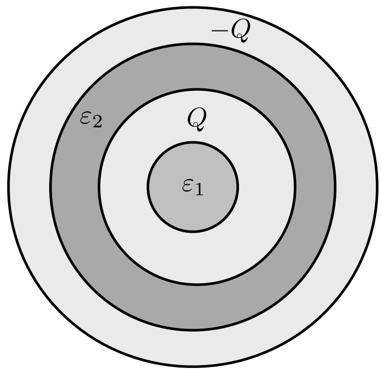
FIS1533/FIZ0221 - I2

Facultad de Física
Pontificia Universidad Católica de Chile
Primer Semestre 2015 - 4 de Mayo
Tiempo para responder: 120 minutos

1. Se tiene una esfera de material dieléctrico de permitividad $\varepsilon_1 = 5\varepsilon_0$. La esfera está rodeada de un conductor ideal cargado con carga Q que a su vez está rodeado de un material dieléctrico de permitividad $\varepsilon_2 = 10\varepsilon_0$. Finalmente, en la última capa, hay un conductor con carga $-Q$ (como indica la figura). Los radios de cada una de las capas esféricas son $R_1 = R$, $R_2 = 2R$, $R_3 = 3R$ y $R_4 = 4R$, respectivamente.



La magnitud de los campos eléctricos, E_1 y E_2 en los dieléctricos ε_1 y ε_2 son, respectivamente

a) $E_1 = \dfrac{Q}{20\pi\varepsilon_0 r^2}$ y $E_2 = 0$

b) $E_1 = \dfrac{Q}{20\pi\varepsilon_0 r^2}$ y $E_2 = \dfrac{Q}{40\pi\varepsilon_0 r^2}$

c) $E_1 = 0$ y $E_2 = \dfrac{Q}{40\pi\varepsilon_0 r^2}$

d) $E_1 = \dfrac{Q}{40\pi\varepsilon_0 r^2}$ y $E_2 = \dfrac{Q}{20\pi\varepsilon_0 r^2}$

e) Ninguna de las anteriores

Solución

Usando el teorema de Gauss para el desplazamiento eléctrico vemos que

$$\vec{D}(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 < r < 2R \\ \dfrac{Q}{4\pi r^2}\hat{r} & \text{si} \quad 2R < r < 3R \\ 0 & \text{si} \quad r > 3R \end{cases}$$

de modo que la magnitud de los campos es

$$\boxed{E_1 = 0, \quad E_2 = \frac{Q}{40\pi\varepsilon_0 r^2}}$$

2. Considere el sistema del Problema 1. La capacitancia del sistema es

   a) $480\varepsilon_0\pi R$
   b) Ninguna de las anteriores
   c) $120\varepsilon_0\pi R$
   d) $140\varepsilon_0\pi R$
   e) $240\varepsilon_0\pi R$

   Solución

   La diferencia de potencial entre $R_3 = 3R$ y $R_2 = 2R$ es

   $$\Delta V = \frac{Q}{40\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{Q}{240\pi\varepsilon_0 R}$$

   por lo que la capacidad es

   $$\boxed{C = 240\varepsilon_0\pi R}$$

3. Considere el sistema del Problema 1. ¿Cuál es la carga inducida (o ligada) en la superficie del dieléctrico interno ε_1?

   a) $-\dfrac{9}{20}Q$
   b) $0\,\mathrm{C}$
   c) $-\dfrac{4}{5}Q$
   d) $-\dfrac{2}{5}Q$
   e) $-\dfrac{9}{10}Q$

   Solución

   Como $\vec{D} = 0$ en esa región, $\vec{E} = 0$ y por lo tanto $\vec{P} = 0$ y la carga inducida es

   $$\boxed{0\,\mathrm{C}}$$

4. Considere el sistema del Problema 1. ¿Cuál es la carga inducida (o ligada) en la superficie externa del dieléctrico ε_2?

   a) $\dfrac{9}{10}Q$
   b) $\dfrac{2}{5}Q$
   c) $\dfrac{4}{5}Q$
   d) $0\,\mathrm{C}$
   e) $\dfrac{9}{20}Q$

