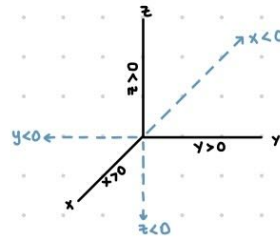
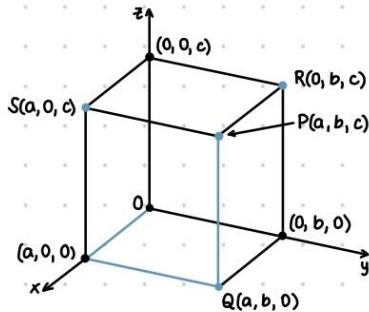


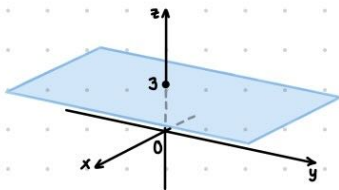


Clase 14: Sistemas coordenados tridimensionales

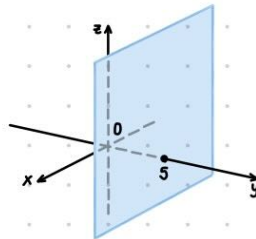
★ Sistema tridimensional de coordenadas:



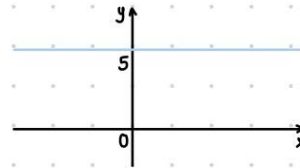
· Ejemplos:



$z = 3$, plano en \mathbb{R}^3

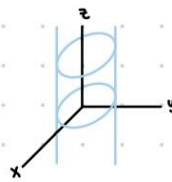
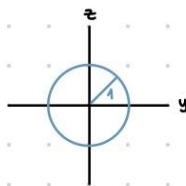
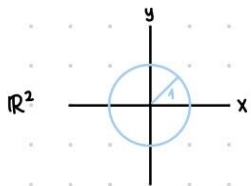


$y = 5$, plano en \mathbb{R}^3



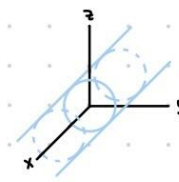
$y = 5$, recta en \mathbb{R}^2

¿Qué representan las ecuaciones $x^2 + y^2 = 1$ e $y^2 + z^2 = 1$ en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 ?



$$x^2 + y^2 = 1$$

\mathbb{R}^3 Cilindro
 \mathbb{R}^2 Circunferencia



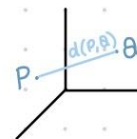
$$y^2 + z^2 = 1$$

★ Distancia entre puntos:

$$P = (x_1, x_2, x_3)$$

$$Q = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$$

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - \mu_1)^2 + (x_2 - \mu_2)^2 + (x_3 - \mu_3)^2}$$



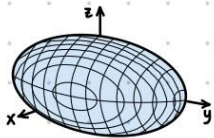
• **Ejemplo:** Determine la ecuación de una esfera tridimensional con centro en (a,b,c) y radio r .

* Esfera: Todos los puntos que están a distancia r del punto (a,b,c)

$$d((x,y,z); (a,b,c)) = r$$

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$$

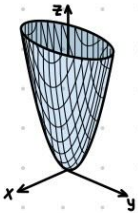
$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$$



Elipsoide:

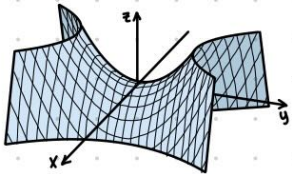
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$a=b=c$$



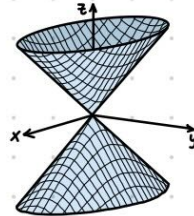
Paraboloide elíptico:

$$\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$



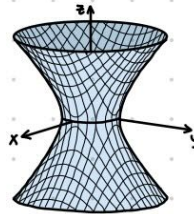
Paraboloide hiperbólico:

$$\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$



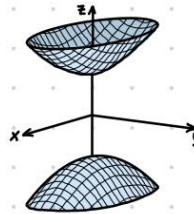
Cono:

$$\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$



Hiperboloide de una hoja:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



Hiperboloide de dos hojas:

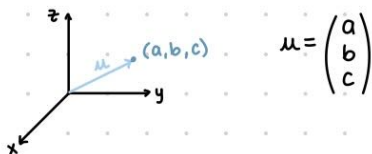
$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Clase 15: Vectores

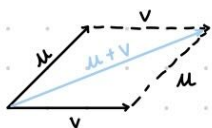
★ Vectores:

Un vector tridimensional es una sucesión de 3 números ordenados. Se denota (a, b, c) o $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. $\mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$

Representación geométrica:



★ Suma de vectores:



★ Multiplicación escalar:



★ Producto punto:

$$u = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} \quad u \cdot v = ad + be + cf$$

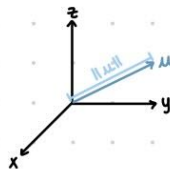
Obs: $u \cdot v$ es un número

Propiedades

$$\begin{aligned} & u \cdot v = v \cdot u \\ & \alpha (u \cdot v) = (\alpha u) \cdot v = u \cdot (\alpha v) \\ & u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w \end{aligned}$$

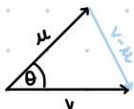
★ Norma:

$$\|u\| = \sqrt{u \cdot u}$$



$\|u\|$ es la magnitud del vector u .

★ Ángulo entre vectores:



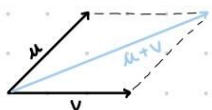
$$\|v - u\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\|\cos(\theta) \longrightarrow \text{Teorema del coseno}$$

$$\|v - u\|^2 = (v - u) \cdot (v - u) = \|v\|^2 - 2v \cdot u + \|u\|^2$$

$$\begin{aligned} & \cancel{\|u\|^2} + \cancel{\|v\|^2} - 2\|u\|\|v\|\cos(\theta) = \cancel{\|v\|^2} - 2v \cdot u + \cancel{\|u\|^2} \\ & u \cdot v = \|u\|\|v\|\cos(\theta) \end{aligned}$$

★ Desigualdad triangular:

$$|\|u\| - \|v\|| \leq \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

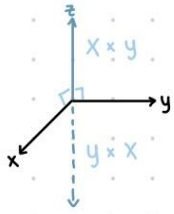


★ Observaciones:

• Ortogonalidad $\begin{cases} u \cdot v = 0 \\ \theta = 90^\circ \longrightarrow \cos(\theta) = 0 \end{cases}$

• Paralelismo $\begin{cases} u \cdot v = \|u\|\|v\| \\ \theta = 0^\circ \text{ o } 180^\circ \longrightarrow \cos(\theta) = \pm 1 \end{cases}$

★ Producto cruz:



$$x \times y = z \quad u \times v = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{bmatrix} \longrightarrow u \times v \text{ es un vector de } \mathbb{R}^3 \text{ ortogonal a } u \text{ y } v.$$

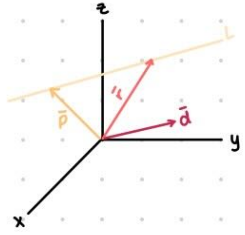
$$\|u \times v\| = \|u\| \|v\| \sin(\theta)$$

Observaciones:

- * $u \times v = -u \times v$
- * $\lambda (u \times v) = (\lambda u) \times v = u \times (\lambda v)$
- * $u \times (v + w) = u \times v + u \times w$
- * $u \cdot (v \times w) = (u \times v) \cdot w$

Clase 18: ecuaciones de recta y planos

★ Ecuación de la recta:



Teniendo \vec{p} un vector con coordenadas en la recta L conocidos y el vector \vec{d} la dirección de la recta L , la forma vectorial de L está dado por:

$$\vec{r} = \vec{p} + \lambda \vec{d}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

vector posición direc.

ecuación vectorial

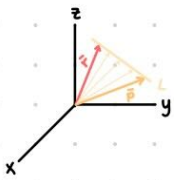
$$\begin{aligned} x &= x_0 + \lambda a \\ y &= y_0 + \lambda b \\ z &= z_0 + \lambda c \end{aligned}$$

ecuaciones paramétricas

$$\lambda = \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

ecuaciones simétricas

★ Segmento de recta:



$$\vec{w}(t) = (1-t)\vec{r} + t\vec{p} \longrightarrow t \in [0, 1]$$

$$\vec{w}(0) = \vec{r}$$

$$\vec{w}(1) = \vec{p}$$

★ Ejemplos:

1. Determine la ecuación vectorial, ecuaciones paramétricas y simétricas de la recta que pasa por los puntos $(-8, 1, 4)$ y $(3, -2, 4)$. Además determine en qué punto intersecciona al plano xy .

$$\vec{d} = \begin{bmatrix} -8-3 \\ 1+2 \\ 4-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{p} = \begin{bmatrix} -8 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \vec{r} = \begin{bmatrix} -8 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -11 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{Forma vectorial}$$

$$\left. \begin{aligned} x &= -8 - 11\lambda \\ y &= 1 + 3\lambda \\ z &= 4 \end{aligned} \right\} \text{ecuaciones paramétricas}$$

$$\lambda = \frac{x+8}{-11} = \frac{y-1}{3}, \quad z=4 \quad \left\} \text{ecuaciones simétricas}$$

Intersección con el plano xy :

Para que interseccione el plano xy , $z=4 \longrightarrow$ por lo tanto la recta no intersecciona a xy .

