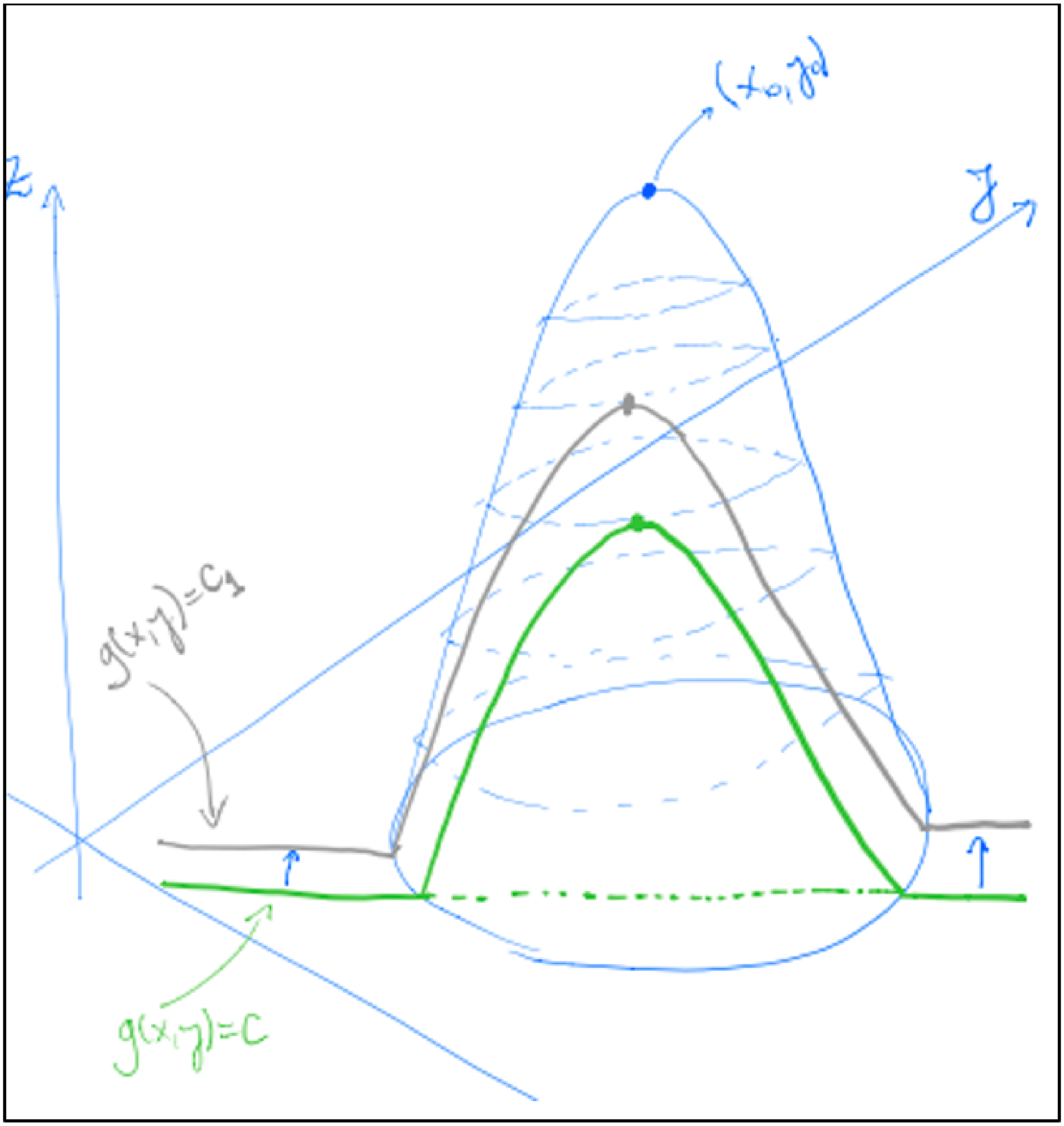
Material de Estudio EAF2010

Uso exclusivo para el curso EAF2010
No distribuir.

14 de marzo de 2023



(x₀,y₀)
z
y
g(x,y)=c₁
g(x,y)=c

Índice general

Prefacio

Dentro de este material de estudio encontrarán varios ejercicios del curso EAF2010 (previamente EAF200A). Se espera que los alumnos utilicen este material para complementar su aprendizaje con las cátedras del curso.

Los ejercicios contenidos en el material de estudio se encuentran separados según los contenidos que se ve en cada unidad del curso. Asimismo, en el titulo de cada uno de los ejercicios se especifica el subtema que cada ejercicio ayuda a profundizar, con la finalidad de que cada alumno refuerce los contenidos que estime necesarios. Particularmente, algunos de los ejercicios al final de cada capítulo tratan temas de varias unidades, por lo que se recomienda a los alumnos revisarlos para integrar su conocimiento y prepararse mejor para las evaluaciones del curso.

En el material también encontrarán una pauta tentativa a algunos de los ejrecicios, por lo tanto este archivo quedará en actualización para incorporar las soluciones a los ejercicios restantes. Aún así se recomienda a los alumnos que intenten resolverlos y tomarlo como un desafío, pues esto les ayudará a profundizar algunos de los contenidos vistos en el curso. De todas formas, si tienen dudas con la resolución de algunos de los ejercicios siempre pueden recurrir al Equipo Docente para resolver sus dudas.

El documento también contiene una serie de apéndices para que los alumnos puedan profundizar en ciertos puntos específicos del cursos. Es recomendable que los alumnos revisen los antes de realizar los ejercicios contenidos en el material de estudio.

Finalmente, se espera que este material facilite y complemente el aprendizaje de los alumnos del curso EAF200A y les permita prepararse mejor para los cursos posteriores de la carrera. Les deseamos mucha suerte en el curso y en lo que resta de la carrera.

Se agradece la colaboración de los profesores Rafael Águila, Felipe Del Canto, Caio Machado, Bernardo Quiroga, José Tessad, Bernardita Viala y Matías Villagra al facilitar los ejercicios que han utilizado en versiones anteriores del curso.

Cualquier problema que se encuentre al documento por favor indicar a los correos electrónicos: rpino2@uc.cl y jtessada@uc.cl.

Capítulo 1

Funciones de Varias Variables

1.1. Dominio de Funciones

Determine los valores de x e y para los cuales las siguientes funciones están definidas en los reales.

1. $\frac{x^2+y^2}{y-x+2}$
2. $\sqrt{2-(x^2+y^2)}$
3. $\sqrt{(4-x^2-y^2)(x^2+y^2-1)}$

1.2. Curvas de Nivel

Determine y grafique a mano alzada, las curvas de nivel: $f(x,y)=c$, para $c=-1$, $c=0$ y $c=+1$ de las siguientes funciones

1. $f(x,y)=x^2-y^2$
2. $f(x,y)=xy$

1.3. Derivadas parciales de segundo orden

Derivadas parciales de segundo orden Obtenga las derivadas de primer y segundo orden para las siguientes funciones y verifique que se cumple el teorema de Young.

1. $f(x,y)=x^7-y^7$
2. $f(x,y)=x^\beta \ln(y)$, con $\beta \in \mathbb{R}$
3. $f(x,y)=\left(x^2-ay^2\right)^\delta$, con $\delta \in \mathbb{R}$

1.4. Funciones de Utilidad y TMS

Para cada una de las siguientes funciones de utilidad encuentre las tasas marginales de sustitución (TMS) usando el diferencial total (donde x_1 y x_2 son los bienes consumidos y u es el nivel de utilidad).

1. $u(x_1,x_2)=ax_1+bx_2, \quad a,b \in \mathbb{R}^+.$
2. $u(x_1,x_2)=x_1^\alpha x_2^\beta, \quad \alpha,\beta \in (0,1).$
3. $u(x_1,x_2)=aln(x_1)+bx_2, \quad a,b \in \mathbb{R}^+.$

1.5. TMST e Interpretación Económica

Considere los siguientes procesos productivos:

a. Un metro cuadrado de lana sintética (L) se puede fabricar con medio kilo de nylon (N) o dos kilos de polyester(P)

b. Un miligramo de Tropigrafeno (T), un elemento químico encontrado en las montañas de Costa Rica, puede fabricarse si se combinan tres miligramos de Kriptonita (K) con un miligramo de Vanadio (V)

Para cada proceso responda lo siguiente:

i. Determine la función de producción de cada proceso

ii. Encuentre la TMST para cada tecnología e interprétela

iii. Grafique el mapa de isocuantas para los niveles de producto 1, 2, 4 de lana sintética (L) y 1, 3, 6 de Tropigrafeno (T)

1.6. Derivadas Parciales y Funciones de Varias Variables

El mercado de los burritos está descrito por una función de demanda $B^d = f(p, m)$ y por una función de oferta $B^s = g(p, h)$ donde B^d es la cantidad demandada de burritos, B^s es la cantidad ofrecida de burritos, p es el precio de los burritos, m es el ingreso promedio de los hogares, y h es un indicador del costo de la harina de maíz.

1. Explique el signo que deberían tener las derivadas parciales de las funciones de demanda y oferta con respecto a p, m y h de acuerdo a lo que usted ha aprendido hasta ahora en cursos de economía

2. Defina $F(p, m, h)$ como la función de exceso de oferta de burritos en el mercado. ¿Cómo obtendría esa función usando $f(\cdot)$ y $g(\cdot)$?

3. Si el mercado de burritos está en equilibrio, ¿qué valor debería tener la función $F(\cdot)$? Explique cómo usted podría calcular el valor del precio de equilibrio usando esta condición.

4. Encuentre las derivadas parciales del precio de equilibrio p^e con respecto a m y h. ¿Puede determinar el signo de estas derivadas?

1.7. Derivadas Parciales e Interpretación Económica

(Basado en ejemplo 15.21 de Sydsaeter et al, primera edición) Supongamos que el bienestar W de un grupo de habitantes en una sociedad depende de dos variables: el total de bienes consumidos "x" y el nivel de contaminación "c", tal que $W = f(x, c)$

1. ¿Qué signo esperaría usted que tuvieran las derivadas parciales de f con respecto a x y c? Explique la intuición económica detrás de esto.

2. ¿Qué signo esperaría usted que tuvieran las derivadas de segundo orden $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial c^2}$? Explique la intuición económica detrás de esto.

3. Supongamos que $\frac{\partial^2 f}{\partial c \partial x} < 0$, ¿cuál es la interpretación matemática de este supuesto? ¿Qué implica esto en cuanto a la economía del problema?

4. Como los bienes deben ser producidos de alguna manera, podemos pensar que la contaminación es una función $c(x)$. ¿Qué signo espera tenga la derivada c'?

5. Encuentre la ecuación que muestra el efecto de un mayor consumo en el bienestar con el supuesto adicional introducido en la parte anterior. Interprete los términos en esta ecuación.

1.8. Diferencial Total Aplicado al Fútbol

Un consultor de futbolistas ha determinado mediante herramientas de big data que la **valoración real de mercado de un jugador**, V (medida en millones de dólares) del pase de un futbolista es función de su habilidad h (medida como su capacidad de dribleo, una variable continua positiva), su capacidad goleadora g (medida en número de goles), su simpatía percibida s (medida como el índice de popularidad en redes sociales provista por el equipo de inteligencia artificial de Facebook, una variable continua mayor a 1) y el nivel general de precios del mercado de fútbol europeo p (medido como una suerte de IPC de los precios de los pases):

$$V(h,g,s,p) = \frac{e^g}{p}\left(\left[\lambda h^\beta + (1-\lambda)s^\beta\right]^{\frac{1}{\beta}}\right), \qquad \lambda \in (0,1), \beta > 0$$

1. Encuentre la ecuación que describe el valor marginal de un gol adicional para un jugador cualquiera.

2. Encuentre la ecuación que describe el valor marginal de un aumento en el número de dribleos para un jugador cualquiera.

3. El volante Eulerinho del FC Sydsæter interesa al club Sporting Arrow para la próxima temporada. Los dirigentes del Sporting Arrow llegaron a un acuerdo para adquirir el pase de Eulerinho al valor de mercado ayer. Hoy se jugó la fecha final del campeonato, y Eulerinho metió el único gol en el triunfo de su equipo, tras lo cual salió lesionado.

   a) Su fama de “rebelde” mantiene a Eulerinho dentro de los jugadores menos queridos por la afición, con una simpatía constante e igual a 1.
   b) El “IPC del fútbol” no cambió.
   c) El conteo de goles de Eulerinho **tras** el partido fue de 21 goles en toda la temporada.
   d) La lesión de Eulerinho ha reducido su habilidad de 10 a 9 dribleos.

   Se pide que, **sin calcular**, obtenga una expresión para **el cambio aproximado** en el valor del pase de Eulerinho entre ayer y hoy.

1.9. TMS y Aproximación por Plano Tangente

Suponga la siguiente función de utilidad de una persona que consume dos bienes,

$$U = \sqrt{x} + 2\sqrt{y}$$

1. Calcule la tasa marginal de sustitución. Use derivación implícita.

2. Si la persona consume normalmente 4 unidades del bien x y 9 unidades del bien y, ¿cuántas unidades del bien x cree usted que debería estar dispuesta a sacrificar por una unidad adicional del bien y?

3. Encuentre la gradiente en el punto $(x;y) = (4;9)$. Use el resultado para aproximar cuánto cambia la utilidad al moverse al punto $(x;y) = (4,2;8)$

1.10. Derivadas Parciales y Aproximación por Plano Tangente

Considere una función de demanda dada por $A = 6p_a^{-2}p_b^{3/2}$ donde A es la cantidad demandada de viajes en avión, p_a es el precio de los viajes en avión y p_b es el precio de los viajes en bus. Suponga que los precios actuales en el mercado son $p_a = 3$ y $p_b = 4{,}5$.

1. Calcule la cantidad viajes en avión demandada a los precios de mercado observados
2. Obtenga las derivadas parciales de la demanda por viajes en avión con respecto a los precios de viajes (ambos)
3. Obtenga las derivadas parciales de segundo orden de la función de demanda con respecto a los precios de ambos bienes (incluida la derivada cruzada)
4. Use las derivadas parciales recién calculadas para obtener una aproximación de la cantidad demandada si p_a sube en 0,5 y p_b baja en 0,5.
5. Repita el paso anterior, partiendo de los mismos valores iniciales, pero para el caso en que ambos precios bajan en 0,25
6. Calcule ahora los valores exactos de la cantidad demandada en ambos casos. ¿Qué tan buena era su aproximación?

1.11. Aproximación por Plano Tangente

a) El radio de la base y la altura de un cono circular recto miden 10 cm y 25 cm, respectivamente, con un posible error en la medición de 0,1 cm en cada uno. Utilice diferenciales para estimar en forma aproximada. el mayor error posible en el volumen calculado del cono.

b) Las dimensiones de una caja rectangular son 75, 60 y 40 cm, y cada medida no difiere 0.2 cm del valor real. Mediante diferenciales estime el error más grande posible cuando el volumen de la caja se calcula a partir de esas medidas.

1.12. Modelamiento de Funciones Económicas (Equilibrio de Mercado)

Consideremos el modelo de oferta y demanda de un determinado bien:

$$\begin{aligned} Q^d &= n^d - Pm^d && ;\ n^d, m^d > 0 \\ Q^s &= -n^s + Pm^s && ;n^s, m^s > 0 \end{aligned}$$

donde Q^d es la cantidad demandada y Q^s es la cantidad ofrecida del bien Q, P es el precio de mercado, y n^d, m^d, n^s y m^s son constantes.

1. Obtenga el precio y cantidad de equilibrio en este mercado como función de los parámetros de la demanda
2. Describa que ocurre con el precio y cantidad de equilibrio en las siguientes situaciones
   a) Solo aumenta parámetro n^d (todos los otros parámetros permanecen constantes)
   b) Solo aumenta parámetro m^d
   c) Solo aumenta parámetro n^s
   d) Solo aumenta parámetro m^s

1.13. Modelamiento de Funciones Económicas (Utilidad del Agente)

En economía y finanzas se utiliza bastante funciones de utilidad del tipo:

$$U\left(c_1, c_2\right) = \frac{c_1^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \frac{c_2^{1-\sigma}}{1-\sigma}$$

Estas funciones se usan para considerar decisiones en que hay consumo en distintos momentos del tiempo o cuando no tenemos certeza de qué ocurrirá en un período futuro.

1. Calcule las utilidades marginales de ambos consumos. ¿Para qué valores de σ son positivas estas utilidades marginales?

2. Calcule las derivadas parciales de segundo orden. ¿Para qué valores de σ es decreciente la utilidad marginal?

3. Calcule la tasa marginal de sustitución usando el diferencial total

4. ¿Como cambia la tasa marginal de sustitución cuando cambia σ?

5. Partiendo de un punto en que $c_1 = c_2$ muestre gráficamente qué ocurre con la forma de la curva de indiferencia si σ aumenta de 0,5 a 0,75. ¿Qué interpretación económica tiene este resultado?

1.14. Modelamiento de Funciones Económicas (Preferencias por Educación)

Suponga que en una economía, con información simétrica, existen dos tipos de individuos: los de habilidad alta (tipo 1) y los de habilidad baja (tipo 2). Ahora, estos individuos son idénticos en todo excepto en el costo que tienen de educarse y, por ende, sus preferencias por educación también son distintas. Sea la función de utilidad de un individuo representativo: $U(e, w) = \sqrt{w} - \theta_i\ c(e)$. Así, la utilidad depende del costo de educarse, que a la vez depende de los años que escoja estudiar individuo (e), el sueldo que recibe (w) y un parámetro θ_i no negativo, que varía dependiendo del tipo de individuo. Suponga que el costo de educarse es una función lineal de los años de educación, tal que: $c(e) = e$.

1. Obtenga las derivadas parciales de primer orden. ¿Qué tipo de preferencia tiene el individuo por educarse?

   De ahora en adelante, asuma que $\theta_1 = \frac{1}{5}$ y $\theta_2 = 1$.

2. En un mismo gráfico dibuje las curvas de indiferencia de los individuos tipo 1 y tipo 2. Observando las pendientes, ¿Quién tiene un costo relativo de educarse mayor? **(Ayuda: se le recomienda trabajar con e en el eje de las x, y con w en el eje de las y)**

3. Obtenga el costo relativo de educarse, o sea $\frac{dw}{de}$. ¿Qué ocurre con el costo relativo conforme aumenta w? Particularmente, ¿Qué ocurre cuando w tiende a infinito o cuando tiende a cero? **Interprete sus resultados**.

4. ¿Cuál es la interpretación para el parámetro θ_i?

1.15. Modelamiento de Funciones Económicas (Políticas Sociales)

En un reciente trabajo publicado el profesor Francisco Gallego junto a otros investigadores estudian el efecto que tiene en rendimiento escolar el sustituir libros impresos por libros electrónicos entregados a un computador. En esta pregunta escribiremos funciones de producción que reflejen algunas de las hipótesis que ellos estudian en el trabajo mencionado. (Nota: la cita completa del artículo es: Rosangela Bando, Francisco Gallego, Paul Gertler, Dario Romero Fonseca, 2017, “Books or laptops? The effect of shifting from printed to digital delivery of educational content on learning,” *Economics of Education Review*, 61, págs. 162-173.) Nos concentraremos en la parte de oferta de libros y el costo de entregarlos.

En este caso pensaremos en el costo de entregar una cierta cantidad de libros L a los alumnos. Llamaremos e a la fracción de libros que son entregados en formato electrónico, tal que el total de libros entregados en formato electrónico es eL y en formato impreso es $(1-e)L$. El costo de entregar libros electrónicos tiene un costo fijo a y un costo variable b por libro (el costo variable no es función de L), mientras que el costo de libros impresos tiene un costo fijo c y un costo variable d por libro (el costo variable no es función de L).

1. Escriba la función de costos totales de entregar L libros como función de L y e, además de los parámetros de costos fijos y marginales.

2. Encuentre la función de costos marginales, esto es el aumento en la función de costos totales al aumentar la cantidad de libros producidos. Interprete sus resultados.

3. ¿Cómo cambia el costo marginal al cambiar e? Explique la intuición detrás del resultado

1.16. Modelamiento de Funciones Económicas (Utilidad Esperada)

En finanzas se utiliza bastante funciones de utilidad del tipo:

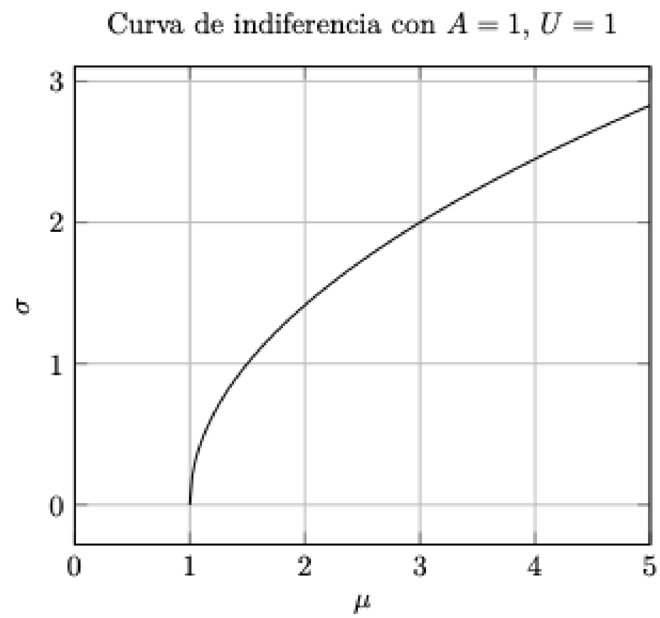
$$U(\mu, \sigma) = \mu - \frac{A}{2}\sigma^2 \qquad \text{con } A > 0$$

donde μ es el retorno esperado de una inversión financiera y σ es una medida de la variabilidad o qué tan inciertos son los retornos que entregará esta inversión.

