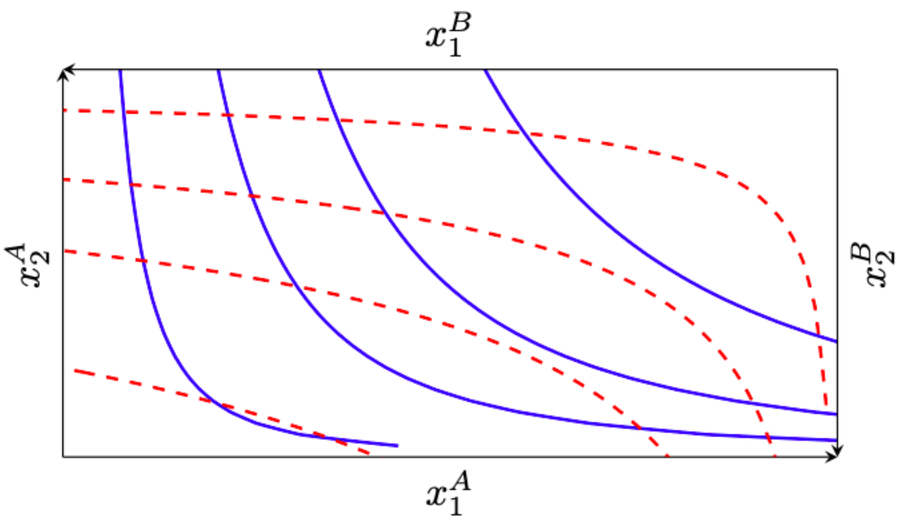
cuando $x_1 = 0$ (cercano a 2 en valor absoluto). La curva de indiferencia tiene la forma convexa usual.

e) Sea $p_1 = 2$ el precio por gramo de fruta y $p_2 = 4$ el precio por gramo de carne. Obtenga una expresión para la restricción presupuestaria del individuo si tiene ingreso de 100 y grafique cuidadosamente esta restricción.

Respuesta.
$x_1 p_1 + x_2 p_2 = 2x_1 + 4x_2 = 100$. Recta con pendiente $-1/2$ e intercepto 25.

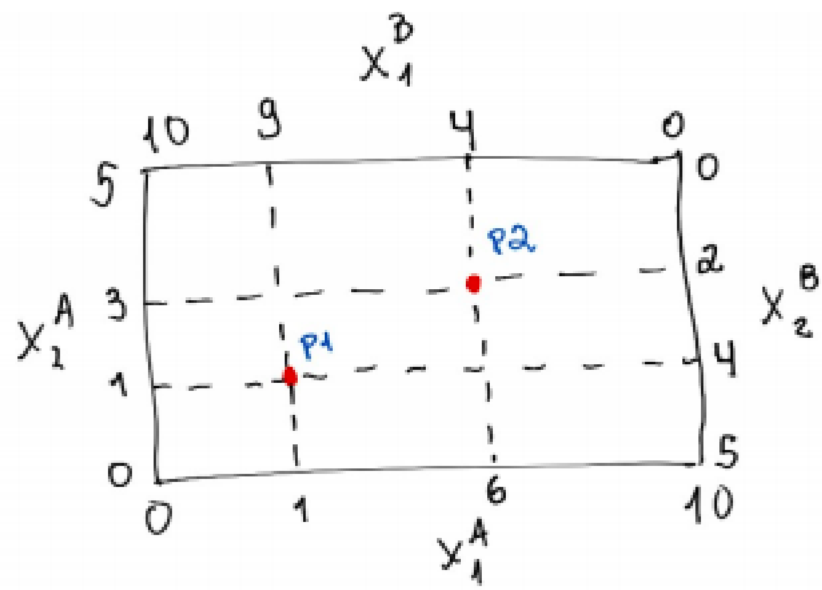
1.18. Desafío: Equilibrio General

Considere una economía con dos agentes, A e B, y dos bienes, 1 e 2. Los agentes A y B tienen las siguientes funciones utilidad $u(x_1^A, x_2^A) = \alpha \ln(x_1^A) + \ln(x_2^A)$ e $u(x_1^B, x_2^B) = \ln(x_1^B) + \alpha \ln(x_2^B)$, donde x_i^j representa la cantidad consumida del bien i por el agente j y $\alpha > 1$. Perciba que al agente A le gusta mas el bien 1, y a lo agente B le gusta mas el bien 2. Algunas curvas de indiferencia están representadas abajo. Las líneas sólidas representan las curvas de indiferencia del agente A y las rayadas del agente B. Esté atento también a la dirección de los ejes.

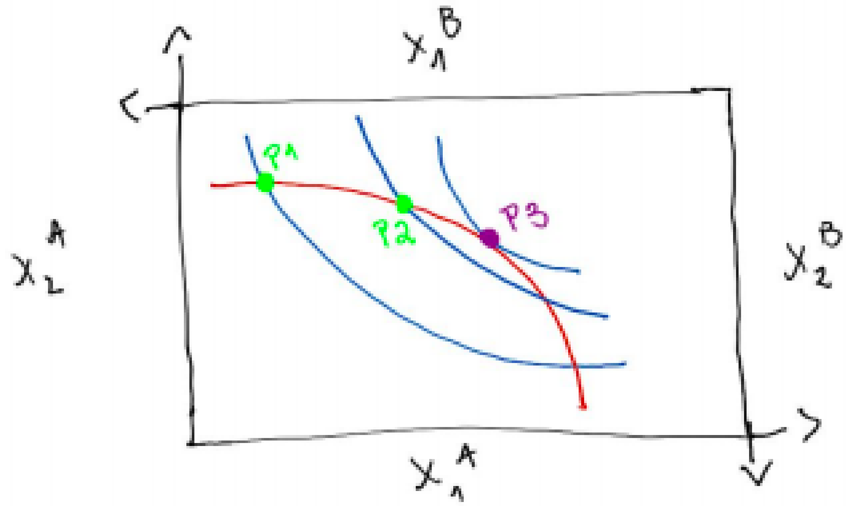


Un planificador central tiene 10 unidades del bien 1 y 5 unidades del bien 2, y esta pensando como distribuir (asignar) estos bienes entre los dos agentes. Encuentre todas las posibles distribuciones (asignaciones) que satisfacen el siguiente requerimiento: no se puede subir la utilidad de un agente sin bajar la utilidad del otro agente.

Respuesta. La primera cosa que deben entender es como leer el gráfico. Cada punto en el gráfico representa una posible asignación. Por ejemplo, en el punto P1 abajo, el planificador asigna: 1 unidad de cada bien para el agente A; 9 unidades del bien 1 y 4 unidades del bien 2 para el agente B. En el punto P2, el planificador central asigna: 6 unidades del bien 1 y 3 unidades del bien 2 para el agente A; 4 unidades del bien 1 y 2 unidades del bien 2 para el agente B.



El problema es elegir los puntos que satisfacen el requerimiento del enunciado. Para ver esto, deben percibir que si una asignación es tal que las curvas de indiferencia se cruzan, el planificador siempre puede mejorar la utilidad de un agente sin bajar la utilidad del otro agente. Para esto considere un planificador que elige la asignación P1 en el gráfico siguiente. Hay curvas de indiferencia de los dos agentes pasando por este punto y estas curvas se cruzan. Perciba que si el planificador elige la asignación P2, esto mantendría la utilidad del agente B constante (curva de indiferencia roja) y subiría la utilidad del agente A, que estaría en una curva de indiferencia mas arriba. Así, siempre que las curvas de indiferencia se cruzan en un punto, se puede hacer un desvío que mejora la utilidad de un agente, sin empeorar la del otro. Esto no es posible cuando las curvas son tangentes (punto P3) – en otras palabras, la TMS de los agentes debe ser la misma.



Por lo tanto, lo que tenemos que hacer es encontrar todas las asignaciones posibles tales que las curvas de indiferencia sean tangentes. Usando el teorema de la función implícita, La TMS del agente A es:

$$TMS_A = \frac{\alpha x_2^A}{x_1^A}$$

Y la TMS del agente B es:

$$TMS_B = \frac{x_2^B}{\alpha x_1^B}$$

Luego tenemos que la asignación debe satisfacer:

$$\frac{\alpha x_2^A}{x_1^A} = \frac{x_2^B}{\alpha x_1^B} \tag{1.1}$$

Pero dado la cantidad disponible tenemos que

$$x_2^B = 5 - x_2^A \tag{1.2}$$

$$x_1^B = 10 - x_1^A \tag{1.3}$$

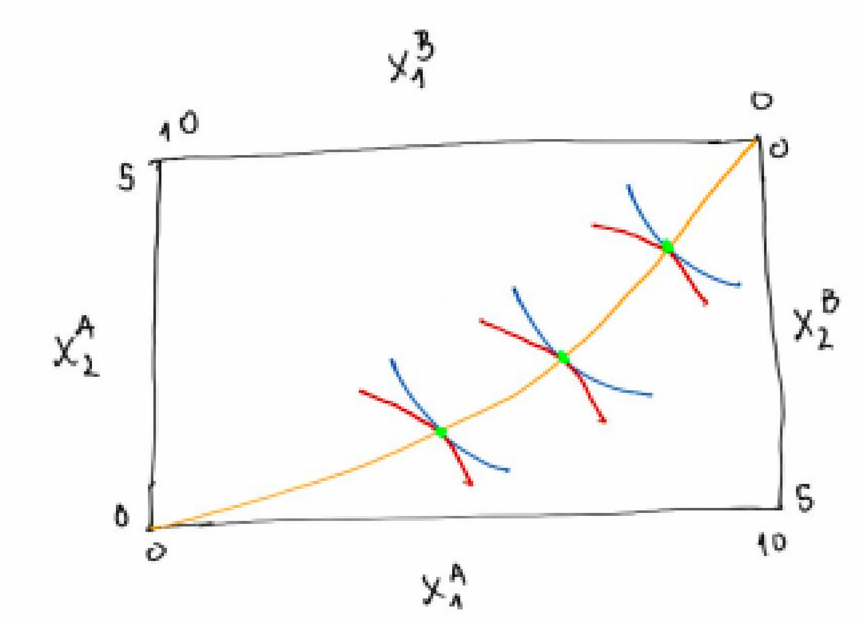
Reemplazando (**??**) y (**??**) en (**??**) tenemos:

$$\frac{\alpha x_2^A}{x_1^A} = \frac{5 - x_2^A}{\alpha\left(10 - x_1^A\right)}$$

Resolviendo para x_2^A tenemos:

$$x_2^A = \frac{5x_1^A}{x_1^A + (10 - x_1^A)\alpha^2} \tag{1.4}$$

Todas asignaciones con $x_1^A \in [0, 10]$ que cumplen (**??**) satisfacen el requerimiento de que no se puede subir la utilidad de un agente sin bajar la utilidad del otro agente. Gráficamente, estas son todas asignaciones donde las curvas de indiferencia son tangentes (representado por la linea amarilla en el gráfico abajo).



1.19. Función Cobb-Douglas y Algunas de sus Propiedades

Suponga que podemos modelar la producción "Y" de una firma usando una función Cobb-Douglas donde X_i es la cantidad del factor de producción "i" utilizada por la firma, y $a_i \in \mathbb{R}$ son parámetros de la función de producción.

$$Y \;=\; X_1^{a1} \times \; X_2^{a2} \times .... \times X_n^{an}$$

1. Qué restricciones debemos imponer a los valores que pueden tomar los parámetros a_i para que la productividad marginal de los factores sea positiva y decreciente?

2. Muestre que la productividad marginal de un factor X_i, PMg_i se puede escribir como:

$$PMg_i = a_i \tfrac{Y}{X_i}$$

3. Use el resultado anterior para mostrar que para esta función se cumple que:

$$\textstyle\sum_{i=1}^n X_i PMg_i = Y \sum_{i=1}^n a_i$$

1.20. Propiedades de funciones en $\mathbb{R}^2$

Considere la función f dada por

$$f(x_1, x_2) = (x_1^\alpha + x_2^\alpha)^{1/\alpha} \qquad \text{con } \alpha \in (0,1)$$

definida en el conjunto S de los puntos (x_1, x_2) tales que $x_1, x_2 > 0$ (es decir, $\mathrm{S} = \mathbb{R}^2_{>0}$ ó $\mathrm{S} = \mathbb{R}^2_{++}$).

a) Demuestre que la función f es cuasicóncava en su dominio.

b) Demuestre que la función f es homotética.

Respuesta.

a) Respuestas posibles:

(I) Demostrar que $(x_1^\alpha + x_2^\alpha)$ es (estrictamente) cóncava en S, y argumentar que f es una transformación creciente de ella, por lo que es cuasicóncava. Para ello bastaría obtener H_f y mostrar que sus menores principales dominantes alternan de signo, con $D_1 < 0$ y $D_2 > 0$ (o que sus menores principales cumplen $M_1 \leq 0$ y $M_2 \geq 0$).

(II) Similar a la anterior pero un poco distinta. También es posible no usar H_f, sino que mostrar que x_i^α es cóncava, por lo que la suma de dos cóncavas también lo es. Luego la función completa es una transformación creciente de una función cóncava por lo que es cuasicóncava.

(III) Mostrar directamente que f es cuasi cóncava usando el hessiano orlado, y mostrando que $f_1 \neq 0$ por lo que $-(f_1)^2 < 0$, y que el determinante del hessiano orlado es positivo.

(IV) Mostrar directamente que el Hessiano de f es negativo semidefinido, así que la función es cóncava y, por lo tanto, cuasicóncava. Se puede mostrar que el Hessiano de esta función es dado por

$$H_f(x) = (1-\alpha)(x_1^\alpha + x_2^\alpha)^{(1-2\alpha)/\alpha} \begin{bmatrix} -x_1^{\alpha-2} x_2^\alpha & x_1^{\alpha-1} x_2^{\alpha-1} \\ x_1^{\alpha-1} x_2^{\alpha-1} & -x_1^{\alpha-2} x_2^\alpha \end{bmatrix}.$$

b) Dos respuestas posibles:

(I) Mostrar que f es homogénea de grado 1 y decir que toda función homogénea es homotética.

(II) Mostrar que la TMS es homogénea de grado 0.

Capítulo 2

Técnicas de Estática Comparativa

2.1. Regla de la Cadena

Suponga la función $y = 3x_1x_2^2 + 2x_2$ y que $x_1(t) = -3t^2$ y $x_2(t) = 4t^3 + t$.

1. Use la regla de la cadena para encontrar una expresión para la derivada de y con respecto a t
   Respuesta.
   $$\frac{dy}{dt} = 3x_2^2\frac{dx_1}{dt} + (6x_1x_2 + 2)\frac{dx_2}{dt}$$
   $$= 3(4t^3 + t)^2 \times -6t + (-18t^2(4t^3 + t) + 2)$$
2. Encuentre la función $y = g(t)$ que se obtiene la sustituir directamente x_1 y x_2 como funciones de t
3. Obtenga la derivada de y con respecto a t usando al función $g(\cdot)$ que usted acaba de obtener

2.2. Regla de la Cadena

Suponga la función $y = 0{,}5\ln(x_1) + 0{,}5\ln(x_2)$ y que $x_1(t) = e^{0,2t}$ y $x_2(t) = e^{0,4t}$.

1. Use la regla de la cadena para encontrar una expresión para la derivada de y con respecto a t.
   Respuesta.
   $$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} =& \frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial y}{\partial x_2}\frac{dx_2}{t} = 0\\ \frac{dy}{dt} =& \frac{0,5}{\exp(0,2t)}0,2\exp(0,2t) + \frac{0,5}{\exp(0,4t)}0,4\exp(0,4t)\\ =& 0,1 + 0,2 = 0,3\end{aligned}$$
2. Encuentre la función $y = g(t)$ que se obtiene al sustituir x_1 y x_2 como funciones de t.
   Respuesta.
   $$\begin{aligned}y =& 0,5\ln(x_1) + 0,5\ln(x_2)\\ y =& 0,5\ln(\exp(0,2t)) + 0,5\ln(\exp(0,4t))\\ =& 0,1t + 0,2t = 0,3t\end{aligned}$$

3. Obtenga la derivada de y con respecto a t usando la función $g(\cdot)$ que usted acaba de obtener.
   Respuesta.

$$\frac{dy}{dt} = 0,3$$

2.3. Regla de la Cadena e Interpretación Económica

Usted está encargado de comprar bebidas para un asado de generación y los organizadores le piden que compre l botellas de 2 litros. Usted se encuentre en un supermercado y observa que el precio es $\bar{p}$ por botella. Usted necesita decidir si seguir buscando en otros supermercados o sencillamente comprar en el que se encuentra actualmente. Llamaremos b al tiempo que usted pasará buscando en otros supermercados y podemos suponer que mientras más tiempo busque menor será el precio p al que podrá comprar.

Su función de utilidad U tiene dos componentes. Primero, usted aumenta su felicidad por cada peso que ahorra en bebidas (lo llamaremos s), condicional en comprar lo requerido. Segundo, usted no quiere pasarse la tarde entera buscando bebidas más baratas, por ello su utilidad disminuye mientras mayor sea b.

1. ¿Qué signo deberían tener las derivadas parciales de U con respecto a s y b?
2. ¿Qué signo debería tener la primera derivada de p con respecto a b?
3. Obtenga la derivada de la función de utilidad con respecto al tiempo ocupado buscando bebidas más baratas. ¿Qué interpretación tienen cada uno de los términos que lo componen?
4. ¿Puede usted mostrar la condición que describe el tiempo de búsqueda que maximiza su utilidad?

2.4. Regla de la Cadena e Interpretación Económica I

Supongamos que la función de utilidad $U = U(C, P)$ de la sociedad depende de dos elementos: el consumo de bienes adquiridos en el mercado, C, y la disponibilidad de bienes provistos por el sector público, P, y la utilidad es creciente en ambas variables. La persona consume una fracción a de su ingreso neto de impuestos $M - T$ donde M es el ingreso y T son los impuestos. La disponibilidad de bienes públicos es una función creciente de los impuestos cobrados $P = P(T)$.

1. Encuentre la derivada de la función de utilidad con respecto a los impuestos. Llame p' a la derivada de P con respecto T.
2. Explique intuitivamente lo que reflejan los componentes de su resultado en la parte anterior.
3. ¿Qué sucede con la utilidad "marginal" de los impuestos cuando p' aumenta? Explique intuitivamente

2.5. Regla de Cadena e Interpretación Económica II

Supongamos que la función de demanda de un bien que depende del precio sin impuestos "P" y del IVA unitario "t", está dada por:

$$Q^d = f(t, P)$$

Supongamos que la función de oferta está dada por: $Q^s = g(P)$. Supongamos además que el precio de equilibrio es función del IVA "t", esto es,$P = P(t)$.

1. Utilizando la ecuación de equilibrio obtener:

$$\frac{dP}{dt} = P'(t)$$

2. Analice su signo y concluya

2.6. Modelamiento de Regulaciones Bancarias

El 2019, Jose Ignacio Cuesta junto con su compañero Alberto Sepúlveda publicaron un trabajo en el que estudiaban la regulaciones de precios en el mercado de créditos. Para esto, el ex alumno de la facultad y su compañero aprovecharon una política que reducia la Tasa Máxima Convencional (TMC) en 20 puntos porcentuales (20 %). La TMC es la máxima tasa de interés que un banco comercial, que opera en territorio chileno, podría cobrar en un crédito de consumo. Le recomendamos que interprete esta política como una política que reduce el precio máximo que un banco puede cobrar por un crédito de consumo.

En los resultados del *paper*, Cuesta y su coautor, encuentran un *trade-off* en el efecto de reducir la TMC sobre el bienestar de los consumidores. Por un lado, reducir la TMC protege a los consumidores del poder de mercado de los bancos comerciales, pero por otro lado, se reduce la oferta de créditos de consumo.(La cita completa es: *Cuesta, J. I., & Sepúlveda, A. (2019). Price regulation in credit markets: A trade-off between consumer protection and credit access. Available at SSRN 3282910.*)

En este contexto, se le pedirá modelar distintas situaciones económicas aplicando lo que ha visto en el curso. Para ello asumiremos que la función de bienestar para un consumidor representativo es $W(t, q)$ donde t representa la TMC que escoge el legislador, y q representa la cantidad de créditos ofrecida por los bancos comerciales. Ahora, además suponga que la cantidad de créditos ofrecidos por los bancos comerciales, depende de la TMC, o sea es una función $q(t)$.

1. a) Que signo espera que tenga la derivada parcial de $W(t, q)$ con respecto de t. **Explique su intuición**.
   Respuesta.
   Usando la regla de la cadena, encontramos que

   $$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial q}\frac{dq}{dt}$$

   .
   Así, se puede argumentar que el primer argumento será positivo, pues los consumidores pueden acceder a créditos a un menor precio, lo que aumenta su bienestar. El segundo argumento sea negativo, esto se explica porque $\frac{dq}{dt}$ es negativo, ya que los bancos ofrecerán crédito mientras tengan ganancias. Así, suponiendo que hay costos marginales crecientes, si tienen un precio máximo ofreceran menos créditos y se reduce el bienestar de los consumidores. Por ende, el efecto de t sobre W es incierto (Nota: Incluso, podría pensarse como un efecto ingreso y efecto sustitución).

   b) En sus resultados, los investigadores encontraron que en promedio, una disminución de la TMC conducía a una disminución del bienestar de los consumidores. Bajo este escenario, ¿Qué efecto encontrado en el inciso anterior debería dominar?
   Respuesta.
   Si vemos que un aumento de la TMC reduce el bienestar, es evidente que el efecto negativo de la reducción de la oferta de créditos debe dominar.

2. Preocupado por la validez de sus resultados, los investigadores deciden añadir una variable que afecta a la cantidad de crédito ofrecidas. Suponga que ahora q también depende del riesgo de no pago del

consumidor r, o sea $q(t,r)$. ¿Qué signo tendrá la derivada cruzada $\frac{\partial^2 q}{\partial r \partial t}$? **Explique su intuición**. (**Ayuda: Suponga que mientrás más riesgoso, es más costoso para el banco entregar el crédito por lo que en ausencia de una TMC cobra tasas de interés mayores**).

Respuesta. Mientras más riesgoso sea un individuo, mayor será la tasa de interés que le cobre el banco, por lo que reducir la TMC haría que sea mas probable que le reduzcan la oferta de créditos a un individuo riesgoso que a uno no riesgoso. Así, el signo $\frac{\partial^2 q}{\partial r \partial t}$ debiera ser positivo, y simplemente indica que mientrás más riesgoso sea el individuo, los bancos son más propensos a restringirle la oferta de créditos.

3. Suponga que tiene 2 tipos de consumidores en el mercado de créditos, los de alto riesgo (A) y los de bajo riesgo (B). Suponga que la tasa de interés máxima cobrada a un tipo A es 20 %, mientras que a un tipo B es 5 %. Suponga que inicialmente no hay una política de TMC, pero el legislador decide introducirla en 10 %. Usando los resultados de los incisos anteriores ¿Cómo debiera afectar esta política sobre el bienestar de los 2 grupos de consumidores?

   Respuesta. Podemos notar rápidamente que la política tendrá solamente un efecto en el bienestar de los tipo A, pues la TMC_A se encuentra sobre la TMC impuesta por el legislador. Además el efecto será negativo. En cambio, no hay efecto sobre el bienestar de B, porque la TMC_B no cambia.

4. Mientras se legislaba esta ley en el congreso, un diputado declaró lo siguiente: ”La TMC es un excelente proyecto de ley, porque hace que la oferta de créditos sea más accesible para los consumidores. Además, no tiene efectos negativos sobre el bienestar”. Discuta la veracidad de la declaración del diputado.

   Respuesta. Evidentemente, es falso. Hemos visto que la TMC puede reducir la oferta de créditos a los consumidores, reduciendo la accesibilidad para los individuos de alto riesgo. Además, esto produce un efecto negativo sobre el bienestar de los consumidores. Esto podría ser cierto sólo para un grupo de individuos de bajo riesgo.

2.7. Derivadas Implícitas

a) Obtener $y' = \dfrac{dy}{dx}$ donde $x^3 + y^3 = 6xy$

b) Obtener $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ donde $x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$

2.8. Derivadas Implícitas

Considerando que en el Teorema de la Derivación Implícita:

$$\frac{dy}{dx} = y' = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)} = -\frac{F_x}{F_y}$$

representa la pendiente de la curva de nivel de $F(x,y) = c$. Se pide demostrar que:

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{(F_y)^3} \begin{vmatrix} 0 & F_x & F_y \\ F_x & F_{xx} & F_{xy} \\ F_y & F_{yx} & F_{yy} \end{vmatrix}$$

2.9. Leibniz

Encuentre la derivada con respecto a t de las siguientes funciones:

1. $f(t) = \int_t^{at} \ln(tz)dz$

Respuesta. Utilizando el teorema de Leibniz

$$\frac{df}{dt} = a \ln tat - \ln tt + \int_t^{at} \frac{1}{tz} z dz$$
$$\frac{df}{dt} = a \ln at^2 - \ln t^2 + \int_t^{at} \frac{1}{t} dz$$

Utilizando las propiedades del logaritmo

$$\frac{df}{dt} = a \ln a + 2a \ln t - 2 \ln t + \int_t^{at} \frac{1}{t} dz$$

Resolviendo la integral y factorizando

$$\frac{df}{dt} = a \ln a + 2(a-1) \ln t + \frac{at}{t} - \frac{t}{t}$$
$$\frac{df}{dt} = a \ln a + 2(a-1) \ln t + a - 1$$

2. $g(t) = e^{-rt} \int_t^T f(\tau) e^{-r(\tau - t)} d\tau$, donde r y T son números positivos.

Respuesta.

Utilizando el teorema de Leibniz

$$\frac{dg}{dt} = -re^{-rt} \int_t^T f(\tau) e^{-r(\tau-t)} d\tau + e^{-rt} (-f(t) e^{-r(t-t)} + \int_t^T f(\tau) r e^{-r(\tau-t)} d\tau)$$

Sabemos que (por enunciado): $g(t) = e^{-rt} \int_t^T f(\tau) e^{-r(\tau-t)} d\tau$, reemplazamos y obtenemos que:

$$\begin{aligned}\frac{dg}{dt} &= -rg(t) - f(t)e^{-rt} + re^{-rt} \int_t^T f(\tau) e^{-r(\tau-t)} d\tau \\ &= -rg(t) - f(t)e^{-rt} + rg(t) \\ &= -f(t)e^{-rt}\end{aligned}$$

Notar que alternativamente ustedes pueden hacer lo siguiente

$$\begin{aligned}g(t) =& e^{-rt} \int_t^T f(\tau) e^{-r(\tau-t)} d\tau = e^{-rt} \int_t^T f(\tau) e^{-r\tau} e^{rt} d\tau \\ =& \int_t^T f(\tau) e^{-r\tau} d\tau\end{aligned}$$

donde en la primera línea se separa el exponencial dentro de la integral, y luego en la segunda línea se introduce el exponencial que estaba afuera. Estos se cancelan y tenemos ahora una integral más simple. Podemos aplicar Leibniz a esta integral, donde ahora únicamente el límite inferior es función de la variable que estamos derivando y obtenemos

$$\frac{dg}{dt} = -f(t)e^{-rt}$$

Esto corresponde a la derivada del límite inferior de la integral multiplicada por el integrando evaluado en el límite inferior. Notar que el componente del límite superior y la integral de la derivada del integrando son 0 porque no quedan como función de t.

2.10. Leibniz

Calcule $\frac{dy}{dt}$ si

$$y = \int_{t}^{2t} e^{-r(z-t)} \left(z(a+t) + \frac{b}{2}t^2 \right) dz$$

donde a, b son constantes.
Respuesta.

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} =& e^{-r(2t-t)}(2t(a+t)+\frac{b}{2}t^2) - e^{-r(t-t)}(t(a+t)+\frac{b}{2}t^2) + \int_t^{2t} \left(re^{-r(z-t)}(z(a+t)+\frac{b}{2}t^2) + e^{-r(z-t)}(z+bt) \right) dz \\
=& e^{-rt}(2at+(\frac{b}{2}+2)t^2) - (at+(\frac{b}{2}+1)t^2) + \int_t^{2t} e^{-r(z-t)}(rza+rzt+r\frac{b}{2}t^2+z+bt)dz \\
=& e^{-rt}(2at+(\frac{b}{2}+2)t^2) - (at+(\frac{b}{2}+1)t^2) + \int_t^{2t} e^{-r(z-t)}((ra+1)z+(rz+b)t+r\frac{b}{2}t^2)dz
\end{aligned}$$

2.11. Leibniz

Una empresa enfrenta a una demanda incierta D y tiene un inventario I. Hay costos unitarios distintos por tener demasiadas o pocas existencias. La empresa desea por tanto elegir el nivel Q de existencias para minimizar la función:

$$g(Q) = c(Q-I) + h\int_0^Q (Q-D) f(D)\, dD + p\int_Q^a (D-Q) f(D)\, dD$$

Donde: c,I,h,p, y a son constantes positivas con $p > c$ y f una f.d.p. tal que $\int_0^a f(D)\, dD = 1$

1. Calcular $g'(Q)$ y $g''(Q)$
2. Demostrar que "g" es convexa
3. Sea $F(Q^*) = \int_0^{Q^*} f(D)\, dD$, donde Q^* Es el mínimo de g(Q). Usar las condiciones de minimización de g de primer orden, para hallar una ecuación para $F(Q^*) = P_r(D \leq Q^*)$. Use esta ecuación para hallar el valor de $F(Q^*)$ cuando Q^* es óptimo.

2.12. Preguntas Cortas: Elasticidades

Conteste las siguiente preguntas, cada una es independiente de la anterior:

1. Suponga la función de utilidad $U = \text{mín}(ax_1, bx_2)$. Explique intuitivamente por qué, según la definición que hemos visto en el curso, la elasticidad de sustitución entre x_1 y x_2 es 0 para estas preferencias.
2. Encuentre la derivada de A con respecto al tiempo t si $A = 6c^{-2}d^{3/2}$ y tanto c como d son funciones del tiempo.
3. Encuentre una ecuación para el cambio porcentual en $A = 6c^{-2}d^{3/2}$ en el tiempo como función de las elasticidades de A con respecto a c y d.

4. Una piscina circular de alto h metros y de radio r metros, contiene $\pi h r^2$ metros cúbicos de agua. ¿Cuándo necesitaría más agua para llenarla, si el alto aumenta un 5 % o si el radio aumenta un 3 %?

   Respuesta. Para responder esta pregunta utilizaremos elasticidades parciales ya que estas nos da una aproximación de como afectan los cambios porcentuales. En este caso podemos ver como afecta un cambio porcentual en h al cambio porcentual del volumen (V). En este caso

   $$\epsilon_{V,h} = \frac{h}{V}\frac{\partial V}{\partial h}$$

   Reemplazando

   $$\epsilon_{V,h} = \frac{h}{\pi h r^2}\pi r^2 = 1$$

   Tenemos que un cambio porcentual de 1 % en h genera un cambio porcentual de 1 % en V. Si h cambia 5 % el volumen cambiara en un 5 % Idem para el caso del radio:

   $$\epsilon_{V,r} = \frac{r}{V}\frac{\partial V}{\partial r}$$

   Reemplazando

   $$\epsilon_{V,r} = \frac{r}{\pi h r^2}2\pi h r = 2$$

   Tenemos que un cambio porcentual de 1 % en r genera un cambio porcentual de 2 % en V. Si cambia r en un 3 % tendremos que el volumen cambiara en un 6 %.

2.13. Regla de Leibniz

La demanda de un consumidor por papas fritas es dada por la siguiente función:

$$p = e^{-Q}$$

donde Q es la cantidad consumida de papas fritas y p es el precio. Entonces, para un dado precio de equilibrio $p^* \in (0,1)$, el consumidor consume $Q^* = -\ln(p^*)$. Se define el excedente del consumidor, representado por la función $E(p^*)$, como la suma de la diferencia entre el valor máximo que el consumidor estaría dispuesto a pagar por cada unidad y el valor efectivamente pago:

$$E(p^*) = \int_0^{-\ln(p^*)} \left(e^{-Q} - p^*\right) dQ$$

Responda lo que se pide.

1. Compute la derivada de $E(p^*)$ con respecto al precio de equilibrio p^*, **usando la regla de Leibniz**. Interprete sus resultados.
   Respuesta. Usando la regla de Leibniz tenemos que:

   $$\begin{aligned}\frac{dE}{dp^*} &= \left(e^{\ln(p^*)} - p^*\right)\left(-\frac{1}{p^*}\right) + \int_0^{-\ln(p^*)} (-1)\, dQ \\ &= -x\big|_0^{-\ln(p^*)} \\ &= \ln(p^*)\end{aligned}$$

   Como $p^* \in (0,1), \frac{dE}{dp^*} = \ln(p^*) < 0$, es decir, una subida del precio reduce el excedente del consumidor.

2. Suponga que inicialmente el precio de equilibrio es $p^* = 0{,}3$ y el consumidor firma un contrato para comprar $Q^* = -\ln(0{,}3) \approx 1{,}2$ unidades de papas fritas. Sin embargo, debido a una subida de costos, el precio de la papa frita sube 0.1 unidades, pero el consumidor no puede ajustar su cantidad consumida, pues esto se había fijado en el contrato de compra. ¿Cuánto cambia, aproximadamente, el excedente del consumidor bajo estas condiciones? Justifique.

   Respuesta. En este caso particular, la cantidad consumida está fija en 1,2 unidades, y podemos escrever el excedente del consumidor cómo:

$$E(p^*) = \int_0^{1,2} \left(e^{-Q} - p^*\right) dQ$$

   Usando a regla de Leibniz tenemos que:

$$\frac{dE}{dp^*} = \int_0^{1,2} (-1)\, dQ = -1,2$$

   Por lo tanto, si el precio sube 0.1 unidades, el excedente del consumidor baja $0,1 \times 1,2 = 0{,}12$ unidades.

2.14. Preguntas Cortas: Homogeneidad y Homoteticidad

Conteste las siguiente preguntas, cada una es independiente de la anterior:

1. Suponga la siguiente función $Z = \ln x + 8 \ln y + 10$, ¿es esta función homogénea? ¿Tiene retornos crecientes a escala?

2. ¿Es homogénea la función $y = k + l^{1,5}$? ¿Tiene retornos crecientes a escala?

3. ¿Es la función f definida por $f(L) = \cos(\sqrt{L}) - 3$ para todo $L \in [\pi^2, 4\pi^2]$ homotética?

   Respuesta. Verdadero. $\sqrt{L}$ es una función homogenea de grado $1/2$ y $\cos(h) - 3$ es una transformación monótona creciente en $[\pi, 2\pi]$.

4. Para duplicar el nivel de producción, lo eficiente es duplicar la escala de la firma. Es decir, utilizar el doble de todos los insumos. ¿Verdadero o Falso?

   Respuesta. Falso. Esto va a depender si la función de producción es homogénea de grado 1. Si la función es homogénea sabemos que la TMS es constante a lo largo de rayos a partir de la origen. Considere ademas que el grado de homogeneidad es 1. En este caso, si una empresa esta a producir Q unidades de manera óptima (minimizando los costos), cuando decide producir $2Q$ debe también debe duplicar el monto utilizado de cada insumo, para mantener la isocuanta que quiere alcanzar tangente a la isocosto (haga un dibujo para le ayudar a visualizar esto). Por lo tanto, si la función fuera homogénea de grado 1 seria verdadero, pero como el enunciado no dice esto, es falso (como contra ejemplo, considere una función de producción $F(K, L)$ homogenea de grado mayor que uno y perciba que la manera mas barata de duplicar la produccion es multiplicar la utilizacion de los factores por una constante menor que 2).

5. Sea f una función de producción de n insumos productivos. Demuestre que si f es homogénea de grado 1, entonces la productividad marginal de cada factor se mantiene invariante ante un aumento en la contratación de todos los factores de 40 %.

   Respuesta.

Si f es homogénea de grado 1, para todo $t > 0$

$$f(tx_1, ..., tx_n) = tf(x_1, ..., x_n)$$

Sacando la derivada parcial con respecto a algún factor x_i de los lados de la expresión arriba:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, ..., tx_n) \cdot t = t\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, ..., x_n)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, ..., tx_n) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, ..., x_n)$$

6. Considere las siguientes funciones de producción:

$$(i)\ f(L, K) = (LK)^{1/2}$$
$$(ii)\ f(L, K) = L + K^{1/2}$$
$$(iii)\ f(L, K) = L^2 + K^2$$

a) Verifique en cada uno de los casos si la función es homotética, justificando su respuesta. Si fuese homotética, indique si además es homogénea, indicando su grado de homogeneidad en caso afirmativo.
Respuesta. Basta calcular la TMS y ver si es homogénea de grado cero. Lo es en los casos (i) y (iii) [son homotéticas], no en (ii) [no lo es]. En estos casos las funciones además son homogéneas, de grado 1 en (i) y de grado 2 en (iii) [y por lo tanto, si parten demostrando esto podrían argumentar directamente que (i) y (iii) también son homotéticas].

b) Verifique en cada uno de los casos si la función es cóncava o convexa (indicando si es estrictamente cóncava o estrictamente convexa si corresponde).
Respuesta. Podrían responder calculando segundas derivadas y verificando que la matriz hessiana es semidefinida negativa en (i) y (ii), y definida positiva en (iii). Y que por lo tanto es cóncava en los dos primeros y estrictamente convexa en el tercero.
Alternativamente, podrían argumentar que siendo Cobb-Douglas con exponentes que suman 1 sabemos que (i) es cóncava; que siendo una suma de funciones cóncavas (ii) es cóncava; que siendo una suma de funciones estrictamente convexas (iii) es estrictamente convexa.

2.15. Estática Comparativa de una Función de Producción

Una prominente empresa llamada **Lepac** se dedica a la producción de botellas de vidrio. Después de bastante tiempo de investigación, su equipo de producción sabe que produce botellas a razón de la siguiente función de producción:

$$f(L, K) = \sqrt{L} + \sqrt{K}$$

En donde L representa al factor trabajo y K al capital utilizados en la producción de botellas.

La empresa **Lepac** últimamente se ha visto expuesta mediáticamente, por lo que estiman que sus ventas aumentaran en una gran proporción. Debido a esto, la gerencia de operaciones de la empresa le pide usted que haga los siguientes análisis:

1. ¿La función de producción es homogénea? ¿Homotética? Explique clara y detalladamente su respuesta, dejando claro lo que implica que la función de producción sea (o no) homogénea y/o homotética.
Respuesta.
    - Homogénea grado 1/2
    - como es homogénea es homotetica.

- La función tiene rendimiento decrecientes a escala, $k = 1/2$, Es decir si aumenta su factores en t, la función de producción aumentará en menos de que t.
- Es homotetica, es decir, si se le aplica una transformación creciente a la función de producción sus isocuantas (curvas de nivel) no cambian de forma, tambien puede decir que el cuociente entre las productividades marginales va a ser constante a través de los rayos, etc.

2. Grafique la curva de nivel que representa a $f(K, L) = 10$. ¿Qué significado tienen todas las combinaciones de K e L que se encuentran en dicha curva?
Respuesta.

   - Todas la combinaciones que se encuentran dentro de la curva de nivel (K, L) quieren decir que con ella se puede alcanzar un nivel de producción igual a $F(L, K) = 10$.

3. Suponga que la empresa quiere producir 10 unidades, contratando igual número de unidades de trabajo que de capital.

   a) (4 ptos) Obtenga la cantidad de L, K que utiliza.
   Respuesta.
   $L = K = 25$

   b) (6 ptos) Obtenga la tasa marginal de sustitución entre capital y trabajo ($TMS_{K,L}$) en ese punto utilizando el Teorema de la Función Implícita. ¿Cómo se interpreta este resultado?
   Respuesta.

   - Ojo con el signo al corregir:
$$TMS = \frac{f_l(25, 25)}{f_k(25, 25)} = 1$$
   - Es decir, para mantenerse produciendo el mismo nivel dado los niveles de K y L, la tasa de intercambio entre capital y trabajo es igual a 1.

4. Ahora suponga que el precio de los insumos para el trabajo es de w y para el capital es de r, y el precio al que se venden las botellas es p. La cantidad de trabajo y capital que maximiza la ganancia de la empresa estará dada por:
$$L^*(w, r, p) = \frac{p^2}{4w^2}$$
$$K^*(w, r, p) = \frac{p^2}{4r^2}$$
Usted sabe que la cantidad óptima a producir (q^*) es entonces $f(L, K)$ evaluado en $L^*(w, r, p)$ y $K^*(w, r, p)$:
$$q^* = f(L^*(w, r, p), K^*(w, r, p))$$
Suponga que inicialmente tenemos $w = r = 1$ y $p = 10$. Usando la regla de la cadena muestre cuanto cambia q^* si cambia p y cuanto cambia q^* si cambia w. Explique intuitivamente el signo del resultado encontrado en cada caso.
Respuesta.
$$\frac{dq^*}{dp} = f_L(L^*, K^*)\frac{\partial L^*}{\partial p} + f_K(L^*, K^*)\frac{\partial K^*}{\partial p} = \frac{1}{2\sqrt{L^*}}\frac{p}{2w^2} + \frac{1}{2\sqrt{K^*}}\frac{p}{2r^2} = 1$$
La interpretación del signo positivo, quiere decir que ante un cambio marginal de p el producto $q*$ aumentará. La intuición es que si aumenta el p del producto que se vende, como productor voy a querer aumentara la producción ya que ahora gano más por unidad producida.

$$\frac{dq^*}{dw} = f_L(L^*, K^*)\frac{\partial L^*}{\partial w} + f_K(L^*, K^*)\frac{\partial K^*}{\partial w} = \frac{1}{2\sqrt{L^*}}\frac{-p^2}{2w^3} = -5$$

La interpretación del signo negativo, quiere decir que ante un cambio marginal de w el producto $q*$ dismuira. La intuición es que si aumenta w (salario- pago del factor trabajo), como productor voy a querer disminuir la producción ya que ahora los costos de los factores son más altos.

2.16. Estática Comparativa en Retornos a Escala

Su amigo Jesús, productor estrella de kg. de pan, utiliza trabajo (L) y capital (K), ambas variables continuas, y posee la siguiente función de producción:

$$f(L, K) = L^\alpha K^\beta$$

con $\alpha, \beta > 0$. En base a esta información y considerando todos los casos posibles, responda las siguientes preguntas:

1. ¿Se cumple la ley de rendimientos marginales decrecientes para cada factor?
   Respuesta.
   Como $PMg_L = \alpha L^{\alpha-1}K^\beta$ y $PMg_K = \beta K^{\beta-1}L^\alpha$ la ley de rendimientos marginales decrecientes se cumple para K y L sí, y solo si, $\alpha, \beta < 1$.

2. Suponga un nivel de capital fijo $\overline{K} > 0$ y $\alpha > 1$. Si Jesús no puede contratar mas de 10 horas de trabajo, ¿Cuál es el número de horas que maximiza la productividad marginal del trabajo?
   Respuesta.
   Como $PMg_L = \alpha L^{\alpha-1}\overline{K}^\beta$ y la función de producción es diferenciable, entonces:

   $$\frac{\partial PMg_L}{\partial L} = \alpha(\alpha - 1)L^{\alpha-2}\overline{K}^\beta$$

   Luego, si $\alpha > 1$, entonces la productividad marginal del trabajo es estrictamente creciente y alcanza su máximo en $L = 10$.

3. ¿Cómo son los retornos a escala de esta función?
   Respuesta.
   Dado que para $\lambda > 1$ tenemos que $f(\lambda L, \lambda K) = \lambda^{\alpha+\beta}L^\alpha K^\beta$, entonces la función tiene retornos crecientes a escala $\alpha + \beta > 1$, decrecientes a escala si $\alpha + \beta < 1$ y constantes a escala si $\alpha + \beta = 1$.

4. Si Jesús utiliza $L = 1$ y $K = 2$ y piensa en aumentar la utilización de trabajo marginalmente. ¿Cuántas unidades de capital puede dejar de utilizar si desea seguir produciendo 2^β Kg. de pan?
   Respuesta.
   Podemos ocupar la TMST para responder esta pregunta:

   $$TMST = \frac{PMg_L}{PMg_K} = \frac{\alpha L^{\alpha-1}K^\beta}{\beta L^\alpha K^\beta - 1} = \frac{\alpha K}{\beta L}$$

   Cuando Jesús utiliza $L = 1$ y $K = 2$, entonces $TMST = 2\alpha/\beta$. Es decir "Jeús puede dejar de utilizar $2\alpha/\beta$ unidades de capital por hora de trabajo y seguir produciendo 2^β Kg de pan".

5. Si el Estado le regala a Jesús una unidad de trabajo, tal que su función de producción ahora está definida por

   $$f(L, K) = (L + 1)^\alpha K^\beta$$

   ¿Cómo son los retornos a escala (localmente) cuando Jesús utiliza $L = 1$ y $K = 2$?
   Respuesta.

Ahora la función de producción no es homogénea. Sin embargo, podemos ocupar la elasticidad producto total para responder como son los retornos a escala:

$$\mathcal{E}_{PT}(q) = \frac{PMg_L}{PMe_L} + \frac{PMg_K}{PMe_K} = \mathcal{E}_L(q) + \mathcal{E}_K(q)$$

Calculamos:

$$\mathcal{E}_L(q) = \frac{PMg_L}{PMe_L} = \frac{\alpha(L+1)^{\alpha-1}K^{\beta}}{(L+1)^{\alpha}K^{\beta}L^{-1}} = \frac{\alpha L}{L+1}$$

$$\mathcal{E}_K(q) = \frac{PMg_K}{PMe_K} = \frac{\beta(L+1)^{\alpha}K^{\beta-1}}{(L+1)^{\alpha}K^{\beta-1}} = \beta$$

Luego, cuando $L = 1$ y $K = 2$:

$$\mathcal{E}_{PT}(q) = \frac{\alpha L}{L+1} + \beta = \frac{\alpha}{2} + \beta$$

Es decir, si $\alpha + 2\beta > 2$ la función de producción tiene retornos crecientes a escala. Si $\alpha + 2\beta = 2$ la función de producción tiene retornos constantes a escala y si $\alpha + 2\beta < 2$ la función de producción tiene retornos decrecientes a escala.

2.17. Elasticidad Sustitución

Obtenga la elasticidad de sustitución de la función de utilidad dada por $U(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$. Explique intuitivamente su resultado.

2.18. Elasticidades Parciales

Encuentre las elasticidades pedidas en cada uno de los siguientes casos:

1. Elasticidad de y con respecto a x cuando $M = x^2 + y^2$.

Respuesta. Cuando queremos calcular la elasticidad, lo que estamos haciendo es calcular el cambio porcentual en una variable, dado un cambio porcentual en otra variable. Para ello, utilizaremos la siguiente formula:

$$\epsilon_{y,x} = \frac{\partial y}{\partial x}\frac{x}{y}$$

Donde $\epsilon_{y,x}$ es la elasticidad de y con respecto a x.

En este caso, para calcular la elasticidad debemos derivar implícitamente de forma de encontrar $\frac{\partial y}{\partial x}$. Por el teorema de la función implícita:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{-2x}{2y} = \frac{-x}{y}$$

Finalmente:

$$\epsilon_{y,x} = \frac{-x}{y}\frac{x}{y} = \frac{-x^2}{y^2}$$

2. Elasticidad de y con respecto a t cuando $y = e^{vt}x_1^{\alpha}(t)x_2^{\beta}(t)$ donde v, α y β son constantes, y $x_i(t)$ indica que la variable es una función de t.

Respuesta. Note que:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = ve^{vt}x_1^{\alpha}x_2^{\beta} + e^{vt}\alpha x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta}\frac{dx_1}{dt} + e^{vt}\beta x_1^{\alpha}x_2^{\beta-1}\frac{dx_2}{dt}$$
$$\frac{\partial y}{\partial t} = vy + \frac{\alpha y}{x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\beta y}{x_2}\frac{dx_2}{dt}$$

Luego:

$$\epsilon_{y,t} = \frac{dy}{dt}\frac{t}{y} = \frac{vy}{y}t + \frac{\alpha}{x_1}y\frac{t}{y}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\beta}{x_2}y\frac{t}{y}\frac{dx_2}{dt}$$
$$\epsilon_{y,t} = vt + \alpha\frac{t}{x_1}\frac{dx_1}{dt} + \beta\frac{t}{x_2}\frac{dx_2}{dt}$$

Además:

$$\epsilon_{x_1,t} = \frac{t}{x_1}\frac{dx_1}{dt}$$

y

$$\epsilon_{x_2,t} = \frac{t}{x_2}\frac{dx_2}{dt}$$

Finalmente:

$$\epsilon_{y,t} = vt + \alpha\epsilon_{x_1,t} + \beta\epsilon_{x_2,t}$$

Podemos notar en este caso que α es la elasticidad de y con respecto x_1 y β es la elasticidad de y con respecto x_2.

2.19. Funciones Homogéneas

Determine si las siguientes funciones son homogéneas y en caso de que lo sean, encuentre el grado de homogeneidad

1. $y = x_1^{1/2}x_2^{1/3} + x_2^{3/2}$

Respuesta.

Cuando vemos la homogeneidad de una función lo que estamos viendo es el comportamiento multiplicativo que tienen los argumentos en la función. Esto va a ser muy relevante a la hora de analizar comportamiento de funciones de producción por ejemplo, ya que veremos como se comportan los argumentos (factores) ante cambios multiplicativos en ellos. Una función homogénea de grado k cumple con:

$$y(tx_1, tx_2) = t^k y(x_1, x_2)$$

Sea la función del enunciado:

$$y(x_1, x_2) = x_1^{1/2}x_2^{1/3} + x_2^{3/2}$$

Multiplicamos los argumentos de la función por un mismo factor

$$y(tx_1, tx_2) = (tx_1)^{1/2}(tx_2)^{1/3} + (tx_2)^{3/2}$$

Factorizamos t

$$= t^{5/6}x_1^{1/2}x_2^{1/3} + t^{3/2}x3/2 \neq t^k y(x_1, x_2)$$

Como no podemos factorizar t ya tenemos una indicación que la función no es homogénea

Para cerrar la demostración podemos construir un ejemplo en que esto no se cumple. Para ello consideremos los puntos $\mathbf{x}^0 = (1,1)$ y $\mathbf{x}^1 = (0,1)$, y $t = 4$. Tenemos entonces que

$$y(\mathbf{x}^0) = 2$$
$$y(\mathbf{x}^1) = 1$$

mientras que

$$y(4\mathbf{x}^0) = (2^{2/3} + 4)y(\mathbf{x}^0)$$
$$y(4\mathbf{x}^1) = 4y(\mathbf{x}^1)$$

por lo que para un mismo t tendríamos dos k distintos, lo que termina la prueba de que la función no puede ser homogénea.

Otra alternativa sería mostrar que no se cumple el teorema de Euler.

2. $y = x_1^2 x_2 - x_2^3$
Respuesta.

$$y(x_1, x_2) = x_1^2 x_2 - x_2^3$$

Multiplicamos los argumentos de la función por un mismo factor:

$$y(tx_1, tx_2) = (tx_1)^2(tx_2) - (tx_2)^3$$

Factorizamos por t:

$$= t^3(x_1^2 x_2 - x_2^3) = t^3 y(x_1, x_2)$$

Como el $k = 3$, decimos que la función es homogénea de grado 3

3. $y = \dfrac{x_1^\alpha x_2^\beta}{x_1^\gamma + x_2^\gamma}$
Respuesta.
Multiplicamos los argumentos de la función por un mismo factor:

$$y(tx_1, tx_2) = \frac{tx_1^\alpha tx_2^\beta}{tx_1^\gamma + tx_2^\gamma}$$

$$= \frac{t^\alpha x_1^\alpha t^\beta x_2^\beta}{t^\gamma x_1^\gamma + t^\gamma x_2^\gamma}$$

Factorizamos por t:

$$= t^{\alpha+\beta-\gamma} \frac{x_1 \alpha x_2^\beta}{x_1^\gamma + x_2^\gamma}$$

$$= t^{\alpha+\beta-\gamma} y(x_1, x_2)$$

Como el $k = \alpha + \beta - \gamma$, decimos que la función es homogénea de grado $\alpha + \beta - \gamma$.

2.20. Funciones Homogéneas y Teorema de Euler

Suponga la función Cobb-Douglas $Y = AK^\alpha L^\beta$ donde A es una medida de productividad, K es el capital usado y L es la cantidad de trabajo empleada y los parámetros α y β son positivos.

1. Muestre que esta función es homogénea y determine el grado de homogeneidad.

2. Muestre que para esta función se cumple el teorema de Euler.

2.21. Estática Comparativa en el Problema de la Firma

Suponga la siguiente función de producción de una determinada empresa:

$$Q(L, K) = 2KL + 3K^2$$

Donde Q representa la producción, K es la cantidad de horas-máquina y L se refiere a la cantidad de horas-trabajador. En la actualidad, $K = 2$, $L = 1$ y $Q = 16$.

1. Encuentre la $TMS_{L,K}$ como función del uso de factores. Muestre que depende únicamente de la razón K/L.
   Respuesta.
   Productividad Marginal respecto a K:
   $$PMg_K = Q_K = \frac{\partial Q}{\partial K} = 2L + 6K$$
   Productividad Marginal respecto a L:
   $$PMgL = Q_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = 2K$$
   Tasa Marginal de Sustitución entre K y L=
   $$TMS_{L,K} = -\frac{dK}{dL} = \frac{PMgL}{PMgK} = \frac{2K}{2L + 6K} = \frac{K}{L + 3K} = \frac{\frac{K}{L}}{1 + 3(K/L)}$$

2. ¿Es la función homogénea? ¿Homotética? Explique clara y detalladamente su respuesta, dejando claro lo que entiende por homogénea y homotética.
   Respuesta.
   $$Q(tK, tL) = 2(tK)(tL) + (3tK)^2 = t^2\left(2KL + 3K^2\right) = t^2 Q(K, L)$$
   La función $Q(K, L) = 2KL + 3K^2$ es Homotética ya que: Por teorema, toda función Homogénea, también es Homotética

3. Calcule la elasticidad de la producción respecto al trabajo ($\varepsilon_{Q,L}$) y respecto al capital ($\varepsilon_{Q,K}$). Evalúelas en el punto en que se encuentra en la actualidad.
   Respuesta.
   $$\varepsilon_{QL} = \frac{L}{Q}\frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{L}{Q}(2K) = \frac{2KL}{Q}$$
   Por lo tanto:
   $$\varepsilon_{QL}\left(K = 2; L = 1; Q = 16\right) = \frac{2 * 2 * 1}{16} = 0,25$$
   La elasticidad parcial de la producción respecto al capital K está dada por:
   $$\varepsilon_{QK} = \frac{K}{Q}\frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{K}{Q}(2L + 6K) = \frac{2KL + 3K^2 + 3K^2}{Q} = \frac{Q + 3K^2}{Q} = 1 + 3\frac{K^2}{Q}$$
   Por lo tanto:
   $$\varepsilon_{QK}\left(K = 2; L = 1; Q = 16\right) = 1 + 3 * \frac{4}{16} = 1,75$$

2.22. Estática Comparativa en Funciones Cobb-Douglas

Dada la siguiente función de producción Cobb-Douglas $Y = AK^{\alpha}L^{\beta}$ donde A es una medida de productividad, K es el capital usado y L es la cantidad de trabajo empleada. Los parámetros α y β están el intervalo $(0, 1)$.

1. Encuentre la pendiente de una isocuanta de esta función de producción.

   Respuesta. Para calcular la pendiente de una isocuanta podemos calcular el diferencial total e igualar a cero (otra manera seria aplicar directamente el Teorema de la Función Implícita):

$$dY = \frac{\partial Y}{\partial K}dK + \frac{\partial Y}{\partial l}dL = 0$$

$$\frac{\partial Y}{\partial K}dK = -\frac{\partial Y}{\partial L}dL$$

$$\frac{dK}{dL} = -\frac{\frac{\partial Y}{\partial L}}{\frac{\partial Y}{\partial K}} = -\frac{A\beta K^{\alpha}l^{\beta-1}}{A\alpha K^{\alpha-1}L^{\beta}} = -\frac{\beta K}{\alpha L}$$

2. Muestre si la función es homogénea y si lo es indique su grado.
   Respuesta.

$$y(tx_1, tx_2) = A(tK)^{\alpha}(tL)^{\beta}$$

$$y(tx_1, tx_2) = t^{\alpha}t^{\beta}AK^{\alpha}L^{\beta}$$

$$y(tx_1, tx_2) = t^{\alpha+\beta}AK^{\alpha}L^{\beta}$$

   Tenemos que la función es homogénea de grado $\alpha + \beta$.

3. Suponga que la remuneración del capital y del trabajo (por unidad) es igual a sus productividades marginales. Discuta que sucede en los siguientes casos, $\alpha + \beta < 1$, $\alpha + \beta = 1$, $\alpha + \beta > 1$.

   Respuesta. Dado que la función de producción es homogénea podemos dividir la análisis en tres casos.

   Caso 1: Rendimiento decrecientes a escala, $\alpha + \beta < 1$. En este caso tenemos que cuando subimos la utilización de los factores en, por ejemplo, 10 % la cantidad producida sube menos que 10 %. Es decir, a medida que aumentan la utilización de los factores, la producción va creciendo pero en una proporción que lo crecimiento de la utilización de los factores.

   Caso 2: Rendimiento constantes a escala, $\alpha + \beta = 1$. En este caso tenemos que la función crece a tasa constante en los factores K y L. Esto quiere decir que si la cantidad utilizada de los factores duplica, la cantidad producida también duplica.

$$\alpha + \beta > 1$$

   .

   Caso 3: Rendimiento crecientes a escala, $\alpha + \beta > 1$. En este caso tenemos que la función creciente en los factores K y L. Esto quiere decir que a medida que la producción crece una tasa mayor que la utilización de los factores. Mas precisamente, si la utilización de los factores duplica, la producción mas que duplica.

Remuneración total de los factores. También podemos ver como la remuneración total de los factores (RTF) depende del grado de homogeneidad de la función producción. Usando el supuesto del enunciado tenemos que

$$RTF = \frac{\partial Y}{\partial L} \times L + \frac{\partial Y}{\partial K} \times K$$

Por el teorema de Euler, tenemos que

$$RTF = (\alpha + \beta)Y$$

Luego, si tenemos retornos decrecientes, tenemos que la RTF es menor que la producción total Y (la producción es mayor que la remuneración de los factores y queda producto para distribuir). Si tenemos retornos crecientes tenemos que $RTF > Y$ (la producción total no alcanza remunerar los factores). Si tenemos retornos constantes, $RTF = Y$ (la remuneración de los factores agota la producción de la firma).

4. Muestre que la elasticidad de sustitución es constante e igual a 1. ¿Cuál es el significado económico de este número?

Respuesta.
De lo obtenido en ítem 1, tenemos que:

$$TMST = \frac{\beta K}{\alpha L}$$

Además sabemos que la elasticidad de sustitución la obtenemos de la siguiente forma:

$$\sigma_{LK} = \frac{\frac{d(K/L)}{K/L}}{\frac{dTMST}{TMST}} = \frac{dln(K/L)}{dln(TMST)} = \frac{K/L}{TMST}\frac{TMST}{K/L}$$

Luego la TMST que obtuvimos de a), podemos obtener:

$$TMST = \frac{\beta K}{\alpha L}$$

$$\frac{K}{L} = \frac{\alpha}{\beta}TMST$$

Luego

$$\ln\left(\frac{K}{L}\right) = \ln\left(\frac{\alpha}{\beta}TMST\right)$$

$$\ln\left(\frac{K}{L}\right) = \ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) + ln(TMST)$$

Luego derivamos con respecto a $ln(TMST)$, para encontrar la elasticidad:

$$\sigma_{LK} = \frac{d\ln(K/L)}{d\ln(TMST)} = 1$$

Esta ecuación nos dice que cuando el precio del trabajo relativo al capital sube 1 %, la proporción capital-trabajo sube 1 %.

2.23. Funciones Homogéneas y Homotéticas

Responda VERDADERO o FALSO para las siguientes afirmaciones subrayadas. Debes justificar de manera clara sus respuestas, mencionando los resultados que estas utilizando o un contra-ejemplo cuando necesario.

1. Toda función homotética es homogénea.

   Respuesta. Falso. La función $f(x,y) = xy + 100$ es homotética, pues es una transformación creciente de la función xy (que es homogénea). Todavía, no es homogénea pues, para todo $t > 0$, $f(tx,ty) = t^2xy + 100 \neq t^k(xy + 100) = t^k f(x,y)$, para cualquier escalar k.

2. Considere un consumidor con función utilidad $u(x,y)$, donde x e y son las cantidades consumidas de dos bienes. La función u es homotética, pero no es homogénea. Suponga que los canastos $(x,y) = (5,10)$ y $(x,y) = (10,5)$ están en la misma curva de indiferencia (i.e., curva de nivel) para este consumidor. Entonces, los canastos $(x,y) = (10,20)$ y $(x,y) = (20,10)$ también están en la misma curva de indiferencia.

   Respuesta. Verdadero. Si una función $f : D \to \mathbb{R}$ es homotética tenemos que:

   $$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(tx_1) = f(tx_2), \text{ para todo } t > 0$$

   Como los canastos $(x,y) = (5,10)$ y $(x,y) = (10,5)$ están en la misma curva de indiferencia, tenemos que:

   $$u(5,10) = u(10,5) \Rightarrow u(2\times 5, 2\times 10) = u(2\times 10, 2\times 5) \Leftrightarrow u(10,20) = u(20,10)$$

3. Suponga que una empresa tiene una función de producción $F(K,L)$ que es homogénea de grado 1 (K y L representan las cantidades utilizadas de capital y trabajo, respectivamente). Entonces, cuando esta empresa duplica la utilización de los dos factores de producción, la productividad marginal underlineginal del trabajo se duplica.

   Respuesta. Falso. De un teorema presentado en clase, sabemos que una función homogénea de grado k tiene derivadas parciales homogéneas de grado $k-1$. Luego, la productividad marginal del trabajo es homogénea de grado cero y tenemos $PmgL = \frac{\partial F}{\partial L}(2K,2L) = 2^0 \frac{\partial F}{\partial L}(K,L) = \frac{\partial F}{\partial L}(K,L)$ y por lo tanto la productividad marginal del trabajo se mantiene constante.

2.24. Elasticidades y Funciones Homogéneas

Considere la función de utilidad:

$$G(t,z) = (t^\beta + z^\beta)e^\beta$$

1. Determine si G es homogénea y/o si es homotética.

   Respuesta.
   $$G(\theta t, \theta z) = (\theta^\beta t^\beta + \theta^\beta z^\beta)e^\beta = \theta^\beta(t^\beta + z^\beta)e^\beta = \theta^\beta G(t,z).$$

   Por lo tanto, es homogénea de grado β, y por consiguiente también homotética.

2. Calcule la tasa marginal de substitución TMS_{tz}.
   Respuesta.
   $$G_t = \beta t^{\beta-1}e^\beta \qquad ; \qquad G_z = \beta z^{\beta-1}e^\beta$$

$$TMS_{tz} = \frac{G_t}{G_z} = \left(\frac{z}{t}\right)^{1-\beta}$$

3. Calcule la elasticidad de G con respecto a β.

Respuesta.

$$ln\ G = \beta + ln(e^{\beta lnt} + e^{\beta lnz})$$

$$\frac{\partial ln\ G}{\partial \beta} = 1 + \frac{1}{e^{\beta lnt} + e^{\beta lnz}}(e^{\beta lnt}lnt + e^{\beta lnz}lnz) = 1 + \frac{1}{t^\beta + z^\beta}(t^\beta lnt + z^\beta lnz)$$

$$\epsilon_{G,\beta} = \frac{\partial ln\ G}{\partial \beta}\beta = \beta\left(1 + \frac{t^\beta lnt + z^\beta lnz}{t\beta + z\beta}\right)$$

4. Calcule la elasticidad de sustitución entre t y z.

Respuesta.

$$ln(TMS_{tz}) = (1-\beta)ln\left(\frac{z}{t}\right) \to \sigma_{tz} = \frac{1}{1-\beta}$$

2.25. Desafío: Funciones Homogéneas

Una panadería produce pan a partir de trigo y otros ingredientes, resumidos en el vector $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. La función de producción de la panadería se escribe $F(G(\vec{x}))$, donde $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es homogénea de grado k_1 y $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es homogénea de grado k_2. Suponga además que F y G tienen rendimientos decrecientes a escala.

1. ¿Qué partes del proceso productivo podrían representar F y G?

   Respuesta. Una función de producción de esta forma podría representar producción en serie. Aquí F recibe solo un insumo (es una función univariada) y G recibe n insumos. Así, F podría ser el proceso de horneado y G el de la preparación de la masa. Lo importante es que el proceso representado por F no puede recibir más de un insumo.

2. ¿Qué tipo de rendimientos tiene la panadería? Interprete su resultado en términos de producción en serie.

   Respuesta. La función de producción de la empresa es homogénea de grado k_1k_2:

   $$F(G(\theta\vec{x})) = F(\theta^{k_1}G(\vec{x})) = (\theta^{k_1})^{k^2}F(G(\vec{x})) = \theta^{k_1k_2}F(G(\vec{x}))$$

   Como F y G tienen rendimientos decrecientes, entonces $k_1, k_2 < 1$ y por lo tanto$k_1k_2 < 1$, por lo que la panadería tiene rendimientos decrecientes. Esto significa que una empresa que produce en serie con rendimientos decrecientes en sus partes no puede tener rendimientos constantes o crecientes en su conjunto.

   Suponga que la panadería hace más eficiente su segundo proceso productivo.

3. ¿Qué función es la que cambia? Y si luego del cambio la función sigue siendo homogénea, pero de grado k_3, ¿cómo se comparan k_1 y k_2 con k_3?

   Respuesta. El segundo proceso productivo viene dado por la función F, luego esta es la que cambia. Ahora, la función de producción de la panadería es homogénea de k_1k_3. Como G no sufrió ningún cambio, no podemos comparar k_1 y k_3, pero como suponemos ahora que el segundo proceso es más eficiente, entonces debe ser cierto que$k_2 < k_3$, o sea, F es homogénea de un grado mayor que antes.

4. Encuentre el (los) valor(es) de k_3 (relativos a k_1) que hacen que la panadería tenga:

   a) Rendimientos constantes.

   Respuesta. Para tener rendimientos constantes, debe ser cierto que $k_1k_3 = 1$, luego $k_3 = \frac{1}{k_1}$.

   b) Rendimientos crecientes.

   Respuesta. Para tener rendimientos crecientes, debe ser cierto que $k_1k_3 > 1$, luego $k_3 > \frac{1}{k_1}$.

2.26. Plano Tangente y la Función de Producción

Un fabricante ha modelado su producción con la siguiente función:

$$Q(K, L) = 1{,}039L^{0{,}75}K^{0{,}25} \quad ; \quad L, K > 0$$

- Q: Valor monetario de la Producción total producida en un determinado período
- L: Cantidad de horas-hombre trabajadas en dicho período
- K: Valor monetario de la cantidad de capital invertido (maquinarias, equipos y edificios)

1. Obtener una expresión para, la ecuación del plano tangente: $T(L, K)$ a la función de producción en el punto $(L, K, Q) = (101, 20, 70)$.

   Respuesta. La ecuación del plano tangente $T(L, K)$ en el punto $(L, K, Q) = (101, 20, 70)$, esta dado por:

$$T(L, K) - 70 = \frac{\partial Q}{\partial L}(101, 20) \times (L - 101) + \frac{\partial Q}{\partial K}(101, 20) \times (K - 20)$$

   - $\frac{\partial Q}{\partial L} = 1{,}039 \times 0{,}75 \times L^{-0{,}25}K^{0{,}25} \to \dfrac{\partial Q}{\partial K}(101, 20) = 1{,}039 \times 0{,}25 \times \left(\frac{20}{101}\right)^{0{,}25}$
   - $\frac{\partial Q}{\partial K} = 1{,}039 \times 0{,}75 \times L^{0{,}75}K^{-0{,}75} \to \dfrac{\partial Q}{\partial L}(101, 20) = 1{,}039 \times 0{,}25 \times \left(\frac{101}{20}\right)^{0{,}75}$

$$T(L, K) = 70 + 1{,}039 \times 0{,}75 \times \left(\frac{20}{101}\right)^{0{,}25} \times (L - 101) + 1{,}039 \times 0{,}25 \times \left(\frac{101}{20}\right)^{0{,}75} \times (K - 20)$$

2. Usando la respuesta obtenida en el punto anterior, se pi de obtener una expresión para el valor aproximado del valor de la función producción en el punto $(L, K) = (100, 21)$.

   Respuesta.

$$Q(100, 21) \approx T(100, 21) = 70 - 1{,}039 \times 0{,}75 \times \left(\frac{20}{101}\right)^{0{,}25} + 1{,}039 \times 0{,}25 \times \left(\frac{101}{20}\right)^{0{,}75}$$

3. Demuestre que cualquiera sea el valor de (L, K), la Productividad Marginal del trabajo es positiva y decreciente.

Respuesta.

- $\frac{\partial Q}{\partial L} = PMg_L = 1{,}039 \times 0{,}75 \times L^{-0{,}25}K^{0{,}25} = 1{,}039 \times 0{,}75 \times \left(\frac{K}{L}\right)^{0{,}25} > 0$ ya que $K, L > 0$. Por lo tanto, la productividad marginal del trabajo es POSITIVA.

- $\frac{\partial PMg_L}{\partial L} = \frac{\partial^2 Q}{\partial L^2} = -1{,}031 \times 0{,}75 \times 0{,}25 \times L^{-1{,}25}K^{0{,}25} < 0$, ya que $K, L > 0$. Por lo tanto, la productividad marginal del trabajo es DECRECIENTE.

2.27. Función de Producción, Homogeneidad y Tasas de sustitución

Una empresa tiene función de producción $F(K, L) = 40\sqrt{K} + 20\sqrt{L}$, donde K representa la cantidad empleada de capital, y L la cantidad de trabajo. El precio de venta del producto es \$1.

a) ¿La función de producción es homogénea? Si lo es, ¿es homogénea de qué grado? Si no lo es, pruébelo. Justifique.

b) Para la curva de nivel $F(K, L) = 900$, determine la tasa marginal de sustitución (TMS) entre factores de producción y mencione cómo se relaciona con la pendiente de esa curva de nivel.

c) Suponga que el costo de cada unidad de capital es \$1 y el costo de cada unidad de trabajo es \$2. Construya la ecuación de ganancias de la empresa y encuentre su único punto crítico interior. Calcule $F(K, L)$ en ese punto.

d) Suponga que el proveedor de K pierde 4 unidades luego de una inundación, por lo que la empresa debe contratar menos K de lo planificado y sustituirlo por L. Usando la tasa marginal de sustitución (TMS) entre factores de producción calculada en la parte *b)*, indique en cuánto, **aproximadamente**, debe cambiar L para mantener constante el nivel de producción calculado en *c)* si se reduce K en 4 unidades.

e) Si la empresa ajusta su nivel L al nivel calculado en *d)*, ¿qué pasa con los ingresos y costos de la empresa? ¿Las ganancias suben o bajan?

Respuesta.

(a) Por definición

$$\begin{aligned} TMST_{K,L} &= \frac{F_K(K, L)}{F_L(K, L)} \\ &= \frac{40 \cdot \frac{1}{2} \cdot K^{-\frac{1}{2}}}{20 \cdot \frac{1}{2} \cdot L^{-\frac{1}{2}}} \\ &= 2\sqrt{\frac{L}{K}} \end{aligned}$$

La pendiente $\frac{dL}{dK}$ no es nada más que $-TMST_{K,L}$, de acuerdo al teorema de la función implícita.

Si calcularon la $TMST_{L,K}$:

$$\begin{aligned} TMST_{L,K} &= \frac{F_L(K,L)}{F_K(K,L)} \\ &= \frac{20 \cdot \frac{1}{2} \cdot L^{-\frac{1}{2}}}{40 \cdot \frac{1}{2} \cdot K^{-\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{L}} \end{aligned}$$

Y la pendiente $\frac{dK}{dL}$ es $-TMST_{L,K}$. Lo importante es que la respuesta sea coherente.

