



## Taller 13

### Cuerpo rígido

#### Problema 1

Determine los momentos de inercia de los siguientes cuerpos con respecto al punto  $O$ .

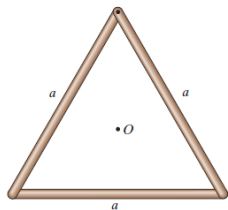


Figura 1: Cuerpo A

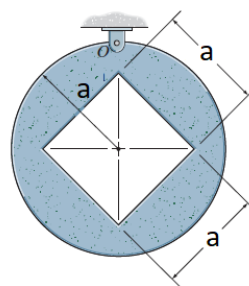


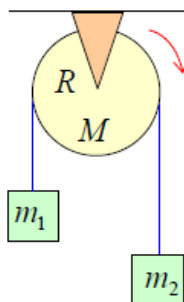
Figura 2: Cuerpo B

#### Problema 2

Se tiene una polea de masa  $M$ , de la que cuelga una cuerda de la que cuelgan masas  $m_1 = m$  y  $m_2 = 2m$ . La cuerda no desliza con respecto a la polea.

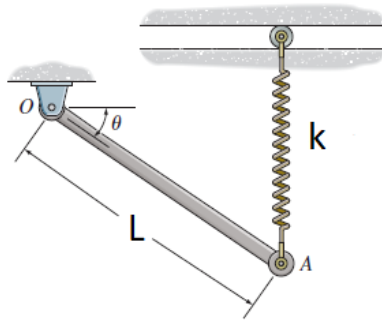
Se pide determinar:

- La aceleración angular  $\alpha$  de la polea.
- Las tensiones en las cuerdas. ¿Son iguales? ¿Por qué?



### Problema 3

La barra  $\overline{OA}$  de homogénea de masa  $M$  parte desde el reposo en  $\theta = 0^\circ$ . Asuma que el largo natural del resorte es cuando  $\theta = 0^\circ$ . Determine la velocidad angular de la barra y la velocidad en el punto  $A$  cuando  $\theta = 45^\circ$ .

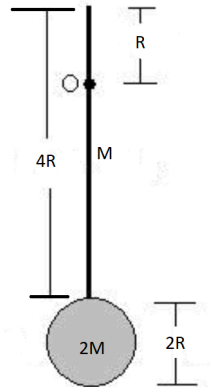


### Problema 4

El péndulo de la imagen está compuesto por una barra de masa  $M$  y longitud  $4R$  que en un extremo tiene pegado un disco macizo de radio  $R$  y masa  $2M$ .

Se pide determinar:

- La posición del centro de masa.
- El momento de inercia con respecto a al punto  $O$ .
- El péndulo se desvía  $60^\circ$  desde la posición de equilibrio. Determine la velocidad angular de rotación cuando pasa por la posición de equilibrio.



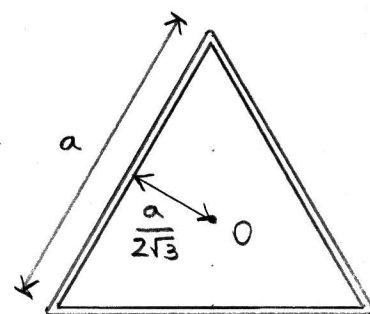
• Problema 1-a

Si cada barra tiene masa  $m_b$ , entonces la inercia de una barra respecto al punto O es:

$$I_0 = I_G + m_b \cdot d^2$$

$$I_0 = \frac{1}{12} m_b a^2 + m_b \cdot \left(\frac{a}{2\sqrt{3}}\right)^2$$

$$I_0 = \frac{1}{6} m_b a^2$$



Como el cuerpo tiene 3 barras, la masa total es:  $m_T = 3 m_b$ . La inercia total del cuerpo es:

$$I_T = 3 I_0 = \frac{1}{2} m_b a^2 \longrightarrow I_T = \frac{1}{6} m_T a^2 //$$

• Problema 1-b

La inercia de un disco o cilindro sólido que gira en su centro de masa es:

$$I_c = \frac{1}{2} m_c \cdot r_c^2$$

La inercia de un rectángulo de lados "a" y "b" que gira sobre su centro de masa es:

$$I_r = \frac{1}{12} m_r (a^2 + b^2)$$

En este caso calculamos la inercia del disco respecto al punto O, y le restamos la inercia del cuadrado respecto al mismo punto O.

