Pauta Control 1

2024-01

Ejercicio 1 (50)

Considere una situación en la que hay un monopolista en un mercado con función de demanda inversa $P(Q) = 10 - Q$. El costo marginal de producción del monopolista es $c = 2$. El monopolista toma dos decisiones: cuánto invertir en reducción de costos I, y cuanto vender Q. Si el monopolista invierte I en reducción de costos, su beneficio se reduce en I cantidad, y su costo marginal se reduce a $(2 - \alpha\sqrt{I}$. Suponga que $0 < \alpha < 2$.

Letra A (15pts)

¿Cuál es el nivel óptimo de inversión y producción del monopolista en función de α? Función Beneficio:

$$\Pi = [10 - q - (2 - \alpha\sqrt{I})]q - I$$

Entonces:

$$\max_{I,q} [10 - q - (2 - \alpha\sqrt{I})]q - I$$

CPO:

$$[I] : \frac{\alpha q}{2\sqrt{I}} - 1 = 0$$

$$[q] : 8 - q + \alpha\sqrt{I} - q = 0$$

Finalmente, despejando los óptimos

$$q^{monopolio} = \frac{16}{4 - \alpha^2}$$

$$I^* = [\frac{8\alpha}{(4 - \alpha^2)}]^2$$

Letra B (5pts)

Su beneficio aumenta o disminuye con α? Reemplazando los óptimos en la función de beneficio encontramos.

$$\Pi^* = \frac{64}{4-\alpha^2}$$

Al derivarlo, encontramos:

$$\frac{\partial \Pi^*}{\partial \alpha} = \frac{128\alpha}{(4-\alpha^2)^2} > 0$$

Por lo tanto, se concluye que el beneficio aumenta al aumentar α.

Letra C (15pts)

¿ Que nivel de inversión implementaría un planificador social benévolo que controlara completamente al monopolista? Plantee el problema del planificador y encuentre el socialmente óptimo para Q y I. Compare estas cantidades con las elegidas por el monopolista usando su respuesta anterior.
Entonces, el ejericio a maximizar:

$$\max_{q,I} \int_{s=0}^{q} (10 - s - (2 - \sqrt{I}))ds - I$$

Lo que nos da como cpo:

$$[q] : 8 - q + \alpha\sqrt{I} = 0$$

$$[I] : \frac{\alpha q}{2\sqrt{I}} - 1 = 0$$

Lo que resuleve:

$$I^* = [\frac{8\alpha}{(2-\alpha^2)}]^2$$

$$q^{ps} = \frac{16}{(2-\alpha^2)}$$

Finalmente, se conculye que $q^{monopolio} < q^{ps}$.

Parte 2

Suponga que un planificador social benévolo que puede controlar I pero no Q. El planificador elige primero I y luego el monopolista elige Q. Así que ahora el problema del planificador es maximizar el excedente social sujeto a la elección de producción del monopolista.

Letra D (10 pts)

Plantee el problema del planificador:

$$\max_{I} \int_{s=0}^{q} (10 - s - (2 - \alpha\sqrt{I}))ds - I$$

SJ:

$$q = \underset{q}{\text{argmax}}(10 - q - (2 - \alpha\sqrt{I})$$

Letra E (5pts)

Escribe el problema del planificador en términos de solo I. No se tiene que encotnrar los niveles óptimos.
Como q es el argumento que maximiza lo anteriormente planteado, al solucionarlo encontramos que:

$$q = \frac{8 + \alpha\sqrt{I}}{2}$$

reemplazando en la FO del planificador:

$$\max_{I} [8 - (\frac{8 + \alpha\sqrt{I}}{2}) + \alpha\sqrt{I}][\frac{8 + \alpha\sqrt{I}}{2}] - I$$

1 Ejercicio 2 (50pts)

Considere el caso de un monopolio de un bien durable cuyo mercado dura solo dos periodos. Suponga que la demanda por los servicios de un bien durable por periodo de tiempo es $P_t = 12 - 3Q_t$, donde Q_t es el stock del bien durable ofrecido en el periodo t. Suponga que el factor de descuento intertemporal para la firma y para los consumidores es el mismo e igual a δ. El bien durable puede producirse a un costo marginal de cero.

Letra A (25 pts)

¿Cuáles son los beneficios del monopolista del bien durable que se puede comprometer a mantener el precio del durable el segundo periodo? Encuentre el beneficio en función de δ

La disposición a pagar será:

$$(12 - 3q) + \delta(12 - 3q)$$

La FO:

$$\max_{q} (12 - 3q)(1 + \delta) * q$$

Y de la CPO encontramos el q óptimo:

$$q^* = 2$$

Esto implica un $p* = 6(1 + \delta)$ Finalmente, el beneficio encontrado es:

$$\Pi^{compromiso} = 12(1 + \delta)$$

Letra B (15pts)

Calcule los precios que el monopolista cobraría cuando no se puede compremeter a mentener el precio del bien durable el segudno periodo. Encuentre sus beneficios en función de δ.

En el periodo 2:

$$\max_{q_2} \, (12 - 3q_1 - 3q_2) * q_2$$

De esta forma encontramos:

$$P_2^*(q_1) = \frac{12 - 3q_1}{2}$$

$$\Pi_{t=2}(q_1) = \frac{(12 - 3q_1)^2}{12}$$

Entonces, en t=1, el consumidor indiferente:

$$(1 + \delta)(12 - 3q_1) - P_1 = \delta(12 - 3q_1 - P_2^*)$$

Despejando el precio en el periodo 1:

$$P_1(q_1) = (12 - 3q_1)(1 + \frac{\delta}{2})$$

Ahora, el problema a maximizar será:

$$\max_{q_1} \, (12 - 3q_1)(1 + \frac{\delta}{2})q_1 + \delta(\frac{(12 - 3q_1)^2}{12})$$

Lo que resuelve:

$$q_1^* = \frac{8}{(4 + \delta})$$

Finalmente, el beneficio es:

$$\Pi^* = 12[\frac{2 + \delta}{4 + \delta}]^2(4 + \delta) = 12\frac{(2 + \delta)^2}{(4 + \delta)}$$

Letra C (10pts)

Encuentre la diferencia entre las funciones de beneficio encontradas en a y b. La diferencia es al monopolista el beneficio del compromiso de precio. ¿Cómo cambia esta diferencia en δ (aumentando/disminuyendo)? Interprete sus hallazgos. Usando los beneficios encontrados anteriormente:

$$\Pi^{c/c} - \Pi^{s/c} = \triangle = [\frac{(12\delta)}{(4 + \delta)}]$$

Finalmente, derivando la diferencia:

$$\frac{\partial \, \triangle}{\partial \delta} = \frac{48}{(4 + \delta)^2} > 0$$

Por lo tanto, a mayor δ, mayor será la diferencia.