(b) Para cualquier $t > 0$, K y L

$$F(tK, tL) = t^{\frac{1}{2}}\left(40K^{\frac{1}{2}} + 20L^{\frac{1}{2}}\right)$$

así que la función es homogénea de grado $\frac{1}{2}$.

(c) La función de ganancias es $\pi(K,L) = F(K,L) - K - 2L$. Sacando la derivada de $\pi(K,L)$ con respecto a K e igualando a cero, obtenemos:

$$\begin{aligned} [K]: \quad & 40\frac{1}{2}K^{-1/2} - 1 = 0 \\ & \boxed{K = 400} \end{aligned}$$

Haciendo lo mismo para L, obtenemos

$$\begin{aligned} [L]: \quad & 20\frac{1}{2}L^{-1/2} - 2 = 0 \\ & \boxed{L = 25} \end{aligned}$$

A su vez, el $F(K,L)$ en este punto:

$$\boxed{F(L,K) = 900}$$

(d) De acuerdo al ítem anterior, en el punto se utilizan 400 unidades de K y 25 de L, por lo que la $TMST_{K,L}$ es 1/2. Si la empresa disminuye su uso de K en 4 unidades, usando la $TMST_{K,L}$ obtenemos:

$$TMST_{K,L} = \frac{1}{2} = -\frac{dL}{-4}$$

Luego L debe aumentar, aproximadamente, en 2 unidades.

(e) Dado que el nivel de producción no cambia, los ingresos tampoco. Respecto a los costos, como K cae en 4, los costos caen en \$4. Si L aumenta en 2 unidades, entonces el costo adicional es

$$\$2 \cdot 2 = \$4$$

Por lo que en el neto los costos tampoco cambian. En conclusión las utilidades, aproximadamente, no cambian.

2.28. Estática comparativa

(Nota: esta pregunta requiere tener nociones de optimziación en R pero no de optimización con más de una variable.)

Considere una empresa que enfrenta una demanda $Q(p) = 5 - \ln(p)$ por su producto. Su costo de producción por unidad es $c > 1$. La empresa busca elegir el precio que maximice su función de ganancias, dada por

$$\pi(p) = Q(p)p - Q(p)c.$$

a) Sin calcular responda, ¿puede ser menor a c el precio que maximice las ganancias en este caso? Justifica tu respuesta.

b) Suponiendo que el dominio de la función de ganancias son los precios $p > c$, ¿es esta función cóncava o convexa? Justifica tu respuesta.

c) Muestre que la condición de primer orden para este problema es:

$$5 - \ln(p) - \frac{1}{p}(p - c) = 0$$

d) Sea $p^*(c)$ el precio que satisface la condición de primer orden derivada en el ítem anterior. ¿Cómo cambia $p^*(c)$ con un aumento en el costo de producción c? Justifique su respuesta analíticamente. *(Ayuda: Puede utilizar el teorema de la función implícita.)*

e) Sea $Q^*(c)$ la cantidad producida en el óptimo como función de c (es decir, $Q^*(c) = Q\big(p^*(c)\big)$. ¿Un aumento en c aumenta o disminuye $Q^*(c)$? Justifique su respuesta analíticamente.

f) Sea $\pi^*(c)$ la ganancia como función de c (es decir, $\pi^*(c) = \pi\big(p(c^*)\big)$. Muestre cómo un cambio en c afecta $\pi^*(c)$.

Respuesta.

a) No, porque si lo fuera la empresa tendría ganancias negativas, mientras que si la empresa elige $p \geq c$, la empresa obtiene ganancias mayores o iguales a cero.

b) Tenemos que la derivada de π es:

$$\pi'(p) = Q'(p)p + Q(p) - Q'(p)c$$

La segunda derivada de π es

$$\pi''(p) = Q''(p)p + Q'(p) + Q'(p) - Q''(p)c$$

Notar que

$$Q'(p) = -\frac{1}{p}$$
$$Q''(p) = \frac{1}{p^2}$$

Luego

$$\pi''(p) = \frac{1}{p} - \frac{2}{p} - \frac{c}{p^2} = -\frac{1}{p} - \frac{c}{p^2}$$

Que es negativo para todo valor de $p > c$.

c) La empresa maximiza
$$Q(p)(p-c) = [5-\ln(p)](p-c).$$
Derivando esta expresión y la igualando a cero, obtenemos:
$$[p]: \quad 5-\ln(p)-\frac{1}{p}(p-c)=0$$
$$\boxed{5-\ln(p)-1+\frac{c}{p}=0} \tag{2.1}$$

d) Hay dos maneras en que podemos responder esto.

Respuesta 1. Definiendo
$$F(p,c)=5-\ln(p)-1+\frac{c}{p},$$
el teorema de la función implícita nos garantiza que
$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial c} &= -\frac{F_c(p,c)}{F_p(p,c)} \\ &= -\frac{1/p}{-1/p-c/p^2} \\ &= \boxed{\frac{p}{p+c}>0}.\end{aligned}$$
Como $p^{*\prime}(c)>0$, tenemos que un aumento en c aumenta el precio.

Respuesta 2. Tomando la derivada total de la expresión **??** con respecto a c, obtenemos
$$\begin{aligned}-\frac{1}{p}\frac{\partial p^*}{\partial c}+\frac{1}{p}-\frac{c}{p^2}\frac{\partial p^*}{\partial c} &= 0 \\ -\left[\frac{1}{p}+\frac{c}{p^2}\right]\frac{\partial p^*}{\partial c} &= -\frac{1}{p} \\ \frac{\partial p^*}{\partial c} &= \frac{\frac{1}{p}}{\left[\frac{1}{p}+\frac{c}{p^2}\right]}. \\ \frac{\partial p^*}{\partial c} &= \boxed{\frac{p}{p+c}>0}.\end{aligned}$$
Como $p^{*\prime}(c)>0$, tenemos que un aumento en c aumenta el precio.

e) (5 puntos) La firma produce
$$Q^*(c)=5-\ln(p^*(c)). \tag{2.2}$$
Aplicando la regla de la cadena, la derivada de $Q^*(c)$ con respecto a c es dada por
$$Q^{*\prime}(c) = \underbrace{-\frac{1}{p^*}}_{<0}\cdot\underbrace{p^{*\prime}(c)}_{>0}. \tag{2.3}$$
Como $-\frac{1}{p^*}<0$ y $p^{*\prime}(c)>0$, la expresión **??** nos garantiza que $Q^{*\prime}(c)<0$, es decir, un aumento en c disminuye la cantidad producida.

f) Las ganancias de la empresa están dadas por
$$\pi^*(c)=Q^*(c)(p^*(c)-c). \tag{2.4}$$

Derivando esta expresión con respecto a c, obtenemos

$$\pi^{*\prime}(c) = \underbrace{Q^{*\prime}(c)}_{<0}\underbrace{(p^*(c)-c)}_{\geq 0} + \underbrace{Q^*(c)}_{>0}(\underbrace{p^{*\prime}(c)}_{=p^*/(p^*+c)} -1)$$

$$\pi^{*\prime}(c) = \underbrace{Q^{*\prime}(c)(p^*(c)-c)}_{\leq 0} + \underbrace{Q^*(c)}_{>0}\underbrace{(\underbrace{p^*/(p^*+c)}_{<1}-1)}_{<0}$$

$$\pi^{*\prime}(c) = \underbrace{Q^{*\prime}(c)(p^*(c)-c)}_{\leq 0} + \underbrace{Q^*(c)(p^*/(p^*+c)-1)}_{<0} < 0,$$

Así que las ganancias son decrecientes en c.

Capítulo 3

Optimización sin Restricciones

Para profundizar más sobre los menores principales se recomienda revisar el apéndice A.1.

3.1. Formas Cuadráticas en Dos Variables

Utilice la definición de concavidad para demostrar que la función de producción $g : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$, definida por $g(L, K) = \min(L, K)$ es cóncava. ¿Es g estrictamente cóncava? Demuéstrelo.

Respuesta. Considere la función h definida por

$$h(L, K) := \frac{L + K - |L - K|}{2}$$

Nótese que la función g es igual a la función h pues si $L < K$, $g(L, K) = L$ y $h(L, K) = \frac{L+K+L-K}{2} = L$, mientras que si $L \geq K$, se tiene que $g(L, K) = K$ y $h(L, K) = \frac{L+K-L+K}{2} = K$. Ahora bien, la función h es una suma de una función lineal (que es cóncava y convexa) y la función convexa $| \cdot - \star |/2$ pues si $(L_1, K_1), (L_2, K_2)$ son dos vectores no negativos arbitrarios y $\lambda \in [0, 1]$ luego

$$\begin{aligned} &\frac{|(\lambda L_1 + (1-\lambda)L_2) - (\lambda K_1 + (1-\lambda)K_2)|}{2} \\ &= \frac{|(\lambda(L_1 - K_1) - (1-\lambda)(K_2 - L_2)|}{2} \leq \frac{|(\lambda(L_1 - K_1)|}{2} + \frac{(1-\lambda)(K_2 - L_2)}{2} \\ &= \lambda h(L_1, K_1) + (1-\lambda)h(L_2, K_2) \end{aligned}$$

3.2. Condiciones de Primer y Segundo Orden

Encuentre los puntos estacionarios de las siguientes funciones. Use las condiciones de segundo orden para determinar si son máximos, mínimos o puntos silla.

Respuesta. Obs: En esta pregunta y en la respuesta que sigue, mínimo y máximo se refieren a mínimos y máximos locales.

1. $y = 0{,}5x_1^2 + 2x_2^2$
2. $y = x_1 + x_2 - x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2$
3. $y = x_1^3 + x_2^3 - 4x_1x_2$

4. $y = 2x_1^2 - 4x_2^2$

Respuesta.

1. Único punto crítico $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Matriz es positiva definida por lo que el punto es un mínimo. Único punto crítico $x_1 = 1$ y $x_2 = 1$

$$H = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Matriz es negativa definida por lo que el punto es un máximo.

2. Dos puntos críticos $(0, 0)$ y $(4/3, 4/3)$ Derivadas de segundo orden: $\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} = 6x_1$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} = 6x_2$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 x_2} = -4$, Hessiano en $(0, 0)$:

$$H = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

No es mínimo ni máximo.
Hessiano en $(4/3; 4/3)$:

$$H = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$$

Matriz positiva definida, el punto es un mínimo.

3. Único punto crítico $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$

$$H = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}$$

No es mínimo ni máximo.

3.3. Optimización sin Restricciones

Calcule la distancia más corta desde el punto $(1, 0, 2)$ al plano $x + 2y + z = 4$.

3.4. Optimización sin Restricciones

Determine los mínimos, máximos y puntos sillas de las siguientes funciones. Además mencione si son globales o locales según corresponda:

a) $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 - 4xy + 9y^2 + 3x - 14y + \frac{1}{2}$

b) $f(x, y) = 2x^3 + (x - y)^2 - 6y$

Respuesta.

a) Lo que primero que haremos es encontrar los puntos críticos, para ello, obtendremos las CPOs. Usando notación matricial, tenemos que:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = 0$$

$$f_x = x - 4y + 3 = 0$$

$$f_y = -4x + 18y - 14 = 0$$

Tenemos un sistema de ecuaciones, dos incógnitas, dos ecuaciones. Por lo tanto: $x = 1$ e $y = 1$, con lo que tenemos un punto critico $(x^*, y^*) = (1, 1)$.

Para determinar, si es máximo/mínimo/punto silla, tenemos que encontrar la matriz Hessiana y evaluarla en el punto critico (x^*, y^*) que hemos obtenido y definir en torno al siguiente criterio (existen otros):

- Es mínimo local si $f''_{11}(x^*, y^*) > 0$ y $\begin{vmatrix} f''_{11}(x^*, y^*) - f''_{12}(x^*, y^*) \\ f''_{21}(x^*, y^*) - f''_{22}(x^*, y^*) \end{vmatrix} > 0$ (i.e., los menores principales dominantes son todos > 0);
- Es máximo local si $f''_{11}(x^*, y^*) < 0$ y $\begin{vmatrix} f''_{11}(x^*, y^*) & f''_{12}(x^*, y^*) \\ f''_{21}(x^*, y^*) & f''_{22}(x^*, y^*) \end{vmatrix} > 0$ (i.e., los menores principales dominantes de orden par son > 0 y los de orden impar son < 0);
- Es punto silla si $\begin{vmatrix} f''_{11}(x^*, y^*) & f''_{12}(x^*, y^*) \\ f''_{21}(x^*, y^*) & f''_{22}(x^*, y^*); \end{vmatrix} < 0$ (i.e., existe un menor principal dominante de orden par que es < 0).

En nuestro caso, tenemos que:

$$Hf = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 18 \end{pmatrix} \Rightarrow D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 18 \end{vmatrix} = 18 - 16 = 2 > 0$$

Además, tenemos que $f_{xx}(1, 1) = D_1 = 1 > 0$. Luego, Hf es positiva definida. Como la matriz hessiana es igual en todos los puntos (x, y) (lo que implica que su signo no depende de los valores en cuales evaluemos), tenemos que el punto critico es no solo un mínimo local, sino que también un mínimo global único. (Recuérdense que si la hessiana es positiva definida **en todo punto del dominio de la función**, tenemos una función estrictamente convexa, lo que implica que un punto critico interior es el único mínimo global.)

1. La condiciones de primer orden son:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = 0$$

$$f_x = 6x^2 + 2x - 2y = 0$$

$$f_y = -2x + 2y - 6 = 0$$

Aislando y en la segunda ecuación tenemos $y = x + 3$, que reemplazando en la primera nos da una ecuación cuadrática en x. Al resolver la ecuación cuadrática vamos a tener que la soluciones son $x_1 = 1$ y $x_2 = -1$. Luego reemplazamos los valores de x en $y = x + 3$ para obtener los valores de y. Si $x = 1$, entonces $y = 4$.Si $x = -1$, entonces $y = 2$.Tenemos dos puntos críticos los cuales son $(x_1, y_1) = (1, 4)$ y $(x_2, y_2) = (-1, 2)$.

La hessiana es

$$H = \begin{pmatrix} 12x + 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Podemos darnos cuenta que el signo de la matriz hessiana va a depender del valor de los puntos en los que la evaluemos. Es por esto, que en este caso estaríamos hablando de condiciones locales no globales como en el caso anterior.Ahora evaluamos nuestros puntos críticos en la matriz hessiana.

- Si $(x_1, y_1) = (1, 4)$ la hessiana es

$$Hf(1,4) = \begin{pmatrix} 14 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow D_2 = \begin{vmatrix} 14 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 24 > 0$$

  Como además, $D_1 = f_{xx}(1,4) = 14 > 0$, tenemos que $(1,4)$ es un mínimo local ($Hf(1,4)$ es positiva definida).

- Si $(x_2, y_2) = (-1, 2)$ la hessiana es:

$$Hf(-1,2) = \begin{pmatrix} -10 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow D_2 = \begin{vmatrix} -10 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -24 < 0$$

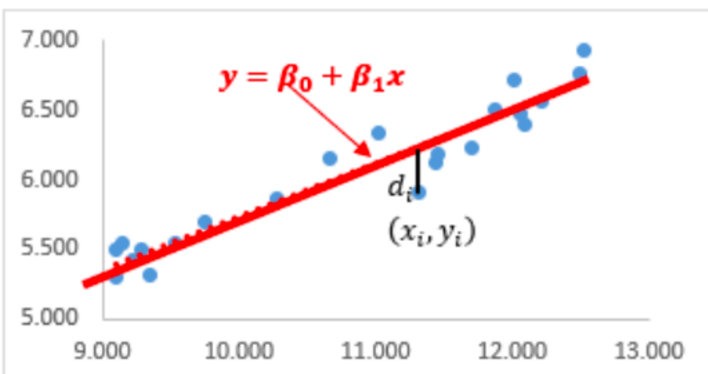
  Luego tenemos que $(-1,2)$ es un punto silla ($Hf(-1,2)$ es indefinida).

3.5. Optimización sin Restricciones (Aplicación a Econometría)

Suponga que un estadístico tiene razón en creer que dos cantidades x e y se pueden modelar en forma aproximada de acuerdo a una dependencia de tipo lineal, esto es:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x$$

Donde β_0 y β_1 son los parámetros del modelo que desea estimar-
Para estimar los parámetros, el estadístico ejecuta un experimento y procesa información en la forma de puntos: (x_1, y_1);(x_2, y_2); (x_3, y_3);...;(x_n, y_n). Luego los representa en un gráfico, de tal modo que los puntos no quedan exactamente sobre una recta, de acuerdo al siguiente gráfico:



Para estimar los parámetros β_0 y β_1 el estadístico utiliza el Método de Mínimos Cuadrados, que consiste en lo siguiente: Sea $d_i = y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i$ la distancia vertical desde un punto cualesquiera (x_i, y_i) hasta la recta se trata de obtener (estimar) β_0 y β_1 minimizando la expresión: $S^2 = \sum_{i=1}^{i=n} d_i^2$

1. Demostrar que los estimadores de Mínimos Cuadrados están dados por las siguientes expresiones

$$\beta_1^* = \hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{i=n} x_i^2 - n\bar{x}^2};$$

$$\beta_0^* = \hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$$

Donde $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} x_i}{n}$ $\quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} y_i}{n}$ (PROMEDIOS MUESTRALES)

Respuesta. Planteamos el problema de minimización sin restricciones:

$$\min_{\beta_0, \beta_1 \in \mathbb{R}} S^2 = \sum_{i=1}^{n} d_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2$$

Computamos las CPO e igualamos a cero. Recordemos que la derivada puede entrar a la sumatoria.

$$[\beta_0] = \frac{\partial S^2}{\partial \beta_0} = \frac{\partial}{\partial \beta_0} \left(\sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2 \right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \beta_0} (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2 = -2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) = 0$$

$$[\beta_1] = \frac{\partial S^2}{\partial \beta_1} = \frac{\partial}{\partial \beta_1} \left(\sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2 \right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \beta_1} (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2 = 2 \sum_{i=1}^{n} x_i (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) = 0$$

Resumimos entonces que :

$$[\beta_0] = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) = 0$$

$$[\beta_1] = \sum_{i=1}^{n} x_i (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) = 0$$

Ahora, trabajando con $[\beta_0]$ tenemos que despejar β_0. Para eso comenzamos desarrollando la sumatoria:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} \beta_0 - \beta_1 \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} y_i - n\beta_0 - \beta_1 \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

$$\beta_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} - \beta_1 \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

$$\beta_0^* = \bar{y} - \beta_1 \bar{x} \quad (*)$$

Luego, trabajando con $[\beta_1]$ desarrollamos la multiplicación y despejamos β_1:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i x_i - \beta_0 \sum_{i=1}^{n} x_i - \beta_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0 \quad (**)$$

Notemos que nos queda en función de β_0, por lo que reemplazamos $(*)$ en $(**)$:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i x_i - \bar{y} \sum_{i=1}^{n} x_i + \beta_1 \bar{x} \sum_{i=1}^{n} x_i - \beta_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$$

Finalmente, despejamos β_1:

$$\beta_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \beta_1 \bar{x} \sum_{i=1}^{n} x_1 = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i - \bar{y} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\beta_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i x_i - \bar{y} \sum_{i=1}^{n} x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x} \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

Multiplicamos por $\frac{n}{n}$ para $\bar{y} \sum_{i=1}^{n} x_i$ y $\bar{x} \sum_{i=1}^{n} x_i$:

$$\beta_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i x_i - \bar{y}\frac{n}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}\frac{n}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i x_i - n\bar{y}\bar{x}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}$$

Entonces, comprobamos que:

$$\beta_1^* = \hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{i=n} x_i^2 - n\bar{x}^2}$$

;

$$\beta_0^* = \hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1\bar{x}$$

3.6. Optimización sin Restricciones (Otra Aplicación a Econometría)

En estadística inferencial, en muchas ocasiones se necesita resolver aplicaciones de tiempos de duración de aparatos electrónicos, para ello se utiliza la llamada función o modelo exponencial:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \qquad t \geq 0$$

Donde $\lambda > 0$ es el parámetro del modelo

Para medir los tiempos de "n" aparatos, se utiliza la llamada "Función de Verosimilitud", definida por:

$$L(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \prod_{i=1}^{i=n} f(t_i)$$

Nótese que: $L : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

1. Se pide obtener el valor del parámetro λ, que maximiza la Función de Verosimilitud. A este valor se le llama Estimación de Máxima Verosimilitud $\hat{\lambda}_{MV}$

3.7. Minimización de Costos de Entrega

La empresa en que usted trabaja ha decidido iniciar un plan de distribución de productos mediante drones. Para ello se requiere definir la ubicación del centro de distribución desde donde saldrán los drones. Usted sabe que en un mapa los tres lugares donde se deben entregar los paquetes están ubicados en las siguientes coordenadas: $A = (x_a, y_a)$, $B = (x_b, y_b)$, y $C = (x_c, y_c)$.

Usted sabe que el costo de despacho está dado por la distancia que debe recorrer el dron. Si el centro de distribución se ubica en el punto $D = (m, n)$, el costo de entregar un paquete a un punto (x, y) es

$$\frac{1}{2}\left[(m-x)^2 + (n-y)^2\right]$$

Suponga que usted está a cargo de determinar la ubicación óptima del centro de distribución. El objetivo es minimizar el costo diario de las entregas realizadas por el centro.

1. Escriba el problema de optimización que le permitiría encontrar el punto óptimo de ubicación del centro de distribución. Especifique claramente función objetivo y variables de decisión de la empresa. Suponga que cada día se entrega un paquete en cada destino.

2. Encuentre el(los) punto(s) crítico(s) de este problema.

3. Determine si el(los) punto(s) crítico(s) son máximos, mínimos o puntos silla. Determine si son locales o globales.

4. Suponga ahora que a los destinos A, B, y C se entregan cada día q_a, q_b, y q_c paquetes, respectivamente. ¿Cómo cambia su respuesta a la parte (b)? Explique intuitivamente el resultado.

5. Proponga una extensión a este problema y muestre como cambiaría el problema de optimización. Explique claramente la naturaleza de esta modificación, puede ayudarse con figuras. Esta extensión debe estar claramente relacionada a una situación que surgiría en el mundo real.

Respuesta.

1. $$\min_{m,n} \ \frac{1}{2}[(m-x_a)^2+(n-y_a)^2+(m-x_b)^2+(n-y_b)^2+(m-x_c)^2+(n-y_c)^2]$$

   Donde asumimos que hay un viaje a cada lugar y que no hay viajes a más destinos. La empresa decide donde colocar el centro de distribución en base a su elección de n y m

2. CPOs:
   $$(m-x_a)+(m-x_b)+(m-x_c)=0$$
   $$(n-y_a)+(n-y_b)+(n-y_c)=0$$

   Despejando tenemos que:
   $$m=\frac{x_a+x_b+x_c}{3}$$
   $$n=\frac{y_a+y_b+y_c}{3}$$

3. CSO:
   $$H=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

   Menores principales dominantes son:
   $$3>0$$
   $$9=3*3-0*0=9>0$$

   La matriz es definida positiva. Por lo tanto, tenemos un mínimo y es global porque se cumple para todo el dominio (lo que implica que la función objetivo es estrictamente convexa).

4. Ahora tenemos que:
   $$\min_{m,n} \ q_a\frac{1}{2}[(m-x_a)^2+(n-y_a)^2]+q_b\frac{1}{2}[(m-x_b)^2+(n-y_b)^2]+q_c\frac{1}{2}[(m-x_c)^2+(n-y_c)^2]$$

   CPOs:
   $$q_a(m-x_a)+q_b(m-x_b)+q_c(m-x_c)=0$$
   $$q_a(n-y_a)+q_b(n-y_b)+q_c(n-y_c)=0$$

   Despejando tenemos que:
   $$m=\frac{q_ax_a+q_bx_b+q_cx_c}{q_a+q_b+q_c}$$
   $$n=\frac{q_ay_a+q_by_b+q_cy_c}{q_a+q_b+q_c}$$

   Ahora es un promedio ponderado y se coloca más cerca del lugar donde debe viajar más veces.

5. Supongamos que al punto C se debe llegar de auto (el clima no permite volar con drones). Cada kilometro recorrido de auto tienen un costo 4 veces mayores que un kilometro recorrido de drone. Así, la función objetivo ahora es:
   $$\min_{m,n} \ \frac{1}{2}[(m-x_a)^2+(n-y_a)^2+(m-x_b)^2+(n-y_b)^2]+4\frac{1}{2}[(m-x_c)^2+4(n-y_c)^2]$$

   Otras opciones de extensión:

- Que para viajar a uno de los puntos los costos sean mayores porque se debe elevar el dron por sobre una cadena de cerros. En ese caso el costo de los viajes sería λ veces el costo de la distancia a las otras ciudades.
- Una de las direcciones puede significar viajar contra el viento.
- Similar a la diferencia en los costos por altura, si bien todos las ciudades requieren el mismo número de viajes, en una de ellas los paquetes son más pesados por lo que cada viaje cuesta más.

3.8. Inversión en I+D

En el país Oulipo, la fábrica de Bicicletas Eunoia genera también una serie de accesorios producto de la imaginación de su dueño, el señor Bok. La demanda por bicicletas viene dada por $Q = 1 + \sqrt{K} - P$, donde K representa el esfuerzo de innovación del señor Bok, cuyo costo es $\frac{2}{3}\lambda K^{\frac{3}{2}}$. El costo marginal de producir una bicicleta es $c < 1$.

1. Calcule el precio P y el nivel de innovación K elegidos por Eunoia. **(Ayuda: Si obtiene, para determinar K, una ecuación de la forma $aK + b\sqrt{K} + c$, puede hacer el cambio de variable $y = \sqrt{K}$ y resolverlo como una ecuación de segundo grado típica)**

   Suponga ahora que junto con Eunoia, existe un borde competitivo, con una oferta perfectamente elástica en el precio P_f (Esto es: no produce si $P \leq P_f$ y copa todo el mercado si $P > P_f$). Este sector no tiene costos de innovación, y simplemente imita los diseños de Eunoia, beneficiándose del aumento en la demanda. Para simplificar cálculos, puede asumir que $c = 0$, $\lambda = \frac{3}{16}$.

2. Si el monopolista elige P y K, ¿puede ser que $P > P_f$?
3. Calcule $K(P_f)$, $P(P_f)$, $Q^E(P_f)$, $Q^f(P_f)$. Donde Q^E es la cantidad producida por Eunonia y Q^f la cantidad producida por el borde competitivo.

3.9. Concavidad y Convexidad I

Compruebe concavidad/convexidad de las siguientes funciones:

1. $f(x) = ax^2 + bx + c$
2. $f(x, y) = 2x - y - x^2 + 2xy - y^2$

Respuesta.

1. Para funciones de una variable recordemos que: el criterio de la segunda derivada nos habla de la concavidad/convexidad de la función:

   1. f es convexa en I ssi $f''(x) \geq 0$ para todo x del I^0, Donde I es un intervalo donde f es continua y I^0 es el interior de ese intervalo.
   2. f es cóncava en I ssi $f''(x) \leq 0$ para todo x del I^0

   Resolviendo:
   $$f'(x) = 2ax + b$$
   luego,
   $$f''(x) = 2a$$
   Si tenemos que a=0, entonces f sera lineal esto quiere decir que sera convexa y cóncava a la vez. Si $a > 0$, entonces $f''(x) > 0$ por lo tanto la función sera convexa, y si $a < 0$ tendremos que la función sera cóncava.

2. Para funciones de dos variables, tenemos que obtener el Hessiano:
   Si se cumplen las condiciones de diferenciabilidad de las derivadas parciales vamos a tener que:

   1. f es concava ssi $f''_{11} \leq 0, f''_{22} \leq 0$ y $\begin{vmatrix} f''_{11} - f''_{12} \\ f''_{21} - f''_{22} \end{vmatrix} \geq 0$
   2. f es convexa ssi $f''_{11} \geq 0, f''_{22} \geq 0$ y $\begin{vmatrix} f''_{11} & f''_{12} \\ f''_{21} & f''_{22} \end{vmatrix} \geq 0$

      Resolvamos nuestro ejercicio:

$$f_x = 2 - 2x + 2y, f_y = -1 + 2x - 2y$$

$$f_{xx} = -2, f_{yy} = -2, f_{xy} = 2 = f_{yx} = 2$$

      Por lo tanto:

$$f''_{xx} \leq 0$$

      y

$$f''_{yy} \leq 0$$

      Además calculando el determinante de la matriz: $\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \geq 0$

      Por lo tanto decimos que f es cóncava.

3.10. Concavidad y Convexidad II

Dada su cuarentena en casa a usted se le ha ocurrido estudiar su función de producción de pan amasado. Por simplicidad supongamos que su función de producción solo depende de su trabajo (L) y esta definida de la siguiente forma:

$$Y = AL^{\alpha}$$

Donde $L > 0$, A es un parámetro tecnológico y además, $0 < \alpha < 1$

1. Obtenga la productividad marginal de su trabajo.
   Respuesta.
   Para obtener la productividad marginal de trabajo debemos derivar la función de producción una vez con respecto a L, esto nos indica cuanto rinde una unidad extra de trabajo en el producto total

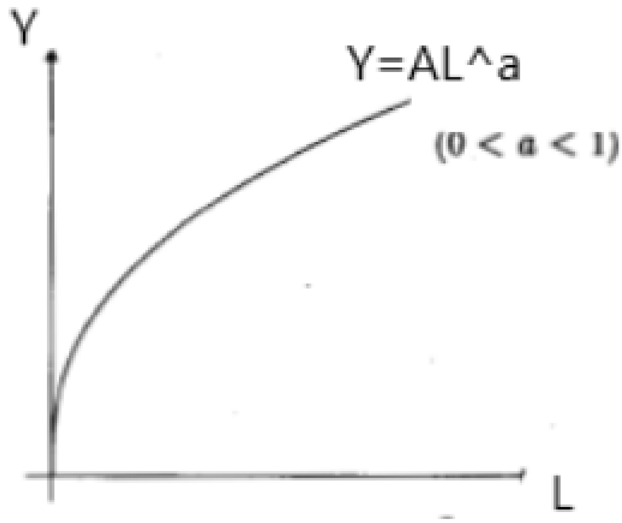
$$PmgL = \frac{\partial Y}{\partial L} = A\alpha L^{\alpha-1}$$

2. Obtenga la concavidad/convexidad de su función de producción. Grafique.

   Respuesta. Para obtener la concavidad debemos derivar dos veces con respecto al trabajo, esto nos dira a la tasa que crece/decrece la productividad marginal del trabajo. Una vez obtenida, podemos usar el criterio de la segunda derivada visto en en la pregunta 1.

$$Y'' = PmgL' = \frac{\partial^2 Y}{\partial L^2} = A\alpha(\alpha - 1)L^{\alpha-2}$$

   Como a pertenece al intervalo $(0, 1)$, entonces tenemos que $A\alpha(\alpha - 1) \leq 0$, Luego podemos decir que $Y'' < 0$ para todo $L > 0$. Por lo tanto es cóncava.

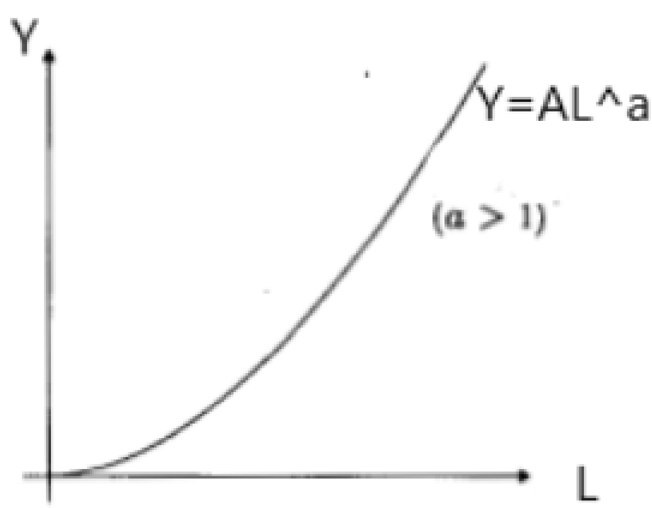


3. Como cambia su respuesta en 2.) si el $\alpha > 1$. Grafique y explique.

Respuesta. Tenemos que:

$$Y'' = PmgL' = \frac{\partial^2 Y}{\partial L^2} = A\alpha(\alpha - 1)L^{\alpha-2}$$

Dado que ahora $\alpha > 1$, tendremos que $A\alpha(\alpha - 1) \geq 0$ Luego podemos decir que $Y'' > 0$ para todo $L > 0$. Por lo tanto es convexa.



3.11. Concavidad y Convexidad III (Más Complejo)

Dado que usted está en este curso decide complejizar aún más el modelamiento que hizo en la pregunta anterior, ahora su función de producción de pan amasado está representada por:

$$Y = AL^{\alpha}K^{\beta}$$

Donde K representa su capital físico (el horno en que cocina el pan).

1. Calcule la productividad marginal de su capital Y su trabajo.
   Respuesta.
   Para obtener la productividad marginal del capital debemos derivar la función de producción una vez con respecto a K (dejando constante L), esto nos indica cuanto rinde una unidad extra de capital en el producto total
   $$PmgK = \frac{\partial Y}{\partial K} = A\beta K^{\beta-1}L^{\alpha}$$
   Idem para el trabajo.
   $$PmgL = \frac{\partial Y}{\partial L} = A\alpha L^{\alpha-1}K^{\beta}$$

2. Demuestre que para todo $K > 0$ y $L > 0$, su función de producción es cóncava si $A > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ y $\alpha + \beta \leq 1$
   Respuesta.
   Para ver la concavidad tenemos que hacer el mismo procedimiento que hicimos en la pregunta 1, para una función de dos variables, debemos obtener la matriz Hessiana y determinar el valor de su determinante: Resolvamos nuestro ejercicio:
   $$Y_K = \frac{\partial Y}{\partial K} = A\beta K^{\beta-1}L^{\alpha}, Y_L = \frac{\partial Y}{\partial L} = A\alpha L^{\alpha-1}K^{\beta}$$
   $$Y_{KK} = A\beta(\beta-1)K^{\beta-2}L^{\alpha}, Y_{LL} = A\alpha(\alpha-1)L^{\alpha-2}K^{\beta}$$
   $$Y_{KL} = A\beta\alpha K^{\beta-1}L^{\alpha-1} = Y_{LK}$$
   Calculando el determinante de la matriz:
   $$\begin{vmatrix} Y''_{LL} & Y''_{LK} \\ Y''_{KL} & Y''_{KK} \end{vmatrix} = \alpha(\alpha-1)AL^{\alpha-2}K^{\beta}\beta(\beta-1)AL^{\alpha}K^{\beta-2} - (\alpha\beta AL^{\alpha-1}K^{\beta-1})^2$$
   $$= \alpha\beta A^2L^{2\alpha-2}K^{2\beta-2}(1-(\alpha+\beta)) \geq 0$$
   Esto se cumple ya que teníamos que $\alpha + \beta < 1$ además de $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ y además:
   $$Y_{KK} = A\beta(\beta-1)K^{\beta-2}L^{\alpha} \leq 0$$
   $$Y_{LL} = A\alpha(\alpha-1)L^{\alpha-2}K^{\beta} \leq 0$$
   Por lo tanto decimos que f es cóncava.

3.12. Concavidad, convexidad y optimización

Dos empresas idénticas, A y B producen un mismo bien según la función $f(L, K)$, que es cóncava, con derivadas parciales continuas y tal que $f_K, f_L > 0 y F_{KL} > 0$. La empresa A tiene L_A unidades de trabajo y K_A unidades de capital. La empresa B tiene L_B unidades de trabajo y K_B unidades de capital. Suponga además que $L_A > L_B$ pero $K_A < K_B$. Hoy ambas empresas están coludidas, por lo que venden el bien al mismo precio p. El ente regulador, el TLC, descubrió esta estrategia y debe detenerla. Les presenta a las empresas dos opciones:

- Opción 1: El TLC escoge un número $\lambda \in (0, 1)$ y la empresa A debe entregar al Estado una porción λ de sus ganancias y la empresa B una porción $1 - \lambda$ de las suyas. El Estado luego usa los recursos para políticas públicas.

- Opción 2: El TLC escoge un número $\lambda \in (0, 1)$ y la empresa A debe entregar una porción λ de sus insumos y la empresa B una porción $1 - \lambda$ de los suyos. El Estado luego puede producir independientemente el bien según la función f, venderlo al precio p y usar los ingresos de esa venta para políticas públicas.

Para este escenario:

a) Escriba las ganancias para el Estado de la opción 1 como función de λ. ¿Qué valor de λ maximiza esas ganancias? Interprete.

Respuesta. Notar que las ganancias del Estado para el caso 1 se pueden escribir así:

$$\pi_{E,1}(\lambda) = \lambda\pi_A + (1-\lambda)\pi_B$$

Donde π_A y π_B son las ganancias de las empresas A y B, respectivamente. Como:

$$\pi_A = pf(L_A, K_A)$$

$$\pi_B = pf(L_B, K_B)$$

Entonces,

$$\pi_{E,1}(\lambda) = p[\lambda f(L_A, K_A) + (1-\lambda)f(L_B, K_B)]$$

El valor de λ que maximiza esta expresión depende de cómo se comparan $f(L_A, K_A)$ y $f(L_B, K_B)$.

Caso 1: Si $f(L_A, K_A) > f(L_B, K_B)$, entonces la empresa A gana más que la B. Esto implica que el valor λ^* que maximiza $\pi_{E,1}$ es 0, es decir, se penaliza completamente a la empresa A. Dicho de otra forma, $\pi_{E,1}$ es estrictamente decreciente en este caso (pueden mirar su derivada).

Caso 2: Si $f(L_A, K_A) < f(L_B, K_B)$ entonces la empresa B gana más que la A. Esto implica que el valor λ^* que maximiza $\pi_{E,1}$ es 1, es decir, se penaliza completamente a la empresa B. Dicho de otra forma, $\pi_{E,1}$ es estrictamente creciente en este caso (pueden mirar su derivada)

Caso 3: Si $f(L_A, K_A) = f(L_B, K_B)$ entonces la empresa A y la B ganan lo mismo. Esto implica que cualquier valor λ^* maximiza $\pi_{E,1}$, es decir, el Estado está indiferente entre penalizar a cualquier empresa en cualquier. Dicho de otra forma, $\pi_{E,1}$ es constante (pueden mirar su derivada)

b) Escriba las ganancias para el Estado de la opción 2 como función de λ. Encuentre la expresión que determina el valor de λ que maximiza estas ganancias. ¿Por qué es distinto a lo anterior?

Respuesta. En este caso, el Estado recibe de la empresa A, λL_A unidades de trabajo y λK_A unidades de capital. Asimismo, recibe de la empresa B, $(1-\lambda)L_B$ unidades de trabajo y $(1-\lambda)K_B$ unidades de capital. Como luego produce usando la misma función f y vende al precio p, entonces sus ganancias son:

$$\pi_{E,2}(\lambda) = pf(\lambda L_A + (1-\lambda)L_B, \lambda K_A + (1-\lambda)K_B)$$

Lo que se puede escribir en una notación más "de puntos" que es más ilustrativa

$$\pi_{E,2}(\lambda) = pf(\lambda(L_A, K_A) + (1-\lambda)(L_B, K_B))$$

En el punto λ^* que maximiza $\pi_{E,2}$ debe cumplirse que $\pi'_{E,2}(\lambda^*) = 0$, es decir, se cumple la CPO. Luego

$$p[(L_A - L_B)f_L + (K_A - K_B)f_K] = 0$$

De donde, como $p \neq 0$,

$$\frac{f_L}{f_K} = \frac{L_A - L_B}{K_B - K_A}$$

Y las derivadas f_K y f_L se evualúan en el punto $(\lambda L_A + (1-\lambda)L_B, \lambda K_A + (1-\lambda)K_B)$.

c) Dado un valor de λ, ¿qué opción le conviene al Estado?

Respuesta. Como la función f es cóncava, entonces para cualquier valor de λ es cierto que

$$f(\lambda(L_A, K_A) + (1-\lambda)(L_B, K_B)) \geq \lambda f(L_A, K_A) + (1-\lambda)f(L_B, K_B)$$

Multiplicando todo por p obtenemos

$$pf(\lambda(L_A, K_A) + (1-\lambda)(L_B, K_B)) \geq p[\lambda f(L_A, K_A) + (1-\lambda)f(L_B, K_B)]$$

Es decir,

$$\pi_{E,2}(\lambda) \geq \pi_{E,1}(\lambda)$$

Por lo tanto al estado siempre le conviene la opción 2

d) Si primero se fija un valor de λ y luego se decide la opción, ¿qué deciden las empresas?
Respuesta.
En términos de las utilidades conjuntas de las empresas, estas siempre prefieren la opción 1 (a menos que el estado escoja $\lambda = 0$ ó $\lambda = 1$). Esto, por el mismo argumento que el usado en el inciso c). Individualmente, como las funciones son cóncavas, no pueden tener retornos crecientes a escala (se puede probar asumiendo que $f(0,0) = 0$, si lo desea) y por lo tanto individualmente también prefieren la opción 1 para cada valor de λ.

e) Si primero se debe decidir la opción y luego el TLC fija el valor de λ óptimo ¿qué decide cada empresa? ¿están de acuerdo?
Respuesta.
La empresa que gana más prefiere escoger la opción 2 y la que gana menos prefiere la opción 1. Esto, porque la que gana más sabe que la penalizarán en un 100 % de sus ganancias si se escoge la opción 1. De manera simétrica, la que gana menos sabe que saldrá sin penalización si gana la opción 1. Si ambas ganan lo mismo entonces por el caso anterior, prefieren ambas la opción 1.

3.13. Demostraciones Concavidad y Convexidad I

Demuestre que el conjunto: $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4\}$ es convexo.

Respuesta. Como S es un círculo de radio $r = 2$ entonces gráficamente corresponde a un conjunto convexo. El problema es demostrarlo analíticamente. Para ello debemos tomar dos puntos pertenecientes a S, y mostrar que el trazo también pertenece a S:

Sea (x_0, y_0) ; (x_1, y_1) dos puntos cualesquiera que pertenecen a S, debemos demostrar que el punto:

$$t(x_0, y_0) + (1-t)(x_1, y_1) \equiv (tx_0 + (1-t)x_1; ty_0 + (1-t)y_1) \in S$$

Para ello debemos mostrar que este punto satisface el círculo de radio$r = 4$, esto es:

$$(tx_0 + (1-t)x_1)^2 + (ty_0 + (1-t)y_1)^2 < 4$$

$$(tx_0 + (1-t)x_1)^2 + (ty_0 + (1-t)y_1)^2 = t^2(x_0^2 + y_0^2) + 2t(1-t)(x_0x_1 + y_0y_1) + (1-t)^2(x_1^2 + y_1^2)(*)$$

Por otra parte, aplicando la definición de S tenemos:
$x_0^2 + y_0^2 < 4$ y $x_1^2 + y_1^2 < 4(**)$
Además si: $x^2 + y^2 < 4 \ \rightarrow \ x^2 - 2xy + y^2 < 4 - 2xy \ \rightarrow \ \frac{(x-y)^2}{2} < 2 - xy \ \rightarrow \ xy < 2 - \frac{(x-y)^2}{2} < 2$
Por lo tanto, $x_0x_1 + y_0y_1 < 4(***)$
Así entonces de $(*)$;$(**)$, $(***)$

$$(tx_0 + (1-t)x_1)^2 + (ty_0 + (1-t)y_1)^2 < 4t^2 - 8t(1-t) + 4(1-t)^2 = 4$$

Lo que demuestra que: $(tx_0 + (1-t)x_1, ty_0 + (1-t)y_1) \in S$
NOTA: Como S no es cerrado entonces S no es COMPACTO

3.14. Demostraciones Concavidad y Convexidad II

Mostrar que la función: $Q(K,L) = K^{\alpha}L^{1-\alpha}$; $0 < \alpha < 1$; $K, L \geq 0$ es cóncava, pero no estrictamente-cóncava

Respuesta. $Q_K = \alpha K^{\alpha-1}L^{1-\alpha} \;\rightarrow\; Q_{KK} = \alpha(\alpha-1)K^{\alpha-2}L^{1-\alpha}$; $Q_{KL} = \alpha(1-\alpha)K^{\alpha-1}L^{-\alpha}$
$Q_L = (1-\alpha)K^{\alpha}L^{-\alpha} \;\rightarrow\; Q_{LL} = \alpha(\alpha-1)K^{\alpha}L^{-1-\alpha}$

$$H(Q) = \begin{bmatrix} \alpha(\alpha-1)K^{\alpha-2}L^{1-\alpha} & \alpha(1-\alpha)K^{\alpha-1}L^{-\alpha} \\ \alpha(1-\alpha)K^{\alpha-1}L^{-\alpha} & \alpha(\alpha-1)K^{\alpha}L^{-1-\alpha} \end{bmatrix}$$

$D_1 = \alpha(\alpha-1)K^{\alpha-2}L^{1-\alpha} \leq 0$ ya que: $0 < \alpha < 1 \;\rightarrow\; -1 < \alpha - 1 < 0$
$D_2 = \alpha^2(\alpha-1)^2K^{-2}L^{-2\alpha}$

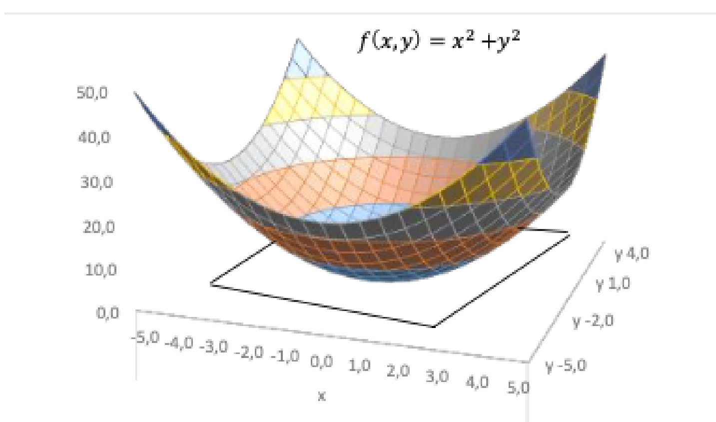
Por lo tanto, es Cóncava

NO es estrictamente cóncava, ya que, Q es homogénea de grado "1", es decir, todos los puntos de la forma (tK, tL) cumplen con la siguiente igualdad: $Q(tK, tL) = tQ(K, L)$. Así entonces Q tiene un comportamiento lineal a lo largo de rayos desde el origen y por tanto ladesigualdad en la definición de función convexa, dada por: $f(t\overrightarrow{x_1} + t\overrightarrow{x_2}) \leq tf(t\overrightarrow{x_1}) + tf(t\overrightarrow{x_2})$, se cumple la igualdad.

3.15. Demostraciones Concavidad y Convexidad III

Demostrar que la función $f(x,y) = x^2 + y^2$ es estrictamente convexa.

a) Mediante gráfico
Respuesta.



b) Mediante el Hessiano

Respuesta. $f_x = 2x \;\rightarrow\; f_{xx} = 2; f_{xy} = 0$; $f_y = 2y \;\rightarrow\; f_{yy} = 2$

Por lo tanto, el Hessiano es: $H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ Es d.p ya que: $D_1 = 2 > 0$ y $D_2 = 4 > 0 \;\; \forall x, y$ Por lo tanto, la función $f(\cdot)$ es cóncava.

c) Muestre que el plano tangente está siempre por debajo de la función, esto es, muestre que para esta función $f(\cdot)$ se cumple que $\forall \tilde{\mathbf{x}} = (x,y) \neq (x_0, y_0) = \mathbf{x}^0 \in D$, donde D es el dominio de la función, $f(\tilde{\mathbf{x}}) \geq f(\mathbf{x}^0) + \nabla f(\mathbf{x}^0) \times (\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^0)$. Explique intuitivamente por qué este resultado prueba que la función

es estrictamente convexa.
Respuesta. Para nuestro caso

$$f(x,y) = x^2 + y^2 es\ convexa \Leftrightarrow f(x,y) \geq f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0) \times (x - x_0, y - y_0)$$

$$Donde \nabla f(x_0,y_0) = (2x_0, 2y_0)(Eselgradientedelafuncionvalorizadoenelpunto(x_0,y_0))$$

Por lo tanto, realizando el producto punto y completando los cuadrados del binomio, tenemos:

$$f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0) \times (x - x_0, y - y_0) = 2x_0x - x_0^2 + 2y_0y - y_0^2 = x^2 + y^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2$$

Claramente se cumple que: $x^2 + y^2 > x^2 + y^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2$ ya que: $(x,y) \neq (x_0,y_0)$
Por lo tanto, $f(x,y) = x^2 + y^2$ es estrictamente cóncava.

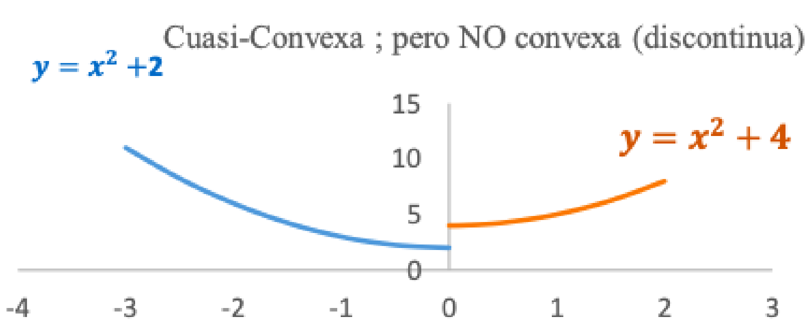
3.16. Demostraciones Concavidad y Convexidad IV

Demostrar que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x^2 + 4 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

es **cuasi-convexa**, pero **no es convexa**.

Respuesta. La gráfica de esta función corresponde a partes de dos parábolas, de la siguiente forma:



Método 1 Considerando el teorema de las funciones cuasi-convexas, debemos considerar el siguiente caso:

$$\forall \overrightarrow{x_1},\ \overrightarrow{x_2} \in D\ y\ \forall\ t \in [0,1],\ Si\ f(\overrightarrow{x_1}) \geq f(\overrightarrow{x_2})\ Entonces\ f(t\overrightarrow{x_1} + (1-t)\overrightarrow{x_2}) \leq f(\overrightarrow{x_1})$$

Debemos considerar tres casos

a) Ambos puntos son menores o iguales a "0"

b) Ambos puntos son mayores a "0"

c) Un solo punto es menor o igual a "0"

En los casos a) y b) en el dominio donde está definida cada una de las ramas por separado de la función, cada rama es convexa, por lo tanto, $f(tx_1, (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$. Ahora como se considera que $f(x_2) \leq f(x_1)$ entonces:

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_1) = f(x_1)$$

Ahora, debemos considerar el caso en que $x_1 \leq 0$; $x_2 > 0$ de tal manera que $f(x_1) \geq f(x_2)$
En tal caso debemos mostrar que también se cumple que: $f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq f(x_1) \forall t \in [0,1]$
Aquí podemos considerar dos casos:

1. $x_1 \leq tx_1 + (1-t)x_2 \leq 0 \quad \rightarrow \quad f(tx_1 + (1-t)x_2) = (tx_1 + (1-t)x_2)^2 + 2 \leq f(x_1)$
2. $0 \leq tx_1 + (1-t)x_2 \leq x_2 \quad \rightarrow \quad f(tx_1 + (1-t)x_2) = (tx_1 + (1-t)x_2)^2 + 4 \leq f(x_2) \leq f(x_1)$

Método 2

De acuerdo al teorema de las funciones cuasi-convexas, podemos analizar si el conjunto bajo nivel es convexo,para ello: Consideremos los conjuntos Bajo Nivel: $P^c = \{x \in D | f(x) \leq c\}$,
Debemos mostrar que P_c es CONVEXO $\forall$ c

- Primer caso $c < 2$ En este caso resulta que el conjunto Bajo Nivel es vacío, y como vacío es universalmente considerado CONVEXO, entonces $P^c = \phi$ es CONVEXO
- Segundo caso $2 \leq c \leq 4$ En este caso resulta que el conjunto Bajo Nivel está dado por: $P^c = \{x \in D | f(x) \leq c\} = [-\sqrt{c-2}, 0]$, el cual es un intervalo cerrado y por tanto CONVEXO.
- Tercer caso $c > 4$ En este caso resulta que el conjunto Bajo Nivel está dado por: $P^c = \{x \in D | f(x) \leq c\} = [-\sqrt{c-2}, \sqrt{c-4}]$, el cual es un intervalo cerrado y por tanto CONVEXO

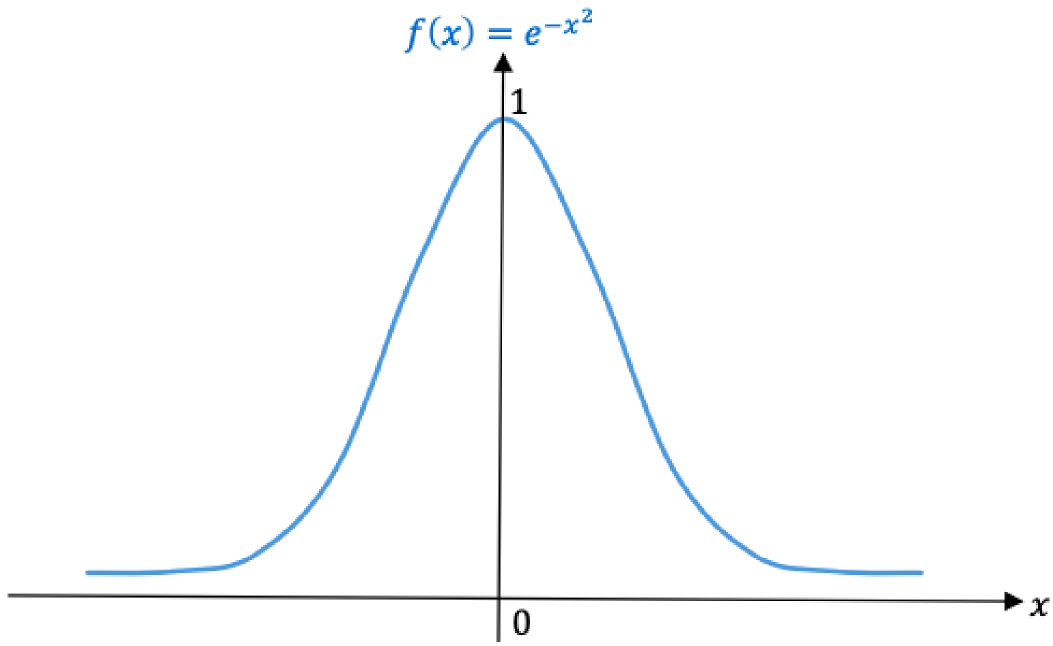
  En conclusión P^c es CONVEXO $\forall c \in \mathbb{R}$ lo que implica que la función es cuasi-convexa, sin embargo, como la función es discontinua en $x = 0$, entonces NO ES CONVEXA.

  Nota:Nótese que en este caso no podemos usar el Hessiano Orlado, ya que la función es discontinua

3.17. Demostraciones Concavidad y Convexidad VI

a) Demostrar que $f(x) = e^{-x^2}$ no es una función cóncava, pero si es una función cuasi-cóncava.

   Respuesta. La función dada es una función que NO es cóncava, ya que tiene dos puntos de inflexión en $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$



- $f'(x) = -2xe^{-x^2} \;\to\; f''(x) = 4x^2e^{-x^2} - 2e^{-x^2} = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1)$
- $f'(x) = 0 \;\to\; f''(x) < 0$ en $x = 0$ hay un Máximo con $f(0) = 1$
- $2e^{-x^2}(2x^2 - 1) = 0 \;\to\; 2x^2 - 1 = 0 \;\to\; x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$ ES UN PUNTO DE INFLEXIÓN, POR LO TANTO, LA FUNCIÓN EN ESTOS PUNTOS CAMBIA SU CONCAVIDAD $\to$ NO ES CONCAVA.

Para analizar la cuasi-concavidad usaremos propiedad del conjunto sobre nivel, es decir, debemos mostrar que para el conjunto sobre-nivel se cumple que:

$$P_c = \{x|e^{-x^2} \geq c\}\ ES\ CONVEXO\ \forall\ "c"$$

1) Considerando como primer caso con $c = 1$ vemos que, tenemos que:
   $P_c = \{x|e^{-x^2} \geq 1\} = \{x|e^{-x^2} > 1\} = \{0\}$ Como en este caso el conjunto sobre-nivel es un singletón, es decir, está conformado por un solo punto, entonces, se cumple que P_1 es convexo.
2) Considerando como segundo caso con $c > 1$ vemos que, tenemos que:
   $P_c = \{x|e^{-x^2} \geq c\} = \{x|e^{-x^2} = 1\} = \phi$ Como en este caso el conjunto sobre-nivel es ϕ, se cumple que P_c es convex0.
3) Considerando como tercer caso con $c < 1$ tenemos que:
   $P_c = \{x|e^{-x^2} \geq c\} = \{x| - x^2 \geq ln\ c\} = \{x|x^2 \leq -ln\ c\} = [0, -ln\ c]$ omo en este caso el conjunto c sobre-nivel corresponde a un intervalo, se cumple también que P_c es convexo.

b) Considerando que $f(x) = e^{-x^2}$ es una función cuasi-cóncava y que $F(u) = ln\ u$ es una función estrictamente creciente $\forall\ u$ entonces $F(f(x))$ es cuasi-cóncava.

Respuesta. Ya vimos en a) que $f(x) = e^{-x^2}$ es una función cuasi-cóncava y sabemos que $F(u) = ln\ u$ es una función estrictamente creciente $\forall\ u$ por lo tanto, debemos mostrar que $F(f(x))$ es cuasi-cóncava.

$$F(f(x)) = ln(e^{-x^2}) = -x^2\ la\ cual\ es\ una\ parabola\ concava\ \to\ es\ cuasi-concava$$

c) Considerando que $f(x) = e^{-x^2}$ es una función cuasi-cóncava y que $F(u) = \frac{1}{u}$ es una función estrictamente decreciente $\forall\ u$ entonces $F(f(x))$ es cuasi-convexa.

Respuesta. Ya vimos en a) que $f(x) = e^{-x^2}$ es una función cuasi-cóncava y sabemos que $F(u) = ln\ u$ es una función estrictamente decreciente $\forall\ u$ por lo tanto, debemos mostrar que $F(f(x))$ es cuasi-convexa.

$$F(f(x)) = \frac{1}{e^{-x^2}} = e^{x^2} = g(x)$$

$g'(x) = 2xe^{x^2}; g''(x) = 4x^2e^{x^2} + 2e^{x^2} > 0\ \forall\ x$ Por lo tanto e^{x^2} es convexa y por tanto es cuasi convexa.

3.18. Gestión Operacional

En el contexto de Gestión Operacional, en muchas ocasiones se necesita analizar el tiempo transcurrido hasta terminar una actividad, el que se puede medir usando un modelo llamado *geométrico*:

$$g(t_j, \theta) = \left(1 - \frac{1}{\theta}\right)^{t_j - 1} \frac{1}{\theta}; \qquad t_j \in \{1, 2, \ldots, +\infty\}$$

Aquí, t_j es el número de períodos transcurridos hasta completar la actividad j-ésima, y $\theta \geq 1$ es el tiempo medio de espera (medido como el número esperado de períodos para completar la actividad), el cual es desconocido.

Suponga que se tiene un conjunto de T actividades medidas independientemente, (o sea un conjunto $\{t_1, t_2, \ldots, t_T\}$ de duración de actividades individuales). Para poder estimar el valor desconocido de θ, se necesita determinar el valor de θ, llamado $\hat{\theta}$ que maximiza la función $L(\theta)$:

$$L(\theta) = g(t_1, \theta) \cdot g(t_2, \theta) \cdot \ldots \cdot g(t_T, \theta) = \prod_{j=1}^{T} g(t_j, \theta)$$

1. Desarrolle la multiplicación expresada por la función $L(\theta)$.

   Respuesta.

$$L(\theta) = \left(1 - \frac{1}{\theta}\right)^{\sum_{j=1}^{T} t_j - T} \left(\frac{1}{\theta}\right)$$

2. Plantee el problema de maximización correspondiente, y diferenciando, obtenga un punto crítico $\hat{\theta}$ para $L(\theta)$. **(Ayuda: Recuerde que el $\hat{\theta}$ que maximiza la función $L(\theta)$ es exactamente el mismo que maximiza la función $\ell(\theta) = ln[L(\theta)]$. Fíjese que en este caso maximizar $\ell(\theta)$ es mucho más fácil y rápido que maximizar $L(\theta)$)**.
   Respuesta.

$$\max_{\theta} \ell(\theta) = lnL(\theta) \left(\sum_{j=1}^{T} t_j - T\right) \cdot ln\left(1 - \frac{1}{\theta}\right) - T \cdot ln\theta$$

$$\ell'(\theta) = \frac{\sum_{j=1}^{T} t_j - T}{1 - \frac{1}{\theta}} \cdot \left(\frac{1}{\theta^2}\right) - \frac{T}{\theta} = 0$$

$$T = \left(\frac{\sum_{j=1}^{T} t_j - T}{\theta - 1}\right)$$

$$\theta - 1 = \frac{\sum_{j=1}^{T} t_j - T}{T}$$

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{j=1}^{T} t_j}{T}$$

Que es posible expresar (no es necesario) como $\hat{\theta} = \bar{t}$

3. Verifique que ese punto crítico $\hat{\theta}$ encontrado en el punto anterior sea un máximo local.

Respuesta.

$$\ell'(\theta) = \frac{(\sum_{j=1}^{T} t_j - T)}{\theta^2 - \theta} - \frac{T}{\theta}$$

$$\ell''(\theta) = -\left(\sum_{j=1}^{T} t_j - T\right)\frac{(2\theta-1)}{(\theta(\theta-1)^2} + \frac{T}{\theta^2}\Bigg|^{\theta=\hat{\theta}} = -(T(\hat{\theta}-1))\frac{(2\hat{\theta}-1}{(\hat{\theta}(\theta-\hat{}1))^2} + \frac{T}{\hat{\theta}^2}$$

$$= -T\frac{(2\hat{\theta}-1)}{\hat{\theta}^2(\hat{\theta}-1)} + \frac{T}{\hat{\theta}^2} = -\frac{T}{\hat{\theta}^2}\left(\frac{(2\hat{\theta}-1)}{(\hat{\theta}-1)} - 1\right) < 0$$

(pues $\theta \geq 1$ y $t_j > 1$; luego, cualquier promedio de t_j será al menos 1, con lo que $\frac{(2\hat{\theta}-1)}{(\hat{\theta}-1)} > 1$; por lo tanto,$\ell'(\hat{\theta}) < 0$, y así, $\hat{\theta}$ es un máximo).

4. Suponga ahora que interesa obtener un estimador de la probabilidad (desconocida) $\pi = \frac{1}{\theta}$ de que en un período cualquiera se complete la actividad j. **En otras palabras**, se desea determinar el valor de π, llamado $\hat{\pi}$, que maximiza la función $V(\pi) = L\left(\frac{1}{\pi}\right) = p(t_1, \pi) \cdot p(t_2, \pi) \cdot \ldots \cdot p(t_T, \pi) = \prod_{j=1}^{T} p(t_j, \pi)$, donde p es la función $p(t_j, \pi) = g\left(t_j, \frac{1}{\pi}\right) = (1-\pi)^{t_j - 1}\pi$; $\pi \in [0, 1]$, $t_j \in \{1, 2, \ldots, +\infty\}$. Obtenga ese $\hat{\pi}$ que maximiza la función $V(\pi)$, y verifique que es un máximo.

Respuesta. Si bien puede resolver todo de nuevo (lo que técnicamente no es errado), también es factible utilizar el dato que $V(\pi) = L\left(\frac{1}{\pi}\right) = L(\theta)$.

Es la misma función a maximizar en ambos casos, solamente que la variable de decisión ha sido cambiada por $\pi = \frac{1}{\theta} = f(\theta)$, que es una funció 1 a 1 deθ. Es decir, se puede expresar también, $\theta = f^{-1}(\pi) = \frac{1}{\pi}$.

Luego, $L(\theta) = L(f^{-1}(f(\theta))$, con lo que ambos casos son maximizadores de $\hat{\theta}$. Por lo tanto, $\hat{\theta} = f^{-1}(\widehat{f(\theta)}$, o bien, $f(\hat{\theta}) = \hat{f(\theta)}$. Por lo tanto:

$$\hat{\pi} = \frac{1}{\hat{\theta}} = \frac{T}{\sum_{j=1}^{T} t_j} = \frac{1}{\bar{t}}$$

Adicionalmente, como $\hat{\theta}$ arroja un máximo, $\hat{\pi} = \frac{1}{\hat{\theta}} = \frac{T}{\sum_{j=1}^{T} t_j}$ también lo hará.

3.19. Monopsonista discriminador

(Esta pregunta está basada en el ejemplo 2 capítulo 16.7 de Sydsaeter et al.)

Una empresa contrata dos tipos de trabajo distintos L_1 y L_2. Esta empresa usa trabajo para producir un único bien, según la función de producción:

$$Q(L_1, L_2) = L_1 + L_2$$

Los trabajadores de cada tipo reciben su salario w_i $(i = 1, 2)$ según las siguientes curvas de oferta de trabajo.

$$w_1 = a_1 + L_1$$

$$w_2 = a_2 + L_2$$

Donde $a_1, a_2 > 0$. Suponga que la empresa vende el bien a un precio p. Al respecto:

a) Escriba la función de beneficios de esta empresa.
Respuesta.
La función de beneficios o utilidad de la empresa es simplemente sus ingresos menos sus costos:

$$\pi(L_1, L_2) = pQ(L_1, L_2) - w_1L_1 - w_2L_2 = (p - a_1)L_1 + (p - a_2)L_2 - L_1^2 - L_2^2$$

En este caso los costos son los salarios que se les paga a cada uno de los trabajadores.

b) Escriba formalmente el problema de maximización de la firma.
Respuesta.
El problema de optimización es:

$$\max_{L_1, L_2} \ (p - a_1)L_1 + (p - a_2)L_2 - L_1^2 - L_2^2$$

c) Determine si el problema tiene solución única.
Respuesta.
La función es estrictamente cóncava, lo que se ve mirando su matriz Hessiana:

$$H = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Que tiene menores principales dominantes $D_1 = -2 < 0$ y $D_2 = 4 > 0$, por lo que es definida positiva,mostrando la concavidad (estricta) de π. Esto implica que π tiene único punto crítico que además esmáximo global.

d) Encuentre las cantidades óptimas de L_1 y L_2 que resuelven el problema.
Respuesta.
En el óptimo sabemos que tenemos un punto crítico, es decir, que se cumplen las CPO:

$$\frac{\partial \pi}{\partial L_1} = (p - a_1) - 2L_1 = 0$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial L_2} = (p - a_2) - 2L_2 = 0$$

Luego

$$L_1^* = \frac{p - a_1}{1}$$

$$L_2^* = \frac{p - a_2}{2}$$

Gracias al inciso anterior sabemos que este punto es el único máximo global de π.

e) Encuentre los salarios w_1 y w_2 que paga la empresa en el punto óptimo.
Respuesta.
Los salarios que paga la empresa se obtienen reemplazando los valores de L_1^* y L_2^* en las ofertas de trabajo:

$$w_1^* = \frac{p + a_1}{2}$$
$$w_2^* = \frac{p + a_2}{2}$$

f) ¿De qué parámetro(s) depende quién gana mayor salario? Interprete este(os) parámetro(s) y dé un ejemplo
Respuesta. Al observar los salarios obtenidos en el inciso anteiror, el trabajador que gana mayor salario es aquel que tiene mayor a_i (con $i = 1, 2$). Si miramos las ofertas de trabajo, ese valor corresponde al mínimo salario que se debe pagar para que el trabajador efectivamente trabaje.

Efectivamente, note que si w_i fuera menor que a_i la función de oferta de trabajo solo se satisface si L_i es negativo, lo que no tiene sentido en el contexto.

Con esa interpretación, los que ganan mayor salario en este modelo son aquellos que no están dispuestos a trabajar por menos dinero, típicamente los trabajadores más instruidos o con mejores alternativas.

Suponga ahora que la empresa no puede discriminar trabajadores, sino que hay una única oferta de trabajo

$$w = 2a + 2L$$

Y la función de producción es solo $Q(L) = 2L$.

g) Encuentre la cantidad óptima de L que resuelve el problema de la firma.
Respuesta.
Ahora la función de beneficios/utilidad de la empresa queda

$$\pi(L) = p(2L) - wL = 2(p - a)L - 2L^2$$

La función es estrictamente cóncava, porque $\pi''(L) = -2 < 0$. Luego el único punto crítico, que ocurre en $L^* = \frac{p-a}{2}$ es el único máximo global de π.

h) Compare las ganancias de la firma en ambas situaciones. ¿Cuál es mayor? Interprete
Respuesta.
En la situación inicial, los beneficios de la empresa se obtienen reemplazando $L_1 1^*$ y L_2^* en $\pi(L_1, L_2)$:

$$\pi(L_1^*, L_2^*) = \frac{(p - a_1)^2}{4} + \frac{(p - a_2)^2}{4}$$

Ahora, los beneficios se obtienen reemplazando L^* en $\pi(L)$:

$$\pi(L^*) = \frac{(p - a)^2}{2}$$

Cuál de los beneficios es más grande depende de los valores de a, a_1 y a_2. Por ejemplo, si $a_1 = a_2$, obtenemos el mismo ingreso. En general, el primer caso tiende a tener una ganancia mayor por poder discriminar (la elección es más fina, menos restringida), pero depende de los parámetros.

i) Compare la suma de las ganancias de ambos actores (empresa y trabajadores) en ambos casos. ¿En qué circunstancia son iguales? Interprete qué significa que sean iguales en ambos casos.
Respuesta.
Notar que la suma de beneficios de empresa y trabajadores no es más que los ingresos por ventas (porque las ganancias de los trabajadores son los costos de la empresa). Así, para el primer caso, los ingresos por ventas son:

$$R(L_1^*, L_2^*) = p^2 - p\frac{a_1 + a_2}{2}$$

Para el caso 2 es más simple:

$$R(L^*) = p^2 - pa$$

Estas cantidades son iguales si y solo si

$$a = \frac{a_1 + a_2}{2}$$

Si entendemos estas sumas como el bienestar del mercado en su conjunto (ganancias de las empresas + trabajadores puede ser como una medida de bienestar), entonces que sean iguales significa que la sociedad está igual tanto si la empresa puede discriminar como si no. Por el inciso anterior, podemos ver que cuando se cumple la condición $a = \frac{a_1+a_2}{2}$, las ganancias de la empresa son menores en el segundo caso que en el primero, mostrando que ahora los trabajadores reciben, en conjunto, mayores ganancias.

3.20. Monopolista discriminador con bienes sustitutos y complementos

(Esta pregunta está basada en ejercicio 2 del capítulo 11.6 de Chiang.)

Suponga que un monopolio produce dos bienes: 1 y 2. Estos bienes tienen funciones de demanda dadas por:

$$Q_1 = a - 2P_1 + P_2$$
$$Q_2 = b + 2P_1 - P_2$$

Donde $a, b > 0$ y son parámetros del problema. El monopolio debe decidir cuánto producir de cada bien para maximizar sus utilidades. Sus costos están dados por:

$$C(Q_1, Q_2) = 2Q_1^2 + Q_1Q_2 + 2Q_2^2$$

Responda la siguientes preguntas:

a) Determine si los bienes 1 y 2 son sustitutos o complementos. Explique sus resultados.
Respuesta.
En cada curva de demanda, el precio del otro bien afecta de manera positiva a la cantidad demanda, por lo que los bienes son sustitutos. "Sube el precio del otro bien y quiero consumir más de este".

