

## Capítulo 7

# Dinámica de cuerpos rígidos

Hasta ahora hemos estudiado a fondo la dinámica de partículas (o cuerpos que pueden analizarse como partículas). En el caso de las partículas, basta con conocer su posición para definir su estado actual. Los cuerpos pueden trasladarse (cambio de posición), pero además pueden rotar. Es decir, en el caso de cuerpos la posición no basta para definir su estado actual.

Todos los cuerpos son tridimensionales<sup>1</sup>. Si un cuerpo es relativamente delgado y todos sus movimientos y rotaciones están contenidos en el mismo plano del cuerpo; sólo entonces se puede hacer un análisis plano (2D), como muestra la Figura 7.1. Un sistema rígido de partículas con vinculaciones se comporta y analiza como un cuerpo rígido: puede trasladarse y rotar.

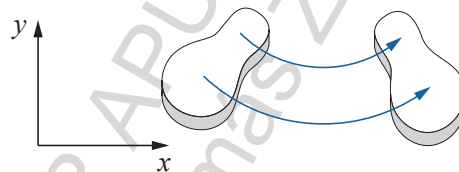


Figura 7.1: Cuerpo “plano” que se traslada y rota.

### 7.1. Momento (torque)

Las fueras que hemos estudiado hasta ahora tienden a mover un cuerpo en la misma dirección en que está aplicada la fuerza. Los *momentos*, también conocidos como *torque* o *momento torsor*, tienden a rotar un cuerpo sobre algún eje.

#### Recordatorio:

Los ingenieros civiles suelen referirse a este tipo de fuerza como *momento* y usan la letra **m**. Los físicos en cambio, suelen llamar a la misma fuerza *torque* y emplean la letra  $\tau$ .

Igualmente, en el caso de los textos/libros de dinámica: si el autor es más cercano a la ingeniería usará el término *momento*; mientras que si es más cercano a la física usará *torque*. El profesor de esta sección es un ingeniero civil (estructural), por lo que él está acostumbrado a usar la terminología *momento* (además que la sección ICE es de ingeniería). No obstante, se espera que usted se familiarice con ambas terminologías y evite confundir *momento* con *momentum*.

<sup>1</sup>Lo que es obvio al considerar que vivimos en un mundo tridimensional.

Pese a que el momento utiliza la misma letra que la masa ( $m$ ), el significado se suele desprender del contexto (y unidades). Además, el momento es una fuerza  $\mathbf{m}$  (vector), mientras que la masa es una magnitud  $m$  (escalar).

### 7.1.1. Momento respecto a un punto (2D)

Este es el caso de una fuerza actuando en el mismo plano de un cuerpo bidimensional, por lo que se puede simplificar el análisis a 2D. Si el cuerpo está “clavado” en un punto  $\mathbf{a}$ , entonces la fuerza intentará hacer rotar al cuerpo en torno a dicho punto. Es decir, existe un *momento* que hace rotar al cuerpo. La magnitud del momento es proporcional a la magnitud de la fuerza y al “brazo de momento”  $d$ :

$$|\mathbf{m}| = f d \quad (7.1)$$

, cuyas unidades son de (fuerza  $\cdot$  distancia), e.g.:  $kN \cdot m$ ,  $N \cdot cm$ ,  $N \cdot mm$  ... El momento es un vector que sale del plano:

$$\mathbf{m} = \pm m \hat{\mathbf{n}}$$

, cuyo signo se verá a continuación con la *regla de la mano derecha*. Para diferenciar un momento de una fuerza lineal (las fuerzas vistas hasta ahora) se puede utilizar una cabeza de flecha doble, como muestra la Figura 7.2; o bien una flecha que indica giro en torno a un eje.

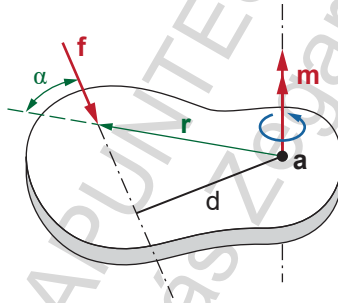


Figura 7.2: Cuerpo bidimensional “clavado” en el punto  $\mathbf{a}$  que tiende a rotar por la acción de la fuerza  $\mathbf{f}$ .

Es muy importante comprender que el “brazo de momento”  $d$  es la distancia del punto (de interés) a la línea de acción de la fuerza: es la distancia **mínima** y **perpendicular** a la línea de acción, como muestra la Figura 7.2.

Un error frecuente es considerar  $d$  como la distancia entre el punto de interés y el punto de aplicación de la fuerza, que en el caso de la Figura 7.2 corresponde a  $|\mathbf{r}|$ . Esto es un error ya que  $d \leq |\mathbf{r}|$ .

### 7.1.2. Momento en tres dimensiones

El momento causado por una fuerza  $\mathbf{f}$  respecto a un punto  $\mathbf{a}$  es:

$$\mathbf{m} = \mathbf{r} \times \mathbf{f} \quad (7.2)$$

, donde  $\mathbf{r}$  es el vector desde el punto  $\mathbf{a}$  al punto de aplicación de la fuerza<sup>2</sup>. El resultado de la ecuación anterior es un vector (que sale del plano) con el signo correcto.

<sup>2</sup>En realidad  $\mathbf{r}$  puede ser cualquier vector desde el punto  $\mathbf{a}$  a la línea de acción de la fuerza. Pero típicamente lo más sencillo es tomar  $\mathbf{r}$  al punto de aplicación de la fuerza (que suele ser conocido).

Notar que el caso 2D es una simplificación del caso tridimensional, ya que por propiedad del producto cruz, la magnitud del vector (normal) resultante es:

$$|\mathbf{m}| = f d = f r \sin \alpha$$

, donde  $\alpha$  está indicado en la Figura 7.2. Notar además que  $(r \cdot \sin \alpha = d)$  es en efecto la distancia mínima (o proyección perpendicular) de  $\mathbf{r}$ .

Cuando es posible determinar el brazo  $d$  con facilidad, suele ser mejor y más rápido usar  $\mathbf{m} = \pm m \hat{\mathbf{n}}$  y luego determinar el signo con la *regla de la mano derecha*. En el caso 3D se recomienda utilizar la ecuación vectorial  $\mathbf{m} = \mathbf{r} \times \mathbf{f}$ , aunque es también posible utilizar el método  $\mathbf{m} = \pm m \hat{\mathbf{n}}$  para cada uno de los tres planos (XY, YZ, y ZX), respectivamente, y luego componer el vector.

### 7.1.3. Regla de la mano derecha (RMD)

Para saber la dirección y sentido de un momento o una rotación (giro) se puede usar la *regla de la mano derecha* (RMD). El pulgar indica la dirección del vector (momento o giro), mientras que los otros dedos se curvan en la dirección de la rotación, como muestra la Figura 7.3. En el caso de un producto cruz ( $\mathbf{m} = \mathbf{r} \times \mathbf{f}$ ): los dedos se curvan desde el vector  $\mathbf{r}$  hacia  $\mathbf{f}$  en un plano (imaginario) que contiene a ambos vectores.



Figura 7.3: Regla de la mano derecha: los dedos se curvan en la dirección del giro (o de  $\mathbf{r}$  a  $\mathbf{f}$ ) y el pulgar apunta en la dirección del vector de giro/momento.

Una manera sencilla de estudiar y practicar en casa la convención de la RMD consiste en utilizar un perno y una tuerca: al girar la tuerca, la misma se desplazará en la dirección del vector.

La RMD requiere algo de práctica, y no es extraño ver personas curvando su mano en el aire mientras resuelven ejercicios (especialmente en cursos más avanzados como ICE2005, ICE2114 y otros). Pareciera obvio pero vale la pena recalcarlo: no se puede hacer la RMD con la mano izquierda. Los signos resultantes estarán invertidos.

Una vez que se domina la RMD será muy fácil responder preguntas como: “¿Hacia qué lado se suelta el tornillo/tuerca?”, “¿En qué dirección debo girar la llave de agua para abrirla/cerrarla?”, o “¿En qué dirección debo girar la tapa del recipiente para abrirlo?”.

### 7.1.4. Centro de masa

En un cuerpo de dimensiones no-despreciables se puede considerar que el peso total del cuerpo actúa de forma concentrada en una posición específica llamada *centro de masa*. La posición donde actúa el peso se puede hallar gracias al momento que produce dicho peso respecto a cualquier punto de referencia; e.g. el origen del sistema coordenado. La Figura 7.4(a) muestra un cuerpo cuyo peso

total del cuerpo es:

$$W = \int dw$$

Cada diferencial de peso  $dw$  aporta un pequeño momento respecto al origen, como muestra la Figura 7.4(a). La suma de todos los diferenciales de momentos calculados respecto al origen (de cada  $dw$ ) es:

$$\mathbf{m}_z = \int x dw \quad (7.3)$$

Llamando  $\bar{x}$  a la coordenada del centro de masa según el eje  $\hat{\mathbf{i}}$ , y ubicando en dicha posición el peso total del cuerpo  $W$ , como muestra la Figura 7.4(a); el momento producido por  $W$  es:

$$\mathbf{m}_z = W \bar{x} \quad (7.4)$$

Ambos momentos, aquel causado por los diferenciales de peso y el causado por  $W$ , deben ser iguales. Igualando las ecuaciones (7.3) y (7.4) se puede despejar la posición (en el eje  $\hat{\mathbf{i}}$ ) del centro de masa:

$$\bar{x} = \frac{\int x dw}{W} = \frac{\int x dw}{\int dw} \quad (7.5)$$

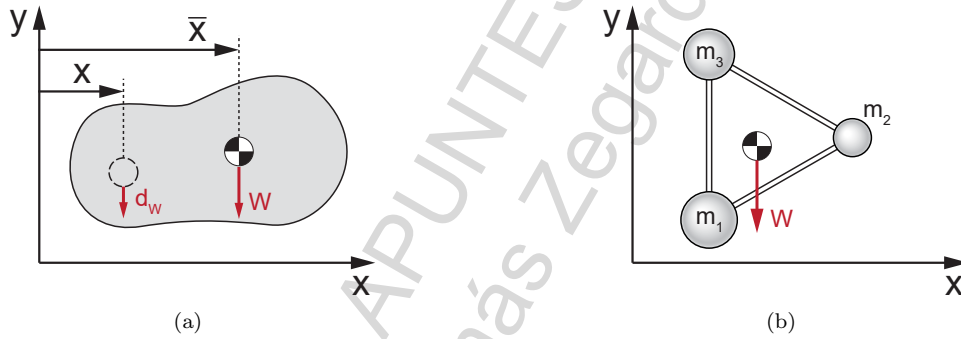


Figura 7.4: Ubicación  $\bar{x}$  del centro de masa tal que el momento  $\bar{x}W$  es igual a la sumatoria de diferenciales de momento de cada  $dw$ : (a) caso de un cuerpo de dimensiones no-despreciables; y (b) caso de un sistema rígido de partículas.

Un conjunto de partículas de masa  $m_i$  vinculadas rígidamente es también un cuerpo: el sistema rígido puede rotar, trasladarse, y tiene dimensiones no-despreciables. El cuerpo de la Figura 7.4(b) está compuesto por 3 partículas discretas, cada una con peso  $w_i = m_i \cdot g$ . El peso total del sistema de partículas de la figura es:

$$W = \int dw = \sum_{i=0}^3 w_i$$

Sumando la contribución al momento total de cada partícula del sistema se tiene:

$$\mathbf{m}_z = \sum_{i=0}^3 x_i w_i$$

Finalmente, la coordenada según  $\hat{\mathbf{i}}$  del centro de masa del sistema rígido de partículas es:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i w_i}{W} = \frac{\sum x_i w_i}{\sum w_i} \quad (7.6)$$

El peso  $dw$  actúa en la dirección  $-\hat{j}$ . El brazo de momento es la distancia mínima a su línea de acción, y corresponde a la coordenada  $x$  de  $dw$ . Esto es independiente de la *altura* (coordenada  $z$ ) donde se ubica  $dw$ .

Ambos casos de la Figura 7.4 son simplificaciones 2D. En ese caso el momento es un vector que sale del plano:  $\mathbf{m} = \pm m_z \hat{\mathbf{k}}$ . Para un peso  $dw$  que se encuentra a la derecha de  $x = 0$ , el momento será negativo según la regla de la mano derecha; mientras que si el peso se encuentra a la izquierda será positivo según la RMD.

Cuando se trata de cuerpos de dimensiones no-planarias, la aceleración de gravedad  $g$  será constante en todo el cuerpo. Con ello, se tiene que:

$$W = m g \quad dw = dm g$$

Es decir, las Ecuaciones (7.5) y (7.6) dependen directamente de la masa del cuerpo:

$$\text{caso continuo:} \quad \bar{x} = \frac{\int x dm}{\int dm} \quad (7.7)$$

$$\text{caso discreto:} \quad \bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot m_i}{\sum m_i} \quad (7.8)$$

Se puede girar el cuerpo  $90^\circ$  a la vez, o bien asumir que la aceleración de gravedad actúa según los ejes  $\hat{j}$  y luego  $\hat{k}$  para obtener expresiones análogas en los otros ejes coordenados:

$$\text{caso continuo:} \quad \bar{y} = \frac{\int y dm}{\int dm} \quad \bar{z} = \frac{\int z dm}{\int dm} \quad (7.9)$$

$$\text{caso discreto:} \quad \bar{y} = \frac{\sum y_i \cdot m_i}{\sum m_i} \quad \bar{z} = \frac{\sum z_i \cdot m_i}{\sum m_i} \quad (7.10)$$

Es interesante notar que el centro de masa (CM) podría ubicarse fuera del cuerpo (u objeto). Esto será frecuente con cuerpos cóncavos y en los sistemas rígidos de partículas.

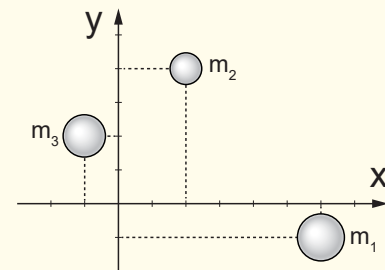
### Ejemplo

Determine el centro de masa y peso total del sistema rígido de partículas vinculadas que se muestra en la Figura. Las masas de las partículas son:

$$m_1 = 5 \quad m_2 = 3 \quad m_3 = 4$$

, y están ubicadas en:

$$\mathbf{x}_1 = \{5; -1\} \quad \mathbf{x}_2 = \{2; 4\} \quad \mathbf{x}_3 = \{-1; 2\}$$



Determinaremos la posición del CM en una dirección (eje coordenado) a la vez:

$$\bar{x} = \frac{(\mathbf{x}_1)_x \cdot m_1 + (\mathbf{x}_2)_x \cdot m_2 + (\mathbf{x}_3)_x \cdot m_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{(5)(5) + (2)(3) + (-1)(4)}{5 + 3 + 4} = \frac{9}{4} = 2,25$$

$$\bar{y} = \frac{(\mathbf{x}_1)_y \cdot m_1 + (\mathbf{x}_2)_y \cdot m_2 + (\mathbf{x}_3)_y \cdot m_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{(-1)(5) + (4)(3) + (2)(4)}{5 + 3 + 4} = \frac{5}{4} = 1,25$$

, y el peso total es:

$$W = (m_1 + m_2 + m_3) g = 12 \cdot g$$

Alternativamente, se puede determinar la posición del CM de forma vectorial (en todas las direcciones a la vez):

$$\bar{\mathbf{x}} = \{\bar{x}; \bar{y}\} = \frac{\mathbf{x}_1 \cdot m_1 + \mathbf{x}_2 \cdot m_2 + \mathbf{x}_3 \cdot m_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{\{5; -1\} \cdot 5 + \{2; 4\} \cdot 3 + \{-1; 2\} \cdot 4}{5 + 3 + 4}$$

$$\bar{\mathbf{x}} = \{\bar{x}; \bar{y}\} = \frac{\{27; 15\}}{12} = \{2,25; 1,25\}$$

### Ejemplo

Basado en McGill & King 4<sup>th</sup> ed, Example 2.1

Una barra uniforme y prismática de densidad  $\rho$  y largo  $2L$  es deformada de modo que la mitad derecha está comprimida a una longitud  $L/2$ , sin variar su sección (transversal); como muestra la figura. Determine la ubicación del CM en la configuración deformada.

