Rafael Benguria (2002)

PROBLEMAS RESUELTOS DE Mecánica Clásica

2ª Edición

Rafael Benguria D.
María Cristina Depassier T.

Alfaomega

EDICIONES UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

"Problemas Resueltos de Mecánica Clásica"
Rafael Benguria D., María Cristina Depassier T.

Edición original publicada por
© Ediciones Universidad Católica de Chile
de la Pontificia Universidad Católica de Chile

2a. edición

Pitágoras 1139, Col. Del Valle, 03100 México, D.F.

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial
Registro No. 2317

Internet: **http://www.alfaomega.com.mx**
Email: **ventas@alfaomega.com.mx**

ISBN 970-15-0426-7

Impreso en México - Printed in Mexico

PRÓLOGO

Durante varios años Ediciones Universidad Católica de Chile ha venido desarrollando un catálogo de obras con un alto valor didáctico, escritas por reconocidos académicos. Desde hace un lustro, su catálogo se enriquece con obras que la Vicerrectoría Académica de esta casa de estudios, por conducto de la Dirección de Docencia, ha publicado como Colección de Textos Universitarios, los cuales son un meritorio aporte para la comunidad universitaria. Los autores de los libros, en su mayoría profesores titulares de la materia sobre la cual escriben, tienen un alto nivel profesional y estudios de postgrado en importantes universidades de Estados Unidos y Europa.

Por otra parte, Alfaomega Grupo Editor, cuya misión como empresa es la de editores comprometidos con una mejor formación científica y tecnológica en nuestros países, busca permanentemente los materiales que mejor respondan a las necesidades de nuestro tiempo, que de preferencia hayan sido concebidos por autores latinoamericanos acordes a las necesidades de los centros de educación superior de nuestro continente.

Nos complace presentar un convenio suscrito entre Ediciones Universidad Católica de Chile y Alfaomega Grupo Editor para coeditar 30 títulos seleccionados de esa prestigiosa institución austral, que permitirá a través de la cadena de distribución de Alfaomega, ofrecer estos libros a un universo más amplio de profesores y estudiantes de toda Latinoamérica.

Los editores

CONTENIDO

PREFACIO

Esta es una colección de problemas de mecánica para alumnos de ciencias, ingeniería y carreras afines. Está dirigida a estudiantes de un curso intermedio de mecánica, y presupone conocimientos básicos de cálculo. La colección consta de alrededor de 100 problemas resueltos que hemos dividido bajo siete tópicos distintos. Sin embargo, esta división es arbitraria, y muchos de los problemas podrían haber sido puestos en un capítulo o en otro.

Como en cualquier otra materia, el alumno debe hacer ejercicios para poder comprenderla. Sugerimos que antes de ver la solución trate él mismo de resolver los problemas con los conocimientos que tiene. Las soluciones dadas en el texto sólo deberían servir para dar mayor seguridad al alumno en la comprensión de la materia y nunca deberían reemplazar la ejercitación personal que él requiere. Los problemas que aquí se presentan pueden ser resueltos de diversas maneras, y a veces hemos presentado más de una forma de resolverlos. Algunos problemas son de mayor dificultad y se presentan más bien como un desafío para el alumno interesado, hecho que se indica en su solución mediante un asterisco.

Aprovechamos esta ocasión para agradecer a numerosos profesores junto a los cuales hemos enseñado cursos de mecánica. Muy especialmente a Ninoslav Bralić, Leopoldo Infante, Miguel Kiwi, Ricardo Ramírez, Carlos Rodríguez y Leopoldo Soto, de la Pontificia Universidad Católica de Chile y Patricio Aceituno y Francisco Brieva, de la Universidad de Chile.

Agradecemos al profesor Ignacio Lira quien compartió sus conocimientos de LaTeX en forma desinteresada.

Agradecemos también a la Dirección de Docencia de la Vicerrectoría Académica de la Pontificia Universidad Católica que nos apoyó en la elaboración de esta colección de problemas.

Capítulo 1

Cinemática

Los problemas de cinemática son muchas veces simples aplicaciones de geometría. En este capítulo resolvemos problemas de cinemática de diversa dificultad. Algunos de ellos han sido escogidos porque sus resultados serán utilizados en capítulos posteriores. Otros, para desarrollar la destreza del estudiante en el uso de distintas coordenadas, o para que él sea capaz de escribir en forma algebraica simples relaciones geométricas. También hemos incluido algunos problemas que deberían representar un desafío. En este capítulo hemos incluido los problemas típicos de balística (lanzamiento de proyectiles), los que en estricto rigor deberían haber sido incluidos en el capítulo de dinámica.

1. Una partícula de masa m se mueve en un círculo de radio R con velocidad angular constante ω. Encuentre la velocidad y la aceleración de la partícula.

   Solución:

   Dada la trayectoria descrita por la partícula lo más conveniente es utilizar coordenadas polares para describir su movimiento. Aquí desarrollaremos el problema en cartesianas y polares.

   i) Coordenadas Cartesianas: Si elegimos ejes cartesianos x e y con el origen en el centro de la circunferencia, el vector posición de la partícula está dado por

   $$\vec{r}(t) = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath} = R\cos(\theta)\hat{\imath} + R\,\mathrm{sen}\,(\theta)\hat{\jmath}, \tag{1}$$

   en que el ángulo $\theta = \omega t$ (siempre que uno elija la orientación de los ejes de modo que la partícula está inicialmente en el punto $(R, 0)$). Aquí $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$ son vectores unitarios a lo largo de los ejes x e y respectivamente. De (1) obtenemos de inmediato la velocidad

   $$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = R\omega(-\mathrm{sen}\,(\omega t)\hat{\imath} + \cos(\omega t)\hat{\jmath}). \tag{2}$$

Nótese que $\vec{v}$ es perpendicular a $\vec{r}$, i.e., $\vec{v}\cdot\vec{r}\equiv 0$ en todo instante, pues el vector velocidad es tangente a la circunferencia de radio R (es decir, a la trayectoria de la partícula). Finalmente, la aceleración se obtiene derivando la ecuación (2):

$$\vec{a}(t)=\frac{d\vec{v}}{dt}=-R\omega^2(\cos(\omega t)\hat{\imath}+\operatorname{sen}(\omega t)\hat{\jmath}) \tag{3}$$

y, comparando con (1), obtenemos

$$\vec{a}=-\omega^2\vec{r}. \tag{4}$$

Es decir, la aceleración está dirigida hacia el centro del círculo. Por tal motivo se dice que la aceleración es *centrípeta*.

ii) Coordenadas Polares: Elegimos como origen de coordenadas el centro del círculo y como eje polar al eje que va desde el origen a la posición de la partícula en el instante $t=0$. Si llamamos (ρ,θ) a las coordenadas polares, para nuestro caso particular tendremos

$$\rho=R \qquad \text{y} \qquad \theta=\omega t, \tag{5}$$

de donde obtenemos de inmediato $\dot{\rho}=0$, $\ddot{\rho}=0$, $\dot{\theta}=\omega$ y $\ddot{\theta}=0$. En general, en coordenadas polares, el vector velocidad está dado por

$$\vec{v}=\dot{\rho}\hat{\rho}+\rho\dot{\theta}\hat{\theta}, \tag{6}$$

en tanto que la aceleración está dada por

$$\vec{a}=(\ddot{\rho}-\rho\dot{\theta}^2)\hat{\rho}+(2\dot{\rho}\dot{\theta}+\rho\ddot{\theta})\hat{\theta}. \tag{7}$$

Aplicando estas expresiones a nuestro caso particular, obtenemos de inmediato

$$\vec{v}=R\omega\hat{\theta} \tag{8}$$

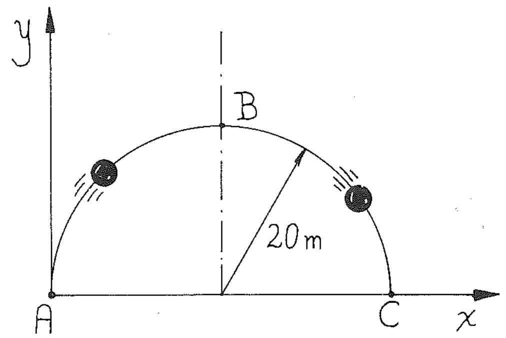
y

$$\vec{a}=-R\omega^2\hat{\rho}. \tag{9}$$

Como es de esperar, la velocidad (ecuación (8)) es tangencial, en tanto que la aceleración (ecuación (9)) es radial (centrípeta).

