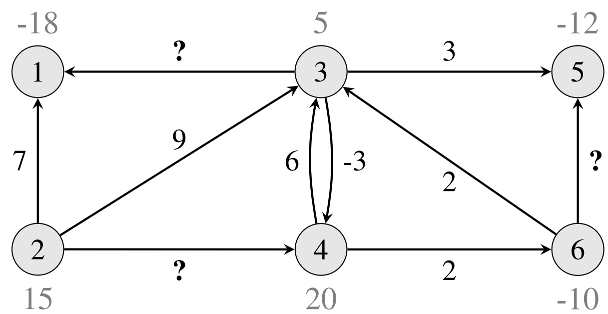
INTERROGACIÓN 2
FLUJO EN REDES - ICT2233

Pregunta 1 (20 puntos)

Considere el siguiente Problema de Flujo en redes a Costo Mínimo (PFCM) cuyos valores de costo por unidad de flujo y oferta neta están detallados en cada arco y nodo del grafo, respectivamente. Lamentablemente, se han perdido 3 valores de costo en arcos los cuales están identificados con el signo **?**.



Suponga que usted conoce el siguiente vector de potenciales asociado a un único árbol base factible:

$$\pi' = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6) = (2240, 2233, 2241, 2236, 2242, 2238)$$

Respuesta: Antes de responder, notar que se puede restar 2233 a cada componente de π' y mantener su condición de potencial. Así, queda:

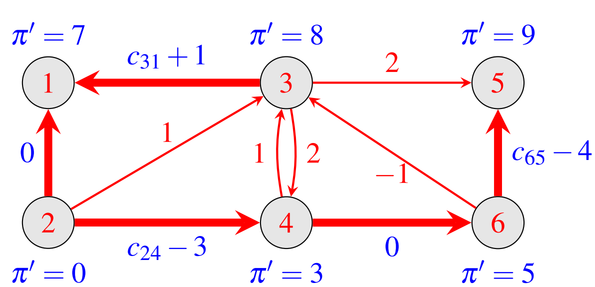
$$\pi' = (7, 0, 8, 3, 9, 5)$$

(a) (5p) ¿Es posible que esta solución base sea óptima? Justifique su respuesta.

Respuesta: La diferencia de potenciales para el arco $(6,3)$ es $\pi'_3 - \pi'_6 = 3$ y su costo es 2. Así el costo reducido es $r_{23} = 2 - 3 = -1$. Esto implica que esta base no cumple condiciones de óptimalidad.

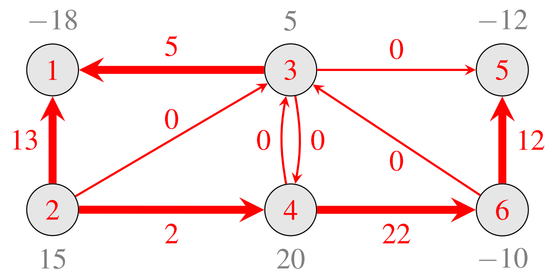
(b) (5p) Obtenga los flujos sobre cada arco en dicha base asociada al vector π'. Justifique su respuesta.

Respuesta: Para identificar la base, se calculan los costos reducidos en cada arco con la información disponible en la siguiente figura:



De los valores obtenidos, claramente se obtiene que: $c_{31} = -1$, $c_{24} = 3$, $c_{65} = 4$, pues hay dos arcos con costo reducido cero y se requieren al menos un árbol de 5 arcos para formar la base.

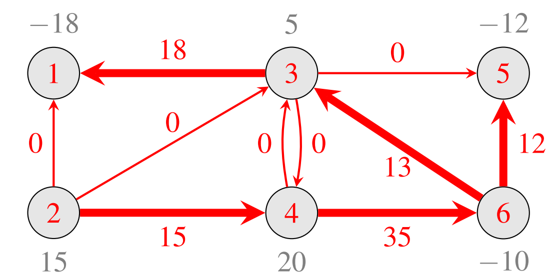
El vector de flujos se puede obtener desde el vector de ofertas verificando las restricciones de balance soble la base:



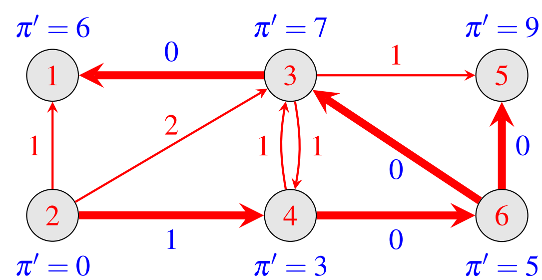
(c) (10p) Encuentre **todas** las soluciones óptimas de esta instancia de PFCM. Justifique su método de búsqueda.

Respuesta: Se debe iterar. Hay una opción: ingresar a la base x_{63} que puede subir hasta 13 unidades manteniendo el vector de flujos factible (en ese momento sale x_{21} de la base).