Alternativamente se podría argumentar que se llega al mismo resultado viendo el signo de las derivadas de la demanda de un bien ante un cambio del precio del otro bien.

b) Encuentre los ingresos de la empresa como función de Q_1 y Q_2.
Respuesta.
Los ingresos del monopolio deben calcularse como $P_1Q_1 + P_2Q_2$, porque vende ambos productos. Para expresar los precios como función de las cantidades Q_1 y Q_2, podemos resolver el sistema de ecuaciones dado por las funciones de demanda:

$$Q_1 = a - 2P_1 + P_2$$
$$Q_2 = b + 2P_1 - P_2$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos

$$Q_1 + Q_2 = a + b - P_1$$

Luego

$$P_1 = a + b - Q_1 - Q_2$$

Para obtener P_2 podemos despejar la demanda del bien 2

$$P_2 = b + P_1 - Q_2 = a + 2b - Q_1 - 2Q_2$$

Con esto, los ingresos de la empresa son

$$R(Q_1, Q_2) = P_1Q_1 + P_2Q_2 = (a + b - Q_1 - Q_2)Q_1 + (a + 2b - Q_1 - Q_2)Q_2$$

Que después de despejar queda

$$R(Q_1, Q_2) = (a + b)Q_1 + (a + 2b)Q_2 - 2Q_1Q_2 - Q_1^2 - 2Q_2^2$$

c) Escriba la función de utilidades de la empresa y escriba formalmente el problema de optimización.
Respuesta.
Las utilidades de la empresa son sus ingresos menos sus costos, esto es:

$$\pi(Q_1, Q_2) = R(Q_1, Q_2) - C(Q_1, Q_2) = (a + b)Q_1 + (a + 2b)Q_2 - 3Q_1Q_2 - 3Q_1^2 - 4Q_2^2$$

Luego, el problema de optimización es

$$\max_{Q_1, Q_2} \quad (a + b)Q_1 + (a + 2b)Q_2 - 3Q_1Q_2 - 3Q_1^2 - 4Q_2^2$$

d) Determine si el problema tiene solución única.

Respuesta. Notar que la función objetivo es estrictamente cóncava. Su matriz hessiana es:

$$H = \begin{bmatrix} -6 & -3 \\ -3 & -8 \end{bmatrix}$$

Y sus menores principales dominantes son

$$D_1 = -6 \qquad\qquad D_2 = (-6 \times -8) - (-3 \times -3) = 48 - 9 = 39$$

Como $D_1 < 0$ y $D_2 > 0$, entonces π es estrictamente cóncava y todo punto crítico es un máximo global.Más aún, ese máximo global es único.

e) Resuelva el problema cuando $a = b = 120$.

Respuesta. Tenemos que las CPO son:

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q_1} = (a + b) - 3Q_2 - 6Q_1 = 0$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q_2} = (a + 2b) - 3Q_1 - 8Q_2 = 0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones que se forma con ambas CPO se obtiene:

$$Q_1^* = \frac{5a + 2b}{39} \qquad\qquad Q_2^* = \frac{a + 3b}{13}$$

Cuando $a = b = 120$ obtenemos $Q_1^* = \frac{7 \times 120}{390} = \frac{280}{13}$ y $Q_2^* = \frac{480}{13}$

f) ¿Cuánto cambian las cantidades óptimas de Q_1 y Q_2 cuando cambia b, cuando $b = 120$? Interprete.

Respuesta. Se nos pregunta por las derivadas de Q_1^* y Q_2^* cuando el parámetro b cambia, en el punto $b = 120$, es decir, buscamos:

$$\frac{dQ_1^*}{db}(120) \qquad y \qquad \frac{dQ_2^*}{db}(120)$$

De las expresiones para estas cantidades en el inciso anterior obtenemos:

$$\frac{dQ_1^*}{db} = \frac{2}{39} \qquad y \qquad \frac{dQ_2^*}{db} = \frac{3}{13}$$

Lo que puede interpretarse como que cuando b (la valoración máxima por el bien 2) aumenta en 1unidad, ambas cantidades óptimas aumentan, Q_1^* en $\frac{2}{39}$ y Q_2^* en $\frac{3}{13}$.

Una intuición económica más elaborada (que no se pide en este curso) dice que el monopolista, ante un aumento de la valoración por el bien 2, puede aprovechar de vender más unidades del bien 2 sin modificar el precio original. Sin embargo, como los costos son compartidos por la producción de ambos bienes, entonces es más beneficioso para el monopolista combinar ganancias produciendo más de ambos bienes.

g) Resuelva el mismo problema pero cuando los bienes son complementos, es decir los precios afectan de manera negativa al otro bien (cambie los "+" por "-" en las demandas).

Respuesta. La resolución de esta parte sigue los mismos procedimientos anteriores, por lo que solo se entregan los resultados principales. Las demandas ahora son:

$$Q_1 = a - 2P_1 - P_2$$

$$Q_2 = b - P_1 - P_2$$

Los precios de cada bien, despejados, son:

$$P_1 = a - b + Q_2 - Q_1$$

$$P_2 = 2b - a + Q_1 - 2Q_2$$

Luego, los ingresos son:

$$R(Q_1, Q_2) = (a-b)Q_1 + (2b-a)Q_2 + 2Q_1Q_2 - Q_1^2 - 2Q_2^2$$

Y, por lo tanto, las utilidades son:

$$\pi(Q_1, Q_2) = (a-b)Q_1 + (2b-a)Q_2 + Q_1Q_2 - 3Q_1^2 - 4Q_2^2$$

La función sigue siendo estrictamente cóncava, con matriz Hessiana:

$$H = \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ 1 & -8 \end{bmatrix}$$

Que tiene $D_1 = -3 < 0$ y $_2 = 47 > 0$, es decir, es definida negativa. Luego, el sistema de CPO es:

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q_1} = (a-b) + Q_2 - 6Q_1 = 0$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q_2} = (2b-a) + Q_1 - 8Q_2 = 0$$

El cual tiene solución:

$$Q_1^* = \frac{7a-6b}{47} \qquad y \qquad Q_2^* = \frac{11b-5a}{47}$$

Observar que estas soluciones solo tienen sentido si:

$$\frac{6b}{7} \leq a \leq \frac{11b}{5}$$

En caso contrario, alguna de las cantidades óptimas serían negativas y eso no tiene sentido en el contexto del problema. Para resolver el problema en esos casos deberíamos recurrir a herramientas que veremos en el capítulo 5.

Para la parte final,

$$\frac{dQ_1^*}{db} = -\frac{6}{39} \qquad y \qquad \frac{dQ_2^*}{db} = \frac{11}{47}$$

En este caso, cuando la valoración por un bien aumenta, la producción de ese bien aumenta pero la de su complemento no. En específico, si b aumenta en una unidad, entonces Q_1^* cae en $\frac{6}{39}$ y Q_2^* aumenta en $\frac{11}{47}$.

La razón económica (que no es parte del curso) es que como los bienes ahora no compiten por consumirse, para el monopolista es mejor aprovechar íntegramente el aumento de valoración del bien 2 en su producción, incluso disminuyendo la producción del 1 para abaratar costos.

3.21. Maximización de ganancia y uso de factores

Una empresa competitiva produce utilizando una tecnología descrita mediante la siguiente función de producción:

$$f(L, K) = L^{1/3}K^{1/3}$$

La empresa paga un precio w por cada unidad de L y precio r por cada unidad de K, y vende cada unidad de producto al precio p. El objetivo de la empresa es maximizar la ganancia.

1. (4 puntos) Verifique si la función es homogénea (indicando en qué grado en caso afirmativo) y obtenga la tasa marginal de sustitución TMS_{LK}.
2. (7 puntos) Plantee el problema de optimización y verifique si se cumple alguna condición de suficiencia que permita anticipar que el punto crítico será un máximo local, máximo global, o máximo global único. Fundamente su respuesta.
3. (10 puntos) Encuentre el nivel de L y K óptimo para cada vector de precios (w, r, p).
4. (6 puntos) Suponga que aumenta p (manteniendo todo lo demás constante), ¿por qué cree usted que aumentan $L^*(w, r, p)$ y $K^*(w, r, p)$? ¿y por qué $L^*(w, r, p)/K^*(w, r, p)$ se mantiene constante? Relacione con su respuesta a la pregunta 1.
5. (8 puntos) $L^*(w, r, p)$ es la demanda por trabajo. Obtenga la elasticidad de esta demanda respecto del precio del trabajo, w. Si w aumenta en un 1 %, ¿cuánto cambia la cantidad contratada de trabajo?

Respuesta.

1. Homogénea de grado $2/3$, con $TMS_{LK} = K/L$.
2. El problema es de maximización de ganancia:

   $$\max_{L,K\in\mathbb{R}^2_+} \pi = pL^{1/3}K^{1/3} - wL - rK$$

   La función π es estrictamente cóncava porque f lo es. Se puede verificar a partir de la matriz de segundas derivadas, o bien argumentando que función Cobb-Douglas con grado de homogeneidad menor que 1 es estrictamente cóncava. Luego, será un máximo global único.
3. Las CPO son

   $$\frac{\partial \pi}{\partial L} = pL^{-2/3}K^{1/3}/3 - w = 0$$
   $$\frac{\partial \pi}{\partial K} = pL^{1/3}K^{-2/3}/3 - r = 0$$

Obtenemos entonces que el valor del producto marginal de cada factor se iguala a su costo unitario en el óptimo, lo que as su vez indica que la TMS_{LK} se iguala al precio relativo w/r. Resolviendo encontramos las demandas

$$L^*(w,r,p) = p^3/27rw^2$$
$$K^*(w,r,p) = p^3/27r^2w$$

4. Aumentan tanto el trabajo como el capital contratado porque el valor d ela productividad marginal crece: es más valiosa cada unidad adicional por lo que se contratan más insumos para producir más unidades. La razón $L^*(w,r,p)/K^*(w,r,p)$ es igual a r/w. K y L aumentan en la misma proporción porque no cambia el precio relativo, y al ser homogénea (y homotética) la función, la tangencia se obtiene en la misma razón L/K.

5. La elasticidad es $\frac{\partial \ln L^*}{\partial \ln w} = -2$. Luego, si w aumenta en 1 % la cantidad contratada de trabajo cae un 2 %.

3.22. Pregunta Corta

Considera la siguiente función:

$$f(x,y) = (x-2)e^{(x^2-x)}e^{y^2}$$

1. Encuentre el (los) punto(s) crítico(s) de $f(x,y)$.
Respuesta.
Para encontrar los puntos críticos debemos obtener las CPOs e igualarlas a cero:

$$f_x = (e^{x^2-x}e^{y^2})(2x^2-5x+3) = 0$$

$$f_y = (x-2)e^{x^2-x}2ye^{y^2} = 0$$

Luego, igualamos de la primera CPO obtenemos que $x = 1$ ó $x = 3/2$, luego reemplzamos en la segunda CPO para cada x, obtenemos los y. Los puntos encontrados serán: $(1,0)$ $(\frac{3}{2},0)$

2. Clasifique los puntos obtenidos en máximos/mínimos locales/globales o puntos sillas según corresponda.

Respuesta.
Para esto se debe tener la matriz Hessiana (H) o usar identicamente los criterios vistos en clases

$$f_{xx} = (e^{x^2-x}e^{y^2})(2x-1)(2x^2-5x+3) + (e^{x^2-x}e^{y^2})(4x-5)$$
$$f_{yy} = ((x-2)e^{x^2-x})(2e^{y^2} + 4y^2e^y)$$
$$f_{xy} = f_{yx} = e^{x^2-x}(2x^2-5x+3)e^{y^2}2y$$

Luego el determinante de la matriz sera $Det(H) = f_{xx} * f_{yy} - f_{xy}^2$
Antes de comenzar note que $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 0$, cuando $y = 0$
Además, note que cuando $y = 0$

$$f_{yy} = 2(x-2)e^{x^2-x}$$
$$f_{xx} = (e^{x^2-x})(2x-1)(2x^2-5x+3) + (e^{x^2-x})(4x-5)$$

Evaluamos los puntos en las CSO obtenidas:
Para $(1,0)$:

$$f_{xx} = -1 < 0$$
$$f_{yy} = -2$$

$$Det(H) = f_{xx}(1,0) * f_{yy}(1,0) = -1 * (-2) = 2 > 0$$

Por lo tanto el punto es máximo local

Para $(3/2, 0)$:

$$f_{xx} = e^{3/4} > 0$$
$$f_{yy} = -e^{3/4}$$
$$Det(H) = f_{xx}(3/2,0) * f_{yy}(3/2,0) = e^{3/4} * (-e^{3/4}) < 0$$

Por lo tanto el punto es silla.

3.23. Pregunta Larga

Una empresa tiene disponible varios proyectos, unos de plazo más corto y otros de plazo más largo. Además, la empresa puede elegir cuanto esfuerzo $y \in \mathbb{R}$ poner en administrar el proyecto que elige. Cada proyecto es representado por una variable $x \in \mathbb{R}$, y el VPN (valor presente neto) del proyecto x es una función de x e y y es dado por:

$$VPN = f(x,y) = \frac{x+y}{1+r} + \frac{100 - x^2 + y}{(1+r)^2}$$

donde $r > 0$ es la tasa de descuento (que está dada), y los numeradores de cada fracción representan los flujos de caja de un proyecto x en fechas 1 y 2, para un dado nivel de esfuerzo y. Es decir, proyectos con x más alto son proyectos de corto plazo, pues pagan un dividendo mayor en el período 1 y un dividendo menor en el período 2. De la misma manera, cuanto mayor la variable esfuerzo (y), mayor los flujos de caja del proyecto en las dos fechas. Sin embargo, el esfuerzo involucra un costo de utilidad dado por la siguiente función:

$$c(y) = 2y^2$$

El problema de la empresa es elegir x e y para maximizar el VPN neto del costo del esfuerzo, es decir, la empresa maximiza la siguiente función:

$$h(x,y) = \frac{x+y}{1+r} + \frac{100 - x^2 + y}{(1+r)^2} - 2y^2$$

1. La función $h(x,y)$ es estrictamente cóncava o estrictamente convexa? Justifique su respuesta evaluando los menores principales dominantes de la matriz hessiana.
   Respuesta.

   La matriz hessiana es dada por
   $$\begin{bmatrix} -\frac{2}{(1+r)^2} & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

   Luego, los menores principales dominantes de orden par son > 0 y los orden ímpar son < 0. Esto implica que la función h es estrictamente cóncava.

2. Encuentre el (los) punto(s) crítico(s) de la función $h(x,y)$.
   Respuesta.

   Las condiciones de primera orden son:

   $$\frac{1}{1+r} - \frac{2x}{(1+r)^2} = 0$$
   $$\frac{1}{1+r} + \frac{1}{(1+r)^2} - 4y = 0$$

Por lo tanto, el único punto crítico es dado por

$$x = \frac{1+r}{2}$$

$$y = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{1+r}\right)$$

3. ¿Podemos garantizar que el punto crítico que encontraste en el ítem anterior es un máximo global? Justifique su respuesta.

   Respuesta. Si, pues la función objetivo es estrictamente cóncava (las condiciones de primera orden son suficientes para un máximo interior).

4. ¿Qué pasa con el plazo (x) óptimo de la empresa cuando r aumenta? Intérprete.

   Respuesta. Cuando r aumenta, el x óptimo aumenta. Intuitivamente, si la empresa descuenta más el futuro, va elegir proyectos de plazo más corto, que aumenten sus ingresos en el corto plazo.

3.24. El Problema del Emprendedor

Juan tiene un trabajo asalariado flexible: puede elegir la cantidad Z de horas a trabajar cada día y recibe un pago wZ. Además él tiene una Pyme a la que dedica parte de su tiempo: si le dedica L horas de trabajo al día y arrienda K unidades de maquinarias su Pyme puede producir

$$f(L, K) = 2(\sqrt{L} + \sqrt{K})$$

unidades que se venden a un precio p. Como debe pagar r por cada unidad de maquinaria, gasta rK.

En total Juan dispone de T horas para el trabajo al día, por lo que $L + Z = T$.

1. Suponga que el objetivo de Juan es maximizar su ingreso neto total (incluyendo ingreso por su trabajo formal y por su trabajo en la Pyme, neto de gasto en arriendo de maquinarias). Escriba el problema de optimización de Juan e indique si puede asegurar que tendrá una solución única.

2. Encuentre la cantidad óptima de trabajo y maquinarias que Juan usa en la Pyme, $L(w, r, p)$ y $K(w, r, p)$. Muestre que Juan dedica menos tiempo de trabajo a su Pyme si w es más alto.

3. Explique por qué, aún cuando Juan no tenga que "pagar" por las unidades de L que usa trabajando en su Pyme, ellas sí tienen un costo de w por unidad (costo alternativo). Muestre en qué parte de sus respuestas a las preguntas anteriores se evidencia este costo.

4. Verifique si la demanda por maquinarias $K(w, r, p)$ es homogénea. ¿Cómo cambia entonces la decisión de contratación de K si cambian todos los precios en la misma proporción?, ¿cree usted que este resultado es válido solo para algunas funciones de producción particulares o que se cumple siempre? Justifique su respuesta. (**Ayuda:** Puede usar la condición de primer orden para justificar).

Respuesta.

1. El problema es

$$\max_{(L,K)\in\mathbf{R}^2_+} \quad \pi = p2(\sqrt{L} + \sqrt{K}) - rK + w(T - L)$$

donde $\pi_L = \frac{p}{\sqrt{L}} - w,\ \pi_K = \frac{p}{\sqrt{K}} - r,\ \pi_{LL} = -\frac{p}{2L^{3/2}},\ \pi_{KK} = -\frac{p}{2K^{3/2}},\ \pi_{LK} = \pi_{KL} = 0$

Luego, la matriz de segundas derivadas es definida negativa, o lo que es equivalente, la función objetivo es estrictamente cóncava, por lo que hay un máximo global único.

2. El punto crítico satisface las condiciones de primer orden $\pi_L = \frac{p}{\sqrt{L}} - w = 0,\ \pi_K = \frac{p}{\sqrt{K}} - r = 0$, por lo que se obtiene

$$L^* = \left(\frac{p}{w}\right)^2$$

$$K^* = \left(\frac{p}{r}\right)^2$$

Así, a mayor w menor es el tiempo que dedica a la Pyme.

3. La función π muestra que el ingreso neto cae en wL al dejar de dedicar L unidades al trabajo asalariado para dedicarlo a su Pyme. Y eso a su ve implica que a mayor w, menos trabajo dedica a la Pyme.

4. Lo es, y es general: si cambian todos los precios en la misma proporción no cambia la decisión de contratación. La condición de primer orden indica que se contrata del factor hasta igualar el costo por unidad r con su beneficio, que corresponde a p por la productividad marginal del factor. Si cambian r y p en la misma proporción, no se afecta dicha igualdad por lo que no cambia la decisión de contratación.

3.25. Minimización de Costos en Hiperinflación

F.Y. Edgeworth (1888) propuso un marco analítico para modelar la demanda de billetes frente a una inflación muy alta, que fue formalizado por Ken Arrow, Ted Harris y Jacob Marschak (1951).

En un banco funcionando en un contexto de hiperinflación, los billetes son necesarios para poder realizar transacciones, pero aquellos billetes que no se utilicen al final del día se deprecian por efecto inflacionario. Entonces, un banquero debe decidir los saldos de circulante, B, que debe mantener en stock en caja para poder equilibrar el efecto de (1) los beneficios perdidos por no poder realizar todas las transacciones que se quisiera llevar a cabo que se imposibilitan cuando se acaban los billetes, ψ, con (2) el costo de tener billetes sobrantes al final del día que pierden su valor por efecto inflación, π.

La demanda por billetes para transacciones bancarias es definida por la variable incierta $Y \in [0, D]$, tal que $\int_0^D g(Y)dY = 1$, donde $g(Y) \geq 0\ \forall\ Y \in [0, D]$.

De esa forma, el **costo** de tener B billetes para el banco viene dado por la función $C(B)$:

$$C(B) = \gamma \cdot B + \pi \int_0^B (B - Y) \cdot g(Y)dY + \psi \int_B^D (Y - B) \cdot g(Y)dY$$

donde,

$$\psi > \gamma > 0, \pi > 0, D > 0$$

son parámetros positivos conocidos. Se pide:

a) Verifique que

$$dC/dB = \gamma + \pi \int_0^B g(Y)dY - \psi \int_B^D g(Y)dY$$

b) Verifique que $d^2C/dB^2 = (\psi + \pi) \cdot g(B)$. (**Ayuda**: Fíjese que $\int_0^B g(Y)dY + \int_B^D g(Y)dY = \int_0^D g(Y)dY$)

c) Determine la concavidad o convexidad de la función $C(B)$.

d) Sea $G(B^*) = \int_0^{B^*} g(Y)\ dY$, donde B^* es el mínimo de la función $C(B)$. Use las condiciones de primer orden para encontrar $G(B^*)$, que se interpreta como la probabilidad de que la demanda por billetes Y no supere a B^*, y que por ende, la cantidad de billetes disponibles alcance para cubrir la demanda. Use esa ecuación para encontrar el valor de $G(B^*)$ cuando B^* es el óptimo.

Respuesta.

a) $C'(B) = \gamma + \pi[(B-B)g(B)\cdot 1 - (B-0)g(0)\cdot 0 + \int_0^B 1\cdot g(Y)dY]$
$+\psi[(D-B)g(D)\cdot 0 - (B-B)g(B)\cdot(-1) + \int_B^D(-1)\cdot g(Y)dY] =$
$= \gamma + \pi\cdot[0 - 0 + \int_0^B g(Y)dY] + \psi\cdot[0 - 0 - \int_B^D g(Y)dY] =$
$= \gamma + \pi\int_0^B g(Y)dY - \psi\int_B^D g(Y)dY, q.e.d.$

b) Primero, es útil darse cuenta que como $\int_0^D g(Y)dY = 1$, y como también $\int_0^B g(Y)dY + \int_B^D g(Y)dY = \int_0^D g(Y)dY$, entonces $\int_B^D g(Y)dY = 1 - \int_0^B g(Y)dY$. Reordenando la respuesta de la parte (a), $C'(B) = \gamma + \pi\int_0^B g(Y)dY - \psi\int_B^D g(Y)dY = \gamma + [\pi+\psi]\cdot\int_0^B g(Y)dY - \psi$. Así:

$$C''(B) = 0 + (\psi+\pi)[g(B)\cdot 1 - g(0)\cdot 0 + \int_0^B 0dY] - 0 = (\psi+\pi)\cdot g(B), q.e.d.$$

c) Para evaluar la concavidad o convexidad, basta con argumentar que la segunda derivada es (débilmente) positiva (podría ser cero) para cualquier B en el dominio de Y, y por ende, que la función es (no estrictamente) convexa.

d) A partir de la primera derivada, la condición de primer orden viene dada por:

$$C'(B^*) = \gamma + \pi\int_0^{B^*} g(Y)dY - \psi\int_{B^*}^D g(Y)dY = \gamma + [\pi+\psi]\cdot\int_0^{B^*} g(Y)dY - \psi = 0$$

Como el único término que depende de B^* es la integral, se puede despejar e igualar a cero. Por lo tanto:

$$[\pi+\psi]\cdot\int_0^{B^*} g(Y)dY = \psi - \gamma$$

$$\int_0^{B^*} g(Y)dY = \frac{\psi-\gamma}{\pi+\psi}$$

Y a estas alturas, es trivial ver que lo que está a mano izquierda es precisamente $G(B^*)$. Así:

$$G(B^*) = \frac{\psi-\gamma}{\pi+\psi}$$

3.26. Minimizando costos de transporte

Una fábrica de chocolates tienes dos nuevos clientes y debe decidir donde instalar su nueva planta que tiene cómo único objetivo producir chocolates para estos dos nuevos clientes. La localización de los clientes y de la nueva planta son representadas por vectores $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. El primer cliente está localizado en el punto $(2,2)$, mientras el segundo cliente está localizado en el punto $(-2,-2)$. El gasto de transporte por cada unidad de chocolate llevada de un punto $A=(x_0,y_0)$ a un punto $B=(x_1,y_1)$ es dado por:

$$g(A,B) = (x_1-x_0)^2 + (y_1-y_0)^2$$

En cada mes, la fábrica de chocolates vende 10 unidades de chocolates al primer cliente y 20 unidades al segundo cliente, por lo que debe pagar el transporte de llevar estos chocolates desde la nueva planta a cada cliente. La empresa elige una localización (x_P,y_P) para instalar su nueva planta de manera a minimizar su gasto mensual en transporte.

1. (7.5 puntos) Escriba la función objetivo de la empresa.

Respuesta. La función objetivo es dada por:

$$f(x_P, y_P) \equiv \underbrace{10[(x_P-2)^2+(y_P-2)^2]}_{\text{Costo de transporte cliente 1}} + \underbrace{20[(x_P+2)^2+(y_P+2)^2]}_{\text{Costo de transporte cliente 2}}$$

[Ayudante: Ojo que $(x-y)^2 = (y-x)^2$ (es posible que muchos alumnos inviertan el orden de x_P y 2, igual para y_P, y está ok.]

2. (7.5 puntos) ¿La función objetivo es convexa? Justifique.

Respuesta. La matriz hessiana es dada por

$$Hf(x_P, y_P) = \begin{bmatrix} 60 & 0 \\ 0 & 60 \end{bmatrix}$$

El menor principal dominante de orden es 60, y el menor principal dominante orden 2 es $60 \times 60 = 360$. Por lo tanto, la función es estrictamente convexa (y luego también es convexa).

3. (7.5 puntos) Encuentre él (los) punto(s) (x_P, y_P) que satisfacen las condiciones de primer orden del problema de la fábrica de chocolates.
Respuesta. Las condiciones de primer orden son:

$$20\,(x_P-2)+40\,(x_P+2)=0$$
$$20\,(y_P-2)+40\,(y_P+2)=0$$

Y, por lo tanto, los puntos que satisfacen las CPO son $x_P = y_P = -4/6$.

4. (7.5 puntos) Las condiciones de primer orden son suficientes para un mínimo global? Justifique.

Respuesta. Si, pues la función objetivo es convexa.

3.27. Cuasi-Concavidad y Cuasi-Convexidad I

Sea $\theta : \mathbb{R}^2_{++} \to \mathbb{R}$ tal que $\theta(x,y) = ye^{-x}$. Verifique si para este dominio la función θ es quasicóncava utilizando la condición del Hessiano Orlado.
Respuesta.
El Hessiano Orlado es:

$$\tilde{H}(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & -ye^{-x} & e^{-x} \\ -ye^{-x} & ye^{-x} & -e^{-x} \\ e^{-x} & -e^{-x} & 0 \end{bmatrix}$$

Tenemos que $D_2(x,y) = -y^2e^{-2x} \leq 0$ y $D_3(x,y) = ye^{-3x} + e^{-x}(ye^{-2x} - ye^{-2x}) = ye^{-3x} \geq 0$. Ambos determinantes son cero si $y = 0$. Aunque el Hessiano Orlado no es inconsistente con que la función sea quasicóncava, tampoco establece que sea quasicóncava tampoco. No obstante, la verificación sí demuestra que la función es quasicóncava en el dominio relevante de la función (pues $\mathbb{R}^2_{++}$ implica que $x > 0$; $y > 0$ de manera estricta).

3.28. Elasticidades y Concavidad

Considere la siguiente modelo de función de producción (J. W. Kendricks y R. Sato) en una cierta empresa en términos del capital K invertido y el trabajo L, según la fórmula

$$P = f(K,L) = \frac{A_0KL}{(aL^c + bK^c)^{1/c}}$$

donde A_0, a, b y c son constantes positivas. Las derivadas parciales de P son

$$\frac{\partial P}{\partial K} = \frac{A_0 a L^{c+1}}{(aL^c + bK^c)^{1+1/c}}\ , \qquad \frac{\partial P}{\partial L} = \frac{A_0 b K^{c+1}}{(aL^c + bK^c)^{1+1/c}}$$

1. Calcule las elasticidades parciales entre la producción y el capital $\varepsilon_{P,K}$, y entre la producción y el trabajo $\varepsilon_{P,L}$.

   Respuesta.

   - La elasticidad $\varepsilon_{P,K}$ se calcula con la siguiente fórmula
     $$\varepsilon_{P,K} = \frac{\partial P}{\partial K}\cdot\frac{K}{P}$$
     Remplazando la derivada parcial y la definición de P se obtiene,
     $$\varepsilon_{P,K} = \frac{A_0 a L^{c+1}}{(aL^c + bK^c)^{1+1/c}}\cdot K\cdot\frac{(aL^c+bK^c)^{1/c}}{A_0KL} = \frac{aL^c}{aL^c+bK^c}$$
   - Similarmente,
     $$\varepsilon_{P,L} = \frac{\partial P}{\partial L}\cdot\frac{L}{P}$$
     Remplazando con los datos de enunciado, tenemos
     $$\varepsilon_{P,L} = \frac{A_0 b K^{c+1}}{(aL^c + bK^c)^{1+1/c}}\cdot L\cdot\frac{(aL^c+bK^c)^{1/c}}{A_0KL} = \frac{bK^c}{aL^c+bK^c}$$

2. Encuentre una expresión para la tasa marginal de sustitución entre capital y trabajo, $TMS_{K,L}$.

   Respuesta.

   - Por definición de TMS, y Teorema de la función implícita,
     $$TMS_{K,L} = -\frac{dK}{dL} = \frac{\partial P/\partial L}{\partial P/\partial K}$$
     Entonces podemos remplazar utilizando las derivadas del enunciado
     $$TMS_{K,L} = \frac{\frac{A_0bK^{c+1}}{(aL^c+bK^c)^{1+1/c}}}{\frac{A_0aL^{c+1}}{(aL^c+bK^c)^{1+1/c}}} = \frac{b}{a}\left(\frac{K}{L}\right)^{c+1}$$
   - (Corregir similarmente si se calculó $-dL/dK$ en su lugar)

3. Encontrar la elasticidad de sustitución entre capital y trabajo, $\sigma_{K,L}$. Luego interprete esta cantidad para $K = 10$, $L = 10$, $a = b = 1$ y $c = 2$.

   Respuesta.

   - Para calcular $\sigma_{K,L}$,
     $$\sigma_{K,L} = \varepsilon_{K/L,TMS_{K,L}} = \frac{TMS_{K,L}}{K/L}\cdot\frac{\partial(K/L)}{\partial TMS_{K,L}}$$
     podemos despejar la razón K/L en términos de la TMS a partir de la expresión obtenida en la parte (2)
     $$\frac{K}{L} = \left(\frac{a}{b}TMS\right)^{\frac{1}{c+1}}$$

- Derivando con respecto a TMS, obtenemos

$$\frac{\partial(K/L)}{\partial TMS} = \frac{a}{b(c+1)}\left(\frac{a}{b}TMS\right)^{\frac{1}{c+1}-1}$$

- Ahora, completamos $\sigma_{K,L}$ con los demás términos

$$\sigma_{K,L} = \frac{TMS}{\left(\frac{a}{b}TMS\right)^{\frac{1}{c+1}}} \cdot \frac{a}{b(c+1)}\left(\frac{a}{b}TMS\right)^{\frac{1}{c+1}-1} = \frac{1}{c+1}$$

- Con los datos señalados, $\sigma_{K,L} = \frac{1}{3}$. Esto significa que al cambiar de la combinación $(10, 10)$ a otra dentro de su misma curva de nivel, de tal manera que la TMS suba en un $1\,\%$, entonces la razón entre K y L habrá cambiado en un $0.33\,\%$ aproximadamente.

4. ¿La función $f(K, L)$ es cóncava? Justifique su respuesta.

Respuesta.

- Para verificar si una función es cóncava, podemos utilizar el criterio de la matriz Hessiana y verificar si es negativa semi-definida para todo (K, L). Para ello calcularemos las segundas derivadas, a partir de las primeras derivadas del enunciado.

$$\frac{\partial^2 P}{\partial K^2} = \left(-1 - \frac{1}{c}\right)\frac{A_0 a L^{c+1}}{(aL^c + bK^c)^{2+1/c}} \cdot bcK^{c-1} = -\frac{A_0 ab(c+1)K^{c-1}L^{c+1}}{(aL^c + bK^c)^{2+1/c}}$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial L^2} = \left(-1 - \frac{1}{c}\right)\frac{A_0 b K^{c+1}}{(aL^c + bK^c)^{2+1/c}} \cdot acL^{c-1} = -\frac{A_0 ab(c+1)K^{c+1}L^{c-1}}{(aL^c + bK^c)^{2+1/c}}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 P}{\partial K \partial L} &= \frac{A_0 a(c+1)L^c(aL^c + bK^c) - A_0 a L^{c+1} \cdot \frac{c+1}{c} \cdot acL^{c-1}}{(aL^c + bK^c)^{2+1/c}}\\ &= \frac{A_0 a^2(c+1)L^{2c} + A_0 ab(c+1)K^cL^c - A_0 a^2(c+1)L^{2c}}{(aL^c + bK^c)^{2+1/c}}\\ &= \frac{A_0 ab(c+1)K^cL^c}{(aL^c + bK^c)^{2+1/c}}\end{aligned}$$

- Las condiciones para que una f sea cóncava son $P_{KK} \leq 0$ y $P_{KK}P_{LL} - P_{KL}^2 \geq 0$ (determinante Hessiano). Podemos ver inmediatamente que $P_{KK} \leq 0$, pues todos sus factores son positivos salvo el signo negativo. Luego,

$$P_{KK}P_{LL} - P_{KL}^2 = \frac{A_0^2 a^2 b^2 (c+1)^2 K^{2c} L^{2c}}{(aL^c + bK^c)^{4+2/c}} - \frac{A_0^2 a^2 b^2 (c+1)^2 K^{2c} L^{2c}}{(aL^c + bK^c)^{4+2/c}} = 0$$

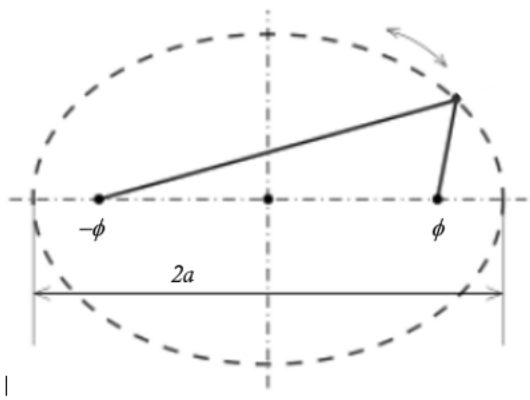
Entonces, la matriz Hessiana Hf es negativa semi-definida, y por lo tanto $f(K, L)$ es una función cóncava.

3.29. Cuasi-Concavidad y Cuasi-Convexidad II

Considere la siguiente función $g(z_1, z_2) = \sqrt{(z_1 + \phi)^2 + z_2^2} + \sqrt{(z_1 - \phi)^2 + z_2^2}, \phi \in \mathbb{R}$. Verique si la función $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es quasi-convexa.

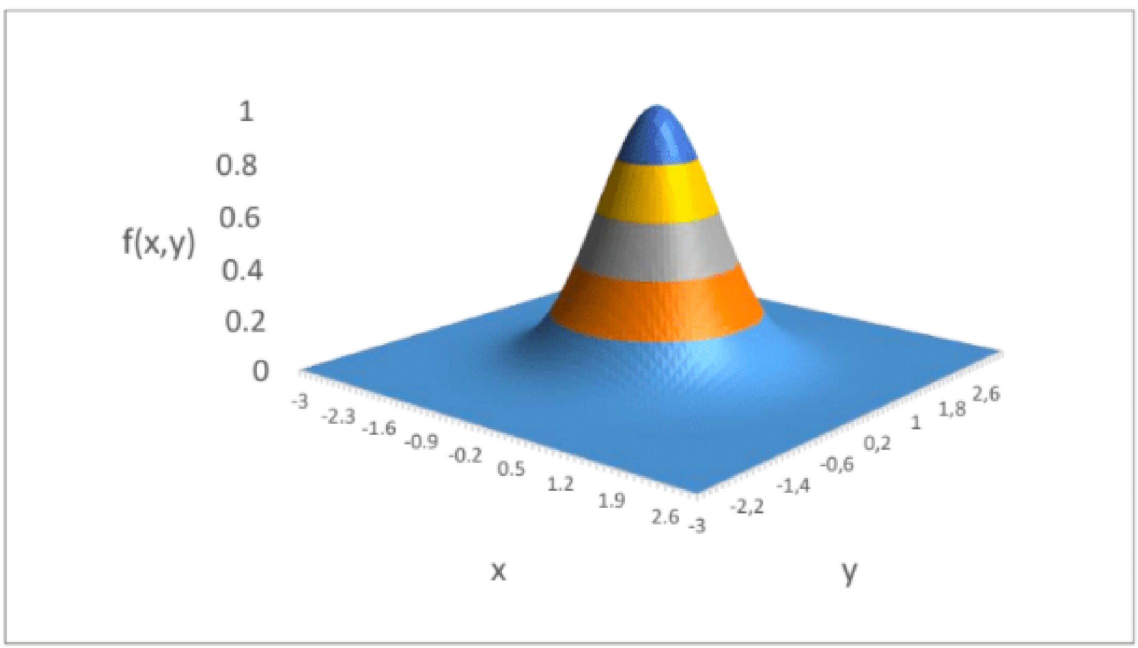
Respuesta.

La función corresponde a una elipse centrada en $(0,0)$ con focos $(\pm\phi, 0)$ y con curvas de nivel dadas por el ancho de la elipse, $2a$. De ese modo, se puede ver que el conjunto bajo contorno (*lower contour set*) $S^{\leq} = \left\{(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 \mid g(z_1, z_2) \leq k\right\}$, el interior de la elipse, es convexo, con $k \geq 0$ por ser la suma de dos raíces cuadradas positivas (k representa el $2a$ de una elipse tradicional). Por lo tanto $g(z_1, z_2)$ es quasi-convexa.



3.30. Cuasi-Concavidad y Cuasi-Convexidad III

Demuestre que la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$ y cuya gráfica es la de la figura, **NO** es una función cóncava, pero **SÍ** es una función cuasi-cóncava.



Respuesta. Tenemos que:

- $f_x = -2xe^{-(x^2+y^2)}$
- $f_y = -2ye^{-(x^2+y^2)}$

- $f_{xx} = 4x^2e^{-(x^2+y^2)} - 2e^{-(x^2+y^2)} = 2e^{-(x^2+y^2)}(2x^2-1)$
- $f_{yy} = 4y^2e^{-(x^2+y^2)} - 2e^{-(x^2+y^2)} = 2e^{-(x^2+y^2)}(2y^2-1)$
- $f_{xy} = f_{yx} = 4xye^{-(x^2+y^2)}$

Luego el Hessiano orlado de f es:

$$\tilde{H}_f = \begin{bmatrix} 0 & -2xe^{-(x^2+y^2)} & -2ye^{-(x^2+y^2)} \\ -2xe^{-(x^2+y^2)} & 2e^{-(x^2+y^2)}(2x^2-1) & 4xye^{-(x^2+y^2)} \\ -2ye^{-(x^2+y^2)} & 4xye^{-(x^2+y^2)} & 2e^{-(x^2+y^2)}(2y^2-1) \end{bmatrix}$$

Podemos "factorizar"

$$\tilde{H}_f = e^{-(x^2+y^2)} \begin{bmatrix} 0 & -2x & -2y \\ -2x & 2(2x^2-1) & 4xy \\ -2y & 4xy & 2(2y^2-1) \end{bmatrix}$$

Y, considerando que ese término es positivo, podemos obviarlo al momento de calcular los menores principales dominantes del Hessiano orlado. Partimos con el de orden 2:

$$D_2 = \begin{vmatrix} 0 & -2x \\ -2x & 2(2x^2-1) \end{vmatrix} = -4x^2 < 0 \quad (*)$$

Y el de orden 3:

$$D_3 = \begin{vmatrix} 0 & -2x & -2y \\ -2x & 2(2x^2-1) & 4xy \\ -2y & 4xy & 2(2y^2-1) \end{vmatrix} = 2x \begin{vmatrix} -2x & 4xy \\ -2y & 2(2y^2-1) \end{vmatrix} - 2y \begin{vmatrix} -2x & 2(2x^2-1) \\ -2y & 4xy \end{vmatrix}$$

De manera que,

$$D_3 = 8(x^2+y^2) > 0 \quad (**)$$

De $(*)$ y $(**)$ "f" es una función cuasi-cóncava. Sin embargo, al observar la figura, claramente, la figura acampanada NO es cóncava, lo cual lo podemos mostrar con el Hessiano NO orlado.

$$H_f = \begin{bmatrix} 2e^{-(x^2+y^2)}(2x^2-1) & 4xye^{-(x^2+y^2)} \\ 4xye^{-(x^2+y^2)} & 2e^{-(x^2+y^2)}(2y^2-1) \end{bmatrix} = 2e^{-(x^2+y^2)} \begin{bmatrix} (2x^2-1) & 2xy \\ 2xy & (2y^2-1) \end{bmatrix}$$

Para esta matriz, $D_1 = 2x^2 - 1$ que no siempre es negativo para todo par (x, y), por lo que f NO es cóncava.

3.31. Desafío: Problema del Monopolista

Considere un monopolista productor de *bisnaca* que enfrenta una demanda de mercado inversa definida por:

$$p^d(q) = Aq^{-\alpha}$$

tal que $A > 0$ y $0 < \alpha < 1$ son parámetros que resumen información agregada sobre preferencias por *bisnaca*. Suponga que su función de costo total está definida por:

$$C^*(q) = F + cq$$

tal que $F, c > 0$ y F representa un costo fijo hundido.

a) Determine la elasticidad precio de la demanda en el punto arbitrario (q_0, p_0).
Respuesta.
La elasticidad precio de la demanda en un punto arbitrario (q_0, p_0) está dada por:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{q^d,p}(p_0) =& \frac{\partial q^d}{\partial p}(p_0)\frac{p_0}{q^d(p_0)}\\ =& \frac{1}{\alpha}(Ap_0^{-1})^{\frac{1}{\alpha}-1}(-1)Ap_0^{-2}\frac{p_0}{(Ap_0^{-1})^{\frac{1}{\alpha}}}, \quad \text{pues} \quad q^d(p) = (Ap^{-1})^{\frac{1}{\alpha}}\\ =& -\frac{1}{\alpha}\end{aligned}$$

b) Plantee el problema de optimización que resuelve el monopolista si no está regulado, Explicite las condiciones de suficiencia para un óptimo de corto plazo y encuéntrelo. Verifique que es óptimo.
Respuesta.
El monopolista resuelve:

$$\max_{q\geq 0} \; p^d(q)q - C^*(q)$$

La condiciones de sufiencia para un óptimo monopólico de corto plazo son:

a) CPO: $IMg_(q_m) = CMg(q_m)$
b) CSO: $CMg'(q_m) > IMg'(q_m)$
c) CnC (Condición de no cierre): $p_m \geq CVMe(q_m)$

Nótese que $IMg(q) = (1-\alpha)Aq^{-\alpha}$ y $CMg(q) = c$, luego de la condición (a) se obtiene que $q_m = \left(\frac{(1-\alpha)A}{c}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$. La condición (b) se cumple pues $CMg' = 0$ y $IMg'(q) < 0$ para todo $q > 0$. Por último, sea $p_m = p^d(q_m) = \frac{c}{1-\alpha}$ luego la condición (c) se cumple pues $p_m > c$ ya que $0 < \alpha < 1$. Luego, q_m es máximo único y global y el par (q_m, p_m) es un óptimo monopólico de corto plazo.

c) Llame q_m al nivel de producción óptimo encontrado en el inciso anterior y defina $p_m := p^d(q_m)$. Si desde este punto el precio subiera un $1,5\,\%$, ¿cuál sería el cambio porcentual en la cantidad demandada? ¿Es precio elástica la demanda en este punto? ¿Cuál es la intuición económica?
Respuesta.
Del inciso (1) se sabe que esta demanda tiene elasticidad $\frac{1}{\alpha}$, constante en todos sus puntos, y es precio elástica pues $0 < \alpha < 1$. Luego, si desde p_m el monopolista subiera el precio un $1,5\,\%$, la cantidad demandada disminuiría en $\frac{1,5}{\alpha}\,\% > 1,5\,\%$. Era esperable que fuera precio elástica en este punto pues sabemos que el monopolista explota los tramos inelásticos; por el índice de Lerner $|\mathcal{E}_{q^d,p}(p_m)| > 1$.

3.32. Preguntas Cortas

Responda las siguientes preguntas.

a) Encuentre los puntos críticos de las siguientes funciones

i) $z = -2x^2 - y^2 + xy + 2x + 3y$
Respuesta.
Nótese que $f_x(x,y) = -4x + y + 2$ y $f_y(x,y) = -2y + x + 3$. Luego el punto (x_0, y_0) tal que $\nabla f(x_0, y_0) = \mathbf{0}$ es $(1, 2)$.

ii) $z = \ln x + 2\ln y - \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)$
Respuesta.
En este caso $f_x(x,y) = 1/x - x$ y $f_y(x,y) = 2/y - y$. Luego hay un sólo punto (x_0, y_0) del dominio tal que $\nabla f(x_0, y_0) = \mathbf{0}$, este es $(1, \sqrt{2})$.

b) Considere la función lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x_1, x_2) = c_1x_1+c_2x_2$. Demuestre formalmente que f es cóncava y convexa. Puede utilizar cualquiera de las caracterizaciones de concavidad/convexidad de clases.
Respuesta.
f es un polinomio en dos variables luego es C^2. Calculemos el hessiano de f. Es claro que $f_{x_1}(x_1, x_2) = c_1$ y $f_{x_2}(x_1, x_2) = c_2$. Luego el hessiano de f es la matriz nula de 2×2. Entonces todos sus menores principales son iguales a 0. Estos implica que es semi-definida positiva y también semi-definida negativa. Por un resultado de clases esto equivale a que f sea convexa y cóncava.

3.33. Administración de un Estadio

La administradora de un estadio de fútbol ha permitido la venta de completos y bebidas en su estadio. Como contrapartida por la licencia, los vendedores de completos y bebidas pagan una comisión a la administración del estadio por cada unidad de bebida o completo vendida. Su problema es elegir la comisión cobrada para cada uno de los bienes que maximiza el ingreso de la administración del estadio. En lo que sigue detallamos el problema de la administradora.

Sean τ_C y τ_B los valores cobrados por cada unidad vendida de completos y bebidas, respectivamente. Las cantidades vendidas de completos y bebidas son denotadas por q_C y q_B, respectivamente, y los respectivos precios son denotados por p_C y p_B. Este es un mercado competitivo (hay muchos vendedores en el estadio), y el precio de cada bien es igual al costo marginal de producción más el costo marginal de la comisión pagada a la administración. El costo marginal de producción de los dos bienes es lo mismo e igual a 5, así que $p_C = \tau_C + 5$ y $p_B = \tau_B + 5$. La demanda total por completos es dada por $q_C = e^{-3p_C}$ y la demanda total por bebidas es dada por $q_B = e^{-2p_B}$. (Obs: e representa el número de Euler, i.e., $e = 2,71828...$).

El problema de la administradora es elegir τ_C y τ_B de manera de maximizar los ingresos de la administración del estadio. Suponga por simplicidad que los únicos ingresos que recibe el estadio corresponden a los obtenidos por estas comisiones por las ventas de completos y bebidas.

1. Calcule las elasticidades precio de las demandas por completos y bebidas, esto es, ε_{q_C,p_C} y ε_{q_B,p_B}.
Respuesta. Las elasticidades precio son:

$$\varepsilon_{q_C,p_C} = \frac{dq_C}{dp_C}\frac{p_C}{q_C} = -3e^{-3p_C}\frac{p_C}{q_C} = -3p_C$$

$$\varepsilon_{q_B,p_B} = \frac{dq_B}{dp_B}\frac{p_B}{q_B} = -2e^{-2p_B}\frac{p_B}{q_B} = -2p_B$$

2. Escriba la función objetivo que la administración del estadio maximiza **como función solamente** de τ_C y τ_B.
Respuesta. La función objetivo es:

$$\begin{aligned}\Pi(\tau_C, \tau_B) &= \tau_C q_C + \tau_B q_B \\ &= \tau_C e^{-3p_C} + \tau_B e^{-2p_B} \\ &= \tau_C e^{-3(\tau_C+5)} + \tau_B e^{-2(\tau_B+5)}\end{aligned}$$

3. Encuentre el punto crítico (estacionario) de la función objetivo de la administración del estadio.
Respuesta. Sacando las condiciones de primera orden:

$$-3\tau_C e^{-3(\tau_C+5)} + e^{-3(\tau_C+5)} = 0$$

$$-3\tau_C + 1 = 0 \Rightarrow \tau_C = \frac{1}{3}$$

$$-2\tau_B e^{-2(\tau_B+5)} + e^{-2(\tau_B+5)} = 0$$

$$-2\tau_B + 1 = 0 \Rightarrow \tau_B = \frac{1}{2}$$

$(\tau_C, \tau_B) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ es el único punto critico.

4. Muestre que el punto crítico que encontró es un punto de máximo local.
Respuesta. Las derivadas segundas son:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \tau_C^2} = 9\tau_C e^{-3(\tau_C+5)} - 3e^{-3(\tau_C+5)} - 3e^{-3(\tau_C+5)} = e^{-3(\tau_C+5)}(9\tau_C - 6)$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \tau_B^2} = 4\tau_B e^{-2(\tau_B+5)} - 2e^{-2(\tau_B+5)} - 2e^{-2(\tau_B+5)} = 4e^{-2(\tau_B+5)}(\tau_B - 1)$$

Luego, la hessiana es:

$$H\Pi = \begin{pmatrix} e^{-3(\tau_C+5)}(9\tau_C - 6) & 0 \\ 0 & 4e^{-2(\tau_B+5)}(\tau_B - 1) \end{pmatrix}$$

Evaluado en el punto critico:

$$H\Pi\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) = \begin{bmatrix} e^{-3\left(\frac{1}{3}+5\right)}\left(9\frac{1}{3} - 6\right) & 0 \\ 0 & 4e^{-2\left(\frac{1}{2}+5\right)}\left(\frac{1}{2} - 1\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3e^{-3\left(\frac{1}{3}+5\right)} & 0 \\ 0 & -2e^{-2\left(\frac{1}{2}+5\right)} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto los menores principales dominantes son:

$$D_2 = 6e^{-3\left(\frac{1}{3}+5\right)}e^{-2\left(\frac{1}{2}+5\right)} > 0$$

$$D_1 = -3e^{-3\left(\frac{1}{3}+5\right)} < 0$$

Luego, la hessiana es negativa definida, y el punto critico es máximo local.

5. Considere ahora que existe una legislación que impone un límite de 0,6 pesos en la comisión por unidad vendida. O sea, la administradora tiene que elegir τ_C y τ_B de tal manera que $0 \leq \tau_C \leq 0{,}6$ y $0 \leq \tau_B \leq 0{,}6$. Entonces, uno puede pensar en el dominio de la función objetivo como $D = \{(\tau_C, \tau_B) : 0 \leq \tau_C \leq 0{,}6 \text{ y } 0 \leq \tau_B \leq 0{,}6\}$. Muestre que el punto critico que encontraste en el ítem 2 es un punto de máximo global cuando el dominio de la función objetivo es D.
Respuesta. La manera mas fácil es verificar el signo de la hessiana en todo dominio. Para esto, perciba que los menores principales dominantes de la matriz en (1) son

$$D_2 = 4e^{-3(\tau_C+5)}e^{-2(\tau_B+5)}(\tau_B - 1)(9\tau_C - 6)$$

$$D_1 = e^{-3(\tau_C+5)}(9\tau_C - 6)$$

Luego, si $\tau_C < 2/3$ y $\tau_B < 1$, $D_2 > 0$ y $D_1 < 0$. Como $2/3 > 0{,}6$, la hessiana es negativa definida en todo dominio D y por lo tanto la función objetivo es estrictamente cóncava. Luego, tenemos un máximo global en el dominio D.

Solución alternativa: Algún alumno puede tener la idea utilizar el teorema de Weierstrass para garantizar que existe un máximo global, y comparar el valor de la función evaluada en $(\tau_C, \tau_B) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ con el valor da la función en todos puntos de la frontera del dominio. De esta manera, pueden garantizar que $(\tau_C, \tau_B) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ es el máximo global (pues sabemos que para cualquier función, cóncava o no, si el máximo es interior entonces es un punto critico).

3.34. Desafío: Optimización con Teorema de Leibniz

Condorito es dueño de la única tienda de **Plops** de Pelotillehue. Para poder satisfacer la demanda por Plops, Condorito enfrenta un problema fundamental – decidir cuantos Plops traer desde Cumpeo. Los Plops son perecibles, y los que no venda un día ya no sirven para el siguiente y se botan a la basura.

Pepe Cortisona (fabricante de Plops en Cumpeo, que queda a seis horas de viaje, y quien provee a Condorito) entrega todas las mañanas Plops a Condorito a un costo **$**$c$ por Plop. Condorito cobra en Pelotillehue un precio igual a **$**$p$ por Plop ($p > c$), y por contrato con el fabricante, Condorito no puede ofrecer un descuento al final del día para vender los Plops sobrantes y recuperar los costos.

Condorito enfrenta un dilema: Si compra pocos Plops, y llegan más clientes que los Plops que tenga en la tienda, Condorito deja de ganar dinero. Si, por el contrario, compra demasiados Plops, y no llegan tantos clientes, Condorito deberá botar a la basura todos los Plops sobrantes, perdiendo dinero también.

El número de unidades demandadas (**D**) que Condorito recibirá en un día es incierto, pero se sabe que la función de demanda de los clientes sigue un comportamiento descrito por las funciones $f(\cdot)$ y $F(\cdot)$:

$$f(D) = \frac{1}{T}$$

(función de llegada de las unidades demandadas, constante para cualquier valor de D)

$$F(D) = \int_0^D f(y)\ dy = \int_0^D \left(\frac{1}{T}\right) dy = \frac{D}{T}$$

(función acumulada de llegada de unidades demandadas totales en un día)

Donde el parámetro T es la cantidad máxima posible de Plops a demandarse en un día. Suponga que los Plops son **perfectamente divisibles** (por ejemplo, es posible que en un día se demanden 22.41 Plops, o que Condorito compre 17.97 Plops a Cortisona).

Usted debe ayudar a Condorito a determinar cuántos Plops comprar para cada día
Para organizar la forma de pensar el problema, piense que los costos para Condorito de comprar q Plops consiste en la suma del costo de "tener Plops de sobra" (TPS) y el costo de "quedarse corto de Plops" (QCP):

$$TPS(q) = c \times q - c \times \left\{ \int_0^q yf(y)\ dy - q(1 - F(q)) \right\} = c \times q \times F(q) - c\int_0^q yf(y)\ dy$$

Así, $TPS(q)$ es el promedio del costo de tener que adquirir q unidades, menos el costo recuperado de lo que sí se alcanza a vender.

$$QCP(q) = (p - c) \times \left\{ \int_q^T yf(y)\ dy - q \times (1 - F(q)) \right\}$$

$QCP(q)$ es el promedio del costo de oportunidad de todas las unidades que fueron demandadas por clientes, y que no se pudieron vender por acabarse los inventarios de plops.

1. Plantee formalmente el problema de minimización que diariamente enfrenta Condorito. Identifique claramente la función objetivo, la(s) variable(s) de decisión de Condorito, y el dominio relevante de la función.
   Respuesta.
   La función de costos es $G(q) = TPS(q) + QCP(q)$, por lo que el problema de optimización es:

$$\min_{q \in \mathbb{R}_+} G(q) = cqF(q) - c\int_0^q yf(y)\ dy + (p - c)\int_q^T yf(y)\ dy - q(1 - F(q)) + cq(1 - F(q))$$

Aquí la variable de decisión es $q \in \mathbb{R}_+$, el número de plops a comprar cada día.

Reemplazando las f, F:

$$G(q) = cq \times \frac{q}{T} - c\int_0^q \frac{y}{T}\,dy + (p-c)\int_q^T \frac{y}{T}\,dy - pq + pq\frac{q}{T} + cq - cq\frac{q}{T} =$$

$$= cq - pq + pq\frac{q}{T} - c\int_0^q \frac{y}{T}\,dy + (p-c)\int_q^T \frac{y}{T}\,dy$$

2. Encuentre la cantidad óptima de Plops que Condorito debe comprar cada día. Discuta además de qué forma usted puede garantizar que el punto encontrado sea, en efecto, óptimo para el objetivo de Condorito.

Respuesta. Tomando derivada de G respecto a q (usando Leibniz) e igualando a 0:

$$G_q(q) = c - p + \frac{2pq}{T} - c\left[\frac{q}{T} - 0\right] + (p-c)\left[0 - \frac{q}{T}\right]$$

$$G_q(q) = c - p + \frac{2pq}{T} - \frac{cq}{T} + \frac{cq}{T} - \frac{pq}{T}$$

$$G_q(q) = c - p + p\frac{q}{T} = 0$$

$$\Rightarrow q^* = \frac{T(p-c)}{p}$$

La segunda derivada es $G_qq(q) = \frac{p}{T} > 0$, con lo que hemos encontrado un mínimo. (Alternativamente, se podría dar un argumento de concavidad de la función G, que permite determinar lo mismo).

Por lo tanto, Condorito debería comprar $q^* = \dfrac{T(p-c)}{p}$ Plops cada día.

3.35. Empresa con múltiples productos

Una empresa vende dos tipos de cereales distintos, A y B. Sea p_A el precio del cereal A y p_B el precio del cereal B. La demanda por cereales A en función de los precios está dada por

$$q_A(p_A, p_B) = 21 - 2p_A + p_B,$$

mientras que la demanda por cereales B está dada por

$$q_B(p_A, p_B) = 14 - 4p_B + p_A.$$

El costo de producción por cada unidad de A es \$2 mientras que el costo de producción por cada unidad de B es \$1.

En esta situación, las ganancias de la empresa están dadas por

$$\pi(p_A, p_B) = (21 - 2p_A + p_B)(p_A - 2) + (14 - 4p_B + p_A)(p_B - 1).$$

a) ¿La función de ganancias de la empresa es cóncava o convexa? Justifique su respuesta.

b) Encuentre los puntos críticos para el problema de maximización de ganancias de la empresa, es decir, encuentre los precios que satisfagan las condiciones de primer orden. Clasifique estos puntos críticos de acuerdo a si son máximos, mínimos o puntos silla.

c) Calcule las ganancias máximas de la empresa.

d) Ahora suponga que el precio de uno de los insumos utilizados para la producción del cereal A aumenta, por lo que el costo de producción del cereal A sube de \$2 a \$4. Calcule los puntos críticos para este nuevo problema.

e) ¿Cómo afecta el aumento en el costo de producción de A a las cantidades producidas y a las ganancias? Justifique su respuesta.

Respuesta.

a) Tenemos que la función π se escribe:

$$\begin{aligned}\pi(p_A, p_B) &= -2p_A^2 + 25p_A + p_Ap_B - 2p_B - 42 - 4p_B^2 + 18p_B + p_Ap_B - p_A - 14 \\ &= -2p_A^2 - 4p_B^2 + 2p_Ap_B + 24p_A + 16p_B - 56\end{aligned}$$

De manera que

$$\begin{aligned}\frac{\partial \pi}{\partial p_A}(p_A, p_B) &= -4p_A + 2p_B + 24 \\ \frac{\partial^2 \pi}{\partial p_A^2}(p_A, p_B) &= -4 \\ \frac{\partial \pi}{\partial p_B}(p_A, p_B) &= -8p_B + 2p_A + 16 \\ \frac{\partial^2 \pi}{\partial p_B^2}(p_A, p_B) &= -8 \\ \frac{\partial^2 \pi}{\partial p_A \partial p_B}(p_A, p_B) &= 2\end{aligned}$$

Luego, la matriz Hessiana de π es:

$$H_\pi(p_A, p_B) = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}$$

Los menores principales dominantes de orden 1 y 2 son -4 y 28, por lo que H_π es definida negativa y π es (estrictamente) cóncava.

b) Sacando las derivadas parciales e igualándolas a cero nos da

$$\begin{aligned}[p_A]: &\quad 4p_A = 24 + 2p_B, \\ [p_B]: &\quad 2p_A = 8p_B - 16.\end{aligned}$$

Resolviendo este sistema de de ecuaciones, obtenemos como precios que maximizan su ganancia: $p_B^* = 4$ y $p_A^* = 8$. Como en la parte b) se mostró que f es estrictamente cóncava, este punto es un máximo global.

c) En el óptimo la firma produce

$$q_A^* = 21 - 2p_A^* + p_B^* = 21 - 2 \times 8 + 4 = 9,$$

unidades del producto A, y

$$q_B^* = 14 - 4p_B^* + p_A^* = 14 - 4 \times 4 + 8 = 6.$$

Las ganancias serían

$$\pi(p_A^*, p_B^*) = q_A^*(p_A^* - 2) + q_B^*(p_B^* - 1) = 9 \times (8 - 2) + 6 \times (4 - 1) = 72. \tag{3.1}$$

d) Ahora las condiciones de primer orden quedan:

$$\begin{aligned} [p_A]: &\quad 4p_A = 28 + 2p_B, \\ [p_B]: &\quad 2p_A = 8p_B - 14. \end{aligned}$$

Repitiendo el mismo procedimiento anterior, obtenemos $p_B^* = 4$ y $p_A^* = 9$.

e) En el óptimo la firma produce

$$q_A^* = 21 - 2p_A^* + p_B^* = 21 - 2 \times 9 + 4 = 7,$$

unidades del producto A, y

$$q_B^* = 14 - 4p_B^* + p_A^* = 14 - 4 \times 4 + 9 = 7.$$

Las ganancias serían entonces

$$\pi(p_A^*, p_B^*) = q_A^*(p_A^* - 2) + q_B^*(p_B^* - 1) = 7 \times (9 - 4) + 7 \times (4 - 1) = 56, \tag{3.2}$$

así que en el nuevo óptimo las ganancias de la firma disminuyen y además la producción del producto A también disminuye.

Capítulo 4

Optimización con Restricciones de Igualdad

4.1. Introducción al Lagrangeano

Considere un individuo que vive en Tecnologilandia que tiene preferencias del tipo:

$$U(X, Y) = 2X^{\frac{3}{4}}Y^{\frac{1}{4}}$$

En donde X son unidades de automóviles e Y son unidades de televisores. Además usted sabe que el individuo cuenta como \$100 para comprar automóviles y/o televisores, los precios de los automóviles son \$20 y el precio de los televisores es \$5. Asuma que el individuo gastara todo su presupuesto.

1. Calcule las utilidades marginales de cada uno de los bienes.

   Respuesta. Utilidades marginales:
   $Umg_X = \frac{\partial U}{\partial X} = \frac{3}{2}X^{\frac{-1}{4}}Y^{\frac{1}{4}}$: Este el cambio marginal que genera en la utilidad una unidad extra del bien X.
   $Umg_Y = \frac{\partial U}{\partial Y} = \frac{1}{2}X^{\frac{3}{4}}Y^{\frac{-3}{4}}$: Este el cambio marginal que genera en la utilidad una unidad extra del bien Y.

2. Plantee el problema de maximización del individuo, identificando cada una de las variables.
   Respuesta.
   El problema de optimización queda descrito como:

   $$\max_{X,Y} \; U(X, Y) = 2X^{\frac{3}{4}}Y^{\frac{1}{4}}$$

   $$\text{s.a. } 100 = 20X + 5Y \text{ (Restricción de presupuesto)}$$

   Tenemos que el individuo va a querer maximizar su utilidad que se basa en el consumo de X e Y, sujeto a su restricción de presupuesto, en donde sus ingresos tiene que ser igual a sus gastos.

3. Encuentre el consumo óptimo de automóviles y televisores del individuo. *Ayuda: Piense que uno de los bienes depende del ingreso del individuo y del consumo del otro bien.*
   Respuesta.
   Dado la restricción de presupuesto:

   $$100 = 20X + 5Y$$
   $$Y = \frac{100 - 20X}{5}$$

   Reemplazando:

   $$U(X) = 2X^{\frac{3}{4}}\left(\frac{100 - 20X}{5}\right)^{\frac{1}{4}}$$

Para encontrar la CPO, derivamos e igualamos a cero

$$\frac{\partial U(X)}{\partial X} = 2\frac{3}{4}X^{\frac{3}{4}-1}(20-4X)^{\frac{1}{4}} + 2X^{\frac{3}{4}}(-(20-4X)^{\frac{1}{4}-1}) = 0$$

Despejando X:

$$\frac{4}{3} = \frac{20-4X}{X}$$
$$16X = 60$$
$$X = \frac{15}{4}$$

Luego, para encontrar el Y^*, reemplazamos el X^* en la restricción de presupuesto:

$$100 = 20\left(\frac{15}{4}\right) + 5Y$$

$$Y = 5$$

Aún tenemos que verificar que $(X^*, Y^*) = (15/4, 5)$ es efectivamente un máximo, pero lo haremos en el próximo ítem.

4. Compruebe que la(s) solución(es) es(son) un máximo.

Respuesta. La función que queremos a maximizar es

$$g(X) = 2X^{\frac{3}{4}}\left(\frac{100-20X}{5}\right)^{\frac{1}{4}},$$

en el dominio $D = [0, 5]$ (pues por la restricción de presupuesto, $X > 5 \Rightarrow Y < 0$). La derivada segunda de esta función es:

$$g''(X) = -\frac{75\sqrt{2}}{8X^{5/4}(5-X)^{7/4}}$$

Note que la derivada segunda evaluada en el punto $X^* = 15/4$ es < 0. Luego, este punto es un máximo local (la hessiana de g evaluada en X=15/4 es negativa definida). También note que la solución debe ser interior pues $g(0) = 0$, $g(5) = 0$ y $g(15/4) > 0$. Como el máximo es interior y $X^* = 15/4$ es el único máximo local de g, también es un máximo global. Luego la solución $(X^*, Y^*) = (15/4, 5)$ es un máximo global del problema inicial (por el Teorema de Weierstrass, $g(X)$ tiene un maximo en $[0, 5]$).

4.2. Optimización con Lagrange I

Resuelva los siguientes problemas, determine si los puntos encontrados son efectivamente mínimos o máximos locales o globales.

a) max $y = 2x_1 + 3x_2$ sujeto a: $2x_1^2 + 5x_2^2 = 10$

Respuesta. Intentaremos resolver usando las condiciones suficientes para un máximo global para ver si resulta (la lagrangiana no será cóncava para todo λ, así que verificaremos concavidad después de encontrar el punto crítico). Planteamos el langrangeano:

$$\mathcal{L} = 2x_1 + 3x_2 - \lambda(2x_1^2 + 5x_2^2 - 10)$$

Encontramos las CPOs:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 2 - 4x_1\lambda = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 3 - 10x_2\lambda = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 10 - 2x_1^2 - 5x_2^2 = 0$$

Usando las CPOs, podemos encontrar el siguiente punto crítico:

$$x_1^* = \frac{5}{3}\sqrt{\frac{18}{19}}$$
$$x_2^* = \sqrt{\frac{18}{19}}$$
$$\lambda^* = \frac{3}{10}\sqrt{\frac{19}{18}}$$

Hay otro punto crítico también, que es $(-x_1^*, -x_2^*, -\lambda^*)$, y primero revisaremos si es máximo global (puedes repetir los pasos para el otro punto crítico para ver que pasa). Para ello podemos verificar si la función $\tilde{\mathcal{L}}(x_1, x_2) = \mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda^*)$ es cóncava. La hessiana es:

$$H\tilde{\mathcal{L}}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -4\lambda^* & 0 \\ 0 & -10\lambda^* \end{pmatrix}$$

El menor principal dominante de orden 2 es $40\lambda^{*2} > 0$. El menor principal dominante de orden 1 es $-4\lambda^* < 0$ (dado que $\lambda^* > 0$). Luego, $H\tilde{\mathcal{L}}(x, y)$ es negativa definida para el λ^* asociado al punto crítico (luego también es negativa semi-definida) y por lo tanto $\tilde{\mathcal{L}}(x, y)$ es cóncava (de hecho, estrictamente cóncava). Luego, el punto crítico que encontramos es máximo global.

b) $\max y = (x_1 + 2)(x_2 + 1)$ sujeto a: $2x_1 + x_2 = 10$

Respuesta.

Usando método de Lagrange: planteamos la langrangiana:

$$\mathcal{L} = (x_1 + 2)(x_2 + 1) + \lambda(10 - 2x_1 - x_2)$$

Antes de encontrar puntos críticos, note que el último término de la lagrangiana es lineal. Entonces, si la función $f(x_1, x_2) = (x_1 + 2)(x_2 + 1)$ es cóncava tenemos que las condiciones de Lagrange son suficientes para el óptimo. Pero la hessiana de f es:

$$Hf(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego, el menor principal dominante de orden 2 es -1: la matriz es indefinida y f no es cóncava. Más aún, se puede mostrar que tampoco cuasi cóncava (el determinante del hessiano orlado de f es $2f(x_1, x_2)$). Note también que para cualquier λ la lagrangiana no será cóncava en (x, y) (siempre encontraremos una hessiana indefinida). Luego, las condiciones suficientes para máximo global no van funcionar aquí.

Además, el conjunto restricción es una recta en $\mathbb{R}^2$, luego no es acotado (no podemos usar Weierstrass). Sin ser creativo, lo mejor que podemos hacer es encontrar puntos críticos y clasificarlos como máximos locales si posible, **pero esto no permite verificar si es un máximo global, que es lo que finalmente se busca al maximizar.**

En efecto, a partir de las CPOs

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = x_2 + 1 - 2\lambda = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = x_1 + 2 - \lambda = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 10 - 2x_1 - x_2 = 0$$

podemos encontrar los valores de x_1, x_2 y λ:

$$x_1^* = \frac{7}{4}$$
$$x_2^* = \frac{13}{2}$$
$$\lambda^* = \frac{15}{4}$$

Para chequear si es máximo o mínimo local, podemos ver el Hessiano orlado:

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos que el determinante es igual a 4 (verifique), por lo que tendremos un máximo local (en este caso el determinante es positivo para cualquier valor posible de x_1, x_2 y λ, pero bastaría que fuera positivo solamente evaluado en el punto crítico).

Pero hay otra forma de verificar que es un máximo global. A partir de la restricción tenemos que $x_2 = 10 - 2x_1$. Reemplazando en la función objetivo $f(x_1, x_2) = (x_1 + 2)(x_2 + 1)$ tenemos

$$f(x_1, 10 - 2x_1) = -2x_1^2 + 7x_1 + 22 \equiv F(x_1)$$

Así que nuestro problema es elegir x_1 para maximizar g. Note que F es estrictamente cóncava, y luego su máximo global es dado por la condición de primer orden:

$$-4x_1 + 7 = 0 \Rightarrow x_1^* = \frac{7}{4}$$

El x_2 óptimo del problema original lo encontramos usando $x_2 = 10 - 2x_1$

$$x_2^* = 10 - 2\frac{7}{4} = 10 - \frac{7}{2} = \frac{13}{2}$$

Luego $(x_1, x_2) = \left(\frac{7}{4}, \frac{13}{2}\right)$ es un punto de máximo global.

c) $\max\ y = x_1^{0,25} x_2^{0,75}$ sujeto a: $2x_1 + 4x_2 = 100$

Respuesta.

Note que la función de la restricción es lineal. Luego, si la función objetivo es cóncava, tenemos que la lagrangiana es cóncava para todo λ y las condiciones suficientes para un máximo global se cumplen. La hessiana de $f(x_1, x_2) = x_1^{0,25} x_2^{0,75}$ es:

$$Hf(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -x_1^{-1,75} x_2^{0,75} & x_1^{-0,75} x_2^{-0,25} \\ x_1^{-0,75} x_2^{-0,25} & -x_1^{0,25} x_2^{-1,25} \end{pmatrix}$$

Perciba que el menor principal de orden 2 es cero. Los otros menores principales de orden 1 son siempre ≤ 0. Luego, f es cóncava y las condiciones de Lagrange son suficientes para un máximo global. Planteamos la lagrangiana:

$$\mathcal{L} = x_1^{0,25} x_2^{0,75} - \lambda(2x_1 + 4x_2 - 100)$$

Encontramos las CPOs:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 0{,}25 x_1^{-0,75} x_2^{0,75} - 2\lambda = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 0{,}75 x_1^{0,25} x_2^{-0,25} - 4\lambda = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 100 - 2x_1 - 4x_2 = 0$$

Usando las CPOs, podemos encontrar los valores de x_1, x_2 y λ

$$x_1^* = \frac{25}{2}$$

$$x_2^* = \frac{75}{4}$$

$$\lambda^* = 0,1694$$

Luego $(x_1, x_2) = \left(\frac{25}{2}, \frac{75}{4}\right)$ es un punto de máximo global.

