Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Ciencias Económicas y Administrativas

Segundo Semestre 2017

Curso	**:**	**Probabilidad y Estadística**
Sigla	**:**	**EAS200a**
Profesores	**:**	**Rafael Águila (Sec 01) M Ignacia Vicuña (Sec 02), Osvaldo Ferreiro (Sec 03)**

Examen

Pregunta 1

El tiempo de vida (en miles de horas) de un determinado producto, es una variable aleatoria X cuya función densidad de probabilidad está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 2-x & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

Se dice que uno de esos artículos es "ideal" si su tiempo de vida se encuentra entre 0.9 y 1.1 (miles de horas)

(a) [**2.0 Puntos**] Si se seleccionan al azar 10 de estos artículos ¿Cuál es la probabilidad que al menos el 20 % de ellos sea "ideales"?

(b) [**2.0 Puntos**] ¿Cuál es el número medio de artículos " no ideales", que se deberían escoger al azar hasta encontrar uno "ideal"?

(c) [**2.0 Puntos**] ¿Cuál es la probabilidad de que se necesiten seleccionar al azar a lo más 4 artículos para obtener 2 ideales?

Solución:

(a)

$$\begin{aligned} P(\text{Ideal}) &= \pi = \int_{0.9}^{1} x\,dx + \int_{1}^{1.2} (2-x)\,dx \ \textbf{[0.5 Ptos]} \\ &= \frac{x^2}{2}\Big|_{0.9}^{1} + \left(2x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{1}^{1.1} \ \textbf{[0.3 Ptos]} \\ &= 0.19 \ \textbf{[0.2 Ptos]} \end{aligned}$$

Sea Y : número de artículos ideales de entre los 10 seleccionados al azar. **[0.2 Ptos]**

Entonces $Y \sim$ Binomial(10,0.19), Por lo tanto, **[0.3 Ptos]**

$$P(Y \geq 2) = 1 - P(Y \leq 1) = \sum_{y=0}^{1} \binom{10}{y} 0.19^y\, 0.81^{10-y} = 0.5932 \ \textbf{[0.5 Ptos]}$$

(b) Sea Y : el número de artículos que se deberían escoger hasta encontrar uno ideal. **[0.5 Ptos]**

Entonces $Y \sim$Geom(0.19), **[0.5 Ptos]** por lo tanto,

$$\text{E}(Y) = \frac{1}{0.19} = 5.26 \ \textbf{[0.5 Ptos]}$$

De esta manera, el número medio de artículos "no ideales", que se debería escoger al azar hasta encontrar uno "ideal" es $5.26 - 1 = 4.26$. **[0.5 Ptos]**

(c) Sea Y : número de artículos que se necesitan seleccionar al azar para obtener 2 artículos "ideales". **[0.5 Ptos]**

Entonces $Y \sim$BinNeg(2,0.19), **[0.5 Ptos]** por lo tanto,

$$\begin{aligned} P(Y \leq 4) &= P(Y=2) + P(Y=3) + P(Y=4) \text{ [0.5 Ptos]} \\ &= \binom{1}{1} 0.19^2\, 0.81^0 + \binom{2}{1} 0.19^2\, 0.81^1 + \binom{1}{1} 0.19^2\, 0.81^2 \text{ [0.5 Ptos]} \\ &= 0.1656 \end{aligned}$$

Pregunta 2

El consumo diario (en litros) por parte de las familias chilenas, de entre dos tipos de líquidos sustitutos, se puede representar por una variable aleatoria bidimensional (X, Y), se ha observado que posee la siguiente función densidad de probabilidad conjunta:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 2 & \text{si } 0 \leq x < y < 1 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

(a) [**1.0 Puntos**] ¿Cuál es la probabilidad que el consumo del líquido X sea menor a 0.7 litros conjuntamente a que el consumo del producto Y sea mayor a 0.5 litros?

(b) [**2.0 Puntos**] Encuentre la distribución condicional de $X \mid Y = y$ ¿La reconoce? Sin hacer cálculos, solo dando una justificación a su respuesta, encuentre $\mathrm{E}(X \mid Y = y)$.

(c) [**2.0 Puntos**] Encuentre la distribución condicional de $Y \mid X = x$, ¿La reconoce? Sin hacer cálculos, solo dando una justificación a su respuesta, encuentre $\mathrm{E}(Y \mid X = x)$.

