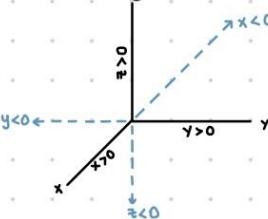
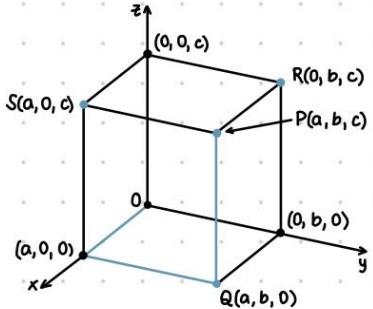


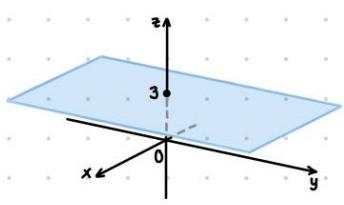


# Clase 14: Sistemas coordenados tridimensionales

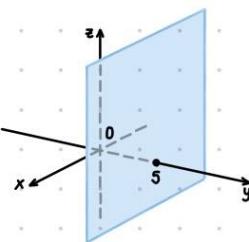
## ★ Sistema tridimensional de coordenadas:



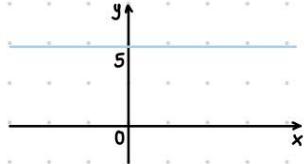
## • Ejemplos:



$z = 3$ , plano en  $\mathbb{R}^3$

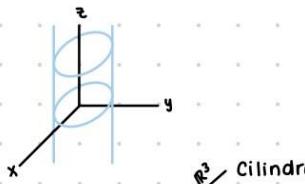
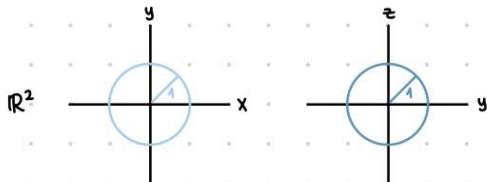


$y = 5$ , plano en  $\mathbb{R}^3$



$y = 5$ , recta en  $\mathbb{R}^2$

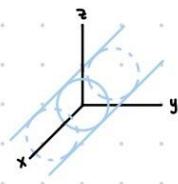
¿Qué representan las ecuaciones  $x^2 + y^2 = 1$  e  $y^2 + z^2 = 1$  en  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$ ?



$x^2 + y^2 = 1$

Cilindro

$\mathbb{R}^2$  Circunferencia



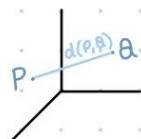
$y^2 + z^2 = 1$

## ★ Distancia entre puntos:

$$P = (x_1, x_2, x_3)$$

$$Q = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$$

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - \mu_1)^2 + (x_2 - \mu_2)^2 + (x_3 - \mu_3)^2}$$



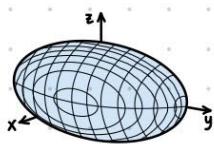
• **Ejemplo:** Determine la ecuación de una esfera tridimensional con centro en  $(a, b, c)$  y radio  $r$ .

\* **Esfera:** Todos los puntos que están a distancia  $r$  del punto  $(a, b, c)$

$$d((x, y, z); (a, b, c)) = r$$

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$$

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$$



Elipsoide:

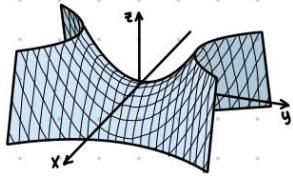
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$a = b = c$$



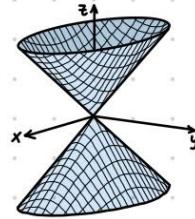
Paraboloide elíptico:

$$\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$



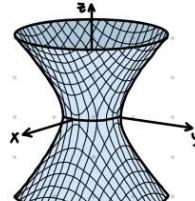
Paraboloide hiperbólico:

$$\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$



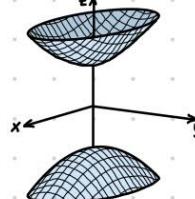
cono:

$$\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$



Hiperboloid de una hoja:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



Hiperboloid de dos hojas:

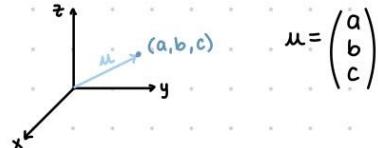
$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

# Clase 15: Vectores

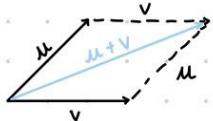
## ★ Vectores:

Un vector tridimensional es una sucesión de 3 números ordenados. Se denota  $(a, b, c)$  o  $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ .  $\mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$

Representación geométrica:



## ★ Suma de vectores:



## ★ Multiplicación escalar:



## ★ Producto punto:

$$u = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} \quad u \cdot v = ad + be + cf$$

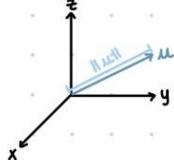
Obs:  $u \cdot v$  es un número

Propiedades

$$\begin{aligned} \rightarrow u \cdot v &= v \cdot u \\ \rightarrow \alpha(u \cdot v) &= (\alpha u) \cdot v = u \cdot (\alpha v) \\ \rightarrow u \cdot (v + w) &= u \cdot v + u \cdot w \end{aligned}$$

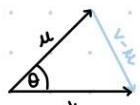
## ★ Norma:

$$\|u\| = \sqrt{u \cdot u}$$



$\|u\|$  es la magnitud del vector  $u$ .