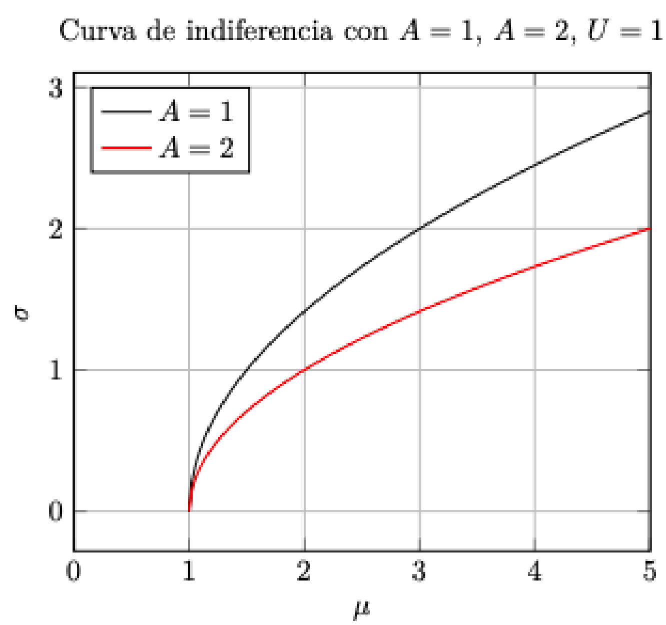
1. Calcule la utilidad marginal de μ y de σ. ¿Qué interpretación económica o financiera tiene el signo de estas utilidades marginales?

2. Calcule la tasa marginal de sustitución usando el diferencial total de una curva de indiferencia asociada a esta función de utilidad. (Nota: alternativamente usted puede trabajar con la pendiente de la curva de indiferencia, recordando que la TMS es esta pendiente pero con el signo cambiado: $TMS = -d\sigma/d\mu$ en este caso).

3. Dibuje la curva de indiferencia cuando $A = 1$ y $U = 1$. Sea cuidadoso en definir los puntos en que cruza los ejes, si es que los cruza.



4. ¿Cómo cambia la tasa marginal de sustitución cuando aumenta A? Interprete la intuición de este resultado.



1.17. Modelamiento de Funciones Economicas (Demanda por atributos)

Considere el problema de un consumidor que valora las vitaminas (V) y proteínas (P) contenidas en las frutas y carne que consume. En particular, su utilidad es:

$$U(V, P) = 2\sqrt{VP}$$

Las frutas contienen muchas vitaminas y algo de proteína; la carne contiene mucha proteína y algo de vitaminas. Así, podemos expresar V y P como:

$$V = 4x_1 + x_2$$
$$P = x_1 + 16x_2,$$

donde x_1 denota los gramos de fruta y x_2 denota los gramos que carne que consume.

a) Utilizando la regla de la cadena obtenga la utilidad marginal de la fruta y carne ($\partial U/\partial x_1$ y $\partial U/\partial x_2$).

b) Exprese la utilidad en función de x_1 y x_2. ¿Cuántos gramos de fruta debe consumir para alcanzar U=200 si se fija $x_2 = 0$?, ¿y cuántos gramos de carne debe consumir para alcanzar U=200 si se fija $x_1 = 0$?

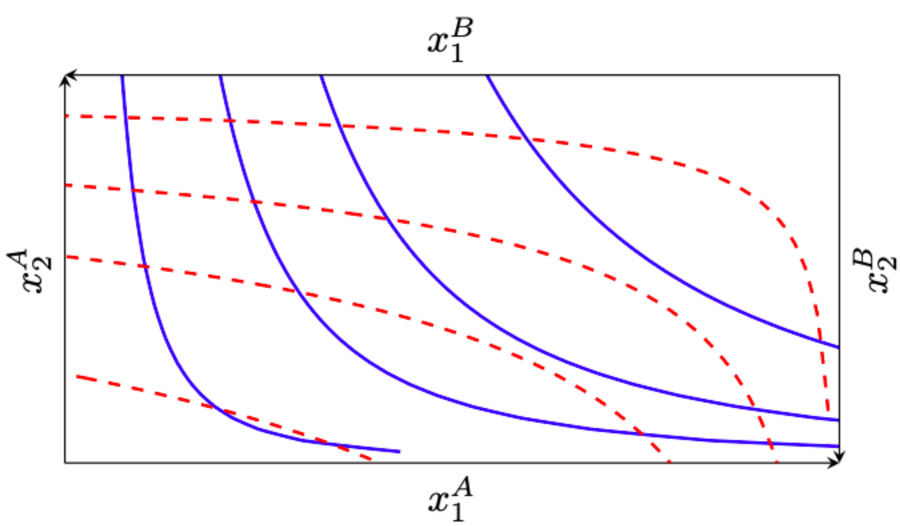
c) Obtenga una expresión para la pendiente de la curva de indiferencia resultante (esto es, $\frac{dx_2}{dx_1}$ para dejar utilidad constante).

d) ¿Cuál es la pendiente de la curva de indiferencia si se fija $x_2 = 0$?, ¿y cuál es la pendiente de la curva de indiferencia si se fija $x_1 = 0$? Grafique la curva de nivel (aproximadamente, pero respetando intercepto y forma).

e) Sea $p_1 = 2$ el precio por gramo de fruta y $p_2 = 4$ el precio por gramo de carne. Obtenga una expresión para la restricción presupuestaria del individuo si tiene ingreso de 100 y grafique cuidadosamente esta restricción.

1.18. Desafío: Equilibrio General

Considere una economía con dos agentes, A e B, y dos bienes, 1 e 2. Los agentes A y B tienen las siguientes funciones utilidad $u(x_1^A, x_2^A) = \alpha \ln(x_1^A) + \ln(x_2^A)$ e $u(x_1^B, x_2^B) = \ln(x_1^B) + \alpha \ln(x_2^B)$, donde x_i^j representa la cantidad consumida del bien i por el agente j y $\alpha > 1$. Perciba que al agente A le gusta mas el bien 1, y a lo agente B le gusta mas el bien 2. Algunas curvas de indiferencia están representadas abajo. Las líneas sólidas representan las curvas de indiferencia del agente A y las rayadas del agente B. Esté atento también a la dirección de los ejes.



Un planificador central tiene 10 unidades del bien 1 y 5 unidades del bien 2, y esta pensando como distribuir (asignar) estos bienes entre los dos agentes. Encuentre todas las posibles distribuciones (asignaciones) que satisfacen el siguiente requerimiento: no se puede subir la utilidad de un agente sin bajar la utilidad del otro agente.

1.19. Función Cobb-Douglas y Algunas de sus Propiedades

Suponga que podemos modelar la producción “Y” de una firma usando una función Cobb-Douglas donde X_i es la cantidad del factor de producción “i” utilizada por la firma, y $a_i \in \mathbb{R}$ son parámetros de la función de producción.

$$Y \;=\; X_1^{a1} \times\; X_2^{a2} \times .... \times X_n^{an}$$

1. Qué restricciones debemos imponer a los valores que pueden tomar los parámetros a_i para que la productividad marginal de los factores sea positiva y decreciente?
2. Muestre que la productividad marginal de un factor X_i, PMg_i se puede escribir como:

$$PMg_i = a_i \tfrac{Y}{X_i}$$

3. Use el resultado anterior para mostrar que para esta función se cumple que:

$$\textstyle\sum_{i=1}^{n} X_i PMg_i = Y \sum_{i=1}^{n} a_i$$

1.20. Propiedades de funciones en $\mathbb{R}^2$

Considere la función f dada por

$$f(x_1, x_2) = (x_1^\alpha + x_2^\alpha)^{1/\alpha} \qquad \text{con } \alpha \in (0,1)$$

definida en el conjunto S de los puntos (x_1, x_2) tales que $x_1, x_2 > 0$ (es decir, $\mathrm{S} = \mathbb{R}^2_{>0}$ ó $\mathrm{S} = \mathbb{R}^2_{++}$).

a) Demuestre que la función f es cuasicóncava en su dominio.

b) Demuestre que la función f es homotética.

Capítulo 2

Técnicas de Estática Comparativa

2.1. Regla de la Cadena

Suponga la función $y = 3x_1x_2^2 + 2x_2$ y que $x_1(t) = -3t^2$ y $x_2(t) = 4t^3 + t$.

1. Use la regla de la cadena para encontrar una expresión para la derivada de y con respecto a t
2. Encuentre la función $y = g(t)$ que se obtiene la sustituir directamente x_1 y x_2 como funciones de t
3. Obtenga la derivada de y con respecto a t usando al función $g(\cdot)$ que usted acaba de obtener

2.2. Regla de la Cadena

Suponga la función $y = 0{,}5\ln(x_1) + 0{,}5\ln(x_2)$ y que $x_1(t) = e^{0{,}2t}$ y $x_2(t) = e^{0{,}4t}$.

1. Use la regla de la cadena para encontrar una expresión para la derivada de y con respecto a t.
2. Encuentre la función $y = g(t)$ que se obtiene al sustituir x_1 y x_2 como funciones de t.
3. Obtenga la derivada de y con respecto a t usando la función $g(\cdot)$ que usted acaba de obtener.

2.3. Regla de la Cadena e Interpretación Económica

Usted está encargado de comprar bebidas para un asado de generación y los organizadores le piden que compre l botellas de 2 litros. Usted se encuentre en un supermercado y observa que el precio es $\bar{p}$ por botella. Usted necesita decidir si seguir buscando en otros supermercados o sencillamente comprar en el que se encuentra actualmente. Llamaremos b al tiempo que usted pasará buscando en otros supermercados y podemos suponer que mientras más tiempo busque menor será el precio p al que podrá comprar.

Su función de utilidad U tiene dos componentes. Primero, usted aumenta su felicidad por cada peso que ahorra en bebidas (lo llamaremos s), condicional en comprar lo requerido. Segundo, usted no quiere pasarse la tarde entera buscando bebidas más baratas, por ello su utilidad disminuye mientras mayor sea b.

1. ¿Qué signo deberían tener las derivadas parciales de U con respecto a s y b?
2. ¿Qué signo debería tener la primera derivada de p con respecto a b?
3. Obtenga la derivada de la función de utilidad con respecto al tiempo ocupado buscando bebidas más baratas. ¿Qué interpretación tienen cada uno de los términos que lo componen?
4. ¿Puede usted mostrar la condición que describe el tiempo de búsqueda que maximiza su utilidad?

2.4. Regla de la Cadena e Interpretación Económica I

Supongamos que la función de utilidad $U = U(C, P)$ de la sociedad depende de dos elementos: el consumo de bienes adquiridos en el mercado, C, y la disponibilidad de bienes provistos por el sector público, P, y la utilidad es creciente en ambas variables. La persona consume una fracción a de su ingreso neto de impuestos $M - T$ donde M es el ingreso y T son los impuestos. La disponibilidad de bienes públicos es una función creciente de los impuestos cobrados $P = P(T)$.

1. Encuentre la derivada de la función de utilidad con respecto a los impuestos. Llame p' a la derivada de P con respecto T.

2. Explique intuitivamente lo que reflejan los componentes de su resultado en la parte anterior.

3. ¿Qué sucede con la utilidad "marginal" de los impuestos cuando p' aumenta? Explique intuitivamente

2.5. Regla de Cadena e Interpretación Económica II

Supongamos que la función de demanda de un bien que depende del precio sin impuestos "P" y del IVA unitario "t", está dada por:

$$Q^d = f(t, P)$$

Supongamos que la función de oferta está dada por: $Q^s = g(P)$. Supongamos además que el precio de equilibrio es función del IVA "t", esto es,$P = P(t)$.

1. Utilizando la ecuación de equilibrio obtener:

$$\frac{dP}{dt} = P'(t)$$

2. Analice su signo y concluya

2.6. Modelamiento de Regulaciones Bancarias

El 2019, Jose Ignacio Cuesta junto con su compañero Alberto Sepúlveda publicaron un trabajo en el que estudiaban la regulaciones de precios en el mercado de créditos. Para esto, el ex alumno de la facultad y su compañero aprovecharon una política que reducia la Tasa Máxima Convencional (TMC) en 20 puntos porcentuales (20 %). La TMC es la máxima tasa de interés que un banco comercial, que opera en territorio chileno, podría cobrar en un crédito de consumo. Le recomendamos que interprete esta política como una política que reduce el precio máximo que un banco puede cobrar por un crédito de consumo.

En los resultados del *paper*, Cuesta y su coautor, encuentran un *trade-off* en el efecto de reducir la TMC sobre el bienestar de los consumidores. Por un lado, reducir la TMC protege a los consumidores del poder de mercado de los bancos comerciales, pero por otro lado, se reduce la oferta de créditos de consumo.(La cita completa es: *Cuesta, J. I., & Sepúlveda, A. (2019). Price regulation in credit markets: A trade-off between consumer protection and credit access. Available at SSRN 3282910.*)

En este contexto, se le pedirá modelar distintas situaciones económicas aplicando lo que ha visto en el curso. Para ello asumiremos que la función de bienestar para un consumidor representativo es $W(t, q)$ donde t representa la TMC que escoge el legislador, y q representa la cantidad de créditos ofrecida por los bancos comerciales. Ahora, además suponga que la cantidad de créditos ofrecidos por los bancos comerciales, depende de la TMC, o sea es una función $q(t)$.

1. a) Que signo espera que tenga la derivada parcial de $W(t, q)$ con respecto de t. **Explique su intuición**.

b) En sus resultados, los investigadores encontraron que en promedio, una disminución de la TMC conducía a una disminución del bienestar de los consumidores. Bajo este escenario, ¿Qué efecto encontrado en el inciso anterior debería dominar?

2. Preocupado por la validez de sus resultados, los investigadores deciden añadir una variable que afecta a la cantidad de crédito ofrecidas. Suponga que ahora q también depende del riesgo de no pago del consumidor r, o sea $q(t,r)$. ¿Qué signo tendrá la derivada cruzada $\frac{\partial^2 q}{\partial r \partial t}$? **Explique su intuición**. (**Ayuda: Suponga que mientrás más riesgoso, es más costoso para el banco entregar el crédito por lo que en ausencia de una TMC cobra tasas de interés mayores**).

3. Suponga que tiene 2 tipos de consumidores en el mercado de créditos, los de alto riesgo (A) y los de bajo riesgo (B). Suponga que la tasa de interés máxima cobrada a un tipo A es 20 %, mientras que a un tipo B es 5 %. Suponga que inicialmente no hay una política de TMC, pero el legislador decide introducirla en 10 %. Usando los resultados de los incisos anteriores ¿Cómo debiera afectar esta política sobre el bienestar de los 2 grupos de consumidores?

4. Mientras se legislaba esta ley en el congreso, un diputado declaró lo siguiente: "La TMC es un excelente proyecto de ley, porque hace que la oferta de créditos sea más accesible para los consumidores. Además, no tiene efectos negativos sobre el bienestar". Discuta la veracidad de la declaración del diputado.

2.7. Derivadas Implícitas

a) Obtener $y' = \dfrac{dy}{dx}$ donde $x^3 + y^3 = 6xy$

b) Obtener $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ donde $x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$

2.8. Derivadas Implícitas

Considerando que en el Teorema de la Derivación Implícita:

$$\frac{dy}{dx} = y' = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)} = -\frac{F_x}{F_y}$$

representa la pendiente de la curva de nivel de $F(x,y) = c$. Se pide demostrar que:

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{(F_y)^3}\begin{vmatrix} 0 & F_x & F_y \\ F_x & F_{xx} & F_{xy} \\ F_y & F_{yx} & F_{yy} \end{vmatrix}$$

2.9. Leibniz

Encuentre la derivada con respecto a t de las siguientes funciones:

1. $f(t) = \int_t^{at} \ln(tz)dz$

2. $g(t) = e^{-rt}\int_t^T f(\tau)e^{-r(\tau-t)}d\tau$, donde r y T son números positivos.

2.10. Leibniz

Calcule $\frac{dy}{dt}$ si

$$y = \int_{t}^{2t} e^{-r(z-t)} \left(z(a+t) + \frac{b}{2}t^2 \right) dz$$

donde a, b son constantes.

2.11. Leibniz

Una empresa enfrenta a una demanda incierta D y tiene un inventario I. Hay costos unitarios distintos por tener demasiadas o pocas existencias. La empresa desea por tanto elegir el nivel Q de existencias para minimizar la función:

$$g\left(Q\right) = c\left(Q - I\right) + h \int_{0}^{Q} \left(Q - D\right) f\left(D\right) dD + p \int_{Q}^{a} \left(D - Q\right) f\left(D\right) dD$$

Donde: c,I,h,p, y a son constantes positivas con $p > c$ y f una f.d.p. tal que $\int_0^a f\left(D\right) dD = 1$

1. Calcular $g'\left(Q\right)$ y $g''\left(Q\right)$
2. Demostrar que "g" es convexa
3. Sea $F\left(Q^*\right) = \int_0^{Q^*} f\left(D\right) dD$, donde Q^* Es el mínimo de g(Q). Usar las condiciones de minimización de g de primer orden, para hallar una ecuación para $F\left(Q^*\right) = P_r\left(D \leq Q^*\right)$. Use esta ecuación para hallar el valor de $F\left(Q^*\right)$ cuando Q^* es óptimo.

2.12. Preguntas Cortas: Elasticidades

Conteste las siguiente preguntas, cada una es independiente de la anterior:

1. Suponga la función de utilidad $U = \min(ax_1, bx_2)$. Explique intuitivamente por qué, según la definición que hemos visto en el curso, la elasticidad de sustitución entre x_1 y x_2 es 0 para estas preferencias.
2. Encuentre la derivada de A con respecto al tiempo t si $A = 6c^{-2}d^{3/2}$ y tanto c como d son funciones del tiempo.
3. Encuentre una ecuación para el cambio porcentual en $A = 6c^{-2}d^{3/2}$ en el tiempo como función de las elasticidades de A con respecto a c y d.
4. Una piscina circular de alto h metros y de radio r metros, contiene πhr^2 metros cúbicos de agua. ¿Cuándo necesitaría más agua para llenarla, si el alto aumenta un 5 % o si el radio aumenta un 3 %?

2.13. Regla de Leibniz

La demanda de un consumidor por papas fritas es dada por la siguiente función:

$$p = e^{-Q}$$

donde Q es la cantidad consumida de papas fritas y p es el precio. Entonces, para un dado precio de equilibrio $p^* \in (0, 1)$, el consumidor consume $Q^* = -\ln(p^*)$. Se define el excedente del consumidor, representado por la función $E(p^*)$, como la suma de la diferencia entre el valor máximo que el consumidor estaría dispuesto a pagar por cada unidad y el valor efectivamente pago:

$$E(p^*) = \int_0^{-\ln(p^*)} \left(e^{-Q} - p^*\right) dQ$$

Responda lo que se pide.

1. Compute la derivada de $E(p^*)$ con respecto al precio de equilibrio p^*, **usando la regla de Leibniz**. Interprete sus resultados.

2. Suponga que inicialmente el precio de equilibrio es $p^* = 0{,}3$ y el consumidor firma un contrato para comprar $Q^* = -\ln(0{,}3) \approx 1{,}2$ unidades de papas fritas. Sin embargo, debido a una subida de costos, el precio de la papa frita sube 0.1 unidades, pero el consumidor no puede ajustar su cantidad consumida, pues esto se había fijado en el contrato de compra. ¿Cuánto cambia, aproximadamente, el excedente del consumidor bajo estas condiciones? Justifique.

2.14. Preguntas Cortas: Homogeneidad y Homoteticidad

Conteste las siguiente preguntas, cada una es independiente de la anterior:

1. Suponga la siguiente función $Z = \ln x + 8\ln y + 10$, ¿es esta función homogénea? ¿Tiene retornos crecientes a escala?

2. ¿Es homogénea la función $y = k + l^{1,5}$? ¿Tiene retornos crecientes a escala?

3. ¿Es la función f definida por $f(L) = \cos(\sqrt{L}) - 3$ para todo $L \in [\pi^2, 4\pi^2]$ homotética?

4. Para duplicar el nivel de producción, lo eficiente es duplicar la escala de la firma. Es decir, utilizar el doble de todos los insumos. ¿Verdadero o Falso?

5. Sea f una función de producción de n insumos productivos. Demuestre que si f es homogénea de grado 1, entonces la productividad marginal de cada factor se mantiene invariante ante un aumento en la contratación de todos los factores de 40 %.

6. Considere las siguientes funciones de producción:

$$(i)\ f(L,K) = (LK)^{1/2}$$
$$(ii)\ f(L,K) = L + K^{1/2}$$
$$(iii)\ f(L,K) = L^2 + K^2$$

   a) Verifique en cada uno de los casos si la función es homotética, justificando su respuesta. Si fuese homotética, indique si además es homogénea, indicando su grado de homogeneidad en caso afirmativo.

   b) Verifique en cada uno de los casos si la función es cóncava o convexa (indicando si es estrictamente cóncava o estrictamente convexa si corresponde).

2.15. Estática Comparativa de una Función de Producción

Una prominente empresa llamada **Lepac** se dedica a la producción de botellas de vidrio. Después de bastante tiempo de investigación, su equipo de producción sabe que produce botellas a razón de la siguiente función de producción:

$$f(L,K) = \sqrt{L} + \sqrt{K}$$

En donde L representa al factor trabajo y K al capital utilizados en la producción de botellas.

La empresa **Lepac** últimamente se ha visto expuesta mediáticamente, por lo que estiman que sus ventas aumentaran en una gran proporción. Debido a esto, la gerencia de operaciones de la empresa le pide usted que haga los siguientes análisis:

1. ¿La función de producción es homogénea? ¿Homotética? Explique clara y detalladamente su respuesta, dejando claro lo que implica que la función de producción sea (o no) homogénea y/o homotética.

2. Grafique la curva de nivel que representa a $f(K, L) = 10$. ¿Qué significado tienen todas las combinaciones de K e L que se encuentran en dicha curva?

3. Suponga que la empresa quiere producir 10 unidades, contratando igual número de unidades de trabajo que de capital.

   a) (4 ptos) Obtenga la cantidad de L, K que utiliza.

   b) (6 ptos) Obtenga la tasa marginal de sustitución entre capital y trabajo ($TMS_{K,L}$) en ese punto utilizando el Teorema de la Función Implícita. ¿Cómo se interpreta este resultado?