El nuevo vector de flujos es:



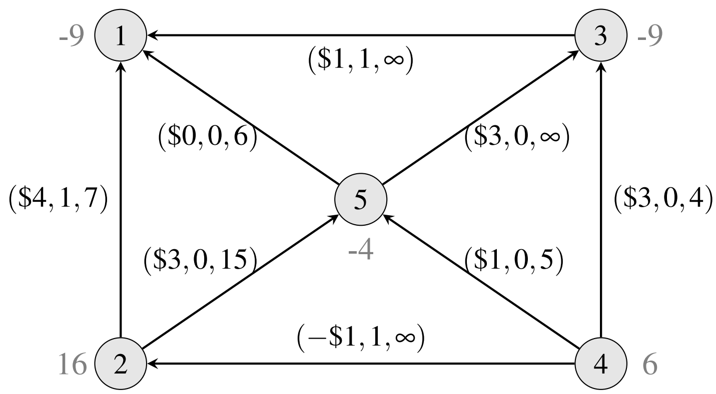
Luego, calculamos un vector de potenciales y costos reducidos:



Esto certifica la solución anterior es óptima y única.

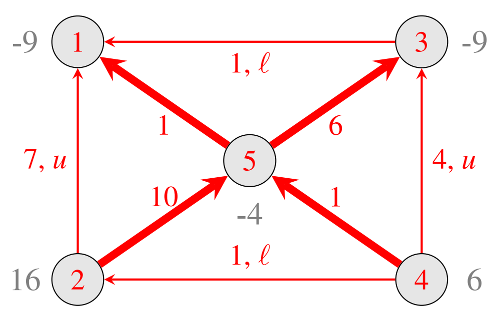
Pregunta 2 (25 puntos)

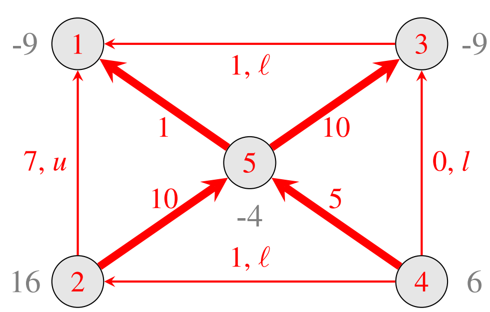
Considere la siguiente instancia de un PFCM sobre un grafo $G = (N,A)$ con cotas de flujo en arco. En cada nodo se detalla la información de oferta neta y en cada arco $a \in A$ se detalla un vector $(\$c_a, \ell_a, u_a)$ que posee información de costo por unidad de flujo ($\$c_a$), cota mínima de flujo (ℓ_a) y capacidad máxima de flujo (u_a).



(a) (5p) Construya una solución básica factible en donde todos los arcos horizontales y verticales esten fuera de base. ¿Cuáles serían las variables básicas, en *upper* y en *lower*? ¿Cuanto sería el flujo en cada arco?

Respuesta: Hay dos posibles configuraciones de base que cumplen lo solicitado: $B_1 = \{(2,5),(5,1),(5,3),(4,5)\}$, $L_1 = \{(4,2),(3,1)\}$ y $U_1 = \{(4,3),(2,1)\}$. $B_2 = \{(2,5),(5,1),(5,3),(4,5)\}$, $L_2 = \{(4,2),(4,3),(3,1)\}$ y $U_2 = \{(2,1)\}$.Este es su flujo respectivamente:

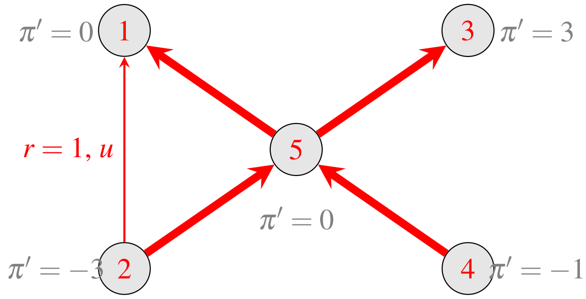




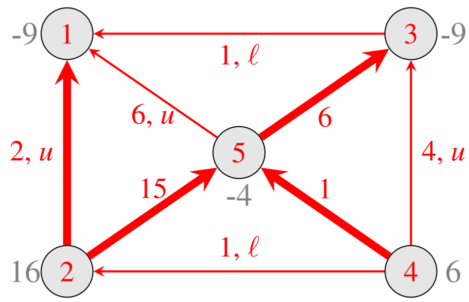
(b) (10p) Obtenga la solución óptima y justifique por qué lo es.