2. Una partícula viaja a lo largo de la curva de la figura desde A a B en un segundo. Si se demora tres segundos en ir de A a C, determine la

velocidad media cuando va de B a C. ¿Cuál es la rapidez media al ir de B a C?



Solución:

Para ir de B a C tarda 2 segundos. La velocidad promedio entre B y C es

$$< \vec{v} >_{BC}= \frac{\vec{r}_C - \vec{r}_B}{t_{BC}}.$$

En este caso, $\vec{r}_C = 40\hat{\imath}$, $\vec{r}_B = 20\hat{\imath} + 20\hat{\jmath}$. Reemplazando en la fórmula anterior nos queda

$$< \vec{v} >_{BC}= \frac{20\hat{\imath} - 20\hat{\jmath}}{2} = 10(\hat{\imath} - \hat{\jmath}).$$

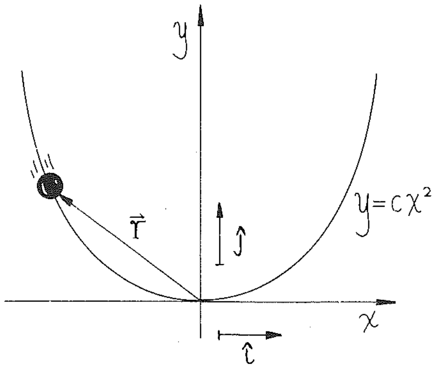
El módulo de la velocidad media es $\sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2} = 14,14$ [m/s].

La rapidez media entre B y C es

$$< v >_{BC}= \frac{s_C - s_B}{2} = \frac{20\frac{\pi}{2}}{2} = 5\pi[\mathrm{m/s}] = 15,71[\mathrm{m/s}]$$

La rapidez media no es igual al módulo de la velocidad media como se aprecia en este ejemplo.

3. Una partícula se mueve a lo largo de una trayectoria parabólica definida por la ecuación $y = cx^2$ con una rapidez constante v_0. Encuentre expresiones para la velocidad $\vec{v}$ y aceleración $\vec{a}$ de la partícula cuando se encuentra en la posición (x_0, y_0).



Solución:

En un instante cualquiera,

$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} = x\hat{\imath} + cx^2\hat{\jmath}.$$

La velocidad

$$\vec{v} = \dot{x}\hat{\imath} + 2cx\dot{x}\hat{\jmath} \tag{1}$$

y la rapidez es el módulo de $\vec{v}$. Esto es,

$$\vec{v}^2 = \dot{\vec{r}}^2 = \dot{x}^2(1 + 4c^2x^2) = v_0^2$$

de donde despejamos

$$\dot{x} = \frac{v_0}{(1 + 4c^2x^2)^{1/2}} \tag{2}$$

en que hemos elegido el signo más ya que la partícula se desplaza de izquierda a derecha. Reemplazando (2) en (1) obtenemos la velocidad

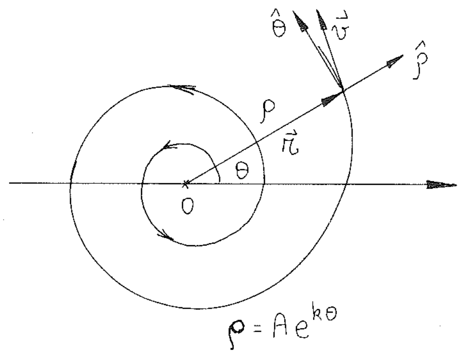
$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{v_0}{(1 + 4c^2x^2)^{1/2}}[\hat{\imath} + 2cx\hat{\jmath}] \tag{3}$$

La aceleración está dada por $\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\hat{\imath} + 2c\dot{x}^2\hat{\jmath} + 2cx\ddot{x}\hat{\jmath}$, expresión que usando (2) y (3) se puede escribir como

$$\vec{a} = \frac{2v_0^2c}{(1 + 4c^2x^2)^2}\left[-2cx\hat{\imath} + \hat{\jmath}\right] \tag{4}$$

Observemos que de (3) y (4) resulta $\vec{a} \cdot \vec{v} = 0$, lo que era de esperar, puesto que $\vec{v}^2$ es constante.

4. Una partícula se mueve en una espiral $\rho = Ae^{k\theta}$ de modo que su rapidez se mantiene constante e igual a v_0. Determine:
a) $\vec{v}$ en función de ρ y θ,
b) $\vec{a}$ en función de ρ y θ.
c) Demuestre que en todo instante la aceleración es perpendicular a la velocidad.
d) Encuentre θ y $\dot{\theta}$ como función del tiempo.



Solución:

a) Como $\rho = Ae^{k\theta}$, se tiene $\dot{\rho} = Ake^{k\theta}\dot{\theta}$ y $\ddot{\rho} = Ake^{k\theta}\ddot{\theta} + Ak^2e^{k\theta}\dot{\theta}^2$. Entonces,

$$\vec{v} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\theta}\hat{\theta} = Ae^{k\theta}\dot{\theta}[k\hat{\rho} + \hat{\theta}].$$

Pero el módulo es constante, $\vec{v}^2 = v_0^2$, esto es $v_0^2 = A^2e^{2k\theta}\dot{\theta}^2(1 + k^2)$, de donde podemos despejar

$$\dot{\theta} = \pm\frac{v_0}{A}e^{-k\theta}(1 + k^2)^{-1/2} \tag{1}$$

en que el signo más es válido si se aleja del origen O y $k > 0$.

Reemplazando (1) en la expresión para $\vec{v}$ obtenemos

$$\vec{v} = v_0(k\hat{\rho} + \hat{\theta})(1 + k^2)^{-1/2}.$$

b) La aceleración está dada por $\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\hat{\rho} + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\hat{\theta}$. Derivando (1) respecto al tiempo obtenemos

$$\ddot{\theta} = -\frac{kv_0}{A}e^{-k\theta}\dot{\theta}(1 + k^2)^{-1/2}. \tag{2}$$

Usando los valores de $\dot{\rho}$, $\ddot{\rho}$, (1) y (2) en la expresión para $\vec{a}$ queda

$$\vec{a} = \frac{v_0^2}{A}e^{-k\theta}(1 + k^2)^{-1}(k\hat{\theta} - \hat{\rho})$$

c) De las expresiones para $\vec{v}$ y $\vec{a}$ obtenidas más arriba, es directo verificar que $\vec{a}\cdot\vec{v} = 0$.

d) Observemos que (1) se puede escribir como

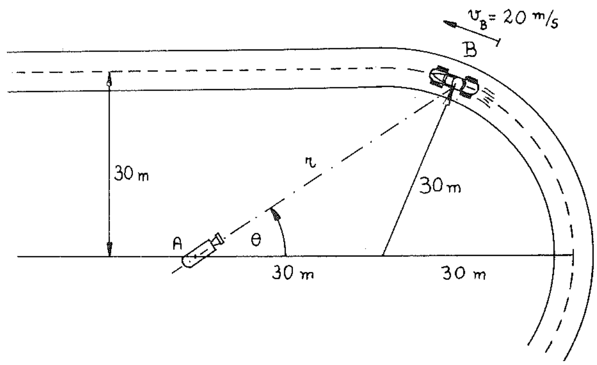
$$\frac{d}{dt}(\mathrm{e}^{k\theta}) = \frac{kv_0}{A}(1+k^2)^{-1/2}$$

expresión directa de integrar. Se obtiene

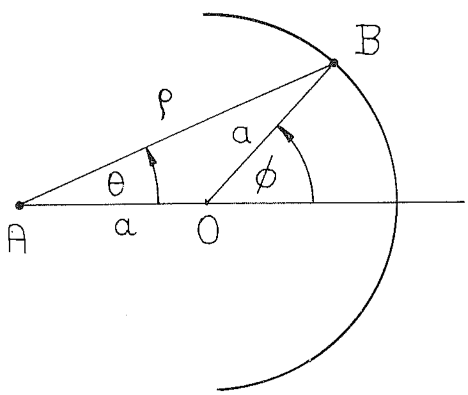
$$\theta(t) = \frac{1}{k}\ln\left[\mathrm{e}^{k\theta_0} + \frac{kv_0}{A}\frac{t}{(1+k^2)^{1/2}}\right]$$

de donde es directo calcular $\dot{\theta}$.

5. Un camarógrafo de TV filma desde el punto A el auto de carrera B que se desplaza en un tramo curvo con una rapidez constante de 20 [m/s]. Determine, para la posición indicada en la figura, la velocidad angular del camarógrafo de modo que en la filmación el auto aparezca en el centro de la pantalla.