Método 1: composición de mitades con CM conocidos.

Cada mitad tiene masa  $m_l = m_r = L \cdot a \cdot \rho$ , donde  $a$  es el área de la sección transversal de la barra (uniforme según el enunciado). Se puede representar cada mitad como una partícula con su masa concentrada en su punto medio:

$$\bar{x} = \frac{m_l (L/2) + m_r (5L/4)}{m_l + m_r} = \frac{L A \rho \left( \frac{2L+5L}{4} \right)}{2L A \rho} = \frac{7L}{8}$$

Método 2: cuerpo continuo con  $\rho$  variable.

La masa total de la barra es:

$$m = \int_0^L \rho \cdot a \, dx + \int_L^{3L/2} (2\rho) a \, dx = 2L a \rho$$

, mientras que el promedio ponderado de los diferenciales de masa (asociado al momento):

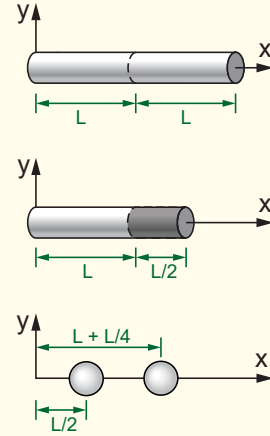
$$m \bar{x} = \int_0^L \rho \cdot a \cdot x \, dx + \int_L^{3L/2} (2\rho) a \cdot x \, dx = \left[ \frac{L^2 a \rho}{2} - 0 \right] + \left[ \frac{9L^2 a \rho}{4} - L^2 a \rho \right]$$

$$= \frac{9L^2 a \rho}{4} - \frac{L^2 a \rho}{2} = \frac{7L^2 a \rho}{4}$$

Finalmente, el centro de masa se ubica en:

$$\bar{x} = \frac{m \bar{x}}{m} = \left( \frac{7L^2 a \rho}{4} \right) \left( \frac{1}{2L a \rho} \right) = \frac{7L}{8}$$

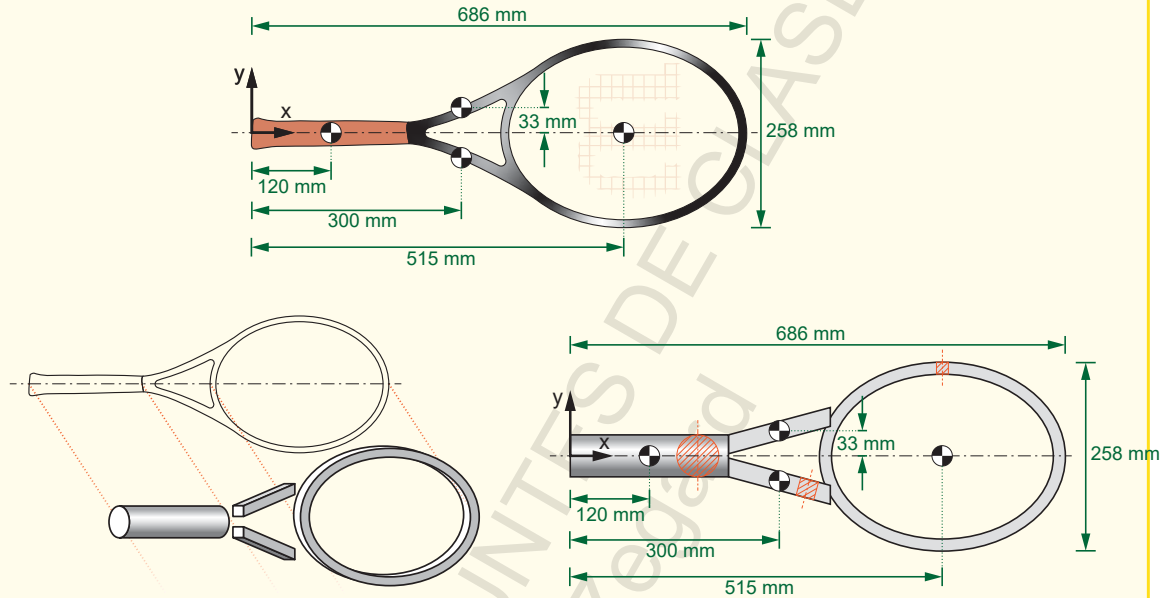
**Nota:** En el caso de un cuerpo compuesto por 2+ piezas de densidad variable: para cada pieza se puede determinar la masa y centro de masa usando la expresión integral. Luego se pueden combinar como si fueran cuerpos discretos.



## Ejemplo

La raqueta de Pete Sampras del 2008, la *K Pro Staff 88*, se puede idealizar como un anillo elipsoidal de 146 gr de masa, dos tubos diagonales de 22 gr cada uno, y un mango de 154 gr. El encordado ocupa el área elipsoidal y tiene 17 gr de masa. El despiece de la raqueta y sus dimensiones se muestran en la figura a continuación.

Determine la ubicación  $\bar{\mathbf{r}} = \{\bar{x}; \bar{y}\}$  del centro de masa.



Sabemos inmediatamente que  $\bar{y} = 0$  debido a que el cuerpo es simétrico respecto a  $y = 0$ .

El centro de masa del anillo elipsoidal  $\bar{\mathbf{r}}_e$  y del encordado  $\bar{\mathbf{r}}_c$  coinciden con el centro de la elipse:

$$\bar{\mathbf{r}}_e = \bar{\mathbf{r}}_c = \{515 \text{ mm}; 0\}$$

Para simplificar los cálculos, unificaremos las 2 diagonales en un nuevo cuerpo con masa 44 gr y cuyo CM está en:

$$\bar{\mathbf{r}}_d = \{300 \text{ mm}; 0\}$$

Finalmente, calculamos la coordenada  $x$  del CM de la raqueta componiendo 4 cuerpos discretos:

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}_h \cdot m_h + \bar{x}_d \cdot m_d + \bar{x}_e \cdot m_e + \bar{x}_c \cdot m_c}{\sum m_i}$$

$$\bar{x} = \frac{(154)(120) + (44)(300) + (146)(515) + (17)(515)}{154 + 44 + 146 + 17} = \frac{115625}{361} = 320,3 \text{ mm}$$

Es decir, el CM de la raqueta se encuentra en  $\bar{\mathbf{r}} = \{320,3 \text{ mm}; 0 \text{ mm}\}$ .

**Nota:** Los componentes de un cuerpo se pueden combinar en etapas si eso le sirve para simplificar los cálculos. En este ejemplo se combinaron dos cuerpos (las diagonales) previo a combinar con el resto de las partes.

**Ejemplo**

Pete Sampras sujeta su raqueta a 70,3 mm del extremo y la tiene quieta como muestra la figura. Determine el momento (torque) que él siente sobre su mano. Asuma que  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

Sabemos del ejemplo anterior que la masa de la raqueta es  $m = 361 \text{ gr}$ , y con ello su peso es:

$$W = 3,61 \text{ N}$$

El brazo de momento  $d$  es la distancia más corta y perpendicular al eje de acción de la fuerza, en este caso el peso. Es decir, por geometría el brazo de momento  $d$  es:

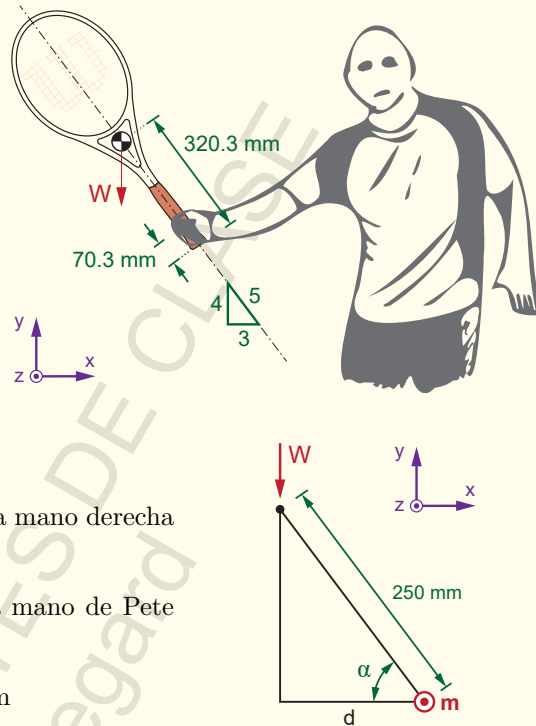
$$d = 250 \cdot \cos \alpha = (250) \left( \frac{3}{5} \right) = 150 \text{ mm}$$

El signo del momento es positivo según la regla de la mano derecha (sentido contrarreloj o saliendo del plano):  $\odot$ .

Finalmente, la raqueta ejerce un momento sobre la mano de Pete Sampras igual a:

$$\mathbf{m} = + (0,15) (3,61) \hat{\mathbf{k}} = 0,5415 \hat{\mathbf{k}} \text{ N} \cdot \text{m}$$

**Nota:** En este ejemplo la raqueta ejerce un momento igual a  $\mathbf{m} = 0,5415 \hat{\mathbf{k}} \text{ N} \cdot \text{m}$  sobre la mano del jugador. Para mantener la raqueta quieta, es decir con aceleración angular  $\alpha = 0$ , el jugador debe ejercer un momento igual pero con signo contrario  $\mathbf{r}_\theta = -0,5415 \hat{\mathbf{k}} \text{ N} \cdot \text{m}$ . La fuerza (o momento) que ejerce la mano  $\mathbf{r}_\theta$  para balancear el momento  $\mathbf{m}$  se llama *reacción*. Esto es análogo a lo que ocurre con un objeto sobre una superficie: el objeto ejerce una fuerza de peso sobre la superficie, mientras que la superficie ejerce una reacción para balancear el peso, *la normal*.

**Ejemplo**

Meriam: Statics 8<sup>th</sup> ed, Problem 2/37

Una persona levanta la esquina de un “hot tub” (jacuzzi exterior) para hacerle mantenimiento. Determine el momento causado por la fuerza de 350 N respecto al punto O. Desprecie el espesor de la palanca.

Método 1:  $m = \pm f \cdot d$

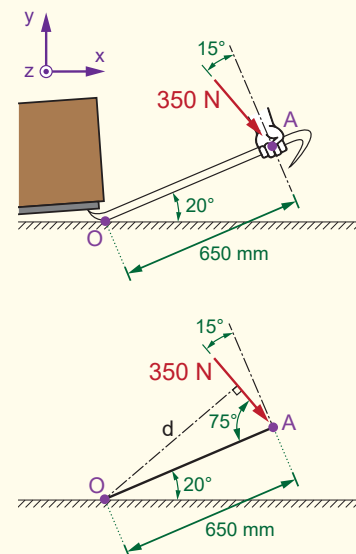
Usando la regla de la mano derecha vemos que la fuerza produce un momento negativo respecto al punto O:  $\otimes$ .

El brazo de momento  $d$  (menor distancia a la línea de acción de la fuerza) se obtiene de la geometría del problema:

$$d = 650 \cdot \sin(75^\circ) = 627,9 \text{ mm}$$

Finalmente, el momento respecto al punto O es:

$$\mathbf{m} = - (0,6279) (350) \hat{\mathbf{k}} = -219,7 \hat{\mathbf{k}} \text{ N} \cdot \text{m}$$





Método 2:  $\mathbf{m} = \mathbf{r} \times \mathbf{f}$ 

El vector  $\mathbf{r}$  va desde el punto de interés  $O$  hasta el punto de aplicación de la fuerza  $A$ :

$$\mathbf{r} = (0,65) \left[ \cos(20^\circ) \hat{\mathbf{i}} + \sin(20^\circ) \hat{\mathbf{j}} \right]$$

El vector de fuerza es:

$$\mathbf{f} = (350) \left[ \sin(35^\circ) \hat{\mathbf{i}} - \cos(35^\circ) \hat{\mathbf{j}} \right]$$

Finalmente, el momento respecto al punto  $O$  es:

$$\mathbf{m} = \mathbf{r} \times \mathbf{f} = \det \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 0,611 & 0,222 & 0 \\ 200,8 & -286,7 & 0 \end{bmatrix} = -219,7 \hat{\mathbf{k}} \text{ N} \cdot \text{m}$$

## 7.2. Momentum angular

Dada una partícula de masa  $m$  que se mueve en el plano  $XY$  con velocidad  $\mathbf{v}$ , entonces su *momentum angular* respecto a un punto  $O$  es igual al “momento causado por su momentum” llamado  $\mathbf{H}_O$ , como muestra la Figura 7.5. En este caso  $\mathbf{H}_O$  sólo tiene la componente  $z$  distinta de cero:

$$(\mathbf{H}_O)_z = \pm (d)(mv) \quad \leftarrow \text{momento de momentum}$$

, lo que de forma vectorial es:

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \times (m \mathbf{v}) \quad (7.11)$$

Las unidades de momentum angular son  $\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$  o similares.

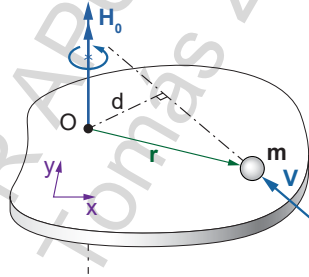


Figura 7.5: Partícula de masa  $m$  que se mueve en el plano  $XY$  con velocidad  $\mathbf{v}$ , y el *momentum angular*  $\mathbf{H}_O = H_O \hat{\mathbf{k}}$  que genera respecto a un punto  $O$ .

### 7.2.1. Relación entre momento y momentum angular

Si la masa de una partícula es constante, entonces la 2ª Ley de Newton dice:

$$\sum \mathbf{f} = m \dot{\mathbf{v}}$$

El momento causado por la resultante de fuerzas  $\sum \mathbf{f}$  respecto a un punto  $O$  es:

$$\sum \mathbf{m} = \mathbf{r} \times \sum \mathbf{f} = \mathbf{r} \times (m \dot{\mathbf{v}})$$

, que no es más que pre-cruz-multiplicar ambos lados por  $\mathbf{r}$ . Por otro lado, tenemos la definición de momentum angular de la Ecuación (7.11). Tomando la derivada temporal de dicha expresión:

$$\dot{\mathbf{H}}_O = \dot{\mathbf{r}} \times (m \mathbf{v}) + \mathbf{r} \times (m \dot{\mathbf{v}})$$

Como  $\mathbf{r}$  es un vector desde el origen a la posición actual de la masa  $m$ , entonces  $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$  y con ello:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{H}}_O &= m \underbrace{(\mathbf{v} \times \mathbf{v})}_{=0} + \mathbf{r} \times (m \dot{\mathbf{v}}) \\ \dot{\mathbf{H}}_O &= \sum \mathbf{m}\end{aligned}\quad (7.12)$$

, que es análogo al caso de momentum (lineal) visto en la Ecuación (6.3).

El subíndice  $O$  en  $\mathbf{H}_O$  indica que el momentum angular está calculado respecto a dicho punto. En la Ecuación (7.12), todos los momentos  $\mathbf{m}$  en la sumatoria se deben calcular respecto al mismo punto  $O$ .

**Recordatorio:** La Sección 2.1 explica que si  $\mathbf{r}$  es la posición, entonces  $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$ .