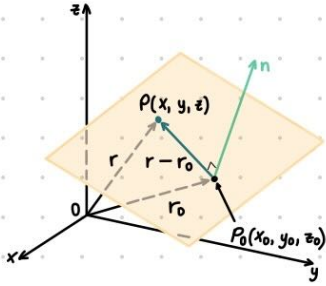
* Intersección con el plano xz

necesario que $y=0$

$$\left. \begin{aligned} - 0 &= 1 + 3\lambda \longrightarrow \lambda = -\frac{1}{3} \\ - x &= -8 - 11\lambda = -\frac{13}{3} \\ - z &= 4 \end{aligned} \right\} \text{punto de intersección } \left(-\frac{13}{3}, 0, 4\right)$$

Clase 19: Ecuación del plano

★ Ecuación del plano:



$$n = (a, b, c)$$

$$r = (x, y, z)$$

$$r_0 = (x_0, y_0, z_0)$$

$$n \cdot (r - r_0) = 0 \longrightarrow \text{Ecuación vectorial}$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \longrightarrow \text{Ecuación escalar}$$

$$ax + by + cz = \underbrace{ax_0 + by_0 + cz_0}_{d \text{ cte}}$$

$$ax + by + cz = d \longrightarrow \text{Ecuación lineal}$$

* Observación:

- Si $d = 0$, el plano pasa por el origen
- Si $d \neq 0$, el plano NO pasa por el origen

★ Ejemplos:

Encuentre el punto en el cual la recta de ecuaciones paramétricas $x = 2 + 3t$, $y = -4t$, $z = 5 + t$, interseca al plano de ecuación $4x + 5y - 2z = 18$.

$$4(2 + 3t) + 5(-4t) - 2(5 + t) = 18$$

$$8 + 12t - 20t - 10 - 2t = 18$$

$$-10t - 2 = 18$$

$$-10t = 20$$

$$t = -2$$

$$x = 2 + 3(-2) = -4$$

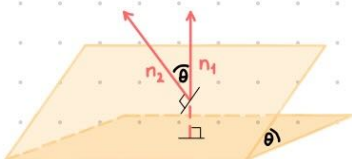
$$y = -4(-2) = 8$$

$$z = 5 + (-2) = 3$$

$$\text{punto de intersección} = (-4, 8, 3)$$

★ Intersección de planos:

- 2 planos son paralelos si sus vectores normales son paralelos
- 2 planos que no son paralelos se intersectan en una recta. El ángulo entre los planos se define como el ángulo entre sus vectores normales.



$$n_1 \cdot n_2 = \|n_1\| \|n_2\| \cos(\theta)$$

$$\|n_1 \times n_2\| = \|n_1\| \|n_2\| \sin(\theta)$$

★ Ejemplos:

Determine el ángulo entre los planos $x+y+z=1$ y $x-2y+3z=1$. Luego, encuentre las ecuaciones simétricas de la recta intersección entre los planos.

$$\left. \begin{array}{l} n_1 = (1, 1, 1) \\ n_2 = (1, -2, 3) \end{array} \right\} \begin{array}{l} n_1 \cdot n_2 = 1 - 2 + 3 = 2 \\ \cos(\theta) = \frac{n_1 \cdot n_2}{\|n_1\| \|n_2\|} = \frac{2}{\sqrt{42}} \\ \theta = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{42}}\right) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} d = (a, b, c) \longrightarrow \begin{array}{l} d \cdot n_1 = 0 \\ d \cdot n_2 = 0 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} a + b + c = 0 \\ a - 2b + 3c = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} a = 2b - 3c \\ 2b - 3c + b + c = 0 \\ 3b - 2c = 0 \\ b = \frac{2}{3}c \\ a = -\frac{5}{3}c \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \vec{d} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{3}c \\ \frac{2}{3}c \\ c \end{bmatrix} = \frac{1}{3}c \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \end{array} \right. \\ \text{vector director} \end{array}$$

Buscamos un punto de L:

$$\left. \begin{array}{l} x=0 \Rightarrow \begin{array}{l} y+z=1 \\ z=1-y \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} -2y+3z=1 \\ -2y+3-3y=1 \\ -5y=-2 \\ y=\frac{2}{5} \end{array} \\ \Rightarrow z=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5} \end{array} \right\} \text{punto } \left(0, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

