PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 01-2017
Profesores: S. Encina - R. Cuadrado - F. Palomino
A. Cataldo - J.T. Marquinez

Solución Tarea 2

Fecha de Entrega: 21 de abril.

Reglas de la Tarea

No seguir estas reglas generará una penalización en la nota de la tarea.

- La Tarea se desarrolla en forma grupal y estos grupos **deben** ser los mismos grupos ya asignados para el proyecto semestral. Cada grupo debe entregar una sola tarea.
- Se debe contestar en hojas **independientes** cada una de las cuatro preguntas de la Tarea. Estas hojas deben ser **blancas y de tamaño carta**, y está a su decisión si escribirla en computador o a mano, mientras **esté ordenado**. En cada hoja debe colocar su **número de grupo**[1] **con letra clara y legible**. Las hojas de cada pregunta deben estar corcheteadas, entregando así cuatro grupos de hojas el día de la entrega.
- El plazo de entrega vence impostergablemente el día viernes 21 de abril a las 12:30 horas puntualmente. Aquellas Tareas no entregadas en la fecha y hora indicadas, serán consideradas como **Tarea NO Entregada**.
- La Tarea se entrega en la **secretaría del segundo piso del edificio Raúl Devés**. Deben entregar las preguntas por separado en el buzón que corresponde a cada pregunta.
- Esta tarea es grupal y el desarrollo y discusión debe ocurrir dentro de cada grupo. No se distribuyan la resolución de las preguntas por separado, hagan realmente un trabajo grupal de desarrollo ya que el no hacerlo va contra la idea de aprendizaje colaborativo. Pueden discutir los problemas con los profesores y los ayudantes del curso, pero al final cada grupo debe entregar sus propias soluciones, desarrolladas y escritas por el grupo. La copia o intento de copia a otros grupos será sancionada dependiendo la gravedad (a ser determinada por el equipo docente del curso) con consecuencias que podrían ir desde un 1.0 en la nota de la Tarea hasta la escalación a la Dirección de Docencia de la Escuela, con posible **REPROBACIÓN AUTOMÁTICA** del curso[2].
- Cualquier duda sobre el enunciado, enviarlas al correo electrónico `dudas.tareas.ics1113@gmail.com`. Este correo centralizará todas las dudas (únicamente) sobre el **enunciado de la tarea**. Cualquier correo enviado a otra dirección respecto a la tarea, no será considerado (y por lo tanto, no será respondido). Tampoco lo serán aquellos correos que lleguen a este buzón que contengan preguntas no relacionadas con la tarea. Este correo será revisado desde la publicación de este enunciado hasta el día antes de la entrega, dos veces al día (una en la mañana y otra en la tarde-noche).

[1] Deben escribir «Grupo XX», donde XX corresponde al número de grupo.
[2] Tener en consideración, para esto, el Código de Honor de la Escuela

Problema 1. (15 puntos)

a) (3 puntos) Demuestre que si el dominio de restricciones está definido como:

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n : f_i(x) \leq 0 \qquad \forall i = 1, \dots, m\}$$

donde $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son funciones convexas, entonces D es una parte convexa de $\mathbb{R}^n$.

b) (3 puntos) Sea el siguiente problema de optimización:

$$\begin{array}{rrcl} & min - e^{\sqrt{\text{mín}\{x_1 - x_2, |x_2 - 7|\}}} & & \\ s.a. & & & \\ & x_1 & \leq & 20 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

i) ¿Está bien definida la función objetivo en el dominio?

ii) Suponga ahora que se agrega la siguiente restricción: $-x_1 + x_2 \leq 0$. Determine si el problema admite solución óptima o no. Justifique.

iii) Bajo el mismo supuesto, encuentre un problema equivalente que sea lineal.

c) (3 puntos) Sea el siguiente problema de optimización:

$$\begin{array}{lll} P) & max & f(x) \\ & s.a. & \\ & & g(x) \geq \alpha \\ & & x \in \mathbb{R} \end{array}$$

En donde $g(x)$ es una función convexa. ¿Qué condiciones deben tener $f(x)$ y α para asegurar que el problema P sea convexo?

d) (3 puntos) Responda las siguientes preguntas:

i) Supongamos que nos encontramos en la iteración n del método de Simplex, una base no óptima, y debemos usar el criterio del mínimo cuociente (elegir la variable x_j correspondiente que cumpla con $\min\limits_{\bar{a}_{ij}>0} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ij}}. \right\}$) para llegar a la siguiente base. ¿A qué corresponde ese valor encontrado, $\min\limits_{\bar{a}_{ij}>0} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ij}}. \right\}$, en la iteración $n+1$?

