

Problemas Resueltos de Modelos Estocásticos

Marzo de 2005

Contenidos

I	Cadenas de Markov Continuas	1
1	Cadenas de Markov Continuas	2

Parte I

Cadenas de Markov Continuas

Capítulo 1

Cadenas de Markov Continuas

1. Una empresa productiva cuenta con N máquinas del mismo tipo. El tiempo hasta que falla cada máquina es exponencial a tasa μ . Cuando una máquina falla, entra a un taller de reparaciones que posee la empresa. En este taller existe un solo técnico encargado de atender las máquinas, el que además debe encargarse de manejar el inventario de repuestos del taller. La manera como el técnico ha organizado su trabajo es la siguiente: mientras haya menos de R máquinas esperando ser atendidas, él se dedica a las labores asociadas al inventario de repuestos. A partir del momento en que existen R máquinas, el técnico se dedica a atenderlas, hasta que no quede ninguna esperando. En ese instante vuelve a ocuparse del inventario de repuestos, hasta que nuevamente se acumulan R máquinas, y así sucesivamente. El tiempo que le toma al técnico reparar una máquina es exponencial a tasa λ . Una vez que una máquina es reparada vuelve a funcionar y el tiempo hasta la próxima falla es nuevamente exponencial a tasa λ .

Se desea conocer, en un horizonte de largo plazo, el número medio de máquinas en el taller en un instante cualquiera. Formule un modelo estocástico para este objetivo, definiendo la(s) variable(s) de estado requerida(s) y las ecuaciones específicas que permiten responder la pregunta formulada.

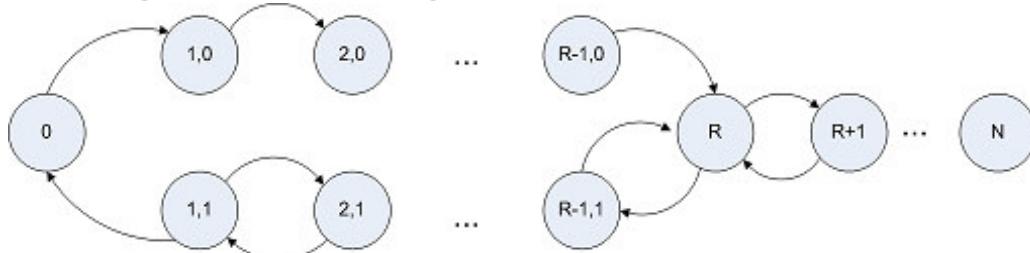
Indique cómo obtendría, en un horizonte de largo plazo, la fracción del tiempo que el técnico pasa dedicado al manejo de inventario y la fracción del tiempo que pasa reparando máquinas.

Solución:

Se definen las siguientes variables de estado del sistema:

- $X(t)$ es el número de máquinas en el taller en el instante t , con $0 \leq X(t) \leq N$
- $Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si el técnico está dedicado a otras labores} \\ 1 & \text{si el técnico está reparando máquinas} \end{cases}$

El siguiente diagrama representa a la cadena del problema formulado.



Así, los posibles estados del sistema son:

$$\begin{array}{ll} X(t) & \text{si } X(t) = 0 \text{ o } X(t) \geq R \\ (X(t), Y(t)) & \text{si } 0 < X(t) < R - 1 \end{array}$$

Para encontrar el número medio de máquinas en el taller en el largo plazo es necesario obtener las probabilidades de que el sistema se encuentre en el estado j en el largo plazo, es decir, P_j . Estas probabilidades se obtienen al resolver el sistema de ecuaciones de equilibrio.

El sistema de ecuaciones de equilibrio está dado por:

$$v_j \cdot P_j = \sum_{k \neq j} v_k \cdot P_k \cdot P_{k,j}$$

donde v_j es la tasa de permanencia en el estado j y $P_{k,j}$ es la probabilidad de transición del estado k al j . Luego,

$$\begin{aligned} \mu \cdot N \cdot P_0 &= (\mu \cdot (N-1) + \lambda) \cdot P_{(1,1)} \cdot \frac{\lambda}{\mu \cdot (N-1) + \lambda} \\ &= P_{(1,1)} \cdot \lambda \\ \mu \cdot (N-1) \cdot P_{(1,0)} &= \mu \cdot N \cdot P_0 \\ &\quad \cdot \cdot \cdot \\ \mu \cdot (N-i) \cdot P_{(i,0)} &= \mu \cdot (N-i+1) \cdot P_{(i-1,0)} && \text{si } 1 < i < R-1 \\ &\quad \cdot \cdot \cdot \\ (\mu \cdot (N-1) + \lambda) \cdot P_{(1,1)} &= \lambda \cdot P_{(2,1)} \\ &\quad \cdot \cdot \cdot \\ (\mu \cdot (N-i) + \lambda) \cdot P_{(i,1)} &= \mu \cdot (N-i+1) \cdot P_{(i-1,1)} && \text{si } 1 < i < R-1 \\ &\quad + \lambda \cdot P_{(i+1,1)} \\ &\quad \cdot \cdot \cdot \\ (\mu \cdot (N-R+1) + \lambda) \cdot P_{(R-1,1)} &= \mu \cdot (N-R+2) \cdot P_{(R-2,1)} + \lambda \cdot P_R \\ (\mu \cdot (N-R) + \lambda) \cdot P_R &= \mu \cdot (N-R+1) \cdot P_{(R-1,0)} \\ &\quad + \mu \cdot (N-R+1) \cdot P_{(R-1,1)} + \lambda \cdot P_{R+1} \\ &\quad \cdot \cdot \cdot \\ (\mu \cdot (N-n) + \lambda) \cdot P_n &= \mu \cdot (N-n+1) \cdot P_{n-1} + \lambda \cdot P_{n+1} && \text{si } N > n > R \\ &\quad \cdot \cdot \cdot \\ \lambda \cdot P_N &= \mu \cdot P_{N-1} \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones en conjunto con $\sum_{n=0}^N P_n = 1$, se obtienen las probabilidades P_j .

