Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas
ICS2123 – Modelos Estocásticos (Sección 3)
Profesor Álvaro Lorca
Segundo Semestre 2017

Interrogación 1

Instrucciones

- Poner nombre en cada hoja.
- Resolver cada problema en un conjunto distinto de hojas.
- No se permite calculadora ni apuntes de ningun tipo.
- Justifique adecuadamente todas sus respuestas.
- No se puede hacer preguntas. Si hay un error, explique por qué hay un error. Si hay algo ambiguo, explique por qué hay algo ambiguo y determine un supuesto razonable para poder responder.
- Tiempo: dos horas.

Problema 1 (20 puntos)

1. (4 puntos) Sean X e Y variables aleatorias independientes con distribución Poisson de parámetros α y β respectivamente. Demuestre que $X+Y$ sigue una distribución Poisson de parámetro $\alpha+\beta$.
2. (4 puntos) A un parque llegan personas según un Proceso de Poisson con tasa λ personas/minuto. Además, se sabe que en los primeros s minutos llegaron k personas (donde $k > 0$). Dada esta información, determine explícitamente la función de densidad de probabilidades del instante de llegada de la k-ésima persona, y la probabilidad de que la k-ésima persona haya llegado en los primeros $s/2$ minutos.
3. (4 puntos) Sea $\{N(t), t \geq 0\}$ un Proceso de Poisson con tasa λ. Calcule $\mathbb{P}(8 < S_5 \leq 12 | N(20) = 10)$.
4. (8 puntos) A un parque llegan autos según un Proceso de Poisson con tasa λ autos/hora a partir de las 12:00 horas. Se sabe que con probabilidad 0.9 un auto cualquiera utiliza bencina, y con probabilidad 0.1 un auto cualquiera es eléctrico (y no utiliza bencina).
   (a) (4 puntos) Calcule la probabilidad de que entre las 14:00 y las 16:00 lleguen M o más autos eléctricos dado que entre las 13:00 y las 17:00 llegan L autos (donde $L > M$).
   (b) (4 puntos) Calcule el valor esperado de la cantidad de autos que llegan entre las 14:00 y las 16:00 dado que entre las 13:00 y las 17:00 llegan G autos eléctricos.

Problema 2 (20 puntos)

Parte 1 (10 puntos)

Un equipo de fútbol tiene tres delanteros: Pedro, Juan y Diego. Cada uno de ellos se genera llegadas de peligro al arco rival de forma independiente. Pedro crea llegadas según un Proceso de Poisson con tasa δ llegadas/minuto. De la misma forma, Juan y Diego crean llegadas según Procesos de Poisson con tasas μ (llegadas/minuto) y β (llegadas/minuto), respectivamente. De el total de llegadas al arco rival, solo el 15% termina en un gol, siendo esto válido para cualquier jugador. El equipo de futbol gana seguidores en la medida en que sus delanteros marquen goles, pero esto varía según el delantero que anote el gol. Cuando Juan marca un gol, el equipo suma 3 seguidores con probabilidad 0.4, 4 seguidores con probabilidad 0.3, 5 seguidores con probabilidad 0.2 y 6 seguidores con probabilidad 0.1. En cambio, cuando Diego marca un gol, el equipo puede sumar entre 1 y 10 seguidores, donde la probabilidad de sumar i seguidores es igual a $1/10$ para cualquier $i = 1, ..., 10$. Finalmente, siempre que Pedro marca un gol, el equipo suma una cantidad fija de 3 seguidores. Asumiendo que los tres delanteros juegan todos los partidos desde el inicio hasta el final, determine el valor esperado de seguidores que suma el equipo en un partido cualquiera por efecto de los goles de sus delanteros. Note que un partido de fútbol tiene una duración de 90 minutos.

Parte 2 (10 puntos)

Al puerto de Valparaíso se sabe que llegarán prontamente dos embarcaciones de turistas, pero no se sabe exactamente cuándo llegarán. Por una parte, se sabe que el primer barco, con turistas Chinos, llegará dentro de un tiempo que sigue una distribución uniforme entre 0 y $\overline{u}$ días. Por otra parte, se sabe que una vez que arribe dicha embarcación, el segundo barco, con turistas Europeos, va a partir desde su destino y tardará un tiempo que sigue una distribución uniforme entre 0 y $\overline{v}$ días en llegar (contando a partir del momento en que llega el primer barco). Lo interesante es que una vez que llegue el primer barco, los turistas Chinos se van a bajar a conocer Valparaíso según un Proceso de Poisson con tasa λ_1 turistas/día, y que una vez que llegue el segundo barco, los turistas Europeos se van a bajar a conocer Valparaíso según un Proceso de Poisson con tasa λ_2 turistas/día (asuma que ambos barcos son enormes y tienen suficientes turistas para cualquier efecto).

