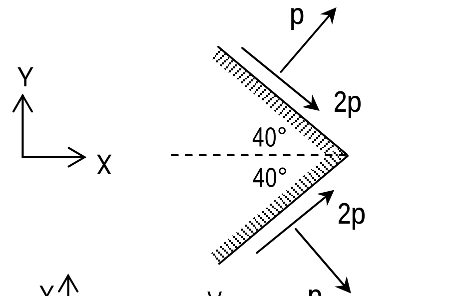
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Estructural y Geotécnica

ICE1302 – MECÁNICA DE SÓLIDOS
Ayudantía 5
Lunes 6 de abril de 2009.

Problema 1

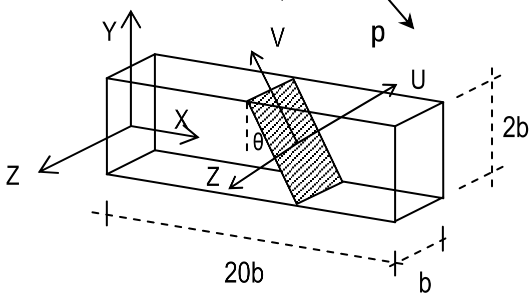
Se tiene el siguiente estado de tensiones en dos planos de un punto material. Calcule el estado de tensiones en los ejes X-Y



Problema 2

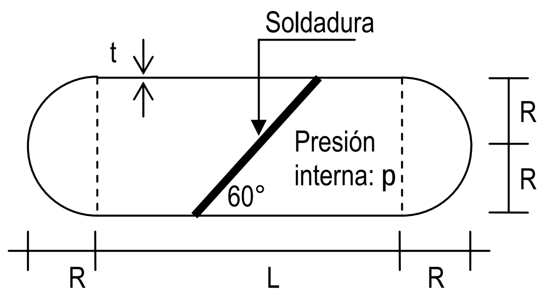
Una barra rectangular de ancho b, altura 2b y largo 20b está sometida a una fuerza en tracción P. Determinar el estado de tensiones en un punto de un plano YZ, y también en el plano VZ (rotado en un ángulo θ respecto al anterior). Con esta información:

i) Calcule el estado de tensiones en un plano a θ = 60°
ii) Calcule θ tal que:
   a) Tensión normal σ sea máxima, y
   b) Tensión tangencial τ sea máxima.



Problema 3

Se tiene un pequeño estanque de gas de forma cilíndrica, de radio R = 20cm y largo L = 100cm, con tapas semiesféricas de radio R, como muestra la figura. El cilindro se fabricó de dos piezas soldadas, en un ángulo de 60°. Determine las tensiones normal y tangencial en un punto del plano de soldadura, para $p=40 kg/cm^2$.



Problema 4

Demuestre que las ecuaciones diferenciales de equilibrio para un caso bidimensional, en coordenadas polares y sin considerar fuerzas externas por unidad de volumen, son:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0$$

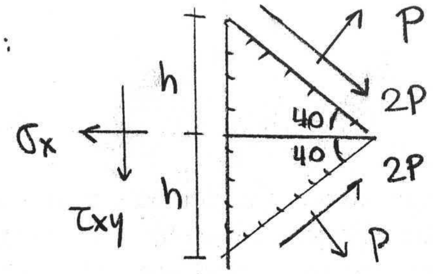
$$\frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + 2\frac{\tau_{r\theta}}{r} = 0$$

Santiago Brunet
sjbrunet@uc.cl

PROBLEMA 1.

Para encontrar las tensiones en un eje determinado, se corta en un plano perpendicular a ese eje

$\perp$ a x:



↗ cuña de ancho 'a'.

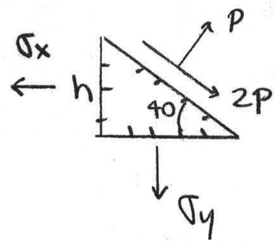
- $$\sigma_x (2h \cdot a) = \left(P \cdot \frac{ha}{\operatorname{sen} 40^\circ} \cdot (\operatorname{sen} 40^\circ) + 2P \cdot \frac{ha}{\operatorname{sen} 40^\circ} \cdot (\cos 40^\circ) \right) \cdot 2$$

$$\sigma_x = P + \frac{2P}{\tan 40^\circ} \Rightarrow \sigma_x = P\left(1 + \frac{2}{\tan 40}\right).$$

$$\therefore \underline{\sigma_x = 3.38\, P.}$$

- $$\tau_{xy}(2h \cdot a) = 0. \qquad \therefore \underline{\tau_{xy} = 0}$$

$\perp$ a y:



$$\sigma_y \left(\frac{h}{\tan 40} \cdot a \right) = P\left(\frac{ha}{\operatorname{sen} 40} \cdot \cos 40^\circ \right) - 2P\left(\frac{ha}{\operatorname{sen} 40} \cdot \operatorname{sen} 40^\circ \right)$$

$$\frac{\sigma_y}{\tan 40} = \frac{P}{\tan 40} - 2P \Rightarrow \sigma_y = P - 2P \tan 40$$