Luego, el número promedio de máquinas en el taller es:

$$L = \sum_{n=1}^{R-1} n \cdot P_{(n,0)} + \sum_{n=1}^{R-1} n \cdot P_{(n,1)} + \sum_{n=R}^N n \cdot P_n$$

Por otra parte, la fracción del tiempo que el técnico está dedicado a reparar máquinas es:

$$T = \sum_{n=1}^{R-1} P_{(n,1)} + \sum_{n=R}^N P_n$$

2. Una empresa aérea debe definir su política de stock de motores de repuestos para los aviones de su flota. Cada vez que un avión entra a mantenimiento, sus motores son revisados. Si uno o más de ellos están fallados, éstos son removidos del avión y enviados a la unidad de reparación. Esta unidad tiene, al principio del horizonte de análisis, S motores buenos en stock. Por lo tanto, si al llegar un motor fallado a la unidad, existe uno bueno en stock, éste es enviado inmediatamente al avión respectivo, el que queda de este modo listo para reiniciar sus vuelos. Si no existe un motor bueno en stock, el avión debe esperar hasta que se repare alguno de los motores fallados. En cualquier caso, todo motor fallado que llega es enviado inmediatamente a reparación. El tiempo que toma reparar un motor es exponencial a tasa μ . Una vez que se repara un motor, éste se utiliza para atender uno de los requerimientos pendientes, o bien para incorporarlo al stock de motores buenos. Asuma, además, que no se puede reparar más de un motor simultáneamente.

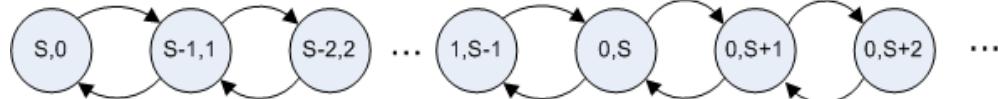
Asuma que los motores fallados llegan a la unidad de reparación de acuerdo a un Proceso de Poisson a tasa λ ($\lambda < \mu$). Formule un modelo que permita obtener la probabilidad que un motor fallado pueda ser reemplazado inmediatamente por un motor bueno (esta probabilidad mide el nivel de servicio global de la unidad de reparación).

Solución:

Se definen las siguientes variables de estado:

- $X(t)$ = stock de motores buenos en el instante t .
- $Y(t)$ = stock de motores en reparación en el instante t .

El estado del sistema se define como $(X(t), Y(t))$. Dado que el stock inicial de motores buenos en el taller es S , el estado inicial es $(S, 0)$. El siguiente diagrama muestra las transiciones de un estado a otro:



Obsérvese por ejemplo que cuando estamos en el estado $(0, S+1)$ y se termina de reparar un motor, se pasa al estado $(0, S)$ ya que hay un avión esperando por un motor bueno y éste se lleva el motor que se acaba de reparar. Por lo tanto, $X(t)$ sigue en 0.

Es decir, el estado $(0, S+i)$ indica que hay $S+i$ motores en el taller de reparación esperando su reparación y que hay i requerimientos no satisfechos al esperar que llegue un motor reparado.

Luego, la variable de estado $Y(t)$ define completamente el sistema (si $Y(t) \leq S$, indica que hay $Y(t)$ motores en reparación y $S-Y(t)$ en el stock de motores buenos).

Los valores posibles de $Y(t)$ son: $0, 1, 2, \dots, S, S+1, \dots$

Observado el diagrama del sistema se observa que corresponde a un proceso de nacimiento y muerte. Estos procesos se caracterizan por tener una tasa de nacimiento denominada λ_n y una tasa de muerte μ_n , donde n es el estado del sistema. En este caso se tiene que:

$$\begin{aligned}\lambda_n &= \lambda \\ \mu_n &= \mu\end{aligned}$$

Una vez definidas las tasas, se obtiene la solución general de las ecuaciones de equilibrio para este tipo de procesos:

$$P_n = \frac{\lambda_{n-1} \dots \lambda_1}{\mu_n \dots \mu_1} \cdot P_0 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot P_0$$

Además, $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot P_0 &= 1 \\ P_0 \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right) &= 1 \\ P_0 &= 1 - \lambda/\mu \end{aligned}$$

Luego,

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot (1 - \lambda/\mu)$$

Finalmente, la probabilidad de que un motor fallado pueda ser reemplazado inmediatamente por un motor bueno, es:

$$\begin{aligned} \Pr\{Y(t) < S\} &= \sum_{n=0}^{S-1} P_n \\ &= \sum_{n=0}^{S-1} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot (1 - \lambda/\mu) \\ &= (1 - \lambda/\mu) \cdot \frac{1 - (\lambda/\mu)^S}{1 - (\lambda/\mu)} \\ &= 1 - (\lambda/\mu)^S \quad (\lambda < \mu) \end{aligned}$$

3. A una sucursal de un banco que opera con C cajas en paralelo y una cola única, llegan clientes de acuerdo a un Proceso de Poisson a tasa λ . Si al llegar una persona al banco hay j clientes esperando en la cola, ésta se pone en la cola con probabilidad $p(j)$; en caso contrario, se va sin incorporarse al sistema (asuma que $p(0) = 1$). Una vez en la cola, un cliente espera hasta que es atendido o hasta que se le acaba la paciencia. Suponga que, para cada cliente, el tiempo hasta que se agota su paciencia es exponencial a tasa β (estos tiempos son independientes entre sí). Cada cajero atiende con un tiempo exponencial a tasa μ .