Asumiendo una densidad uniforme " $\rho$ ", y un espesor constante " $t$ ", entonces:

$$m_c = \rho \cdot t \cdot (\pi a^2)$$

y

$$m_r = \rho \cdot t \cdot (a^2)$$

$$I_c = \frac{1}{2} m_c a^2 + m_c \cdot a^2$$

y

$$I_r = \frac{1}{12} m_r (a^2 + a^2) + m_r \cdot a^2$$

La masa total del cuerpo:  $m_T = m_c - m_r = \rho \cdot t \cdot a^2 (\pi - 1)$

La inercia total del cuerpo es:

$$I_T = I_c + I_r = \frac{3}{2} m_c a^2 + \frac{7}{6} m_r a^2 = \frac{3}{2} \pi \rho \cdot t \cdot a^4 + \frac{7}{6} \rho \cdot t \cdot a^4$$

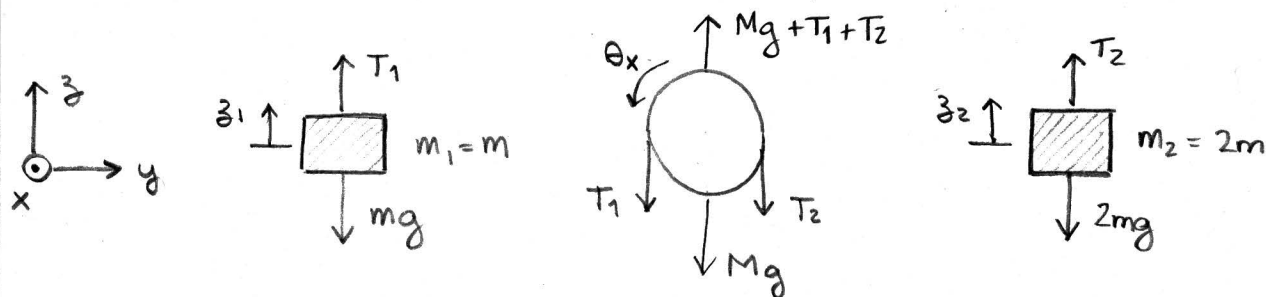
$$I_T = \frac{9\pi + 7}{6} \rho \cdot t \cdot a^4$$

Factorizando  $m_T$  de la expresión:

$$I_T = \frac{9\pi + 7}{6(\pi - 1)} m_T \cdot a^2 //$$

• Problema 2

Haciendo un DEL de todos los cuerpos por separado:



Usando la 2ª Ley de Newton en todos los cuerpos:

$$\begin{aligned} \sum F_z (\text{masa 1}) : & \quad -mg + T_1 = m \ddot{z}_1 \\ \sum F_z (\text{masa 2}) : & \quad -2mg + T_2 = 2m \ddot{z}_2 \\ \sum M_x (\text{polea}) : & \quad T_1 \cdot R - T_2 \cdot R = I \ddot{\theta} \quad \text{con } I = \frac{1}{2} MR^2 \end{aligned}$$

Además, tenemos una condición de ligadura entre  $\ddot{z}_1$ ,  $\ddot{z}_2$  y  $\ddot{\theta}$

$$\ddot{z}_1 = -\ddot{z}_2 \quad \rightarrow \quad \ddot{z}_1 = -\ddot{z}_2$$

$$\ddot{z}_1 = -\ddot{\theta} \cdot R \quad \rightarrow \quad \ddot{z}_1 = -\ddot{\theta} \cdot R$$

Tenemos 5 ecuaciones y 5 incógnitas ( $T_1, T_2, \ddot{z}_1, \ddot{z}_2, \ddot{\theta}$ ); cuya solución es:

$$T_1 = \frac{M+8m}{M+6m} (mg) > mg$$

$$T_2 = \frac{M+4m}{M+6m} (2mg) < 2mg$$

$$\ddot{\theta} = \alpha = -\frac{2m}{M+6m} \cdot \frac{g}{R}$$

$$\ddot{z}_1 = \frac{2m}{M+6m} \cdot g$$

$$\ddot{z}_2 = -\frac{2m}{M+6m} \cdot g$$

La aceleración angular de la polea es  $-\frac{2m}{M+6m} \cdot \frac{g}{R}$ ; es decir, es una aceleración en el sentido del reloj.

