Código de Honor: Como miembro de la comunidad de la Pontificia Universidad Católica de Chile, me comprometo a respetar los principios y normativas que la rigen. Asimismo, me comprometo a actuar con rectitud y honestidad en esta evaluación.
Adicionalmente declaro estar en condiciones de salud adecuadas para rendir esta evaluación y que me presento a ésta bajo mi responsabilidad. En caso de sentirme mal o tener alguna complicación, deberé informarlo inmediatamente al ayudante o profesor en sala.

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Economía y Administración

Segundo Semestre 2024

Curso	**:**	**Probabilidad y Estadística**
Sigla	**:**	**EAA1510**
Profesores	**:**	**Cristian Vásquez (Sec 1 - 2), Ricardo Olea (Sec 3) y Ricardo Aravena (Sec 4)**

Pauta Examen

Problema 1

Considere que en un proceso de producción de un artículo eléctrico, el equipo de control de calidad de la empresa selecciona en forma aleatoria tres artículos de la producción diaria (que se supone es grande) de cierta máquina y observa el número de artículos defectuosos. La proporción "p" de artículos defectuosos producidos por la máquina varía diariamente y tiene una distribución uniforme en el intervalo $(0, 1)$. A partir de lo anterior responda las siguientes preguntas:

a) **[2.0 Ptos]** ¿Cuál es el número esperado de artículos defectuosos observado entre los tres artículos muestreados?

b) **[2.0 Ptos]** Determine la varianza del número de artículos defectuosos de entre los tres muestreados.

c) **[2.0 Ptos]** Suponga ahora que la proporción "p" artículos defectuosos sólo puede tomar dos valores, que son 0.2 y 0.4 con la siguiente función de probabilidad discreta,

$$\Pr(P = p) = \begin{cases} \dfrac{1}{3}, & \text{sí } p = 0.2, \\ \dfrac{2}{3}, & \text{sí } p = 0.4, \\ 0, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Luego defina la variable aleatoria Y = "Número [redacted] de artículos defectuosos observado entre los tres artículos muestreados". Determine la probabilidad marginal de la variable aleatoria Y, además, reporte la probabilidad que de $Y \geq 2$.

Observación: **Reporte sus resultados redondeados al tercer decimal**

Desarrollo

a) Defina la variable aleatoria Y = "Número de artículos defectuosos observado entre los tres artículos muestreados" Note que $Y|P = p \sim \text{binomial}(n = 3, p)$, donde $P \sim \text{Uniforme}(a = 0, b = 1)$. La esperanza de P se puede obtener con la información del formulario $\dfrac{1}{2}$ **[0.5 Ptos.]**. Por lo tanto

$$\text{E}(Y) = \text{E}(\text{E}(Y\,|P)) = \text{E}(3P) = 3\,\text{E}(P) = \frac{3}{2} = 1.5\ \textbf{[1.5 Ptos.]}$$

b) Aquí también se pide la varianza marginal:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(Y) &= \mathrm{E}(\mathrm{Var}(Y|P)) + \mathrm{Var}(\mathrm{E}(Y|P)), \\
&= \mathrm{E}(3\,P(1-P)) + \mathrm{Var}(3\,P), \text{ \textbf{[0.5 Ptos.]}} \\
&= 3\,\mathrm{E}(P - P^2) + 9\,\mathrm{Var}(P), \\
&= 3\,(\mathrm{E}(P) - \mathrm{E}(P^2)) + 9\,\mathrm{Var}(P), \text{ \textbf{[0.5 Ptos.]}}
\end{aligned}$$

Dado que $P \sim \text{Uniforme}(a = 0, b = 1)$, entonces $\mathrm{E}(P) = 1/2$, $\mathrm{Var}(P) = 1/12$ y $\mathrm{E}(P^2) = (1/12) + (1/2)^2 = 1/3$ **[0.5 Ptos.]**.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(Y) &= 3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \frac{9}{12}, \\
&= \frac{3}{6} + \frac{9}{12}, \\
&= \frac{15}{12}, \\
&= 1.25 \text{ \textbf{[0.5 Ptos.]}}
\end{aligned}$$

c) Aquí $Y|P = p \sim \text{binomial}(n = 3, p)$, sin embargo, a diferencia de los items anteriores, P puede tomar dos valores, 0.2 o 0.4 con probabilidad 1/2 y 2/3 respectivamente. Para obtener la función de probabilidad marginal de Y, se debe marginalizar la función de probabilidad conjunta,

$$\Pr(Y = y, P = p) = \Pr(Y = y\,|P = p)\Pr(P = p), \text{ \textbf{[0.2 Ptos.]}}$$