Formule un modelo que permita obtener una expresión para las siguientes medidas de desempeño, en el largo plazo:

- Número promedio de personas en la cola en un instante cualquiera.
- Número promedio de cajas en operación en un instante cualquiera.
- La fracción del tiempo en que se encuentra al menos una caja desocupada.

Solución:

Sea $X(t)$ el número de personas en el sistema en el instante t . El sistema corresponde al banco completo, es decir, considerando las cajas y la cola. Este sistema se puede modelar como un proceso de nacimiento y muerte con las siguientes tasas:

$$\begin{aligned}\lambda_n &= \lambda, & n \leq C \\ \lambda_n &= P(n - C) \cdot \lambda, & n > C \\ \mu_n &= n \cdot \mu, & n \leq C \\ \mu_n &= (n - C) \cdot \beta + C \cdot \mu, & n > C\end{aligned}$$

Así, las ecuaciones de equilibrio que permiten obtener las probabilidades en el largo plazo para este sistema son:

$$\begin{aligned}P_n &= \frac{\lambda_{n-1} \cdot \dots \cdot \lambda_0}{\mu_n \cdot \dots \cdot \mu_1} \cdot P_0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} P_n &= 1\end{aligned}$$

El número promedio de personas en la cola en un instante cualquiera del largo plazo es:

$$L_q = \sum_{n=C}^{\infty} (n - C) \cdot P_n$$

El número promedio de cajas en operación en un instante cualquiera del largo plazo es:

$$\sum_{n=0}^C n \cdot P_n + C \cdot \sum_{n=C}^{\infty} P_n$$

La fracción del tiempo en que hay al menos una caja desocupada es:

$$\sum_{n=0}^{C-1} P_n$$

4. A la bodega de almacenamiento de una empresa llegan dos tipos de productos a ser procesados (productos tipo A y tipo B). Los productos tipo A llegan de acuerdo a un Proceso de Poisson a tasa λ_1 y los productos tipo B llegan de acuerdo a un Proceso de Poisson a tasa λ_2 .

Por características del proceso productivo, cada tipo de producto (luego de permanecer almacenado) debe ser procesado por una máquina distinta. La empresa posee una máquina apta para procesar cada tipo de producto. Los tiempos de servicio (atención) de cada máquina son variables aleatorias con distribución exponencial a tasas β_1 y β_2 respectivamente.

La bodega de almacenamiento de la empresa es común para los dos tipos de productos y tiene una capacidad máxima de N productos. Los productos que al llegar, encuentran llena la bodega de almacenamiento, se pierden, aún cuando la máquina respectiva esté desocupada.

Formule detalladamente un modelo (incluyendo las ecuaciones de equilibrio) que permita conocer la proporción de productos que se pierden de cada tipo, respecto del total de productos que llegan al sistema, en el largo plazo, en función de la distribución de largo plazo.

Solución:

El diagrama muestra el funcionamiento de este sistema:



Se definen dos variables de estado:

- $X(t)$: número de productos tipo 1 en la bodega y en la máquina respectiva (si es que hay uno)
- $Y(t)$: número de productos tipo 2 en la bodega y en la máquina respectiva (si es que hay uno)

Así, el estado del sistema queda definido por $(X(t), Y(t))$. Los estados posibles son:

$$(X(t), Y(t)) : \begin{aligned} &(0,0), (0,1), (1,0), (1,1) \\ &(n,0); n = 2, \dots, N+1 \\ &(0,m); m = 2, \dots, N+1 \\ &(n,m); n > 1, m > 1, (n-1) + (m-1) \leq N \end{aligned}$$

A partir de la definición de estados, es posible escribir las ecuaciones de equilibrio, a partir del método estándar o utilizando el diagrama de estados del sistema. Se deja como ejercicio al lector el desarrollo de estas ecuaciones. Recuerde que las ecuaciones de equilibrio están dadas por:

$$v_j \cdot P_j = \sum_{k \neq j} v_k \cdot P_k \cdot P_{k,j}$$

donde v_j es la tasa de permanencia en el estado j , $P_{k,j}$ es la probabilidad de transición del estado k al j y P_j es la probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado j en el largo plazo.

Finalmente, la proporción de productos tipo 1 que se pierden es equivalente a encontrar la proporción del tiempo en que la bodega se encuentra con su capacidad completa, es decir:

$$P(N+1, 0) + P(0, N+1) + \sum_{n,m:n>1,m>1,n+m-2=N} P(n,m)$$

donde $P(n,m)$ corresponde a la distribución de probabilidades en el largo plazo.

