PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Instituto de Física & Escuela de Ingeniería
FIS1513 / ICE1513 — Dinámica
Primer Semestre 2019

Examen - Alternativas

Lunes 24 de junio 2019
Duración total: 150 minutos

Reglas generales:

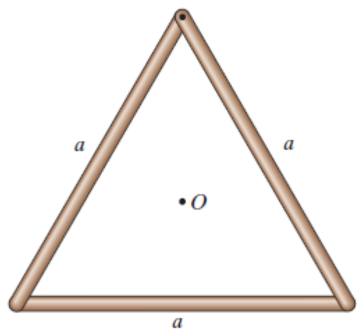
1. Escriba su nombre, RUT, y sección, de manera clara y legible.
2. Está prohibido el uso de aparatos electrónicos: calculadora, celulares, etc.
3. Se debe firmar el acta de asistencia y mostrar su TUC o cédula de identidad al momento de firmar.
4. **No se aceptan preguntas de ningún tipo**. Si cree que hay algún error, déjelo claramente explicado al final de la prueba.
5. Cualquier acto vaya en contra del *código de honor* se sancionará con nota final 1.0 en el curso.

Reglas preguntas de selección múltiple:

1. Debe **seleccionar una sola respuesta** en las preguntas de selección múltiple. Para ello debe rellenar completamente el círculo de la respuesta seleccionada (de lo contrario su respuesta se considerará inválida). Los cálculos y desarrollo de las preguntas de selección múltiple no se consideran.
2. En las preguntas de selección múltiple: **las respuestas incorrectas descuentan** $1/4$ **de punto**.
3. Al finalizar la interrogación, entregue únicamente la hoja de respuestas (no entregue este cuadernillo).

Problema 1 [1 punto]

Determine el momento de inercia con respecto al punto O del objeto de masa total m formado por tres barras de largo a y densidad homogénea, como se muestra en la siguiente figura. Puede servirle saber que el radio de una circunferencia inscrita en un triángulo equilátero de lado a es: $\frac{\sqrt{3}}{6}a$.



a) $I = ma^2$

b) $I = \frac{1}{6}ma^2$

c) $I = \frac{1}{4}ma^2$

d) $I = \frac{\sqrt{3}}{6}ma^2$

e) $I = \frac{1+2\sqrt{3}}{12}ma^2$

SOLUCIÓN:

$$I_{(\text{CM,barra})} = \frac{1}{12}m_{(\text{barra})}a^2$$

Aplicando el teorema de Steiner:

$$I_{(\text{O,barra})} = \frac{1}{12}m_{(\text{barra})}a^2 + m_{(\text{barra})}d^2$$

Con $d = \frac{\sqrt{3}}{6}a$:

$$I_{(\text{O,barra})} = \frac{1}{6}m_{(\text{barra})}a^2$$

Como son 3 barras:

$$I = 3I_{(\text{O,barra})} = \frac{1}{2}m_{(\text{barra})}a^2$$

Finalmente, como $m = 3m_{(\text{barra})}$:

$$I = \frac{1}{6}ma^2$$

Problema 2 [1 punto]

Suponga que un asteroide que viaja en línea recta hacia el centro de la Tierra se estrella contra nuestro planeta sobre la línea del Ecuador, apenas incrustándose por debajo de la superficie. En términos de la masa terrestre M, ¿cuál tendría que ser la masa m de dicho asteroide para que el día dure 30 horas (es decir, un 25 % más que actualmente)? Suponga que el asteroide es muy pequeño en comparación con la Tierra (objeto puntual), y que la Tierra se puede modelar como una esfera sólida de masa M y radio R_T.

