Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas
ICS2123 – Modelos Estocásticos (Sección 3)
Profesor Álvaro Lorca
Segundo Semestre 2017

Interrogación 2

Instrucciones

- Poner nombre en cada hoja.
- Resolver cada problema en un conjunto distinto de hojas.
- No se permite calculadora ni apuntes de ningun tipo.
- Justifique adecuadamente todas sus respuestas.
- No se puede hacer preguntas. Si hay un error, explique por qué hay un error. Si hay algo ambiguo, explique por qué hay algo ambiguo y determine un supuesto razonable para poder responder.
- Tiempo: dos horas.

Problema 1 (20 puntos)

Considere una Cadena de Markov en Tiempo Discreto con espacio de estados $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ y la siguiente matriz de probabilidades de transición:

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccccccccc}
0 & 0.2 & 0 & 0.5 & 0 & 0.3 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0.6 \\
0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \\
0.7 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 \\
0 & 0.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.9 \\
0 & 0 & 0.2 & 0 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
\end{array}$$

1. (7 puntos) Determine las clases de estados y clasifique los estados en transientes, recurrentes positivos, o nulos, y determine si son aperiódicos o periódicos, y el valor del período si es que corresponde.
2. (2 puntos) Determine $\mathbb{P}(T(7,2) = k)$ para cualquier $k = 1, 2, 3, \ldots$
3. (5 puntos) Asumiendo que el estado inicial es el estado 1, calcule la probabilidad de eventualmente visitar el estado 9.
4. (3 puntos) Calcule $F_3(3,3)$ y $P_{3,3}^{(3)}$.
5. (3 puntos) Suponiendo ahora que $f^{(0)} = [0, 0, 0, 0, 0, 0.1, 0, 0.9, 0]^\top$, calcule $\mathbb{P}(X_2 = 9, X_3 = 3)$.

Problema 2 (20 puntos)

En el lago Vichuquén se hacen paseos individuales en bote. Los botes están en dos puntos del lago, alejados entre sí: el Muelle y la Marina. Cuando una persona desea hacer un paseo en bote, elegirá uno de estos dos puntos de embarque de forma equiprobable, y la elección de cada persona es independiente de las demás. Asimismo, cuando la persona llega a uno de los puntos de embarque, escoge de forma equiprobable uno de los botes que están amarrados ahí. Si no hubiera botes amarrados en el punto de su elección, la persona se enoja y se vuelve a su hogar a pie, considerándose como demanda perdida. Al regresar de un paseo, la persona escogerá nuevamente entre la Marina y el Muelle para su desembarco, de forma equiprobable, dejando el bote amarrado en el lugar donde se realiza el desembarco, listo para que otra persona pueda realizar un nuevo paseo desde ahí. Entre la Marina y el Muelle hay un total de M botes. Suponga que cuando llega una persona a cualquiera de los dos puntos de embarque, ésta es atendida inmediatamente y si puede realizar su paseo lo realiza, luego deja amarrado el bote en alguno de los dos puntos de salida, y solo después de esto llega la siguiente persona a uno de los dos puntos de embarque.

1. (2 puntos) Considere el caso en que $M = 3$. Si al momento en que llega una persona cualquiera, hay 2 botes en el Muelle y 1 bote en la Marina, ¿cuál es la probabilidad de que cuando llegue la próxima persona haya 2 botes en la Marina?
2. (2 puntos) Para el caso en que $M = 3$, describa una Cadena de Markov en Tiempo Discreto que caracterice cómo cambia en el tiempo el número de botes disponibles en cada punto de embarque, cada vez que llega una persona. Para esto, especifique qué significa cada estado, y dibuje un grafo que represente esta Cadena.
3. (7 puntos) Extienda el modelo anterior para el caso de un M cualquiera ($M \in \mathbb{Z}_+$). Para esto, especifique qué significa cada estado y determine la probabilidad de transición P_{ij} para cualquier i, j.
4. (5 puntos) Justifique la existencia de una única distribución estacionaria y encuentre dicha distribución. (Para el modelo con M cualquiera.)
5. (2 puntos) ¿Cuál es el porcentaje de personas que en el largo plazo no logran realizar su paseo (demanda perdida)? (Para el modelo con M cualquiera.)
6. (2 puntos) ¿Cuantos botes debe haber en total entre el Muelle y la Marina para que en el largo plazo al menos un 90% de las personas puedan realizar su paseo?