(a) (3 puntos) Determine el valor esperado del número de turistas que han bajado de ambos barcos en los primeros t días dado que el primer barco llega a los u días y el segundo barco llega a los $u + v$ días (donde $u \in (0, \overline{u})$ y $v \in (0, \overline{v})$ son números conocidos). Hint: va a necesitar definir distintos casos para la relación entre t, u, y v.

(b) (3 puntos) Determine el valor esperado del número de turistas que han bajado de ambos barcos en los primeros t días dado que el primer barco llega a los u días (donde $u \in (0, \overline{u})$ es un número conocido).

(c) (4 puntos) Determine el valor esperado del número de turistas que han bajado de ambos barcos en los primeros t días.

Problema 3 (20 puntos)

A la mesa de recepción de un aeropuerto llegan pasajeros según un Proceso Poisson de tasa γ personas por minuto. En este aeropuerto, algunos pasajeros llevan maleta y otros no. La probabilidad de que un pasajero cualquiera tenga que ingresar una maleta es de p, y además se sabe que cada pasajero lleva a lo más una maleta. Los recepcionistas de las aerolíneas dejan las maletas, a medida que llegan, en el inicio de una cinta transportadora (de ahora en adelante, *el inicio*) que se mueve a una velocidad constante de r metros por segundo. Estas maletas son recogidas al final de la cinta transportadora (de ahora en adelante, *el final*), a una distancia conocida de l metros desde el inicio, en línea recta. Suponga que el depositar una maleta en la cinta no lleva tiempo, que el proceso funciona de manera continua y que ha estado funcionando un largo tiempo.

1. (10 puntos) En cierto instante t, se fija una distancia de D metros desde el inicio, donde D es una variable aleatoria que distribuye uniforme en el intervalo $(0, l/2)$, independiente del proceso de llegada. Todas las maletas que estén entre D y $D + l/2$ (midiendo desde el inicio de la cinta) son llevadas a una revisión especial en busca de elementos prohibidos.

   (a) (5 puntos) Calcule la probabilidad de que en dicho instante t se revise el tramo y ninguna maleta sea llevada a la revisión especial.

   (b) (5 puntos) Calcule la probabilidad de que en dicho instante t se revise el tramo y ninguna maleta sea llevada a la revisión especial, si se sabe que en dicho instante hay exactamente 20 maletas sobre la cinta.

2. (10 puntos) Suponga que en el final de la cinta, las maletas son trasladadas de a una por trabajadores (cada trabajador carga una maleta). Estas son llevadas a un avión en una operación que demora z segundos, con $z \sim \text{Uniforme}(a, b)$. Suponga que no hay límite en la capacidad de traslado (pueden haber muchos trabajadores trasladando maletas) y que el tiempo de traslado de cada maleta es independiente de las demás. Si se observa la cinta transportadora en un instante x y se ve que este es el momento exacto en que se deposita una maleta en el inicio, y además en ese instante se ve que sobre la cinta hay otras n maletas, calcule la probabilidad de que dichas n maletas lleguen al avión antes que la maleta que llegó a la cinta en el instante x.

Solución Problema 1

Parte 1

Sea k un entero no negativo. Entonces:

$$\mathbb{P}(X+Y=k) = \mathbb{P}(X=k-Y) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(X=k-Y|Y=i)\cdot\mathbb{P}(Y=i)$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(X=k-i)\cdot\frac{\beta^i e^{-\beta}}{i!} = \sum_{i=0}^{k} \frac{\alpha^{k-i}e^{-\alpha}}{k-i!}\cdot\frac{\beta^i e^{-\beta}}{i!}$$

$$= \frac{e^{-(\alpha+\beta)}}{k!}\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{(k-i)!i!}\cdot\alpha^{k-i}\beta^i$$

$$= \frac{e^{-(\alpha+\beta)}(\alpha+\beta)^k}{k!}$$

Con esto, $X+Y$ sigue una distribución Poisson de parámetro $\alpha+\beta$.