a) $m = 0{,}1M$

b) $m = 0{,}5M$

c) $m = 0{,}4M$

d) $m = 0{,}8M$

e) $m = 0{,}25M$

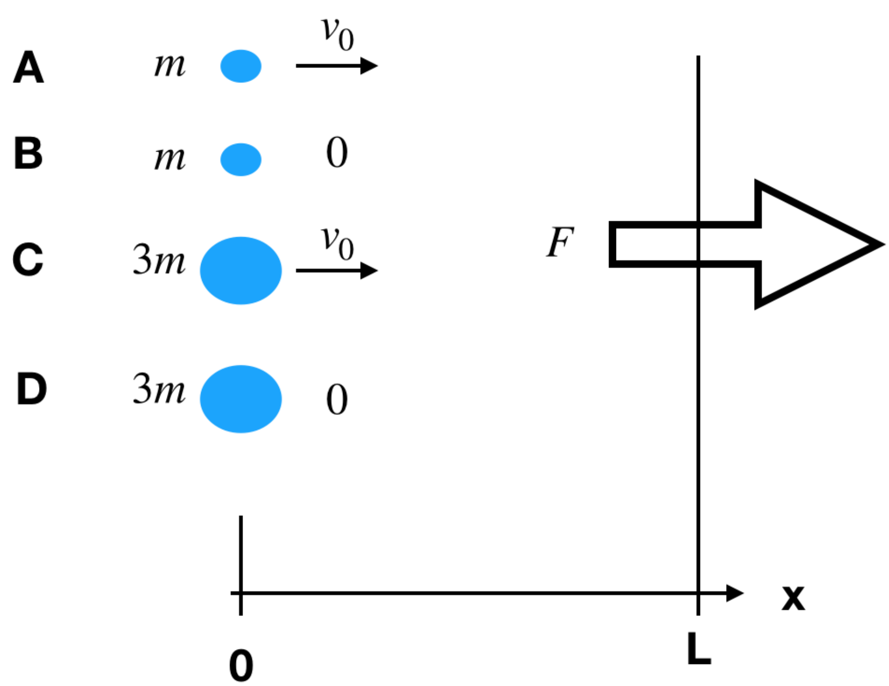
SOLUCIÓN:
Momento de inercia inicial: $I_1 = \frac{2}{5}MR^2$
Momento de inercia final: $I_2 = \frac{2}{5}MR^2 + mR^2$
Como $T_2 = 1{,}25T_1 \Rightarrow \omega_1 = 1{,}25\omega_2 = \frac{5}{4}\omega_2$
Se conserva el momentum angular: $L = I_1\omega_1 = I_2\omega_2$
Luego:

$$\frac{2}{5}MR^2\frac{5}{4}\omega_2 = R^2\left(\frac{2}{5}M + m\right)\omega_2$$

$$\Rightarrow m = M/10$$

Problema 3 [1 punto]

Cuatro masas son aceleradas desde $x = 0$ por una fuerza constante F hasta llegar a $x = L$. Las masas A y C tienen velocidad inicial v_0, mientras que las masas B y D parten desde el reposo. ¿Qué masa experimenta el **mayor** cambio de momentum lineal?



a) A

b) B

c) C

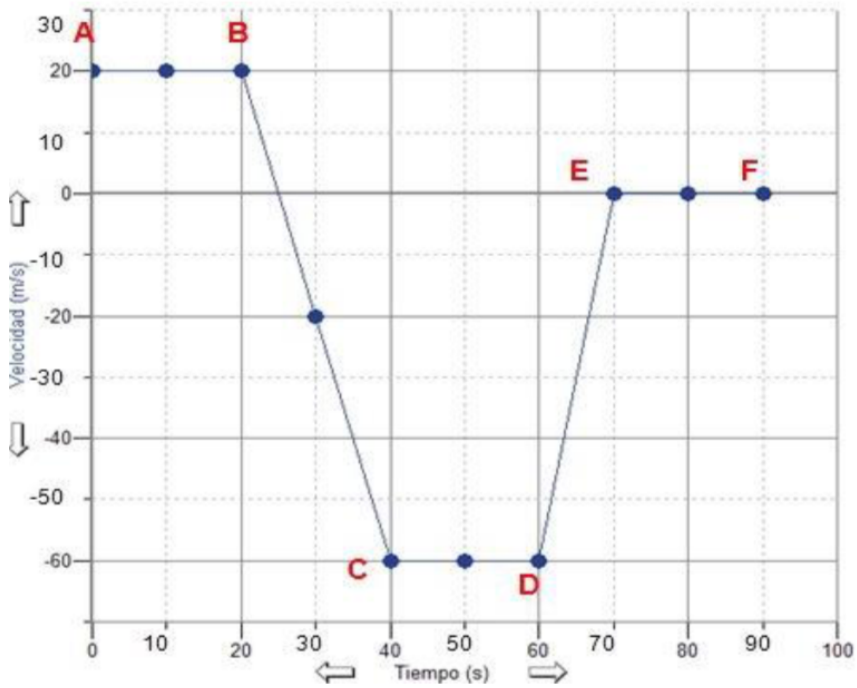
d) D

e) No hay suficiente información para responder la pregunta.