(d) [**1.0 Puntos**] Obtenga $\mathrm{E}(\mathrm{E}(Y \mid X))$ y $\mathrm{E}(\mathrm{E}(X \mid Y))$

Solución:

(a)

$$\begin{aligned} P(X < 0.7, Y > 0.5) &= \int_0^{0.5} \int_{0.5}^{1.0} 2\, dy\, dx + \int_{0.5}^{0.7} \int_x^{1.0} 2\, dy\, dx \text{ [0.6 Ptos]} \\ &= 2\left(0.5 \cdot 0.5 + \frac{(0.5 + 0.3)}{2} \cdot 0.2\right) \text{ [0.2 Ptos]} \\ &= 0.6 \text{ [0.2 Ptos]} \end{aligned}$$

(b) $f_{X|Y}(x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$, por lo tanto, debemos buscar primero la marginal de Y. **[0.2 Ptos]**

$$f_Y(y) = \int_0^y 2\, dx = 2\, y \quad 0 < y < 1 \text{ [0.5 Ptos]}$$

Por lo tanto, $f_{X|Y}(x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{2}{2\, y} = \frac{1}{y}, \quad 0 < x < y$ **[0.5 Ptos]**

Por lo tanto, $X \mid Y = y \sim \text{Uniforme}(0, y)$, **[0.5 Ptos]** de esta manera $\mathrm{E}(X \mid Y = y) = \frac{y}{2}$ **[0.3 Ptos]**

(c) $f_{Y|X}(y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$, por lo tanto, debemos buscar primero la marginal de X. **[0.2 Ptos]**

$$f_X(x) = \int_x^1 2\, dy = 2\,(1 - x) \quad 0 < x < 1 \text{ [0.5 Ptos]}$$

Por lo tanto, $f_{Y|X}(y) = \frac{2}{2\,(1-x)} = \frac{1}{1-x} \quad x < y < 1$ **[0.5 Ptos]**

Por lo tanto, $Y \mid X = x \sim \text{Uniforme}(x, 1)$, **[0.5 Ptos]** de esta manera $\mathrm{E}(Y \mid X = x) = \frac{x+1}{2}$ **[0.3 Ptos]**

(d) **Alternativa 1:**

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(\mathrm{E}(Y \mid X)) &= \mathrm{E}\left(\frac{X+1}{2}\right) = \frac{1}{2}\mathrm{E}(X + 1) = \frac{1}{2}(\mathrm{E}(X) + 1) \text{ [0.3 Ptos]} \\ &= \frac{1}{2}\left(\int_0^1 2\, x\,(1 - x)\, dx + 1\right) = \frac{1}{2}\left((x^2 - \frac{2}{3}x^3)\Big|_0^1 + 1\right) \text{ [0.2 Ptos]} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+1\right) = \frac{2}{3} \text{ [0.5 Ptos]} \\
\mathrm{E}(\mathrm{E}(X \mid Y)) &= \mathrm{E}\left(\frac{Y}{2}\right) = \frac{1}{2}\mathrm{E}(Y) \text{ [0.5 Ptos]} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 2\,y^2\,dy = \frac{y^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3} \text{ [0.5 Ptos]}
\end{aligned}
$$

Alternativa 2:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(\mathrm{E}(Y \mid X)) &= \mathrm{E}(Y) = \int_0^1 2\,y^2\,dy \text{ [0.5 Ptos]} = 2\frac{y^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3} \text{ [0.5 Ptos]} \\
\mathrm{E}(\mathrm{E}(X \mid Y)) &= \mathrm{E}(X) = \int_0^1 2\,x\,(1-x)\,dx \text{ [0.5 Ptos]} = x^2 - \frac{2}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3} \text{ [0.5 Ptos]}
\end{aligned}
$$

Pregunta 3

A un mes de que llegue la Navidad, los centros comerciales y grandes tiendas se preparan ya que el período navideño representa un porcentaje importante de los ingresos del comercio de todo el año. El comportamiento anual de las ventas en el mes de diciembre está altamente correlacionado y suponga que en una cierta tienda de retail, a las ventas de diciembre del año 2016 y 2017 las denotan por X_1 y X_2, las cuales dependen de otras variables Y_1 e Y_2 las cuales son independientes entre sí y distribuyen Normal con media y varianza μ_1, σ_1^2 y μ_2 y σ_2^2 respectivamente.

A partir de lo anterior, se definen las ventas diciembre del 2016 y 2017 por

$$X_1 = \frac{Y_1}{\alpha^2 - 1} \qquad X_2 = \alpha X_1 + Y_2$$

donde $0 \leq \alpha < 1$. Interesa estimar si las ventas navideñas de este año serán mayores que el año pasado. Para ello,

(a) [**3.0 Puntos**] Calcule el valor esperado y varianza de $X_2 - X_1$.

