PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
SEGUNDO SEMESTRE DE 2024

MAT1279/MAT1299: Algebra Lineal

Solución Interrogación 2

Justifique claramente sus respuestas.

1. *a)* **(4pts)** Escriba la definición de un conjunto $\{u, v, w\}$ linealmente dependiente. Luego determine los valores de h para que el siguiente conjunto de vectores sea linealmente dependiente.

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ -7 \\ h \end{bmatrix} \right\}.$$

b) **(2pts)** Determine si la matriz siguiente tiene inversa. Si existe, calcúlela.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Solución.

Un conjunto $\{u, v, w\}$ es linealmente dependiente si la ecuación vectorial $x_1u + x_2v + x_3w = 0$ tenga una solución no trivial (o que tenga infinitas soluciones). También se puede decir que un conjunto $\{u, v, w\}$ es linealmente independiente si la ecuación vectorial $x_1u + x_2v + x_3w = 0$ tenga solamente la solución trivial y un conjunto es linealmente dependiente si no es linealmente indepependiente.

Según definición se pide encontrar los valores de h para los cuales la ecuación vectorial

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -5 \\ -7 \\ h \end{bmatrix} = \vec{0} \tag{1}$$

tenga una solución no trivial o que tenga infinitas soluciones. Esto es equivalente a que el sistema de ecuaciones lineales asociado tenga tales soluciones. En otras palabras, por el teorema 4 del libro esto equivale a que la forma escalonada reducida de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & -5 \\ -3 & 4 & -7 \\ 0 & 5 & h \end{bmatrix}$$

sea consistente y además contenga una fila de ceros o que la matriz A no sea invertible.

Manera 1:

La matriz escalonada de A es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & -5 \\ 0 & 22 & -22 \\ 0 & 0 & h+5 \end{bmatrix}$$

Para que el conjunto de vectores sea linealmente dependiente, necesitamos que la tercera fila se convierta en ceros, es decir:

$$h+5=0 \Leftrightarrow h=-5$$

Por lo tanto, el conjunto de vectores es linealmente dependiente si $h=-5$.

Manera 2 Para que A no sea invertible es necesario que su determinante sea igual a cero. Calculamos el determinante de A:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 6 & -5 \\ -3 & 4 & -7 \\ 0 & 5 & h \end{vmatrix}$$

Usamos la expansión por cofactores a lo largo de la primera fila:

$$\det(A) = 1\cdot\begin{vmatrix} 4 & -7 \\ 5 & h \end{vmatrix} - 6\cdot\begin{vmatrix} -3 & -7 \\ 0 & h \end{vmatrix} - 5\cdot\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 1(4h+35)-6(-3h)-5(-15) \Rightarrow \det(A) = 22h+110$$

Para que el conjunto de vectores sea linealmente dependiente, requerimos que $\det(A)=0$:

$$22h+110=0 \Leftrightarrow h=-5$$

Por lo tanto, el conjunto de vectores es linealmente dependiente si $h=-5$.

a) La matriz B es invertible si y solo si su transpuesta

$$B^\top = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

es invertible. Pero las columnas de $B^\top$ son linealmente dependientes (la columna tres es la resta de columna dos menos columna uno). Resulta que $B^\top$ no es invertible y, por lo tanto, B tampoco lo es. También se puede justificarla usando las filas o el determinante o la matriz escalonada $[B|I]$.

Criterios de corrección:

- C1: 1 punto por la definición de un conjunto linealmente dependiente.
- C2: 1 punto por concluir correctamente que el problema es equivalente a verificar que la forma escalonada de la matriz A es consistente y tiene una fila de ceros o A no es invertible.
- C3:1 punto por calcular correctamente la forma escalonada de la matriz o por calcular correctamente el determinante.
- C4: 1 punto por deducir que h debe ser -5.
- C5: 1 punto por decir que B no es invertible.
- C6: 1 punto por justificar correctamente que B no es invertible.

2. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal que mapea $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ en $\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ en $\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$.

   a) **(2pts)** Escriba los vectores canónicos $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ como una combinación lineal de los vectores $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$.

   b) **(3pts)** Determine la matriz estándar de la transformación T.

   c) **(1pt)** Encuentre $T\left(\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}\right)$, donde $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$ es cualquier vector de $\mathbb{R}^2$.

Solución.

a) Para expresar $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ como una combinación lineal de los vectores $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ debemos determinar los parámetros en la siguiente ecuación:

$$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \beta_1 \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \beta_2 \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}.$$

Esto nos da el sistema de ecuaciones:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1, \quad \alpha_1 - \alpha_2 = 0. \text{ Entonces } \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}.$$

$$\beta_1 + \beta_2 = 0, \quad \beta_1 - \beta_2 = 1. \text{ Entonces } \beta_1 = -\beta_2 = \frac{1}{2}.$$

Es decir

$$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}.$$

b) Para determinar la matriz estándar de la transformación T, debemos calcular $T\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)$ y $T\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)$.

