PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113 - Optimización
Semestre: 01-2018
Profesores: R. Cuadrado - S. Encina - F. Palomino
J.T. Marquinez - A. Cataldo - J. González

Interrogación 2

Duración: 2 horas y 30 minutos.

Se debe contestar en cuadernillos independientes cada pregunta. En cada cuadernillo debe colocar su nombre y número de lista asignado. Al finalizar su prueba, debe dejar los cuadernillos en su puesto, estos serán retirados por los ayudantes. ***Si no cumple con las instrucciones se le descontarán automáticamente 5 puntos.***

La interrogación cuenta con 68 puntos, el 7.0 se obtiene sumando 60 o más puntos.

Pregunta 1 (21 puntos)

(a) **(6 puntos)** Considere un problema de optimización lineal en variables continuas descrito de la siguiente manera: $P) = \{\min \;\; c^T x, \;\; s.a : x \in D \subset \mathbb{R}^n\}$. Basándose en esto, responda si las siguientes afirmaciones son Verdaderas o Falsas. Justifique clara y concisamente su respuesta.

(i) **(2 puntos)** Si D es no acotado, entonces el problema no admite solución óptima.

Solución: Falso. Basta un contraejemplo. En este caso, se puede pensar en el problema $\min x_1 \;\; s.a : x_1 \geq 10$. En este caso, el espacio es no acotado pero el problema tiene solución óptima ($z^* = 10$ cuando $x^* = 100$).

(ii) **(2 puntos)** Si D es acotado, el criterio de salida del algoritmo Simplex, Fase II, asegura que el algoritmo pasará del punto $x^{(k)}$ (valor de las variables en la k-ésima iteración) al punto $x^{(k+1)}$, que resulta ser cualquier punto extremo (vértice) que cumple $c^T x^{(k)} \geq c^T x^{(k+1)}$.

Solución: Falso. Basta un contraejemplo. Si tenemos un espacio descrito por las restricciones $0 \geq x_1 \geq 1$ y $0 \geq x_2 \geq 1$ y la función objetivo es maximizar $x_1 + x_2$, si en la iteración 1 (que sería la k) estamos en el punto extremo $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, entonces los otros tres puntos extremos del problema poseen un mejor valor de la función objetivo (cumplen con $c^T x^{(k)} \geq c^T x^{(k+1)}$), pero el punto extremo $x_1 = 1$ y $x_2 = 1$, que es cualquier de los demás, no se puede alcanzar en la siguiente iteración. Esto es porque Simplex salta de un punto extremo a otro punto extremo adyacente (vecino) que tenga un valor de la función objetivo no peor que el actual.

(iii) **(2 puntos)** Al escribir la forma reducida de $P)$, o sea, el problema en forma estándar sin variables básicas, se tiene que $P_{red}) \; \{\min \;\; \bar{c}_R^T x_R, \;$ s.a $: x_R \in D_{red} \subset \mathbb{R}^n\}$ considera a su conjunto D_{red} como irrestricto (y entonces $D_{red} = \mathbb{R}^n$).

Solución: Falso. Al desarrollar el álgebra para construir la forma reducida del problema $P)$, se llega a que $Dred := \{x \geq 0\}$.

(b) **(4 puntos)** Considere el siguiente poliedro S:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 &\leq 10 \\ -x_1 + \qquad\quad -x_3 &\leq 3 \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 &\leq 4 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_2 &\leq 5 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

(i) **(2 puntos)** Demuestre formalmente que S es no acotado.

Solución: Primero, el poliedro no es vacío pues $x_0 = (1,1,1)^\top$ es tal que $Ax_0 \leq b$. Por otra parte, existe un vector $h = (0,1,1)^\top \neq 0$ que cumple $Ah \leq 0$.

Luego, si nos paramos en x_0 y nos movemos en la dirección h una cantidad arbitraria $t \geq 0$, nos encontraremos siempre en el espacio de soluciones factibles:

$$A(x_0 + th) = Ax_0 + tAh \leq Ax_0 \leq b \qquad \forall t \geq 0$$

Por ende, al encontrar un vector de escape $x_0 + th$, el poliedro S es no acotado.