5. En un taller de reparaciones electrónicas se reciben televisores para reparación de acuerdo a un Proceso de Poisson con tasa λ . La política de atención del taller consiste en acumular los televisores defectuosos hasta alcanzar K unidades, instante en el cual un técnico especialista inicia la reparación. La atención de este único técnico concluye si logra dejar en cero el número de televisores en el taller; sin embargo, si se acumula un total de $2K$ televisores en el taller (considerando tanto los que esperan reparación como los que están siendo atendidos), un segundo técnico se incorpora para ayudar al primero; en este caso ambos demoran en reparar un televisor un tiempo exponencial a tasa $\mu_1 + \mu_2$. Este segundo técnico se mantiene trabajando mientras hayan más de K televisores en el taller de reparación, y en consecuencia deja de trabajar en el instante en que el número de televisores en el taller disminuye a K . Todos los tiempos de reparación son v.a. independientes. Adicionalmente, el taller tiene una capacidad limitada de $3K$ televisores en su interior, por lo que aquellos requerimientos que excedan a esta capacidad son enviados a un taller externo.

- (a) Considerando el taller como un sistema, defina los estados de este sistema que permitan modelar el proceso descrito como una cadena de Markov continua.
- (b) Suponiendo que se dispone de las probabilidades límites del sistema (distribución del proceso en el largo plazo), determine:
 - i. ¿Qué fracción de los requerimientos se enviarán al taller externo?
 - ii. Número medio de requerimientos en espera de atención.

Solución:

- (a) Sea $X(t)$ el número de televisores en el taller de reparación en el instante t . Al igual que en el problema nº1, hay una ambigüedad en la especificación del estado del sistema en los casos en que en que la variable $X(t)$ está entre 1 y $2K-1$.

En el caso en que $X(t)$ está entre 1 y $K-1$, se debe especificar si el técnico está reparando televisores o no. Para el caso en que $X(t)$ esté entre $K+1$ y $2K-1$ se debe especificar si está trabajando 1 o los dos técnicos. En el caso en que $X(t) = K$, ocurre que hay que distinguir si está trabajando el primer o el segundo técnico, ya que en el caso en que el sistema se encuentre en el estado $X(t)=K+1$ y ambos técnicos estén trabajando, cualquiera de los dos puede terminar de reparar un televisor y es necesario distinguir estos casos.

Para solucionar estas amigüedades se define una variable $Y(t)$ que indica si está trabajando el primer técnico o no cuando $X(t) \in \{0, 1, \dots, K-1\}$; si está trabajando el segundo técnico o no cuando $X(t) \in \{K+1, K+2, \dots, 2K-1\}$; y si está trabajando el primer técnico o el segundo.

Si $X(t) = 1, 2, \dots, K-1$, entonces:

$$Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si el primer técnico está dedicado a otras labores} \\ 1 & \text{si el primer técnico está reparando máquinas} \end{cases}$$

Si $X(t) = K+1, K+2, \dots, 2K-1$, entonces:

$$Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si el segundo técnico está dedicado a otras labores} \\ 1 & \text{si el segundo técnico está reparando máquinas} \end{cases}$$

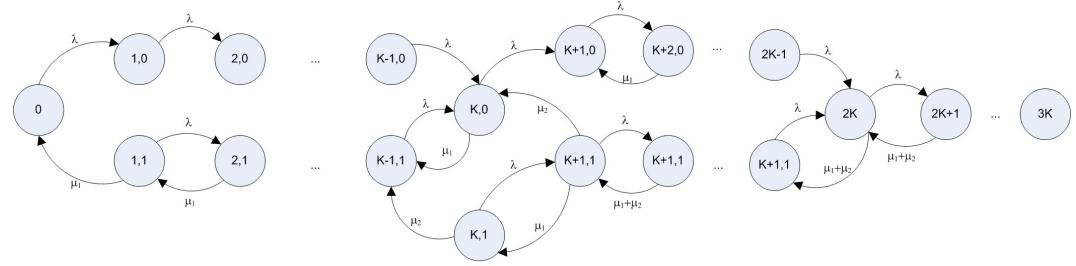
Si $X(t) = K$, entonces:

$$Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si el primer técnico está trabajando} \\ 1 & \text{si el segundo técnico está trabajando} \end{cases}$$

Así, los estados posibles del sistema son:

$$\begin{aligned} X(t) &= 0 \\ (X(t), Y(t)) &= (n, 0), & n &= 1, 2, \dots, 2K-1 \\ (X(t), Y(t)) &= (n, 1), & n &= 1, 2, \dots, 2K-1 \\ X(t) &= n, & n &= 2K, 2K+1, \dots, 3K \end{aligned}$$

y el diagrama de estados es:



Las tasas de permanencia de cada estado son las siguientes:

$$\begin{aligned}
 v_0 &= \lambda \\
 v_{(n,0)} &= \lambda & n = 1 \dots K-1 \\
 v_{(n,1)} &= \lambda + \mu_1 & n = 1 \dots K-1 \\
 v_{(K,0)} &= \lambda + \mu_1 \\
 v_{(K,1)} &= \lambda + \mu_2 \\
 v_{(n,0)} &= \lambda + \mu_1 & n = K \dots 2K-1 \\
 v_{(n,1)} &= \lambda + \mu_1 + \mu_2 & n = K \dots 2K-1 \\
 v_{(n)} &= \lambda + \mu_1 + \mu_2 & n = 2K \dots 3K-1 \\
 v_{(3K)} &= \mu_1 + \mu_2
 \end{aligned}$$

Las probabilidades de transición pueden ser obtenidas utilizando el diagrama de estados.

Una vez definido los estados, sus respectivas tasas de permanencia y sus probabilidades de transición, es posible escribir las ecuaciones de equilibrio para encontrar la distribución de probabilidades en el largo plazo, lo cual se deja como ejercicio para el lector.