Usando la linealidad de T, tenemos:

$$T\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}T\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right) + \frac{1}{2}T\left(\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\1\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}.$$

$$T\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)=\frac{1}{2}T\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)-\frac{1}{2}T\left(\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\0\\-\frac{1}{2}\end{bmatrix}.$$

Entonces la matriz estándar de la transformación T es

$$A=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\1&0\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

c) Para cualquier vector $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ tenemos

$$T\left(\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\1&0\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{a+b}{2}\\a\\\frac{a-b}{2}\end{bmatrix}.$$

Criterios de corrección:

- C1: 1 punto por expresar los vectores canónicos como una combinación lineal de $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$.
- C2: 0.5 punto por encontrar correctamente los coeficientes α_1 y α_2.
- C3: 0.5 punto por encontrar correctamente los coeficientes β_1 y β_2.
- C4: 1 punto por evidenciar el uso de linealidad de T.
- C5: 0.5 punto por determinar $T\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)$.
- C6: 0.5 punto por determinar $T\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)$.
- C7: 1 punto por determinar A.
- C8: 1 punto por calcular $T\left(\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}\right)$ como $A\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$. Si se equivocaron en el cálculo de las columnas de A, pero dejaron evidencia de que A es una matriz de 3×2, obtenida mediante $T\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)$ y $T\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)$, reciben puntaje completo para C8.

3. *a*) **(2pts)** Sean $A=\begin{bmatrix}2&3\\-1&1\end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix}1&9\\-3&k\end{bmatrix}$. Determine el(los) valor(es) de k, si existen, que satisfacen la igualdad $AB=BA$.

b) **(4pts)** Considere la matriz no nula $C = \begin{bmatrix} a & -2a \\ b & -2b \\ c & -2c \end{bmatrix}$. Determine si existe una matriz D, también no nula, tal que CD sea la matriz nula de 3×3. Justifique su respuesta. Si dicha matriz D existe, encuéntrela. (Una matriz nula también se conoce como matriz cero).

Solución.

a) Calculamos

$$AB = \begin{bmatrix} -7 & 18+3k \\ -4 & k-9 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad BA = \begin{bmatrix} -7 & 12 \\ -6-k & k-9 \end{bmatrix}.$$

Las dos matrices son iguales si y solo si $-4 = -6-k$ y $18+3k = 12$. Estas ecuaciones tienen la única solución $k=-2$, es decir, $AB = BA$ si y solo si $k=-2$.

b) Dado que la segunda columna de C es un múltiplo de la primera, las columnas de C son linealmente dependientes. Esto implica que el sistema $Cx = 0$ tiene solución(es) no trivial(es), lo cual sugiere la existencia de una matriz D, no nula, tal que CD sea la matriz cero.

Al resolver $Cx = 0$, obtenemos que las soluciones tienen la forma $x = \begin{bmatrix} 2d \\ d \end{bmatrix}$.

Para que CD sea una matriz de 3×3, D debe ser una matriz de 2×3 con la primera fila igual al doble de la segunda fila. Un ejemplo de tal matriz es $D = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Criterios de corrección:

- C1: 1 punto por calcular AB y BA.
- C2: 1 punto por determinar $k=-2$.
- C3: 1 puntos por notar que $Cx = 0$ tiene solución no trivial (o infinitas soluciones).
- C4: 1 punto por deducir que dicha matriz D existe.
- C5: 1 punto por evidenciar que D debe ser de 2×3.
- C6: 1 punto por dar un ejemplo de D.

4. a) **(3pts)** Considere las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine la inversa de la matriz AB.

b) **(3pts)** Sea $a \in \mathbb{R}$. Calcule $\mathrm{Det}(C)$ donde $C = \begin{bmatrix} a+1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & a-1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & a+1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & a-1 \end{bmatrix}$.

Solución.

a) Notamos que las dos matrices A y B son matrices elementales. Si aplicamos el operador de matriz inversa obtenemos:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)^{-1} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)^{-1}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) Usando cofactores en la primera columna el determinante queda:

$$(a+1)(a-1)\,[\,(a+1)(a-1)+2\,] - (-1)(2)\,[\,(a+1)(a-1)+2\,].$$

Multiplicando es $(a^2+1)^2$.

Criterios de corrección:

- C1: 1 punto por usar correctamente la propiedad $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- C2: 0.5 punto por determinar correctamente la inversa de la primera matriz elemental.
- C3: 0.5 punto por determinar correctamente la inversa de la segunda matriz elemental.
- C4: 1 punto por determinar $(AB)^{-1}$. Si se encuentra correctamente la inversa de AB por otros métodos, deben marcarse los 4 criterios para otorgar los 3 puntos completos. Si, utilizando otros métodos, el proceso es correcto pero presenta solo 1 error numérico, debe marcarse únicamente el criterio C4.
- C5: 1 punto por mencionar el método que se utilizará para calcular el determinante (puede estar implícito).
- C6: 2 puntos por calcular correctamente el determinante.