Parte 2

Sea $Z=[S_k|N(s)=k]$ y sea $t\in[0,s]$. Entonces:

$$P(Z\leq t) = P(S_k\leq t|N(s)=k)$$

$$= P(\max_{i=1,\ldots,k} U_i \leq t) \qquad \text{donde los } U_i \text{ son uniformed i.i.d en } [0,t]$$

$$= P(Ui\leq t, \forall i=1,...,k)$$

Con esto, vemos que para cualquier $t\in[0,s]$ tenemos que

$$F_Z(t) = \left(\frac{t}{s}\right)^k$$

Luego derivamos $F_Z(t)$ para encontrar la función de densidad de Z.

$$f_Z(t) = \frac{\partial F_Z(t)}{\partial t} = \frac{k}{s}\left(\frac{t}{s}\right)^{k-1}$$

Ahora para encontrar la probabilidad de que la k-esima persona haya llegado en los primeros $s/2$ minutos, reemplazamos $t=s/2$ en $F_Z(t)$.

$$F_Z(\frac{s}{2}) = \left(\frac{s}{2s}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

Parte 3

Sea $N(t), t\geq 0$ Poisson tasa λ.

$$P(8<S_5\leq 12|N(20)=10)$$

$$= P(N(8)<5, N(12)\geq 5|N(20)=10)$$

$$\frac{P(N(12)\geq 5, N(8)<5, N(20)=10)}{P(N(20)=10)}$$

$$= \sum_{j=0}^{4}\sum_{i=j}^{10}\frac{P(N(12)=i, N(8)=j, N(20)=10)}{P(N(20)=10)}$$

$$= \sum_{j=0}^{4}\sum_{i=j}^{10}\frac{P(N(8)=j)\cdot P(N(12)-N(8)=i-j)\cdot P(N(20)-N(12)=10-i)}{P(N(20)=10)}$$

$$= \sum_{j=0}^{4} \sum_{i=j}^{10} \frac{P(N(8)=j) \cdot P(N(8)=10-i) \cdot P(N(4)=i-j)}{P(N(20)=10)}$$

$$= \sum_{j=0}^{4} \sum_{i=j}^{10} \frac{(8\lambda)^j e^{-8\lambda}}{j!} \cdot \frac{(8\lambda)^{10-i} e^{-8\lambda}}{(10-i)!} \cdot \frac{(4\lambda)^{i-j} e^{-4\lambda}}{(i-j)!} \cdot \frac{10!}{(20\lambda)^{10} e^{-20\lambda}}$$

Simplificando:

$$= \sum_{j=0}^{4} \sum_{i=j}^{10} \frac{(8\lambda)^{10+j-i} \cdot (4\lambda)^{i-j} \cdot 10!}{(10-i)! \cdot j! \cdot (i-j)! \cdot (20\lambda)^{10}}$$

Parte 4

Sea:
$N_1(t)$ el número de autos bencineros en el instante t
$N_2(t)$ el número de autos electricos en el instante t
$N(t)$ el número de autos en el instante t.

Parte 4.(a)

$$P(N_2(4) - N_2(2) \geq M | N(5) - N(1) = L)$$

$$P(N_2(3) - N_2(1) \geq M | N(4) = L)$$

$$P(N_2(2) \geq M | N(4) = L)$$

$$\sum_{j=M}^{L} P(N_2(2) = j | N(4) = L)$$

$$\sum_{j=M}^{L} \sum_{i=j}^{L} P(N_2(2) = j | N(4) = L, N(2) = i) \cdot P(N(2) = i | N(4) = L)$$

$$\sum_{j=M}^{L} \sum_{i=j}^{L} \binom{i}{j} (0,1)^j (0,9)^{i-j} \cdot \binom{L}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^i \left(\frac{1}{2}\right)^{L-i}$$

Parte 4.(b)

Buscamos $\mathbb{E}(N(4) - N(2) | N_2(5) - N_2(1) = G)$. Separamos N en N_1 y N_2 para obtener:

$$\mathbb{E}(N_1(4) - N_1(2) | N_2(5) - N_2(1) = G) + \mathbb{E}(N_2(4) - N_2(2) | N_2(5) - N_2(1) = G)$$

Notamos que $(N_2(4) - N_2(2) | N_2(5) - N_2(1) = G)$ es una binomial de parámetros $(G, \frac{1}{2})$ por lo que su esperanza será $\frac{G}{2}$. Luego sabemos ademas que $(N_1(4) - N_1(2) | N_2(5) - N_2(1) = G)$ es una Poisson de parámetro $2 \times 0,9\lambda$ porque la probabilidad de que el auto que haya llegado sea bencinero es $0,9$, y por independencia en las llegadas de bencineros y eléctricos, por lo que su esperanza en este caso será $2 \times 0,9\lambda = 1,8\lambda$. Con esto, finalmente:

$$\mathbb{E}(N_1(4) - N_1(2) | N_2(5) - N_2(1) = G) + \mathbb{E}(N_2(4) - N_2(2) | N_2(5) - N_2(1) = G)$$

$$= 1,8\lambda + \frac{G}{2}$$

Solución Problema 2

Parte 1

Primero definamos los goles de los delanteros, los cuales siguen procesos Poisson:

- $G_P(t) :=$ número de goles anotados por Pedro. Tiene tasa $\frac{15}{100}\delta$.
- $G_J(t) :=$ número de goles anotados por Juan. Tiene tasa $\frac{15}{100}\mu$.

- $G_D(t) :=$ número de goles anotados por Diego. Tiene tasa $\frac{15}{100}\beta$.

Ahora se define la cantidad de seguidores ganados por gol, de los respectivos delanteros:

- $S_P^i :=$ número de seguidores ganados por el gol $i-$ésimo de Pedro.
- $S_J^i :=$ número de seguidores ganados por el gol $i-$ésimo de Juan.
- $S_D^i :=$ número de seguidores ganados por el gol $i-$ésimo de Diego.

Sea $S(t)$ como la cantidad de seguidores ganados en $[0,t]$.

$$\begin{aligned} S(t) &= \sum_{i=1}^{G_P(t)} S_P^i + \sum_{i=1}^{G_J(t)} S_J^i + \sum_{i=1}^{G_D(t)} S_D^i && (1) \\ &= 3 \cdot G_P(t) + \sum_{i=1}^{G_J(t)} S_J^i + \sum_{i=1}^{G_D(t)} S_D^i && (2) \end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos un proceso Poisson y dos procesos Poisson compuestos.
Luego,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S(t)] &= \mathbb{E}[3 \cdot G_P(t) + \sum_{i=1}^{G_J(t)} S_J^i + \sum_{i=1}^{G_D(t)} S_D^i] && (3) \\ &= \mathbb{E}[3 \cdot G_P(t)] + \mathbb{E}[\sum_{i=1}^{G_J(t)} S_J^i] + \mathbb{E}[\sum_{i=1}^{G_D(t)} S_D^i] && (4) \\ &= 3 \cdot \mathbb{E}[G_P(t)] + \mathbb{E}[G_J(t)] \cdot \mathbb{E}[S_J^i] + \mathbb{E}[G_J(t)] \cdot \mathbb{E}[S_D^i] && (5) \end{aligned}$$

Podemos calcular fácilmente $\mathbb{E}[S_J^i]$ y $\mathbb{E}[S_D^i]$:

$$\mathbb{E}[S_J^i] = \sum_{x=3}^{6} x \cdot \mathbb{P}_{S_J^i}(s = x) = 3 \cdot 0.4 + 4 \cdot 0.3 + 5 \cdot 0.2 + 6 \cdot 0.1 = 4$$

$$\mathbb{E}[S_D^i] = \sum_{x=1}^{10} x \cdot \mathbb{P}_{S_D^i}(s = x) = \sum_{x=1}^{10} x \cdot \frac{1}{10} = 5.5$$

Finalmente,

$$\mathbb{E}[S(t)] = 3 \cdot \frac{15}{100}\delta \cdot t + 4 \cdot \frac{15}{100}\mu \cdot t + 5.5 \cdot \frac{15}{100}\beta \cdot t$$
$$\mathbb{E}[S(90)] = 40.5 \cdot \delta 54 \cdot \mu + 74.25 \cdot \beta$$

Parte 2

Sea $t_1 \sim Unif(0, \bar{u})$ la llegada de Barco Chino y $t_2 \sim Unif(0, \bar{v})$ lo que tarda el Barco Europeo luego que el Barco Chino arribó.
Sea $D_1 \sim Poisson(\lambda_1 t)$ el desembarco de turistas chinos y $D_2 \sim Poisson(\lambda_2 t)$ el desembarco de turistas europeos.