Solución:



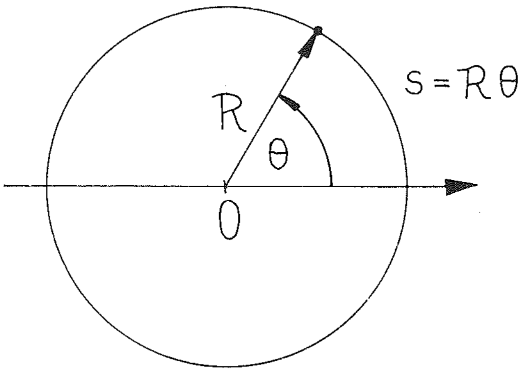
Como el auto se mueve en un tramo circular, su rapidez es $v = \omega r$, de modo que

$$\dot{\phi} = \omega = \frac{v}{r} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}\text{rads/seg}$$

Como el triángulo AOB es isósceles $\phi = 2\theta$ y la velocidad angular del camarógrafo debe ser

$$\dot{\theta} = \frac{\dot{\phi}}{2} = \frac{1}{3}\text{rads/seg.}$$

6. Una partícula describe una circunferencia de radio R. El arco que recorre está dado por $s(t) = R\ln(1 + \alpha t)$ en que α es constante. Calcular las componentes normal y tangencial de la aceleración en función del tiempo.



Solución:

Como $s(t) = R\ln(1 + \alpha t)$, el ángulo θ de la figura está dado por $\theta(t) = \ln(1 + \alpha t)$ y sus derivadas $\dot{\theta} = \alpha(1 + \alpha t)^{-1}$ y $\ddot{\theta} = -\alpha^2(1 + \alpha t)^{-2}$.

Conviene usar coordenadas polares (ρ, θ), $\rho = R$ fijo y $\dot{\rho} = 0$, $\ddot{\rho} = 0$. En estas coordenadas la aceleración está dada por

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\hat{\rho} + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\hat{\theta}.$$

Reemplazando los valores calculados más arriba, obtenemos la aceleración radial

$$a_\rho = -R\alpha^2(1 + \alpha t)^{-2}$$

y la aceleración tangencial

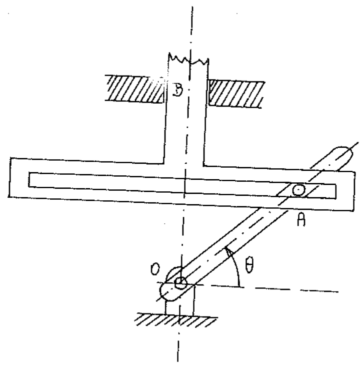
$$a_\theta = -R\alpha^2(1 + \alpha t)^{-2},$$

que es igual a la aceleración radial.

Nota: Se podría replantear el problema de la siguiente manera: ¿Con qué velocidad angular, como función del tiempo, debe recorrer la partícula la circunferencia para que sus componentes tangencial y radial de la aceleración sean iguales?

7. El mecanismo que se muestra en la figura adjunta transforma un movimiento de rotación en otro lineal. El vástago A, fijo en la barra OA se

encuentra a 8 [cm] de O y desliza en la ranura a medida que el brazo OA gira a una tasa constante de 3 radianes por segundo en el sentido indicado. Como consecuencia de este movimiento la barra B se mueve verticalmente. Describa el movimiento de B y determine su aceleración cuando $\theta = 30°$.



Solución:

B realiza un movimiento vertical. Para describirlo en forma cuantitativa escribamos la ecuación de movimiento de B. La altura de B medida desde O es

$$y_B = \mathrm{OA}\,\mathrm{sen}\,\theta + h$$

en que h es la distancia, fija, desde la ranura a B. Entonces la velocidad de B está dada por

$$\dot{y}_B = \mathrm{OA}\cos\theta\,\dot{\theta}$$

y su aceleración es

$$\ddot{y}_B = -\mathrm{OA}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\dot{\theta}^2 + \mathrm{OA}\cos\theta\,\ddot{\theta}.$$

En este ejemplo, OA $= 0{,}08$ [m], $\ddot{\theta} = 0$, $\dot{\theta} = 3$ [rads/s] y $\theta = 3t$ [rads]. Tenemos entonces,

$$y_B = 0,08\mathrm{sen}\,(3t) + h, \tag{1}$$

$$\dot{y}_B = 0,24\cos(3t) \tag{2}$$

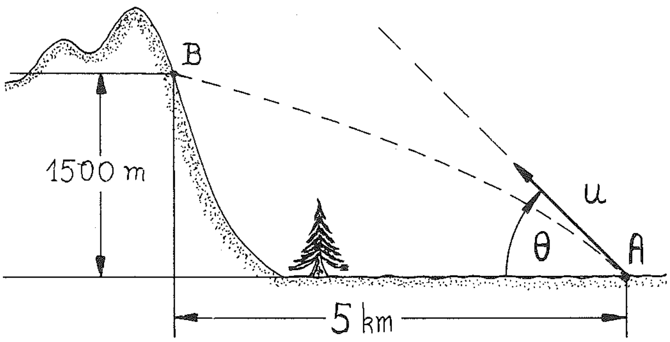
y

$$\ddot{y}_B = -0,72\mathrm{sen}\,(3t). \tag{3}$$

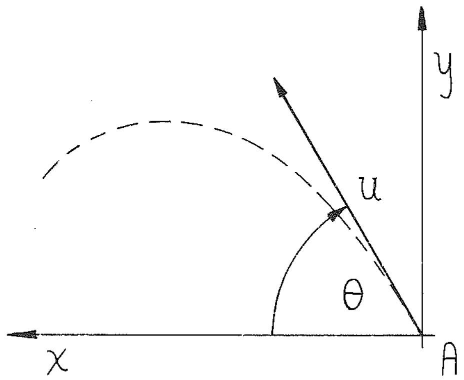
De (1) vemos que B subirá hasta alcanzar la altura máxima $0,08 + h$ y luego descenderá. La aceleración de B cuando $\theta = 30°$ está dada por

$$\ddot{y}_B = -0,72\mathrm{sen}\,(30°) = -0,36[\mathrm{m/s^2}].$$

8. La velocidad de salida de un fusil de largo alcance, situado en A, es $u = 360[\mathrm{m/s}]$. Determinar los dos ángulos de elevación θ que permitirán al proyectil alcanzar el blanco B de la montaña.



Solución:



Usaremos coordenadas cartesianas para referir el movimiento del proyectil. Elegimos x como eje horizontal e y como eje vertical. Referida a estos ejes, la trayectoria del proyectil queda descrita en forma paramétrica, en función del tiempo, como

$$x = u\cos\theta\, t, \tag{1}$$

$$y = u\mathrm{sen}\,\theta\, t - \frac{gt^2}{2}. \tag{2}$$

Eliminando t de estas dos ecuaciones podemos obtener la ecuación de la trayectoria en la forma $y = y(x)$. En efecto, de (1) tenemos,

$$t = \frac{x}{u\cos\theta}$$

y al reemplazar t en (2) obtenemos la ecuación de la trayectoria $y(x)$:

$$y = x\tan\theta - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{u^2\cos^2\theta} \tag{3}$$

Como queremos alcanzar el punto B cuyas coordenadas son $x = 5000$ e $y = 1500$, reemplazando en (3) y simplificando obtenemos

$$3 = 10 \tan\theta - 1,89 \frac{1}{\cos^2\theta} \tag{4}$$

en que hemos usado el valor $g = 9,81[\mathrm{m/s^2}]$. Pero, sabemos que

$$\frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta,$$

entonces de (4) obtenemos una ecuación cuadrática para $\tan(\theta)$:

$$1,89 \tan^2\theta - 10 \tan\theta + 4,89 = 0$$

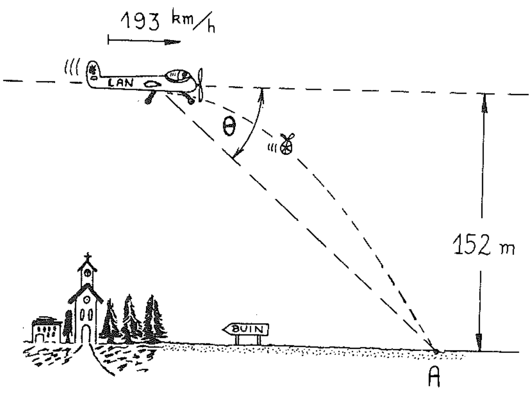
ecuación que tiene dos raíces. Estas son

$$\tan\theta = 4,746 \qquad \text{y} \qquad \tan\theta = 0,545$$

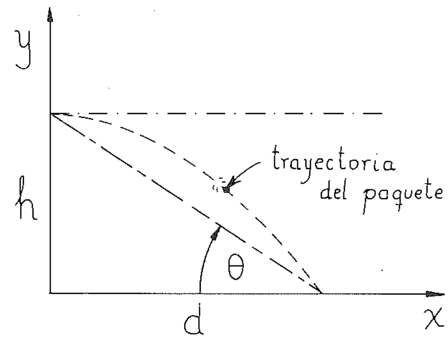
Los valores de θ correspondientes son $\theta = 78,1°$ y $\theta = 28,6°$.