(ii) **(2 puntos)** Muestre que el problema $P) \max_{x_1,x_2,x_3} \{9x_1 - 3x_2 + 5x_3 \ : \ (x_1,x_2,x_3) \in S\}$ es no acotado.

Solución: Dado que el poliedro es no acotado, basta con analizar si la función objetivo crece en la dirección de no acotamiento del poliedro o no:

$$c^\top h = 2 > 0,$$

es decir, la función objetivo crece a medida que nos movemos en la dirección h. Por ende, el problema es no acotado.

(c) **(3 puntos)** Considere un problema de minimización. El teorema práctico de existencia de soluciones en la programación lineal indica, entre sus condiciones, que si la función objetivo es de la forma $c^\top x$ (es decir, lineal) y si $\exists k \in \mathbb{R} : c^\top x \geq k$, entonces el problema admite solución. ¿Sigue siendo válido el teorema si se considera una función objetivo $f(x)$ no lineal continua?

Solución: No sigue siendo válido. Un contraejemplo es el siguiente problema

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & e^{-x} \\ \text{s.a.} \quad & x \geq 0 \end{aligned}$$

El problema en cuestión es tal que $f(x) \geq 0$ siempre, por lo que hemos encontrado una cota inferior para la función objetivo. Sin embargo, el problema no admite solución.

(d) **(2 puntos)** ¿Todo poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ factible, con $b > 0$, tiene puntos extremos?

Solución: No. El poliedro $P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq -1\}$ no tiene puntos extremos, por ejemplo.

(e) **(4 puntos)** Considere el siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & 4x + 2y \\ \text{s.a.} \quad & \text{máx}\{x + y \ , \ 5x + y - 32\} \leq 10 \\ & |x - y| \geq 4 \\ & x, y \geq 0 \end{aligned}$$

(i) **(2 puntos)** Determine un problema de optimización lineal entero-mixto equivalente.

Solución: Para solucionar el valor absoluto, es necesario definir una variable binaria z que valga 1 si $x - y \geq 4$ y 0 si $x - y \leq -4$. De esta forma, el problema lineal equivalente quedaría:

$$\begin{array}{rl} \text{máx} & 4x + 2y \\ \text{s.a.} & x + y \leq 10 \\ & 5x + y \leq 42 \\ & x - y \geq 4 - M(1 - z) \quad M \gg 0 \\ & x - y \leq -4 + Mz \\ & x, y \geq 0 \\ & z \in \{0, 1\} \end{array}$$

(ii) **(2 puntos)** Muestre que el problema original o el obtenido en (i) no es convexo, ya sea analíticamente o gráficamente.

Solución: Es claramente no convexo, pues la variable z es binaria. Así, podríamos tomar un vector solución a tal que z vale 0, y otro vector solución factible b tal que z vale 0, y la combinación lineal entre ambos puntos

(f) **(2 puntos)** Luego de resolver un problema que minimiza costos positivos con el método de Simplex, Raúl llegó al óptimo. Es decir, conoce $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$ y $c \in \mathbb{R}^n_+$ (matriz de utilización, vector de recursos y vector de costos, respectivamente), y también las variables básicas, las variables no básicas, los costos reducidos $\bar{c}_R$ y el valor de cada una de las variables básicas en el óptimo.

Sin embargo, se entera que la economía empeoró y que el costo asociado a una de las variables no básicas se k-tuplicó (es decir, se multiplicó por $k \geq 1$). ¿Qué condición debe cumplirse, en términos de la información conocida, para que la solución óptima que calculó Raúl siga siendo óptima?

Solución: Sea r el subíndice de la variable no básica que cambió de costo. Sabíamos que $\bar{c}_r = c_r - c_B B^{-1} A_r \geq 0$. Ahora, dado que $c'_r = kc_r$, debemos verificar que

$$\begin{aligned} kc_r - c_B B^{-1} A_r &\geq 0 \\ (k-1)c_r + c_r - c_B B^{-1} A_r &\geq 0 \\ (k-1)c_r + \bar{c}_r &\geq 0 \end{aligned}$$

Dado que $\bar{c}_r \geq 0$ y que $c_r \geq 0$, no importa cuánto valga $k \geq 1$, la solución siempre será la misma.

