PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

Escuela de Ingeniería

ING1024 – Propiedades y Resistencia de Materiales

Interrogación 3 – **PAUTA**

Nº de Lista

Código de Honor: Me comprometo a no entregar ni recibir ayuda indebida en esta evaluación. Esto incluye discutir la evaluación con compañeros que aún no lo han rendido. También declaro que si me percato de que existe fraude de cualquier tipo en esta evaluación, tengo el deber de comunicárselo a los Profesores del curso, quienes seguirán los procedimientos establecidos en la reglamentación de la Escuela de Ingeniería y de la Pontificia Universidad Católica de Chile para perseguir y sancionar cualquier acto de deshonestidad académica.

Apellido, Nombre: ______________________________ , ______________________________

Número de alumno: ____________________ Sección: ______________ Firma: ______________

Problema 01 Propagación de grietas

(5 pts.) ¿Qué condición(es) debe(en) satisfacerse para que una grieta al interior de un cuerpo de un material elástico, isotrópico y frágil, se propague catastróficamente, cuando el cuerpo es sometido a un conjunto de cargas externas?

- **a) El esfuerzo normal en la punta de la grieta debe superar al esfuerzo de cohesión atómica del material y la liberación de la energía elástica almacenada en el cuerpo debe ser mayor que la energía necesaria para expandir el área superficial de la grieta.**
- b) El esfuerzo normal en la punta de la grieta debe superar al esfuerzo de cohesión atómica del material y la liberación de la energía elástica almacenada en el cuerpo debe ser menor que la energía necesaria para expandir el área superficial de la grieta.
- c) El esfuerzo normal en la punta de la grieta debe superar al esfuerzo de fluencia del material y la liberación de la energía elástica almacenada en el cuerpo debe ser mayor que la energía necesaria para expandir el área superficial de la grieta.
- d) El esfuerzo de corte en la punta de la grieta debe superar al esfuerzo de corte de fluencia del material y la liberación de la energía elástica almacenada en el cuerpo debe ser mayor que la energía necesaria para expandir el área superficial de la grieta.

Problema 02 Criterio de Mohr-Coulomb

(5 pts.) ¿Cuál de las siguientes describe el criterio de falla Mohr-Coulomb?

a) $|\tau| = \tau_i + tan\phi$.
b) $\sigma = |\tau| + \tau_i tan\phi$.
c) $\boldsymbol{\tau_i = |\tau| + \sigma tan\phi}$.
d) $|\tau| = \sigma + \tau_i tan\phi$.

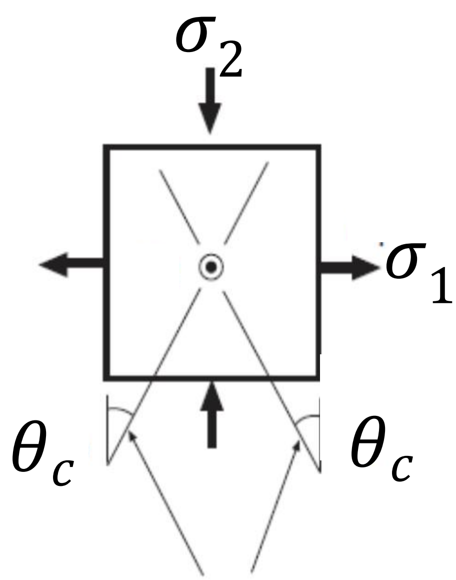
(5 pts.) El criterio de Mohr-Coulomb asume que la resistencia de un material es independiente de:

a) σ_1.
b) $\boldsymbol{\sigma_2}$.
c) σ_3.
d) Todas las anteriores.

Problema 03 Criterio de Mohr-Coulomb

(5 pts.) ¿Cuál es la relación entre el ángulo ϕ del criterio de Mohr-Coulomb y el ángulo del plano de falla θ_c en un estado de tensiones principales, cuando se llega al límite da falla Mohr-Coulomb?

a) $\theta_c = \phi/2 - \pi/4$.
b) $\theta_c = \phi - \pi/2$.
c) $\theta_c = \pi/2 - \phi$.
d) $\boldsymbol{\theta_c = \pi/4 - \phi/2}$.



