Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Primer semestre de 2024

MAT1279/MAT1299: Algebra Lineal

Solución Interrogación 1

Justifique claramente sus respuestas.

1. Decida, justificadamente, si las matrices A y B son o no equivalentes por filas.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 & 9 \\ 1 & 2 & 9 & 9 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -7 \\ 2 & 3 & -1 & 14 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 & 9 \\ 1 & 2 & 9 & 9 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_3-2F_1\to F_3]{F_2-F_1\to F_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -12 & -16 \end{bmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{4}\cdot F_3\to F_3]{\frac{1}{2}\cdot F_2\to F_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_2\leftrightarrow F_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_2-3F_3\to F_2]{F_1-7F_3\to F_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1-2F_2\to F_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -7 \\ 2 & 3 & -1 & 14 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_3+3F_1\to F_3]{F_2-2F_1\to F_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -7 \\ 0 & 7 & -7 & 28 \\ 0 & -5 & 11 & -20 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{7}\cdot F_2\to F_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & 11 & -20 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3+5F_2\to F_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{6}\cdot F_3\to F_3]{F_1+2F_2\to F_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_2+F_3\to F_2]{F_1-F_3\to F_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Como ambas formas escalonadas reducidas son iguales, concluimos que las matrices A y B son equivalentes por filas.

Criterios de corrección:

- C1: 0.5 ptos por realizar operaciones filas permitidas en A para obtener una forma escalonada.
- C2: 1 ptos por realizar operaciones filas permitidas en A para obtener una forma escalonada reducida.
- C3: 1 pto por realizar los calculos de las operaciones filas de manera correcta y así obtener la forma escalonada reducida de A.
- C4: 0.5 ptos por realizar operaciones filas permitidas en B para obtener una forma escalonada.
- C5: 1 ptos por realizar operaciones filas permitidas en B para obtener una forma escalonada reducida.
- C6: 1 pto por realizar los calculos de las operaciones filas de manera correcta y así obtener la forma escalonada reducida de B.

- C7: 1 punto por concluir que las matrices son equivalentes.

2. Considere el siguiente sistema lineal donde k es un número real.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 2x_1 - x_2 + kx_3 &= 2 \\ 5x_1 - x_2 + kx_3 &= 6 \end{aligned}$$

a) Determine para cuáles valores de k el sistema es consistente.

Solución. La matriz aumentada del sistema es $[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & k & 2 \\ 5 & -1 & k & 6 \end{bmatrix}$

Tenemos $[A|b] \xrightarrow[F_2-2F_1\to F_2]{F_3-5F_1\to F_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & k-4 & -2 \\ 0 & -6 & k-10 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3-2F_2\to F_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & k-4 & -2 \\ 0 & 0 & -k-2 & 0 \end{bmatrix}$

Como en una forma escalonada de la matriz aumentada, para $-k-2=0$ o bien $-k-2\neq 0$, no existen filas del tipo $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix}$ con $b \neq 0$, el sistema es siempre consistente.

b) Determine para cuáles valores de k el sistema tiene infinitas soluciones.

Solución. Si $-k-2=0$ o $k=-2$, $[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Tenemos $[A|b] \xrightarrow{\frac{1}{-3}F_2\to F_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_1-f_2\to f_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ El sistema es consistente, además la tercera columna es una columna pivote por lo que x_3 es variable libre y, en consecuencia, el sistema tiene infinitas soluciones. Deducimos que para $k=-2$ el sistema tiene infinitas soluciones. En la siguiente parte demostramos que en otros casos, es decir si $k\neq -2$, el sistema no puede tener infinitas soluciones.

c) Determine para cuáles valores de k el sistema tiene una única solución. Para todos estos casos de k, determine la solución.

Solución. Si $-k-2\neq 0$ o bien $k\neq -2$ (todas las variables son básicas),

$[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & k-4 & -2 \\ 0 & 0 & -k-2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{-k-2}F_3\to F_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & k-4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_2-(k-4)F_3\to F_2]{F_1-2F_3\to F_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow{\frac{1}{-3}F_2\to F_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1-F_2\to F_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Entonces la única solución para el caso $k\neq -2$ es $x_1=\frac{4}{3}, x_2=\frac{2}{3}, x_3=0$.

Criterios de corrección:

- C1: 0.5 por escribir la matriz aumentada del sistema.
- C2: 1.0 punto por determinar correctamente una forma escalonada de la matriz aumentada del sistema.
- C3: 1.0 punto por justificar correctamente la consistencia del sistema. para todo valor de k.