Solución D, la fuerza actúa durante más tiempo.

Problema 4 [1 punto]

Una partícula parte con velocidad inicial de 20 m/s, su gráfico velocidad versus tiempo se muestra en la figura. Determine la distancia total recorrida.



a) 1000 m

b) 2400 m

c) 3100 m

d) Menos que 1000 m

e) No hay suficiente información para responder la pregunta

b) $L_{tot} = L_{AB} + L_{BC} + L_{CD} + L_{DE} + L_{EF}$

$L_{AB} = S_{AB} = 400m$ (0. 1 pto)

$L_{BC} = \frac{20m/s \times 5\,s}{2} + \frac{60m/s \times 15\,s}{2} = 500m$ (0.4 ptos)

$L_{CD} = |S_{CD}| = 1200\ m$ (0.1 pto)

$L_{DE} = |S_{DE}| = 300m$ (0.1 pto)

$L_{EF} = 0\ m$ (0.1 pto)

$L_{tot} = 2400m$ (0.2 ptos)

Problema 5 [1 punto]

Un bloque de 20 kg se mueve sobre una superficie horizontal lisa bajo la acción de una fuerza neta F inclinada en 60º con respecto a la horizontal. El ángulo de la fuerza no cambia, pero su magnitud depende de la posición del bloque de acuerdo a la función $F(x) = 60x^2$, donde F se mide en Newton y x en metros. Si en $x = 0$ el bloque tiene una velocidad de 1 m/s hacia la derecha ¿cuál es la posición del bloque cuando alcanza una rapidez de 3 m/s^2?

a) 3.0 m

b) 2.5 m

c) 2.0 m

d) 1.5 m

e) 1.0 m

Solución: El trabajo realizado por la fuerza al desplazarse de $x_1 = 0$ a x_2 está dado por:

$$\begin{aligned} W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{x_1}^{x_2} F(x) \cos 60^\circ dx \\ &= \int_0^{x_2} \frac{1}{2} 60x^2 dx \\ &= 10x_2^3 \end{aligned}$$

De acuerdo al teorema del trabajo y la energía, tenemos que:

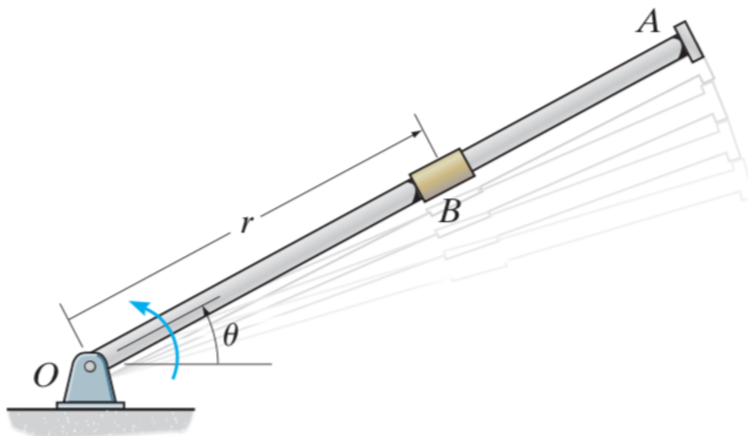
$$W = \Delta K = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

Remplazando valores:

$$\begin{aligned} 10x_2^3 &= \frac{1}{2}(20)(3^2 - 1^2) \\ x_2^3 &= 8 \\ \rightarrow x_2 &= 2 \text{ m} \end{aligned}$$

Problema 6 [1 punto]