## ★ Ángulo entre vectores:



$$\|v-u\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\|\cos(\theta) \quad \text{--- Teorema del coseno}$$

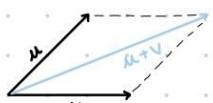
$$\|v-u\|^2 = (v-u) \cdot (v-u) = \|v\|^2 - 2v \cdot u + \|u\|^2$$

$$\|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\|\cos(\theta) = \|v\|^2 - 2v \cdot u + \|u\|^2$$

$$u \cdot v = \|u\|\|v\|\cos(\theta)$$

## ★ Desigualdad triangular:

$$|\|u\| - \|v\|| \leq \|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$$



## ★ observaciones:

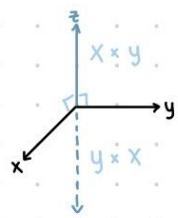
• Ortogonalidad  $\rightarrow u \cdot v = 0$

$$\rightarrow \theta = 90^\circ \rightarrow \cos(\theta) = 0$$

• Paralelismo  $\rightarrow u \cdot v = \|u\|\|v\|$

$$\rightarrow \theta = 0^\circ \text{ o } 180^\circ \rightarrow \cos(\theta) = \pm 1$$

★ Producto cruz:



$$x \times y = z$$

$$\mu \times v = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_2 v_3 - \mu_3 v_2 \\ \mu_3 v_1 - \mu_1 v_3 \\ \mu_1 v_2 - \mu_2 v_1 \end{bmatrix} \rightarrow \mu \times v \text{ es un vector de } \mathbb{R}^3 \text{ ortogonal a } \mu \text{ y } v.$$

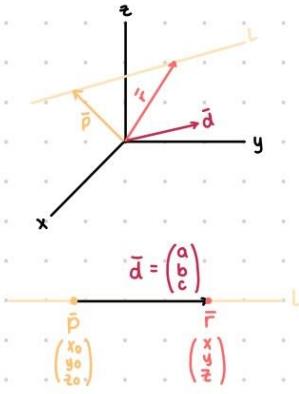
$$\|\mu \times v\| = \|\mu\| \|\nu\| \sin(\theta)$$

Observaciones:

- \*  $\mu \times v = -v \times \mu$
- \*  $\lambda(\mu \times v) = (\lambda\mu) \times v = \mu \times (\lambda v)$
- \*  $\mu \times (v+w) = \mu \times v + \mu \times w$
- \*  $\mu \cdot (v \times w) = (\mu \times v) \cdot w$

# Clase 18: ecuaciones de recta y planos

## \* Ecuación de la recta:



Teniendo  $\bar{p}$  un vector con coordenadas en la recta  $L$  conocidos y el vector  $\bar{d}$  la dirección de la recta  $L$ , la forma vectorial de  $L$  está dado por:

$$\bar{r} = \bar{p} + \lambda \bar{d}$$

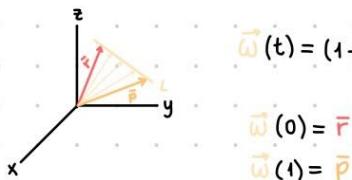
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

vector en  $L$       posición      direc.  
ecuación vectorial

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \lambda a & \lambda &= \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \\ y &= y_0 + \lambda b \\ z &= z_0 + \lambda c \end{aligned}$$

ecuaciones paramétricas      ecuaciones simétricas

## \* Segmento de recta:



$$\bar{w}(t) = (1-t)\bar{R} + t\bar{P} \quad \rightarrow t \in [0, 1]$$

$$\bar{w}(0) = \bar{R}$$

$$\bar{w}(1) = \bar{P}$$

## \* Ejemplos:

1. Determine la ecuación vectorial, ecuaciones paramétricas y simétricas de la recta que pasa por los puntos  $(-8, 1, 4)$  y  $(3, -2, 4)$ . Además determine en qué punto intersecta al plano  $XY$ .

$$\bar{d} = \begin{bmatrix} -8-3 \\ 1+2 \\ 4-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \bar{p} = \begin{bmatrix} -8 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \bar{r} = \begin{bmatrix} -8 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -11 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{Forma vectorial}$$

$$\left. \begin{aligned} x &= -8 - 11\lambda \\ y &= 1 + 3\lambda \\ z &= 4 \end{aligned} \right\} \text{ecuaciones paramétricas} \quad \left. \begin{aligned} \lambda &= \frac{x+8}{-11} = \frac{y-1}{3}, \quad z=4 \end{aligned} \right\} \text{ecuaciones simétricas}$$

Intersección con el plano  $XY$ :

Para que intersecte el plano  $XY$ ,  $z = 4 \rightarrow$  por lo tanto la recta no intersecta a  $XY$ .