Solución

El campo eléctrico en el dieléctrico es

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_2 r^2}\hat{r}$$

y la polarización es

$$\vec{P} = (\varepsilon_2 - \varepsilon_0)\vec{E}.$$

La densidad de carga superficial en $r = R_3$ es $\sigma = \vec{P}(R_3)\cdot\hat{r}$, que es

$$\sigma = \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_0)Q}{4\pi\varepsilon_2 R_3^2}$$

y la carga total de polarización es

$$\boxed{Q_P = 4\pi R_3^2\sigma = \frac{9}{10}Q}$$

5. Se tiene un alambre de un material desconocido de 2 m de largo y con sección transversal $1\,\mathrm{mm}^2$. Los extremos del alambre se someten a una diferencia de potencial de 3 V y se mide que por el alambre circula una corriente de 2 A. Entonces la conductividad del material es

   a) $\frac{3}{2}\cdot 10^{-6}\,\Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1}$
   b) $\frac{3}{4}\cdot 10^{-6}\,\Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1}$
   c) $\frac{2}{3}\cdot 10^{6}\,\Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1}$
   d) $\frac{4}{3}\cdot 10^{6}\,\Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1}$
   e) $\frac{1}{3}\cdot 10^{6}\,\Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1}$

Solución

Llamemos d al largo, A al área, g la conductividad. La resistencia de este alambre es

$$R = \frac{d}{gA}$$

y la corriente

$$I = \frac{\Delta V}{R},$$

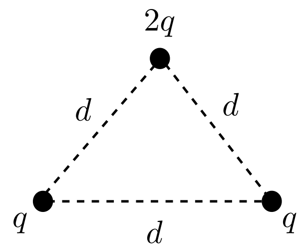
de donde podemos despejar

$$\boxed{g = \frac{Id}{A\Delta V} = \frac{4}{3}\times 10^6\Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1}}$$

donde se tuvo cuidado de usar solamente unidades SI.

6. Considere la configuración de cargas de la figura. Cada una de las cargas está separada por una distancia d de las otras. El trabajo necesario para lograr esta configuración, si inicialmente las cargas estaban infinitamente separadas (muy lejos) las unas de las otras, es

   a) $\dfrac{5q^2}{4\pi\varepsilon_0 d}$
   b) $\dfrac{5q^2}{2\pi\varepsilon_0 d}$
   c) $\dfrac{5q^2}{8\pi\varepsilon_0 d}$



d) $\dfrac{5q^2}{16\pi\varepsilon_0 d}$

e) Ninguna de las anteriores

Solución

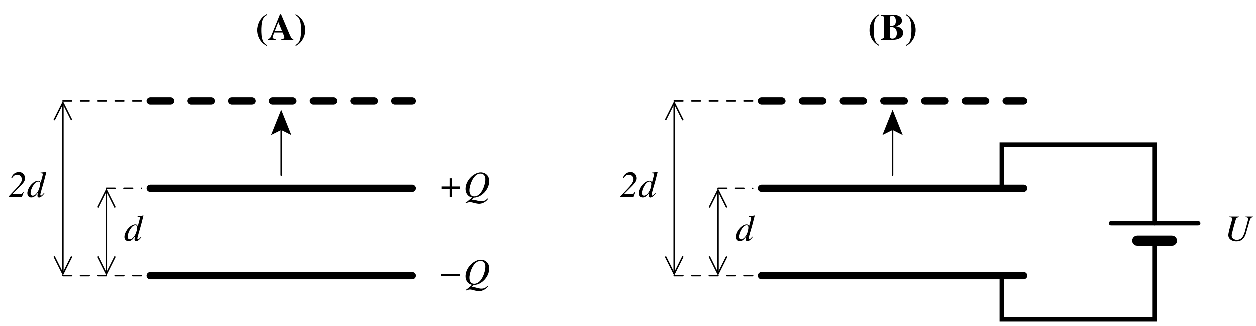
La energía almacenada en esta configuración, o lo que es lo mismo, el trabajo realizado para armar esta configuración es

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} + \frac{q_1 q_3}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|} + \frac{q_3 q_2}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|}\right).$$

Como la distancia entre ellas es d, esto es

$$\boxed{W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q^2}{d} + \frac{2q^2}{d} + \frac{2q^2}{d}\right) = \frac{5q^2}{4\pi\varepsilon_0 d}}$$

7. Se tienen dos placas planas conductoras con áreas A a distancia d, ver figura. En caso (A) las placas están cargadas con cargas $\pm Q$, en el caso (B) las placas están conectadas con una pila de voltaje U.