Pregunta 2 (16 puntos)

(a) **(8 puntos)** Considere el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{array}{rl} \text{mín} & 2x_1 - 8x_2 \\ s.a. & 2x_1 - x_2 \geq -2 \\ & 3x_1 + x_2 \geq -3 \\ & -x_1 + 4x_2 \leq 15 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \text{ libre} \end{array}$$

(i) **(2 puntos)** Grafique el dominio del problema.

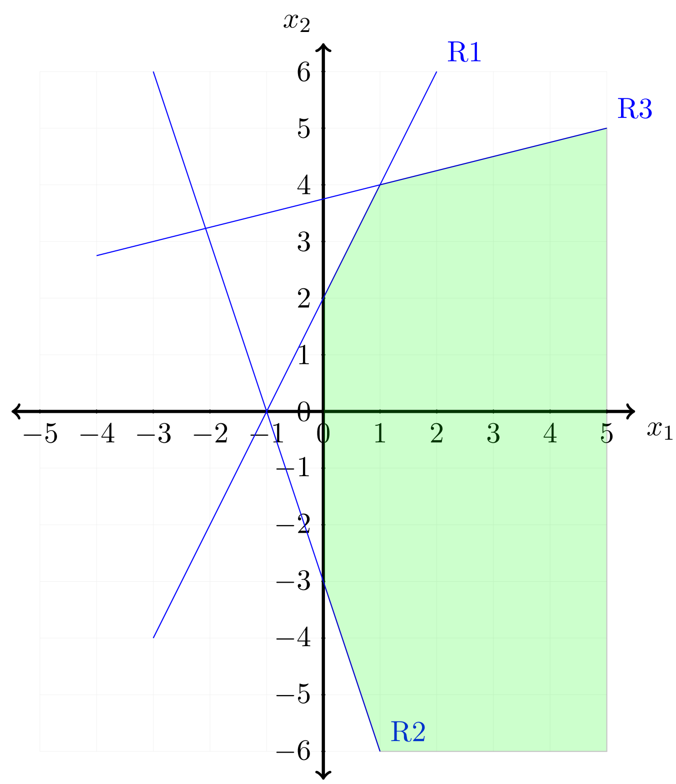
(ii) **(2 puntos)** Determine la(s) solución(es) óptima(s) y el valor óptimo del problema. Para su respuesta, escriba el conjunto solución.

(iii) **(2 puntos)** Determine cuál es el rango del coeficiente que acompaña a x_2 en la función objetivo para que el problema admita al menos una solución óptima.

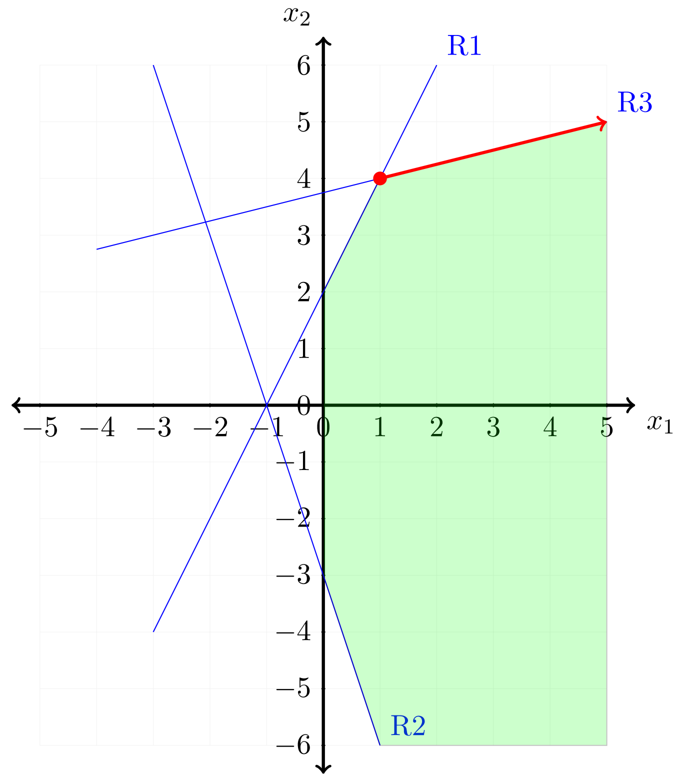
(iv) **(2 puntos)** Reescriba el problema en su forma estándar e identifique todos los puntos extremos factibles del problema, indicando qué variables están en la base para cada uno de ellos (de los puntos extremos).