4. Ahora suponga que el precio de los insumos para el trabajo es de w y para el capital es de r, y el precio al que se venden las botellas es p. La cantidad de trabajo y capital que maximiza la ganancia de la empresa estará dada por:

$$L^*(w, r, p) = \frac{p^2}{4w^2}$$

$$K^*(w, r, p) = \frac{p^2}{4r^2}$$

   Usted sabe que la cantidad óptima a producir (q^*) es entonces $f(L, K)$ evaluado en $L^*(w, r, p)$ y $K^*(w, r, p)$:

$$q^* = f(L^*(w, r, p), K^*(w, r, p))$$

   Suponga que inicialmente tenemos $w = r = 1$ y $p = 10$. Usando la regla de la cadena muestre cuanto cambia q^* si cambia p y cuanto cambia q^* si cambia w. Explique intuitivamente el signo del resultado encontrado en cada caso.

2.16. Estática Comparativa en Retornos a Escala

Su amigo Jesús, productor estrella de kg. de pan, utiliza trabajo (L) y capital (K), ambas variables continuas, y posee la siguiente función de producción:

$$f(L, K) = L^\alpha K^\beta$$

con $\alpha, \beta > 0$. En base a esta información y considerando todos los casos posibles, responda las siguientes preguntas:

1. ¿Se cumple la ley de rendimientos marginales decrecientes para cada factor?

2. Suponga un nivel de capital fijo $\overline{K} > 0$ y $\alpha > 1$. Si Jesús no puede contratar mas de 10 horas de trabajo, ¿Cuál es el número de horas que maximiza la productividad marginal del trabajo?

3. ¿Cómo son los retornos a escala de esta función?

4. Si Jesús utiliza $L = 1$ y $K = 2$ y piensa en aumentar la utilización de trabajo marginalmente. ¿Cuántas unidades de capital puede dejar de utilizar si desea seguir produciendo 2^β Kg. de pan?

5. Si el Estado le regala a Jesús una unidad de trabajo, tal que su función de producción ahora está definida por

$$f(L, K) = (L + 1)^\alpha K^\beta$$

   ¿Cómo son los retornos a escala (localmente) cuando Jesús utiliza $L = 1$ y $K = 2$?

2.17. Elasticidad Sustitución

Obtenga la elasticidad de sustitución de la función de utilidad dada por $U(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$. Explique intuitivamente su resultado.

2.18. Elasticidades Parciales

Encuentre las elasticidades pedidas en cada uno de los siguientes casos:

1. Elasticidad de y con respecto a x cuando $M = x^2 + y^2$.
2. Elasticidad de y con respecto a t cuando $y = e^{vt}x_1^{\alpha}(t)x_2^{\beta}(t)$ donde v, α y β son constantes, y $x_i(t)$ indica que la variable es una función de t.

2.19. Funciones Homogéneas

Determine si las siguientes funciones son homogéneas y en caso de que lo sean, encuentre el grado de homogeneidad

1. $y = x_1^{1/2}x_2^{1/3} + x_2^{3/2}$
2. $y = x_1^2x_2 - x_2^3$
3. $y = \dfrac{x_1^{\alpha}x_2^{\beta}}{x_1^{\gamma} + x_2^{\gamma}}$

2.20. Funciones Homogéneas y Teorema de Euler

Suponga la función Cobb-Douglas $Y = AK^{\alpha}L^{\beta}$ donde A es una medida de productividad, K es el capital usado y L es la cantidad de trabajo empleada y los parámetros α y β son positivos.

1. Muestre que esta función es homogénea y determine el grado de homogeneidad.
2. Muestre que para esta función se cumple el teorema de Euler.

2.21. Estática Comparativa en el Problema de la Firma

Suponga la siguiente función de producción de una determinada empresa:

$$Q(L, K) = 2KL + 3K^2$$

Donde Q representa la producción, K es la cantidad de horas-máquina y L se refiere a la cantidad de horas-trabajador. En la actualidad, $K = 2$, $L = 1$ y $Q = 16$.

1. Encuentre la $TMS_{L,K}$ como función del uso de factores. Muestre que depende únicamente de la razón K/L.
2. ¿Es la función homogénea? ¿Homotética? Explique clara y detalladamente su respuesta, dejando claro lo que entiende por homogénea y homotética.
3. Calcule la elasticidad de la producción respecto al trabajo ($\varepsilon_{Q,L}$) y respecto al capital ($\varepsilon_{Q,K}$). Evalúelas en el punto en que se encuentra en la actualidad.

2.22. Estática Comparativa en Funciones Cobb-Douglas

Dada la siguiente función de producción Cobb-Douglas $Y = AK^{\alpha}L^{\beta}$ donde A es una medida de productividad, K es el capital usado y L es la cantidad de trabajo empleada. Los parámetros α y β están el intervalo $(0, 1)$.

1. Encuentre la pendiente de una isocuanta de esta función de producción.
2. Muestre si la función es homogénea y si lo es indique su grado.
3. Suponga que la remuneración del capital y del trabajo (por unidad) es igual a sus productividades marginales. Discuta que sucede en los siguientes casos, $\alpha + \beta < 1$, $\alpha + \beta = 1$, $\alpha + \beta > 1$.
4. Muestre que la elasticidad de sustitución es constante e igual a 1. ¿Cuál es el significado económico de este número?

2.23. Funciones Homogéneas y Homotéticas

Responda VERDADERO o FALSO para las siguientes afirmaciones subrayadas. Debes justificar de manera clara sus respuestas, mencionando los resultados que estas utilizando o un contra-ejemplo cuando necesario.

1. Toda función homotética es homogénea.
2. Considere un consumidor con función utilidad $u(x, y)$, donde x e y son las cantidades consumidas de dos bienes. La función u es homotética, pero no es homogénea. Suponga que los canastos $(x, y) = (5, 10)$ y $(x, y) = (10, 5)$ están en la misma curva de indiferencia (i.e., curva de nivel) para este consumidor. Entonces, los canastos $(x, y) = (10, 20)$ y $(x, y) = (20, 10)$ también están en la misma curva de indiferencia.
3. Suponga que una empresa tiene una función de producción $F(K, L)$ que es homogénea de grado 1 (K y L representan las cantidades utilizadas de capital y trabajo, respectivamente). Entonces, cuando esta empresa duplica la utilización de los dos factores de producción, la productividad marginal underlineginal del trabajo se duplica.

2.24. Elasticidades y Funciones Homogéneas

Considere la función de utilidad:

$$G(t, z) = (t^{\beta} + z^{\beta})e^{\beta}$$

1. Determine si G es homogénea y/o si es homotética.
2. Calcule la tasa marginal de substitución TMS_{tz}.
3. Calcule la elasticidad de G con respecto a β.
4. Calcule la elasticidad de sustitución entre t y z.

2.25. Desafío: Funciones Homogéneas

Una panadería produce pan a partir de trigo y otros ingredientes, resumidos en el vector $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. La función de producción de la panadería se escribe $F(G(\vec{x}))$, donde $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es homogénea de grado k_1 y $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es homogénea de grado k_2. Suponga además que F y G tienen rendimientos decrecientes a escala.

1. ¿Qué partes del proceso productivo podrían representar F y G?

2. ¿Qué tipo de rendimientos tiene la panadería? Interprete su resultado en términos de producción en serie.

   Suponga que la panadería hace más eficiente su segundo proceso productivo.

3. ¿Qué función es la que cambia? Y si luego del cambio la función sigue siendo homogénea, pero de grado k_3, ¿cómo se comparan k_1 y k_2 con k_3?

4. Encuentre el (los) valor(es) de k_3 (relativos a k_1) que hacen que la panadería tenga:

   a) Rendimientos constantes.

   b) Rendimientos crecientes.

2.26. Plano Tangente y la Función de Producción

Un fabricante ha modelado su producción con la siguiente función:

$$Q(K, L) = 1{,}039 L^{0{,}75} K^{0{,}25} \quad ; \quad L, K > 0$$

- Q: Valor monetario de la Producción total producida en un determinado período
- L: Cantidad de horas-hombre trabajadas en dicho período
- K: Valor monetario de la cantidad de capital invertido (maquinarias, equipos y edificios)

1. Obtener una expresión para, la ecuación del plano tangente: $T(L, K)$ a la función de producción en el punto $(L, K, Q) = (101, 20, 70)$.

2. Usando la respuesta obtenida en el punto anterior, se pi de obtener una expresión para el valor aproximado del valor de la función producción en el punto $(L, K) = (100, 21)$.

3. Demuestre que cualquiera sea el valor de (L, K), la Productividad Marginal del trabajo es positiva y decreciente.

2.27. Función de Producción, Homogeneidad y Tasas de sustitución

Una empresa tiene función de producción $F(K, L) = 40\sqrt{K} + 20\sqrt{L}$, donde K representa la cantidad empleada de capital, y L la cantidad de trabajo. El precio de venta del producto es $1.

a) ¿La función de producción es homogénea? Si lo es, ¿es homogénea de qué grado? Si no lo es, pruébelo. Justifique.

b) Para la curva de nivel $F(K,L) = 900$, determine la tasa marginal de sustitución (TMS) entre factores de producción y mencione cómo se relaciona con la pendiente de esa curva de nivel.

c) Suponga que el costo de cada unidad de capital es \$1 y el costo de cada unidad de trabajo es \$2. Construya la ecuación de ganancias de la empresa y encuentre su único punto crítico interior. Calcule $F(K,L)$ en ese punto.

d) Suponga que el proveedor de K pierde 4 unidades luego de una inundación, por lo que la empresa debe contratar menos K de lo planificado y sustituirlo por L. Usando la tasa marginal de sustitución (TMS) entre factores de producción calculada en la parte *b)*, indique en cuánto, **aproximadamente**, debe cambiar L para mantener constante el nivel de producción calculado en *c)* si se reduce K en 4 unidades.

e) Si la empresa ajusta su nivel L al nivel calculado en *d)*, ¿qué pasa con los ingresos y costos de la empresa? ¿Las ganancias suben o bajan?

2.28. Estática comparativa

(Nota: esta pregunta requiere tener nociones de optimziación en R pero no de optimización con más de una variable.)

Considere una empresa que enfrenta una demanda $Q(p) = 5 - \ln(p)$ por su producto. Su costo de producción por unidad es $c > 1$. La empresa busca elegir el precio que maximice su función de ganancias, dada por

$$\pi(p) = Q(p)p - Q(p)c.$$

a) Sin calcular responda, ¿puede ser menor a c el precio que maximice las ganancias en este caso? Justifica tu respuesta.

b) Suponiendo que el dominio de la función de ganancias son los precios $p > c$, ¿es esta función cóncava o convexa? Justifica tu respuesta.

c) Muestre que la condición de primer orden para este problema es:

$$5 - \ln(p) - \frac{1}{p}(p - c) = 0$$

d) Sea $p^*(c)$ el precio que satisface la condición de primer orden derivada en el ítem anterior. ¿Cómo cambia $p^*(c)$ con un aumento en el costo de producción c? Justifique su respuesta analíticamente. *(Ayuda: Puede utilizar el teorema de la función implícita.)*

e) Sea $Q^*(c)$ la cantidad producida en el óptimo como función de c (es decir, $Q^*(c) = Q\big(p^*(c)\big)$. ¿Un aumento en c aumenta o disminuye $Q^*(c)$? Justifique su respuesta analíticamente.

f) Sea $\pi^*(c)$ la ganancia como función de c (es decir, $\pi^*(c) = \pi\big(p(c^*)\big)$. Muestre cómo un cambio en c afecta $\pi^*(c)$.

Capítulo 3

Optimización sin Restricciones

Para profundizar más sobre los menores principales se recomienda revisar el apéndice A.1.

3.1. Formas Cuadráticas en Dos Variables

Utilice la definición de concavidad para demostrar que la función de producción $g : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$, definida por $g(L, K) = \min(L, K)$ es cóncava. ¿Es g estrictamente cóncava? Demuéstrelo.

3.2. Condiciones de Primer y Segundo Orden

Encuentre los puntos estacionarios de las siguientes funciones. Use las condiciones de segundo orden para determinar si son máximos, mínimos o puntos silla.

1. $y = 0{,}5x_1^2 + 2x_2^2$
2. $y = x_1 + x_2 - x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2$
3. $y = x_1^3 + x_2^3 - 4x_1x_2$
4. $y = 2x_1^2 - 4x_2^2$

3.3. Optimización sin Restricciones

Calcule la distancia más corta desde el punto $(1, 0, 2)$ al plano $x + 2y + z = 4$.

3.4. Optimización sin Restricciones

Determine los mínimos, máximos y puntos sillas de las siguientes funciones. Además mencione si son globales o locales según corresponda:

a) $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 - 4xy + 9y^2 + 3x - 14y + \frac{1}{2}$

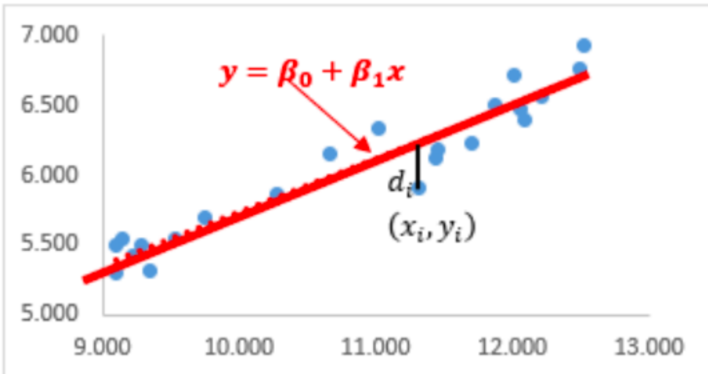
b) $f(x, y) = 2x^3 + (x - y)^2 - 6y$

3.5. Optimización sin Restricciones (Aplicación a Econometría)

Suponga que un estadístico tiene razón en creer que dos cantidades x e y se pueden modelar en forma aproximada de acuerdo a una dependencia de tipo lineal, esto es:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x$$

Donde β_0 y β_1 son los parámetros del modelo que desea estimar-
Para estimar los parámetros, el estadístico ejecuta un experimento y procesa información en la forma de puntos: (x_1, y_1);(x_2, y_2); (x_3, y_3);...;(x_n, y_n). Luego los representa en un gráfico, de tal modo que los puntos no quedan exactamente sobre una recta, de acuerdo al siguiente gráfico:



Para estimar los parámetros β_0 y β_1 el estadístico utiliza el Método de Mínimos Cuadrados, que consiste en lo siguiente: Sea $d_i = y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i$ la distancia vertical desde un punto cualesquiera (x_i, y_i) hasta la recta se trata de obtener (estimar) β_0 y β_1 minimizando la expresión: $S^2 = \sum_{i=1}^{i=n} d_i^2$

1. Demostrar que los estimadores de Mínimos Cuadrados están dados por las siguientes expresiones

$$\beta_1^* = \hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{i=n} x_i^2 - n\bar{x}^2};$$

$$\beta_0^* = \hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$$

Donde $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} x_i}{n}$ $\quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} y_i}{n}$ (PROMEDIOS MUESTRALES)

3.6. Optimización sin Restricciones (Otra Aplicación a Econometría)

En estadística inferencial, en muchas ocasiones se necesita resolver aplicaciones de tiempos de duración de aparatos electrónicos, para ello se utiliza la llamada función o modelo exponencial:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \qquad t \geq 0$$

Donde $\lambda > 0$ es el parámetro del modelo

Para medir los tiempos de "n" aparatos, se utiliza la llamada "Función de Verosimilitud", definida por:

$$L(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \prod_{i=1}^{i=n} f(t_i)$$

Nótese que: $L : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

1. Se pide obtener el valor del parámetro λ, que maximiza la Función de Verosimilitud. A este valor se le llama Estimación de Máxima Verosimilitud $\hat{\lambda}_{MV}$

3.7. Minimización de Costos de Entrega

La empresa en que usted trabaja ha decidido iniciar un plan de distribución de productos mediante drones. Para ello se requiere definir la ubicación del centro de distribución desde donde saldrán los drones. Usted sabe que en un mapa los tres lugares donde se deben entregar los paquetes están ubicados en las siguientes coordenadas: $A = (x_a, y_a),\ B = (x_b, y_b)$, y $C = (x_c, y_c)$.

Usted sabe que el costo de despacho está dado por la distancia que debe recorrer el dron. Si el centro de distribución se ubica en el punto $D = (m, n)$, el costo de entregar un paquete a un punto (x, y) es

$$\frac{1}{2}\left[(m-x)^2 + (n-y)^2\right]$$

Suponga que usted está a cargo de determinar la ubicación óptima del centro de distribución. El objetivo es minimizar el costo diario de las entregas realizadas por el centro.

1. Escriba el problema de optimización que le permitiría encontrar el punto óptimo de ubicación del centro de distribución. Especifique claramente función objetivo y variables de decisión de la empresa. Suponga que cada día se entrega un paquete en cada destino.

2. Encuentre el(los) punto(s) crítico(s) de este problema.

3. Determine si el(los) punto(s) crítico(s) son máximos, mínimos o puntos silla. Determine si son locales o globales.

4. Suponga ahora que a los destinos A, B, y C se entregan cada día q_a, q_b, y q_c paquetes, respectivamente. ¿Cómo cambia su respuesta a la parte (b)? Explique intuitivamente el resultado.

5. Proponga una extensión a este problema y muestre como cambiaría el problema de optimización. Explique claramente la naturaleza de esta modificación, puede ayudarse con figuras. Esta extensión debe estar claramente relacionada a una situación que surgiría en el mundo real.

3.8. Inversión en I+D

En el país Oulipo, la fábrica de Bicicletas Eunoia genera también una serie de accesorios producto de la imaginación de su dueño, el señor Bok. La demanda por bicicletas viene dada por $Q = 1 + \sqrt{K} - P$, donde K representa el esfuerzo de innovación del señor Bok, cuyo costo es $\frac{2}{3}\lambda K^{\frac{3}{2}}$. El costo marginal de producir una bicicleta es $c < 1$.

1. Calcule el precio P y el nivel de innovación K elegidos por Eunoia. **(Ayuda: Si obtiene, para determinar K, una ecuación de la forma $aK + b\sqrt{K} + c$, puede hacer el cambio de variable $y = \sqrt{K}$ y resolverlo como una ecuación de segundo grado típica)**

   Suponga ahora que junto con Eunoia, existe un borde competitivo, con una oferta perfectamente elástica en el precio P_f (Esto es: no produce si $P \leq P_f$ y copa todo el mercado si $P > P_f$). Este sector no tiene costos de innovación, y simplemente imita los diseños de Eunoia, beneficiándose del aumento en la demanda. Para simplificar cálculos, puede asumir que $c = 0$, $\lambda = \frac{3}{16}$.

2. Si el monopolista elige P y K, ¿puede ser que $P > P_f$?

3. Calcule $K(P_f)$, $P(P_f)$, $Q^E(P_f)$, $Q^f(P_f)$. Donde Q^E es la cantidad producida por Eunonia y Q^f la cantidad producida por el borde competitivo.

3.9. Concavidad y Convexidad I

Compruebe concavidad/convexidad de las siguientes funciones:

1. $f(x) = ax^2 + bx + c$
2. $f(x, y) = 2x - y - x^2 + 2xy - y^2$

3.10. Concavidad y Convexidad II

Dada su cuarentena en casa a usted se le ha ocurrido estudiar su función de producción de pan amasado. Por simplicidad supongamos que su función de producción solo depende de su trabajo (L) y esta definida de la siguiente forma:

$$Y = AL^{\alpha}$$

Donde $L > 0$, A es un parámetro tecnológico y además, $0 < \alpha < 1$

1. Obtenga la productividad marginal de su trabajo.
2. Obtenga la concavidad/convexidad de su función de producción. Grafique.
3. Como cambia su respuesta en 2.) si el $\alpha > 1$. Grafique y explique.

3.11. Concavidad y Convexidad III (Más Complejo)

Dado que usted está en este curso decide complejizar aún más el modelamiento que hizo en la pregunta anterior, ahora su función de producción de pan amasado está representada por:

$$Y = AL^{\alpha}K^{\beta}$$

Donde K representa su capital físico (el horno en que cocina el pan).

1. Calcule la productividad marginal de su capital Y su trabajo.
2. Demuestre que para todo $K > 0$ y $L > 0$, su función de producción es cóncava si $A > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ y $\alpha + \beta \leq 1$

3.12. Concavidad, convexidad y optimización

Dos empresas idénticas, A y B producen un mismo bien según la función $f(L, K)$, que es cóncava, con derivadas parciales continuas y tal que $f_K, f_L > 0 y F_{KL} > 0$. La empresa A tiene L_A unidades de trabajo y K_A unidades de capital. La empresa B tiene L_B unidades de trabajo y K_B unidades de capital. Suponga además que $L_A > L_B$ pero $K_A < K_B$. Hoy ambas empresas están coludidas, por lo que venden el bien al mismo precio p. El ente regulador, el TLC, descubrió esta estrategia y debe detenerla. Les presenta a las empresas dos opciones:

- Opción 1: El TLC escoge un número $\lambda \in (0, 1)$ y la empresa A debe entregar al Estado una porción λ de sus ganancias y la empresa B una porción $1 - \lambda$ de las suyas. El Estado luego usa los recursos para políticas públicas.

- Opción 2: El TLC escoge un número $\lambda \in (0, 1)$ y la empresa A debe entregar una porción λ de sus insumos y la empresa B una porción $1 - \lambda$ de los suyos. El Estado luego puede producir independientemente el bien según la función f, venderlo al precio p y usar los ingresos de esa venta para políticas públicas.

Para este escenario:

a) Escriba las ganancias para el Estado de la opción 1 como función de λ. ¿Qué valor de λ maximiza esas ganancias? Interprete.

b) Escriba las ganancias para el Estado de la opción 2 como función de λ. Encuentre la expresión que determina el valor de λ que maximiza estas ganancias. ¿Por qué es distinto a lo anterior?

c) Dado un valor de λ, ¿qué opción le conviene al Estado?

d) Si primero se fija un valor de λ y luego se decide la opción, ¿qué deciden las empresas?

e) Si primero se debe decidir la opción y luego el TLC fija el valor de λ óptimo ¿qué decide cada empresa? ¿están de acuerdo?

3.13. Demostraciones Concavidad y Convexidad I

Demuestre que el conjunto: $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4\}$ es convexo.

