

# Interrogación 3

## Cálculo III – MAT1630

el 29 de octubre de 2013

### SOLUCIONES

#### **Problema 1.**

- a) Calcule la integral

$$\iiint_{\Omega} \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$$

donde  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  es el dominio acotado limitado por los planos definidos por las ecuaciones siguientes  $x + y + z = 1$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ .

- b) Calcule  $F'(t)$  si

$$F(t) := \iiint_{U_t} f(x^2 + y^2 + z^2) dxdydz$$

donde  $U_t := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid t^2 < x^2 + y^2 + z^2 < t\}$ ,  $t \in (0, 1)$ , y  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua.

*Solución:* a) Tenemos

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3} &= \int_0^1 \left[ \int_0^{1-x} \left( \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3} \right) dy \right] dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^1 \left[ \int_0^{1-x} (2^{-2} - (1+x+y)^{-2}) dy \right] dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^1 [2^{-2}(1-x) + 2^{-1} - (1+x)^{-1}] dx \\ &= -\frac{5}{16} + \frac{1}{2} \ln 2. \end{aligned}$$

*Solución:* b) Pasando a coordenadas esféricas y calculando las integrales con respecto a  $\varphi$  y  $\theta$ , obtenemos

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_t^{\sqrt{t}} f(r^2) r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\varphi \\ &= 4\pi \int_t^{\sqrt{t}} f(r^2) r^2 dr. \end{aligned}$$

Por el teorema fundamental del cálculo,

$$F'(t) = 2\pi \left( \sqrt{t}f(t) - 2t^2 f(t^2) \right).$$

**Problema 2.** Calcular el trabajo realizado por la fuerza

$$\vec{F}(x, y) = \left( x - \frac{y}{x^2 + y^2} \right) \vec{i} + \left( \frac{x}{x^2 + y^2} - y \right) \vec{j}$$

al ir desde el punto  $(1, 0)$  al punto  $(1 + 2\pi, 0)$  a lo largo de la curva

$$\vec{r}(t) = (1 + t \cos(t), t \sin(t)).$$

*Solucion:* Pongamos  $P = (x - \frac{y}{x^2 + y^2})$  y  $Q = (\frac{x}{x^2 + y^2} - y)$ . Se comprueba que  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$  en  $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$ . Consideremos los arcos siguientes orientados según su parametrización:

$$C : \vec{r}(t) = (1 + t \cos(t), t \sin(t)) \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

$$C_1 : \vec{r}_1(t) = (t, 0) \quad 1 \leq t \leq 1 + 2\pi.$$

$$C_2 : \vec{r}_2(t) = \frac{1}{2}(\cos(t), \sin(t)) \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Aplicando el Teorema de Green a la región encerrada por la unión de estos arcos y tomando en cuenta el sentido en que son recorridos se tiene

$$\int_C = \int_{C_1} + \int_{C_2}$$

Las dos últimas integrales se calculan directamente obteniéndose

$$\int_{C_1} = \frac{1}{2}((1 + 2\pi)^2 - 1) = 2\pi(1 + \pi), \quad \int_{C_2} = 2\pi.$$

Consecuentemente,  $\int_C = 2\pi(1 + \pi) + 2\pi = 2\pi(2 + \pi)$ .

**Problema 3.**

a) Calcule la integral

$$\int_C e^{-(x^2-y^2)} (\cos(2xy) dx + \sin(2xy) dy)$$

donde  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = R^2\}$ ,  $R > 0$ .

b) Encuentre un campo vectorial

$$\vec{F} = P \vec{i} + Q \vec{j}$$

tal que para todo camino  $C$  seccionalmente  $\mathcal{C}^1$  que va de  $(1, 0)$  a  $(-1, 1)$  se tenga que

$$\int_C (P dx + Q dy) = 25.$$

*Solución:* a) El campo  $\vec{F}(x, y) = (e^{-(x^2-y^2)} \cos(2xy), e^{-(x^2-y^2)} \sin(2xy))$  es de clase  $C^1$  en todo  $\mathbb{R}^2$ , que claramente es convexo, por lo tanto basta probar que

$$\frac{\partial}{\partial y} e^{-(x^2-y^2)} \cos(2xy) = \frac{\partial}{\partial x} e^{-(x^2-y^2)} \sin(2xy)$$

para determinar que es conservativo.