- La fracción de requerimientos que se enviarán a un taller externo es equivalente a la proporción del tiempo en el largo plazo en que el sistema no está capacitado para seguir recibiendo televisores, es decir, cuando el taller de reparación tenga 3K televisores. Luego, la fracción de requerimientos que se envían a un taller externo es P_{3K} .
- El número medio de televisores en espera para su reparación es:

$$\sum_{n=1}^{K-1} n \cdot P_{n,0} + \sum_{n=1}^{K-1} (n-1) \cdot P_{n,1} + (K-1) \cdot (P_{K,0} + P_{K,1}) + \sum_{n=K+1}^{2K-1} (n-1) \cdot P_{n,0} + \sum_{n=K+1}^{2K-1} (n-2) \cdot P_{n,1} + \sum_{n=2K}^{3K} (n-2) \cdot P_n$$

6. A una sucursal bancaria llegan personas de acuerdo a un Proceso de Poisson con tasa λ . Las personas concurren a realizar sólo uno de dos tipos de trámites: cobrar cheques, lo que debe realizarse en las cajas, o bien tomar depósitos a plazo, para lo cual deben ser atendidos en un módulo especial. Se ha podido determinar que con probabilidad 0.8 una persona concurre a cobrar un cheque. Esta probabilidad es constante, para todas las personas que llegan, independientemente de cualquier otra consideración. Si una persona desea cobrar un cheque, pasa a cualquier caja libre, si la hay, o bien se pone a la cola y espera hasta que le toca su turno, considerando una disciplina de atención en estricto orden de llegada. La sucursal bancaria cuenta con cinco cajas, que operan en paralelo, y no hay restricción de espacio para la cola (de las cajas).

Por otra parte, las personas que quieren tomar depósitos a plazo deben ser atendidas en el módulo (único) dispuesto a tal efecto, debiendo esperar cuando se encuentra ocupado en la atención de otro cliente. Con el fin de entregar cierta comodidad a los clientes, se ha dispuesto una pequeña zona de espera, para los clientes que desean tomar depósitos, con cinco sillones. En consecuencia, siempre que haya al menos un sillón libre, el cliente decidirá esperar; sin embargo, si un cliente al llegar observa todos los sillones ocupados, se marcha del banco.

Los tiempos de atención en las cajas son v.a. i.i.d. con distribución exponencial con tasa μ . Por su parte, la atención de un cliente en el módulo de depósitos toma un tiempo aleatorio con distribución exponencial con tasa β . Estos tiempos de atención también son i.i.d.

- Explicite las tasas de nacimiento y muerte para el sistema de cajas de la sucursal bancaria.
- Suponiendo que hay tres personas en la cola de las cajas y dos personas en la cola para tomar depósitos a plazo, ¿cuál es la probabilidad de que el próximo cliente que termine de ser atendido corresponda a alguien que venía a cobrar un cheque?

Solución:

- Considerando el sistema de cajas de la sucursal bancaria, se sabe que el 80% de las personas que llegan al banco van a cobrar un cheque, es decir, entran al sistema de cajas. Por otra parte, la tasa de muerte de este sistema depende de la cantidad de clientes que se está atendiendo en las cajas Luego,

$$\begin{aligned}\lambda_n &= 0.8 \cdot \lambda & n \geq 0 \\ \mu_n &= n \cdot \mu & \text{si } n \leq 5 \\ \mu_n &= 5 \cdot \mu & \text{si } n > 5\end{aligned}$$

- Esta probabilidad equivale a la probabilidad de que el mínimo de 5 variables aleatorias independientes de distribución exponencial de tasa μ sea menor que una v.a. exponencial de tasa β , es decir:

$$\frac{5 \cdot \mu}{5 \cdot \mu + \beta}$$

(Recuerde que la distribución del mínimo entre n v.a. exponenciales corresponde a una v.a. exponencial con tasa igual a la suma de las n tasas individuales)

7. En la sección de manufactura de una planta productiva existen N máquinas, las que están sujetas a fallas. El tiempo que pasa hasta que una máquina falla es exponencial a tasa μ (suponga que esta distribución es la misma para todas las máquinas y que éstas fallan independientemente unas de otras). En la planta existe un taller de reparación para atender las máquinas falladas, en que trabajan M operarios ($M < N$). Cada operario puede atender una sola máquina a la vez y el tiempo que le toma reparar una máquina es exponencial a tasa λ . Las máquinas falladas se atienden en el taller en orden de llegada. Una vez que una máquina ha sido reparada, queda tan buena como nueva y vuelve a la sección de manufactura; el tiempo hasta una nueva falla es de nuevo exponencial a tasa μ (y así sucesivamente). Formule un modelo de Cadena de Markov Continua que permita obtener en el largo plazo, el número promedio de máquinas trabajando correctamente en un instante cualquiera.

Solución:

Sea $X(t)$ el número de máquinas en el taller de reparación en el instante t . Los posibles estados son: $0, 1, 2, \dots, N$.