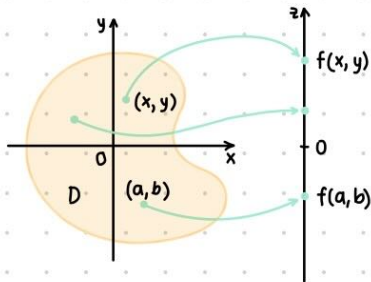
Ecuación de la recta:

$$\frac{x-0}{-5} = \frac{y-\frac{2}{5}}{2} = \frac{z-\frac{3}{5}}{3}$$

Clase 20: Funciones de varias variables

★ Función de dos variables:

Una función de dos variables es una función de la forma $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ que asigna un par ordenado (x, y) del dominio D a un número real $f(x, y)$.



$$D = \text{Dom}(f) = \{ (x, y) \mid f(x, y) \text{ es un número real} \}$$

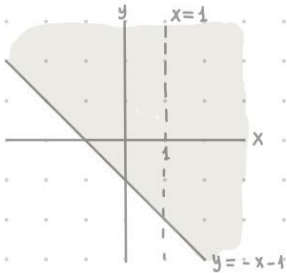
$$\text{Rec}(f) = \underset{\text{rango}}{\text{Ran}(f)} = \{ f(x, y) \mid (x, y) \in D \}$$

z es la variable dependiente y x e y son las variables independientes

★ Ejemplo:

Determine el dominio de $f(x, y) = \frac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$

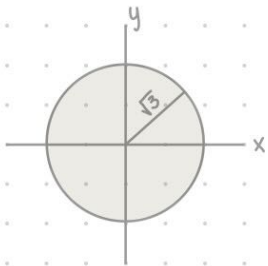
$$\begin{aligned} x+y+1 &\geq 0 & x-1 &\neq 0 \\ y &\geq -x-1 & x &\neq 1 \end{aligned}$$



$$\text{Dom}(f) = \{ (x, y) \mid y \geq -x-1 \text{ y } x \neq 1 \}$$

Determine el dominio y el recorrido de $g(x, y) = \sqrt{3-x^2-y^2}$

$$3-x^2-y^2 \geq 0 \longrightarrow x^2+y^2 \leq 3 \quad (\text{circunferencia de radio } \sqrt{3})$$

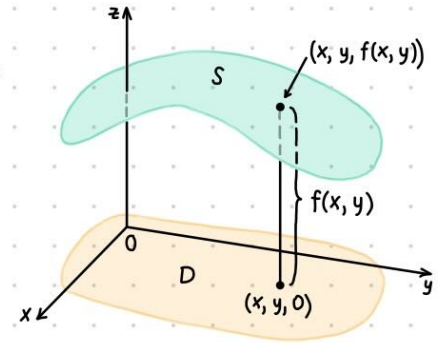


$$\begin{aligned} (x, y) \in \text{Dom}(g) &\implies \left. \begin{aligned} 0 &\leq x^2+y^2 \leq 3 \\ -3 &\leq -x^2-y^2 \leq 0 \\ 0 &\leq 3-x^2-y^2 \leq 3 \\ 0 &\leq \sqrt{3-x^2-y^2} \leq \sqrt{3} \\ 0 &\leq g(x, y) \leq \sqrt{3} \end{aligned} \right\} \text{Rec}(g) = [0, \sqrt{3}] \end{aligned}$$

★ Gráfico:

El gráfico de una función $z = f(x, y)$ es el conjunto de puntos de \mathbb{R}^3 de la forma:

$$\begin{aligned}\text{Graf}(f) &= \{(x, y) \mid z = f(x, y), (x, y) \in \text{Dom}(f)\} \\ &= \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in \text{Dom}(f)\}\end{aligned}$$



★ Ejemplo:

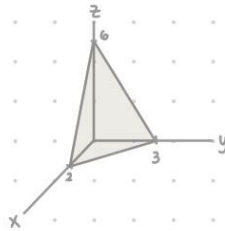
Grafique la función $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$

$$f(0, 0) = 6$$

$$z = 6 - 3x - 2y$$

$$z = 0, y = 0 \rightarrow 0 = 6 - 3x \\ x = 2$$

$$z = 0, x = 0 \rightarrow 0 = 6 - 2y \\ y = 3$$



$$\begin{aligned}f(x, y) &= 6 - 3x - 2y = z \\ 6 &= 3x + 2y + z \rightarrow \vec{n} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