Nota: Nicolo Tartaglia fue el primero en aplicar matemáticas a la solución de los problemas de artillería (*Nova scienza, cioè Invenzione nuovamente trovata, utile per ciascuno speculativo matematico bombardiero*, Venecia 1537). Para referencias históricas, ver por ejemplo: D. E. Smith, *History of Mathematics, vol. 1*, Dover Publications, NY, 1958, pp. 298–299.

9. El piloto de un avión que transporta un paquete de correo a un lugar remoto desea soltarlo en el momento justo para que alcance el punto A. ¿Qué ángulo θ con la horizontal deberá formar la visual al blanco en el instante de lanzamiento? El avión vuela horizontalmente a una altura de 152 [m] con una velocidad de 193 [km/h].



Solución:



Sean x_p e y_p las coordenadas del paquete. El paquete es dejado caer del avión por lo que su velocidad inicial es igual a la del avión. Entonces la trayectoria del paquete queda descrita en forma paramétrica como

$$x_p = ut \tag{1}$$

e

$$y_p = h - \frac{1}{2}gt^2. \tag{2}$$

pues $x_p(0) = 0$, $v_{xp}(0) = u$, la velocidad del avión, $y_p(0) = h$ y $v_{yp}(0) = 0$. El tiempo que tarda en llegar al suelo se determina imponiendo $y_p = 0$ en (2). De este modo encontramos $T = \sqrt{2h/g}$ y por lo tanto $d = x_p(T) = uT = u\sqrt{2h/g}$.

De la figura entonces tenemos que

$$\tan\theta = \frac{h}{d} = \frac{1}{u}\sqrt{\frac{gh}{2}}.$$

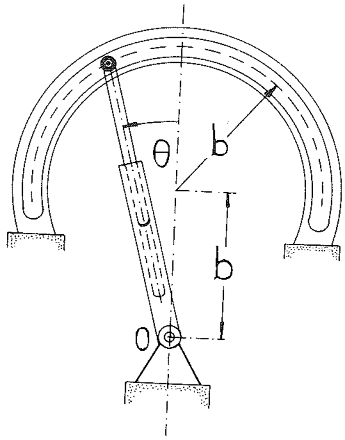
Así,

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{u}\sqrt{\frac{gh}{2}}\right).$$

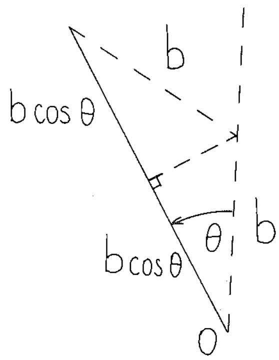
En este caso, $u = 193[\mathrm{km/h}] = 53,61[\mathrm{m/s}]$, $h = 152[\mathrm{m}]$, $g = 9,81[\mathrm{m/s^2}]$ por lo tanto, $\theta = \tan^{-1}(0,509) = 26,99° \approx 27°$.

10. El movimiento del rodillo A en la ranura circular fija, está gobernado por el brazo OA, cuya parte superior desliza libremente en la inferior para acomodarse a la variación de la distancia de A a O al variar θ. Si el brazo tiene una velocidad angular constante, en el sentido contrario al de los punteros del reloj, $\dot{\theta} = K$ durante un intervalo de su movimiento,

determine la aceleración del punto A para cualquier posición en dicho intervalo.



Solución:



Sea $\rho = OA$. Por la descripción del mecanismo tenemos que

$$\rho = 2b\cos\theta, \qquad \dot{\theta} = K,$$

de donde podemos calcular

$$\ddot{\theta} = 0, \quad \dot{\rho} = -2bK\,\text{sen}\,\theta, \qquad \ddot{\rho} = -2b\cos\theta\,K^2.$$

Así la velocidad, que en coordenadas polares está dada por $\vec{v} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\theta}\hat{\theta}$, resulta

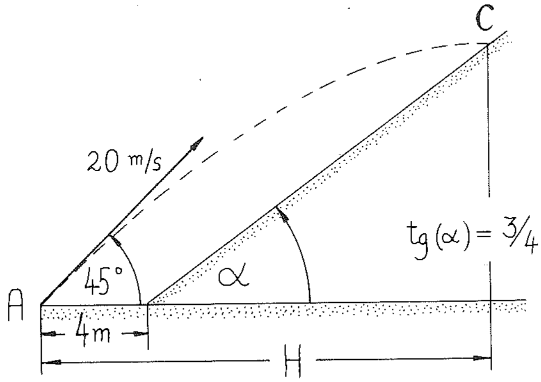
$$\vec{v} = -2b\text{sen}\,(\theta)\dot{\theta}\hat{\rho} + 2b\cos(\theta)\dot{\theta}\hat{\theta} = 2bK(-\text{sen}\,(\theta)\hat{\rho} + \cos(\theta)\hat{\theta})$$

y el módulo de la velocidad es $|\vec{v}| = 2bK$. La aceleración, que en coordenadas polares está dada por $\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\hat{\rho} + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\hat{\theta}$, resulta al reemplazar los valores ya calculados,

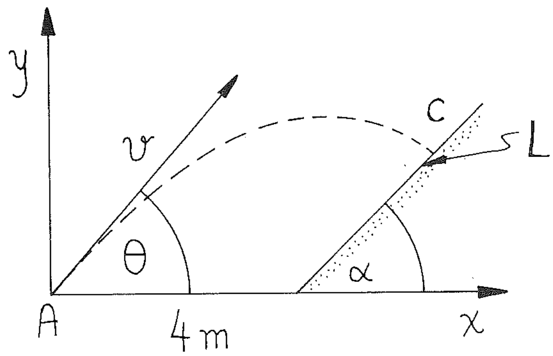
$$\vec{a} = -4bK^2(\cos\theta\hat{\rho} + \text{sen}\,\theta\hat{\theta})$$

y su módulo es $|\vec{a}| = 4bK^2$.

11. Se lanza una pelota desde el punto A de la figura con un ángulo de 45° con respecto a la horizontal y con una rapidez de 20 [m/s]. Encuentre la distancia horizontal recorrida por la pelota en su trayectoria hasta C.



Solución:



Como se vio en el problema 8 la ecuación de la trayectoria es

$$y = x\tan\theta - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{v^2\cos^2\theta}.$$

En este problema $\theta = 45°$ y $v = 20$[m/s], por lo tanto,

$$y = x - \frac{9,81}{400}x^2. \tag{1}$$

La ecuación de la recta L es

$$y = \frac{3}{4}(x-4). \tag{2}$$

La intersección entre las curvas (1) y (2) está determinada por

$$\frac{3}{4}(x-4) = x - \frac{9,81}{400}x^2$$

o, reagrupando términos,

$$x^2 - 10,19x - 122,32 = 0.$$

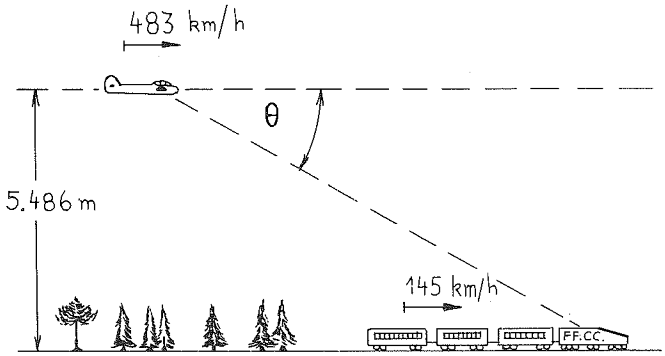
Las raíces de esta ecuación son

$$x_\pm = \frac{1}{2}(10,19 \pm \sqrt{(10,19)^2 + 4 \cdot 122,32}).$$

Sólo la raíz positiva interesa pues H debe ser positivo, por lo tanto,

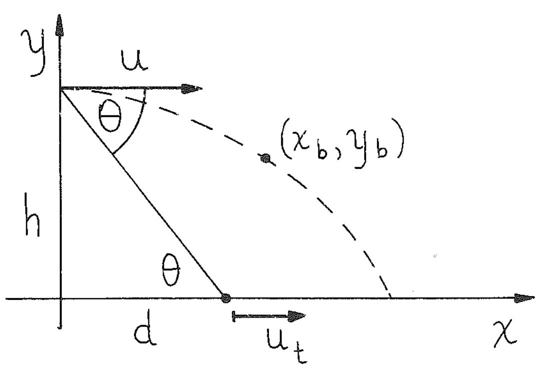
$$H = x_+ = 17,27[\mathrm{m}].$$

12. Un bombardero que vuela con una velocidad horizontal de 483 [km/h] a una altura de 5.486 [m] apunta para dar de lleno a un tren que se mueve con una velocidad constante de 145 [km/h] en el mismo sentido y en el mismo plano vertical que el avión. Determine el ángulo θ que debe formar la visual al blanco con la horizontal en el instante que debe soltarse la bomba.