4.3. Optimización con Lagrange II

Encuentra y clasifica los valores extremos de las siguientes funciones sujeto a restricciones de igualdad

a) $f(x, y) = ax + y$ sujeto a: $a - \sqrt{x} - \sqrt{y} = 1$ *con* $a > 1$

b) $f(x, y) = x - 3y - xy$ sujeto a: $x + y = 6$

4.4. Interpretación del Multplicador y Condiciones de Suficiencia

Una empresa tiene un total de L trabajadores los cuáles se dividen en la producción de mesas y sillas. La cantidad total de trabajadores está fija. El orden de los lugares de trabajo en la fábrica implica que un trabajador solo puede participar en la fabricación de uno de estos productos. Entonces si llamamos l_1 a la cantidad de trabajadores que dedicados a producir mesas y l_2 a los que producen silla, se debe cumplir que $l_1 + l_2 = L$. Sabemos además que el precio de mercado de las mesas es p_m y el de las sillas es p_s.

Suponga que la función de producción de mesas está dada por $M = f(l_1)$ con $f' > 0$ y $f'' < 0$, mientras que la producción de sillas está dada por la función de producción $S = g(l_2)$ con $g' > 0$ y $g'' < 0$.

1. Relacione los precios con la asignación óptima de empleados.

Respuesta. Tenemos lo siguiente:

$$M = f(l_1) \qquad f' > 0, \quad f'' < 0$$

$$S = g(l_2) \qquad g' > 0, \quad g'' < 0$$

Restricción:

$$l_1 + l_2 = L$$

(Fíjense que la calificación de restricción siempre es satisfecha, luego las CPO de Lagrange tienen que ser satisfechas si un máximo existe). Entonces la función objetivo es:

$$V = p_m M + p_s S = p_m f(l_1) + p_s g(l_2)$$

El problema a resolver, sera:

$$\max V \quad s.a: l_1 + l_2 = L$$

El lagrangeano por lo tanto es:

$$\mathcal{L} = p_m f(l_1) + p_s g(l_2) - \lambda(l_1 + l_2 - L)$$

Las CPOs son:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial l_1} = p_m f'(l_1) - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial l_2} = p_s g'(l_2) - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = L - l_1 - l_2 = 0$$

Igualamos los λ de las ecuaciones y obtenemos:

$$p_m f'(l_1) = p_s g'(l_2)$$

Esta ecuación implica que se iguala el valor del producto marginal de l_1 con el valor del producto marginal de de l_2. Esto es que los valores producto marginal de las sillas y mesas son iguales en la asignación óptima. Esto quiere decir que no se pueden reasignar trabajadores sin reducir el valor de la producción.

También, se puede ver de la siguiente forma:

$$\frac{p_m}{p_s} = \frac{g'(l_2)}{f'(l_1)}$$

En donde, el ratio de precios es igual al ratio de productos marginales (condición de tangencia).

2. Compruebe si las condiciones de Lagrange son suficientes para un óptimo global.

Respuesta.

En primer lugar, la restricción es lineal , es decir, es cóncava y convexa. En segundo lugar, veamos la hessiana de la función objetivo:

$$H = \begin{pmatrix} p_m f'' & 0 \\ 0 & p_s g'' \end{pmatrix}$$

Menores principales dominantes son:

$$p_m f'' < 0$$

$$p_m p_s f'' g'' > 0$$

Tenemos que la matriz es definida negativa en todo su dominio, luego la función es estrictamente cóncava, y por lo tanto estamos en presencia de un máximo global.

3. ¿Cómo interpretamos λ (multiplicador de Lagrange de la restricción) en este caso?

Respuesta. Tenemos que queremos ver como cambia la función de valor, cuando cambia marginalmente la restricción de trabajadores.

$$\lambda : \frac{\partial f^*}{\partial L}$$

λ es el valor marginal de poder contratar un trabajador adicional.

4. ¿Cambia su solución si en vez de maximizar el valor de la producción hubiésemos buscado maximizar las utilidades de la firma? Explique.

   Respuesta. Si la empresa maximizara utilidades tendríamos que:

$$\text{máx} \quad \underbrace{p_m f(l_1) + p_s g(l_2)}_{\text{valor de producción}} - \underbrace{wL}_{\text{costos de producción}} - \lambda(L - l_1 - l_2)$$

   La solución no cambia si se paga el mismo salario a todos los trabajadores.

4.5. Multiplicador de Lagrange

Considere el siguiente problema de maximización:

$$f(x, y, z) = 4z - x^2 - y^2 - z^2$$

$$s.a : g(x, y, z) = z - xy = 0$$

1. Use el método de Lagrange para hallar condiciones necesarias para una solución del problema y halle todos los (x, y, z) que las verifican. Verifique si las condiciones suficientes para un óptimo se cumplen en estos puntos.

   Respuesta.

   ### Método de Lagrange

   Paso 1:

   Sea $g(x, y, z) = z - xy$. Las puntos críticos de g son dados por:

$$-y = 0$$

$$-x = 0$$

$$1 = 0$$

   Luego, g no tiene puntos críticos y no llevamos ningún candidato del paso 1 (la calificación de restricción es siempre satisfecha).

   Paso 2:

   El lagrangiano es

$$\mathcal{L} = 4z - x^2 - y^2 - z^2 - \lambda(z - xy)$$

   Paso 3:

   Las condiciones primer orden de $\mathcal{L}$ son:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -2x + \lambda y = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -2y + \lambda x = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = 4 - 2z - \lambda = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = -(z - xy) = 0 \tag{4}$$

Primero, vea que si $x = 0$, tenemos $y = 0$ (ecuación 2), $z = 0$ (ecuación 4) y $\lambda = 4$ (ecuación 3). Luego, $(x, y, z, \lambda) = (0, 0, 0, 4)$ es un punto crítico del lagrangiano. En lo que sigue, suponemos que $x \neq 0$ para encontrar otros puntos críticos.

Combinando (1) y (2) tenemos:

$$\lambda = \frac{2x}{y} = \frac{2y}{x} \Rightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow y = \pm x$$

Esto implica que

$$xy = \begin{cases} -x^2 & \text{si } y = -x \text{ (caso 1)} \\ x^2 & \text{si } y = x \text{ (caso 2)} \end{cases} \quad \text{y} \quad \frac{x}{y} = \begin{cases} -1 & \text{si } y = -x \text{ (caso 1)} \\ 1 & \text{si } y = x \text{ (caso 2)} \end{cases}$$

Vea que combinando (3) y (1):

$$4 - 2z = \frac{2x}{y} \Rightarrow z = 2 - \frac{x}{y} \tag{5}$$

Caso 1: Suponga que primero que caso 1 se cumple. Entonces, por (5) $z = 3$. Por (3) tenemos $\lambda = -2$. Por (4) tenemos $x^2 = -3$, que no tiene solución real. Luego, no hay puntos criticos en este caso.

Caso 2: Suponga que ahora que caso 2 se cumple. En esto caso, dado (5), tenemos $z = 1$. Por (3) tenemos $\lambda = 2$. Por (4) tenemos que $x^2 = 1$, que implica $x = \pm 1$ y por lo tanto tenemos los siguientes puntos críticos: $(x, y, z, \lambda) = (1, 1, 1, 2)$ y $(x, y, z, \lambda) = (-1, -1, 1, 2)$.

Luego encontramos tres puntos críticos del lagrangiano:

a) $(x, y, z, \lambda) = (0, 0, 0, 4)$

b) $(x, y, z, \lambda) = (1, 1, 1, 2)$

c) $(x, y, z, \lambda) = (-1, -1, 1, 2)$

Paso 4:

Evaluando la función objetivo en $f(x, y, z) = 4z - x^2 - y^2 - z^2$ tenemos $f(0, 0, 0) = 0 < f(1, 1, 1) = f(-1, -1, 1) = 1$. Luego, solamente $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ y $(x, y, z) = (-1, -1, 1)$ quedan como candidatos a máximo

Condiciones suficientes

Vamos verificar si las condiciones de suficiencia global se cumplen para los candidatos $(1, 1, 1)$ y $(-1, -1, 1)$ que tenemos. Como $\lambda = 2$ en estos puntos defina:

$$\tilde{\mathcal{L}}(x, y, z) = 4z - x^2 - y^2 - z^2 - 2(z - xy)$$

Las derivadas de segunda orden son:

$$\tilde{\mathcal{L}}_{xx} = -2, \quad \tilde{\mathcal{L}}_{yy} = -2, \quad \tilde{\mathcal{L}}_{zz} = -2$$

$$\tilde{\mathcal{L}}_{xy} = 2, \quad \tilde{\mathcal{L}}_{xz} = 0, \quad \tilde{\mathcal{L}}_{yz} = 0$$

Luego, la hessiana es:

$$H\tilde{\mathcal{L}}(x, y, z) = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

El menor principal de orden 3 es:

$$\begin{vmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -8 + 8 = 0$$

Los menores principales de orden 2 son:

$$\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 4-4=0, \quad \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4-0=4, \quad \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4-0=0$$

Los menores principales de orden 1 son:

$$-2, \quad -2, \quad ,-2$$

Luego, $H\tilde{\mathcal{L}}(x,y,z)$ es negativa semi-definida para todo (x,y,z), y por lo tanto $\tilde{\mathcal{L}}(x,y,z)$ es cóncava. Luego, las condiciones suficientes se cumplen para todos candidatos que tenemos y $(x,y,z)=(1,1,1)$ e $(x,y,z)=(-1,-1,1)$ son puntos de máximo global.

2. Ahora suponga que enfrenta la siguiente restricción: $g(x,y,z)=z-xy=c$. Compruebe que la derivada de la función de valor con respecto a c es igual al multiplicador de Lagrange.
Respuesta. La lagrangiana ahora es:

$$\mathcal{L} = 4z - x^2 - y^2 - z^2 - \lambda(z - xy - c)$$

Para simplificar, suponga que c es suficientemente cerca de cero (no necesariamente tenemos que hacer este supuesto, pero esto garantiza que los pasos para resolver el problema son los mismos que en el ítem anterior). Repitiendo los mismo pasos que en ítem anterior (hágalo), uno puede concluir que hay un punto de máximo que será un punto crítico de la lagrangiana (de nuevo, la calificación de restricción será siempre satisfecha, y además los puntos críticos de la lagrangiana van satisfacer las condiciones suficientes para máximo global). Por lo tanto, como el máximo es punto critico de la lagrangiana, puedes usar el Teorema de la Envolvente. Sea $f^*(c)$ la función valor para un dado c. Usando el Teorema de la Envolvente tenemos que:

$$\frac{df^*}{dc} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c} = \lambda$$

Otra manera de contestar esta pregunta es resolver el problema para un dado c, reemplazar la solución $(x,y,z)=(x^*(c),y^*(c),z^*(c))$ en $f(x,y,z)=4z-x^2-y^2-z^2$ y sacar la derivada con respecto a c (pero es mucho más fácil usar el Teorema de la Envolvente).

4.6. Optimización Gráfica con Restricciones de Igualdad

Resuelva los siguientes problemas:

a) máx $x^2 + 12xy + y^2$ sujeto a: $x^2 + y^2 = 4$

Respuesta. Dependiendo del multiplicador, la lagrangiana puede ser cóncava, convexa, o incluso ni cóncava ni convexa. Pero perciba que el conjunto restricción es un circulo (que es cerrado y acotado), así que por Weierstrass sabemos que un máximo existe (y como el dominio es $\mathbb{R}^2$ el máximo solo puede ser interior). De esta manera, el máximo existe y además o es punto crítico de la lagrangiana, o un punto que viola la calificación de restricción. Perciba que el único punto que viola la calificación de restricción es $(x,y)=(0,0)$, pero este punto no está en el conjunto restricción (así que no llevamos ningún candidato de esto). Planteamos la lagrangiana:

$$\mathcal{L} = x^2 + 12xy + y^2 + \lambda(4 - x^2 - y^2)$$

Encontramos las CPOs:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 2x + 12y - 2x\lambda = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 2y + 12x - 2y\lambda = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 4 - x^2 - y^2 = 0$$

Usando las CPOs, podemos encontrar los puntos críticos que son candidatos a máximos:

$$(x, y, \lambda) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 7)$$

$$(x, y, \lambda) = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -5)$$
$$(x, y, \lambda) = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}, -5)$$
$$(x, y, \lambda) = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 7)$$

Evaluando la función objetivo en estos puntos verificamos que $(x, y) = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$ e $(x, y) = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ son los máximos globales.

b) máx $x^2 + y^2$ sujeto a: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

Respuesta.

Al depender del multiplicador, la lagrangiana puede ser cóncava o convexa. Pero perciba que el conjunto restricción es una elipse (que es cerrada y acotada), así que por Weierstrass sabemos que un máximo existe (y como el dominio es $\mathbb{R}^2$ el máximo solo puede ser interior). De esta manera, el máximo existe y además o es punto crítico de la lagrangiana, o un punto que viola la calificación de restricción. Perciba que el único punto que viola la calificación de restricción es $(x, y) = (0, 0)$, pero este punto no está en el conjunto restricción (así que no llevamos ningún candidato de esto). Planteamos la lagrangiana:

$$\mathcal{L} = x^2 + y^2 + \lambda \left(1 - \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9}\right)$$

Las CPO son:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 2x - \frac{2x}{25}\lambda = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 2y - \frac{2y}{9}\lambda = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 1 - \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 0 \quad (3)$$

Perciba que si $x \neq 0$ e $y \neq 0$ tenemos por (1) e (2) que $\lambda = 25$ y $\lambda = 9$, y luego no puede haber solución con $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Suponga entonces que $x = 0$. En este caso tenemos que $y = \pm 3$ (por (3)) e $\lambda = 9$ (por (2)). Si $y = 0$ tenemos que $x = \pm 5$ e $\lambda = 25$. Luego, tenemos los siguientes candidatos:

$$(x, y) = (0, 3)\,, \quad (x, y) = (0, -3)\,, \quad (x, y) = (5, 0)\,, \quad (x, y) = (-5, 0)$$

Evaluando la función objetivo en estos puntos llegamos que los puntos de máximo son $(x, y) = (5, 0)$ e $(x, y) = (-5, 0)$.

4.7. Análisis de sensibilidad problema de consumo

Considere el siguiente problema clásico de maximización de utilidad bajo una restricción presupuestaria,

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & U(x, y, z) = xyz \\ \text{s.a.} \quad & p_x x + p_y y + p_z z = I \end{aligned}$$

Donde x, y y z representan la cantidad de los bienes X, Y y Z; p_x, p_y y p_z representan los precios unitarios respectivamente (en pesos \$) e I equivale al ingreso o presupuesto, que debe utilizarse en su totalidad.

La solución óptima a este problema ha sido estudiada en varias ocasiones y corresponde a

$$x^* = \frac{I}{3p_x} \ , \quad y^* = \frac{I}{3p_y} \ , \quad z^* = \frac{I}{3p_z}$$

Responda las siguientes preguntas,

1. ¿Cuál es la expresión para el multiplicador de Lagrange λ^* de la restricción presupuestaria en este punto óptimo? ¿Cómo se intepreta este valor? (*Pista: λ^* satisface condiciones de primer orden*)

   Respuesta. El multiplicador de Lagrange λ^* satisface cualquiera de las restricciones de primer orden de un punto crítico de la Lagrangeana.

   $$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = xyz - \lambda(p_x x + p_y y + p_z z - I)$$

   Por ejemplo, respecto a x, la condición de primer orden es

   $$y^* z^* - \lambda^* p_x = 0$$

   Por lo tanto,

   $$\lambda^* = \frac{y^* z^*}{p_x} = \frac{I^2}{9 p_x p_y p_z}$$

   Por teorema de la Envolvente, el multiplicador de Lagrange λ^* equivale a dU^*/dI, es decir, la utilidad óptima aumentaría aproximadamente $\frac{I^2}{9p_x p_y p_z}$, si aumenta en un peso el ingreso total I.

2. Utilizando el teorema de la envolvente, ¿cómo cambia aproximadamente la utilidad óptima U^* si el producto X sube en \$1 su precio unitario?

   Respuesta. Por el Teorema de la Envolvente, la tasa de cambio $\frac{dU^*}{dp_x}$ equivale a la derivada parcial $\partial \mathcal{L}/\partial p_x$ evaluado en el óptimo.

   $$\frac{dU^*}{dp_x} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_x}(x^*, y^*, z^*, \lambda^*)$$

   Ahora,

   $$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_x}(x, y, z, \lambda) = -\lambda x$$

   Por lo tanto,

   $$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_x}(x^*, y^*, z^*, \lambda^*) = -\frac{I^3}{27 p_x^2 p_y p_z}$$

   Finalmente, la utilidad óptima decrece en $\frac{I^3}{27p_x^2 p_y p_z}$ unidades cuando el bien X es \$1 más caro por unidad. Alternativamente, la utilidad óptima crece en $\frac{I^3}{27p_x^2 p_y p_z}$ unidades cuando el bien X es \$1 más barato por unidad.

3. Como este es un problema de maximización, nos importa la concavidad de la función de utilidad, ¿es la función de utilidad cóncava? ¿Es cuasicóncava? Justifique.

   Respuesta. La función de utilidad tiene la forma de función Cobb-Douglas que hemos analizado en clase. De todas formas verificamos si $U(x, y, z)$ es cóncava calculando la matriz Hessiana y verificando si es negativa semi-definida. Sus derivadas de primer orden son

   $$\frac{\partial U}{\partial x} = yz \ , \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = xz \ , \qquad \frac{\partial U}{\partial z} = xy$$

La matriz Hessiana ahora es

$$Hf(x,y,z) = \begin{bmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{bmatrix}$$

Los menores principales de Hf son

- Primer orden
$$D_{1,1} = D_{1,2} = D_{1,3} = 0$$
- Segundo orden
$$D_{2,1} = -z^2 \ , \quad D_{2,2} = -y^2 \ , \quad D_{2,3} = -x^2$$
- Tercer orden
$$D_3 = |Hf| = 0 + xyz + xyz - 0 - 0 - 0 = 2xyz$$

Puede verse que los $D_{1,k} \leq 0$, pero los menores principales de segundo orden son ≤ 0 y el menor principal de tercer orden es ≥ 0 para $x, y, z \geq 0$. Es decir, la matriz Hessiana no es negativa semi-definida para todos los valores $x, y, z \geq 0$. Por lo tanto, U no es cóncava.

Ahora, puede verificarse que sí es cuasicóncava, por medio de dos criterios,

- **Determinante:** por medio del cálculo de los menores principales dominantes de la matriz

$$HAf(x,y,z) = \begin{bmatrix} 0 & yz & xz & xy \\ yz & 0 & z & y \\ xz & z & 0 & x \\ xy & y & x & 0 \end{bmatrix}$$

Calculamos,

$$D_1(x,y,z) = \begin{vmatrix} 0 & yz \\ yz & 0 \end{vmatrix} = -y^2z^2 < 0$$

$$D_2(x,y,z) = \begin{vmatrix} 0 & yz & xz \\ yz & 0 & z \\ xz & z & 0 \end{vmatrix} = 2xyz^3 > 0$$

$$\begin{aligned} D_3(x,y,z) &= \begin{vmatrix} 0 & yz & xz & xy \\ yz & 0 & z & y \\ xz & z & 0 & x \\ xy & y & x & 0 \end{vmatrix} \\ &= -yz \begin{vmatrix} yz & z & y \\ xz & 0 & x \\ xy & x & 0 \end{vmatrix} + xz \begin{vmatrix} yz & 0 & y \\ xz & z & x \\ xy & y & 0 \end{vmatrix} - xy \begin{vmatrix} yz & 0 & z \\ xz & z & 0 \\ xy & y & x \end{vmatrix} \\ &= -yz \cdot x^2yz + xz \cdot xy^2z - xy \cdot xyz^2 \\ &= -(xyz)^2 + (xyz)^2 - (xyz)^2 \\ &= -(xyz)^2 \end{aligned}$$

Entonces, $D_3 < 0$, por lo tanto U es cuasicóncava.

- **Transformación:** La función de utilidad se puede escribir como

$$U(x,y,z) = e^{\ln x + \ln y + \ln z}$$

Pero $\ln x + \ln y + \ln z$ es una suma de funciones cóncavas, por lo tanto el exponente es una función cóncava (y por ende, cuasicóncava). Por último, como e^u es una transformación creciente, entonces U es cuasicóncava, pues es **transformación creciente de una función cuasicóncava**. (Propiedad P2 de los apuntes).

4.8. Riesgo climático de un país

Un país tiene principalmente dos fuentes de energía, las plantas a carbón (C) y las plantas solares (S), y ambas plantas tienen como objetivo satisfacer las **necesidades energéticas básicas del país**. (Se usa C y S para denotar la cantidad utilizada de plantas de carbón y solares, respectivamente). Para cumplir este objetivo se deben necesariamente producir 20 unidades de energía (por hora). Se sabe que las plantas a carbón producen $2C$ unidades de energía en total (por hora), por otro lado, las plantas solares producen S unidades de energía en total (por hora).

Sin embargo, este país está muy preocupado por la contaminación que se genera en la producción de energía. La variable $R \in (0, \infty)$ es un factor que mide la preocupación del gobierno por temas ambientales. El gobierno de este país ha estimado que el **riesgo climático** que genera tener C plantas a carbón, es igual a $20RC^2$. A su vez, el riesgo climático que genera tener S plantas solares es igual a S^2.

El gobierno debe decidir cuantas plantas de carbón y solares utilizar, y está preocupado por **minimizar el riesgo climático, sujeto a suplir al país de sus necesidades energéticas básicas**.

Para C y S no considere soluciones con cantidades negativas. Además, suponga que **es factible** asignar una cantidad fraccionaria de plantas a cada tipo de energía.

1. Plantee el problema de optimización que enfrenta este país.
   Respuesta.

$$\begin{aligned} \min_{C,S} \quad & 20RC^2 + S^2 \\ \text{sujeto a} \quad & 2C^2 + S^2 = 20 \end{aligned}$$

2. Muestre que este problema tiene solución.

   Respuesta. La idea es que el conjunto factible es cerrado y acotado (es una elipse). Dado que la función objetivo es continua, entonces el teorema de Weierstrass asegura que el problema tiene solución. Alternativamente, el problema tiene solución si podemos encontrar una explícitamente (como se hace en la parte *c)*).

3. Usando el método de Lagrange encuentre los candidatos a solución del problema cuando $R \neq 1$.
   Respuesta. El lagrangeano de este problema es:

$$\mathcal{L}(P, Z) = 20RC^2 + S^2 - \lambda\left(2C^2 + S^2 - 20\right)$$

   Y las CPO son:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_C &= 40RC - 4\lambda C = 0 \\ \mathcal{L}_S &= 2S - \lambda S = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda &= -(2C^2 + S^2 - 20) = 0 \end{aligned}$$

   Las que se pueden reescribir

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_C &= C(40R - 4\lambda) = 0 \\ \mathcal{L}_S &= S(1 - \lambda) = 0 \end{aligned}$$

   Si $C = 0$ en $\mathcal{L}_C$, $S = \sqrt{20}$ por la restricción (valores negativos no aplican) y luego $\lambda = 1$ por $\mathcal{L}_\lambda$. Análogamente, si $S = 0$ en $\mathcal{L}_S$, se llega a $C = \sqrt{10}$, $\lambda = 10R$. Así, las soluciones que aparecen son:

   - $C = 0$, $S = \sqrt{20}$, $\lambda = 4$.
   - $C = \sqrt{10}$, $S = 0$, $\lambda = 10R$.

4. Analice cuánto debiese ser la preocupación del gobierno por temas ambientales R, para que no se produzca energía con plantas a carbón, es decir, solo se produzca energía en plantas solares.
Respuesta. Para responder esta pregunta se debe analizar el valor en la función objetivo que genera cada uno de los puntos críticos. Produciendo solo con plantas solares, la función objetivo es igual a: $f(C=0, S=\sqrt{20}) = 20$ Ahora si se produce solo con plantas solares: $f(C=\sqrt{10}, S=0) = 200R$

Por lo tanto, para que el punto $(C, 0)$ sea la solución debe ocurrir que: $20 < 200R$, es decir, $R > 200/20$ con este valor de R el gobierno solo produciría energía con plantas solares.

4.9. Problema de Costos de una Empresa

Considere una empresa que se dedica al reparto de encomiendas a domicilio llamada "BLIX", para ello, necesita capital físico que va a estar representado por vehículos de transporte (V) que tienen un costo unitario de \$10 para la empresa y Personal (T) que conduce estos vehículos y entrega los repartos que tienen un costo unitario de \$5 para la empresa. Suponga que la función de producción de repartos de BLIX esta representada de la siguiente forma:

$$Q = V^{\frac{1}{4}} T^{\frac{1}{2}}$$

Además suponga que la empresa enfrenta costos fijos de \$1000 por arriendo de bodegas donde guarda sus vehículos y las encomiendas.

1. Plantee el problema de minimización de costos que enfrenta la empresa.
Respuesta. La empresa tiene que resolver el siguiente problema de minimización de costos:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & C = 10V + 5T + 1000 \\ \text{s.a.} \quad & Q = V^{\frac{1}{4}} T^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

2. Plantee la función lagrangiana y las condiciones de primer orden correspondientes.
Respuesta. La función lagrangiana es:

$$\mathcal{L}(V, T, \lambda) = 10V + 5T + 1000 - \lambda(V^{\frac{1}{4}} T^{\frac{1}{2}} - Q)$$

Para encontrar las CPOs, simplemente debemos derivar con respecto a los factores

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V} = 10 - \frac{1}{4}\lambda V^{-\frac{3}{4}} T^{\frac{1}{2}} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T} = 5 - \frac{1}{2}\lambda V^{\frac{1}{4}} T^{-\frac{1}{2}} = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = V^{\frac{1}{4}} T^{\frac{1}{2}} - Q = 0 \tag{3}$$

3. Encuentre las cantidades de Vehículos (V) y Personal (T) que son candidatos a mínimo usando el método de Lagrange.
Respuesta. Paso 1: Primero perciba que si $V = 0$ e $L = 0$ la calificación de restricción no es satisfecha. Todavía, como implícitamente suponemos $Q > 0$, este punto no satisface el conjunto restricción. Luego, no llevamos ningún candidato de este paso. En lo que sigue verificamos las condiciones de Lagrange. De (1):

$$\lambda = 40 V^{\frac{3}{4}} T^{\frac{-1}{2}}$$

De (2):

$$\lambda = 10 V^{\frac{-1}{4}} T^{\frac{1}{2}}$$

Igualando λ, podemos obtener una relación entre V y T.

$$40V^{\frac{3}{4}}T^{\frac{-1}{2}} = 10V^{\frac{-1}{4}}T^{\frac{1}{2}}$$

Simplificando:

$$4V = T$$

Luego usando (3):

$$V^{\frac{1}{4}}(4V)^{\frac{1}{2}} - Q = 0$$

Entonces:

$$V^* = \left(\frac{Q}{2}\right)^{\frac{4}{3}}$$

$$T^* = 4\left(\frac{Q}{2}\right)^{\frac{4}{3}}$$

Por último para obtener el costo mínimo, solo debemos reemplazar los valores obtenidos en la función de costos:

$$C(V^*, T^*) = 10V^* + 5T^* + 1000 = 10\left(\frac{Q}{2}\right)^{\frac{4}{3}} + 5 \times 4\left(\frac{Q}{2}\right)^{\frac{4}{3}} + 1000 = 30\left(\frac{Q}{2}\right)^{\frac{4}{3}} + 1000$$

4. ¿Son las condiciones anteriores necesarias y suficientes para que V* y L* del ítem anterior sean los valores que minimizan el costo de BLIX?
   Respuesta. La función de costos es convexa ($C = 10V + 5T + 1000$) y la función de producción es cóncava $Q = V^{\frac{1}{2}}T^{\frac{1}{4}}$ es cóncava (verifique usando la condición de la hessiana). Además como $\lambda > 0$, tenemos que:

$$\tilde{\mathcal{L}}(V,T) = \underbrace{10V + 5T + 1000}_{\text{convexa}} + \underbrace{(-\lambda)(V^{\frac{1}{2}}T^{\frac{1}{4}} - Q)}_{\text{convexa si } \lambda \geq 0}$$

   Sabemos que la suma de dos funciones convexas, es convexa. Por lo tanto en este caso, sabemos que los puntos encontrados están minimizando el costo, pues $\lambda = 40V^{\frac{3}{4}}T^{\frac{-1}{2}} \geq 0$

4.10. Maximización de Utilidades en la Firma

Una empresa tiene una planta de producción de viseras y está interesada en encontrar la combinación óptima, en cuanto a lograr el menor costo de producción, de horas de trabajo y horas de capital. Suponga, por simplicidad, que la empresa paga un salario \$1 por cada unidad de trabajo y un precio \$1 por cada unidad de capital. Por contrato la empresa debe producir exactamente 1 visera (está recién empezando). La función de producción está dada por

$$Y = K^{1/2}L^{1/2},$$

donde Y es el número de viseras producidas, y K y L son las unidades de capital y trabajo respectivamente. Dado el salario y el precio del capital la función de costos es

$$C = K + L$$

donde C es el costo total de producción.
Se le pide

1. Plantee el Lagrangeano para este problema de optimización. Encuentre los puntos críticos (K^*, L^*) y los λ^* asociados.

2. Clasifique los puntos críticos como máximo o mínimo globales.

3. En equilibrio en un mercado competitivo esta empresa venderá su producción a un precio P igual al costo marginal de producción. Calcule el precio P.

4. Suponga ahora que usted gana un segundo contrato, entonces ahora debe producir 2 viseras. Usted se da cuenta que tiene dos opciones: aumentar la producción en su planta actual o hacer crecer la empresa comprando una segunda planta igual a la actual. De acuerdo a los resultados obtenidos, ¿qué le conviene hacer?

4.11. Localización óptima

Una tienda busca optimizar su localización definida en términos de las coordenadas (x_1, x_2), maximizando su ganancia definida como:

$$\pi(x_1, x_2) = 100 + 10x_1 + 4x_2 - x_1^2 - x_2^2$$

1. Verifique si se cumple alguna condición de suficiencia que permita anticipar que el punto crítico será un máximo local, máximo global, o máximo global único. Fundamente su respuesta.

2. Resuelva el problema de optimización e indique cuál es la ganancia máxima.

3. Suponga que cambia el plan regulador, y ahora restringe la ubicación de locales comerciales. El nuevo plan admite dos posibilidades: que la tienda se ubique en una coordenada con $x_1 = 10$, o que se ubique en una coordenada que satisface $x_1 + x_2 = 10$. Resuelva en cada caso utilizando el método de Lagrange e indique cuál de las dos opciones es más conveniente para la tienda.

Respuesta.

1. Las segundas derivadas son $\pi_{11} = \pi_{22} = -2$ y $\pi_{12} = \pi_{21} = 0$, por lo que la matriz hesiana es definida negativa y la función objetivo es estrictamente cóncava por lo que será un máximo global único.

2. Las CPO son

$$\pi_1 = 10 - 2x_1 = 0$$

$$\pi_2 = 4 - 2x_1 = 0$$

Luego, la ubicación ópima es $(x_1^*, x_2^*) = (5, 2)$, y la ganancia máxima es $\pi^* = 129$

Usando el lagrangeano definido como

$$\mathcal{L} = 100 + 10x_1 + 4x_2 - x_1^2 - x_2^2 + \lambda(10 - x_1)$$

se obtiene $x_2^{**} = 2$, permitiendo una ganancia de $\pi^{**} = 104$

Usando el lagrangeano definido como

$$\mathcal{L} = 100 + 10x_1 + 4x_2 - x_1^2 - x_2^2 + \lambda(10 - x_1 - x_2)$$

se obtiene $x_2^{***} = 3{,}5$ y x_1^{***} permitiendo una ganancia de $\pi^{***} = 124{,}5$.

4.12. Rendimiento y estudio

Un estudiante que debe prepararse para una prueba busca maximizar su *bienestar esperado*, f medido como su rendimiento total esperado en la prueba menos su esfuerzo. Esta prueba es de un ramo de aplicaciones, en el que su rendimiento esperado en nota, R, es (literalmente) el producto de su tiempo de estudio en los dos tópicos base del curso, P y Q. Su esfuerzo es una fracción de la suma de los cuadrados de los tiempos de estudio más el cuadrado de la nota esperada (pues hay que responder la prueba igual, aparte del tiempo de estudio, y eso requiere esfuerzo).

El estudiante busca elegir la cantidad óptima de tiempo de estudio P y Q y rendimiento esperado R para maximizar, así, el siguiente programa:

$$\max_{P,Q,R} \; f(P,Q,R) = R - 0{,}25 \cdot (P^2 + Q^2 + R^2)$$

sujeto a,

$$g(P,Q,R) = R - P \cdot Q = 0$$

Importante: En este ejercicio, P y Q son *variables centradas*. Eso quiere decir que los dominios de P y Q se encuentran entre -12 y $+12$ horas (para un total de 24 horas en un día), y un valor de, por ejemplo, $Q = -9$ implica estudiar $12 - 9 = 3$ horas esa materia.

1. Formule el problema de maximización de acuerdo al método de Lagrange.

   Respuesta.
   $$\mathcal{L}(P,Q,R,\lambda) = R - 0{,}25 \cdot (P^2 + Q^2 + R^2) + \lambda(P \cdot Q - R)$$

2. Utilice el problema anteriormente planteado para escribir las condiciones necesarias de primer orden para solucionar el problema, y encuentre **todos** los puntos críticos (P,Q,R) y λ (o puntos estacionarios de $\mathcal{L}$) que cumplan esas condiciones. (**Nota**: NO es necesario que verifique la condición de calificación de restricciones)

   Respuesta.
   $$\mathcal{L}(P,Q,R,\lambda) = R - 0{,}25 \cdot (P^2 + Q^2 + R^2) + \lambda(P \cdot Q - R)$$
   $$\mathcal{L}_P = -0{,}5 \cdot P + \lambda Q = 0$$
   $$\mathcal{L}_Q = -0{,}5 \cdot Q + \lambda P = 0$$
   $$\mathcal{L}_R = 1 - 0{,}5 \cdot R - \lambda = 0$$
   $$PQ - R = 0$$

   Despejando, se puede ver que $(P,Q,R,\lambda) = (0,0,0,1)$ es un punto crítico de la función. Si ahora, suponemos que $P \neq 0$, tenemos que:

   $$1/\lambda = 2P/Q = 2Q/P \implies Q^2 = P^2 \implies P = \pm Q$$

   Resolviendo, los puntos críticos adicionales sin raíces imaginarias que surgen de despejar son $(P,Q,R,\lambda) = (1,1,1,\frac{1}{2})$ y $(P,Q,R,\lambda) = (-1,-1,1,\frac{1}{2})$.

3. (6 puntos) Encuentre aquellos puntos que son candidatos a máximo de entre los puntos críticos antes obtenidos. (**Nota**: NO se pide verificar si son un óptimo global o no)

   Respuesta.
   $$f(P,Q,R) = f(0,0,0) = 0$$
   $$f(P,Q,R) = f(-1,-1,1) = 1/4$$
   $$f(P,Q,R) = f(1,1,1) = 1/4$$

   Así, los puntos críticos $(1,1,1)$ y $(-1,-1,1)$ son candidatos a máximo.

4. Suponga ahora que el parámetro 0,25 que multiplica la función de esfuerzo original fuese reemplazado por un parámetro general, digamos, β, que puede tomar valores entre 0,1 y 0,25. Resuelva ahora, en vez de usar el Lagrangeano, reemplazando la función de restricción $R = PQ$ en el objetivo. ¿Cómo cambiaría el bienestar esperado óptimo a medida que β se mueve en dirección a 0,15? Interprete.

   Respuesta.

   El problema ahora se reduce a replantear la expresión como el $f(P,Q,R)$ original, reemplazando la restricción $R = PQ$. Llamaremos eso como $\tilde{f}(P,Q)$:

$$max \tilde{f}(P,Q) = PQ - \beta \cdot (P^2 + Q^2 + P^2 \cdot Q^2)$$

   De ahí, las CPO vienen dadas por:

$$\tilde{f}_P = Q - \beta(2P + 2P \cdot Q^2) = 0$$
$$\tilde{f}_Q = P - \beta(2Q + 2Q \cdot P^2) = 0$$

   Despejando, y eliminando los casos imaginarios que surgen (porque β está entre 0,1 y 0,25), los puntos críticos sin raíces complejas que surgen de resolver, son:

$$(P^*, Q^*) = (\pm\sqrt{\frac{0{,}5-\beta}{\beta}}, \pm\sqrt{\frac{0{,}5-\beta}{\beta}}) = (\pm\sqrt{\frac{1}{2\beta} - 1}, \pm\sqrt{\frac{1}{2\beta} - 1})$$
$$\implies \tilde{f}(P^*, Q^*) = (\frac{1}{2\beta} - 1) - \beta[2 \cdot (\frac{1}{2\beta} - 1) + (\frac{1}{2\beta} - 1)^2] = \beta + \frac{1}{4\beta} - 1$$

$$(P^{**}, Q^{**}) = (0,0) \implies \tilde{f}(P^{**}, Q^{**}) = 0$$

   Primero, se descarta el punto $(P^{**}, Q^{**}) = (0,0)$, pues igual que antes, no puede ser máximo por sola comparación con los otros dos puntos.

   Los dos puntos restantes, como están, efectivamente resuelven los mismos puntos anteriores para $\beta =$ 0,25, mientras que para $\beta =$ 0,1, el valor del objetivo crece. Ese crecimiento se puede ver de varias formas, una posible es viendo que $\partial\tilde{f}/\partial\beta < 0$ ocupando (P^*, Q^*) como candidato(s). Otro argumento más sencillo pero igual de válido pasa por directamente evaluar $\beta = 0,1$ en vez de $\beta =$ 0,1 en la misma función objetivo, y viendo que en un caso es 0,25, y en el otro da más grande (específicamente 1,6, aunque la prueba es sin calculadora, por lo que basta argumentar que las fracciones simplemente dan más grandes)

4.13. Teorema de la Envolvente I

Consideremos una empresa que fabrica tres artículos A, B y C en cantidades x, y, z respectivamente. La empresa fija los precios de sus artículos según unas funciones decrecientes en la cantidad producida del siguiente modo:

- Un artículo A vale $200 - 4x$ unidades monetarias (u. m.)
- Un artículo B vale $200 - 3y$ u. m.
- Un artículo C vale $100 - z$ u. m.

Además, la empresa ha calculado empíricamente que su costo en función de las cantidades producidas puede aproximarse por la función:

$$C(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 + 100z + 100$$

En la actualidad, el nivel de producción total es de 58 unidades, pero la empresa considera que puede aumentarlo en una unidad sin incumplir sus restricciones técnicas.

1. Calcule los precios unitarios óptimos de cada uno de los tres tipos de artículos y el beneficio óptimo actual.

   Respuesta. El problema que queremos resolver es el problema de la empresa antes de darse cuenta que puede subir un poco la producción total. Luego, tenemos el siguiente problema:

$$\max_{x,y,z} \quad (\text{Ingresos} - \text{Costos}) = (200-4x)x + (200-3y)y + (100-z)z - (x^2+2y^2+z^2+100z+100)$$

   sujeto a:

$$x+y+z = 58$$

   Uno puede verificar usando la hessiana que la función objetivo es cóncava (hágalo). Como la restricción es lineal, tendremos que la lagrangiana es cóncavo para todo λ y las condiciones suficientes para máximo global se cumplen. Planteamos la lagrangiana:

$$\mathcal{L} = (200-4x)x + (200-3y)y + (100-z)z - (x^2+2y^2+z^2+100z+100) + \lambda(58-x-y-z)$$

   Encontramos las CPOs:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 200 - 10x - \lambda = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 200 - 10y - \lambda = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = -4z - \lambda = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 58 - x - y - z = 0$$

   Usando las CPOs, podemos encontrar el punto crítico

$$x^* = 24$$
$$y^* = 24$$
$$z^* = 10$$
$$\lambda^* = -40$$

   Para obtener los precios, solo debemos reemplazar en las ecuaciones dadas en el enunciado:

$$p_x^* = 104$$
$$p_y^* = 128$$
$$p_z^* = 90$$

   Finalmente la función de beneficio evaluado en el óptimo es:

$$\pi(x^*, y^*, z^*) = 3540$$

2. Razone si a la empresa le conviene aumentar su producción.

   Respuesta. Por el Teorema de la Envolvente, tenemos que aumentar la producción total sube las ganancias de la empresa en $\lambda = -40 < 0$. Luego, no le conviene.

4.14. Teorema de la Envolvente II

Resolver los siguientes problemas de optimización con restricciones de igualdad:

a) máx $f(x, y) = -x^2 - y^2$ s.a. $ax + y = 1$ con parámetro $a > 0$. Si $f^*(a)$ denota la función valor mínimo de f, con el teorema de la envolvente determina $\frac{df^*}{da}$.

Respuesta.

Uno puede verificar que la función objetivo es cóncava (hágalo). Como la restricción es lineal, tenemos que la lagrangiana es cóncava para todo λ. Luego, las CPO de la lagrangiana son suficientes para el óptimo. Planteamos la lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -x^2 - y^2 + \lambda(1 - ax - y)$$

Encontramos las CPOs:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -2x - a\lambda = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = -2y - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 1 - ax - y = 0$$

Usando las CPOs, tenemos el siguiente punto crítico de $\mathcal{L}$:

$$x^* = \frac{a}{a^2 + 1}$$

$$y^* = \frac{1}{a^2 + 1}$$

$$\lambda^* = \frac{-2}{a^2 + 1}$$

Perciba que $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a} = -\lambda x$. Luego por el Teorema de la Envolvente $\frac{\partial f^*}{\partial a} = -\lambda^* x^* = -\left(\frac{-2}{a^2+1}\right)\frac{a}{a^2+1}$.

b) mín $f(x, y) = ax + by$ s.a. $lnx + y = 1$ con parámetros $a > 0; b > 0$. Si $f^*(a, b)$ denota la función valor mínimo de f, con el teorema de la envolvente determina: $\frac{\partial f^*}{\partial a}$ y $\frac{\partial f^*}{\partial b}$

Respuesta.

La lagrangiana es:

$$\mathcal{L} = ax + by - \lambda(\ln x + y - 1)$$

Vamos intentar usar las condiciones suficientes para mínimo global para resolver el problema, una vez que tengamos encontrados los puntos críticos. Las CPO son:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = a - \frac{\lambda}{x} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = b - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 1 - \ln x - y = 0$$

Resolviendo el sistema arriba tenemos:

$$x^* = \frac{b}{a}$$

$$y^* = 1 - \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\lambda^* = b$$

Para verificar si las condiciones suficientes se cumplen tenemos que verificar si $\tilde{\mathcal{L}}(x,y) = ax + by - b(\ln x + y - 1)$ es convexa. La hessiana es:

$$H\tilde{\mathcal{L}}(x,y) = \begin{pmatrix} b/x^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El menor principal de orden 2 es 0. Los menores de orden 1 son $b/x^2 \geq 0$ y 0. Luego, la hessiana es positiva semi-definida y tenemos que el punto crítico efectivamente es un mínimo global. Aplicando el teorema de la envolvente tenemos que

$$\frac{df^*}{da} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a}(x^*, y^*, \lambda^*) = x^* = \frac{b}{a}$$

$$\frac{df^*}{db} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial b}(x^*, y^*, \lambda^*) = y^* = 1 - \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

c) mín $f(x,y) = x + ay$ s.a. $\ln(xy) = a$ con parámetro $a > 0$. Si $f^*(a)$ denota la función valor mínimo de f, con el teorema de la envolvente determina $\frac{df^*}{da}$.

Respuesta.

La lagrangiana es

$$\mathcal{L} = x + ay - \lambda(\ln(xy) - a)$$

Vamos intentar usar las condiciones suficientes para máximo global para resolver el problema una vez que tengamos encontrados los puntos críticos. Las CPO son:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 1 - \frac{\lambda}{x} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = a - \frac{\lambda}{y} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = a - \ln(xy) = 0$$

Resolviendo el sistema arriba encontramos los puntos críticos:

$$x^* = ae^{\frac{1}{2}(a - \ln a)}$$

$$y^* = e^{\frac{1}{2}(a - \ln a)}$$

$$\lambda^* = ae^{\frac{1}{2}(a - \ln a)}$$

Para verificar si las condiciones suficientes se cumplen tenemos que verificar si $\tilde{\mathcal{L}}(x,y) = x + ay - ae^{\frac{1}{2}(a - \ln a)}(\ln(xy) - a)$ es convexa. La hessiana es:

$$H\tilde{\mathcal{L}}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{a}\mathrm{e}^{\frac{a}{2}}}{x^2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{a}\mathrm{e}^{\frac{a}{2}}}{y^2} \end{pmatrix}$$

Uno puede verificar fácilmente que todos menores principales son positivos. Luego, el punto crítico encontrado es un punto de mínimo. Aplicando el Teorema de la Envolvente tenemos:

$$\frac{df^*}{da} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a}(x^*, y^*, \lambda^*) = y^* + \lambda^* = e^{\frac{1}{2}(a - \ln a)} + ae^{\frac{1}{2}(a - \ln a)} = (1 + a)\, e^{\frac{1}{2}(a - \ln a)}$$

4.15. Teorema de la Envolvente III

Sea $U(x, y)$ una función de utilidad y sean p_x, p_y los precios de los bienes x e y. Se desea maximizar la función de utilidad, dado un presupuesto "c", es decir:

$$\text{máx}\, U(x, y)$$

s.a:

$$p_x * x + p_y * y = c; \qquad px, py, c > 0$$

Donde x e y son las variables de decisión y los parámetros p_1, p_2, c son consideradas como variables exógenas. Asumiendo que U^* es la función valor: Probar que en el óptimo se cumplen las siguientes relaciones:

1. $\frac{\partial U^*}{\partial p_x} = -\lambda^* x^*$

   Respuesta. Para responder esta pregunta debemos usar el Teorema de la Envolvente. La lagrangiana quedara expresada de la siguiente forma:

   $$\mathcal{L} = U(x, y) - \lambda(p_x x + p_y y - c)$$

   Suponga (x^*, y^*) es la solución y un punto crítico de lagrangiana, con multiplicador asociado λ^*. Defina:

   $$\mathcal{L}^* = U(x^*, y^*) - \lambda^*(p_x x^* + p_y y^* - c)$$

   Usando el teorema de la envolvente, vamos a tener:

   $$\frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial p_x} = \frac{\partial U^*}{\partial p_x} = -\lambda^* x^*$$

2. $\frac{\partial U^*}{\partial p_y} = -\lambda^* y^*$
   Respuesta.

   Repetimos el procedimiento anterior:

   $$\frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial p_y} = \frac{\partial U^*}{\partial p_y} = -\lambda^* y^*$$

3. $\frac{\partial U^*}{\partial c} = \lambda^*$

   Respuesta. Repetimos el procedimiento anterior:

   $$\frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial c} = \frac{\partial U^*}{\partial c} = \lambda^*$$

4.16. Teorema de la Envolvente IV

Para el problema de optimizar la función

$$f(x, y) = ax^2 + y^2$$

sujeta a:

$$ax + y = 1, \qquad a > 0$$

Se pide,

1. Encuentre el mínimo global del problema de optimización.
2. Calcule la función de valor f^*.
3. Usando el teorema de la envolvente obtenga $\frac{df^*}{da}$. Interprete gráficamente el significado de esta derivada.
4. Derive la función de valor para obtener $\frac{df^*}{da}$ y compruebe que se cumple el teorema de la envolvente.

4.17. Monopolio con Discriminación de Precios

La fábrica de una firma monopólica se encuentra en la mitad del camino entre 2 cuidades. Los costos de producción en dicha fábrica son cuadráticos y están definidos por $C_{\text{prod}}(q) := \frac{q^2}{2}$. Por otro lado, el costo de transporte es 10 dólares por unidad a cada ciudad. Las demandas de las ciudades 1 y 2 están definidas por:

$$q_1(p_1) = 100 - \frac{p_1}{2}, \quad q_2(p_2) = 75 - \frac{p_2}{4}$$

1. Suponga que el monopolista sólo puede cobrar un único precio para ambas cuidades. Escriba el problema que resuelve el monopolista. Calcule el precio de venta, cuánto vende en cada cuidad y su utilidad.

   Respuesta.
   Respuesta: Notemos que no se permite hacer discrimininación de tercer grado. Para resolver el problema, es necesario calcular la función de demanda agregada. Para esto, se observa que si $p = 200$, $q_1 = 0$ y $q_2 > 0$, por lo que el mercado 1 es más sensible que el 2 a aumentos de precio.

   $$Q(P) = \begin{cases} 175 - \frac{3P}{4} & ;\ P \leq 200 \\ 75 - \frac{P}{4} & ;\ P \in [200, 300] \end{cases}$$

   $$P(Q) = \begin{cases} \frac{700}{3} - \frac{4P}{3} & ;\ Q \in [25, 175] \\ 300 - 4Q & ;\ Q \in [0, 25] \end{cases}$$

   Probemos resolver con el primer rango:

   $$\begin{array}{ll} \max\limits_{Q} & \pi = \left(\frac{700}{3} - \frac{4Q}{3}\right) Q - \left(\frac{(q_1+q_2)^2}{2} + 10(q_1 + q_2)\right) \\ s.a. & Q \geq 0 \\ c.p.o: & \frac{\partial \pi}{\partial Q} = \frac{700}{3} - \frac{8Q}{3} - Q - 10 = 0 \end{array}$$

   Por la c.p.o. se tiene que $Q^{sd} = 60{,}9$, reemplazando en la demanda, $P^{sd} = 152,1$. Este valor pertenece al rango de precios acorde a la función de demanda, por lo que este resultado es consistente. Reemplazando en las funciones de demanda de cada cuidad, se tiene que $q_1 = 23{,}95$ y $q_2 = 36{,}95$ y las utilidades serán $\pi^{sd} = 6{,}799,5$.

2. Plantee y resuelva el problema de la firma si ahora puede discriminar geográficamente. Determine precios, cantidades y utilidad.
   Respuesta.
   Respuesta: En este caso, la discriminación es de tercer grado. Esto porque se puede distinguir entre los consumidores de ambas cuidades. Se resuelve el problema:

   $$\begin{array}{ll} \max\limits_{q_1,q_2} & \pi = (200 - 2q_1)q_1 + (300 - 4q_2)q_2 - \left(\frac{(q_1+q_2)^2}{2} + 10(q_1 + q_2)\right) \\ s.a. & q_1, q_2 \geq 0 \\ c.p.o,1: & \frac{\partial \pi}{\partial q_1} = 200 - 4q_1 - q_1 - q_2 - 10 = 0 \\ c.p.o,1: & \frac{\partial \pi}{\partial q_2} = 300 - 8q_2 - q_1 - q_2 - 10 = 0 \end{array}$$

De las 2 c.p.o, se obtienen las ecuaciones:

$$q_1 = \frac{190 - q_2}{5} \quad q_2 = \frac{290 - q_1}{9}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, $q_1 = 32,3$ y $q_2 = 28,6$ por lo que $Q = 60{,}9$. Reemplazando en las funciones de demanda de cada mercado, $p_1 = 135,4$ y $p_2 = 185,6$. Con esto, las utilidades son $\pi^{cd} = 7{,}218,2$. Lo que efectivamente es mayor al resultado del caso anterior.

3. Suponga discriminación geográfica y que además la firma puede discriminar en primer grado en el segundo mercado. Escriba este nuevo problema de optimización y resuélvalo. ¿Aumenta la utilidad del monopolista con respecto al inciso anterior?

   Respuesta.

   Respuesta: Si el monopolista solo puede discriminar en primer grado en el mercado 2. El ingreso total del mercado 2 es la valoración por consumir el bien por eso es el área bajo la demanda inversa. El costo marginal y el ingreso marginal 1 no cambian. El ingreso marginal 2 ahora es: $IMg(q_2) = 300 - 4q_2$. Dado esto, no se puede encontrar un precio para el mercado 2, sólo para el 1.

$$\begin{array}{ll} \max\limits_{q_1,q_2} & \pi = (200 - 2q_1)q_1 + \int_0^{q_2} p_2^d(x)\,dx - \left(\frac{(q_1+q_2)^2}{2} + 10(q_1+q_2)\right) \\ s.a. & q_1, q_2 \geq 0 \\ c.p.o{,}1: & \frac{\partial \pi}{\partial q_1} = 200 - 4q_1 - q_1 - q_2 - 10 = 0 \\ c.p.o{,}1: & \frac{\partial \pi}{\partial q_2} = 300 - 4q_2 - q_1 - q_2 - 10 = 0 \end{array}$$

   De las 2 c.p.o, se obtienen las ecuaciones:

$$q_1 = \frac{190 - q_2}{5} \quad q_2 = \frac{290 - q_1}{5}$$

   Resolviendo el sistema de ecuaciones, se obtiene $q_1 = 27,5$ y $q_2 = 52,2$ lo que implica que $Q = 80$. El precio en el mercado 1 es $p_1 = 145$ las utilidades son $\pi^c = 7{,}426,86$. El mejor caso para el monopolio es el de discriminación de primer grado en el mercado 2. Esto es porque el payoff por el mercado es más alto con este tipo de discriminación. En comparación a los excedentes respecto al caso b.

4.18. Lagrange

Considere el siguiente problema de maximización:

$$\begin{array}{ll} \max\limits_{x,y} & f(x,y) = -(x-1)^2 - (y-1)^2 \\ \text{s.a.} & g(x,y) = x + y = I \end{array}$$

donde $I > 0$ es un parámetro. Se pide:

1. Encuentre un máximo global suponiendo que $I = 2$. Debes justificar de manera clara que condiciones estás utilizando para garantizar que un punto es un máximo global. Si necesitas usar que alguna función es cóncava en tu respuesta, debes mostrarlo verificando el signo de la matriz hessiana asociada a la función.

   Respuesta. La lagrangiana de este problema es:

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = -(x-1)^2 - (y-1)^2 - \lambda[x + y - I]$$

   La restricción es lineal, por lo que es cóncava y convexa. Además la función objetivo es cóncava (el Hessiano es negativo definido):

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

por lo que la solución será un máximo.

Alternativamente, para un dado λ, defina $\tilde{\mathcal{L}}(x,y) = \mathcal{L}(x,y,\lambda)$. Note que:

$$H\tilde{\mathcal{L}}(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

El menor principal dominante de orden 2 es 4, y el menor principal dominante de orden 1 es -2. Luego, la lagrangiana es cóncava para cualquier λ y todo punto crítico de $\mathcal{L}(x,y,\lambda)$ lleva a un máximo global. Las CPO de $\mathcal{L}$ son:

$$-2(x-1) = \lambda \tag{1}$$
$$-2(y-1) = \lambda \tag{2}$$
$$x + y = I \tag{3}$$

Por (1) y (2) tenemos que:

$$-2(x-1) = -2(y-1)$$
$$x = y$$

Luego, por (3) tenemos que $x = y = \frac{I}{2}$. Con $I = 2$ tenemos que $x = y = 1$ es el máximo global. El multiplicador asociado es dado por $\lambda = -2\,(1-1) = 0$.

2. Repita los pasos del ítem anterior suponiendo que $I = 1$.

   Respuesta. Usamos la misma solución del ítem anterior. Ahora tenemos $x = y = \frac{I}{2} = 0{,}5$. El multiplicador asociado es $\lambda = -2\,(0{,}5-1) = 1$.

3. Denote por $f^*(I)$ la función valor de este problema. Compute $\frac{df^*}{dI}$ cuando $I = 2$ e $I = 1$. Interprete el signo de estas derivadas en cada caso.

   Respuesta. Usando el Teorema de la Envolvente tenemos que $\frac{df^*}{dI} = \lambda$. Luego, con $I = 2$ tenemos $\frac{df^*}{dI} = 0$ y con $I = 1$ tenemos que $\frac{df^*}{dI} = 1$.

   Cuando $I = 2$ la solución es un máximo global de la función $f(x,y)$. Luego, cualquier cambio marginal en I no va tener impacto en la función valor, pues ya estamos un punto crítico de la función objetivo: cualquier cambio marginal en x e y no afecta $f(x,y)$.

   Con $I = 1$, la función objetivo es estrictamente creciente en x e y. Luego, si I sube, esto sube el valor de la función objetivo, pues permite al agente elegir mayores valores de x e y.

4.19. Optimización Aplicado a Inversiones Financieras

Una persona puede invertir en tres instrumentos financieros. El primero es un depósito a plazo con poco retorno, de solo 1 %. El segundo es un fondo mutuo que retorna más (5 %), pero es un poco más riesgoso. El tercero es una acción en una *Start-up*, que es extremadamente riesgosa pero tiene el mayor retorno de las 3 opciones, 9 %. A la persona le han dicho que no debe poner todos los huevos en la misma canasta, por lo que el riesgo de invertir x en el depósito a plazo, y en el fondo mutuo y z en la acción es

$$x^2 + 2y^2 + 4z^2$$

La persona tiene \$1 que repartir entre las 3 inversiones y quiere obtener el mayor retorno posible, penalizando por su riesgo. En particular quiere resolver:

$$\begin{aligned} \max_{x,y,z\in[0,1]} \quad & x + 5y + 9z - \phi(x^2 + 2y^2 + 4z^2) \\ s.a. \quad & x + y + z = 1 \end{aligned}$$

donde $\phi \in (0,\infty)$ es el parámetro que controla cuánto le importa el riesgo a la persona. Responda:

1. Asumiendo que $\phi > 4$, resuelva el problema. Recuerde comprobar que su candidato es la solución.

   Respuesta. El lagrangiano de este problema es

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = x + 5y + 9z - \phi(x^2 + 2y^2 + 4z^2) - \lambda(x + y + z - 1)$$

   El gradiente de la restricción es $(1, 1, 1)$, que nunca se anula, luego procedemos a mirar las CPO:

$$\begin{aligned} 1 - 2\phi x - \lambda &= 0 \\ 5 - 4\phi y - \lambda &= 0 \\ 9 - 8\phi z - \lambda &= 0 \end{aligned}$$

   Luego

$$\lambda^* = 1 - 2\phi x^* = 5 - 4\phi y^* = 9 - 8\phi z^*$$

   Juntando de a pares tenemos

$$\begin{aligned} 1 - 2\phi x^* = 5 - 4\phi y^* &\Rightarrow y^* = \frac{x^*}{2} + \frac{1}{\phi} \\ 1 - 2\phi x^* = 9 - 8\phi z^* &\Rightarrow z^* = \frac{x^*}{4} + \frac{1}{\phi} \end{aligned}$$

   Luego, como $x^* + y^* + z^* = 1$ obtenemos

$$\frac{7}{4}x^* + \frac{2}{\phi} = 1 \Rightarrow x^* = \frac{4}{7} - \frac{8}{7\phi}$$

   Y como $\phi > 4$, $x^* \in [0, 1]$. Luego,

$$y^* = \frac{2}{7} + \frac{3}{7\phi}, \qquad z^* = \frac{1}{7} + \frac{5}{7\phi}$$

   Finalmente,

$$\lambda^* = 1 - 2\phi x^* = 1 - \frac{8}{7}\phi + \frac{16}{7} = \frac{23}{7} - \frac{8}{7}\phi$$

   Como $\phi > 4$, $\lambda^* < 0$. Para confirmar que este es el óptimo, notar que $x + 5y + 9z$ es lineal y por lo tanto cóncava. La función $x^2 + 2y^2 + 4z^2$ es convexa pues

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

   Cuyos menores principales dominantes son solo positivos. Como $\phi > 0$, entonces la función

$$-\phi(x^2 + 2y^2 + 4z^2)$$

   es cóncava. La conclusión es que la función objetivo es cóncava. Alternativamente, la matriz hessiana de la función objetivo es

$$H = \begin{pmatrix} -\phi & 0 & 0 \\ 0 & -2\phi & 0 \\ 0 & 0 & -4\phi \end{pmatrix}$$

   que tiene menores principales dominantes $-\phi$, $2\phi^2$ y $-8\phi^3$, que alternan signo, partiendo por negativo. Finalmente, como la restricción es lineal entonces es $\lambda^* g$ es convexa independiente del signo de λ^*. Con esto, $\tilde{\mathcal{L}}$ es cóncava y el punto encontrado es solución.

2. ¿Qué pasa con la solución óptima cuando $\phi \to \infty$? Explique con palabras por qué ocurre esto.

   Respuesta. De la respuesta anterior, si $\phi \to \infty$, entonces $x^* \to \frac{4}{7}$, $y^* \to \frac{2}{7}$ y $z^* \to \frac{1}{7}$. La razón es que cuando el riesgo es cada vez más importante, entonces queremos invertir más en lo menos riesgoso, que es x (en el riesgo solo lo acompaña un 1 pero a y y a z los acompaña un 2 y un 4, respectivamente).

3. Estime el cambio en el óptimo si la persona tuviera \$1,1. ¿Qué signo tiene? ¿Qué pasa cuando $\phi \to \infty$?

   Respuesta. Por lo visto en clases, si el lado derecho de la restricción crece de \$1 a \$1,1, entonces el cambio se estima por el multiplicador de Lagrange, que es $\lambda^* = \frac{23}{7} - \frac{8}{7}\phi$. Como $\phi > 4$, entonces $\lambda^* < 0$. Cuando $\phi \to \infty$, $\lambda^* \to -\infty$.

4. Estime el cambio en el óptimo cuando ϕ crece (no es necesario reemplazar).

   Respuesta. Aplicando el teorema de la envolvente, el cambio en el óptimo se puede estimar mirando la derivada del lagrangiano con respecto a ϕ, que es

$$-\Big((x^*)^2 + 2(y^*)^2 + 4(z^*)^2\Big)$$

5. Encuentre intuitivamente, o resolviendo el problema, la solución óptima cuando $\phi = 0$. Justifique.

   Respuesta. Si $\phi = 0$, el problema es

$$\begin{aligned} \max_{x,y,z\in[0,1]} \quad & x + 5y + 9z \\ s.a. \quad & x + y + z = 1 \end{aligned}$$

   La función objetivo es siempre creciente en todas sus variables, luego es mejor tomar z lo más alto posible y las demás siempre 0, luego en este caso $x^* = y^* = 0$ y $z^* = 1$.

   Si se resuelve usando lagrange se tiene lagrangiano

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = x + 5y + 9z - \lambda(x + y + z - 1)$$

   con CPO

$$\begin{aligned} 1 - \lambda &= 0 \\ 5 - \lambda &= 0 \\ 9 - \lambda &= 0 \end{aligned}$$

   que no tiene solución, es decir, no existe un número λ^* tal que se verifiquen esas CPO. Luego debe ser que la solución está en el borde del conjunto, cuando $x + y + z = 1$ y alguna o algunas de las variables son 0. Probando estos casos se llega a la solución mencionada arriba.

4.20. Condiciones suficientes con distintos signos de λ^*

Considere el siguiente problema de maximización:

$$\max_{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2} \quad 20x_1 + 10x_2 - {x_1}^2 - {x_2}^2 - 25$$

sujeto a

$${x_1}^2 + {x_2}^2 = 5$$

a) Escriba el Lagrangeano y las condiciones de primer orden (CPO) del problema descrito.

b) Indique si las funciones f y g son cóncavas o convexas, donde $f(x_1, x_2) = 20x_1 + 10x_2 - {x_1}^2 - {x_2}^2 - 25$ y $g(x_1, x_2) = {x_1}^2 + {x_2}^2$. ¿Podría asegurar entonces que un punto crítico $\mathbf{x}^*$ será un máximo global del problema si $\lambda^* > 0$? Justifique su respuesta.

c) Muestre que no hay puntos factibles para los cuales el gradiente de g es nulo.

d) Encuentre los dos puntos críticos que satisfacen las CPO antes descritas. Verifique si son máximos o no, justificando su respuesta.

e) Suponga ahora que un cambio regulatorio exige que

$${x_1}^2 + {x_2}^2 = 500$$

Obtenga los nuevos puntos críticos.

f) Encuentre el nuevo máximo, e indique cómo puede estar seguro de que es un máximo global, justificando su respuesta.

Respuesta.

a) El lagrangeano es

$$\mathcal{L} = 20x_1 + 10x_2 - {x_1}^2 - {x_2}^2 - 25 + \lambda(5 - {x_1}^2 - {x_2}^2)$$

con CPO

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 20 - 2x_1 - 2\lambda x_1 = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 10 - 2x_2 - 2\lambda x_2 = 0$$
$$5 - {x_1}^2 - {x_2}^2 = 0$$

b) La función f es cóncava (puede argumentar diciendo que es suma de función lineal y función cóncava, o bien mostrando que el hessiano de f es definido negativo, con $D_1 = -2 < 0$ y $D_2 = 4 > 0$). La función g es convexa (puede argumentar diciendo que es suma de convexas o bien mostrando que el hessiano de g es definido positivo, con $D_1 = 2 > 0$ y $D_2 = 4 > 0$). Luego, si $\lambda^* > 0$ entonces $\tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{x}; \lambda^*) = f(\mathbf{x}) - \lambda^* g(\mathbf{x}) + 5\lambda^*$ es cóncava y el punto crítico será un máximo global.

c) El gradiente de g es nulo en $(0, 0)$, punto que no satisface la restricción.

d) De las CPO obtenemos $x_1 = 2x_2$ y usando la restricción obtenemos dos puntos críticos: $(2, 1)$ con $\lambda^* = 4 > 0$ y $(-2, -1)$ con $\lambda^* = -6 < 0$. El primero es un máximo.

e) La única diferencia respecto de la solución anterior es en la constante de restricción que afceta la tercera CPO:

$$5 - {x_1}^2 - {x_2}^2 = 0$$

De las CPO obtenemos $x_1 = 2x_2$ y usando la restricción obtenemos dos puntos críticos: $(20, 10)$ con $\lambda^* = -0{,}5$ y $(-20, -10)$ con $\lambda^* = -1{,}5$.

f) Ya no es evidente que alguno de los puntos críticos sea máximo global, puesto que $\lambda^* < 0$. Pero al evaluar en $\lambda^* = -0, 5$ vemos que $\tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{x}; \lambda^*)$ es cóncava:

$$\tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{x}; \lambda^*) = 20x_1 + 10x_2 - {x_1}^2 - {x_2}^2 - 25 - 0{,}5(5 - {x_1}^2 - {x_2}^2) = 20x_1 + 10x_2 - 0{,}5{x_1}^2 - 0{,}5{x_2}^2 - 27{,}5$$

Luego, el punto $(20, 10)$ es un máximo global.
Alternativamente, podríamos mostrar que se cumplen las condiciones para el teorema de Weierstrass, por lo que al evaluar estos dos puntos y verificar que $(20, 10)$ entrega un nivel más alto se encuentra el máximo global. Sin embargo, esto requeriría poder calcular, y la prueba es sin calculadora

4.21. ¿Minimizando Costos y Maximizando Utilidades?

Una empresa tiene una función de producción $F(K, L) = K^{1/2} + L^{1/2}$, donde K es la cantidad empleada de capital y L es la cantidad de trabajo. El precio de cada unidad de capital es r, mientras que el precio de cada unidad de trabajo es w. Para sus cálculos considere $r = 1$, $w = 3$.

a) Para un nivel de producción $Q \geq 0$ dado, encuentre el punto crítico para el siguiente problema de minimización de costo:

$$\begin{aligned} \min_{K,L} \quad & rK + wL \\ \text{sujeto a} \quad & F(K, L) = Q \end{aligned}$$

Respuesta. El Lagrange correspondiente a este problema es dado por

$$\mathcal{L}(K, L) = rK + wL - \lambda(K^{1/2} + L^{1/2} - Q)$$

CPO

$$\mathcal{L}_K = 1 - \frac{\lambda}{2K^{\frac{1}{2}}} = 0 \to K^{\frac{1}{2}} = \frac{\lambda}{2}$$
$$\mathcal{L}_L = 3 - \frac{\lambda}{2L^{\frac{1}{2}}} = 0 \to L^{\frac{1}{2}} = \frac{\lambda}{6}$$
$$\mathcal{L}_\lambda = K^{\frac{1}{2}} + L^{\frac{1}{2}} - Q = 0$$

Reemplazando 1) y 2) en 3):

$$\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{6} = Q \to \lambda^* = \frac{3}{2}Q \to K^* = \frac{9}{16}Q^2 \quad ; \quad L^* = \frac{1}{16}Q^2$$

El único punto crítico es:

$$(K^*, L^*) = \left(\frac{9}{16}Q^2, \frac{1}{16}Q^2\right)$$

b) Utilice las condiciones de segundo orden para mostrar que el punto crítico encontrado es efectivamente un mínimo global. Calcule $C(Q) = rK(Q) + wL(Q)$, el costo mínimo de producir Q unidades del producto final.

Respuesta.

$$\mathcal{L}(K, L, \lambda^*) = K + 3L - \frac{3}{2}Q\left(K^{\frac{1}{2}} + L^{\frac{1}{2}} - Q\right) = \underset{Convexo}{K + 6L} + \underset{Convexo}{\left[-\tfrac{12}{7}Q\left(K^{\frac{1}{2}} + L^{\frac{1}{2}}\right)\right]} + \frac{12}{7}Q^2$$

- La función objetivo es lineal, por lo tanto, en este caso, se considerar como convexo
- La función restricción $g(K, L) = K^{\frac{1}{2}} + L^{\frac{1}{2}}$ es cóncava, y como $-\frac{3}{2}Q < 0$, se cumple que: $-\frac{3}{2}Q\left(K^{\frac{1}{2}} + L^{\frac{1}{2}}\right)$ es convexo
- La suma de funciones convexas es CONVEXA, por lo tanto, al Lagrangeano es CONVEXO,

Se concluye entonces que:

El punto crítico:

$$(K^*, L^*) = \left(\frac{9}{16}Q^2, \frac{1}{16}Q^2\right)$$

es un MINIMO GLOBAL

El costo mínimo de producir Q unidades es:

$$C^*(Q) = K^*(Q) + 3L^*(Q) = \frac{9}{16}Q^2 + 3\frac{1}{16}Q^2 = \frac{3}{4}Q^2$$

c) Ahora suponga que la demanda inversa de la empresa está dada por $P(Q) = 11 - 2Q$. En este caso la empresa va a maximizar

$$\max_{Q} \quad (11 - 2Q) \cdot Q - C(Q).$$

Muestre que el punto $Q^* = 2$ es la solución a este problema.

Respuesta. En este caso, la función objetivo a maximizar, se puede expresar de la siguiente forma:

$$(11 - 2Q)\, Q - C\,(Q) = 11Q - 2Q^2 - \frac{9}{16}Q^2 - \frac{3}{16}Q^2 = \mathbf{11}Q - \frac{\mathbf{11}}{\mathbf{4}}Q^{\mathbf{2}}$$

CPO

$$\frac{d\left(11Q - \frac{11}{4}Q^2\right)}{dQ} = 11 - \frac{11}{2}Q = 0 \to Q^* = \mathbf{2}$$

CSO

$$\frac{d^2\left(11Q - \frac{11}{4}Q^2\right)}{dQ^2} = \frac{d\left(11 - \frac{11}{2}Q\right)}{dQ} = -\frac{11}{2} < 0$$

Por lo tanto, el punto crítico $Q^* = 2$ es un MAXIMO GLOBAL

ALTERNATIVAMENTE: $\left(11Q - \frac{11}{4}Q^2\right)$ Es una parábola cóncava, por lo tanto, el punto crítico: $Q^* = \mathbf{2}$ es un MAXIMO GLOBAL

d) Usando su solución en la parte (a), calcule las cantidades óptimas de capital y trabajo que esta firma contrataría.

