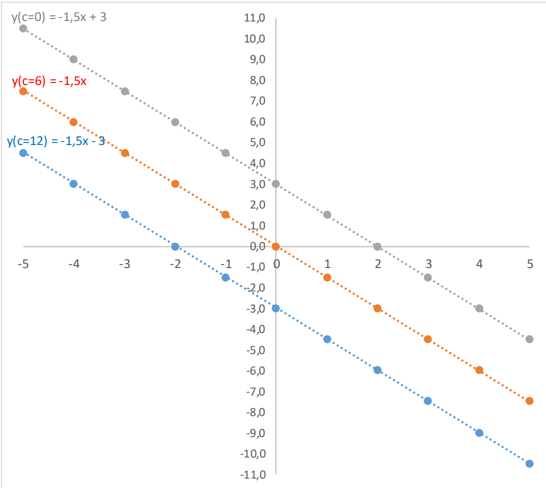
Pauta Control 1

EAF200A – II Semestre 2020

Problema

a) Para cada una de las siguientes funciones, grafique las correspondientes curvas de nivel.

1a) (20 puntos) $f(x,y) = 6 - 3x - 2y$, cuando las constantes son $c = 12$; $c = 6$; $c = 0$. En cada de las tres curvas de nivel, identifique dos puntos

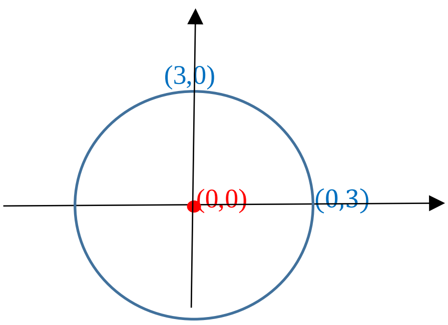


x	y(c=12)	y(c=6)	y(c=0)
-5	4,5	7,5	10,5
-4	3,0	6,0	9,0
-3	1,5	4,5	7,5
-2	0,0	3,0	6,0
-1	-1,5	1,5	4,5
0	-3,0	0,0	3,0
1	-4,5	-1,5	1,5
2	-6,0	-3,0	0,0
3	-7,5	-4,5	-1,5
4	-9,0	-6,0	-3,0
5	-10,5	-7,5	-4,5

2a) (20 puntos) $f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$, cuando las constantes son: $c = 0$; $c = 3$. En cada una de las dos curvas de nivel, identifique un punto.

- Con $c = 0 \rightarrow \sqrt{9 - x^2 - y^2} = 0 \rightarrow 9 - x^2 - y^2 = 0 \rightarrow x^2 + y^2 = 9 = 3^2$
  Por lo tanto, la curva de nivel en este caso es una circunferencia de radio r = 3 Por lo tanto, para cualquier punto a elegir, basta con asegurarse que el punto pertenezca a la curva de nivel (por ejemplo, (3,0), (0,3), $(\sqrt{3}, \sqrt{6})$, $(1, 2\sqrt{2})$, todos sirven). (Ojo, es posible que la curva de nivel la expresen como $y = \pm\sqrt{9 - x^2}$, o bien $x = \pm\sqrt{9 - y^2}$)

- Con $c = 3 \rightarrow \sqrt{9 - x^2 - y^2} = 3 \rightarrow 9 - x^2 - y^2 = 9 \rightarrow x^2 + y^2 = 0 = 0^2$
  Por lo tanto, la curva de nivel en este caso es una circunferencia de radio r = 0, es decir, la curva de nivel es el punto (0,0)

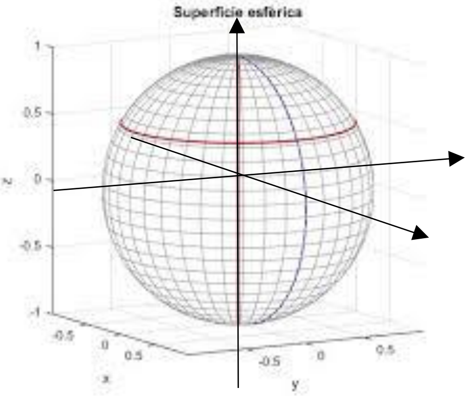


3a) (10 puntos) En este último caso, se pide que intuitivamente, usted generalice el concepto de "curva de nivel" a "superficie de nivel"

