

MAT1630 – Cálculo III
Solución Interrogación N° 1

1. Considere el campo vectorial

$$F(x, y) = \left(\frac{y}{(x-1)^2 + y^2}, \frac{1-x}{(x-1)^2 + y^2} \right)$$

a) Calcular

$$\int_{C_1} F \cdot dr$$

donde C_1 es la curva $r(t) = (\cos t + 1, \sin t)$ con $0 \leq t \leq 2\pi$

Solución:

C_1 es

$$r(t) = (\cos t + 1, \sin t)$$

con $0 \leq t \leq 2\pi$. Luego $r'(t) = (-\sin t, \cos t)$ y $F(r(t)) = (\sin t, -\cos t)$

Se tiene entonces que

$$\int_{C_1} F \cdot dr = \int_0^{2\pi} F(r(t)) \cdot r'(t) dt = \int_0^{2\pi} -1 dt = -2\pi.$$

b) Calcular

$$\int_{C_2} F \cdot dr$$

donde $C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 16x^2 + y^2 = 4\}$

Solución:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{(x-1)^2 - y^2}{[(x-1)^2 + y^2]^2}$$

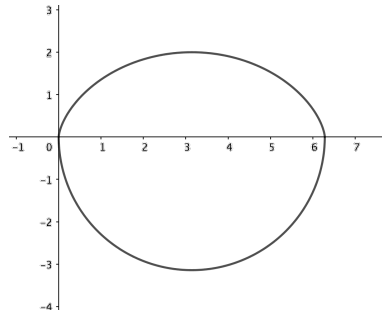
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{(x-1)^2 - y^2}{[(x-1)^2 + y^2]^2}$$

Como $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ y C_2 es una curva cerrada contenida en una región simplemente conexa, se concluye que F es conservativo en esa región y por lo tanto $\int_{C_2} F \cdot dr = 0$.

2. a) Encuentre el área encerrada por un arco de cicloide, parametrizado como

$$r(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t))$$

con $t \in [0, 2\pi]$ y la mitad inferior de la circunferencia de radio π y centrada en $(\pi, 0)$.



Solución:

Si tomamos el campo vectorial $F = (-y, 0)$, entonces el área pedida queda determinada por

$$\int_{-C_1} F \cdot dr + \int_{C_2} F \cdot dr$$

Donde C_1 es el arco de cicloide dada (parametrización negativa), y C_2 mitad inferior de la circunferencia de radio π y centrada en $(\pi, 0)$, $s(t) = (\pi \cos t + \pi, \pi \sin t)$ (parametrización positiva).

$$-\int_{C_1} F \cdot dr = -\int_0^{2\pi} (-1 + \cos t, 0) \cdot (1 - \cos t, \sin t) dt = \int_0^{2\pi} 1 - 2 \cos t + \cos^2 t dt = 3\pi$$

$$\int_{C_2} F \cdot dr = \int_{\pi}^{2\pi} (-\pi \sin t, 0) \cdot (-\pi \sin t, \pi \cos t) dt = \pi^2 \int_{\pi}^{2\pi} \sin^2 t dt = \frac{\pi^3}{2}$$

Por lo que el área es $3\pi + \frac{\pi^2}{2}$.

Nota: Se podría haber calculado el área bajo la cicloide y sobre el eje x y luego haberle sumado el área de la semicircunferencia. Es decir

$$- \int_{C_1} F \cdot dr + \int_{C_3} F \cdot dr + \frac{\pi^3}{2}$$

con C_3 el trazo que va desde $(0, 0)$ a $(2\pi, 0)$.

- b) Entregue una parametrización de la superficie que se genera al rotar un arco de cicloide, $r(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t), 0)$ con $t \in [0, 2\pi]$, en torno al eje x .

Solución:

$$x(t) = t - \sin(t)$$

$$y(t) = (1 - \cos(t)) \cos \theta$$

$$z(t) = (1 - \cos(t)) \sin \theta$$

con $0 \leq t \leq 2\pi$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$

3. La base de una cerca está dada por las ecuaciones paramétricas $x = t^2$ y $y = 2t$ con $0 \leq t \leq 1$ metros. La altura de la cerca en la posición (x, y) está dada por la función $h(x, y) = 100xy$ metros.