Respuesta. El punto crítico obtenido fue:

$$(K^*, L^*) = \left(\frac{9}{16}Q^2, \frac{1}{16}Q^2\right)$$

MINIMO GLOBAL con $Q^* = 2$

$$(K^*, L^*) = \left(\frac{9}{4}, \frac{1}{4}\right)$$

Por lo tanto, en este caso las cantidades óptimas de capital y trabajo son: $\frac{9}{4}$ y $\frac{1}{4}$ respectivamente.

e) En la parte (c), la empresa elige directamente la cantidad producida dada la función de costo de producción $C(Q)$. Pero alternativamente la empresa podría elegir los insumos K y L que maximizan

$$\max_{K,L} \quad F(K, L) \cdot (11 - 2F(K, L)) - (rK + wL).$$

Muestre que las cantidades óptimas de K y L encontradas en esta parte son iguales a las encontradas en la parte (d).

Respuesta.

$$\max_{K,L} F(K, L) * (11 - 2F(K, L)) - (K + 3L)$$

$$\max_{K,L}(K^{1/2} + L^{1/2}) * (11 - 2K^{1/2} + L^{1/2}) - (K + 3L)$$

$$\max_{K,L} 11 * (K^{1/2} + L^{1/2}) - 2(K^{1/2} + L^{1/2})^2 - (K + 3L)$$

CPO

$$G_K = \frac{11}{2K^{1/2}} - \frac{2\left(K^{\frac{1}{2}} + L^{\frac{1}{2}}\right)}{K^{\frac{1}{2}}} - 1 = 0 \to \frac{11}{2} - 2K^{\frac{1}{2}} - 2L^{\frac{1}{2}} - K^{\frac{1}{2}} = 0 \to 3K^{\frac{1}{2}} + 2L^{\frac{1}{2}} = \frac{11}{2}$$

$$G_L = \frac{11}{2L^{1/2}} - \frac{2\left(K^{\frac{1}{2}} + L^{\frac{1}{2}}\right)}{L^{\frac{1}{2}}} - 3 = 0 \to \frac{11}{2} - 2K^{\frac{1}{2}} - 2L^{\frac{1}{2}} - 3L^{\frac{1}{2}} = 0 \to 2K^{\frac{1}{2}} + 5L^{\frac{1}{2}} = \frac{11}{2}$$

De donde el punto crítico es:

$$(K^*, L^*) = \left(\frac{9}{4}, \frac{1}{4}\right) = \left(\left(\frac{3}{2}\right)^2, \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$$

Que es el mismo obtenido anteriormente. Nos falta mostrar aún que este punto crítico es óptimo (máximo)
Nótese que

$$G_K = \frac{11}{2K^{1/2}} - \frac{2\left(K^{\frac{1}{2}} + L^{\frac{1}{2}}\right)}{K^{\frac{1}{2}}} - 1 = \frac{11}{2K^{\frac{1}{2}}} - 2\frac{L^{\frac{1}{2}}}{K^{\frac{1}{2}}} - 3 \to G_{KK} = -\frac{11}{4K^{\frac{3}{2}}} + \frac{L^{\frac{1}{2}}}{K^{\frac{3}{2}}} \to G_{KL} = -\frac{1}{K^{\frac{1}{2}} * L^{\frac{1}{2}}}$$

$$G_L = \frac{11}{2L^{1/2}} - \frac{2\left(K^{\frac{1}{2}} + L^{\frac{1}{2}}\right)}{L^{\frac{1}{2}}} - 3 = \frac{11}{2L^{\frac{1}{2}}} - 2\frac{K^{\frac{1}{2}}}{L^{\frac{1}{2}}} - 5 \to G_{LL} = -\frac{11}{4L^{\frac{3}{2}}} + \frac{K^{\frac{1}{2}}}{L^{\frac{3}{2}}}$$

$$H_G = \begin{bmatrix} \frac{4L^{\frac{1}{2}} - 11}{4K^{\frac{3}{2}}} & -\frac{1}{K^{\frac{1}{2}} * L^{\frac{1}{2}}} \\ -\frac{1}{K^{\frac{1}{2}} * L^{\frac{1}{2}}} & \frac{4K^{\frac{1}{2}} - 11}{4L^{\frac{3}{2}}} \end{bmatrix}$$

MPD de orden 1
$D_1 = \frac{4L^{\frac{1}{2}} - 11}{4K^{\frac{3}{2}}}$ NO ES GLOBAL
MPD de orden 2
$D_2 = \frac{4L^{\frac{1}{2}} - 11}{4K^{\frac{3}{2}}} * \frac{4K^{\frac{1}{2}} - 11}{4L^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{KL}$ NO ES GLOBAL.

VEAMOS SI ES LOCAL:

$$H_G(K^*, L^*) = \begin{bmatrix} \frac{4L^{\frac{1}{2}} - 11}{4K^{\frac{3}{2}}} & -\frac{1}{K^{\frac{1}{2}} * L^{\frac{1}{2}}} \\ -\frac{1}{K^{\frac{1}{2}} * L^{\frac{1}{2}}} & \frac{4K^{\frac{1}{2}} - 11}{4L^{\frac{3}{2}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{18}{27} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} & -10 \end{bmatrix}$$

$$D_1\left(\left(\frac{3}{2}\right)^2, \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = -\frac{18}{27} < 0$$

$$D_2\left(\left(\frac{3}{2}\right)^2, \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = \frac{180}{27} - \frac{16}{9} = \frac{132}{9} > 0$$

Por lo tanto: el punto crítico es:

$$(K^*, L^*) = \left(\frac{9}{4}, \frac{1}{4}\right) = \left(\left(\frac{3}{2}\right)^2, \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$$

es un MAXIMO LOCAL

4.22. Desafio: Tanques y Mantequilla

Suponga que una economía cuenta con 100 unidades de trabajo y puede producir con esta unidades tanques (x) o mantequilla (y). La producción de x tanques requiere de x^2 unidades de trabajo y la producción de y Kg. de mantequilla requiere de y^2 unidades de trabajo. Suponga que la sociedad pretende maximizar la función objetivo definida por:

$$F(x,y) = ax + by$$

tal que $a, b > 0$.

a) Determine la frontera de posibilidades de producción de esta economía.

b) Plantee y resuelva el problema de optimización mediante el método de Lagrange.

c) Interprete el rol de los parámetros a, b en la solución del problema. Analice la homogeneidad de $x^*(v)$ y $y^*(v)$ con respecto al vector de parámetros $v = (a, b)$.

4.23. Pregunta Conceptual de Optimización

Sean f, g funciones de dos variables definidas por

$$f(x,y) = 2x^3 - 3x^2, \qquad g(x,y) = (3-x)^3 - y^2$$

Considere el siguiente problema de optimización:

$$\text{máx } f(x,y) \quad \text{sujeto a} \quad g(x,y) = 0$$

Asuma que el problema tiene un máximo global (de hecho tiene solución global pero usted no necesita probar que así es).

a) Determine el conjunto de puntos factibles (i.e., puntos que satisfacen la restricción) que violan la Condición de Calificación de Restricciones (CCR). Ayuda: recuerde que un punto viola la CCR si $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 0$ y $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 0$ en ese punto, y este punto satisface la restricción (es factible).

b) Determine los puntos críticos del langrangeano.

c) Encuentre el óptimo global de este problema.

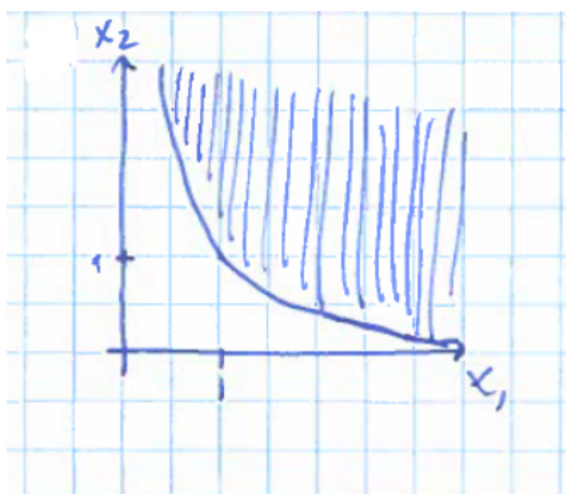
Capítulo 5

Optimización con Restricciones de Desigualdad

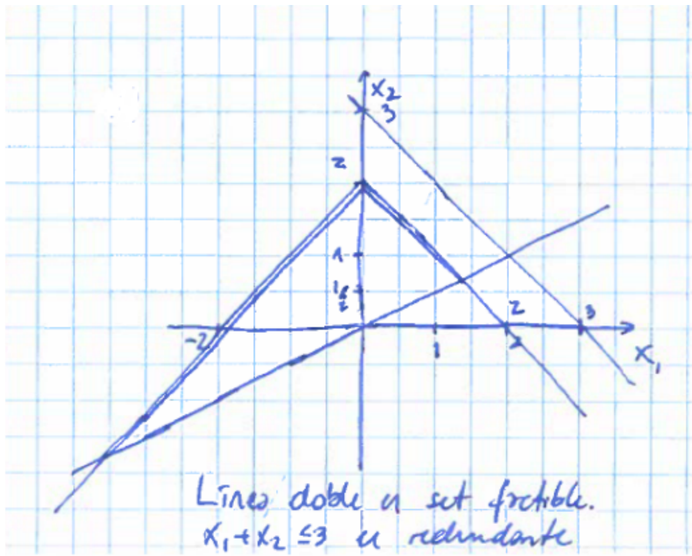
5.1. Set Factible

Para los siguientes sets de restricciones determine el set de puntos factibles y grafíquelo. Determine si alguna de las restricciones es redundante.

1. $x_1^{0,5} x_2^{0,5} \geq 1$ y $x_1, x_2 \geq 0$
   Respuesta.



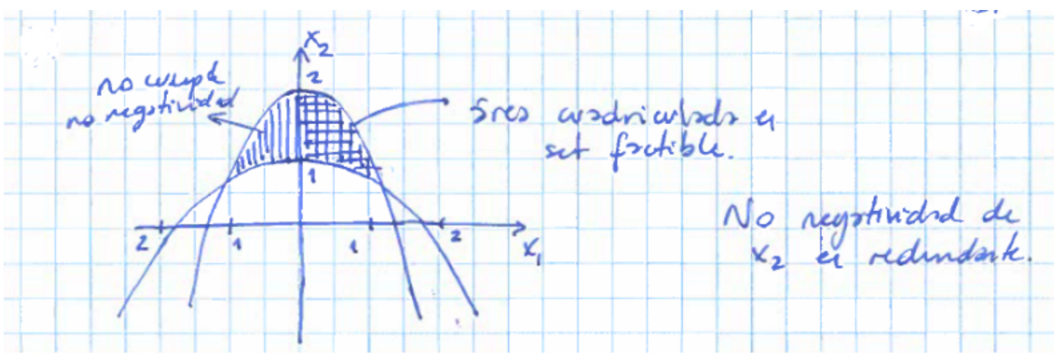
2. $x_1 \leq 2x_2$, $x_2 = 2 - |x_1|$ y $x_1 + x_2 \leq 3$
   Respuesta.
   La línea doble es el set factible. Tenemos que $x_1 + x_2 \leq 3$ es redundante



3. $x_1, x_2 \geq 0$, $x_2 \leq 2 - x_1^2$ y $x_2 \geq 1 - x_1^2/3$

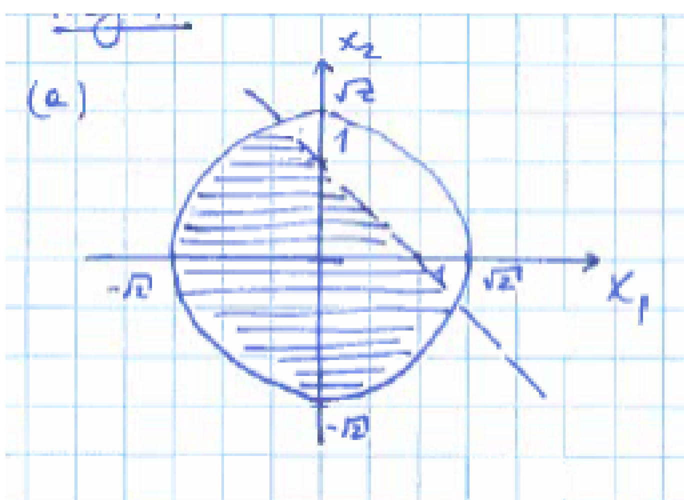
   Respuesta.

   Solo la parte cuadriculada es el set factible. Tenemos que la no negatividad de x_2 es redudante.

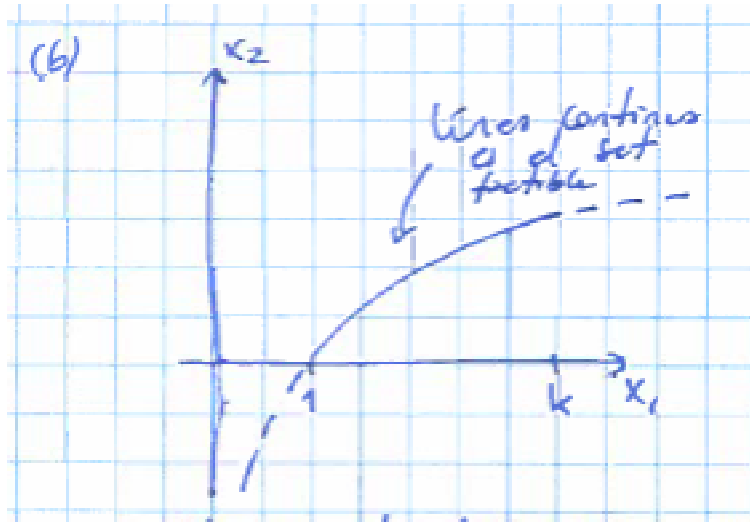


4. $x_1 + x_2 \leq 1$ y $x_1^2 + x_2^2 \leq 2$

   Respuesta.

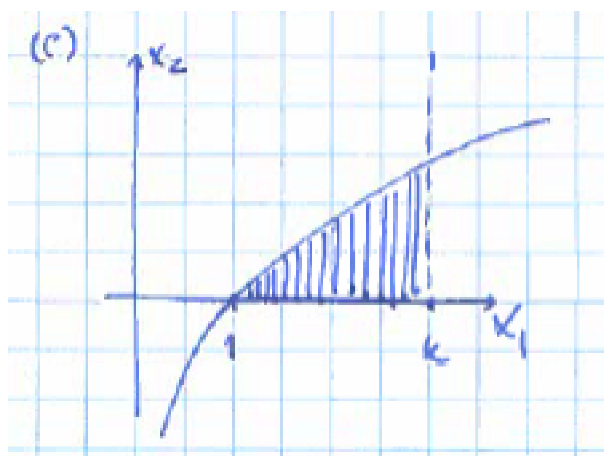


5. $x_2 = \ln(x_1)$, $x_1, x_2 \geq 0$ y $x_1 \leq k$, con $k > 0$
   Respuesta.



No negatividad de x_1 es redundante. Si $k < 1$ el set factible sera vacío.

6. $x_2 \leq \ln(x_1)$, $x_1, x_2 \geq 0$ y $x_1 \leq k$, con $k > 0$
   Respuesta.



Igual que la anterior el set sera vacío si $k < 1$. La no negatividad de x_1 es redundante.

5.2. Optimización Gráfica con Desigualdad

Para los siguientes conjuntos de restricciones, determine y grafique dichos conjuntos. Encuentre gráficamente (o matemáticamente) el punto que maximiza la función $3x_1 + x_2$ en ese set.

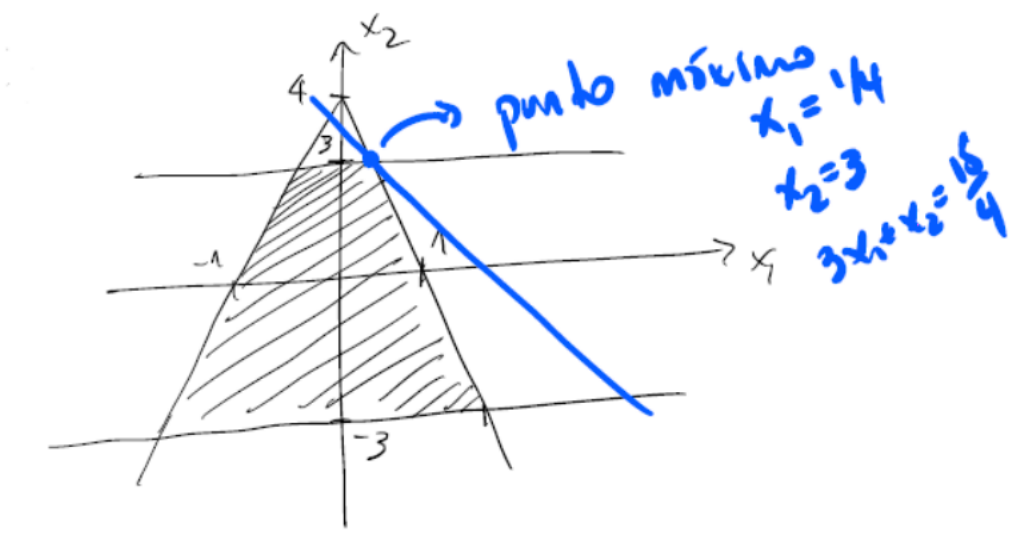
1. $x_1 + x_2 \leq 3$, $x_1^2 \leq 4$
2. $x_2 \leq 4 - 4|x_1|$, $x_2^2 \leq 9$
3. $3x_1 + 2x_2$ sujeto a: $4x_1 + x_2 \leq 10$, $x_1, x_2 \geq 10$

4. $8x_1 + 2x_2$ sujeto a: $4x_1 + x_2 \leq 10$, $x_1, x_2 \geq 0$

Respuesta.

1. Pueden observar el set en la siguiente figura

2. El gráfico muestra el área relevante

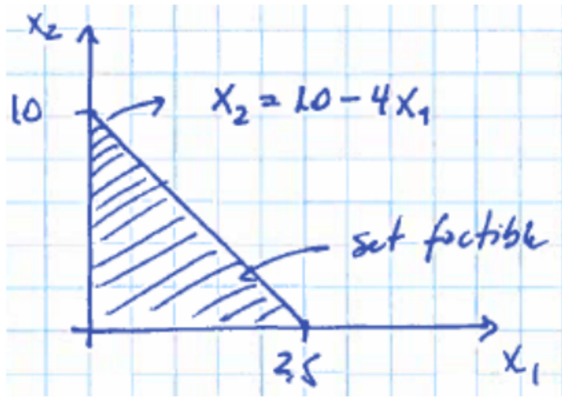


3. Si grafica el set factible, va a obtener que éste es vacío. Por lo tanto no hay solución posible.

4. Función objetivo es $8x_1 + 2x_2$, las curvas de nivel son entonces, $8x_1 + 2x_2 = M$. Esta tiene igual pendiente que la restricción:

$$4x_1 + x_2 = \frac{M}{2}$$

$$x_2 = \frac{M}{2} - 4x_1$$



Como la función objetivo al moverse hacia arriba y a la derecha, el máximo se alcanza cuando la curva de nivel de la función objetivo, coincide con la restricción con igualdad.

El máximo es el set $4x_1 + x_2 = 10$ y el valor máximo es 20

5.3. Optimización con Restricción de Desigualdad

Resuelva el siguiente problema de optimización:

$$\max_{x,y} x^2 + 2y^2 - x$$

$$s.a : x^2 + y^2 \leq 1$$

1. Escriba la función lagrangeana y las condiciones de primer orden
2. Halle todos los pares (x,y) que verifican todas las condiciones necesarias.
3. Halle la solución al problema

Respuesta.

1. El Lagrangeano:

$$\mathcal{L} = x^2 + 2y^2 - x + \lambda(1 - x^2 - y^2)$$

   Las Condiciones de K-T:

$$2x - 1 - 2\lambda x = 0$$
$$4y - 2\lambda y = 0$$
$$\lambda(1 - x^2 - y^2) = 0$$
$$\lambda \geq 0$$
$$(1 - x^2 - y^2) \geq 0$$

2. Vamos a obtener los siguientes casos:
   Caso 1: Restricción no activa, $\lambda = 0$
   Podemos obtener los valores reemplazando en la primera y segunda condiciones de K-T:

$$(x, y) = (\frac{1}{2}, 0)$$

Caso 2.1: Restricción activa $\lambda \geq 0$. Si $y = 0$, $x \neq 0$
Reemplazando en la restricción obtenemos dos casos:

$$x = \pm 1$$

Puntos

$$(x, y, \lambda) = (1, 0, 1/2)$$
$$(x, y, \lambda) = (1, 0, 1/2)$$

El caso simétrico, no tiene sentido, ya que los lambdas se anulan (puede comprobarlo)
Caso 2.2: Restricción activa: Si $y \neq 0$, $x \neq 0$
Ocupamos las dos primeras condiciones de K-T, más la restricción y obtenemos que:

$$(x, y, \lambda) = (\frac{-1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}, 2)$$

3. En primer lugar, como sabemos que conjunto restricción es cerrado y acotado, entonces, sabemos que una solución existe(Weierstrass).
   Luego, evaluando los distintos candidatos a óptimo en la función de valor, podemos obtener que :
   Máximo: $9/4$ en $(-1/2, \pm\sqrt{3}/2)$

5.4. Problema del consumidor

Un consumidor debe elegir cuánto consumir de helado y agua para maximizar su utilidad. Denotamos por x la cantidad consumida de helado y por y la cantidad consumida de agua. La función de utilidad del consumidor es dada por

$$u(x, y) = 2x + y$$

El precio de cada unidad de helado y de agua es igual a 1. Este consumidor no puede gastar más que 10 pesos en el consumo de estos dos bienes. Además, por una restricción médica, para cada unidad de helado consumida el consumidor debe consumir por lo menos 1 unidad de agua. Finalmente, no se puede consumir cantidades negativas de los dos bienes.

1. Plantee el problema de optimización del consumidor.
   Respuesta.
   El problema del consumidor es:
$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & 2x + y \\ \text{s.a.} \quad & x + y \leq 10 \\ & x \leq y \\ & x \geq 0 \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

2. ¿Este problema tiene solución? Justifique.

   Respuesta. Si. Graficar conjunto restricción y argumentar que es cerrado y acotado.

3. Encuentre el (los) punto(s) que cumplen con $x > 0$ e $y > 0$ (simultáneamente) que satisfacen las condiciones de Kuhn-Tucker (debes escribir también los multiplicadores asociados).
   Respuesta.

La función lagrangeana es dada por

$$\mathcal{L}\left(x, y, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\right) = 2x + y - \lambda_1\left[x + y - 10\right] - \lambda_2\left[x - y\right] + \lambda_3 x + \lambda_4 y$$

Las condiciones de KT son dadas por

$$2 - \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \tag{1}$$

$$1 - \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 = 0 \tag{2}$$

$$\lambda_1\left[x + y - 10\right] = 0 \tag{3}$$

$$\lambda_2\left[x - y\right] = 0 \tag{4}$$

$$\lambda_3 x = 0 \tag{5}$$

$$\lambda_4 y = 0 \tag{6}$$

$$x + y - 10 \leq 0, \quad x - y \leq 0, \quad -x \leq 0, \quad -y \leq 0$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \geq 0$$

Suponiendo $x > 0$ e $y > 0$ tenemos por (5) e (6):

$$\lambda_3 = \lambda_4 = 0$$

Y por lo tanto, usando (1) y (2)

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 2$$

$$\lambda_1 - \lambda_2 = 1$$

$$\lambda_2 = 1/2, \quad \lambda_1 = 3/2$$

Luego, por (4) tenemos que $x = y$ y por (3) tenemos que $x = y = 5$. Por lo tanto, el único punto que satisface K-T es $(x, y, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = (5, 5, 3/2, 1/2, 0, 0)$.

4. ¿Cuál es la cantidad consumida en el óptimo? Justifique. (Ayuda: En el óptimo, se cumple $x > 0$ e $y > 0$, puedes usar esta información para tener que verificar menos casos).

   Respuesta. Dado que solo encontramos un punto con $x > 0$ e $y > 0$ que satisface las condiciones de K-T, en el óptimo tenemos $x = y = 5$.

5.5. Problema de minimización

Considere el siguiente problema de *minimización*,

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & x^2 + y^2 + z^2 \\ \text{s.a.} \quad & ay - x + z \geq b \end{aligned}$$

donde a y b son parámetros constantes y $b > 0$.

1. Escriba la función lagrangeana asociada a este problema.

   Respuesta. El problema escrito en forma canónica es

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & -x^2 - y^2 - z^2 \\ \text{s.a.} \quad & x - ay - z \leq -b \end{aligned}$$

   Por lo tanto la función lagrangeana es

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = -x^2 - y^2 - \lambda(x - ay - z + b)$$

2. Encuentre el (los) punto(s) que satisfaga(n) las condiciones necesarias de Kuhn-Tucker, junto con el multiplicador de Lagrange asociado a cada punto.

Respuesta. Las condiciones de K-T son dadas por

$$-2x - \lambda = 0 \tag{5.1}$$
$$-2y + \lambda a = 0 \tag{5.2}$$
$$-2z + \lambda = 0 \tag{5.3}$$
$$\lambda(x - ay - z + b) = 0 \tag{5.4}$$
$$\lambda \geq 0 \ , \quad x - ay - z \leq -b \tag{5.5}$$

Para encontrar los puntos pedidos, se puede despejar x, y, z de (1), (2) y (3).

$$x = -\frac{\lambda}{2}, \quad y = \frac{a\lambda}{2}, \quad z = \frac{\lambda}{2}$$

y remplazar en (4).

$$\lambda\left(-\frac{\lambda}{2} - \frac{a^2\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2} + b\right) = 0$$

Tenemos dos opciones para λ. Si $\lambda = 0$, entonces tenemos automáticamente

$$x = y = z = 0$$

Pero el punto dado no satisface la desigualdad $x - ay - z \leq -b$, ya que $-b < 0$ y el lado izquierdo es 0. En cambio si $\lambda \neq 0$, entonces necesariamente

$$-\frac{\lambda}{2} - \frac{a^2\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2} + b = 0$$

que implica que

$$\lambda^* = \frac{2b}{2 + a^2}$$

y reemplazando nuevamente para x, y, z, tenemos

$$x^* = -\frac{b}{2 + a^2} \ , \quad y^* = \frac{ab}{2 + a^2} \ , \quad z^* = \frac{b}{2 + a^2}$$

Notar que en este caso $\lambda^* > 0$ y la restricción está activa. Entonces se cumplen las condiciones K-T para este punto.

5.6. El metro de Doha

Para una consultoría internacional a usted le estan pidiendo analizar la cantidad óptima de viajes que el metro de Doha debiese hacer durante un día en el contexto del mundial de fútbol masculino de 2022. La demanda por viajes en metro depende del horario del día. Suponga que existen solo dos horarios en el día, el horario punta y el horario valle. Denote por x_p la cantidad de viajes en horario punta y por x_v la cantidad de viajes en horario valle, todo medido en miles de viajes (es decir, si $x_p = 2$ y $x_v = 1$, por ejemplo, quiere decir que se hacen 2 mil viajes en horario punta y mil viajes en horario valle). Las demandas por viajes de metro, en miles, para los distintos períodos del día están definidas de la siguiente manera:

$$p_p = 76 - 2x_p$$

$$p_v = 30 - x_v$$

Donde p_p representa el precio de mil viajes en metro en horario punta y p_v el precio de mil viajes en horario valle. El costo de operación pago por la empresa por cada mil viajes es de $12 (el costo es igual en ambos períodos del día). Es decir, el costo total de la empresa es dado por $12(x_p + x_v)$ y sus ingresos son iguales a $p_p x_p + p_v x_v$. Suponga que la capacidad actual (capacidad instalada) es de 12 trenes de metro, y cada tren puede hacer mil viajes en el horario punta y mil viajes en el horario valle (cada tren es usado en los dos horarios).

Asuma que la empresa elige la cantidad de viajes (en miles) que va a ofertar en cada horario del día (x_p y x_v) para maximizar sus beneficios (lucro) sujeto a las restricciones de capacidad que existen en cada uno de los períodos del día (pueden cumplirse con igualdad o no). Para simplificar, puedes suponer que se puede ofrecer cantidades no enteras de viaje (es decir, x_p y x_v pueden ser cualquier número real mayor o igual a cero que cumple con las demás restricciones del problema).

1. Plantee el problema de optimización que enfrenta la empresa.
   Respuesta.
   $$Beneficios = (p_p - c)x_c + (p_v - c)x_v$$
   $$Beneficios = (76 - 2x_c - 12)x_c + (30 - x_v - 12)x_v$$
   $$\max_{x_c, x_v} (76 - 2x_c - 12)x_c + (30 - x_v - 12)x_v$$
   sujeto a:
   $$x_p \geq 0$$
   $$x_v \geq 0$$
   $$12 - x_p \geq 0$$
   $$12 - x_v \geq 0$$

2. ¿Las condiciones de Kuhn-Tucker son suficientes para un máximo global del problema? Justifique.

   Respuesta. Para que las condiciones de KT sean suficientes, debe cumplirse que el lagrangeano debe ser cóncavo. En base a estos tendremos que el punto que encontremos es un máximo global. Entonces, si el lagrangeano es:
   $$\mathcal{L} = 76x_p - 2x_p^2 - 12x_p + 30x_v - x_v^2 - 12x_v - \lambda_1(x_p - 12) - \lambda_2(x_v - 12) + \lambda_3(x_p) + \lambda_4(x_v)$$
   Tenemos que las restricciones (todas) son lineales, por lo tanto, para asegurar que el lagrangeano sea cóncavo, nos basta con que la función objetivo sea cóncava (cóncavo+lineal=cóncavo). Revisemos la cóncavidad de la función objetivo: Para esto, debemos comprobar que la matriz Hessiana sea semidefinida negativa:
   $$Hf(x_p, x_v) = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$
   $$f_{x_p,x_p} = -4 < 0$$
   $$f_{x_p,x_p} = -2 < 0$$
   $$det(Hf) = 8 > 0$$
   Utilizando los menores principales, tenemos que los de orden $1 (f_{x_p,x_p} = -4 < 0 \ f_{x_p,x_p} = -2 < 0)$. Por otro, lado el menor principal de orden 2 ($det(Hf) = 8 > 0$) Por lo tanto, tenemos que la matriz es semidefinida negativa, por lo tanto, la función es cóncava lo que nos garantiza que el lagrangeano también lo es.

3. Encuentre la solución del problema. *(Ayuda: En el óptimo, $x_p > 0$ y $x_v > 0$, es decir, las restricciones de no-negatividad son inactivas.)*

Respuesta.

$$\mathcal{L} = 76x_p - 2x_p^2 - 12x_p + 30x_v - x_v^2 - 12x_v - \lambda_1(x_p - 12) - \lambda_2(x_v - 12) + \lambda_3(x_p) + \lambda_4(x_v)$$

Condiciones de KT:

$$[x_p] = 76 - 4x_p - 12 - \lambda_1 + \lambda_3 = 0$$

$$[x_v] = 30 - 2x_v - 12 - \lambda_2 + \lambda_4 = 0$$

$$\lambda_1(12 - x_p) = 0$$

$$\lambda_2(12 - x_v) = 0$$

$$\lambda_3(x_p) = 0$$

$$\lambda_4(x_v) = 0$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \geq 0$$

$$12 - x_p \geq 0$$

$$12 - x_v \geq 0$$

$$x_p \geq 0$$

$$x_v \geq 0$$

Vamos a usar solo los casos en donde las restricciones de no negatividad esten inactivas, por lo tanto, tendremos siempre que $\lambda_3, \lambda_4 = 0$

Caso 1: Ambas restricciones activas $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$
Obtenemos que:

$$x_p = x_v = 12$$

$$\lambda_1 = 16, \lambda_2 = -6$$

Caso no posible lambda negativo.

Caso 2: Restricción punta no activa, restricción valle activa $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \geq 0$
De la primera CPO:

$$x_p = 16$$

Caso no posible, excede la capacidad.

Caso 3: Restricción punta activa, restricción valle no activa $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 = 0$
De la segunda CPO:

$$x_v = 18/2 = 9$$

$$x_p = 12$$

$$\lambda_1 = 16, \lambda_2 = 0$$

Caso 4: Ambas restricciones no activas $\lambda_1, \lambda_2 = 0$

$$x_v = 18/2 = 9$$

$$x_p = 16$$

Caso no posible.

Solución del caso 4:

$$(x_p, x_v, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\lambda_4) = (12, 9, 16, 0, 0, 0)$$

4. Interprete los multiplicadores de Lagrange de las restricciones de capacidad. Si fuera posible agregar un tren adicional en solamente uno de los horarios, ¿en qué horario convendría agregar un tren?
   Respuesta.

   Conviene aumentar la cantidad de trenes en el horario punta ya que su mutiplicador de lagrange asociado es mayor que cero. Lo que tiene sentido, ya que, nos dice que dada la demanda de trenes en ese horario aún podemos obtener mayores beneficios. Caso contrario en el horario valle en donde el multiplicador asociado es igual a 0.

5.7. Optimización con Restricciones de No Negatividad

Resuelva el siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} \max_{x,y} \quad & x^2y^2 \\ \text{s.a: } & 2x + y \leq 2 \\ & x \geq 0,\ y \geq 0 \end{aligned}$$

1. Plantee el lagrangeano y las condiciones de KT
2. Halle todos los pares (x,y) que verifiquen las condiciones necesarias
3. Encuentre la solución al problema

Respuesta.

1. El lagrangeano:

   $$\mathcal{L} = x^2y^2 + \lambda_1(2 - 2x - y) + \lambda_2 x + \lambda_3 y$$

   Las condiciones de KT son:

   $$\begin{aligned} 2xy^2 - 2\lambda_1 + \lambda_2 =& 0 \\ 2x^2y - \lambda_1 + \lambda_3 =& 0 \\ \lambda_1(2 - 2x - y) =& 0 \\ \lambda_2 x =& 0 \\ \lambda_3 y =& 0 \\ x, y \geq& 0 \\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq& 0 \\ (2 - 2x - y) \geq& 0 \end{aligned}$$

2. Para encontrar los candidatos vamos a considerar los distintos casos posibles, vamos a tener que:
   Caso 1: Si $x = 0, y = 0$:
   En este caso tenemos que $\lambda_1 = 0$, y dado las restricciones de no negatividad estan activas $\lambda_2, \lambda_3 \geq 0$
   Caso 2: $x = 0, y > 0$:
   De la segunda condición obtenemos que $\lambda_1 = 0$ dado que $\lambda_3 = 0$ y también tendremos que $\lambda_2 \geq 0$
   Caso 3: $x > 0, y = 0$:
   De la primera condición obtenemos que $\lambda_1 = 0$ dado que $\lambda_2 = 0$
   Caso 4: $x > 0, y > 0$:
   De las dos primeras condiciones, tenemos que $xy^2 = \lambda$ y $2x^2y = \lambda$ Entonces:

   $$\begin{aligned} 2x =& y \\ \lambda > 0 \end{aligned}$$

   Por lo tanto, $y = 1$, $x = \frac{1}{2}$.

3. En primer lugar, como sabemos que conjunto restricción es cerrado y acotado, entonces, sabemos que una solución existe (se cumplen las condiciones del Teorema de Weierstrass).

   Luego, el valor de la función objetivo en los tres primeros casos es 0, y en el último caso es $\frac{1}{4}$. Por lo tanto, la solución al problema es $(x, y) = (\frac{1}{2}, 1)$.

5.8. Optimización con Restricciones de No Negatividad

Considere el siguiente problema de maximización:

$$\begin{aligned} \max_{x,y} \quad & 2x + y \\ \text{s.a.} \quad & x + y \leq 4 \\ & x \geq 0 \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

La condición de calificación de restricción siempre se cumple para este problema.

1. Son suficientes las condiciones de Kuhn-Tucker para un máximo global de este problema? Justifique de manera clara su respuesta, explique cuál de los resultados de suficiencia global presentados en clase ha usado.
   Respuesta.
   Si son suficientes. Primero noten que el conjunto restricción es convexo y la función objetivo es cóncava, por ello debe existir al menos una solución. (Pueden notar además que Weierstrass es aplicable en este problema.)

   Adicionalmente, como la función objetivo es cóncava y continuamente diferenciable, ya que es lineal, y las restricciones del problema $g_1(x, y) := x + y - 4$, $g_2(x, y) := -x$, $g_3(x, y) := -y$ son funciones convexas y continuamente diferenciables, entonces las condiciones de KT nos entregan una solución.

2. Escriba las condiciones de Kuhn-Tucker del problema.
   Respuesta.
   El langrangeano asociado es:

   $$\mathcal{L}(x, y) = 2x + y + \lambda_1(4 - x - y) + \lambda_2(x) + \lambda_3(y)$$

   Las condiciones de KT son:

   $$\begin{aligned} & 2 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ & 1 - \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ & \lambda_1(4 - x - y) = 0, \quad \lambda_1 \geq 0 \\ & \lambda_2 x = 0, \quad \lambda_2 \geq 0 \\ & \lambda_3 y = 0, \quad \lambda_3 \geq 0 \end{aligned}$$

3. Encuentre la solución del problema.
   Respuesta.
   Hay 8 casos posibles pero podemos reducirlos. La restriccón 1 siempre será activa pues la función objetivo es monótona creciente en sus dos argumentos. Luego, las alternativas son 1 y 2 activas, 1 y 3 activas o sólo la 1 activa. Si sólo la 1 es activa se tiene $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, luego de (1) $\lambda_1 = 2$ y de (2) $\lambda_1 = 1$ pero esto es absurdo. Si la 1 y 3 son activas, se tiene que $\lambda_2 = 0$, luego $\lambda_1 = 2$, $\lambda_3 = 1$, $x = 4$ y $f(4, 0) = 8$. Mientras que si la 1 y 2 son activas, entonces $\lambda_3 = 0$, $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$ pero esto viola la no-negatividad del multiplicador. Por lo tanto, $x = 4, y = 0$ resuelve el problema.

5.9. Inclusión laboral

Considere el problema de una fundación que trabaja en la inclusión de personas en situación de discapacidad al mercado laboral. Para ello realiza dos programas complementarios: el programa 1 de preparación para el trabajo (con una dedicación de x_1 horas al día) y el programa 2 de capacitación (con x_2 horas al día).

Existen dos restricciones relevantes. La primera restricción es

$$x_1 + x_2 \leq T,$$

donde T es el tiempo total disponible de los participantes para estos dos programas (T es un dato, y puede tomar cualquier valor estrictamente mayor que 0 y menor o igual que 8). La segunda restricción es

$$1000x_1 + 2000x_2 \leq W,$$

donde W es el presupuesto (estrictamente positivo) de la fundación por cada participante.

El objetivo de la fundación es maximizar la probabilidad de incorporación al mercado laboral de sus participantes, que se puede escribir como:

$$f(x_1, x_2) = \frac{{x_1}^{1/4}{x_2}^{1/2}}{6}$$

(a) Escriba el lagrangeano y condiciones de Kuhn-Tucker agregando restricciones de no-negatividad de x_1 y x_2.

(b) Argumente por qué las restricciones de no-negatividad no estarán activas (no son relevantes) en este problema y reescriba el lagrangeano y condiciones de Kuhn-Tucker sin restricciones de no-negatividad. Fundamente su respuesta.

(c) ¿Puede asegurar que se obtendrá un máximo global único a partir de las condiciones de Kuhn-Tucker? Fundamente su respuesta.

(d) Resuelva el problema usando el método de Kuhn-Tucker, suponiendo que $T = 6$ y $W = 10{,}000$ (10 mil).

(e) ¿Qué sería mejor para aumentar la probabilidad de incorporación al mercado laboral, un aumento marginal en W o en T? Fundamente su respuesta. **Nota:** Recuerde que no puede usar calculadora, por lo que puede dejar su respuesta expresada, indicando de qué depende su conclusión.

Respuesta.

(a) Agregando restricciones $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$ tenemos lagrangeano:

$$\mathcal{L} = \frac{{x_1}^{1/4}{x_2}^{1/2}}{6} + \lambda_1(T - x_1 - x_2) + \lambda_2(W - 1000x_1 - 2000x_2) + \lambda_3 x_1 + \lambda_4 x_2$$

con condiciones de KKT:

$$\frac{{x_1}^{-3/4}{x_2}^{1/2}}{24} - \lambda_1 - 1000\lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

$$\frac{{x_1}^{1/4}{x_2}^{-1/2}}{12} - \lambda_1 - 2000\lambda_2 + \lambda_4 = 0$$

$$(T - x_1 - x_2) \geq 0; \quad (W - 1000x_1 - 2000x_2) \geq 0; \quad x_1, x_2 \geq 0; \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \geq 0$$

$$\lambda_1(T - x_1 - x_2) = 0; \quad \lambda_2(W - 1000x_1 - 2000x_2) = 0; \quad \lambda_3 x_1 = 0; \quad \lambda_4 x_2 = 0$$

Alternativamente, lagrangeano

$$\mathcal{L} = \frac{{x_1}^{1/4}{x_2}^{1/2}}{6} + \lambda_1(T - x_1 - x_2) + \lambda_2(W - 1000x_1 - 2000x_2)$$

con condiciones de KKT:

$$\frac{{x_1}^{-3/4}{x_2}^{1/2}}{24} - \lambda_1 - 1000\lambda_2 \leq 0$$

$$\frac{{x_1}^{1/4}{x_2}^{-1/2}}{12} - \lambda_1 - 2000\lambda_2 \leq 0$$

$$(T - x_1 - x_2) \geq 0; \quad (W - 1000x_1 - 2000x_2) \geq 0; \quad x_1, x_2 \geq 0; \quad \lambda_1, \lambda_2 \geq 0$$

$$\lambda_1(T - x_1 - x_2) = 0; \quad \lambda_2(W - 1000x_1 - 2000x_2) = 0$$

$$(\frac{{x_1}^{-3/4}{x_2}^{1/2}}{24} - \lambda_1 - 1000\lambda_2)x_1 = 0; \quad (\frac{{x_1}^{1/4}{x_2}^{-1/2}}{12} - \lambda_1 - 1000\lambda_2)x_2 = 0$$

(b) Las primeras condiciones de KKT muestran que para cualquier combinación de multiplicadores de Lagrange que conjeturemos, se requiere x_1 y x_2 positivo. Alternativamente, se ve que $\frac{{x_1}^{-3/4}{x_2}^{1/2}}{24}$ se acerca a infinito cuando x_1 se acerca a 0, y lo mismo con $\frac{{x_1}^{1/4}{x_2}^{-1/2}}{12}$ y x_2. Más aún, si $x_1 = 0$ o $x_2 = 0$, la probabilidad se hace nula, lo que no es máximo porque sabemos que es factible alcanzar probabilidad positiva.

El lagrangeano es:

$$\mathcal{L} = \frac{{x_1}^{1/4}{x_2}^{1/2}}{6} + \lambda_1(T - x_1 - x_2) + \lambda_2(W - 1000x_1 - 2000x_2)$$

con condiciones de KKT:

$$\frac{{x_1}^{-3/4}{x_2}^{1/2}}{24} - \lambda_1 - 1000\lambda_2 = 0$$

$$\frac{{x_1}^{1/4}{x_2}^{-1/2}}{12} - \lambda_1 - 2000\lambda_2 = 0$$

$$(T - x_1 - x_2) \geq 0; \quad (W - 1000x_1 - 2000x_2) \geq 0; \quad \lambda_1, \lambda_2 \geq 0$$

$$\lambda_1(T - x_1 - x_2) = 0; \quad \lambda_2(W - 1000x_1 - 2000x_2) = 0$$

(c) Las restricciones son lineales, por lo que $\tilde{\mathcal{L}}$ es cóncava si f es cóncava. Se aprecia que f es una Cobb-Douglas con exponentes que suman menos que 1, por lo que es cóncava. Se puede verificar usando Hessiano de f.

(d) Hay que analizar 4 casos. Pero el caso $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ se descarta inmediatamente porque no se satisfacen las dos primeras condiciones de KKT.

Caso 1: $\lambda_1 > 0; \quad \lambda_2 > 0$

Las dos restricciones son activas, por lo que obtenemos $x_1 = 2$ y $x_2 = 4$.

Caso 2: $\lambda_1 > 0; \quad \lambda_2 = 0$

Las condiciones quedan:

$$\frac{{x_1}^{-3/4}{x_2}^{1/2}}{24} - \lambda_1 = 0$$

$$\frac{{x_1}^{1/4}{x_2}^{-1/2}}{12} - \lambda_1 = 0$$

$$(6 - x_1 - x_2) = 0; \quad (10000 - 1000x_1 - 2000x_2) \geq 0$$

Tomando las dos primeras condiciones obtenemos $\frac{x_2}{2x_1} = 1$, lo que junto con $x_1 + x_2 = 6$ entrega el punto crítico $x_1 = 2$, $x_2 = 4$ (que además satisface la restricción de presupuesto con igualdad). Se observa que es el mismo punto del caso 1, ya que la tanganecia de la restricción de tiempo y curva de nivel de f se da en el punto en que ambas restriciones se cumplen con igualdad.

Caso 3: $\lambda_1 = 0; \quad \lambda_2 > 0$

Las condiciones quedan:

$$\frac{{x_1}^{-3/4}{x_2}^{1/2}}{24} - 1000\lambda_2 = 0$$

$$\frac{{x_1}^{1/4}{x_2}^{-1/2}}{12} - 2000\lambda_2 = 0$$

$$(6 - x_1 - x_2) \geq 0; \quad (10000 - 1000x_1 - 2000x_2) = 0$$

Tomando las dos primeras condiciones obtenemos $\frac{x_2}{2x_1} = 1/2$, lo que junto con la restricción $10000 - 1000x_1 - 2000x_2 = 0$ da el punto $x_1 = x_2 = 10/3$.

Hay dos puntos críticos, el máximo será el que de un nivel de f más alto: con $x_1 = 2$, $x_2 = 4$ la probabilidad es 0,3964; con $x_1 = x_2 = 10/3$ la probabilidad es 0,4111 (no es necesario calcularlo). Se verifica que en ambos casos λ_1 y λ_2 son no negativos.

(e) Aún sin calcular λ_1 y λ_2 se puede responder la pregunta. Si el caso relevante es el 2, sabemos que $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 = 0$, por lo que conviene más un aumento en T. Si el caso relevante es el 3, sabemos que $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 > 0$, por lo que conviene más un aumento en W.

5.10. KKT

Resuelva el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \max_{x_1,x_2} \quad & [-(x_1-4)^2 - (x_2-4)^2] \\ \text{sa.} \ & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1 + 3x_2 \leq 9 \end{aligned}$$

1. ¿Las condiciones de Kuhn-Tucker son suficientes para un máximo global de este problema?
   Respuesta.
   La restricciones son lineal, por lo que son cóncavas y convexas. Además la función objetivo es cóncava (el Hessiano es negativo definido):

   $$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

   por lo que la solución será un máximo.

2. Escriba las condiciones de Kuhn-Tucker del problema.
   Vamos a tener cuatro casos
   Respuesta.
   El Lagrangeano:

   $$\mathcal{L} = -(x_1-4)^2 - (x_2-4)^2 + \lambda_1(4 - x_1 - x_2) + \lambda_2(9 - x_1 - 3x_2)$$

   Las Condiciones de K-T:

   $$-2(x_1 - 4) - \lambda_1 - \lambda_2 = 0$$

   $$-2(x_2 - 4) - \lambda_1 - 3\lambda_2 = 0$$

   $$\lambda_1(4 - x_1 - x_2) = 0$$

   $$\lambda_2(9 - x_1 - 3x_2) = 0$$

   $$\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$$

   $$x_1 + x_2 \leq 4$$

   $$x_1 + 3x_2 \leq 9$$

3. Encuentre la solución del problema.
Respuesta. Caso 1 (Las dos restricciones activas):
Tenemos que:
$$x_1 + x_2 = 4 \quad y \quad x_1 + 3x_2 = 9$$
Tenemos que:
$$(x_1, x_2) = (3/2, 5/2)$$
Reemplazando en las condiciones de KT, vamos obtener los valores de λ
$$(\lambda_1, \lambda_2) = (6, -1)$$
Lo que es una contradicción, por lo tanto, esta no es una solución posible.
Caso 2 (Solo una restricción activa):
Tenemos que:
$$x_1 + x_2 = 4 \quad y \quad x_1 + 3x_2 \leq 9$$
Tenemos que:
$$(x_1, x_2) = (2, 2)$$
Reemplazando en las condiciones de KT, vamos obtener los valores de λ
$$(\lambda_1, \lambda_2) = (4, 0)$$
Caso 3 (Solo una restricción activa):
Tenemos que:
$$x_1 + x_2 \leq 4 \quad y \quad x_1 + 3x_2 = 9$$
Tenemos que:
$$(x_1, x_2) = (33/10, 19/10)$$
Lo que es una contradicción, ya que viola la restricción:
$$x_1 + x_2 \leq 4$$
Caso 4 (Ninguna restricción activa):
Tenemos que:
$$x_1 + x_2 \leq 4 \quad y \quad x_1 + 3x_2 \leq 9$$
Con esto tenemos que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, Dado esto, tenemos que de las condiciones obtenemos que $x_1 = x_2 = 4$, lo que nuevamente viola la restricción
$$x_1 + x_2 \leq 4$$
Por lo tanto, tenemos que la solución es:
$$(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) = (2, 2, 4, 0)$$

5.11. KKT

Considere el siguiente problema
$$\max_{x,y} f(x,y) = 2 - (x-1)^2 - e^{y^2}$$
$$s.a \quad x^2 + y^2 \leq a$$

1. Demuestre que $f(x, y)$ es cóncava.
2. Escribir las condiciones de KT para que la solución del problema.
3. Halle la única solución posible, que dependerá de a
4. Demuestre que la solución encontrada corresponde efectivamente al óptimo

Respuesta.

1. Podemos comprobarlo con el Hessiano (el Hessiano es negativo definido, los menores principales son negativos):

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -e^{y^2}(2+4y^2) \end{pmatrix}$$

   Ya que tenemos que $-e^{y^2}(2+4y^2)$ es negativo para cualquier valor de y.

2. Lagrangeano:

$$\mathcal{L} = -2 - (x-1)^2 - e^{y^2} + \lambda(a - x^2 - y^2)$$

   Las Condiciones de K-T:

$$-2(x-1) - 2x\lambda = 0$$
$$-2ye^{y^2} - 2y\lambda = 0$$
$$\lambda(a - x^2 - y^2) = 0$$
$$\lambda \geq 0$$
$$x^2 + y^2 \leq a$$

3. Vamos a tener dos casos (restricción activa y otro con la restricción no activa), de ellos obtendremos que:
   Para $0 < a < 1$
   la solución es

$$(x, y, \lambda) = (\sqrt{a}, 0, a^{-1/2} - 1)$$

   Para $a \geq 1$
   la solución es

$$(x, y, \lambda) = (1, 0, 0)$$

4. La función objetivo es cónvava. Luego, tenemos que la restricción es convexa y podemos comprobarlo con el Hessiano (el Hessiano es positivo definido):

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   Por lo tanto la solución es un máximo.

5.12. KKT

Resuelva el siguiente problema

$$\max_{x,y} \; x+y \quad \text{sujeto a } x^2+y^2 \leq 1$$
$$x \leq 0{,}8$$
$$y \leq 0{,}9$$

1. ¿Son suficientes las condiciones de Kuhn-Tucker para un máximo global de este problema? Justifique de manera clara su respuesta, explicando cual de los resultados de suficiencia global presentados en clases estas usando.
2. Escriba las condiciones de Kuhn-Tucker del problema.
3. Encuentre la solución del problema.

Respuesta.

1. La función objetivo es lineal, por lo que es cóncava y convexa a la vez. Luego, tenemos que la función $x^2 + y^2$ es convexa y podemos comprobarlo con el Hessiano (el Hessiano es positivo definido):

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   y como las restricciones de "menor o igual" definen sets convexos, entonces tenemos un set factible convexo. Dado que todas las funciones son continuamente diferenciables, KT nos entrega la solución.

2. Lagrangeano:

$$\mathcal{L} = x + y + \lambda_1(1 - x^2 - y^2) + \lambda_2(0,8 - x) + \lambda_3(0,9 - y)$$

   Las condiciones de K-T:

$$1 - 2x\lambda_1 - \lambda_2 = 0$$
$$1 - 2y\lambda_1 - \lambda_3 = 0$$
$$\lambda_1(1 - x^2 - y^2) = 0$$
$$\lambda_2(0,8 - x) = 0$$
$$\lambda_3(0,9 - y) = 0$$
$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$$
$$x^2 + y^2 \leq 1$$
$$x \leq 0,8$$
$$y \leq 0,9$$

3. Vamos a tener 8 casos.
   Caso 1: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$
   Contradicción
   Caso 2: $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$

$$1 - 2\lambda x = 1 - \lambda y$$
$$x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Caso 3: $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 > 0$
Contradicción
Caso 4: $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 = 0$
Contradicción
Caso 5: $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0$
Contradicción

Caso 6: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 > 0$
Contradicción

Caso 7: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 = 0$
Contradicción

Caso 8: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0 \lambda_3 > 0$
Contradicción

Por lo tanto, el único caso posible es el caso 2. La solución corresponde entonces a $x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

5.13. KKT

Considere el siguiente problema:

$$\max_{x,y} \; x^{0,5}y^{0,5} \qquad \text{sujeto a } x + y \leq 6$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$

Asuma que se cumplen las condiciones para que las condiciones de KT nos den la solución al problema. (Si quiere puede cerciorarse que esto efectivamente se cumple.) Encuentre la solución del problema

Respuesta. Lagrangeano:

$$\mathcal{L} = x^{0,5}y^{0,5} + \lambda_1(6 - x - y) + \lambda_2 x + \lambda_3 y$$

Las condiciones de K-T:

$$0,5x^{-0,5}y^{0,5} - \lambda_1 + \lambda_2 = 0$$
$$0,5y^{-0,5}x^{0,5} - \lambda_1 + \lambda_3 = 0$$
$$\lambda_1(6 - x - y) = 0$$
$$\lambda_2(x) = 0$$
$$\lambda_3(y) = 0$$
$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$$
$$x + y \leq 6$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$

Vamos a tener 8 casos.
Caso 1: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$
Contradicción

Caso 2: $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$
Entonces $\lambda_1 = x = y$. Por lo tanto, $x = y = \lambda_1 = 3$

Caso 3: $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 > 0$
Contradicción

Caso 4: $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 = 0$
Contradicción

Caso 5: $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0$
Contradicción

Caso 6: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 > 0$
Contradicción

Caso 7: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 = 0$
Contradicción

Caso 8: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0$
Entonces, $x = y = 0$, sin embargo esto no satisface las condiciones de primer orden (ver lo que pasa con las utilidades marginales cuando un consumo se va a 0).

En consecuencia tenemos que los valores $(x, y, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (3, 3, 3, 0, 0)$ satisfacen las condiciones de KKT. Por esto la solución es $(x, y, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (3, 3, 3, 0, 0))$

5.14. KKT

Considere el siguiente problema de optimización

$$\max_{x,y} \; f(x,y) = 2x + 3y \quad \text{sujeto a } g(x,y) = x^2 + y^2 \leq 2$$

1. Muestre que se satisfacen las condiciones de suficiencia de KT.
2. Encuentre la solución del problema

Respuesta.

1. La función objetivo es lineal, por lo que son cóncava y convexa a la vez. Luego, tenemos que la restricción es convexa y podemos comprobarlo con el Hessiano (el Hessiano es positivo definido):

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   por lo que la solución será un máximo.

2. El Lagrangeano:

$$\mathcal{L} = 2x + 3y + \lambda(2 - x^2 - y^2)$$

   Las Condiciones de K-T:

$$2 - 2x - \lambda_= 0$$

$$3 - 2y\lambda = 0$$

$$\lambda(2 - x^2 - y^2) = 0$$

$$\lambda \geq 0$$
$$x^2 + y^2 \leq 2$$

Tendremos dos casos (restricción activa y no activa), de ellos vamos a obtener la siguiente solución. Si tenemos que $\lambda_1 \geq 0$

$$1 = \lambda x$$
$$2/3 = \lambda y$$

Reemplazando en la restricción.

$$\lambda = \pm\sqrt{\frac{13}{18}}$$

Solo nos quedamos con el valor positivo (el otro valor formaría una contradicción)
Por lo tanto, la solución es:

$$(x, y, \lambda) = (\sqrt{\frac{18}{13}}, \sqrt{\frac{8}{13}}, \sqrt{\frac{13}{18}})$$

5.15. KKT

$$\max_{x_1,x_2} \; f(x_1, x_2) = 4x_1 + 3x_2 \quad \text{sujeto a } g(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 \leq 10$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

1. Muestre que se satisfacen las condiciones de suficiencia de KT.
2. Encuentre la solución del problema

Respuesta.

1. La función objetivo es lineal por lo que es cóncava y convexa a la vez, en tanto que las restricciones son lineales por lo que tanto que son cóncavas y convexas a la vez. Por lo que, vamos a encontrar un punto máximo.
2. Lagrangeano:
$$\mathcal{L} = 4x_1 + 3x_2 + \lambda_1(10 - 2x_1 - x_2) + \lambda_2 x_1 + \lambda_3 x_2$$
Las Condiciones de K-T:
$$4 - 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0$$
$$3 - \lambda_1 + \lambda_3 = 0$$
$$\lambda_1(10 - 2x_1 - x_2) = 0$$
$$\lambda_2(x_1) = 0$$
$$\lambda_3(x_2) = 0$$
$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$$
$$2x_1 + x_2 \leq 10$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$
Nuevamente, como tenemos 3 restricciones vamos a tener 8 ($= 2^3$) casos, debe verificar todos los casos y llegara a que el caso con $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_3 = 0$ y $x_1 = 0, x_2 = 10$. Luego, $\lambda_1 = 3$.
Entonces, la solución es:
$$(x_1, x_2, \lambda_1) = (0, 10, 3)$$

5.16. KKT

En este ejercicio los multiplicadores de Kuhn-Tucker están representados por λ. Considere el siguiente problema de optimización (P):

$$\begin{aligned} \max_{x\in\mathbb{R}} \quad & 2x^3-3x^2 \\ \text{s.t.} \quad & (3-x)^3 \geq 0 \end{aligned}$$

El problema (P) tiene solución (no necesitas demostrar esto).

1. Encuentre todos los pares (x,λ) que satisfacen las condiciones de Kuhn-Tucker para (P).
2. Note que la solución x^* de (P) es la misma que la solución del problema (Q) abajo:

$$\begin{aligned} \max_{x\in\mathbb{R}} \quad & 2x^3-3x^2 \\ \text{s.t.} \quad & 3-x \geq 0 \end{aligned}$$

   por cuanto $(3-x)^3 \geq 0 \iff 3-x \geq 0$. Encuentre todos los pares (x,λ) que satisfacen las condiciones de Kuhn-Tucker para (Q).
3. Las condiciones de Kuhn-Tucker problema (Q) son necesarias para el óptimo de (Q)? Justifique brevemente.
4. Encuentre la solución de (P) y (Q) (recuérdense que los dos problemas tienen la misma solución).
5. Las condiciones de Kuhn-Tucker del problema (P) son necesarias para el óptimo de (P)? Justifique brevemente.

Respuesta.

1. Las condiciones de Kuhn-Tucker son:

$$6x^2-6x-3\lambda(3-x)^2=0$$
$$(3-x)^3 \geq 0$$
$$\lambda(3-x)^3=0$$

   Para $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Si $\lambda=0$ debemos tener $6x^2-6x=0 \Rightarrow x^2=x$, que tiene dos soluciones, $x=0$ y $x=1$. Si $\lambda>0$, $x=3$ y por lo tanto debemos tener:

$$6x^2-6x-3\lambda(3-x)^2 = 6\times 9-6\times 3-3\lambda(3-3)^2 = 54-18 \neq 0$$

   Luego, no hay solución con $\lambda>0$. Luego, las únicas soluciones para las condiciones de K-T son $(x,\lambda)=(0,0)$ y $(x,\lambda)=(1,0)$.
2. Las condiciones de Kuhn-Tucker para (Q) son:

$$\begin{aligned} 6x^2-6x-\lambda &= 0 \\ (3-x) &\geq 0 \\ \lambda(3-x) &= 0 \end{aligned}$$

   con $\lambda \geq 0$. Si $\lambda=0$ debemos tener $6x^2-6x=0 \Rightarrow x^2=x$, que tiene dos soluciones, $x=0$ y $x=1$. Si $\lambda>0$ debemos tener $x=3$ y por lo tanto:

$$6x^2-6x-\lambda = 6\times 9-6\times 3-\lambda=0$$

   Luego, $\lambda=36$. Por lo tanto tenemos tres soluciones para las condiciones de Kuhn-Tucker: $(x,\lambda)=(0,0)$, $(x,\lambda)=(1,0)$ y $(x,\lambda)=(3,36)$.

3. Si. Este problema cumple la condición de calificación de restricción.

4. Como K-T es condición necesaria para el óptimo en el problema (Q), tenemos que solamente comparar todos los puntos que satisfacen (Q). Sea $f(x) = 2x^3 - 3x^2$. Tenemos que $f(0) = 0$, $f(1) = -1$ y $f(3) = 2 \times 27 - 27 = 27$. Luego, $x^* = 3$ es el máximo.

5. No, pues la solución no satisface las condiciones de Kuhn-Tucker (de hecho, lo que está pasando es que el óptimo del problema (P) viola la calificación de restricción de K-T).

5.17. Aplicación de KKT: Marketing

La cerveza Tato ha realizado un análisis de mercado para entender como se posiciona en el mercado de cervezas entre los adultos jóvenes del país. Si bien tradicionalmente se posicionó como una cerveza con una imagen moderna pero arraigada en la costumbre local, cambios en el mercado han llevado a que pierda esta posición dentro de su mercado objetivo de adultos jóvenes. Los ejecutivos han decidido iniciar junto a usted un trabajo para reposicionar la cerveza en el mercado, buscando maximizar la demanda obtenida.

El mercado de la cerveza se puede modelar utilizando dos dimensiones de imagen: (i) cultura local versus cultura internacional y, (ii) cultura moderna versus cultura tradicional. En este marco, la posición de un producto o de los consumidores se puede graficar usando un plano y midiendo la variable (i) en el eje X y la variable (ii) en el eje Y. Así, la posición (0,0) representa la posición neutra, esto es que no se identifica claramente con ninguna característica específica.

El mercado se compone de tres segmentos:

- Progresivo (P): son consumidores que prefieren su cultura local pero que también se mueven con los últimos adelantos y productos disponibles. Se identifican con una posición $(xP, yP) = (4, 5)$ y representan el 60 % del mercado.

- Internacional (I): consumidores que buscan cosas relacionadas a otros países y no tienen una marca clara respecto de lo moderno versus lo tradicional. Su posición es $(x_I, y_I) = (-2, 0)$ y representan un 20 % del mercado.

- Conservadores (C): si bien no tienen una identificación clara entre lo local y lo internacional, son consumidores que tienen una clara asociación y preferencia por aspectos tradicionales en vez de la modernidad y lo novedoso. Ellos representan un 20 % del mercado y se posicionan en $(x_C, y_C) = (0, -5)$

El estudio posiciona actualmente a Tato en un punto $T_0 = (-1, 1)$ por lo que el trabajo debe definir un nuevo punto $T = (x_T, y_T)$. Las preferencias de las personas son tal que su demanda es máxima cuando la cerveza tiene exactamente las mismas características que los describen.

1. Muestre en un gráfico los puntos que describen cada uno de los grupos de consumidores y el actual posicionamiento de Tato

2. Suponga que la demanda en cada grupo j está dada por $D_j(x) = M - d(x)$ donde $d(x) = (x_T - x_j)^2 + (x_T - x_j)^2$ es la distancia (que corresponde al cuadrado de la distancia euclidiana) entre la posición del grupo j y la posición del producto $T = (x_T, y_T)$. Plantee el problema de optimización que permite determinar el reposicionamiento óptimo de Tato en este mercado

3. Encuentre el reposicionamiento óptimo de Tato en el mercado

4. Suponga que ahora agregamos una restricción al problema y decimos que el nuevo punto de Tato no puede estar a una distancia mayor a 5 respecto del punto original. Plantee el nuevo problema y muestre gráficamente el set de puntos donde usted podría ubicarse.

5.18. Aplicación de KKT: Monopolio

Una firma que es un monopolio en el mercado de tejos para jugar rayuela tiene dos plantas de producción. En la primera planta el costo total de producir q_1 tejos es q_1^2, mientras que en la planta 2 el costo total de producir q_2 tejos es $1{,}25q_2^2$. El precio de mercado por el total de tejos producidos está dado por la siguiente función de demanda (inversa)

$$p = 100 - (q_1 + q_2)$$

donde p es el precio de los tejos, y ya hemos impuesto el hecho que la cantidad total en el mercado es la suma de las producciones de ambas plantas.

Se pide,

1. Plantee y resuelva el problema de optimización que permite encontrar las cantidades q_1 y q_2 que maximizan las utilidades de la empresa
   Respuesta.
   La utilidades de la empresa va a estar definida por sus ingresos totales menos sus costos totales

   $$U = IT - CT = PQ - CQ$$

   Donde:

   $$Q = q_1 + q_2$$
   $$U = (100 - (q_1 + q_2))(q_1 + q_2) - (q_1^2 + 1{,}25q_2^2)$$
   $$\max_{q_1, q_2} \quad U = U = (100 - (q_1 + q_2))(q_1 + q_2) - (q_1^2 + 1{,}25q_2^2)$$

   CPOs:

   $$\frac{\partial U}{\partial q_1} = 100 - 4q_1 - 2q_2 = 0$$
   $$\frac{\partial U}{\partial q_1} = 100 - 2q_1 - 4{,}5q_2 = 0$$

   Luego:

   $$q_1 = \frac{50}{3{,}5} = 14{,}3$$
   $$q_2 = \frac{62{,}5}{3{,}5} = 17{,}8$$

2. Suponga ahora que como ambas plantas ya están antiguas no pueden producir más de 12 unidades de tejos cada una. Plantee el problema de optimización con estas nuevas restricciones
   Respuesta.
   Ahora tenemos dos restricciones:

   $$q_1 \leq 12$$
   $$q_1 \leq 12$$
   $$\max_{q_1, q_2} \quad U = (100 - (q_1 + q_2))(q_1 + q_2) - (q_1^2 + 1{,}25q_2^2)$$

   sujeto a:

   $$q_1 \leq 12$$
   $$q_1 \leq 12$$

   Vamos a tener que optimizar sujeto a restricciones de desigualdad. Por lo tanto, planteamos el lagrangeano:

   $$\mathcal{L} = (100 - (q_1 + q_2))(q_1 + q_2) - (q_1^2 + 1{,}25q_2^2) + \lambda_1(12 - q_1) + \lambda_2(12 - q_2) + \lambda_3 q_1 + \lambda_4 q_2$$

3. Resuelva el problema de optimización con estas nuevas restricciones

Respuesta.

Obtenemos las condiciones de KKT:

$$100 - 4q_1 - 2q_2 - \lambda_1 + \lambda_3 = 0$$

$$100 - 2q_1 - 4{,}5q_2 - \lambda_2 + \lambda_4 = 0$$

$$\lambda_1(12 - q_1) = 0$$

$$\lambda_2(12 - q_2) = 0$$

$$\lambda_3 q_1 = 0$$

$$\lambda_4 q_2 = 0$$

$$12 - q_1 \geq 0$$

$$12 - q_2 \geq 0$$

$$q_1, q_2 \geq 0$$

$$\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$$

Vamos a tener que hacer casos, los cuales podremos ir descartando:

$$Caso \quad 1: \quad q_1 = 0 \wedge q_2 = 0$$

Este caso podemos descartarlo debido a que sabemos por lo que obtuvimos en el inciso anterior, al aumentar q_i aumenta la función objetivo.

$$Caso \quad 2: \quad q_1 > 0 \wedge q_2 = 0$$

Usando las condiciones, vamos a tener que:

$$q_1 = 25$$

Pero en este caso, no se cumple la restricción, por lo que podemos descartar este caso.

$$Caso \quad 3: \quad q_1 > 0 \wedge q_2 > 0$$

En este caso vamos a tener que: Si vemos lo que obtuvimos en 1. vamos a darnos cuenta que las resticciones estarán activas, Lo que significa que:

$$q_1 = 12$$

$$q_1 = 12$$

$$Caso \quad 4: \quad q_1 = 0 \wedge q_2 > 0$$

Usando las condiciones, vamos a tener que:

$$q_1 = 22, 2$$

Pero en este caso, no se cumple la restricción, por lo que podemos descartar este caso. Finalmente, tenemos que la solución sería $q_1 = 12$ y $q_2 = 12$

4. Si le dieran la posibilidad de invertir y aumentar en una cantidad muy pequeña la capacidad máxima de una de las dos plantas, ¿cuál aumentaría?
   Respuesta.
   En la planta 1, para ello obtengamos los valores de λ, pero, también, podríamos intuirlo debido a que los costos de la planta 1 son menores que los de la planta 2. Para obtener λ_1:
   $$100 - 2(12) - 4(12) - \lambda_1 = 0$$
   $$\lambda_1 = 28$$
   Para obtener λ_2:
   $$100 - 2(12) - 4{,}5(12) - \lambda_2 = 0$$
   $$\lambda_2 = 22$$

5. Si usted pudiera invertir en aumentar la capacidad máxima de las plantas en hasta 10 unidades adicionales a repartir entre ambas, ¿cuál sería su plan de inversión óptimo?
   Respuesta.
   Volver al óptimo sin restricción, a q_1 le damos 2,3 para llegar y a q_2 el resto que es igual a 5,8

5.19. Aplicación de KKT: Oferta Laboral

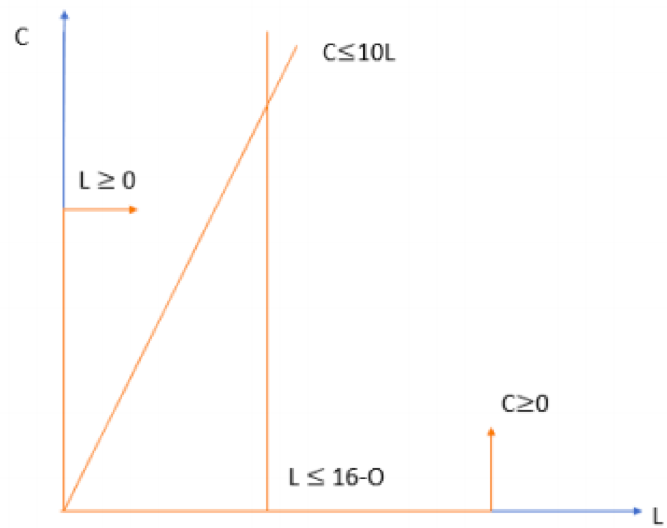
Considere un individuo que tiene preferencias del tipo:

$$U(C, L) = 2C^{\frac{1}{2}} - L$$

Este individuo debe decidir cuanto va a consumir C y cuanto va a trabajar L. El precio de todos los bienes de consumo dentro de esta economía es igual a \$2, en tanto que el salario por hora trabajada es igual a \$20. Además, usted sabe que el individuo enfrenta una restricción de tiempo, ya que el individuo tiene 16 horas al día que decidir repartir entre ocio (O) y trabajo.