Problema 3 (20 puntos)

Parte 1 (10 puntos)

Smith está en la carcel y tiene 3 monedas. Él podrá pagar su fianza y salir de la carcel si es que logra tener 8 monedas. Un guardia acepta realizar una serie de apuestas con él. Si Smith apuesta A monedas, gana A monedas con probabilidad 0.4 y pierde A monedas con probabilidad 0.6. En caso de que Smith se quede sin monedas, se tendrá que quedar para siempre en la cárcel. Su única opción para salir de la cárcel es juntar 8 monedas. Calcule la probabilidad de que Smith logre salir de la cárcel bajo cada una de las siguientes estrategias:

1. (5 puntos) Apuesta las monedas de una a la vez (estrategia tímida).
2. (5 puntos) Apuesta, cada vez, la mayor cantidad de monedas que pueda, pero no más de las necesarias para juntar 8 monedas en caso de ganar la apuesta (estrategia atrevida).

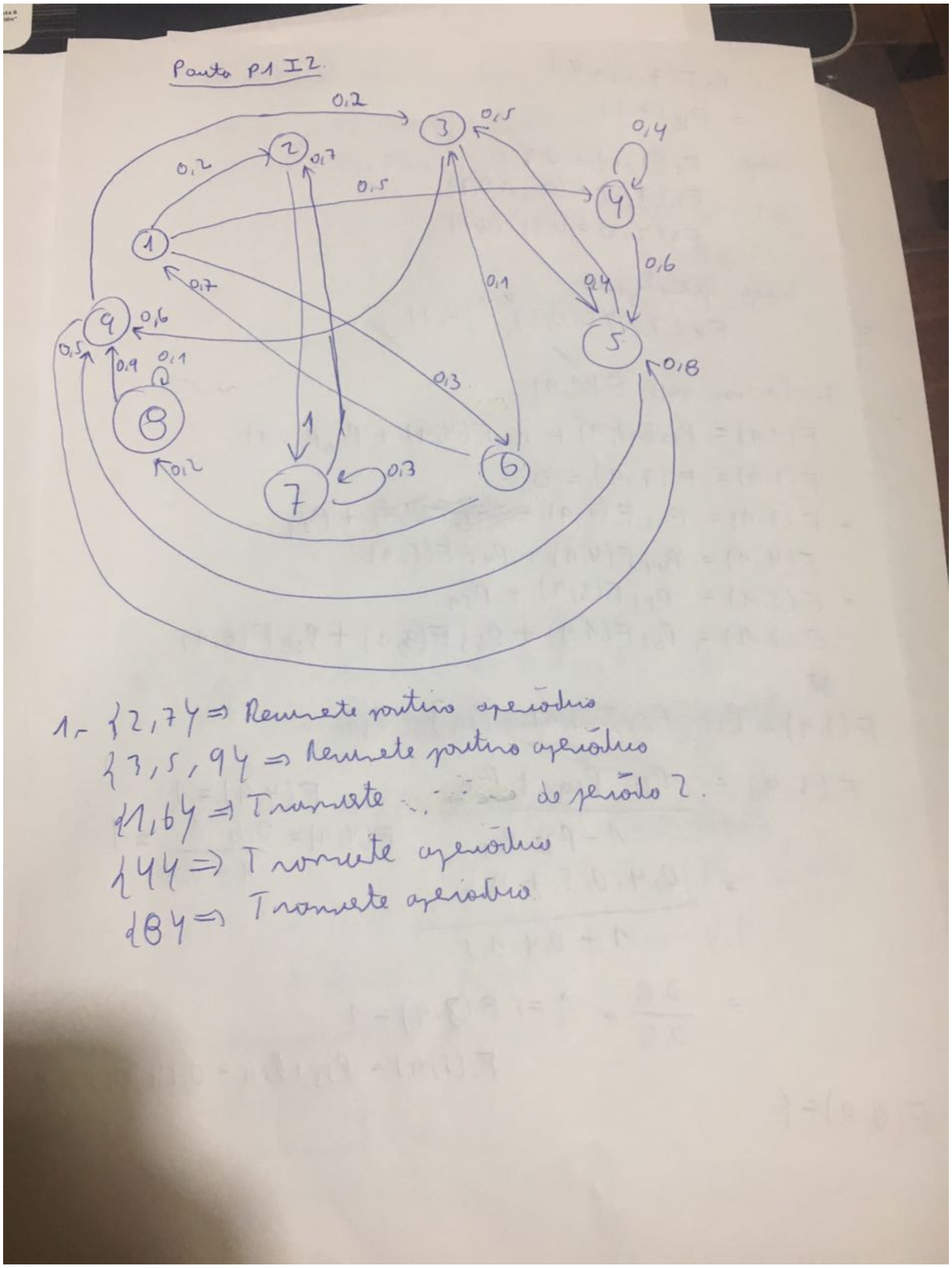
Parte 2 (10 puntos)