Problema 04 Circulo de Mohr de deformaciones

(6 pts.) La figura 1.1 representa el estado plano de deformaciones presente en un punto en la superficie de un material.

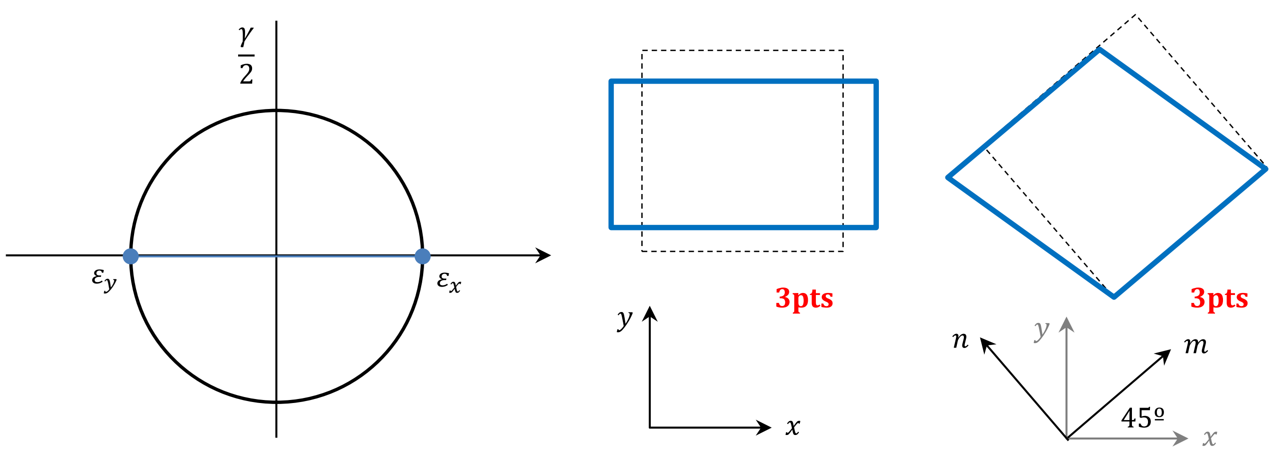


Figura 1.1

Nota: lo importante es la forma de la deformada, no su posición (y que los largos de los lados **no cambien**)

Los cuadrados mostrados a la derecha de la Figura 1.1 representan dos elementos diferenciales que forman parte dicha superficie en condición “antes de la deformación”. Dibuje esquemáticamente sobre ellos la condición “deformada” de acuerdo al estado de deformación mostrado.

Problema 05 Criterio de falla

(4pts) Los gráficos mostrados en la figura 5.1 muestran las tensiones de falla esperadas en dos materiales distintos de acuerdo al tamaño máximo de los defectos presentes en ellos.

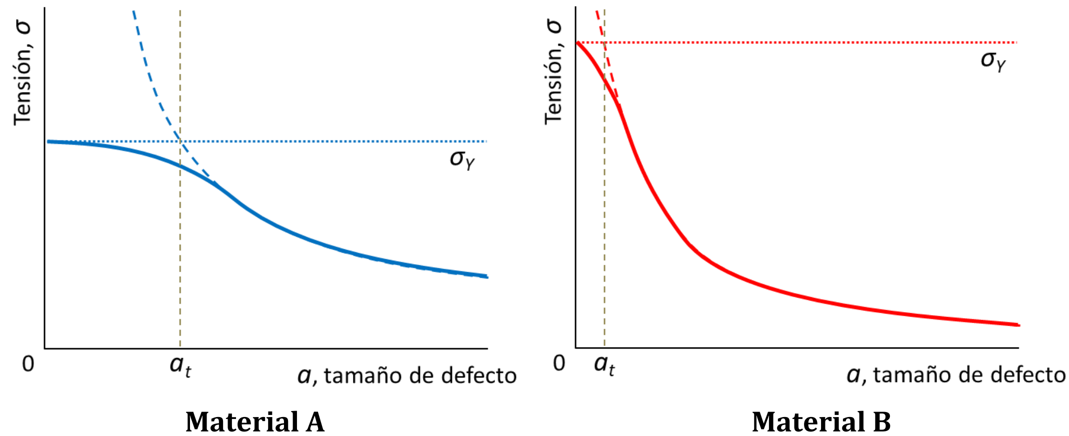


Figura 5.1 tensión de falla vs tamaño de defecto

a) ¿Qué tipo de comportamiento caracteriza a cada material? (A y B)

