

**MAT1630 – Cálculo III**  
 Solución Interrogación N° 1

1. Considere el campo vectorial

$$F(x, y) = \left( \frac{y}{(x-1)^2 + y^2}, \frac{1-x}{(x-1)^2 + y^2} \right)$$

a) Calcular

$$\int_{C_1} F \cdot dr$$

donde  $C_1$  es la curva  $r(t) = (\cos t + 1, \sin t)$  con  $0 \leq t \leq 2\pi$

*Solución:*

$C_1$  es

$$r(t) = (\cos t + 1, \sin t)$$

con  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Luego  $r'(t) = (-\sin t, \cos t)$  y  $F(r(t)) = (\sin t, -\cos t)$

Se tiene entonces que

$$\int_{C_1} F \cdot dr = \int_0^{2\pi} F(r(t)) \cdot r'(t) dt = \int_0^{2\pi} -1 dt = -2\pi.$$

b) Calcular

$$\int_{C_2} F \cdot dr$$

donde  $C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 16x^2 + y^2 = 4\}$

*Solución:*

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{(x-1)^2 - y^2}{[(x-1)^2 + y^2]^2}$$

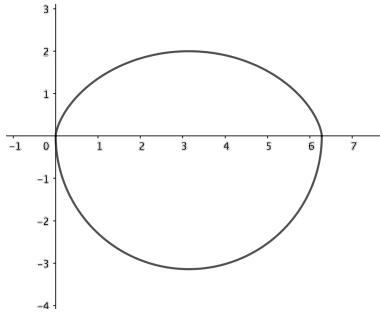
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{(x-1)^2 - y^2}{[(x-1)^2 + y^2]^2}$$

Como  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$  y  $C_2$  es una curva cerrada contenida en una región simplemente conexa, se concluye que  $F$  es conservativo en esa región y por lo tanto  $\int_{C_2} F \cdot dr = 0$ .

2. a) Encuentre el área encerrada por un arco de cicloide, parametrizado como

$$r(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t))$$

con  $t \in [0, 2\pi]$  y la mitad inferior de la circunferencia de radio  $\pi$  y centrada en  $(\pi, 0)$ .



*Solución:*

Si tomamos el campo vectorial  $F = (-y, 0)$ , entonces el área pedida queda determinada por

$$\int_{-C_1} F \cdot dr + \int_{C_2} F \cdot dr$$

Donde  $C_1$  es el arco de cicloide dada (parametrización negativa), y  $C_2$  mitad inferior de la circunferencia de radio  $\pi$  y centrada en  $(\pi, 0)$ ,  $s(t) = (\pi \cos t + \pi, \pi \sin t)$  (parametrización positiva).

$$-\int_{C_1} F \cdot dr = - \int_0^{2\pi} (-1 + \cos t, 0) \cdot (1 - \cos t, \sin t) dt = \int_0^{2\pi} 1 - 2 \cos t + \cos^2 t dt = 3\pi$$

$$\int_{C_2} F \cdot dr = \int_\pi^{2\pi} (-\pi \sin t, 0) \cdot (-\pi \sin t, \pi \cos t) dt = \pi^2 \int_\pi^{2\pi} \sin^2 t dt = \frac{\pi^3}{2}$$

Por lo que el área es  $3\pi + \frac{\pi^3}{2}$ .

Nota: Se podría haber calculado el área bajo la cicloide y sobre el eje  $x$  y luego haberle sumado el área de la semicircunferencia. Es decir

$$-\int_{C_1} F \cdot dr + \int_{C_3} F \cdot dr + \frac{\pi^3}{2}$$

con  $C_3$  el trazo que va desde  $(0, 0)$  a  $(2\pi, 0)$ .

- b) Entregue un parametrización de la superficie que se genera al rotar un arco de cicloide,  $r(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t), 0)$  con  $t \in [0, 2\pi]$ , en torno al eje  $x$ .

*Solución:*

$$x(t) = t - \sin(t)$$

$$y(t) = (1 - \cos(t)) \cos \theta$$

$$z(t) = (1 - \cos(t)) \sin \theta$$

con  $0 \leq t \leq 2\pi$  y  $0 \leq \theta \leq 2\pi$

3. La base de una cerca está dada por la ecuaciones paramétricas  $x = t^2$  y  $y = 2t$  con  $0 \leq t \leq 1$  metros. La altura de la cerca en la posición  $(x, y)$  está dada por la función  $h(x, y) = 100xy$  metros.