La barra delgada OA gira en sentido anti-horario con una velocidad angular $\dot{\theta} = \frac{\pi}{3}$ rad/s. El anillo B, de masa m, se mueve a lo largo de la barra con velocidad radial $\dot{r} = 4t$ m/s, donde t es el tiempo medido en segundos. Si $\theta = 0$ y $r = 0$ cuando $t = 0$, y la barra OA tiene masa despreciable, ¿cuál es la magnitud N de la fuerza normal que ejerce la barra sobre el anillo para $t = 1$ s? Suponga que existe una aceleración de gravedad igual a g m/s^2.



a) $N = m\left(\frac{g}{2} + \frac{8\pi}{3}\right)$

b) $N = \frac{mg}{2}$

c) $N = m\left(\frac{g}{2} + \frac{16\pi}{3}\right)$

d) $N = m\left(\frac{16\pi}{3} - \frac{g}{2}\right)$

e) $N = m\left(\frac{8\pi}{3} - \frac{g}{2}\right)$

Solución:
Por Newton, en el eje $\hat{\theta}$ tenemos: $N - mg\cos\theta = m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})$.

$\dot{r} = 4t$ m/s.

$\dot{\theta} = \frac{\pi}{3} \rightarrow \ddot{\theta} = 0$, $\theta = \frac{\pi}{3}t$

Por lo tanto: $N = mg\left(\cos\frac{\pi}{3}t + 2\cdot 4t\frac{\pi}{3}\right)$

Para $t = 1$ s: $N = mg\left(\cos\frac{\pi}{3} + \frac{8\pi}{3}\right) = m\left(\frac{g}{2} + \frac{8\pi}{3}\right)$

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Instituto de Física & Escuela de Ingeniería
FIS1513 / ICE1513 — Dinámica
Primer Semestre 2019

Nombre: ____________________________________

RUT: ______________________________________ N lista: _________

Examen
Preguntas de desarrollo

Lunes 24 de junio 2019
Duración total: 150 minutos

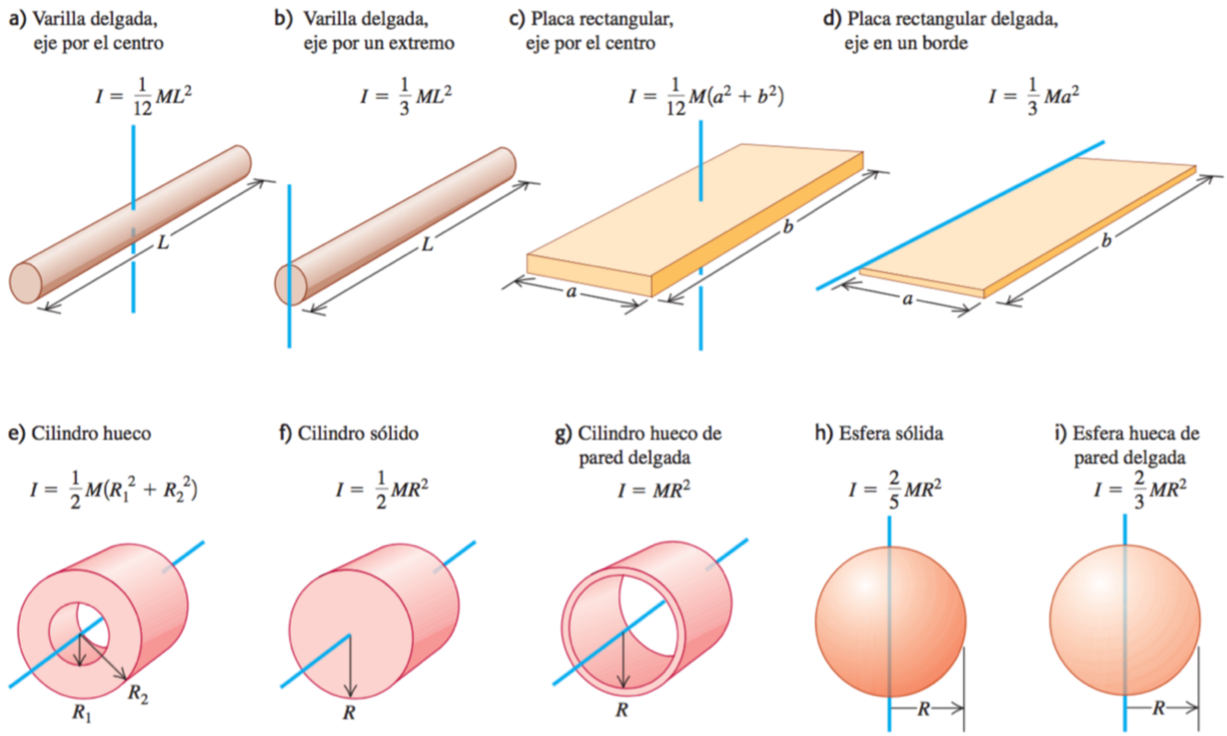
Reglas generales:

1. Escriba su nombre, RUT, y sección, de manera clara y legible.
2. Está prohibido el uso de aparatos electrónicos: calculadora, celulares, etc.
3. Se debe firmar el acta de asistencia y mostrar su TUC o cédula de identidad al momento de firmar.
4. **No se aceptan preguntas de ningún tipo**. Si cree que hay algún error, déjelo claramente explicado al final de la prueba.
5. Cualquier acto vaya en contra del *código de honor* se sancionará con nota final 1.0 en el curso.

Reglas específicas a las preguntas de desarrollo:

1. Está permitido el uso de lápiz mina en las preguntas de desarrollo, pero pierde el derecho a recorrección.

Tabla 9.2 Momentos de inercia de diversos cuerpos



Nombre: ______________________________

RUT: ______________________________

N lista: ________

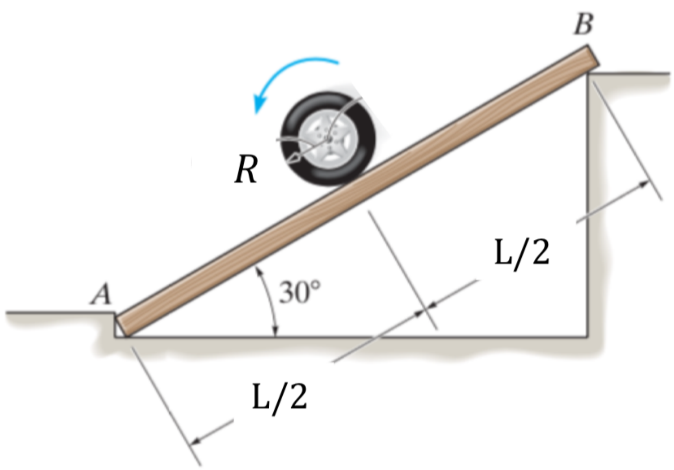
Problema 1 [6 puntos]

La rueda de la figura se asemeja a un disco de masa M y radio R, y baja **sin deslizar** a lo largo de una tabla delgada de masa m y largo L. La tabla está apoyada en la esquina A y en el apoyo liso B, y forma un ángulo de 30 ° con la horizontal.

a) Determine el valor de la fuerza de roce sobre la rueda [2 puntos].

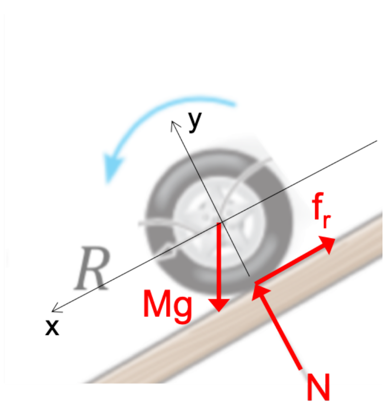
b) Calcule el mínimo coeficiente de roce estático requerido para que la rueda baje por la tabla sin deslizar [2 puntos].

c) Si la rueda se suelta desde el reposo en el punto B, ¿cuánto demorará en llegar al extremo inferior de la tabla? [2 puntos]



Solución:

a) Determine el valor de la fuerza de roce sobre la rueda [2 puntos].