3.14. Demostraciones Concavidad y Convexidad II

Mostrar que la función: $Q(K, L) = K^\alpha L^{1-\alpha}$; $0 < \alpha < 1$; $K, L \geq 0$ es cóncava, pero no estrictamente-cóncava

3.15. Demostraciones Concavidad y Convexidad III

Demostrar que la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ es estrictamente convexa.

a) Mediante gráfico

b) Mediante el Hessiano

c) Muestre que el plano tangente está siempre por debajo de la función, esto es, muestre que para esta función $f(\cdot)$ se cumple que $\forall \tilde{\mathbf{x}} = (x, y) \neq (x_0, y_0) = \mathbf{x}^0 \in D$, donde D es el dominio de la función, $f(\tilde{\mathbf{x}}) \geq f(\mathbf{x}^0) + \nabla f(\mathbf{x}^0) \times (\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^0)$. Explique intuitivamente por qué este resultado prueba que la función es estrictamente convexa.

3.16. Demostraciones Concavidad y Convexidad IV

Demostrar que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x^2 + 4 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

es **cuasi-convexa**, pero **no es convexa**.

3.17. Demostraciones Concavidad y Convexidad VI

a) Demostrar que $f(x) = e^{-x^2}$ no es una función cóncava, pero si es una función cuasi-cóncava.

b) Considerando que $f(x) = e^{-x^2}$ es una función cuasi-cóncava y que $F(u) = ln\ u$ es una función estrictamente creciente $\forall\ u$ entonces $F(f(x))$ es cuasi-cóncava.

c) Considerando que $f(x) = e^{-x^2}$ es una función cuasi-cóncava y que $F(u) = \frac{1}{u}$ es una función estrictamente decreciente $\forall\ u$ entonces $F(f(x))$ es cuasi-convexa.

3.18. Gestión Operacional

En el contexto de Gestión Operacional, en muchas ocasiones se necesita analizar el tiempo transcurrido hasta terminar una actividad, el que se puede medir usando un modelo llamado *geométrico*:

$$g(t_j, \theta) = \left(1 - \frac{1}{\theta}\right)^{t_j - 1} \frac{1}{\theta}; \qquad t_j \in \{1, 2, \ldots, +\infty\}$$

Aquí, t_j es el número de períodos transcurridos hasta completar la actividad j-ésima, y $\theta \geq 1$ es el tiempo medio de espera (medido como el número esperado de períodos para completar la actividad), el cual es desconocido.

Suponga que se tiene un conjunto de T actividades medidas independientemente, (o sea un conjunto $\{t_1, t_2, \ldots, t_T\}$ de duración de actividades individuales). Para poder estimar el valor desconocido de θ, se necesita determinar el valor de θ, llamado $\hat{\theta}$ que maximiza la función $L(\theta)$:

$$L(\theta) = g(t_1, \theta) \cdot g(t_2, \theta) \cdot \ldots \cdot g(t_T, \theta) = \prod_{j=1}^{T} g(t_j, \theta)$$

1. Desarrolle la multiplicación expresada por la función $L(\theta)$.

2. Plantee el problema de maximización correspondiente, y diferenciando, obtenga un punto crítico $\hat{\theta}$ para $L(\theta)$. **(Ayuda: Recuerde que el $\hat{\theta}$ que maximiza la función $L(\theta)$ es exactamente el mismo que maximiza la función $\ell(\theta) = ln[L(\theta)]$. Fíjese que en este caso maximizar $\ell(\theta)$ es mucho más fácil y rápido que maximizar $L(\theta)$)**.

3. Verifique que ese punto crítico $\hat{\theta}$ encontrado en el punto anterior sea un máximo local.

4. Suponga ahora que interesa obtener un estimador de la probabilidad (desconocida) $\pi = \frac{1}{\theta}$ de que en un período cualquiera se complete la actividad j. **En otras palabras**, se desea determinar el valor de π, llamado $\hat{\pi}$, que maximiza la función $V(\pi) = L\left(\frac{1}{\pi}\right) = p(t_1, \pi) \cdot p(t_2, \pi) \cdot \ldots \cdot p(t_T, \pi) = \prod_{j=1}^{T} p(t_j, \pi)$, donde p es la función $p(t_j, \pi) = g\left(t_j, \frac{1}{\pi}\right) = (1 - \pi)^{t_j - 1}\pi$; $\pi \in [0, 1]$, $t_j \in \{1, 2, \ldots, +\infty\}$. Obtenga ese $\hat{\pi}$ que maximiza la función $V(\pi)$, y verifique que es un máximo.

3.19. Monopsonista discriminador

(Esta pregunta está basada en el ejemplo 2 capítulo 16.7 de Sydsaeter et al.)

Una empresa contrata dos tipos de trabajo distintos L_1 y L_2. Esta empresa usa trabajo para producir un único bien, según la función de producción:

$$Q(L_1, L_2) = L_1 + L_2$$

Los trabajadores de cada tipo reciben su salario w_i $(i = 1, 2)$ según las siguientes curvas de oferta de trabajo.

$$w_1 = a_1 + L_1$$
$$w_2 = a_2 + L_2$$

Donde $a_1, a_2 > 0$. Suponga que la empresa vende el bien a un precio p. Al respecto:

a) Escriba la función de beneficios de esta empresa.

b) Escriba formalmente el problema de maximización de la firma.

c) Determine si el problema tiene solución única.

d) Encuentre las cantidades óptimas de L_1 y L_2 que resuelven el problema.

e) Encuentre los salarios w_1 y w_2 que paga la empresa en el punto óptimo.

f) ¿De qué parámetro(s) depende quién gana mayor salario? Interprete este(os) parámetro(s) y dé un ejemplo

   Suponga ahora que la empresa no puede discriminar trabajadores, sino que hay una única oferta de trabajo

$$w = 2a + 2L$$

   Y la función de producción es solo $Q(L) = 2L$.

g) Encuentre la cantidad óptima de L que resuelve el problema de la firma.

h) Compare las ganancias de la firma en ambas situaciones. ¿Cuál es mayor? Interprete

i) Compare la suma de las ganancias de ambos actores (empresa y trabajadores) en ambos casos. ¿En qué circunstancia son iguales? Interprete qué significa que sean iguales en ambos casos.

3.20. Monopolista discriminador con bienes sustitutos y complementos

(Esta pregunta está basada en ejercicio 2 del capítulo 11.6 de Chiang.)

Suponga que un monopolio produce dos bienes: 1 y 2. Estos bienes tienen funciones de demanda dadas por:

$$Q_1 = a - 2P_1 + P_2$$
$$Q_2 = b + 2P_1 - P_2$$

Donde $a, b > 0$ y son parámetros del problema. El monopolio debe decidir cuánto producir de cada bien para maximizar sus utilidades. Sus costos están dados por:

$$C(Q_1, Q_2) = 2Q_1^2 + Q_1 Q_2 + 2Q_2^2$$

Responda la siguientes preguntas:

a) Determine si los bienes 1 y 2 son sustitutos o complementos. Explique sus resultados.

b) Encuentre los ingresos de la empresa como función de Q_1 y Q_2.

c) Escriba la función de utilidades de la empresa y escriba formalmente el problema de optimización.

d) Determine si el problema tiene solución única.

e) Resuelva el problema cuando $a = b = 120$.

f) ¿Cuánto cambian las cantidades óptimas de Q_1 y Q_2 cuando cambia b, cuando $b = 120$? Interprete.

g) Resuelva el mismo problema pero cuando los bienes son complementos, es decir los precios afectan de manera negativa al otro bien (cambie los “+” por “-“ en las demandas).

3.21. Maximización de ganancia y uso de factores

Una empresa competitiva produce utilizando una tecnología descrita mediante la siguiente función de producción:

$$f(L, K) = L^{1/3}K^{1/3}$$

La empresa paga un precio w por cada unidad de L y precio r por cada unidad de K, y vende cada unidad de producto al precio p. El objetivo de la empresa es maximizar la ganancia.

1. (4 puntos) Verifique si la función es homogénea (indicando en qué grado en caso afirmativo) y obtenga la tasa marginal de sustitución TMS_{LK}.
2. (7 puntos) Plantee el problema de optimización y verifique si se cumple alguna condición de suficiencia que permita anticipar que el punto crítico será un máximo local, máximo global, o máximo global único. Fundamente su respuesta.
3. (10 puntos) Encuentre el nivel de L y K óptimo para cada vector de precios (w, r, p).
4. (6 puntos) Suponga que aumenta p (manteniendo todo lo demás constante), ¿por qué cree usted que aumentan $L^*(w, r, p)$ y $K^*(w, r, p)$? ¿y por qué $L^*(w, r, p)/K^*(w, r, p)$ se mantiene constante? Relacione con su respuesta a la pregunta 1.
5. (8 puntos) $L^*(w, r, p)$ es la demanda por trabajo. Obtenga la elasticidad de esta demanda respecto del precio del trabajo, w. Si w aumenta en un 1 %, ¿cuánto cambia la cantidad contratada de trabajo?

3.22. Pregunta Corta

Considera la siguiente función:

$$f(x, y) = (x - 2)e^{(x^2-x)}e^{y^2}$$

1. Encuentre el (los) punto(s) crítico(s) de $f(x, y)$.
2. Clasifique los puntos obtenidos en máximos/mínimos locales/globales o puntos sillas según corresponda.

3.23. Pregunta Larga

Una empresa tiene disponible varios proyectos, unos de plazo más corto y otros de plazo más largo. Además, la empresa puede elegir cuanto esfuerzo $y \in \mathbb{R}$ poner en administrar el proyecto que elige. Cada proyecto es representado por una variable $x \in \mathbb{R}$, y el VPN (valor presente neto) del proyecto x es una función de x e y y es dado por:

$$VPN = f(x, y) = \frac{x + y}{1 + r} + \frac{100 - x^2 + y}{(1 + r)^2}$$

donde $r > 0$ es la tasa de descuento (que está dada), y los numeradores de cada fracción representan los flujos de caja de un proyecto x en fechas 1 y 2, para un dado nivel de esfuerzo y. Es decir, proyectos con x más alto son proyectos de corto plazo, pues pagan un dividendo mayor en el período 1 y un dividendo menor en el período 2. De la misma manera, cuanto mayor la variable esfuerzo (y), mayor los flujos de caja del proyecto en las dos fechas. Sin embargo, el esfuerzo involucra un costo de utilidad dado por la siguiente función:

$$c(y) = 2y^2$$

El problema de la empresa es elegir x e y para maximizar el VPN neto del costo del esfuerzo, es decir, la empresa maximiza la siguiente función:

$$h(x,y) = \frac{x+y}{1+r} + \frac{100 - x^2 + y}{(1+r)^2} - 2y^2$$

1. La función $h(x,y)$ es estrictamente cóncava o estrictamente convexa? Justifique su respuesta evaluando los menores principales dominantes de la matriz hessiana.
2. Encuentre el (los) punto(s) crítico(s) de la función $h(x,y)$.
3. ¿Podemos garantizar que el punto crítico que encontraste en el ítem anterior es un máximo global? Justifique su respuesta.
4. ¿Qué pasa con el plazo (x) óptimo de la empresa cuando r aumenta? Intérprete.

3.24. El Problema del Emprendedor

Juan tiene un trabajo asalariado flexible: puede elegir la cantidad Z de horas a trabajar cada día y recibe un pago wZ. Además él tiene una Pyme a la que dedica parte de su tiempo: si le dedica L horas de trabajo al día y arrienda K unidades de maquinarias su Pyme puede producir

$$f(L,K) = 2(\sqrt{L} + \sqrt{K})$$

unidades que se venden a un precio p. Como debe pagar r por cada unidad de maquinaria, gasta rK.

En total Juan dispone de T horas para el trabajo al día, por lo que $L + Z = T$.

1. Suponga que el objetivo de Juan es maximizar su ingreso neto total (incluyendo ingreso por su trabajo formal y por su trabajo en la Pyme, neto de gasto en arriendo de maquinarias). Escriba el problema de optimización de Juan e indique si puede asegurar que tendrá una solución única.
2. Encuentre la cantidad óptima de trabajo y maquinarias que Juan usa en la Pyme, $L(w,r,p)$ y $K(w,r,p)$. Muestre que Juan dedica menos tiempo de trabajo a su Pyme si w es más alto.
3. Explique por qué, aún cuando Juan no tenga que "pagar" por las unidades de L que usa trabajando en su Pyme, ellas sí tienen un costo de w por unidad (costo alternativo). Muestre en qué parte de sus respuestas a las preguntas anteriores se evidencia este costo.
4. Verifique si la demanda por maquinarias $K(w,r,p)$ es homogénea. ¿Cómo cambia entonces la decisión de contratación de K si cambian todos los precios en la misma proporción?, ¿cree usted que este resultado es válido solo para algunas funciones de producción particulares o que se cumple siempre? Justifique su respuesta. (**Ayuda:** Puede usar la condición de primer orden para justificar).

3.25. Minimización de Costos en Hiperinflación

F.Y. Edgeworth (1888) propuso un marco analítico para modelar la demanda de billetes frente a una inflación muy alta, que fue formalizado por Ken Arrow, Ted Harris y Jacob Marschak (1951).

En un banco funcionando en un contexto de hiperinflación, los billetes son necesarios para poder realizar transacciones, pero aquellos billetes que no se utilicen al final del día se deprecian por efecto inflacionario. Entonces, un banquero debe decidir los saldos de circulante, B, que debe mantener en stock en caja para poder equilibrar el efecto de (1) los beneficios perdidos por no poder realizar todas las transacciones que se quisiera llevar a cabo que se imposibilitan cuando se acaban los billetes, ψ, con (2) el costo de tener billetes sobrantes al final del día que pierden su valor por efecto inflación, π.

La demanda por billetes para transacciones bancarias es definida por la variable incierta $Y \in [0, D]$, tal que $\int_0^D g(Y)dY = 1$, donde $g(Y) \geq 0 \ \forall \ Y \in [0, D]$.

De esa forma, el **costo** de tener B billetes para el banco viene dado por la función $C(B)$:

$$C(B) = \gamma \cdot B + \pi \int_0^B (B - Y) \cdot g(Y)dY + \psi \int_B^D (Y - B) \cdot g(Y)dY$$

donde,

$$\psi > \gamma > 0, \pi > 0, D > 0$$

son parámetros positivos conocidos. Se pide:

a) Verifique que
$$dC/dB = \gamma + \pi \int_0^B g(Y)dY - \psi \int_B^D g(Y)dY$$

b) Verifique que $d^2C/dB^2 = (\psi + \pi) \cdot g(B)$. (**Ayuda**: Fíjese que $\int_0^B g(Y)dY + \int_B^D g(Y)dY = \int_0^D g(Y)dY$)

c) Determine la concavidad o convexidad de la función $C(B)$.

d) Sea $G(B^*) = \int_0^{B^*} g(Y)\, dY$, donde B^* es el mínimo de la función $C(B)$. Use las condiciones de primer orden para encontrar $G(B^*)$, que se interpreta como la probabilidad de que la demanda por billetes Y no supere a B^*, y que por ende, la cantidad de billetes disponibles alcance para cubrir la demanda. Use esa ecuación para encontrar el valor de $G(B^*)$ cuando B^* es el óptimo.

3.26. Minimizando costos de transporte

Una fábrica de chocolates tienes dos nuevos clientes y debe decidir donde instalar su nueva planta que tiene cómo único objetivo producir chocolates para estos dos nuevos clientes. La localización de los clientes y de la nueva planta son representadas por vectores $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. El primer cliente está localizado en el punto $(2, 2)$, mientras el segundo cliente está localizado en el punto $(-2, -2)$. El gasto de transporte por cada unidad de chocolate llevada de un punto $A = (x_0, y_0)$ a un punto $B = (x_1, y_1)$ es dado por:

$$g(A, B) = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2$$

En cada mes, la fábrica de chocolates vende 10 unidades de chocolates al primer cliente y 20 unidades al segundo cliente, por lo que debe pagar el transporte de llevar estos chocolates desde la nueva planta a cada cliente. La empresa elige una localización (x_P, y_P) para instalar su nueva planta de manera a minimizar su gasto mensual en transporte.

1. (7.5 puntos) Escriba la función objetivo de la empresa.
2. (7.5 puntos) ¿La función objetivo es convexa? Justifique.
3. (7.5 puntos) Encuentre él (los) punto(s) (x_P, y_P) que satisfacen las condiciones de primer orden del problema de la fábrica de chocolates.
4. (7.5 puntos) Las condiciones de primer orden son suficientes para un mínimo global? Justifique.

3.27. Cuasi-Concavidad y Cuasi-Convexidad I

Sea $\theta : \mathbb{R}^2_{++} \to \mathbb{R}$ tal que $\theta(x, y) = ye^{-x}$. Verifique si para este dominio la función θ es quasicóncava utilizando la condición del Hessiano Orlado.

3.28. Elasticidades y Concavidad

Considere la siguiente modelo de función de producción (J. W. Kendricks y R. Sato) en una cierta empresa en términos del capital K invertido y el trabajo L, según la fórmula

$$P = f(K, L) = \frac{A_0 K L}{(aL^c + bK^c)^{1/c}}$$

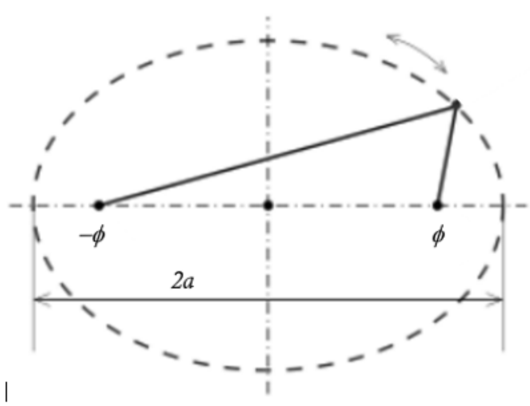
donde A_0, a, b y c son constantes positivas. Las derivadas parciales de P son

$$\frac{\partial P}{\partial K} = \frac{A_0 a L^{c+1}}{(aL^c + bK^c)^{1+1/c}}, \qquad \frac{\partial P}{\partial L} = \frac{A_0 b K^{c+1}}{(aL^c + bK^c)^{1+1/c}}$$

1. Calcule las elasticidades parciales entre la producción y el capital $\varepsilon_{P,K}$, y entre la producción y el trabajo $\varepsilon_{P,L}$.
2. Encuentre una expresión para la tasa marginal de sustitución entre capital y trabajo, $TMS_{K,L}$.
3. Encontrar la elasticidad de sustitución entre capital y trabajo, $\sigma_{K,L}$. Luego interprete esta cantidad para $K = 10$, $L = 10$, $a = b = 1$ y $c = 2$.
4. ¿La función $f(K, L)$ es cóncava? Justifique su respuesta.

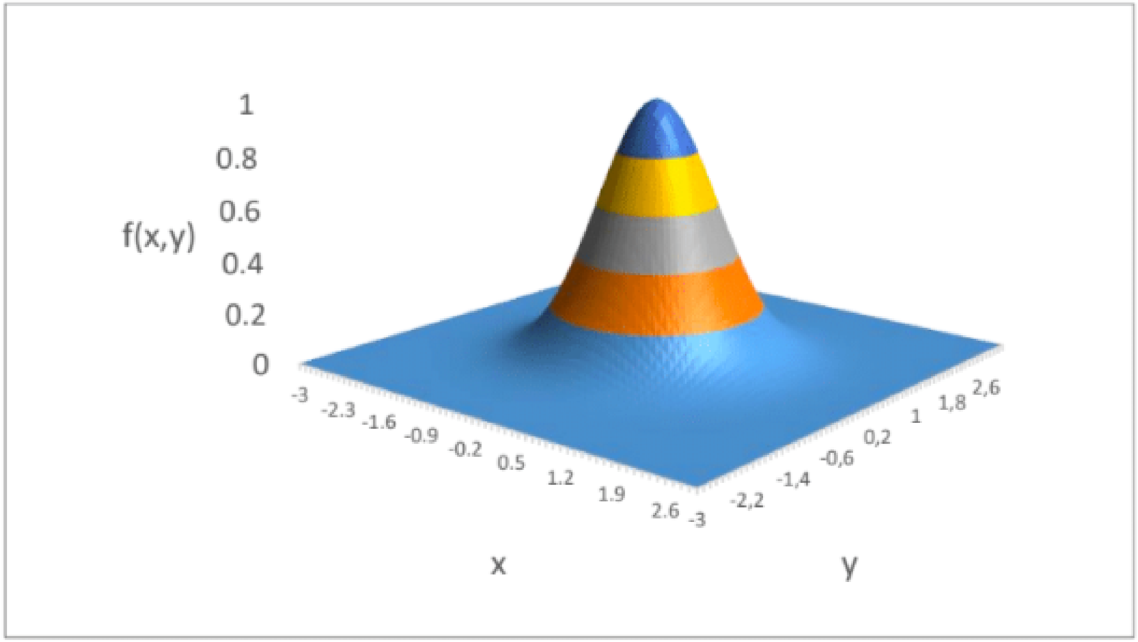
3.29. Cuasi-Concavidad y Cuasi-Convexidad II

Considere la siguiente función $g(z_1, z_2) = \sqrt{(z_1 + \phi)^2 + z_2^2} + \sqrt{(z_1 - \phi)^2 + z_2^2}$, $\phi \in \mathbb{R}$. Verique si la función $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es quasi-convexa.



3.30. Cuasi-Concavidad y Cuasi-Convexidad III

Demuestre que la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$ y cuya gráfica es la de la figura, **NO** es una función cóncava, pero **SÍ** es una función cuasi-cóncava.



3.31. Desafío: Problema del Monopolista

Considere un monopolista productor de *bisnaca* que enfrenta una demanda de mercado inversa definida por:

$$p^d(q) = Aq^{-\alpha}$$

tal que $A > 0$ y $0 < \alpha < 1$ son parámetros que resumen información agregada sobre preferencias por *bisnaca*. Suponga que su función de costo total está definida por:

$$C^*(q) = F + cq$$

tal que $F, c > 0$ y F representa un costo fijo hundido.

a) Determine la elasticidad precio de la demanda en el punto arbitrario (q_0, p_0).

b) Plantee el problema de optimización que resuelve el monopolista si no está regulado, Explicite las condiciones de suficiencia para un óptimo de corto plazo y encuéntrelo. Verifique que es óptimo.

c) Llame q_m al nivel de producción óptimo encontrado en el inciso anterior y defina $p_m := p^d(q_m)$. Si desde este punto el precio subiera un $1,5\,\%$, ¿cuál sería el cambio porcentual en la cantidad demandada? ¿Es precio elástica la demanda en este punto? ¿Cuál es la intuición económica?

