

**MAT1610 ★ Cálculo I**  
Solución a la Interrogación N° 3

1. Evalúe la integral

$$\int_0^{\pi/4} \frac{1 + \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} d\theta$$

**Solución:**

Separando la integral, llegamos a

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/4} \frac{1 + \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} d\theta &= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta + \int_0^{\pi/4} \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} d\theta \\ &= \int_0^{\pi/4} \sec^2 \theta d\theta + \int_0^{\pi/4} d\theta \end{aligned}$$

Como  $\sec^2 \theta$  es la derivada de  $\tan \theta$ , tenemos que

$$\int_0^{\pi/4} \frac{1 + \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} d\theta = (\tan \theta + \theta) \Big|_0^{\pi/4} = \tan \pi/4 + \pi/4 - \tan 0 - 0 = \tan \pi/4 + \pi/4 = 1 + \pi/4.$$

2. Determine si la siguiente afirmación es verdadera o falsa; de ser verdadera, demuéstrela; y si no dé un contraejemplo que la refute:

Si  $f$  y  $g$  son continuas en  $[a, b]$  entonces

$$\int_a^b (f(x)g(x)) \, dx = \left( \int_a^b f(x) \, dx \right) \left( \int_a^b g(x) \, dx \right).$$

**Solución:**

La afirmación es falsa, casi cualquier par de funciones continuas que uno elija permite verificar esto.

**Ejemplo:** Sean  $f(x) = x$ ,  $g(x) = x^2$ ,  $a = 0$ ,  $b = 1$ .

Entonces, por una parte,

$$\int_a^b (f(x)g(x)) \, dx = \int_0^1 (x \cdot x^2) \, dx = \int_0^1 x^3 \, dx = \frac{1}{4}$$

y por otra

$$\left( \int_a^b f(x) \, dx \right) \left( \int_a^b g(x) \, dx \right) = \left( \int_0^1 x \, dx \right) \left( \int_0^1 x^2 \, dx \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

3. Encuentre una función  $f$  y un número  $a$  tal que

$$6 + \int_a^x \frac{f(t)}{t^2} dt = 2\sqrt{x},$$

para todo  $0 < x$ .

**Solución:**

Derivando a ambos lados, tenemos

$$\frac{f(x)}{x^2} = \frac{1}{\sqrt{x}},$$

de donde  $f(x) = x\sqrt{x}$ .

Así, la ecuación original se transforma en

$$6 + \int_a^x \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{x},$$

para todo  $0 < x$ .

Como la primitiva de  $\frac{1}{\sqrt{t}}$  es  $2\sqrt{t}$ , se tiene que

$$\int_a^x \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} \Big|_a^x = 2\sqrt{x} - 2\sqrt{a},$$

por lo que

$$6 + 2\sqrt{x} - 2\sqrt{a} = 2\sqrt{x},$$

o sea,  $2\sqrt{a} = 6$ , de donde  $\sqrt{a} = 3$ , o sea,  $a = 9$ .

4. Demuestre que si  $f$  es continua en  $[0, \pi]$  entonces

$$\int_0^\pi x f(\operatorname{sen} x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\operatorname{sen} x) dx.$$

**Ayuda:** Use la sustitución  $u = \pi - x$ .

**Solución:**

Usando la sustitución dada en la ayuda, se tiene  $u = \pi - x$ , de donde  $x = \pi - u$  y  $dx = -du$ , por lo que —aprovechando además el hecho de que  $\operatorname{sen}(\pi - \alpha) = \operatorname{sen} \alpha$ — se tiene

$$\begin{aligned} \int_0^\pi x f(\operatorname{sen} x) dx &= \int_\pi^0 (\pi - u) f(\operatorname{sen}(\pi - u)) (-du) \\ &= - \int_\pi^0 (\pi - u) f(\operatorname{sen}(\pi - u)) du \\ &= \int_0^\pi (\pi - u) f(\operatorname{sen}(\pi - u)) du \\ &= \int_0^\pi (\pi - u) f(\operatorname{sen} u) du \\ &= \pi \int_0^\pi f(\operatorname{sen} u) du - \int_0^\pi u f(\operatorname{sen} u) du. \end{aligned}$$

Pero la variable de integración es muda, por lo que

$$\pi \int_0^\pi f(\operatorname{sen} u) du - \int_0^\pi u f(\operatorname{sen} u) du = \pi \int_0^\pi f(\operatorname{sen} x) dx - \int_0^\pi x f(\operatorname{sen} x) dx.$$