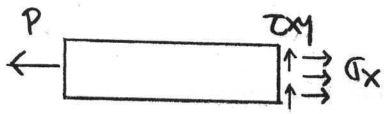
$$\therefore \underline{\sigma_y = -0.67\, P}$$

Santiago Brunet
SJbrunet@uc.cl

PROBLEMA 2

Para encontrar las tensiones en un eje determinado, se corto en el plano perpendicular a ese eje.

⊥ a x

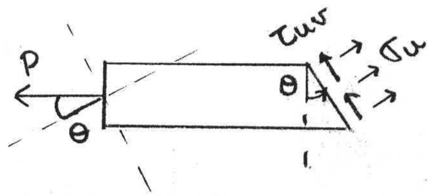


$$\sigma_x (b \cdot 2b) = P$$

$$\rightarrow \sigma_x = \frac{P}{2b^2}$$

$$\tau_{xy} = 0$$

⊥ a u



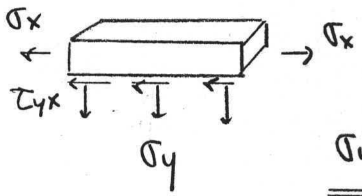
$$\Sigma F_u = 0 \cdot \quad \sigma_u \left(b \cdot \frac{2b}{\cos\theta}\right) = P\cos\theta$$

$$\rightarrow \sigma_u = \frac{\cos^2\theta}{2b^2} P$$

$$\Sigma F_v = 0 \cdot \quad \tau_{uv} \left(b \cdot \frac{2b}{\cos\theta}\right) = P \,\text{sen}\,\theta$$

$$\rightarrow \tau_{uv} = -\frac{\cos\theta \,\text{sen}\,\theta}{2b^2} P$$

⊥ a y



$$\sigma_y = 0$$

(i) Para $\theta = 60°$

$$\sigma_u = \frac{\cos^2 60°}{2b^2} P = \frac{1}{8b^2} P$$

$$\tau_{uv} = -\frac{\cos 60 \,\text{sen}\, 60}{2b^2} P = -\frac{\sqrt{3}}{8b^2} P$$

(ii) Para θ tal que:

(a) σ sea máximo: $\frac{d\sigma}{d\theta} = -\frac{P \,\text{sen}\,\theta \cos\theta}{b^2} = 0$

$$\Rightarrow \theta = 0 \text{ o } 90°.$$

$$\Rightarrow \sigma(\theta = 0°) = \frac{P}{2b^2} \quad \text{(obvio!)}$$

(b) τ sea máximo:

$$\frac{d\tau}{d\theta} = \frac{P}{2b^2}(-\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta). = 0.$$

$$\rightarrow \cos^2\theta = \operatorname{sen}^2\theta$$

$$\rightarrow \theta = 45^\circ$$

$$\Rightarrow \tau(\theta = 45^\circ) = -\frac{P}{4b^2}$$

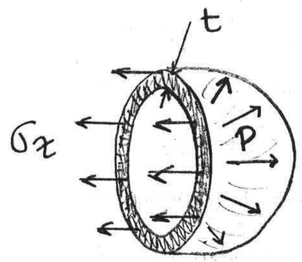
PROBLEMA 3.

Santiago Brunet
sjbrunet@uc.cl

Primero vamos a obtener el estado de tensiones en algún eje que nos resulte manejable, y luego vamos a "rotar" este estado al que estamos buscando.

