Pontificia Universidad Católica De Chile
Facultad De Matemáticas
Departamento De Matemática
Segundo Semestre 2020

MAT1203 - Álgebra Lineal
PAUTA Interrogación 2

Problema 1.

Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sin calcular explícitamente A ni A^{-1}, escriba la inversa de A como producto de matrices elementales.

Solución:

Si aplicamos el operador de matriz inversa a ambos lados de la ecuación obtenemos:

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Puntaje:

- 2 puntos por usar correctamente la propiedad $(BC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}$.
- 1 punto por determinar correctamente la inversa de cada matriz elemental.

Problema 2.

Calcule la inversa de la matriz A tal que

$$A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad A\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\7\end{pmatrix},\quad A\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\9\\19\end{pmatrix}.$$

Solución:

Por la definición de multiplicación de matrices se tiene que

$$A\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&6\\1&3&9\\1&7&19\end{pmatrix}.$$

Llamamos

$$B=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&1&3\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1&2&6\\1&3&9\\1&7&19\end{pmatrix}.$$

Entonces

$$|B|=\begin{vmatrix}1&2&6\\1&3&9\\1&7&19\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&6\\1&3&9\\0&4&10\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&6\\0&1&3\\0&4&10\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&3\\4&10\end{vmatrix}=-2$$

y

$$|C|=\begin{vmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&1&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1\\1&3\end{vmatrix}=2$$

por lo tanto tales matrices son invertibles. Esto implica que A es invertible y

$$A^{-1}=BC^{-1}.$$

Calculamos la inversa de C:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&6&1&0&0\\1&3&9&0&1&0\\1&7&19&0&0&1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&6&1&0&0\\0&1&3&0&1&0\\0&5&13&-1&0&1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&3&-2&0\\0&1&3&-1&1&0\\0&0&-2&4&-5&1\end{array}\right]$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&3&-2&0\\0&1&0&5&-{}^{13}\!/_2&{}^{3}\!/_2\\0&0&1&-2&{}^{5}\!/_2&-\frac{1}{2}\end{array}\right].$$

Así

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-2&0\\5&-{}^{13}\!/_2&{}^{3}\!/_2\\-2&{}^{5}\!/_2&-{}^{1}\!/_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&3&-1\\3&-4&1\\-1&1&0\end{pmatrix}.$$

Puntaje:

- 1 punto por determinar que B y C son invertibles.
- 1 punto por establecer la ecuación $A^{-1} = BC^{-1}$.
- 2 puntos por calcular C^{-1} correctamente.
- 2 puntos por calcular A^{-1}.

Observación: Una solución alternativa es la siguiente:

Sea $A = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$. Del enunciado se tiene

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 + v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad 2v_1 + v_2 + 3v_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 19 \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow v_2 + 3v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 17 \end{pmatrix}, \quad v_2 + v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix},$$

por lo que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Calculando la inversa de la misma forma antes se tiene:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 3 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Puntaje:

- 1 punto por calcular cada columna de A.
- 3 puntos por calcular A^{-1}.

Problema 3.

Defina las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ m & n & t \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 5m & -a & 2p \\ 5n & -b & 2q \\ 5t & -c & 2r \end{pmatrix}.$$

Calcule, justificadamente, $\det(2B^{-1}A^T)$ sabiendo que $\det(A) = 3$.

Solución:

Notar primero que $|A^T| = |A| = 3$. Calculamos ahora el determinante de la matriz B:

$$\begin{aligned} |B| = \begin{vmatrix} 5m & -a & 2p \\ 5n & -b & 2q \\ 5t & -c & 2r \end{vmatrix} &= (5)(-1)(2) \begin{vmatrix} m & a & p \\ n & b & q \\ t & c & r \end{vmatrix} \\ &= -10(-1)^2 \begin{vmatrix} a & p & m \\ b & q & n \\ c & r & t \end{vmatrix} = -10|A|^T = -30. \end{aligned}$$

Finalmente calcular el determinante que se pide:

$$|2B^{-1}A^T| = 2^3|B|^{-1}|A^T| = 8\left(\frac{1}{-30}\right)(3) = \frac{-4}{5}.$$

Puntaje:

- 1 punto por usar $|A| = |A^T|$
- 4 puntos por calcular correctamente $|B|$. Detalle:
  - 1 punto por la propiedad del escalar 5.
  - 1 punto por la propiedad del escalar -1.
  - 1 punto por la propiedad del escalar 2.
  - 1 punto por la propiedad de permutación de columnas.
- 1 punto por calcular correctamente $|2B^{-1}A^T|$.

Problema 4.

Considere el espacio vectorial $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ de polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual a 3 y el conjunto

$$U = \{p(x) \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R})\colon p(1) - 2p(0) = 0\}.$$

a) Demuestre que U es un subespacio de $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$.

b) Determine una base para U e indique la dimensión de U.