El sistema se puede modelar como un proceso de nacimiento y muerte con las siguientes tasas:

$$\begin{aligned}\lambda_n &= (N - n) \cdot \mu \\ \mu_n &= n \cdot \lambda \quad \text{si } n \leq M \\ \mu_n &= M \cdot \lambda \quad \text{si } n > M\end{aligned}$$

Luego,

$$P_n = \frac{\lambda_{n-1} \cdot \dots \cdot \lambda_0}{\mu_n \cdot \dots \cdot \mu_1} \cdot P_0$$

Si $n \leq M$,

$$\begin{aligned}P_n &= \frac{(N - n + 1)\mu \cdot (N - n + 1)\mu \cdot \dots \cdot N\mu}{n! \cdot \lambda^n} \cdot P_0 \\ &= \frac{N!}{(N - n)! \cdot n!} \cdot \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^n \cdot P_0 \\ &= \binom{N}{n} \cdot \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^n \cdot P_0\end{aligned}$$

Si $n > M$,

$$\begin{aligned}P_n &= \frac{N!}{(N - n)!} \frac{\mu^n}{(M\lambda) \cdot (M\lambda) \cdot \dots \cdot (M\lambda) \cdot (M - 1)\lambda \cdot \dots \lambda} \cdot P_0 \\ &= \frac{N!}{(N - n)!} \frac{\mu^n}{(M\lambda)^{n-M} \cdot M! \cdot \lambda^M} \cdot P_0 \\ &= \frac{N!}{(N - n)!} \frac{1}{M^{n-M} \cdot M!} \cdot \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^n \cdot P_0\end{aligned}$$

Además, $\sum_{n=0}^N P_n = 1 \Rightarrow$

$$\sum_{n=0}^M \binom{N}{n} \cdot \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^n \cdot P_0 + \sum_{n=M+1}^N \frac{N!}{(N - n)!} \frac{1}{M^{n-M} \cdot M!} \cdot \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^n \cdot P_0 = 1$$

con lo que se obtienen la distribución de probabilidades en el largo plazo.

Luego, el número promedio de máquinas trabajando correctamente en un instante cualquiera en el alrgo plazo es:

$$E[N - X(t)] = N - E[X(t)]$$

$$\text{donde } E[X(t)] = \sum_{n=0}^N n \cdot P_n$$

Nota: El problema también puede resolverse definiendo como variable de estado el número de máquinas trabajando correctamente en el instante t.

8. En un centro asistencial 2 médicos han instalado sus respectivas consultas. Existe una sala de espera común para ambas consultas, con una capacidad máxima de N personas. A la primera consulta llegan pacientes de acuerdo a un Proceso de Poisson a tasa λ_1 y el tiempo de atención del médico respectivo es exponencial a tasa μ_1 ; en la segunda consulta las condiciones son análogas con tasas λ_2 y μ_2 respectivamente. Los pacientes que al llegar encuentran la sala de espera ocupada se pierden, aún cuando el médico respectivo se encuentre desocupado. Formule detalladamente un modelo que permita conocer la proporción de clientes de cada tipo que se pierden en el largo plazo.

Solución:

Se definen dos variables de estado:

- $X(t)$: número de pacientes tipo 1 en el centro asistencial (sala de espera más consulta)
- $Y(t)$: número de pacientes tipo 2 en el centro asistencial (sala de espera más consulta)

Así, el estado del sistema queda definido por $(X(t), Y(t))$. Los estados posibles son:

$$(X(t), Y(t)) : (0,0), (0,1), (1,0), (1,1) \\ (n,0); n = 2, \dots, N+1 \\ (0,m); m = 2, \dots, N+1 \\ (n,m); n > 1, m > 1, (n-1) + (m-1) \leq N$$

A partir de la definición de estados, es posible escribir las ecuaciones de equilibrio, a partir del método estándar o utilizando el diagrama de estados del sistema. Se deja como ejercicio al lector el desarrollo de estas ecuaciones. recuerde que las ecuaciones de equilibrio están dadas por:

$$v_j \cdot P_j = \sum_{k \neq j} v_k \cdot P_k \cdot P_{k,j}$$

donde v_j es la tasa de permanencia en el estado j , $P_{k,j}$ es la probabilidad de transición del estado k al j y P_j es la probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado j en el largo plazo.

Finalmente, la proporción de pacientes que se pierden es la misma para pacientes de ambos tipos y vale:

$$P(N+1,0) + P(0,N+1) + \sum_{n,m:n>1,m>1,n+m-2=N} P(n,m)$$

donde $P(n,m)$ corresponde a la distribución de probabilidades en el largo plazo.

9. Considere un supermercado con 2 cajeras. La cajera 1 atiende todo tipo de clientes, pero la cajera 2 atiende sólo a clientes que han comprado a lo sumo 10 unidades. La caja 1 está más cerca de la salida del supermercado, por lo cual un cliente que puede ser atendido en la caja 2 (porque compró 10 unidades o menos) se dirige a esa caja sólo si la caja 1 está ocupada. Suponga que el proceso de llegada a la caja 1 es Poisson a tasa λ_1 y el de los compran a lo sumo 10 unidades Poisson a tasa λ_2 . Los tiempos de atención de las cajeras son exponenciales a tasas μ_1 y μ_2 respectivamente. Asuma que cuando un cliente se pone a la cola, ya no se puede cambiar. Sea $N(t)$ el número de clientes frente a la cajera 1 en el instante t , incluyendo el que está siendo atendido.

- Describa el proceso $\{N(t), t > 0\}$ como un proceso de nacimiento y muerte; encuentre la distribución del proceso en el largo plazo
- Obtenga la fracción de clientes que son atendidos en la caja 2 en el largo plazo
- El dueño del supermercado quiere aumentar la fracción obtenida en la parte b); él ha considerado las siguientes alternativas: aumentar μ_1 , aumentar μ_2 , o aumentar ambas. ¿Cuál le recomienda usted?