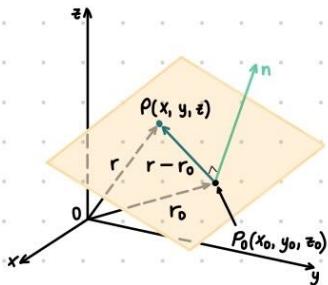
## \* Intersección con el plano $xz$

necesario que  $y=0$

$$\left. \begin{aligned} 0 &= 1 + 3\lambda \rightarrow \lambda = -\frac{1}{3} \\ x &= -8 - 11\lambda = -\frac{13}{3} \\ z &= 4 \end{aligned} \right\} \text{punto de intersección } \left( -\frac{13}{3}, 0, 4 \right)$$

# Clase 19: Ecuación del plano

## \* Ecuación del plano:



$$n = (a, b, c)$$

$$r = (x, y, z)$$

$$r_0 = (x_0, y_0, z_0)$$

$$n \cdot (r - r_0) = 0 \longrightarrow \text{Ecuación vectorial}$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \longrightarrow \text{Ecuación escalar}$$

$$ax + by + cz = \frac{ax_0 + by_0 + cz_0}{d \text{ cte}}$$

$$ax + by + cz = d \longrightarrow \text{Ecuación lineal}$$

## \* Observación:

- Si  $d = 0$ , el plano pasa por el origen
- Si  $d \neq 0$ , el plano NO pasa por el origen

## \* Ejemplos:

Encuentre el punto en el cual la recta de ecuaciones paramétricas  $x = 2 + 3t$ ,  $y = -4t$ ,  $z = 5 + t$ , intersecta al plano de ecuación  $4x + 5y - 2z = 18$ .

$$4(2 + 3t) + 5(-4t) - 2(5 + t) = 18$$

$$8 + 12t - 20t - 10 - 2t = 18$$

$$-10t - 2 = 18$$

$$-10t = 20$$

$$t = -2$$

$$x = 2 + 3(-2) = -4$$

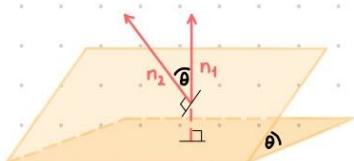
$$y = -4(-2) = 8$$

$$z = 5 + (-2) = 3$$

punto de intersección =  $(-4, 8, 3)$

## \* Intersección de planos:

- 2 planos son paralelos si sus vectores normales son paralelos
- 2 planos que no son paralelos se intersectan en una recta. El ángulo entre los planos se define como el ángulo entre sus vectores normales.



$$n_1 \cdot n_2 = \|n_1\| \|n_2\| \cos(\theta)$$

$$\|n_1 \times n_2\| = \|n_1\| \|n_2\| \sin(\theta)$$

★ Ejemplos:

Determine el ángulo entre los planos  $x+y+z=1$  y  $x-2y+3z=1$ . Luego, encuentre las ecuaciones simétricas de la recta intersección entre los planos.

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{n}_1 = (1, 1, 1) \\ \mathbf{n}_2 = (1, -2, 3) \\ \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 1-2+3=2 \\ \|\mathbf{n}_1\| = \sqrt{3} \quad \|\mathbf{n}_2\| = \sqrt{14} \end{array} \right\} \cos(\theta) = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{\|\mathbf{n}_1\| \|\mathbf{n}_2\|} = \frac{2}{\sqrt{42}} \\ \theta = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{42}}\right)$$

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{d} = (a, b, c) \rightarrow \mathbf{d} \cdot \mathbf{n}_1 = 0 \rightarrow a+b+c=0 \\ \mathbf{d} \cdot \mathbf{n}_2 = 0 \rightarrow a-2b+3c=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a=2b-3c \\ 2b-3c+b+c=0 \\ 3b-2c=0 \\ b=\frac{2}{3}c \\ a=\frac{5}{3}c \end{array} \quad \vec{d} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{3}c \\ \frac{2}{3}c \\ c \end{bmatrix} = \frac{1}{3}c \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

vector director

Buscamos un punto de L:

$$\left. \begin{array}{l} x=0 \rightarrow y+z=1 \\ \Rightarrow z=1-y \\ \Rightarrow -2y+3z=1 \\ \Rightarrow -5y=-2 \\ \Rightarrow y=\frac{2}{5} \\ \Rightarrow z=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5} \end{array} \right\} \text{punto } (0, \frac{2}{5}, \frac{3}{5})$$