Material A: __**Dúctil**________________________________ (1 pt.)

Material B: __**Frágil**________________________________ (1 pt.)

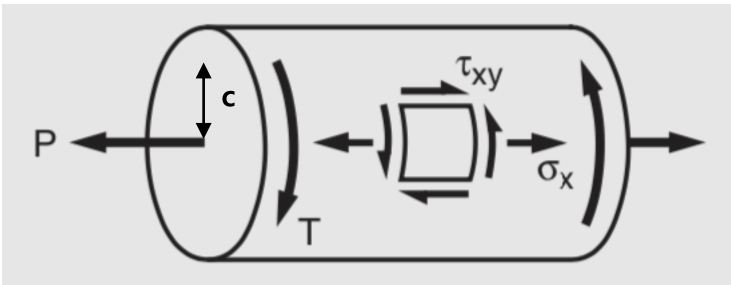
b) Para el material A, describa el tipo de falla que se espera para tamaños de defecto:

Menores que a_t: ___**Plastificación (o falla por deformación plástica)**__________ (1 pt.)

Mayores que a_t: ___**Fractura (o falla por propagación de fractura)**___________ (1 pt.)

Problema 06 Criterio de Tresca y Von Mises

(10 pts.) Un cilindro de diámetro d (ver figura 6.1) hecho de acero AISI 1020 es sujeto a una fuerza axial de tracción P de 200 kN y a un momento torsor T de 1,5 kN-m.



Determine el factor de seguridad a la plastificación para un punto situado a distancia c del eje del cilindro si el diámetro es d=50 mm. Para esto, use los criterios de Máximo Normal, Tresca y Von Mises, con una tensión de fluencia igual a $260MPa$. ¿Cuál de los criterios usaría para diseñar si su objetivo es ser lo más conservador posible?

Figura 6.1

a) Máximo normal.

b) Tresca.

c) Von Mises.

Notar que el momento torsor T aplicado produce las siguientes tensiones de corte en un punto a distancia c del eje del cilindro:

$$\tau_{xy} = \frac{Tc}{J} = \frac{T(d/2)}{\pi d^4/32} = \frac{16T}{\pi d^3} = 61{,}12MPa$$

En la expresión anterior, c es la posición del punto de observación de la tensión de corte con respecto al centro del cilindro, d es el diámetro del cilindro y J es una constante que depende de la forma del cilindro. El resto de las tensiones son despreciables frente a las tensiones σ_x y τ_{xy}.

PAUTA

Tenemos que

$$\sigma_x = \frac{P}{A} = \frac{4P}{\pi d^2} = \frac{4 \times 200kN}{3.1416 \times 2500mm^2} = 101{,}86MPa$$ **2pts**

Entonces como sabemos que $\sigma_y = 0$, el estado de tensiones principales queda como:

$$\sigma_1, \sigma_2 = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{2P}{\pi d^2} \pm \sqrt{\left(\frac{2P}{\pi d^2}\right)^2 + \left(\frac{16T}{\pi d^3}\right)^2}.$$ **2pts**

Esto implica que la tensión de corte máxima que determinada solamente por σ_1 y σ_2.