Parte 2.a

Nos dicen que $t_1 = u$ y $t_2 = v$.
Observemos que :

$$D_1 \sim Poisson(\lambda_1 \cdot \max\{(t-u), 0\})$$
$$D_2 \sim Poisson(\lambda_2 \cdot \max\{(t-(u+v)), 0\})$$

Buscamos $\mathbb{E}[D_1(t) + D_2(t) | t_1 = u, t_2 = v]$. Necesitamos ver los casos que hay:

i) $t \leq u \;\rightarrow\; D_1 = 0$ y $D_2 = 0 \rightarrow\; \mathbb{E}[D_1(t) + D_2(t) | t_1 = u, t_2 = v] = 0$

ii) $u < t \leq u + v \rightarrow\; D_1 \sim Poisson(\lambda_1 \cdot (t-u))$ y $D_2 = 0$
$\rightarrow\; \mathbb{E}[D_1(t) + D_2(t) | t_1 = u, t_2 = v] = \mathbb{E}[D_1(t) | t_1 = u, t_2 = v] = \lambda_1 \cdot (t-u)$

iii) $u + v < t \;\rightarrow\; D_1 \sim Poisson(\lambda_1 \cdot (t-u))$ y $D_2 \sim Poisson(\lambda_2 \cdot (t-(u+v)))$
$\rightarrow \mathbb{E}[D_1(t) + D_2(t) | t_1 = u, t_2 = v] = \lambda_1 \cdot (t-u) + \lambda_2 \cdot (t-(u+v))$

Parte 2.b

Tenemos que $t_1 = u$.
Ahora nos piden $\mathbb{E}[D_1(t) + D_2(t)|t_1 = u]$. Veremos los casos que hay:

i) $t \leq u \; \rightarrow \; D_1 = 0$ y $D_2 = 0 \rightarrow \; \mathbb{E}[D_1(t) + D_2(t)|t_1 = u] = 0$

ii) $u < t \leq u + \bar{v} \rightarrow \mathbb{E}[D_1(t)|t_1 = u] = \lambda_1 \cdot (t - u)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[D_2(t)|t_1 = u] &= \int_0^{\bar{v}} \mathbb{E}[D_2(t)|t_1 = u, t_2 = v]\frac{1}{\bar{v}}dv && (6)\\
&= \int_0^{t-u} \mathbb{E}[D_2(t)|t_1 = u, t_2 = v]\frac{1}{\bar{v}}dv && (7)\\
&= \int_0^{t-u} \lambda_2 \cdot (t - (u - v))\frac{1}{\bar{v}}dv && (8)\\
&= \frac{\lambda_2 \cdot (t-u)^2}{\bar{v}} && (9)
\end{aligned}$$

Entonces, $\mathbb{E}[D_1(t) + D_2(t)|t_1 = u] = \lambda_1 \cdot (t - u) + \dfrac{\lambda_2 \cdot (t-u)^2}{\bar{v}}$

iii) $t > u + \bar{v} \rightarrow \mathbb{E}[D_1(t)|t_1 = u] = \lambda_1 \cdot (t - u)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[D_2(t)|t_1 = u] &= \int_0^{\bar{v}} \mathbb{E}[D_2(t)|t_1 = u, t_2 = v]\frac{1}{\bar{v}}dv && (10)\\
&= \int_0^{\bar{v}} \mathbb{E}[D_2(t)|t_1 = u, t_2 = v]\frac{1}{\bar{v}}dv && (11)\\
&= \int_0^{\bar{v}} \lambda_2 \cdot (t - (u - v))\frac{1}{\bar{v}}dv && (12)\\
&= \lambda_2 \cdot (t - (u + \frac{\bar{v}}{2})) && (13)
\end{aligned}$$

Entonces $\mathbb{E}[D_1(t) + D_2(t)|t_1 = u] = \lambda_1 \cdot (t - u) + \lambda_2 \cdot (t - (u + \dfrac{\bar{v}}{2}))$

Parte 2.c

Primero observemos que $\mathbb{E}[D_1(t)|t_1 = u] = \mathbb{E}[D_1(t)|t_1 = u, t_2 = v], \; \forall v$. Ahora veamos los casos de los D_1, D_2 de forma independiente.
Para D_1 tenemos dos casos:

i) $0 < t \leq \bar{u} \; \rightarrow \; \mathbb{E}[D_1(t)] = \displaystyle\int_0^{\bar{u}} \mathbb{E}[D_1(t)|t_1 = u]\frac{1}{\bar{u}}du = \int_0^{t} \lambda_1 \cdot (t-u)\frac{1}{\bar{u}}du = \frac{\lambda_1 \cdot t^2}{2\bar{u}}$

ii) $t > \bar{u} \; \rightarrow \; \mathbb{E}[D_1(t)] = \displaystyle\int_0^{\bar{u}} \mathbb{E}[D_1(t)|t_1 = u]\frac{1}{\bar{u}}du = \int_0^{\bar{u}} \lambda_1 \cdot (t-u)\frac{1}{\bar{u}}du = \lambda_1 \cdot (t - \frac{\bar{u}}{2})$

