

Interrogación 3

Cálculo III – MAT1630

el 29 de octubre de 2013

SOLUCIONES

Problema 1.

a) Calcule la integral

$$\iiint_{\Omega} \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es el dominio acotado limitado por los planos definidos por las ecuaciones siguientes $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

b) Calcule $F'(t)$ si

$$F(t) := \iiint_{U_t} f(x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$$

donde $U_t := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid t^2 < x^2 + y^2 + z^2 < t\}$, $t \in (0, 1)$, y $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua.

Solución: a) Tenemos

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3} &= \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3} \right) dy \right] dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} (2^{-2} - (1+x+y)^{-2}) dy \right] dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^1 [2^{-2}(1-x) + 2^{-1} - (1+x)^{-1}] dx \\ &= -\frac{5}{16} + \frac{1}{2} \ln 2. \end{aligned}$$

Solución: b) Pasando a coordenadas esféricas y calculando las integrales con respecto a φ y θ , obtenemos

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_t^{\sqrt{t}} f(r^2) r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\varphi \\ &= 4\pi \int_t^{\sqrt{t}} f(r^2) r^2 dr. \end{aligned}$$

Por el teorema fundamental del cálculo,

$$F'(t) = 2\pi \left(\sqrt{t}f(t) - 2t^2f(t^2) \right).$$

Problema 2. Calcular el trabajo realizado por la fuerza

$$\vec{F}(x, y) = \left(x - \frac{y}{x^2 + y^2}\right) \vec{i} + \left(\frac{x}{x^2 + y^2} - y\right) \vec{j}$$

al ir desde el punto $(1, 0)$ al punto $(1 + 2\pi, 0)$ a lo largo de la curva

$$\vec{r}(t) = (1 + t \cos(t), t \sin(t)).$$

Solucion: Pongamos $P = \left(x - \frac{y}{x^2 + y^2}\right)$ y $Q = \left(\frac{x}{x^2 + y^2} - y\right)$. Se comprueba que $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ en $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$. Considere los arcos siguientes orientados segun su parametrizacion:

$$C : \vec{r}(t) = (1 + t \cos(t), t \sin(t)) \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

$$C_1 : \vec{r}_1(t) = (t, 0) \quad 1 \leq t \leq 1 + 2\pi.$$

$$C_2 : \vec{r}_2(t) = \frac{1}{2}(\cos(t), \sin(t)) \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Aplicando el Teorema de Green a la region encerrada por la union de estos arcos y tomando en cuenta el sentido en que son recorridos se tiene

$$\int_C = \int_{C_1} + \int_{C_2}$$

La dos ultimas integrales se calculan directaments obteniendose

$$\int_{C_1} = \frac{1}{2}((1 + 2\pi)^2 - 1) = 2\pi(1 + \pi), \quad \int_{C_2} = 2\pi.$$

Consecuentemente, $\int_C = 2\pi(1 + \pi) + 2\pi = 2\pi(2 + \pi)$.

Problema 3.

a) Calcule la integral

$$\int_C e^{-(x^2 - y^2)} (\cos(2xy) dx + \sin(2xy) dy)$$

donde $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = R^2\}$, $R > 0$.

b) Encuentre un campo vectorial

$$\vec{F} = P \vec{i} + Q \vec{j}$$

tal que para todo camino C seccionalmente \mathcal{C}^1 que va de $(1, 0)$ a $(-1, 1)$ se tenga que

$$\int_C (P dx + Q dy) = 25.$$

Solución: a) El campo $\vec{F}(x, y) = (e^{-(x^2-y^2)} \cos(2xy), e^{-(x^2-y^2)} \sin(2xy))$ es de clase C^1 en todo \mathbb{R}^2 , que claramente es convexo, por lo tanto basta probar que

$$\frac{\partial}{\partial y} e^{-(x^2-y^2)} \cos(2xy) = \frac{\partial}{\partial x} e^{-(x^2-y^2)} \sin(2xy)$$

para determinar que es conservativo.