1) Con el criterio **máximo normal** tenemos que

$$\sigma_{MN} = max(|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_3|) = |\sigma_1| = \frac{2P}{\pi d^2} + \sqrt{\left(\frac{2P}{\pi d^2}\right)^2 + \left(\frac{16T}{\pi d^3}\right)^2} = 130{,}48MPa$$

Por lo tanto, el factor de seguridad queda como $X_{MN} = \sigma_Y/\sigma_{MN} = 1{,}99$. **2pts**

2) Con el criterio de **Tresca**

$\sigma_T = max(|\sigma_1 - \sigma_2| + |\sigma_2 - \sigma_3| + |\sigma_1 - \sigma_3|) = |\sigma_1 - \sigma_2|$

Por lo tanto queda que $\sigma_T = |\sigma_1 - \sigma_2| = 2\sqrt{\left(\frac{2P}{\pi d^2}\right)^2 + \left(\frac{16T}{\pi d^3}\right)^2} = 159{,}1MPa$

Por lo tanto $X_T = \sigma_Y/\sigma_T = 260MPa/159{,}1MPa = 1{,}63$. **2pts**

3) Con el criteria de **von Mises**, tenemos que

$$\sigma_{VM} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2)} = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}$$
$$= \sqrt{(130{,}48MPa)^2 - 130{,}48MPa \times (-28{,}62MPa)^2 + (28{,}62MPa)^2} = 146{,}9MPa$$

Por lo tanto, el factor de seguridad queda como $X_{VM} = \sigma_Y/\sigma_{VM} = 1{,}76$.

Por lo tanto, **usando Tresca se logra un diseño más conservador**. **2pts**

Notar que no es necesario realizar los cálculos de von Mises, porque siempre va a ser más conservador usar Tresca que von Mises para un mismo σ_Y.

Problema 07 Roseta de deformaciones

(20 pts) Considere una probeta plana de acero SAE 4340 de largo L=10 cm, sometida a un ensayo de tracción uniaxial como se indica en la figura, la cual posee un espesor suficiente como para considerar que está sometida a un estado de deformaciones planas. Sobre una de sus caras exteriores se ha ubicado una roseta de deformación (con un ángulo de 30º como se indica en la Figura 7.1). Lamentablemente las lecturas de esta roseta entregan la deformación solo en 2 de las 3 direcciones:

$\varepsilon_a = ?$

$\varepsilon_b = 0{,}00025$

$\varepsilon_c = 0{,}004$

a) Estime el valor de la deformación en mm que la roseta debió entregar para el término ε_a (8 pts)
b) Encuentre el tensor de deformaciones unitarias en ese punto. (5 pts)
c) Calcule la razón de Poisson de este acero. (3 pts)
d) Si se sabe que además el módulo de elasticidad de este acero es de 200 GPa, determine el tensor de Cauchy (en MPa) que actúa en la ubicación de la roseta. (4 pts)

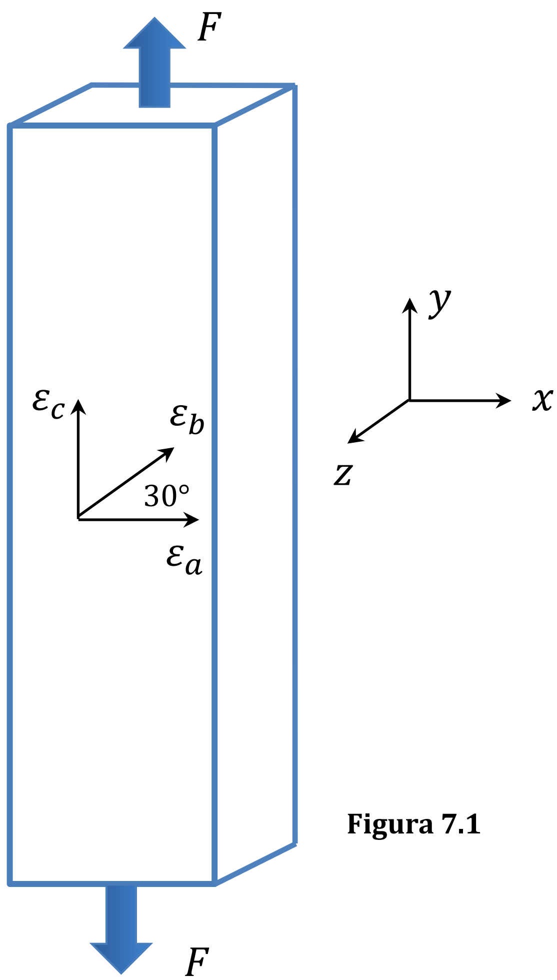


Figura 7.1

Apellido, Nombre: ____________________ , ____________________

PAUTA

a) Se parte sabiendo que es un estado principal de deformaciones (ensayo uniaxial), por lo tanto $\gamma_{xy} = 0$. Entonces, de la roseta de deformaciones:

$$\varepsilon_a = \varepsilon_x$$

$$\varepsilon_c = \varepsilon_y$$

$$\varepsilon_b = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos(60)$$ **5pts**

Reemplazando y despejando:

$$\varepsilon_a = \frac{4}{3}\varepsilon_b - \frac{\varepsilon_c}{3} = -0{,}001$$ **3pts**

b) Considerando deformaciones simétricas en x y z, el tensor de deformaciones será:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} -0{,}001 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}004 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}001 \end{bmatrix}$$ **5pts**

c) Directamente del valor de las deformaciones transversal y lateral:

$$\nu = -\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_y} = \frac{0{,}001}{0{,}004} = 0{,}25$$ **3pts**

d) Conociendo las propiedades elásticas del material, y sabiendo que en un estado uniaxial de tensiones ocurre que $\sigma_x = 0$, y como consecuencia de que $\gamma_{xy} = 0$ se tiene que $\tau_{xy} = 0$ y se escribe la Ley de Hooke generalizada:

$$\varepsilon_x = \frac{0}{E} - \frac{\nu}{E}\sigma_y$$

$$\sigma_y = 800\ MPa$$

Entonces, el tensor de tensiones de Cauchy en el punto será:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 800 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} MPa$$ **4pts**

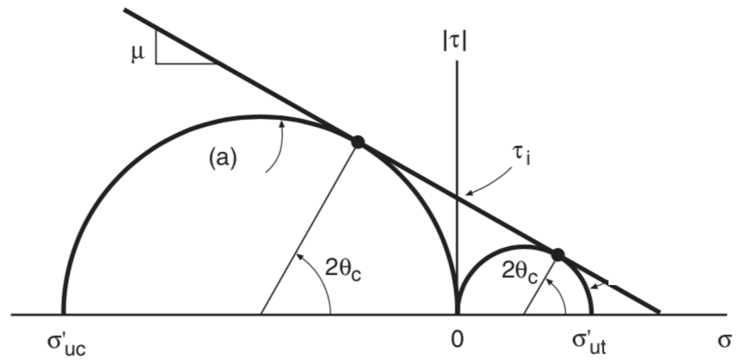
Problema 08 Criterio de Mohr-Coulomb

(20 pts.) Un material frágil tiene una tensión última a la tracción de $\sigma_{ut} = 300$ MPa. En combinación a esta resistencia, en compresión, tiene un comportamiento tipo Mohr-Coulomb, con $\tau_i = 387$ MPa y $\mu = 0{,}259$.

a) (10 pts.) Dibuje este nuevo criterio de fluencia en coordenadas σ versus |τ|. (La figura de la izquierda solo muestra el criterio de Mohr-Coulomb con los fines de mostrar los parámetros de la pregunta (b)).

b) (5 pts.) Calcule la máxima compresión y tracción uniaxial permisible σ'_{uc} y σ'_{ut}, mostrado en la figura.

c) (5 pts.) Dibuje nuevamente el criterio de fluencia en el dominio σ_1 y σ_2, considerando σ_{ut}, σ'_{uc} y σ'_{ut}.