Entonces, se puede sumar sobre todos los valores p para obtener la función de probabilidad marginal, es decir, $\Pr(Y = y) = \Pr(Y = y, P = 0.2) + \Pr(Y = y, P = 0.4)$

$$\begin{aligned}
\Pr(Y = y) &= \Pr(Y = y, P = 0.2) + \Pr(Y = y, P = 0.4), \text{ \textbf{[0.3 Ptos.]}} \\
&= \Pr(Y = y\,|P = 0.2)\Pr(P = 0.2) + \Pr(Y = y\,|P = 0.4)\Pr(P = 0.4), \\
&= \binom{3}{y} 0.2^y 0.8^{3-y}\,\frac{1}{3} + \binom{3}{y} 0.4^y 0.6^{3-y}\,\frac{2}{3}, \qquad \text{sí } y = 0, 1, 2, 3 \text{ \textbf{[0.5 Ptos.]}}
\end{aligned}$$

Luego, $\Pr(Y \geq 2)$ está dada por

$$\begin{aligned}
\Pr(Y \geq 2) &= \Pr(Y = 2) + \Pr(Y = 3), \\
&= \binom{3}{2} 0.2^2 0.8^{3-2}\,\frac{1}{3} + \binom{3}{2} 0.4^2 0.6^{3-2}\,\frac{2}{3} + \binom{3}{3} 0.2^2 0.8^{3-3}\,\frac{1}{3} + \binom{3}{3} 0.4^3 0.6^{3-3}\,\frac{2}{3}, \text{ \textbf{[0.5 Ptos.]}} \\
&= 3 \cdot 0.2^2 \cdot 0.8 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot 0.4^2 \cdot 0.6 \cdot \frac{2}{3} + 0.2^3 \cdot \frac{1}{3} + 0.4^3 \cdot \frac{2}{3}, \\
&= 0.269 \text{ \textbf{[0.5 Ptos.]}}
\end{aligned}$$

Curso : **Probabilidad y Estadística**
Sigla : **EAA1510**
Profesores : **Cristian Vásquez (Sec 1 - 2), Ricardo Olea (Sec 3) y Ricardo Aravena (Sec 4)**

Problema 2

Un ingeniero en computación está investigando la utilidad de dos lenguajes de programación para mejorar las tareas de los analistas en su trabajo, lenguaje A y lenguaje B. El ingeniero pide a sus analistas, familiarizados con los dos lenguajes, que codifiquen una función estándar del trabajo en ambos lenguajes, anotando el tiempo, en minutos, que requieren para hacer esta tarea. A partir de la información entregada por sus analistas, el ingeniero propone que el tiempo de programación en ambos lenguajes tiene una distribución normal bivariada con los siguientes parámetros:

$$\begin{aligned} \mu_A &= 17.90, \quad \sigma_A^2 = 3.5^2 \\ \mu_B &= 17.25, \quad \sigma_B^2 = 4.5^2 \\ \rho &= 0.75 \end{aligned}$$

donde μ_A y σ_A^2 son la media y la varianza del tiempo de programación del lenguaje A respectivamente, μ_B y σ_B^2 son la media y la varianza del tiempo de programación del lenguaje B respectivamente y, ρ es el coefiente de correlación. Con estos antecedentes responda lo siguiente:

a) **[2.0 Ptos]** Si se selecciona un analista al azar para programar una función estándar para su trabajo y, se sabe que demora 17.5 minutos en programar la función en el lenguaje de programación B, ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de programación de la misma función en el lenguaje A se superior a 18 minutos?

b) **[2.0 Ptos]** El ingeniero está interesando en estudiar la efectividad de utilizar el lenguaje de programación B, para eso define la variable aleatoria $U = \text{Tiempo B} - \text{Tiempo A}$, donde "Tiempo B" representa el tiempo de programación de una función estándar en el lenguaje B y "Tiempo A" representa el tiempo de programación de una función estándar en el lenguaje A. Determine la distribución exacta de U y reporte la probabilidad de que U sea menor que cero.

c) **[2.0 Ptos]** Suponga ahora que el ingeniero está interesado en analizar el promedio de los tiempos de programación de funciones estándar en ambos software, es decir, $W = (\text{Tiempo B} + \text{Tiempo A})/2$. ¿Cuál es la covarianza entre las variables aleatorias U y W?