Integrando la Ecuación (7.12) entre instantes  $t_1$  y  $t_2$  se llega a la ley de impulso-momentum en su versión angular:

$$(\mathbf{H}_O)_1 + \sum_i \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{m}_i dt = (\mathbf{H}_O)_2 \quad (7.13)$$

, donde el *impulso angular* también puede escribirse en términos de las fuerzas que causan los momentos:

$$(\mathbf{H}_O)_1 + \sum_i \int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i) dt = (\mathbf{H}_O)_2$$

La Ecuación (7.13) es vectorial: nos entrega 3 ecuaciones adicionales asociadas a los giros  $\theta_x$ ,  $\theta_y$ , y  $\theta_z$ . Las 3 nuevas ecuaciones de impulso y momentum angular (Ecuación (7.13)) se suman a las 3 ecuaciones de impulso y momentum lineal vistas anteriormente (Sección 6.1). Es decir, para un problema en tres dimensiones se tiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{1x} + \sum_i \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f}_{ix} dt &= \mathbf{L}_{2x} & (\mathbf{H}_O)_{1x} + \sum_i \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{m}_{ix} dt &= (\mathbf{H}_O)_{2x} \\ \mathbf{L}_{1y} + \sum_i \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f}_{iy} dt &= \mathbf{L}_{2y} & (\mathbf{H}_O)_{1y} + \sum_i \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{m}_{iy} dt &= (\mathbf{H}_O)_{2y} \\ \mathbf{L}_{1z} + \sum_i \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f}_{iz} dt &= \mathbf{L}_{2z} & (\mathbf{H}_O)_{1z} + \sum_i \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{m}_{iz} dt &= (\mathbf{H}_O)_{2z} \end{aligned}$$

### 7.2.2. Conservación de momentum angular

Cuando la suma de impulsos angulares actuando sobre un sistema es cero; el momentum angular inicial y final del sistema no varía. Es decir:

$$(\mathbf{H}_O)_1 = (\mathbf{H}_O)_2 \quad \text{cuando} \quad \sum \mathbf{m} = 0 \quad (7.14)$$

Esta ecuación representa la *conservación de momentum angular*, y es análoga a la presentada en la Sección 6.2. La conservación de momentum angular ocurre frecuentemente cuando una partícula está sometida a una *fuerza central*: el momento que una fuerza central genera respecto a su punto central es siempre cero ya que el brazo de momento es cero.

### 7.2.3. Principio de impulso-momentum angular en 2D

En este curso es frecuente que los problemas que involucran giros sean bidimensionales debido a la dificultad que el análisis de rotaciones presenta para los alumnos. No obstante, se debe tener en cuenta que esto corresponde a un caso simplificado y particular.

Cuando un problema se puede analizar en 2D (los movimientos del cuerpo/partícula están contenidos en el plano); las traslaciones se encuentran en el plano XY, mientras que los giros están en el eje Z (según  $\hat{\mathbf{k}}$ ). Es decir, uno cuenta con las siguientes 3 ecuaciones de impulso-momentum:

$$\begin{aligned} m(\mathbf{v}_x)_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f}_x dt &= m(\mathbf{v}_x)_2 \\ m(\mathbf{v}_y)_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f}_y dt &= m(\mathbf{v}_y)_2 \\ (\mathbf{H}_O)_{1z} + \sum \int_{t_1}^{t_2} m_z dt &= (\mathbf{H}_O)_{2z} \end{aligned}$$

En el caso particular en que el impulso angular  $\sum \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{m}_z dt$  es cero, entonces se conserva el momentum angular entre  $t_1$  y  $t_2$ :

$$(\mathbf{H}_O)_{1z} = (\mathbf{H}_O)_{2z} \quad \text{cuando} \quad \sum \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{m}_z dt = 0 \quad (7.15)$$

El momentum angular fue aquí derivado y estudiado para sistemas de *partículas*. Esto contradice el nombre del presente capítulo en que se supone estudiaríamos la dinámica de *cuerpos rígidos*. Se pide al lector paciencia al respecto; la progresión de partículas a cuerpos ocurrirá muy pronto.

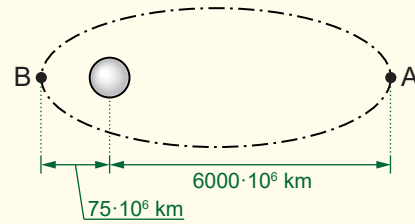
### Ejemplo

Meriam 9<sup>th</sup> ed, Sample Problem 3/25

Un cometa orbita alrededor del sol en una órbita muy excéntrica. La rapidez del cometa es  $v_A = 740 \text{ m/s}$  en el punto más lejano al sol (punto A). Determine la rapidez del cometa en el punto más cercano al sol (punto B).

La única fuerza que actúa sobre el cometa es la fuerza de gravedad ejercida por el sol (fuerza de tipo *central*).

Como la fuerza siempre apunta al centro del sol, ésta no produce momento respecto al mismo sol. Es decir, el momentum angular respecto al sol se conserva.



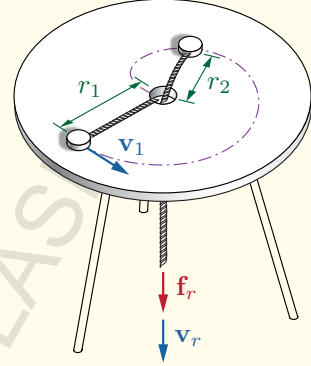
$$\begin{aligned} (H_O)_A &= (H_O)_B \\ r_A (m v_a) &= r_B (m v_B) \\ \rightarrow v_B &= \left( \frac{r_A m}{r_B m} \right) v_a = \left( \frac{6000 \cdot 10^6}{75 \cdot 10^6} \right) (740) = (80) (740) = 59200 \text{ m/s} \end{aligned}$$

## Ejemplo

Basado en Hibbeler 14<sup>th</sup> ed, Example 15.14

Un disco de 0,5 kg gira con velocidad  $\mathbf{v}_{1\theta} = 1 \text{ m/s}$  y radio constante  $r_1 = 0,9 \text{ m}$  (movimiento circular) sobre una mesa sin roce. El disco está sujeto por una cuerda que pasa por un orificio al centro de la mesa. Sobre la cuerda se aplica una fuerza  $\mathbf{f}_r$  que recoge la cuerda por el agujero a velocidad  $\mathbf{v}_r = 4 \text{ m/s}$  (constante). Se pide determinar:

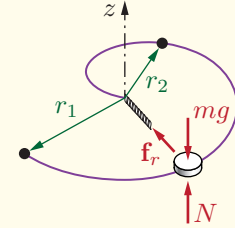
- La velocidad (vector) y rapidez del disco cuando el radio es  $r_2 = 0,3 \text{ m}$ .
- El trabajo hecho por la fuerza  $\mathbf{f}_r$  al reducir el radio de  $r_1$  a  $r_2$ .



Comenzamos haciendo un DCL del problema, donde se muestra el disco y todas las fuerzas que actúan sobre él en su trayecto desde  $r_1$  a  $r_2$ , y se ubica el eje  $\hat{\mathbf{k}}$  en el centro de la mesa.

Las fuerzas en el eje  $\hat{\mathbf{k}}$  son  $mg$  y  $N$ : iguales pero de signo contrario porque el disco no acelera en el eje  $\hat{\mathbf{k}}$ . Es decir, no generan momento respecto al eje  $\hat{\mathbf{k}}$  porque: (1) se cancelan; y (2) porque de generar momento lo harían en el plano XY.

En este caso la magnitud de la fuerza  $\mathbf{f}_r = -f \hat{\mathbf{e}}_r$  varía a medida que acortamos el radio, pero no genera momento respecto al centro de la mesa en el eje Z: su brazo de momento es cero (fuerza central). Es decir, el momentum angular respecto al eje Z se conserva.



La velocidad del disco es  $\mathbf{v} = v_r \hat{\mathbf{e}}_r + v_\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta$ . Inicialmente la velocidad no tiene componente radial (movimiento circular):

$$\mathbf{v}_1 = 1 \hat{\mathbf{e}}_\theta \text{ m/s}$$

En la segunda posición, cuando  $r = r_2$ , se tiene que  $v_r = -4 \text{ m/s}$  y con ello:

$$\mathbf{v}_2 = -4 \hat{\mathbf{e}}_r + v_{2\theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta$$

Recordando que el momentum angular es el “momento de un momentum (lineal)”, entonces sólo  $v_\theta$  contribuye al momentum angular (el momentum  $m v_r$  no genera momento respecto al centro de la mesa). Debido a que el momentum angular se conserva, se tiene que:

$$\begin{aligned} (H_O)_1 &= (H_O)_2 \\ r_1 (m v_{1\theta}) &= r_2 (m v_{2\theta}) \\ \rightarrow v_{2\theta} &= \left( \frac{r_1}{r_2} \right) v_{1\theta} = \left( \frac{0,9}{0,3} \right) (1) = 3 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Es decir, la velocidad de la masa en  $r_2 = 0,3 \text{ m}$  es:

$$\mathbf{v}_2 = -4 \hat{\mathbf{e}}_r + 3 \hat{\mathbf{e}}_\theta \text{ m/s}$$

, cuya magnitud (rapidez) es  $v_2 = |\mathbf{v}_2| = \sqrt{(-4)^2 + (3)^2} = 5 \text{ m/s}$ .

Como no hay desplazamiento en  $\hat{\mathbf{k}}$  del disco, las fuerzas de peso  $mg$  y normal  $N$  no hacen trabajo. La única que fuerza que hace trabajo en el sistema es  $\mathbf{f}_r$ , con lo que aplicando el principio de energía

y trabajo:

$$\underbrace{V_1}_{=0} + T_1 + \underbrace{U_{12}^*}_{\text{trabajo de } f_r} = \underbrace{V_2}_{=0} + T_2$$

$$\frac{1}{2} m |\mathbf{v}_1|^2 + U_{12}^* = \frac{1}{2} m |\mathbf{v}_2|^2$$

$$U_{12}^* = \frac{1}{2} m (|\mathbf{v}_2|^2 - |\mathbf{v}_1|^2) = \left(\frac{1}{2}\right) (0,5) (25 - 1) = 6 \text{ N} \cdot \text{m} = 6 \text{ J}$$

### Ejemplo

Basado en Meriam 9<sup>th</sup> ed, Problem 3/188

Una bola de plastilina  $m_1$  con velocidad horizontal inicial  $v_1$  golpea y se adhiere a una barra rígida de masa despreciable que soporta una masa  $m_2$ , la que se puede asumir como una partícula. El péndulo es libre de rotar en el pivote en  $O$  y está inicialmente en reposo.

- Determine la velocidad angular  $\dot{\theta}$  del sistema combinado el instante después del impacto.
- ¿Por qué no se conserva el momentum lineal del sistema?

El primer paso consiste en hacer un DCL del sistema barra-plastilina. El impacto genera un par de fuerzas idénticas, pero con signo contrario en el sistema péndulo-plastilina (fuerzas de colisión), que debido a que se cancelan no generan momento. Las fuerzas de reacción en el pivote en  $O$  llamadas  $r_x$  y  $r_y$  no generan momento respecto a  $O$ , y tampoco lo hacen  $m_1 g$  y  $m_2 g$ .

Es decir, respecto al punto  $O$  se conserva el momentum angular antes y después de la colisión ya que  $\sum \int m \, dt = 0$ . Es decir:

$$(H_O)_1 = (H_O)_2$$

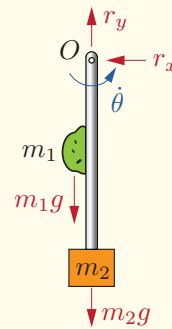
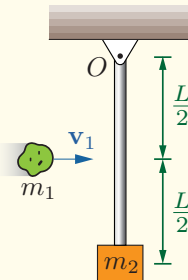
$$\left(\frac{L}{2}\right) \underbrace{(m_1 \cdot v_1)}_{\text{momentum lineal}} = \left(\frac{L}{2}\right) \underbrace{\left[m_1 \left(\frac{L}{2} \cdot \dot{\theta}\right)\right]}_{\text{momentum lineal}} + (L) \underbrace{\left[m_2 (L \cdot \dot{\theta})\right]}_{\text{momentum lineal}}$$

Los momentum angulares son todos positivos según la *regla de la mano derecha*. Simplificando y despejando  $\dot{\theta}$ :

$$2 m_1 v_1 = m_1 L \dot{\theta} + 4 m_2 L \dot{\theta}$$

$$\dot{\theta} = \frac{2 m_1 v_1}{m_1 L + 4 m_2 L} = \left(\frac{2 m_1}{m_1 + 4 m_2}\right) \frac{v_1}{L}$$

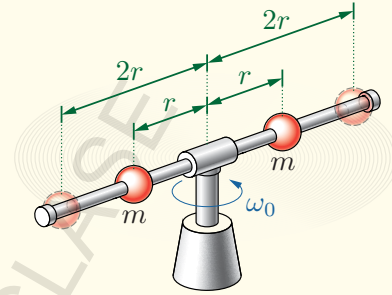
El momentum lineal no se conserva porque existen reacciones  $r_x$  y  $r_y$  en el pivote del péndulo que producen impulsos sobre el sistema.



**Ejemplo**

Basado en Meriam 9<sup>th</sup> ed, Problem 3/184

Dos esferas de igual masa  $m$  pueden deslizar por una barra sin roce y de masa despreciable. La barra inicialmente rota con velocidad angular  $\omega_0$  y con las dos esferas retenidas a una distancia  $r$  del eje de rotación. En cierto instante las esferas se liberan y asumen una nueva posición a distancia  $2r$  del eje de rotación. Se pide determinar:



- La nueva velocidad angular  $\omega$  después que se liberan las esferas.
- La fracción de la energía cinética inicial  $n = |\Delta T/T_1|$  que se pierde.

Las fuerzas de choque cuando las esferas llegan al extremo de la barra, y luego la fuerza centrípeta que mantiene a las esferas girando con radio constante; no generan momento en torno al eje de rotación. Es decir, se conserva el momentum angular en torno a dicho eje y con ello:

$$(H_0)_1 = (H_0)_2$$

$$(r) \left[ (2m) \underbrace{(r \omega_0)}_{v_1} \right] = (2r) \left[ (2m) \underbrace{(2r \omega)}_{v_2} \right]$$

$$\omega = \frac{\omega_0}{4}$$

La energía cinética inicial es:

$$T_1 = (2) \left[ \frac{1}{2} m (r \omega_0)^2 \right] = m r^2 \omega_0^2$$

La energía cinética final es:

$$T_2 = (2) \left[ \frac{1}{2} m \left( 2r \frac{\omega_0}{4} \right)^2 \right] = \frac{1}{4} m r^2 \omega_0^2$$

La variación de energía es:

$$\Delta T = T_2 - T_1 = -\frac{3}{4} m r^2 \omega_0^2$$

El valor negativo indica que se ha perdido energía. Finalmente, la fracción de la energía cinética inicial que se ha perdido es:

$$n = \left| \frac{\Delta T}{T_1} \right| = \frac{3}{4}$$

### 7.3. Cinemática rotacional

El Capítulo 2 tuvo enfoque en la cinemática de partículas, la cual es sólo traslacional. Un cuerpo en cambio, puede trasladarse y rotar al mismo tiempo. En ciertas situaciones ambos movimientos (rotación y traslación) estarán ligados o vinculados (e.g. una rueda que gira sin deslizar o un yo-yo).

La cinemática de traslación se extiende directamente a la cinemática de rotación de un cuerpo. La cinética, principio de trabajo-energía, y principio de impulso-momentum se extienden también a cuerpos, pero falta derivar un término equivalente a la masa asociada a la rotación (no es igual a la masa).

Dado un sólido de dimensiones no-despreciables (un *cuerpo*), podemos aplicar las mismas ecuaciones que hemos usado para cinemática traslacional de partículas, pero en el sentido rotacional:

| Tipo de cinemática | Posición              | Velocidad  | Aceleración  |
|--------------------|-----------------------|--|--|
| Traslacional       | $\mathbf{u}$          | $\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{v}$                   | $\ddot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{v}}, \mathbf{a}$                            |
| Rotacional         | $\boldsymbol{\theta}$ | $\dot{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\omega}$ | $\ddot{\boldsymbol{\theta}}, \dot{\boldsymbol{\omega}}, \boldsymbol{\alpha}$ |

, donde  $\Delta\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_2 - \boldsymbol{\theta}_1 =$  desplazamiento angular;  
 $\boldsymbol{\omega} =$  velocidad angular;  
 $\boldsymbol{\alpha} =$  aceleración angular.

La cinemática rotacional funciona de la misma forma que la traslacional. Es decir, la derivada de la posición  $\boldsymbol{\theta}$  es la velocidad  $\boldsymbol{\omega}$ , y la derivada de la velocidad  $\boldsymbol{\omega}$  es la aceleración angular  $\boldsymbol{\alpha}$ . Así mismo, la solución para el caso particular de aceleración constante tiene la misma forma:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}(t) &= \boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\alpha} t \\ \boldsymbol{\theta}(t) &= \boldsymbol{\theta}_0 + \boldsymbol{\omega}_0 t + \frac{1}{2} \boldsymbol{\alpha} t^2\end{aligned} \quad \leftarrow \quad \text{sólo cuando } \boldsymbol{\alpha} = \text{const}$$

En caso en que  $\boldsymbol{\alpha} \neq \text{const}$  se debe resolver la EDO al igual que en el caso traslacional.