Solución:

(i) Gráficamente se tiene:



(ii) Dibujando curvas de nivel, podemos apreciar que posee la misma pendiente que la restricción 3. Por lo tanto, existe un punto extremo que es solución óptima del problema, que corresponde al punto $(1, 4)$. Además, todo el rayo desde ese punto siguiendo en la dirección de la restricción 3 es solución óptima del problema, como se puede apreciar en el gráfico.



Matemáticamente:

$$x^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \forall t \geq 0$$

El valor óptimo sale de evaluar el punto extremo en la función objetivo. Por lo tanto, el valor óptimo es de -30.

(iii) Para que tenga solución óptima, debemos evitar que se transforme en un problema no acotado. Por lo tanto, si llamamos c_2 al coeficiente de x_2 en la función (actualmente es igual a -8), observamos que si disminuye un poco, entonces el problema es no acotado. Si aumentamos c_2, vemos que el límite es hasta igualar la pendiente de la restricción 2. En ese caso, c_2 debe tomar el valor $\frac{2}{3}$. Así:

$$-8 \leq c_2 \leq \frac{2}{3}$$

(iv) Para esto, debemos preocuparnos que el lado derecho de las restricciones sean no negativos, al igual que las variables. Además, el problema debe ser de minimización y todas las filas linealmente independientes, lo cual ya se cumple.

Definimos $x_2 = x_2^+ - x_2^-$.

Obtenemos el siguiente problema en forma estándar:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & 2x_1 - 8x_2^+ + 8x_2^- \\ s.a. & -2x_1 + x_2^+ - x_2^- + x_3 = 2 \\ & -3x_1 - x_2^+ + x_2^- + x_4 = 3 \\ & -x_1 + 4x_2^+ - 4x_2^- + x_5 = 15 \\ & x_1, x_2^+, x_2^- \geq 0 \end{array}$$

Así, se aprecia que existen 4 puntos extremos:

Punto	Base
(1,4)	x_1, x_2^+, x_5
(0,2)	x_2^+, x_5, x_6
(0,-3)	x_2^-, x_4, x_6
(0,0)	x_4, x_5, x_6

(b) **(8 puntos)** Responda de manera concisa las siguientes preguntas sobre "Design of a Single Window System for E-Government Services: The Chilean Case" subido en la página del curso[1]

(i) **(2 puntos)** ¿Por qué los autores definen un parámetro de tiempo de duración estimada –en número de períodos– asociado a temas legales (TL_{ik})?

Solución: Debido a que no todos los trámites públicos tiene permiso legal para realizar de manera NO presencial, es necesario considerar para los casos en que se deba gestionar este permiso legal, el tiempo que tomará conseguirlo. Antes de ese permiso, el trámite público no podrá funcionar en el sistema de ventanillas únicas (que es NO presencial).

(ii) **(2 puntos)** Describa en "palabras" cómo afecta a la modelación del problema el que exista un presupuesto asignado a cada servicio público y uno global (el presupuesto con que contaba la Secretaria General de la Presidencia para el Proyecto de Reforma y Modernización del Estado).

Solución: Es una de las razones por la que no se puede considerar el problema como UN problema por servicio, y por lo tanto, obliga a considerar a todos los servicios públicos (y a la Subsecretaria) de manera conjunta.

(iii) **(2 puntos)** ¿Qué indicador es el utilizado en el problema de optimización formulado y posteriormente resuelto?

Solución: Corresponde al beneficio social que se espera lograr con el diseño del sistema de ventanillas únicas.

(iv) **(2 puntos)** Las restricciones (18) a la (25) son restricciones en la que alguna de las variables del problema se igualan a 0, para ciertos valores específicos de los índices bajo los que están definidas, ¿qué buscaban los autores al construir estas restricciones?

Solución: Eliminar del modelo matemático todas las variables que quedan excluidas por temas de temporalidad. O sea, si requiero 3 períodos para implementar algo, no es válido programar el comienzo de su implementación en el último (por ejemplo), período del horizonte de evaluación.