Solución:

- Sea $N(t)$ el número de clientes frente a la cajera nº 1 en el instante t , incluyendo el que está siendo atendido. Las tasas de nacimiento y muerte son:

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= \lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_n &= \lambda_1, \quad \text{si } n > 0 \\ \mu_n &= \mu_1, \quad \text{si } n > 0\end{aligned}$$

Luego, las ecuaciones de equilibrio son:

$$\begin{aligned}P_n &= \frac{\lambda_{n-1} \cdot \dots \cdot \lambda_0}{\mu_n \cdot \dots \cdot \mu_1} \cdot P_0 \\ &= \frac{(\lambda_1)^{n-1} \cdot (\lambda_1 + \lambda_2)}{(\mu_1)^n} \cdot P_0 \\ &= \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\mu_1} \left(\frac{\lambda_1}{\mu_1} \right)^{n-1} \cdot P_0\end{aligned}$$

Además, $\sum_{n=0}^N P_n = 1 \Rightarrow$

$$\begin{aligned}P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\mu_1} \left(\frac{\lambda_1}{\mu_1} \right)^{n-1} \cdot P_0 &= 1 \\ P_0 + \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\mu_1} \right) \cdot \frac{1}{1 - (\lambda_1/\mu_1)} \cdot P_0 &= 1 \\ P_0 &= \frac{\mu_1 - \lambda_1}{\mu_1 + \lambda_2}, \quad \text{(la condición de equilibrio es } \lambda_1 < \mu_1)\end{aligned}$$

Luego,

$$P_n = \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\mu_1} \right) \cdot \left(\frac{\lambda_1}{\mu_1} \right)^{n-1} \cdot \left(\frac{\mu_1 - \lambda_1}{\mu_1 + \lambda_2} \right)$$

- La fracción de clientes que son atendidos en la caja 2 es equivalente a la proporción entre la tasa de ingreso a la caja 2 y la tasa total de clientes, es decir:

$$\frac{\lambda_e}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

donde λ_e es la tasa de entrada a la caja 2. Luego,

$$\begin{aligned}\lambda_e &= 0 \cdot P_0 + \lambda_2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} P_n \\ &= \lambda_2 \cdot (1 - P_0)\end{aligned}$$

Con lo que la fracción de clientes atendidos en la caja 2 es:

$$\frac{\lambda_2 \cdot (1 - P_0)}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

reemplazando P_0 en la ecuación, se tiene que:

$$\frac{\lambda_2 \cdot \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\mu_1 + \lambda_1}\right)}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{\lambda_2}{\mu_1 + \lambda_2}$$

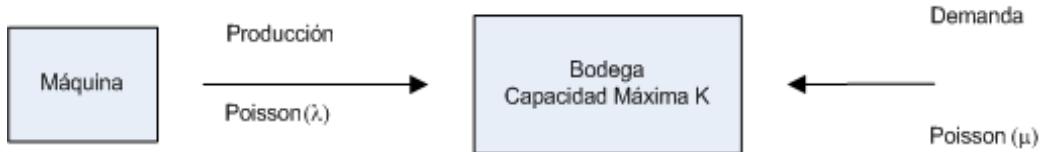
Se observa que ni μ_2 ni λ_1 influyen en esta proporción.

- (c) Esta parte se deja como ejercicio al lector.

10. Una máquina produce ítems uno a la vez; los tiempos de proceso son v.a.i.i.d. con distribución exponencial a tasa λ . Una vez que los productos son producidos son almacenados en una bodega de capacidad K. Cuando la bodega está llena, la máquina se apaga y deja de producir, y se enciende de nuevo cuando la bodega vuelve a tener espacio para al menos un ítem adicional. Las demandas por este ítem llegan de acuerdo a un Proceso de Poisson a tasa μ . Cualquier demanda que no puede ser satisfecha se pierde.
- Formule un modelo para encontrar la distribución del número de ítems en la bodega en un instante cualquiera en el largo plazo. Encuentre la proporción de la demanda que se pierde.
 - Suponga ahora que el tiempo medio de proceso de la máquina es de 1 hora, y que la tasa de demanda es de 20 ítems diarios. La capacidad de la bodega es 10. Encuentre la fracción del tiempo que la máquina permanece apagada en el largo plazo.

Solución:

(a)



Sea $X(t)$ el número de ítems en la bodega en el instante t . Los posibles valores de $X(t)$ son: 0,1,2,...K. Este sistema se puede modelar como un proceso de nacimiento y muerte con las siguientes tasas:

$$\begin{aligned}\lambda_n &= \lambda, & \text{si } n < K; & \lambda_K = 0 \\ \mu_n &= \mu, & \text{si } n > 0; & \mu_0 = 0\end{aligned}$$

Luego, las ecuaciones de equilibrio son:

$$\begin{aligned}P_n &= \frac{\lambda_{n-1} \cdot \dots \cdot \lambda_0}{\mu_n \cdot \dots \cdot \mu_1} \cdot P_0 \\ &= \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot P_0\end{aligned}$$

Además, $\sum_{n=0}^N P_n = 1 \Rightarrow$

$$\begin{aligned}P_0 + \sum_{n=1}^K \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot P_0 &= 1 \\ \Rightarrow P_0 \cdot \left(\sum_{n=1}^K \rho^n\right) &= 1\end{aligned}$$

en que $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$. Luego,

$$P_0 = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{K+1}}$$

con lo que:

$$P_n = \rho^n \cdot \left(\frac{1 - \rho}{1 - \rho^{K+1}}\right)$$

Finalmente, la proporción de la demanda que se pierde es la proporción del tiempo en que la bodega no tiene productos en su interior, es decir, P_0 .

(b) Se deja como ejercicio al lector.