$$\frac{\partial}{\partial y} e^{-(x^2-y^2)} \cos(2xy) = 2y e^{-(x^2-y^2)} \cos(2xy) - 2x e^{-(x^2-y^2)} \sin(2xy)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} e^{-(x^2-y^2)} \sin(2xy) = -2x e^{-(x^2-y^2)} \sin(2xy) + 2y e^{-(x^2-y^2)} \cos(2xy)$$

Como el campo es conservativo y C es una curva cerrada de clase C^1 , entonces

$$\int_C e^{-(x^2-y^2)} (\cos(2xy) dx + \sin(2xy) dy) = 0.$$

b) Basta encontrar una función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(-1, 1) - f(1, 0) = 25$ y tomar $F = \text{grad}(f)$. Una posibilidad es que $f(x, y)$ sea de la forma $ax + by$.

Por encontrar a y b tales que $-a + b - a = 25$, por ejemplo $a = -5$ y $b = 15$.

Si $\vec{F}(x, y) = (-5, 15) = \text{grad}(f)$, entonces \vec{F} es conservativo y para todo camino C seccionalmente C^1 que va de $(1, 0)$ a $(-1, 1)$ se tiene que

$$\int_C (-5dx + 15dy) = f(-1, 1) - f(1, 0) = 25.$$

Problema 4.

- a) Sea $C \subset \mathbb{R}^2$ curva cerrada, simple y suave. Sea $\vec{p} \in \mathbb{R}^2$ un punto fijo tal que $\vec{p} \notin C$. Calcule la integral

$$\int_C \frac{(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \hat{n}}{\|\vec{x} - \vec{p}\|^2} ds$$

donde \hat{n} es el vector unitario normal exterior a C .

- b) Sea $C \subset \mathbb{R}^2$ curva cerrada, simple y suave que encierra una región de área 3. Calcule la integral $\int_C \vec{x} \cdot \hat{n} ds$ donde \hat{n} es el vector unitario normal exterior a C .

Solución: a) Tenemos

$$\frac{\vec{x} - \vec{p}}{\|\vec{x} - \vec{p}\|^2} \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{p}\}), \quad \text{div} \left(\frac{\vec{x} - \vec{p}}{\|\vec{x} - \vec{p}\|^2} \right) = 0, \quad \vec{x} \neq \vec{p}.$$

Sea S el dominio abierto encerrado por C . Supongamos que $\vec{p} \notin S$. Entonces

$$\int_C \frac{(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \hat{n}}{\|\vec{x} - \vec{p}\|^2} ds = \iint_S \text{div} \left(\frac{\vec{x} - \vec{p}}{\|\vec{x} - \vec{p}\|^2} \right) dx dy = 0,$$

Supongamos que $\vec{p} \in S$. Sean B círculo centrado en \vec{p} tal que $\overline{B} \subset S$, ν el vector unitario normal exterior a ∂B . Tenemos

$$\int_C \frac{(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \hat{n}}{\|\vec{x} - \vec{p}\|^2} ds - \int_{\partial B} \frac{(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \nu}{\|\vec{x} - \vec{p}\|^2} ds = \int_{S \setminus B} \operatorname{div} \left(\frac{\vec{x} - \vec{p}}{\|\vec{x} - \vec{p}\|^2} \right) dx dy = 0.$$

Pasando a coordenadas polares centradas en \vec{p} , obtenemos

$$\int_{\partial B} \frac{(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \nu}{\|\vec{x} - \vec{p}\|^2} ds = 2\pi.$$

Como resultado, $\int_C \frac{(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \hat{n}}{\|\vec{x} - \vec{p}\|^2} ds = 2\pi$ si $\vec{p} \in S$.

b) Sea S la región encerrada por C . Tenemos

$$\int_C \vec{x} \cdot \hat{n} ds = \iint_S \operatorname{div} \vec{x} dx dy = 2 \operatorname{Area}(S) = 6.$$