Si un agente externo duplica la distancia entre las placas de d a $2 \cdot d$, las energías almacenadas en las capacitancias

a) se duplica en ambos casos.

b) se disminuye a la mitad en ambos casos.

c) se duplica en caso (A) y se disminuye a la mitad en caso (B).

d) se disminuye a la mitad en caso (A) y se duplica en caso (B).

e) no cambia en ningún caso.

Solución

En el caso (A) la carga es constante y la dependencia de la energía de la separación entre placas es

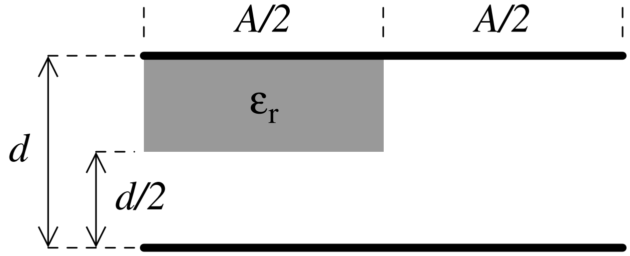
$$U_A = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A} d$$

y en el caso (B) la diferencia de potencial es constante y vale V_0, por lo que la dependencia de d es

$$U_B = \frac{\varepsilon_0 A}{2d} V_0^2$$

Al duplicar la distancia en el caso (A) la energía se duplica, y en el caso (B) disminuye a la mitad.

8. Entre dos placas planas conductoras con áreas A y distancia d se inserta un dieléctrico con permitividad $\varepsilon = \varepsilon_\mathrm{r} \cdot \varepsilon_0$ como se indica en la figura.

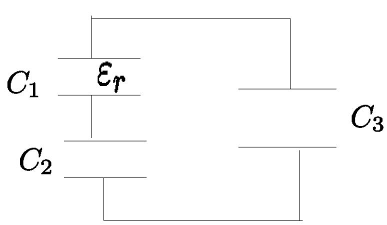


Si la capacidad del sistema sin dieléctrico es C_0, ¿cuál es la capacidad del sistema con el dieléctrico?

a) $C = \left(\frac{\varepsilon_\mathrm{r}}{4} + \frac{3}{4}\right) \cdot C_0$
b) $C = \frac{\varepsilon_\mathrm{r}}{4} \cdot C_0$
c) $C = \frac{3}{\varepsilon_\mathrm{r}} \cdot C_0$
d) $C = \left(\frac{\varepsilon_\mathrm{r}}{\varepsilon_\mathrm{r}+1} + \frac{1}{2}\right) \cdot C_0$
e) $C = \left(\frac{\varepsilon_\mathrm{r}+1}{\varepsilon_\mathrm{r}} + \frac{1}{2}\right) \cdot C_0$

Solución

Lo más fácil es pensarlo como tres condensadores, dos en serie y uno en paralelo.



