

SOLUCIÓN Interrogación I2

(Miércoles 4 de Mayo, 2016)

- Resuelva el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y''' + 3y'' - 4y = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = -2, \quad y''(0) = 13 \end{cases}$$

(Sugerencia: $r^3 + 3r^2 - 4 = (r - 1)(r + 2)^2$)

SOLUCIÓN:

La ecuación diferencial es lineal, homogénea y tiene coeficientes constantes. Su ecuación característica es $r^3 + 3r^2 - 4 = (r - 1)(r + 2)^2$ y tiene las raíces $r_1 = 1$ con multiplicidad 1 y $r_2 = -2$ con multiplicidad 2.

Por la teoría general la solución general está dada por

$$y(t) = C_1 e^t + (C_2 + C_3 t) e^{-2t}$$

donde C_1, C_2, C_3 son constantes reales.

También

$$\begin{aligned} y'(t) &= C_1 e^t + (-2C_2 + C_3 - 2C_3 t) e^{-2t} \\ y''(t) &= C_1 e^t + (4C_2 - 4C_3 + 4C_3 t) e^{-2t} \end{aligned}$$

Para cumplir a los valores iniciales tenemos que resolver el siguiente sistema de tres ecuaciones lineales en tres desconocidas C_1, C_2, C_3 :

$$\begin{cases} C_1 + (C_2) = y(0) = 1 \\ C_1 + (-2C_2 + C_3) = y'(0) = -2 \\ C_1 + (4C_2 - 4C_3) = y''(0) = 13 \end{cases}$$

Si restamos de la primera ecuación y la tercera ecuación la segunda ecuación obtenemos las ecuaciones

$$\begin{cases} 3C_2 - C_3 = 3 \\ 6C_2 - 5C_3 = 15, \end{cases}$$

cuya solución es $C_2 = 0$, $C_3 = -3$. Usando la primera ecuación del primer sistema obtenemos $C_1 = 1$. Entonces la solución del problema de valor inicial es

$$y(t) = e^t - 3te^{-2t}$$

2. Encuentra la solución general de la ecuación diferencial

$$y'' + 4y = \operatorname{sen}^2(x)$$

SOLUCIÓN:

Primero consideramos la ecuación homogénea asociada:

$$y'' + 4y = 0 \quad (*)$$

La ecuación característica de esta EDLH con coeficientes constantes es

$$r^2 + 4 = (r + 2i)(r - 2i),$$

cuya raíces $r_{1,2} = \pm 2i$ son complejas con parte real igual a 0. Por la teoría general sigue que un conjunto fundamental para (*) está dado por y_1, y_2 donde

$$y_1(x) = \cos(2x), \quad y_2(x) = \operatorname{sen}(2x)$$

Entonces la solución general de la EDL no-homogénea está dada por

$$y_{gen,NH} = Ay_1 + By_2 + y_p = A \cos(2x) + B \operatorname{sen}(2x) + y_p$$

donde y_p es una solución particular.

Para calcular una solución particular usaremos el *método de variación* y probamos una solución de prueba de la siguiente forma:

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$$

Las ecuaciones para $u_1(x)$ y $u_2(x)$ están dadas por el sistema

$$\begin{cases} u'_1 y_1 + u'_2 y_2 = 0 \\ u'_1 y'_1 + u'_2 y'_2 = \operatorname{sen}^2(x) \end{cases}$$

