

# Control: Cadenas de Markov en Tiempo Discreto

## Ejercicio

Una empresa realiza envíos a 2 puntos de demanda basada en la siguiente política:

- ◊ Al comienzo de una semana (digamos, semana  $n$ ), se deben visitar “ $i$ ” puntos de demanda según el procedimiento de la semana anterior, donde “ $i$ ” puede valer 0, 1 o 2.
- ◊ En un primer viaje (de 2 que se hacen por semana), se visitan estos “ $i$ ” puntos, donde cada uno de ellos puede fallar con probabilidad 0,3. Llamemos “fallar” al hecho de llegar donde el cliente y ver que éste no se encontraba, teniendo que ser visitado nuevamente en un recorrido futuro.
- ◊ En el segundo viaje de la semana, se visitan los puntos que no se habían visitado en el primer viaje más aquellos que fallaron en el primer recorrido (es decir, si llamamos “ $k$ ” a la cantidad de puntos que fallan el primer día, recorreríamos “ $2-i+k$ ” puntos en el segundo viaje). Acá, nuevamente cada uno de los clientes puede fallar con probabilidad 0,3.
- ◊ Aquellos clientes que se quedaron sin su entrega (es decir, que fallaron en su entrega del segundo recorrido) son designados a la primera ruta de la siguiente semana. Entonces, el número de nodos a visitar al comienzo de la semana  $n$  es igual al número de clientes que no pudieron ser contactados durante la semana anterior.

Un ejemplo del desarrollo del procedimiento en una semana cualquiera es el siguiente: supongamos que a comienzo de semana debe visitar 1 de los 2 puntos. En el primer recorrido lo visita, y éste no falla. Entonces, para el segundo recorrido sólo deberá visitar un punto (el que no visitó en el primer recorrido). Al visitarlo, el punto falla. Así, la cantidad de nodos que deberán ser visitados al comienzo de la semana siguiente es igual a 1 (equivalente a este nodo que falla en segundo recorrido, pues el primero de los puntos ya quedó visitado sin falla en el recorrido 1)

- (a) Defina la cantidad de nodos a visitar al comienzo de la semana  $n$  ( $X_n$ ) como una CMTD, a través de su matriz de probabilidades de transición. (4 puntos)
- (b) Si al comienzo de la semana 7 se debían recorrer 2 puntos de demanda, ¿cuál es la probabilidad de que al comienzo de la semana 9 no se deba recorrer ningún punto? (0,5 puntos por expresar lo que hay que calcular; 1 puntos por desarrollar; 0,5 puntos por reemplazar con los valores obtenidos en la parte a)

## Solución

- (a) Veamos cada uno de los componentes de la matriz. A modo de ejemplo, se explicará el razonamiento tras dos de los cálculos:
  - ◊  $P_{00}$ : En el primer recorrido de la semana se deben visitar 0 puntos. Esto indica que los dos puntos quedan asignados al segundo recorrido. Para que al comienzo de la semana siguiente queden 0 puntos a recorrer, debe suceder que ninguno de los 2 puntos falle, lo que ocurre con probabilidad  $0,7 \cdot 0,7 = 0,49$ .
  - ◊  $P_{11}$ : En el primer recorrido de la semana se debe visitar 1 punto. Al visitarlo, este punto puede fallar o no, por lo que debemos condicionar:

$$P_{11} = (P_{11} | \text{nodo falla}) \cdot P(\text{nodo falla}) + (P_{11} | \text{nodo no falla}) \cdot P(\text{nodo no falla})$$

