PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
SEGUNDO SEMESTRE 2013

INTERROGACIÓN 2
CÁLCULO III ⋆ MAT1630

1. Determine los máximos y mínimos de la función $f(x, y, z) = 2x - y + z$ sujetos a la restricción $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ con $z \geq 0$.

2. *a*) (3pts.) Calcule el volumen limitado por las superficies.
$$x^2 + y^2 = a^2, \qquad az = 2a^2 + x^2 + y^2,$$
y el plano $z = 0$ para $a > 0$.

   b) (3pts.) Sea D la región del plano que se encuentra dentro del círculo $x^2 + y^2 = 2y$ pero fuera de $x^2 + y^2 = 1$. Calcule
$$\int_D \int \frac{dxdy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

3. *a*) (3pts.) Calcule la siguiente integral
$$\int_0^1 \int_{\arcsin(y)}^{\pi/2} \cos(x)\sqrt{1 + \cos^2(x)}dxdy.$$

   b) (3pts.) Sea $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $g(0) = 1$. Considere $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por
$$F(x, y) = \left(\int_x^y g(t)dt, \int_y^{x^2} g(t)dt \right).$$
Verifique que esta función admite inversa F^{-1} en una vecindad de $(0, 0)$. Determine la matriz Jacobiana de F^{-1} en el punto $(0, 0)$.

4. Considere $F(x, y, z) = z^3 + z(1 - x^2 + 2x^4 + y^2)$ y la correspondiente curva de nivel $F(x, y, z) = 8$.

   a) (1pt.) Sea (x_0, y_0, z_0) tal que $F(x_0, y_0, z_0) = 8$. Verifique que existe una función f definida en un entorno de (x_0, y_0) tal que $F(x, y, f(x, y)) = 8$ y además $f(x_0, y_0) = z_0$.

   b) (5pts.) Determine los puntos críticos del problema de extremar la función $z = f(x, y)$ sujeta a la restricción
$$8x^3y - 2xy = 0.$$

TIEMPO: 120 MINUTOS.

UNA SOLUCIÓN

1. **Problema 1:**

Determine los máximos y mínimos de la función $f(x, y, z) = x - y + z$ sujetos a la restricción $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ con $z \geq 0$.

Solucion :

Debemos buscar puntos criticos interiores, luego buscarlos en el interior de los bordes y finalmente en el los bordes de los bordes.

1) Puntos criticos interiores:

$$\nabla f(x, y, z) = (1, -1, 1)$$

que no se anula nunca por lo panto NO hay puntos criticos interiores

2) Puntos criticos en el borde:

El borde consiste de dos partes; la cascara de la semi esfera y el disco de la base.

Para la cascara de la esfera planteamos Lagrange.

$$(1, -1, 1) = (2\lambda x, 2\lambda y, 2\lambda z)$$

Luego

$$x = \frac{1}{2\lambda}$$
$$y = -\frac{1}{2\lambda}$$
$$z = \frac{1}{2\lambda}$$

Substituyendo en la ecuacion de la esfera obtenemos

$$\lambda = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$

y por lo tanto los puntos criticos

$$P_1 = (\frac{\sqrt{(3)}}{4}, -\frac{\sqrt{(3)}}{4}, \frac{\sqrt{(3)}}{4})$$

y

$$P_2 = (-\frac{\sqrt{(3)}}{4}, \frac{\sqrt{(3)}}{4}, -\frac{\sqrt{(3)}}{4})$$

La otra parte del borde, que consiste del disco $x^2 + y^2 \leq 1$ en el plano XY puede tratarse de varias maneras. Por ejemplo, en el disco la funcion f tiene la forma

$$f(x, y, 0) = x - y.$$

Como ahora

$$\nabla f(x,y,0)=(2,-1)$$

no hay extremos interiores en la cara.

3) El borde del borde:

Finalmente debemos analizar el borde del borde, es decir $x^2+y^2=1$, $z=0$. Parametrizando debemos extremar

$$h(t)=\cos(t)-\sin(t)$$

para $0\leq t\leq 2\pi$.

Derivando como en Calculo 1 tenemos

$$h'(t)=-\sin(t)-\cos(t)=0.$$

O sea

$$\tan(t)=-1.$$

O sea

$$t=-\frac{\pi}{4}$$

y

$$t=\frac{3\pi}{4}.$$

Asi tenemos los puntos criticos

$$P_3=(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0)$$

y

$$P_4=(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0).$$

Evaluando en los puntos criticos

$$f(P_1)=3\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$f(P_2)=-3\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$f(P_3)=\sqrt{2}$$

$$f(P_4)=-\sqrt{2}.$$

Por lo tanto el maximo es $3\frac{\sqrt{3}}{4}$ y el minimo es $-3\frac{\sqrt{3}}{4}$

Problema 2: a) Calcule el volumen limitado por las superficies.

$$x^2+y^2=a^2, \qquad az=2a^2+x^2+y^2,$$

y el plano $z = 0$ para $a > 0$.
b) Sea D la región del plano que se encuentra dentro del círculo $x^2 + y^2 = 2y$ pero fuera de $x^2 + y^2 = 1$. Calcule

$$\int_D \int \frac{dxdy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Solución: a) El volumen es igual a

$$V = \int_B \left(\int_0^{2a + \frac{x^2+y^2}{a}} dz \right) dxdy$$

donde $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 < a^2\}$. Emtonces

$$V = \int_B \left(2a + \frac{x^2 + y^2}{a} \right) dxdy.$$

[**1,5 pts**]
Pasando a coordenadas polares, obtenemos

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \left(2a + \frac{r^2}{a} \right) rdr.$$