Si multiplicamos la primera ecuación por y'_2 y la segunda por y_2 y después restamos:

$$(y_1 y'_2 - y_2 y'_1)u'_1 = -\operatorname{sen}^2(x)y_2$$

Si multiplicamos la primera ecuación por y'_1 y la segunda por y_1 y después restamos:

$$(y_1 y'_2 - y_2 y'_1)u'_1 = \operatorname{sen}^2(x)y_1$$

Por lo tanto:

$$u_1 = - \int \frac{\operatorname{sen}^2(x)y_2(x)}{W(x)} dx, \quad u_2 = \int \frac{\operatorname{sen}^2(x)y_1(x)}{W(x)} dx$$

donde $W(x)$ denota el Wronskiano de y_1, y_2 :

$$W(x) = y_1 y'_2 - y_2 y'_1 = 2 \cos(2x)^2 + 2 \operatorname{sen}^2(2x) = 2$$

En particular, usando $\operatorname{sen}^2(x) = (1 - \cos(2x))/2$ y $\operatorname{sen}(4x) = 2 \operatorname{sen}(2x) \cos(2x)$ obtenemos:

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{1}{2} \int \operatorname{sen}^2(x) \operatorname{sen}(2x) dx = -\frac{1}{4} \int \operatorname{sen}(2x) dx + \frac{1}{4} \int \cos(2x) \operatorname{sen}(2x) dx \\ &= \frac{1}{8} \cos(2x) + \frac{1}{8} \int \operatorname{sen}(4x) dx = \frac{1}{8} \cos(2x) - \frac{1}{32} \cos(4x) \end{aligned}$$

Analogamente:

$$u_2(x) = -\frac{1}{8}x + \frac{1}{8} \operatorname{sen}(2x) - \frac{1}{32} \sin(4x)$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
 y_p &= u_1 y_1 + u_2 y_2 \\
 &= \left(\frac{1}{8} \cos(2x) - \frac{1}{32} \cos(4x) \right) \cos(2x) + \left(-\frac{1}{8}x + \frac{1}{8} \sin(2x) - \frac{1}{32} \sin(4x) \right) \sin(2x) \\
 &= \frac{1}{8} - \frac{1}{8}x \sin(2x) - \frac{1}{32}(\cos(2x) \cos(4x) + \sin(2x) \sin(4x)) \\
 &= \frac{1}{8} - \frac{1}{8}x \sin(2x) - \frac{1}{32} \cos(2x)
 \end{aligned}$$

Entonces la solución general esta dada por

$$y_{gen, NH} = A \cos(2x) + B \sin(2x) + \frac{1}{8}(1 - x \sin(2x))$$

donde A, B son constantes reales.

SOLUCIÓN ALTERNATIVA PARA DETERMINAR UNA $y_p(x)$:

Por el método de coeficientes indeterminados hay una solución particular de la forma

$$y_p(x) = C_1 + C_2 x \cos(2x) + C_3 x \sin(2x) \quad (**),$$

pues

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2x)$$

Sustituyendo $(**)$ en la ED obtenemos

$$C_1 = \frac{1}{8}, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = -\frac{1}{8}$$

I.e.

$$y_p = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}x \sin(2x)$$

3. Resuelve el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' - 4y' - 12y = te^{-2t} \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

Primero consideramos la ecuación homogénea asociada:

$$y'' - 4y' - 12y = 0 \quad (*)$$

La ecuación característica de esta EDLH con coeficientes constantes es

$$r^2 - 4r - 12 = 0 \quad (**)$$

Las soluciones de $(**)$ son

$$\frac{4 \pm \sqrt{16 + 48}}{2}, \quad \text{i.e. } r_1 = -2, \quad r_2 = 6$$

Por la teoría general un conjunto fundamental para $(*)$ está dado por las funciones

$$y_1 = e^{-2t}, \quad y_2 = e^{6t}$$

Por la teoría general la solución general de la EDL no-homogénea está dada por

$$y_{gen,NH} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_p = Ae^{-2t} + Be^{6t} + y_p(t)$$

donde y_p es una solución particular.