Necesitamos ver cuánto valen  $(P_{11} | \text{nodo falla})$  y  $(P_{11} | \text{nodo no falla})$ . Para  $(P_{11} | \text{nodo falla})$  hay que entender que como el nodo visitado falló, quedan ambos para el recorrido 2. Por ello, la probabilidad de que quede 1 para la siguiente semana, es la probabilidad de que uno de los 2 nodos falle, lo que

ocurre con probabilidad  $2*0,7*0,3 = 0,42$ . Para  $(P_{11} | \text{nodo no falla})$  hay que entender que, al no fallar el nodo visitado, queda sólo un punto para el segundo recorrido. Para que quede entonces un punto en la siguiente semana, debe suceder que este nodo falle en el segundo día, lo que ocurre con probabilidad de 0,3. Así, el desarrollo total es:

$$P_{11} = (P_{11} | \text{nodo falla}) * P(\text{nodo falla}) + (P_{11} | \text{nodo no falla}) * P(\text{nodo no falla})$$

$$P_{11} = 0,42*0,3 + 0,3*0,7 = 0,336$$

El desarrollo de las otras componentes es el siguiente:

$$\diamond P_{01} = 0,7 * 0,3 * 2 = 0,42$$

$$\diamond P_{02} = 0,3 * 0,3 = 0,09$$

$$\diamond P_{10} = (P_{10} | \text{nodo falla}) * P(\text{nodo falla}) + (P_{10} | \text{nodo no falla}) * P(\text{nodo no falla})$$

$$P_{10} = 0,49 * 0,3 + 0,7 * 0,7 = 0,637$$

$$\diamond P_{12} = (P_{12} | \text{nodo falla}) * P(\text{nodo falla}) + (P_{12} | \text{nodo no falla}) * P(\text{nodo no falla})$$

$$P_{12} = 0,09 * 0,3 + 0 * 0,7 = 0,027$$

$$\diamond P_{20} = (P_{20} | \text{falla ninguno}) * P(\text{falla ninguno}) + (P_{20} | \text{falla 1}) * P(\text{falla 1}) + (P_{20} | \text{fallan ambos}) * P(\text{fallan ambos})$$

$$P_{20} = 1 * 0,7 * 0,7 + 0,7 * 2 * 0,7 * 0,3 + 0,49 * 0,3 * 0,3 = 0,8281$$

$$\diamond P_{21} = (P_{21} | \text{falla ninguno}) * P(\text{falla ninguno}) + (P_{21} | \text{falla 1}) * P(\text{falla 1}) + (P_{21} | \text{fallan ambos}) * P(\text{fallan ambos})$$

$$P_{21} = 0 * 0,7 * 0,7 + 0,3 * 2 * 0,3 * 0,7 + 0,42 * 0,3 * 0,3 = 0,1638$$

$$\diamond P_{22} = (P_{22} | \text{falla ninguno}) * P(\text{falla ninguno}) + (P_{22} | \text{falla 1}) * P(\text{falla 1}) + (P_{22} | \text{fallan ambos}) * P(\text{fallan ambos})$$

$$P_{22} = 0 * 0,7 + 0,7 + 0 * 2 * 0,3 * 0,7 + 0,3 * 0,3 * 0,3 * 0,3 = 0,0081$$

La matriz nos queda:

$$\begin{bmatrix} 0,49 & 0,42 & 0,09 \\ 0,637 & 0,336 & 0,027 \\ 0,8281 & 0,1638 & 0,0081 \end{bmatrix}$$

(b) Lo que nos piden es lo siguiente:

$$P(X_9 = 0 | X_7 = 2)$$

Desarrollando:

$$P(X_9 = 0 | X_7 = 2) = \sum_{i=0}^2 P(X_9 = 0 | X_7 = 2, X_8 = i) P(X_8 = i | X_7 = 2)$$

$$= P(X_9 = 0 | X_8 = 0) P(X_8 = 0 | X_7 = 2) + P(X_9 = 0 | X_8 = 1) P(X_8 = 1 | X_7 = 2) \dots$$

$$\dots + P(X_9 = 0 | X_8 = 2) P(X_8 = 2 | X_7 = 2)$$

$$\Rightarrow P(X_9 = 0 | X_7 = 2) = P_{00} P_{20} + P_{10} P_{21} + P_{20} P_{22}$$

Reemplazando:

$$P(X_9 = 0 | X_7 = 2) = 0,49 * 0,8281 + 0,637 * 0,1638 + 0,8281 * 0,0081$$

$$P(X_9 = 0 | X_7 = 2) = 0,517$$