Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática

MAT 1610 - Cálculo I.
Control 4.

FILA A

Nombre: ____

Sección:_______

Tiempo : 60 minutos

Fecha : 19 de Junio de 2017

1. Se saben los siguientes hechos sobre una función $f(x)$:

   - $f(x)$ tiene derivada continua sobre el intervalo $[-1,1]$.
   - $f(x)$ tiene valor promedio 4 sobre el intervalo $[-1,1]$.
   - $f(-1) = 7$ y $f(1) = 2$.

   Determine el valor promedio de la función $g(x) = xf'(x)$ sobre el intervalo $[-1,1]$

   Solución

   El valor promedio de $g(x)$ está dado por

   $$\frac{1}{1-(-1)} \int_{-1}^{1} xf'(x)dx.$$

   Integrando por parte:
   $u = x \Rightarrow du = dx$
   $dv = f'(x) \Rightarrow v = f(x)$

   $$\int_{-1}^{1} xf'(x)\,dx \;=\; xf(x) - \Big|_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \;=\; 2 + 7 - 2(4).$$

   Por lo tanto, el valor promedio de $g(x)$ en el intervalo $[-1,1]$ es $\frac{1}{2}$.

2. Calcule

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{25-x^2}}$$

Solución

Sea $I \ = \displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{25-x^2}}$
Haciendo cambio de variable $x \ = 5\operatorname{sen}(\theta)$ entonces $dx \ = \ 5\cos(\theta)d\theta$.

$$I \ = \int \frac{5\cos(\theta)d\theta}{25\operatorname{sen}^2(\theta)\sqrt{25-25\operatorname{sen}^2(\theta)}}$$

$$\frac{1}{25}\int \cos(\theta)\sec(\theta)d\theta$$

$$I \ = \ -\frac{1}{25}\cot(\theta)+C$$

$$-\frac{1}{25}\frac{\sqrt{25-x^2}}{x}+C.$$

3. El volumen del sólido que se obtiene al hacer girar la región $y = 4x - x^2$, $y = 3$ en torno a la recta $x = 1$ es:

   a) $\dfrac{\pi}{3}$
   b) $\dfrac{7}{3}\pi$
   c) $\dfrac{\pi}{6}$
   d) $\dfrac{8}{3}\pi$ **Respuesta correcta**
   e) Ninguna de las anteriores.

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática

MAT 1610 - Cálculo I.
Control 4.

FILA B

Nombre: ____

Sección:_______

Tiempo : 60 minutos

Fecha :19 de Junio de 2017

1. Se saben los siguientes hechos sobre una función $f(x)$:
   - $f(x)$ tiene derivada continua sobre el intervalo $[0, 2]$.
   - $f(x)$ tiene valor promedio 4 sobre el intervalo $[0, 2]$.
   - $f(0) = 5$ y $f(2) = 1$.

   Determine el valor promedio de la función $g(x) = xf'(x)$ sobre el intervalo $[0, 2]$

   Solución

   El valor promedio de $g(x)$ está dado por

$$\frac{1}{2-(0)}\int_0^2 xf'(x)dx.$$

   Integrando por parte:
   $u = x \Rightarrow du = dx$
   $dv = f'(x) \Rightarrow v = f(x)$
   Valor promedio de $g(x)$ integrando por parte es:

$$u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dv = f'(x) \Rightarrow v = f(x)$$

   Por lo tanto el promedio es de $g(x)$ es:
   Promedio=

$$\frac{1}{2}(2-2) = 0$$

2. Calcule
$$\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^3}\,dx$$

Solución

Sea $I \;=\; \displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^3}\,dx$
Haciendo cambio de variable:
$$x \;=\; 3\sec(\theta)$$
entonces:
$$dx \;=\; 3\sec(\theta)\tan(\theta)d\theta$$
Por lo tanto
$$I \;=\; \int \frac{\sqrt{9\sec^2(\theta)-9}}{27\sec^3} 3\sec(\theta)\tan(\theta)\,d(\theta) \;=\; \frac{1}{3}\int \operatorname{sen}^2(\theta)\,d\theta$$
$$= \frac{1}{3}\int \frac{1-\cos(\theta)}{2}\,d\theta \;=\; \frac{1}{6}\left(\theta - \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{2}\right) + C$$

$$= \frac{1}{6}\operatorname{arc\,sen}(x/3) - \frac{\sqrt{x^2-9}}{2x^2} + C.$$

3. El volumen del sólido que se obtiene al hacer girar la región $-x^2 + 6x - 8$, $y = 0$ en torno al eje Y es:

   a) $\dfrac{2}{3}\pi$
   b) 8π **Respuesta correcta**
   c) 4π
   d) $\dfrac{3}{2}\pi$
   e) Ninguna de las anteriores.