Aplicamos el método de coeficientes indeterminados para determinar una solución particular. El método dice que hay una solución particular de la forma

$$y_p = t(A + Bt)e^{-2t} = (At + Bt^2)e^{-2t} \quad (***)$$

Además:

$$y'_p = (A + (2B - 2A)t - 2Bt^2)e^{-2t}$$

$$y''_p = ((2B - 4A) + (4A - 8B)t + 4Bt^2)e^{-2t}$$

Sustituyendo $(***)$ y sus derivados en la ED:

$$(2B - 4A - 4A)e^{-2t} + (4A - 8B - 8B + 8A - 12A)t^{-2t} + (4B + 8B - 12B)t^2e^{-2t} = te^{-2t}$$

I.e. $2B - 8A = 0$ y $-16B = 1$, i.e.

$$A = \frac{-1}{64}, \quad B = \frac{-4}{64},$$

Entonces una solución particular está dada por

$$y_p(t) = -\frac{t(1+4t)}{64}e^{-2t}$$

y la solución general de la EDL no-homogénea por

$$y(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{6t} - \frac{t(1+4t)}{64}e^{-2t}$$

También:

$$y'(t) = -2C_1 + 6C_2 e^{6t} + \frac{1}{64}(-6x - 1 + 8x^2)e^{-2x}$$

Para cumplir a los valores iniciales tenemos que resolver el siguiente sistema de dos ecuaciones lineales en dos desconocidas C_1, C_2

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = y(0) = 0 \\ -2C_1 + 6C_2 - \frac{1}{64} = 1 \end{cases}$$

La (única) solución es dada por $C_2 = -C_1 = 65/512$.

Entonces la solución del problema de valor inicial es

$$y(t) = -\frac{65}{512}(e^{-2t} + e^{6t}) - \frac{t(1+4t)}{64}e^{-2t}$$

SOLUCIÓN ALTERNATIVA PARA DETERMINAR y_p :

Usando variación de constantes: $y_p = u_1y_1 + u_2y_2$

$$u_1 = -\int \frac{f(t)y_2(t)}{W(t)}dt, \quad u_2 = \int \frac{f(t)y_1(t)}{W(t)}dt$$

donde $f(t) = te^{-2t}$ y $W(t)$ denota el Wronskiano de y_1, y_2 :

$$W(t) = y_1y'_2 - y_2y'_1 = 8e^{4t}$$

Por lo tanto:

$$u_1 = \frac{-1}{16}t^2e^{-2t}, \quad u_2 = -\frac{1+8t}{512}e^{-8t}$$

y

$$y_p(t) = -\frac{t(4t+1)}{64}e^{-2t} - \frac{1}{512}e^{-2t}$$

4. Encuentra la solución general de la ecuación diferencial

$$x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = x^3e^x, \quad x > 0$$

sabiendo que $y_1(x) = xe^x$ es una solución de la *ecuación homogénea asociada*.

SOLUCIÓN:

Primero re-escribimos la ED:

$$y'' - \frac{x+2}{x}y' + \frac{x+2}{x^2}y = xe^x, \quad x > 0$$

Definimos

$$P(x) = -\frac{x+2}{x} = -2/x - 1, \quad Q(x) = \frac{x+2}{x^2} = 1/x + 2/x^2, \quad f(x) = xe^x$$

Una función

$$y(x) = y_1(x)u(x)$$

es solución de la ED si y sólo si la función $u(x)$ resuelve la ED

$$2y'_1u' + y_1u'' + Py_1u' = f,$$

i.e. si y sólo si $v(x) = u'(x)$ es solución de

$$y_1v' + (2y'_1 + Py_1)v = f$$

Es decir:

$$(xv' + (2 + 2x - (x+2))v)e^x = xe^x$$

I.e.

$$v'e^x + ve^x = e^x,$$

$$(ve^x)' = e^x$$

$$ve^x = e^x + C$$

$$u' = v = 1 + Ce^{-x}$$

$$u = x - Ce^{-x} + D = x + C_1e^{-x} + C_2$$

donde C_1, C_2 son constantes reales.

Entonces

$$y(x) = x^2e^x + C_1x + C_2xe^x, \quad (*)$$

es una EDL esta dada para constantes reales C_1, C_2 .