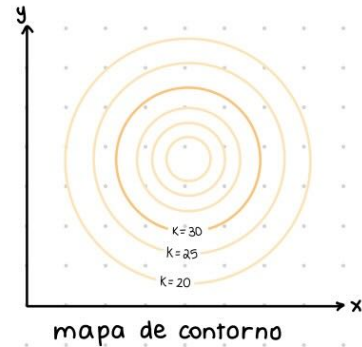
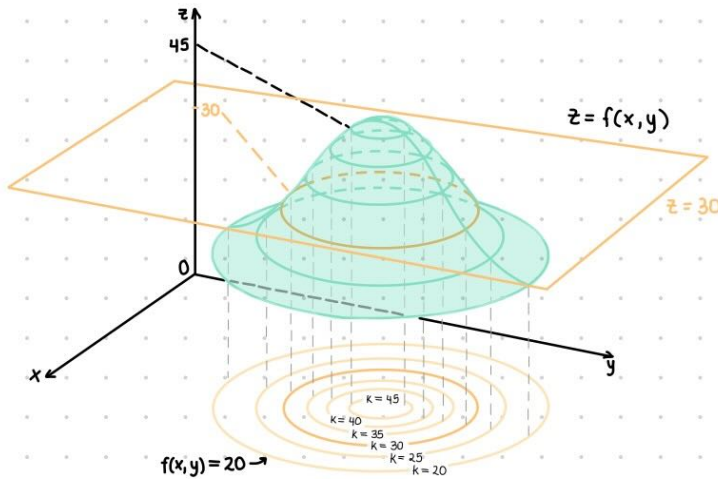
¡Muy importante aprenderse las ecuaciones y sus gráficas de la clase 14!

Clase 21: Funciones de varias variables

★ Curvas de nivel:

Las curvas de nivel (o líneas de contorno) de una función $f(x,y)$ son los puntos del dominio de f que satisfacen las ecuaciones $f(x,y) = k$, donde k es una constante.

Ejemplo:



★ Ejemplo:

a) Determine las curvas de nivel de la función $f(x,y) = \sqrt{1-4x^2-y^2}$

$$f(x,y) = K \text{ constante}$$

$$K=0: 4x^2 + y^2 = 1$$

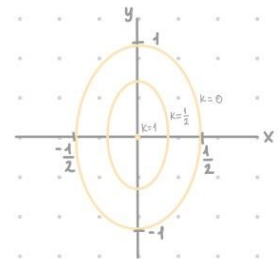
$$K = \frac{1}{2}: 4x^2 + y^2 = 1 - \frac{1}{4}$$

$$4x^2 + y^2 = \frac{3}{4}$$

$$16x^2 + 4y^2 = 3$$

$$y=0: 16x^2 = 3$$

$$|x| = \frac{\sqrt{3}}{4}$$



$$\sqrt{1-4x^2-y^2} = K > 0$$

$$1-4x^2-y^2 = K^2$$

$$4x^2 + y^2 = 1 - K^2 \text{ (elipses)}$$

$$K=1: 4x^2 + y^2 = 0$$

$$\rightarrow (x,y) = (0,0)$$

Ojo: No hay curvas de nivel para $K < 0$ y $K > 1$

b) Haga un mapa de contorno del plano $3x + 2y = 1 + z$

$$f(x,y) = 3x + 2y - 1 = K$$

$$K=0: 3x + 2y - 1 = 0$$

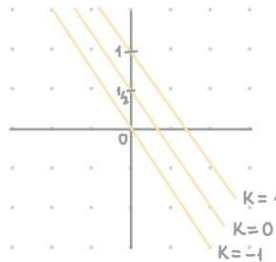
$$y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$K=1: 3x + 2y = 2$$

$$y = -\frac{3}{2}x + 1$$

$$K=-1: 3x + 2y - 1 = -1$$

$$y = -\frac{3}{2}x$$



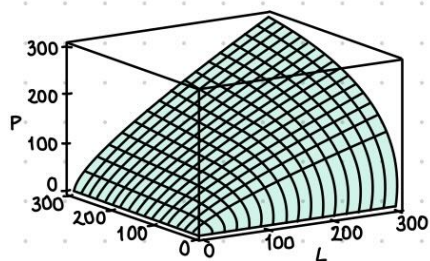
★ Cobb-Douglas:

$$P(L, K) = b L^{\alpha} K^{1-\alpha}$$

↗ Capital
 ↘ Mano de obra
 ↙ Producción

• Caso particular:

$$P(L, K) = 1,01 L^{0,75} K^{0,25}$$

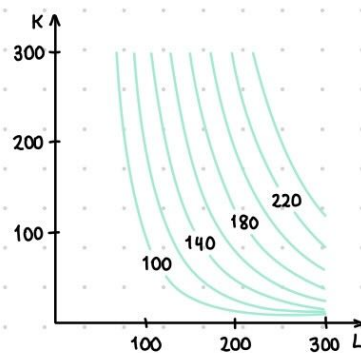


curvas de nivel:

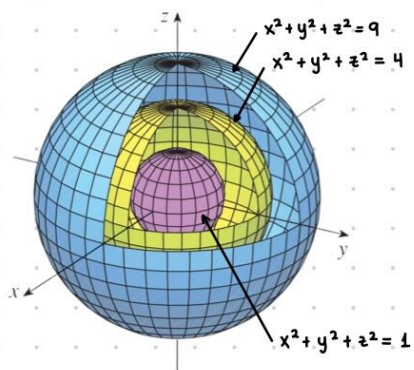
$$1,01 L^{0,75} K^{0,25} = \alpha \text{ cte}$$

$$L^{0,75} = \left(\frac{\alpha}{1,01} \right) \frac{1}{K^{0,25}}$$

$$L = \left(\frac{\alpha}{1,01} \right)^{\frac{4}{3}} \frac{1}{K^{\frac{1}{3}}}$$



★ Superficies de nivel:



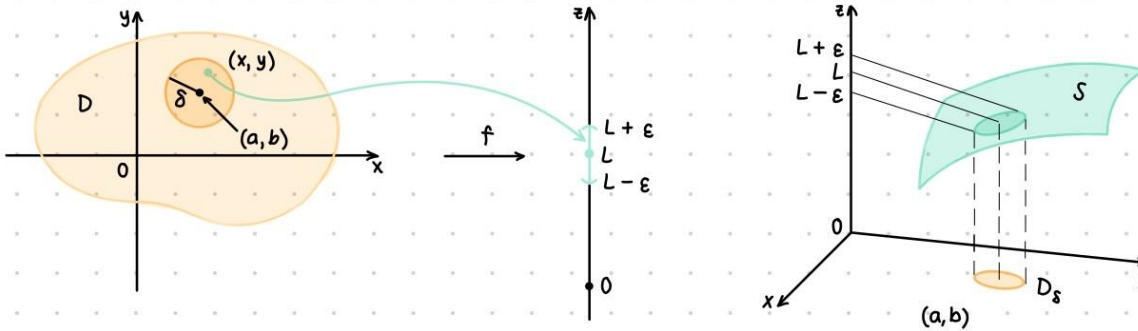
Clase 22: Límites

★ Límite en 2 variables:

Sea f una función de dos variables cuyo dominio D contiene puntos arbitrariamente cercanos a (a,b) . Entonces, decimos que el límite de $f(x,y)$ cuando (x,y) tiende a (a,b) es L y escribimos:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$$

si para todo número $\varepsilon > 0$ hay un correspondiente número $\delta > 0$ tal que si $(x,y) \in D$ y $0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$ entonces $|f(x,y) - L| < \varepsilon$.



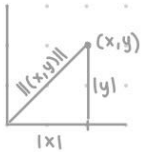
Entonces, ¿cómo calculamos límites?

- Puede usar todas las leyes de los límites de 1 variable (suma, resta, multiplicación y división) cuando apliquen.
- Siempre que pueda evaluar un límite, hágalo
- Gran ayuda: Teorema del Acotamiento (sandwich)

★ Ejemplos:

1. Demuestre que el siguiente límite existe y calcúlelo: $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2}$

$$0 \leq \left| \frac{3x^2y}{x^2+y^2} \right| = \frac{3|x|^2|y|}{x^2+y^2} \leq \frac{3 \frac{\|(x,y)\|^2}{2} \|(x,y)\|}{\|(x,y)\|^2} = 3 \|(x,y)\|$$



$$|x| \leq \|(x,y)\|, \quad |y| \leq \|(x,y)\|, \quad \|(x,y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Como $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 3 \|(x,y)\| = 0$, entonces

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} = 0$$

2. Demuestre que el siguiente límite no existe: $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

$$x=y: \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-x^2}{x^2+x^2} = 0$$

$$x=0: \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y^2}{y^2} = -1$$

Por lo tanto, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ no existe.

$$3. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4} :$$

$$x=y^2: \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^4}{2y^4} = \frac{1}{2}$$

$$x=0: \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y^4} = 0$$

$$x=y: \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^2+x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1+x^2} = 0$$

Por lo tanto, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ no existe

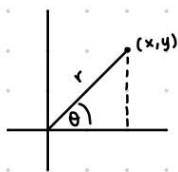
$$4. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x+y)}{x+3y} :$$

$$y=0: \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$x=0: \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(y)}{3y} = \frac{1}{3}$$

Por lo tanto, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x+y)}{x+3y}$ no existe

★ Cambio a coordenadas polares:



$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos(\theta) \\ y &= r \sin(\theta) \end{aligned} \right\} r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