Solución:

Sean (x_b, y_b) las coordenadas de la bomba y x_t la coordenada del tren.



Llamemos h a la altura del avión y u a la velocidad del avión. Llamemos u_t a la velocidad del tren.

Las ecuaciones paramétricas de la trayectoria de la bomba son

$$x_b = ut$$

e

$$y_b = h - \frac{1}{2}gt^2,$$

en tanto que para el tren tenemos

$$x_t = d + u_t t$$

en que d es la posición original del tren, esto es $x_t(0) = d$.

El tiempo que tarda la bomba en caer es tal que $y_b(T) = 0$, o sea

$$T = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

y en ese instante queremos que $x_t(T) = x_b(T)$ para que haya impacto. Entonces,

$$d + u_t T = uT,$$

que se puede escribir como

$$d = (u - u_t)\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Finalmente, (ver figura),

$$\tan\theta = \frac{h}{d},$$

es decir,

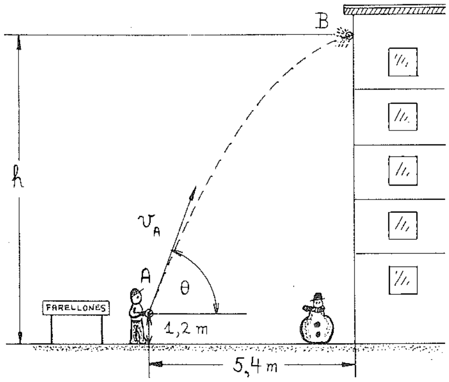
$$\theta = \tan^{-1}\left[\frac{1}{(u-u_t)}\sqrt{\frac{gh}{2}}\right]$$

Para los valores dados en el problema, $u = 483[\text{km/h}] = 134,17[\text{m/s}]$ y $u_t = 145[\text{km/h}] = 40,28[\text{m/s}]$ obtenemos con $g = 9,81[\text{m/s}^2]$

$$\theta = \tan^{-1}(1,7471) = 60,21°.$$

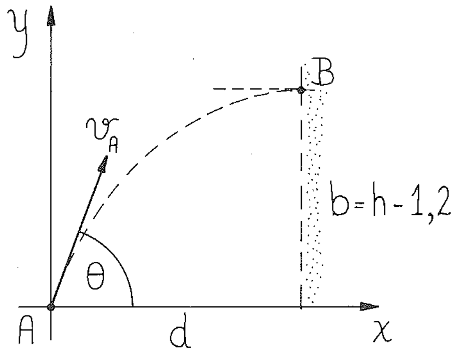
13. El niño de la figura arroja una bola de nieve de modo que ésta golpea la pared del edificio a la máxima altura de su trayectoria. Si la bola tarda

1,5 [seg] en ir de A a B, determine la velocidad $\vec{v}_A$ a la cual fue arrojada, el ángulo de tiro θ y la altura h.



Solución:

En la figura elegimos como origen de las coordenadas el punto de lanzamiento de la bola. Luego, $b = h - 1,2[\mathrm{m}]$ y $d = 5,4[\mathrm{m}]$.



Las ecuaciones de la trayectoria de la bola son

$$x = v_A \cos\theta\, t$$

e

$$y = v_A \mathrm{sen}\,\theta\, t - \frac{1}{2} g t^2.$$

Las componentes de la velocidad de la bola son

$$v_x = v_A \cos\theta$$

y

$$v_y = v_A \mathrm{sen}\,\theta - g t.$$

Cuando la bola impacta la pared, $y(T) = b$, $x(T) = d$ y $v_y(T) = 0$, puesto que impacta en el punto más alto de su trayectoria. Es decir,

$$b = v_A\, \mathrm{sen}\,\theta\, T - \frac{1}{2} g T^2, \tag{1}$$

$$d = v_A \cos\theta\, T \tag{2}$$

y

$$v_A \operatorname{sen}\theta - gT = 0, \tag{3}$$

con lo que tenemos 3 ecuaciones para determinar las tres incógnitas v_A,θ y b. El tiempo T es dado y es igual a 1,5 segundos.

De (2) y (3) tenemos

$$v_A^2\,(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta) = \frac{d^2}{T^2} + g^2T^2,$$

de modo que

$$v_A = \sqrt{\frac{d^2}{T^2} + g^2T^2}. \tag{4}$$

También de (2) y (3), dividiendo,

$$\tan\theta = \frac{gT^2}{d} \tag{5}$$

y, finalmente, de (1)y (3),

$$b = gT^2 - \frac{1}{2}gT^2 = \frac{1}{2}gT^2,$$

por lo que

$$h = 1,2 + \frac{1}{2}gT^2. \tag{6}$$

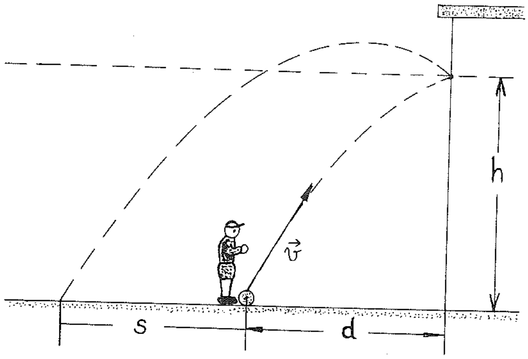
Con los valores $g = 9,81[\mathrm{m/s^2}]$, $T = 1,5[\mathrm{s}]$ y $d = 5,4[\mathrm{m}]$, de (4), (5) y (6) obtenemos

$$v_A = 15,15[\mathrm{m/s}] \qquad \theta = 1,33\,\mathrm{rads} = 76,25^\circ \qquad \mathrm{h} = 12,24[\mathrm{m}].$$

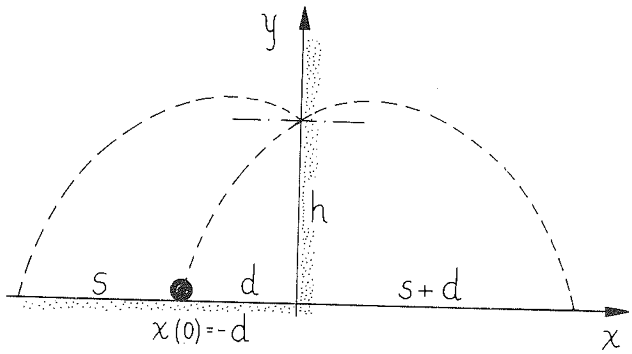
14. Una pelota perfectamente elástica se lanza desde el suelo de un puntapié contra una casa y rebota sobre la cabeza del lanzador como se muestra en la figura. La pelota inicialmente está a una distancia $d = 4[\mathrm{m}]$ de la pared y tiene una velocidad inicial $v_{0x} = v_{0y} = 10[\mathrm{m/s}]$.

    a) ¿A qué altura h golpea la pelota la pared de la casa?

    b) ¿A qué distancia s por detrás del lanzador golpea la pelota el suelo? **Nota:** en un choque perfectamente elástico el módulo de la velocidad antes y después del choque es el mismo, y el ángulo de incidencia θ_i es igual al ángulo de reflexión θ_r medidos ambos respecto a la normal a la superficie. Para simplificar los cálculos suponga $g = 10[\mathrm{m/s^2}]$.



Solución:



a) Si tomamos la pared como el eje y y el suelo como eje x, la ecuación de la trayectoria de la pelota está dada en forma paramétrica por

$$x = -d + v_{0x}t \tag{1}$$

$$y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{2}$$

pues $x(0) = -d$, $y(0) = 0$.