Para D_2, tenemos:

i) $0 < t \leq \bar{u}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[D_2(t)] &= \int_0^{\bar{u}} \mathbb{E}[D_2(t)|t_1 = u]\frac{1}{\bar{u}}du && (14)\\
&= \int_0^{t} \mathbb{E}[D_2(t)|t_1 = u]\frac{1}{\bar{u}}du && (15)\\
&= \int_0^{t-\bar{v}} \mathbb{E}[D_2(t)|t_1 = u]\frac{1}{\bar{u}}du + \int_{t-\bar{v}}^{t} \mathbb{E}[D_2(t)|t_1 = u]\frac{1}{\bar{u}}du && (16)
\end{aligned}$$

Nos encontramos con 2 subcasos:

(a) $t \leq \bar{v}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[D_2(t)] &= \int_0^{\bar{u}} \mathbb{E}[D_2(t)|t_1 = u]\frac{1}{\bar{u}}du & (17)\\
&= \int_0^{t} \mathbb{E}[D_2(t)|t_1 = u]\frac{1}{\bar{u}}du & (18)\\
&= \int_0^{t} \frac{\lambda_2 \cdot (t-u)^2}{\bar{v}}\frac{1}{\bar{u}}du & (19)\\
&= \frac{\lambda_2}{\bar{v}\cdot\bar{u}}\frac{t^3}{3} & (20)
\end{aligned}$$

(b) $t > \bar{v}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[D_2(t)] &= \int_0^{\bar{u}} \mathbb{E}[D_2(t)|t_1 = u]\frac{1}{\bar{u}}du & (21)\\
&= \int_0^{t} \mathbb{E}[D_2(t)|t_1 = u]\frac{1}{\bar{u}}du & (22)\\
&= \int_0^{t-\bar{v}} \mathbb{E}[D_2(t)|t_1 = u]\frac{1}{\bar{u}}du + \int_{t-\bar{v}}^{t} \mathbb{E}[D_2(t)|t_1 = u]\frac{1}{\bar{u}}du & (23)\\
&= \int_0^{t-\bar{v}} \lambda_2 \cdot (t-(u+\frac{\bar{v}}{2}))\frac{1}{\bar{u}}du + \int_{t-\bar{v}}^{t} \frac{\lambda_2 \cdot (t-u)^2}{\bar{v}}\frac{1}{\bar{u}}du & (24)\\
&= \frac{\lambda_2(t-\bar{v}/2)(t-\bar{v})}{\bar{u}} - \frac{\lambda_2(t-\bar{v})^2}{2\bar{u}} + \frac{\lambda_2(\bar{v})^3}{3\bar{v}\bar{u}} & (25)\\
&= \frac{\lambda_2(t^2-\bar{v}t)}{2\bar{u}} + \frac{\lambda_2(\bar{v})^2}{3\bar{u}} & (26)
\end{aligned}$$

ii) $\bar{u} < t$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[D_2(t)] &= \int_0^{\bar{u}} \mathbb{E}[D_2(t)|t_1 = u]\frac{1}{\bar{u}}du & (27)\\
&= \int_0^{t-\bar{v}} \mathbb{E}[D_2(t)|t_1 = u]\frac{1}{\bar{u}}du + \int_{t-\bar{v}}^{\bar{u}} \mathbb{E}[D_2(t)|t_1 = u]\frac{1}{\bar{u}}du & (28)
\end{aligned}$$

Al igual que antes tenemos dos subcaso:

(a) $t \leq \bar{v}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[D_2(t)] &= \int_0^{\bar{u}} \mathbb{E}[D_2(t)|t_1 = u]\frac{1}{\bar{u}}du & (29)\\
&= \int_0^{\bar{u}} \frac{\lambda_2 \cdot (t-u)^2}{\bar{v}}\frac{1}{\bar{u}}du & (30)\\
&= \frac{\lambda_2}{\bar{u}\bar{v}}\{\frac{t^3}{3} - \frac{(t-\bar{u})^3}{3}\} & (31)
\end{aligned}$$

