Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática

MAT 1610 - Cálculo I.
Control 3.

FILA A

Nombre: ____

Sección:_______

Tiempo : 60 minutos

Fecha : 2 de Junio de 2017

1. Exprese el límite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{n+1}{n}}+\sqrt{\frac{n+2}{n}}+\sqrt{\frac{n+3}{n}}+\cdots+\sqrt{\frac{n+n}{n}}\right)$$

como una integral definida y luego calcúlela.

Solución

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{n+1}{n}}+\sqrt{\frac{n+2}{n}}+\sqrt{\frac{n+3}{n}}+\cdots+\sqrt{\frac{n+n}{n}}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{n}{n}}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{k}{n}}\right) = \int_1^2 \sqrt{x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\Big|_1^2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right).$$

2. Encuentre el intervalo sobre el cual la función

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t+t^2}\, dt$$

es concava hacia arriba.

Solución

Debemos ver en que intervalo(s9 la segunda derivada es positiva, claramente el discriminante del denominador es negativo, as es que el dominio de $f(x)$ son todos los reales. Entonces

$$f'(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$$

Por lo tanto

$$f''(x) = -\frac{1+2x}{(1+x+x^2)^2}$$

por lo tanto

$$f''(x) > 0 \leftrightarrow 2x < -1 \leftrightarrow x < -\frac{1}{2}$$

Por lo tanto $f(x)$ es cóncava hacia arriba en el intervalo $(-\infty, -\frac{1}{2})$.

3. Si $F(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\,dt$ donde , $f(t) = \displaystyle\int_1^{t^2} \frac{\sqrt{1+u^2}}{u}\,du$ entonces el valor de $F''(2)$ es:

a) 34

b) 17

c) $\ln(\frac{17}{2})$

d) $\ln(\frac{15}{2})$

e) Ninguna de las anteriores.**Respuesta Correcta**

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática

MAT 1610 - Cálculo I.
Control 3.

FILA B

Nombre: ____

Sección:_______

Tiempo : 60 minutos

Fecha :2 de Junio de 2017

1. Exprese el límite

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\frac{n}{n^2+3^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$$

como una integral definida y luego calcúlela.

Solución

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\frac{n}{n^2+3^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+(\frac{k}{n})^2}\right)$$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$\arctan(x)\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}.$$

2. Encuentre el intervalo sobre el cual la función

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t+t^2}\,dt$$

es concava hacia abajo.

Debemos ver en que intervalo(s) la segunda derivada es negativa, claramente el discriminante del denominador es negativo, as es que el dominio de $f(x)$ son todos los reales. Entonces

$$f'(x) = \frac{1}{1-x+x^2}$$

Por lo tanto

$$f''(x) = -\frac{-1+2x}{(1-x+x^2)^2}$$

por lo tanto

$$f''(x) < 0 \leftrightarrow 2x > 1 \leftrightarrow x > \frac{1}{2}$$

Por lo tanto $f(x)$ es cóncava hacia abajo en el intervalo $(\frac{1}{2}, \infty)$.

3. Si $F(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\,dt$ donde , $f(t) = \displaystyle\int_1^{t^2} \frac{\sqrt{1+u^3}}{u}\,du$ entonces el valor de $F''(1)$ es:

   a) 4

   b) 2

   c) $\ln(\frac{5}{2})$

   d) $\ln(\frac{3}{2})$

   e) Ninguna de las anteriores.**Respuesta Correcta**

Sin uso de calculadoras.
Recuerde escribir solo con tinta indeleble y no usar corrector.