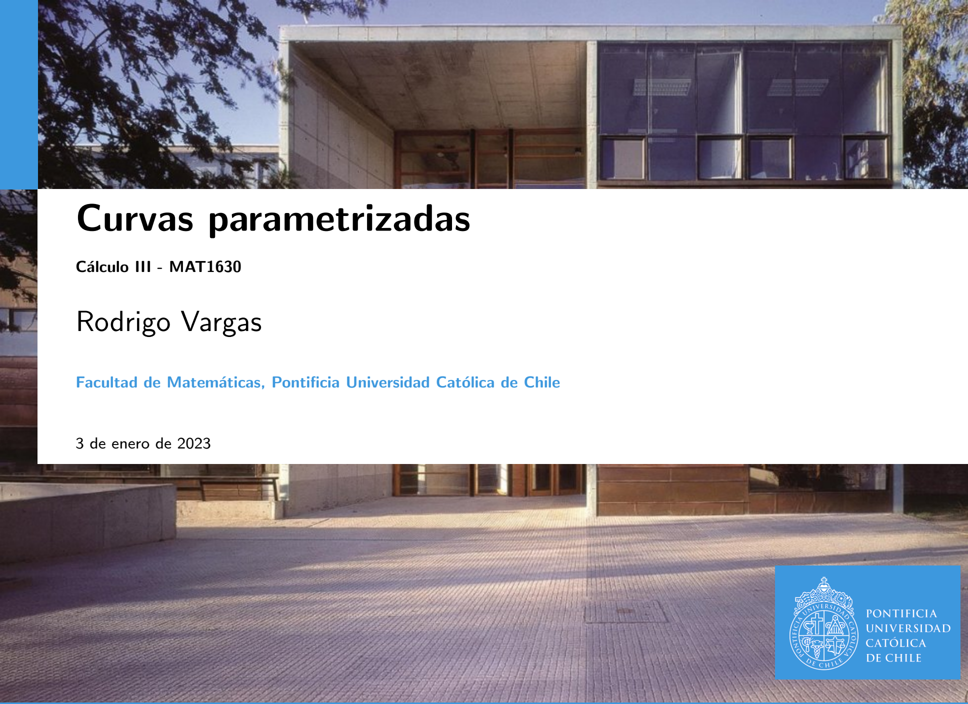


Curvas parametrizadas

Cálculo III - MAT1630

Rodrigo Vargas

Facultad de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile

3 de enero de 2023

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

Curvas Parametrizadas

Definición.

Una **curva parametrizada diferenciable** es una función diferenciable $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$, donde I es un intervalo. La palabra diferenciable en esta definición significa que α es una correspondencia que aplica a cada $t \in I$ en un punto $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$ de forma que las funciones $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ son diferenciables. La variable t se denomina **parámetro** de la curva.

Si denotamos por $x'(t)$ la primera derivada de x en el punto t y usamos notaciones similares para las funciones z e y, el vector $(x'(t), y'(t), z'(t)) = \alpha'(t) \in \mathbb{R}^3$ se denomina **vector tangente** (o vector velocidad) de la curva α en t. El conjunto imagen $\alpha(I) \subset \mathbb{R}^3$ se denomina la **traza** de α. Se debe tener cuidado en distinguir una curva parametrizada, que es una función, de su traza, que es un subconjunto de $\mathbb{R}^3$.

Curvas Parametrizadas

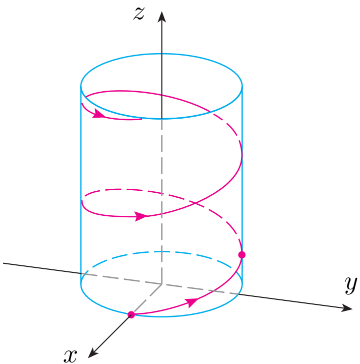
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

EJEMPLO 1 La curva parametrizada diferenciable dada por:

$$\alpha(t) = (a\cos(t), a\,\mathrm{sen}(t), bt)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

tiene como traza en $\mathbb{R}^3$ una hélice sobre el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$. Observe que las dos primeras funciones coordenadas $x(t) = a\cos(t)$, $y(t) = a\,\mathrm{sen}(t)$ satisfacen $x(t)^2 + y(t)^2 = a^2$, para todo $t \in \mathbb{R}$, de modo que la curva correspondiente debe estar en el cilindro circular recto $x^2 + y^2 = a^2$.