La pelota choca contra la pared cuando $x = 0$. De (1) vemos que esto ocurre cuando

$$t = t_c = \frac{d}{v_{0x}}$$

Reemplazando este valor de t en (2) obtenemos

$$h = y(t_c) = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}d - \frac{1}{2}g\frac{d^2}{v_{0x}^2}.$$

Para los datos del problema, $t_c = 2/5 = 0,4[\mathrm{s}]$ y $h = 16/5 = 3,2[\mathrm{m}]$.

b) Hay dos maneras de encontrar la trayectoria después del choque. La primera y tal vez más directa es considerar el movimiento parabólico a partir del punto sobre la pared donde ocurre el choque, llamémoslo A. Las coordenadas de A son $x = 0$ e $y = 3,2$ y la velocidad, por las condiciones de rebote es $v_x = -v_{0x}$, $v_y = dy(t_c)/dt$ que se obtiene a partir de (2). Esto es, $v_x = -10[\mathrm{m/s}]$ y $v_y = v_{0y} - gt_c = 6[\mathrm{m/s}]$. Resolviendo en forma paramétrica el movimiento parabólico a partir del punto A encontramos

$$x(\tau) = v_x\tau = -10\tau \tag{3}$$

$$y(\tau) = h + v_y\tau - \frac{1}{2}g\tau^2 = 3,2 + 6\tau - 5\tau^2 \tag{4}$$

en que $\tau = t - t_c$. La pelota alcanza el suelo nuevamente cuando $y = 0$, es decir para τ tal que

$$5\tau^2 - 6\tau - 3,2 = 0$$

cuya única solución positiva es

$$\tau = \frac{6 + \sqrt{36 + 64}}{10} = \frac{8}{5}$$

Cuando la pelota regresa al suelo, es decir, para $\tau = 8/5$, $x(\tau) = -(s+d)$ (ver figura) y por lo tanto de (3) obtenemos

$$-(s + d) = -10 \cdot \frac{8}{5} = -16$$

y, entonces,

$$s = 12[\mathrm{m}].$$

La otra manera de encontrar este resultado es reflejando la trayectoria (el tramo después del rebote) con respecto a la pared. La trayectoria que se obtiene de este modo es una parábola (la condición de rebote asegura la continuidad de la posición y la velocidad). De este modo, $d + (s + d)$ equivale al rango del lanzamiento parabólico y por lo tanto

$$s + 2d = \frac{v_0^2}{g}\operatorname{sen}(2\theta) \tag{5}$$

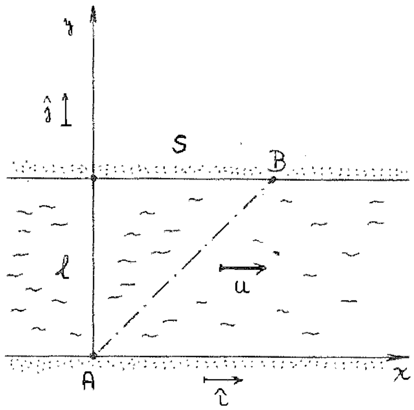
en que $\tan\theta = v_{0y}/v_{0x}$ y $v_0^2 = v_{0x}^2 + v_{0y}^2$. De los datos del problema obtenemos $\theta = \pi/4$ y $v_0^2 = 200$. Así de (5)

$$s + 2d = \frac{200}{10} = 20$$

y

$$s = 12[\mathrm{m}].$$

15. Imagine un río con orillas paralelas entre las cuales hay una distancia ℓ. La velocidad de la corriente es uniforme a todo el ancho del río, e igual a u. ¿Con qué velocidad mínima, constante respecto del agua, deberá navegar un bote para que, partiendo desde el punto A vaya a parar a un punto B en la orilla opuesta que se encuentra a una distancia s corriente abajo? ¿A qué distancia mínima será llevado el bote corriente abajo durante el cruce del río, si la rapidez del bote con respecto al agua es v?



Solución:

Llamemos x a la dirección a lo largo de la corriente e y a la dirección transversal a ella. Sean b y w las componentes de v (velocidad relativa a la corriente) a lo largo de x e y respectivamente. Entonces la velocidad del bote respecto a tierra está dada por

$$\vec{v}_g = (b\hat{\imath} + w\hat{\jmath}) + u\hat{\imath} = (b+u)\hat{\imath} + w\hat{\jmath}.$$

Aquí, $\vec{v} = b\hat{\imath} + w\hat{\jmath}$ es la velocidad del bote relativa a la corriente. Si llamamos t al tiempo que tarda el bote en llegar a su objetivo, y como las componentes de la velocidad son constantes, tenemos:

$$\ell = wt \tag{1}$$

y

$$s = (b+u)t. \tag{2}$$

Dividiendo la ecuación (2) por la ecuación (1) obtenemos

$$\frac{b+u}{w} = \frac{s}{\ell},$$

de donde obtenemos,

$$b = \frac{s}{\ell}w - u. \tag{3}$$

Ahora, como $v^2 = b^2 + w^2$, de (3) obtenemos

$$v^2 = (1 + \frac{s^2}{\ell^2})w^2 - 2\frac{s}{\ell}wu + u^2. \qquad (4)$$

Minimizando v^2 con respecto a w, en la ecuación anterior, obtenemos el valor mínimo v para que el bote alcance la otra orilla en el punto B. De (4) obtenemos,

$$\frac{dv^2}{dw} = 2(1 + \frac{s^2}{\ell^2})w - 2\frac{s}{\ell}u = 0,$$

de modo que el valor de w que minimiza v^2 está dado por

$$w = \frac{s\ell}{\ell^2 + s^2}u$$

y reemplazando el valor de w en (4) obtenemos el valor mínimo de v,

$$v = \frac{\ell}{\sqrt{\ell^2 + s^2}}u.$$

Es simple verificar que efectivamente se trata de un mínimo pues la segunda derivada de v^2 con respecto a w (la cual se obtiene de (4)) es positiva (en efecto está dada por $2(1 + (s/\ell)^2)$).

b) Con el objeto de determinar la distancia s a la que llega el bote en la otra orilla usamos las ecuaciones (1) y (2). Despejando t de ellas, tal como hicimos en la parte a), obtenemos:

$$s = \ell\frac{b + u}{w}.$$

Puesto que $v = \sqrt{b^2 + w^2}$, podemos expresar s sólo en términos de b como

$$s(b) = \ell\frac{b + u}{\sqrt{v^2 - b^2}}. \qquad (5)$$

Si la velocidad del bote relativa a la corriente, v, es mayor o igual a u, entonces siempre se puede alcanzar la otra orilla en $s = 0$ (basta elegir $b = -u$). Entonces sólo nos queda por determinar la distancia mínima en el caso en que $v < u$.

Para encontrar el valor mínimo de s calculamos, a partir de (5),

$$\frac{ds}{db} = \ell\frac{v^2 + bu}{(v^2 - b^2)^{3/2}} = 0,$$

de modo que el valor $\hat{b}$ que minimiza $s(b)$ es $\hat{b} = -v^2/u$ y el valor mínimo de s es

$$s(\hat{b}) = \frac{\ell}{v}\sqrt{u^2 - v^2}.$$

16. Si en dos descripciones diferentes de una curva por un punto móvil, el producto de las velocidades en lugares correspondientes en las dos descripciones es constante, demuestre que las aceleraciones en lugares correspondientes en las dos descripciones están en razón a los cuadrados de las velocidades. Demuestre, también, que las direcciones de las aceleraciones forman ángulos iguales con la normal a la curva, pero en sentidos opuestos.

Nota: Este es un problema debido a J. von Vieth, ver E. T. Whittaker, *A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies*, 4th edition, Dover Publications, NY (1944), p. 23, problema 6.