Cinco pelotas blancas y cinco pelotas negras se distribuyen en dos urnas de tal forma que cada urna contiene exactamente cinco pelotas. En cada etapa se extrae una pelota aleatoriamente de cada urna y se intercambian de lugar.

1. (2 puntos) Sea X_n el número de pelotas blancas en la urna izquierda en la etapa n. ¿Puede ser este proceso modelado como una Cadena de Markov en Tiempo Discreto con X_n como única variable de estado?
2. (5 puntos) Encuentre la matriz de probabilidades de transición en una etapa para X_n.
3. (3 puntos) Justifique por qué el modelo desarrollado tiene una única distribución estacionaria de probabilidades, y escriba explícitamente un sistema de ecuaciones cuya solución entregue esta distribución (no es necesario resolverlo).

Solución

P1

1. 

2. Analizando el grafo vemos que

$$P(T(7,2)) = K) = F_K(7,2)$$

Luego,

$$F_1(7,2) = 0.7$$
$$F_2(7,2) = 0.3 * 0.7$$

$$F_3(7,2) = 0.3^2 * 0.7$$

Finalmente, se tiene lo siguiente:

$$F_K(7,2) = 0.3^{K-1} * 0.7$$

3. Se pide $F(1,9)$

$$\begin{gathered} F(1,9) = P_{1,2}F(2,9) + P_{1,4}F(4,9) + P_{1,6}F(6,9) \\ F(2,9) = 0 \\ F(7,9) = 0 \\ F(3,9) = 1 \\ F(5,9) = 1 \\ F(4,9) = P_{4,4}F(4,9) + P_{4,5}F(5,9) = 1 \\ F(8,9) = P_{8,8}F(8,9) + P_{8,9} = 1 \\ F(6,9) = P_{6,3}F(3,9) + P_{6,1}F(1,9) + P_{6,8}F(8,9) \end{gathered}$$

Luego,

$$\begin{gathered} F(1,9) = P_{1,4} + P_{1,6}(P_{6,3}F(3,9) + P_{6,1}F(1,9) + P_{6,8}F(8,9)) \\ F(1,9) = P_{1,4} + P_{1,6}(P_{6,3} + P_{6,1}F(1,9) + P_{6,8}) \\ F(1,9) = \frac{P_{1,4} + P_{1,6} * P_{6,3} + P_{1,6} * P_{6,8}}{1 - P_{1,6} * P_{6,1}} \\ F(1,9) = 0,7468 \end{gathered}$$

4.

$$\begin{gathered} F_3(3,3) = P_{3,5}F_2(5,3) + P_{3,9}F_2(9,3) \\ F_3(3,3) = P_{3,5}P_{5,9}P_{9,3} + P_{3,9}P_{9,5}P_{5,3} \\ F_3(3,3) = 0.28 \end{gathered}$$

Notemos que en este caso, $F_3(3,3) = P^(3)_{3,3}$, luego:

$$P^(3)_{3,3} = 0.28$$

5. Calculamos la probabilidad pedida como sigue:

$$\begin{gathered} = \sum_{i=1}^{9}\sum_{j=1}^{9} P(X_3 = 3|X_2 = 9)P(X_2 = 9|X_1 = i)P(X_1 = i|X_0 = j)f_j^0 \\ = \sum_{i=1}^{9}\sum_{j=1}^{9} P_{93}P_{\mathrm{i}9}P_{\mathrm{ji}}f_j^0 \\ = P_{9,3}P_{3,9}P_{6,3}f_6^0 + P_{9,3}P_{8,9}P_{6,8}f_6^0 + P_{9,3}P_{8,9}P_{8,8}f_8^0 \\ = 0,021 \end{gathered}$$