Pregunta 3 (16 puntos)

(a) **(6 puntos)** Considere el siguiente problema de optimización:

$$\begin{array}{rl} P) & \text{Max } 7x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a:} & x_1 + 4x_2 \leq 8 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Mediante el uso del algoritmo de Simplex, y partiendo del punto $x_1 = 4$ y $x_2 = 1$, encuentre la solución óptima del problema P). Indique claramente sus pasos en cada iteración del algoritmo de Simplex, e informe al final de su desarrollo cuál es el valor de las variables y de la función objetivo en el óptimo.

[1] Cataldo, A., Ferrer, J., Rey, P., & Sauré, A. (2018). Design of a Single Window System for E-Government Services: The Chilean Case. Journal of Industrial and Management Optimization, 14(2), 561-582. http:// doi: 10.3934/jimo.2017060.

Solución:

La forma estándar de $P)$ es:

$$\begin{array}{rl} FEP) & \text{Min } -7x_1 - 3x_2 \\ \text{s.a:} & x_1 + 4x_2 + x_3 = 8 \\ & x_1 + 2x_2 - x_4 = 6 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

Dado el punto de partida, se tiene:

Iteración 1:

Variables básicas: $\{x_1, x_2\}$
Variables no básicas: $\{x_3, x_4\}$

Entonces:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

al calcular los costos reducidos se tiene:

$$\bar{c_R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 & -3 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -11/2 & -25/2 \end{pmatrix}$$

Luego el punto de partida no es el óptimo, y entra x_4 a la base.

Para determinar que variable abandona la base se tiene:

$$\bar{R} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

y el criterio implica que: $\frac{1}{1/2} = 2$, con lo que x_2 sale de la base.

Iteración 2:

Variables básicas: $\{x_1, x_4\}$
Variables no básicas: $\{x_3, x_2\}$

Entonces:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

al calcular los costos reducidos se tiene:

$$\bar{c_R} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 25 \end{pmatrix}$$

Luego, como todos los costos reducidos son no negativos. estamos en el óptimo. Así las variables básicas en el óptimo valen:

$$x_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Entonces, $x_1 = 8$ y $x_2 = 0$, con lo que el valor de la función objetivo en el óptimo es $z = 56$.

(b) **(10 puntos)** Su amiga Cecilia, que es veterinaria, le ofrece un trabajo part-time de peluquería canina en el emprendimiento de una Clínica Veterinaria, ya que ella sabe que usted anda en la búsqueda de generarse un ingreso adicional. En las condiciones del ofrecimiento, ella le pide que por lo menos le dedique 10 horas a la semana a este trabajo, y que la remuneración que usted obtenga será de 10 mil pesos por atender a un perro de raza pequeña y de 16 mil pesos por atender a un perro de raza grande. Se sabe que a usted le tomará 40 minutos y 60 minutos atender a un perro de raza pequeña y a uno de raza grande respectivamente. Además, usted sabe que para responder con sus responsabilidades académicas, no debe destinar más de 30 horas semanales a esta nueva actividad. Cecilia además le comenta que cree que siempre estará lleno el local (por lo que no faltará en ningún momento trabajo con alguna de las razas de perro).

(i) **(2 puntos)** Escriba el modelo de optimización lineal que permite resolver su dilema, y luego construya la forma estándar de ese modelo.

(ii) **(2 puntos)** Resuelva el problema mediante el método gráfico. En el gráfico debe indicar todas las soluciones básicas posibles, y detallar cuáles son y no son factibles, las variables que forman la base y el valor de todas las variables de decisión. Respalde la elección del óptimo dibujando las curvas de nivel asociadas a la función objetivo y declare explícitamente cuál es el punto óptimo (no solamente en el gráfico).

(iii) **(2 puntos)** Cecilia quiere que el resultado obtenido se mantenga, pero no está convencida de la retribución que le entrega por perros de raza grande. ¿Para qué rangos de esta retribución se mantiene la estructura de la solución obtenida en (ii)? Determine su respuesta de forma matricial.

(iv) **(2 puntos)** Ahora usted no sabe si podrá disponer de las 30 horas para este trabajo. ¿Para qué valores asociados a este parámetro (horas disponibles), cambiará la estructura de la solución obtenida en (ii)? Determine su respuesta de forma matricial.