1. Plantee las restricciones que enfrenta el individuo
   Respuesta.
   El individuo va a enfrentar dos restricciones:
   1. Restricción de presupuesto, sus ingresos deben ser menor o igual que sus gastos
   $$2C \leq 20L$$
   2. Una restricción de tiempo:
   $$L + O \leq 16$$
   3. Restricciones de no negatividad, no puede consumir ni trabajar negativo.
   $$L, C \geq 0$$

2. Muestre gráficamente el set factible
   Respuesta.
   Debemos graficar las restricciones y ver donde estas se interceptan:



3. Plantee el Lagrangeano y las condiciones de Kuhn-Tucker para este problema
   Respuesta.
$$\max_{C,L} \quad U = 2C^{\frac{1}{2}} - L$$
   sujeto a:
$$2C \leq 10L$$
$$L + O \leq 16$$
$$C, L \geq 0$$
   Vamos a tener que optimizar sujeto a restricciones de desigualdad. Por lo tanto, planteamos el lagrangeano:
$$\mathcal{L} = 2C^{\frac{1}{2}} - L + \lambda_1(20L - 2C) + \lambda_2(16 - L - O)$$
   Las condiciones de KKT:
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C} = 2\frac{1}{2}\frac{1}{C^{\frac{1}{2}}} - 2\lambda_1 \leq 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C}C = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = -1 + 20\lambda_1 - \lambda_2 \leq 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L}L = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} = 20L - 2C \geq 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1}\lambda_1 = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_2} = 16 - 0 - L \geq 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_2}\lambda_2 = 0$$

4. Encuentre las cantidades óptimas de C*, L* y O*
   Respuesta.
   Vamos tener casos nuevamente. Para descartar un par de casos, podemos pensar primero en que:
$$UmgC = 2\frac{1}{2}\frac{1}{C^{\frac{1}{2}}}$$
   Si evaluamos en C=0, vamos a tener que la utilidad marginal tiende a infinito, esto quiere decir que aumentar la cantidad de C, me va a generar infinito Umg, por lo que siempre voy a querer más de $C > 0$. Luego, mirando nuestro set fa ctible, podemos eliminar de inmediato los casos donde $C = 0$, además, sabemos como siempre voy a querer más C, que la restricción que estará activa sera la de

presupuesto, con esto podemos decir que $\lambda_1 > 0$.
Caso 1: $C > 0 \quad \wedge \quad L > 0 \quad \wedge \quad \lambda_1 > 0 \wedge \lambda_2 = 0$
Vamos a tener que se cumplen con igualdad:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C} = 2\frac{1}{2}\frac{1}{C^{\frac{1}{2}}} - 2\lambda_1 = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = -1 + 20\lambda_1 - \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} = 20L - 2C = 0$$

Tendremos que:

$$\lambda_1 = \frac{1}{20}$$

$$\frac{1}{C^{\frac{1}{2}}} - 2\frac{1}{20} = 0$$

$$C = 100$$

Luego,

$$20L - 2 * 100 = 0$$

$$L = 10$$

$$O = 16 - 10 = 6$$

Dada la representación gráfica sabemos que esta será la solución, pero, también podemos comprobar los demás casos.
Caso 2: $C > 0 \quad \wedge \quad L = 0$
En este caso tendremos que estaríamos, fuera del set factible, el único punto posible seria el $C = 0$ y $L = 0$, pero sabemos que no es una solución óptima.(siempre quiero un $c > 0$). Idem caso $C = 0$ y $L > 0$

Caso 3: $C > 0, L > 0, \lambda_1 = 0 \wedge \lambda_2 = 0$ (Dentro del set)
$C = 0$ y $L > 0$. No tiene sentido, tendríamos utilidad negativa.

Caso 4: $C > 0, L > 0, \lambda_1 = 0 \wedge \lambda_2 > 0$ (Borde izquierdo de la figura)
Nuevamente tendríamos $C = 0$ y Tendriamos además $L + 0 = 16$, Podríamos estar en cualquier punto de la recta. El único punto posible seria L=16. Tampoco tiene sentido ya tendríamos nuevamente utilidad negativa.

Caso 5: $C > 0, L > 0$ y ambas restricciones activas $\lambda_1 > 0 \wedge \lambda_2 > 0$

$$C = 160$$

$$L = 16$$

Podemos comprobar reemplazando en la función objetivo que este punto no es un máximo, ya que $C = 100$ y $L = 10$, generan un mayor nivel de utilidad.

5. Interprete en términos ecónomicos los multiplicadores de Lagrange del problema.
Respuesta.

$$\lambda_1 = \frac{1}{20}$$

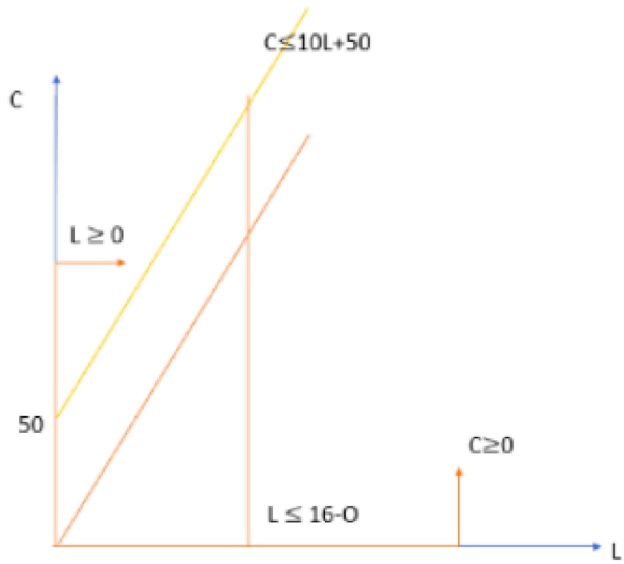
$$\lambda_2 = 0$$

Vamos a tener que aumentar la restricción de presupuesto nos va a generar un aumento de λ_1 en la función objetivo, ya que esta restricción esta activa. En cambio la restricción de tiempo es un restricción que tiene holgura.

6. Muestre gráficamente como cambiaría la solución si aparte de obtener un ingreso por las horas trabajadas esta persona recibe además un ingreso de \$100 independiente de las horas que trabaje. Explique intuitivamente y muestre como cambia el set factible
Respuesta.
En este caso tenemos que cambia la restricción.

$$2C \leq 100 + 20L$$

Dado que cambia el set factible y exactamente la restricción que estaba activa en la practica vamos a tener que se podrá alcanzar un nuevo máximo.



5.20. Aplicación de KKT: Demanda de Factores

Una empresa requiere producir exactamente z unidades de su producto Y al menor costo posible. La producción se realiza usando capital K y trabajo L de acuerdo a la función de producción

$$Y = 2\sqrt{L} + 2\sqrt{K+1}$$

En el mercado cada unidad de K se puede contratar a un precio r por unidad, y cada trabajador (cada trabajador es una unidad de L en la función de producción) recibe un salario w, con $w, r > 0$ (Restricciones de no-negatividad). Asuma que $z > 2$.

Ayuda: La solución puede no ser interior.

1. Plantee el problema de optimización de esta firma. ¿Qué lógica hay detrás de decir que $z > 2$?
Respuesta.
El problema de la empresa es:

$$\begin{aligned} \min_{L,K} \quad & wL + rK \\ \text{s.a.} \quad & 2\sqrt{L} + 2\sqrt{K+1} = z \\ & K \geq 0, \quad L \geq 0 \end{aligned} \qquad \text{(Problema Original)}$$

Explicitar que $z > 2$ tiene sentido para garantizar que el conjunto restricción no es vacío: $z > 2$. Si inspecccionamos la restricción de producción podemos ver que si $z \leq 2$, incluso si la empresa elije

$K = 0$ e $L = 0$ vamos tener que su producción será mayor o igual que z. Para simplificar, y no analizar un caso en que el conjunto restricción es un único punto, imponemos que $z > 2$ y no $z \geq 2$.

2. Encuentre las cantidades óptimas de capital y trabajo como función de z, w y r
Respuesta.
Vamos resolver un problema modificado donde la empresa debe producir **por lo menos** z. O sea, vamos reemplazar la restricción

$$2\sqrt{L} + 2\sqrt{K+1} = z \tag{1}$$

por

$$2\sqrt{L} + 2\sqrt{K+1} \geq z \tag{2}$$

Note que en la solución óptima del problema modificado debemos tener $(K, L) \neq (0, 0)$ (caso contrario, dado el supuesto que $z > 2$ la restricción (2) no se cumple). Además, note que en la solución óptima de este problema modificado el productor siempre va elegir cumplir (2) con igualdad (caso esté a producir más que z, siempre puede reducir un poco la utilización de alguno un factor y bajar sus costos). **De esta manera, la solución del problema donde reemplazamos (1) por (2) es la misma que en el problema original.** Así, el problema que tenemos que resolver es

$$\begin{aligned} \min_{L,K} \quad & wL + rK \\ \text{s.a.} \quad & 2\sqrt{L} + 2\sqrt{K+1} \geq z \\ & K \geq 0, \quad L \geq 0 \end{aligned} \tag{Problema Modificado}$$

Uno puede verificar que el conjunto restricción del problema original (con la restricción de igualdad) es cerrado y acotado. Como la solución del problema original es igual a la solución del problema modificado, tenemos que un máximo existe para el problema modificado. Podemos reescribir el problema modificado en el formato canónico que hemos visto en clase (fíjese que lo convertí en un problema de maximización):

$$\begin{aligned} \max_{L,K} \quad & -wL - rK \\ \text{s.a.} \quad & z - 2\sqrt{L} - 2\sqrt{K+1} \leq 0 \\ & -K \leq 0, \quad -L \leq 0 \end{aligned} \tag{Problema Modificado en Forma Canónica}$$

La función lagrangiana es:

$$\mathcal{L}(L, K, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = -wL - rK - \lambda_1 \left[z - 2\sqrt{L} - 2\sqrt{K+1}\right] + \lambda_2 L + \lambda_3 L$$

Las condiciones de Kuhn-Tucker son:

$$-w + \frac{\lambda_1}{\sqrt{L}} + \lambda_2 = 0 \tag{3}$$

$$-r + \frac{\lambda_1}{\sqrt{K+1}} + \lambda_3 = 0 \tag{4}$$

$$\lambda_1 \left[z - 2\sqrt{L} - 2\sqrt{K+1}\right] = 0 \tag{5}$$

$$\lambda_2 L = 0 \tag{6}$$

$$\lambda_3 K = 0 \tag{7}$$

$$\lambda_1 \geq 0, \quad \lambda_2 \geq 0, \quad \lambda_3 \geq 0$$

$$-K \leq 0, \quad -L \leq 0$$

Para resolver este sistema, conviene dividir la análisis en casos, los que van a depender del signo de los multiplicadores.

Primero, suponga que $\lambda_2 > 0$. En este caso, por (6), tenemos que $L = 0$. Pero entonces, el lado izquierdo de (3) no está definido, y por lo tanto ecuación (3) no puede cumplirse. **Por lo tanto, debemos tener que $\lambda_2 = 0$ y $L > 0$ y suponemos así en lo que sigue.** De esta manera, el sistema (3)-(7) puede ser escrito como (perciba que con $\lambda_2 = 0$, (6) se cumple de manera automática):

$$-w + \frac{\lambda_1}{\sqrt{L}} = 0 \tag{3'}$$

$$-r + \frac{\lambda_1}{\sqrt{K+1}} + \lambda_3 = 0 \tag{4'}$$

$$\lambda_1 \left[z - 2\sqrt{L} - 2\sqrt{K+1} \right] = 0 \tag{5'}$$

$$\lambda_3 K = 0 \tag{7'}$$

Perciba que debemos tener $\lambda_1 > 0$ (si $\lambda_1 = 0$, (3') implica que $w = 0$, que no puede ser). Luego, (2) se cumple con igualdad y reemplazamos (5') por:

$$\left[z - 2\sqrt{L} - 2\sqrt{K+1} \right] = 0 \tag{5''}$$

Lo que sigue lo dividimos en 2 casos, siempre suponiendo ya que $\lambda_1 > 0$, $L > 0$ e $\lambda_2 = 0$.

Caso 1 $\lambda_3 > 0$

En este caso tenemos, por (7') que $K = 0$. Luego, por (5''):

$$z - 2\sqrt{L} - 2\sqrt{1} = 0$$

$$\sqrt{L} = \frac{z-2}{2}$$

Si $z > 2$ esta ecuación tiene solución con $L > 0$ y tenemos que:

$$L = \left(\frac{z-2}{2} \right)^2$$

Por (3') tenemos que $\lambda_1 = w\sqrt{L}$. Reemplazando esto y K y L en (4'):

$$-r + \frac{w\left(\frac{z-2}{2}\right)}{\sqrt{1}} + \lambda_3 = 0$$

$$\lambda_3 = r - w\left(\frac{z-2}{2} \right)$$

Luego, si $r - w\left(\frac{z-2}{2}\right) > 0 \Leftrightarrow z < 2\left(\frac{w+r}{w}\right)$ tenemos que $\lambda_3 > 0$. Por lo tanto, $(L, K) = \left(\left(\frac{z-2}{2}\right)^2, 0 \right)$ satisface las condiciones de K-T si los siguientes supuestos en los parámetros se cumplen: $z > 2$ y $z < 2\left(\frac{w+r}{w}\right)$. Si estas condiciones en los parámetros se cumplen este es el óptimo (dado que ya sabemos que un óptimo existe).

Caso 2 $\lambda_3 = 0$

En este caso reemplazando $\lambda_1 = w\sqrt{L}$ en (4') tenemos:

$$-r + \frac{w\sqrt{L}}{\sqrt{K+1}} = 0$$

$$\sqrt{K+1} = \frac{w}{r}\sqrt{L} \tag{8}$$

Reemplazando en (5”)

$$\left[z - 2\sqrt{L} - 2\frac{w}{r}\sqrt{L}\right] = 0$$

$$\left(\frac{w+r}{r}\right)\sqrt{L} = \frac{z}{2}$$

$$L = \left(\frac{z}{2}\frac{r}{w+r}\right)^2$$

Perciba que $L > 0$ y $\lambda_1 > 0$. Por (8) tenemos que

$$\sqrt{K+1} = \frac{w}{r}\frac{z}{2}\frac{r}{w+r}$$

$$K = \left(\frac{z}{2}\frac{w}{w+r}\right)^2 - 1$$

Para que $K \geq 0$ debemos tener $\left(\frac{z}{2}\frac{w}{w+r}\right)^2 \geq 1 \Leftrightarrow z \geq 2\left(\frac{w+r}{w}\right)$. Luego, $(L, K) = \left(\left(\frac{z}{2}\frac{r}{w+r}\right)^2, \left(\frac{z}{2}\frac{w}{w+r}\right)^2 - 1\right)$ satisface los supuestos de Kuhn-Tucker si $z \geq 2\left(\frac{w+r}{w}\right)$ y es el óptimo en este caso.

Resumen de las soluciones. Si $z \geq 2\left(\frac{w+r}{w}\right)$ el óptimo es el encontrado en caso 2. Si $2 < z < 2\left(\frac{r+w}{w}\right)$ el óptimo es el encontrado en caso 1.

3. Calcule el costo marginal de producir una unidad extra de Y.

   Respuesta. Vamos a tener una función por tramos. Reemplazando las soluciones obtenidas en la función objetivo y derivando con respecto a z tenemos que el costo marginal es:

$$\frac{z}{2}\left(\frac{wr}{w+r}\right) \quad \text{si} \quad \frac{z}{2}\left(\frac{w}{r+w}\right) > 1$$

$$w\left(\frac{z-2}{2}\right) \quad \text{si} \quad \frac{z}{2}\left(\frac{w}{r+w}\right) \leq 1$$

5.21. Aplicación de KKT: Bienestar Social

(Ejercicio obtenido del libro de Dixit, *Optimization in Economic Theory.*)

Suponga que existe una cantidad fija Y de un bien a disposición de la sociedad. Existen dos consumidores que sienten envidia mutua. Si el consumidor 1 obtiene Y_1 y el consumidor obtiene Y_2 sus utilidades son:

$$U_1(Y_1) := Y_1 - kY_2^2, \quad U_2(Y_2) := Y_2 - kY_1^2$$

tal que $k > 0$. Si $Y \leq 1/k$, maximice el bienestar social $W(Y_1, Y_2) = U_1(Y_1) + U_2(Y_2)$.

5.22. Aplicación KKT: Asignando patrocinios con presupuesto limitado

Sadida Sports Design es un fabricante europeo de calzado deportivo para básquetbol y fútbol, que tiene que decidir la mejor forma de gastar los recursos destinados a publicidad. Cada uno de los equipos de fútbol patrocinados requiere 120 pares de zapatos por patrocinio. Cada equipo de básquetbol requiere 30 pares de zapatos por patrocinio. Cada equipo de fútbol recibe $500.000 por concepto de patrocinio para calzado, y cada equipo de básquetbol reciben \$1.000.000. El presupuesto de Sadida para promociones asciende a \$25.000.000.

Sadida dispone de una provisión limitada (3000 cc) de *aminoplis*, un compuesto raro y costoso que se utiliza en la fabricación del calzado atlético de promoción. Cada par de zapatos para básquetbol requiere 3 cc de aminoplis y cada par de zapatos de fútbol requiere 1 cc de aminoplis. Una regulación de la FIFA impide que Sadida pueda auspiciar a más de 15 equipos de fútbol.

El objetivo de Sadida es patrocinar el mayor número de equipos de básquetbol y fútbol que sus recursos le permitan. Note que ES POSIBLE auspiciar cantidades fraccionarias de equipos.

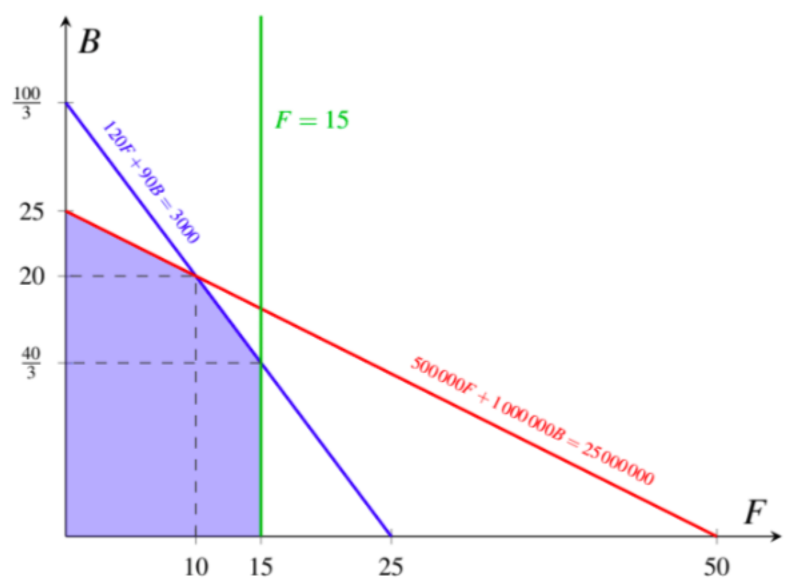
1. Formule el problema de optimización relevante para Sadida, incluyendo la función objetivo y las restricciones correspondientes.

   Respuesta. Sean B y F el número de equipos de básquetbol y fúbol patrocinados, respectivamente. Sadida quiere resolver

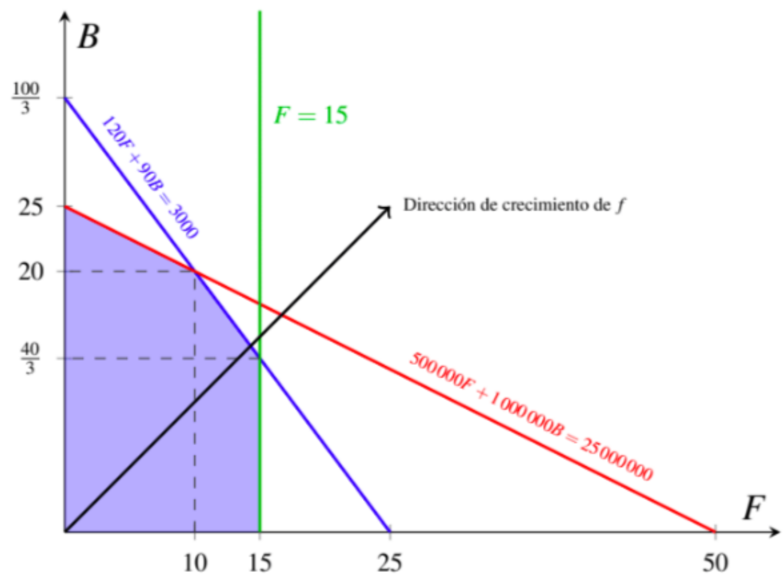
$$\begin{aligned}
\max_{B,F} \quad & F + B \\
s.a. \quad & 500\,000F + 1\,000\,000B \leq 25\,000\,000 \\
& 1 \cdot (120F) + 3 \cdot (30B) \leq 3000 \\
& F \leq 15 \\
& F \geq 0, \quad B \geq 0
\end{aligned}$$

2. ¿Cuál es el número óptimo de cada tipo de equipo que Sadida debería patrocinar? Justifique claramente por qué el punto encontrado es un máximo.

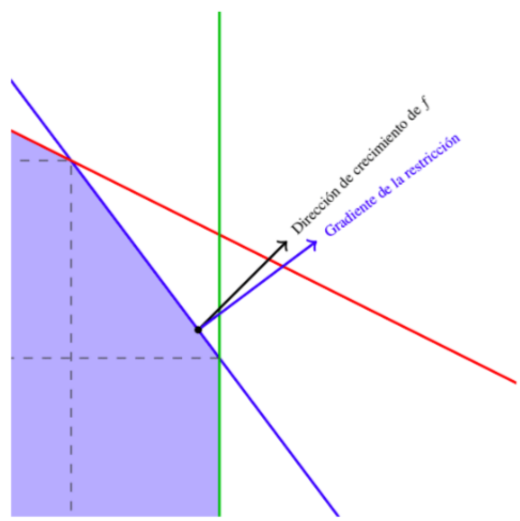
   Respuesta. El conjunto factible se ve como el área sombreada del dibujo:



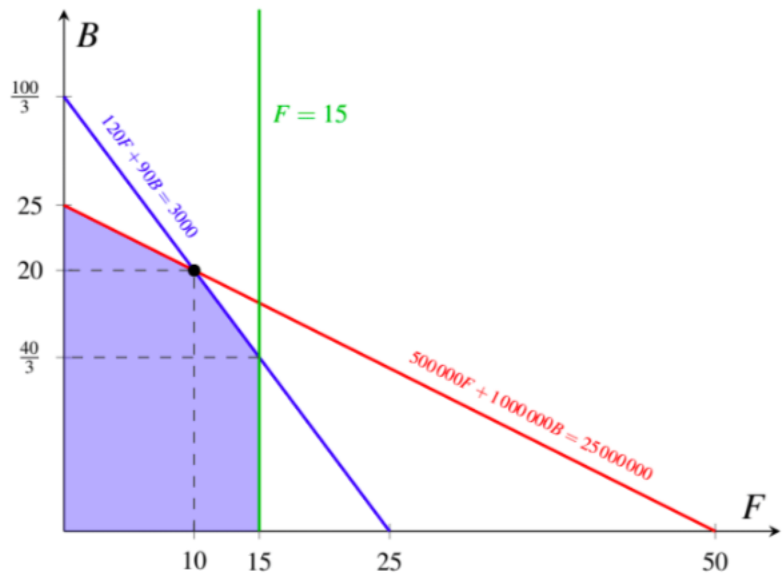
La función objetivo crece en la dirección $(1, 1)$, es decir, en la diagonal de 45º,



En el momento en que el crecimiento toca a la recta azul, el crecimiento de la función no es perpendicular a la recta. Si hacemos un zoom en ese punto lo veremos



Esto significa que si nos movemos a lo largo de la restricción, hacia el cruce con la recta roja, llegaremos al óptimo:



El argumento gráfico anterior se puede hacer también probando el valor de la función objetivo en cada uno de los vértices del poliedro.

Alternativamente se puede resolver usando KKT. El lagrangeano de este problema es (simplificando las restricciones)

$$\mathcal{L}(F,B,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5) = F + B - \lambda_1(F+2B-50) - \lambda_2(4F+3B-100) - \lambda_3(F-15) + \lambda_4 F + \lambda_5 B$$

Con condiciones:

a) $\mathcal{L}_F = \mathcal{L}_B = 0$.
b) $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_1(F+2B-50) = 0$.
c) $\lambda_2 \geq 0$, $\lambda_2(4F+3B-100) = 0$.
d) $\lambda_3 \geq 0$, $\lambda_3(F-15) = 0$.
e) $\lambda_4 \geq 0$, $\lambda_4 F = 0$.
f) $\lambda_5 \geq 0$, $\lambda_5 B = 0$.

La primera condición no es más que

$$1 - \lambda_1 - 4\lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \tag{1}$$
$$1 - 2\lambda_1 - 3\lambda_2 + \lambda_5 = 0 \tag{2}$$

Ahora revisamos las combinaciones de restricciones que pueden estar activas o inactivas. Notemos que no tiene mucho sentido que en el óptimo ambas variables sean 0, por lo que nos saltaremos revisar ese caso. Los casos que entregan solución tendrán un ✓ delante y los que no tendrán un × delante.

× **Caso 1:** $F = 0$, $B \neq 0$. Por 4, $\lambda_3 = 0$ y por 6, $\lambda_5 = 0$. Notar que no tiene sentido que B no sea lo más alto posible, luego alguna de las restricciones destacadas en 2 ó 3 debe estar activa. La restricción en 2 dice que a lo más $B = 25$, mientras que la restricción en 3 dice que a lo más $B = \frac{100}{3} \approx 33{,}33$. Como ambas restricciones deben cumplirse, debe ser que $B = 25$. En tal caso, por 3, $\lambda_2 = 0$. Con esto, de (2) se tiene $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, pero entonces de (1) se tiene

$$\lambda_4 = \lambda_1 - 1 = -\frac{1}{2} < 0$$

Luego este caso **NO ENTREGA CANDIDATOS**.

× **Caso 2:** $F \neq 0$, $B = 0$. Por 5, $\lambda_4 = 0$. Igual que en el caso anterior, no tiene sentido para el óptimo que F no sea lo más alto posible, luego alguna de las restricciones destacadas en 2,3 ó 4 debe estar activa. La restricción 2 dice que a lo más $F = 50$, la restricción 3 dice que a lo más $F = 25$ y la restricción 4 dice que a lo más $F = 15$. Como las 3 deben cumplirse, debe ser que $F = 15$. En tal caso, por 2, $\lambda_1 = 0$ y por 3, $\lambda_2 = 0$. Con esto, de (1), $\lambda_3 = 1$, pero de (2) $\lambda_5 = -1$.

Luego este caso **NO ENTREGA CANDIDATOS**.

Caso 3: $F \neq 0$, $B \neq 0$. Por 5, $\lambda_4 = 0$ y por 6, $\lambda_5 = 0$. Ahora tenemos que revisar los sub-casos, donde las restricciones en 2, 3 ó 4 están activas o no.

× **Caso 3.1:** La restricción en 4 está activa. Esto significa que $F = 15$. Como antes, debe ser que B sea lo más alto posible. La restricción en 2 dice que a lo mas $B = 17{,}5$ y la restricción en 3 dice que a lo más $B = \frac{40}{3} \approx 13{,}333$. Como ambas deben cumplirse, debe ser que $B = \frac{40}{3}$. En tal caso, por 2, $\lambda_1 = 0$. Así, de (2) obtenemos $\lambda_2 = \frac{1}{3}$, pero en ese caso por (1)

$$\lambda_3 = 1 - 4\lambda_2 = 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3} < 0$$

Luego este caso **NO ENTREGA CANDIDATOS**.

✓ **Caso 3.2:** La restricción en 4 está inactiva, luego $\lambda_3 = 0$. Con esto, (1) y (2) se transforman en el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 1 - \lambda_1 - 4\lambda_2 &= 0 \\ 1 - 2\lambda_1 - 3\lambda_2 &= 0 \end{aligned}$$

Que al resolver entrega $\lambda_1 = \frac{1}{5}$ y $\lambda_2 = \frac{1}{5}$. Como ambos son positivos, las restricciones en 2 y 3 se cumplen con igualdad, es decir B y F se obtienen del siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} F + 2B &= 50 \\ 4F + 3B &= 100 \end{aligned}$$

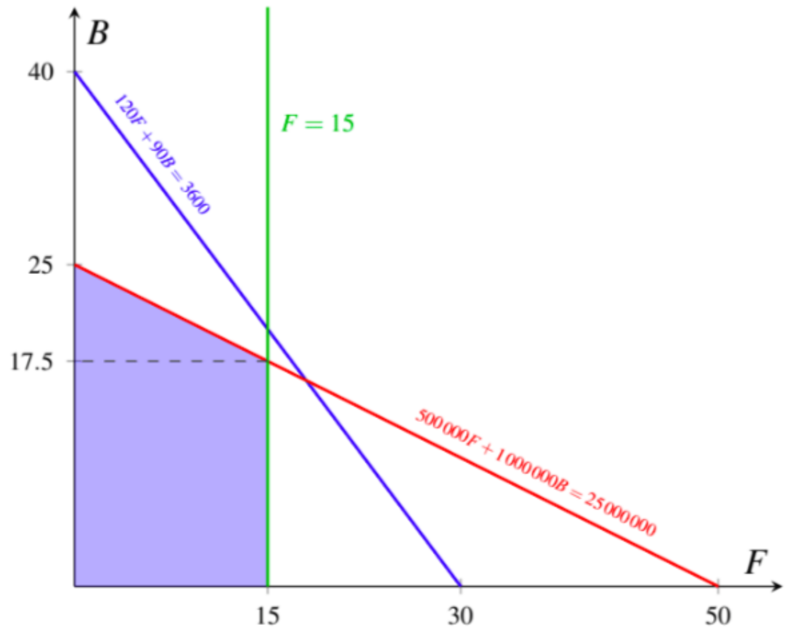
Que al resolver entrega $F = 10$ y $B = 20$. Este caso **ENTREGÓ 1 CANDIDATO**.

Con esto revisamos todos los casos posibles. El candidato obtenido es solución por cualquiera de los 3 métodos vistos en clases:

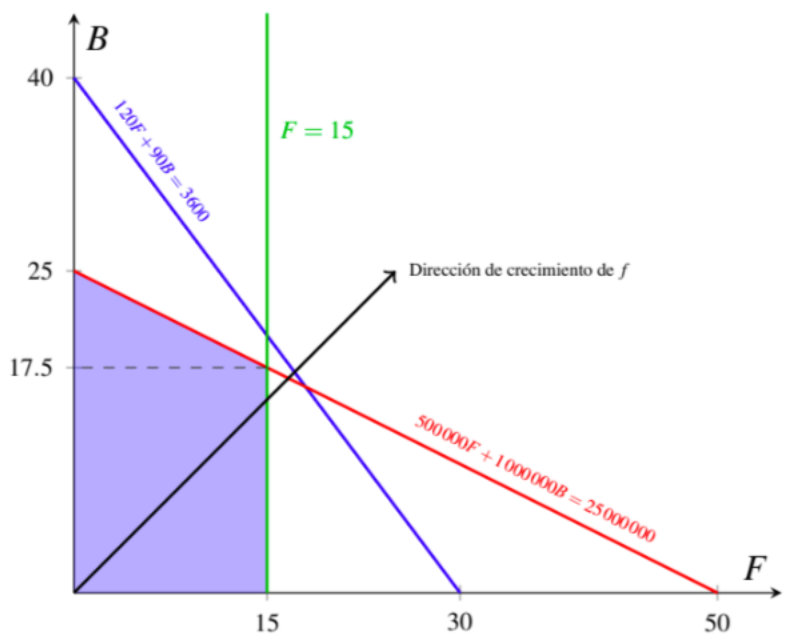
- El conjunto factible es cerrado y acotado y la función es continua, luego hay un máximo y un mínimo por el teorema de Weierstrass. Como el punto encontrado tiene un valor de la función objetivo mayor que, por ejemplo, el punto (0,0), entonces es un máximo.
- La función $\tilde{\mathcal{L}}$ que es el lagrangiano con los λ_j reemplazados es siempre cóncava (y convexa) por que es lineal, independiente de los valores que tomen los multipicadores.
- La función objetivo y las restricciones son lineales y por lo tanto cuasi cóncavas y cuasi convexas. Además, la función objetivo no tiene puntos críticos porque es lineal.

3. Sadida ha encontrado un yacimiento de aminoplis, añadiendo 600 cc adicionales, para un total de 3600 cc de aminoplis disponibles ¿Cómo cambia la respuesta? Justifique

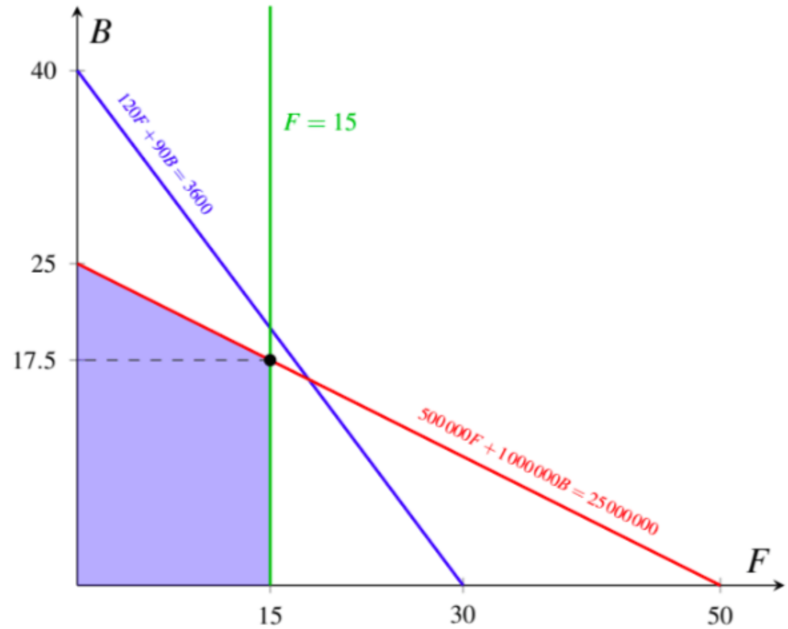
Respuesta. Ahora el dibujo se ve así



Y la restricción de *aminoplis* no es activa. Si seguimos la dirección $(1, 1)$, es decir, la diagonal de 45^{o}, tenemos



Y podemos notar que nuevamente la dirección de crecimiento de f no es perpendicular a la recta verde. Si seguimos la dirección hacia arriba por esa recta llegaremos a la solución:



Esto también puede argumentarse siguiendo la lógica de los vértices, como en el inciso a).

Alternativamente se puede resolver usando KKT. El lagrangeano de este problema es (simplificando las restricciones)

$$\mathcal{L}(F, B, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5) = F + B - \lambda_1(F + 2B - 50) - \lambda_2(4F + 3B - 120) - \lambda_3(F - 15) + \lambda_4 F + \lambda_5 B$$

Con condiciones:

a) $\mathcal{L}_F = \mathcal{L}_B = 0$.

b) $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_1(F + 2B - 50) = 0$.

c) $\lambda_2 \geq 0$, $\lambda_2(4F + 3B - 120) = 0$.

d) $\lambda_3 \geq 0$, $\lambda_3(F - 15) = 0$.

e) $\lambda_4 \geq 0$, $\lambda_4 F = 0$.

f) $\lambda_5 \geq 0$, $\lambda_5 B = 0$.

La primera condición no es más que

$$1 - \lambda_1 - 4\lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \quad (1)$$
$$1 - 2\lambda_1 - 3\lambda_2 + \lambda_5 = 0 \quad (2)$$

Ahora revisamos las combinaciones de restricciones que pueden estar activas o inactivas. Notemos que no tiene mucho sentido que en el óptimo ambas variables sean 0, por lo que nos saltaremos revisar ese caso. Los casos que entregan solución tendrán un ✓ delante y los que no tendrán un × delante. **(NOTA: EN LO QUE SIGUE, LA SOLUCIÓN ES ESENCIALMENTE LA MISMA QUE EN EL INCISO b), LO ÚNICO QUE SE MODIFICA DE MANERA SIGNIFICATIVA ES EL CASO 3.1)**

× **Caso 1:** $F = 0$, $B \neq 0$. Por 4, $\lambda_3 = 0$ y por 6, $\lambda_5 = 0$. Notar que no tiene sentido que B no sea lo más alto posible, luego alguna de las restricciones destacadas en 2 ó 3 debe estar activa. La restricción en 2 dice que a lo más $B = 25$, mientras que la restricción en 3 dice que a lo más $B = 40$. Como ambas restricciones deben cumplirse, debe ser que $B = 25$. En tal caso, por 3, $\lambda_2 = 0$. Con esto, de (2) se tiene $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, pero entonces de (1) se tiene

$$\lambda_4 = \lambda_1 - 1 = -\frac{1}{2} < 0$$

Luego este caso **NO ENTREGA CANDIDATOS**.

× **Caso 2:** $F \neq 0$, $B = 0$. Por 5, $\lambda_4 = 0$. Igual que en el caso anterior, no tiene sentido para el óptimo que F no sea lo más alto posible, luego alguna de las restricciones destacadas en 2,3 ó 4 debe estar activa. La restricción 2 dice que a lo más $F = 50$, la restricción 3 dice que a lo más $F = 30$ y la restricción 4 dice que a lo más $F = 15$. Como las 3 deben cumplirse, debe ser que $F = 15$. En tal caso, por 2, $\lambda_1 = 0$ y por 3, $\lambda_2 = 0$. Con esto, de (1), $\lambda_3 = 1$, pero de (2) $\lambda_5 = -1$.

Luego este caso **NO ENTREGA CANDIDATOS**.

Caso 3: $F \neq 0$, $B \neq 0$. Por 5, $\lambda_4 = 0$ y por 6, $\lambda_5 = 0$. Ahora tenemos que revisar los sub-casos, donde las restricciones en 2, 3 ó 4 están activas o no.

✓ **Caso 3.1:** La restricción en 4 está activa. Esto significa que $F = 15$. Como antes, debe ser que B sea lo más alto posible. La restricción en 2 dice que a lo mas $B = 17{,}5$ y la restricción en 3 dice que a lo más $B = 20$. Como ambas deben cumplirse, debe ser que $B = 17{,}5$. En tal caso, por 3, $\lambda_2 = 0$. Así, de (2) obtenemos $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, y por (1)

$$\lambda_3 = 1 - \lambda_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Este caso **ENTREGÓ 1 CANDIDATO**.

× **Caso 3.2:** La restricción en 4 está inactiva, luego $\lambda_3 = 0$. Con esto, (1) y (2) se transforman en el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 1 - \lambda_1 - 4\lambda_2 &= 0 \\ 1 - 2\lambda_1 - 3\lambda_2 &= 0 \end{aligned}$$

Que al resolver entrega $\lambda_1 = \frac{1}{5}$ y $\lambda_2 = \frac{1}{5}$. Como ambos son positivos, las restricciones en 2 y 3 se cumplen con igualdad, es decir B y F se obtienen del siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} F + 2B &= 50 \\ 4F + 3B &= 120 \end{aligned}$$

Que al resolver entrega $F = 18$ y $B = 16$. Pero por 4, $F \leq 15$, luego este caso **NO ENTREGA CANDIDATOS**.

Con esto revisamos todos los casos posibles. El candidato obtenido es solución por cualquiera de los 3 métodos vistos en clases:

- El conjunto factible es cerrado y acotado y la función es continua, luego hay un máximo y un mínimo por el teorema de Weierstrass. Como el punto encontrado tiene un valor de la función objetivo mayor que, por ejemplo, el punto (0,0), entonces es un máximo.
- La función $\tilde{\mathcal{L}}$ que es el lagrangiano con los λ_j reemplazados es siempre cóncava (y convexa) por que es lineal, independiente de los valores que tomen los multipicadores.
- La función objetivo y las restricciones son lineales y por lo tanto cuasi cóncavas y cuasi convexas. Además, la función objetivo no tiene puntos críticos porque es lineal.

5.23. Aplicación KKT: Clases Online

Producto del retorno gradual, un colegio debe decidir cuántas profesoras destina a clases online y presenciales. Necesariamente se deben cumplir, al menos, 16 contenidos, para cumplir con los objetivos del ministerio. Cuando se destinan ℓ_p profesoras a clases presenciales, se cubren $4\ell_p^2$ contenidos. Si se destinan ℓ_o profesoras a clases online, se cubren solo $\frac{1}{4}\ell_o^2$ contenidos.

Sin embargo, al colegio le preocupa el riesgo a la salud de las alumnas. Producto de las redes de contacto, cuando el valor de contagiosidad de COVID es $R > 0$, el riesgo a la salud de tener ℓ_p profesoras en cursos presenciales es $16R\ell_p^2$. En clases online también hay un riesgo a la salud (mental) y si se destinan ℓ_p profesoras, el riesgo es igual a ℓ_o^2. El riesgo a la salud total es igual a la suma de los riesgos de cada modalidad de curso.

El colegio desea minimizar el riesgo a la salud total, es decir, desea resolver

$$\begin{aligned} \min_{\ell_p,\ell_o} \quad & 16R\ell_p^2 + \ell_o^2 \\ s.a. \quad & 4\ell_p^2 + \frac{1}{4}\ell_o^2 \geq 16 \\ & \ell_p \geq 0, \ell_o \geq 0 \end{aligned}$$

Suponga que ES POSIBLE asignar una cantidad fraccionaria de profesores a cada modalidad.

1. Explique con palabras por qué en la solución óptima la primera restricción está activa.
   Respuesta.
   Si la restricción se cumpliera con desigualdad, es decir, si en el óptimo se tuviera

   $$4\ell_p^2 + \frac{1}{4}\ell_o^2 > 16$$

   entonces se podría disminuir levemente cualquiera de las variables, lo que reduce el valor de la función objetivo. Eso contradice que el punto inicial fuera la solución.

   Alternativamente, si se resuelve por KKT (mirar parte d)), entonces si la primera restricción no se cumple con igualdad, el problema obliga a que

   $$\lambda_2 = 32R\ell_p \qquad \text{y} \qquad \lambda_3 = 2\ell_o$$

   Como la primera restricción se cumple, entonces alguna de las dos variables es positiva. Si fuera ℓ_p, entonces $\lambda_2 > 0$, lo que obligaría, por holgura complementaria, a que $\ell_p = 0$, lo que es una contradicción. Lo mismo ocurre si fuera ℓ_o. De aquí se concluye que no puede ocurrir que la primera restricción no esté activa.

2. Sean λ_2 y λ_3 son los multiplicadores asociados a las restricciones $\ell_p \geq 0$ y $\ell_o \geq 0$, respectivamente. Explique con palabras por qué en cualquier candidato a solución debe ser cierto que $\lambda_2 = 0$ ó $\lambda_3 = 0$ (o ambas).

   Respuesta.
   Si no fuera así, es decir, si ninguno fuera 0, entonces por holgura complementaria debe ocurrir que $\ell_p = \ell_o = 0$, lo que violaría la primera restricción. Por lo tanto, al menos alguno de ellos debe ser 0. El argumento inverso sirve también. Como la primera restricción debe cumplirse, entonces debe ser cierto que alguna de las variables, ℓ_p ó ℓ_o es positiva, luego por holgura complementaria $\lambda_2 = 0$ ó $\lambda_3 = 0$ (o ambas).

   El argumento en palabras que se obtiene usando KKT (mirar parte d)) es el mismo de arriba.

3. Suponga que encuentra una cantidad finita de candidatos a solución para el problema usando KKT. Explique por qué entre esos candidatos está la solución. (*Ayuda: Asuma que en esos puntos la primera restricción está activa.*)

Respuesta.
El conjunto factible, con la primera restricción activa, es cerrado y acotado (es el pedazo de una elipse en el primer cuadrante). La función objetivo es continua y por lo tanto por el teorema de Weierstrass se alcanza el máximo y el mínimo. El método de KKT debería encontrarlos y por lo tanto entre ellos está la solución.

4. Resuelva el problema de optimización del colegio cuando $R \neq 1$. (*Ayuda: Tenga ojo con los posibles valores de R.*)

Respuesta.
Para resolver usando KKT transformamos el problema a uno de maximización

$$\begin{aligned}
\max_{\ell_p,\ell_o} \quad & -16R\ell_p^2 - \ell_o^2 \\
s.a. \quad & -4\ell_p^2 - \frac{1}{4}\ell_o^2 \leq -16 \\
& -\ell_p \leq 0, -\ell_o \leq 0
\end{aligned}$$

Con lo que tenemos lagrangiano

$$\mathcal{L}(\ell_p, \ell_o, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = -16R\ell_p^2 - \ell_o^2 + \lambda_1\left(4\ell_p^2 + \frac{1}{4}\ell_o^2 - 16\right) + \lambda_2\ell_p + \lambda_3\ell_o$$

y tenemos CPO

$$\begin{aligned}
-32R\ell_p + 8\lambda_1\ell_p + \lambda_2 &= 0 \\
-2\ell_o + \frac{1}{2}\lambda_1\ell_o + \lambda_3 &= 0
\end{aligned}$$

Por la parte a) sabemos que solo nos interesa la primera restricción con igualdad, mientras que por la parte b) sabemos que no debemos considerar el caso $\ell_p = \ell_o = 0$. Con esto revisamos solo 3 casos.

Caso 1: $\ell_p \neq 0$ y $\ell_o \neq 0$. Entonces $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ y las CPO quedan

$$\begin{aligned}
-32R\ell_p + 8\lambda_1\ell_p &= 0 \\
-2\ell_o + \frac{1}{2}\lambda_1\ell_o &= 0
\end{aligned}$$

Como ambas variables son distintas de 0, podemos dividir y despejar:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= 4R \\
\lambda_1 &= 4
\end{aligned}$$

Notar que esto solo es válido cuando $R = 1$, pero dijimos que no es así, luego no hay candidatos en este caso.

Caso 2: $\ell_p = 0$ y $\ell_o \neq 0$. Entonces $\lambda_3 = 0$ y las CPO quedan

$$\begin{aligned}
\lambda_2 &= 0 \\
-2\ell_o + \frac{1}{2}\lambda_1\ell_o &= 0
\end{aligned}$$

En la segunda se puede dividir por ℓ_o, que no es 0, para obtener

$$\lambda_1 = 4$$

Y como la primera restricción está activa y $\ell_p = 0$, $\ell_o = 8$.

Caso 3: $\ell_p \neq 0$ y $\ell_o = 0$. Entonces $\lambda_2 = 0$ y las CPO quedan

$$\begin{aligned} -32R\ell_p + 8\lambda_1\ell_p &= 0 \\ \lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

En la primera se puede dividir por ℓ_p, que no es 0, para obtener

$$\lambda_1 = 4R$$

Y como la primera restricción está activa y $\ell_o = 0$, $\ell_p = 2$.

Tenemos dos candidatos y ninguno de los métodos de suficiencia global nos ayuda a determinar si son solución o no. Notar que

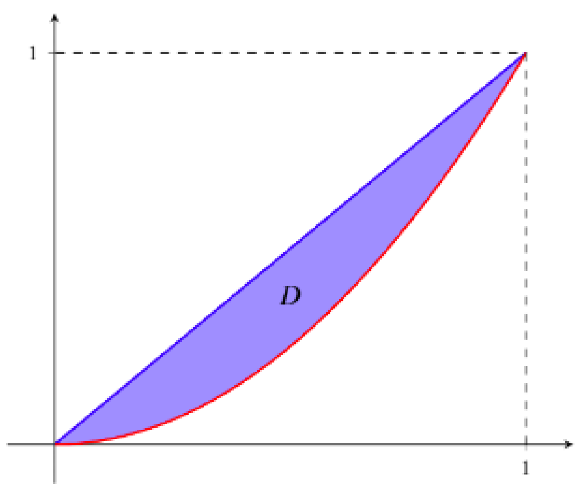
$$f(2,0) = 64R, \qquad f(0,8) = 64$$

De esta forma, el mínimo se alcanza en $(2,0)$ cuando $R < 1$ y en $(0,8)$ cuando $R > 1$.

5. Explique por qué cuando $R = 1$ no es posible usar el teorema de la envolvente.
   Respuesta. Cuando R pasa de menor que 1 a mayor que 1 la solución óptima "salta". En particular, $\ell_p^*(R)$ y $\ell_o^*(R)$ no son funciones diferenciales de R alrededor de $R = 1$ y, por lo tanto, no es posible utilizar el teorema de la envolvente en ese punto.

5.24. Aplicación KKT: Probabilidad y Estadística

En muchas aplicaciones estadísticas, para el cálculo de probabilidades en el caso de variables continuas, tenemos las llamadas funciones de densidad de probabilidad. Un caso particular de ellas es la **"función densidad uniforme bivariada"**, la cual se puede definir por una constante, en alguna región o dominio (D) del plano $\mathbb{R}^2$. Para la aplicación que se le pide resolver más adelante, se eligió la región encerrada por la bisectriz y la parábola canónica que se muestra en la gráfica



La forma de definir la constante corresponde al valor inverso del área de la figura. En este caso $\text{Área}(D) = \frac{1}{6}$. Usted verá que en la aplicación que se le pide, tendrá una constante incorporada correspondiente al número "6", la cual es exactamente la función densidad uniforme definida sobre D.

En este problema se le pide encontrar el máximo (y garantizar que lo sea) de la siguiente función de probabilidad:

$$f(x, y) = \int_x^y 6t(1-t)\, dt$$

Sujeto a las restricciones

$$\begin{aligned} y - x &= 0{,}2 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

Ayuda: Si va a usar KKT, note que la restricción $y - x = 0{,}2$ es como una restricción de desigualdad donde el caso con desigualdad estricta no se permite y su multiplicador puede ser negativo. ***Sin embargo, usted puede resolver el problema por el método que usted prefiera.***

Respuesta. Antes de resolver, nos preocuparemos de resolver la integral:

$$f(x, y) = 6\int_x^y t - t^2\, dt = 6\left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right)_{t=x}^{t=y} = 3t^2 - 2t^3\Big|_{t=x}^{t=y} = 3y^2 - 2y^3 - 3x^2 + 2x^3$$

Luego, el problema de optimización se transforma en:

$$\begin{aligned} \max_{x,y} \quad & 3y^2 - 2y^3 - 3x^2 + 2x^3 \\ s.a. \quad & y - x = 0{,}2 \\ & -x \leq 0, \quad -y \leq 0 \end{aligned}$$

Opción 1: Reemplazar $y = x + 0{,}2$ y resolver el problema univarado

Una opción viable es reemplazar $y = x + 0{,}2$ y dejar el problema de una sola variable. En ese caso además las restricciones quedan $x \geq 0$ y $x \geq -0{,}2$, que se resumen solamente con $x \geq 0$. Si se reemplaza, entonces la función objetivo univariada (que llamaremos g) queda

$$\begin{aligned} g(x) &= 3(x + 0{,}2)^2 - 2(x + 0{,}2)^3 - 3x^2 - 2x^3 \\ &= 3x^2 + 1{,}2x + 0{,}12 - 2x^3 - 1{,}2x^2 - 0{,}24x - 0{,}016 - 3x^2 - 2x^3 \\ &= -1{,}2x^2 + 0{,}96x + 0{,}104 \end{aligned}$$

Esta función es una parábola cóncava y tiene máximo. De hecho su vértice (el punto más alto) queda en

$$x^* = \frac{-0{,}96}{2 \cdot 1{,}2} = 0{,}4$$

que es el mismo punto donde la derivada de g,

$$g'(x) = -2{,}4x + 0{,}96$$

se hace 0. La justificación del máximo viene, nuevamente, de que g es cóncava. Con esto, $y^* = x^* + 0{,}2 = 0{,}6$. Esta es la misma solución a la que se llega en el método siguiente que usa KKT.

Notar que análogamente se podía reemplazar $x = y - 0{,}2$, lo que deja la función objetivo:

$$g(y) = -1{,}2y^2 + 1{,}44y - 0{,}136$$

con derivada $g'(y) = -2{,}4y + 1{,}44$ que se anula en $y^* = 0{,}6$, dejando $x^* = 0{,}4$. La justificación del máximo también es por concavidad de la función g.

Opción 2: Plantear el lagrangeano y usar KKT

Por lo tanto el lagrangeano es

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 3y^2 - 2y^3 - 3x^2 + 2x^3 - \lambda_1(y - x - 0{,}2) + \lambda_2 x + \lambda_3 y$$

Este es un problema de optimización con restricciones de igualdad, y desigualdad por lo cual es un problema de KKT con restricciones del tipo MIXTO, donde solo aplicamos holguras complementarias a las restricciones con desigualdad. Las condiciones necesarias son

1. $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -6x + 6x^2 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0$.
2. $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 6y - 6y^2 - \lambda_1 + \lambda_3 = 0$.
3. $\lambda_1 \in \mathbb{R}$; $\lambda_2 \geq 0$; $\lambda_3 \geq 0$; $\lambda_2 x = 0$; $\lambda_3 y = 0$.
4. $y - x - 0{,}2 = 0$; $x \geq 0$; $y \geq 0$.

Revisaremos los casos de acuerdo a las condiciones de no negatividad. Recordar que la restricción $y - x = 0{,}2$ siempre está activa.

× **Caso 1:** $x = 0$; $y = 0$. Este caso se descarta porque no verifica la restricción $y - x = 0{,}2$.

× **Caso 2:** $x = 0$; $y > 0$. Como la primera restricción es siempre activa, $y = 0{,}2$, y luego $\lambda_3 = 0$. Con esto, de 2)

$$\lambda_1 = 6y - 6y^2 = 6 \cdot 0{,}2 - 6 \cdot 0{,}2^2 = 0{,}96 > 0$$

Pero de 1)

$$\lambda_2 = 6x - 6x^2 - \lambda_1 = 6 \cdot 0 - 6 \cdot 0^2 - \lambda_1 = -0{,}96 < 0$$

lo que viola 4).

× **Caso 3:** $x > 0$; $y = 0$. Como la primera restricción es siempre activa, $x = -0{,}2$, pero esto no es posible por la restricción de no negatividad.

✓ **Caso 4:** $x > 0$; $y > 0$. Esto implica que ambas restricciones de no negatividad están inactivas. Luego, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Con esto, de 1) y 2) tenemos

$$-6x + 6x^2 + \lambda_1 = 0$$
$$6y - 6y^2 - \lambda_1 = 0$$

Por lo tanto se tiene que

$$\lambda_1 = 6x - 6x^2 = 6y - 6y^2$$

Si reemplazamos de la primera restricción $y = x + 0{,}2$, entonces la ecuación anterior queda

$$\begin{aligned} 6x - 6x^2 &= 6(x + 0{,}2) - 6(x + 0{,}2)^2 \\ x - x^2 &= x + 0{,}2 - x^2 - 0{,}4x - 0{,}04 \\ 0{,}4x &= 0{,}16 \\ x &= 0{,}4 \end{aligned}$$

Y por lo tanto $y = x + 0{,}2 = 0{,}6$. Además,

$$\lambda_1 = 6x - 6x^2 = 6 \cdot 0{,}4 - 6 \cdot 0{,}4^2 = 1,44$$

En conclusión, la única solución es

$$x^* = 0{,}4; \qquad y^* = 0{,}6; \qquad \lambda_1^* = 1,44; \qquad \lambda_2^* = 0; \qquad \lambda_3^* = 0$$

Este punto podría ser un mínimo o un máximo. Para comprobar que es un máximo, dado que las restricciones son lineales entonces solo analizaremos la concavidad de la función objetivo. Tenemos que

- $f_x = -6x + 6x^2$.
- $f_{xx} = -6 + 12x$.
- $f_y = 6y - 6y^2$.
- $f_{yy} = 6 - 12y$
- $f_{xy} = 0 = f_{yx}$ (por teorema de Young o por cálculo).

Luego, la matriz Hessiana de f, evaluada en el óptimo es

$$H_f(x^*, y^*) = \begin{bmatrix} -6 + 12x^* & 0 \\ 0 & 6 - 12y^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1{,}2 & 0 \\ 0 & -1{,}2 \end{bmatrix}$$

Los menores principales (no dominantes) de la matriz son

$$\tilde{D}_1 = -1,2; \qquad \tilde{D}_2 = \det H_f(x^*, y^*) = (-1,2)^2 - 0^2 = 1{,}44$$

Como los de orden impar son negativos y los de orden par positivos, entonces tenemos que la matriz es semi definida negativa. Esto es incompatible con ser un mínimo (por las condiciones necesarias para un mínimo).

Nota: En este caso NO se puede utilizar el teorema de Weierstrass ya que, a pesar que la función objetivo es continua, el conjunto factible que está dado por

$$\{(x, y) \,|\, y - x = 0,2; \quad x \geq 0; \quad y \geq 0\}$$

no es un conjunto compacto porque no es acotado. Este conjunto corresponde a la recta de pendiente 1, partiendo del punto $y = 0{,}2$, $x = 0$ y creciendo hacia el infinito.

Opción 3: Resolver el problema sin condiciones de no-negatividad usando Lagrange

En esta opción, nos olvidaremos de las restricciones de no negatividad, es decir, vamos a resolver el problema

$$\begin{aligned} \max_{x,y} \quad & 3y^2 - 2y^3 - 3x^2 + 2x^3 \\ s.a. \quad & y - x = 0{,}2 \end{aligned}$$

Este problema es distinto al anterior, pero si en el óptimo de este problema se cumple que $x \geq 0$ e $y \geq 0$, entonces el óptimo encontrado también resuelve el problema original. El lagrangeano de este caso es:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = 3y^2 - 2y^3 - 3x^2 + 2x^3 - \lambda(y - x - 0{,}2)$$

Y las condiciones de Lagrange son:

1. $\mathcal{L}_x = -6x + 6x^2 + \lambda = 0$.
2. $\mathcal{L}_y = 6y - 6y^2 - \lambda = 0$.
3. $y - x = 0{,}2$.

Despejando λ en 1) y 2) e igualando obtenemos

$$\begin{aligned} 6y - 6y^2 &= 6x - 6x^2 \\ y - y^2 &= x - x^2 \end{aligned}$$

Y reemplazando $y = x + 0{,}2$ obtenemos

$$\begin{aligned}(x+0{,}2)-(x+0{,}2)^2 &= x - x^2\\ x+0{,}2-x^2-0{,}4x-0{,}04 &= x-x^2\\ 0{,}16 &= 0{,}4x\end{aligned}$$

Luego $x^* = 0{,}4$ y por lo tanto $y^* = x^* + 0{,}2 = 0{,}6$. El punto es máximo por la misma justificación de la opción 2. Notar eso sí que el punto es máximo del problema SIN restricciones de no negatividad. Sin embargo, eso implica que en particular este punto le "gana" a todos aquellos que sí las cumplen. Además, en este óptimo $x > 0$ e $y > 0$, lo que implica que es un punto factible del problema original. Con esto se concluye que es un máximo.

5.25. Optimizar

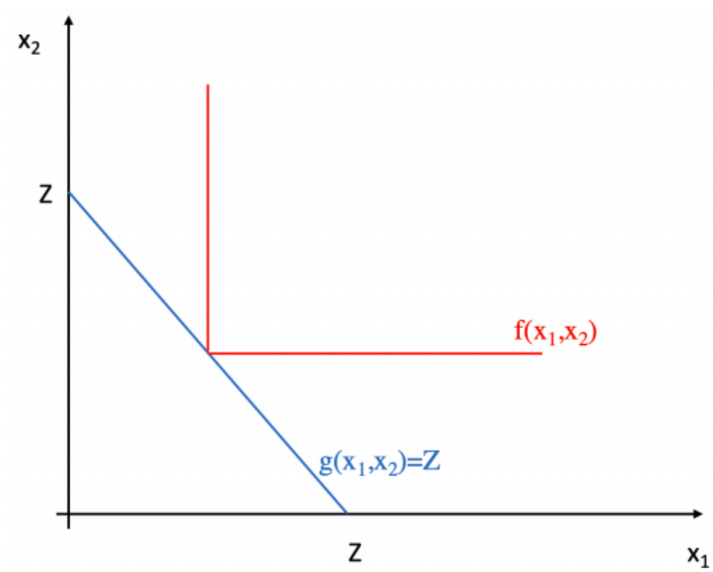
Considere la función $f(x_1, x_2) = \text{mín}\{x_1, x_2\}$ y el problema de optimización:

$$\text{máx}\, f(x_1, x_2) \quad \text{sujeta a} \;\; x_1 + x_2 = Z$$

donde $Z > 0$ es un parámetro.

Muestre que este problema tiene una solución única y global. Puede usar un gráfico para apoyar su explicación.

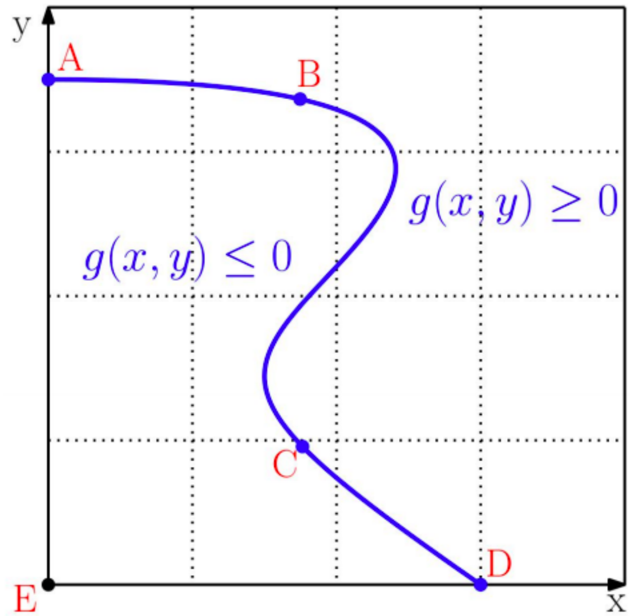
Respuesta. La manera más fácil es usar un gráfico:



La línea azul corresponde a la restricción mientras que la línea roja muestra la curva de nivel de la función objetivo en el óptimo. Como la función objetivo es creciente en ambos argumentos las curvas de nivel crecen hacia el nor oriente (arriba y derecha), entonces esta línea marca el nivel más alto que se puede lograr manteniendo el cumplimiento de la restricción. Notar que como la función objetivo no es continua no van a poder usar las condiciones de Lagrange.

5.26. Caracterizando óptimos gráficamente

Considere la siguiente figura:



Suponga que la figura representa el primer cuadrante en $\mathbb{R}^2$ y que la curva azul son **todos** los x, y en este cuadrante tales que $g(x, y) = 0$. Considere una función lineal f definida por $f(x, y) := ax + by$, tales que $a \geq 0, b \geq 0$ pero al menos uno de los dos debe ser distinto de 0. Dados los puntos A, B, C, D, E de la figura responda cuáles de estos puntos **podrían resolver**, para alguna combinación de parámetros a, b, los siguientes problemas. Si el problema no es factible o no tiene solución para toda combinación a, b que cumpla las condiciones anteriores, indíquelo en su respuesta.

1. $\text{máx}\, f(x, y)$ sujeto a $g(x, y) = 0, x = 0$.
2. $\text{máx}\, f(x, y)$ sujeto a $g(x, y) = 0, x \geq 0, y \geq 0$
3. $\text{mín}\, f(x, y)$ sujeto a $g(x, y) \leq 0, x \geq 0, y \geq 0$
4. $\text{máx}\, f(x, y)$ sujeto a $g(x, y) \geq 0, x \geq 0, y \geq 0$

Respuesta.

- La solución es el punto A.
- Debemos considerar sólo A, B, C, D pues E no es factible. Si $a = 0$ luego claramente A resolverá el problema ($b > 0$). Mientras que si $b = 0$, entonces D resolverá el problema. Por último, si $a, b > 0$, entonces B podría resolverlo para algunos valores de a y b, mientras que D también serái solución para otros valores de a y b.
- Por hipótesis tenemos que el gradiente de f tiene ángulo $0 \leq \theta \leq 90$ con respecto al origen. Si $a = 0$ y $b > 0$, luego $\theta = 90$ y D y E son minimizadores globales. Si $b = 0$ y $a > 0$, $\theta = 0$ y E y A son minimizadores globales. Y si $a, b > 0$, el minimizador global será E.
- Nótese que en este caso el conjunto factible no es acotado "hacia el noreste" y como el problema consiste en maximizar una función lineal con gradiente apuntando hacia la misma dirección (crece en esa dirección) el problema no tiene solución.

5.27. Pregunta Larga

Usted es administrador de una empresa que se dedica a producir sets para jugar a la payaya. En este mercado usted recibe contratos para producir una cantidad $\overline{Y}$ de sets de payaya por lo que una vez asignado el contrato usted tiene que decidir la manera de producir **al menos** $\overline{Y}$ sets al menor costo posible. Su función de producción combina dos factores llamados x_1 y x_2 que se adquieren a salarios w_1 y w_2. La función de producción es

$$Y = x_1^{0,5} x_2^{0,5}$$

Obviamente usted tiene que contratar cantidades de factores x_1 y x_2 que sean 0 o positivas.

Suponga $w_1 = 1$ y $w_2 = 1$ a menos que se especifique lo contrario. Recuerde que la función de costos totales muestra el costo total de producción como función de la cantidad producida. En caso de ser necesario suponga que $\sqrt{2} = 1{,}4$.

- Nota 1: La calificación de restricción es siempre satisfecha para este problema. Suponga esto a menos que se indique lo contrario.
- Nota 2: Este problema tiene un máximo global. En el óptimo se cumple que $x_1 > 0$ y $x_2 > 0$, y la empresa elige producir exactamente $\overline{Y}$. Enfóquese en puntos que satisfacen estos supuestos cuando busque soluciones de las condiciones de Kuhn-Tucker. Suponga esto a menos que se indique lo contrario.
- Nota 3: Recuerde que la empresa está **minimizando** costos.

Se pide:

1. Encuentre las cantidades óptimas de factores a contratar como función de la cantidad de producción requerida $\overline{Y}$.
2. Encuentre la función de costos totales de producción (función de valor) y la función de costo marginal.
3. Suponga ahora que el salario del factor x_1 sube de $w_1 = 1$ a $w_1 = 2$.
   a) Resuelva el problema de optimización y obtenga las cantidades óptimas de cada factor con el nuevo salario del factor x_1.
   b) Calcule y dibuje la función de costos totales con el nuevo salario del factor x_1.
4. Volvamos a suponer que $w_1 = 1$ y $w_2 = 1$. En este país el gobierno ha decidido regular el uso del factor x_1 y usted no puede contratar más de 10 unidades de este factor. No hay ninguna restricción sobre la cantidad a contratar de x_2.
   a) Plantee el nuevo problema de optimización.
   b) Encuentre las cantidades óptimas a contratar como función de la cantidad de producción requerida $\overline{Y}$.
   c) Calcule y grafique la función de costos totales (función de valor). Nota: piense bien antes de dibujar.
5. Suponga ahora que el gobierno en vez de colocar un límite a la cantidad de x_1 que usted puede contratar lo que hace es regular los precios de la siguiente manera: Si usted contrata 10 o menos unidades de x_1 usted seguirá pagando el mismo salario $w_1 = 1$ que tiene hasta ahora, pero si contrata más de 10 unidades de x_1, entonces el salario será $w_1 = 2$ para todas las unidades de x_1. El salario de x_2 no se ve afectado en ningún caso y seguirá siendo $w_2 = 1$.
   a) En este caso usted debe decidir si producir una cantidad $\overline{Y}$ usando $x_1 \leq 10$ pagando un salario $w_1 = 1$ o producir con $x_1 > 10$ pero a un salario $w_1 = 2$. Muestre gráficamente usando sus resultados en las partes 3*b* y 4*c* cómo se puede encontrar la respuesta a esta decisión. (Nota: qué manera de producir le conviene va a depender de $\overline{Y}$.)

Respuesta.

1. Lagrangeano del problema es

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda, \lambda_1, \lambda_2) = -w_1x_1 - w_2x_2 - \lambda\left(-x_1^{1/2}x_2^{1/2} - (-\overline{Y})\right) - \lambda_1(-x_1) - \lambda_2(-x_2)$$

   donde modificamos la función objetivo para convertirlo en un problema de maximización y la restricción de cumplir con un mínimo de producción para dejarla como $-x_1^{1/2}x_2^{1/2} \leq -\overline{Y}$ en vez de $x_1^{1/2}x_2^{1/2} \geq \overline{Y}$. Dados los supuestos, las condiciones de KT se reducen a

$$\begin{aligned} -w_1 + \lambda\frac{1}{2}\frac{x_2^{1/2}}{x_1^{1/2}} &= 0 \\ -w_2 + \lambda\frac{1}{2}\frac{x_1^{1/2}}{x_2^{1/2}} &= 0 \\ x_1^{1/2}x_2^{1/2} &= \overline{Y} \end{aligned}$$

   Las dos primeras condiciones nos dan

$$\begin{aligned} 2w_1\frac{x_1^{1/2}}{x_2^{1/2}} = \lambda = 2w_2\frac{x_2^{1/2}}{x_1^{1/2}} \\ w_1x_1 &= w_2x_2 \end{aligned}$$

   que usando los valores de salarios y reemplazando en la restricción de producción (que se cumple con igualdad) nos da

$$x_1 = x_2 \quad \Longrightarrow \quad x_1^* = x_2^* = \overline{Y}$$

   Consecuentemente el multiplicador está dado por $\lambda = 2$

2. La función de costos está dada por

$$C^*(\overline{Y}) = w_1x_1^* + w_2x_2^* = 2\overline{Y}$$

   Función de costos marginales es 2 y puede obtenerse de calcular λ o de diferenciar la función de costos.

   a) Usando los resultados de la parte anterior tenemos que

$$\begin{aligned} 2w_1\frac{x_1^{1/2}}{x_2^{1/2}} = \lambda = 2w_2\frac{x_2^{1/2}}{x_1^{1/2}} \\ 2x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

   al reemplazar los valores de los salarios. Usando nuevamente la restricción de producción, que se cumple con igualdad, obtenemos

$$\begin{aligned} 2x_1 &= x_2 \\ \overline{Y} &= (x_1)^{0,5}(2x_1)^{0,5} \\ &\Longrightarrow \\ \overline{Y} &= \sqrt{2}x_1 \\ &\Longrightarrow x_1^* = \overline{Y}/\sqrt{2} \\ & x_2^* = \sqrt{2}\overline{Y} \end{aligned}$$

b) Reemplazamos en la función de costos y obtenemos

$$C^*(\overline{Y}) = 2\frac{\overline{Y}}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\overline{Y} = 2\sqrt{2}\overline{Y}$$

La función de costos es una línea recta tal como aparece en la figura ??.

3. Respuestas a esta parte

a) Lagrangeano del nuevo problema es

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = & - w_1x_1 - w_2x_2 - \lambda\left(-x_1^{1/2}x_2^{1/2} - (-\overline{Y})\right) \\ & - \lambda_1(-x_1) - \lambda_2(-x_2) - \lambda_3(x_1 - 10)\end{aligned}$$

b) Las condiciones de KT, después de tomar en cuenta los supuestos sobre las restricciones que serán activas, son

$$\begin{aligned}-w_1 + \lambda\frac{1}{2}\frac{x_2^{1/2}}{x_1^{1/2}} - \lambda_3 =& 0 \\ -w_2 + \lambda\frac{1}{2}\frac{x_1^{1/2}}{x_2^{1/2}} =& 0 \\ x_1^{1/2}x_2^{1/2} =& \overline{Y} \\ x_1 \leq & 10 \quad \text{con holgura complementaria}\end{aligned}$$

Tenemos dos casos posibles a analizar:

1) Caso 1: $\lambda_3 = 0, x_1 < 10$
En este caso tenemos la misma solución que en la primera parte de la pregunta con $x_1^* = x_2^* = \overline{Y}$ y $C^*(\overline{Y}) = 2\overline{Y}$. Esta solución es factible si y solo si $\overline{Y} < 10$.