Observación: Reporte sus resultados redondeados al tercer decimal

Desarrollo

a) Por propiedad de la distribución normal se tiene que

$$\begin{aligned} \text{Tiempo A}|\text{Tiempo B} = 17.5 \quad &\sim \quad \text{normal}\left(17.9 + 0.75\frac{3.5}{4.5}(17.5 - 17.25)\,;\, 3.5^2(1 - 0.75^2)\right), \\ &\sim \quad \text{normal}(18.046\,;\, 5.359), \ \textbf{[0.5 Ptos.]} \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \Pr(\text{Tiempo A} > 18|\text{Tiempo B} = 17.5) \quad &= \quad 1 - \Pr(\text{Tiempo A} \leq 18|\text{Tiempo B} = 17.5), \\ &= \quad 1 - \Pr\left(Z \leq \frac{18 - 18.046}{\sqrt{5.359}}\right), \ \textbf{[0.5 Ptos.]} \\ &= \quad 1 - \Phi(-0.02) = 1 - (1 - \Phi(0.02)) = 0.508 \ \textbf{[1.0 Ptos.]} \end{aligned}$$

b) Aquí $U = \text{Tiempo B} - \text{Tiempo A}$ es una combinación lineal de dos variables aleatorias con distribución normal, donde los coeficientes son $a_1 = 1$ y $a_2 = -1$, por lo tanto, U tiene una distribución normal, donde

$$\mathrm{E}(U) = \mathrm{E}(\text{Tiempo B}) - \mathrm{E}(\text{Tiempo A}) = 17.25 - 17.9 = -0.65 \,\textbf{[0.3 Ptos.]}$$

Y la varianza está dada por:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(U) &= \mathrm{Var}(\text{Tiempo B} - \text{Tiempo A}),\\
&= \mathrm{Cov}(\text{Tiempo B} - \text{Tiempo A}, \text{Tiempo B} - \text{Tiempo A}),\\
&= \mathrm{Cov}(\text{Tiempo B}, \text{Tiempo B}) + \mathrm{Cov}(\text{Tiempo A}, \text{Tiempo A}) - 2\mathrm{Cov}(\text{Tiempo A}, \text{Tiempo A}),\\
&= \mathrm{Var}(\text{Tiempo B}) + \mathrm{Var}(\text{Tiempo A}) - 2\,\mathrm{Cov}(\text{Tiempo A}, \text{Tiempo A}), \ \textbf{[0.4 Ptos.]}
\end{aligned}$$

Dado que $\rho = \mathrm{Cov}(\text{Tiempo A}, \text{Tiempo B})/\sqrt{\mathrm{Var}(\text{Tiempo A}) \cdot \mathrm{Var}(\text{Tiempo B})}$, se puede despejar la covarianza;

$$\mathrm{Cov}(\text{Tiempo A}, \text{Tiempo B}) = 0.75 \cdot 3.5 \cdot 4.5 = 11.8125$$

Así, la varianza de la combinación linea U es

$$\mathrm{Var}(U) = 4.5^2 + 3.5^2 - 2 \cdot 11.8125 = 8.875 \,\textbf{[0.3 Ptos.]}$$

