



Control 1

1 Pregunta 1 (34 puntos)

La función de utilidad de un individuo que consume bienes x_1 y x_2 es la siguiente:

$$u(x_1, x_2) = 3x_1^{1/2} + x_2^{1/2}$$

El individuo enfrenta un precio p_1 por unidad de x_1 , un precio p_2 por unidad de x_2 , y tiene un ingreso de m .

- (a) (2 puntos) Plantee el problema de maximización del individuo y Lagrangeano asociado.
- (b) (10 puntos) Encuentre las demandas marshallianas de los bienes x_1 y x_2 . Justifique su respuesta, escribiendo condiciones de KKT e indicando cómo se descartan los casos que no son relevantes.
- (c) (2 puntos) Muestre que la función de utilidad indirecta se puede expresar como

$$V(p_1, p_2, m) = \left(\frac{m(p_1 + 9p_2)}{p_1 p_2} \right)^{1/2}$$

- (d) (20 puntos) Suponga que inicialmente $p_1^0 = 3$, $p_2^0 = 1$, y que $m = 100$.
 - (i) (4 puntos) Encuentre las cantidades consumidas y la utilidad alcanzada por el individuo con esos precios e ingreso.
 - (ii) (8 puntos) Si p_2 cayera a la mitad (es decir, si $p_2^1 = \frac{1}{2}$), ¿qué valor debería tomar p_1^1 para que el individuo alcance la utilidad que alcanzaba con los precios originales?
 - (iii) (8 puntos) Muestre que el comportamiento (las cantidades consumidas) con los precios originales y con los precios nuevos satisface el axioma débil de preferencias reveladas.

Respuesta.

(a) El problema es

$$\max 3x_1^{1/2} + x_2^{1/2} \text{ sujeto a } x_1p_1 + x_2p_2 \leq m \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

con lagrangeano

$$\mathcal{L} = 3x_1^{1/2} + x_2^{1/2} + \lambda(m - x_1p_1 - x_2p_2)$$

(puede agregar multiplicadores adicionales para las restricciones de no negatividad, o no hacerlo y escribir las condiciones de KKT como $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_k} \leq 0$ con holgura complementaria $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_k} x_k = 0$ para cada $k \in \{1, 2\}$).

(b) Se pueden descartar soluciones esquina porque $UMgx_k \rightarrow \infty$ si $x_k = 0$. $\lambda > 0$ por no saciedad. Demandas marshallianas son: $x_1^M = \frac{9mp_2}{p_1(p_1+9p_2)}$; $x_2^M = \frac{mp_1}{p_2(p_1+9p_2)}$

La función de utilidad es cóncava (lo que se verifica porque es la suma de dos funciones cóncavas, o usando hessiano) y la restricción es lineal, por lo que se satisfacen las condiciones de segundo orden.

(c) Reemplazando demandas marshallianas en la función de utilidad y simplificando, se llega a lo solicitado.

(d)

(i) $x_1^0 = 25$; $x_2^0 = 25$; $u_0 = 20$

(ii) Reemplazando en la función de utilidad indirecta, se llega a que $p_1^1 = \frac{9}{2}$.

(iii) Con los precios nuevos, las cantidades consumidas son $x_1^1 = \frac{100}{9} = 11\frac{1}{9}$ y $x_2^1 = 100$.

La canasta original no es alcanzable con los precios nuevos:

$$25 * \frac{9}{2} + 25 * \frac{1}{2} = 125 > 100.$$

La canasta nueva no es alcanzable con los precios originales:

$$\frac{100}{9} * 3 + 100 * 1 = 133\frac{1}{3} > 100.$$

Por lo tanto, sí cumplen con el axioma débil.

■

2 Pregunta 2 (26 puntos)

Considere el problema de elección de un individuo que disfruta dedicando tiempo a jugar fútbol y leer. Denotaremos por x_1 al número de partidos de fútbol y x_2 el número de libros al mes. Suponga primero que sólo enfrenta una restricción presupuestaria: tiene un ingreso de m al mes, y debe pagar p_1 por cada partido y p_2 por cada libro. Suponga que la utilidad que representa su preferencia por estas actividades es:

$$u(x_1, x_2) = \ln x_1 + 2 \ln x_2$$

- (a) (2 puntos) Plantee el problema de maximización del individuo.
- (b) (8 puntos) Encuentre la canasta óptima (x_1^*, x_2^*) en función de m , p_1 y p_2 . Justifique su respuesta, refiriéndose a las condiciones de primer y segundo orden del problema de maximización (no es necesario resolver con KKT ni referirse a casos irrelevantes).
- (c) (2 puntos) Encuentre el número de partidos que juega y de libros que lee al mes si $m = 30$, $p_1 = 2$ y $p_2 = 5$. Sean t_1 y t_2 las horas requeridas para jugar un partido y leer un libro respectivamente. Si jugar cada partido requiere de $t_1 = 2$ horas y leer cada libro requiere de $t_2 = 10$ horas, ¿cuántas horas usa al mes en estas dos actividades?
- (d) (10 puntos) Al empezar a trabajar, el ingreso de este individuo aumenta a 300, pero ya no tiene tanto tiempo libre disponible como antes. Suponga en particular que tiene $T = 60$ horas al mes para destinar a estas actividades. ¿Cuántas horas destinará ahora a jugar fútbol y a leer? No es necesario resolver con KKT, pero debe justificar claramente su procedimiento y respuesta.
- (e) (4 puntos) Compare sus respuestas en (c) y (d). ¿Aumenta su utilidad al disponer de mayor ingreso cuando empieza a trabajar y dispone de menor tiempo libre? ¿aumenta el consumo de ambos bienes? ¿a qué se debe esto?

Respuesta.

- (a) *El problema es*

$$\max \ln x_1 + 2 \ln x_2 \text{ sujeto a } x_1 p_1 + x_2 p_2 \leq m$$

- (b) *Se pueden descartar soluciones esquina porque $UMg x_k \rightarrow \infty$ si $x_k = 0$. $\lambda > 0$ por no saciedad. Las demandas son $x_1^* = \frac{m}{3p_1}$ y $x_2^* = \frac{2m}{3p_2}$. La función de utilidad es cóncava (lo que se verifica porque es la suma de dos funciones cóncavas, o usando hessiano) y la restricción es lineal, por lo que se satisfacen las condiciones de segundo orden.*
- (c) *Con esos precios e ingresos obtenemos $x_1^* = \frac{30}{3 \cdot 2} = 5$ y $x_2^* = \frac{2 \cdot 30}{3 \cdot 5} = 4$. Gasta 50 horas.*
- (d) *Con las demandas calculadas antes gastaría más tiempo del que tiene disponible. La restricción de tiempo será activa ahora, con demandas $x_1^* = \frac{T}{3t_1}$ y $x_2^* = \frac{2T}{3t_2}$. Luego, juega 10 partidos y lee 4 libros.*
- (e) *Aumenta el número de partidos que juega, pero no el número de libros porque es demasiado costoso: si bien p_1 no ha cambiado, el costo en tiempo es lo relevante ahora. Sí aumenta su utilidad.*

■