Espacios nulos y espacios columna
Introducción al Álgebra Lineal - MAT1279-1299

Facultad de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile

Agosto 2022

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

Espacios nulos y espacios columna

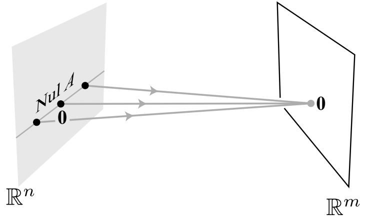
El espacio nulo de una matriz

Definición.

El **espacio nulo** de una matriz A de $m \times n$, que se denota como $\mathrm{Nul}(A)$, es el conjunto de todas las soluciones de la ecuación homogénea $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. En notación de conjuntos,

$$\mathrm{Nul}(A) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \;:\; A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}\,.$$

Una descripción más dinámica del espacio nulo de A es el conjunto de todas los $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^n$ que se mapean en el vector cero de $\mathbb{R}^m$ a través de la transformaciones lineal $x \mapsto A\mathbf{x}$.



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

EJEMPLO 1 Sea A la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -5 & 9 & 1 \end{bmatrix}$, y sea $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Determine si $\mathbf{u}$ pertenece al espacio nulo de A.

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

Teorema.

El espacio nulo de una matriz A de $m \times n$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$. De manera equivalente, el conjunto de todas las soluciones a un sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ de m ecuaciones lineales homogéneas con n incógnitas es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

EJEMPLO 2 Sea H el conjunto de vectores en $\mathbb{R}^4$ cuyas coordenadas a, b, c, d satisfacen las ecuaciones $a - 2b + 5c = d$ y $c - a = b$. Demuestre que H es un subespacio de $\mathbb{R}^4$.

EJEMPLO 3 Determine un conjunto generador del espacio nulo de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{bmatrix}$$

NOTA 1

1. EL conjunto generador producido por el método del ejemplo anterior es linealmente independiente.
2. Cuando Nul(A) contiene vectores distintos de cero, el número de vectores en el conjunto generador para Nul(A) es igual al número de variables libres en la ecuación $A\mathbf{x} = 0$.

Espacios nulos y espacios columna

El espacio columna de una matriz

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

Definición.

El **espacio columna** de una matriz A de $m \times n$, que se denota como $\mathrm{Col}(A)$, es el conjunto de todas las combinaciones lineales de las columnas de A. Si $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$, entonces

$$\mathrm{Col}(A) = \mathrm{Gen}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\} .$$

Teorema.

El espacio columna de una matriz A de $m \times n$ es un subespacio de $\mathbb{R}^m$.

NOTA 2 Observe que un vector tipico de $\mathrm{Col}(A)$ se puede escribir como $A\mathbf{x}$ para alguna $\mathbf{x}$, ya que la notación $A\mathbf{x}$ representa una combinación lineal de las columnas de A.

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

EJEMPLO 4 Encuentre una matriz A tal que $W = \mathrm{Col}(A)$.

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} 6a - b \\ a + b \\ -7a \end{bmatrix} \; : \; a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

El espacio columna de una matriz A de $m \times n$ es $\mathbb{R}^m$ si y solo si la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución para cada $\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^m$.

Espacios nulos y espacios columna

Contraste entre Nul(A) y Col(A)

EJEMPLO 5 Sea

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 1 \\ -2 & -5 & 7 & 3 \\ 3 & 7 & -8 & 6 \end{bmatrix}$$

1. Si el espacio columna de A es un subespacio de $\mathbb{R}^k$, ¿a qué es igual k?
2. Si el espacio nulo de A es un subespacio de $\mathbb{R}^k$, ¿a qué es igual k?
3. sean $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$
    1. Determine si $\mathbf{u}$ está en Nul(A). ¿Podría $\mathbf{u}$ estar en Col(A)?
    2. Determine si $\mathbf{v}$ está en Col(A). ¿Podría $\mathbf{v}$ estar en Nul(A)?

Espacios nulos y espacios columna

Núcleo y rango de una transformación lineal

Definición.

Una **transformación lineal** T de un espacio vectorial V en un espacio vectorial W es una regla que asigna a cada vector $\mathbf{x}$ en V un único vector $T(\mathbf{x})$ en W, tal que

1. $T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ para toda $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ en V, y
2. $T(c\mathbf{u}) = cT(\mathbf{u})$ para toda $\mathbf{u}$ en V y todo escalar c.

El **núcleo** (o espacio nulo) de dicha T es el conjunto de todas las $\mathbf{u}$ en V tales que $T(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ (el vector cero en W). El **rango** de T es el conjunto de todos los vectores en W de la forma $T(\mathbf{x})$ para alguna $\mathbf{x}$ en V. Si ocurre que T surge como una transformación matricial, por ejemplo, $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ para alguna matriz A, entonces el núcleo y la imagen de T son solo el espacio nulo y el espacio columna de A, como se definió anteriormente.

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

EJEMPLO 6 Sea V el espacio vectorial de todas las funciones de valores reales f definidas en un intervalo $[a, b]$ con la propiedad de que son diferenciables, y sus derivadas son funciones continuas en $[a, b]$. Sea W el espacio vectorial $C[a, b]$ de todas las funciones continuas en $[a, b]$, y sea $D : V \to W$ la transformación que cambia a f en V en su derivada f'. En cálculo, dos reglas sencillas de la diferenciación son

$$D(f+g) = D(f) + D(g) \quad \text{y} \quad D(cf) = cD(f)$$

Es decir, D es una transformación lineal. Es posible demostrar que el núcleo de D es el conjunto de las funciones constantes en $[a, b]$ y el rango de D es el conjunto W de todas las funciones continuas en $[a, b]$.