★ Ejemplos:

$$1. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sin(r^2)}{r^2} = 1$$

$$2. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \lim_{r \rightarrow 0} \arccos\left(\frac{r \cos(\theta)}{r}\right) = \lim_{r \rightarrow 0} \theta = \theta \longrightarrow \text{no existe}$$

$$3. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{\sin(\sqrt{x^2+y^2})} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{e^{-1/r^2}}{\sin(r)} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\frac{e^{-1/r^2}}{r}}{\frac{\sin(r)}{r}} = \frac{0}{1} = 0$$

Clase 23: Continuidad

★ Límites iterados:

Los límites iterados de $f(x,y)$ en (a,b) son

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} \left[\lim_{y \rightarrow b} f(x,y) \right]$$

$$\bullet \lim_{y \rightarrow b} \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x,y) \right]$$

Teorema: Si $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y)$ existe, y un límite iterado existe, entonces son iguales.

Por lo tanto:

- Si el límite existe y ambos límites iterados existen, entonces todos son iguales.
- Si el límite existe, no necesariamente los límites iterados existen.
- Si los límites iterados existen y son diferentes, entonces el límite no existe.
- Si algún límite iterado no existe, no se puede asegurar nada del límite.

★ Continuidad:

Una función f es continua en (a,b) si $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = f(a,b)$. Diremos que f es continua en el dominio D si es continua en todos los puntos $(a,b) \in D$.

Más generalmente, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en $u \in \mathbb{R}^n$ si $\lim_{x \rightarrow u} f(x) = f(u)$. Es decir, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|x - u\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(u)| < \varepsilon$

★ Ejemplos:

$$1. f(x,y) = \begin{cases} \frac{x-y}{x+y} & \text{si } x+y \neq 0 \\ 0 & \text{si } x+y = 0 \end{cases}$$

Continuidad en $(0,0)$:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x,y) \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x-y}{x+y} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} (1) = 1 \\ \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x,y) \right) &= \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-y}{x+y} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} (-1) = -1 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x-y}{x+y} \text{ no existe} \rightarrow \text{por lo tanto } f(x,y) \text{ no es} \\ &\text{continua en } (0,0). \end{aligned}$$

¿Dónde es continua $f(x,y)$? \rightarrow Si $(a,b) \notin \{(x,y) \mid x+y=0\}$, entonces $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{x-y}{x+y} = \frac{a-b}{a+b} = f(a,b)$
 $\rightarrow f(x,y)$ es continua en todos los puntos fuera de la recta $x+y=0$

$$2. f(x,y) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

Si $(x,y) = (0,0)$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\lim_{y \rightarrow 0} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right) \right] \longrightarrow \text{Este límite no existe}$$

No puede asegurar nada sobre $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$

$$f(x,y) = x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right), \quad y \neq 0$$

$$0 \leq |f(x,y)| = \left| x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right) \right| \leq |x| \cdot 1 \longrightarrow \text{Como } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |x| = 0, \text{ entonces } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right) = 0 = f(0,0)$$

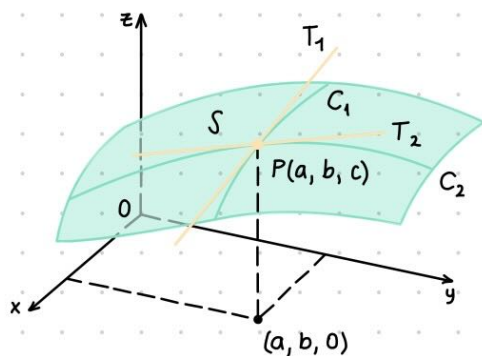
↓
f es continua en (0,0)

$$\text{Además, si } (a,b) \in L \longrightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right) = a \operatorname{sen}\left(\frac{1}{b}\right) \longrightarrow f \text{ es continua en } (a,b)$$

$$\text{Si } (a,b) \in L, (a,b) \neq (0,0) \left\{ \begin{array}{l} \longrightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right) = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,0)} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right) = ? \text{ No existe} \\ \longrightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (a,0)} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right) = \lim_{y \rightarrow 0} a \operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right) = ? \text{ No existe} \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} f \text{ no es continua sobre} \\ L, \text{ fuera del origen} \end{array} \right\}$$