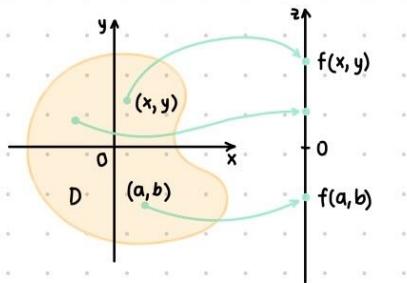
Ecuación de la recta:

$$\frac{x-0}{-5} = \frac{y-\frac{2}{5}}{2} = \frac{z-\frac{3}{5}}{3}$$

# Clase 20: Funciones de varias variables

## \* Función de dos variables:

Una función de dos variables es una función de la forma  $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  que asigna un par ordenado  $(x, y)$  del dominio  $D$  a un número real  $f(x, y)$ .



$$D = \text{Dom}(f) = \{(x, y) \mid f(x, y) \text{ es un número real}\}$$

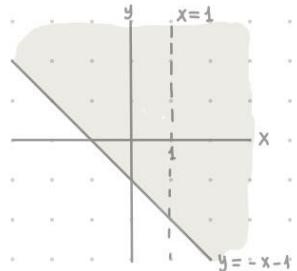
$$\text{Rec}(f) = \text{Ran}(f) = \{f(x, y) \mid (x, y) \in D\}$$

$z$  es la variable dependiente y  $x$  e  $y$  son las variables independientes

## \* Ejemplo:

Determine el dominio de  $f(x, y) = \frac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$

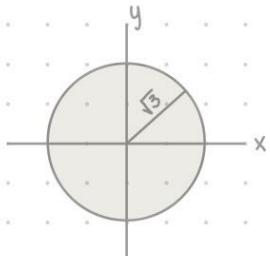
$$\begin{aligned} x+y+1 &\geq 0 \\ y &\geq -x-1 \end{aligned} \quad \begin{aligned} x-1 &\neq 0 \\ x &\neq 1 \end{aligned}$$



$$\text{Dom}(f) = \{(x, y) \mid y \geq -x-1 \text{ y } x \neq 1\}$$

Determine el dominio y el recorrido de  $g(x, y) = \sqrt{3 - x^2 - y^2}$

$$3 - x^2 - y^2 \geq 0 \longrightarrow x^2 + y^2 \leq 3 \quad (\text{circunferencia de radio } \sqrt{3})$$



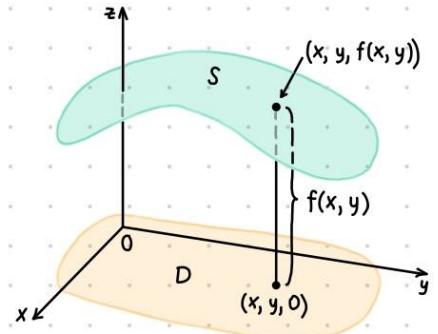
$$(x, y) \in \text{Dom}(g) \implies \begin{cases} 0 \leq x^2 + y^2 \leq 3 \\ -3 \leq -x^2 - y^2 \leq 0 \\ 0 \leq 3 - x^2 - y^2 \leq 3 \\ 0 \leq \sqrt{3 - x^2 - y^2} \leq \sqrt{3} \\ 0 \leq g(x, y) \leq \sqrt{3} \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Rec}(g) = [0, \sqrt{3}] \end{array} \right\}$$

★ Gráfico:

El gráfico de una función  $z = f(x, y)$  es el conjunto de puntos de  $\mathbb{R}^3$  de la forma:

$$\text{Graf}(f) = \{(x, y) \mid z = f(x, y), (x, y) \in \text{Dom}(f)\}$$

$$= \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in \text{Dom}(f)\}$$



★ Ejemplo:

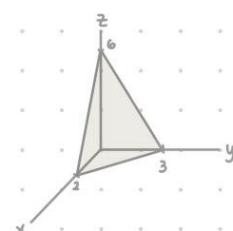
Grafique la función  $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$

$$f(0, 0) = 6$$

$$z = 6 - 3x - 2y$$

$$z = 0, y = 0 \rightarrow 0 = 6 - 3x \\ x = 2$$

$$z = 0, x = 0 \rightarrow 0 = 6 - 2y \\ y = 3$$



$$f(x, y) = 6 - 3x - 2y = z$$

$$6 = 3x + 2y + z \rightarrow \bar{n} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