Las tensiones en las cuerdas no son iguales. Como la cuerda no desliza sobre la polea, se desarrolla una fuerza de roce (interna) en el manto de la polea que puede hacer variar la tensión de un lado a otro de la polea. Debido a ello, la cuerda se comporta como 2 cuerdas independientes fijadas al manto de la polea.

• Problema 3

La inercia de la barra con respecto a su C.M. es:

$$I_{G-\text{barra}} = \frac{1}{12} ML^2$$

Su inercia respecto a un giro en el punto O (extremo de la barra) es:

$$I_0 = I_{G\text{-barra}} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\right) ML^2 = \frac{1}{3} ML^2$$

Usaremos conservación de energía para determinar la velocidad angular  $\omega$ :

$$V_1 = 0$$

y

$$T_1 = 0$$

La energía potencial gravitatoria se calcula con respecto al C.M. de la barra; a una distancia  $\frac{L}{2}$  del pivote:

$$V_{2G} = Mgh = Mg\left(-\frac{L}{2} \sin 45\right) = -\frac{1}{2\sqrt{2}} MgL$$

La energía potencial elástica se calcula con el descenso vertical del extremo de la barra:

$$V_{2E} = \frac{1}{2} k \delta^2 = \frac{1}{2} k (L \sin 45)^2 = \frac{1}{2} k \frac{L^2}{2} = \frac{1}{4} k L^2$$

La energía cinética  $T_2$  es:

$$T_2 = \frac{1}{2} I_0 \omega^2 = \frac{1}{6} ML^2 \omega^2$$

Finalmente: 
$$0 = -\frac{1}{2\sqrt{2}} MgL + \frac{1}{4} k L^2 + \frac{1}{6} ML^2 \omega^2$$

$$\omega^2 = \frac{3}{2} \left( \sqrt{2} \frac{g}{L} - \frac{k}{M} \right) = \frac{3}{2ML} (\sqrt{2} Mg - kL)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3}{2ML} (\sqrt{2} Mg - kL)}$$

\* Notar que es necesario que  $\sqrt{2} Mg > kL$ : si el resorte es muy rígido, el peso no vencerá al resorte y la barra no descenderá.

#### • Problema 4

Los centros de masa de la barra y disco medido desde el pivote O es:

$$\bar{r}_b = R$$

y

$$\bar{r}_d = 4R$$

El centro de masa del sistema completo está en:

$$\bar{r} = \frac{\bar{r}_b \cdot m_b + \bar{r}_d \cdot m_d}{m_b + m_d} = \frac{(R)(M) + (4R)(2M)}{M + 2M}$$

$$\bar{r} = \frac{9RM}{3M} = 3R //$$

La inercia de la barra y disco con respecto a sus c.m. respectivos es:

$$I_{G\text{-barra}} = \frac{1}{12} M (4R)^2 = \frac{4}{3} MR^2$$

$$I_{G\text{-disco}} = \frac{1}{2} MR^2$$

La inercia del sistema completo respecto al pivote O es:

$$I_O = I_{G\text{-barra}} + m_b \cdot \bar{r}_b^2 + I_{G\text{-disco}} + m_d \cdot \bar{r}_d^2$$

$$I_O = \frac{4}{3} MR^2 + MR^2 + \frac{1}{2} MR^2 + 32 MR^2 = \frac{209}{6} MR^2 //$$

Usando conservación de energía:

$$V_1 = (M+2M) \cdot g \cdot h = (M+2M) \cdot g [R \cdot (1 - \cos 60^\circ)] = \frac{9}{2} MRg$$

$$T_1 = 0$$

$$V_2 = 0$$

$$T_2 = \frac{1}{2} I_O \cdot \omega^2$$

Finalmente:

$$V_1 + T_1 = V_2 + T_2$$

$$\frac{9}{2} MRg = \frac{1}{2} \left( \frac{209}{6} MR^2 \right) \omega^2$$

$$\omega^2 = \frac{54}{209} \cdot \frac{g}{R}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{54}{209} \frac{g}{R}} //$$