Curvas Parametrizadas



Aquí el parámetro t mide el ángulo que forma el eje x con la recta que une el origen O con la proyección del punto $\alpha(t)$ sobre el plano xy. Por otra parte, a medida que t avanza, la tercera función coordenada de α, $z(t) = bt$, que marca la altura del punto $\alpha(t)$, va siendo cada vez más grande (en el caso que $b > 0$).

Curvas Parametrizadas

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

EJEMPLO 2 La aplicación $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = (t^3, t^2)$, es una curva parametrizada diferenciable. Note que $\alpha'(0) = (0,0)$; o sea, el vector velocidad es cero para $t = 0$. Determine la traza de la curva en el plano. ¿La curva es una función real diferenciable en el origen?

EJEMPLO 3 La aplicación $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$, es una curva parametrizada diferenciable. Notemos que $\alpha(2) = \alpha(-2) = (0,0)$; es decir, la aplicación α no es inyectiva. Determine la traza de la curva en el plano.

EJEMPLO 4 Sean $A(1,2,3)$ y $B(3,2,0)$ puntos distintos en $\mathbb{R}^3$. Determine una parametrización del segmento de recta que los une los puntos A y B.

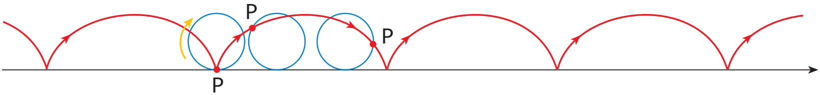
EJEMPLO 5 Una recta L en el espacio tridimensional se determina cuando se conoce un punto $P_0(x_o, y_0, z_0)$ sobre L y un vector $v = (a, b, c)$ paralelo a L. Las ecuaciones paramétricas de la recta L son

$$x = x_0 + at, \quad y = y_0 + bt, \quad z = z_0 + ct$$

donde $t \in \mathbb{R}$. Estas ecuaciones corresponden a las funciones coordenadas de una parametrización de la recta L.

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

EJEMPLO 6 Una curva muy importante en matemáticas es la llamada Cicloide, definida como la curva que describe un punto fijo de una circunferencia de radio a, la cual rueda, sin deslizarse, a una velocidad constante sobre el eje x.



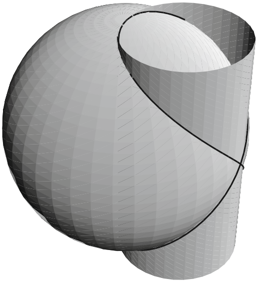
Determine las funciones coordenadas $x, y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de un camino $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ que tenga por traza una cicloide.

EJEMPLO 7 Encuentre ecuaciones paramétrica para el círculo con centro (a, b) y radio r.

Solución Basta elegir las ecuaciones

$$x = a + r\cos(t), \quad y = b + r\,\mathrm{sen}(t)\,, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi\,.$$

EJEMPLO 8 Determine una parametrización para la curva que es la intersección de la esfera de radio 1 y centro $\left(-\frac{1}{2}, 0, 0\right)$ y el cilindro de radio $\frac{1}{2}$ y eje el eje z. Esta es llamada la curva de Viviani, abajo hay una representación geométrica de la curva



Curvas Parametrizadas

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

EJEMPLO 9 Considere la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y el plano $x + y - z = 0$. Sea γ la curva intersección. Determine una parametrización para la curva γ.

Definición.

Llamaremos ecuaciones paramétricas de una curva a sus funciones coordenadas, es decir

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)\,, \quad a \leqslant t \leqslant b\,.$$