### 7.3.1. Cinemática rotacional en 2D

La velocidad y aceleración que describe un punto  $A$  de un cuerpo que gira sobre un determinado eje en  $O$  es:

$$v = r\omega \quad (7.16a)$$

$$a_n = -a_r = r\omega^2 = v^2/r = v\omega \quad (7.16b)$$

$$a_t = a_\theta = r\alpha \quad (7.16c)$$

Estas expresiones son idénticas a las de una partícula en movimiento circular. En el caso 2D, las ecuaciones anteriores demuestran que es posible trabajar con los giros como magnitudes escalares, donde los signos se obtienen de acuerdo a la “regla de la mano derecha”. Es crítico comprender que pese a poder analizar los giros de forma escalar, los giros son en realidad vectores  $\boldsymbol{\theta}$ ,  $\boldsymbol{\omega}$ , y  $\boldsymbol{\alpha}$ , que salen o entran del plano. Las componentes de los vectores de velocidad y aceleración se muestran gráficamente en la Figura 7.6.

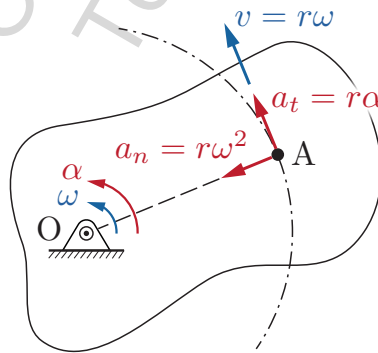


Figura 7.6: Cinemática rotacional en 2D: velocidad y aceleración para un punto  $A$  a distancia  $r$  del eje de rotación.

El término de aceleración  $a_t = r\alpha$  podría parecer demasiado sencillo, al igual que el término radial  $a_n = -a_r = r\omega^2$ , pero su derivación es sencilla. Debido a que un cuerpo que no se deforma, entonces

$\ddot{r} = \dot{r} = 0$ , y las expresiones en coordenadas polares se simplifican:

$$\mathbf{v} = \dot{r} \hat{\mathbf{e}}_r + r \dot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta = r \dot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta$$

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \hat{\mathbf{e}}_r + (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}) \hat{\mathbf{e}}_\theta = -r \omega^2 \hat{\mathbf{e}}_r + r \alpha \hat{\mathbf{e}}_\theta$$

### 7.3.2. Cinemática rotacional en 3D

Cuando no es posible simplificar la dinámica del problema a un plano 2D es conveniente utilizar operaciones vectoriales. La Figura 7.7 explica gráficamente la relación entre los vectores de giro y la velocidad y aceleración de un punto  $A$  cualquiera en un cuerpo. Es decir:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (7.17a)$$

$$\mathbf{a}_n = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = -\omega^2 \mathbf{r} \quad (7.17b)$$

$$\mathbf{a}_t = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} \quad (7.17c)$$

El vector de aceleración completo es:  $\mathbf{a} = \mathbf{a}_n + \mathbf{a}_t = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} - \omega^2 \mathbf{r}$ .

Notar que  $\mathbf{r}$  es el vector perpendicular desde el eje de rotación al punto  $A$ . Este vector se encuentra (necesariamente) contenido en el plano de rotación del punto  $A$  y su norma es la distancia mínima de  $A$  al eje de rotación.

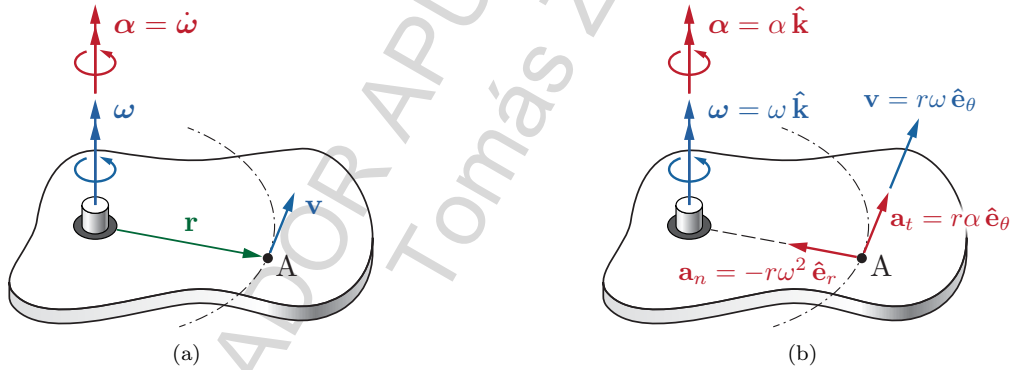


Figura 7.7: Cinemática rotacional de un punto  $A$  ubicado a  $\mathbf{r}$  del eje de rotación, el cual es perpendicular al eje de rotación: (a) vectores de velocidad angular  $\boldsymbol{\omega}$ , aceleración angular  $\boldsymbol{\alpha}$ , y velocidad  $\mathbf{v}$ ; (b) cálculo de los vectores de aceleración normal  $\mathbf{a}_n$  y tangencial  $\mathbf{a}_t$ , y el vector de velocidad  $\mathbf{v}$ .

Operar de forma vectorial con las rotaciones tiene como ventaja que no hay que usar la “regla de la mano derecha”; i.e. los signos estarán siempre correctos. No obstante, un producto cruz suele requerir mayor cantidad de cálculos (a menos que se utilice una calculadora).

En este curso no es común evaluar la cinemática 3D (vectorial) en los instrumentos de evaluación.



**Ejemplo**

Basado en Pytel & Kiusalaas 3<sup>rd</sup> ed, Sample Problem 16.4

Una rueda de radio  $R$  rueda sin deslizar girando en sentido horario con velocidad angular  $\bar{\omega}$ , es decir  $\boldsymbol{\omega} = -\bar{\omega} \hat{\mathbf{k}}$ . Para la posición que muestra la figura, se pide determinar el vector de velocidad para:

- El punto  $A$
- El punto  $B$

Gracias a que la rueda gira sin deslizar, existe una “ligadura” o “movimiento dependiente” entre el giro y la traslación de la rueda (también llamada condición de “rodadura”). Es importante ser consistente con los signos según los ejes coordenados: un giro en  $-\hat{\mathbf{k}}$ , es decir  $\otimes$ , produce un desplazamiento de la rueda según  $+\hat{\mathbf{i}}$ . Es decir, la coordenada  $x$  del centro  $O$  de la rueda es:

$$x = x_0 + s = x_0 - \theta R$$

Notar que en la expresión anterior un valor  $\theta < 0$  produce un desplazamiento positivo, i.e.,  $\Delta x > 0$ .

Derivando la “ligadura” (o condición de rodadura) respecto al tiempo, se obtiene una relación entre la velocidad del centro de la rueda  $\mathbf{v}_O$  y su velocidad angular  $\boldsymbol{\omega}$ :

$$\mathbf{v}_O = -\omega R \hat{\mathbf{i}}$$

La velocidad angular en nuestro caso es  $\boldsymbol{\omega} = -\bar{\omega} \hat{\mathbf{k}}$  (negativo por ser en sentido horario), y con ello:

$$\mathbf{v}_O = \bar{\omega} R \hat{\mathbf{i}}$$

La velocidad del punto  $A$  es igual a la velocidad del centro de la rueda  $O$ , sumado a la velocidad de  $A$  respecto a  $O$  (asumiendo este último como fijo):

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_O + \mathbf{v}_{A/O} = \underbrace{v_O = \bar{\omega} R}_{\rightarrow} + \underbrace{\bar{\omega} R}_{\curvearrowright}$$

Es decir:

$$\mathbf{v}_A = (\bar{\omega} R) \hat{\mathbf{i}} + (\bar{\omega} R) \hat{\mathbf{j}}$$

Similarmente, la velocidad del punto  $B$  es:

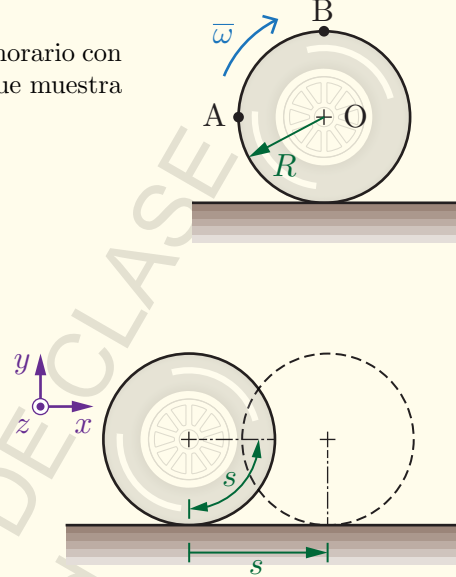
$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_O + \mathbf{v}_{B/O} = \underbrace{v_O = \bar{\omega} R}_{\rightarrow} + \underbrace{\bar{\omega} R}_{\curvearrowleft}$$

Es decir:

$$\mathbf{v}_B = (\bar{\omega} R) \hat{\mathbf{i}} + (\bar{\omega} R) \hat{\mathbf{i}} = (2\bar{\omega} R) \hat{\mathbf{i}}$$

Resumiendo, las velocidades de los puntos  $A$  y  $B$  son:

$$\mathbf{v}_A = \begin{Bmatrix} \bar{\omega} R \\ \bar{\omega} R \end{Bmatrix} \quad \mathbf{v}_B = \begin{Bmatrix} 2\bar{\omega} R \\ 0 \end{Bmatrix}$$



Procedimiento alternativo: El problema puede ser resuelto también operando de forma vectorial y no escalar. Sabemos que las velocidades son:

$$\boldsymbol{\omega} = -\bar{\omega} \hat{\mathbf{k}} \quad \mathbf{v}_O = \bar{\omega} R \hat{\mathbf{i}}$$

La posición del punto  $A$  respecto a  $O$  es:

$$\mathbf{r}_{A/O} = -R \hat{\mathbf{i}}$$

La velocidad del punto  $A$  es:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_A &= \mathbf{v}_O + \mathbf{v}_{A/O} = \bar{\omega} R \hat{\mathbf{i}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{A/O} = \bar{\omega} R \hat{\mathbf{i}} + (-\bar{\omega} \hat{\mathbf{k}}) \times (-R \hat{\mathbf{i}}) \\ \mathbf{v}_A &= \bar{\omega} R \hat{\mathbf{i}} + \bar{\omega} R \hat{\mathbf{j}} \end{aligned}$$

La posición del punto  $B$  respecto a  $O$  es:

$$\mathbf{r}_{B/O} = R \hat{\mathbf{j}}$$

La velocidad del punto  $B$  es:

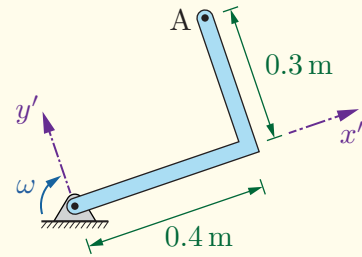
$$\begin{aligned} \mathbf{v}_B &= \mathbf{v}_O + \mathbf{v}_{B/O} = \bar{\omega} R \hat{\mathbf{i}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/O} = \bar{\omega} R \hat{\mathbf{i}} + (-\bar{\omega} \hat{\mathbf{k}}) \times (R \hat{\mathbf{j}}) \\ \mathbf{v}_B &= \bar{\omega} R \hat{\mathbf{i}} + \bar{\omega} R \hat{\mathbf{i}} = 2\bar{\omega} R \hat{\mathbf{i}} \end{aligned}$$

### Ejemplo

Basado en Meriam 9<sup>th</sup> ed, Sample Problem 5/3

La barra en ángulo de la figura está girando en sentido horario pero desacelerando a  $4 \text{ rad/s}^2$ . Se pide determinar:

- La velocidad y aceleración angular en el instante de interés de forma vectorial si  $\hat{\mathbf{k}}$  sale del plano (lo importante son los signos).
- Los vectores de velocidad y aceleración del punto  $A$  cuando  $\omega = 2 \text{ rad/s}$ .
- Las magnitudes de velocidad y aceleración.



Se puede determinar lo pedido pese a que es imposible determinar  $\theta(t)$  al desconocer  $\theta_0$  y  $\omega_0$ .

Por la “regla de la mano derecha” el sentido horario es negativo. La velocidad y aceleración angular en el instante pedido son:

$$\boldsymbol{\omega} = -2 \hat{\mathbf{k}} \text{ rad/s} \quad \boldsymbol{\alpha} = 4 \hat{\mathbf{k}} \text{ rad/s}^2$$

Es conveniente definir los ejes  $\hat{\mathbf{i}}$  y  $\hat{\mathbf{k}}$  relativos a la barra, coincidiendo así con  $\hat{\mathbf{e}}_r$  y  $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ . Es decir, los ejes  $x'$  e  $y'$  rotan con la barra. Si se llega a conocer  $\theta(t)$  se pueden transformar los resultados a los ejes  $\hat{\mathbf{i}}$  y  $\hat{\mathbf{j}}$  reales.

El vector de posición de  $A$  (según los ejes locales  $x'$  e  $y'$ ) es:

$$\mathbf{r} = 0,4 \hat{\mathbf{i}} + 0,3 \hat{\mathbf{j}} \text{ m}$$

Con ello, el vector de velocidad del punto  $A$  es:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \det \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 0 & 0 & -2 \\ 0,4 & 0,3 & 0 \end{bmatrix} = 0,6\hat{\mathbf{i}} - 0,8\hat{\mathbf{j}} \quad \text{m/s}$$

La aceleración del punto  $A$  es:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_n &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = (-2\hat{\mathbf{k}}) \times (0,6\hat{\mathbf{i}} - 0,8\hat{\mathbf{j}}) = -1,6\hat{\mathbf{i}} - 1,2\hat{\mathbf{j}} \\ \mathbf{a}_t &= \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} = (4\hat{\mathbf{k}}) \times (0,4\hat{\mathbf{i}} + 0,3\hat{\mathbf{j}}) = -1,2\hat{\mathbf{i}} + 1,6\hat{\mathbf{j}} \\ \rightarrow \quad \mathbf{a} &= \mathbf{a}_n + \mathbf{a}_t = -2,8\hat{\mathbf{i}} + 0,4\hat{\mathbf{j}} \quad \text{m/s}^2 \end{aligned}$$

Las magnitudes de ambos vectores (velocidad y aceleración) son:

$$\begin{aligned} v &= |\mathbf{v}| = \sqrt{(0,6)^2 + (0,8)^2} = 1 \text{ m/s} \\ a &= |\mathbf{a}| = \sqrt{(-2,8)^2 + (0,4)^2} = \sqrt{8} = 2,828 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

## 7.4. Cinética de cuerpos rígidos

La cinética establece la relación entre las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo y su movimiento: traslación y (ahora también) rotación. En el caso de la traslación la 2<sup>da</sup> ley de Newton resultaba en la Ecuación (3.1):

$$\sum_i \mathbf{f}_i = \mathbf{f} = m \ddot{\mathbf{u}}$$

En el caso de una rotación, en lugar de la masa debemos introducir una propiedad del cuerpo que considera la “distribución radial de la masa respecto al eje en que ocurre la rotación”. Dicha propiedad se llama *momento de inercia*, o *momento de inercia másico*, con nomenclatura  $I$  y unidades  $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ ,  $\text{ton} \cdot \text{mm}^2$ , y similares.

La posición, desplazamiento, velocidad, y aceleración, de cualquier punto en un cuerpo quedan determinados conociendo: **(1)** la trayectoria de su centro de masa  $G$ , y **(2)** el giro del cuerpo respecto al mismo  $G$ ; como muestra la Figura 7.8. La dificultad radica en que la trayectoria del centro de masa  $G$  y el giro respecto al mismo se suelen expresar en sistemas coordenados diferentes: cartesiano ( $\hat{\mathbf{i}}$ ,  $\hat{\mathbf{j}}$ , y  $\hat{\mathbf{k}}$ ) para la traslación; y polar/cilíndrico ( $\hat{\mathbf{e}}_r$ ,  $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ , y  $\hat{\mathbf{k}}$ ) para los giros.