3.32. Preguntas Cortas

Responda las siguientes preguntas.

a) Encuentre los puntos críticos de las siguientes funciones

   i) $z = -2x^2 - y^2 + xy + 2x + 3y$

   ii) $z = \ln x + 2\ln y - \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)$

b) Considere la función lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x_1, x_2) = c_1x_1 + c_2x_2$. Demuestre formalmente que f es cóncava y convexa. Puede utilizar cualquiera de las caracterizaciones de concavidad/convexidad de clases.

3.33. Administración de un Estadio

La administradora de un estadio de fútbol ha permitido la venta de completos y bebidas en su estadio. Como contrapartida por la licencia, los vendedores de completos y bebidas pagan una comisión a la administración del estadio por cada unidad de bebida o completo vendida. Su problema es elegir la comisión cobrada para cada uno de los bienes que maximiza el ingreso de la administración del estadio. En lo que sigue detallamos el problema de la administradora.

Sean τ_C y τ_B los valores cobrados por cada unidad vendida de completos y bebidas, respectivamente. Las cantidades vendidas de completos y bebidas son denotadas por q_C y q_B, respectivamente, y los respectivos precios son denotados por p_C y p_B. Este es un mercado competitivo (hay muchos vendedores en el estadio), y el precio de cada bien es igual al costo marginal de producción más el costo marginal de la comisión pagada a la administración. El costo marginal de producción de los dos bienes es lo mismo e igual a 5, así que $p_C = \tau_C + 5$ y $p_B = \tau_B + 5$. La demanda total por completos es dada por $q_C = e^{-3p_C}$ y la demanda total por bebidas es dada por $q_B = e^{-2p_B}$. (Obs: e representa el número de Euler, i.e., $e = 2,71828...$).

El problema de la administradora es elegir τ_C y τ_B de manera de maximizar los ingresos de la administración del estadio. Suponga por simplicidad que los únicos ingresos que recibe el estadio corresponden a los obtenidos por estas comisiones por las ventas de completos y bebidas.

1. Calcule las elasticidades precio de las demandas por completos y bebidas, esto es, ε_{q_C,p_C} y ε_{q_B,p_B}.
2. Escriba la función objetivo que la administración del estadio maximiza **como función solamente** de τ_C y τ_B.
3. Encuentre el punto crítico (estacionario) de la función objetivo de la administración del estadio.
4. Muestre que el punto crítico que encontró es un punto de máximo local.
5. Considere ahora que existe una legislación que impone un límite de 0,6 pesos en la comisión por unidad vendida. O sea, la administradora tiene que elegir τ_C y τ_B de tal manera que $0 \leq \tau_C \leq 0{,}6$ y $0 \leq \tau_B \leq 0{,}6$. Entonces, uno puede pensar en el dominio de la función objetivo como $D = \{(\tau_C, \tau_B) : 0 \leq \tau_C \leq 0{,}6 \text{ y } 0 \leq \tau_B \leq 0{,}6\}$. Muestre que el punto critico que encontraste en el ítem 2 es un punto de máximo global cuando el dominio de la función objetivo es D.

3.34. Desafío: Optimización con Teorema de Leibniz

Condorito es dueño de la única tienda de **Plops** de Pelotillehue. Para poder satisfacer la demanda por Plops, Condorito enfrenta un problema fundamental – decidir cuantos Plops traer desde Cumpeo. Los Plops son perecibles, y los que no venda un día ya no sirven para el siguiente y se botan a la basura.

Pepe Cortisona (fabricante de Plops en Cumpeo, que queda a seis horas de viaje, y quien provee a Condorito) entrega todas las mañanas Plops a Condorito a un costo **\$**c por Plop. Condorito cobra en Pelotillehue un precio igual a **\$**p por Plop ($p > c$), y por contrato con el fabricante, Condorito no puede ofrecer un descuento al final del día para vender los Plops sobrantes y recuperar los costos.

Condorito enfrenta un dilema: Si compra pocos Plops, y llegan más clientes que los Plops que tenga en la tienda, Condorito deja de ganar dinero. Si, por el contrario, compra demasiados Plops, y no llegan tantos clientes, Condorito deberá botar a la basura todos los Plops sobrantes, perdiendo dinero también.

El número de unidades demandadas (**D**) que Condorito recibirá en un día es incierto, pero se sabe que la función de demanda de los clientes sigue un comportamiento descrito por las funciones $f(\cdot)$ y $F(\cdot)$:

$$f(D) = \frac{1}{T}$$

(función de llegada de las unidades demandadas, constante para cualquier valor de D)

$$F(D) = \int_0^D f(y)\ dy = \int_0^D \left(\frac{1}{T}\right) dy = \frac{D}{T}$$

(función acumulada de llegada de unidades demandadas totales en un día)

Donde el parámetro T es la cantidad máxima posible de Plops a demandarse en un día. Suponga que los Plops son **perfectamente divisibles** (por ejemplo, es posible que en un día se demanden 22.41 Plops, o que Condorito compre 17.97 Plops a Cortisona).

Usted debe ayudar a Condorito a determinar cuántos Plops comprar para cada día
Para organizar la forma de pensar el problema, piense que los costos para Condorito de comprar q Plops consiste en la suma del costo de "tener Plops de sobra" (TPS) y el costo de "quedarse corto de Plops" (QCP):

$$TPS(q) = c \times q - c \times \left\{ \int_0^q y f(y)\ dy - q(1 - F(q)) \right\} = c \times q \times F(q) - c \int_0^q y f(y)\ dy$$

Así, $TPS(q)$ es el promedio del costo de tener que adquirir q unidades, menos el costo recuperado de lo que sí se alcanza a vender.

$$QCP(q) = (p - c) \times \left\{ \int_q^T y f(y)\ dy - q \times (1 - F(q)) \right\}$$

$QCP(q)$ es el promedio del costo de oportunidad de todas las unidades que fueron demandadas por clientes, y que no se pudieron vender por acabarse los inventarios de plops.

1. Plantee formalmente el problema de minimización que diariamente enfrenta Condorito. Identifique claramente la función objetivo, la(s) variable(s) de decisión de Condorito, y el dominio relevante de la función.

2. Encuentre la cantidad óptima de Plops que Condorito debe comprar cada día. Discuta además de qué forma usted puede garantizar que el punto encontrado sea, en efecto, óptimo para el objetivo de Condorito.

3.35. Empresa con múltiples productos

Una empresa vende dos tipos de cereales distintos, A y B. Sea p_A el precio del cereal A y p_B el precio del cereal B. La demanda por cereales A en función de los precios está dada por

$$q_A(p_A, p_B) = 21 - 2p_A + p_B,$$

mientras que la demanda por cereales B está dada por

$$q_B(p_A, p_B) = 14 - 4p_B + p_A.$$

El costo de producción por cada unidad de A es \$2 mientras que el costo de producción por cada unidad de B es \$1.

En esta situación, las ganancias de la empresa están dadas por

$$\pi(p_A, p_B) = (21 - 2p_A + p_B)(p_A - 2) + (14 - 4p_B + p_A)(p_B - 1).$$

a) ¿La función de ganancias de la empresa es cóncava o convexa? Justifique su respuesta.

b) Encuentre los puntos críticos para el problema de maximización de ganancias de la empresa, es decir, encuentre los precios que satisfagan las condiciones de primer orden. Clasifique estos puntos críticos de acuerdo a si son máximos, mínimos o puntos silla.

c) Calcule las ganancias máximas de la empresa.

d) Ahora suponga que el precio de uno de los insumos utilizados para la producción del cereal A aumenta, por lo que el costo de producción del cereal A sube de \$2 a \$4. Calcule los puntos críticos para este nuevo problema.

e) ¿Cómo afecta el aumento en el costo de producción de A a las cantidades producidas y a las ganancias? Justifique su respuesta.

Capítulo 4

Optimización con Restricciones de Igualdad

4.1. Introducción al Lagrangeano

Considere un individuo que vive en Tecnologilandia que tiene preferencias del tipo:

$$U(X,Y) = 2X^{\frac{3}{4}}Y^{\frac{1}{4}}$$

En donde X son unidades de automóviles e Y son unidades de televisores. Además usted sabe que el individuo cuenta como \$100 para comprar automóviles y/o televisores, los precios de los automóviles son \$20 y el precio de los televisores es \$5. Asuma que el individuo gastara todo su presupuesto.

1. Calcule las utilidades marginales de cada uno de los bienes.
2. Plantee el problema de maximización del individuo, identificando cada una de las variables.
3. Encuentre el consumo óptimo de automóviles y televisores del individuo. *Ayuda: Piense que uno de los bienes depende del ingreso del individuo y del consumo del otro bien.*
4. Compruebe que la(s) solución(es) es(son) un máximo.

4.2. Optimización con Lagrange I

Resuelva los siguientes problemas, determine si los puntos encontrados son efectivamente mínimos o máximos locales o globales.

a) $\max\ y = 2x_1 + 3x_2 \quad$ sujeto a: $\quad 2x_1^2 + 5x_2^2 = 10$

b) $\max\ y = (x_1+2)(x_2+1) \quad$ sujeto a: $\quad 2x_1 + x_2 = 10$

c) $\max\ y = x_1^{0,25}x_2^{0,75} \quad$ sujeto a: $\quad 2x_1 + 4x_2 = 100$

4.3. Optimización con Lagrange II

Encuentra y clasifica los valores extremos de las siguientes funciones sujeto a restricciones de igualdad

a) $f(x,y) = ax + y \quad$ sujeto a: $\quad a - \sqrt{x} - \sqrt{y} = 1 \quad$ *con* $a > 1$

b) $f(x,y) = x - 3y - xy \quad$ sujeto a: $\quad x + y = 6$

4.4. Interpretación del Multplicador y Condiciones de Suficiencia

Una empresa tiene un total de L trabajadores los cuáles se dividen en la producción de mesas y sillas. La cantidad total de trabajadores está fija. El orden de los lugares de trabajo en la fábrica implica que un trabajador solo puede participar en la fabricación de uno de estos productos. Entonces si llamamos l_1 a la cantidad de trabajadores que dedicados a producir mesas y l_2 a los que producen silla, se debe cumplir que $l_1 + l_2 = L$. Sabemos además que el precio de mercado de las mesas es p_m y el de las sillas es p_s.

Suponga que la función de producción de mesas está dada por $M = f(l_1)$ con $f' > 0$ y $f'' < 0$, mientras que la producción de sillas está dada por la función de producción $S = g(l_2)$ con $g' > 0$ y $g'' < 0$.

1. Relacione los precios con la asignación óptima de empleados.
2. Compruebe si las condiciones de Lagrange son suficientes para un óptimo global.
3. ¿Cómo interpretamos λ (multiplicador de Lagrange de la restricción) en este caso?
4. ¿Cambia su solución si en vez de maximizar el valor de la producción hubiésemos buscado maximizar las utilidades de la firma? Explique.

4.5. Multiplicador de Lagrange

Considere el siguiente problema de maximización:

$$f(x, y, z) = 4z - x^2 - y^2 - z^2$$

$$s.a : g(x, y, z) = z - xy = 0$$

1. Use el método de Lagrange para hallar condiciones necesarias para una solución del problema y halle todos los (x, y, z) que las verifican. Verifique si las condiciones suficientes para un óptimo se cumplen en estos puntos.

2. Ahora suponga que enfrenta la siguiente restricción: $g(x, y, z) = z - xy = c$. Compruebe que la derivada de la función de valor con respecto a c es igual al multiplicador de Lagrange.

4.6. Optimización Gráfica con Restricciones de Igualdad

Resuelva los siguientes problemas:

a) $\max\ x^2 + 12xy + y^2 \quad$ sujeto a: $\quad x^2 + y^2 = 4$

b) $\max\ x^2 + y^2 \quad$ sujeto a: $\quad \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

4.7. Análisis de sensibilidad problema de consumo

Considere el siguiente problema clásico de maximización de utilidad bajo una restricción presupuestaria,

$$\begin{array}{rl} \text{máx} & U(x, y, z) = xyz \\ \text{s.a.} & p_x x + p_y y + p_z z = I \end{array}$$

Donde x, y y z representan la cantidad de los bienes X, Y y Z; p_x, p_y y p_z representan los precios unitarios respectivamente (en pesos \$) e I equivale al ingreso o presupuesto, que debe utilizarse en su totalidad.

La solución óptima a este problema ha sido estudiada en varias ocasiones y corresponde a

$$x^* = \frac{I}{3p_x}\ , \quad y^* = \frac{I}{3p_y}\ , \quad z^* = \frac{I}{3p_z}$$

Responda las siguientes preguntas,

1. ¿Cuál es la expresión para el multiplicador de Lagrange λ^* de la restricción presupuestaria en este punto óptimo? ¿Cómo se intepreta este valor? (*Pista:* λ^* *satisface condiciones de primer orden*)

2. Utilizando el teorema de la envolvente, ¿cómo cambia aproximadamente la utilidad óptima U^* si el producto X sube en \$1 su precio unitario?

3. Como este es un problema de maximización, nos importa la concavidad de la función de utilidad, ¿es la función de utilidad cóncava? ¿Es cuasicóncava? Justifique.

4.8. Riesgo climático de un país

Un país tiene principalmente dos fuentes de energía, las plantas a carbón (C) y las plantas solares (S), y ambas plantas tienen como objetivo satisfacer las **necesidades energéticas básicas del país**. (Se usa C y S para denotar la cantidad utilizada de plantas de carbón y solares, respectivamente). Para cumplir este objetivo se deben necesariamente producir 20 unidades de energía (por hora). Se sabe que las plantas a carbón producen $2C$ unidades de energía en total (por hora), por otro lado, las plantas solares producen S unidades de energía en total (por hora).

Sin embargo, este país está muy preocupado por la contaminación que se genera en la producción de energía. La variable $R \in (0, \infty)$ es un factor que mide la preocupación del gobierno por temas ambientales. El gobierno de este país ha estimado que el **riesgo climático** que genera tener C plantas a carbón, es igual a $20RC^2$. A su vez, el riesgo climático que genera tener S plantas solares es igual a S^2.

El gobierno debe decidir cuantas plantas de carbón y solares utilizar, y está preocupado por **minimizar el riesgo climático, sujeto a suplir al país de sus necesidades energéticas básicas**.

Para C y S no considere soluciones con cantidades negativas. Además, suponga que **es factible** asignar una cantidad fraccionaria de plantas a cada tipo de energía.

1. Plantee el problema de optimización que enfrenta este país.

2. Muestre que este problema tiene solución.

3. Usando el método de Lagrange encuentre los candidatos a solución del problema cuando $R \neq 1$.

4. Analice cuánto debiese ser la preocupación del gobierno por temas ambientales R, para que no se produzca energía con plantas a carbón, es decir, solo se produzca energía en plantas solares.

4.9. Problema de Costos de una Empresa

Considere una empresa que se dedica al reparto de encomiendas a domicilio llamada “BLIX”, para ello, necesita capital físico que va a estar representado por vehículos de transporte (V) que tienen un costo unitario de \$10 para la empresa y Personal (T) que conduce estos vehículos y entrega los repartos que tienen un costo unitario de \$5 para la empresa. Suponga que la función de producción de repartos de BLIX esta representada de la siguiente forma:

$$Q = V^{\frac{1}{4}} T^{\frac{1}{2}}$$

Además suponga que la empresa enfrenta costos fijos de \$1000 por arriendo de bodegas donde guarda sus vehículos y las encomiendas.

1. Plantee el problema de minimización de costos que enfrenta la empresa.
2. Plantee la función lagrangiana y las condiciones de primer orden correspondientes.
3. Encuentre las cantidades de Vehículos (V) y Personal (T) que son candidatos a mínimo usando el método de Lagrange.
4. ¿Son las condiciones anteriores necesarias y suficientes para que V* y L* del ítem anterior sean los valores que minimizan el costo de BLIX?

4.10. Maximización de Utilidades en la Firma

Una empresa tiene una planta de producción de viseras y está interesada en encontrar la combinación óptima, en cuanto a lograr el menor costo de producción, de horas de trabajo y horas de capital. Suponga, por simplicidad, que la empresa paga un salario \$1 por cada unidad de trabajo y un precio \$1 por cada unidad de capital. Por contrato la empresa debe producir exactamente 1 visera (está recién empezando). La función de producción está dada por

$$Y = K^{1/2}L^{1/2},$$

donde Y es el número de viseras producidas, y K y L son las unidades de capital y trabajo respectivamente. Dado el salario y el precio del capital la función de costos es

$$C = K + L$$

donde C es el costo total de producción.
Se le pide

1. Plantee el Lagrangeano para este problema de optimización. Encuentre los puntos críticos (K^*, L^*) y los λ^* asociados.
2. Clasifique los puntos críticos como máximo o mínimo globales.
3. En equilibrio en un mercado competitivo esta empresa venderá su producción a un precio P igual al costo marginal de producción. Calcule el precio P.
4. Suponga ahora que usted gana un segundo contrato, entonces ahora debe producir 2 viseras. Usted se da cuenta que tiene dos opciones: aumentar la producción en su planta actual o hacer crecer la empresa comprando una segunda planta igual a la actual. De acuerdo a los resultados obtenidos, ¿qué le conviene hacer?

4.11. Localización óptima

Una tienda busca optimizar su localización definida en términos de las coordenadas (x_1, x_2), maximizando su ganancia definida como:

$$\pi(x_1, x_2) = 100 + 10x_1 + 4x_2 - x_1^2 - x_2^2$$

1. Verifique si se cumple alguna condición de suficiencia que permita anticipar que el punto crítico será un máximo local, máximo global, o máximo global único. Fundamente su respuesta.
2. Resuelva el problema de optimización e indique cuál es la ganancia máxima.
3. Suponga que cambia el plan regulador, y ahora restringe la ubicación de locales comerciales. El nuevo plan admite dos posibilidades: que la tienda se ubique en una coordenada con $x_1 = 10$, o que se ubique en una coordenada que satisface $x_1 + x_2 = 10$. Resuelva en cada caso utilizando el método de Lagrange e indique cuál de las dos opciones es más conveniente para la tienda.

4.12. Rendimiento y estudio

Un estudiante que debe prepararse para una prueba busca maximizar su *bienestar esperado*, f medido como su rendimiento total esperado en la prueba menos su esfuerzo. Esta prueba es de un ramo de aplicaciones, en el que su rendimiento esperado en nota, R, es (literalmente) el producto de su tiempo de estudio en los dos tópicos base del curso, P y Q. Su esfuerzo es una fracción de la suma de los cuadrados de los tiempos de estudio más el cuadrado de la nota esperada (pues hay que responder la prueba igual, aparte del tiempo de estudio, y eso requiere esfuerzo).

El estudiante busca elegir la cantidad óptima de tiempo de estudio P y Q y rendimiento esperado R para maximizar, así, el siguiente programa:

$$\max_{P,Q,R} \; f(P,Q,R) = R - 0{,}25 \cdot (P^2 + Q^2 + R^2)$$

sujeto a,

$$g(P,Q,R) = R - P \cdot Q = 0$$

Importante: En este ejercicio, P y Q son *variables centradas*. Eso quiere decir que los dominios de P y Q se encuentran entre -12 y $+12$ horas (para un total de 24 horas en un día), y un valor de, por ejemplo, $Q = -9$ implica estudiar $12 - 9 = 3$ horas esa materia.

1. Formule el problema de maximización de acuerdo al método de Lagrange.

2. Utilice el problema anteriormente planteado para escribir las condiciones necesarias de primer orden para solucionar el problema, y encuentre **todos** los puntos críticos (P,Q,R) y λ (o puntos estacionarios de $\mathcal{L}$) que cumplan esas condiciones. (**Nota**: NO es necesario que verifique la condición de calificación de restricciones)

3. (6 puntos) Encuentre aquellos puntos que son candidatos a máximo de entre los puntos críticos antes obtenidos. (**Nota**: NO se pide verificar si son un óptimo global o no)

4. Suponga ahora que el parámetro 0,25 que multiplica la función de esfuerzo original fuese reemplazado por un parámetro general, digamos, β, que puede tomar valores entre 0,1 y 0,25. Resuelva ahora, en vez de usar el Lagrangeano, reemplazando la función de restricción $R = PQ$ en el objetivo. ¿Cómo cambiaría el bienestar esperado óptimo a medida que β se mueve en dirección a 0,15? Interprete.

4.13. Teorema de la Envolvente I

Consideremos una empresa que fabrica tres artículos A, B y C en cantidades x, y, z respectivamente. La empresa fija los precios de sus artículos según unas funciones decrecientes en la cantidad producida del siguiente modo:

- Un artículo A vale $200 - 4x$ unidades monetarias (u. m.)
- Un artículo B vale $200 - 3y$ u. m.
- Un artículo C vale $100 - z$ u. m.

Además, la empresa ha calculado empíricamente que su costo en función de las cantidades producidas puede aproximarse por la función:

$$C(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2 + 100z + 100$$

En la actualidad, el nivel de producción total es de 58 unidades, pero la empresa considera que puede aumentarlo en una unidad sin incumplir sus restricciones técnicas.

1. Calcule los precios unitarios óptimos de cada uno de los tres tipos de artículos y el beneficio óptimo actual.

2. Razone si a la empresa le conviene aumentar su producción.

4.14. Teorema de la Envolvente II

Resolver los siguientes problemas de optimización con restricciones de igualdad:

a) $\text{máx}\, f(x,y) = -x^2 - y^2$ s.a. $ax + y = 1$ con parámetro $a > 0$. Si $f^*(a)$ denota la función valor mínimo de f, con el teorema de la envolvente determina $\frac{df^*}{da}$.

b) $\text{mín}\, f(x,y) = ax + by$ s.a. $lnx + y = 1$ con parámetros $a > 0; b > 0$. Si $f^*(a,b)$ denota la función valor mínimo de f, con el teorema de la envolvente determina: $\frac{\partial f^*}{\partial a}$ y $\frac{\partial f^*}{\partial b}$

c) $\text{mín}\, f(x,y) = x + ay$ s.a. $\ln(xy) = a$ con parámetro $a > 0$. Si $f^*(a)$ denota la función valor mínimo de f, con el teorema de la envolvente determina $\frac{df^*}{da}$.