- C4: 1.0 punto por justificar correctamente el valor de k para el cual el sistema tiene infinitas soluciones.
- C5: 1.0 punto por justificar correctamente los valores de k para los cuales el sistema tiene solución única.
- C6: 0.5 punto por calcular correctamente la solución fijando un valor de k distinto de -2.
- C7: 1.0 punto por analizar e indicar que la solución es la misma para todo k diferente de -2(si calcula la solución directamente, en forma general, sin fijar valor para k, también se asigna el puntaje del item anterior)

3. ¿Para que valores de h el vector $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ h \end{bmatrix}$ **NO está** en el conjunto generado por los vectores $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} -3 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}$?

Solución. Según la definición, el vector $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ h \end{bmatrix}$ no está en Gen$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}$ si la ecuación

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ h \end{bmatrix} \tag{1}$$

es inconsistente. Esto es equivalente a que la siguiente matriz que es la matriz aumentada del sistema tenga filas del tipo $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix}$ con $b \neq 0$.

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 7 & 1 \\ -4 & 6 & h \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Encontramos la forma escalonada reducida de esta matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 7 & 1 \\ -4 & 6 & h \end{bmatrix} \xrightarrow[F_2+2F_1 \to F_2]{F_3+4F_1 \to F_3} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & -6 & h+8 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3+6F_2 \to F_3} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & h+38 \end{bmatrix}$$

Entonce el sistema es inconsistente si y solo si $h \neq -38$.

Criterios de corrección:

- C1: 1.5 punto por usar la definición y ocupar la ecuación (1).
- C2: 1.5 puntos por deducir que el problema es equivalente a ver que la matriz (2) tenga filas del tipo $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix}$ con $b \neq 0$.
- C3: 2 puntos por calcular correctamente la forma escalonada de la matriz.
- C4: 1 punto por deducir la solución para todos los valores $h \neq -38$ (Si, debido a errores aritméticos, se obtienen formas escalonadas reducidas diferentes, pero la interpretación final para el cálculo de los valores de h es correcta, se asignará un puntaje de 1.) .

4. En cada caso, indique si la afirmación es VERDADERA o FALSA. En caso de que sea verdadera, demuéstrela y, en caso contrario, dé un contraejemplo:

a) Si la matriz aumentada de un sistema lineal es equivalente a la matriz $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ entonces, el sistema tiene infinitas soluciones.

Solución. La afirmación es **FALSA** ya que considerando el sitema $Ax = b$, con $[A|b] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ existe una inconsistencia en la tercera ecuación del sistema ya que $0 \neq 3$.

b) Considere el sistema lineal

$$\begin{aligned} mx_1 + nx_2 + kx_3 + x_4 &= 10 \\ px_1 + qx_2 + rx_3 + x_4 &= -3 \end{aligned}$$

en las variables x_1, x_2, x_3, x_4. Si m, n, k, p, q, r son números reales tales que $m - k = 10$ y $p - r = -3$, entonces el sistema tiene infinitas soluciones.

Solución. La afirmación es **VERDADERA** ya que como $m - k = 10$ y $p - r = -3$, se puede considerar $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = -1$ y $x_4 = 0$ y se satisfacen las dos ecuaciones del sistema dado por lo que es consistente. Entonces sabemos que el sistema dado es consistente. Ahora como hay más variables(4) que ecuaciones(2), hay a lo más dos variables básicas o al menos dos variables libres lo que implica que existen infinitas soluciones del sistema.

c) Si un sistema lineal tiene más variables que ecuaciones entonces, el sistema es siempre consistente.

Solución. La afirmación es **FALSA**, un contraejemplo, el sistema

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 7 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 6x_4 &= 9 \end{aligned}$$

tiene 4 variables y 2 ecuaciones y, $4 > 2$, sin embargo, es inconsistente ya que la matriz aumentada del sistema es $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 7 \\ 2 & 2 & 4 & 6 & 9 \end{bmatrix}$, la cual es equivalente a la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, que corresponde a un sistema inconsistente para ya que es una forma escalonada de la matriz aumentada y tiene la fila $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, y $2 \neq 0$

Criterios de corrección:

- C1: 0.5 punto por indicar correctamente el valor de verdad de la afirmación a.
- C2: 1.5 punto por argumentar correctamente la respuesta a.
- C3: 0.5 punto por indicar correctamente el valor de verdad de la afirmación b.
- C4: 1.5 punto por argumentar correctamente la respuesta b.
- C5: 0.5 punto por indicar correctamente el valor de verdad de la afirmación c.
- C6: 1.5 punto por argumentar correctamente la respuesta c.