Solución: (*)

Sea $\vec{r} = \vec{r}(s)$ la curva dada, y supongamos que está descrita de dos maneras distintas por dos puntos móviles: $s = f(t)$ y $s = g(t)$ respectivamente. La velocidad del punto móvil en coordenadas intrínsecas está dada por

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = v\hat{t}, \tag{1}$$

en que $\hat{t}$ es la tangente a la curva en el punto s. La aceleración está dada por

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{d\vec{v}}{ds}, \tag{2}$$

de modo que reemplazando la expresión para $\vec{v}$ de (1) en el último miembro de (2) y derivando obtenemos

$$\vec{a} = v\frac{dv}{ds}\hat{t} + v^2\frac{\hat{n}}{\rho}. \tag{3}$$

Para obtener (3) hemos usado que la derivada de la tangente con respecto al parámetro s, $d\hat{t}/ds$, es igual a la normal $\hat{n}$ a la curva dividida por el radio de curvatura ρ en el punto s. Aquí, $\hat{t}$, $\hat{n}$ y ρ sólo dependen de s (es decir sólo de la geometría de la curva) y no de la manera como la curva es descrita (i.e., "recorrida") por el punto móvil. Evidentemente, v sí depende de la manera como es recorrida la curva. Llamemos pues v a la velocidad en la primera descripción y w a la velocidad en la segunda descripción. Como en puntos correspondientes (es decir, para el mismo parámetro s, y no necesariamente para el mismo t) el producto de las velocidades es constante, tenemos

$$v(s)w(s) = k, \tag{4}$$

independiente de s. De (4) obtenemos $w(s) = k/v(s)$ y entonces,

$$\frac{dw}{ds} = -\frac{k}{v^2}\frac{dv}{ds}. \tag{5}$$

Así, en la primera descripción

$$\vec{a}_1 = v\frac{dv}{ds}\hat{t} + v^2\frac{\hat{n}}{\rho}, \tag{6}$$

en tanto que en la segunda

$$\vec{a}_2 = w\frac{dw}{ds}\hat{t} + w^2\frac{\hat{n}}{\rho} = -\frac{k^2}{v^3}\frac{dv}{ds}\hat{t} + \frac{k^2}{v^2}\frac{\hat{n}}{\rho}. \tag{7}$$

Como $\hat{t}$ y $\hat{n}$ son ortonormales, de (6) y (7) obtenemos

$$|\vec{a}_1| = \sqrt{\left(v\frac{dv}{ds}\right)^2 + \frac{v^4}{\rho^2}}, \tag{8}$$

y

$$|\vec{a}_2| = \sqrt{\frac{k^4}{v^6}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + \frac{k^4}{v^4}\frac{1}{\rho^2}} = \frac{k^2}{v^4}|\vec{a}_1| \tag{9}$$

respectivamente. De (4) y (9) obtenemos

$$\frac{|\vec{a}_2|}{|\vec{a}_1|} = \frac{k^2}{v^4} = \frac{w^2}{v^2} = \frac{|\vec{v}_2|^2}{|\vec{v}_1|^2}$$

que era lo que se pedía demostrar. En cuanto a los ángulos θ_1, entre $\vec{a}_1$ y $\hat{n}$, y θ_2, entre $\vec{a}_2$ y $\hat{n}$, tenemos

$$\cos\theta_1 = \frac{\vec{a}_1\cdot\hat{n}}{|\vec{a}_1|} = \frac{v^2}{\rho|\vec{a}_1|}$$

y

$$\cos\theta_2 = \frac{w^2}{\rho|\vec{a}_2|} = \frac{v^2|\vec{a}_2|}{\rho|\vec{a}_1||\vec{a}_2|} = \cos\theta_1.$$

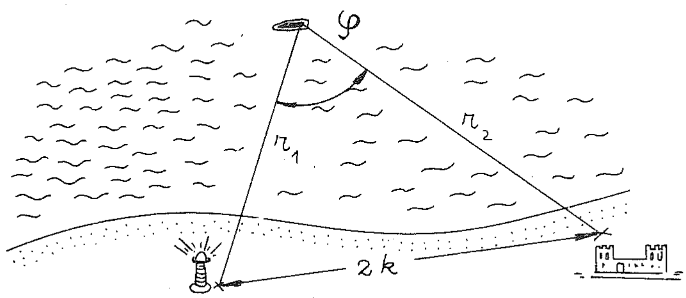
Así es que los ángulos θ_1 y θ_2 son iguales. Los sentidos son opuestos, sin embargo, pues $\vec{a}_1\cdot\hat{t}/|\vec{a}_1| = -\vec{a}_2\cdot\hat{t}/|\vec{a}_2|$.

17. Considere una partícula que se mueve en un plano. Su movimiento es referido a dos puntos fijos en el plano, separados por una distancia $2k$. Suponga que s es el logaritmo del cociente de las distancias de la partícula a los dos puntos fijos. Sea φ el ángulo entre los vectores que van del

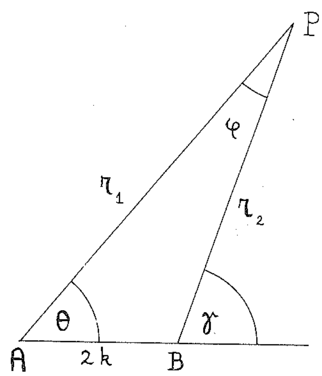
punto móvil a los dos puntos fijos (es decir el ángulo subtendido por los puntos fijos, vistos desde la partícula). Demuestre que la velocidad de la partícula en términos de las coordenadas s y φ está dada por

$$v = k\frac{\sqrt{\dot{s}^2 + \dot{\varphi}^2}}{\cosh(s) - \cos(\varphi)}. \tag{1}$$

Nota: ver E. T. Whittaker, op. cit. p. 23, problema 5.



Solución: (*)



En la figura P representa la partícula, A y B los puntos fijos separados por la distancia $2k$. Aquí r_1 y r_2 son las distancias desde P a los puntos fijos y φ el ángulo de abertura. Sea $s = \log(r_2/r_1)$. Llamemos θ al ángulo PAB y $\gamma = \theta + \varphi$. Podemos usar r_1 y θ como las coordenadas polares del punto P referidas al punto fijo A y al eje fijo AB.

La velocidad v de P está dada en términos de estas coordenadas por

$$v^2 = \dot{r}_1^2 + r_1^2\dot{\theta}^2. \tag{2}$$

Para poder calcular la velocidad v debemos encontrar r_1, θ y sus derivadas con respecto al tiempo en términos de s, φ y de sus derivadas.

Refiriéndonos a la figura y utilizando la ley de los senos, tenemos

$$\frac{r_1}{\operatorname{sen}\gamma}=\frac{r_2}{\operatorname{sen}\theta}=\frac{r_1\mathrm{e}^s}{\operatorname{sen}\theta}, \tag{3}$$

donde hemos usado la definición de s para obtener la última igualdad. De (3), obtenemos

$$\mathrm{e}^{-s}=\frac{\operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\theta}=\frac{\operatorname{sen}(\theta+\varphi)}{\operatorname{sen}\theta}=\cos\varphi+\operatorname{sen}\varphi\cot\theta, \tag{4}$$

pues $\gamma=\theta+\varphi$. De (4) obtenemos de inmediato

$$\tan\theta=\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\mathrm{e}^{-s}-\cos\varphi}. \tag{5}$$

A partir del valor de la tangente podemos encontrar el valor de $\operatorname{sen}\theta$. En efecto,

$$\operatorname{sen}\theta=\frac{\mathrm{e}^{s/2}\operatorname{sen}\varphi}{\sqrt{2a}}, \tag{6}$$

en que

$$a\equiv\cosh s-\cos\varphi. \tag{7}$$

Usando nuevamente la ley de los senos, esta vez con los lados AB y BP, obtenemos

$$\frac{2k}{\operatorname{sen}\varphi}=\frac{r_2}{\operatorname{sen}\theta}=\frac{r_1\mathrm{e}^s}{\operatorname{sen}\theta}, \tag{8}$$

de modo que despejando $\operatorname{sen}\theta$ de (6) y reemplazando en (8) obtenemos

$$r_1=2k\frac{\mathrm{e}^{-s/2}}{\sqrt{2a}}. \tag{9}$$

De (7) tenemos $\dot a=\operatorname{senh}s\,\dot s+\operatorname{sen}\varphi\,\dot\varphi$. Derivando (9) con respecto al tiempo y utilizando las expresiones para a y $\dot a$, luego de un poco de álgebra encontramos

$$\dot r_1=\frac{k}{a}\frac{\mathrm{e}^{-s/2}}{\sqrt{2a}}(\dot s(\cos\varphi-\mathrm{e}^s)-\dot\varphi\operatorname{sen}\varphi). \tag{10}$$

Ahora sólo nos resta encontrar $\dot\theta$. Derivando (6) con respecto al tiempo, y utilizando la ecuación (7) para reemplazar $\dot a$, encontramos

$$\cos\theta\,\dot\theta=\frac{1}{2a}\frac{\mathrm{e}^{s/2}}{\sqrt{2a}}\{\dot s[(\cosh s-\cos\varphi)\operatorname{sen}\varphi-\operatorname{sen}\varphi\operatorname{senh}s]$$

$$+\dot{\varphi}[2(\cosh s - \cos\varphi)\cos\varphi - \operatorname{sen}^2\varphi]\}. \tag{11}$$

Pero, a partir de (6) podemos encontrar el valor de $\cos\theta$ en términos de s y φ. De este modo tenemos

$$\cos\theta = \frac{e^{-s/2} - e^{s/2}\cos\varphi}{\sqrt{2a}}. \tag{12}$$

Reemplazando el valor de $\cos\theta$ en el lado izquierdo de (11), y simplificando ambos lados de la ecuación resultante por $[e^{-s/2} - e^{s/2}\cos\varphi]$ finalmente obtenemos

$$\dot{\theta} = \frac{1}{2a}(\dot{s}\operatorname{sen}\varphi + \dot{\varphi}(\cos\varphi - e^s)). \tag{13}$$