2) Caso 2: $\lambda_3 > 0, x_1 = 10$
En este caso obtenemos x_2 de la restricción de producción,

$$\begin{aligned}\overline{Y} =& \sqrt{10x_2^*} \\ x_2^* =& \frac{\overline{Y}^2}{10}\end{aligned}$$

Con ellos los multiplicadores son

$$\begin{aligned}\lambda =& \frac{\overline{Y}}{5} \\ \lambda_3 =& \frac{\overline{Y}^2}{100} - 1\end{aligned}$$

y ambos son positivos para $\overline{Y} \geq 10$.

c) Debemos tomar en cuenta los rangos para cada solución, por ello la función de costos tiene dos partes. Primero, donde la restricción de x_1 no es activa, y la parte donde pasa a ser activa:

$$C^*(\overline{Y}) = \begin{cases} 2\overline{Y} & \text{si } \overline{Y} < 10 \\ 10 + \frac{\overline{Y}^2}{10} & \text{si } \overline{Y} \geq 10 \end{cases}$$

La función de costos aparece en la figura ??.

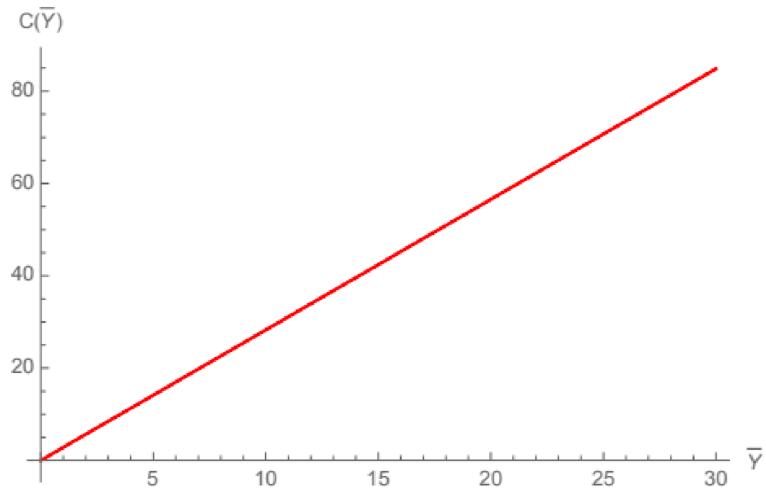


Figura 5.1: Función de costos con $w_1 = 2$

d) El problema de optimización implica decidir para cada valor de $\overline{Y}$ si producir con x_1 mayor o menor a 10. Como tenemos las funciones de costo en cada caso (funciones de valor de los problemas de optimización) nos basta comparar los costos con cada opción. Gráficamente lo vemos en la figura **??**, donde observamos que para valores bajos de producción nos conviene escoger producir con x_1 menor a 10 y pagarel salario bajo. A medida que aumenta la producción deseada aumenta la cantidad de x_1 contratada hasta llegar a $\overline{Y} = 10$ donde pasamos a contratar justo unidades. Esta situación se mantiene hasta que las curvas se intersectan en un nivel de producción mayor a 10, donde conviene pasar a contratar $x_1 > 10$ y pagar el mayor salario.

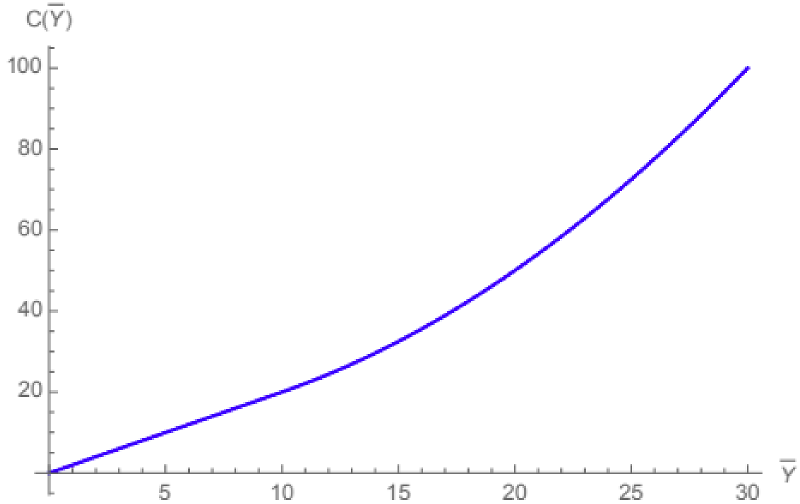
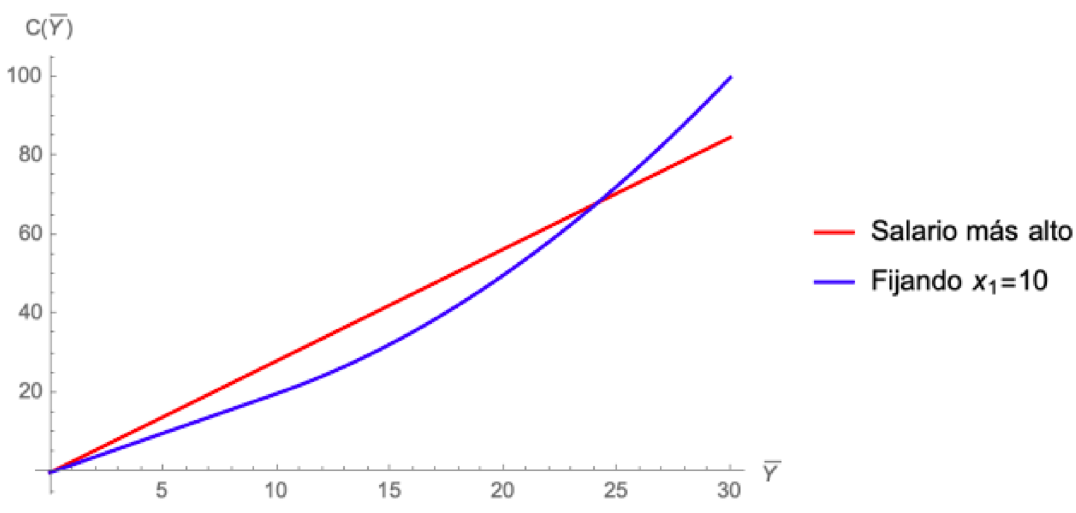


Figura 5.2: Función de costos con restricción de $x_1 \leq 10$



t!

Figura 5.3: Figura que compara las dos funciones de costos anteriores para poder decidir cuando le conviene pasar a producir con $x_1 > 10$ aunque eso implique pagar un mayor costo por cada unidad contratada

5.28. Pregunta Corta

Considere el problema

$$\text{máx} \quad 2x+y \quad \text{sujeta a} \quad \begin{cases} (x+1)^2+y^2 \leq 4 \\ x^2+(y+1)^2 \leq 4 \end{cases}, \quad x \geq 0, \;\; y \geq 0$$

1. "Este problema tiene solución". Justifique esta afirmación de manera precisa usando resultados vistos en clase. Debe demostrar matemática o geométricamente por qué se cumplen las hipótesis del resultado que utilice.

2. Resuelva este problema razonando geométricamente, es decir dibuje el conjunto factible y muestre en su gráfico el punto (x^*, y^*) en el que la función objetivo alcanza su máximo valor.

3. Escriba las condiciones de Kuhn-Tucker para este problema. Demuestre que el punto (x^*, y^*) hallado en la parte anterior resuelve el problema.

4. Suponga que se sustituye la restricción $x^2+(y+1)^2 \leq 4$ por $x^2+(y+1)^2 \leq 4{,}1$. Estime mediante el Teorema de la Envolvente el cambio del valor óptimo.

5.29. Optimización con restricciones

Considere el siguiente problema de maximización:

$$\max_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \sqrt{x+y}$$

$$\text{sujeto a } x^2+y^2 \leq 100, x \geq 0, y \geq 0$$

De ser necesario asuma que se cumple la condición de cualificación de restricciones.

a) Grafique las curvas de nivel y el conjunto factible del problema.

Respuesta. La curva de nivel de la función objetivo para el nivel k se define por $\sqrt{x+y} = k$ o $x+y = k^2$, por lo que son rectas con pendiente -1 e intercepto k^2. El borde de la primera restricción define una circunferencia de radio 10 centrada en $(0,0)$, por lo que al agregar las condiciones de no negatividad el conjunto factible se restringe a la cuarta parte del círculo (en el primer cuadrante).

b) Resuelva el problema usando el método de Kuhn-Tucker. Para ello debe:

(i) escribir el Lagrangeano,

(ii) escribir las condiciones de Kuhn-Tucker,

(iii) indicar cuántos casos posibles se desprenden de las condiciones de Kuhn-Tucker, y encontrar el(los) punto(s) que satisface(n) estas condiciones. Justifique su análisis, incluyendo la razón por la cual descartó casos,

(iv) indicar si el (los) punto(s) encontrado(s) en la parte anterior es (son) máximo(s) y, en caso afirmativo, si se puede afirmar que alguno(s) es (son) máximo(s) global(es).

Respuesta. El lagrangeano es

$$\mathcal{L} = \sqrt{x+y} + \lambda_1(100 - x^2 - y^2) + \lambda_2 x + \lambda_3 y,$$

con las siguientes condiciones de KT:

$$\frac{1}{2\sqrt{x+y}} - 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0;$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x+y}} - 2\lambda_1 y + \lambda_3 = 0;$$

$$100 - x^2 - y^2 \geq 0; \quad \lambda_1(100 - x^2 - y^2) = 0;$$

$$x \geq 0; \quad \lambda_2 x = 0$$

$$y \geq 0; \quad \lambda_3 y = 0$$

de las cuales surgen 8 casos posibles con las distintas combinaciones de $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ positivas o nulas. No es posible el caso con $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0$ (ya que $0^2 + 0^2 \neq 100$), quedando solo 7 casos.
Se descartan inmediatamente todos los casos con $\lambda_1 = 0$ (ya que se contradice con las dos primeras restricciones), quedando solo 3 casos posibles.
Si $\lambda_2 > 0$ o $\lambda_3 > 0$ también se obtiene una contradicción: si $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ debe ser cierto que $x = 0$ e $y = 10$, y la primera condición indica que $\lambda_2 = -\frac{1}{2\sqrt{10}} < 0$; asimismo, si $\lambda_1 > 0, \lambda_3 > 0$ debe ser cierto que $y = 0$ y $x = 10$, y la segunda condición indica que $\lambda_3 = -\frac{1}{2\sqrt{10}} < 0$.

El único caso posible es entonces $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. En ese caso se obtiene $x = y = \sqrt{50}$. Ese punto crítico es un máximo global, ya que la función objetivo es cuasicóncava (transformación creciente de una lineal–y por lo tanto cóncava) y la función de restricción que está activa es convexa.

Alternativamente, se puede escribir el lagrangeano más corto:

$$\mathcal{L} = \sqrt{x+y} + \lambda_1(100 - x^2 - y^2),$$

incorporando las restricciones de no negatividad en las condiciones de KT:

$$\frac{1}{2\sqrt{x+y}} - 2\lambda_1 x \leq 0; \quad \left(\frac{1}{2\sqrt{x+y}} - 2\lambda_1 x\right) \cdot x = 0$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x+y}} - 2\lambda_1 y \leq 0; \quad \left(\frac{1}{2\sqrt{x+y}} - 2\lambda_1 y\right) \cdot y = 0$$

$$100 - x^2 - y^2 \geq 0; \quad \lambda_1(100 - x^2 - y^2) = 0;$$

de las cuales surgen 8 casos posibles con las distintas combinaciones de λ_1, x, y positivas o nulas. No es posible el caso con $\lambda_1 > 0, x = 0, y = 0$ (ya que $0^2 + 0^2 \neq 100$), quedando solo 7 casos.
Se descartan inmediatamente todos los casos con $\lambda_1 = 0$ (ya que se contradice con las dos primeras restricciones), quedando solo 3 casos posibles.
Si $x = 0$ o $y = 0$ también se obtiene una contradicción: si $\lambda_1 > 0$ y $x = 0$ debe ser cierto que $y = 10$, y la primera condición indica que $\frac{1}{2\sqrt{10}} \leq 0$; asimismo, si $\lambda_1 > 0$ e $y = 0$ debe ser cierto que $x = 10$, y la segunda condición indica que $\frac{1}{2\sqrt{10}} \leq 0$.

El único caso posible es entonces $\lambda_1 > 0, x > 0, y > 0$. En ese caso se obtiene $x = y = \sqrt{50}$.

c) Muestre gráficamente que la(s) solución(es) encontrada(s) en la parte anterior corresponde(n) efectivamente a las condiciones de tangencia de las curvas de nivel de la función objetivo y de la restricción activa. (Nota: si no pudo resolver la parte (b) de esta pregunta igualmente intente resolver el problema gráficamente para responder la parte c.)

5.30. Expansión de Crédito

Considere un agente que vive dos períodos (hoy, 1 y mañana, 2). Sean c_1 y c_2 su nivel de consumo en los períodos 1 y 2, respectivamente. Asumimos que la utilidad del agente en función de c_1 y c_2 es

$$\sqrt{c_1} + \sqrt{c_2}.$$

En el período 1, el agente tiene un ingreso igual a 9, y en el período 2, su ingreso es 25. Para que el agente pueda consumir más que 9 en el período 1, él debe tomar un préstamo b, que debe ser pagado en el período 2. Así, se debe cumplir la siguiente restricción:

$$c_1 = 9 + b.$$

Dado que el préstamo debe ser pagado en el período 2, y si asumimos que la tasa de interés es cero, además se debe cumplir que:

$$c_2 = 25 - b.$$

Como b es un préstamo, debe ser cierto que $b \geq 0$. Además, asumimos que, para evitar el riesgo de bancarrota, el banco que ofrece el préstamo al agente no le permite tomar un préstamo mayor que $\bar{b} > 0$, así que la restricción $b \leq \bar{b}$ también se debe cumplir.

Dadas estas informaciones, el problema de optimización del agente es

$$\begin{aligned} \max_{c_1, c_2, b} \quad & \sqrt{c_1} + \sqrt{c_2} \\ \text{sujeto a} \quad & c_1 = 9 + b \\ & c_2 = 25 - b \\ & 0 \leq b \leq \bar{b} \end{aligned}$$

Reemplazando las restricciones de igualdad en la función objetivo tenemos que este problema de optimización es análogo al siguiente problema de optimización en una única variable:

$$\begin{aligned} \max_{b} \quad & \sqrt{9+b} + \sqrt{25-b} \\ \text{sujeto a} \quad & 0 \leq b \leq \bar{b} \end{aligned} \tag{5.6}$$

Para los siguientes ítems, asuma que $\bar{b} = 7$.

a) (3 puntos) Escriba la función Lagrangeana correspondiente al problema de optimización (5.1).

Respuesta.

$$\mathcal{L}(c) = \sqrt{9+b} + \sqrt{25-b} - \lambda_1(b - \bar{b}) + \lambda_2 b.$$

b) (13 puntos) ¿Son suficientes las condiciones de Kuhn-Tucker para un máximo global del problema (5.1)? Justifique de manera clara su respuesta, explique cuál de los resultados de suficiencia global presentados en clase ha usado.

Respuesta. Sacando la segunda derivada de la función objetivo con respecto a b, obtenemos

$$-\frac{1}{4(9+b)^{3/4}} + \frac{1}{4(25-b)^{3/4}},$$

que es menor que cero si y solo si

$$b < 8.$$

Como $b \leq \bar{b} = 7$, tenemos que la función objetivo es cóncava en todo el dominio del problema. Esto también puede verse notando que la función es la suma de dos funciones cóncavas.

Además, como las restricciones

$$b \leq 7 \quad \text{y} \quad b \geq 0,$$

son ambas lineales, ellas son tanto cóncavas como convexas. Dado que la suma de funciones cóncavas es cóncava, tenemos que la función Lagrangeana es cóncava para todo el conjunto de restricción del problema, y para todo λ_1 y λ_2 (positivos). Por lo tanto, las condiciones necesarias de optimalidad de Kuhn-Tucker también son suficientes.

c) (6 puntos) Escriba las condiciones de Kuhn-Tucker del problema (5.1).

Respuesta. Tomando la primera derivada del Lagrange con respecto a b, obtenemos:

$$\frac{1}{2\sqrt{9+b}} - \frac{1}{2\sqrt{25-b}} - \lambda_1 + \lambda_2 = 0. \tag{5.7}$$

Las demás condiciones son dadas por

$$\lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \tag{5.8}$$
$$b \leq \bar{b} = 7 \tag{5.9}$$
$$b \geq 0 \tag{5.10}$$
$$\lambda_1(b - \bar{b}) = 0 \tag{5.11}$$
$$\lambda_2 b = 0. \tag{5.12}$$

d) Encuentre la solución del problema (5.1) y calcule las cantidades de consumo óptimas en cada período.

Respuesta. Suponga que $\lambda_2 > 0$. Por la condición (**??**), esto implica que $b = 0$. Por la condición (**??**), $b = 0$ implica que $\lambda_1 = 0$. Por la condición (**??**), tenemos que

$$\lambda_2 = \frac{1}{2\sqrt{25-0}} - \frac{1}{2\sqrt{9+0}} = \frac{1}{10} - \frac{1}{3} < 0$$

lo que contradice que $\lambda_2 > 0$.

Suponga que $\lambda_1 > 0$. Por la condición (**??**) esto implica que $b = 7$. Por la condición (**??**) esto implica que $\lambda_2 = 0$.

Por lo tanto, la condición (**??**) implica que

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{9+7}} - \frac{1}{\sqrt{25-7}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{16}} - \frac{1}{\sqrt{18}}\right) > \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{16}} - \frac{1}{\sqrt{16}}\right) = 0,\end{aligned}$$

así que $\lambda_1 > 0$.

Como todas las condiciones (**??**) a (**??**) se cumplen, tenemos que $b = \bar{b} = 7$ es una solución del problema de optimización.

Como $c_1 = 9 + b$ y $c_2 = 25 - b$, tenemos que en el período 1 el agente consume 16, y en el período 2, él consume 18.

Ojo que si $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, la condición **??** se cumpliría si y solo si $b = 8$, una contradicción con $b \leq \bar{b} = 7$.

e) Calcule el efecto marginal de un aumento en la línea de crédito $\bar{b}$ en la utilidad del agente.

Respuesta. Por el teorema de la envolvente,

$$\frac{\partial U(\bar{b})}{\partial \bar{b}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{b}} = \lambda_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{16}} - \frac{1}{\sqrt{18}}\right) > 0,$$

o sea, un incremento en la línea de crédito aumenta la utilidad del agente, ya que en equilibrio esta restricción es activa: el agente desearía tomar más préstamo si su límite de crédito aumentara.

5.31. Preguntas cortas

(a) Al maximizar $f(x_1, x_2)$ sujeto a $x_1 + x_2 \leq 100$, $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 2$ se encuentra un único punto (x_1^*, x_2^*) que satisface todas las condiciones de Kuhn-Tucker. Si f es continuamente diferenciable pero no es cuasi cóncava, ¿cómo podría argumentar que (x_1^*, x_2^*) sí es un óptimo global único?

Respuesta. El conjunto factible es cerrado y acotado, y no hay puntos factibles con gradiente de g nula, por lo que es un máximo global.

(b) La elección de un consumidor se modela como el resultado de la maximización de una función u continua y diferenciable que representa su preferencia por canastas de bienes $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2$ sujeto a una restricción presupuestaria $x_1 p_1 + x_2 p_2 \leq m$. La solución de ese problema son las demandas x_i^* que dependen de los precios $(p_1, p_2) \in \mathbb{R}_+^2$ y el ingreso m, y la utilidad máxima es $u^*(p_1, p_2, m) = u(x_1^*, x_2^*)$. Usando el teorema de la envolvente indique qué condiciones deben cumplir x_1^*, x_2^* y λ^* para poder afirmar que u^* es estrictamente decreciente en cada precio p_i. ¿Tiene sentido su resultado? Justifique.

Respuesta. El teorema de la envolvente indica que $\frac{\partial u^*}{\partial p_i} = \left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_i}\right|_{\mathbf{x}^*, \lambda^*} = -\lambda^* x_i^*$, por lo que u^* es estrictamente decreciente en p_i si y solo si $\lambda^* > 0$ y $x_i^* > 0$; es decir, si gasta todo su ingreso y además consume una cantidad positiva del bien i. Tiene sentido porque si no se gasta todo el ingreso la restricción no es relevante (o porque más ingreso, a priori, es mejor), y si no se consume el bien i su precio tampoco lo es.

Nota: Si la función $u()$ es estrictamente creciente en por lo menos uno de sus argumentos sabemos que $\lambda^* > 0$ y la restricción presupuestaria es activa.

5.32. Propósito de una empresa

Los años recientes han visto una discusión bastante amplia acerca del rol o propósito de la empresa, incluyendo un debate acerca de la función objetivo de la empresa. En esta pregunta veremos cómo interpretar matemáticamente distintas visiones que se han planteado sobre el tema. No es una pregunta orientada a debatir lo correcto, sino a entender qué implican algunas ideas propuestas respecto de diversos objetivos.

La empresa FdC produce guaipes (G) usando dos factores, que llamaremos M y N, según la función

$$G = F(M, N) = 2\left(M^{0,5} + N^{0,5}\right) \tag{5.13}$$

La empresa arrienda las unidades de ambos factores en el mercado y paga $w_M > 0$ y $w_N > 0$ por cada unidad de M y N respectivamente. Las unidades de G se venden a un precio p en un mercado. Todos los mercados son competitivos por lo que los precios son constantes e independientes de las cantidades compradas y vendidas.

En toda esta pregunta siempre asuma que se cumple la condición de cualificación de restricciones.

Asuma, a menos que se especifique lo contrario que $w_M = 1$, $w_N = 1$ y $p = 1$. Recuerde además que la empresa no puede arrendar cantidades negativas de M y N.

(a) Suponga que la empresa toma decisiones buscando maximizar las ganancias π que obtiene de su operación.

1. Escriba la función objetivo (ganancias) π.

   Respuesta.
   $$\pi = 2\left(M^{0,5} + N^{0,5}\right) - M - N$$

2. Escriba el problema de optimización que le permite encontrar las cantidades óptimas a arrendar de M y N; recuerde incorporar las restricciones de no negatividad.

Respuesta.

$$\begin{aligned} \max_{M,N} \; & 2\left(M^{0,5}+N^{0,5}\right)-M-N \\ \text{sujeto a } & M \geq 0 \\ & N \geq 0 \end{aligned}$$

3. Escriba las condiciones de KT del problema. Muestre que las restricciones de no negatividad no pueden estar activas en ningún candidato.

Respuesta. Usaremos λ_M y λ_N como los multiplicadores para las restricciones de no negatividad de M y N respectivamente, con lagrangeano $\mathcal{L} = 2\left(M^{0,5}+N^{0,5}\right)-M-N+\lambda_M M+\lambda_N N$. Las condiciones de KT son:

$$\begin{aligned} \frac{1}{M^{0,5}}-1+\lambda_M =& 0 \\ \frac{1}{N^{0,5}}-1+\lambda_N =& 0 \\ \lambda_M M =& 0 \qquad \lambda_M > 0 \text{ solo si } M=0 \\ \lambda_N N =& 0 \qquad \lambda_N > 0 \text{ solo si } N=0 \end{aligned}$$

El argumento es el mismo para ambas restricciones de no negatividad, por ello solo explicaremos el caso de M. Con $M=0$ tenemos que $\lambda_M > 0$ y en la primera condición de KT tenemos que el término $\frac{1}{M^{0,5}}$ crece hacia infinito cuando M se acerca a 0. Esto implica que no podemos satisfacer esta primera condición de KT si $M=0$ por lo que la restricción de no negatividad no puede ser activa. El mismo argumento ocurre en el caso de N.
Alternativamente, si escribimos lagrangeano

$$\mathcal{L} = 2\left(M^{0,5}+N^{0,5}\right)-M-N$$

obtenemos las siguientes condiciones de KT:

$$\begin{aligned} \frac{1}{M^{0,5}}-1 \leq& 0 \\ \frac{1}{N^{0,5}}-1 \leq& 0 \\ \left(\frac{1}{M^{0,5}}-1\right)M =& 0 \qquad \left(\frac{1}{M^{0,5}}-1\right) < 0 \text{ solo si } M=0 \\ \left(\frac{1}{N^{0,5}}-1\right)N =& 0 \qquad \left(\frac{1}{N^{0,5}}-1\right) < 0 \text{ solo si } N=0 \end{aligned}$$

y se descarta $M=0$ y $N=0$ usando los mismos argumentos.

4. Resuelva el problema de optimización. ¿Es la solución encontrada un máximo global?

Respuesta. Como ya sabemos que las restricciones de no negatividad no pueden estar activas solo necesitamos considerar el caso en que $\lambda_M = \lambda_N = 0$. Usando las condiciones de KT obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{M^{0,5}}-1 =& 0 \\ \frac{1}{N^{0,5}}-1 =& 0 \end{aligned}$$

donde tenemos que $M^* = 1$ y $M^* = 1$. No hay otros puntos candidatos. Podemos ver que es un óptimo global usando el hecho que la función objetivo es estrictamente cóncava en todo el set factible y éste es convexo. Alternativamente podemos argumentar que como las restricciones no son activas basta con revisar las condiciones para optimización sin restricciones (deben revisar la concavidad de la función objetivo).

(b) Al producir los guaipes se genera Z, que es algo no deseable por lo que la empresa preferiría reducir la producción de éste. En particular el Z producido está dado por

$$Z = M^{0,5}$$

La empresa ahora busca maximizar las ganancias π menos el costo del impacto de Z, que se estima igual a βZ, donde $\beta \in (0, 1)$. A partir de este inciso asuma que las restricciones de no negatividad de los factores no están activas en la solución y puede ignorarlas.

1. Escriba la nueva función objetivo, y llámela B.

   Respuesta.

$$B = 2\left(M^{0,5} + N^{0,5}\right) - M - N - \beta M^{0,5} = (2-\beta)M^{0,5} + 2N^{0,5} - M - N$$

2. Escriba el problema de optimización que le permite encontrar las cantidades a arrendar de M y N que maximizan B.

   Respuesta.

$$\max_{M,N} 2\left(M^{0,5} + N^{0,5}\right) - M - N - \beta M^{0,5}$$

3. Resuelva el problema de optimización. ¿Es la solución encontrada un máximo global?

   Respuesta.

$$\begin{aligned} \frac{1}{M^{0,5}} - 1 - \frac{\beta}{2}\frac{1}{M^{0,5}} &= 0 \\ \frac{1}{N^{0,5}} - 1 &= 0 \end{aligned}$$

   Los valores óptimos de factores son $M^* = (1-\beta/2)^2$ y $N^* = 1$. El punto es un óptimo global porque la función objetivo es estrictamente cóncava en todo su dominio.

(c) Suponga ahora nuevamente que la empresa lo que busca es maximizar ganancias π pero ha tomado la decisión de limitar la cantidad producida de Z a un nivel que debe ser menor o igual a $\overline{Z}$. Recuerde que la producción de Z está dada por $Z = M^{0,5}$.

1. Escriba el problema de optimización que permite determinar las cantidades óptimas de M y N. Para esto, transforme la restricción a la cantidad de Z en una restricción a las cantidades de factores.

   Respuesta.

$$\begin{aligned} &\max_{M,N} 2\left(M^{0,5} + N^{0,5}\right) - M - N \\ &\text{sujeto a } Z(M) \leq \overline{Z} \end{aligned}$$

La restricción la podemos transformar porque $Z(M) \leq \overline{Z}$ implica que $M \leq \left(\overline{Z}\right)^2$, por lo que el problema se reduce a

$$\begin{aligned} \max_{M,N}\ & 2\left(M^{0,5}+N^{0,5}\right)-M-N \\ \text{sujeto a } & M \leq \left(\overline{Z}\right)^2 \end{aligned}$$

En este caso el lagrangeano va a ser

$$\mathcal{L} = 2\left(M^{0,5}+N^{0,5}\right)-M-N-\lambda\left(M-\left(\overline{Z}\right)^2\right)$$

2. Resuelva el problema de optimización. Explique si usted ha obtenido un óptimo global.

Respuesta. Las condiciones de KT son

$$\begin{aligned} \frac{1}{M^{0,5}}-1-\lambda &= 0 \\ \frac{1}{N^{0,5}}-1 &= 0 \\ \lambda\left(M-\left(\overline{Z}\right)^2\right) &= 0 \qquad \lambda>0 \text{ si y solo si } M=\left(\overline{Z}\right)^2 \end{aligned}$$

Tenemos dos casos, y en ambos casos $N^*=1$. Primero, $\lambda>0$ lo que implica $M^*=\overline{Z}^2$. En ese caso además se debe cumplir que $\frac{1}{(M^*)^{0,5}}-1-\lambda=0$ lo que nos da $\frac{1}{(M^*)^{0,5}}-1>0$ que se traduce en $M^*<1$ o $\overline{Z}<1$.
El otro caso es $\lambda=0$, con lo que $M^*=1$, y es posible solo cuando $\overline{Z}\geq 1$.
Solución es óptimo global porque la restricción define un set convexo y la función objetivo es estrictamente cóncava.

(d) Suponga nuevamente que la empresa maximiza ganancias y que $Z=M^{0,5}$. Las autoridades regionales quieren limitar la cantidad de Z que se genera. Para ello deciden cobrar a la empresa una cantidad $\tau\in(0,1)$ por cada unidad de Z producida. Sin calcular la solución al nuevo problema y usando sus respuestas en las partes previas de esta pregunta, describa cómo cambiarán las cantidades de factores usadas por la empresa al imponer este costo. Nota: escriba la nueva función de ganancias.

Respuesta. Escribir la función de ganancia ayuda a entender el problema mucho mejor.

$$\text{Ganancia} = 2\left(M^{0,5}+N^{0,5}\right)-M-N-\tau M^{0,5}$$

Vemos que esta función corresponde a la misma que resolvimos en la parte (b) pero con τ en vez de β. Por esto, el efecto de colocar este cobro es equivalente a cuando la empresa “valoraba” el efecto de generar Z.

Capítulo 6

Ecuaciones en Diferencias de Primer Orden

6.1. Solución de ecuaciones en diferencias de primer orden

Resuelva las siguientes ecuaciones en diferencias (usando las condiciones iniciales cuando se les entreguen), además revise el estado estacionario de cada una de ellas y verifique su estabilidad. Grafique.

1. $X_{t+1} = \rho X_t$; $X_0 = \pi$, con $0 < \rho < 1$
2. $X_{t+1} = 2X_t + 3$; $X_0 = 10$
3. $X_{t+1} = 0{,}2X_t + 2$; $X_0 = 0$
4. $X_{t+1} = -0{,}25X_t + 5$; $X_0 = 1$
5. Para cada una de las siguientes ecuaciones en diferencias obtenga la solución general y_t, la solución para un valor específico $y_0 = \overline{y}$, y el estado estacionario. Determine además si es estado estacionario es estable o no.
   a) $y_{t+1} = 2y_t - 10$
   b) $y_{t+1} = y_t$
   c) $y_t = 0{,}5y_{t-1} + 1$
   d) $y_{t+1} = 2y_t$
   e) $y_{t+1} = 2y_t + 10$
   f) $y_{t+1} = 0{,}5y_t + 2$

6.2. Ecuaciones en Diferencias de Primer Orden Aplicado a Depósitos Bancarios

Suponga que usted tiene D pesos depositados en un banco a una tasa de interés anual r. Si define X_t como la cantidad depositada a comienzos del año t y b como el monto que se retira al final de cada año, entonces, usted tiene que:

$$X_{t+1} = (1 + r)X_t - b$$

Además suponga que $X_0 = D$

1. Encuentre la solución a este sistema

2. Determine la fórmula que le permitiría encontrar la cantidad máxima b que puede retirar al final de cada uno de los próximos n años de tal forma que su depósito no se agote antes del año n.

3. Con su resultado en la parte anterior y suponiendo que $D = 100{,}000$ y $r = 10\,\%$, calcule la cantidad máxima que puede sacar para los próximos 5 años.

6.3. Ecuaciones en Diferencias Aplicado a Matemáticas Financieras

Considere una economía donde hay dos activos. El primero, es la acción de una empresa que paga dividendos $D > 0$ todos periodos. El segundo es un bono de un periodo que paga $R > 1$ en el periodo siguiente, por cada dolar comprado del bono (la tasa de interés bruta es R). El precio de la acción P_t en cada periodo t es determinado en equilibrio en la economía. No hay incertidumbre. Hay muchos agentes con utilidad estrictamente creciente en su riqueza y dinero disponible para invertir (ahorrar).

1. Encuentre una condición que garantiza que los agentes están indiferentes entre poner su dinero en cualquier uno de los activos. (Hablamos que un agente está indiferente cuando las ganancias o retornos obtenidos en dos inversiones son iguales para un mismo monto inicial invertido.)

   Respuesta. Para que los agentes estén indiferentes entre el bono y la acción debemos tener:

$$\underbrace{\frac{1}{P_t}\left[P_{t+1} + D\right]}_{\text{Ganancias por peso gasto en acciones}} = \underbrace{R}_{\text{Ganancia por peso gasto en bonos}}$$

$$P_{t+1} = RP_t - D$$

2. Resuelva para el precio de equilibrio como una función del precio en el período $t = 0$.

   Respuesta. Una solución particular de esta ecuación es:

$$P^* = RP^* - D$$

$$P^* = \frac{D}{R-1}, \quad P_t = P^*, \quad \forall t \geq 0 \text{ es solución}$$

   La ecuación homogénea asociada es:

$$P_{t+1} = RP_t$$

   Que tiene como solución general

$$P_t = Constante \times R^t$$

   Luego, todas las soluciones son (la solución general) son representadas por:

$$P_t = \frac{D}{R-1} + Constante \times R^t$$

   Para un dado precio P_0 tenemos

$$P_0 = \frac{D}{R-1} + Constante \times R^0$$

$$Constante = P_0 - \frac{D}{R-1}$$

   Luego, la solución para un dado P_0 es:

$$P_t = \frac{D}{R-1} + \left(P_0 - \frac{D}{R-1}\right) \times R^t$$

3. ¿Para qué valores iniciales del precio en $t = 0$ el sistema se encuentra en su estado estacionario? Si no está en ese valor, ¿qué sucede con el precio en el largo plazo si el valor inicial en $t = 0$ es mayor al de estado estacionario?

   Respuesta. El estado estacionario es $P_0 = \frac{D}{R-1}$. Si P_0 es mayor a este valor el precio crece sin límite a medida que pasa el tiempo (el sistema dinámico es inestable porque es una ecuación lineal con $a > 1$).

6.4. Ecuaciones en Diferencias de Primer Orden: Aplicación al Ahorro

Suponga que Don Hugo acaba de depositarle a su hijo Hugito, de 6 años, que estuvo ayer de cumpleaños, \$6000 en una cuenta de ahorro al 8 % anual. Asimismo, suponga que ha prometido depositarle todos los años el día después de su cumpleaños un monto igual a \$1000 por el número de años que haya cumplido. Se define X_t como el monto en la cuenta de ahorro de Huguito en el t-ésimo cumpleaño.

1. Plantee la ecuación en diferencias que define el monto de la cuenta de ahorro de Huguito
2. Encuentre una solución para este sistema, dado que $X_6 = 0$.
3. ¿Cuánto dinero habrá en la cuenta de ahorro cuando Huguito cumpla 12 años?

Respuesta.

1. La ecuqción en diferencias es

$$x_{t+1} = (x_t + 1000t)\,1{,}08 = 1{,}08x_t + 1080t; \quad t = 6, 7, 8, \ldots; x_6 = 0$$

   Es una ecuación en diferencias de primer orden lineal con coeficientes constantes, pero no es homogénea.

2. Se resuelve primero la parte homogénea $x_{t+1} - 1,08x_t = 0$, cuya solución es

$$x_t^h = k_1 1,08^t$$

   Ahora buscamos una solución particular para la ecuación $x_{t+1} - 1,08x_t = 1080t$. Por la forma del término independiente $1080t$ y apoyándonos en la tabla , la solución particular sugerida es $x_t^p = k_2 + k_3 t$. Debemos determinar primero los coeficientes, k_2 y k_3, para ello reemplazamos la solución particular en la ecuación en diferencias

$$k_2 + k_3(t+1) - 1,08(k_2 + k_3 t) = 1080t.$$

   Debemos resolver el sistema

$$\begin{aligned} -0{,}08k_3 &= 1080 \\ -0{,}08k_2 + k_3 &= 0 \end{aligned}$$

   de donde se obtiene

$$k_3 = -\frac{1080}{0{,}08} = -13500; \qquad k_2 = -\frac{13500}{0{,}08} = -168750$$

   La solución general es

$$x_t = x_t^h + x_t^p = k_1 1{,}08^t - 168750 - 13500t$$

   Para determinar la constante k_1 usamos la condición inicial $x_6 = 0$

$$k_1 1{,}08^6 - 168750 - 13500 \times 6 = 0 \implies k_1 = \frac{168750 + 13500 \times 6}{1{,}08^6} = 157384{,}864$$

   y con ello ahora podemos escribir la solución final

$$x_t = 157384{,}864 \times 1{,}08^t - 168750 - 13500t$$

3. Para responder esta parte solo necesitamos evaluar la solución final para $t = 12$ obteniendo

$$x_{12} = 157384{,}864 \times 1{,}08^{12} - 168750 - 13500 \times 12 = 65571{,}8622$$

6.5. Ecuaciones en Diferencias de Primer Orden Aplicado en Macroeconomía

Suponga que el consumo agregado en el período t, c_t es una función lineal del ingreso agregado en el período previo, y_{t-1},

$$c_t = a + by_{t-1}$$

donde a y b son constantes. Si la inversión agregada es constante I, el ingreso agregado en un período está dado por $y_t = c_t + I$ (ignoramos el resto de los componentes por simplicidad).

1. Escriba la ecuación en diferencias para el ingreso agregado
2. Encuentre la solución a la ecuación en diferencias para el ingreso agregado
3. ¿Qué restricción debe imponerse sobre el parámetro b para asegurarse que el ingreso converge a su nivel de estado estacionario?
4. ¿Cuál es el efecto de corto y largo plazo de un aumento transitorio (por un solo período) de I?
5. ¿Cuál es el efecto de corto y largo plazo de un aumento permanente (todos los períodos) de I?

Respuesta.

1. Para poder hacer esto necesitamos primero recordar que el PIB o producto debe ser igual a la suma de sus componentes, en este caso igual a consumo más inversión,

$$y_t = c_t + I$$

   y dado que tenemos la ecuación que nos muestra el comportamiento del consumo como función del producto en el período anterior podemos escribir

$$y_t = a + by_{t-1} + I$$

   o

$$y_t - by_{t-1} = a + I$$

   que es una ecuación en diferencias de primer orden, lineal y con coeficientes constantes.

2. La solución se obtiene siguiendo los pasos estándar que hemos visto.
3. Se requiere que $|b| < 1$ para convergencia a su estado estacionario

6.6. Ecuaciones en Diferencia Aplicado a la Ley de Little

En el contexto de gestión operativa de procesos de flujos, el balance entre el stock de inventario y la tasa de demanda viene dado por una ecuación conocida como *Ley de Little* (en honor a John Little):

$$I_t = R_t \cdot T$$

Donde I_t es el stock de inventario disponible en el período t, R_t es la tasa de flujo de clientes llegados en el período t, y T es el tiempo promedio que toma desarrollar la actividad (por ejemplo, el proceso de vender el producto a un cliente).

Suponga que un profesional ha decidido modelar el flujo de clientes como función del precio p del producto en el período contemporáneo, y el stock de inventario como función del precio p en el período anterior. Es decir:

$$\begin{aligned} R_t &= d_0 - p_t \\ I_t &= s_0 + s_1 \cdot p_{t-1} \end{aligned}$$

El tiempo promedio de desarrollo de la actividad, $T = \frac{1}{\lambda}$, es un parámetro positivo conocido, así como lo son s_0, s_1 y d_0. Se impone además que $d_0 T > s_0$.

1. Encuentre la ecuación dinámica que modela la evolución de los precios que dicta la Ley de Little. ¿Es una ecuación diferencial o en diferencias? ¿Es lineal o no, homogénea o no, de coeficientes constantes o variables? ¿De qué orden es?

   Respuesta. Primero, reemplazamos la ecuación de inventarios y de flujo de clientes en la Ley de Little, y resolvemos para los precios:

   $$\begin{aligned} I_t &= R_t \cdot T \\ s_0 + s_1 \cdot p_{t-1} &= d_0 T - T \cdot p_t \\ s_0\lambda + s_1\lambda \cdot p_{t-1} &= d_0 - p_t \end{aligned}$$

   Al despejar:

   $$p_t + s_1\lambda \cdot p_{t-1} = d_0 - s_0\lambda$$

   o idénticamente expresado:

   $$p_{t+1} + s_1\lambda \cdot p_t = d_0 - s_0\lambda$$

   o incluso:

   $$p_{t+1} = (d_0 - s_0\lambda) - s_1\lambda \cdot p_t$$

   La cual es la ecuación dinámica consultada (**Nota de corrección:** Las tres expresiones son igualmente válidas). Es una ecuación en diferencias, lineal, no homogénea, de coeficientes constantes, y de orden 1.

2. Suponga que el precio inicial es p_0. Encuentre la solución de la ecuación dinámica de la parte *1*.

   Respuesta. Se puede resolver, ya por el criterio de separar la parte homogénea de la no homogénea, o bien por el modelo de crecimiento geométrico con entradas. En cualquier caso, como la ecuación en diferencias es

   $$p_{t+1} = (d_0 - s_0\lambda) - s_1\lambda \cdot p_t$$

   entonces,

   $$p_t = (-s_1\lambda)^t \cdot p_0 + (d_0 - s_0\lambda) \cdot \frac{1 - (-s_1\lambda)^t}{1 - (-s_1\lambda)}$$

   o bien

   $$p_t = (-s_1\lambda)^t \cdot p_0 + (d_0 - s_0\lambda) \cdot \frac{1 - (-s_1\lambda)^t}{1 + s_1\lambda}$$

3. En base al mismo modelo de la parte *1*, encuentre el equilibrio (estado estacionario) de ese proceso dinámico y discuta su estabilidad. (Nota: recuerde que en este contexto equilibrio se refiere a que sea un estado estacionario o punto fijo.)

   Respuesta. Para encontrar el equilibrio (estado estacionario), basta con encontrar el punto fijo de la ecuación de la parte *a)*.

   $$p^* = (d_0 - s_0\lambda) - s_1\lambda \cdot p^* \Longrightarrow p^* = \frac{d_0 - s_0\lambda}{1 + s_1\lambda}$$

   Como $d_0T > s_0$, entonces el numerador siempre es estrictamente positivo, con lo que el precio de equilibrio también lo es.

   Para que este punto fijo sea estable, es necesario que $s_1\lambda < 1$, pues eso permite que

   $$\lim_{t\to\infty} (-s_1\lambda)^t = 0$$

   y con ello,

   $$p_t \to 0 \cdot p_0 + (d_0 - s_0\lambda) \cdot \frac{1 - 0}{1 + s_1\lambda} = \frac{d_0 - s_0\lambda}{1 + s_1\lambda}$$

   que es el equilibrio encontrado. Si $s_1\lambda > 1$, el equilibrio será inestable, y si $s_1\lambda = 1$ (que es cuando la pendiente del inventario actual respecto al precio anterior es igual al tiempo medio del proceso), el sistema ni se acerca ni se aleja del equilibrio (equilibrio marginalmente estable).

   Independientemente de la relación entre s_1 y λ, si el sistema empieza con $p_0 = p^*$, el sistema se quedará ahí para siempre.

6.7. Acumulación y Recuperación de Ahorros

En Chile el sistema de pensiones funciona mediante depósitos periódicos que son determinados de acuerdo al ingreso de las personas. Estos ahorros depositados periódicamente van obteniendo intereses sobre el monto total acumulado. Al llegar a una cierta edad, las personas pueden "jubilar" y obtienen ese dinero para su jubilación.

Durante la emergencia actual se ha discutido la posibilidad de que los ahorrantes puedan retirar de sus cuentas de ahorro para pensiones una cantidad de dinero que podrían consumir en caso de necesidad. Como los fondos de pensiones están pensados para generar ahorros para la vejez se ha advertido que una medida de este tipo tendría consecuencias al momento de jubilarse. En esta pregunta utilizaremos las herramientas aprendidas en el curso para entender como funcionaría esta política. Esta pregunta NO es una evaluación de esta medida sino únicamente un ejemplo de cómo usar las herramientas vistas en este curso para modelar situaciones concretas que enfrentamos en el mundo real.

Suponga que **hoy** una persona tiene N pesos ahorrados a inicios de año en su fondo de pensiones. Este monto se incrementa cada año por dos razones. Primero, al final del año recibe intereses (netos) de i sobre el monto acumulado a inicios del período. Segundo, realiza una nueva contribución m, que por simplicidad supondremos que es igual todos los años. Notar que la contribución se realiza luego de haber recibido los intereses, y asuma que la primera contribución ocurrirá en un año más. Asuma que **hoy** corresponde a $t = 0$. Notar que no es necesario resolver la ecuación pero si modelar correctamente la dinámica del monto en el fondo de pensiones.

1. Escriba la ecuación en diferencias que explica la evolución del monto ahorrado. Esto es, encuentre la ecuación que muestra el valor del fondo hoy, que llamaremos x_t como función del fondo el año pasado, x_{t-1}, y de la contribución de este año, m.

   Respuesta.

   $$x_t = (1 + i)x_{t-1} + m$$

2. Suponga que la persona se jubila en T años más. Escriba la cantidad acumulada en el fondo de pensiones hasta ese momento como función de N, m, y T.

   Respuesta. Se puede resolver la ecuación o sencillamente iterar hacia adelante por T períodos. La ecuación da:

   $$x_T = N(1+i)^T + m\sum_{j=1}^{T}(1+i)^{T-j}$$

   donde la sumatoria se puede escribir como

   $$\frac{(1+i)^T - 1}{i}$$

3. Asuma que hoy se permite a la persona retirar de su cuenta de pensiones un monto igual a 1. Calcule en cuánto cambia su ahorro acumulado en T con esta política.

   Respuesta. Un menor monto inicial de 1 se traduce en un menor monto total en T igual a $(1+i)^T$

4. A fin de permitir este tipo de ayuda algunos analistas económicos y financieros han propuesto modificar el sistema cambiando la edad de jubilación o cambiando el monto a depositar cada año.

   a) Muestre cómo se puede calcular el monto extra (por sobre m) que debe ahorrar una persona que retira 1 hoy para llegar a T con el mismo monto que si no hubiera retirado dinero.

   Respuesta. Llamemos c a la contribución adicional. En ese caso tenemos que la contribución adicional va a equivaler a $c\sum_{j=1}^{T}(1+i)^{T-j}$ o $c\left(\frac{(1+i)^T-1}{i}\right)$. Para que sea el mismo monto acumulado necesitamos entonces que

   $$c\sum_{j=1}^{T}(1+i)^{T-j} = c\left(\frac{(1+i)^T - 1}{i}\right) = (1+i)^T$$

   por lo que la solución es el c que satisface esta igualdad.

   b) Suponga ahora que en vez de aumentar el ahorro en todos los períodos usted debe aumentar su contribución en z por un período de $s < T$ años. Muestre como calcular el monto z de modo que una persona que retira 1 hoy tenga el mismo monto en T que si no hubiere retirado.

   Respuesta. En este caso acumulamos contribuciones adicionales por s períodos. Una manera simple de ver la cantidad adicional necesaria es calcular cuánto se tiene ahorrado luego de haber contribuido z por s períodos:

   $$z\sum_{j=1}^{s}(1+i)^{s-j}$$

   e igualar eso al menor monto de ahorro acumulado por el retiro de 1 hoy: $(1+i)^s$, con lo que el problema consiste en encontrar el z que hace ambos valores iguales. Notar que aquí explotamos que el monto adicional acumulado al final de s períodos solo acumula intereses, y por eso no necesitamos comparar todo en T.

6.8. Pregunta larga

Considere una economía donde los inversionistas tienen acceso a tres diferentes de oportunidades de inversión, A, B y C:

- La oportunidad A es dada por la **acción** de una empresa que paga un dividendo constante y igual a $D > 0$ pesos todos períodos. El precio de la acción en cada fecha t es denotado por P_t. Luego, si el inversionista compra 1 unidad de esta acción en la fecha t, en la fecha $(t+1)$ gana un total de D pesos en dividendos y además puede vender su acción a un precio P_{t+1}.
- La oportunidad B consiste en comprar **Bitcoins**. El precio de 1 unidad de Bitcoin en la fecha t es denotado por Q_t. Las Bitcoins no pagan dividendos, y uno solo puede tener ganancias positivas entre t y $(t+1)$ comprando Bitcoins en la fecha t si el precio en $(t+1)$ es mayor que en t, es decir: si $Q_{t+1} > Q_t$.
- La oportunidad C consiste de una **cuenta de ahorro** que paga una tasa de interés neta de $r > 1$: Si un inversionista deposita 1 peso en esta cuenta en la fecha t, tendrá un saldo de $1+r$ pesos en la fecha $(t+1)$.

Decimos que esta economía está en equilibrio siempre que se cumpla la siguiente condición: Un inversionista que maximiza sus ganancias está indiferente entre las tres oportunidades de inversión en toda fecha t. Se pide:

1. Encuentre las ecuaciones en diferencias que los precios $\{Q_t\}_{t\geq 0}$ y $\{P_t\}_{t\geq 0}$ deben satisfacer en equilibrio. (Recuerde que deben estar indiferentes entre los activos y la cuenta de ahorro).

   Respuesta. Los agentes deben estar indiferentes en las tres oportunidades inversión, y por lo tanto es suficiente que estén indiferente entre acciones y la cuenta ahorro y entre Bitcoins y la cuenta de ahorro:

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{1}{P_t}\left[P_{t+1}+D\right]}_{\text{Ganancias acciones}} &= \underbrace{1+r}_{\text{Ganancias ahorro}} \\ \underbrace{\frac{1}{Q_t}\left[Q_{t+1}\right]}_{\text{Ganancias Bitcoins}} &= \underbrace{1+r}_{\text{Ganancias ahorro}} \end{aligned}$$

   Podemos re-ordenar las ecuaciones y tenemos:

$$P_{t+1} = (1+r)\,P_t - D \tag{6.1}$$

$$Q_{t+1} = (1+r)\,Q_t \tag{6.2}$$

   Notar que éstas son dos ecuaciones en diferencias de primer orden, separadas.

2. **Resuelva** las ecuaciones en diferencias que deben satisfacer los precios (es decir, encuentre la solución general de las ecuaciones en diferencias del ítem anterior).

   Respuesta.

   Como tenemos dos ecuaciones en diferencias separadas, para contestar la pregunta requerimos resolver ambas ecuaciones.

   La solución general de la homogénea **??** es

$$\tilde{P}_t = C\,(1+r)^t$$

   donde C es una constante arbitraria. Una solución particular es dada por el punto fijo:

$$P^* = (1+r)\,P^* - D$$

$$P^* = \frac{D}{r}$$

   Luego, la solución general de **??** es:

$$\boxed{P_t = C\,(1+r)^t + \frac{D}{r}}$$

donde C es una constante arbitraria. La solución general de la homogénea asociada a (??) es:

$$\tilde{Q}_t = Z\,(1+r)^t$$

donde Z es una constante arbitraria. La solución particular está dada por el punto fijo:

$$Q^* = (1+r)\,Q^*$$

$$Q^* = 0$$

Luego, la solución general es

$$\boxed{Q_t = Z\,(1+r)^t}$$

donde Z es una constante arbitraria.

No es necesario en este ítem, pero puede ser que algunos alumnos expresen la solución general en términos de P_0 y Q_0. En este caso, deberíamos tener que:

$$\boxed{P_t = \left(P_0 - \frac{D}{r}\right)(1+r)^t + \frac{D}{r}}$$

$$\boxed{Q_t = Q_0\,(1+r)^t}$$

También se pueden escribir la solución de P_t como

$$\boxed{P_t = P_0\,(1+r)^t + \frac{D}{r}\left(1-(1+r)^t\right)}$$

lo que está correcto.

3. ¿Es posible que el precio de la Bitcoin (que no paga dividendos) sea siempre mayor que el precio de la acción (que paga dividendos) en equilibrio? En otras palabras, ¿es posible que $Q_t > P_t$ para todo t? Justifique. (Ayuda: note que **no** hemos fijado los valores Q_0 y P_0).

Respuesta. Si es posible. Una manera de justificar (entre varias) es la siguiente. Perciba que

$$\frac{P_t}{Q_t} = \frac{C\,(1+r)^t}{Z\,(1+r)^t} + \frac{D/r}{Z\,(1+r)^t} = \frac{C}{Z} + \frac{D/r}{Z\,(1+r)^t}$$

Recuérdense para cualquier C y Z estamos en equilibrio. Además, perciba que el lado izquierdo de esta ecuación es decreciente en t. Luego, si

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{C}{Z} + \frac{D/r}{Z} < 1 \Leftrightarrow \underbrace{Z}_{Q_0} > \underbrace{C + D/r}_{P_0},$$

tenemos que $P_t/Q_t < 1$ para todo t, y luego el precio de Bitcoins es siempre mayor que el precio de las acciones. De otra manera, si $Q_0 > P_0$, $Q_t > P_t$ para todo t.

6.9. Evolución Macroeconómica

Sea Y_t el PIB de una economía en términos reales, C_t el consumo agregado y I_t la inversión agregada. La demanda por consumo está dada por

$$C_t = b + cY_{t-1},$$

donde $b > 0$ y $c \in (0,1)$. La inversión está dada por

$$I_t = \overline{I} + a\,(Y_t - Y_{t-1}),$$

donde $a, \overline{I} > 0$ y $a \neq 1$. La ecuación del consumo representa que cuanto mayor la renta de los agentes, mayor su consumo. La ecuación de la inversión captura el hecho de que cuando la economía crece más, las empresas aumentan su inversión. Además, el gobierno gasta una cantidad fija y constante en esta economía, representada por G. En equilibrio, se cumple que el PIB es igual al gasto total, o sea, $Y_t = C_t + I_t + G$.

1. Escriba una ecuación en diferencias que describe el PIB de equilibrio de la economía.
2. Encuentre el punto fijo (estado estacionario) de la ecuación del ítem anterior.
3. Encuentre la solución general de la ecuación que encontraste en el ítem 1 en términos del valor inicial del PIB. Es decir, representa el valor de Y_t en equilibrio como una función de parámetros, del tiempo y de Y_0.
4. Suponga que inicialmente la economía se encuentra en estado estacionario y el gobierno decide subir de manera permanente e inesperada el gasto del gobierno G. Un economista ha estimado que el parámetro a es igual a $2/3$, y que el parámetro c es igual a $1/2$ y argumenta que después de este cambio en el gasto del gobierno esta economía va tener ciclos económicos. Es decir, ocurrirán períodos de crecimiento del PIB, seguidos por períodos de caída del PIB. ¿Está usted de acuerdo con esta predicción? Represente gráficamente la dinámica del PIB después de este cambio en un diagrama de fases con Y_{t+1} en el eje vertical y Y_t en el eje horizontal.
5. Suponga ahora que los parámetros estimados son $a = 1/2$ y $c = 2/3$. ¿Usted esta de acuerdo con la afirmación del economista en el ítem anterior? Una vez más, represente la dinámica del PIB después de la subida en el gasto del gobierno en un diagrama de fases con Y_{t+1} en el eje vertical y Y_t en el eje horizontal (y suponga de nuevo que antes del cambio en G la economía está en estado estacionario).

Respuesta.

1. Al igual que en ejercicios sobre la evolución del producto de equilibrio necesitamos partir igualando el producto en un momento del tiempo a sus componentes, y luego obtener la ecuación para el producto como función de los valores en el período anterior,

$$\begin{aligned} Y_t =& C_t + I_t + G_t \\ =& b + cY_{t-1} + \overline{I} + a\left(Y_t - Y_{t-1}\right) + G \\ =& \left(b + \overline{I} + G\right) + (c-a)\,Y_{t-1} + aY_t \end{aligned}$$

   donde despejamos Y_t y luego obtenemos la ecuación en diferencias

$$\begin{aligned} (1-a)\,Y_t &= \left(b + \overline{I} + G\right) + (c-a)\,Y_{t-1} \\ Y_t &= \left(\frac{b + \overline{I} + G}{1-a}\right) + \left(\frac{c-a}{1-a}\right)Y_{t-1} \end{aligned}$$

   que es una ecuación en diferencias de primer orden lineal y con coeficientes constantes.

2. Solución usando métodos estándar

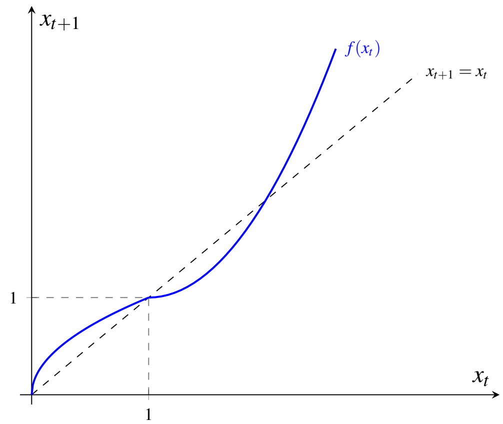
6.10. Sistemas Dinámicos, Equilibrios y Estabilidad

Considere la siguiente ecuación en diferencias de primer orden:

$$x_{t+1} = \begin{cases} \sqrt{x_t} & \text{si } x_t \in [0,1) \\ (x_t - 1)^2 + 1 & \text{si } x_t \in [1, +\infty) \end{cases}$$

Encuentre sus puntos fijos, determine si son estables o no, y de serlo indique si lo son local o globalmente. *(Ayuda: Haga un diagrama de fase.)*

Respuesta. El diagrama de fase se ve así:



Luego hay 3 puntos fijos: 0, 1 y un punto x^* por determinar. En ese punto se cumple

$$x^* = (x^* - 1)^2 + 1 \Longrightarrow x^* = (x^*)^2 - 2x^* + 2$$

Lo que al reordenar queda

$$(x^*)^2 - 3x^* + 2 = 0 \Longleftrightarrow (x^* - 1)(x^* - 2) = 0$$

de donde $x^* = 1$ ó $x^* = 2$. Luego el punto buscado es $x^* = 2$ (porque ya tenemos el primero). Alternativamente se puede decir que $x^* = 2$ es un punto fijo usando la ecuación en diferencias reemplazando $x_t = 2$ y encontrando que $x_{t+1} = 2$.

El punto 0 es localmente inestable por dibujo (probando con puntos alrededor). La derivada no está definida en 0, pero tiende a infinito cuando x_t está cerca de 0 y por lo tanto podría ser un argumento válido.

El punto 1 es estable porque partiendo a la izquierda o a la derecha se converge al punto. ADVERTENCIA: En este punto el teorema de la derivada no aplica porque en ese punto la función no es derivable. Sin embargo, que las derivadas laterales sean menores que 1 en valor absoluto da una intuición buena, aunque no sea una justificación válida.

El punto 2 es localmente inestable porque la derivada en ese punto es mayor que 1 en valor absoluto (se puede calcular o notar en el dibujo que es más empinada la curva azul, sino no habría intersección).

Ninguno de los puntos es globalmente estable porque hay más de un punto fijo.

6.11. Sistemas Dinámicos y Equilibrios

Considere la ecuación en diferencias

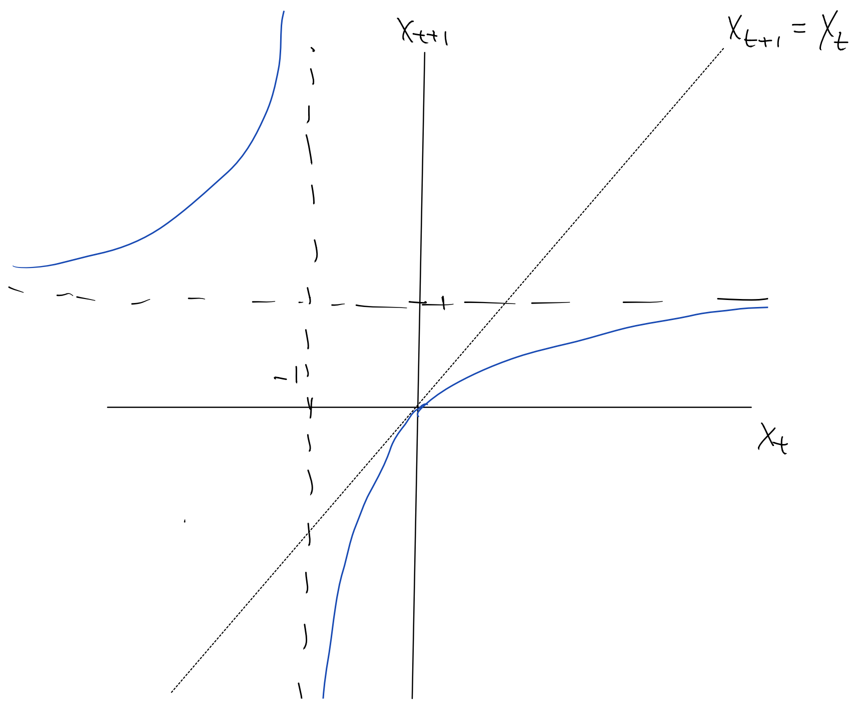
$$x_{t+1} = 1 - \frac{1}{1 + x_t}$$

Encuentre su único estado estacionario y determine si es o no localmente estable. *(Ayuda: No es necesario resolver la ecuación.)*

Respuesta. Si x^* es el punto fijo, entonces

$$x^* = 1 - \frac{1}{1 + x^*}$$

de donde $x^* = 0$. Para saber estabilidad basta dibujar el diagrama de fase:



En este caso el sistema sí es localmente estable. Si se parte a la derecha de 0 la convergencia es clara. Si se parte a la izquierda de 0, el sistema rápidamente evoluciona a valores menores que -1, que luego se ven en la curva azul que está arriba a la izquierda, que luego se traslada a los puntos a la derecha de 0.

6.12. Sistema Lineal

Considere el siguiente sistema lineal homogéneo de 2 variables:

$$x_{t+1} = x_t - \frac{1}{2}y_t$$
$$y_{t+1} = \frac{3}{2}x_t - y_t$$

1. Encuentre la solución general $\{x_t\}_{t\geq 0}$ y $\{y_t\}_{t\geq 0}$ como función de t y de coeficientes c_1 y c_2 arbitrarios.
2. ¿El sistema es estable? Justifique.
3. A partir de la solución en el ítem 1 y del estado inicial $(x_0, y_0) = (2, 1)$, encuentre los valores de c_1 y c_2 y obtenga la solución (trayectoria) de $\{x_t\}_{t\geq 0}$ y $\{y_t\}_{t\geq 0}$.

Respuesta.

1. El sistema lineal se puede escribir en forma matricial

$$\begin{bmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0{,}5 \\ 1{,}5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix}$$

Con matriz asociada $A = \begin{bmatrix} 1 & -0{,}5 \\ 1{,}5 & -1 \end{bmatrix}$.

La solución general al sistema lineal corresponde a

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = c_1\lambda_1^t \mathbf{w}_1 + c_2\lambda_2^t \mathbf{w}_2$$

donde λ_1 y λ_2 son los valores propios de A, y $\mathbf{w}_1$ y $\mathbf{w}_2$ son los vectores propios respectivos.

Para encontrar los valores propios de A, se puede calcular y encontrar las raíces del polinomio característico

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= |A - \lambda I| \\ &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -0{,}5 \\ 1{,}5 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)(-1-\lambda) + 0{,}75 \\ &= -1 + \lambda^2 + 0{,}75 \\ &= \lambda^2 - 0{,}25 \end{aligned}$$

Entonces

$$p(\lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 = 0{,}25 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm 0{,}5$$

y obtenemos los valores propios $\lambda_1 = -0{,}5$ y $\lambda_2 = 0{,}5$.

Ahora corresponde calcular los vectores propios.

- Para $\lambda_1 = -0{,}5$, tenemos la matriz

  $$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} 1{,}5 & -0{,}5 \\ 1{,}5 & -0{,}5 \end{bmatrix}$$

  Entonces un vector propio es de la forma $\begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 1{,}5 \end{bmatrix}$, o cualquier múltiplo de este vector, por ejemplo $\mathbf{w}_1 = (1, 3)$.

- Para $\lambda_2 = 0{,}5$, tenemos la matriz

  $$A - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} 0{,}5 & -0{,}5 \\ 1{,}5 & -1{,}5 \end{bmatrix}$$

  Entonces un vector propio es de la forma $\begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{bmatrix}$, o cualquier múltiplo de este vector, por ejemplo $\mathbf{w}_2 = (1, 1)$.

Finalmente la forma general de $\{(x_t, y_t)\}$ es

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = c_1 \cdot (-0{,}5)^t \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + c_2 \cdot 0{,}5^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

o bien

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \cdot (-0{,}5)^t + c_2 \cdot 0{,}5^t \\ 3c_1 \cdot (-0{,}5)^t + c_2 \cdot 0{,}5^t \end{bmatrix}]$$

2. El análisis de estabilidad de un sistema lineal se resume en revisar la magnitud o módulo de los valores propios. Como $|\lambda_1| < 1$ y $|\lambda_2| < 1$, entonces el sistema es estable.

3. Para el caso inicial $(x_0, y_0) = (2, 1)$ resolvemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 \\ 3c_1 + c_2 \end{bmatrix}] \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} c_1 + c_2 &= 2 \\ 3c_1 + c_2 &= 1 \end{aligned}$$

Restando ambas ecuaciones tenemos $2c_1 = -1$, es decir $c_1 = -0{,}5$. Con esto obtenemos $c_2 = 2{,}5$.

[Recordar que si se escogieron otros vectores propios, los valores de c_1 y c_2 tienen que cambiar también]

La solución a este sistema con valor inicial $(x_0, y_0) = (2, 1)$ es

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = -0{,}5 \cdot (-0{,}5)^t \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + 2{,}5 \cdot 0{,}5^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

o bien

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}5 \cdot (-0{,}5)^t + 2{,}5 \cdot 0{,}5^t \\ -1{,}5 \cdot (-0{,}5)^t + 2{,}5 \cdot 0{,}5^t \end{bmatrix}]$$

6.13. Sistemas Dinámicos con Asimetrías

En variadas disciplinas se analizan modelos en que, por diversas razones, las respuestas son asimétricas de acuerdo al valor de la variable. Por ejemplo, podemos reaccionar de distinta manera a pérdidas que a ganancias. En esta pregunta analizaremos una modelo dinámico de una ecuación que tiene justamente un comportamiento de este estilo.

Considere la siguiente ecuación en diferencias de primer orden

$$x_{t+1} = x_t + b|x_t| + c, \qquad b, c \in \mathrm{R}$$

donde $|m|$ representa el valor absoluto de m.

En cada uno de los siguientes casos usted debe buscar los estados estacionarios (puntos de equilibrio), diagrama de fase, y estabilidad (de los estados estacionarios) de los sistemas.

1. $b = -0{,}5; c = 1$
   Respuesta.
   El diagrama de fase aparece en la figura **??**. Los estados estacionarios son -2 y 2. Dada la pendiente en cada punto se puede determinar que $x = 2$ es estable y $x = -2$ es inestable. Esta determinación también se puede hacer dibujando la dinámica del sistema con flechas.

2. $b = 0{,}5; c = -1$
   Respuesta.
   El diagrama de fase aparece en la figura **??**. Los estados estacionarios son -2 y 2. Dada la pendiente en cada punto se puede determinar que $x = 2$ es inestable y $x = -2$ es estable. Esta determinación también se puede hacer dibujando la dinámica del sistema con flechas.

Respuesta.

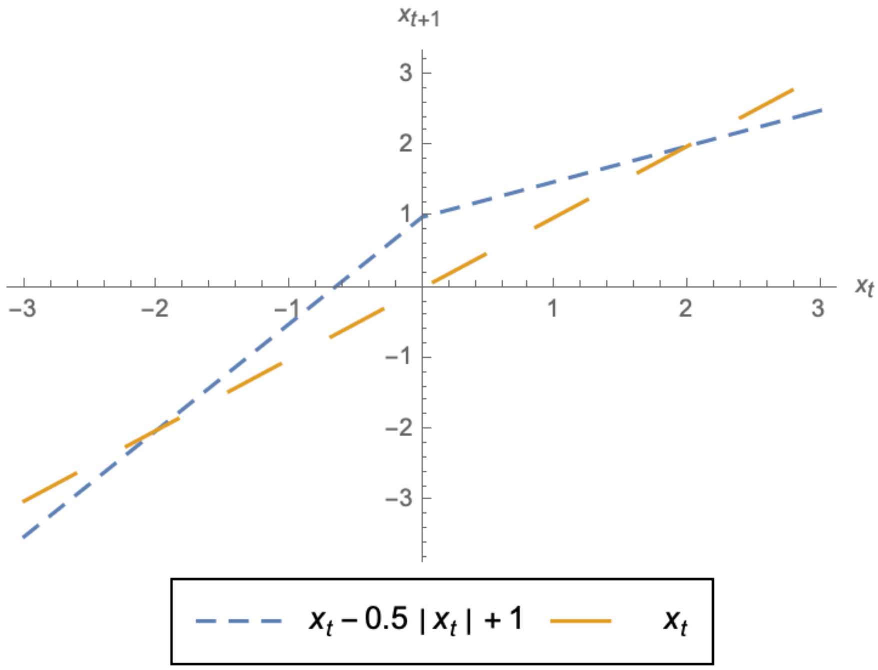


Figura 6.1: Diagrama de fase para ecuación $x_{t+1} = x_t - 0{,}5|x_t| + 1$

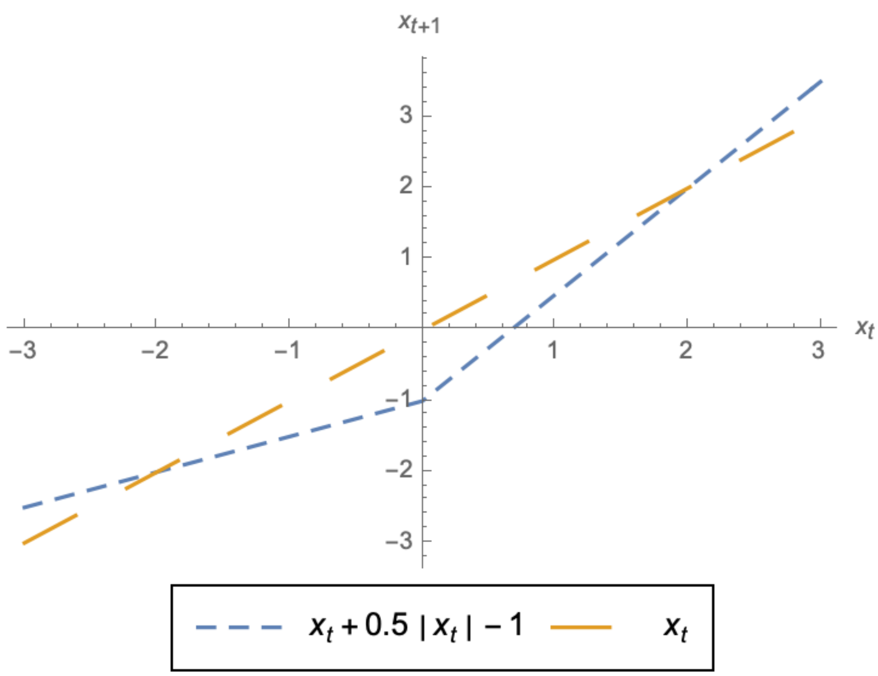
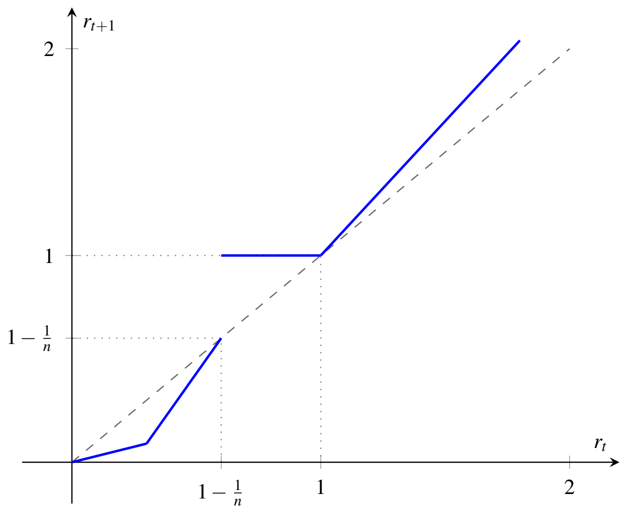


Figura 6.2: Diagrama de fase para ecuación $x_{t+1} = x_t + 0{,}5|x_t| - 1$

6.14. R efectivo

Para estimar la evolución de la pandemia se estima el parámetro de contagiosidad, llamado r. En cada periodo t, r_t representa el valor del parámetro en ese periodo. Cuando se realizan n exámenes de PCR, la evolución del parámetro r sigue el siguiente diagrama de fase:



donde la línea discontinua diagonal representa la recta $r_{t+1} = r_t$.