(b) $t > \bar{v}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[D_2(t)] &= \int_0^{\bar{u}} \mathbb{E}[D_2(t)|t_1 = u]\frac{1}{\bar{u}}du & (32)\\
&= \int_0^{t-\bar{v}} \mathbb{E}[D_2(t)|t_1 = u]\frac{1}{\bar{u}}du + \int_{t-\bar{v}}^{\bar{u}} \mathbb{E}[D_2(t)|t_1 = u]\frac{1}{\bar{u}}du & (33)\\
&= \int_0^{t-\bar{v}} \lambda_2 \cdot (t-(u+\frac{\bar{v}}{2}))\frac{1}{\bar{u}}du + \int_{t-\bar{v}}^{\bar{u}} \frac{\lambda_2 \cdot (t-u)^2}{\bar{v}}\frac{1}{\bar{u}}du & (34)\\
&= \frac{\lambda_2(t^2-\bar{v}t)}{2\bar{u}} + \frac{\lambda_2\bar{v}^2}{3\bar{u}} - \frac{\lambda_2(t-\bar{u})^3}{3\bar{v}\bar{u}} & (35)
\end{aligned}$$

Finalmente, juntando los resultados nos queda

$$\mathbb{E}[D_1(t)+D_2(t)] = \begin{cases} \frac{\lambda_1 \cdot t^2}{2\bar{u}} + \frac{\lambda_2}{\bar{v}\cdot\bar{u}}\frac{t^3}{3} & si \quad 0 < t \leq \bar{u} \ y \ t \leq \bar{v} \\ \frac{\lambda_1 \cdot t^2}{2\bar{u}} + \frac{\lambda_2(t^2 - \bar{v}t)}{2\bar{u}} + \frac{\lambda_2(\bar{v})^2}{3\bar{u}} & si \quad 0 < t \leq \bar{u} \ y \ t > \bar{v} \\ \lambda_1 \cdot (t - \frac{\bar{u}}{2}) + \frac{\lambda_2}{\bar{u}\bar{v}}\{\frac{t^3}{3} - \frac{(t-\bar{u})^3}{3}\} & si \quad t > \bar{u} \ y \ t \leq \bar{v} \\ \lambda_1 \cdot (t - \frac{\bar{u}}{2}) + \frac{\lambda_2(t^2 - \bar{v}t)}{2\bar{u}} + \frac{\lambda_2\bar{v}^2}{3\bar{u}} - \frac{\lambda_2(t-\bar{u})^3}{3\bar{v}\bar{u}} & si \quad t > \bar{u} \ y \ t > \bar{v} \end{cases}$$

Solución Problema 3

Parte 1

Sea $N(t)$ el proceso de llegada de pasajeros a la mesa de recepción. Por descomposición de procesos de Poisson, se define $N_m(t)$ como el proceso de llegada de maletas a la cinta, cuyo parámetro es γp. Se tiene también que $D \sim$ Uniforme$(0, l/2)$, por lo tanto, el intervalo a revisar es $[D, D + l/2]$. Además, sea δ la tasa en maletas por segundo, es decir $\delta = \frac{\gamma \cdot p}{60}$.

Parte 1.a

El problema se puede expresar en términos de tiempo, ya que se sabe que la cinta se mueve a una velocidad constante r. El tiempo que demora una maleta en llegar al intervalo de revisión es D/r y el largo del intervalo corresponde a $l/2$, por lo tanto, el tiempo en que se recorre el intervalo de revisión es $l/2r$. De esta forma, se necesita obtener la siguiente probabilidad:

$$\mathbb{P}\left(N_m\left(\frac{D}{r} + \frac{l}{2r}\right) - N_m\left(\frac{D}{r}\right) = 0\right)$$

Por incrementos estacionarios:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(N_m\left(\frac{D}{r} + \frac{l}{2r}\right) - N_m\left(\frac{D}{r}\right) = 0\right) &= \mathbb{P}\left(N_m\left(\frac{l}{2r}\right) = 0\right) \\ &= \frac{(\frac{\delta l}{2r})^0 \cdot e^{-\frac{\delta l}{2r}}}{0!} \\ &= e^{-\frac{\delta l}{2r}} \end{aligned}$$

Parte 1.b

Siguiendo la lógica anterior, la probabilidad pedida corresponde a:

$$\mathbb{P}\left(N_m\left(\frac{l}{2r}\right) = 0 \;\middle|\; N_m\left(\frac{l}{r}\right) = 20\right)$$

Ya que se desea que en el mismo intervalo anteriormente definido no lleguen maletas, dado que en todo el intervalo correspondiente al tiempo en el que se recorre la cinta entera, llegaron 20 maletas.

La probabilidad anterior, como el primer intervalo está contenido en el segundo, distribuye Binomial de parametros $n = 20$ y $p = \frac{1}{2}$.

