Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Ciencias Económicas y Administrativas

Primer Semestre 2014

Curso	:	**Probabilidad y Estadística**
Sigla	:	**EAS200a**
Profesores	:	**Rafael Águila (Sec 01), Osvaldo Ferreiro (Sec 02), Victor Correa (Sec 03) y Ricardo Olea (Sec 04)**

Pauta Control 3

Pregunta 1

Sea X una variable con función densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} \cdot e^{-x}, & x \geq 0 \\[2ex] \dfrac{1}{2}, & -1 \leq x < 0 \\[2ex] 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Determinar la función densidad de la variable aleatoria $Y = X^2$.

Solución:

Tenemos que

i. Para $-1 \leq x \leq 1$ se tiene que $0 \leq y \leq 1$. Para este caso $X = g(Y) = \pm\sqrt{Y}$. **[1.0 Ptos]**

ii. Para $x \geq 1$ se tiene que $y \geq 1$. Para este caso $X = g(Y) = \sqrt{Y}$. **[1.0 Ptos]**

Entonces

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(-\sqrt{y}) \left|-\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\right| + f_X(\sqrt{y}) \left|\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\right|, & 0 \leq y \leq 1 \quad \textbf{[1.0 Ptos]} \\[3ex] f_X(\sqrt{y}) \left|\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\right|, & y > 1 \quad \textbf{[1.0 Ptos]} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{4\sqrt{y}} + \dfrac{1}{4\sqrt{y}}\, e^{-\sqrt{y}}, & 0 \leq y \leq 1 \quad \textbf{[1.0 Ptos]} \\[3ex] \dfrac{1}{4\sqrt{y}}\, e^{-\sqrt{y}}, & y > 1 \quad \textbf{[1.0 Ptos]} \end{cases}$$

Alternativa

Tenemos que

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) \quad \textbf{[1.0 Ptos]}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\sqrt{y}}{2} + \dfrac{1}{2}\left(1 - e^{-\sqrt{y}}\right), & -1 \leq y \leq 1 \quad \textbf{[1.5 Ptos]} \\[3ex] \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\left(1 - e^{-\sqrt{y}}\right), & y \geq 1 \quad \textbf{[1.5 Ptos]} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}\,F_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\sqrt{y}} + \dfrac{1}{4\sqrt{y}}\,e^{-\sqrt{y}}, & 0 \leq y \leq 1 \quad \textbf{[1.0 Ptos]} \\[2ex] \dfrac{1}{4\sqrt{y}}\,e^{-\sqrt{y}}, & y > 1 \quad \textbf{[1.0 Ptos]} \end{cases}$$

+ 1 Punto Base

Pregunta 2

Sea X una variable con función densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Determinar la función densidad de la variable aleatoria $Y = X^2$.

Solución:

Tenemos que si $x \leq 0$ se tiene que $y \geq 0$. Para este caso $X = g(Y) = -\sqrt{Y}$. **[2.0 Ptos]**

Entonces

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= f_X(-\sqrt{y}) \left| -\frac{1}{2\sqrt{y}} \right| \quad \textbf{[2.0 Ptos]} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot e^{-\sqrt{y}}, \quad \textbf{[1.0 Ptos]} \quad y \geq 0 \quad \textbf{[1.0 Ptos]} \end{aligned}$$

Alternativa

Tenemos que

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) \quad \textbf{[0.4 Ptos]} \\ &= P(X^2 \leq y) \quad \textbf{[0.4 Ptos]} \\ &= P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) \quad \textbf{[0.3 Ptos]} \\ &= F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) \quad \textbf{[0.3 Ptos]} \\ &= 1 - F_X(-\sqrt{y}), \quad \textbf{[0.3 Ptos]} \quad y \geq 0 \quad \textbf{[0.3 Ptos]} \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{d}{dy} F_Y(y) \quad \textbf{[1.0 Ptos]} \\ &= f_X(-\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} \quad \textbf{[1.0 Ptos]} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot e^{-\sqrt{y}}, \quad \textbf{[1.0 Ptos]} \quad y \geq 0 \quad \textbf{[1.0 Ptos]} \end{aligned}$$

+ 1 Punto Base