Sabemos calcular el momentum angular de una partícula que rota (Sección 7.2). El momentum angular de una fracción de masa pequeña  $m_i$  de un cuerpo mayor se puede obtener igual que para una partícula:

$$[\mathbf{H}_G]_i = \mathbf{r}_i \times \underbrace{(m_i \dot{\mathbf{r}}_i)}_{\text{momentum lineal}} = m_i (\mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i)$$

, donde el subíndice  $G$  indica que es el momentum angular es calculado con respecto al centro de masa  $G$  del cuerpo. Pero de la sección anterior sabemos que  $\dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i$ , donde  $\boldsymbol{\omega}$  es común a todo el cuerpo<sup>3</sup>. Reemplazando en la ecuación anterior se obtiene:

$$[\mathbf{H}_G]_i = m_i \mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) \quad (7.18)$$

Esto corresponde al momentum angular de una fracción de masa  $m_i$ . Sólo resta considerar el cuerpo completo para obtener una expresión válida para la cinética del cuerpo.

<sup>3</sup>En un cuerpo rígido todos los puntos rotan por igual, y por eso no es necesario un subíndice  $i$ .

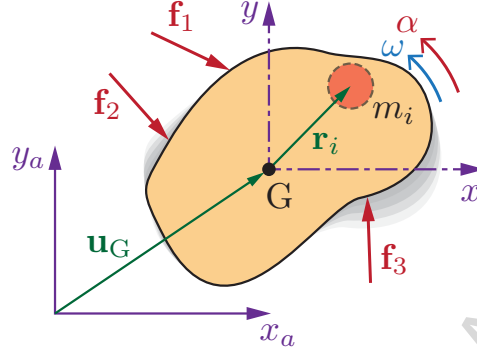


Figura 7.8: Cuerpo que se traslada y rota: la traslación se puede analizar respecto al centro de masa  $G$  como si fuera una partícula; mientras que la rotación ocurre en torno al mismo centro de masa  $G$ , como si se tuviera un sistema coordenado móvil.

#### 7.4.1. Momento de inercia 2D

En el caso específico de un problema 2D, la velocidad angular es  $\omega = \omega \hat{\mathbf{k}}$  y es perpendicular a  $\mathbf{r}_i$ . Debido a ello, el producto cruz entre ambos es trivial y su magnitud es:

$$[\mathbf{H}_G]_i = m_i r_i^2 \omega$$

El cuerpo completo está compuesto por todas las fracciones de masa  $m_i$ . Considerando todos los  $m_i$  del cuerpo, es posible entonces determinar el momentum angular del cuerpo completo que se encuentra rotando con velocidad angular  $\omega$ :

$$\mathbf{H}_G = \sum_i [\mathbf{H}_G]_i = \omega \left( \sum_i m_i r_i^2 \right)$$

, donde en realidad la fracción de masa  $m_i$  debe ser un diferencial de masa  $dm$  del cuerpo completo:

$$\mathbf{H}_G = \omega \int r^2 dm = I \omega \quad (7.19)$$

, donde el momento de inercia másico está definido como:

$$I = \int r^2 dm \quad (7.20)$$

, donde  $r$  es el vector desde el eje de rotación al diferencial de masa  $dm$ . Notar que el momento de inercia másico  $I$  depende de: (a) la masa; (b) la geometría o forma del cuerpo; y (c) el eje de rotación del cuerpo.

La Ecuación (7.12) entrega una relación entre la variación del momentum angular y la sumatoria de momentos. El momento de inercia de un cuerpo rígido  $I$  no varía en el tiempo, y con ello:

$$\begin{aligned} \sum \mathbf{m}_z &= \dot{\mathbf{H}}_O = \frac{d}{dt} (I \omega_z) \\ \sum \mathbf{m}_z &= I \alpha_z \end{aligned} \quad (7.21)$$

Esta ecuación complementa las ecuaciones de cinética traslacional vistas anteriormente. Finalmente,

para un cuerpo 2D se tienen las siguientes ecuaciones de cinética:

$$\sum \mathbf{f}_x = m \ddot{\mathbf{u}}_x \quad (7.22a)$$

$$\sum \mathbf{f}_y = m \ddot{\mathbf{u}}_y \quad (7.22b)$$

$$\sum \mathbf{m}_z = I \alpha_z \quad (7.22c)$$

El momento de inercia de un cuerpo se suele calcular (o reportar) en torno a su centro de masa. Cuando el cuerpo rota en torno a un punto  $O$  distinto al centro de masa, se puede utilizar la inercia respecto al centro de masa  $I_G$  y hacer un *cambio de eje de rotación* para así obtener  $I_O$ ; lo que será estudiado más adelante.

### Ejemplo

Basado en Knight 4<sup>th</sup> ed, Example 12.12

Un pozo de agua tiene un balde unido a una cuerda sin masa que se enrolla en un cilindro. La masa del balde es  $m_b = 12 \text{ kg}$ , la del cilindro es  $m_c = 6 \text{ kg}$ , el radio del cilindro es  $R = 10 \text{ cm}$ , la inercia del cilindro es  $I_c = \frac{1}{2} m_c R^2$ , y el balde se encuentra a una altura  $h_0 = 9 \text{ m}$  del fondo. Asuma que  $g = 10 \text{ m/s}^2$ . Determine el tiempo que tarda el balde en tocar el fondo del pozo si se libera desde el reposo.

Un giro positivo en  $\hat{i}$  hace descender el balde, con lo que la “ligadura” del sistema es: Es decir:

$$z_b = h_0 - \theta R$$

Derivando la expresión respecto al tiempo se obtiene:

$$\dot{z}_b = -\omega R$$

$$\ddot{z}_b = -\alpha R$$

Para poder analizar la cinética del problema el primer paso consiste en hacer DCLs para el cilindro y el balde:



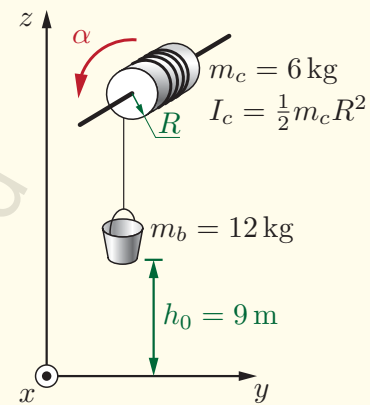
Utilizando la 2<sup>a</sup> ley de Newton en el eje  $z$  para el balde:

$$\sum \mathbf{f}_z = T - m_b g = m_b \ddot{z}_b$$

, mientras que para los giros en el eje  $x$ :

$$\sum \mathbf{m}_x = T R = I_c \alpha \quad \text{con} \quad I_c = \frac{1}{2} m_c R^2$$

Las dos ecuaciones de la cinética y la ecuación de la ligadura son suficientes para obtener las incógni-



tas del problema  $T$ ,  $\alpha$ , y  $\ddot{z}_b$ :

$$\left. \begin{aligned} \ddot{z}_b &= -\alpha R \\ T - m_b g &= m_b \ddot{z}_b \\ T R &= I_c \alpha \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{R} \left( \frac{2 g m_b}{2 m_b + m_c} \right) ; \quad \ddot{z}_b = \frac{-2 g m_b}{2 m_b + m_c} \\ T &= \frac{1}{2} \left( \frac{g m_b m_c}{m_b + m_c} \right) \end{aligned}$$

Si se reemplazan los valores de  $g$ ,  $m_b$ , y  $m_c$ , para la aceleración del balde se obtiene:

$$\ddot{z}_b = \frac{-2 g m_b}{2 m_b + m_c} = \left[ \frac{-(2)(10)(12)}{(2)(12) + 6} \right] = -8 \text{ m/s}^2$$

El tiempo que tarda el balde en tocar el fondo del pozo se obtiene de la cinemática del balde. Las condiciones iniciales son  $z_0 = h_0$  y  $\dot{z}_0 = 0$ , y con ello:

$$\begin{aligned} z(t^*) &= h_0 + \frac{1}{2} \ddot{z}_b (t^*)^2 = 9 + \frac{1}{2} (-8) (t^*)^2 = 9 - 4 (t^*)^2 = 0 \\ \rightarrow t^* &= \frac{3}{2} \text{ s} \end{aligned}$$

Es decir, el balde tarda 1,5 segundos en toca el fondo.

**Nota:** Es interesante cómo en este ejemplo específico el radio del cilindro no afecta el resultado que se pide. En otros problemas, como por ejemplo el *yo-yo*, esto no será cierto.

La inercia de un cilindro sólido de masa  $m$  y radio  $R$  es efectivamente  $I = \frac{1}{2} m R^2$ . El cálculo de ésta y otras inercias típicas se verá en detalle en la siguiente sección.

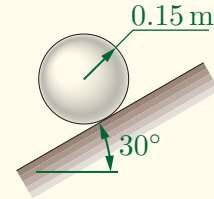
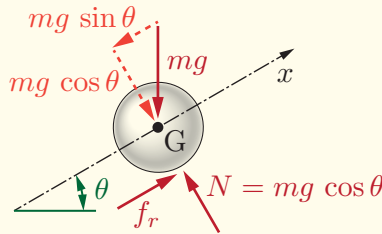
### Ejemplo

Basado en Hibbeler 14<sup>th</sup> ed, Problem F17-16

Una esfera de 20 kg y radio 0,15 m rueda por un plano inclinado sin deslizar. Determine la aceleración del centro de masa y la aceleración angular de la esfera.

**Nota:** La inercia de una esfera respecto a su centro es  $I_G = \frac{2}{5} m R^2$ .

El primer paso consiste en hacer un DCL de la esfera. Si la esfera no desliza, entonces tiene una fuerza de roce  $f_r$  que hace girar (rodar) a la esfera.



Utilizando la 2<sup>da</sup> ley de Newton en los ejes  $\hat{i}$  (dirección del plano inclinado) y el giro según  $\hat{k}$  (fuera del plano), se obtiene:

$$\begin{aligned} \text{dirección } x : \quad & -mg \sin \theta + f_r = m a_G \\ \text{giro en } \theta_z : \quad & f_r R = I_G \alpha \end{aligned}$$

Como la esfera no desliza, existe una compatibilidad por rodadura entre  $v_G$  y  $\omega$ :

$$v_G = -R \omega$$

, donde se debe tener cuidado con los signos. En este problema específico; una velocidad angular  $\omega$  positiva (según la regla de la mano derecha) implica una traslación en la dirección  $-x$ . Tomando la derivada (temporal) de la expresión anterior:

$$a_G = -R\alpha$$

El sistema de ecuaciones a resolver es:

$$\left. \begin{aligned} -mg \sin \theta + f_r &= m a_G \\ f_r R &= I_G \alpha \\ a_G &= -R \alpha \end{aligned} \right\}$$

, cuya solución es:

$$a_G = -\frac{5}{7} g \sin \theta \quad \alpha = \frac{-a_G}{R} = \frac{5g}{7R} \sin \theta \quad f_r = \frac{2mg}{7} \sin \theta$$

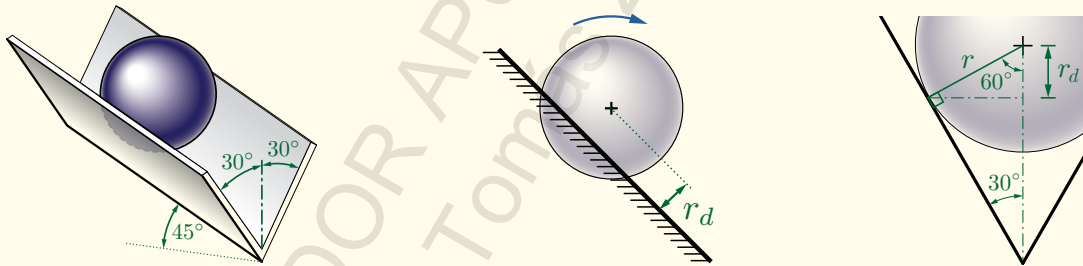
En este problema específico se tiene  $\theta = 30^\circ$ , y con ello:

$$a_G = -\frac{5}{14} g = -3,504 \text{ m/s}^2 \quad \alpha = \left( \frac{5g}{14} \right) \left( \frac{100}{15} \right) = \frac{50}{21} g = 23,36 \text{ rad/s}^2$$

### Ejemplo

Basado en Hibbeler 14<sup>th</sup> ed, Problem 17-119

Una bola sólida de radio  $r$  y masa  $m$  rueda por un perfil ángulo de  $60^\circ$  inclinado a  $45^\circ$  sobre la horizontal. Determine la aceleración angular de la bola si esta rueda sin deslizar por el perfil.



La bola rueda sin deslizar sobre un “plano” a distancia  $r_d$  del centro de la bola. A partir de la geometría del problema, se puede ver que el radio de rodadura es:

$$r_d = r \cos 60^\circ$$

El siguiente paso consiste en hacer un DCL del problema, que como es tridimensional, es conveniente separarlo en múltiples vistas planas. En este caso, se utiliza: (1) vista lateral, y (2) vista perpendicular al perfil (normal al eje  $u$ ).



Cada superficie del perfil genera una reacción normal,  $N_1$  y  $N_2$ , las que sumadas resultan en una única reacción  $N$  en la dirección del eje  $v$ . Utilizando la 2<sup>da</sup> ley de Newton en los ejes  $u$ ,  $v$ , y de rotación, se tiene:

$$\begin{aligned}\sum \mathbf{f}_u &= m a : & mg \sin 45^\circ - f_r &= m a \\ \sum \mathbf{f}_v &= 0 : & -mg \cos 45^\circ + N &= 0 \\ \sum \mathbf{m}_G &= I \alpha : & -f_r r_d &= I \alpha\end{aligned}$$

La condición de rodadura (ligadura) resulta en:

$$-\theta r_d = s \quad \longrightarrow \quad -\alpha r_d = a$$

Las 3 ecuaciones de cinética (2<sup>da</sup> ley de Newton) y la ecuación de rodadura permiten resolver para las 4 incógnitas del problema:

$$\begin{aligned}N &= \frac{mg}{\sqrt{2}} & f_r &= \frac{4\sqrt{2}}{13} mg \\ a &= \frac{5\sqrt{2}}{26} g & \alpha &= -\frac{5\sqrt{2}}{13} \frac{g}{r}\end{aligned}$$

#### 7.4.2. Momento de inercia en 3D

Los cuerpos son objetos tridimensionales los que pueden rotar respecto a todos los ejes,  $\theta_x$ ,  $\theta_y$ , y  $\theta_z$ . La dificultad del análisis de las rotaciones en 3D es que usualmente estos giros están relacionados (acoplados) entre sí.

El análisis de un cuerpo rígido sometido a varias fuerzas externas  $\mathbf{f}_i$  es equivalente al mismo cuerpo con: (a) la resultante de fuerzas  $\sum \mathbf{f}$ , y (b) la resultante de momentos  $\sum \mathbf{m}$ ; ambos aplicados en el centro de masa u otro punto sobre el cual el cuerpo rota. Las resultantes de fuerza y de momento permiten calcular las aceleraciones (traslacional y angular) del cuerpo sometido a ese conjunto de fuerzas. La Figura 7.9 ilustra la cinética del cuerpo para obtener aceleraciones a partir de las fuerzas aplicadas.

- La cinética traslacional del cuerpo se rige por:  $\sum \mathbf{f} = m \ddot{\mathbf{u}}$
- La cinética rotacional<sup>4</sup> del cuerpo se rige por:  $\sum \mathbf{m} = \mathbf{I} \alpha$

Un cuerpo 3D suele girar en todos los planos a la vez, lo que lo diferencia de un cuerpo plano (2D). El acoplamiento de los giros se hace evidente de la estructura de la matriz de inercias  $\mathbf{I}$ :

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (7.23)$$

, donde los términos fuera de la diagonal acoplan los momentos y giros entre los distintos planos.

En este curso no es común evaluar o estudiar la rotación de un cuerpo en 3D. No obstante, es importante comprender los fundamentos de la rotación en 3D ya que nuestro mundo es realmente 3D, y sólo en casos muy específicos se puede simplificar a un análisis 2D.

<sup>4</sup>Notar que en el caso 3D la inercia  $\mathbf{I}$  es una matriz.