Así,

$$\int_0^\pi x f(\operatorname{sen} x) dx = \pi \int_0^\pi f(\operatorname{sen} x) dx - \int_0^\pi x f(\operatorname{sen} x) dx,$$

por lo que —pasando la última integral al lado izquierdo— llegamos a

$$2 \int_0^\pi x f(\operatorname{sen} x) dx = \pi \int_0^\pi f(\operatorname{sen} x) dx,$$

o sea,

$$\int_0^\pi x f(\operatorname{sen} x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\operatorname{sen} x) dx.$$

5. Demuestre que el volumen de una pirámide de altura  $h$  y base rectangular con dimensiones  $a$  y  $b$  es  $\frac{abh}{3}$ .

**Solución:**

Tomaremos como eje  $X$  el eje de la pirámide, que va perpendicularmente desde su cúspide a su base, perpendicularmente a esta. Así,  $0 \leq x \leq h$ .

La sección de pirámide perpendicular a este eje es un rectángulo semejante a la base, por lo que sus lados son proporcionales a los lados de esta. Más precisamente, la sección que se obtiene al cortar a una distancia  $x$  de la cúspide es un rectángulo de lados  $\frac{ax}{h}$  y  $\frac{bx}{h}$ , por lo que su área es

$$A(x) = \left(\frac{ax}{h}\right) \cdot \left(\frac{bx}{h}\right) = \frac{abx^2}{h^2}.$$

Así, el volumen de la pirámide es

$$V = \int_0^h A(x) \, dx = \int_0^h \frac{abx^2}{h^2} \, dx = \frac{ab}{h^2} \int_0^h x^2 \, dx = \frac{ab}{h^2} \frac{x^3}{3} \Big|_0^h = \frac{ab}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} = \frac{abh}{3}.$$

6. Determine el volumen del sólido que se genera al rotar la región entre las curvas:

$$y = \sqrt{x}; \quad y = 0; \quad x = 1,$$

alrededor de eje  $x = -1$ .

**Solución:**

Aquí  $x$  varía entre 0 y 1, y para cada  $x \in [0, 1]$  se genera un cascarón cilíndrico de radio  $1 + x$ , altura  $\sqrt{x}$  y grosor  $dx$ , por lo que el volumen de dicho cascarón es  $2\pi(1 + x)\sqrt{x} \, dx$ .

Así, el volumen buscado es

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^1 (1 + x)\sqrt{x} \, dx = 2\pi \left( \int_0^1 x^{1/2} \, dx + \int_0^1 x^{3/2} \, dx \right) \\ &= 2\pi \left( \left. \frac{x^{3/2}}{3/2} \right|_0^1 + \left. \frac{x^{5/2}}{5/2} \right|_0^1 \right) = 2\pi \left( \frac{1}{3/2} + \frac{1}{5/2} \right) = 2\pi \left( \frac{2}{3} + \frac{2}{5} \right) = \frac{32\pi}{15}. \end{aligned}$$

7. Demuestre que para cualquier función  $f(x)$  continua en  $[-a, a]$  se cumple

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a (f(x) + f(-x)) dx.$$

### Primera Solución:

Una primera idea consiste en separar la primera integral en dos, y transformar la parte entre  $-a$  y 0 de manera que pueda ser sumada con la parte entre 0 y  $a$ :

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx.$$

Usando la sustitución  $u = -x$  (con lo que  $x = -u$  y  $dx = -du$ ), la primera integral puede ser escrita como

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_a^0 f(-u) (-du) = - \int_a^0 f(-u) du = \int_0^a f(-u) du.$$

Así,

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a f(-u) du + \int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(-u) du.$$

Pero la variable de integración es muda, por lo que

$$\int_0^a f(-u) du = \int_0^a f(-x) dx,$$

o sea,

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(-x) dx. \quad \text{QED}$$

### Segunda Solución:

Otra idea (harto más complicada, pero posible) es mostrar que, para cada suma de Riemann que corresponde a una de las integrales, existe una suma de Riemann que corresponde a la otra y que tiene el mismo valor.

Esto puede ser hecho directamente con las dos integrales originales, a saber,  $\int_{-a}^a f(x) dx$  y

$\int_0^a (f(x) + f(-x)) dx$ , o bien con las integrales  $\int_{-a}^0 f(x) dx$  y  $\int_0^a f(-x) dx$ .