Aquí

$$C_1 = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 A}{d}, \qquad C_2 = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \qquad C_3 = \frac{\varepsilon_0 A}{2d}$$

ya que todos tienen área $A/2$ y C_1 y C_2 separación $d/2$ en tanto que C_3 tiene separación d. La capacidad equivalente de esta combinación es

$$C = C' + C_3, \quad \text{donde} \quad \frac{1}{C'} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}.$$

Reemplazando los valores resulta

$$\boxed{C = \left(\frac{\varepsilon_\mathrm{r}}{\varepsilon_\mathrm{r}+1} + \frac{1}{2}\right) \cdot C_0}$$

9. Para la configuración del problema 8, suponiendo cargas iniciales $\pm Q$ en las placas y una energía potencial inicial E_0, ¿cuál es el trabajo que un agente externo hace para insertar el dieléctrico?

a) $W = -\frac{\varepsilon_{\rm r}}{4} \cdot E_0$

b) $W = -\frac{\varepsilon_{\rm r}-1}{3\varepsilon_{\rm r}+1} \cdot E_0$

c) $W = \frac{\varepsilon_{\rm r}}{\varepsilon_{\rm r}+1} \cdot E_0$

d) $W = -\frac{\varepsilon_{\rm r}+1}{\varepsilon_{\rm r}} \cdot E_0$

e) $W = -E_0$

Solución

Para un sistema aislado conservativo sabemos que la variación de enrgía del sistema más el trabajo que hace el sistema tiene que ser cero, es decir

$$dU_{\rm sis} + dW_{\rm sis} = 0,$$

y el trabajo que hace el sistema es $dW_{\rm sist} = -dW_{ext}$, de modo que

$$dW_{\rm ext} = dU.$$

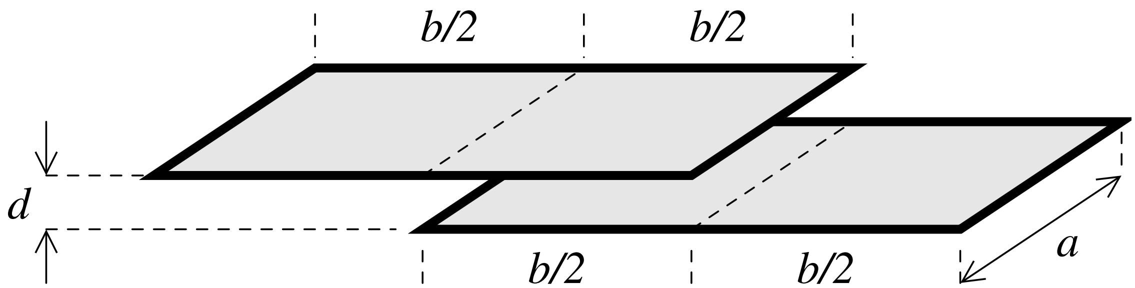
Entonces el trabajo total que hace el agente externo es

$$W_{\rm ext} = U(final) - U(inicial) = \frac{Q^2}{2C_f} - \frac{Q^2}{2C_i} = E_0 \left[\frac{C_i - C_f}{C_f}\right].$$

Usando el resultado del problema anterior para C_f resulta

$$\boxed{W = -\frac{\varepsilon_{\rm r}-1}{3\varepsilon_{\rm r}+1} \cdot E_0}$$

10. Dos placas planas conductores con áreas $A = a \cdot b$ y con cargas $\pm Q$ están posicionadas como indica la figura. La placa de abajo puede moverse horizontalmente.



¿Cuál es la magnitud de la fuerza horizontal que ejerce la place de arriba sobre la placa de abajo?

a) $F = \frac{2Q^2}{\varepsilon_0 b^2}$

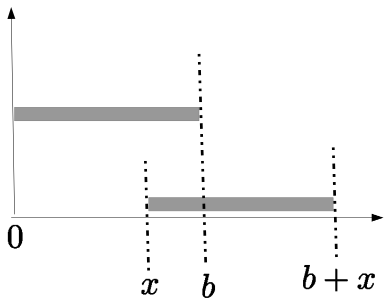
b) $F = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 d^2}$

c) $F = \frac{Q^2 b}{\varepsilon_0 d a^2}$

d) $F = \frac{2Q^2 d}{\varepsilon_0 a b^2}$

e) $F = 0\,\mathrm{N}$

Solución



Usemos coordenadas como en el dibujo. Como es un sistema aislado (no conectado a batería) sabemos que $F_{\text{sis}} = -\vec{\nabla}U$. La capacidad es

$$C(x) = \frac{\varepsilon_0 a(b-x)}{d}$$

y la energía es

$$U = \frac{Q^2}{2C}.$$

La fuerza que hace el sistema (la placa fija sobre la que se desplaza) es entonces,