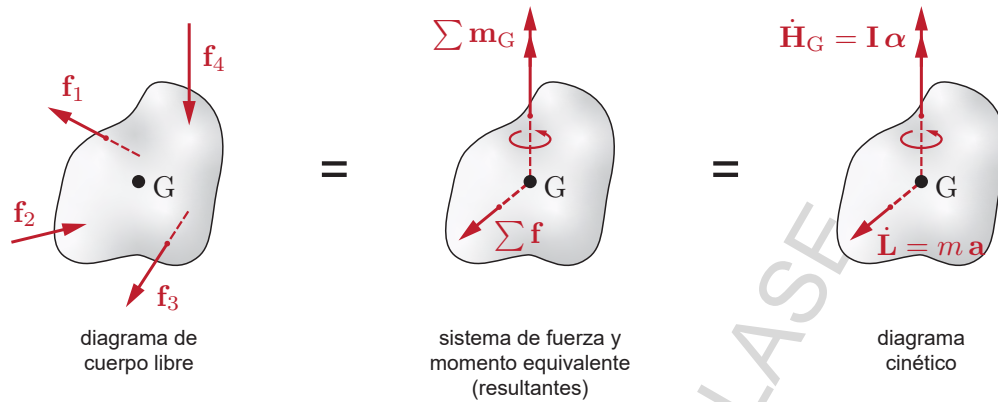


Figura 7.9: Análisis de la cinética tridimensional de un cuerpo. El diagrama de cuerpo libre (DCL) se puede representar como una fuerza y momento resultantes actuando sobre el centro de rotación, lo que permite calcular las aceleraciones (traslacional y angular) del cuerpo.

En ciertos problemas, en vez de preguntar por la resultante de momentos  $\Sigma \mathbf{m}$ , se pregunta por la “variación del momentum angular”  $\dot{\mathbf{H}}_G$ . Análogamente, en vez de preguntar por la resultante de fuerzas  $\Sigma \mathbf{f}$ , se podría pedir la “variación del momentum lineal”  $\dot{\mathbf{L}}$ . Este tipo de preguntas evalúa si se comprende la conexión que hay entre los conceptos de momentum, fuerzas, y aceleraciones.

### 7.4.3. Cálculo del momento de inercia

Recordando que la masa de un objeto es una medida de su resistencia a acelerar traslacionalmente, el momento de inercia es una medida de su resistencia a acelerar rotacionalmente. La Figura 7.10 muestra un cuerpo que rota respecto a un eje  $O-O$ . El momento de inercia (máscico) respecto a ese eje se obtiene al considerar el aporte de cada diferencial  $dm$  a la rotación:

$$I = \int r^2 dm = \int \rho r^2 dv \quad (7.24)$$

En caso que se tenga un sistema de partículas rígidamente vinculadas, la inercia (máscica) es:

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \quad (7.25)$$

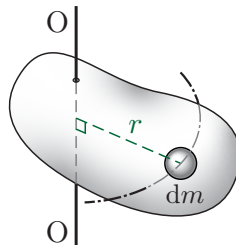


Figura 7.10: Cuerpo que rota respecto a un eje  $O-O$ .

En el caso de un cuerpo 3D, los momentos de inercia respecto a los ejes cartesianos son:

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \int r_x^2 dm = \int (y^2 + z^2) dm & I_{xy} &= I_{yx} = \int xy dm \\ I_{yy} &= \int r_y^2 dm = \int (z^2 + x^2) dm & I_{yz} &= I_{zy} = \int yz dm \\ I_{zz} &= \int r_z^2 dm = \int (x^2 + y^2) dm & I_{zx} &= I_{xz} = \int zx dm \end{aligned} \quad (7.26)$$

, quedando así completamente definida la matriz de inercias de la Ecuación (7.23). En la ecuación anterior, e inspeccionando la Figura 7.10, es claro que  $r_x$  es la distancia mínima y perpendicular del diferencial de masa  $dm$  al eje  $x$ . Análogamente,  $r_y$  y  $r_z$  son las distancias mínimas a los ejes  $y$  y  $z$ , respectivamente.

Notar que los términos de la diagonal ( $I_{xx}$ ,  $I_{yy}$ , e  $I_{zz}$ ) son siempre positivos. Por el contrario, las *inercias cruzadas*, también llamados *productos de inercia*, pueden ser positivos o negativos.

En el caso 2D, el eje de rotación siempre sale del plano; i.e., su dirección está claramente definida. En el caso 3D en cambio, existen infinitas orientaciones de los 3 ejes cartesianos, pese a mantener el origen de los ejes fijo en el punto respecto a cuál el cuerpo rota. Es decir, en el caso 3D los términos de la matriz dependerán de la orientación de los ejes del sistema de coordenadas. Existe una orientación específica para los ejes que diagonaliza la matriz  $\mathbf{I}$ . Es decir, en dicha orientación de ejes se tiene:

$$\mathbf{I}' = \begin{bmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{bmatrix}$$

Esta orientación corresponde a los *ejes principales de inercia* y es conveniente a la hora de analizar la rotación de un cuerpo 3D ya que las ecuaciones  $\sum \mathbf{m} = \mathbf{I} \boldsymbol{\alpha}$  se desacoplan<sup>5</sup>.

Existe un fenómeno físico muy curioso llamado *teoría del eje intermedio* (o *efecto Dzhanibekov*). Más aún, es fácil recrearlo en casa con una raqueta de tenis. Una explicación detallada del fenómeno se encuentra en el siguiente link: [https://www.youtube.com/watch?v=1VPfZ\\_XzisU](https://www.youtube.com/watch?v=1VPfZ_XzisU)

#### 7.4.4. Momento de inercia de área

**El momento de inercia de área no es parte de este curso y no tiene utilidad para nosotros.** No obstante, es importante saber de su existencia para no confundirlo en el futuro con el momento de inercia másico.

Es fácil confundir el momento de inercia másico con el *momento de inercia de área*, también conocido como *segundo momento de inercia*, o *segundo momento de área*. Para empeorar la situación, en la práctica a ambas se les suele llamar simplemente “inercia”, además de compartir el mismo símbolo “ $I$ ”. La Figura 7.11 muestra un área de interés. Los segundos momentos de inercia para el área plana  $A$  respecto a los ejes  $x$ ,  $y$ , y  $z$ , respectivamente, son:

$$I_x = \int y^2 dA \quad I_y = \int x^2 dA \quad I_z = \int r^2 dA$$

La única diferencia es que el momento de inercia de área se suele indicar con 1 solo subíndice, en vez de doble como es el caso del momento de inercia másico.

<sup>5</sup>Cuando el sistema de ecuaciones se desacopla, entonces cada ecuación (fila del sistema) se puede analizar por separado.

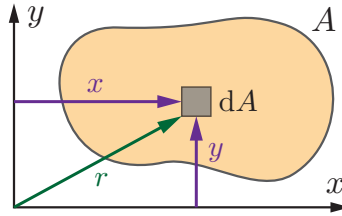


Figura 7.11: Área de interés  $A$  sobre la cual se desea calcular los segundos momentos de inercia (inercia de área).

El momento de inercia de área es muy utilizado en ingeniería estructural y mecánica; no tanto así el momento de inercia másico (que se estudia en este curso). Notar que las unidades del momento de inercia de área son  $\text{m}^4$ ,  $\text{cm}^4$ ,  $\text{in}^4$ , y similares. El momento de inercia de área se calcula para una sección plana (2D), i.e., *sección* de un sólido, corte transversal, o sección transversal.

#### 7.4.5. Cambio de eje de rotación

El teorema de cambio de eje de rotación se llama también *teorema de ejes paralelos*, o *teorema de Steiner*. Si conocemos el momento de inercia  $\bar{I}$  respecto al centro de masa  $G$ , entonces la inercia respecto a un punto  $C$  cualquiera como muestra la Figura 7.12 es:

$$I = \int r^2 dm = \int (r_o^2 + d^2 + 2 r_o d \cos \theta) dm$$

$$I = \int r_o^2 dm + d^2 \int dm + 2d \int u dm$$

La tercera integral ( $2d \int u dm$ ) es cero en torno al CM: notar que es una integral del momento (torque) de todo el cuerpo en torno a su propio centro de masa. Sabemos por definición que el momento es cero en torno al centro de masa (si concentramos el peso del cuerpo en un punto, ese punto corresponde al centro de masa). Respecto al CM, el lado izquierdo y derecho de un cuerpo producen momentos iguales pero opuestos. Es debido a ello que un cuerpo colgado o clavado en su centro de masa no tiende a rotar en ninguna dirección, debido a que su peso  $W$  no genera momento alguno que induzca una rotación en el mismo. Finalmente, la inercia respecto al punto  $C$  es:

$$I = \bar{I} + m d^2 \quad (7.27)$$

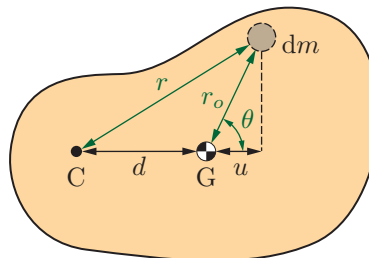


Figura 7.12: Conocida la inercia en el centro de masa  $G$ , se quiere calcular la inercia respecto a un eje perpendicular al plano que pasa por el punto  $C$ . Para ello, es importante descubrir que  $\int u dm = 0$  respecto al centro de masa.

Un concepto similar se aplica al momento de inercia de área:

$$I_{\text{área}} = \bar{I}_{\text{área}} + A d^2$$

, donde el segundo término usa el área en vez de la masa.

El cambio de ejes de rotación para el caso de un cuerpo tridimensional está fuera del alcance del curso.

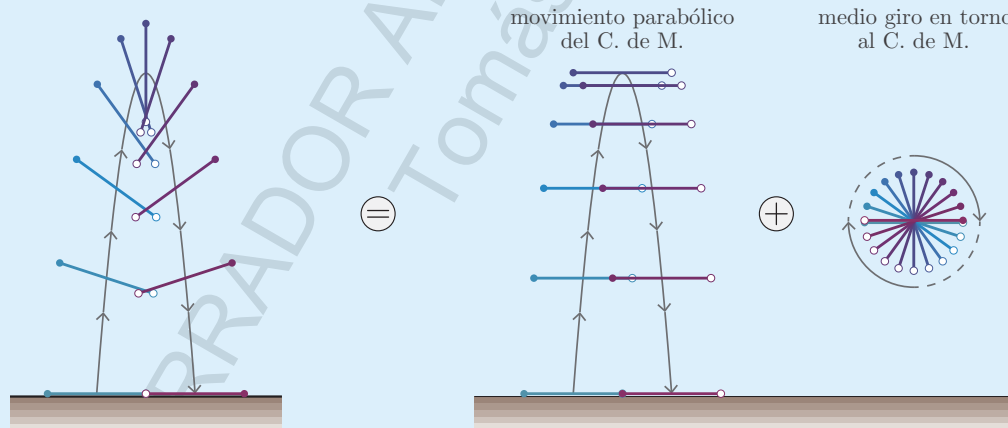
Un análisis de la Ecuación (7.27) revelará que la inercia de un cuerpo es mínima respecto a su centro de masa, ya que la masa no puede ser negativa, mientras que  $d^2$  es siempre positivo. Es decir, para un cuerpo cualquiera se tiene que:

$$I_G < I_C$$

, donde  $G$  es centro de masa y  $C$  es otro punto cualquiera. Como  $\sum \mathbf{m}_z = I \boldsymbol{\alpha}_z$  y la inercia  $I_G$  es mínima, entonces el cuerpo rotará más fácilmente en torno a  $G$ . Es decir, un cuerpo rotará en torno a su centro de masa a menos que se le fuerce a rotar en torno a otro punto (con un eje, clavo, pin, o similar). Cuando se avienta un objeto en el aire este rotará en torno a su centro de masa ya que es el eje (o mejor dicho, punto,) sobre el cual el cuerpo rota con el mínimo esfuerzo. La dinámica de aventar un cuerpo en el aire se analiza como: (1) la traslación de una partícula (ubicada en el centro de masa), y (2) una rotación del cuerpo en torno al mismo centro de masa.

El hecho que todos los objetos libres de rotar lo hacen en torno a su centro de masa se puede verificar con un experimento casero. Para ello se necesita una raqueta de tenis, palo, u objeto similar: es imposible lanzar la raqueta o palo al aire girando en torno a un punto distinto al centro de masa.

Considere que se lanza un objeto de modo que sólo haga medio giro antes de caer, como muestra la Figura a continuación. Se podría creer erróneamente que ha logrado hacer que gire en torno a uno de sus extremos. En realidad, el objeto giró media vuelta en torno a su CM, mientras el CM describía una trayectoria parabólica que lo hizo “avanzar”. Esta duda se elimina si el cuerpo rota varias veces en el aire: el centro de rotación (su centro de masa) se visualizará con facilidad.



#### 7.4.6. Radio de giro

El radio de giro  $k$  de un cuerpo es:

$$k = \sqrt{\frac{I}{m}} \quad (7.28)$$

A partir de la expresión anterior se tiene también que:  $I = k^2 m$ . Es decir, dado un radio de giro y la masa de un cuerpo, es sencillo obtener su inercia. El radio de giro tiene dimensiones de longitud, i.e.  $m$ ,  $cm$ ,  $mm$ ,  $in$ ...

El radio de giro es una medida de la distribución espacial de la masa de un cuerpo. Por ejemplo, dadas dos ruedas de bicicleta de igual masa, pero distinto tamaño; la rueda de mayor radio tiene un radio de giro mayor. Es decir, mientras más lejos del eje de rotación se ubica la masa, mayor será el radio de giro y mayor será su inercia.

Reescribiendo las inercias con sus respectivos radios de giro en la Ecuación (7.27), se obtiene:

$$k^2 = \bar{k}^2 + d^2 \quad (7.29)$$

, donde  $\bar{k}$  es el radio de giro asociado a la inercia respecto al centro de masa  $\bar{I}$  o  $I_G$ . El radio de giro tiene una interpretación física: si toda la masa del cuerpo se concentra en una partícula (o anillo) a distancia  $k$  al eje de rotación, la inercia será equivalente a la inercia del cuerpo.

El segundo momento de inercia (inercia de área) también tiene un radio de giro asociado. Para este se suele utilizar la letra  $r$  y está definido como:

$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \quad r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

### Ejemplo

Se tiene un carrete de masa total  $m_T$ , con radio interno  $\frac{R}{2}$ , y donde los bordes son de espesor  $\frac{L}{6}$  cada uno, con  $L$  siendo el largo total del carrete. El carrete está hecho de material uniforme y homogéneo. Determine la inercia respecto al eje  $O-O'$  de la forma  $I = \lambda m_T$ .

La inercia del cuerpo es la suma de inercias de: **(1)** un cilindro interno con radio  $r_i = \frac{R}{2}$  y largo  $\frac{2L}{3}$ ; y **(2)** un cilindro externo de radio  $r_e = R$  y largo  $(\frac{L}{6} + \frac{L}{6}) = \frac{L}{3}$  (notar que los dos cilindros de los extremos se trabajarán como uno).

La inercia de un cilindro sólido que rota sobre su eje es conocida e igual a  $I = \frac{1}{2} m R^2$ . Para utilizar dicha expresión, es necesario determinar la fracción de la masa total  $m_T$  de cada componente del carrete; fracción que es proporcional al volumen gracias a que el material es uniforme. Los volúmenes de los cilindros interior, exterior, y total son:

$$v_e = (\pi r_e^2) \left( \frac{L}{3} \right) = \frac{1}{3} \pi R^2 L$$

$$v_i = (\pi r_i^2) \left( \frac{2L}{3} \right) = \frac{1}{6} \pi R^2 L$$

$$v_T = v_e + v_i = \frac{1}{2} \pi R^2 L$$

Con ello, las masas de los componentes del carrete son:

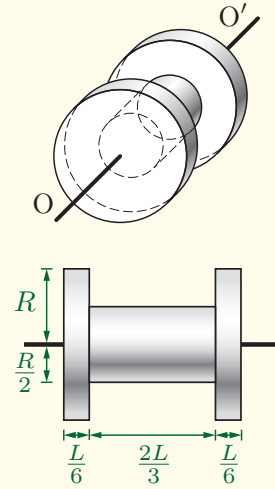
$$m_e = \frac{v_e}{v_T} m_T = \frac{2}{3} m_T$$

$$m_i = \frac{v_i}{v_T} m_T = \frac{1}{3} m_T$$

Es decir, el cilindro externo (que en realidad son dos cilindros de largo  $\frac{L}{6}$ ) representa  $\frac{2}{3}$  de la masa total; mientras que el cilindro interno representa el  $\frac{1}{3}$  restante. Las inercias de cada cilindro son:

$$I_e = \frac{1}{2} m_e r_e^2 = \frac{1}{3} m_T R^2$$

$$I_i = \frac{1}{2} m_i r_i^2 = \frac{1}{24} m_T R^2$$



Notar que la diferencia entre las inercias de ambos es considerable.

