Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática

Examen – MAT 1640
5 de julio, 2012
SOLUCIONES

Problema 1. Un paracaidista se deja caer de un avión a 3000 $[m]$ de altura. La aceleración de gravedad es $g = 9.8$ $[m/s^2]$ y la desaceleración debido a la resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad con constante de proporción $\rho = 0.25$ $[1/m]$. Determine el tiempo que toma para llegar al piso y la velocidad de impacto.
SOLUCIÓN: La velocidad $v(t)$ del paracaidista satisface la ecuación diferencial separable

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - \rho v^2 = \rho(\kappa - v)(\kappa + v) \qquad \kappa = \sqrt{g/\rho}.$$

[1 pt].
Integrando obtenemos

$$\int \frac{\mathrm{d}v}{(\kappa - v)(\kappa + v)} = \int \rho \mathrm{d}t \Rightarrow \frac{1}{2\kappa} \ln\Big(\frac{\kappa + v}{\kappa - v}\Big) = \rho t + c,$$

es decir:

$$\frac{\kappa + v}{\kappa - v} = Ce^{2\kappa\rho t} \qquad C = e^{2\kappa c} = \frac{\kappa + v_0}{\kappa - v_0} \overset{v_0=0}{=} 1.$$

Al despejar v vemos que la velocidad es dada por

$$v(t) = \kappa\Big(\frac{e^{2\kappa\rho t} - 1}{e^{2\kappa\rho t} + 1}\Big) = \kappa \tanh(\kappa\rho t).$$

[2 pt].
Luego de integrar una vez mas obtenemos la altura $y(t)$ del paracaidista como función del tiempo:

$$y(t) = y_0 - \int_0^t v(\tau)\mathrm{d}\tau = y_0 - \kappa \int_0^t \tanh(\kappa\rho\tau)\mathrm{d}\tau = y_0 - \frac{1}{\rho}\ln(\cosh(\kappa\rho t)).$$

[1 pt].
El tiempo t_0 para llegar al piso es por lo tanto dado por la ecuación $y_0 = \frac{1}{\rho}\ln(\cosh(\kappa\rho t_0))$, es decir

$$t_0 = \frac{1}{\kappa\rho}\cosh^{-1}(e^{y_0\rho}) = \frac{1}{\sqrt{0.25 \cdot 9.8}}\cosh^{-1}(e^{3000 \cdot 0.25})$$

[1 pt].

La velocidad de impacto es

$$v(t_0) = \kappa \tanh(\kappa\rho t_0) = \sqrt{9.8/0.25}\,\tanh(t_0\sqrt{0.25\cdot 9.8})$$

[1 pt].

Problema 2.
(i) Resuelva el problema

$$\begin{cases} y'' - 5y' + 6y = 10\,\mathrm{sen}\,t - 2te^{2t} - 6, \\ y(0) = -1,\ y'(0) = 1. \end{cases} \tag{1}$$

(ii) Encuentre criterio sobre los parámetros reales b, c para que cada solución y de la ecuación

$$y'' + by' + cy = 0$$

satisfaga $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$.
SOLUCIÓN: (i) Podemos resolver el problema utilizando:

- Método de coeficientes indeterminados;
- Método de variación de parámetros;
- Transformada de Laplace.

(a) *Método de coeficientes indeterminados.* La solución general de la ecuación homogenéa $y''-5y'+6y = 0$ es $c_1e^{2t}+c_2e^{3t}$ con constantes arbitrarias c_1, c_2. Buscamos una solución particular de la ecuación en (1) en la forma $A\cos t + B\mathrm{sen}\, t + (Ct^2+Dt)e^{2t}+E$. Determinando los coeficientes A, B, C, D, E, encontramos que la solución general de la ecuación diferencial en (1) es

$$y(t) = c_1e^{2t} + c_2e^{3t}\ [\mathbf{1\,pt}]\ + \cos t + \mathrm{sen}\, t\ [\mathbf{1\,pt}]\ + (t^2+2t)e^{2t}\ [\mathbf{1\,pt}]\ - 1\ [\mathbf{0.5\,pt}].$$

Satisfaciendo las condiciones iniciales, obtenemos $c_1 = -1$, $c_2 = 0$ **[0.5 pts]**. Por lo tanto, la solción del problema de Cauchy (1) es

$$y(t) = -e^{2t} + \cos t + \mathrm{sen}\, t + (t^2+2t)e^{2t} - 1. \tag{2}$$

(b) *Método de variación de parámetros.* Buscamos una solución particular de la ecuación en (1) en la forma $y_p(t) = e^{2t}u_1(t) + e^{3t}u_2(t)$ donde las funciones u_1, u_2 satisfacen el sistema

$$\begin{cases} e^{2t}u_1'(t) + e^{3t}u_2'(t) = 0, \\ 2e^{2t}u_1'(t) + 3e^{3t}u_2'(t) = 10\,\mathrm{sen}\, t - 2te^{2t} - 6. \end{cases} \qquad [\mathbf{1pt}]$$

Entonces,

$$u_1(t) = \int_0^t (10e^{-3s}\,\mathrm{sen}\, s - 2se^{-s} - 6e^{-3s})ds =$$

$$(1-e^{-3t}\cos t) - 3e^{-3t}\operatorname{sen} t + 2(te^{-t}+e^{-t}+e^{-3t}-2), \quad [\mathbf{1pt}]$$
$$u_2(t) = -\int_0^t (10e^{-2s}\operatorname{sen} s - 2s - 6e^{-2s})ds =$$
$$2(e^{-2t}\cos t - 1) + 4e^{-2t}\operatorname{sen} t + t^2 - 3(e^{-2t}-1). \quad [\mathbf{1pt}]$$

