Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Segundo Semestre 2019

Ecuaciones Diferenciales ⋆ MAT1640

Examen (de prueba)

1. Considere la siguiente ecuación de primer orden

$$\frac{d}{dx}y(x) = \left(1 - x^2 - y^2(x)\right)^{3/2}$$

Para cual de las siguientes condiciones iniciales es posible garantizar existencia y unicidad de la respectiva solución.

I. $y(0) = -1$.

II. $y(0) = 1$.

(a) Sólo I.

(b) Sólo II.

(c) Ambas, I y II.

(d) Ninguna de las anteriores.

2. Considere el siguiente PVI,

$$\sin(t)x'(t) + tx(t) = 1, \quad x(5\pi/4) = 1$$

¿Cuál es el intervalo más grande donde el PVI admite solución y ésta es única?

(a) $[0, 2\pi]$

(b) $[0, \pi]$

(c) $[\pi, 3\pi/2]$

(d) $[\pi, 2\pi]$

3. Sea $x(t)$ la solución única del PVI

$$x'(t) = t\,\sqrt{x^2(t)+1}, \quad x(0) = 0$$

El valor de $x(4)$ es:

(a) $\dfrac{e^8 - e^{-8}}{2}$

(b) $-\dfrac{e^4 - e^{-4}}{2}$

(c) $\dfrac{e^4 - e^{-4}}{2}$

(d) $\dfrac{e^2 - e^{-2}}{2}$

4. Dado el problema de valor inicial

$$x'(t) = x(t) + \cos(t), \quad x(0) = -1/2$$

La solución a este problema es:

(a) $x(t) = -\dfrac{e^t}{2} + \sin(t)$

(b) $x(t) = \dfrac{\sin(t) - \cos(t)}{2}$

(c) $x(t) = \dfrac{\sin(t) - \cos(t) - e^t}{4}$

(d) $x(t) = -\dfrac{e^t + \cos(t)}{4} + \sin(t)$

5. Sea $\mu = \mu(y)$, con $\mu(1) = 1$, el único factor integrante de la ecuación diferencial

$$(xy^2 - y^3)\,dx + (1 - xy^2)\,dy = 0$$

El valor de $\mu(1/4)$ es:

(a) $\dfrac{1}{16}$

(b) 16

(c) 4

(d) $\dfrac{1}{4}$

6. Si $y_p(x) = Axe^{-x}\sin(x) + Bxe^{-x}\cos(x)$ es solución particular de la siguiente ecuación diferencial, ¿Cuál es el valor de $A + B$?

$$y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) = e^{-x}\sin(x)$$

(a) $-\dfrac{1}{4}$

(b) 2

(c) $-\dfrac{1}{2}$

(d) 4

7. Sea A una matriz tal que

$$A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

Si $\vec{b} = \lim\limits_{t\to-\infty} e^{At}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, entonces $\vec{b}$ es igual a:

(a) $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

(b) $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$

(c) $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

(d) $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

8. Se sabe que $e^{(A-I)t} = I + (A-I)t + (A-I)^2\,\dfrac{t^2}{2}$, siendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. La solución del siguientes PVI es:

$$\frac{d}{dt}\vec{x}(t) = A\vec{x}(t), \quad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) $\begin{pmatrix} 1 + 7t + 18t^2 \\ 1 + 6t \\ 1 \end{pmatrix} e^{t}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 + 7t + 9t^2 \\ 1 + 6t \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 + 7t + 9t^2 \\ 1 + 6t \\ 1 \end{pmatrix} e^{t}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 + 7t + 18t^2 \\ 1 + 6t \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$