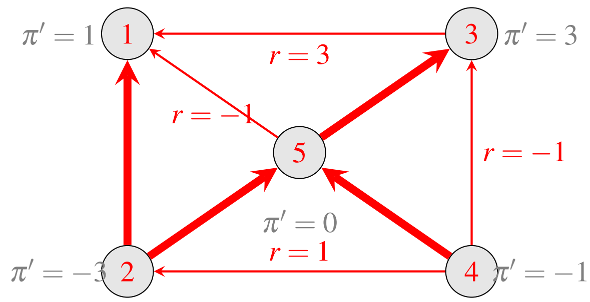
Respuesta:

Calculamos potenciales y se tiene que $r_{2,1} = 1$ estando en *upper*. Esto implica que hay incentivo a bajar ese flujo.



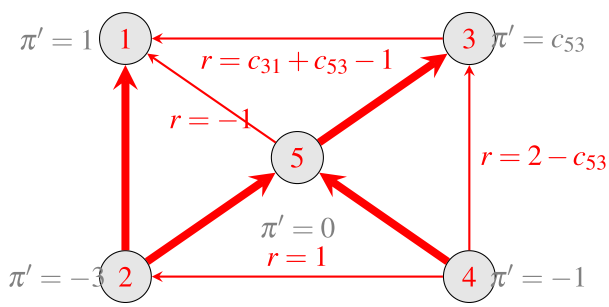
Lo máximo que puede bajar x_{21} es $\Delta = 5$. En ese momento, se activan las restricciones de cota de x_{25} y x_{51} (hay degenerancia). Si escogemos como base a: $B = \{(2,5),(2,1),(5,3),(4,5)\}$, $L = \{(4,2),(3,1)\}$ y $U = \{(4,3),(5,1)\}$ el flujo asociado es el siguiente:





(c) (10p) Obtenga el conjunto de vectores de valores de costo para los arcos $(3,1)$ y $(5,3)$ que mantiene optimalidad de esta solución, es decir, todos los puntos $(c_{31}, c_{53}) \in \mathbb{R}^2$ que mantienen la actual configuración de base.

Respuesta: Debemos recalcular las condiciones de optimalidad en función de las incognitas: c_{31},c_{53}



Del análisis, se desprende que las condiciones son: $2 - c_{53} \leq 0$ y $c_{31} + c_{53} - 1 \geq 0$. Es decir, el espacio de costos debe ser:

$$\{(c_{31}, c_{53}) \in \mathbb{R}^2 : c_{53} \leq 2, c_{31} + c_{53} \geq 1\}$$

Pregunta 3 (15 puntos)

Considere un grafo completo y dirigido de n nodos y costos c_a en cada arco a. El Problema del Vendedor Viajero (PVV) consiste en identificar un ciclo Hamiltoniano dirigido $(i_1, i_2, \ldots, i_n, i_{n+1} = i_1)$ de mínimo costo $\sum_{k=1}^{n} c_{i_k, i_{k+1}}$.

Hoy, no existe un algoritmo que optimice el PVV en tiempo de ejecución polinomial (el algoritmo existente de menor complejidad es $O(n^2 \cdot 2^n)$). Por ello, se han creado heurísticas, es decir, algoritmos que identifican "buenas" soluciones sin garantía de optimalidad.

Una heurística se llama *Cheapest Insertion* (CI) o inserción más barata. Este algoritmo inicia identificando un ciclo de dos nodos (i, j, i) de menor costo. Luego, itera insertando en el ciclo un nodo a la vez hasta terminar con un ciclo Hamiltoniano sobre el grafo de n nodos.

En la iteración $p \geq 1$, el algoritmo comienza un ciclo de $p+1$ nodos diferentes $(i_1, i_2, \ldots, i_p, i_{p+1}, i_{p+2} = i_1)$ y un conjunto U de nodos no incluidos en el ciclo. Luego, escoge al nodo $k \in U$ que minimiza el costo adicional generado al insertarlo en el ciclo. Es decir, escoge el nodo que minimiza $(c_{i_h,k} + c_{k,i_{h+1}} - c_{i_h,i_{h+1}})$ en la mejor posición $h \in \{1, \ldots, p+1\}$ posible de inserción sobre los nodos en U. Después, elimina el nodo k de U, lo inserta en la posición identificada y avanza a la siguiente iteración si el ciclo no ha cubierto n nodos diferentes.

¿Qué complejidad de tiempo de ejecución posee la heurística CI en función de n? Justifique.

Respuesta: Es $O(n^3)$.

- ◇ Seleccionar el ciclo de dos nodos de menor costo es $O(n^2)$
- ◇ Luego se realizan $n-2$ iteraciones:
    - En la iteración p se busca un nodo k sobre un conjunto de $n-p-1$ nodos en U y existen $p+1$ inserciones posibles a evaluar para cada nodo k.

Lo anterior implica que la complejidad del algoritmo es: $O(n^2) + \sum_{p=1}^{n-2} O((n-p-1)(p+1)) = O(n^3)$