En la figura se muestra el DCL para la rueda. Aplicando la segunda ley de Newton para el eje x, se obtiene:

$Mg\sin 30 - f_r = Ma$ (0.5 puntos)

Aplicando la ecuación de torque para la rueda, tenemos:

$\tau = I\alpha \rightarrow f_r \cdot R = \frac{1}{2}MR^2\alpha$ (0.5 puntos)

Como la rueda avanza sin deslizar, también se cumple: $a = R\alpha$ (0.5 puntos)

Reemplazando, se obtiene:

$f_r = \frac{1}{2}Ma$

$Mg\sin 30 - \frac{Ma}{2} = Ma$

$g\sin 30 = \frac{3a}{2} \rightarrow a = \frac{2g\sin 30}{3} = \frac{g}{3}$

$f_r = \frac{Mg}{6}$ (0.5 puntos)

b) Calcule el mínimo coeficiente de roce estático requerido para que la rueda baje por la tabla sin deslizar [2 puntos].

Si la rueda no desliza, la fuerza de roce corresponde a un roce estático. Por lo tanto, para la fuerza f_r calculada en el punto anterior, se debe cumplir:

$f_r \leq \mu_e \cdot N$ (1 punto), donde μ_e es el coeficiente de roce estático y N es la fuerza normal.

Aplicando la segunda ley de Newton en el eje y, se obtiene N:

$N = Mg\cos 30$. (0.5 puntos)

El valor de la fuerza de roce es: $f_r = \frac{Mg}{6}$ (de la parte a).
Por lo tanto, la condición para μ_e es:

$$\mu_e Mg\cos 30 \geq \frac{Mg}{6} \tag{1}$$

$$\mu_e \geq \frac{1}{6\cos 30} = \frac{1}{3\sqrt{3}}(0.5\text{puntos}) \tag{2}$$

c) Si la rueda se suelta desde el reposo en el punto B, ¿cuánto demorará en llegar al extremo inferior de la tabla? [2 puntos]

La aceleración del centro de masa de la rueda a lo largo del plano inclinado es constante e igual a: $a = \frac{g}{3}$ (0.5 puntos)

Por cinemática, la distancia recorrida a lo largo de la tabla es:

$$x(t) = \frac{at^2}{2} + v_0 t \qquad \text{(1punto)} \tag{3}$$

Si parte desde el reposo en B: $v_0 = 0$. Por lo tanto, el tiempo que demora en recorrer una distancia L, es:

$$L = \frac{at^2}{2} \rightarrow t = \sqrt{\frac{2L}{a}} = \sqrt{\frac{6L}{g}} \qquad \text{(0.5puntos)} \tag{4}$$

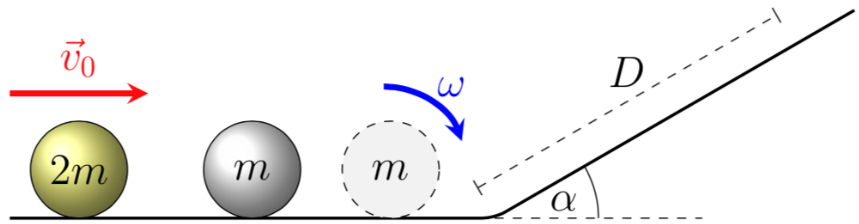
Nombre: ______________________

RUT: ______________________

N lista: ________

Problema 2 [6 puntos]

Una esfera sólida de masa $2m$ y radio R que rueda (**sin deslizar**) con rapidez v_0 hacia la derecha choca de frente **elásticamente** con un cascarón esférico de masa m y radio R, inicialmente en reposo. Después del choque, el cascarón de masa m rueda (**sin deslizar**) hasta subir por un plano inclinado con un ángulo α respecto de la horizontal.



Determine:

a) La rapidez angular ω del cascarón tras el choque [3 puntos].

b) La distancia máxima D que recorre el cascarón sobre el plano inclinado [3 puntos].

Nota: Exprese todos sus resultados términos de m, v_0, R, α y la aceleración de gravedad g.

a) Se trata de un choque elástico, es decir, el sistema formado por la esfera y el cascarón conserva el *momentum* lineal y la energía mecánica [0.5 puntos]. De estas condiciones podemos determinar la rapidez angular del cascarón. Consideremos un sistema de referencia con el eje x horizontal hacia la derecha.