ii) Suponga que usted resuelve a mano un problema de Fase I de un problema de optimización, y resulta no acotado. ¿Qué conclusión puede obtener?

iii) Comente la veracidad de la siguiente afirmación: "En un problema lineal, si en dos puntos extremos factibles adyacentes x e y la función objetivo f es tal que $f(x) = f(y)$, entonces x e y son soluciones óptimas y toda combinación convexa de x e y es solución óptima también". Justifique.

e) (3 puntos) ¿Es posible que el algoritmo Simplex se quede "pegado"(es decir, que se quede iterando infinitamente sin llegar a una solución óptima)? De ser así, muestre a través de un ejemplo. En caso contrario, justifique detalladamente.

Solución Problema 1.

a) Si $f_i(x)$ es una función convexa, entonces el conjunto de nivel definido por esa función es convexa, dado que es menor o igual a una constante. Además, se sabe que la intersección de conjuntos convexos es un conjunto convexo, y como D es la intersección de los conjuntos definidos por $f_i(x)$, entonces D es convexo.

b) i) Para ver si está bien definida, analicemos si existe la posibilidad de que la función se indefina. Para que esto pase, debe ocurrir que el argumento de la raíz cuadrada presente en la función sea negativo. Es decir, $\text{mín}\{x_1 - x_2, |x_2 - 7|\} < 0$. Como el segundo término es siempre no negativo, debe ocurrir que $x_1 - x_2 < 0$ dentro del dominio, lo cual es claro que sí puede ocurrir. Por lo tanto, no está bien definida en todo el dominio.

ii) Esta restricción corresponde a $x_1 - x_2 \geq 0$, por lo que la función ya no se indefine dentro del dominio. Tenemos que el dominio es cerrado (solo restricciones $\geq, \leq$ o $=$), el dominio es no vacío ($x_1 = 0, x_2 = 0$ pertenece al dominio), y todas las variables son acotadas ($0 \leq x_2 \leq x_1 \leq 20$). Por lo tanto, por el teorema de Bolzano-Weierstrass, se puede concluir que el problema admite solución óptima.

iii) Tenemos que el problema está de la siguiente forma:

$$
\begin{array}{ll}
P_1) & min \ -e^{\sqrt{\text{mín}\{x_1-x_2, |x_2-7|\}}} \\
s.a. &
\end{array}
$$
$$
\begin{array}{rcl}
x_1 & \leq & 20 \\
x_1 - x_2 & \geq & 0 \\
x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Es equivalente a los siguientes problemas:

$$
\begin{array}{ll}
P_2) & max \ e^{\sqrt{\text{mín}\{x_1-x_2, |x_2-7|\}}} \\
s.a. &
\end{array}
$$
$$
\begin{array}{rcl}
x_1 & \leq & 20 \\
x_1 - x_2 & \geq & 0 \\
x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
P_3) & max \ \sqrt{\text{mín}\{x_1-x_2, |x_2-7|\}} \\
s.a. &
\end{array}
$$
$$
\begin{array}{rcl}
x_1 & \leq & 20 \\
x_1 - x_2 & \geq & 0 \\
x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
P_4) & max \ \text{mín}\{x_1-x_2, |x_2-7|\} \\
s.a. &
\end{array}
$$
$$
\begin{array}{rcl}
x_1 & \leq & 20 \\
x_1 - x_2 & \geq & 0 \\
x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
P_5) & max \ \mu \\
s.a. &
\end{array}
$$
$$
\begin{array}{rcl}
x_1 & \leq & 20 \\
x_1 - x_2 & \geq & 0 \\
x_1 - x_2 & \geq & \mu \\
|x_2 - 7| & \geq & \mu \\
x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
P_6) & max \ \mu \\
s.a. &
\end{array}
$$
$$
\begin{array}{rcl}
x_1 & \leq & 20 \\
x_1 - x_2 & \geq & 0 \\
x_1 - x_2 & \geq & \mu \\
x_2 - 7 & \geq & \mu - z \cdot M \\
x_2 - 7 & \leq & -\mu + (1 - z) \cdot M \\
x_1, x_2 & \geq & 0 \\
z & \in & \{0, 1\}
\end{array}
$$

Con M un número muy grande.