Con lo anterior, la probabilidad pedida es:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(N_m\left(\frac{l}{2r}\right) = 0 \;\middle|\; N_m\left(\frac{l}{r}\right) = 20\right) &= \binom{20}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^{20-0} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{20} \end{aligned}$$

Parte 2

En primer lugar, se sabe que la maleta llegada en el instante x llega cuando ya hay n maletas en la cinta. Intuitivamente, como al llegar dicha maleta ya hay n maletas en la cinta, tienen que haber llegado en un lapso de tiempo inferior al de un recorrido de la cinta completa, el cual corresponde a l/r.

Lo pedido corresponde a que el tiempo en que demora la maleta llegada en el instante x en llegar al avión, sea mayor a lo que demoran todas las n maletas que estaban en la cinta. El tiempo de dicha maleta corresponde a la suma del tiempo que tarda desde la cinta al avión, y el tiempo que demora en recorrer la cinta entera, teniendo entonces: $Z + l/r$, donde Z distribuye Uniforme(a, b).

Por otro lado, para obtener el tiempo que tarda una de las n maletas que estaban en la cinta en llegar al avión, se necesita saber el instante en el que llegó dicha maleta a la cinta, y el tiempo que tarda desde la cinta al avión. Por propiedades del proceso de Poisson, si se sabe que en el intervalo $[0,\ l/r]$ ocurrieron n llegadas, el tiempo de ocurrencia de una llegada cualquiera (sin conocer orden) tiene distribución uniforme en $[0,\ l/r]$.

Llamemos Z_i al tiempo que tarda cada maleta entre la cinta y el avión, e Y_i al tiempo que tarda cada maleta en llegar al final de la cinta, para todo $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Así la probabilidad pedida corresponde a:

$$\mathbb{P}\left(Z + l/r \ > \ Z_i + Y_i \ \forall i \in \{1, 2, ..., n\}\right)$$

Para resolver lo anterior, se condiciona en la variable aleatoria Z:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(Z + l/r \ > \ Z_i + Y_i \ \forall i\right) &= \int_a^b \mathbb{P}\left(t + l/r \ > \ Z_i + Y_i \ \forall i\right) f_Z(t)\ dt \\ &= \int_a^b \mathbb{P}\left(t + l/r \ > \ Z_i + Y_i \ \forall i\right) \frac{1}{b-a}\ dt\end{aligned}$$

Tanto Z_i como Y_i, son i.i.d para todos los i, de modo que si se toman las variables aleatorias Z e Y correspondientes a las distribuciones Uniforme(a, b) y Uniforme$(0, l/r)$ respectivamente, se tiene:

$$\int_a^b \mathbb{P}\left(t + l/r \ > \ Z + Y\right)^n \frac{1}{b-a}\ dt$$

Para continuar, se condiciona en Y, de modo que, la expresión de probabilidades, dentro de la integral anterior es:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(t + l/r \ > \ Z + Y\right) &= \int_0^{l/r} \mathbb{P}\left(t + l/r \ > \ Z + s\right) f_Y(s)\ ds \\ &= \int_0^{l/r} \mathbb{P}\left(t + l/r \ > \ Z + s\right) \frac{r}{l}\ ds\end{aligned}$$

Ahora, al reordenar, se tiene que la probabilidad corresponde a la función de probabilidades acumulada de la distribución Uniforme(a, b), de modo que:

$$\int_0^{l/r} \mathbb{P}\left(Z \ < \ t + l/r - s\right) \frac{r}{l}\ ds = \frac{r}{l} \int_0^{l/r} F_Z\left(t + l/r - s\right) ds$$

La función de probabilidades acumulada de la distribución Uniforme es la siguiente, teniendo entonces a F_Z definido como:

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si} \quad a \le x \le b \\ 1 & \text{si} \quad x > b \end{cases} \quad \Rightarrow \quad F_Z(t + l/r - s) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t + l/r - s < a \\ \frac{t + l/r - s - a}{b-a} & \text{si} \quad a \le t + l/r - s \le b \\ 1 & \text{si} \quad t + l/r - s > b \end{cases}$$

Por lo que finalmente se tiene que la probabilidad pedida es:

$$\int_a^b \left(\frac{r}{l} \int_0^{l/r} F_Z\left(t + l/r - s\right) ds\right)^n \frac{1}{b-a}\ dt = \frac{1}{b-a}\left(\frac{r}{l}\right)^n \int_a^b \left(\int_0^{l/r} F_Z\left(t + l/r - s\right) ds\right)^n\ dt$$