El *cambio de momentum lineal* en el eje horizontal es dado por

$$\Delta p_x = 2mV + mv - (2mv_0) = 0 \qquad \text{[0.5 puntos]},$$

donde hemos supuesto que tras el choque la esfera rueda con rapidez V hacia la derecha mientras que el cascarón también rueda hacia la derecha pero con rapidez v.

Acomodando los términos se obtiene

$$v = 2(v_0 - V). \tag{5}$$

Además, el choque es elástico, ez decir, la **energía se conserva**. Por supuesto, la energía del sistema (durante el choque) es solo cinética. Sin embargo, tanto la esfera como el cascarón ruedan, de modo que **tienen tanto energía cinética de traslación como de rotación**. La *variación de energía* es dada por

$$\Delta E = \frac{1}{2}(2m)V^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\,2mR^2\right)\left(\frac{V}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}mR^2\right)\left(\frac{v}{R}\right)^2 - \left\{\frac{1}{2}(2m)v_0^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\,2mR^2\right)\left(\frac{v_0}{R}\right)^2\right\} = 0 \qquad \text{[1 pu} \tag{6}$$

donde se ha utilizado que la rapidez del centro de masa v se relaciona con la rapidez angular ω para un **objeto que rueda sin deslizar**, como $v = R\omega$. También se han usado los momentos de inercia de la esfera sólida y del cascarón ($I = \frac{2}{5}MR^2$ e $I = \frac{2}{3}MR^2$, respectivamente.).

Simplificando y acomodando los términos se obtiene

$$\frac{5}{3}v^2 = \frac{14}{5}\left(v_0^2 - V^2\right). \tag{7}$$

Procedemos a resolver el sistema de ecuaciones (5) y (7). Al dividir la ec. (7) entre la ec. (5) se obtiene una ecuación lineal que simplifica el sistema

$$\frac{5}{3}\,v = \frac{7}{5}\left(v_0 + V\right). \tag{8}$$

Así, el sistema a resolver dado en las ecuaciones (5) y (7) se simplifica a resolver las ecuaciones lineales (5) y (8). La solución es

$$V = \frac{29}{71}\,v_0\ , \quad v = \frac{84}{71}\,v_0 \qquad \text{[0.5 puntos]}. \tag{9}$$

Tras el choque, la esfera sólida rueda hacia la derecha con rapidez $V = \frac{29}{71}\,v_0$ mientras que el cascarón también rueda hacia la derecha pero con rapidez $v = \frac{84}{71}\,v_0$. De aquí obtenemos que **la rapidez angular del cascarón** tras el choque es dada por

$$\boxed{\omega = \frac{v}{R} = \frac{84}{71}\,\frac{v_0}{R}.} \qquad \text{[0.5 puntos]}$$

b) La distancia D que recorre el cascarón m la obtenemos a partir de la conservación de la energía mecánica durante el ascenso en el plano inclinado [0.5 puntos].

Definamos la *situación inicial* justo después del choque. En esta situación hay solo energía cinética, tanto de traslación como de rotación. La *situación final* será cuando el cascarón recorra la máxima distancia D sobre el plano inclinado hasta detenerse momentánemente. En esta situación solo hay energía potencial gravitacional. En consecuencia, la **variación de energía** es dada por

$$\Delta E = mgD\sin\alpha - \left\{\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}mR^2\right)\left(\frac{v}{R}\right)^2\right\} \qquad \text{[1 punto]},$$

donde hemos considerado que la altura que alcanza el cascarón es $h = D\sin\alpha$.

Las fuerzas actuando sobre la esfera son el peso, la normal y la fuerza de roce estática. Como el peso es una fuerza conservativa se tiene que **los trabajos de las fuerzas no conservativas** es

$$\sum W_{\text{FNC}} = 0 \qquad \text{[0.5 puntos]}.$$

Aquí, el trabajo de la normal es nulo porque es perpendicular al desplazamiento, mientras que el trabajo del roce estático no produce deslizamiento.