Entonces,

$$y_p(t) = \cos t + \operatorname{sen} t + (t^2+2t)e^{2t} - 1 + 3e^{2t} - 3e^{3t}. \tag{3}$$

Notemos que la solución particular en (3) satisface $y_p(0) = y_p'(0) = 0$. La solución general de la ecuación en (1) es

$$y(t) = y_p(t) + k_1 e^{2t} + k_2 e^{3t}. \quad [\mathbf{0.5pt}]$$

Satisfaciendo las condiciones inciciales, obtenemos $k_1 = -4$, $k_2 = 3$ [**0.5 pt**] y llegamos de nuevo a (2).
(c) *Transformada de Laplace*. Sea Y la transformada de Laplace de la solución y del problema (1). Entonces,

$$Y(s) = -\frac{s-6}{s^2-5s+6} + \frac{10}{(s^2-5s+6)(s^2+1)} - \frac{2}{(s-2)^3(s-3)} - \frac{6}{s(s^2-5s+6)}. \quad [\mathbf{1,5pts}]$$

Aplicando fracciones parciales, obtenemos

$$Y(s) = -\frac{1}{s-2} + \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1} + \frac{2}{(s-2)^2} + \frac{2}{(s-2)^3} - \frac{1}{s}. \quad [\mathbf{1pt}]$$

Aplicando la transformada de Laplace inversa, obtenemos (2). [**1,5 pts**]
(ii) El criterio es: $b > 0$ [**1 pt**], $c > 0$ [**1 pt**].

Problema 3. Sea

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

(i) Encuentre la matriz exponencial e^{tA}, $t \in \mathbb{R}$, asociada con A.
(ii) Resuelve el problema

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{y}}{dt} = A\mathbf{y} + \begin{pmatrix} \operatorname{sen}(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix}, \\ \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Solución : (i) [**2 pts**] La matriz A tiene valores propios $-1 \pm 2i$ con vectores propios $\begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix}$. Por lo tanto la matriz

$$\Psi(t) := e^{-t} \begin{pmatrix} \cos(2t) & \operatorname{sen}(2t) \\ -\operatorname{sen}(2t) & \cos(2t) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

es una matriz fundamental para el sistema $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$. Como $\Psi(0) = I$, tenemos $e^{tA} = \Psi(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

(ii) La solución $\mathbf{y}$(t) del problema de Cauchy está definida por la fórmula de Duhamel

$$\mathbf{y}(t) = \int_0^t e^{(t-s)A}\mathbf{f}(s)ds + e^{tA}\mathbf{y}_0 \quad [\mathbf{1.5\,pts}]$$

donde

$$\mathbf{f}(t) := \begin{pmatrix} \operatorname{sen}(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{y}_0 := \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Tenemos

$$\int_0^t e^{(t-s)A}\mathbf{f}(s)ds = (1 - e^{-t}) \begin{pmatrix} \operatorname{sen}(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{1,5\,pts}]$$

$$e^{tA}\mathbf{y}_0 = -e^{-t} \begin{pmatrix} \operatorname{sen}(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix}. \quad [\mathbf{1\,pt}]$$

Por lo tanto

$$\mathbf{y}(t) = (1 - 2e^{-t}) \begin{pmatrix} \operatorname{sen}(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix}.$$

Problema 4.

(i) El punto $(0,0)$ es una solución de equilibrio del sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - y - 3x^2y, \\ \frac{dy}{dt} = -2x - 4y + y \operatorname{sen} x. \end{cases}$$

Utilizando el método de linealización clasifíquelo, si es posible, como atractor, repulsor o silla.

(ii) Verifique que la función $E(x,y) = xe^y + \cos x - x$ es una constante de movimiento (función de Hamilton) para el sistema,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = xe^y, \\ \frac{dy}{dt} = \operatorname{sen} x \; - \; e^y \; + 1\,. \end{cases} \tag{4}$$

Encuentre además sus puntos de equilibrio y decida si son estables o inestables.

Solución: (i) Para el punto de equilibrio $(0,0)$, el sistema linealizado es,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - y, \\ \frac{dy}{dt} = -2x - 4y. \end{cases}$$

Su matriz de coeficientes (la matriz de Jacobi del sistema no lineal evaluado en $(0,0)$) es

$$J = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \quad [\mathbf{1\,pt}]$$

cuyo polinomio característico es $p(\lambda) = \lambda^2 + 5\lambda + 2$. Sus raíces (valores propios de J) son ambas negativas [**1 pt**]. Por lo tanto, el origen es asintóticamente estable, y es un atractor [**1 pt**].

(ii) Sea $(x(t), y(t))$ una solución. Un cálculo directo muestra que la derivada de la fución de t,

$$E(x(t), y(t))$$

es constante. Eso significa que $E(x,t)$ es una constante del movimiento (función de Hamilton) [**1 pt**].

Observación: También es suficiente verificar que el sistema (4) se escribe en la forma

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial E}{\partial y}(x,y), \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial E}{\partial x}(x,y). \end{cases}$$

Claramente, $(0,0)$ es el único punto crítico del sistema y es también un punto crítico de la función $E(x,y)$. Además, el Hessiano correspondiente es igual a -1 [**1 pt**], de modo que es un punto silla para el sistema [**1 pt**].