Para la función $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, describa o grafique la "superficie de nivel", cuando la constante es $c = 1$, identifique tres puntos por la cual pasa dicha superficie de nivel

- $Con\ c = 1 \rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 1 = 1^2 \rightarrow$
  $La\ superficie\ de\ nivel\ corresponde\ a\ una\ esfera\ de\ radio\ r = 1$

- Pasa por los puntos (1,0,0); (-1,0,0); (0,1,0); (0,-1,0); (0,0,1); (0,0,-1)



ESFERA CENTRADA EN EL ORIGEN, DE RADIO r = 1

b) Un fabricante ha modelado su producción con la siguiente función:

$$Q(L,K) = 1.039L^{0.75}K^{0.25} \quad ; \quad L,K > 0$$

Donde:

- ✓ **Q**: Valor monetario de la Producción total producida en un determinado período
- ✓ ***L:*** Cantidad de horas-hombre trabajadas en dicho período
- ✓ ***K:*** Valor monetario de la cantidad de capital invertido (maquinarias, equipos y edificios)

1b) (20 puntos) Obtener una expresión para, la ecuación del plano tangente: $T(L,K)$ a la función de producción en el punto $(L,K,Q) = (101,20,70)$ (NO puede usar calculadora, solo de una expresión)

La ecuación del plano tangente $T(L,K)$ en el punto $(L,K,Q) = (101,20,70)$, está dado por:

$$T(L,K) - 70 = \frac{\partial Q}{\partial L}(101,20) * (L - 101) + \frac{\partial Q}{\partial K}(101,20) * (K - 20)$$

- $\frac{\partial Q}{\partial L} = 1.039 * 0.75 * L^{-0.25}K^{0.25} \rightarrow \frac{\partial Q}{\partial L}(101,20) = 1.039 * 0.75 * \left(\frac{20}{101}\right)^{0.25}$
- $\frac{\partial Q}{\partial k} = 1.039 * 0.25 * L^{0.75}K^{-0.75} \rightarrow \frac{\partial Q}{\partial k}(101,20) = 1.039 * 0.25 * \left(\frac{101}{20}\right)^{0.75}$

$$\boldsymbol{T(L,K) = 70 + 1.039 * 0.75 * \left(\frac{20}{101}\right)^{0.25} * (L - 101) + 1.039 * 0.25 * \left(\frac{101}{20}\right)^{0.75} * (K - 20)}$$

-

2b) (10 puntos) Usando la respuesta obtenida en el punto anterior, se pide obtener una expresión para el valor aproximado del valor de la función producción en el punto $(L,K) = (100,21)$

$$\boldsymbol{Q(100,21) \approx T(100,21) = 70 - 1.039 * 0.75 * \left(\frac{20}{101}\right)^{0.25} + 1.039 * 0.25 * \left(\frac{101}{20}\right)^{0.75}}$$

3b) (20 puntos) Demuestre que cualquiera sea el valor de (L, K), las Productividad Marginal del trabajo es positiva y decreciente

- $\frac{\partial Q}{\partial L} = PM_{gL} = 1.039 * 0.75 * L^{-0.25}K^{0.25} = 1.039 * 0.75 * \left(\frac{K}{L}\right)^{0.25} > 0 \quad ya\ que\ K, L > 0$
  Por lo tanto, la productividad marginal del trabajo es POSITIVA

- $\frac{\partial PM_{gL}}{\partial L} = \frac{\partial^2 Q}{\partial L^2} = -1.039 * 0.75 * 0.25 * L^{-1.25}K^{0.25} < 0\ ;\ ya\ que\ K, L > 0$
  Por lo tanto, la productividad del trabajo es DECRECIENTE