(v) **(2 puntos)** Finalmente, Cecilia le indica que podrían ofrecer solamente un servicio de baño canino, que le tomaría 20 minutos, independiente del tamaño del perro atendido. ¿Cuánto le deberían pagar por este servicio, para que le convenga realizarlo? Determine su respuesta de forma matricial.

Solución:

(i) **(2 puntos)** El modelo de optimización lineal es el siguiente:

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & 10x_P + 16x_G \\ \text{s.a.} & \frac{2x_P}{3} + x_G \leq 30 \\ & \frac{2x_P}{3} + x_G \geq 10 \\ & x_P, x_G \geq 0 \end{array}$$

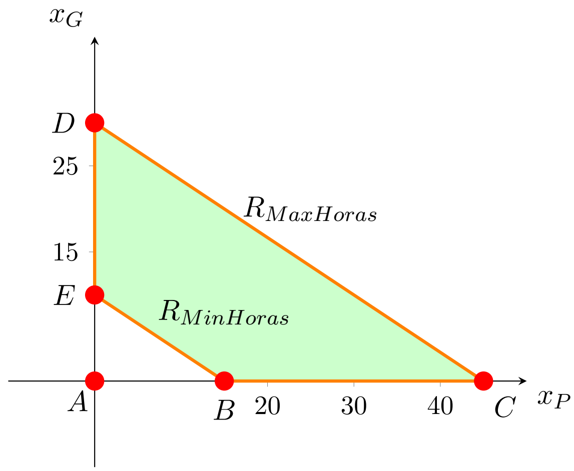
Donde x_P representa la cantidad de perros de raza pequeña atendidos y x_G representa la cantidad de perros de raza grande atendidos.

Por otra parte, el modelo en su forma estándar es el siguiente:

$$\begin{array}{llllll} \text{mín} & -10x_P - 16x_G & & & \\ \text{s.a.} & \frac{2x_P}{3} + x_G & +x_{Max} & & = 30 \\ & \frac{2x_P}{3} + x_G & & -x_{Min} & = 10 \\ & x_P, x_G, x_{Max}, x_{Min} & \geq 0 & & \end{array}$$

Donde x_{Max} representa la variable de holgura de la restricción del máximo de horas y x_{Min} la variable de exceso asociada a la restricción del mínimo de horas a trabajar.

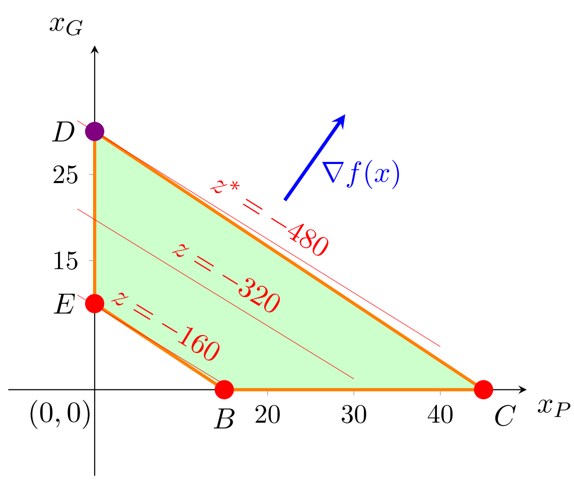
(ii) **(2 puntos)** Al graficar, vemos las siguientes 5 soluciones básicas (que no todas son puntos esquina):



Luego, podemos resumir la información solicitada en la siguiente tabla:

Puntos	x_P	x_G	x_{Max}	x_{Min}	Factible	Básicas
A	0	0	30	10	No	x_{Max} y x_{Min}
B	15	0	20	0	Si	x_P y x_{Max}
C	45	0	0	20	Si	x_P y x_{Min}
D	0	30	0	20	Si	x_G y x_{Min}
E	0	10	20	0	Si	x_G y x_{Max}

Luego al graficar las curvas de nivel asociadas a la función objetivo, podemos apreciar que el óptimo se encuentra en el punto D.