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U\Big|_{x=b/2} = \frac{Q^2}{2C^2}\frac{dC}{dx}\hat{x}\Big|_{x=b/2} = -\frac{2Q^2 d}{\varepsilon_0 a b^2}\hat{x}$$

es decir, la atrae con una fuerza de módulo

$$\boxed{F = \frac{2Q^2 d}{\varepsilon_0 a b^2}.}$$

11. La capacidad eléctrica

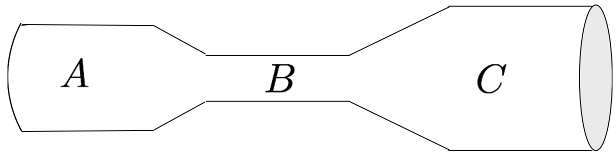
    a) $\boxed{\text{depende de la geometría de los conductores.}}$
    b) depende del voltaje aplicado.
    c) depende de las cargas en las placas.
    d) es diferente de cero solamente con dieléctrico.
    e) depende de donde se conectan eléctricamente los dos conductores.

12. Un Farad es

    a) $1\,\mathrm{F} = 1\,\mathrm{V\,A}$
    b) $1\,\mathrm{F} = 1\,\mathrm{A\,V^{-1}}$
    c) $1\,\mathrm{F} = 1\,\mathrm{J\,A^{-1}}$
    d) $1\,\mathrm{F} = 1\,\mathrm{W\,C^{-1}}$
    e) $\boxed{1\,\mathrm{F} = 1\,\mathrm{C\,V^{-1}}}$

13. Una pieza de cobre (con simetría cilíndrica) tiene la forma de la figura. Los extremos están conectados a una batería de modo que en la pieza fluye corriente. ¿En qué región A, B o C es mayor la densidad de corriente?

    a) Región A
    b) $\boxed{\text{Región } B}$
    c) Región C



d) Es igual en todas las regiones.
e) Depende de la diferencia de potencial que se aplique.

porque a corriente constante a menor superficie, mayor densidad de corriente.

14. En el problema 13, ¿en qué región es mayor el campo eléctrico?

a) Región A
b) $\boxed{\text{Región } B}$
c) Región C
d) Es igual en todas las regiones.
e) Depende de la diferencia de potencial que se aplique.

porque a conductividad constante, mayor densidad de corriente implica mayor campo, de acuerdo a la ley de Ohm.

15. En el problema 13 la razón entre los diámetros es $A : B : C = 3 : 1 : 5$. Entonces la velocidad de arrastre (o deriva) de los electrones

a) Tiene la misma magnitud en la región B que en la región C.
b) Es cinco veces mayor en la región B que en la región C.
c) $\boxed{\text{Es veinticinco veces mayor en la región } B \text{ que en la región } C.}$
d) Es cinco veces menor en la región B que en la región C.
e) No tenemos suficientes datos para decidir.

Solución

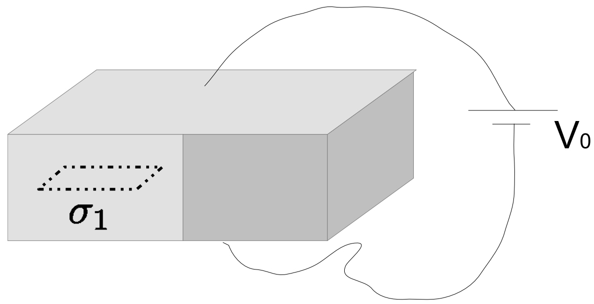
La densidad de corriente en este caso es $j = I/A$ en que A es el área de cada segmento conductor. Por otra parte por tratarse del mismo material, la densidad de portadores de corriente ρ es constante, por lo que la velocidad de deriva es $v_d = j/\rho \approx 1/A$. El área es proporcional al dimetro al cuadrado, por lo que para las razones entre diámetros dadas se encuentra el resultado indicado.

