PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TEMPORADA ACADÉMICA DE VERANO 2016

MAT1630 ⋆ CALCULO III
INTERROGACIÓN 3

1. Considere la región R acotada por

$$(x+3)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 4, \qquad (z+2)^2 = (x+3)^2 + y^2.$$

Escriba en coordenadas esféricas y cilíndricas, la integral triple que representa el volumen de R. Calcule dicho volumen.

2. Un sólido tiene forma de cilindro circular recto con radio R y altura h. Si la densidad es directamente proporcional a la distancia a una de las bases, determine las coordenadas del centro de masa del sólido.

3. Considere $F(x,y) = \left(\dfrac{y^2}{x^2+y^2}, \dfrac{-x^2}{x^2+y^2}\right)$ definido para (x,y) en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

   a) Calcule la integral de línea del del campo F, $\int_\gamma F\, d\gamma$, para la curva $\gamma(t) = (a\cos(t), a\,\mathrm{sen}(t))$ con $t \in [0,\pi]$, $a \in \mathbb{R}^+$.

   b) Determine si F es, o no, un campo conservativo.

4. Considere R la región interior al cuadrado de vértices $(1,1), (-1,1), (1,-1), (-1,-1)$ y exterior a la circunferencia de radio 1 y centrada en el origen. Considere

$$F(x,y) = \left(\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2}\right) + (-y, x).$$

Sea γ la curva que recorre la frontera de R orientada positivamente. Calcule la integral de línea $\int_\gamma F\, d\gamma$.

Observación: Para la pregunta 2 pueden ser de ayuda las siguientes fórmulas, para calcular el centro de masa de una región R con densidad $\rho(x,y,z)$.

$$M = \int\int\int_R \rho(x,y,z)\, dxdydz, \quad M_{xy} = \int\int\int_R z\rho(x,y,z)\, dxdydz, \quad M_{xz} = \int\int\int_R y\rho(x,y,z)\, dxdydz$$

$$M_{yz} = \int\int\int_R x\rho(x,y,z)\, dxdydz \quad (\overline{x},\overline{y},\overline{z}) = \left(\frac{M_{yz}}{M}, \frac{M_{xz}}{M}, \frac{M_{xy}}{M}\right)$$

Una solución

1. **Solución** Primero hacemos el cambio de variables

$$x = u + 3;$$
$$y = v;$$
$$z = w + 2.$$

Este cambio de variables tiene Jacobiano 1 y transforma la región S que est comprendida entre la esfera $u^2 + v^2 + w^2 = 4$ y el cono $w^2 = u^2 + v^2$, en la región R definida más arriba. Por la simetría de la regiń, sólo consideraremos la parte $z \geq 0$, y luego multiplicaremos por 2.

Primero notemos que la esfera y el cono se intersectan en el circulo $u^2 + v^2 = 2$ que está el el plano $w = \sqrt{2}$.

Para calcular el volumen usamos las coordenadas cilíndricas

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{4-r^2}} r\, dz\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r(\sqrt{4-r^2} - \sqrt{2})\, dr$$
$$\pi \int_0^2 (\sqrt{4-s} - \sqrt{2})\, ds = -\pi \left(\frac{2}{3}(4-s)^{3/2} \Big|_2^2 - 2\sqrt{2} \right) = \pi \frac{16 - 10\sqrt{2}}{3}$$

El volumen de R es por tanto $2\pi(16-10)\sqrt{2}/3$

2. Un sólido tiene forma de cilindro circular recto con radio R y altura h. Si la densidad es directamente proporcional a la distancia a una de las bases, determine las coordenadas del centro de masa del sólido.

Solución La densidad es de la forma $\rho(x, y, z) = \alpha z$. La masa M del sólido la calculamos usando coordenadas cilíndricas:

$$M = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^h \alpha z r\, dz dr d\theta = \alpha 2\pi \frac{R^2}{2} \frac{h^2}{2} = \frac{\alpha \pi R^2 h^2}{2}$$

Dada la simetría del cilindro y de la densidad de este las coordenadas x e y del centro de masa deben ser iguales a cero. La coordenada z la calculamos por

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^h \alpha z^2 r\, dz dr d\theta = \alpha 2\pi \frac{R^2}{2} \frac{h^3}{3} = \frac{\alpha \pi R^2 h^3}{3}.$$

Entonces el centro de masa es $(0, 0, 2h/3)$.

3. Para calcular la integral de línea pedida, utilizamos la definición, es decir

$$\int_\gamma F\, d\gamma = \int_0^\pi \left(\frac{a^2 \operatorname{sen}^2(t)}{a^2}, \frac{-a^2 \cos^2(t)}{a^2} \right) \cdot (-a \operatorname{sen}(t), a \cos(t))\, dt$$
$$= -a \int_0^\pi (\operatorname{sen}^3(t) + \cos^3(t))\, dt = \frac{-4a}{3}.$$

Para determinar si el campo es o no conservativo, comenzaremos calculando la integral de linea para otra curva, que tenga los mismos extremos que la curva de la parte anterior. Sin perdida de generalidad, consideraremos el caso $a = 1$ y la curva que consta de los tres segmentos dador por:

$$\gamma_1(t) = (1, t), \quad t \in [0, -1]$$
$$\gamma_2(t) = (t, -1), \quad t \in [-1, 1]$$
$$\gamma_3(t) = (-1, t), \quad t \in [-1, 0].$$

Procedemos a calcular

$$\int_{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3} F(x,y)d\gamma = \int_{\gamma_1} F(x,y)\,d\gamma + \int_{\gamma_2} F(x,y)\,d\gamma + \int_{\gamma_3} F(x,y)\,d\gamma = \pi.$$

Por lo tanto, si el campo fuese conservativo, la integral de linea sobre curvas que tienen los mismos extremos tendría el mismo valor, pero las integrales, que hemos calculado entregan distintos valores. Se concluye que F no es conservativo en su dominio.

4. Notemos que el campo F es de clase $\mathcal{C}^1$ en el interior de la región R, luego por el Teorema de Green, la integral pedida se puede calcular como:

$$\int_\gamma F\,d\gamma = \int\int_R \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\,dxdy.$$

Donde $M = \dfrac{y}{x^2+y^2} - y; \quad N = \dfrac{-x}{x^2+y^2} + x$ y por lo tanto

$$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 2$$

Se concluye que,

$$\int_\gamma F\,d\gamma = \int\int_R 2\,dxdy = 2Area(R) = 2(4-\pi).$$