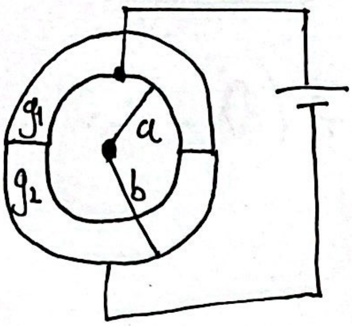
Ayudantía 15

1.- 

¿R_{eq} entre los conductores?

$\vec{E}$ es de la forma: $\vec{E} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\vec{r}}{r^3}$; $\underbrace{a < r < b}_{\text{entre los conductores}}$.

Por ley de ohm local, las densidades de corriente:

$$\vec{J}_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot g_1 \frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{J}_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} g_2 \frac{\vec{r}}{r^3}$$

, luego la intensidad de corriente:

$$I = \int \vec{J} \cdot dS = \underbrace{2\pi r^2}_{\text{Área de la mitad de la esfera.}} (J_1 \hat{r} + J_2 \hat{r})$$

Reemplazando obtenemos:

$$I = 2\pi r^2 \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} g_1 \frac{\vec{r}}{r^3} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} g_2 \frac{\vec{r}}{r^3} \right) \Rightarrow \boxed{I = \frac{Q}{2\varepsilon_0}(g_1 + g_2)}$$

Por otra parte se sabe que:

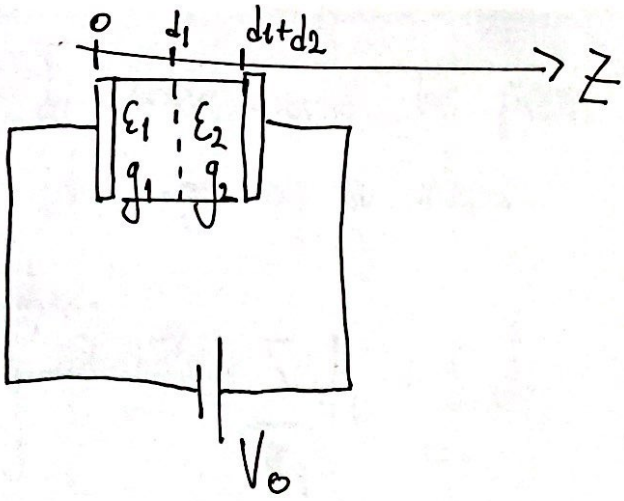
$$\Delta V = V(a) - V(b) = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

Finalmente:

$$\boxed{R = \frac{\Delta V}{I} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)\frac{1}{g_1 + g_2}}$$

Scanned with CamScanner

2.



En régimen estacionario, no hay dependencia del tiempo.

$$\nabla \cdot J + \cancel{\frac{\partial \rho}{\partial t}}^{\to 0} = 0 \rightarrow \nabla \cdot J = 0$$

La única posibilidad es que $J(z)$ sea cte.

$$\vec{J} = -J\hat{k}$$

Aplicando Ley de ohm en forma local

$$\vec{E}_1 = -\frac{J}{g_1}\hat{k}$$

$$\vec{E}_2 = -\frac{J}{g_2}\hat{k}$$

Los vectores de desplazamiento son:

$$D_1 = \varepsilon_1 \cdot E_1 = -\frac{\varepsilon_1}{g_1} J\hat{k} \; ; \; D_2 = \varepsilon_2 \cdot E_2 = -\frac{\varepsilon_2}{g_2} J\hat{k}$$

La diferencia de potencial entre las placas se puede calcular en términos del campo en su interior:

$$\Delta V = -\int_0^{d_1+d_2} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \underbrace{\frac{J}{g_1} d_1}_{\text{Voltaje de } \varepsilon_1} + \underbrace{\frac{J}{g_2} d_2}_{\text{Voltaje de } \varepsilon_2}$$

de donde se despeja J:

$$J = \frac{g_1 g_2}{d_1 g_2 + d_2 g_1} \Delta V \quad (*)$$

La densidad de carga libre en la interfaz es:

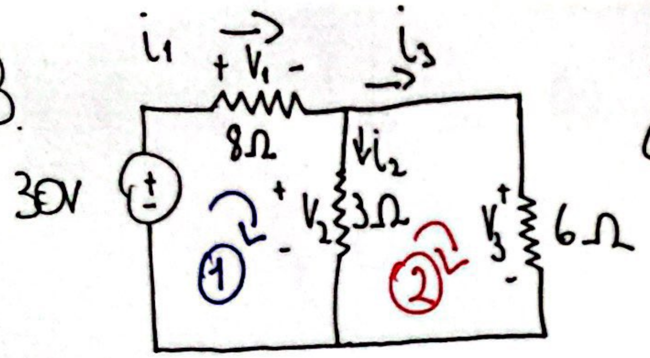
$$\sigma_l = (\vec{D}_2 - \vec{D}_1)\cdot \hat{k}$$

Reemplazando $(*)$

$$\sigma_l = -\frac{\varepsilon_2}{g_2} J + \frac{\varepsilon_1}{g_1} J$$

$$\boxed{\sigma_l = \frac{g_1 g_2}{d_1 g_2 + d_2 g_1} \Delta V \left(\frac{\varepsilon_1}{g_1} - \frac{\varepsilon_2}{g_2}\right)}$$

3.



¿i_1, i_2, i_3?

¿V_1, V_2, V_3?

Aplicando ley de nodos:

$$\boxed{i_1 = i_2 + i_3} \circledast$$

① $30 = V_1 + V_2$

$$30 = 8 \cdot i_1 + 3i_2$$

$$\boxed{i_1 = \frac{30 - 3i_2}{8}}$$

② $-3 \cdot i_2 + 6 \cdot i_3 = 0$

$$3i_2 = 6i_3$$

$$\boxed{\frac{i_2}{2} = i_3}$$

3 ecuaciones, 3 incógnitas

i_1, i_2, i_3

Reemplazando todo en ⊛

$$\dot{i}_1 - \dot{i}_2 - \dot{i}_3 = 0$$

$$\frac{30 - 3\dot{i}_2}{8} - \dot{i}_2 - \frac{\dot{i}_2}{2} = 0$$

$$\frac{30}{\cancel{8}} = \frac{15}{\cancel{8}}\dot{i}_2 \rightarrow \boxed{\dot{i}_2 = 2A}$$

Luego: $\boxed{\dot{i}_3 = 1A}$ y $\boxed{\dot{i}_1 = 3A}$

Los voltajes:

$$V_1 = \dot{i}_1 \cdot R_1 = 3 \cdot 8 = 24V$$
$$V_2 = \dot{i}_2 \cdot R_2 = 2 \cdot 3 = 6V$$
$$V_3 = \dot{i}_3 R_3 = 1 \cdot 6 = 6V$$