Por ejemplo, para estas últimas, si se considera la suma de Riemann para la primera integral  $S = \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i$ . donde  $(x_0, x_1, \dots, x_n)$  es una partición de  $[-a, 0]$  y  $x_{i-1} \leq x_i^* \leq x_i$ , entonces

la correspondiente suma de Riemann para la segunda integral  $S' = \sum_{i=1}^n f(y_i^*) \Delta y_i$ . donde cada  $y_i = -x_{n-i}$  y cada  $y_i^* = -x_{n-i}^*$  satisface que  $S' = S$ .

A continuación deberíamos hacer el proceso inverso: a partir de una suma de Riemann para la segunda integral, construir una para la primera que valga lo mismo. Dejamos esto como ejercicio sugerido.

Así, como a cada suma de Riemann de una integral le corresponde una de igual valor para la segunda, las integrales —que son límites de estas sumas— deben ser iguales.

8. Calcule el área de la región plana comprendida entre las curvas

$$y + 1 = 5(x + 1) - (x + 1)^3 \quad \text{e} \quad y = x.$$

**Solución:**

Lo primero que debemos hacer es determinar los puntos en que estas dos curvas se cortan. Para ello debemos hallar todas las soluciones de la ecuación  $x + 1 = 5(x + 1) - (x + 1)^3$ . Esta ecuación es equivalente a  $(x + 1)^3 = 4(x + 1)$ , o equivalentemente a  $(x + 1)((x + 1)^2 - 4) = 0$ .

Resolviendo la ecuación encontramos que  $x + 1 = 0$  o  $x + 1 = \pm 2$ , o sea,  $x = -1$ ,  $x = 1$  o  $x = -3$ , por lo que los puntos de corte entre las dos curvas son —de izquierda a derecha—  $x = -3$ ,  $x = -1$ ,  $x = 1$ .

Así, el área encerrada por las curvas  $y = 5(x + 1) - (x + 1)^3 - 1$  e  $y = x$  es

$$\begin{aligned} A &= \int_{-3}^1 |(5(x + 1) - (x + 1)^3 - 1) - x| \, dx = \int_{-3}^1 |(x + 1)(x - 1)(x + 3)| \, dx \\ &= \int_{-3}^{-1} |(x + 1)(x - 1)(x + 3)| \, dx + \int_{-1}^1 |(x + 1)(x - 1)(x + 3)| \, dx. \end{aligned}$$

Es fácil ver (por los signos de los factores) que entre  $-3$  y  $-1$ ,  $(x + 1)(x - 1)(x + 3) > 0$  y que entre  $-1$  y  $1$ ,  $(x + 1)(x - 1)(x + 3) < 0$ .

Así,

$$\begin{aligned} A &= \int_{-3}^{-1} (x + 1)(x - 1)(x + 3) \, dx - \int_{-1}^1 (x + 1)(x - 1)(x + 3) \, dx \\ &= \int_{-3}^{-1} (x^3 + 3x^2 - x - 3) \, dx - \int_{-1}^1 (x^3 + 3x^2 - x - 3) \, dx \\ &= \left( \frac{x^4}{4} + x^3 - \frac{x^2}{2} - 3x \right) \Big|_{-3}^{-1} - \left( \frac{x^4}{4} + x^3 - \frac{x^2}{2} - 3x \right) \Big|_{-1}^1 \\ &= \frac{7}{4} - \frac{-9}{4} - \left( \frac{-9}{4} - \frac{7}{4} \right) = \frac{16}{4} - \left( -\frac{16}{4} \right) = 4 - (-4) = 8. \end{aligned}$$

**Nota:** Otra forma de llegar al resultado final es calcular las 4 integrales

$$\int_{-3}^{-1} (5(x + 1) - (x + 1)^3 - 1) \, dx, \quad \int_{-3}^{-1} x \, dx, \quad \int_{-1}^1 (5(x + 1) - (x + 1)^3 - 1) \, dx \quad \text{y} \quad \int_{-1}^1 x \, dx$$

(o sea,  $-8$ ,  $-4$ ,  $4$  y  $0$ ) y obtener

$$A = |-8 - (-4)| + |4 - 0| = |-4| + |4| = 4 + 4 = 8.$$