4.15. Teorema de la Envolvente III

Sea $U(x,y)$ una función de utilidad y sean p_x, p_y los precios de los bienes x e y. Se desea maximizar la función de utilidad, dado un presupuesto "c", es decir:

$$\text{máx}\, U(x,y)$$

s.a:

$$p_x * x + p_y * y = c; \qquad px, py, c > 0$$

Donde x e y son las variables de decisión y los parámetros p_1, p_2, c son consideradas como variables exógenas. Asumiendo que U^* es la función valor: Probar que en el óptimo se cumplen las siguientes relaciones:

1. $\frac{\partial U^*}{\partial p_x} = -\lambda^* x^*$
2. $\frac{\partial U^*}{\partial p_y} = -\lambda^* y^*$
3. $\frac{\partial U^*}{\partial c} = \lambda^*$

4.16. Teorema de la Envolvente IV

Para el problema de optimizar la función

$$f(x,y) = ax^2 + y^2$$

sujeta a:

$$ax + y = 1, \qquad a > 0$$

Se pide,

1. Encuentre el mínimo global del problema de optimización.
2. Calcule la función de valor f^*.
3. Usando el teorema de la envolvente obtenga $\frac{df^*}{da}$. Interprete gráficamente el significado de esta derivada.
4. Derive la función de valor para obtener $\frac{df^*}{da}$ y compruebe que se cumple el teorema de la envolvente.

4.17. Monopolio con Discriminación de Precios

La fábrica de una firma monopólica se encuentra en la mitad del camino entre 2 cuidades. Los costos de producción en dicha fábrica son cuadráticos y están definidos por $C_{\text{prod}}(q) := \frac{q^2}{2}$. Por otro lado, el costo de transporte es 10 dólares por unidad a cada ciudad. Las demandas de las ciudades 1 y 2 están definidas por:

$$q_1(p_1) = 100 - \frac{p_1}{2}, \quad q_2(p_2) = 75 - \frac{p_2}{4}$$

1. Suponga que el monopolista sólo puede cobrar un único precio para ambas cuidades. Escriba el problema que resuelve el monopolista. Calcule el precio de venta, cuánto vende en cada cuidad y su utilidad.

2. Plantee y resuelva el problema de la firma si ahora puede discriminar geográficamente. Determine precios, cantidades y utilidad.

3. Suponga discriminación geográfica y que además la firma puede discriminar en primer grado en el segundo mercado. Escriba este nuevo problema de optimización y resuélvalo. ¿Aumenta la utilidad del monopolista con respecto al inciso anterior?

4.18. Lagrange

Considere el siguiente problema de maximización:

$$\begin{aligned} \max_{x,y} \quad & f(x,y) = -(x-1)^2 - (y-1)^2 \\ \text{s.a.} \quad & g(x,y) = x + y = I \end{aligned}$$

donde $I > 0$ es un parámetro. Se pide:

1. Encuentre un máximo global suponiendo que $I = 2$. Debes justificar de manera clara que condiciones estás utilizando para garantizar que un punto es un máximo global. Si necesitas usar que alguna función es cóncava en tu respuesta, debes mostrarlo verificando el signo de la matriz hessiana asociada a la función.

2. Repita los pasos del ítem anterior suponiendo que $I = 1$.

3. Denote por $f^*(I)$ la función valor de este problema. Compute $\frac{df^*}{dI}$ cuando $I = 2$ e $I = 1$. Interprete el signo de estas derivadas en cada caso.

4.19. Optimización Aplicado a Inversiones Financieras

Una persona puede invertir en tres instrumentos financieros. El primero es un depósito a plazo con poco retorno, de solo 1 %. El segundo es un fondo mutuo que retorna más (5 %), pero es un poco más riesgoso. El tercero es una acción en una *Start-up*, que es extremadamente riesgosa pero tiene el mayor retorno de las 3 opciones, 9 %. A la persona le han dicho que no debe poner todos los huevos en la misma canasta, por lo que el riesgo de invertir x en el depósito a plazo, y en el fondo mutuo y z en la acción es

$$x^2 + 2y^2 + 4z^2$$

La persona tiene \$1 que repartir entre las 3 inversiones y quiere obtener el mayor retorno posible, penalizando por su riesgo. En particular quiere resolver:

$$\begin{aligned} \max_{x,y,z \in [0,1]} \quad & x + 5y + 9z - \phi(x^2 + 2y^2 + 4z^2) \\ s.a. \quad & x + y + z = 1 \end{aligned}$$

donde $\phi \in (0, \infty)$ es el parámetro que controla cuánto le importa el riesgo a la persona. Responda:

1. Asumiendo que $\phi > 4$, resuelva el problema. Recuerde comprobar que su candidato es la solución.
2. ¿Qué pasa con la solución óptima cuando $\phi \to \infty$? Explique con palabras por qué ocurre esto.
3. Estime el cambio en el óptimo si la persona tuviera \$1,1. ¿Qué signo tiene? ¿Qué pasa cuando $\phi \to \infty$?
4. Estime el cambio en el óptimo cuando ϕ crece (no es necesario reemplazar).
5. Encuentre intuitivamente, o resolviendo el problema, la solución óptima cuando $\phi = 0$. Justifique.

4.20. Condiciones suficientes con distintos signos de λ^*

Considere el siguiente problema de maximización:

$$\max_{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2} \quad 20x_1 + 10x_2 - {x_1}^2 - {x_2}^2 - 25$$

sujeto a

$${x_1}^2 + {x_2}^2 = 5$$

a) Escriba el Lagrangeano y las condiciones de primer orden (CPO) del problema descrito.

b) Indique si las funciones f y g son cóncavas o convexas, donde $f(x_1,x_2) = 20x_1 + 10x_2 - {x_1}^2 - {x_2}^2 - 25$ y $g(x_1,x_2) = {x_1}^2 + {x_2}^2$. ¿Podría asegurar entonces que un punto crítico $\mathbf{x}^*$ será un máximo global del problema si $\lambda^* > 0$? Justifique su respuesta.

c) Muestre que no hay puntos factibles para los cuales el gradiente de g es nulo.

d) Encuentre los dos puntos críticos que satisfacen las CPO antes descritas. Verifique si son máximos o no, justificando su respuesta.

e) Suponga ahora que un cambio regulatorio exige que

$${x_1}^2 + {x_2}^2 = 500$$

Obtenga los nuevos puntos críticos.

f) Encuentre el nuevo máximo, e indique cómo puede estar seguro de que es un máximo global, justificando su respuesta.

4.21. ¿Minimizando Costos y Maximizando Utilidades?

Una empresa tiene una función de producción $F(K,L) = K^{1/2} + L^{1/2}$, donde K es la cantidad empleada de capital y L es la cantidad de trabajo. El precio de cada unidad de capital es r, mientras que el precio de cada unidad de trabajo es w. Para sus cálculos considere $r = 1$, $w = 3$.

a) Para un nivel de producción $Q \geq 0$ dado, encuentre el punto crítico para el siguiente problema de minimización de costo:

$$\min_{K,L} \quad rK + wL$$
$$\text{sujeto a} \quad F(K,L) = Q$$

b) Utilice las condiciones de segundo orden para mostrar que el punto crítico encontrado es efectivamente un mínimo global. Calcule $C(Q) = rK(Q) + wL(Q)$, el costo mínimo de producir Q unidades del producto final.

c) Ahora suponga que la demanda inversa de la empresa está dada por $P(Q) = 11 - 2Q$. En este caso la empresa va a maximizar

$$\max_{Q} \quad (11 - 2Q) \cdot Q - C(Q).$$

Muestre que el punto $Q^* = 2$ es la solución a este problema.

d) Usando su solución en la parte (a), calcule las cantidades óptimas de capital y trabajo que esta firma contrataría.

e) En la parte (c), la empresa elige directamente la cantidad producida dada la función de costo de producción $C(Q)$. Pero alternativamente la empresa podría elegir los insumos K y L que maximizan

$$\max_{K,L} \quad F(K,L) \cdot (11 - 2F(K,L)) - (rK + wL).$$

Muestre que las cantidades óptimas de K y L encontradas en esta parte son iguales a las encontradas en la parte (d).

4.22. Desafio: Tanques y Mantequilla

Suponga que una economía cuenta con 100 unidades de trabajo y puede producir con esta unidades tanques (x) o mantequilla (y). La producción de x tanques requiere de x^2 unidades de trabajo y la producción de y Kg. de mantequilla requiere de y^2 unidades de trabajo. Suponga que la sociedad pretende maximizar la función objetivo definida por:

$$F(x, y) = ax + by$$

tal que $a, b > 0$.

a) Determine la frontera de posibilidades de producción de esta economía.

b) Plantee y resuelva el problema de optimización mediante el método de Lagrange.

c) Interprete el rol de los parámetros a, b en la solución del problema. Analice la homogeneidad de $x^*(v)$ y $y^*(v)$ con respecto al vector de parámetros $v = (a, b)$.

4.23. Pregunta Conceptual de Optimización

Sean f, g funciones de dos variables definidas por

$$f(x, y) = 2x^3 - 3x^2, \qquad g(x, y) = (3 - x)^3 - y^2$$

Considere el siguiente problema de optimización:

$$\max \ f(x, y) \quad \text{sujeto a} \quad g(x, y) = 0$$

Asuma que el problema tiene un máximo global (de hecho tiene solución global pero usted no necesita probar que así es).

a) Determine el conjunto de puntos factibles (i.e., puntos que satisfacen la restricción) que violan la Condición de Calificación de Restricciones (CCR). Ayuda: recuerde que un punto viola la CCR si $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 0$ y $\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0$ en ese punto, y este punto satisface la restricción (es factible).

b) Determine los puntos críticos del langrangeano.

c) Encuentre el óptimo global de este problema.

Capítulo 5

Optimización con Restricciones de Desigualdad

5.1. Set Factible

Para los siguientes sets de restricciones determine el set de puntos factibles y grafíquelo. Determine si alguna de las restricciones es redundante.

1. $x_1^{0,5} x_2^{0,5} \geq 1$ y $x_1, x_2 \geq 0$
2. $x_1 \leq 2x_2$, $x_2 = 2 - |x_1|$ y $x_1 + x_2 \leq 3$
3. $x_1, x_2 \geq 0$, $x_2 \leq 2 - x_1^2$ y $x_2 \geq 1 - x_1^2/3$
4. $x_1 + x_2 \leq 1$ y $x_1^2 + x_2^2 \leq 2$
5. $x_2 = \ln(x_1)$, $x_1, x_2 \geq 0$ y $x_1 \leq k$, con $k > 0$
6. $x_2 \leq \ln(x_1)$, $x_1, x_2 \geq 0$ y $x_1 \leq k$, con $k > 0$

5.2. Optimización Gráfica con Desigualdad

Para los siguientes conjuntos de restricciones, determine y grafique dichos conjuntos. Encuentre gráficamente (o matemáticamente) el punto que maximiza la función $3x_1 + x_2$ en ese set.

1. $x_1 + x_2 \leq 3$, $x_1^2 \leq 4$
2. $x_2 \leq 4 - 4\,|x_1|$, $x_2^2 \leq 9$
3. $3x_1 + 2x_2$ sujeto a: $4x_1 + x_2 \leq 10$, $x_1, x_2 \geq 10$
4. $8x_1 + 2x_2$ sujeto a: $4x_1 + x_2 \leq 10$, $x_1, x_2 \geq 0$

5.3. Optimización con Restricción de Desigualdad

Resuelva el siguiente problema de optimización:

$$\max_{x,y} x^2 + 2y^2 - x$$

$$s.a : x^2 + y^2 \leq 1$$

1. Escriba la función lagrangeana y las condiciones de primer orden
2. Halle todos los pares (x,y) que verifican todas las condiciones necesarias.
3. Halle la solución al problema

5.4. Problema del consumidor

Un consumidor debe elegir cuánto consumir de helado y agua para maximizar su utilidad. Denotamos por x la cantidad consumida de helado y por y la cantidad consumida de agua. La función de utilidad del consumidor es dada por

$$u(x, y) = 2x + y$$

El precio de cada unidad de helado y de agua es igual a 1. Este consumidor no puede gastar más que 10 pesos en el consumo de estos dos bienes. Además, por una restricción médica, para cada unidad de helado consumida el consumidor debe consumir por lo menos 1 unidad de agua. Finalmente, no se puede consumir cantidades negativas de los dos bienes.

1. Plantee el problema de optimización del consumidor.
2. ¿Este problema tiene solución? Justifique.
3. Encuentre el (los) punto(s) que cumplen con $x > 0$ e $y > 0$ (simultáneamente) que satisfacen las condiciones de Kuhn-Tucker (debes escribir también los multiplicadores asociados).
4. ¿Cuál es la cantidad consumida en el óptimo? Justifique. (Ayuda: En el óptimo, se cumple $x > 0$ e $y > 0$, puedes usar esta información para tener que verificar menos casos).

5.5. Problema de minimización

Considere el siguiente problema de *minimización*,

$$\begin{array}{rl} \text{mín} & x^2 + y^2 + z^2 \\ \text{s.a.} & ay - x + z \geq b \end{array}$$

donde a y b son parámetros constantes y $b > 0$.

1. Escriba la función lagrangeana asociada a este problema.
2. Encuentre el (los) punto(s) que satisfaga(n) las condiciones necesarias de Kuhn-Tucker, junto con el multiplicador de Lagrange asociado a cada punto.

5.6. El metro de Doha

Para una consultoría internacional a usted le estan pidiendo analizar la cantidad óptima de viajes que el metro de Doha debiese hacer durante un día en el contexto del mundial de fútbol masculino de 2022. La demanda por viajes en metro depende del horario del día. Suponga que existen solo dos horarios en el día, el horario punta y el horario valle. Denote por x_p la cantidad de viajes en horario punta y por x_v la cantidad de viajes en horario valle, todo medido en miles de viajes (es decir, si $x_p = 2$ y $x_v = 1$, por ejemplo, quiere decir que se hacen 2 mil viajes en horario punta y mil viajes en horario valle). Las demandas por viajes de metro, en miles, para los distintos períodos del día están definidas de la siguiente manera:

$$p_p = 76 - 2x_p$$

$$p_v = 30 - x_v$$

Donde p_p representa el precio de mil viajes en metro en horario punta y p_v el precio de mil viajes en horario valle. El costo de operación pago por la empresa por cada mil viajes es de $12 (el costo es igual en ambos períodos del día). Es decir, el costo total de la empresa es dado por $12(x_p + x_v)$ y sus ingresos son iguales a $p_p x_p + p_v x_v$. Suponga que la capacidad actual (capacidad instalada) es de 12 trenes de metro, y cada tren puede hacer mil viajes en el horario punta y mil viajes en el horario valle (cada tren es usado en los dos horarios).

Asuma que la empresa elige la cantidad de viajes (en miles) que va a ofertar en cada horario del día (x_p y x_v) para maximizar sus beneficios (lucro) sujeto a las restricciones de capacidad que existen en cada uno de los períodos del día (pueden cumplirse con igualdad o no). Para simplificar, puedes suponer que se puede ofrecer cantidades no enteras de viaje (es decir, x_p y x_v pueden ser cualquier número real mayor o igual a cero que cumple con las demás restricciones del problema).

1. Plantee el problema de optimización que enfrenta la empresa.
2. ¿Las condiciones de Kuhn-Tucker son suficientes para un máximo global del problema? Justifique.
3. Encuentre la solución del problema. *(Ayuda: En el óptimo, $x_p > 0$ y $x_v > 0$, es decir, las restricciones de no-negatividad son inactivas.)*
4. Interprete los multiplicadores de Lagrange de las restricciones de capacidad. Si fuera posible agregar un tren adicional en solamente uno de los horarios, ¿en qué horario convendría agregar un tren?

5.7. Optimización con Restricciones de No Negatividad

Resuelva el siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} \max_{x,y} \quad & x^2 y^2 \\ \text{s.a: } & 2x + y \leq 2 \\ & x \geq 0,\ y \geq 0 \end{aligned}$$

1. Plantee el lagrangeano y las condiciones de KT
2. Halle todos los pares (x,y) que verifiquen las condiciones necesarias
3. Encuentre la solución al problema

5.8. Optimización con Restricciones de No Negatividad

Considere el siguiente problema de maximización:

$$\begin{aligned} \max_{x,y} \quad & 2x + y \\ \text{s.a.} \quad & x + y \leq 4 \\ & x \geq 0 \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

La condición de calificación de restricción siempre se cumple para este problema.

1. Son suficientes las condiciones de Kuhn-Tucker para un máximo global de este problema? Justifique de manera clara su respuesta, explique cuál de los resultados de suficiencia global presentados en clase ha usado.
2. Escriba las condiciones de Kuhn-Tucker del problema.
3. Encuentre la solución del problema.

5.9. Inclusión laboral

Considere el problema de una fundación que trabaja en la inclusión de personas en situación de discapacidad al mercado laboral. Para ello realiza dos programas complementarios: el programa 1 de preparación para el trabajo (con una dedicación de x_1 horas al día) y el programa 2 de capacitación (con x_2 horas al día).

Existen dos restricciones relevantes. La primera restricción es

$$x_1 + x_2 \leq T,$$

donde T es el tiempo total disponible de los participantes para estos dos programas (T es un dato, y puede tomar cualquier valor estrictamente mayor que 0 y menor o igual que 8). La segunda restricción es

$$1000x_1 + 2000x_2 \leq W,$$

donde W es el presupuesto (estrictamente positivo) de la fundación por cada participante.

El objetivo de la fundación es maximizar la probabilidad de incorporación al mercado laboral de sus participantes, que se puede escribir como:

$$f(x_1, x_2) = \frac{{x_1}^{1/4}{x_2}^{1/2}}{6}$$

(a) Escriba el lagrangeano y condiciones de Kuhn-Tucker agregando restricciones de no-negatividad de x_1 y x_2.

(b) Argumente por qué las restricciones de no-negatividad no estarán activas (no son relevantes) en este problema y reescriba el lagrangeano y condiciones de Kuhn-Tucker sin restricciones de no-negatividad. Fundamente su respuesta.

(c) ¿Puede asegurar que se obtendrá un máximo global único a partir de las condiciones de Kuhn-Tucker? Fundamente su respuesta.

(d) Resuelva el problema usando el método de Kuhn-Tucker, suponiendo que $T = 6$ y $W = 10{,}000$ (10 mil).

(e) ¿Qué sería mejor para aumentar la probabilidad de incorporación al mercado laboral, un aumento marginal en W o en T? Fundamente su respuesta. **Nota:** Recuerde que no puede usar calculadora, por lo que puede dejar su respuesta expresada, indicando de qué depende su conclusión.

5.10. KKT

Resuelva el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \max_{x_1, x_2} \quad & [-(x_1-4)^2 - (x_2-4)^2] \\ \text{sa. } & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1 + 3x_2 \leq 9 \end{aligned}$$

1. ¿Las condiciones de Kuhn-Tucker son suficientes para un máximo global de este problema?

2. Escriba las condiciones de Kuhn-Tucker del problema.
   Vamos a tener cuatro casos

3. Encuentre la solución del problema.

5.11. KKT

Considere el siguiente problema

$$\max_{x,y} f(x,y) = 2 - (x-1)^2 - e^{y^2}$$

$$s.a \quad x^2 + y^2 \leq a$$

1. Demuestre que $f(x,y)$ es cóncava.
2. Escribir las condiciones de KT para que la solución del problema.
3. Halle la única solución posible, que dependerá de a
4. Demuestre que la solución encontrada corresponde efectivamente al óptimo

5.12. KKT

Resuelva el siguiente problema

$$\max_{x,y} \; x + y \quad \text{sujeto a } x^2 + y^2 \leq 1$$
$$x \leq 0{,}8$$
$$y \leq 0{,}9$$

1. ¿Son suficientes las condiciones de Kuhn-Tucker para un máximo global de este problema? Justifique de manera clara su respuesta, explicando cual de los resultados de suficiencia global presentados en clases estas usando.
2. Escriba las condiciones de Kuhn-Tucker del problema.
3. Encuentre la solución del problema.

5.13. KKT

Considere el siguiente problema:

$$\max_{x,y} \; x^{0,5}y^{0,5} \quad \text{sujeto a } x + y \leq 6$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$

Asuma que se cumplen las condiciones para que las condiciones de KT nos den la solución al problema. (Si quiere puede cerciorarse que esto efectivamente se cumple.) Encuentre la solución del problema

5.14. KKT

Considere el siguiente problema de optimización

$$\max_{x,y} \; f(x,y) = 2x + 3y \quad \text{sujeto a } g(x,y) = x^2 + y^2 \leq 2$$

1. Muestre que se satisfacen las condiciones de suficiencia de KT.
2. Encuentre la solución del problema

5.15. KKT

$$\max_{x_1,x_2} \; f(x_1,x_2) = 4x_1 + 3x_2 \quad \text{sujeto a } g(x_1,x_2) = 2x_1 + x_2 \leq 10$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

1. Muestre que se satisfacen las condiciones de suficiencia de KT.
2. Encuentre la solución del problema

5.16. KKT

En este ejercicio los multiplicadores de Kuhn-Tucker están representados por λ. Considere el siguiente problema de optimización (P):

$$\begin{aligned} \max_{x\in\mathbb{R}} \quad & 2x^3 - 3x^2 \\ \text{s.t.} \quad & (3-x)^3 \geq 0 \end{aligned}$$

El problema (P) tiene solución (no necesitas demostrar esto).

1. Encuentre todos los pares (x,λ) que satisfacen las condiciones de Kuhn-Tucker para (P).
2. Note que la solución x^* de (P) es la misma que la solución del problema (Q) abajo:

   $$\begin{aligned} \max_{x\in\mathbb{R}} \quad & 2x^3 - 3x^2 \\ \text{s.t.} \quad & 3-x \geq 0 \end{aligned}$$

   por cuanto $(3-x)^3 \geq 0 \iff 3-x \geq 0$. Encuentre todos los pares (x,λ) que satisfacen las condiciones de Kuhn-Tucker para (Q).
3. Las condiciones de Kuhn-Tucker problema (Q) son necesarias para el óptimo de (Q)? Justifique brevemente.
4. Encuentre la solución de (P) y (Q) (recuérdense que los dos problemas tienen la misma solución).
5. Las condiciones de Kuhn-Tucker del problema (P) son necesarias para el óptimo de (P)? Justifique brevemente.