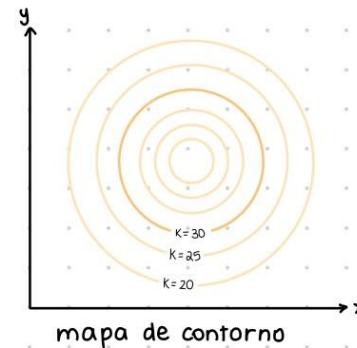
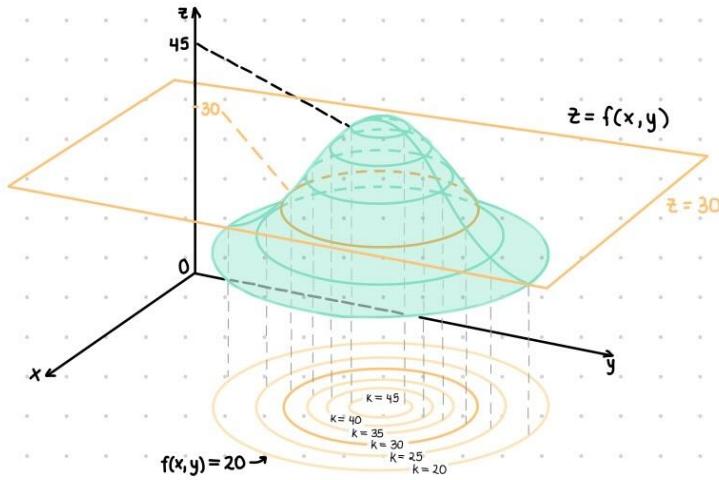
¡Muy importante aprenderse las ecuaciones y sus gráficas de la clase 14!

# Clase 21: Funciones de varias variables

## ★ Curvas de nivel:

Las curvas de nivel (o líneas de contorno) de una función  $f(x, y)$  son los puntos del dominio de  $f$  que satisfacen las ecuaciones  $f(x, y) = k$ , donde  $k$  es una constante.

### Ejemplo:



### ★ Ejemplo:

a) Determine las curvas de nivel de la función  $f(x, y) = \sqrt{1 - 4x^2 - y^2}$

$$f(x, y) = K \text{ constante}$$

$$\sqrt{1 - 4x^2 - y^2} = K > 0$$

$$1 - 4x^2 - y^2 = K^2$$

$$4x^2 + y^2 = 1 - K^2 \quad (\text{elipses})$$

$$K=0: 4x^2 + y^2 = 1$$

$$K=1: 4x^2 + y^2 = 0$$

$$\hookrightarrow (x, y) = (0, 0)$$

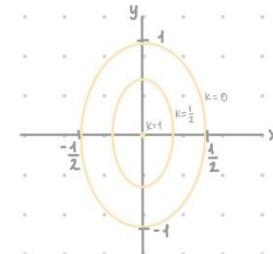
$$K=\frac{1}{2}: 4x^2 + y^2 = 1 - \frac{1}{4}$$

$$4x^2 + y^2 = \frac{3}{4}$$

$$16x^2 + 4y^2 = 3$$

$$y=0: 16x^2 = 3$$

$$|x| = \frac{\sqrt{3}}{4}$$



Ojo: No hay curvas de nivel para  $K < 0$  y  $K > 1$

b) Haga un mapa de contorno del plano  $3x + 2y = 1 + z$

$$f(x, y) = 3x + 2y - 1 = K$$

$$K=0: 3x + 2y - 1 = 0$$

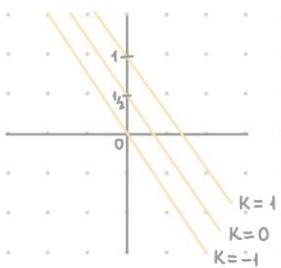
$$y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$K=1: 3x + 2y = 2$$

$$y = -\frac{3}{2}x + 1$$

$$K=-1: 3x + 2y - 1 = -1$$

$$y = -\frac{3}{2}x$$



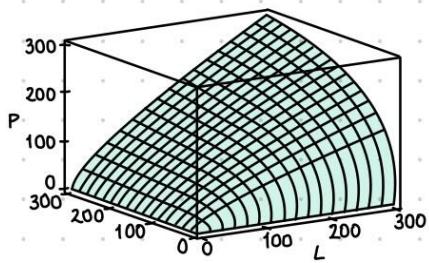
## ★ Cobb-Douglas:

$$P(L, K) = b L^\alpha K^{1-\alpha}$$

↗ Capital  
 ↗ Mano de obra  
 ↗ Producción

## • Caso particular:

$$P(L, K) = 1,01 L^{0,75} K^{0,25}$$

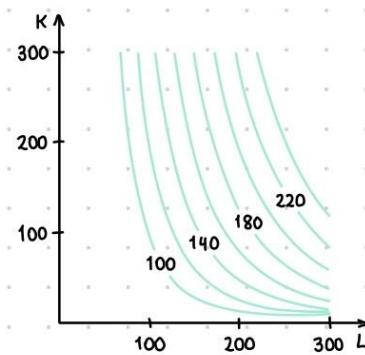


## CURVAS de nivel:

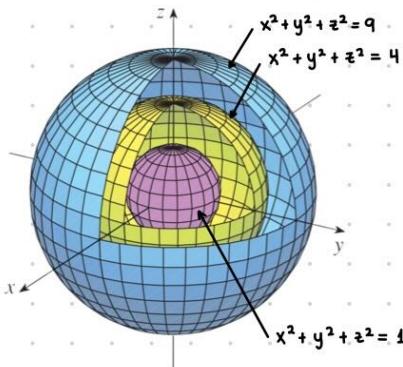
$$1,01 L^{0,75} K^{0,25} = \alpha \text{ cte}$$