EJES MANEJABLES : $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{z}$

Corte Plano $\perp \hat{z}$

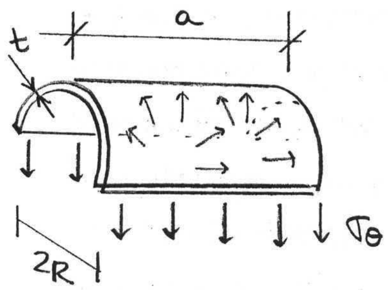


$$2\pi R \cdot t \cdot \sigma_z = \pi R^2 P$$

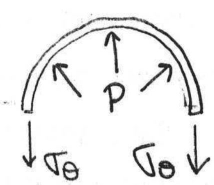
$$\Rightarrow \sigma_z = \frac{R}{2t} P$$

- Como $t << R$, el área donde actúa σ_z puede aproximarse a $2\pi R t$
- La resultante de la presión P es igual a la Presión P × el área proyectada. (demostrado en clases).

Corte Plano $\perp \hat{\theta}$



Transversalmente



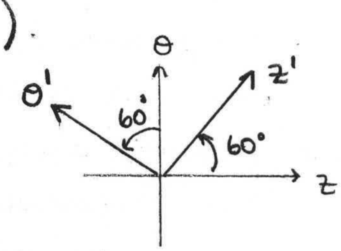
$$2 \cdot a t \sigma_\theta = 2 R a P$$

$$\Rightarrow \sigma_\theta = \frac{R}{t} P$$

¿Corte Plano $\perp \hat{r}$? (Discutido en ayudantía).

∴ Nuestro estado :

$$\begin{array}{ccc} & \uparrow \frac{PR}{t} & \\ \frac{R}{2t}P \leftarrow & \square & \rightarrow \frac{R}{2t}P \\ & \downarrow \frac{PR}{t} & \end{array}$$



Rotación en 60°.

Ecuaciones para la rotación:

$$\sigma_{z}' = \frac{(\sigma_z + \sigma_\theta)}{2} + \frac{(\sigma_z - \sigma_\theta)}{2}\cos(120^\circ) + \tau_{z\theta}\,\text{sen}(120^\circ)$$

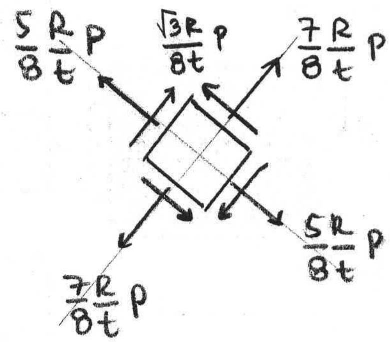
$$\sigma_{\theta}' = \frac{(\sigma_z + \sigma_\theta)}{2} - \frac{(\sigma_z - \sigma_\theta)}{2}\cos(120^\circ) - \tau_{z\theta}\,\text{sen}(120^\circ)$$

$$\sigma_{z'\theta'} = -\frac{(\sigma_z - \sigma_\theta)}{2}\,\text{sen}(120^\circ) + \tau_{z\theta}\cos(120^\circ)$$

$$\therefore \quad \sigma_{z}' = \frac{7R}{8t}P$$

$$\sigma_{\theta}' = \frac{5R}{8t}P$$

$$\sigma_{z'\theta'} = \frac{\sqrt{3}R}{8t}P$$



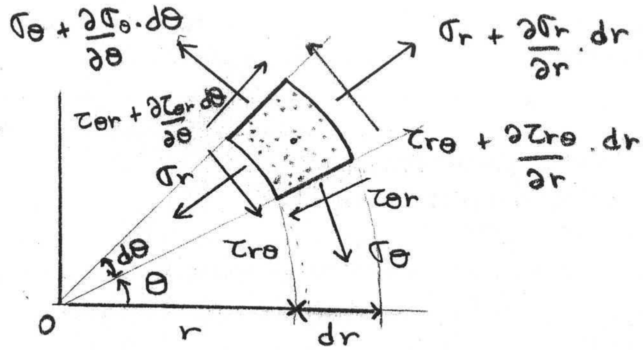
$\therefore$ Tensiones de Diseño: ($R = 20$ cm, $t = 0.1$ cm, $P = 40$ Kg/cm^2.

$$\sigma_{NOR} = \frac{5}{8}\frac{R}{t}P = 5000\ [\text{Kg}/\text{cm}^2]$$

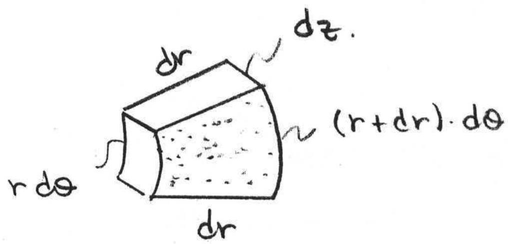
$$\sigma_{TAN} = \frac{\sqrt{3}}{8}\frac{R}{t}P = 1732\ [\text{Kg}/\text{cm}^2]$$

PROBLEMA 4.