[**1 pt**]
Calculando las integrales, obtenemos

$$V = \frac{5}{2}\pi a^3.$$

[**0,5 pts**]
b) Pasando a coordenadas polares, obtenemos

$$\int_D \int \frac{dxdy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \left(\int_1^{2\sin\varphi} dr \right) d\varphi.$$

[**2 pts**]
Calculando las integrales, obtenemos

$$\int_{\pi/6}^{5\pi/6} \left(\int_1^{2\sin\varphi} dr \right) d\varphi = 2\sqrt{3} - 2\pi/3.$$

[**1 pt**]

Problema 3: a) Calcule la siguiente integral

$$\int_0^1 \int_{\arcsin(y)}^{\pi/2} \cos(x)\sqrt{1 + \cos^2(x)} dxdy.$$

b) Sea $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $g(0) = 1$. Considere $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$F(x,y) = \left(\int_x^y g(t)dt, \int_y^{x^2} g(t)dt \right).$$

Demuestre que esta función admite inversa F^{-1} en una vecindad de $(0,0)$. Determine la matriz Jacobiana de F^{-1} en el punto $(0,0)$.
Solución: a) Tenemos

$$I := \int_0^1 \int_{\arcsin(y)}^{\pi/2} \cos(x)\sqrt{1+\cos^2(x)}dxdy = \int_\Omega \cos(x)\sqrt{1+\cos^2(x)}dxdy$$

donde

$$\Omega := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 < y < 1,\ \arcsin(y) < x < \pi/2\right\}.$$

[1 pt]
Como

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 < x < \pi/2,\ 0 < y < \sin(x)\right\},$$

tenemos

$$I = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\sin(x)} \cos(x)\sqrt{1+\cos^2(x)}dy \right) dx.$$

[1 pt]
Calculando las integrales, obtenemos

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin(x)\cos(x)\sqrt{1+\cos^2(x)}dx =$$

$$\int_0^1 t\sqrt{1+t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{1+s}\,ds = \frac{1}{3}(2^{3/2}-1).$$

[1 pt]
b) Sea $J_F(x,y)$ la matriz Jacobiana de F en el punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Tenemos

$$J_F(x,y) = \begin{pmatrix} -g(x) & g(y) \\ 2xg(x^2) & -g(y) \end{pmatrix}.$$

Entonces,

$$J_F(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

[1 pt]
Como $\det J_F(0,0) = 1 \neq 0$, la función F admite función inversa F^{-1} en vecindad de $(0,0)$.
[1 pt]
Sea $J_{F^{-1}}(x,y)$ la matriz Jacobiana de F^{-1} en el punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Entonces

$$J_{F^{-1}}(0,0) = (J_F(0,0))^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

[1 pt]

2. **Problema 4:** Considere $F(x,y,z) = z^3 + z(1 - x^2 + 2x^4 + y^2)$ y la correspondiente curva de nivel $F(x,y,z) = 8$.

   a) (1pt.) Sea (x_0, y_0, z_0) tal que $F(x_0, y_0, z_0) = 8$. Verifique que existe una función f definida en un entorno de (x_0, y_0) tal que $F(x, y, f(x,y)) = 8$ y además $f(x_0, y_0) = z_0$.

   b) (5pts.) Determine los puntos críticos del problema de extremar la función $z = f(x,y)$ sujeta a la restricción

$$8x^3y - 2xy = 0.$$

Solucion : El Teorema de la Función Implícita asegura que existirá la función pédida si $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial z} &= 3z^2 + (1 - x^2 + 2x^4 + y^2) \\ &= (1 - x^2)^2 + x^2 + x^4 + y^2 \end{aligned}$$

La última expresión es suma de términos positivos, por lo tanto es positiva para todo (x,y,z). Se concluye que $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ y en consecuencia existe f tal que $z = f(x,y)$.

En primer lugar notemos que

$$\begin{aligned} 3z^2 \cdot f_x + f_x(1 - x^2 + 2x^4 + y^2) + f \cdot (-2x + 8x^3) = 0 \\ 3z^2 \cdot f_y + f_y(1 - x^2 + 2x^4 + y^2) + f \cdot (2y) = 0. \end{aligned}$$

De donde

$$f_x = \frac{-f \cdot (-2x + 8x^3)}{F_z}, \qquad f_y = \frac{-2y}{F_z}.$$

Luego si $g(x,y) = 8x^3y - 2xy$ se tiene que $\nabla g(x,y) = (2y(12x^2 - 1), 8x^3 - 2x)$. Con lo cual, haciendo uso del método de los multiplicadores de Lagrange, se buscan determinar los puntos que satisfacen, para $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$,

$$\begin{aligned} \frac{-f(x,y) \cdot (-2x + 8x^3)}{F_z} &= \lambda \cdot 2y \cdot (12x^2 - 2) \\ \frac{-2 \cdot f(x,y) \cdot y}{F_z} &= \lambda(8x^3 - 2x) \\ y(8x^3 - 2x) &= 0. \end{aligned}$$

De la tercera ecuación se tiene que, o bien $y = 0$ o bien $2x(4x^2 - 1) = 0$. En el primer caso, reemplazamos en las dos primeras ecuaciones para obtener como solución $x = 0, x = \pm\frac{1}{2}$, notemos que no puede suceder que $f(x,y) = 0$ ya que $F(x, y, f(x,y)) = 8$.

En el segundo caso se encuentran por solución al punto $(0,0)$. En resumen se tiene que los puntos buscados serán

$$(0,0), \qquad \left(\pm\frac{1}{2},0\right).$$