c) Para asegurar que el problema sea convexo, debe ocurrir que el dominio sea convexo y, como se está maximizando, que la función sea cóncava. Por lo tanto:

- $f(x)$ debe ser cóncava.
- α debe ser menor o igual al mínimo de la función g. Así, las curvas de nivel dadas por $g(x) \leq \alpha$ se cumplen para todo x, siendo un dominio convexo.

d) i) Corresponde al valor de la variable que entró a la base en la iteración n.

ii) Un problema de Fase I por definición no puede ser no acotado, ya que se minimizan variables no negativas. Es decir, siempre estará acotado inferiormente por 0, por lo que no podría minimizarse infinitamente. Así que lo que debió haber pasado es que se debe haber equivocado en los cálculos hechos a mano.

iii) Falso, pues no me dicen que x o y sea solución óptima. Solo me dicen que tienen el mismo valor. Por lo tanto, podría pasar de que el segmento definido entre las soluciones x e y tuviera un gradiente en sentido opuesto a la de la función objetivo. Es decir, nos encontraríamos en la peor solución posible.

e) Sí, podría entrar en un ciclo infinito. Un ejemplo es el siguiente:

$$\begin{array}{lrcl} P) & min\ -\frac{3}{4}x_4 + 20x_5 - \frac{1}{2}x_6 + 6x_7 & & \\ s.a. & & & \\ & x_1 + \frac{1}{4}x_4 - 8x_5 - x_6 + 9x_7 & = & 0 \\ & x_2 + \frac{1}{2}x_4 - 12x_5 - \frac{1}{2}x_6 + 3x_7 & = & 0 \\ & x_3 + x_6 & = & 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 & \geq & 0 \end{array}$$

Si se escoge la variable con más costo negativo para que entre a la base, y como criterio de salida se ocupa el mínimo cuociente, se podría obtener los siguientes cambios de bases:

$$(x_1, x_2, x_3) \to (x_4, x_2, x_3) \to (x_4, x_5, x_3) \to (x_6, x_5, x_3) \to (x_6, x_7, x_3) \to (x_1, x_7, x_3) \to (x_1, x_2, x_3)$$

Por lo tanto, se encontró un ciclo usando el método simplex.

Problema 2. (12 puntos)

a) (6 puntos) Sea el siguiente problema de optimización:

$$\begin{array}{lrcl} max & -3x_1 + 4x_2 & & \\ s.a. & & & \\ & x_1 & \leq & 2 \\ & x_1 + x_2 & \geq & 0 \\ & \frac{3}{4}x_1 - x_2 & \geq & -2 \\ & 2x_2 - \frac{1}{2}x_1 & \geq & -1 \\ & x_2 & \geq & 0 \\ & x_1 & \in & \mathbb{R} \end{array}$$

i) (1 punto) Grafique e indique cuál sería la(s) solución(es) óptima(s).

ii) (2 puntos) Lleve el problema a la forma estándar e indique gráficamente dónde están cada una de las bases del problema. Para esto, indique qué variables están en la base en cada punto.

iii) (2 puntos) Escriba la forma canónica del problema cuando se está en el punto $(x_1, x_2) = (2\ ,\ 3{,}5)$.

iv) (1 punto) Suponga que c_1 y c_2 son los valores que acompañan a x_1 y x_2 en la función objetivo del problema original (que actualmente valen -3 y 4 respectivamente). ¿Qué valores deben tomar, o qué relación debe haber entre c_1 y c_2 para que todas las soluciones básicas óptimas dejen de ser óptimas?

b) (6 puntos) Sea el siguiente problema de optimización:

$$\begin{array}{lrcl} max & \frac{1}{x+y} & & \\ s.a. & & & \\ & -x + 3y & \leq & 9 \\ & x + y & \leq & 6 \\ & 2x + y & \geq & 1 \\ & x - 2 & \geq & 1 - zM \\ & x - 2 & \leq & -1 + (1-z)M \\ & x, y & \geq & 0 \\ & z & \in & \{0, 1\} \end{array}$$

Donde M es un número muy grande.

i) (1 punto) Grafique el dominio del problema.