$$L^{0,75} = \left( \frac{\alpha}{1,01} \right) \frac{1}{K^{0,25}}$$

$$L = \left( \frac{\alpha}{1,01} \right)^{\frac{4}{3}} \frac{1}{K^{\frac{1}{3}}}$$



## ★ Superficies de nivel:



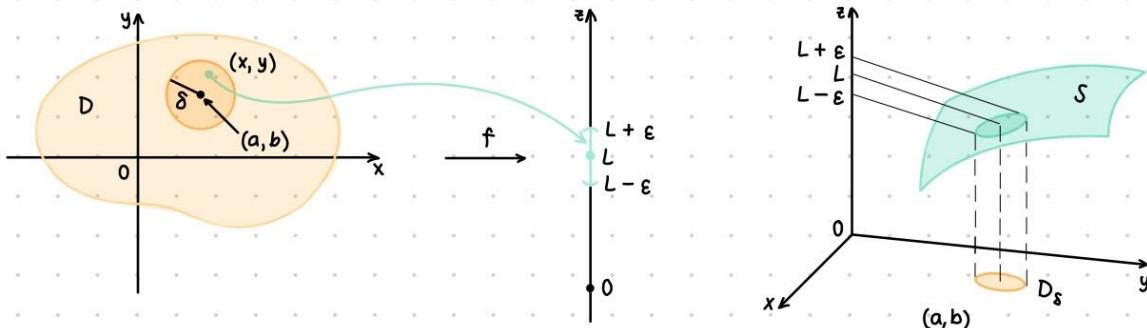
# Clase 22: Límites

## ★ Límite en 2 variables:

Sea  $f$  una función de dos variables cuyo dominio  $D$  contiene puntos arbitrariamente cercanos a  $(a, b)$ . Entonces, decimos que el límite de  $f(x, y)$  cuando  $(x, y)$  tiende a  $(a, b)$  es  $L$  y escribimos:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L$$

si para todo número  $\epsilon > 0$  hay un correspondiente número  $\delta > 0$  tal que si  $(x, y) \in D$  y  $0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$  entonces  $|f(x, y) - L| < \epsilon$ .



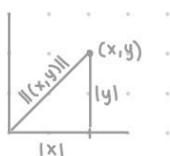
Entonces, ¿cómo calculamos límites?

- Puede usar todas las leyes de los límites de 1 variable (suma, resta, multiplicación y división) cuando apliquen.
- Siempre que pueda evaluar un límite, hágalo
- Gran ayuda: Teorema del Acotamiento (Sandwich)

## ★ Ejemplos:

1. Demuestre que el siguiente límite existe y calcúlelo:  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2}$

$$0 \leq \left| \frac{3x^2y}{x^2+y^2} \right| = \frac{3|x|^2|y|^2}{x^2+y^2} \leq \frac{3\|(x,y)\|^2\|(x,y)\|}{\|(x,y)\|^2} = 3\|(x,y)\|$$



$$|x| \leq \|(x,y)\|, \quad \|(x,y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Como  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 3\|(x,y)\| = 0$ , entonces

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} = 0$$

2. Demuestre que el siguiente límite no existe:  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

$$x=y: \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-x^2}{x^2+x^2} = 0$$

$$x=0: \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y^2}{y^2} = -1$$

Por lo tanto,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$  no existe.

$$3. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4} :$$

$$x=y^2: \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^4}{2y^4} = \frac{1}{2} \quad x=0: \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y^4} = 0 \quad x=y: \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^2+x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1+x^2} = 0$$

Por lo tanto,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$  no existe

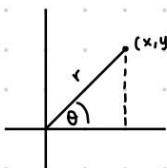
$$4. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x+y)}{x+3y} :$$

$$y=0: \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$x=0: \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(y)}{3y} = \frac{1}{3}$$

Por lo tanto,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x+y)}{x+3y}$  no existe

★ Cambio a coordenadas polares:



$$\left. \begin{array}{l} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{array} \right\} r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