Clase 24: Derivadas parciales

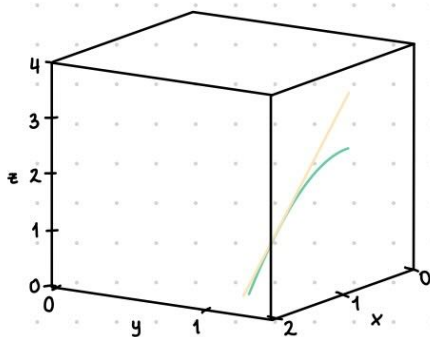
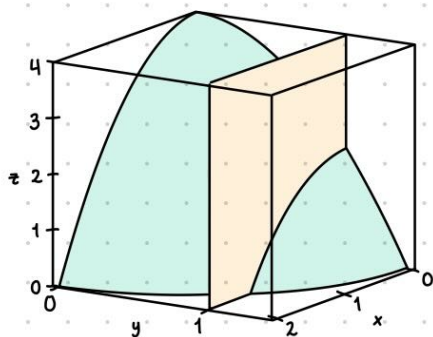
★ Derivadas parciales:



$$f_x(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} \longrightarrow \text{pendiente de } T_1$$

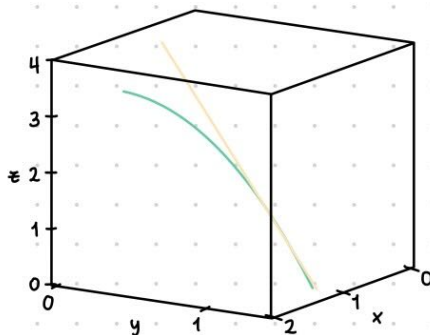
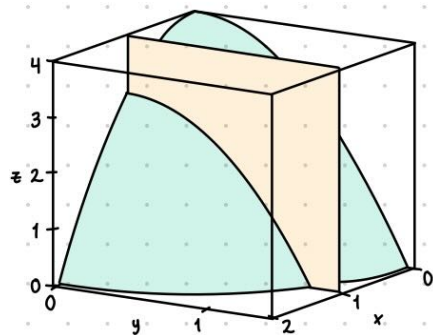
$$f_y(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, b+h) - f(a, b)}{h} \longrightarrow \text{pendiente de } T_2$$

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$



$$f_x(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = D_x f(a, b)$$

>>> Se toma y como una constante y se deriva con respecto a x.



$$f_y(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = D_y f(a, b)$$

>>> Se toma x como una constante y se deriva con respecto a y.

★ Ejemplos:

1. Si $f(x, y) = 4 - x^2 - 2y^2$, determine $f_x(1, 1)$ y $f_y(1, 1)$, e interprete estos números como pendientes.

$$f_x(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = D_x f(a, b)$$

$$f_x(x, y) = -2x \implies f_x(1, 1) = -2$$

$$f_y(x, y) = -4y \implies f_y(1, 1) = -4$$

2. Si $f(x,y) = \sin\left(\frac{x}{1+y}\right)$, calcule $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \cdot \left(\frac{1}{1+y}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \cdot \frac{-x}{(1+y)^2}$$

3. Calcule $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ si z se define implícitamente como una función de x e y mediante la ecuación:

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1.$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz) = \frac{\partial}{\partial x} (1)$$

$$3x^2 + 0 + 3z^2 \cdot z_x + 6y(z + xz_x) = 0$$

$$3z^2 z_x + 6yxz_x = -3x^2 - 6yz$$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-3x^2 - 6yz}{3z^2 + 6yx}}$$

Ejercicio: $\frac{\partial z}{\partial y}$ (solución: $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y^2 + 2xz}{z^2 + 2xy}$)

→ pag. 905 (7ª versión)

Clase 25: Derivadas parciales de orden superior

★ Derivadas parciales de orden superior:

Segundas derivadas parciales:

$$\bullet (f_x)_x = f_{xx} = f_{11} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$\bullet (f_x)_y = f_{xy} = f_{12} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

$$\bullet (f_y)_y = f_{yy} = f_{22} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

$$\bullet (f_y)_x = f_{yx} = f_{21} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

★ Ejemplo:

Determine las segundas derivadas parciales de $f(x,y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 2xy^3 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2 - 4y \end{array} \right\} \begin{array}{l} \bullet \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x + 2y^3 \\ \bullet \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x^2y - 4 \end{array} \quad \begin{array}{l} \bullet \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6xy^2 \\ \bullet \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 6xy^2 \end{array}$$

★ Teorema de Clairaut:

Suponga que f está definida sobre un disco D que contiene el punto (a,b) . Si tanto la función f_{xy} como f_{yx} son continuas sobre D , entonces:

$$f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$$

★ Ejemplo:

Calcule f_{xxyz} si $f(x,y,z) = \sin(3x + yz)$:

$$f_x = 3 \cos(3x + yz)$$

$$f_{xx} = -9 \sin(3x + yz)$$

$$f_{xxy} = -9z \cos(3x + yz)$$

$$f_{xxyz} = -9 \cos(3x + yz) + 9yz \sin(3x + yz)$$