5.17. Aplicación de KKT: Marketing

La cerveza Tato ha realizado un análisis de mercado para entender como se posiciona en el mercado de cervezas entre los adultos jóvenes del país. Si bien tradicionalmente se posicionó como una cerveza con una imagen moderna pero arraigada en la costumbre local, cambios en el mercado han llevado a que pierda esta posición dentro de su mercado objetivo de adultos jóvenes. Los ejecutivos han decidido iniciar junto a usted un trabajo para reposicionar la cerveza en el mercado, buscando maximizar la demanda obtenida.

El mercado de la cerveza se puede modelar utilizando dos dimensiones de imagen: (i) cultura local versus cultura internacional y, (ii) cultura moderna versus cultura tradicional. En este marco, la posición de un producto o de los consumidores se puede graficar usando un plano y midiendo la variable (i) en el eje X y la variable (ii) en el eje Y. Así, la posición (0,0) representa la posición neutra, esto es que no se identifica claramente con ninguna característica específica.

El mercado se compone de tres segmentos:

- Progresivo (P): son consumidores que prefieren su cultura local pero que también se mueven con los últimos adelantos y productos disponibles. Se identifican con una posición $(xP, yP) = (4, 5)$ y representan el 60 % del mercado.
- Internacional (I): consumidores que buscan cosas relacionadas a otros países y no tienen una marca clara respecto de lo moderno versus lo tradicional. Su posición es $(x_I, y_I) = (-2, 0)$ y representan un 20 % del mercado.
- Conservadores (C): si bien no tienen una identificación clara entre lo local y lo internacional, son consumidores que tienen una clara asociación y preferencia por aspectos tradicionales en vez de la modernidad y lo novedoso. Ellos representan un 20 % del mercado y se posicionan en $(x_C, y_C) = (0, -5)$

El estudio posiciona actualmente a Tato en un punto $T_0 = (-1, 1)$ por lo que el trabajo debe definir un nuevo punto $T = (x_T, y_T)$. Las preferencias de las personas son tal que su demanda es máxima cuando la cerveza tiene exactamente las mismas características que los describen.

1. Muestre en un gráfico los puntos que describen cada uno de los grupos de consumidores y el actual posicionamiento de Tato
2. Suponga que la demanda en cada grupo j está dada por $D_j(x) = M - d(x)$ donde $d(x) = (x_T - x_j)^2 + (x_T - x_j)^2$ es la distancia (que corresponde al cuadrado de la distancia euclidiana) entre la posición del grupo j y la posición del producto $T = (x_T, y_T)$. Plantee el problema de optimización que permite determinar el reposicionamiento óptimo de Tato en este mercado
3. Encuentre el reposicionamiento óptimo de Tato en el mercado
4. Suponga que ahora agregamos una restricción al problema y decimos que el nuevo punto de Tato no puede estar a una distancia mayor a 5 respecto del punto original. Plantee el nuevo problema y muestre gráficamente el set de puntos donde usted podría ubicarse.

5.18. Aplicación de KKT: Monopolio

Una firma que es un monopolio en el mercado de tejos para jugar rayuela tiene dos plantas de producción. En la primera planta el costo total de producir q_1 tejos es q_1^2, mientras que en la planta 2 el costo total de producir q_2 tejos es $1{,}25q_2^2$. El precio de mercado por el total de tejos producidos está dado por la siguiente función de demanda (inversa)

$$p = 100 - (q_1 + q_2)$$

donde p es el precio de los tejos, y ya hemos impuesto el hecho que la cantidad total en el mercado es la suma de las producciones de ambas plantas.

Se pide,

1. Plantee y resuelva el problema de optimización que permite encontrar las cantidades q_1 y q_2 que maximizan las utilidades de la empresa
2. Suponga ahora que como ambas plantas ya están antiguas no pueden producir más de 12 unidades de tejos cada una. Plantee el problema de optimización con estas nuevas restricciones
3. Resuelva el problema de optimización con estas nuevas restricciones
4. Si le dieran la posibilidad de invertir y aumentar en una cantidad muy pequeña la capacidad máxima de una de las dos plantas, ¿cuál aumentaría?
5. Si usted pudiera invertir en aumentar la capacidad máxima de las plantas en hasta 10 unidades adicionales a repartir entre ambas, ¿cuál sería su plan de inversión óptimo?

5.19. Aplicación de KKT: Oferta Laboral

Considere un individuo que tiene preferencias del tipo:

$$U(C,L) = 2C^{\frac{1}{2}} - L$$

Este individuo debe decidir cuanto va a consumir C y cuanto va a trabajar L. El precio de todos los bienes de consumo dentro de esta economía es igual a \$2, en tanto que el salario por hora trabajada es igual a \$20. Además, usted sabe que el individuo enfrenta una restricción de tiempo, ya que el individuo tiene 16 horas al día que decidir repartir entre ocio (O) y trabajo.

1. Plantee las restricciones que enfrenta el individuo
2. Muestre gráficamente el set factible
3. Plantee el Lagrangeano y las condiciones de Kuhn-Tucker para este problema
4. Encuentre las cantidades óptimas de C*, L* y O*
5. Interprete en términos ecónomicos los multiplicadores de Lagrange del problema.
6. Muestre gráficamente como cambiaría la solución si aparte de obtener un ingreso por las horas trabajadas esta persona recibe además un ingreso de \$100 independiente de las horas que trabaje. Explique intuitivamente y muestre como cambia el set factible

5.20. Aplicación de KKT: Demanda de Factores

Una empresa requiere producir exactamente z unidades de su producto Y al menor costo posible. La producción se realiza usando capital K y trabajo L de acuerdo a la función de producción

$$Y = 2\sqrt{L} + 2\sqrt{K+1}$$

En el mercado cada unidad de K se puede contratar a un precio r por unidad, y cada trabajador (cada trabajador es una unidad de L en la función de producción) recibe un salario w, con $w, r > 0$ (Restricciones de no-negatividad). Asuma que $z > 2$.

Ayuda: La solución puede no ser interior.

1. Plantee el problema de optimización de esta firma. ¿Qué lógica hay detrás de decir que $z > 2$?
2. Encuentre las cantidades óptimas de capital y trabajo como función de z, w y r
3. Calcule el costo marginal de producir una unidad extra de Y.

5.21. Aplicación de KKT: Bienestar Social

(Ejercicio obtenido del libro de Dixit, *Optimization in Economic Theory.*)

Suponga que existe una cantidad fija Y de un bien a disposición de la sociedad. Existen dos consumidores que sienten envidia mutua. Si el consumidor 1 obtiene Y_1 y el consumidor obtiene Y_2 sus utilidades son:

$$U_1(Y_1) := Y_1 - kY_2^2, \quad U_2(Y_2) := Y_2 - kY_1^2$$

tal que $k > 0$. Si $Y \leq 1/k$, maximice el bienestar social $W(Y_1, Y_2) = U_1(Y_1) + U_2(Y_2)$.

5.22. Aplicación KKT: Asignando patrocinios con presupuesto limitado

Sadida Sports Design es un fabricante europeo de calzado deportivo para básquetbol y fútbol, que tiene que decidir la mejor forma de gastar los recursos destinados a publicidad. Cada uno de los equipos de fútbol patrocinados requiere 120 pares de zapatos por patrocinio. Cada equipo de básquetbol requiere 30 pares de zapatos por patrocinio. Cada equipo de fútbol recibe \$500.000 por concepto de patrocinio para calzado, y cada equipo de básquetbol reciben \$1.000.000. El presupuesto de Sadida para promociones asciende a \$25.000.000.

Sadida dispone de una provisión limitada (3000 cc) de *aminoplis*, un compuesto raro y costoso que se utiliza en la fabricación del calzado atlético de promoción. Cada par de zapatos para básquetbol requiere 3 cc de aminoplis y cada par de zapatos de fútbol requiere 1 cc de aminoplis. Una regulación de la FIFA impide que Sadida pueda auspiciar a más de 15 equipos de fútbol.

El objetivo de Sadida es patrocinar el mayor número de equipos de básquetbol y fútbol que sus recursos le permitan. Note que ES POSIBLE auspiciar cantidades fraccionarias de equipos.

1. Formule el problema de optimización relevante para Sadida, incluyendo la función objetivo y las restricciones correspondientes.

2. ¿Cuál es el número óptimo de cada tipo de equipo que Sadida debería patrocinar? Justifique claramente por qué el punto encontrado es un máximo.

3. Sadida ha encontrado un yacimiento de aminoplis, añadiendo 600 cc adicionales, para un total de 3600 cc de aminoplis disponibles ¿Cómo cambia la respuesta? Justifique

5.23. Aplicación KKT: Clases Online

Producto del retorno gradual, un colegio debe decidir cuántas profesoras destina a clases online y presenciales. Necesariamente se deben cumplir, al menos, 16 contenidos, para cumplir con los objetivos del ministerio. Cuando se destinan ℓ_p profesoras a clases presenciales, se cubren $4\ell_p^2$ contenidos. Si se destinan ℓ_o profesoras a clases online, se cubren solo $\frac{1}{4}\ell_o^2$ contenidos.

Sin embargo, al colegio le preocupa el riesgo a la salud de las alumnas. Producto de las redes de contacto, cuando el valor de contagiosidad de COVID es $R > 0$, el riesgo a la salud de tener ℓ_p profesoras en cursos presenciales es $16R\ell_p^2$. En clases online también hay un riesgo a la salud (mental) y si se destinan ℓ_p profesoras, el riesgo es igual a ℓ_o^2. El riesgo a la salud total es igual a la suma de los riesgos de cada modalidad de curso.

El colegio desea minimizar el riesgo a la salud total, es decir, desea resolver

$$\begin{aligned} \min_{\ell_p,\ell_o} \quad & 16R\ell_p^2 + \ell_o^2 \\ s.a. \quad & 4\ell_p^2 + \frac{1}{4}\ell_o^2 \geq 16 \\ & \ell_p \geq 0, \ell_o \geq 0 \end{aligned}$$

Suponga que ES POSIBLE asignar una cantidad fraccionaria de profesores a cada modalidad.

1. Explique con palabras por qué en la solución óptima la primera restricción está activa.

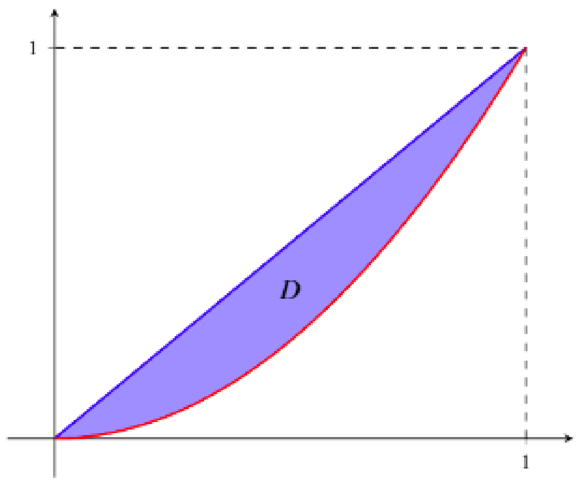
2. Sean λ_2 y λ_3 son los multiplicadores asociados a las restricciones $\ell_p \geq 0$ y $\ell_o \geq 0$, respectivamente. Explique con palabras por qué en cualquier candidato a solución debe ser cierto que $\lambda_2 = 0$ ó $\lambda_3 = 0$ (o ambas).

3. Suponga que encuentra una cantidad finita de candidatos a solución para el problema usando KKT. Explique por qué entre esos candidatos está la solución. (*Ayuda: Asuma que en esos puntos la primera restricción está activa.*)

4. Resuelva el problema de optimización del colegio cuando $R \neq 1$. (*Ayuda: Tenga ojo con los posibles valores de R.*)
5. Explique por qué cuando $R = 1$ no es posible usar el teorema de la envolvente.

5.24. Aplicación KKT: Probabilidad y Estadística

En muchas aplicaciones estadísticas, para el cálculo de probabilidades en el caso de variables continuas, tenemos las llamadas funciones de densidad de probabilidad. Un caso particular de ellas es la **"función densidad uniforme bivariada"**, la cual se puede definir por una constante, en alguna región o dominio (D) del plano $\mathbb{R}^2$. Para la aplicación que se le pide resolver más adelante, se eligió la región encerrada por la bisectriz y la parábola canónica que se muestra en la gráfica



La forma de definir la constante corresponde al valor inverso del área de la figura. En este caso Área$(D) = \frac{1}{6}$. Usted verá que en la aplicación que se le pide, tendrá una constante incorporada correspondiente al número "6", la cual es exactamente la función densidad uniforme definida sobre D.

En este problema se le pide encontrar el máximo (y garantizar que lo sea) de la siguiente función de probabilidad:

$$f(x, y) = \int_x^y 6t(1-t)\,dt$$

Sujeto a las restricciones

$$\begin{aligned} y - x &= 0{,}2 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

Ayuda: Si va a usar KKT, note que la restricción $y - x = 0{,}2$ es como una restricción de desigualdad donde el caso con desigualdad estricta no se permite y su multiplicador puede ser negativo. ***Sin embargo, usted puede resolver el problema por el método que usted prefiera.***

5.25. Optimizar

Considere la función $f(x_1, x_2) = \text{mín}\{x_1, x_2\}$ y el problema de optimización:

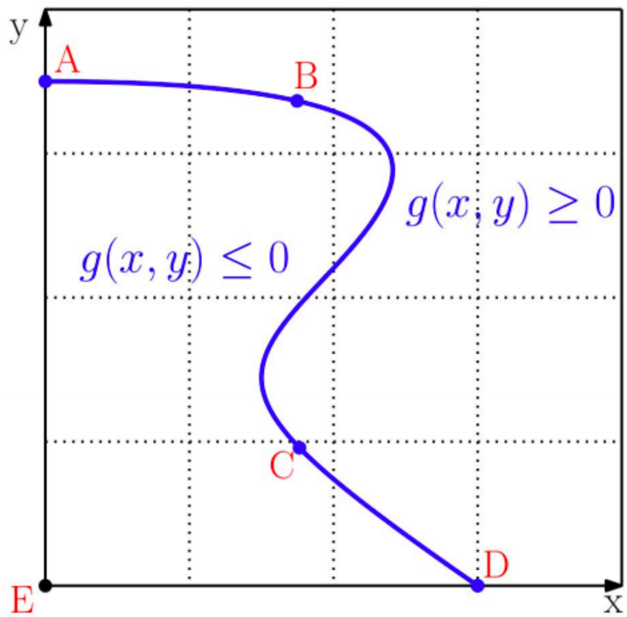
$$\text{máx}\, f(x_1, x_2) \quad \text{sujeta a} \quad x_1 + x_2 = Z$$

donde $Z > 0$ es un parámetro.

Muestre que este problema tiene una solución única y global. Puede usar un gráfico para apoyar su explicación.

5.26. Caracterizando óptimos gráficamente

Considere la siguiente figura:



Suponga que la figura representa el primer cuadrante en $\mathbb{R}^2$ y que la curva azul son **todos** los x, y en este cuadrante tales que $g(x, y) = 0$. Considere una función lineal f definida por $f(x, y) := ax + by$, tales que $a \geq 0, b \geq 0$ pero al menos uno de los dos debe ser distinto de 0. Dados los puntos A, B, C, D, E de la figura responda cuáles de estos puntos **podrían resolver**, para alguna combinación de parámetros a, b, los siguientes problemas. Si el problema no es factible o no tiene solución para toda combinación a, b que cumpla las condiciones anteriores, indíquelo en su respuesta.

1. $\max f(x, y)$ sujeto a $g(x, y) = 0, x = 0.$
2. $\max f(x, y)$ sujeto a $g(x, y) = 0, x \geq 0, y \geq 0$
3. $\min f(x, y)$ sujeto a $g(x, y) \leq 0, x \geq 0, y \geq 0$
4. $\max f(x, y)$ sujeto a $g(x, y) \geq 0, x \geq 0, y \geq 0$

5.27. Pregunta Larga

Usted es administrador de una empresa que se dedica a producir sets para jugar a la payaya. En este mercado usted recibe contratos para producir una cantidad $\overline{Y}$ de sets de payaya por lo que una vez asignado el contrato usted tiene que decidir la manera de producir **al menos** $\overline{Y}$ sets al menor costo posible. Su función de producción combina dos factores llamados x_1 y x_2 que se adquieren a salarios w_1 y w_2. La función de producción es

$$Y = x_1^{0,5} x_2^{0,5}$$

Obviamente usted tiene que contratar cantidades de factores x_1 y x_2 que sean 0 o positivas.

Suponga $w_1 = 1$ y $w_2 = 1$ a menos que se especifique lo contrario. Recuerde que la función de costos totales muestra el costo total de producción como función de la cantidad producida. En caso de ser necesario suponga que $\sqrt{2} = 1{,}4$.

- Nota 1: La calificación de restricción es siempre satisfecha para este problema. Suponga esto a menos que se indique lo contrario.
- Nota 2: Este problema tiene un máximo global. En el óptimo se cumple que $x_1 > 0$ y $x_2 > 0$, y la empresa elige producir exactamente $\overline{Y}$. Enfóquese en puntos que satisfacen estos supuestos cuando busque soluciones de las condiciones de Kuhn-Tucker. Suponga esto a menos que se indique lo contrario.
- Nota 3: Recuerde que la empresa está **minimizando** costos.

Se pide:

1. Encuentre las cantidades óptimas de factores a contratar como función de la cantidad de producción requerida $\overline{Y}$.
2. Encuentre la función de costos totales de producción (función de valor) y la función de costo marginal.
3. Suponga ahora que el salario del factor x_1 sube de $w_1 = 1$ a $w_1 = 2$.
    a) Resuelva el problema de optimización y obtenga las cantidades óptimas de cada factor con el nuevo salario del factor x_1.
    b) Calcule y dibuje la función de costos totales con el nuevo salario del factor x_1.
4. Volvamos a suponer que $w_1 = 1$ y $w_2 = 1$. En este país el gobierno ha decidido regular el uso del factor x_1 y usted no puede contratar más de 10 unidades de este factor. No hay ninguna restricción sobre la cantidad a contratar de x_2.
    a) Plantee el nuevo problema de optimización.
    b) Encuentre las cantidades óptimas a contratar como función de la cantidad de producción requerida $\overline{Y}$.
    c) Calcule y grafique la función de costos totales (función de valor). Nota: piense bien antes de dibujar.
5. Suponga ahora que el gobierno en vez de colocar un límite a la cantidad de x_1 que usted puede contratar lo que hace es regular los precios de la siguiente manera: Si usted contrata 10 o menos unidades de x_1 usted seguirá pagando el mismo salario $w_1 = 1$ que tiene hasta ahora, pero si contrata más de 10 unidades de x_1, entonces el salario será $w_1 = 2$ para todas las unidades de x_1. El salario de x_2 no se ve afectado en ningún caso y seguirá siendo $w_2 = 1$.
    a) En este caso usted debe decidir si producir una cantidad $\overline{Y}$ usando $x_1 \leq 10$ pagando un salario $w_1 = 1$ o producir con $x_1 > 10$ pero a un salario $w_1 = 2$. Muestre gráficamente usando sus resultados en las partes 3*b* y 4*c* cómo se puede encontrar la respuesta a esta decisión. (Nota: qué manera de producir le conviene va a depender de $\overline{Y}$.)

5.28. Pregunta Corta

Considere el problema

$$\text{máx} \;\; 2x + y \quad \text{sujeta a} \quad \left\{ \begin{array}{l} (x+1)^2 + y^2 \leq 4 \\ x^2 + (y+1)^2 \leq 4 \end{array} \right. , \quad x \geq 0, \;\; y \geq 0$$

1. “Este problema tiene solución”. Justifique esta afirmación de manera precisa usando resultados vistos en clase. Debe demostrar matemática o geométricamente por qué se cumplen las hipótesis del resultado que utilice.

2. Resuelva este problema razonando geométricamente, es decir dibuje el conjunto factible y muestre en su gráfico el punto (x^*, y^*) en el que la función objetivo alcanza su máximo valor.

3. Escriba las condiciones de Kuhn-Tucker para este problema. Demuestre que el punto (x^*, y^*) hallado en la parte anterior resuelve el problema.

4. Suponga que se sustituye la restricción $x^2 + (y+1)^2 \leq 4$ por $x^2 + (y+1)^2 \leq 4{,}1$. Estime mediante el Teorema de la Envolvente el cambio del valor óptimo.

5.29. Optimización con restricciones

Considere el siguiente problema de maximización:

$$\max_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \sqrt{x+y}$$
$$\text{sujeto a } x^2 + y^2 \leq 100, x \geq 0, y \geq 0$$

De ser necesario asuma que se cumple la condición de cualificación de restricciones.

a) Grafique las curvas de nivel y el conjunto factible del problema.

b) Resuelva el problema usando el método de Kuhn-Tucker. Para ello debe:

   (i) escribir el Lagrangeano,

   (ii) escribir las condiciones de Kuhn-Tucker,

   (iii) indicar cuántos casos posibles se desprenden de las condiciones de Kuhn-Tucker, y encontrar el(los) punto(s) que satisface(n) estas condiciones. Justifique su análisis, incluyendo la razón por la cual descartó casos,

   (iv) indicar si el (los) punto(s) encontrado(s) en la parte anterior es (son) máximo(s) y, en caso afirmativo, si se puede afirmar que alguno(s) es (son) máximo(s) global(es).

c) Muestre gráficamente que la(s) solución(es) encontrada(s) en la parte anterior corresponde(n) efectivamente a las condiciones de tangencia de las curvas de nivel de la función objetivo y de la restricción activa. (Nota: si no pudo resolver la parte (b) de esta pregunta igualmente intente resolver el problema gráficamente para responder la parte c.)