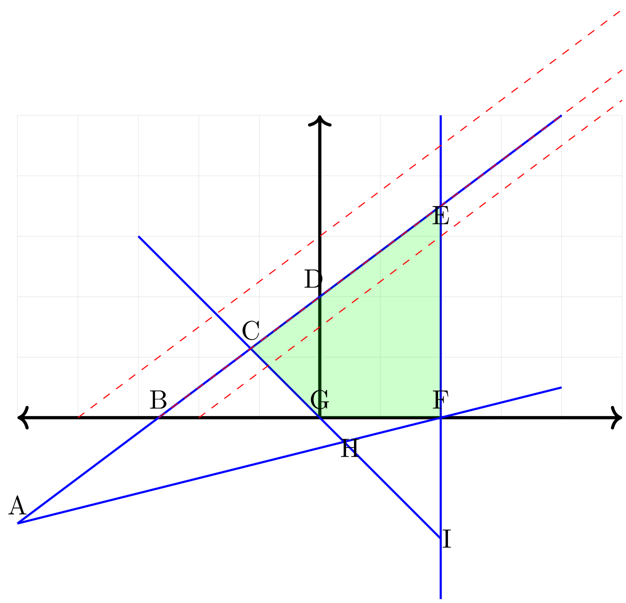
ii) (2 puntos) Aplique alguno de los teoremas vistos en clases para verificar si el problema posee solución óptima. Justifique detalladamente.

iii) (1 punto) Resuelva el problema. (hint: puede convertir fácilmente este problema en uno lineal, asegurando que la función está bien definida)

iv) (2 puntos) Reescriba el problema sin ocupar la variable z, de tal forma que el espacio de soluciones en x e y sea el mismo (es decir, el gráfico debiera ser el mismo). Demuestre matemáticamente que este nuevo problema (sin la variable z) no es convexo.

Solución Problema 2.

a) i) Como se puede observar el gráfico, la solución estaría en todo el segmento formado entre el punto $(-\frac{8}{7}, \frac{8}{7})$ y el punto $(2, \frac{7}{2})$.



ii) El problema queda:

$$\begin{array}{lr}
min & 3(x_1' - x_1'') - 4x_2 \\
s.a. & \\
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
x_1' - x_1'' + x_3 & = & 2 \\
-(x_1' - x_1'') - x_2 + x_4 & = & 0 \\
-\frac{3}{4}(x_1' - x_1'') + x_2 + x_5 & = & 2 \\
\frac{1}{2}(x_1' - x_1'') - 2x_2 + x_6 & = & 1 \\
x_1', x_1'', x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 & \geq & 0
\end{array}$$

En los puntos (A,B,...,H,I) se encuentran gráficamente las bases del problema. En cada punto, las variables que están en la base son las distintas a cero. Por ejemplo, en el punto A (infactible), se forma por la intersección de las restricciones 3 y 4, por lo que esas holguras ($x_5 y x_6$) valen cero y están fuera de la base. El resto de las variables están dentro.

Ahora, con respecto a $x_1 = x_1' - x_1''$, solo uno de las dos variables estará en la base. Si $x_1 > 0$, entonces x_1' estará en la base. Si $x_1 < 0$, entonces x_1'' estará en la base. Si $x_1 = 0$, entonces ninguna estará en la base (con excepción de un caso de degenerancia).

En los puntos que habría degenerancia (y por lo tanto, más de una base en el punto) serían en G y F, en donde se podría permitir que una de las variables que vale cero en ese punto esté dentro de la base.

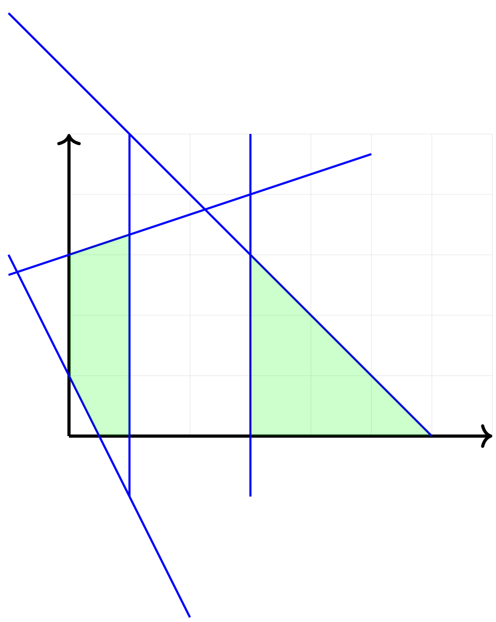
iii) Cuando se está en el punto (2,3.5), punto E, las variables fuera de base son x_1'', x_3, x_5. Por lo tanto, la forma canónica quedaría:

$$\begin{array}{lrcl} min & -8+4x_5 & & \\ s.a. & & & \\ & x_1' - x_1'' + x_3 & = & 2 \\ & x_2 + 0{,}75x_3 + x_5 & = & 3{,}5 \\ & x_4 + 1{,}75x_3 + x_5 & = & 5{,}5 \\ & x_6 + 2x_3 + 2x_5 & = & 9 \\ & x_1', x_1'', x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 & \geq & 0 \end{array}$$

iv) Para que esto ocurra, la pendiente de la restricción debe llegar a ser igual que las restricciones que están adyacentes a la que actualmente define la solución óptima. Esto sólo pasaría si $c2 < 0$. En este caso, se debería cumplir que:

$$-1 < \frac{-c1}{c2} < \infty$$

b) i) El gráfico del dominio queda:



ii) Vemos que la función es continua en el dominio (solo tiene una discontinuidad en el origen, pero está fuera del dominio). El dominio es cerrado, y por el gráfico se puede ver claramente que es no vacío que todas las variables están acotadas. Por lo tanto, por el teorema de Bolzano-Weierstrass se puede afirmar que este problema posee solución óptima.

iii) Como la función es continua en el dominio, este problema es equivalente a minimizar $x + y$ en el mismo dominio. Por lo tanto, en el gráfico se podría observar que la solución óptima a este problema es (1/2,0).

iv) El problema quedaría:

$$\begin{array}{lrcl} max & \frac{1}{x+y} & & \\ s.a. & & & \\ & -x+3y & \leq & 9 \\ & x+y & \leq & 6 \\ & 2x+y & \geq & 1 \\ & |x-2| & \geq & 1 \\ & x,y & \geq & 0 \end{array}$$

Tomemos dos puntos pertenecientes al dominio, $x_1 = (1{,}0)$ y $x_2 = (3{,}0)$. Si el dominio fuera convexo, entonces toda combinación lineal convexa entre x_1 y x_2 debería estar en el dominio también. Sin embargo, si tomamos un punto que sea combinación convexa tal que $x_3 = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, con $\lambda = 0{,}5$, nos da el punto (2,0), que claramente no está en el dominio, pues no respeta la restricción $|x-2| \geq 1$. Por lo tanto, el dominio no es convexo.

Problema 3. (14 puntos)

a) (7 puntos) Sea el problema:

$$
\begin{array}{llcl}
min & x - y & & \\
s.a. & & & \\
 & 4x + y & \geq & -12 \\
 & x + 4y & \leq & 12 \\
 & -x + y & \geq & 2 \\
 & -3x + y & \geq & 3 \\
 & x & \leq & 0 \\
 & y & \geq & 0
\end{array}
$$

i) (4 puntos) Resuelva mediante Simplex Matricial e indique cómo se va moviendo la solución actual a través de los vértices mediante un gráfico del problema original.

ii) (2 puntos) ¿Qué criterio del algoritmo Simplex tendría que cambiar para que el problema hubiese elegido otro camino para llegar al óptimo? Haga una iteración partiendo de su solución básica factible inicial, y verifique con el gráfico que su propuesta de modificación hace que efectivamente se vaya por otro camino.

iii) (1 punto) ¿Existe multiplicidad de soluciones o degenerancia en alguna solución básica? De ser así, identifíquelo en el gráfico y calcule el valor de las variables básicas en el(los) punto(s).

b) (7 puntos) Un amigo le dice que hace un tiempo había empezado a resolver un ejercicio de optimización debido a un problema que tenía que consistía en lo siguiente: Tenía una pequeña empresa que se dedicaba a producir 4 tipos de líquidos especiales diferentes, cada uno lo podía vender a un precio por litro, distinto para cada bebida. Sin embargo, con una de ellas se iba a pérdida, por lo que le otorgaba utilidades negativas. Además, sabía que tenía ciertas restricciones. Se acordaba muy bien de una de ellas, que consistía en que para producir un litro de los líquidos especiales tipo 2, 3 y 4, necesitaba de 2, 5 y 1 unidades respectivamente de un ingredientes especial, para el cual solo tenía 4 unidades.

