Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Ciencias Económicas y Administrativas

Primer Semestre 2015

Curso	:	**Probabilidad y Estadística**
Sigla	:	**EAS200a**
Profesores	:	**Rafael Águila (Sec 01), Osvaldo Ferreiro (Sec 02), Victor Correa (Sec 03) y Ricardo Olea (Sec 04)**

Pauta Control 3

Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad dada por:

$$f_X(x) = \frac{k}{x}, \quad 0.5 \leq x \leq 2.0$$

con $k > 0$.

(a) **[1.0 Ptos.]** Determine el valor de la constante k.

(b) **[4.0 Ptos.]** Determine la función de densidad de la variable aleatoria $Y = |\ln(X)|$.

(c) **[1.0 Ptos.]** ¿Cuál es el soporte (o recorrido) de la variable aleatoria Y definida en (b)?

Solución:

(a) Tenemos que

$$\textbf{[0.5 Ptos.]} \quad \int_{0.5}^{2} \frac{k}{x}\,dx = k\,\ln(2) - k\,\ln(0.5) = 2\,k\,\ln(2) = 1 \rightarrow k = \frac{1}{2\,\ln(2)} \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

(b) **Alternativa 1**: Tenemos que

$$\begin{aligned}
F_Y(y) &= P(Y \leq y) \quad \textbf{[0.3 Ptos.]} \\
&= P(|\ln(X)| \leq y) \quad \textbf{[0.3 Ptos.]} \\
&= P\left(-y \leq \ln(X) \leq y\right) \quad \textbf{[0.3 Ptos.]} \\
&= P\left(e^{-y} \leq X \leq e^{y}\right) \quad \textbf{[0.3 Ptos.]} \\
&= \int_{e^{-y}}^{e^{y}} \frac{1}{2\,x\,\ln(2)}\,dx \quad \textbf{[0.3 Ptos.]} \\
&= \frac{2\,y}{2\,\ln(2)} \quad \textbf{[0.3 Ptos.]} \\
&= \frac{y}{\ln(2)} \quad \textbf{[0.2 Ptos.]}
\end{aligned}$$

Luego

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}\,F_Y(y) = \frac{1}{\ln(2)} \quad \textbf{[2.0 Ptos.]}$$

Alternativa 2: Aplicando Teorema de cambio de variable con dos raíces

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= f_X\left(e^{-y}\right)\,\left|e^{-y}\right| + f_X\left(e^{y}\right)\,\left|e^{y}\right| \quad \textbf{[1.0 Ptos.]} \\
&= \frac{e^{y}}{2\,\ln(2)}\,e^{-y} + \frac{e^{-y}}{2\,\ln(2)}\,e^{y} \quad \textbf{[1.0 Ptos.]} \\
&= \frac{1}{\ln(2)} \quad \textbf{[2.0 Ptos.]}
\end{aligned}$$

(c) $y \in [0,\,\ln(2)]$ **[1.0 Ptos.]**

+ 1 Punto Base