Al igual que para el caso en XY (hecho en clases) se hace equilibrio en un elemento diferencial



El elemento tiene profundidad dz.

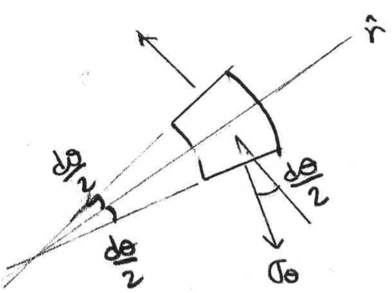


Equilibrio:

$$\bullet\ \Sigma F_r = 0 \Rightarrow \left(\sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} \cdot dr\right)(r+dr)\,d\theta\,dz - \sigma_r\,(r\,d\theta)\,dz$$

$$+ \left(\tau_{\theta r} + \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} \cdot d\theta\right) dr \cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) dz - \tau_{\theta r}\,dr \cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) dz$$

$$- \left(\sigma_\theta + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} d\theta\right) dr\,\mathrm{sen}\left(\frac{d\theta}{2}\right) dz - \sigma_\theta\,dr\,\mathrm{sen}\left(\frac{d\theta}{2}\right) dz = 0.$$



Pero: $\frac{d\theta}{2}$ chico: $\rightarrow \cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) = 1$

$\rightarrow \mathrm{sen}\left(\frac{d\theta}{2}\right) = \frac{d\theta}{2}$

Queda: $\cancel{\sigma_r \cdot r\,d\theta\,dz} + \sigma_r\,dr\,d\theta\,dz + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} r\,dr\,d\theta\,dz$

$$+ \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} \cancelto{0}{dr^2}\,d\theta\,dz - \cancel{\sigma_r\,r\,d\theta\,dz} + \cancel{\tau_{\theta r}\,dr\,dz} + \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} d\theta\,dr\,dz - \cancel{\tau_{\theta r}\,dr\,dz}$$

$$- \sigma_\theta\,dr\,\frac{d\theta}{2}\,dz - \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} \cancelto{0}{\frac{d\theta^2}{2}}\,dz - \sigma_\theta\,dr\,\frac{d\theta}{2}\,dz = 0$$

$$\therefore \quad \sigma_r \, dr \, d\theta + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} \cdot r \, dr \, d\theta + \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} dr \, d\theta - \sigma_\theta \, dr \, d\theta = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{r} \sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{\theta r}}{r \, \partial \theta} - \frac{1}{r} \sigma_\theta = 0 .$$

$$\therefore \quad \frac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta) + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} = 0$$

- $\sum F_\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} \cdot dr\right)(r + dr) \cdot d\theta \, dz - \sigma_r \cdot r \, d\theta \, dz$

$$+ \left(\tau_{\theta r} + \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} d\theta\right) \operatorname{sen}\left(\frac{d\theta}{2}\right) dr \, dz + \tau_{\theta r} \operatorname{sen}\left(\frac{d\theta}{2}\right) dr \, dz$$

$$+ \left(\sigma_\theta + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} d\theta\right) dr \cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) dz - \sigma_\theta \, dr \cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) dz = 0 .$$

Pero $\cos \frac{d\theta}{2} = 1$

$\operatorname{sen} \frac{d\theta}{2} = \frac{d\theta}{2}$

Queda: $\cancel{\sigma_r \cdot r \, d\theta \, dz} + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dr \, r \, d\theta \, dz + \sigma_r \, dr \, d\theta \, dz + \cancel{\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dr^2 \, d\theta \, dz} \to 0$

$$- \cancel{\sigma_r \, r \, d\theta \, dz} + \tau_{\theta r} \frac{d\theta}{2} dr \, dz + \cancel{\frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} \frac{d\theta^2}{2} dr \, dz} \to 0 + \tau_{\theta r} \frac{d\theta}{2} dr \, dz$$

$$+ \cancel{\sigma_\theta \, dr \, dz} + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} d\theta \, dz \, dr - \cancel{\sigma_\theta \, dr \, dz} = 0$$

$$\therefore \quad \tau_{r\theta} \, dr \, d\theta + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} r \, dr \, d\theta + \tau_{\theta r} \, d\theta \, dr + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} dr \, d\theta = 0$$

con $\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r}$

$$\Rightarrow \quad \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} = 0$$