Finalmente, la aplicación del **teorema del trabajo y la energía mecánica** conduce a

$$mgD\sin\alpha - \frac{5}{6}mv^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad D = \frac{5}{6}\,\frac{v^2}{g\sin\alpha} \qquad \text{[0.5 puntos]},$$

que reemplazando $v = 84/71\,v_0$ obtenido en la ecuación (9) de la pregunta anterior lleva a la respuesta final

$$\boxed{D = \frac{5\,880}{5\,041}\,\frac{v_0^2}{g\sin\alpha}} \qquad \text{[0.5 puntos]}$$

Solución alternativa:

a) Se trata de un choque elástico, es decir, el sistema formado por la esfera y el cascarón conserva el *momentum* lineal y el coeficiente de restitución es $e = 1$ [0.5 puntos]. De estas condiciones podemos determinar la rapidez angular del cascarón. Consideremos un sistema de referencia con el eje x horizontal hacia la derecha.

El *cambio de momentum lineal* en el eje horizontal es dado por

$$\Delta p_x = 2mV + mv - (2mv_0) = 0 \qquad [0.5 \text{ puntos}],$$

donde hemos supuesto que tras el choque la esfera rueda con rapidez V hacia la derecha mientras que el cascarón también rueda hacia la derecha pero con rapidez v.

Acomodando los términos se obtiene

$$v = 2(v_0 - V). \tag{10}$$

Además, el choque es elástico, es decir el coeficiente de restitución es $e = 1$. Por lo tanto, tenemos;

$$e = 1 = -\frac{\Delta v_{final}}{\Delta v_{inicial}} = -\frac{V - v}{v_0}. \qquad \to v - V = v_0 \qquad [0.5 \text{ puntos}], \tag{11}$$

Combinando (10) y (11) tenemos:

$$2v_0 - 2V = v_0 + V \qquad \to V = \frac{v_0}{3} \qquad [0.5 \text{ puntos}] \tag{12}$$

Por lo tanto:

$$v = v_0 + V = \frac{4v_0}{3} \qquad [0.5 \text{ puntos}]. \tag{13}$$

Si el cascarón rueda sin deslizar, entonces su velocidad angular justo después del choque es:

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{4v_0}{3R} \qquad [0.5 \text{ puntos}]. \tag{14}$$

b) La distancia D que recorre el cascarón m la obtenemos a partir de la conservación de la energía mecánica durante el ascenso en el plano inclinado [0.5 puntos].

Definamos la *situación inicial* justo después del choque. En esta situación hay solo energía cinética, tanto de traslación como de rotación. La *situación final* será cuando el cascarón recorra la máxima distancia D sobre el plano inclinado hasta detenerse momentánemente. En esta situación solo hay energía potencial gravitacional. En consecuencia, la **variación de energía** es dada por

$$\Delta E = mgD\sin\alpha - \left\{\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}mR^2\right)\left(\frac{v}{R}\right)^2\right\} \qquad [1 \text{ punto}],$$

donde hemos considerado que la altura que alcanza el cascarón es $h = D\sin\alpha$.

Las fuerzas actuando sobre la esfera son el peso, la normal y la fuerza de roce estática. Como el peso es una fuerza conservativa se tiene que **los trabajos de las fuerzas no conservativas** es

$$\sum W_{\text{FNC}} = 0 \qquad [0.5 \text{ puntos}].$$

Aquí, el trabajo de la normal es nulo porque es perpendicular al desplazamiento, mientras que el trabajo del roce estático no produce deslizamiento.

Finalmente, la aplicación del **teorema del trabajo y la energía mecánica** conduce a

$$mgD\sin\alpha - \frac{5}{6}mv^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad D = \frac{5}{6}\frac{v^2}{g\sin\alpha} \qquad [0.5 \text{ puntos}],$$

que reemplazando $v = \frac{4v_0}{3R}$ obtenido en la pregunta anterior lleva a la respuesta final

$$D = \frac{5}{6}\frac{16v_0^2}{9g\sin\alpha} = \frac{40v_0^2}{27g\sin\alpha} \qquad [0.5 \text{ puntos}]$$