



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE  
FACULTAD DE MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
Primer Semestre 2022

## Ecuaciones Diferenciales - MAT1640 Ayudantía 11

### Sistemas de ecuaciones homogéneos: caso no diagonalizable

1. Usando vectores generalizados resuelva el siguiente sistema:

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} x$$

2. Determine todos los valores del parámetro  $\alpha$  que hacen que la solución del sistema

$$\begin{aligned} x'(t) &= (5\alpha - 2)x + 4y \\ y'(t) &= -x + (5\alpha + 2)y, \quad x(0) = y(0) = 1 \end{aligned}$$

cumpla que  $\left\| \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \right\| \rightarrow \infty$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

### Matriz Fundamental

3. Para la matriz fundamental propuesta, encuentre para qué  $t$  puede corresponder a la de un sistema lineal homogéneo. Construya dicho sistema.

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \sin(\pi/t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\pi/t) \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. (a) Suponga que las matrices  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  de  $n \times n$  son conmutativas; esto es, que  $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ . Pruebe que  $e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}}$ . (Sugerencia: Agrupe los términos en el producto de las dos series del lado derecho para obtener la serie del lado izquierdo.)  
(b) Deduzca que, para cada matriz cuadrada  $\mathbf{A}$ , la matriz  $e^{\mathbf{A}}$  es no singular con

$$(e^{\mathbf{A}})^{-1} = e^{-\mathbf{A}}$$

5. Suponga que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Demuestre que  $e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} \cos 2t + \frac{1}{2}\mathbf{A} \sin 2t$ . Aplique este hecho para encontrar una solución general de  $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$  y verifique que es equivalente a la solución encontrada por el método del valor propio.

6. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones calculando la exponencial de matriz de coeficientes:

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \\ 9 & 6 & 3 & 0 \\ 12 & 9 & 6 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

7. Calcule la matriz  $\mathbf{B}$  si

$$e^{\mathbf{B}t} = \begin{bmatrix} -3e^t + 4e^{2t} & 6e^t - 6e^{2t} & 6e^t - 6e^{2t} \\ e^t - e^{2t} & -2e^t + 3e^{2t} & -2e^t + 2e^{2t} \\ -3e^t + 3e^{2t} & 6e^t - 6e^{2t} & 6e^t - 5e^{2t} \end{bmatrix}$$