(b) [**3.0 Puntos**] Si $\alpha = 0.5$, $\mu_1 = 40$, $\mu_2 = 30$ y $\sigma_1 = 30, \sigma_2 = 25$. Calcule la probabilidad de que las ventas navideñas de este año sean mayor que el año pasado.

Solución:

(a)

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X_2 - X_1) &= \mathrm{E}(\alpha X_1 + Y_2 - X_1) \text{ [0.3 Ptos]} \\
&= (\alpha - 1)\mathrm{E}(X_1) + \mathrm{E}(Y_2) \\
&= (\alpha - 1)\mathrm{E}\left(\frac{Y_1}{\alpha^2 - 1}\right) + \mathrm{E}(Y_2) \text{ [0.3 Ptos]} \\
&= (\alpha - 1)\frac{1}{\alpha^2 - 1}\mathrm{E}(Y_1) + \mathrm{E}(Y_2) \text{ [0.2 Ptos]} \\
&= \frac{\mu_1}{(\alpha + 1)} + \mu_2 \text{ [0.2 Ptos]}
\end{aligned}$$

$$\mathrm{Var}(X_2 - X_1) = \mathrm{Var}(X_2) + \mathrm{Var}(X_1) - 2\mathrm{Cov}(X_2, X_1) \text{ [0.5 Ptos]}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X_2) &= \mathrm{Var}(\alpha X_1 + Y_2) = \alpha^2\mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(Y_2) + 2\alpha\mathrm{Cov}(X_1, Y_2) \\
&= \alpha^2\mathrm{Var}\left(\frac{Y_1}{\alpha^2 - 1}\right) + \mathrm{Var}(Y_2) + \mathrm{Cov}\left(\frac{Y_1}{\alpha^2 - 1}, Y_2\right) \text{ [0.2 Ptos]} \\
&= \frac{\alpha^2}{(\alpha^2 - 1)^2}\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 0 \qquad \text{Por independencia de } Y_1, Y_2 \text{ [0.3 Ptos]} \\
\mathrm{Var}(X_1) &= \mathrm{Var}\left(\frac{Y_1}{\alpha^2 - 1}\right) = \frac{1}{(\alpha^2 - 1)^2}\sigma_1^2 \text{ [0.3 Ptos]} \\
\mathrm{Cov}(X_1, X_2) &= \mathrm{Cov}(X_1, \alpha X_1 + Y_2) \text{ [0.2 Ptos]} \\
&= \alpha\mathrm{Cov}(X_1, X_1) + \mathrm{Cov}(X_1, Y_2) \\
&= \alpha\frac{\sigma_1^2}{(\alpha^2 - 1)^2} + 0 \qquad \text{Por independencia de } Y_1, Y_2 \text{ [0.2 Ptos]}
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X_2 - X_1) &= \frac{\alpha^2}{(\alpha^2 - 1)^2}\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \frac{1}{(\alpha^2 - 1)^2}\sigma_1^2 - 2\alpha\frac{\sigma_1^2}{(\alpha^2 - 1)^2} \\
&= \frac{\sigma_1^2}{(\alpha + 1)^2} + \sigma_2^2 \text{ [0.3 Ptos]}
\end{aligned}$$

(b) Como $Y_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $Y_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, se tiene que

$$X_2 - X_1 \sim N\left(\frac{\mu_1}{(\alpha+1)} + \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{(\alpha+1)^2} + \sigma_2^2\right) \text{ [0.8 Ptos]}$$

Reemplazando en $\alpha = 0.5$, $\mu_1 = 40$, $\mu_2 = 30$ y $\sigma_1 = 30, \sigma_2 = 25$ se tiene que

$$X_2 - X_1 \sim N(56.67, 1025) \text{ [0.5 Ptos]}$$

Por lo tanto, la probabilidad de que las ventas navideñas de este año sean mayor que el año pasado está dada por

$$\begin{aligned}
P(X_2 - X_1 > 0) &= P\left(\frac{X_2 - X_1 - 56.67}{\sqrt{1025}} > \frac{-56.67}{\sqrt{1025}}\right) \text{ [0.5 Ptos]} \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{-56.67}{\sqrt{1025}}\right) \text{ [0.5 Ptos]} \\
&= 1 - \Phi(-1.77) \\
&= 1 - 0.03836 \text{ [0.5 Ptos]} \\
&= 0.96163 \text{ [0.2 Ptos]}
\end{aligned}$$