PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TAV 2013

MAT 1610 - Cálculo I
Interrogación 3

1. Grafique la siguiente función indicando claramente: máximos y mínimos locales, asíntotas, concavidad e intersección con los ejes coordenados.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^3}{x^2-2x+1} & \text{si } 0 \leq x, x \neq 1 \\ xe^{1/x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Solución:

Si $x < 0$ entonces $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$ diferenciable en $(-\infty, 0)$, y $f'(x) = e^{\frac{1}{x}}\left(1 - \frac{1}{x}\right) > 0$. Luego f es creciente en $(-\infty, 0)$ y no tiene punto criticos en ese intervalo.
$f''(x) = \dfrac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x}} < 0$ luego f es cóncava hacia abajo.
Asintotas:

- Como f es continua en $(-\infty, 0)$ luego no tiene asintotas verticales.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^{\frac{1}{x}} = -\infty$ f no tiene asintotas horizontales
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{xe^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$, $\lim\limits_{x \to -\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{\frac{1}{x}}\dfrac{-1}{x^2}}{\dfrac{-1}{x^2}} = 1$

  Entonces $y = x + 1$ es asíntota oblicua.

Estudio en $x = 0$
$\lim\limits_{x \to 0^-} xe^{\frac{1}{x}} = 0$ luego f es continua en 0.

$\lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}}\left(1 - \dfrac{1}{x}\right) = 0$
Si $x > 0$

$$f'(x) = \frac{2x^2(x-3)}{(x-1)^3}$$

Asi como $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f'(0) = 0$ entonces $f'(x)$ es continua en 0. y $x = 0$ es un punto crítico de f.

Estudio en $x > 0$, $x \neq 1$
$f'(x) = 0$ ssi $x = 3$, además$f''(x) = \dfrac{12x}{(x-1)^4} > 0$ en $(0, \infty) \setminus \{1\}$ luego f es cóncava hacia arriba, $x = 0$ es un punto de inflexión y en $x = 3$ hay un mínimo relativo.
Asíntotas para $x > 0$.

- $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \infty$ asi en $x = 1$ tenemos asíntota vertical
- $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ luego f no tiene asíntotas horizontales

- $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2}{(x-1)^2} = 2$ y $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3}{(x-1)^2} - 2x = 4$ asi que $y = 2x+4$ es una asíntota oblicua

2. a) Encuentre una aproximación de $\text{Ln}(1,1)$ con un error menor a 10^{-5}.
   Solución:
   Notemos que $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{x^n}$ asi estimamos el error en el intervalo $I = \left[1, \dfrac{11}{10}\right]$ de la serie de taylor de $\ln(x)$ en torno a 1.
   $$|E_n(x)| = \frac{|f^{n+1}(c)||x-1|^{n+1}}{(n+1)!}$$
   donde $c \in I$
   $$|E_n(x)| \leq \frac{n!}{(n+1)!}|x-1|^{n+1} \leq \frac{1}{10^{n+1}n}$$
   considerando $n = 4$ basta para obtener la aproximacion pedida.
   Luego $p(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{4} \frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k$
   $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} \frac{-1^{k-1}}{k}(x-1)^k = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4$
   evaluando en $x = \frac{11}{10}$ obtenemos 0,095308333

   b) Un triángulo rectángulo variable ABC en el plano xy tiene su ángulo recto en el vértice B, un vértice A fijo en el origen, y el tercer vértice C sobre la parábola $y = 1 + \frac{7}{36}x^2$. El vértice B parte del punto $(0,1)$ en el tiempo $t = 0$ y se desplaza hacia arriba siguiendo el eje y a una velocidad constante de 2 $\frac{cm}{s}$. ¿Con qué rapidez crece el área del triángulo cuando $t = \dfrac{7}{2}$ segundos?
   Solución:
   El Area del triangulo esta dada por
   $$M(t) = \frac{|AB||BC|}{2}$$
   pero $|AB| = 1+2t$ y $|BC|$ es tal que $1 + 2t = 1 + \frac{7}{36}|BC|^2$ Asi
   $$M(t) = \frac{(1+2t)6\sqrt{\frac{2}{7}t}}{2}$$
   derivando
   $$\frac{dM}{dt}(t) = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\left(\frac{1}{2\sqrt{t}} + 3\sqrt{t}\right)$$
   y evaluando en $t = \frac{2}{7}$ obtenemos $\dfrac{dM}{dt}(\frac{2}{7}) = \dfrac{66}{7}$.

3. a) Demuestre las siguiente desigualdad:
   $$\frac{37}{252} < \int_1^3 \frac{1}{1+x^3}dx < \frac{11}{18}$$
   Solución: Considere la partición, asociada al intervalo $[1,3]$, $P = \{1,2,3\}$ y calculamos la suma superior e inferior de Riemann. Notemos que f(x) es una función dececiente en $[1,3]$ entonces $\inf\limits_{x\in(x_{i-1},x_i)} f(x) = f(x_i)$ y $\sup\limits_{x\in(x_{i-1},x_i)} f(x_{i-1})$ ademas $x_i - x_{i-1} = 1$ luego

$$s = \sum_{1,2} \text{ínf}(x_i) \cdot 1 = \frac{1}{9} + \frac{1}{28} = \frac{37}{252}$$

$$S = \sum_{1,2} \sup(x_{i-1}) \cdot 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{9} = \frac{11}{18}$$

b) Calcule el siguiente límite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{n^2 - k^2}$$

Solución: Notemos que

$$\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{n^2 - k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \sqrt{1 - \frac{k^2}{n^2}} = \sum_{k=1}^{n} \inf_{x \in (x_i, x_{i-1})} f(x)(x_i - x_{i-1})$$

donde $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ es decreciente en $(0,1)$ la función es integrable y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{n^2 - k^2} = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx$$

considerando que $f(x) > 0$ en tal intervalo, entonces podemos calcular la integral calculando el area bajo el grafico de f,en este caso un cuarto de la circulo unitario, $\frac{\pi}{4}$

c) Demuestre que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función acotada tal que para toda partición P, la suma de Riemann superior es igual a la suma de Riemann inferior, entonces la función es constante.

Solución: Tenemos que $s = S$ es decir, para cualquier particion $\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$

$$\sum_{k=1}^{n} (\sup f(x) - \text{ínf} f(x))(x_i - x_{i-1}) = 0$$

luego $a = \text{ínf} f(x) \leq f(x) \leq \sup f(x) = a \quad \forall x \in (x_{i-1}, x_i)$ como f es constante sobre cada intervalo, para cualquier intervalo, entonces f es constante.

120 MINUTOS.
NO HAY CONSULTAS.
JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS.
NO SE PUEDE RETIRAR DE LA SALA DURANTE LOS PRIMEROS 45 MINUTOS.