P2

1. Definimos los estados bidimiensionales (Ma,Mu), donde:
   Ma: Botes amarrados en la Marina

Mu: Botes amarrados en el Muelle

Si M=3, los estados son: {(3,0); (2,1); (1,2); (0,3)}

Nos preguntan entonces cuál es la probabilidad de pasar de (1,2) a (2,1). La única forma de que esto ocurra es que el bote salga del Muelle y vuelva a la Marina. Queda entonces:

$$P_{(1,2)(2,1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

2. Los estados posibles son entonces: {(3,0); (2,1); (1,2); (0,3)}
La matriz de transición queda:

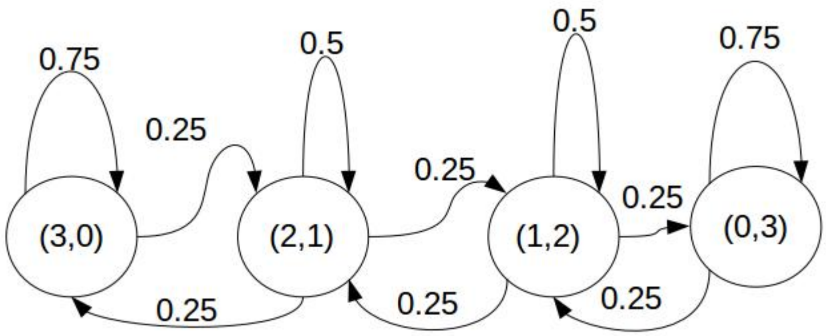
$$P_{ij} = \begin{array}{c} \\ (3,0) \\ (2,1) \\ (1,2) \\ (0,3) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} (3,0) & (2,1) & (1,2) & (0,3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \end{array}$$

En donde se cumple:

$$P_{ij} \geq 0 \qquad \forall i, j$$

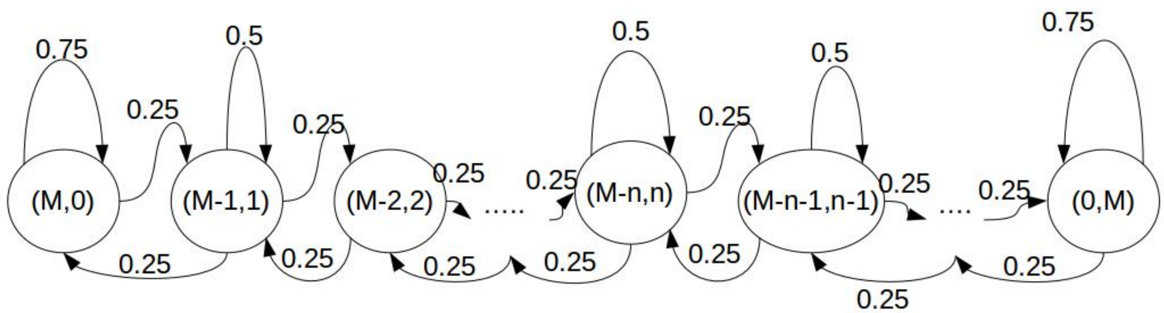
$$\sum_{j=0}^{3} P_{ij} = 1 \qquad \forall i$$

El grafo:



[h!]

3. El grafo quedará así



La matriz de transición es la siguiente:

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccccc} (M,0) & (M-1,1) & ... & ... & (M-n+1,n-1) & (M-n,n) & (M-n-1,n+1) & .. & (0,M) \end{array} \\
\begin{array}{c} (M,0) \\ (M-1,1) \\ ... \\ ... \\ (M-n+1,n-1) \\ (M-n,n) \\ (M-n-1,n+1) \\ ... \\ (0,M) \end{array} &
\begin{pmatrix}
\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & .. & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 \\
\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & .. & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 \\
... & ... & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\
... & ... & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\
0 & 0 & .. & .. & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & .. & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & .. & 0 \\
0 & 0 & .. & .. & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & .. & 0 \\
... & ... & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\
0 & 0 & .. & .. & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4}
\end{pmatrix}
\end{array}$$