Lamentablemente ha perdido gran parte del desarrollo del ejercicio. Por suerte, encontró una hoja que contenía el problema en su forma canónica:

$$
\begin{array}{lrcl}
min & -\frac{28}{5} + \frac{17}{15}x_2 - \frac{89}{15}x_4 + \frac{4}{3}x_6 + \frac{11}{15}x_7 & & \\
s.a. & & & \\
 & \frac{22}{15}x_2 + \frac{56}{15}x_4 + x_5 - \frac{1}{3}x_6 + \frac{1}{15}x_7 & = & \frac{3}{5} \\
 & x_1 - \frac{7}{15}x_2 - \frac{11}{15}x_4 + \frac{1}{3}x_6 - \frac{1}{15}x_7 & = & \frac{2}{5} \\
 & \frac{2}{5}x_2 + x_3 + \frac{1}{5}x_4 + \frac{1}{5}x_7 & = & \frac{4}{5} \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, & \geq & 0
\end{array}
$$

Determine el problema original de optimización que le permitía a su amigo decidir cuánto líquido producir de cada tipo de modo de maximizar sus utilidades. (Es decir, cada variable represente cuánto producir y la función objetivo represente la utilidad).

Solución Problema 3.

a) i) Primero, llevemos el problema a forma estándar. Ocuparemos $x_1 = -x, x_2 = y$:

$$\begin{array}{lrcl} min & -x_1 - x_2 & & \\ s.a. & & & \\ & 4x_1 - x_2 + x_3 & = & 12 \\ & -x_1 + 4x_2 + x_4 & = & 12 \\ & x_1 + x_2 - x_5 & = & 2 \\ & 3x_1 + x_2 - x_6 & = & 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 & \geq & 0 \end{array}$$

Dado que no se indica punto inicial, lo haremos desde el punto original (-2,0), que en simplex sería (2,0,4,14,0,3).

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \ R = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} b = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1}R = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 4 \\ 5 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} B^{-1}b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 14 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Calculando, llegamos a que el vector de costos reducidos es (0,-1), por lo que no estpy en el óptimo.
Iteración 1:
La variable x_5 entrará a la base. La variable que sale, según el criterio del mínimo cuociente, es x_3.
Calculando nuevamente las matrices:

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \ R = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1}R = \begin{pmatrix} -1/4 & 1/4 \\ -5/4 & 1/4 \\ 15/4 & 1/4 \\ -7/4 & 3/4 \end{pmatrix} B^{-1}b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 15 \\ 6 \end{pmatrix}$$

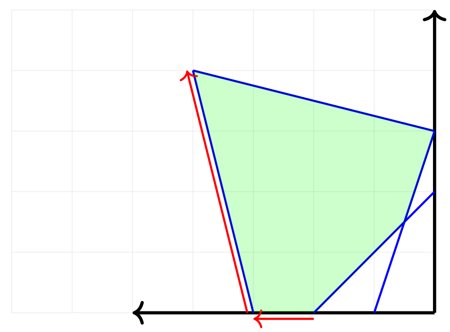
Ahora, el vector de costos reducidos queda (-5/4, 1/4). No estamos en el óptimo.
Iteración 2:
Entra la variable x_2, y sale la variable x_4. Calculamos las matrices nuevamente:

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \ R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El vector de costos reducidos queda (1/3, 1/3). Por lo tanto, estamos en el punto óptimo, dado por el vector:

$$B^{-1}b = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 4 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Esto, en el problema original, sería el punto $(x, y) =$ (-4,4).
Gráficamente:



ii) Para que tome un camino distinto, tendría que cambiar el criterio de entrada a la base. Un ejemplo podría ser no tomar el más negativo, sino que el segundo más negativo (incluyendo el cero).

Así, en la primera iteración, en vez de entrar la variable x_5, hubiese entrado x_2, y la variable que hubiese salido por el criterio del mímino cuociente sería x_6. Quedaría entonces:

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Podemos comprobar que el nuevo punto sería:

$$B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 23/2 \\ 13/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

Es decir, el punto original sería (-1/2,3/2), lo cual coincide con el gráfico.

iii) Sí, en los vértices (-2,0) y (-1/2,3/2) existe multiplicidad de soluciones. Los valores de las variables básicas fueron calculados durante el algoritmo simplex en el ítem i) y ii).