★ Ejemplos:

$$1. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sin(r^2)}{r^2} = 1$$

$$2. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \lim_{r \rightarrow 0} \arccos\left(\frac{x \cos(\theta)}{r}\right) = \lim_{r \rightarrow 0} \theta = \theta \rightarrow \text{no existe}$$

$$3. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{(-\frac{1}{x^2+y^2})}}{\sin(\sqrt{x^2+y^2})} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{e^{-1/r^2}}{\sin(r)} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\frac{e^{-1/r^2}}{r^2}}{\frac{\sin(r)}{r}} = \frac{0}{1} = 0$$

# Clase 23: Continuidad

## ★ Límites iterados:

Los límites iterados de  $f(x,y)$  en  $(a,b)$  son

$$\cdot \lim_{x \rightarrow a} \left[ \lim_{y \rightarrow b} f(x,y) \right]$$

$$\cdot \lim_{x \rightarrow b} \left[ \lim_{y \rightarrow a} f(x,y) \right]$$

Teorema: Si  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y)$  existe, y un límite iterado existe, entonces son iguales.

Por lo tanto:

- Si el límite existe y ambos límites iterados existen, entonces todos son iguales.
- Si el límite existe, no necesariamente los límites iterados existen.
- Si los límites iterados existen y son diferentes, entonces el límite no existe.
- Si algún límite iterado no existe, no se puede asegurar nada del límite.

## ★ Continuidad:

Una función  $f$  es continua en  $(a,b)$  si  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = f(a,b)$ . Diremos que  $f$  es continua en el dominio  $D$  si es continua en todos los puntos  $(a,b) \in D$ .

Más generalmente,  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es continua en  $\mu \in \mathbb{R}^n$  si  $\lim_{x \rightarrow \mu} f(x) = f(\mu)$ . Es decir, para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $\|x - \mu\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\mu)| < \varepsilon$

## ★ Ejemplos:

$$1. f(x,y) = \begin{cases} \frac{x-y}{x+y} & \text{si } x+y \neq 0 \\ 0 & \text{si } x+y = 0 \end{cases}$$

Continuidad en  $(0,0)$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} f(x,y) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x-y}{x+y} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} (1) = 1$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} f(x,y) \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-y}{x+y} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} (-1) = -1$$

$\left. \begin{array}{l} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x-y}{x+y} \text{ no existe} \rightarrow \text{por lo tanto } f(x,y) \text{ no es} \\ \text{continua en } (0,0). \end{array} \right\}$

¿Dónde es continua  $f(x,y)$ ?  $\rightarrow$  Si  $(a,b) \notin \{(x,y) | x+y=0\}$ , entonces  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{x-y}{x+y} = \frac{a-b}{a+b} = f(a,b)$   
 $\rightarrow f(x,y)$  es continua en todos los puntos fuera de la recta  $x+y=0$

$$2. f(x,y) = \begin{cases} x \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

Si  $(x,y) = (0,0)$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \lim_{y \rightarrow 0} x \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right) \right] \longrightarrow \text{Este límite no existe}$$

No puede asegurar nada sobre  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$

$$f(x,y) = x \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right), \quad y \neq 0$$

$$0 \leq |f(x,y)| = \left| x \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right) \right| \leq |x| \cdot 1 \longrightarrow \text{Como } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |x| = 0, \text{ entonces } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right) = 0 = f(0,0)$$

$f$  es continua en  $(0,0)$

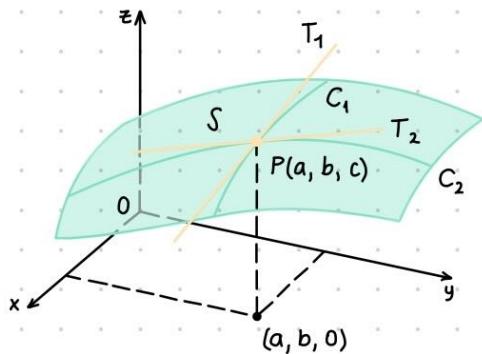
$$\text{Además, si } (a,b) \in L \longrightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} x \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right) = a \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{b}\right) \longrightarrow f \text{ es continua en } (a,b)$$

$$\text{Si } (a,b) \in L, (a,b) \neq (0,0) \quad \left. \begin{array}{l} \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} x \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right) = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} x \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right) = ? \quad \text{NO existe} \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} x \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right) = \lim_{y \rightarrow 0} a \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right) = ? \quad \text{NO existe} \end{array} \right\}$$