- a) Suponga que 1 litro de pintura cubre  $100 m^2$ . Demuestre que la cantidad de litros de pintura que se necesita para pintar la cerca por ambos lados es

$$4 \int_0^1 t^3 \sqrt{4t^2 + 4} dt$$

*Solución:*

Hay que calcular el área  $A$  de la cerca y luego multiplicarlo por dos (ambos lados). La cantidad de pintura requerida será entonces  $\frac{2 \cdot A}{100}$  litros.

Se tiene que

$$A = \int_C h(x, y) ds$$

con  $C$  la curva  $r(t) = (t^2, 2t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$

$$\text{Luego } A = \int_C h(x, y) ds = \int_0^1 h(r(t)) ||r'(t)|| dt = 200 \int_0^1 t^3 \sqrt{4t^2 + 4} dt.$$

y por lo tanto se necesitan  $4 \int_0^1 t^3 \sqrt{4t^2 + 4} dt$  litros de pintura.

- b) Determine la ecuación del plano tangente a la superficie  $r(x, y) = (x, y, 100xy)$  en el punto  $(1, 2, 200)$ .

*Solución:*

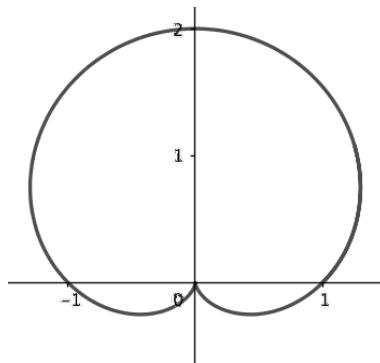
Se tiene que la superficie es  $r(x, y) = (x, y, 100xy)$ . Por lo  $r_x = (1, 0, 100y)$  y  $r_y = (0, 1, 100x)$ .

Un vector normal al plano tangente en  $(1, 2, 200)$  es  $r_x(1, 2, 200) \times r_y(1, 2, 200) = (-200, -100, 1)$

Por lo que la ecuación del plano tangente es

$$-200(x - 1) - 100(y - 2) + z - 1 = 0$$

4. El área de la región encerrada por la parte superior de la Cardioides que muestra el dibujo y el eje  $x$  es  $\frac{3\pi}{2} + 4$ . Calcule el trabajo que realiza el campo de fuerza  $F = \left(1 - \frac{y}{x^2 + y^2}, x + \frac{x}{x^2 + y^2}\right)$  sobre una partícula que se mueve a lo largo de la parte superior de la Cardioides desde  $(1, 0)$  hasta  $(-1, 0)$ .



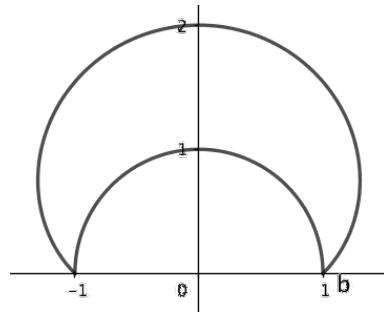
*Solución:*

Se pide  $\int_C F \cdot dr$  con  $C$  la parte superior de la Cardioides de  $(1, 0)$  a  $(-1, 0)$ .

Notemos que  $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 + \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 1$ . Luego es conveniente usar el teorema de Green. Para esto necesitamos cerrar la curva adecuadamente.

Lo natural sería tomar el trazo de recta que va desde  $(1, 0)$  a  $(-1, 0)$ , pero cuidado!, que el campo no está definido en  $(0, 0)$ .

Por lo que se tomará la semicircunferencia,  $C'$ , centrada en cero de radio 1,  $r(t) = (\cos t, \sin t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$



Por lo que

$$\int_C F \cdot dr + \int_{-C'} F \cdot dr = \int \int_D dA = A$$

De donde  $A$  es el área encerrada por las curvas, es decir  $A = \frac{3\pi}{2} + 4 - \frac{\pi}{2} = \pi + 4$ .

$$\int_{-C'} F \cdot dr = - \int_0^\pi -\sin t + \sin^2 t + 2\cos^2 t dt = -3\pi$$

Finalmente se tiene que

$$\int_C F \cdot dr = A - \int_{C'} F \cdot dr = 4\pi + 4.$$