Además, en el ppunto (0,3) existe degenerancia. En ese punto, la restricción 2 y 4 están activas, además de la naturaleza de la variable x_1. Por lo tanto, las variables x_2, x_3 y x_5 son mayores que cero, mientras que x_1, x_4 y x_6 son iguales a cero. La base está formada por las tres que son mayores que cero y por una de las variables nulas. Así, existen tres bases en ese punto, pero todas corresponden al punto (0,3,15,0,1,0).

b) A partir del enunciado, sabemos que $x_1, ..., x_4$ son las variables originales del problema, mientras que el resto son variables de holgura. Con esto, podemos identificar la matriz B^{-1} en la forma canónica viendo los coeficientes que acompañan a las variables de holgura. Además, sabemos que la base es (x_5, x_1, x_3), debido a que forman la matriz identidad en las restricciones, además de tener costo reducido 0 en ese punto. Todas las variables que no tienen costo 0 están fuera de la base. De la misma forma, podemos obtener $B^{-1}R$ viendo los coeficientes que acompañan a las variables no básicas. Como ya habíamos podido calcular B, podemos obtener R. El lado derecho de las restricciones es representado por $B^{-1}b$, por lo que puedo obtener el vector b. Con respecto a los costos originales del problema, sabemos que las variables de holgura tienen costo original 0, por lo que podemos obtener las ecuaciones, ya que sabemos todos los costos reducidos en este punto, que están dados por los costos de la función objetivo de la forma canónica.

El problema original de optimización era:

$$\begin{array}{lrcl} max & 4x_1 - x_2 + 5x_3 + 4x_4 & & \\ s.a. & & & \\ & x_1 + x_2 + 3x_4 & \leq & 1 \\ & 3x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 & \leq & 2 \\ & 2x_2 + 5x_3 + x_4 & \leq & 4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

Problema 4. (19 puntos)

El director de orquesta Andrés Ríos debe realizar un concierto de música, y para ello, tiene decidido tocar R piezas musicales, las cuales quiere que produzcan el mejor sonido posible. Él dispone de M músicos dispuestos a participar del concierto, los cuales pueden estar en alguno de los N instrumentos posibles para tocar ($M > N$). Cada pieza debe tocarse sin interrupción. Sin embargo, entre cada pieza existe una pausa, por lo que se podrían cambiar los músicos entre cada pieza musical si se quisiera.

El director no posee todos los instrumentos. Existe un subconjunto $K \subset N$ de instrumentos que el director debe arrendar a un precio P_i si decide usar el instrumento i por todo el concierto. Se sabe que el director conoce bien a sus músicos, por lo que tiene certeza de que el músico j produce un beneficio de B_{ijr} en los oídos del público si toca el instrumento i durante la pieza r por cada minuto que esté tocando. Además, sabe que si los músicos j y k tocan una misma pieza musical, se producirá un beneficio adicional de D_{jk} por cada minuto. Como es de esperar, a los músicos se les debe pagar un costo fijo de CF si se les decide contratar, y un costo de CV por cada minuto que estén tocando arriba del escenario.

Andrés debe decidir también cómo armar el concierto en términos de las piezas musicales. Puede tocarlas en cualquier orden, aunque sabe que cada pieza musical, si es tocada para abrir el concierto, produce un beneficio de AI_r, mientras que si se usa para cerrar el concierto, produce un beneficio de AF_r. Además, sabe que se producirá un beneficio de E_{rs} si la pieza musical r es tocada justo antes que la pieza musical s. Adicionalmente, dada la habilidad del director, él tiene la capacidad para modificar la duración de cada pieza. Sabe que la pieza r debe durar al menos L_r minutos y como máximo U_r minutos.

a) (17 puntos) El director le pide a usted que formule un modelo de programación lineal entero mixto que le ayude a decidir cómo armar el concierto, sujeto a un presupuesto G, de manera de maximizar el beneficio producido en los oídos del público.

b) (2 puntos) Suponga que usted quiere resolver este problema, pero resulta que queda de dimensiones demasiado grandes para poder resolverlo en un tiempo razonable. Dada la estructura del modelo resultante, plantee qué podría hacer para tratar de encontrar la solución óptima del problema sin tener que resolver el modelo con las dimensiones que actualmente posee. (No es válido disminuir arbitrariamente los parámetros como la cantidad de instrumentos o la cantidad de músicos).

Solución Problema 4.

a) Variables de decisión:

$$x_{ijr} = \begin{cases} 1 & \text{Si el instrumento } i \text{ es tocado por el músico } j \text{ durante la pieza } r \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

$$y_{rt} = \begin{cases} 1 & \text{Si la pieza } r \text{ es tocada en el lugar } t \text{ , } t = 1, ..., |R| \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

$$\gamma_{rs} = \begin{cases} 1 & \text{Si la pieza } r \text{ es tocada justo antes de } s \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

$$\alpha_r = \text{Duración de la pieza } r$$

$$z_i = \begin{cases} 1 & \text{Si se toca el instrumento } i \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

$$w_{jkr} = \begin{cases} 1 & \text{Si el músico } j \text{ toca junto al músico } k \text{ durante la pieza } r \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

$$q_j = \begin{cases} 1 & \text{Si se contrata al músico } j \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