(iii) **(2 puntos)** Luego para realizar este análisis de sensibilidad debemos tener en consideración lo siguiente:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 2/3 & 1 \\ 2/3 & 0 \end{bmatrix}, \; c_b = \begin{bmatrix} -16 \\ 0 \end{bmatrix} \quad c_R = \begin{bmatrix} -10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{c}_R^T = \quad {c_R}^T - {c_B}^T B^{-1} R \quad = \begin{bmatrix} -10 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -16 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 & 1 \\ 2/3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{c}_R^T = \begin{pmatrix} 2/3 & 16 \end{pmatrix}$$

Así, utilizando lo aprendido con cambios de coeficientes en la función objetivo para variables básicas:

$$\bar{c}_G \geq \delta \eta_G$$
$$\frac{2}{3} \geq \delta \frac{2}{3}$$
$$1 \geq \delta$$

Dado que el problema original es de maximización, la retribución por atender perros de raza grande no debe bajar más de mil pesos para que la estructura de solución se mantenga.

(iv) **(1 puntos)** Luego aplicando lo aprendido en Análisis de Sensibilidad:

$$\beta_i \delta \geq -x_B$$
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \delta \geq - \begin{bmatrix} 30 \\ 20 \end{bmatrix}$$
$$\delta \geq -20$$

Por lo que se concluye que debe tener una disminución mayor a 20 horas para que cambie su estrategia de solución (el problema se vuelve infactible).

(v) **(1 puntos)** Luego aplicando lo aprendido en Análisis de Sensibilidad:

$$\bar{c}_{BC} = c_{BC} - c_B^T B^{-1} R_{\bullet\, BC} < 0$$
$$c_{BC} - \begin{bmatrix} -16 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} < 0$$
$$c_{BC} < \frac{-16}{3}$$

Por lo que le debieran pagar por lo menos 5.334 pesos para que le convenga realizarlo.

Pregunta 4 (15 puntos)

Como encargado del área de marketing del canal LRC, se le ha encomendado la misión de planificar las menciones comerciales para las transmisiones del próximo partido de la selección. Para ello, usted conoce a los I auspiciadores de la selección, los cuales le han presentado cada uno de ellos un catálogo con K diferentes alternativas de publicidades a mencionar durante el partido. A través del parámetro d_{ik} usted conoce la cantidad de segundos que le tomará al relator realizar la mención del auspiciador i mediante el formato k. No obstante, los altos ejecutivos del canal le han indicado que para solventar las operaciones del canal, se deberán levantar B pesos mediante el pago de los auspiciadores. De acuerdo a los contratos ofrecidos al canal, los auspiciadores están dispuestos a pagar una tarifa fija de γ_i pesos por cada segundo de mención que usted realice por el auspiciador i durante el partido, y un bono extra de ϵ_i si realiza al menos ρ_i menciones comerciales (de ese auspiciador, sin importar el formato) a lo largo del partido.

Los especialistas de manejo de medios del canal le han indicado que por cada segundo que se encuentre transmitiendo el partido sin interrupciones, los ratings del canal aumentan en β unidades de rating. Sin embargo, por cada segundo que se mencione publicidad del auspiciador i, la transmisión del partido baja en α_i unidades de rating. Adicionalmente, si durante el primer tiempo del partido la cantidad total de segundos con menciones completas supera los Δ segundos o existen más de μ menciones comerciales, se espera que un sexto de los espectadores que terminaron de ver el primer tiempo del partido cambien a otro canal una vez finalizado el primer tiempo.

Formule un problema de programación lineal con el cual pueda maximizar el punto más bajo del rating a lo largo de la transmisión del partido. Para esto, asuma que la transmisión del partido comienza con ζ puntos de rating, que solamente se puede estar mencionando a un auspiciador a la vez, que solamente se puede mencionar a lo más una vez el auspicio en formato k para el auspiciador i, y que cada mención comercial debe ser realizada de manera completa y continua en los 90 minutos que dura el partido.

Solución: ÍNDICES:

- $t \in \{1, \dots, T\}$, segundos de la transmisión
- $i \in \{1, \dots, I\}$, auspiciadores
- $k \in \{1, \dots, K\}$, formato del auspicio

PARÁMETROS:

d_{ik}: Duración del auspicio i en el formato k.

B: Cantidad mínima de dinero a recaudar en la transmisión.

γ_i: Precio por segundo de transmisión del auspicio i.

ϵ_i: Bono extra del auspiciador i.

