Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Economía y Administración

Primer Semestre 2023

Curso : **Probabilidad y Estadística**
Sigla : **EAA1510**
Profesores : **Cristian Vásquez (Sec 1), Ricardo Olea (Sec 2), Ricardo Aravena (Sec 3)**

Pauta Control 3

Problema

El Departamento de Estudios de la Superintendencia de Electricidad y Combustible (SEC) dispone de la información del consumo de gas natural (X), expresada en cientos de m^3, además del consumo de energía eléctrica (Y) en cientos de KW, de un conjunto de viviendas ubicadas en el sector sur oriente de la capital durante el mes de Abril pasado. La función de densidad conjunta de dichas variables es la siguiente:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{24} & 0 < x < 2, \quad 0 < y < 4 \\ & \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

La Superintendencia tiene la intención de revisar los medidores de aquellos hogares donde el consumo de gas y energía eléctrica no sobrepasa las respectivas cantidades esperadas.

(a) **[1.5 Ptos]** Encuentre las distribuciones marginales de X e Y.

(b) **[1.5 Ptos]** Muestre que los valores esperados de X e Y son $E(X) = \frac{10}{9}$ y $E(Y) = \frac{22}{9}$.

(c) **[1.5 Ptos]** Calcule el porcentaje de hogares de este sector que debería revisar la SEG.

(d) **[1.5 Ptos]** De los hogares con un consumo de 100 m^3 mensuales en gas ¿Qué proporción consume menos de 100 KW en energía eléctrica?

Solución:

(a) Piden calcular las distribuciones marginales de X e Y.

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^4 f(x,y)\,dy = \int_0^4 \frac{x+y}{24}\,dy \quad \textbf{[0.25 Ptos.]} \\ &= \frac{xy}{24} + \frac{y^2}{48}\bigg|_0^4 \quad \textbf{[0.25 Ptos.]} \\ &= \frac{x+2}{6} \quad \textbf{[0.25 Ptos.]} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f(x) = \frac{x+2}{6}, \quad 0 < x < 2$

$$\begin{aligned} f(y) &= \int_0^4 f(x,y)\,dx = \int_0^2 \frac{x+y}{24}\,dy \quad \textbf{[0.25 Ptos.]} \\ &= \frac{x^2}{48} + \frac{xy}{24}\bigg|_0^2 \quad \textbf{[0.25 Ptos.]} \\ &= \frac{1+y}{12} \quad \textbf{[0.25 Ptos.]} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f(y) = \frac{1+y}{12}, \quad 0 < y < 4$

(b)

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \int_0^2 x f(x)\,dx = \int_0^2 x \cdot \frac{(x+2)}{6}\,dx \quad \textbf{[0.25 Ptos.]} \\
&= \frac{x^3}{18} + \frac{x^2}{6}\Big|_0^2 \quad \textbf{[0.25 Ptos.]} \\
&= \frac{8}{18} + \frac{4}{6} = \frac{10}{9} \quad \textbf{[0.25 Ptos.]}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(Y) &= \int_0^4 y f(y)\,dy = \int_0^4 y \cdot \frac{(1+y)}{12}\,dy \quad \textbf{[0.25 Ptos.]} \\
&= \frac{y^2}{24} + \frac{y^3}{36}\Big|_0^4 \quad \textbf{[0.25 Ptos.]} \\
&= \frac{16}{24} + \frac{64}{36} = \frac{22}{9} \quad \textbf{[0.25 Ptos.]}
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
P(X \leq 10/9, Y \leq 22/9) &= \int_0^{\frac{10}{9}} \int_0^{\frac{22}{9}} \frac{x+y}{24}\,dy\,dx \quad \textbf{[0.25 Ptos.]} \\
&= \int_0^{\frac{10}{9}} \left[\frac{xy}{24} + \frac{y^2}{48}\right]\Big|_0^{\frac{22}{9}}\,dx \quad \textbf{[0.25 Ptos.]} \\
&= \int_0^{\frac{10}{9}} \left[\frac{22}{9} \cdot \frac{x}{24} + \frac{22^2}{9^2 \cdot 48}\right]\,dx \quad \textbf{[0.25 Ptos.]} \\
&= \left[\frac{22}{9} \cdot \frac{x^2}{48} + \frac{22^2}{9^2 \cdot 48} \cdot x\right]\Big|_0^{\frac{10}{9}} \quad \textbf{[0.25 Ptos.]} \\
&= \frac{22}{9} \cdot \frac{100}{48 \cdot 81} + \frac{22^2}{9^2 \cdot 48} \cdot \frac{10}{9} \quad \textbf{[0.25 Ptos.]} \\
&= 0.20118 \quad \textbf{[0.25 Ptos.]}
\end{aligned}$$

(d) Piden calcular $P(Y < 1 \,|\, X = 1)$, para eso debemos calcular previamente la densidad condicional de $Y \,|X = x$.

$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f(x)} = \frac{\frac{x+y}{24}}{\frac{x+2}{6}} = \frac{1}{4}\frac{(x+y)}{(x+2)} \quad 0 < y < 4 \quad \textbf{[0.75 Ptos.]}$$

Por lo tanto, $f(y|x=1) = \frac{1+y}{12}$, $\quad 0 < y < 4$. De esta manera,

$$\begin{aligned}
P(Y < 1 \,|\, X = 1) &= \int_0^1 f(y|x=1)\,dy = \int_0^1 \frac{1+y}{12}\,dy \quad \textbf{[0.25 Ptos.]} \\
&= \frac{1}{12}\left[y + \frac{y^2}{2}\right]\Big|_0^1 \quad \textbf{[0.25 Ptos.]} \\
&= \frac{1}{8} = 0.125 \quad \textbf{[0.25 Ptos.]}
\end{aligned}$$