Finalmente, la inercia del carrete completo es:

$$I = I_e + I_i = \frac{3}{8} m_T R^2$$

### Ejemplo

Referencia original desconocida.

Se tiene un bloque de masa  $M$  y dimensiones  $b \times b/2$  apoyado en un filo (o borde) como muestra la Figura. Se pide determinar:

- La distancia  $x$  del apoyo para que el bloque acelere con  $\alpha$  máximo.
- La magnitud de la aceleración angular máxima  $\alpha$ .

En sus cálculos, le será de utilidad saber que el momento de inercia de un rectángulo de lados  $a \times b$  que gira respecto a un eje normal al plano que pasa por su centro de masa es:

$$I = \frac{M}{12} (a^2 + b^2)$$

La inercia del bloque respecto a su centro de masa  $G$  es:

$$\bar{I} = \frac{M}{12} \left[ b^2 + \left( \frac{b}{2} \right)^2 \right] = \frac{5}{48} M b^2$$

La inercia en torno al punto de rotación  $O$  (pivote de apoyo) es:

$$I_O = \bar{I} + M d^2 \quad \text{donde} \quad d = \sqrt{x^2 + \left( \frac{b}{4} \right)^2}$$

El momento en torno al punto  $O$  es:

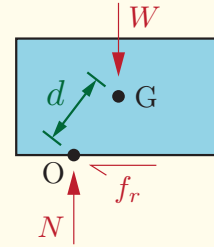
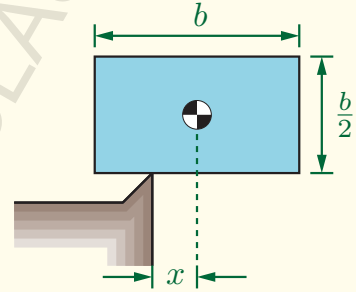
$$\mathbf{m}_z = -(W)(x) = -Mg x$$

negativo según la regla de la mano derecha. En el punto de pivote (punto  $O$ ) hay una fuerza normal y otra de roce, las que no causan momento en torno al punto  $O$ . Usando la 2<sup>da</sup> ley de Newton en rotación:

$$\begin{aligned} \sum \mathbf{m}_z &= I_O \alpha = \left[ \frac{5}{48} M b^2 + M \left( x^2 + \frac{b^2}{16} \right) \right] \alpha \\ -Mg x &= \frac{M}{6} (b^2 + 6x^2) \alpha \\ \alpha &= \frac{-6gx}{b^2 + 6x^2} \end{aligned}$$

Queremos maximizar el módulo de  $\alpha$ : como el giro es negativo  $\otimes$  en realidad estamos minimizando  $\alpha$ . Para ello, buscamos el valor de  $0 < x < b/2$  tal que su primera derivada es cero:

$$\frac{d\alpha}{dx} = (6g) \left[ \frac{6x^2 - b^2}{(b^2 + 6x^2)^2} \right] = 0$$



Se tiene que  $(b^2 + 6x^2)^2 \neq 0$  siempre, con lo que eliminamos el denominador y con ello:

$$6x^2 - b^2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{b}{\sqrt{6}}$$

Finalmente, la aceleración mínima (máximo módulo) es:

$$\alpha \left( x = \frac{b}{\sqrt{6}} \right) = -\frac{\sqrt{6}}{2} \frac{g}{b}$$

### Ejemplo

Basado en Hibbeler 14<sup>th</sup> ed, Example 17.1

Determine el momento de inercia del cilindro de radio  $R$  y densidad constante  $\rho$  respecto al eje  $z$ .

Podemos integrar el cilindro fácilmente si tomamos un diferencial de volumen  $dV$  igual a un cascarón cilíndrico:

$$dV = (2\pi r)(h) dr$$

, con lo que un diferencial de masa es:

$$dm = \rho \cdot dV = (2\pi r h \rho) dr$$

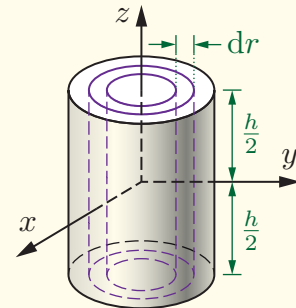
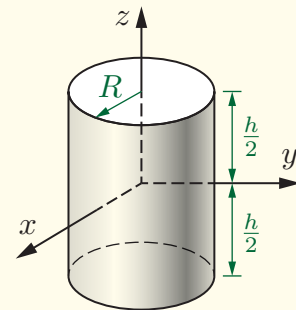
La masa total del cilindro es:

$$m = \int dm = \int_0^R (2\pi r h \rho) dr = 2\pi h \rho \int_0^R r dr = \rho \pi h R^2$$

La inercia respecto al eje  $z$  es:

$$I_{zz} = \int r^2 dm = \int_0^R (r^2) (2\pi r h \rho) dr = 2\pi h \rho \int_0^R r^3 dr = \rho \frac{\pi}{2} h R^4$$

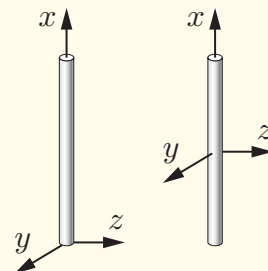
$$I_{zz} = (\rho \pi h R^2) \left( \frac{1}{2} R^2 \right) = \frac{1}{2} m R^2$$



### Ejemplo

Se tiene una barra de sección transversal  $a$  uniforme y pequeña en relación a su longitud  $\ell$ . La densidad de la barra es uniforme e igual a  $\rho$ . Se pide:

- La inercia cuando la barra rota en torno a uno de sus extremos.
- La inercia cuando la barra rota en torno a su punto medio.
- Use cambio de ejes para llegar al resultado **(a)** desde **(b)**.



El diferencial de volumen es:

$$dV = a \, dx$$

, con lo que un diferencial de masa es:

$$dm = \rho a \, dx$$

La masa total de la barra es:

$$m = \int dm = \int_0^\ell (\rho a) \, dx = \rho a \ell$$

La inercia en el caso que la barra rota en uno de sus extremos es:

$$I_{zz}^{(a)} = \int x^2 \, dm = \int_0^\ell \rho a x^2 \, dx = \frac{1}{3} \rho a \ell^3 = \frac{1}{3} m \ell^2$$

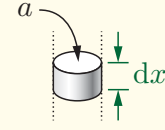
La inercia en el caso que la barra rota en torno a su punto medio (su centro de masa) es:

$$I_{zz}^{(b)} = \int x^2 \, dm = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \rho a x^2 \, dx = \frac{1}{3} \rho a x^3 \Big|_{x=-\ell/2}^{x=\ell/2} = \frac{1}{12} \rho a \ell^3 = \frac{1}{12} m \ell^2$$

Volviendo al caso **(a)**: el centro de masa se encuentra a una distancia  $\bar{x} = \ell/2$  del eje de rotación. Usando el resultado del caso **(b)**, que corresponde a la inercia de la barra en torno a su CM (inercia mínima), podemos usar el cambio de ejes de rotación (Ecuación (7.27)) para obtener:

$$I_{zz}^{(a)} = \bar{I} + m d^2 = I_{zz}^{(b)} + m \left( \frac{\ell}{2} \right)^2 = \frac{1}{12} m \ell^2 + m \left( \frac{\ell}{2} \right)^2 = \frac{1}{3} m \ell^2$$

Como se esperaba; el resultado es idéntico al obtenido anteriormente.



La inercia de los sólidos más comunes es de conocimiento universal y se suelen encontrar en tablas como muestra la Figura 7.13. Cuerpos más complejos se pueden obtener por composición de partículas y/o cuerpos más sencillos obtenidos de la tabla, y así evitar el método integral.

Los textos de dinámica suelen tener una tabla de inercias cerca del principio o final del texto.

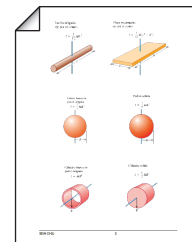


Figura 7.13: Ejemplo de una tabla de inercias.

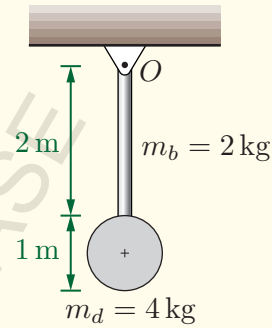


**Ejemplo**

Basado en Hibbeler 14<sup>th</sup> ed, Problem 17–10

Un péndulo consiste de un disco circular de 4 kg y de una barra esbelta de 2 kg, como muestra la Figura. Se pide determinar:

- El radio de giro respecto a un eje perpendicular al plano pasando por  $O$ .
- El radio de giro si el péndulo se desconecta del pivote en  $O$  y se lanza en el aire para que gire libremente.



**Nota:** La inercia de una barra esbelta respecto a su punto medio es  $I = \frac{1}{12}m\ell^2$ , mientras que la inercia de un disco (cilindro de baja altura) respecto a su centro es  $I = \frac{1}{2}mR^2$ .

La masa total del péndulo es:

$$m_t = m_b + m_d = 6 \text{ kg}$$

La inercia de la barra respecto al punto  $O$  es:

$$(I_b)_O = \bar{I}_b + m_b d^2 = \frac{1}{12} m_b \ell_b^2 + m_b \left(\frac{\ell_b}{2}\right)^2 = \frac{2}{3} + 2 = \frac{8}{3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

La inercia del disco respecto al punto  $O$  es:

$$(I_d)_O = \bar{I}_d + m_d d^2 = \frac{1}{2} m_d r_d^2 + m_d (\ell_b + r_d)^2 = \frac{1}{2} + 25 = \frac{51}{2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Finalmente, la inercial del péndulo respecto a  $O$  es:

$$I = (I_b)_O + (I_d)_O = \frac{8}{3} + \frac{51}{2} = \frac{169}{6} = 28,1667 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

, y su radio de giro es:

$$k = \sqrt{\frac{I}{m}} = \sqrt{\left(\frac{169}{6}\right) \left(\frac{1}{6}\right)} = \frac{13}{6} = 2,1667 \text{ m}$$

Si el sistema barra–disco es libre de girar sobre cualquier eje, entonces lo hará sobre su centro de masa (inercia mínima). Para ello, debemos determinar primero la ubicación del centro de masa:

$$\bar{z} = \frac{m_b \bar{z}_b + m_d \bar{z}_d}{m_t} = \frac{(2)(1) + (4)(2 + 0,5)}{6} = \frac{12}{6} = 2 \text{ m}$$

Las inercias de la barra y disco respecto a este punto son:

$$(I_b)_G = \bar{I}_b + m_b d^2 = \frac{1}{12} m_b \ell_b^2 + m_b \left(\bar{z} - \frac{\ell_b}{2}\right)^2 = \frac{2}{3} + 2 = \frac{8}{3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$(I_d)_G = \bar{I}_d + m_d d^2 = \frac{1}{2} m_d r_d^2 + m_d (\ell_b + r_d - \bar{z})^2 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Finalmente, la inercia del péndulo respecto a su centro de masa es:

$$I = (I_b)_G + (I_d)_G = \frac{8}{3} + \frac{3}{2} = \frac{25}{6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

, y el radio de giro es:

$$k = \sqrt{\frac{I}{m}} = \sqrt{\left(\frac{25}{6}\right) \left(\frac{1}{6}\right)} = \frac{5}{6} = 0,8333 \text{ m}$$

## 7.5. Trabajo y energía de rotación

La energía cinética asociada a una fracción de masa  $m_i$  de un cuerpo es:

$$T_i = \frac{1}{2} (m_i) (v_i)^2 = \frac{1}{2} (m_i) (r_i \omega)^2$$

Notar que la velocidad es proporcional a su distancia al eje de rotación:  $v_i = r_i \omega$ , como muestra la Figura 7.14. Considerando todas las fracciones de masa que componen al cuerpo, la energía cinética de rotación del cuerpo completo es:

$$T = \frac{1}{2} \omega^2 \left[ \sum_i m_i r_i^2 \right]$$

Si la fracción de masa  $m_i$  se hace tan pequeño de modo que  $m_i \rightarrow dm$  (elemento diferencial de masa), vemos que:

$$T = \frac{1}{2} \omega^2 \int r^2 dm$$

En la ecuación anterior es posible reconocer el término de la inercia del cuerpo, obteniendo así:

$$T = \frac{1}{2} I_O \omega^2 \quad (7.30)$$

, donde  $I_O$  es la inercia respecto al eje de rotación "O".

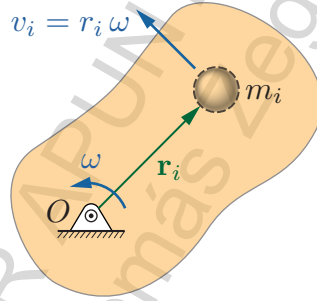


Figura 7.14: Velocidad con que se mueve una fracción de masa  $m_i$  de un cuerpo mayor que rota con velocidad angular  $\omega$  respecto a un punto  $O$ .

### 7.5.1. Energía de un cuerpo que se traslada y rota

Un cuerpo rígido puede trasladarse y girar a la vez: el centro de masa se mueve con velocidad  $\bar{\mathbf{v}}$ , mientras que el cuerpo gira en torno al mismo con velocidad angular  $\omega$ . Una fracción de masa  $m_i$  de ese cuerpo, como muestra la Figura 7.15, se moverá con una velocidad que depende de estos dos movimientos:

$$\mathbf{v}_i = \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{r}_i \omega$$

Usando la ley de los cosenos, la energía cinética del cuerpo completo es:

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\bar{v}^2 + r_i^2 \omega^2 + 2 \bar{v} r_i \omega \cos \theta)$$

Mirando en detalle el tercer término:

$$\sum_i \frac{1}{2} m_i (\bar{v}^2 + r_i^2 \omega^2 + 2 \bar{v} r_i \omega \cos \theta) = \omega \bar{v} \sum_i m_i r_i \cos \theta = \omega \bar{v} \sum_i m_i y_i$$

Sabemos que  $\sum_i m_i y_i$  es cero en torno al centro de masa. Con ello, la energía cinética de un cuerpo que se traslada y rota es:

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\bar{v}^2 + r_i^2 \omega^2)$$

En la ecuación anterior es posible reconocer el término de la inercia del cuerpo, obteniendo así:

$$T = \frac{1}{2} m \bar{v}^2 + \frac{1}{2} \bar{I} \omega^2 \quad (7.31)$$

Es evidente de la ecuación anterior que la energía cinética de un cuerpo tiene dos componentes: una asociada a la traslación, y otra a la rotación del cuerpo.

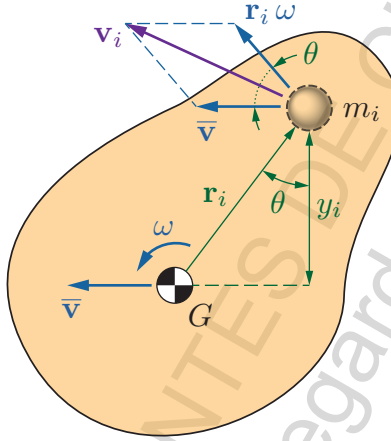


Figura 7.15: Velocidad con que se mueve una fracción de masa  $m_i$  de un cuerpo mayor: el cuerpo rota en torno a su CM con velocidad  $\omega$  y se traslada con velocidad  $\bar{v}$ .

### 7.5.2. Trabajo hecho por un momento (torque)

La ecuación de trabajo-energía sigue siendo válida luego de introducir la energía rotacional:

$$T_1 + U_{12} = T_2$$

Separando las energías potenciales gravitacionales y elásticas (fuerzas conservativas) de  $U_{12}$ , resulta:

$$T_1 + V_1 + U_{12}^* = T_2 + V_2$$

, donde  $U_{12}^*$  es el trabajo hecho por las fuerzas externas y las no-conservativas (i.e., toda fuerza no incluida en  $V$ ). La ecuación anterior es idéntica la Ecuación (4.14), excepto que ahora incluimos términos asociados a la rotación en  $T$  y  $U_{12}^*$ . Es decir, la energía cinética  $T_1$  y  $T_2$  ahora incorpora términos de rotación acorde a la Ecuación (7.31).

