Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas
ICS2123 – Modelos Estocásticos
Profesores Alejandro Cataldo
Segundo Semestre 2018

Control 5

Instrucciones

- Poner nombre en cada hoja que utilice.
- No se permite calculadora ni apuntes de ningún tipo.
- Justifique adecuadamente todas sus respuestas.
- No se puede hacer preguntas. Si hay un error, explique por qué hay un error. Si hay algo ambiguo, explique por qué hay algo ambiguo y determine un supuesto razonable para poder responder.
- Puntaje: hasta 3 décimas en la nota final de la Interrogación 2 si es que la respuesta está completamente correcta.
- Tiempo: 35 minutos.

Mercado laboral

Considere un mercado laboral que opera de la forma que se describe a continuación. Cada mes un trabajador puede ya sea conservar o perder su actual empleo. La probabilidad que conserve su trabajo depende sólo del número de meses que lleva en este trabajo, siendo p_1 la probabilidad que un trabajador que acaba de terminar su primer mes de trabajo conserve su empleo para el mes siguiente, p_2 la probabilidad que un trabajador que lleva 2 meses empleado conserve su trabajo un mes más y p_3 la probabilidad que un trabajador que lleva 3 o más meses empleado conserve su trabajo por un mes más. Un trabajador que está desempleado en un mes dado seguirá en esa condición el mes siguiente con probabilidad p_0, y conseguirá empleo con probabilidad $1 - p_0$. Cuando un trabajador pierde un empleo pasará al menos 1 mes desempleado.

El sueldo de un trabajador es de w_1 [$/mes] en su primer mes de trabajo en un empleo, w_2 [$/mes] en su segundo mes de trabajo y w_3 [$/mes] en el tercero o cualquier mes posterior. Los trabajadores deben destinar cada mes una fracción f de su sueldo a pagar un seguro de desempleo administrado por el estado. Cuando un trabajador está desempleado el estado le proporciona un ingreso de H [$/mes].

(a) Modele la situación laboral de un trabajador (si está empleado o desempleado) como una Cadena de Markov en Tiempo Discreto. Para esto, dibujo un grafo que pueda explicitar claramente esto.

(b) Justifique la existencia de una ley de probabilidades estacionarias y distribución límite. Indique cómo calcularlas (no es necesario que las calcule).

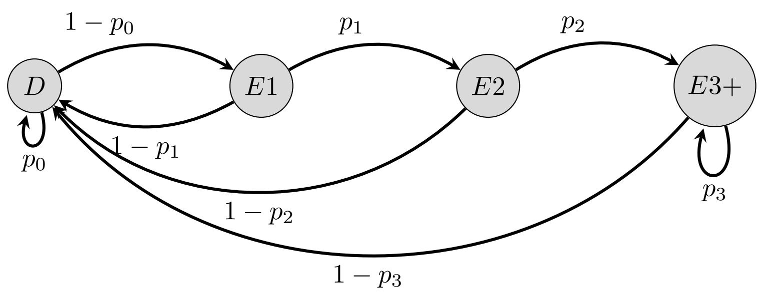
Asumiendo que conoce el valor de las probabilidades estacionarias, y que estas son π_i, responda:

(c) ¿Cuánto tiempo pasa, en promedio, desde que una persona pierde su trabajo hasta que consigue uno nuevo?

(d) Calcule cuál debe ser el valor de f para que el estado pueda, en promedio, financiar los beneficios que otorga a quienes están desempleados con los pagos realizados por los trabajadores por concepto de seguro de desempleo (responda en función de las probabilidades estacionarias y los demás parámetros del problema).

Pauta Control 5

(a) Sea $Xn \in D, E1, E2, E3+$ el estado de empleo al final de cada mes. Donde D es desempleado, $E1$ corresponde al primer mes de empleo, $E2$ corresponde al segundo mes de empleo y $E3+$ al tercer o más meses de empleo.



(b) A partir del grafo de (a) se puede ver que existe una única clase recurrente positiva aperiódica y hay un número finito de estados, por lo que la cadena es ergódica y existe distribución estacionaria.

La distribución estacionaria se puede calcular resolviendo el sistema:

$$\begin{aligned}
\pi_D &= p_0\pi_D + (1-p_1)\pi_{E1} + (1-p_2)\pi_{E2} + (1-p_3)\pi_{E3} \\
\pi_{E1} &= (1-p_0)\pi_D \\
\pi_{E2} &= p_1\pi_{E1} \\
\pi_{E3} &= p_2\pi_{E2} + p_3\pi_{E3} \\
\pi_D + \pi_{E1} + \pi_{E2} + \pi_{E3} &= 1
\end{aligned}$$

(c) Nos piden $E[T(D, E1)]$:

$$E[T(D,E1)] = 1 + p_0 \cdot E[T(D,E1)] = \frac{1}{1-p_0}$$

(d) El valor de f es:

$$f = \frac{H\pi_D}{w_1\pi_{E1} + w_2\pi_{E2} + w_3\pi_{E3}}$$