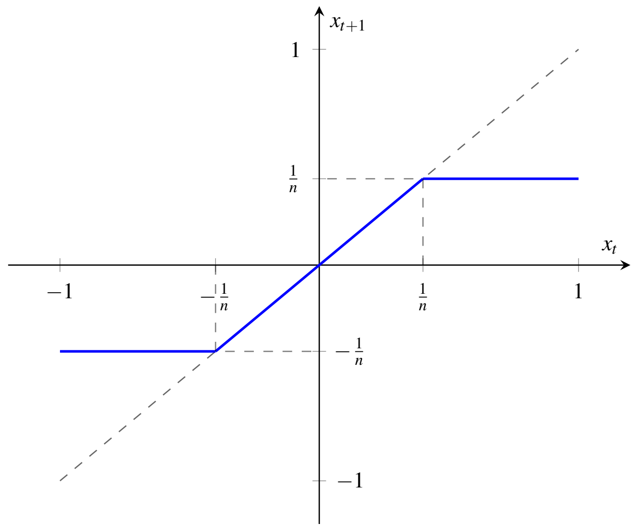
1. Encuentre los estados o soluciones estacionarias. Justifique.
2. Determine si los puntos encontrados anteriormente son estables o no. Si lo son, diga si lo son local o globalmente. Justifique.
3. Encuentre los estados estacionarios si $n \to \infty$ y clasifíquelos en base a su estabilidad local o global.

Respuesta.

1. Hay tres puntos fijos: $r_1^* = 0$, $r_2^* = 1 - \frac{1}{n}$ y $r_3^* = 1$.
2. Ningún punto es globalmente estable, precisamente porque hay más de 1 punto fijo. El punto r_1^* es localmente estable porque si nos paramos a la derecha de 0, en el intervalo $\left(0, 1 - \frac{1}{n}\right)$, el sistema converge a 0 (además la derivada de la curva azul en 0 es menor que 1 en valor absoluto). El punto r_2^* no es localmente estable porque a la izquierda se converge a 0. El punto r_3^* es localmente estable: a la izquierda se converge inmediatamente y a la derecha se diverge.
3. Hay dos formas de analizar esto. Cuando $n \to \infty$, $r_2^* \to r_3^*$ y por lo tanto quedan dos puntos fijos. Alternativamente se puede ver que en el diagrama de fase resultante, la línea horizontal desaparece y el punto $\left(1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right)$ converge a $(1, 1)$, por lo que la línea punteada queda cruzada solo 2 veces por la azul. El punto fijo 0 es localmente estable y el punto 1 es inestable (por la izquierda se vuelve a converger a 0).

6.15. Infinitos puntos fijos

Para $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$, considere el siguiente diagrama de fase que representa a una ecuación en diferencias



La línea punteada diagonal representa a la recta $x_{t+1} = x_t$. Responda:

1. Encuentre los estados o soluciones estacionarias.
2. Determine si los puntos encontrados anteriormente son estables o no. Si lo son, diga si los son local o globalmente.
3. Encuentre los estados estacionarios si $n \to \infty$ y clasifíquelos en base a su estabilidad local o global.

Respuesta.

1. Hay infinitos puntos fijos. En particular todo valor $r^* \in \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$ es un punto fijo.
2. Dado que hay más de un punto fijo, ninguno es globalmente estable. Los puntos $r^* \in \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ no son localmente estables porque alrededor de ellos hay otros puntos fijos, los que no convergen al punto original. Los extremos $r^* = \frac{1}{n}$ y $r^* = -\frac{1}{n}$ tampoco son localmente estables porque a la izquierda del primero y a la derecha del segundo no se converge al punto original (porque son otros puntos fijos).
3. Hay dos formas de ver esto. Cuando $n \to \infty$, el intervalo de puntos fijos colapsa a un punto: $r^* = 0$. Este punto es globalmente estable porque a su izquierda se comporta como $-\frac{1}{n}$, que converge inmediatamente, y a la derecha se comporta como $\frac{1}{n}$, que también converge inmediatamente. También se puede apreciar que el diagrama de fase resultante cuando $n \to \infty$ es una recta horizontal que coincide con el eje x. Con esto vemos que el punto fijo además es globalmente estable.

6.16. Planificación de una excavación

Una empresa minera planifica todos los meses cuánto debe excavar en el futuro. A la cantidad excavada en cualquier tiempo t le llamaremos d_t. Al realizar su planificación en el mes t, escoge d_{t+1} basada en la última cantidad excavada: d_t.
Para simplificar, suponga que al elegir d_{t+1} la minera busca maximizar su ganancia del período, que depende de la cantidad extraída de mineral $L(d_{t+1}, d_t)$ que se vende a un precio unitario p y de los costos de excavar a la nueva profundidad $C(d_{t+1})$. Además, existe una restricción por regulación ambiental: la nueva cantidad excavada no puede superar a un múltiplo $D > 0$ ($D \neq 1$) de la última cantidad excavada, más un margen $M \geq 0$. Esto es:

$$d_{t+1} \leq Dd_t + M$$

Además, solo tiene sentido que $d_t \geq 0$. Con todo, el problema de optimización de la minera es:

$$\begin{aligned} \max_{d_{t+1}} \quad & pL(d_{t+1}, d_t) - C(d_{t+1}) \\ s.a \quad & d_{t+1} \leq Dd_t + M \\ & d_{t+1} \geq 0 \end{aligned} \tag{1}$$

(a) Suponga que $p \cdot \frac{\partial L}{\partial d_{t+1}} > C'$. Explique por qué, en el óptimo, la restricción ambiental está activa.

Respuesta. La condición del enunciado dice que la función objetivo es creciente en d_{t+1}. Si la restricción ambiental estuviera inactiva, entonces existe margen para aumentar d_{t+1}, lo que mejoraría el resultado y por lo tanto no hay óptimo que tenga esa restricción inactiva.

(b) Usando *(a)*, muestre que la solución óptima verifica la siguiente ecuación en diferencias:

$$d_{t+1} = Dd_t + M \tag{2}$$

¿De qué orden es? Dado un valor inicial d_0, ¿cuántas soluciones tiene esta ecuación?

Respuesta. La ecuación en diferencias se desprende de manera directa de la restricción activa en el óptimo. Esta ecuación es de orden 1, por lo que dado un valor inicial d_0 la solución es única por el teorema de existencia y unicidad.

(c) Encuentre la solución de (2) cuando $d_0 = 1$.

Respuesta. La ecuación tiene un punto fijo $d^* = \frac{M}{1-D}$. Luego la solución general se puede escribir:

$$d_t = D^t(d_0 - d^*) + d^*$$

que si $d_0 = 1$ queda:

$$d_t = D^t(1 - d^*) + d^*$$

Alternativamente, en clases se ve que la solución general de (2) es:

$$d_t = d_0\, D^t + \frac{1 - D^t}{1 - D}\, M$$

Y se reemplaza $d_0 = 1$. Notar que ambas soluciones son idénticas.

Otra alternativa es usar método de coeficientes indeterminados, que nos lleva a encontrar que la solución particular corresponde al punto fijo (estado estacionario) descrito más arriba.

(d) Suponga que $0 < D < 1$, ¿cuántos puntos fijos **consistentes con el contexto del problema** tiene (2)? ¿Son estables, local o globalmente? ¿Y si $D > 1$, cuántos consistentes con el contexto hay?

Respuesta. Si $0 < D < 1$, el único punto fijo es $\frac{M}{1-D}$ que es consistente con el contexto del problema porque es mayor o igual que 0. Ese punto es estable localmente porque la derivada de $Dd_t + M$ es D que en valor absoluto es menor que 1. El punto además es estable globalmente. Esto se puede ver mirando la solución del inciso anterior o por un diagrama de fase, mencionando que los puntos iniciales considerados muestran un comportamiento que es general y no específico de haber empezado justo ahí.

Si $D > 1$, el punto fijo es negativo y por lo tanto no es consistente con el problema (tampoco es estable porque la derivada es mayor que 1).

(e) Suponga que el regulador quiere evitar que las excavaciones crezcan demasiado, porque debilitan el suelo y destruyen las ciudades aledañas ¿Debería fijar $0 < D < 1$ ó $D > 1$?

Respuesta. Si $D > 1$, d_t crece infinitamente (se puede ver mirando la solución encontrada), luego tiene que elegir $0 < D < 1$. Alternativamente se puede argumentar que si $0 < D < 1$ la solución converge a un punto fijo y no crece, mientras que si $D > 1$, la solución se aleja del estado estacionario y va a infinito. Un argumento por dibujo usando un diagrama de fase para cada caso también es válido, mencionando que los puntos iniciales considerados muestran un comportamiento que es general y no específico de haber empezado justo ahí.

(f) Suponga que el regulador fijó $0 < D < 1$. Si además quisiera que eventualmente la minera deje de excavar, ¿en cuánto debe fijar M?

Respuesta. Dado que con $0 < D < 1$ el punto fijo $\frac{M}{1-D}$ es estable (globalmente), entonces para lograr el objetivo de $d_t \to 0$ es necesario que $M = 0$. Esto se puede ver también mirando la solución encontrada anteriormente.

Preguntas desafiantes

6.17. Ecuaciones en Diferencias y Restricción Presupuestaria Intertemporal

[Este ejercicio es adaptado del libro de Gerhard Sorger Dynamic Economic Analysis]

Existe una secuencia infinita de generaciones, cada una consiste de un continuo con medida uno de agentes idénticos, que viven por dos periodos. La generación nacida en un periodo t sera llamada de generación t. Los agentes son llamados de jóvenes en su primero periodo de vida, y de viejos en su segundo periodo de vida. Además, existe una generación -1 de agentes que viven en periodo 0, y que mueren al final de este periodo.

Un agente joven de la generación t usa su esfuerzo para producir una cantidad y_t de un bien no almacenable, y vende el producto a un precio p_t para los agentes viejos de la generación $t-1$. En el próximo periodo $(t+1)$, cuando este agente ya esta viejo, el gasta el dinero que obtuvo en periodo t, comprando bienes de consumo producidos por los agentes jóvenes de la generación $t+1$. Los agentes viejos de la generación -1 tienen $M > 0$ unidades de dinero, que lo gastan en bienes de consumo producidos en el periodo 0. El agente representativo de la generación t toma los precios p_t y p_{t+1} como dados, y busca maximizar su utilidad dada por

$$-v(y_t) + u(c_{t+1})$$

donde $v(y) = y^2/2$ es la desutilidad de hacer esfuerzo para producir un cantidad y. ¿Cual la restricción presupuestaria de este modelo? Analice el modelo y la trayectoria y_t de equilibrio suponiendo: $u(c) = \ln c$ y $u(c) = \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma}$ (con $\sigma = 2$ y $\sigma = 1/2$). Puedes utilizar un gráfico cuando convenga.

Respuesta.

Sea m_t la cantidad de dinero que lleva un agente joven de generación t, después de vender su producto. Entonces, tenemos que

$$p_{t+1}c_{t+1} \leq m_t = p_t y_t$$

En el óptimo esta restricción debe ser activa:

$$m_t = p_{t+1}c_{t+1}$$

Reemplazando $m_t = p_{t+1}c_{t+1}$ y $y_t = m_t/p_t$ en la función objetivo tenemos que el agente elige m_t para maximizar

$$-v\left(m_t/p_t\right) + u\left(m_t/p_{t+1}\right)$$

Esto es una función estrictamente cóncava en m_t, para cualquier $u(\cdot)$ entre los propuestos. Así tenemos que las condiciones de primera orden son necesarias y suficientes para el óptimo:

$$\frac{v'(m_t/p_t)}{p_t} = \frac{u'\left(m_t/p_{t+1}\right)}{p_{t+1}}$$

El dinero total de dinero demandado en la economía debe ser igual a M, luego market clearing implica que $m_t = M$, $\forall t$. Luego, utilizando $m_t = M = p_t y_t$ tenemos

$$\frac{v'(y_t)}{p_t} = \frac{u'\left(y_{t+1}\right)}{p_{t+1}}$$

$$M\frac{v'(y_t)}{p_t} = M\frac{u'\left(y_{t+1}\right)}{p_{t+1}}$$

$$y_t v'(y_t) = y_{t+1}u'\left(y_{t+1}\right)$$

$$V(y_t) = U(y_{t+1}), \tag{IDE}$$

donde $V(y_t) = yv'(y) = y^2$ y $U(y) = yu'(y)$. La ecuación (IDE) nos da el equilibrio de la economía como una ecuación en diferencia en y_t. El precio sera dado por $p_t = M/y_t$, una vez determinada la trayectoria $(y_t)_{t\geq 0}$ de equilibrio. Note que la variable es una variable y_0 no es pre-determinada (puede tener cualquier valor, a depender de las elecciones de los agentes).

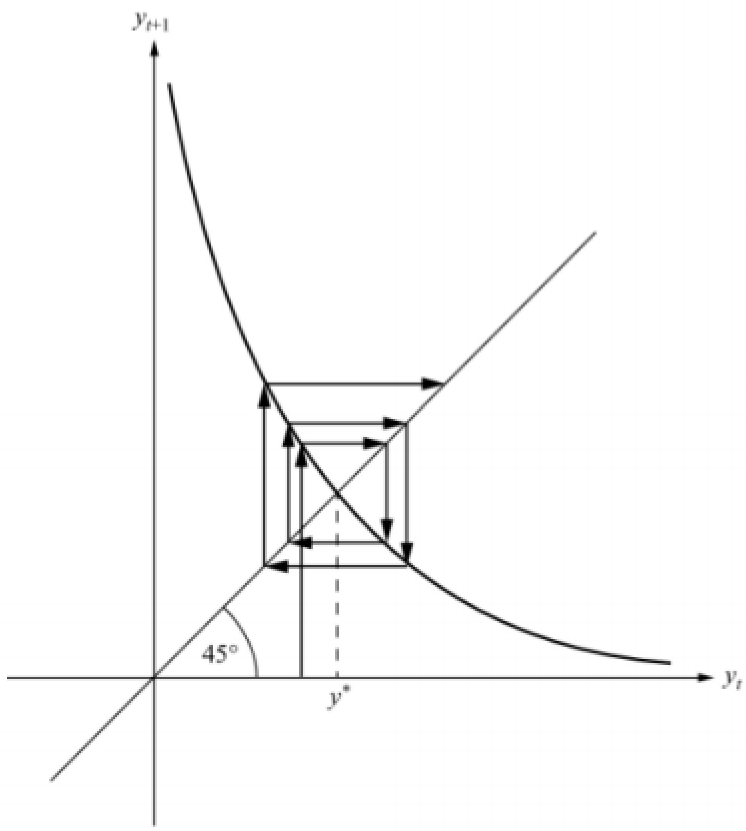
Caso 1: $u(c) = \ln(c)$**.** En este caso (IDE) es $y_t^2 = 1$. La única trayectoria de equilibrio es $y_t = 1, \forall t$. Precios son constantes: $p_t = M, \forall t$.

Caso 2: $u(c) = \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma}$ **.** (IDE) es:

$$y_t^2 = y_{t+1}^{1-\sigma}$$

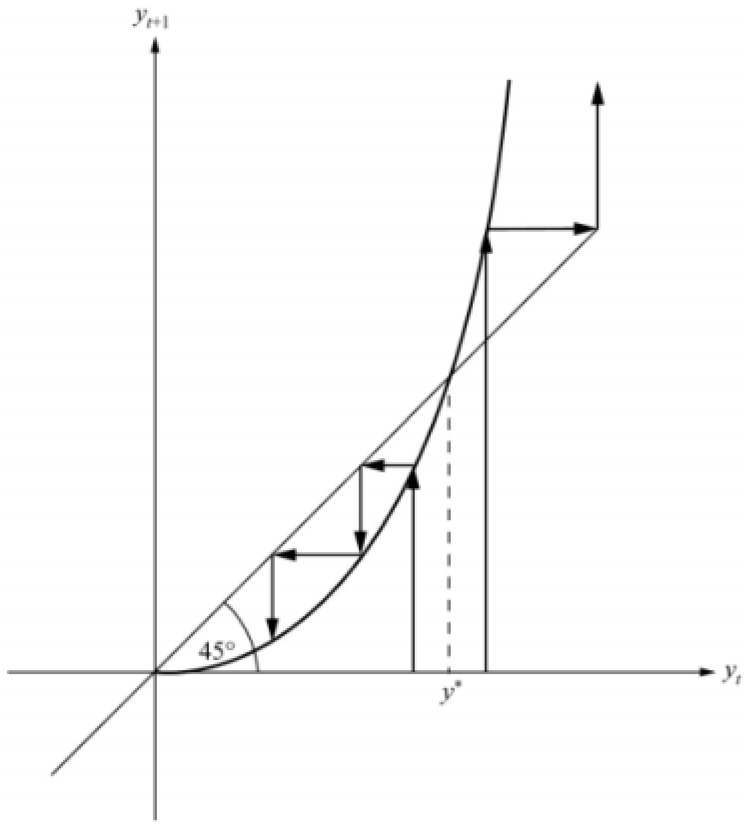
$$y_{t+1} = y_t^{\frac{2}{1-\sigma}}$$

Suponga primero que $\sigma = 2$. En este caso hay un único punto fijo, para un valor arbitrario y_0:



El equilibrio oscila y es explosivo, con crecimiento de y_t en un periodo y decrecimiento en el siguiente. Precios suben después caen (alta inflación es seguida por alta deflación).

Suponga ahora que $\sigma = 1/2$. Hay dos puntos fijos y:



Si y_0 esta por abajo del punto fijo, la trayectoria de equilibrio tiene $y_t \to 0$ y $p_t \to \infty$ (equilibrio no monetario). Si y_0 esta arriba del punto fijo, tenemos que $y_t \to \infty$ en la trayectoria de equilibrio y $p_t \to 0$.

6.18. Desafío: Ecuaciones en Diferencia de Primer Orden Aplicado a Teoria de Juegos

[Este ejercicio es adaptado del libro de Gerhard Sorger Dynamic Economic Analysis]

Ayuda: Es recomendable no resolver este ejercicio si no se está familiarizado con la teoria de juegos.
Considere el siguiente juego (G) de coordinación con dos jugadores y dos acciones:

	A	B
A	(a,a)	$(0,0)$
B	$(0,0)$	(b,b)

con $a, b > 0$. Este juego tiene tres equilibrios: (A, A), (B, B) y un equilibrio en estrategias mistas donde cada jugador elige A con probabilidad $\overline{x} = b/\,(a+b)$.

Suponga ahora que tenemos un continuo de jugadores en la población: jugadores que siempre juegan la estrategia A y jugadores que siempre juegan la estrategias B. Denote por x_t la fracción de jugadores que siempre juegan A en un periodo t. En cada periodo, se forman pares de 2 jugadores, elegidos de manera aleatoria en la población (o sea, la probabilidad de formar un par con un jugador que siempre juega A es x_t). La tasa de crecimiento de cada tipo de jugador es dada por la tasa entre el payoff esperado de jugadores jugando una acción y el payoff promedio en la población:

$$\frac{x_{t+1}}{x_t} = \frac{ax_t}{ax_t^2 + b(1-x_t)^2}$$

1. Como evoluciona x_t para cada posible x_0?

2. Explique porque este tipo de modelo hace sentido para seleccionar equilibrios en el juego (G) (piense en como evoluciona una población).

6.19. Desafío

[Este ejercicio es adaptado del libro de Gerhard Sorger Dynamic Economic Analysis]

Sea $a = \sqrt{2}$ y considere

$$x = a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}$$

Encuentre x.

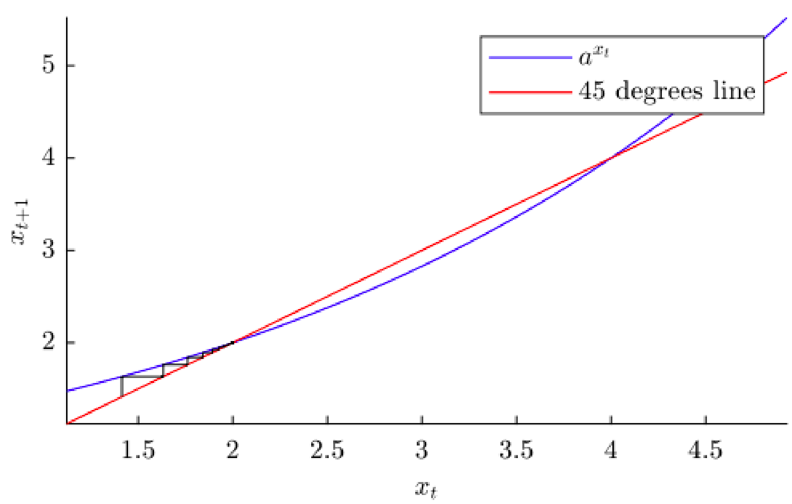
Respuesta. Note que x debe satisfacer:

$$x = a^x$$

El problema es que esta ecuación tiene dos soluciones cuando $a = \sqrt{2}$, dadas por $x = 2$ y $x = 4$. Todavía, si elevamos un número infinita veces la respuesta debería ser siempre la misma. Vamos definir la siguiente sucesión:

$$\{x_t\}_{t\geq 0} = \{a, a^a, a^{a^a}, \ldots\}$$

Perciba que $\lim_{x_t\to\infty} = x$. La secuencia x_t satisface $x_{t+1} = a^{x_t}$, con $x_0 = a = \sqrt{2}$. Perciba que este sistema tiene dos puntos fijos $x = 2$ y $x = 4$. Todavía, aun no es claro para cual punto fijo la sucesión converge (si converge). Podemos graficar la ley de movimiento $f(x_t) = a^{x_t}$ para analizar la dinámica partiendo de $x_0 = \sqrt{2}$ y tenemos:



Como se muestra en el gráfico, la secuencia converge para $x = 2$. Luego, $x = 2$.

Capítulo 7

Ecuaciones en Diferencias de Segundo Orden o Superior

7.1. Ecuaciones en Diferencias de Segundo Orden I

Resuelva las siguientes ecuaciones en diferencias (use las condiciones iniciales en los ejercicios donde están disponibles) y analice su estabilidad (global)

1. $y_{t+2} - 4y_{t+1} - 4y_t = 2^t$; con $y_0 = 0, y_1 = 1$
2. $y_{t+2} = 2y_{t+1} + 3y_t$; con $y_0 = 100, y_1 = 200$
3. $y_{t+2} = 2y_{t+1} + 3y_t + 80$; con $y_0 = 100, y_1 = 200$
4. $y_{t+2} = 4y_{t+1} - 4y_t$; con $y_0 = 1$ e $y_1 = 2$
5. $3y_{t+2} = 18y_{t+1} - 27y_t$,con $y_0 = 2$ e $y_1 = 2$
6. $y_{t+2} = -y_t$, con $y_0 = y_1 = 1$
7. $y_{t+2} = 5y_{t+1} - 5y_t$, con $y_0 = 0$ e $y_1 = 1$
8. $y_{t+2} - \frac{5}{2}y_{t+1} + y_t = 3^t$
9. $y_{t+2} + 2y_{t+1} + y_t = t$
10. $y_{t+1} - 4y_{t-1} = t$
11. $y_{t+2} - 7y_{t+1} + 6y_t = 0$
12. $y_{t+2} = y_{t+1} + y_t$ con $y_0 = 0$ y $y_1 = 1$
13. $2y_{t+2} + 8y_{t+1} + 6y_t = 32$ con $y_0 = 1$ e $y_1 = 2$
14. $y_{t+2} - 4y_{t+1} + 4y_t = 5$ con $y_0 = 1$ e $y_1 = 2$

Respuesta.

1. Primero resolvemos la ecuación homogénea asociada. La ecuación característica es

$$m^2 - 4m - 4 = 0$$

con raíces $m_1 = 2 + 2\sqrt{2}$ y $m_2 = 2 - 2\sqrt{2}$. Como son raíces reales y distintas tenemos que la solución será de la forma

$$y_t^h = K_1 \left(2 + 2\sqrt{2}\right)^t + K_2 \left(2 - 2\sqrt{2}\right)^t$$

donde K_i son constantes a determinar.

Ahora miraremos el componente no homogéneo y buscaremos una solución particular. Dada la forma funcional de la parte no homogénea postulamos como candidato $y_t^p = A2^t$ y la sustituimos en la ecuación en diferencias

$$\begin{aligned} y_{t+2} - 4y_{t+1} - 4y_t =& A2^{t+2} - 4\ A\ 2^{t+1} - 4\ A\ 2^t = 2^t \\ A4 - 8\ A - 4\ A =& 1 \\ A =& -\frac{1}{8} \end{aligned}$$

Donde la simplificación en la segunda línea viene de dividir ambos lados por 2^t. La solución particular es entonces $y_t^p = -\frac{1}{8}2^t = -2^{t-3}$

La solución por tanto es de la forma

$$y_t = K_1\left(2+2\sqrt{2}\right)^t + K_2\left(2-2\sqrt{2}\right)^t - 2^{t-3}$$

y para encontrar las constantes K_i usamos las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} y_0 =& K_1\left(2+2\sqrt{2}\right)^0 + K_2\left(2-2\sqrt{2}\right)^0 - 2^{0-3} = 0 \\ y_1 =& K_1\left(2+2\sqrt{2}\right)^1 + K_2\left(2-2\sqrt{2}\right)^1 - 2^{1-3} = 1 \end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned} K_1 + K_2 =& \frac{1}{8} \\ K_1\left(2+2\sqrt{2}\right) + K_2\left(2-2\sqrt{2}\right) =& \frac{5}{4} \end{aligned}$$

y las soluciones son

$$K_1 = \frac{1}{16} + \frac{\sqrt{2}}{8}\ ; \quad K_2 = \frac{1}{16} - \frac{\sqrt{2}}{8}$$

con lo que la solución para este caso es

$$y_t = \left(\frac{1}{16} + \frac{\sqrt{2}}{8}\right)\left(2+2\sqrt{2}\right)^t + \left(\frac{1}{16} - \frac{\sqrt{2}}{8}\right)\left(2-2\sqrt{2}\right)^t - 2^{t-3}$$

2. La ecuación característica es $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$, con soluciones $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = -1$. Luego, la solución es de la forma $y_t = c_1 3^t + c_2(-1)^t$, con $c_1 + c_2 = 100$ y $3c_1 - c_2 = 200$. Así, se obtiene $y_t = 75 \cdot 3^t + 25 \cdot (-1)^t$

3. Para la ecuación homogénea tenemos la misma ecuación característica que en la parte anterior con soluciones $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = -1$. Además tenemos una solución particular $y^* = -20$. Luego, la solución general es de la forma $y_t = c_1 3^t + c_2(-1)^t - 20$, con $c_1 + c_2 - 20 = 100$ y $3c_1 - c_2 - 20 = 200$. Así, se llega a $y_t = 85 \cdot 3^t + 35 \cdot (-1)^t - 20$

7.2. Modelo Macroeconómico

Suponga el siguiente modelo para representar la economía de un país:

$$Y_t = C_t + I_t + G_t$$

$$C_{t+1} = aY_t$$

$$I_{t+1} = b(C_{t+1} - C_t)$$

$$G_t = G = 1, \text{ se supone constante}$$

Donde Y_t representa el ingreso nacional en el período t, C_t es el consumo en el período t, I_t es la inversión en el período t, G_t es el gasto de gobierno en el período t y a, b son constantes

1. Genera una expresión para el ingreso nacional del país que dependa de los ingresos obtenidos anteriormente.
2. Encuentre la solución al sistema, suponga que $a = 0,8$ y $b = 3$
3. ¿A qué tasa crecera el ingreso cuando t tiende a infinito?
4. Suponga que ahora usted no conoce el valor de b, determine los valores de b para los cuáles el sistema oscila
5. Calcule los valores para los cuales sistema converge y diverge, dado que el sistema oscila

7.3. Secuencia de Números

Suponga una ecuación en diferencias lineal homogénea de coeficientes constantes, de segundo orden que genera la siguiente secuencia de números:

$$1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, ...$$

1. Encuentre la ecuación en diferencias
2. Encuentre la solución de dicha ecuación

7.4. Dinámica de Precios

En el mercado de las uva de mesa, la demanda se puede representar como :

$$D_t = 1000 - 2P_t$$

y la oferta como:

$$S_t = -500 - 3P_{t-1} + 6P_{t-2}$$

1. Encuentre la ecuación que representa la dinámica para P_t.
2. Analice la evolución del precio en lo que se refiere a equilibrio, estabilidad y presencia de oscilaciones.

7.5. Aplicación a la Ganadería

El siguiente modelo tiene por objetivo analizar la evolución de la masa ganadera en función de los principales factores que inciden en ella. Los supuestos en que descanza el modelo son los siguientes: una vaca alcanza madurez en T años, un porcentaje a de las vacas de edad T o más años tiene un ternero al año, un porcentaje b de los terneros son hembras, un porcentaje c de los terneros vive hasta alcanzar madurez reproductiva, la tasa de mortalidad natural anual de las vacas en edad reproductiva es $(1 - d)$, donde d es la tasa anual de sobrevivencia de las mismas y finalmente, r es el porcentaje de la población hembra adulta que se beneficia anualmente (tasa de extracción).Adicionalmente se supone que no hay importaciones ni exportaciones. Si define X_t como el número de vacas reproductoras en el año t, entonces la evolución de X_t está determinada por la relación:

$$X_t = abcX_{t-T} + (d - r)X_{t-1}$$

Suponga que $a = 0,7$; $b = 0,5$; $c = 0,82$; $d = 0,96$; $r = 0{,}20$; $T = 2$

1. Encuentre la ecuación característica del sistema, con los valores dados anteriormente.
2. Suponga que en $X_0 = 0$ y $X_1 = 10$. Encuentre la solución al sistema
3. Calcule el número de vacas reproductoras en el año 100.

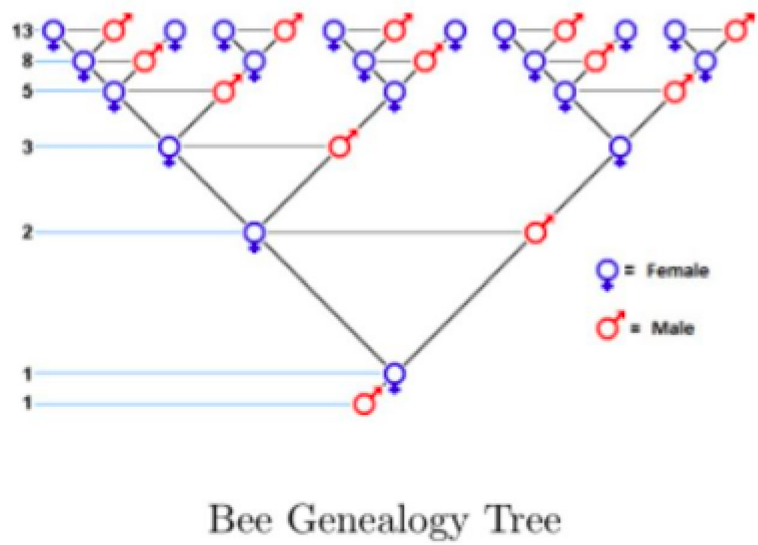
7.6. Ecuaciones en Diferencia Aplicado a la Entomología

Las abejas hembras tienen dos padres, un macho y una hembra mientras que las abejas macho tienen un solo padre, que es hembra. ¿Cuántos ta-ta-ta-ta-(...)-tarabuelos (hembras y machos) tiene una abeja macho?

Respuesta. Las abejas machos nacen de un huevo no fertilizado, y por lo tanto no tienen papa. Las abejas hembras nacen de un huevo fertilizado, y por lo tanto tienen una mama y un papa. El número de padres (hembras y machos) que tiene una abeja macho es por lo tanto $x_0 = 1$. El número de abuelos (hembras y machos) es $x_1 = 2$. El número de bisabuelos es dada por $x_2 = 3$, etc. Luego, la cantidad de ta-ta-ta-ta-(...)-tarabuelos es representada por la sucesión que satisface:

$$x_{t+1} = x_t + x_{t-1}$$

con $x_0 = 1$ y $x_1 = 2$. Le figura abajo representa esta sucesión.



7.7. Ahorrando para la educación superior

Al nacer su hija un padre decide poner un monto X_0 en una cuenta de ahorro que entrega un interés de $r = 10\,\%$ anual, esperando acumular en 18 años un monto suficiente para asegurar el financiamento de su educación superior.

a) Si necesita acumular \$50 000 000 (50 millones) en $t = 18$, ¿Cuál debería ser el monto X_0 que invierte en $t = 0$? Puede dejar expresado su resultado sin resolver el monto exacto (pero debe despejar hasta el último paso).

b) Entusiasmado con la idea, el abuelo se compromete a aportar \$500 000 (500 mil) al final de cada año, por lo que obtiene

$$x_{t+1} = (1 + r)x_t + 500\ 000$$

en cada fecha. Con este aporte, ¿cuánto debería poner el padre en $t = 0$ para acumular \$50 000 000 en $t = 18$? Puede dejar expresado su resultado sin resolver el monto exacto (pero debe despejar hasta el último paso).

c) Por último, suponga que una tía se compromete a aportar a partir de $t = 2$ un $5,75\,\%$ de lo que se haya logrado acumular dos años atrás. Así, se obtiene

$$x_{t+2} = (1 + r)x_{t+1} + 0{,}0575x_t + 500\ 000$$

El padre calcula que poniendo $X_0 = 1\ 500\ 000$ en $t = 0$ puede juntar más de lo necesario.

c.1) Resuelva la ecuación en diferencias, considerando que $x_0 = 1\ 500\ 000$ y $x_1 = 2\ 150\ 000$. Puede dejar expresado(s) su(s) resultado(s) sin resolver cada número exactamente (pero debe despejar hasta el último paso las incógnitas que deba resolver).

c.2) Identifique qué variables afectan los valores de las raíces de la ecuación característica λ_1 y λ_2, y qué variables afectan el estado estacionario x^*. ¿En qué afectan entonces los montos iniciales x_0 y x_1? Justifique sus respuestas.

Respuesta.

a) La solución de $x_{t+1} = (1 + r)x_t$ es

$$x_t = (1 + r)^t x_0$$

Luego, debe poner $x_0 = 50{,}000{,}000/1{,}1^{18} = \$8{,}992{,}939,5$ para tener $x_{18} = 50{,}000{,}000$.

b) La solución de $x_{t+1} = (1 + r)x_t + 500000$ es

$$x_t = (1 + r)^t \left(x_0 + \frac{b}{r}\right) - \frac{b}{r}$$

Entonces, debe poner $x_0 = \frac{55{,}000{,}000 - 1{,}1^{18}5{,}000{,}000}{1{,}1^{18}} = 4{,}892{,}233,44$ para obtener lo que necesita.

c.1) La ecuación característica de la parte homogénea es $\lambda^2 - 1{,}1\lambda - 0,575 = 0$ que tiene soluciones $\lambda_1 = 1{,}15$ y $\lambda_2 = -0{,}05$. Como solución particular de la parte no homogénea podemos usar el estado estacionario (constante A) que es $x^* = -3{,}174{,}603$. Luego, obtenemos

$$x_t = c_1 * 1{,}15^t + c_2 * (-0{,}05)^t + x^*,$$

y al evaluar en $t = 0$ y $t = 1$ encontramos $c_1 = 4631944{,}4$ y $c_2 = 42658{,}7$. Así, la solución es

$$x_t = 4631944{,}4 * 1{,}15^t + 42658{,}7 * (-0{,}05)^t - 3{,}174{,}603,$$

c.2) La ecuación característica depende de la tasa de interés y del porcentaje que aporte la tía (parte homogénea). El estado estacionario depedende además del aporte del abuelo (parte no homogénea). Para encontrar la solución única hace falta incorporar los valores iniciales, que permiten encontrar la secuencia de monto acumulado en cada fecha t.

7.8. Evolución Macroeconómica

Sea Y_t el PIB de una economía en términos reales, C_t el consumo agregado y I_t la inversión agregada. La demanda por consumo es dada por

$$C_t = b + cY_{t-1},$$

donde $b > 0$ y $c \in (0,1)$. La demanda por inversiones es dada por

$$I_t = \overline{I} + a\left(Y_t - Y_{t-1}\right),$$

donde $a, \overline{I} > 0$ y $a \neq 1$. La ecuación del consumo representa que cuanto mayor la renta de los agentes, mayor su consumo. La ecuación de la inversión captura el hecho de que cuando la economía crece más, las empresas aumentan su inversión. Además, el gobierno gasta una cantidad fija y constante en esta economía, representada por G. En equilibrio, se cumple que el PIB es igual al gasto total, o sea, $Y_t = C_t + I_t + G$.

1. Escriba una ecuación en diferencias que describe el PIB de equilibrio de la economía.
2. Encuentre el punto fijo (estado estacionario) de la ecuación del ítem anterior.
3. Encuentre la solución general de la ecuación que encontraste en el ítem 1 en términos del valor inicial del PIB. Es decir, representa el valor de Y_t en equilibrio como una función de parámetros, del tiempo y de Y_0.
4. Suponga que inicialmente la economía se encuentra en estado estacionario y el gobierno decide subir de manera permanente y inesperada el gasto del gobierno G. Un economista ha estimado que el parámetro a es igual a $2/3$, y que el parámetro c es igual a $1/2$ y argumenta que después de este cambio en el gasto del gobierno esta economía va tener ciclos económicos. Es decir, ocurrirán períodos de crecimiento del PIB, seguidos por períodos de caída del PIB. ¿Usted esta de acuerdo con esta predicción? Represente gráficamente la dinámica del PIB después de este cambio en un diagrama de fases con Y_{t+1} en el eje vertical y Y_t en el eje horizontal.
5. Suponga ahora que los parámetros estimados son $a = 1/2$ y $c = 2/3$. ¿Usted esta de acuerdo con la afirmación del economista en el ítem anterior? Una vez más, represente la dinámica del PIB después de la subida en el gasto del gobierno en un diagrama de fases con Y_{t+1} en el eje vertical y Y_t en el eje horizontal (y suponga de nuevo que antes del cambio en G la economía está en estado estacionario).

7.9. Ecuaciones en Diferencia de Segundo Orden Aplicado a Macroeconomía

Suponga que el producto nacional, y_t, está compuesto de producción más inversión. Parte de la producción actual está planificada para consumo, y parte para mantener un stock de inventario de bienes de consumo. Usaremos q_t para indicar la producción destinada a consumo y x_t para la producción destinada a inventario. Asumiremos que no hay rezago en la función de consumo y que los hogares consumen una fracción del producto nacional de cada período

$$c_t = \phi y_t$$

Los productores deben decidir cuanto producir antes de conocer el valor que tendrá el consumo en cada período. Asumiremos que los productores deciden su producción para consumo de modo que sea igual al nivel de consumo del período anterior, $q_t = c_{t-1}$. En el caso de la producción para inventarios, x_t, ellos producen una cantidad igual a la diferencia entre las ventas efectivas (iguales al consumo) y las ventas planificadas (iguales a la producción para el consumo) para el período anterior.

En el período t el producto nacional es $y_t = q_t + x_t + I$ donde I es una cantidad exógena y constante de inversión.

1. Derive la ecuación en diferencias para y_t.

2. Encuentre el estado estacionario
3. Encuentre la solución a la ecuación en diferencias
4. ¿Es estable el estadio estacionario?

7.10. Ecuaciones en Diferencia de Segundo Orden Aplicado en Macroeconomía

En un curso de macroeconomía le han dicho que la tasa de crecimiento anual promedio de largo plazo del ingreso nacional es de 5 % y que dicho ingreso no presenta oscilaciones. Estas afirmaciones, por supuesto, deben poder ser verificables a través de evidencia empírica.

En un primer paso usted decide plantear un modelo para la macroeconomía del país, el que consiste de las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} y_t =& c_t + i_t + g_t \\ c_{t+1} =& a + by_t \\ i_{t+1} =& \mu[c_{t+1} - c_t] \\ g_t =& 1 \end{aligned}$$

donde y es el producto agregado, c es el consumo privado, i es la inversión, y g es el gasto público. Los parámetros a, b, y μ son constantes.

1. Usando las ecuaciones del modelo macroeconómico encuentre la ecuación en diferencias que describe la evolución del producto agregado de la economía
2. Encuentre el estado estacionario del producto agregado de esta economía (si es que hay)
3. ¿Qué restricciones necesita colocar sobre los parámetros del problema para que efectivamente el producto crezca a una tasa de 5 % en el largo plazo?

Apéndice A

Matrices

A.1. Menores Principales de una Matriz

Utilizaremos intensivamente el concepto de matrices (semi-) definidas positivas y negativas. Su principal utilidad en este contexto corresponde a determinar si las funciones que estamos analizando son cóncavas o convexas.

En esta nota nos enfocaremos en las definiciones de (semi-) definidas positivas y negativas y en como determinar si una matriz corresponde a algunas de estas categorías. Primero algunas definiciones necesarias.

Definición 1 *Dada una matriz* $\mathbf{A}$ *de tamaño* $n \times n$ *y un número entero* k *tal que* $0 < k \leq n$*, entonces*

- *El determinante de cualquier matriz* $k \times k$*, obtenida removiendo* $n-k$ *filas y* $n-k$ *columnas de* $\mathbf{A}$ *se denomina* menor
- *Si el determinante se obtiene de la matriz creada eliminando las mismas* $n-k$ *filas y columnas de* $\mathbf{A}$*, entonces se denomina* menor principal *de orden* k
- *Si el determinante se obtiene de la matriz creada eliminando las últimas* $n-k$ *filas y columnas de* $\mathbf{A}$*, entonces se denomina* menor principal dominante *de orden* k

Notar la diferencia entre las dos primeras definiciones. Supongamos que tenemos una matriz de 3×3. Podemos crear un menor de orden 2 eliminando la primera fila y la tercera columna. Para ser un menor principal, entonces debemos eliminar la primera columna **y** la primera fila, no podemos tomar columnas y filas de orden distinto. La tercera definición nos dice que el menor principal dominante de orden 2 se crea eliminando la tercera fila y la tercera columna. En general, para una matriz de dimensión $n \times n$ tenemos n menores principales de orden 1, y $\frac{n!}{(n-k)!k!}$ menores principales de orden k, lo que da un total de $2^n - 1$ menores principales. Veamos esto en un ejemplo.

Ejemplo Matriz 3×3

Tomemos la matriz $\mathbf{B}$,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

entonces el determinante

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

es un menor principal y también un menor principal dominante de orden $k = 2$ ya que eliminamos las $n - k = 3 - 2 = 1$ últimas filas y columnas. Sin embargo, el determinante

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{31} & b_{33} \end{vmatrix}$$

es un menor principal pero un menor principal dominante. Es un menor principal porque elimina la segunda columna y la segunda fila, pero para ser dominante debemos eliminar filas y columnas ordenadamente desde la última (la tercera en este caso). Similarmente, $|b_{11}|$ es un menor principal dominante, pero $|b_{22}|$ es solo menor principal.

De este modo, los menores principales dominantes de $\mathbf{B}$ son

$$|b_{11}|, \quad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

Para tener todos los menores principales debemos agregar a esta lista,

$$|b_{22}|, \quad |b_{33}|, \quad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{31} & b_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

que corresponde justamente a un total de $7 = 2^3 - 1$ menores principales.

Matrices Definida Positiva y Definida Negativa

Nos concentraremos en el caso de matrices simétricas, esto es matrices tales que $\mathbf{A} = \mathbf{A}'$. (Sin embargo esto es sin pérdida de generalidad.)[1]

Consideremos entonces una matriz $\mathbf{A}$ simétrica de dimensión $n \times n$. Llamemos D_k al menor principal dominante que se obtiene de eliminar las últimas $n - k$ filas y columnas de $\mathbf{A}$. La matriz $\mathbf{A}$ es definida positiva si todos los menores principales dominantes son positivos. En el caso de ser definida negativa los menores principales dominantes alternan de signo, partiendo con D_1 negativo. El siguiente teorema describe este resultado formalmente.

Teorema 1 *Sea* $\mathbf{A}$ *una matriz simétrica de dimensión* $n \times n$.

- *La matriz* $\mathbf{A}$ *es definida positiva si y solo si* $D_k > 0,\ \forall k = 1, \ldots, n$.
- *La matriz* $\mathbf{A}$ *es definida negativa si y solo si* $(-1)^k D_k > 0,\ \forall k = 1, \ldots, n$.

Notar que el teorema habla de "si y solo si" por lo que la implicancia va en ambas direcciones. Esto quiere decir que podemos determinar si la matriz es definida o no mediante el análisis de los menores principales. Al mismo tiempo esto nos indica que el máximo número de determinantes a calcular para inspeccionar la matriz es n.

Para el caso de semi-definida necesitamos cambiar el foco y mirar a los menores principales. Esto hace el proceso más tedioso porque el número de determinantes a revisar es mayor. Llamemos $\widetilde{D}_k$ a un menor principal de orden k de una matriz $\mathbf{A}$ simétrica de dimensión $n \times n$. Esta matriz es semi-definida positiva si todos los menores principales, independiente de su orden, son no negativos. Similarmente, es semi-definida negativa si los menores principales de orden impar son no positivos y los de orden par son no negativos. Notar que hay dos cambios respecto del criterio para definida, ya que aparte de considerar los menores principales, también pasamos a desigualdades no estrictas. El resultado formal aparece en el siguiente teorema.

Teorema 2 *Sea* $\mathbf{A}$ *una matriz simétrica de dimensión* $n \times n$.

[1] El interés en matrices simétricas para nosotros viene del hecho que trabajaremos con matrices de este tipo, partiendo por el Hessiano de una función.

- *La matriz* $\mathbf{A}$ *es semi-definida positiva si y solo si*

$$\widetilde{D}_k \geq 0, \ \forall k = 1, \ldots, n$$

- *La matriz* $\mathbf{A}$ *es semi-definida negativa si y solo si*

$$(-1)^k \widetilde{D}_k \leq 0, \ \forall k = 1, \ldots, n$$

esto es los menores principales alternan signo de acuerdo a su orden.

Ejercicios

Determinemos si las siguientes matrices son (semi-)definida positiva, (semi-)definida negativa o indefinida.

1. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 6 & -3 & 7 \\ -3 & 5 & -6 \\ 7 & -6 & 9 \end{bmatrix}$

Solución

Haremos la parte 5 solamente. Las respuestas a las demás partes están al final. Consideramos primero los menores principales dominantes:

$$|3|, \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

El primer menor principal dominante es positivo. El segundo menor principal dominante es $3 \times 2 - 2 \times 2 = 2$ y positivo. El tercer menor principal dominante requiere calcular el determinante de la matriz completa. Para esto usaremos un "atajo" típico. Copiamos las dos primeras columnas de la matriz al lado derecho de esta.

$$\begin{array}{ccc|cc} 3 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Primero calculamos el producto de los números marcados en rojo, azul y verde, y los sumamos.

$$\begin{array}{ccc|cc} 3 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

y luego calculamos el producto de los números marcados en amarillo, gris y naranjo, y los restamos

$$\begin{array}{ccc|cc} 3 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

obteniendo $(3 \times 2 \times 1) + (2 \times 0 \times 1) + (-1 \times 2 \times 0) - (-1 \times 2 \times -1) - (3 \times 0 \times 0) - (2 \times 2 \times 1)$ que es 0. La matriz no puede ser positiva definida porque un menor principal dominante es 0 pero no estrictamente positivo. Para ver si es semi-definida necesitamos ver los otros menores principales. Notar que **no** puede ser negativa semi-definida porque un menor principal de orden 1 es positivo (y para ser negativa semi-definida debería ser negativo o 0). Chequeamos los otros menores principales de orden 1:

$$|2|\,, \quad |1|$$

que son todos positivos. Los menores principales de orden 2 son

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

y también son positivos. Con ello tenemos que esta matriz es semi-definida positiva porque todos los menores principales son no negativos.

Respuestas a los demás ejemplos: 1. positiva definida, 2. positiva semi-definida, 3. negativa definida, 4. negativa semi-definida, 6. positiva definida, 7. indefinida (no cumple con las condiciones ni para ser definida ni semi-definida).

A.2. Vectores y Valores Propios y Descomposición de Matrices

A ser incorporado.

Apéndice B

Formulario

Derivadas

- $\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a$.
- $\frac{d}{dx}\operatorname{sen}(x) = \cos(x)$.
- $\frac{d}{dx}\cos(x) = -\operatorname{sen}(x)$.

Suma geométrica

$$1 + a + \cdots + a^t = \sum_{i=0}^{t} a^i = \frac{1 - a^{t+1}}{1 - a}$$

Fórmula de Leibniz

Si $F(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f(t, x)\, dx$, entonces

$$F'(t) = f(t, b(t))b'(t) - f(t, a(t))a'(t) + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(t, x)\, dx$$

Diferencial total

Si $f(x, y)$ es una función, su diferencial total en el punto (x_0, y_0) es

$$df = f_x(x_0, y_0) \cdot dx + f_y(x_0, y_0) \cdot dy$$

Funciones homogéneas y homotéticas

Una función f es homogénea de grado k si para todo (x, y) y para todo $t > 0$, $f(tx, ty) = t^k f(x, y)$. Si $f(x, y)$ es homogénea de grado k, entonces sus derivadas parciales son homogéneas de grado $k - 1$, la TMS es homogénea de grado 0 y además se cumple el teorema de Euler:

$$x \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = k \cdot f(x, y)$$

Las funciones homotéticas son transformaciones crecientes de funciones homogéneas y cumplen que su TMS es homogénea de grado 0.

Sea F una función de producción homogénea de grado k. Decimos que:

- F tiene retornos decrecientes a escala si $k < 1$.
- F tiene retornos constantes a escala si $k = 1$.
- F tiene retornos crecientes a escala si $k > 1$.

Teorema de Weierstrass

Si $f : D \to \mathbb{R}$ es continua y D es compacto (es decir, es cerrado y acotado), entonces f alcanza su máximo y su mínimo en D.

Optimización sin restricciones

1. Condiciones necesarias de primer orden

Si $f : D \to \mathbb{R}$ tiene un máximo o un mínimo local en D, entonces ese punto es un punto crítico.

2. Condiciones necesarias y suficientes de segundo orden

Si $f(x, y)$ es una función y (x_0, y_0) es un máximo (mínimo) local de f, entonces $H_f(x_0, y_0)$ es semidefinida negativa (positiva). Además, si (x_0, y_0) es un punto crítico para el cual $H_f(x_0, y_0)$ es:

- Definida positiva, entonces (x_0, y_0) es un mínimo local.
- Definida negativa, entonces (x_0, y_0) es un máximo local.
- Indefinida, entonces (x_0, y_0) es un punto silla.

3. Concavidad y convexidad

Una función $f(x, y)$ es convexa si para cualquier par de puntos (x_0, y_0), (x_1, y_1) y para cualquier $\lambda \in (0, 1)$,

$$f\left(\lambda(x_0, y_0) + (1 - \lambda)(x_1, y_1)\right) \leq \lambda f(x_0, y_0) + (1 - \lambda) f(x_1, y_1)$$

La función se dice estrictamente convexa si la desigualdad anterior es estricta. La función es (estrictamente) cóncava si la desigualdad (estricta) está invertida.

Si una función es cóncava (convexa), entonces sus máximos (mínimos) locales son máximos (mínimos) globales. Si son estrictas, además son únicos.

Se cumple además:

- Una función f es cóncava (convexa) si y solo si su matriz Hessiana (H_f) es semidefinida negativa (positiva) en todos los puntos.
- Si H_f es definida negativa (positiva) entonces f es estrictamente cóncava (convexa).

4. Matrices (semi)definidas positivas y negativas

Sea A una matriz simétrica. Un menor principal dominante (MPD) de orden k es el determinante de la matriz que resulta de mantener las primeras k filas y columnas de A. Un menor principal (MP) es el determinante que resulta de mantener ciertas k filas y **las mismas** k columnas. Luego:

- A es definida positiva si y solo si todos sus MPD son positivos.
- A es definida negativa si y solo si sus MPD alternan signo y el de orden 1 es negativo.
- A es semidefinida positiva si y solo si sus MP son ≥ 0.
- A es semidefinida negativa si y solo si sus MP de orden par son ≥ 0 y los de orden impar son ≤ 0.

Si A no es semidefinida de ningún tipo se dice que es indefinida.

5. Cuasiconcavidad y cuasiconvexidad

Para una función $f(x,y)$, su Hessiano orlado es la matriz

$$\overline{H} = \begin{bmatrix} 0 & f_x & f_y \\ f_x & f_{xx} & f_{xy} \\ f_y & f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$$

Entonces

- La función f es cuasicóncava si para $\overline{H}$ los MPD de orden par son negativos y los de orden impar (mayores que 1) son positivos.
- Si f es cuasicóncava, entonces para $\overline{H}$ los MPD de orden par son ≤ 0 y los de orden impar (mayores que 1) son ≥ 0.
- f es cuasicóncava si y solo si el conjunto sobrenivel $P^c = \{(x,y) \mid f(x,y) \geq c\}$ es convexo para todo c.
- Si $f(\mathbf{x})$ es cuasicóncava y $F(z)$ es estrictamente creciente, entonces $F(f(\mathbf{x}))$ es cuasicóncava.
- f es cuasiconvexa si y solo si $-f$ es cuasicóncava.

Optimización con restricciones de igualdad

En esta parte, las letras en negrita corresponden a vectores. Por ejemplo, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ es un vector en $\mathbb{R}^n$.

1. Método de Lagrange

Sean $f, g_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con $j = 1, \ldots, m$ funciones con derivadas parciales continuas y sean $c_1, \ldots, c_m$ números reales. Supongamos que $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ es la solución del problema

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{s.a.} \quad & g_1(\mathbf{x}) = c_1 \\ & \vdots \\ & g_m(\mathbf{x}) = c_m \end{aligned}$$

y los vectores gradiente de las restriciones g_j evaluados en $\mathbf{x}^*$ son linealmente independientes. Entonces existen números $\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*$ tales que $(\mathbf{x}^*, \lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*)$ es un punto crítico de

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \left[g_j(\mathbf{x}) - c_j\right]$$

2. Condiciones de suficiencia local (2 variables y 1 restricción)

Sea $\tilde{H}$ la matriz

$$\tilde{H}(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & g_x(x,y) & g_y(x,y) \\ g_x(x,y) & f_{xx}(x,y) - \lambda g_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) - \lambda g_{xy}(x,y) \\ g_y(x,y) & f_{xy}(x,y) - \lambda g_{xy}(x,y) & f_{yy}(x,y) - \lambda g_{yy}(x,y) \end{pmatrix}$$

Sean f y g funciones bivariadas con derivadas parciales continuas y $c \in \mathbb{R}$. Consideremos los problemas

$$\begin{aligned} \max_{x,y} \quad & f(x,y) \\ \text{s.a.} \quad & g(x,y) = c \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} \min_{x,y} \quad & f(x,y) \\ \text{s.a.} \quad & g(x,y) = c \end{aligned}$$

con candidato (x^*, y^*, λ^*) que verifica el teorema de Lagrange. Considere $\tilde{H}^* = \tilde{H}(x^*, y^*, \lambda^*)$ la matriz Hessiana definida antes. Llame D al determinante de $\tilde{H}^*$. Entonces

- Si $D > 0$, (x^*, y^*) es un máximo local de f entre los puntos que cumplen la restricción.
- Si $D < 0$, (x^*, y^*) es un mínimo local de f entre los puntos que cumplen la restricción.

3. Condiciones de suficiencia local (el caso general)

Sea $\tilde{H}$ la matriz

$$\tilde{H}(\mathbf{x}, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \nabla g_1(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \nabla g_m(\mathbf{x}) \\ & & & \\ \nabla g_1^T(\mathbf{x}) & \cdots & \nabla g_m^T(\mathbf{x}) & H_{\mathcal{L}}(\mathbf{x}, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) \end{pmatrix}$$

Sean $f, g_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con $j = 1, \ldots, m$ funciones con derivadas parciales continuas y sean $c_1, \ldots, c_m$ números reales. Consideremos el problema

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{s.a.} \quad & g_j(\mathbf{x}) = c_j \quad \forall\, j \in \{1, \ldots, m\} \end{aligned}$$

con candidato $(\mathbf{x}^*, \lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*)$. Considere $\tilde{H}^*$ la matriz $\tilde{H}$ evaluada en el candidato. Entonces,

- Si para $\tilde{H}^*$ los últimos $n - m$ menores principales dominantes alternan signo, y el último tiene el signo de $(-1)^n$, $\mathbf{x}^*$ es máximo local entre los puntos que cumplen las restricciones.
- Si para $\tilde{H}^*$ los últimos $n - m$ menores principales dominantes tienen el mismo signo de $(-1)^m$, $\mathbf{x}^*$ es un mínimo local entre los puntos que cumplen las restricciones.

4. Condiciones de suficiencia global

Sean $f, g_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con $j = 1, \ldots, m$ funciones con derivadas parciales continuas y sean $c_1, \ldots, c_m$ números reales. Consideremos los problemas

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{s.a.} \quad & g_j(\mathbf{x}) = c_j \quad \forall\, j \in \{1, \ldots, m\} \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} \min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{s.a.} \quad & g_j(\mathbf{x}) = c_j \quad \forall\, j \in \{1, \ldots, m\} \end{aligned}$$

con candidato $(\mathbf{x}^*, \lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*)$. Definamos la función lagrangiana con λ_j^* fijado para todo j

$$\tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* \left[g_j(\mathbf{x}) - c_j \right]$$

Entonces:

- Si $\tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{x})$ es cóncava, $\mathbf{x}^*$ es solución del problema de maximización.
- Si $\tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{x})$ es convexa, $\mathbf{x}^*$ es solución del problema de minimización.

5. Interpretación económica de los multiplicadores

Sean $f, g_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con $j = 1, \ldots, m$ funciones y sean $c_1, \ldots, c_m$ números reales. Consideremos el problema

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{s.a.} \quad & g_j(\mathbf{x}) = c_j \quad \forall\, j \in \{1, \ldots, m\} \end{aligned}$$

con solución $(\mathbf{x}^*, \lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*)$ que dependen de $c_1, \ldots, c_m$ (es decir, son funciones de m variables). Si $\mathbf{x}^*$ y λ_j^* son funciones con derivada continua para cada j y además se cumple la condición de calificación de restricciones en la solución óptima. Entonces

$$\lambda_j^*(c_1, \ldots, c_m) = \frac{\partial}{\partial c_j} f(\mathbf{x}^*(c_1, \ldots, c_m))$$

6. Teorema de la envolvente

Sean $f, h_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con $j = 1, \ldots, m$ funciones que dependen de un vector de parámetros $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$. Sean $\mathbf{x}^*(\mathbf{a})$, $\lambda_j^*(\mathbf{a})$ (con $j = 1, \ldots, m$) la solución óptima del problema

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \quad & f(\mathbf{x}; \mathbf{a}) \\ \text{s.a.} \quad & h_j(\mathbf{x}; \mathbf{a}) = 0 \quad \forall\, j \in \{1, \ldots, m\} \end{aligned}$$

que tiene lagrangiano $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda_1, \ldots, \lambda_m; \mathbf{a})$ y función de valor $f^*(\mathbf{a})$. Supongamos que $\mathbf{x}^*$ y λ_j^* son funciones con derivadas parciales continuas con respecto a a_i para todo j y que se satisface la condición de calificación de restricciones en la solución óptima. Entonces

$$\frac{\partial}{\partial a_i} f^*(\mathbf{a}) = \frac{\partial}{\partial a_i} \mathcal{L}(\mathbf{x}^*(\mathbf{a}), \lambda_1^*(\mathbf{a}), \ldots, \lambda_m^*(\mathbf{a}); \mathbf{a})$$

Optimización con restricciones de desigualdad

En esta parte, las letras en negrita corresponden a vectores. Por ejemplo, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ es un vector en $\mathbb{R}^n$.

1. Condiciones necesarias de KKT

Sean $f, g_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con $j = 1, \ldots, m$ funciones con derivadas parciales continuas y sean $c_1, \ldots, c_m$ números reales. Supongamos que $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ es la solución del problema

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{s.a.} \quad & g_1(\mathbf{x}) \leq c_1 \\ & \vdots \\ & g_m(\mathbf{x}) \leq c_m \end{aligned}$$

Defina $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ como antes. Entonces, existen números $\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*$ tales que:

1. $\mathcal{L}_{x_i}(\mathbf{x}^*, \lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*) = 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.
2. $\lambda_j^* \geq 0$ y $\lambda_j^* \big[g_j(\mathbf{x}^* - c_j)\big] = 0$ para todo $j \in \{1, \ldots, m\}$.
3. $g_j(\mathbf{x}^*) \leq c_j$ para todo $j \in \{1, \ldots, m\}$.

2. Condiciones de suficiencia global

Sean $f, g_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con $j = 1, \ldots, m$ funciones con derivadas parciales continuas y sean $c_1, \ldots, c_m$ números reales. Consideremos el problema

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{s.a.} \quad & g_j(\mathbf{x}) \leq c_j \quad \forall\, j \in \{1, \ldots, m\} \end{aligned}$$

con candidato $(\mathbf{x}^*, \lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*)$que cumple las condiciones de KKT. Definimos como antes el lagrangiano con λ_j^* fijado

$$\tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* \big[g_j(\mathbf{x}) - c_j\big]$$

Entonces, si $\tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{x})$ es cóncava, $\mathbf{x}^*$ es solución del problema.

3. Condiciones de suficiencia global con cuasiconcavidad/cuasiconvexidad

Sean $f, g_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con $j = 1, \dots, m$ funciones con derivadas parciales continuas y sean $c_1, \dots, c_m$ números reales. Supongamos que el punto $(\mathbf{x}^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*)$ satisface las condiciones de KKT para el problema

$$\begin{aligned} \max_{x,y} \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{s.a.} \quad & g_j(\mathbf{x}) \leq c_j \quad \forall\, j \in \{1, \dots, m\} \end{aligned}$$

Entonces $\mathbf{x}^*$ resuelve el problema si

- $\mathbf{x}^*$ no es un punto crítico de f.
- f es cuasicóncava y $\lambda_j^* g_j$ es cuasiconvexa para todo j.

4. Condiciones de suficiencia local (2 variables y 1 restricción activa)

Sea $\tilde{H}$ la matriz

$$\tilde{H}(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & g_x(x,y) & g_y(x,y) \\ g_x(x,y) & f_{xx}(x,y) - \lambda g_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) - \lambda g_{xy}(x,y) \\ g_y(x,y) & f_{xy}(x,y) - \lambda g_{xy}(x,y) & f_{yy}(x,y) - \lambda g_{yy}(x,y) \end{pmatrix}$$

Sean f y g funciones bivariadas con derivadas parciales continuas y $c \in \mathbb{R}$. Consideremos el problema

$$\begin{aligned} \max_{x,y} \quad & f(x,y) \\ \text{s.a.} \quad & g(x,y) \leq c \end{aligned}$$

con candidato (x^*, y^*, λ^*) que verifica las condiciones de KKT. Considere $\tilde{H}^* = \tilde{H}(x^*, y^*, \lambda^*)$ la matriz Hessiana definida antes, evaluada en el candidato. Llame D al determinante de $\tilde{H}^*$. Entonces

- Si $D > 0$, (x^*, y^*) es un máximo local de f entre los puntos que cumplen la restricción.
- Si $D < 0$, (x^*, y^*) es un mínimo local de f entre los puntos que cumplen la restricción.

5. Condiciones de suficiencia local (el caso general)

Suponga que para un candidato a solución $(x^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*)$ del problema

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{s.a.} \quad & g_j(\mathbf{x}) \leq c_j \quad \forall\, j \in \{1, \dots, m\} \end{aligned}$$

las primeras k restricciones están activas. Con esto se define $\tilde{H}$ la matriz

$$\tilde{H}(\mathbf{x}, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = \left(\begin{array}{cccc} 0 & \cdots & 0 & \nabla g_1(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \nabla g_k(\mathbf{x}) \\ & & & \\ \nabla g_1^T(\mathbf{x}) & \cdots & \nabla g_k^T(\mathbf{x}) & H_{\mathcal{L}}(\mathbf{x}, \lambda_1, \dots, \lambda_m) \end{array} \right)$$

Note que si $k = 0$, entonces no se pone ningún gradiente y $\tilde{H}$ es la matriz Hessiana de f. Considere $\tilde{H}^*$ la matriz $\tilde{H}$ evaluada en el candidato. Entonces,

- Si para $\tilde{H}^*$ los últimos $n - k$ menores principales dominantes alternan signo, y el último tiene el signo de $(-1)^n$, $\mathbf{x}^*$ es máximo local entre los puntos que cumplen las restricciones.
- Si para $\tilde{H}^*$ los últimos $n - k$ menores principales dominantes tienen el mismo signo de $(-1)^k$, $\mathbf{x}^*$ es un mínimo local entre los puntos que cumplen las restricciones.

6. Interpretación económica de los multiplicadores

Sean $f, g_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con $j = 1, \ldots, m$ funciones y sean $c_1, \ldots, c_m$ números reales. Consideremos el problema

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{s.a.} \quad & g_j(\mathbf{x}) \leq c_j \quad \forall\, j \in \{1, \ldots, m\} \end{aligned}$$

con solución $(\mathbf{x}^*, \lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*)$ que dependen de $c_1, \ldots, c_m$ (es decir, son funciones de m variables). Si $\mathbf{x}^*$ y λ_j^* son funciones con derivada continua para cada j y además se cumple la condición de calificación de restricciones en la solución óptima. Entonces

$$\lambda_j^*(c_1, \ldots, c_m) = \frac{\partial}{\partial c_j} f(\mathbf{x}^*(c_1, \ldots, c_m))$$

7. Teorema de la envolvente

Sean $f, h_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con $j = 1, \ldots, m$ funciones que dependen de un vector de parámetros $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$. Sean $\mathbf{x}^*(\mathbf{a})$, $\lambda_j^*(\mathbf{a})$ (con $j = 1, \ldots, m$) la solución óptima del problema

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \quad & f(\mathbf{x}; \mathbf{a}) \\ \text{s.a.} \quad & h_j(\mathbf{x}; \mathbf{a}) \leq 0 \quad \forall\, j \in \{1, \ldots, m\} \end{aligned}$$

que tiene lagrangiano $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda_1, \ldots, \lambda_m; \mathbf{a})$ y función de valor $f^*(\mathbf{a})$. Supongamos que $\mathbf{x}^*$ y λ_j^* son funciones con derivadas parciales continuas con respecto a a_i para todo j y que se satisface la condición de calificación de restricciones en la solución óptima. Entonces

$$\frac{\partial}{\partial a_i} f^*(\mathbf{a}) = \frac{\partial}{\partial a_i} \mathcal{L}(\mathbf{x}^*(\mathbf{a}), \lambda_1^*(\mathbf{a}), \ldots, \lambda_m^*(\mathbf{a}); \mathbf{a})$$

Ecuaciones en diferencias (EeD)

1. Teorema de existencia y unicidad

Considere el problema de encontrar una solución a la siguiente EeD de orden k

$$x_{t+k} = f(t, x_{t+k-1}, \ldots, x_t)$$

que además verifique $x_0 = c_0$, $x_1 = c_1$, $\ldots$, $x_{k-1} = c_{k-1}$. Este problema tiene una única solución.

2. Combinaciones lineales de soluciones

Considere la EeD lineal homogénea

$$x_{t+k} + a_{k-1}(t)x_{t+k-1} + \cdots + a_0(t)x_t = 0, \qquad t \in \mathbb{N}_0, \quad t \geq t_0$$

Sea x_t una solución y sea $c_1 \in \mathbb{R}$. Entonces el sistema dinámico $c_1 x_t$ también es solución.

Además, si y_t es otra solución y $c_2 \in \mathbb{R}$, entonces el sistema dinámico $c_1 x_t + c_2 y_t$ también es solución.

3. Solución general a la ecuación en diferencias lineal no homogénea

Considere la EeD lineal no homogénea

$$x_{t+k} + a_{k-1}(t)x_{t+k-1} + \cdots + a_0(t)x_t = g(t), \qquad t \in \mathbb{N}_0, \quad t \geq t_0$$

y sea y_t una solución particular. Sea x_t una solución a la ecuación homogénea asociada,

$$x_{t+k} + a_{k-1}(t)x_{t+k-1} + \cdots + a_0(t)x_t = 0, \qquad t \in \mathbb{N}_0, \quad t \geq t_0$$

Entonces toda solución para la EeD lineal no homogénea es de la forma $cx_t + y_t$ con $c \in \mathbb{R}$.

4. EeDs lineales de primer orden con coeficientes constantes

Considere la EeD lineal homogénea

$$x_{t+1} = ax_t, \qquad t \geq 0$$

donde $a \in \mathbb{R}$. Entonces toda solución a esta ecuación es de la forma ca^t, con $c \in \mathbb{R}$.

Considere la EeD lineal no homogénea

$$x_{t+1} = ax_t + b, \qquad t \geq 0$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces son soluciones particulares:

- $\frac{a^t-1}{a-1}b$, si $a \neq 1$.
- bt, si $a = 1$.

5. EeDs lineales de segundo orden con coeficientes constantes

Considere la EeD lineal homogénea

$$x_{t+2} + a_1 x_{t+1} + a_0 x_t = 0, \qquad t \geq 0$$

donde $a_1, a_0, \in \mathbb{R}$. Sean $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ las dos soluciones de la ecuación característica

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$$

Entonces la solución general de EeD lineal homogénea es:

1. $c_1\lambda_1^t + c_2\lambda_2^t$ si $\lambda_1 \neq \lambda_2$.
2. $c_1\lambda_1^t + c_2\lambda_2^t t$ si $\lambda_1 = \lambda_2$.

Además, c_1, c_2 son tales que la solución es un número real para todo t.

6. Método de los coeficientes indeterminados para EeDs lineales

Considere las EeDs lineales no homogéneas

$$x_{t+1} = ax_t + b_t, \qquad t \geq 0$$
$$x_{t+2} + a_1 x_{t+1} + a_0 x_t = b_t$$

Entonces, la forma de la solución particular puede obtenerse de la siguiente tabla:

b_t	Candidato
ba^t	Aa^t
$\text{sen}(bt)$ ó $\cos(bt)$	$A\,\text{sen}(bt) + B\cos(bt)$
bt^n	$A_0 + A_1 t + \cdots + A_n t^n$

Y si b_t es combinación de algunas de las opciones, el candidato también lo es.

7. Puntos fijos y soluciones a EeDs lineales

Suponga que x_t es solución a alguna de las siguientes EeDs lineales

$$x_{t+1} = ax_t + b \tag{1}$$
$$x_{t+2} + a_1 x_{t+1} + a_0 x_t = b \tag{2}$$

y suponga que x^* es un punto fijo de x_t. Entonces,

- Si x_t resuelve (1), $x_t = a^t(x_0 - x^*) + x^*$.
- Si x_t resuelve (2), entonces $x_t = \tilde{x}_t + x^*$, donde $\tilde{x}_t$ es solución general a la versión homogénea de (2).

8. Estabilidad de puntos fijos

Sea f una función continuamente diferenciable y sea x_t un sistema dinámico que satisface la siguiente EeD de primer orden

$$x_{t+1} = f(x_t)$$

Sea x^* un punto fijo de x_t. Entonces

- Si $|f'(x^*)| < 1$, entonces x^* es localmente estable.
- Si $|f'(x^*)| > 1$, entonces x^* no es localmente estable (ni globalmente estable).