De esta forma $U = \text{Tiempo B} - \text{Tiempo A} \sim \text{Normal}(-0.65, 8.875)$ **[0.5 Ptos.]**. Finalmente

$$\begin{aligned}
\Pr(U < 0) &= \Pr\left(U < \frac{0 + 0.65}{\sqrt{8.875}}\right),\\
&= \Phi(0.22) = 0.587 \,\textbf{[0.5 Ptos.]}
\end{aligned}$$

c) Aquí se debe aplicar la covarianza de dos combinaciones lineales, $U = \text{Tiempo B} - \text{Tiempo A}$, donde $a_1 = 1$ y $a_2 = -1$ y $W = (\text{Tiempo B} + \text{Tiempo A})/2$, donde $b_1 = 0.5$ y $b_2 = 0.5$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(U, W) &= \mathrm{Cov}(\text{Tiempo B} - \text{Tiempo A}, 0.5\text{Tiempo B} + 0.5\text{Tiempo A}),\\
&= 0.5\,\mathrm{Cov}(\text{Tiempo B}, \text{Tiempo B}) + 0.5\,\mathrm{Cov}(\text{Tiempo B}, \text{Tiempo A}),\\
&- 0.5\,\mathrm{Cov}(\text{Tiempo A}, \text{Tiempo B}) - 0.5\,\mathrm{Cov}(\text{Tiempo A}, \text{Tiempo A}), \ \textbf{[0.5 Ptos.]}\\
&= 0.5\,\mathrm{Var}(\text{Tiempo B}) - 0.5\,\mathrm{Var}(\text{Tiempo A}), \ \textbf{[0.5 Ptos.]}\\
&= 0.5 \cdot 4.5^2 - 0.5 \cdot 3.5^2, \ \textbf{[0.5 Ptos.]}\\
&= 4 \,\textbf{[0.5 Ptos.]}
\end{aligned}$$

Formulario

Función de distribución Binomial (n, π): Función de probabilidad:

$$\Pr(X = x) = \binom{n}{x} \pi^x (1-\pi)^{n-x}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots, n. \quad 0 \leq \pi \leq 1$$

El valor esperado es $\mathrm{E}(X) = n\pi$, la varianza es $\mathrm{Var}(X) = n\pi(1-\pi)$ y la FGM $M_X(t) = \left[\pi e^t + (1-\pi)\right]^n$.

Función de densidad Uniforme $(a,\, b)$: Función de densidad:

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a}, \quad \text{para } a \leq x \leq b.$$

El valor esperado es $\mathrm{E}(X) = \dfrac{a+b}{2}$, la varianza es $\mathrm{Var}(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$ y la FGM $M_X(t) = \dfrac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}$.

Función de Probabilidad Conjunta: Sea Y_1 e Y_2 variables aleatorias discretas (o continuas), la función de probabilidad conjunta $p(y_1, y_2) = P(Y_1 = y_1, Y_2 = y_2)$ debe satisfacer:

Caso Discreto	Caso Continuo
$p(y_1, y_2) \geq 0$ para todo y_1, y_2,	$f(y_1, y_2) \geq 0$ para todo y_1, y_2
$\displaystyle\sum_{y_1, y_2} p(y_1, y_2) = 1,$	$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u, v)\, du\, dv = 1$

Función de Distribución Acumulada: Para cualquier variable aleatoria Y_1 e Y_2, la función de distribución conjunta bivariada $F(y_1, y_2)$ está dada por

$$F(y_1, y_2) = P(Y_1 \leq y_1, Y_2 \leq y_2) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{u \leq y_1} \sum_{v \leq y_2} p(u, v), & \text{caso discreto} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{y_1} \int_{-\infty}^{y_2} f(u, v)\, du\, dv, & \text{caso continuo} \end{cases}$$

donde $-\infty < y_1 < \infty$ y $-\infty < y_2 < \infty$. Algunas propiedades:

- $F(-\infty, -\infty) = F(-\infty, y_2) = F(y_1, -\infty) = 0$
- $F(\infty, \infty) = 1$
- Si $y_1 \leq y_1^*, y_2 \leq y_2^*$, entonces

$$P(y_1 < Y_1 \leq y_1^*\,,\, y_2 < Y_2 \leq y_2^*) \quad = \quad F(y_1^*, y_2^*) - F(y_1^*, y_2) - F(y_1, y_2^*) + F(y_1, y_2)$$

Densidades Marginales: Sea Y_1 e Y_2 variables aleatorias discretas (o continuas), con función de probabilidad (densidad) conjunta dada por $p(y_1, y_2)$ o $f(y_1, y_2)$. Entonces las probabilidades (densidades) marginales están dadas por:

Caso Discreto	Caso Continuo
$p(y_1) = \displaystyle\sum_{y_2} p(y_1, y_2)$	$f(y_1) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, y_2)\, dy_2$
$p(y_2) = \displaystyle\sum_{y_1} p(y_1, y_2)$	$f(y_2) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, y_2)\, dy_1$

Densidades Condicionales: Sea Y_1 e Y_2 variables aleatorias discretas (o continuas), con función de probabilidad (densidad) conjunta dada por $p(y_1, y_2)$ o $f(y_1, y_2)$. Entonces las probabilidades (densidades) condicionales están dadas por:

Caso Discreto	Caso Continuo
$p(y_1 \mid y_2) = \dfrac{p(y_1, y_2)}{p(y_2)}$	$f(y_1 \mid y_2) = \dfrac{f(y_1, y_2)}{f(y_2)}$
$p(y_2 \mid y_1) = \dfrac{p(y_1, y_2)}{p(y_1)}$	$f(y_2 \mid y_1) = \dfrac{f(y_1, y_2)}{f(y_1)}$

Independencia: Diremos que las v.a's X e Y son independientes si

$$
\begin{aligned}
p(x, y) &= p(x)p(y) \quad \text{caso discreto} \\
f(x, y) &= f(x)f(y) \quad \text{caso continuo}
\end{aligned}
$$

Covarianza y Correlación: Sean Y_1 e Y_2 variables aleatorias, se define la covarianza y correlación respectivamente de la siguiente forma:

$$\operatorname{Cov}(Y_1, Y_2) = \operatorname{E}\left[(Y_1 - \mu_1)(Y_2 - \mu_2)\right] = \operatorname{E}(Y_1 Y_2) - \operatorname{E}(Y_1)\operatorname{E}(Y_2), \quad \operatorname{Corr}(Y_1, Y_2) = \frac{\operatorname{Cov}(Y_1, Y_2)}{\sqrt{\operatorname{Var}(Y_1) \cdot \operatorname{Var}(Y_2)}}$$

Función de densidad Normal Bivariada: Dos variables aleatorias X e Y tienen distribución conjunta Normal Bivariada si su función de densidad conjunta está dada por:

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\,\pi\,\sigma_X\,\sigma_Y\,\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2 + \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2 - 2\,\rho\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)\right]\right\}$$

con $-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty$, $\mu_X = \operatorname{E}(X)$, $\mu_Y = \operatorname{E}(Y)$, $\sigma_X = \sqrt{\operatorname{Var}(X)}$, $\sigma_Y = \sqrt{\operatorname{Var}(Y)}$ y $\rho = \operatorname{Corr}(X, Y)$.

Propiedades:

- Si X e Y son Normal-Bivariada tal que $\operatorname{Cov}(X, Y) = 0$ entonces X es independiente de Y.
- Las distribuciones marginales de X e Y son Normales: $X \sim \text{Normal}(\mu_X, \sigma_X^2) \quad Y \sim \text{Normal}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$
- Las distribuciones condicionales también son Normales:

$$X \mid Y = y \sim \text{Normal}(\mu_X + \rho\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y - \mu_Y), \sigma_X^2(1-\rho^2))$$

$$Y \mid X = x \sim \text{Normal}(\mu_Y + \rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - \mu_X), \sigma_Y^2(1-\rho^2))$$

- Combinaciones lineales de X e Y también distribuyen Normal.

Funciones lineales de V.A.: Sean $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ y $X_1, X_2, ..., X_m$ variables aleatorias con $\operatorname{E}(Y_i) = \mu_i$ y $\operatorname{E}(X_j) = \xi_j$. Defina

$$U_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i\,Y_i \qquad U_2 = \sum_{j=1}^{m} b_j\,X_j$$

donde $a_1, a_2, ..., a_n$ y $b_1, b_2, ..., b_m$ son constantes. Entonces

- $\operatorname{E}(U_1) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i$
- $\operatorname{Var}(U_1) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i\,a_j \operatorname{Cov}(Y_i, Y_j)$
- $\operatorname{Cov}(U_1, U_2) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i b_j \operatorname{Cov}(Y_i, X_j)$

Probabilidad Acumulada Distribución Normal Estándar

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990