En resumen,

$$P_{(M,0)(M,0)} = \frac{3}{4}, \quad P_{(M,0)(M-1,1)} = \frac{1}{4}$$

$$P_{(M-n,n)(M-n+1,n-1)} = \frac{1}{4}, \quad P_{(M-n,n)(M-n,n)} = \frac{1}{2}, \quad P_{(M-n,n)(M-n-1,n+1)} = \frac{1}{4} \quad \forall n \in \{1, ..., M-1\}$$

$$P_{(0,M)(0,M)} = \frac{3}{4}, \quad P_{(0,M)(1,M-1)} = \frac{1}{4}$$

4. Hay un número finito de estados (exactamente M+1 estados) y todos pertenecen a la misma clase que es aperiódica, por lo que existe distribución estacionaria de probabilidades. Se cumplirá entonces que:

$$\Pi^T = \Pi^T P$$
$$\sum_{i=0}^{M+1} \Pi_i = 1$$
$$\Pi_i \geq 0$$

Se cumplirá entonces que:

$$\Pi_{(M,0)} = \Pi_{(M,0)} \cdot \frac{3}{4} + \Pi_{(M-1,1)} \cdot \frac{1}{4}$$
$$\Pi_{(M-1,1)} = \Pi_{(M,0)} \cdot \frac{1}{4} + \Pi_{(M-1,1)} \cdot \frac{1}{2} + \Pi_{(M-2,2)} \cdot \frac{1}{4}$$
$$...$$
$$\Pi_{(M-n,n)} = \Pi_{(M-(n-1),n-1)} \cdot \frac{1}{4} + \Pi_{(M-n,n)} \cdot \frac{1}{2} + \Pi_{(M-(n+1),n+1)} \cdot \frac{1}{4}, \quad \forall n \in \{1, 2, ..., M-1\}$$
$$...$$
$$\Pi_{(0,M)} = \Pi_{(1,M-1)} \cdot \frac{1}{4} + \Pi_{(0,M)} \cdot \frac{3}{4}$$

De donde obtenemos que:

$$\Pi_{(0,M)} \cdot \frac{1}{4} = \Pi_{(1,M-1)} \cdot \frac{1}{4}$$

Lo que generalizando queda en:

$$\Pi_{(M-n,n)} = \Pi_{(M-(n+1),n+1)}$$

Entonces, por inducción todos los estados tendrán la misma probabilidad, obteniéndose que:

$$\Pi_i = \frac{1}{M+1}$$

5. La probabilidad buscada es:

$$P(persona\ no\ realiza\ su\ paseo) = \Pi_{(0,M)} \cdot \frac{1}{2} + \Pi_{(M,0)} \cdot \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{M+1} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{M+1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{M+1}$$

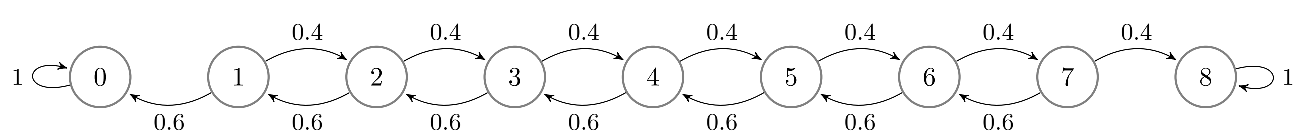
6. Se requiere entonces que:

$$1 - \frac{1}{M+1} = 0,9$$
$$0,1 = \frac{1}{M+1}$$
$$M = 9$$

P3

Parte 1

1. Para esta estrategia, el problema se puede modelar como una Cadena de Markov en Tiempo Discreto, donde X_n representa el número de monedas que tiene Smith en la etapa n. El grafo correspondiente a la evolución de la cantidad de monedas de Smith con la estrategia tímida es el siguiente:

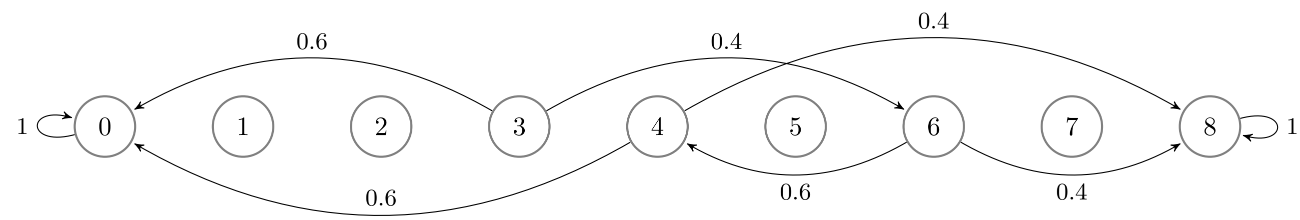


Para salir de la cárcel debe llegar a tener 8 monedas antes de perderlas todas. Así, lo pedido corresponde a $F(3,8)$, y es claro que este término depende de otros F, por ende habrá un sistema de ecuaciones, el sistema es el siguiente:

$$\begin{aligned}
&F(0,8) = 0 \\
&F(1,8) = 0.4 \cdot F(2,8) + 0.6 \cdot F(0,8) \\
&F(2,8) = 0.4 \cdot F(3,8) + 0.6 \cdot F(1,8) \\
&F(3,8) = 0.4 \cdot F(4,8) + 0.6 \cdot F(2,8) \\
&F(4,8) = 0.4 \cdot F(5,8) + 0.6 \cdot F(3,8) \\
&F(5,8) = 0.4 \cdot F(6,8) + 0.6 \cdot F(4,8) \\
&F(6,8) = 0.4 \cdot F(7,8) + 0.6 \cdot F(5,8) \\
&F(7,8) = 0.4 \cdot F(8,8) + 0.6 \cdot F(6,8) \\
&F(8,8) = 1
\end{aligned}$$

Resolviendo este sistema, se obtiene que $F(3,8) = 0.0203$.

2. Para la segunda estrategia, se tiene la misma modelación, pero con distintas transiciones. El grafo que representa la evolución de la cantidad de monedas de Smith para la estrategia atrevida es:



Para salir se necesita lo mismo que en el ejercicio anterior, por lo que el sistema es el siguiente:

$$\begin{aligned}
&F(8,8) = 0 \\
&F(3,8) = 0.4 \cdot F(6,8) + 0.6 \cdot F(0,8) \\
&F(4,8) = 0.4 \cdot F(8,8) + 0.6 \cdot F(0,8) \\
&F(6,8) = 0.4 \cdot F(8,8) + 0.6 \cdot F(4,8) \\
&F(8,8) = 1
\end{aligned}$$

Con lo que, se obtiene que $F(3,8) = 0.256$.

Parte 2

1. Sí se puede modelar como una Cadena de Markov en Tiempo Discreto, ya que cada la cantidad de pelotas blancas en la urna de la izquierda depende únicamente de la cantidad de ellas en el estado anterior. Dicho de otra forma, la probabilidad de transicionar hacia otra configuración depende únicamente del estado actual.

2. Si en un estado cualquiera hay i pelotas blancas, entonces hay $5 - i$ pelotas negras, además en la otra urna hay $5 - i$ pelotas blancas e i negras.

   De este modo, la probabilidad de transicionar a una etapa con una pelota blanca más corresponde a la probabilidad de seleccionar una pelota negra de la urna de la izquierda, y una blanca de la de la derecha, esto es:

$$P_{i,i+1} = \left(\frac{5-i}{5}\right)^2$$

   Así mismo, la probabilidad de pasar a tener una pelota blanca menos corresponde a la probabilidad de seleccionar una pelota blanca de la urna de la izquierda, y una negra de la de la derecha:

$$P_{i,i-1} = \left(\frac{i}{5}\right)^2$$

Finalmente, la probabilidad de mantener la cantidad de pelotas, corresponde a la probabilidad de elegir una pelota negra de ambos lados o una pelota blanca de ambos lados, esto es:

$$P_{i,i} = 2 \cdot \left(\frac{(5-i) \cdot i}{25} \right)$$

Entonces, se tiene la siguiente expresión para las probabilidades de transición:

$$P_{ij} = \begin{cases} \left(\frac{5-i}{5}\right)^2 & i \in \{0, ..., 4\},\ j = i+1 \\ \left(\frac{i}{5}\right)^2 & i \in \{1, ..., 5\},\ j = i-1 \\ 2 \cdot \left(\frac{(5-i) \cdot i}{25}\right) & i \in \{1, ..., 4\},\ j = i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Con esto, la matriz de probabilidades de transición en una etapa P es la siguiente:

$$\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{25} & \frac{8}{25} & \frac{16}{25} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{25} & \frac{12}{25} & \frac{9}{25} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{9}{25} & \frac{12}{25} & \frac{4}{25} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{16}{25} & \frac{8}{25} & \frac{1}{25} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

3. Existe una cantidad finita de estados, que están comunicados en una sola clase, de este modo el modelo desarrollado tiene una única distribución estacionaria de probabilidades ya que corresponde a una única clase recurrente positiva aperiódica.

   El sistema de ecuaciones para obtener la distribución estacionaria π, considerando la matriz P calculada anteriormente, es:

$$\begin{aligned} \pi^\top &= \pi^\top P \\ \sum_i \pi_i &= 1 \\ \pi_i &\geq 0 \quad \forall i \end{aligned}$$