- a) Suponga que 1 litro de pintura cubre 100 m^2 . Demuestre que la cantidad de litros de pintura que se necesita para pintar la cerca por ambos lados es

$$4 \int_0^1 t^3 \sqrt{4t^2 + 4} dt$$

Solución:

Hay que calcular el área A de la acerca y luego multiplicarlo por dos (ambos lados). La cantidad de pintura requerida será entonces $\frac{2 \cdot A}{100}$ litros.

Se tiene que

$$A = \int_C h(x, y) ds$$

con C la curva $r(t) = (t^2, 2t)$, $0 \leq t \leq 1$

$$\text{Luego } A = \int_C h(x, y) ds = \int_0^1 h(r(t)) \|r'(t)\| dt = 200 \int_0^1 t^3 \sqrt{4t^2 + 4} dt.$$

y por lo tanto se necesitan $4 \int_0^1 t^3 \sqrt{4t^2 + 4} dt$ litros de pintura.

- b) Determine la ecuación del plano tangente a la superficie $r(x, y) = (x, y, 100xy)$ en el punto $(1, 2, 200)$.

Solución:

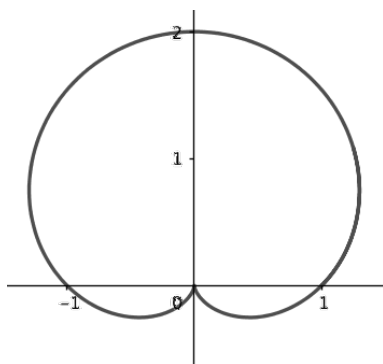
Se tiene que la superficie es $r(x, y) = (x, y, 100xy)$. Por lo $r_x = (1, 0, 100y)$ y $r_y = (0, 1, 100x)$.

Un vector normal al plano tangente en $(1, 2, 200)$ es $r_x(1, 2, 200) \times r_y(1, 2, 200) = (-200, -100, 1)$

Por lo que la ecuación del plano tangente es

$$-200(x - 1) - 100(y - 2) + z - 1 = 0$$

4. El área de la región encerrada por la parte superior de la Cardioides que muestra el dibujo y el eje x es $\frac{3\pi}{2} + 4$. Calcule el trabajo que realiza el campo de fuerza $F = (1 - \frac{y}{x^2 + y^2}, x + \frac{x}{x^2 + y^2})$ sobre una partícula que se mueve a lo largo de la parte superior de la Cardioides desde $(1, 0)$ hasta $(-1, 0)$.



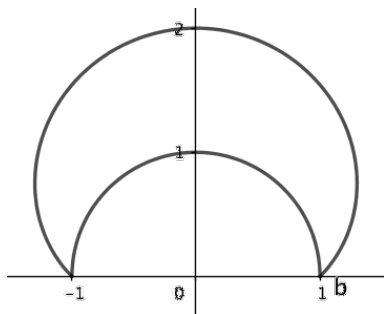
Solución:

Se pide $\int_C F \cdot dr$ con C la parte superior de la Cardioides de $(1, 0)$ a $(-1, 0)$.

Notemos que $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 + \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 1$. Luego es conveniente usar el teorema de Green. Para esto necesitamos cerrar la curva adecuadamente.

Lo natural sería tomar el trazo de recta que va desde $(1, 0)$ a $(-1, 0)$, pero cuidado!, que el campo no está definido en $(0, 0)$.

Por lo que se tomará la semicircunferencia, C' , centrada en cero de radio 1, $r(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$



Por lo que

$$\int_C F \cdot dr + \int_{-C'} F \cdot dr = \int \int_D dA = A$$

De donde A es el área encerrada por las curvas, es decir $A = \frac{3\pi}{2} + 4 - \frac{\pi}{2} = \pi + 4$.

$$\int_{-C'} F \cdot dr = - \int_0^\pi -\sin t + \sin^2 t + 2 \cos^2 t dt = -3\pi$$

Finalmente se tiene que

$$\int_C F \cdot dr = A - \int_{C'} F \cdot dr = 4\pi + 4.$$