Dado que la multiplicación de variables no es permitida en un problema lineal, será necesario agregar las siguientes variables auxiliares:

$$\begin{aligned} \beta_{ijr} &: \text{ Representará } x_{ijr} \cdot \alpha_r \\ \delta_{jkr} &: \text{ Representará } w_{jkr} \cdot \alpha_r \end{aligned}$$

Función objetivo:

$$Max \sum_i \sum_j \sum_r B_{ijr} \cdot \beta_{ijr} + \sum_r \sum_j \sum_k D_{jk} \cdot \delta_{jkr} + \sum_r y_{r1} AI_r + \sum_r y_{r|R|} AF_r + \sum_r \sum_s E_{rs} \gamma_{rs}$$

Sujeto a las siguientes restricciones:

Definición de variable auxiliar β:

$$\beta_{ijr} \leq x_{ijr} U_r \qquad \forall i \in N, j \in M, r \in R$$

$$\alpha_r - (1 - x_{ijr}) U_r \leq \beta_{ijr} \leq \alpha_r \qquad \forall i \in N, j \in M, r \in R$$

Definición de variable auxiliar δ:

$$\delta_{jkr} \leq w_{jkr} U_r \qquad \forall j, k \in M, r \in R$$

$$\alpha_r - (1 - w_{jkr}) U_r \leq \delta_{jkr} \leq \alpha_r \qquad \forall j, k \in M, r \in R$$

Cada pieza tiene que estar en una posición, y en cada posición debe haber una pieza:

$$\sum_t y_{rt} = 1 \qquad \forall r \in R$$

$$\sum_r y_{rt} = 1 \qquad t = 1, ...|R|$$

Relación entre el orden y si vienen seguidas o no:

$$y_{rt} + y_{st+1} - 1 \leq \gamma_{rs} \qquad \forall r, s \in R, t = 1, ..., |R| - 1$$

$$\gamma_{rs} \leq \frac{y_{rt} + y_{st+1}}{2} \qquad \forall r, s \in R, t = 1, ..., |R| - 1$$

Duración de una pieza:

$$L_r \leq \alpha_r \leq U_r \qquad \forall r \in R$$

Relación de la variable z:

$$z_i \leq \sum_r \sum_j x_{ijr} \qquad \forall i \in N$$

$$\sum_r \sum_j x_{ijr} \leq z_i \cdot (|R| \cdot |M|) \qquad \forall i \in N$$

Relación de variable w:

$$\sum_i x_{ijr} + x_{ikr} - 1 \leq w_{jkr} \qquad \forall j, k \in M, r \in R$$

$$w_{jkr} \leq \frac{\sum_i x_{ijr} + x_{ikr}}{2} \qquad \forall j, k \in M, r \in R$$

Cada músico solo puede tocar un instrumento en cada pieza, y cada instrumento puede ser tocado por un solo músico en cada pieza:

$$\sum_j x_{ijr} \leq 1 \qquad \forall i \in N, r \in R$$

$$\sum_i x_{ijr} \leq 1 \qquad \forall j \in M, r \in R$$

Relación de variable q

$$\sum_i \sum_r x_{ijr} \leq q_j \cdot (|R| \cdot |N|) \qquad \forall j \in M$$

$$q_j \leq \sum_i \sum_r x_{ijr} \qquad \forall j \in M$$

Restricción de presupuesto:

$$\sum_i P_i z_i + \sum_j CF \cdot g_j + \sum_i \sum_j \sum_k CV \cdot \beta_{ijr} \leq G$$

Naturaleza de variables.

b) La decisión del orden en que se tocarán las piezas es independiente de todo lo demás. Las variables y_{rt} y γ_{rs} solo se relacionan entre ellas en las restricciones. Si se observa bien, en ninguna restricción aparecen estas variables junto a alguna de las otras que tienen quer ver con la duración de una pieza o con la asignación de músicos y/o instrumentos, ni siquiera en la de presupuesto.

Por lo tanto, se podría resolver dos problemas por separado: uno, que fuera solo maximizar el beneficio del público pensando en la decisión del orden de las piezas, y otra que fuera todo el resto del modelo. Así, estos dos sub problemas son más pequeños que el problema planteado y entregarían ambos la solución óptima en cada variable.