11. A un sistema computacional llegan trabajos para ser procesados de acuerdo a un Proceso de Poisson a tasa λ_1 cuando el sistema está en operación y a tasa λ_2 cuando está fallado. El tiempo de procesamiento de un trabajo es exponencial a tasa μ . El sistema solo puede procesar un trabajo a la vez, y puede entregar servicio solo si está en operación. Si un trabajo se interrumpe porque el sistema falla, el procesamiento de ese trabajo continúa apenas el sistema comienza a operar nuevamente, y el proceso ya efectuado no se pierde. El sistema computacional permanece en operación un tiempo con distribución exponencial de parámetro α y el tiempo de reparación es exponencial de parámetro β . El computador puede fallar independientemente si está o no procesando un trabajo. Desarrolle un modelo que permita calcular el número promedio de trabajos en el sistema en un instante cualquiera en el largo plazo.

Solución:

Se definen las siguientes variables de estado:

- $X(t)$ es el número de trabajos en el sistema (el que se está procesando más los que están esperando)
- $Y(t) = \begin{cases} 1 & \text{si el computador está funcionando} \\ 0 & \text{si está fallado} \end{cases}$

Así el estado queda definido por $(X(t), Y(t))$ donde $X(t)$ puede tomar valores de 0 a ∞ .

Las tasas de permanencia y probabilidades de transición son:

Estado	Tasa Permanencia	Transición a Estado	Prob. Transición
(0,0)	$\lambda_2 + \beta$	(0,1)	$\frac{\beta}{\lambda_2 + \beta}$
		(1,0)	$\frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \beta}$
(0,1)	$\lambda_1 + \alpha$	(0,0)	$\frac{\alpha}{\lambda_1 + \alpha}$
		(1,1)	$\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \alpha}$
(n,0)	$\lambda_2 + \beta$	(n,1)	$\frac{\beta}{\lambda_2 + \beta}$
		(n+1,0)	$\frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \beta}$
(n,1)	$\lambda_1 + \alpha + \mu$	(n,0)	$\frac{\alpha}{\lambda_1 + \alpha + \mu}$
		(n-1,1)	$\frac{\mu}{\lambda_1 + \alpha + \mu}$
		(n+1,1)	$\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \alpha + \mu}$

Luego, las ecuaciones de equilibrio son:

$$\begin{aligned}
 P_{0,0} \cdot (\lambda_2 + \beta) &= (\lambda_1 + \alpha) \cdot P_{0,1} \cdot \frac{\alpha}{\lambda_1 + \alpha} \\
 &= P_{0,1} \cdot \alpha \\
 P_{0,1} \cdot (\lambda_1 + \alpha) &= P_{0,0} \cdot \beta + P_{1,1} \cdot \mu \\
 P_{n,0} &= P_{n,1} \cdot \alpha + P_{n-1,0} \cdot \lambda_2, \quad n > 0 \\
 P_{n,1} &= P_{n-1,1} \cdot \lambda_1 + P_{n,0} \cdot \beta, \quad n > 0
 \end{aligned}$$

Considerando que $\sum_{n=0}^{\infty} (P_{n,1} + P_{n,0}) = 1$, se puede resolver este sistema de ecuaciones.

Finalmente, el número promedio de trabajos en el sistema en el largo plazo es:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (P_{n,1} + P_{n,0})$$

Es importante mencionar lo que ocurre cuando el computador falla mientras está procesando un trabajo. Cuando el computador vuelve a funcionar correctamente sigue con el procesando el trabajo que se estaba ejecutando sin perder la parte del proceso ya realizado. El tiempo que resta por procesar, sin embargo, sigue distribuyendo de manera exponencial debido a la propiedad de falta de memoria de esta distribución. Por lo tanto no es necesario agregar alguna variable que indique este fenómeno.

12. En una posta rural se reciben dos tipos de enfermos: graves y leves; éstos llegan de acuerdo a Poisson a tasa λ_i ; $i=1,2$. Existe un solo médico disponible para atender los pacientes; el tiempo que toma atender un paciente, de cualquier tipo, es exponencial a tasa μ . La posta tiene una capacidad para mantener simultáneamente K pacientes (esperando o atendiéndose). Se utiliza la siguiente política de atención: si al llegar un paciente, hay M pacientes en la posta, el paciente es admitido; si hay más de M , se acepta solo si es grave ($M < K$). Calcule en el largo plazo, la proporción de pacientes de cada tipo que no logra ser admitido a la posta.

Solución:

Sea $X(t)$ el número de pacientes en la posta en el instante t . Este sistema se puede modelar como un proceso de nacimiento y muerte con las siguientes tasas:

$$\begin{aligned}\lambda_n &= \lambda_1 + \lambda_2, & \text{si } n \leq M \\ \lambda_n &= \lambda_1, & \text{si } M < n < K \\ \lambda_K &= 0 \\ \mu_n &= \mu, & \text{si } n > 0\end{aligned}$$

Las ecuaciones de equilibrio para este tipo de proceso son:

$$\begin{aligned}P_n &= \frac{\lambda_{n-1} \cdot \dots \cdot \lambda_0}{\mu_n \cdot \dots \cdot \mu_1} \cdot P_0, & n = 0, 1, \dots, K \\ \sum_{n=0}^K P_n &= 1\end{aligned}$$

La proporción de pacientes de cada tipo que no son admitidos es equivalente a la proporción de tiempo en el largo plazo en que éstos no son admitidos. Así:

$$\begin{aligned}\text{Proporción Graves} &= P_K \\ \text{Proporción Leves} &= P_{M+1} + P_{M+2} + \dots + P_K\end{aligned}$$