De (9) y (13) obtenemos

$$r_1\dot{\theta} = \frac{k}{a}\frac{e^{-s/2}}{\sqrt{2a}}(\dot{s}\operatorname{sen}\varphi + \dot{\varphi}(\cos\varphi - e^s)). \tag{14}$$

Finalmente, de (2), (10) y (14) obtenemos de inmediato

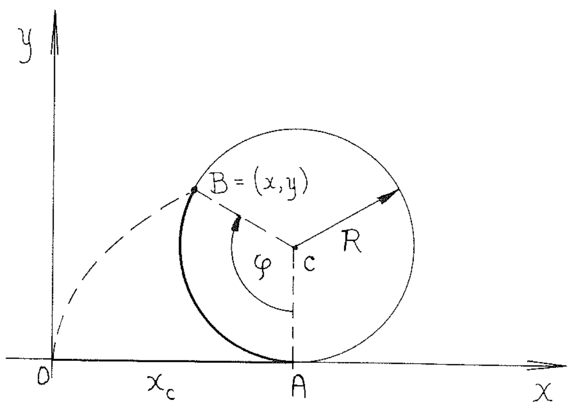
$$v^2 = \frac{k^2 e^{-s}}{2a^3}(\dot{s}^2 + \dot{\varphi}^2)(1 + e^{2s} - 2e^s\cos\varphi)$$

y, utilizando la definición de a (ver ecuación (7)), finalmente, obtenemos

$$v^2 = \frac{k^2}{a^2}(\dot{s}^2 + \dot{\varphi}^2)$$

que era lo que deseábamos demostrar.

18. **La cicloide:** Determine la ecuación de la curva que describe un punto sobre la circunferencia de una rueda que rueda sobre un plano sin resbalar, con velocidad angular constante ω. Escriba la ecuación de la curva en forma paramétrica: $x = x(t)$, $y = y(t)$. Determine también las componentes de la velocidad, v_x y v_y, en función del tiempo.



Solución:

Como la rueda se mueve sobre el plano sin resbalar, la distancia OA recorrida por el centro de la rueda (ver figura) debe coincidir con el arco AB sobre ella, en que B es el rótulo del punto sobre el borde de la rueda que coincidió con el punto O del plano durante el movimiento de ésta. Si llamamos R al radio de la rueda y φ al ángulo ACB, debemos tener

$$x_c = \mathrm{OA} = R\varphi, \tag{1}$$

en que x_c denota la coordenada horizontal del centro de la rueda. Obviamente, la coordenada vertical es $y_c = R$. Supongamos que es el punto B el que describe la curva en cuestión, entonces, las coordenadas de B, (x e y) están dadas por (ver figura):

$$x(t) = x_c(t) - R\,\mathrm{sen}\,\varphi, \tag{2}$$

pero, como la rueda gira con velocidad angular constante, $\varphi = \omega t$. De (1) y (2) obtenemos,

$$x(t) = R(\omega t - \mathrm{sen}\,(\omega t)). \tag{3}$$

Ahora, de la figura vemos que $y(t) = R(1 - \cos\varphi)$ y por lo tanto

$$y(t) = R(1 - \cos(\omega t)). \tag{4}$$

Finalmente, de (3) y (4) obtenemos de inmediato

$$v_x(t) = \dot{x} = \omega R(1 - \cos(\omega t))$$

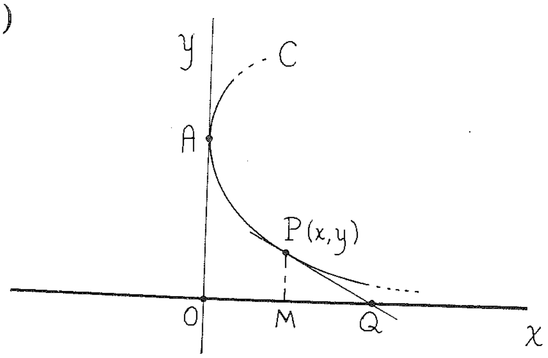
y

$$v_y(t) = \dot{y} = \omega R\,\mathrm{sen}\,(\omega t).$$

19. **Curva de persecución**. Considere dos puntos (el amo y su perrito); el primero, (el amo), se mueve en línea recta con velocidad constante v y el segundo, P (perrito), describe una curva con velocidad constante u de modo que en todo instante se dirige hacia su amo. Determine la ecuación de la trayectoria de P (el perrito). Discuta los casos $u < v$, $u = v$ y $u > v$.

    Ref: Lord Kelvin y P. G. Tait, *Treatise on Natural Philosophy, Part I*, Cambridge University Press 1923.

Solución: (*)



Elegiremos el eje x coincidiendo con la trayectoria del amo, en tanto que la curva C de la figura representa la trayectoria del perrito, el cual tiene velocidad u. Si el perrito se encuentra en el punto P de la curva C, la recta tangente a C en P pasa por el punto Q (la posición instantánea del amo). Si consideramos la trayectoria posible del amo como todo el eje x, es claro que la curva C debe tener un punto A tal, que la tangente a C en A es perpendicular al eje x. Elegiremos la tangente a C en A como el eje y. Llamemos x e y a las coordenadas del perrito P en un instante dado, es decir, $P = (x, y)$. Como P y Q recorren sus respectivas trayectorias con velocidad constante, debemos tener

$$\frac{AP}{u} = \frac{OQ}{v}, \tag{1}$$

ya que A, O y P, Q son dos pares de posiciones simultáneas de los dos puntos. Por definición de la tangente a la curva en el punto P tenemos que

$$\frac{MQ}{MP} = -\frac{dx}{dy}, \tag{2}$$

en que el signo menos se ha introducido ya que la curva tiene pendiente negativa en P. Ahora, $AP = s$ es el arco descrito por el perrito sobre C, en tanto que $OQ = OM + MQ$. Pero $OM = x$ y $MP = y$, por lo que podemos escribir (1), usando (2), como

$$\frac{v}{u}s = e\,s = x - y\frac{dx}{dy} \tag{3}$$

en que hemos definido $e = v/u$.

Por otra parte, a lo largo de la curva C,

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

de donde sigue

$$\frac{ds}{dy} = -\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}, \tag{4}$$

en que el signo menos proviene del hecho que s aumenta cuando y disminuye. Derivando (3) con respecto a y y usando (4), obtenemos

$$e\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = y\frac{d^2x}{dy^2}, \tag{5}$$

que es una ecuación de primer orden para $f = dx/dy$ que se puede resolver mediante separación de variables. La ecuación (5) se puede escribir como

$$\frac{df}{\sqrt{1+f^2}} = e\frac{dy}{y},$$

cuya integral es

$$\text{arcsenh} f = \log y^e + cte.$$

Pero $f = dx/dy = 0$ para $y \equiv OA \equiv a$ lo cual determina la constante de integración. Tenemos entonces

$$\text{arcsenh} f = \log\left(\frac{y}{a}\right)^e \tag{6}$$

que, usando la definición de la función senh, es

$$f = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{y}{a}\right)^e - \left(\frac{a}{y}\right)^e\right] \tag{7}$$

Integrando esta expresión obtenemos la forma paramétrica, $x(y)$, de la curva que sigue el perrito.

Si $e \neq 1$ obtenemos

$$x = \frac{1}{2}\left[\frac{y^{e+1}}{a^e(e+1)} - \frac{y^{1-e}a^e}{(1-e)}\right] - \frac{ae}{e^2-1} \tag{8}$$

en que el último término es la constante de integración que se fija por la condición $x = 0$ en $y = a$. De la misma manera, cuando $e = 1$ la integración de (7) nos da

$$x = \frac{1}{4}\frac{y^2}{a} - \frac{1}{2}a\log(\frac{y}{a}) - \frac{a}{4}. \tag{9}$$

Recordamos que $e = v/u$ es el cociente entre la velocidad del amo y del perrito. Para determinar si alcanza a su amo debemos ver si la curva

C intercepta al eje x. De (9) vemos que para $y = 0$, $x = \infty$, es decir, no lo alcanza. De (8) vemos que si $e > 1$ para $y = 0$, $x = \infty$, tampoco lo alcanza. Solamente si $e < 1$ lo alcanza; en este caso, de (8) resulta que para $y = 0$

$$x = \frac{ae}{(1 - e^2)}.$$