El trabajo hecho por un momento (torque) externo constante es:

$$U_m = \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\theta} \quad (7.32)$$

En el caso particular de un análisis 2D resulta:

$$U_m = m \theta$$

Esta expresión es análoga al caso de una fuerza constante: trabajo es fuerza  $\times$  desplazamiento. Cuando el momento externo no es constante, entonces es necesario utilizar la forma integral del trabajo al igual que en el caso de fuerzas y traslaciones.

Con el estudio de la rotación de los cuerpos vimos que las 3 ecuaciones de Newton de traslación se complementan con 3 ecuaciones adicionales para la rotación. Lo mismo ocurrió con el principio de impulso-momentum: además de las 3 ecuaciones de traslación, se sumaron 3 ecuaciones adicionales para los giros/momentos.

La ecuación de energía, en cambio, no agrega nuevas ecuaciones al contenido del curso, sino que sólo adiciona términos de rotación. Expandiendo los términos de la ecuación de trabajo-energía para un cuerpo 2D que se desplaza y rota, se tiene:

$$\frac{1}{2} m \bar{v}_1^2 + \frac{1}{2} \bar{I} \omega_1^2 + m g z_1 + (V_e)_1 + U_{12}^* = \frac{1}{2} m \bar{v}_2^2 + \frac{1}{2} \bar{I} \omega_2^2 + m g z_2 + (V_e)_2$$

, donde  $z_1$  y  $z_2$  se calculan respecto al centro de masa del cuerpo.

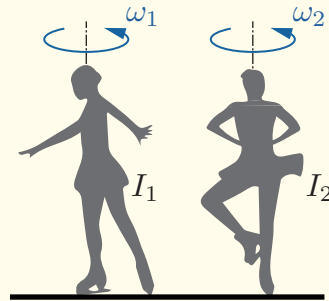
Finalmente, las ecuaciones de cinética comprendidas en este curso son 13: 6 ecuaciones de Newton, 6 ecuaciones de impulso-momentum, y 1 ecuación de trabajo-energía.

### Ejemplo

Basado en McGill & King 4<sup>th</sup> ed, Example 5.14

Una patinadora de hielo gira inicialmente con sus brazos extendidos, lo que le confiere una inercia  $I_1$ . Luego de algunos giros, con lo que su inercia cambia a  $I_2$ , donde  $I_2 < I_1$ . Despreciando el roce de los patines:

- ¿Se conserva el momentum angular?
- ¿Se conserva la energía cinética?
- Determina la pérdida/ganancia en caso que alguno no se conserve



Los momentums angulares inicial y final son:

$$(H_O)_i = I_1 \omega_1 \quad (H_O)_f = I_2 \omega_2$$

La fuerza que debe hacer la patinadora para contraer sus brazos es de tipo radial (fuerza central), la que no produce momento sobre el eje de giro. Al no haber momento, no hay impulso angular ( $\int \mathbf{m}_z dt = 0$ ) con lo que se conserva el momentum angular. Con ello podemos calcular la razón entre la rapidez angular inicial y final:

$$\begin{aligned} (H_O)_i &= (H_O)_f \\ I_1 \omega_1 &= I_2 \omega_2 \\ \omega_2 &= \left( \frac{I_1}{I_2} \right) \omega_1 \end{aligned}$$

En este caso, se sabe que  $I_2 < I_1$  con lo que  $\omega_2 > \omega_1$ . Es decir, la patinadora gira más rápido al contraer sus brazos.

Las energías cinéticas inicial y final son:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2} I_1 (\omega_1)^2 \\ T_2 &= \frac{1}{2} I_2 (\omega_2)^2 = \frac{1}{2} I_2 \left( \frac{I_1}{I_2} \right)^2 (\omega_1)^2 = T_1 \left( \frac{I_1}{I_2} \right) \end{aligned}$$

Es decir, la relación entre las energías cinéticas es la misma razón que hay entre las inercias. Podemos entonces concluir que la energía cinética no se conserva, sino que aumenta ( $T_2 > T_1$ ). Como no hay

fuerzas externas, el aumento de energía cinética se obtiene de la fuerza radial que hacen los músculos de la patinadora para contraer los brazos (no es fácil). La variación de energía cinética es positiva:

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{1}{2} I_1 \omega_1 \left( \frac{I_1}{I_2} - 1 \right)$$

El siguiente video explica cómo los patinadores deben hacer mucha fuerza para contraer sus brazos y así poder hacer saltos cuádruples:

<https://www.youtube.com/watch?v=RtFGWpM10Yo>

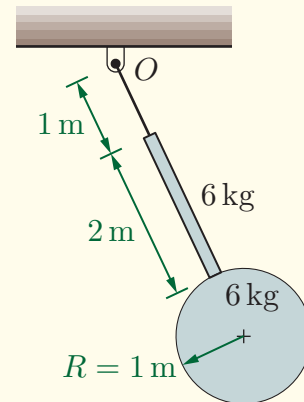
Una situación similar ocurre durante *El lago de los cisnes*, donde el cisne negro debe usar una serie de trucos basados en momento (torque, y momentum angular, para hacer un total de 32 giros:

<https://www.youtube.com/watch?v=15Vg0dgptRg>

### Ejemplo

Andre Agassi, Pete Sampras y Michael Chang están montando un museo del tenis donde tendrán un reloj cucú de gran tamaño. El péndulo del reloj es una raqueta de 4 m de largo que cuelga de una cuerda (de masa despreciable) de 1 m de largo. El mango se idealiza como una barra delgada de largo 2 m y masa 6 kg. La cabeza de la raqueta se idealiza como un disco (cilindro sólido) de radio 1 m y masa 6 kg. Asumiendo en sus cálculos que  $g = 10 \text{ m/s}^2$ , se pide:

- Determinar la ubicación del centro de masa (CM) medida desde el pivote en  $O$ .
- La inercia del sistema (péndulo que rota en el pivote en  $O$ ).
- El péndulo tiene velocidad  $v_\theta = \frac{6}{5} \text{ m/s}$  medida en el CM cuando está en la posición más baja: ¿Cuál es la altura máxima que alcanzará el CM desde esa posición?
- ¿Cuál es la frecuencia natural circular  $\omega_n$  del sistema si  $\theta$  es pequeño?



La ubicación de los centros de masa del mango (barra) y cabeza (disco) son:

$$\bar{r}_b = 1 + \frac{2}{2} = 2 \text{ m} \qquad \bar{r}_d = 1 + 2 + 1 = 4 \text{ m}$$

La ubicación del centro de masa del péndulo completo está en:

$$\bar{r} = \frac{\bar{r}_b m_b + \bar{r}_d m_d}{m_b + m_d} = \frac{(2)(6) + (4)(6)}{12} = 3 \text{ m}$$

La inercia de cada componente con respecto a su propio CM se obtienen una tabla de inercias y son:

$$\begin{aligned} \bar{I}_{\text{barra}} &= \frac{1}{12} m_b \ell^2 = \frac{1}{12} (6) (2^2) = 2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \\ \bar{I}_{\text{disco}} &= \frac{1}{2} m_d R^2 = \frac{1}{2} (6) (1^2) = 3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \end{aligned}$$

La inercia del péndulo completo respecto a su pivote  $O$  se obtiene usando el *cambio de eje de rotación* (teorema de Steiner) y sumando ambos componentes:

$$\begin{aligned} I_O &= \bar{I}_{\text{barra}} + m_b (\bar{r}_b)^2 + \bar{I}_{\text{disco}} + m_d (\bar{r}_d)^2 \\ I_O &= 2 + (6) (2^2) + 3 + (6) (4^2) = 125 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \end{aligned}$$

La velocidad angular del péndulo al pasar por el punto más bajo es:

$$\omega = \frac{v_\theta}{\bar{r}} = \frac{6/5}{3} = \frac{2}{5} \text{ rad/s}$$

Usando conservación de energía entre el punto más bajo del péndulo y su punto más alto:

$$\underbrace{V_1}_{=0} + T_1 = V_2 + \underbrace{T_2}_{=0} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} I_O \omega^2 = m g h$$

$$\frac{1}{2} (125) \left( \frac{2}{5} \right)^2 = (12) (10) (h)$$

$$h = \frac{1}{12} \text{ m}$$

Es decir, el centro de masa del péndulo alcanza una altura máxima de 8,3 cm medida desde el punto más bajo de su recorrido.

Haciendo un DCL del péndulo-raqueta y utilizando la 2<sup>da</sup> ley de Newton en  $\theta_x$  (el eje  $\hat{i}$  sale del plano), se tiene que

$$\sum \mathbf{m}_x = I \alpha_x$$

$$-(W)(\bar{r} \sin \theta) = I \ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{360}{125} \sin \theta = 0$$

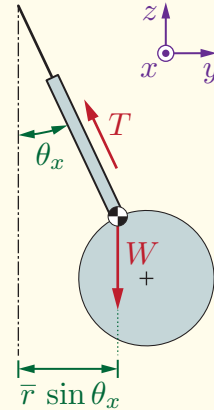
Como el ángulo es pequeño, entonces  $\sin \theta \approx \theta$ , y con ello:

$$\ddot{\theta} + \frac{72}{25} \sin \theta = 0 \quad \leftarrow \quad (\text{ecuación de un oscilador armónico})$$

, de donde se desprende que la frecuencia natural circular es:

$$\omega_n^2 = \frac{72}{25} \quad \rightarrow \quad \omega_n = \frac{6}{5} \sqrt{2} \text{ rad/s}$$

Esto significa que el péndulo tiene una frecuencia natural  $f_n = 0,2701 \text{ Hz}$ , o bien que su periodo natural es  $T_n = 3,7024 \text{ s}$ .



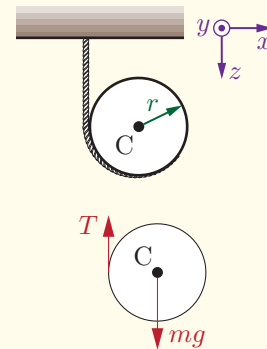
### Ejemplo

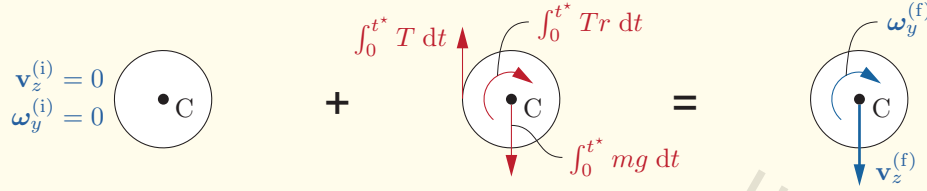
Basado en McGill & King 4<sup>th</sup> ed, Example 5.11

Un cilindro de masa  $m$  y radio  $r$  tiene una cuerda enrollada en su manto. El cilindro se encuentra inicialmente en reposo, tras lo cual se libera. Determine la velocidad del punto  $C$  en función del tiempo.

El primer paso consiste en hacer un DCL del cilindro. Como se tiene que  $\sum \mathbf{f}_x = 0$ , entonces  $\ddot{\mathbf{u}}_x = 0$ , lo que significa que el cilindro desciende verticalmente.

El diagrama de impulso-momentum del sistema se muestra a continuación:





Las ecuaciones de impulso-momentum en las direcciones  $z$  (vertical) y  $\theta_y$  (giro fuera del plano) son:

$$\underbrace{m \mathbf{v}_z^{(i)}}_{=0} + \int_0^{t^*} mg dt - \int_0^{t^*} T dt = m \mathbf{v}_z^{(f)} \quad \underbrace{I_C \omega_y^{(i)}}_{=0} - \int_0^{t^*} T r dt = I_C \omega_y^{(f)}$$

La tensión en la cuerda no es de interés, por lo que despejaremos el impulso que ejerce la misma en ambas ecuaciones:

$$-\int_0^{t^*} T dt = m \mathbf{v}_z^{(f)} - mg t^* \quad -\int_0^{t^*} T r dt = \frac{I_C \omega_y^{(f)}}{r}$$

, con lo que:

$$I_C \omega_y^{(f)} = m r \left[ \mathbf{v}_z^{(f)} - g t^* \right]$$

Se tiene también una relación entre la coordenada  $z_C$  del centro del cilindro y los giros del mismo. Esta relación puede ser derivada temporalmente para encontrar una ligadura entre las velocidades angular y vertical:

$$r \theta_y = \text{const} - z_C$$

$$r \omega_y = -v_C$$

Esta expresión es consistente con los signos definidos según los ejes en las figuras del problema. Reemplazando el valor de  $\omega_y$  en el resultado anterior se obtiene:

$$I_C \left[ -\frac{\mathbf{v}_z^{(f)}}{r} \right] = m r \left[ \mathbf{v}_z^{(f)} - g t^* \right]$$

La inercia de un cilindro sólido respecto a su centro de masa es  $I_C = \frac{1}{2} m r^2$ , y con ello:

$$\left[ \frac{1}{2} m r^2 \right] \left[ -\frac{\mathbf{v}_z^{(f)}}{r} \right] = m r \left[ \mathbf{v}_z^{(f)} - g t^* \right]$$

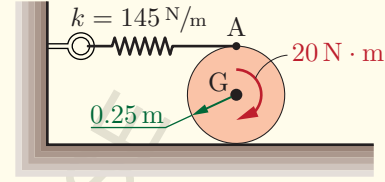
$$v_C(t^*) = \frac{2}{3} g t^*$$

**Curiosidad:** Notar que el radio y masa del cilindro no inciden sobre la magnitud de la aceleración vertical.

**Ejemplo**

Basado en Hibbeler 14<sup>th</sup> ed, Example 18.3

La rueda de la figura tiene masa  $m = 18 \text{ kg}$  y radio de giro  $k_G = 0,18$  respecto a su centro de masa  $G$ . La rueda tiene una cuerda enrollada en su manto con un resorte de rigidez  $k = 145 \text{ N/m}$  que se encuentra en su longitud natural con la rueda inicialmente en reposo. Sobre la rueda actúa un momento de magnitud  $20 \text{ N}\cdot\text{m}$ , tras lo cual rueda sin deslizar. Determine la velocidad angular cuando el centro  $G$  se ha movido  $0,15 \text{ m}$ .



Debido a que la rueda parte del reposo y el resorte está en su longitud natural, se sabe que:

$$T_1 = 0$$

$$V_1 = (V_e)_1 = 0$$

La condición de rodadura (ligadura entre la rotación y traslación del cuerpo) resulta en:

$$v_{G2} = -r \omega_2 = -0,25 \omega_2$$

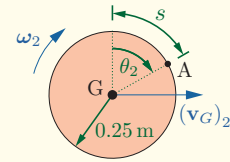
La inercia de la rueda es:

$$I_G = (k_G)^2 m = 0,5832 \text{ m}^4$$

Con ello, la energía cinética en un instante cualquiera es:

$$T_2 = \frac{1}{2} I_G (\omega_2)^2 + \frac{1}{2} m (v_{G2})^2 = \left[ \frac{1}{2} (0,5832) + \frac{1}{2} (18) (-0,25)^2 \right] (\omega_2)^2$$

$$T_2 = 0,8541 (\omega_2)^2$$



La dificultad en este problema radica en notar que si el punto  $G$  se mueve  $s$  hacia la derecha, entonces el resorte se estira  $2s$ : un  $s$  por el movimiento de  $G$  y otro  $s$  por haber enrollado la cuerda una longitud  $s$  (movimiento del punto  $A$  en la figura). Se sabe del enunciado que  $s = 0,15 \text{ m}$ , con lo que:

$$V_2 = \frac{1}{2} k \delta^2 = \frac{1}{2} k (2s)^2 = 6,525 \text{ J}$$

Para llegar a  $s = 0,15 \text{ m}$ , la rueda ha girado:

$$\theta_2 = -\frac{s}{r} = -\frac{0,15}{0,25} = -0,6 \text{ rad}$$

El trabajo hecho por el momento es:

$$U_m = \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\theta} = (-20) (-0,6) = 12 \text{ J}$$

Finalmente, utilizando el principio de trabajo y energía, se tiene que:

$$T_1 + V_1 + U_{12}^* = T_2 + V_2$$

$$0 + 0 + 12 = 0,8541 (\omega_2)^2 + 6,525$$

$$\omega_2 = 2,532 \text{ rad/s}$$