PAUTA

a) Como existe un límite para la tensión de tracción, entonces la tensión máxima en tracción pura no podrá superar un valor de 300MPa. Primero, de la ecuación de la envolvente de falla de Mohr – Coulomb sabemos que:

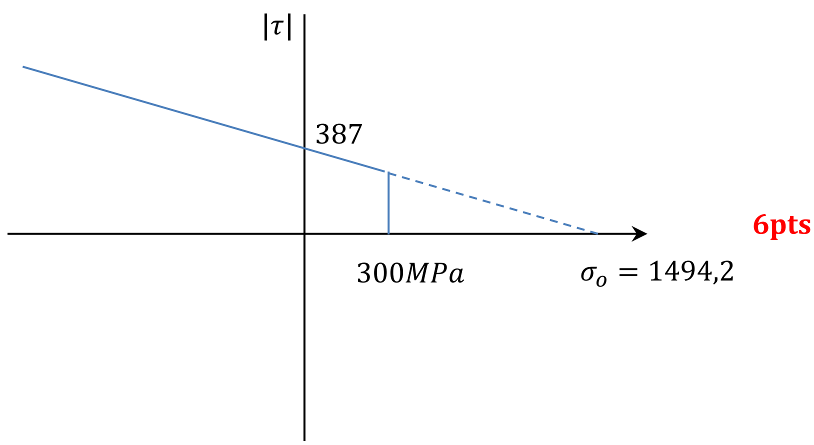
$\mu = tg\phi$

$\phi = 14{,}52°$

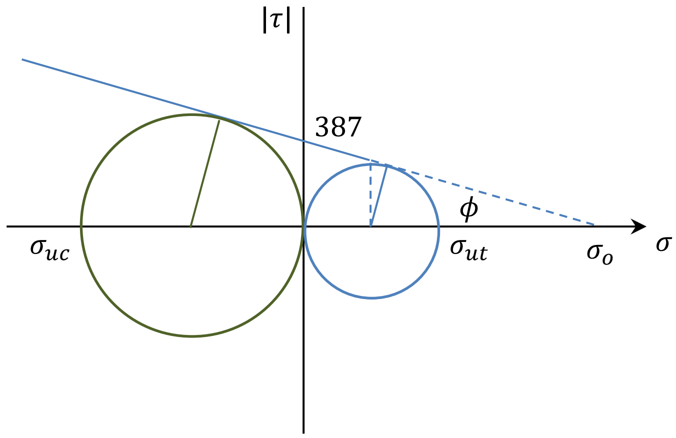
Además, de la ecuación de la recta envolvente de falla, la intersección con el eje horizontal será:

$$\sigma_o = \frac{\tau_i}{\mu} = \frac{387}{0{,}259} = 1494{,}2\ MPa$$

Entonces, se debe limitar el estado de tensiones para que la tracción no supere los 300MPa, es decir:



b) La figura muestra la relación entre el ángulo ϕ, la envolvente de falla y los círculos de Mohr para tracción pura (derecha) y compresión pura (izquierda):



Del triángulo pequeño (círculo de Mohr de falla en tracción pura, a la derecha):

$$sen\phi = \frac{\sigma_{ut}/2}{\sigma_o - \sigma_{ut}/2}$$

Despejando:

$$\sigma_{ut} = \frac{2\sigma_o sen\phi}{1 + sen\phi} = 600\ MPa$$ **4pts**

Del triángulo mayor (círculo de Mohr de falla en compresión pura, a la izquierda):

$$sen\phi = \frac{\sigma_{uc}/2}{\sigma_o + \sigma_{uc}/2}$$

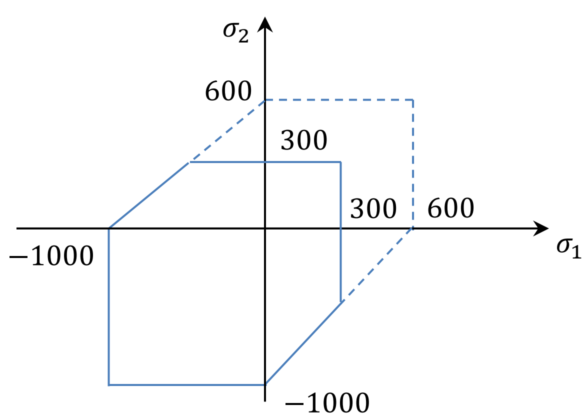
Despejando:

$$\sigma_{uc} = \frac{2\sigma_o sen\phi}{1 - sen\phi} = 1000\ MPa$$ **4pts**

El resultado anterior es el módulo de la tensión de compresión, así que en rigor la tensión última de compresión será:

$\sigma_{uc} = -1000\ MPa$

c) Finalmente, el criterio de Mohr – Coulomb debe limitar la tensión última en tracción a un valor de $300MPa$ en vez de $\sigma_{ut} = 600\ MPa$. Entonces, en el plano de tensiones principales:



6pts

Problema 09 Detección de grietas

(20 pts.) Un equipo para levantar cargas utiliza una cadena constituida por eslabones de acero como los mostrados en la figura 9.1. Durante su uso, la cadena habitualmente roza y golpea otros componentes mecánicos. Para evitar una falla catastrófica debido a la fractura de un eslabón, se requiere implementar un sistema de inspección que permita anticipar la necesidad de reemplazar la cadena. El sistema de inspección se basa en medir el tamaño (profundidad) de los defectos superficiales presentes en los eslabones de la cadena.

Los eslabones están fabricados con acero de 11 mm de diámetro. La carga máxima que se aplica sobre la cadena es de 38,0 kN, y se supone que se distribuye en partes iguales sobre ambos lados rectos de cada eslabón.

Se requiere que el sistema sea capaz de detectar defectos que permitan anticipar la falla con un factor de seguridad contra la fractura de 2,0, es decir, que el factor de intensidad de tensiones no supere 1/2 del valor de la tenacidad a la fractura del material.

Suponga que solo debe verificarse la sección recta de los eslabones y que, por tratarse de defectos superficiales en un cilíndro, el factor geométrico Y es equivalente a 1,2.

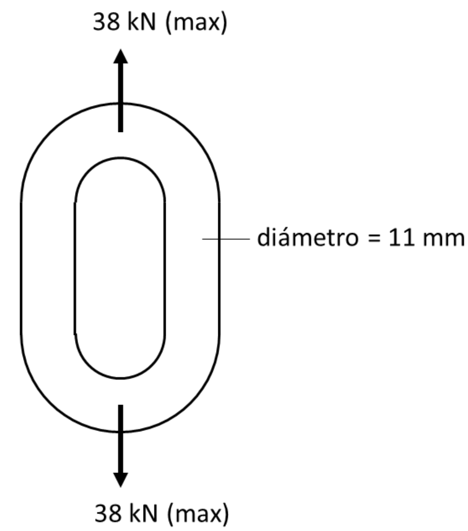


Figura 9.1

Las propiedades del acero de la cadena:

R_p :	350 MPa
R_{uts} :	560 MPa
E :	210 GPa
K_{Ic} :	27 MPa·√m

a) (2 pts.) ¿Cuál es la orientación más desfavorable para los defectos?

Perpendicular a la dimensión mayor de los eslabones.

b) (18 pts.) Determine el tamaño mínimo de los defectos (en mm) que el sistema debe ser capaz de detectar.

Tensión longitudinal:

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{19\ kN}{\frac{\pi}{4}d^2} = 200\ MPa$$ **6pts**

Tamaño crítico de la grieta (grieta en la superficie: $Y = 1{,}2$) para la tensión de trabajo:

$K_c = Y\sigma\sqrt{\pi a_c}$

$27\ MPa\ \sqrt{m} = 1{,}2 \cdot 200\ MPa\ \sqrt{\pi a_c}$

$a_c = \dfrac{K_c^2}{Y^2 \sigma_c^2 \pi} = \dfrac{27^2}{200^2 \pi} = 4{,}0\ mm$ **6pts**

Se necesita que el factor de intensidad de tensiones no supere en 1/2 a la tenacidad a la fractura. Entonces:

$Y\sigma\sqrt{\pi a} = (1/2)Y\sigma\sqrt{\pi a_c}$

$a = a_c/4\ = 1{,}0\ mm$ **6pts**

(se puede también hacer directamente: $(27\ MPa\ \sqrt{m})/2 = 1{,}2 \cdot 200\ MPa\ \sqrt{\pi a_c}$)