ρ_i: Cantidad de menciones a religar para activar bono del auspiciador i.

β: Aumento en rating por estar transmitiendo el partido.

α_i: Disminución en rating por segundo del auspiciador i.

Δ: Cantidad de segundos para activar disminución en rating del segundo tiempo.

μ: Cantidad de auspicios realizados para activar disminución en rating del segundo tiempo.

ζ: Cantidad inicial del rating.

VARIABLES:

X_{itk}: Variable binaria con valor 1 si se comienza a emitir mención al auspiciador i en el segundo t mediante el formato k, 0 en otro caso.

Y_{itk}: Variable binaria con valor 1 si se encuentra emitiendo mención al auspiciador i en el segundo t mediante el formato k, 0 en otro caso.

R_t: Rating en el segundo t.

Z: Variable auxiliar para medir el mínimo rating.

θ: Variable binaria con valor 1 si se aplica el descuento en el rating al segundo tiempo, y 0 en otro caso.

W: Variable auxiliar para medir el rating a descontar al inicio del segundo tiempo.

V_i: Variable binaria con valor 1 si se obtiene el bono del auspiciador i, y 0 en otro caso.

Función objetivo:

$$\max Z$$

Restricciones:

R1) Capturar el mínimo rating.

$$Z \leq R_t \quad \forall t = 1...T$$

R2) Activar auspicio y continuidad del mismo.

$$X_{itk} \leq Y_{i\hat{t}k} \quad \forall i, k, t, \hat{t} : \hat{t} = t, \ldots, min\{t + d_{ik} - 1, T\}$$

o se puede escribir también:

$$(min\{d_{ik}, T - t\})\, X_{itk} \leq \sum_{\hat{t}=t}^{min\{t+d_{ik}-1,T\}} Y_{i\hat{t}k} \quad \forall i, t, k$$

R3) A lo más un auspicio se está emitiendo en cada instante de tiempo.

$$\sum_{ik} Y_{itk} \leq 1 \quad \forall t$$

R4) No iniciar más de un vez el auspicio en el mismo formato.

$$\sum_{t} X_{itk} \leq 1 \quad \forall i, k$$

R5) Utilizar exactamente la cantidad de segundos de la mención (impide activar segundos extras).

$$\sum_{t} d_{ik} X_{itk} = \sum_{t} Y_{itk} \quad \forall i, k$$

R6) Seguimiento del rating.

$$R_t = R_{t-1} - \sum_{ik} \alpha_i Y_{itk} + \beta \left(1 - \sum_{ik} Y_{itk}\right) \quad \forall t : t \neq \frac{T}{2} + 1, t \geq 2$$

$$R_{\frac{T}{2}+1} = R_{\frac{T}{2}} - \sum_{ik} \alpha_i Y_{itk} + \beta \left(1 - \sum_{ik} Y_{i\frac{T}{2}k}\right) - W$$

$$R_1 = \zeta - \sum_{ik} \alpha_i Y_{i1k} + \beta \left(1 - \sum_{ik} Y_{i1k}\right)$$

R7) Cálculo descuento en el rating.

$$\frac{R_{\frac{T}{2}}}{6} - (1-\theta)\, M + \leq W$$

R8) Activación descuento en rating.

$$\frac{\left(\sum_{t=1}^{T/2} \sum_{ik} Y_{itk}\right) - \Delta}{\Delta} \leq M\theta$$

$$\frac{\left(\sum_{t=1}^{T/2} \sum_{ik} X_{itk}\right) - \mu}{\mu} \leq M\theta$$

R9) Alcanzar presupuesto mínimo.

$$\sum_{itk} \gamma_i Y_{itk} + \sum_{i} \epsilon_i V_i \geq B$$

R10) Activar bono de cada auspiciador.

$$\frac{\rho_i - \left(\sum_{tk} X_{itk}\right)}{M} \leq (1 - V_i) \quad \forall i$$

$$\frac{\left(\sum_{tk} X_{itk}\right) - \rho_i + 1}{M} \leq V_i \quad \forall i$$

R11) Naturaleza variables

$$\begin{array}{lll} X_{itk}, Y_{itk}, V_i, \theta & \in \{0,1\} & \forall i,t,k \\ R_t, Z, W \geq 0 & & \forall t \end{array}$$