$$\frac{\partial}{\partial y} e^{-(x^2-y^2)} \cos(2xy) = 2y e^{-(x^2-y^2)} \cos(2xy) - 2x e^{-(x^2-y^2)} \sin(2xy)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} e^{-(x^2-y^2)} \sin(2xy) = -2x e^{-(x^2-y^2)} \sin(2xy) + 2y e^{-(x^2-y^2)} \cos(2xy)$$

Como el campo es conservativo y  $C$  es una curva cerrada de clase  $C^1$ , entonces

$$\int_C e^{-(x^2-y^2)} (\cos(2xy) dx + \sin(2xy) dy) = 0.$$

b) Basta encontrar una función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $f(-1, 1) - f(1, 0) = 25$  y tomar  $F = \text{grad}(f)$ . Una posibilidad es que  $f(x, y)$  sea de la forma  $ax + by$ .

Por encontrar  $a$  y  $b$  tales que  $-a + b - a = 25$ , por ejemplo  $a = -5$  y  $b = 15$ .

Si  $\vec{F}(x, y) = (-5, 15) = \text{grad}(f)$ , entonces  $\vec{F}$  es conservativo y para todo camino  $C$  seccionalmente  $C^1$  que va de  $(1, 0)$  a  $(-1, 1)$  se tiene que

$$\int_C (-5dx + 15dy) = f(-1, 1) - f(1, 0) = 25.$$

#### Problema 4.

- a) Sea  $C \subset \mathbb{R}^2$  curva cerrada, simple y suave. Sea  $\vec{p} \in \mathbb{R}^2$  un punto fijo tal que  $\vec{p} \notin C$ . Calcule la integral

$$\int_C \frac{(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \hat{n}}{\|\vec{x} - \vec{p}\|^2} ds$$

donde  $\hat{n}$  es el vector unitario normal exterior a  $C$ .

- b) Sea  $C \subset \mathbb{R}^2$  curva cerrada, simple y suave que encierra una región de área 3. Calcule la integral  $\int_C \vec{x} \cdot \hat{n} ds$  donde  $\hat{n}$  es el vector unitario normal exterior a  $C$ .

*Solución:* a) Tenemos

$$\frac{\vec{x} - \vec{p}}{\|\vec{x} - \vec{p}\|^2} \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{p}\}), \quad \text{div} \left( \frac{\vec{x} - \vec{p}}{\|\vec{x} - \vec{p}\|^2} \right) = 0, \quad \vec{x} \neq \vec{p}.$$

Sea  $S$  el dominio abierto encerrado por  $C$ . Supongamos que  $\vec{p} \notin S$ . Entonces

$$\int_C \frac{(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \hat{n}}{\|\vec{x} - \vec{p}\|^2} ds = \iint_S \text{div} \left( \frac{\vec{x} - \vec{p}}{\|\vec{x} - \vec{p}\|^2} \right) dx dy = 0,$$

Supongamos que  $\vec{p} \in S$ . Sean  $B$  circulo centrado en  $\vec{p}$  tal que  $\overline{B} \subset S$ ,  $\nu$  el vector unitario normal exterior a  $\partial B$ . Tenemos

$$\int_C \frac{(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \hat{n}}{\|\vec{x} - \vec{p}\|^2} ds - \int_{\partial B} \frac{(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \nu}{\|\vec{x} - \vec{p}\|^2} ds = \int_{S \setminus B} \operatorname{div} \left( \frac{\vec{x} - \vec{p}}{\|\vec{x} - \vec{p}\|^2} \right) dx dy = 0.$$

Pasando a coordenadas polares centradas en  $\vec{p}$ , obtenemos

$$\int_{\partial B} \frac{(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \nu}{\|\vec{x} - \vec{p}\|^2} ds = 2\pi.$$

Como resultado,  $\int_C \frac{(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \hat{n}}{\|\vec{x} - \vec{p}\|^2} ds = 2\pi$  si  $\vec{p} \in S$ .

b) Sea  $S$  la región encerrada por  $C$ . Tenemos

$$\int_C \vec{x} \cdot \hat{n} ds = \iint_S \operatorname{div} \vec{x} dx dy = 2\operatorname{Area}(S) = 6.$$