$f$  no es continua sobre  $L$ , fuera del origen

# Clase 24: Derivadas parciales

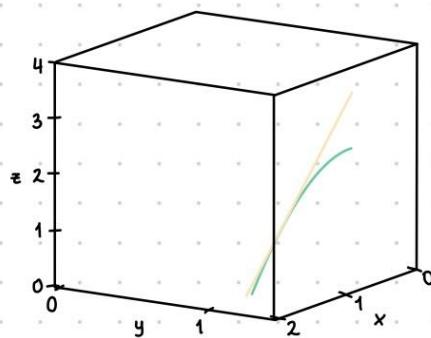
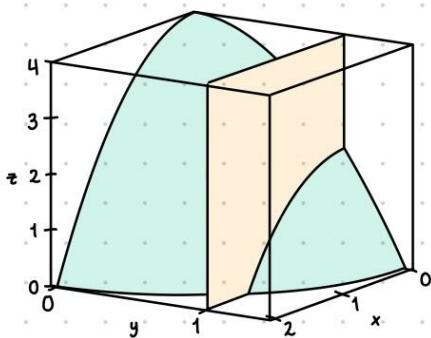
## \* Derivadas parciales:



$$f_x(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} \quad \text{pendiente de } T_1$$

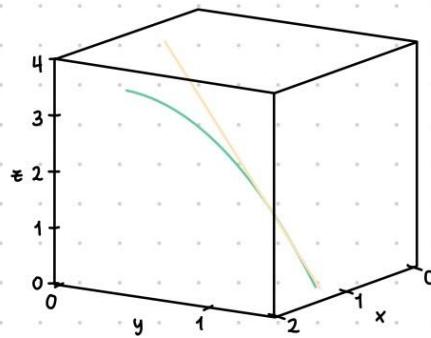
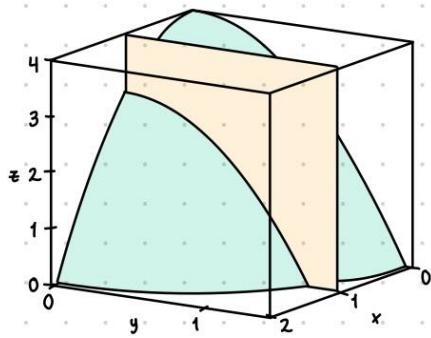
$$f_y(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, b+h) - f(a, b)}{h} \quad \text{pendiente de } T_2$$

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$



$$f_x(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = D_x f(a, b)$$

>>> Se toma y como una constante y se deriva con respecto a x.



$$f_y(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = D_y f(a, b)$$

>>> Se toma x como una constante y se deriva con respecto a y.

## \* Ejemplos:

- Si  $f(x, y) = 4 - x^2 - 2y^2$ , determine  $f_x(1, 1)$  y  $f_y(1, 1)$ , e interprete estos números como pendientes.

$$f_x(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = D_x f(a, b)$$

$$f_x(x, y) = -2x \implies f_x(1, 1) = -2$$

$$f_y(x, y) = -4y \implies f_y(1, 1) = -4$$

2. Si  $f(x, y) = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{1+y}\right)$ , calcule  $\frac{\partial f}{\partial x}$  y  $\frac{\partial f}{\partial y}$ .

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \cdot \left(\frac{1}{1+y}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \cdot \frac{-x}{(1+y)^2}$$

3. Calcule  $\frac{\partial z}{\partial x}$  y  $\frac{\partial z}{\partial y}$  si  $z$  se define implícitamente como una función de  $x$  e  $y$  mediante la ecuación:

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1.$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz) = \frac{\partial}{\partial x} (1)$$

$$3x^2 + 0 + 3z^2 \cdot z_x + 6y(z + xz_x) = 0$$

$$3z^2 z_x + 6y x z_x = -3x^2 - 6yz$$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-3x^2 - 6yz}{3z^2 + 6yx}}$$

Ejercicio:  $\frac{\partial z}{\partial y}$  (solución:  $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y^2 + 2xz}{z^2 + 2xy}$ )

→ pag. 905 (7º versión)

# Clase 25: Derivadas parciales de orden superior

## ★ Derivadas parciales de orden superior:

Segundas derivadas parciales:

$$\cdot (f_x)_x = f_{xx} = f_{11} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$\cdot (f_x)_y = f_{xy} = f_{12} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

$$\cdot (f_y)_y = f_{yy} = f_{22} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

$$\cdot (f_y)_x = f_{yx} = f_{21} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

## ★ Ejemplo:

Determine las segundas derivadas parciales de  $f(x,y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 2xy^3 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2 - 4y \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x + 2y^3 \\ \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x^2y - 4 \end{array} \quad \begin{array}{l} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6xy^2 \\ \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 6xy^2 \end{array}$$

## ★ Teorema de Clairaut:

Suponga que  $f$  está definida sobre un disco  $D$  que contiene el punto  $(a,b)$ . Si tanto la función  $f_{xy}$  como  $f_{yx}$  son continuas sobre  $D$ , entonces:

$$f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$$

## ★ Ejemplo:

Calcule  $f_{xxxz}$  si  $f(x,y,z) = \sin(3x + yz)$ :

$$f_x = 3 \cos(3x + yz)$$

$$f_{xx} = -9 \sin(3x + yz)$$

$$f_{xxy} = -9z \cos(3x + yz)$$

$$f_{xxxz} = -9 \cos(3x + yz) + 9yz \sin(3x + yz)$$