Solución:

a) Primero vemos que $U \neq \emptyset$ ya que contiene al polinomio nulo de $\mathbb{P}_3$. Sean $p, q \in U$. Defina el polinomio $r(x) = p(x) + q(x)$ de $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$. Se tiene que

$$r(1) - 2r(0) = (p(1) + q(1)) - 2(p(0) + q(0)) = (p(1) - 2p(0)) + (q(1) - 2q(0)) = 0 + 0 = 0$$

por lo que $r \in U$. Por otro lado, si $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces

$$(\alpha p)(1) - 2(\alpha p)(0) = \alpha(p(1) + 2p(0)) = \alpha \cdot 0 = 0$$

lo que implica que $\alpha p \in U$. En conclusión, U es un subespacio de $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ ya que es cerrado las operaciones de suma y multiplicación escalar.

b) Sea $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
p \in U &\Leftrightarrow p(1) - 2p(0) = 0 \\
&\Leftrightarrow (a + b + c + d) - 2(d) = 0 \\
&\Leftrightarrow a + b + c = d \\
&\Leftrightarrow p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + (a + b + c) \\
&\Leftrightarrow p(x) = a(x^3 + 1) + b(x^2 + 1) + c(x + 1) \\
&\Leftrightarrow p \in Gen\{x^3 + 1, x^2 + 1, x + 1\}
\end{aligned}$$

en donde estos tres generadores de U son linealmente independientes ya que son de grado distinto. En conclusión, $\{x^3 + 1, x^2 + 1, x + 1\}$ es una base de U y la dimensión de U es 3.

Puntaje:

- 1 punto por justificar que U es no vacío.
- 1 punto por justificar que U es cerrado para la operación de multiplicación escalar.
- 1 punto por justificar que U es cerrado para operación de suma.
- 1 punto por encontrar un conjunto generador de U.
- 1 punto por justificar que dicho conjunto es LI y por lo tanto base.
- 1 punto por determinar la dimensión de U.

Observación:

Una forma alternativa de resolver este problema es encontrar generadores de U y luego usar el teorema que todo conjunto generado es un subespacio vectorial. Además, dependiendo de la constante despejada en función de las otras, la base obtenida puede ser diferente.

Puntaje:

- 2 puntos por encontrar un conjunto generador de U.
- 1 punto por afirmar que todo conjunto generador es un subespacio vectorial.
- 2 puntos por determinar una base de U.
- 1 punto por determinar la dimensión de U.

Problema 5.

Determine justificadamente para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 2a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

es positiva definida y en tales casos escriba la forma cuadrática asociada como suma ponderada de cuadrados.

Solución:

Sea $B = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 2a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$. Notamos que

$$B \sim \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 2a-a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

si aplicamos la operación elemental que consiste en multiplicar la primera fila por $-a$ y sumarla a la segunda (para $a \neq 0$). Esto implica que $B = LU$ donde

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } U = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 2a-a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

La matriz B es positiva definida si y sólo si cada elemento de la diagonal principal de U es un número positivo, es decir, $a > 0$ y $a(2-a) > 0$, lo que equivale a $0 < a < 2$.

Si $a = 0$, entonces B es triangular superior con 0 en su diagonal por lo que no es positiva definida en este caso.

Ahora bien, por lo anterior para $0 < a < 2$ la matriz B es positiva definida y simétrica por lo que admite factorización de Cholesky: Sea

$$\sqrt{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2a - a^2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{a} \end{pmatrix}.$$

Defina la matriz

$$R = L\sqrt{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2a - a^2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & \sqrt{2a - a^2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{a} \end{pmatrix}.$$

entonces se tiene que

$$B = RR^T.$$

Sea $q(x, y, z)$ la forma cuadrática asociada a B. Se tiene que

$$\begin{aligned} q(x,y,z) &= \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} RR^T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \left(R^T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right)^T R^T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left\| R^T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\|^2 \\ &= \left\| \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & \sqrt{2a - a^2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} x + ay \\ \sqrt{2a - a^2}y \\ \sqrt{a}z \end{pmatrix} \right\|^2 \\ &= (x + ay)^2 + (2a - a^2)y^2 + az^2. \end{aligned}$$

Puntaje:

- 1 punto por determinar correctamente la descomposición $B = LU$.
- 1 punto por justificar que B es definida positiva si y sólo si $0 < a < 2$.
- 2 puntos por determinar la descomposición de Cholesky de B.
- 2 puntos por escribir la forma cuadrática de B como suma ponderada de cuadrados.

Problema 6.

Determine si las siguientes afirmaciones son Verdaderas o Falsas. Justifique sus respuestas.

a) Si I es la matriz identidad de 2×2 y A es una matriz tal que $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, entonces $A - 2I$ es invertible.

b) Si $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ y $\det(A) = -3$, entonces $|-\operatorname{Adj}(A)| = -9$.

Solución:

a) Es falso ya que $(A-2I)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ lo que implica que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in Nul(A-2I)$, por lo tanto $A - 2I$ no es invertible.

b) Verdadero. Se tiene que $A \cdot \operatorname{Adj}(A) = |A|I$ por lo que $A(-\operatorname{Adj}(A)) = -|A|I$. De aquí tenemos

$$|A||-\operatorname{Adj}(A)| = -|A|^3.$$

Como $|A| = -3$ obtenemos

$$|-\operatorname{Adj}(A)| = -|A|^2 = -(-3)^2 = -9.$$

Puntaje:

- 3 puntos por cada respuesta correcta y justificada. Sin justificación no hay puntaje.