16. Considere conductor cuya forma geométrica es semejante a la del Problema 13 pero hecho de materiales de distinta conductividad. La conductividades σ (o g en otra notación) de los tramos A, B y C están en la razón $\sigma_A : \sigma_B : \sigma_C = 2 : 1 : 5$ y la razón entre los diámetros es $A : B : C = 2 : 1 : 3$. Entonces, una vez establecido el régimen estacionario ($\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$) podemos afirmar que la densidad de corriente es menor en

a) Región A
b) Región B
c) $\boxed{\text{Región } C}$
d) Es igual en todas las regiones.
e) Depende de la diferencia de potencial que se aplique.

Es menor en la región C independientemente de las conductividades puesto que una vez establecido el régimen estacionario la corrient es constante.

17. El espacio entre dos placas conductoras de áreas A separadas una distancia d está lleno en partes iguales con materiales de distinta conductividad $\sigma_1 = 2\sigma_0$ y $\sigma_2 = \sigma_0$ como se muestra en la figura. Las placas están conectadas a una batería que provee una diferencia de potencial (voltaje) V_0. Entonces la carga que pasa por el área $A/4$ (dibujada en la figura con línea discontinua) en un intervalo de 8 segundos es



a) $Q = \dfrac{8\sigma_0 V_0 A}{d}$ C

b) $Q = \dfrac{2\sigma_0 V_0 A}{d}$ C

c) $Q = \dfrac{4\sigma_0 V_0 A}{d}$ C

d) $Q = \dfrac{\sigma_0 V_0 A}{d}$ C

e) $Q = \dfrac{\sigma_0 V_0 A}{2d}$ C

Solución

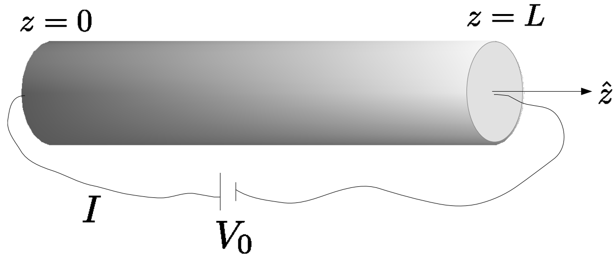
Como la diferencia de potencial V_0 es constante, el campo eléctrico es $E = V_0/d$. En l región de conductividad σ_1 la densidad de corriente es

$$j_1 = \sigma_1 E = \frac{\sigma_1 V_0}{d}.$$

Por el área $A/4$ indicada en la figura pasa una corriente $I = j_1 \frac{A}{4}$ y la carga total que atraviesa el área en un intervalos Δt es por lo tanto $Q = I\Delta t$. Reemplazando los valores dados de σ_1 y $\Delta t = 8$ s, resulta

$$\boxed{Q = \frac{4\sigma_0 V_0 A}{d} \text{ C}}$$

18. Un cilindro de radio a y largo L tiene conductividad variable $\sigma(z) = \sigma_0(z - 2L)^2$, donde el eje z está dirigido a lo largo del eje del cilindro como se muestra en la figura. La resistencia del cilindro es



a) $R = \dfrac{1}{\pi a^2 L \sigma_0}$

b) $R = \dfrac{L}{2\pi a^2 \sigma_0}$

c) $R = \dfrac{1}{2\pi a^2 L \sigma_0}$

d) $R = \dfrac{2L}{\pi a^2 \sigma_0}$

e) $R = \dfrac{2}{\pi a^2 L \sigma_0}$

Solución

Como el cilindro tiene área uniforme y la corriente circula perpendicular al áreas, $j = I/A$, y el campo eléctrico

$$E = \frac{I}{\pi a^2 \sigma(z)}.$$

La diferencia de potencial a lo largo es

$$\Delta V = \int_0^L \frac{I}{\pi a^2 \sigma(z)} dz = \frac{I}{2\pi a^2 L \sigma_0} I$$

de donde leemos la resistencia

$$\boxed{R = \frac{1}{2\pi a^2 L \sigma_0}}$$