Además, $W_{xe^x,x} = -x^2e^x \neq 0$ y por lo tanto (*) es la solución general de la EDL no-homogénea.

SOLUCIÓN ALTERNATIVA: Por la formula de Abel, el Wronskiano $W(x)$ de un conjunto fundamental dela EDLH asociada es dada por

$$W(x) = ce^{-\int P(x)dx}, \quad c \neq 0$$

Tomando $c = 1$ y resolviendo la ecuación lineal de orden 1 en y_2

$$y_1y'_2 - y'_1y_2 = W(x), \text{ i.e. }, xe^x y'_2 - (1+x)e^x y_2 = x^2e^x,$$

obtenemos $y_2 = x$.

Por lo tanto $\{xe^x, x\}$ es un conjunto fundamental para la EDLH asociada.

Ahora se puede calcular con el método de *variación de parámetros*, o *coeficientes indeterminados*, o *reducción de orden* una solución particular $y_p(x)$.

La solución general entonces es dada por

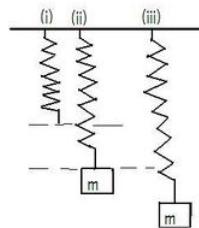
$$y(x) = C_1xe^x + C_2x + y_p(x)$$

5. Una masa de $\frac{1}{2}$ kg estira un resorte vertical $\frac{5}{8}m$ y queda en equilibrio. Luego, la masa se libera desde un punto que está 1 m abajo de la posición de equilibrio con una velocidad hacia arriba de 2 m/s.

Ignorando la fricción (el roce) del medio, *encuentra la ecuación del movimiento y determine el alejamiento máximo que experimenta la masa respecto de su posición de equilibrio.*

(Las unidades vienen todas en el sistema MKS. Por simplicidad aproxime $g \approx 10 \text{m/s}^2$).

SOLUCIÓN:



En la posición de equilibrio la fuerza sobre la masa por el resorte es igual a $s_0 k$ donde k es el constante de resorte (Ley de Hooke) y $s_0 = \frac{5}{8}m$ el desplazamiento inicial. La fuerza por el efecto de gravitación es igual a mg . Cuando la masa es en equilibrio estos dos fuerzas deberán ser igual, es decir

$$mg = ks_0$$

Por lo tanto $k = 8$ (es decir $k = 8N/m = 8kg/s^2$).

Sea x la distancia entre el *punto de equilibrio* y la masa. La fuerza total sobre la masa es $-kx$ y por Ley del Newton $mx'' = -kx$, i.e.

$$mx'' + kx = 0$$

$$\frac{1}{2}x'' + 8x = 0$$

$$x'' + 16x = 0$$

Las condiciones iniciales son

$$x(0) = 1, \quad x'(0) = -2$$

La solución general de la ED $x'' + 16x = 0$ esta dada por

$$x(t) = A \cos(4t) + B \sen(4t),$$

ya que la ecuación característica de la EDLH con coeficientes constantes esta dada por $r^2 + \omega_0^2 = 0$ donde $\omega_0 = 4$.

Para cumplir a los valores iniciales tenemos que resolver

$$\begin{cases} A + 0B = 1 \\ -4A0 + 4B = -2 \end{cases}$$

La solución es $A = 1$, $B = -1/2$

Entonces la ecuación del movimiento esta dada por

$$x(t) = \cos(4t) - \frac{1}{2} \sen(4t)$$

Esta fórmula se puede escribir también así:

$$x(t) = C \cos(\omega t - \alpha) = C \cos(4t - \alpha)$$

donde

$$C = \sqrt{1^2 + (\frac{1}{2})^2} = \sqrt{5}/2$$

$$\alpha = 2\pi + \arctan(B/A) = 2\pi - \arctan(\frac{1}{2}) \approx 5,8 \text{ rad}$$

El alejamiento máximo que experimenta la masa respecto de su posición de equilibrio es igual a C , es decir

$$\sqrt{5}/2m \approx 1,12m$$