5.30. Expansión de Crédito

Considere un agente que vive dos períodos (hoy, 1 y mañana, 2). Sean c_1 y c_2 su nivel de consumo en los períodos 1 y 2, respectivamente. Asumimos que la utilidad del agente en función de c_1 y c_2 es

$$\sqrt{c_1} + \sqrt{c_2}.$$

En el período 1, el agente tiene un ingreso igual a 9, y en el período 2, su ingreso es 25. Para que el agente pueda consumir más que 9 en el período 1, él debe tomar un préstamo b, que debe ser pagado en el período 2. Así, se debe cumplir la siguiente restricción:

$$c_1 = 9 + b.$$

Dado que el préstamo debe ser pagado en el período 2, y si asumimos que la tasa de interés es cero, además se debe cumplir que:

$$c_2 = 25 - b.$$

Como b es un préstamo, debe ser cierto que $b \geq 0$. Además, asumimos que, para evitar el riesgo de bancarrota, el banco que ofrece el préstamo al agente no le permite tomar un préstamo mayor que $\bar{b} > 0$, así que la restricción $b \leq \bar{b}$ también se debe cumplir.

Dadas estas informaciones, el problema de optimización del agente es

$$\begin{aligned} \max_{c_1, c_2, b} \quad & \sqrt{c_1} + \sqrt{c_2} \\ \text{sujeto a} \quad & c_1 = 9 + b \\ & c_2 = 25 - b \\ & 0 \leq b \leq \bar{b} \end{aligned}$$

Reemplazando las restricciones de igualdad en la función objetivo tenemos que este problema de optimización es análogo al siguiente problema de optimización en una única variable:

$$\begin{aligned} \max_{b} \quad & \sqrt{9 + b} + \sqrt{25 - b} \\ \text{sujeto a} \quad & 0 \leq b \leq \bar{b} \end{aligned} \tag{5.1}$$

Para los siguientes ítems, asuma que $\bar{b} = 7$.

a) (3 puntos) Escriba la función Lagrangeana correspondiente al problema de optimización (5.6).

b) (13 puntos) ¿Son suficientes las condiciones de Kuhn-Tucker para un máximo global del problema (5.6)? Justifique de manera clara su respuesta, explique cuál de los resultados de suficiencia global presentados en clase ha usado.

c) (6 puntos) Escriba las condiciones de Kuhn-Tucker del problema (5.6).

d) Encuentre la solución del problema (5.6) y calcule las cantidades de consumo óptimas en cada período.

e) Calcule el efecto marginal de un aumento en la línea de crédito $\bar{b}$ en la utilidad del agente.

5.31. Preguntas cortas

(a) Al maximizar $f(x_1, x_2)$ sujeto a $x_1 + x_2 \leq 100$, $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 2$ se encuentra un único punto (x_1^*, x_2^*) que satisface todas las condiciones de Kuhn-Tucker. Si f es continuamente diferenciable pero no es cuasi cóncava, ¿cómo podría argumentar que (x_1^*, x_2^*) sí es un óptimo global único?

(b) La elección de un consumidor se modela como el resultado de la maximización de una función u continua y diferenciable que representa su preferencia por canastas de bienes $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2$ sujeto a una restricción presupuestaria $x_1 p_1 + x_2 p_2 \leq m$. La solución de ese problema son las demandas x_i^* que dependen de los precios $(p_1, p_2) \in \mathbb{R}_+^2$ y el ingreso m, y la utilidad máxima es $u^*(p_1, p_2, m) = u(x_1^*, x_2^*)$. Usando el teorema de la envolvente indique qué condiciones deben cumplir x_1^*, x_2^* y λ^* para poder afirmar que u^* es estrictamente decreciente en cada precio p_i. ¿Tiene sentido su resultado? Justifique.

5.32. Propósito de una empresa

Los años recientes han visto una discusión bastante amplia acerca del rol o propósito de la empresa, incluyendo un debate acerca de la función objetivo de la empresa. En esta pregunta veremos cómo interpretar matemáticamente distintas visiones que se han planteado sobre el tema. No es una pregunta orientada a debatir lo correcto, sino a entender qué implican algunas ideas propuestas respecto de diversos objetivos.

La empresa FdC produce guaipes (G) usando dos factores, que llamaremos M y N, según la función

$$G = F(M, N) = 2\left(M^{0,5} + N^{0,5}\right) \tag{5.2}$$

La empresa arrienda las unidades de ambos factores en el mercado y paga $w_M > 0$ y $w_N > 0$ por cada unidad de M y N respectivamente. Las unidades de G se venden a un precio p en un mercado. Todos los mercados son competitivos por lo que los precios son constantes e independientes de las cantidades compradas y vendidas.

En toda esta pregunta siempre asuma que se cumple la condición de cualificación de restricciones.

Asuma, a menos que se especifique lo contrario que $w_M = 1$, $w_N = 1$ y $p = 1$. Recuerde además que la empresa no puede arrendar cantidades negativas de M y N.

(a) Suponga que la empresa toma decisiones buscando maximizar las ganancias π que obtiene de su operación.

1. Escriba la función objetivo (ganancias) π.
2. Escriba el problema de optimización que le permite encontrar las cantidades óptimas a arrendar de M y N; recuerde incorporar las restricciones de no negatividad.
3. Escriba las condiciones de KT del problema. Muestre que las restricciones de no negatividad no pueden estar activas en ningún candidato.
4. Resuelva el problema de optimización. ¿Es la solución encontrada un máximo global?

(b) Al producir los guaipes se genera Z, que es algo no deseable por lo que la empresa preferiría reducir la producción de éste. En particular el Z producido está dado por

$$Z = M^{0,5}$$

La empresa ahora busca maximizar las ganancias π menos el costo del impacto de Z, que se estima igual a βZ, donde $\beta \in (0, 1)$. A partir de este inciso asuma que las restricciones de no negatividad de los factores no están activas en la solución y puede ignorarlas.

1. Escriba la nueva función objetivo, y llámela B.
2. Escriba el problema de optimización que le permite encontrar las cantidades a arrendar de M y N que maximizan B.
3. Resuelva el problema de optimización. ¿Es la solución encontrada un máximo global?

(c) Suponga ahora nuevamente que la empresa lo que busca es maximizar ganancias π pero ha tomado la decisión de limitar la cantidad producida de Z a un nivel que debe ser menor o igual a $\overline{Z}$. Recuerde que la producción de Z está dada por $Z = M^{0,5}$.

1. Escriba el problema de optimización que permite determinar las cantidades óptimas de M y N. Para esto, transforme la restricción a la cantidad de Z en una restricción a las cantidades de factores.
2. Resuelva el problema de optimización. Explique si usted ha obtenido un óptimo global.

(d) Suponga nuevamente que la empresa maximiza ganancias y que $Z = M^{0,5}$. Las autoridades regionales quieren limitar la cantidad de Z que se genera. Para ello deciden cobrar a la empresa una cantidad $\tau \in (0, 1)$ por cada unidad de Z producida. Sin calcular la solución al nuevo problema y usando sus respuestas en las partes previas de esta pregunta, describa cómo cambiarán las cantidades de factores usadas por la empresa al imponer este costo. Nota: escriba la nueva función de ganancias.

Capítulo 6

Ecuaciones en Diferencias de Primer Orden

6.1. Solución de ecuaciones en diferencias de primer orden

Resuelva las siguientes ecuaciones en diferencias (usando las condiciones iniciales cuando se les entreguen), además revise el estado estacionario de cada una de ellas y verifique su estabilidad. Grafique.

1. $X_{t+1} = \rho X_t$; $X_0 = \pi$, con $0 < \rho < 1$
2. $X_{t+1} = 2X_t + 3$; $X_0 = 10$
3. $X_{t+1} = 0{,}2X_t + 2$; $X_0 = 0$
4. $X_{t+1} = -0{,}25X_t + 5$; $X_0 = 1$
5. Para cada una de las siguientes ecuaciones en diferencias obtenga la solución general y_t, la solución para un valor específico $y_0 = \overline{y}$, y el estado estacionario. Determine además si es estado estacionario es estable o no.

   a) $y_{t+1} = 2y_t - 10$
   b) $y_{t+1} = y_t$
   c) $y_t = 0{,}5y_{t-1} + 1$
   d) $y_{t+1} = 2y_t$
   e) $y_{t+1} = 2y_t + 10$
   f) $y_{t+1} = 0{,}5y_t + 2$

6.2. Ecuaciones en Diferencias de Primer Orden Aplicado a Depósitos Bancarios

Suponga que usted tiene D pesos depositados en un banco a una tasa de interés anual r. Si define X_t como la cantidad depositada a comienzos del año t y b como el monto que se retira al final de cada año, entonces, usted tiene que:

$$X_{t+1} = (1 + r)X_t - b$$

Además suponga que $X_0 = D$

1. Encuentre la solución a este sistema

2. Determine la fórmula que le permitiría encontrar la cantidad máxima b que puede retirar al final de cada uno de los próximos n años de tal forma que su depósito no se agote antes del año n.

3. Con su resultado en la parte anterior y suponiendo que $D = 100{,}000$ y $r = 10\,\%$, calcule la cantidad máxima que puede sacar para los próximos 5 años.

6.3. Ecuaciones en Diferencias Aplicado a Matemáticas Financieras

Considere una economía donde hay dos activos. El primero, es la acción de una empresa que paga dividendos $D > 0$ todos periodos. El segundo es un bono de un periodo que paga $R > 1$ en el periodo siguiente, por cada dolar comprado del bono (la tasa de interés bruta es R). El precio de la acción P_t en cada periodo t es determinado en equilibrio en la economía. No hay incertidumbre. Hay muchos agentes con utilidad estrictamente creciente en su riqueza y dinero disponible para invertir (ahorrar).

1. Encuentre una condición que garantiza que los agentes están indiferentes entre poner su dinero en cualquier uno de los activos. (Hablamos que un agente está indiferente cuando las ganancias o retornos obtenidos en dos inversiones son iguales para un mismo monto inicial invertido.)

2. Resuelva para el precio de equilibrio como una función del precio en el período $t = 0$.

3. ¿Para qué valores iniciales del precio en $t = 0$ el sistema se encuentra en su estado estacionario? Si no está en ese valor, ¿qué sucede con el precio en el largo plazo si el valor inicial en $t = 0$ es mayor al de estado estacionario?

6.4. Ecuaciones en Diferencias de Primer Orden: Aplicación al Ahorro

Suponga que Don Hugo acaba de depositarle a su hijo Hugito, de 6 años, que estuvo ayer de cumpleaños, \$6000 en una cuenta de ahorro al 8 % anual. Asimismo, suponga que ha prometido depositarle todos los años el día después de su cumpleaños un monto igual a \$1000 por el número de años que haya cumplido. Se define X_t como el monto en la cuenta de ahorro de Huguito en el t-ésimo cumpleaño.

1. Plantee la ecuación en diferencias que define el monto de la cuenta de ahorro de Huguito

2. Encuentre una solución para este sistema, dado que $X_6 = 0$.

3. ¿Cuánto dinero habrá en la cuenta de ahorro cuando Huguito cumpla 12 años?

6.5. Ecuaciones en Diferencias de Primer Orden Aplicado en Macroeconomía

Suponga que el consumo agregado en el período t, c_t es una función lineal del ingreso agregado en el período previo, y_{t-1},

$$c_t = a + b y_{t-1}$$

donde a y b son constantes. Si la inversión agregada es constante I, el ingreso agregado en un período está dado por $y_t = c_t + I$ (ignoramos el resto de los componentes por simplicidad).

1. Escriba la ecuación en diferencias para el ingreso agregado

2. Encuentre la solución a la ecuación en diferencias para el ingreso agregado
3. ¿Qué restricción debe imponerse sobre el parámetro b para asegurarse que el ingreso converge a su nivel de estado estacionario?
4. ¿Cuál es el efecto de corto y largo plazo de un aumento transitorio (por un solo período) de I?
5. ¿Cuál es el efecto de corto y largo plazo de un aumento permanente (todos los períodos) de I?

6.6. Ecuaciones en Diferencia Aplicado a la Ley de Little

En el contexto de gestión operativa de procesos de flujos, el balance entre el stock de inventario y la tasa de demanda viene dado por una ecuación conocida como *Ley de Little* (en honor a John Little):

$$I_t = R_t \cdot T$$

Donde I_t es el stock de inventario disponible en el período t, R_t es la tasa de flujo de clientes llegados en el período t, y T es el tiempo promedio que toma desarrollar la actividad (por ejemplo, el proceso de vender el producto a un cliente).

Suponga que un profesional ha decidido modelar el flujo de clientes como función del precio p del producto en el período contemporáneo, y el stock de inventario como función del precio p en el período anterior. Es decir:

$$R_t = d_0 - p_t$$
$$I_t = s_0 + s_1 \cdot p_{t-1}$$

El tiempo promedio de desarrollo de la actividad, $T = \frac{1}{\lambda}$, es un parámetro positivo conocido, así como lo son s_0, s_1 y d_0. Se impone además que $d_0 T > s_0$.

1. Encuentre la ecuación dinámica que modela la evolución de los precios que dicta la Ley de Little. ¿Es una ecuación diferencial o en diferencias? ¿Es lineal o no, homogénea o no, de coeficientes constantes o variables? ¿De qué orden es?
2. Suponga que el precio inicial es p_0. Encuentre la solución de la ecuación dinámica de la parte *1*.
3. En base al mismo modelo de la parte *1*, encuentre el equilibrio (estado estacionario) de ese proceso dinámico y discuta su estabilidad. (Nota: recuerde que en este contexto equilibrio se refiere a que sea un estado estacionario o punto fijo.)

6.7. Acumulación y Recuperación de Ahorros

En Chile el sistema de pensiones funciona mediante depósitos periódicos que son determinados de acuerdo al ingreso de las personas. Estos ahorros depositados periódicamente van obteniendo intereses sobre el monto total acumulado. Al llegar a una cierta edad, las personas pueden "jubilar" y obtienen ese dinero para su jubilación.

Durante la emergencia actual se ha discutido la posibilidad de que los ahorrantes puedan retirar de sus cuentas de ahorro para pensiones una cantidad de dinero que podrían consumir en caso de necesidad. Como los fondos de pensiones están pensados para generar ahorros para la vejez se ha advertido que una medida de este tipo tendría consecuencias al momento de jubilarse. En esta pregunta utilizaremos las herramientas aprendidas en el curso para entender como funcionaría esta política. Esta pregunta NO es una evaluación de esta medida sino únicamente un ejemplo de cómo usar las herramientas vistas en este curso para modelar situaciones concretas que enfrentamos en el mundo real.

Suponga que **hoy** una persona tiene N pesos ahorrados a inicios de año en su fondo de pensiones. Este monto se incrementa cada año por dos razones. Primero, al final del año recibe intereses (netos) de i sobre el monto acumulado a inicios del período. Segundo, realiza una nueva contribución m, que por simplicidad supondremos que es igual todos los años. Notar que la contribución se realiza luego de haber recibido los intereses, y asuma que la primera contribución ocurrirá en un año más. Asuma que **hoy** corresponde a $t = 0$. Notar que no es necesario resolver la ecuación pero si modelar correctamente la dinámica del monto en el fondo de pensiones.

1. Escriba la ecuación en diferencias que explica la evolución del monto ahorrado. Esto es, encuentre la ecuación que muestra el valor del fondo hoy, que llamaremos x_t como función del fondo el año pasado, x_{t-1}, y de la contribución de este año, m.

2. Suponga que la persona se jubila en T años más. Escriba la cantidad acumulada en el fondo de pensiones hasta ese momento como función de N, m, y T.

3. Asuma que hoy se permite a la persona retirar de su cuenta de pensiones un monto igual a 1. Calcule en cuánto cambia su ahorro acumulado en T con esta política.

4. A fin de permitir este tipo de ayuda algunos analistas económicos y financieros han propuesto modificar el sistema cambiando la edad de jubilación o cambiando el monto a depositar cada año.

   a) Muestre cómo se puede calcular el monto extra (por sobre m) que debe ahorrar una persona que retira 1 hoy para llegar a T con el mismo monto que si no hubiera retirado dinero.

   b) Suponga ahora que en vez de aumentar el ahorro en todos los períodos usted debe aumentar su contribución en z por un período de $s < T$ años. Muestre como calcular el monto z de modo que una persona que retira 1 hoy tenga el mismo monto en T que si no hubiere retirado.

6.8. Pregunta larga

Considere una economía donde los inversionistas tienen acceso a tres diferentes de oportunidades de inversión, A, B y C:

- La oportunidad A es dada por la **acción** de una empresa que paga un dividendo constante y igual a $D > 0$ pesos todos períodos. El precio de la acción en cada fecha t es denotado por P_t. Luego, si el inversionista compra 1 unidad de esta acción en la fecha t, en la fecha $(t+1)$ gana un total de D pesos en dividendos y además puede vender su acción a un precio P_{t+1}.
- La oportunidad B consiste en comprar **Bitcoins**. El precio de 1 unidad de Bitcoin en la fecha t es denotado por Q_t. Las Bitcoins no pagan dividendos, y uno solo puede tener ganancias positivas entre t y $(t+1)$ comprando Bitcoins en la fecha t si el precio en $(t+1)$ es mayor que en t, es decir: si $Q_{t+1} > Q_t$.
- La oportunidad C consiste de una **cuenta de ahorro** que paga una tasa de interés neta de $r > 1$: Si un inversionista deposita 1 peso en esta cuenta en la fecha t, tendrá un saldo de $1 + r$ pesos en la fecha $(t + 1)$.

Decimos que esta economía está en equilibrio siempre que se cumpla la siguiente condición: Un inversionista que maximiza sus ganancias está indiferente entre las tres oportunidades de inversión en toda fecha t. Se pide:

1. Encuentre las ecuaciones en diferencias que los precios $\{Q_t\}_{t\geq 0}$ y $\{P_t\}_{t\geq 0}$ deben satisfacer en equilibrio. (Recuerde que deben estar indiferentes entre los activos y la cuenta de ahorro).

2. **Resuelva** las ecuaciones en diferencias que deben satisfacer los precios (es decir, encuentre la solución general de las ecuaciones en diferencias del ítem anterior).

3. ¿Es posible que el precio de la Bitcoin (que no paga dividendos) sea siempre mayor que el precio de la acción (que paga dividendos) en equilibrio? En otras palabras, ¿es posible que $Q_t > P_t$ para todo t? Justifique. (Ayuda: note que **no** hemos fijado los valores Q_0 y P_0).

6.9. Evolución Macroeconómica

Sea Y_t el PIB de una economía en términos reales, C_t el consumo agregado y I_t la inversión agregada. La demanda por consumo está dada por

$$C_t = b + cY_{t-1},$$

donde $b > 0$ y $c \in (0, 1)$. La inversión está dada por

$$I_t = \overline{I} + a\left(Y_t - Y_{t-1}\right),$$

donde $a, \overline{I} > 0$ y $a \neq 1$. La ecuación del consumo representa que cuanto mayor la renta de los agentes, mayor su consumo. La ecuación de la inversión captura el hecho de que cuando la economía crece más, las empresas aumentan su inversión. Además, el gobierno gasta una cantidad fija y constante en esta economía, representada por G. En equilibrio, se cumple que el PIB es igual al gasto total, o sea, $Y_t = C_t + I_t + G$.

1. Escriba una ecuación en diferencias que describe el PIB de equilibrio de la economía.

2. Encuentre el punto fijo (estado estacionario) de la ecuación del ítem anterior.

3. Encuentre la solución general de la ecuación que encontraste en el ítem 1 en términos del valor inicial del PIB. Es decir, representa el valor de Y_t en equilibrio como una función de parámetros, del tiempo y de Y_0.

4. Suponga que inicialmente la economía se encuentra en estado estacionario y el gobierno decide subir de manera permanente e inesperada el gasto del gobierno G. Un economista ha estimado que el parámetro a es igual a $2/3$, y que el parámetro c es igual a $1/2$ y argumenta que después de este cambio en el gasto del gobierno esta economía va tener ciclos económicos. Es decir, ocurrirán períodos de crecimiento del PIB, seguidos por períodos de caída del PIB. ¿Está usted de acuerdo con esta predicción? Represente gráficamente la dinámica del PIB después de este cambio en un diagrama de fases con Y_{t+1} en el eje vertical y Y_t en el eje horizontal.

5. Suponga ahora que los parámetros estimados son $a = 1/2$ y $c = 2/3$. ¿Usted esta de acuerdo con la afirmación del economista en el ítem anterior? Una vez más, represente la dinámica del PIB después de la subida en el gasto del gobierno en un diagrama de fases con Y_{t+1} en el eje vertical y Y_t en el eje horizontal (y suponga de nuevo que antes del cambio en G la economía está en estado estacionario).

6.10. Sistemas Dinámicos, Equilibrios y Estabilidad

Considere la siguiente ecuación en diferencias de primer orden:

$$x_{t+1} = \begin{cases} \sqrt{x_t} & \text{si } x_t \in [0, 1) \\ (x_t - 1)^2 + 1 & \text{si } x_t \in [1, +\infty) \end{cases}$$

Encuentre sus puntos fijos, determine si son estables o no, y de serlo indique si lo son local o globalmente. *(Ayuda: Haga un diagrama de fase.)*

6.11. Sistemas Dinámicos y Equilibrios

Considere la ecuación en diferencias

$$x_{t+1} = 1 - \frac{1}{1 + x_t}$$

Encuentre su único estado estacionario y determine si es o no localmente estable. *(Ayuda: No es necesario resolver la ecuación.)*

6.12. Sistema Lineal

Considere el siguiente sistema lineal homogéneo de 2 variables:

$$x_{t+1} = x_t - \frac{1}{2}y_t$$
$$y_{t+1} = \frac{3}{2}x_t - y_t$$

1. Encuentre la solución general $\{x_t\}_{t\geq 0}$ y $\{y_t\}_{t\geq 0}$ como función de t y de coeficientes c_1 y c_2 arbitrarios.
2. ¿El sistema es estable? Justifique.
3. A partir de la solución en el ítem 1 y del estado inicial $(x_0, y_0) = (2, 1)$, encuentre los valores de c_1 y c_2 y obtenga la solución (trayectoria) de $\{x_t\}_{t\geq 0}$ y $\{y_t\}_{t\geq 0}$.

6.13. Sistemas Dinámicos con Asimetrías

En variadas disciplinas se analizan modelos en que, por diversas razones, las respuestas son asimétricas de acuerdo al valor de la variable. Por ejemplo, podemos reaccionar de distinta manera a pérdidas que a ganancias. En esta pregunta analizaremos una modelo dinámico de una ecuación que tiene justamente un comportamiento de este estilo.

Considere la siguiente ecuación en diferencias de primer orden

$$x_{t+1} = x_t + b|x_t| + c, \qquad b, c \in \mathrm{R}$$

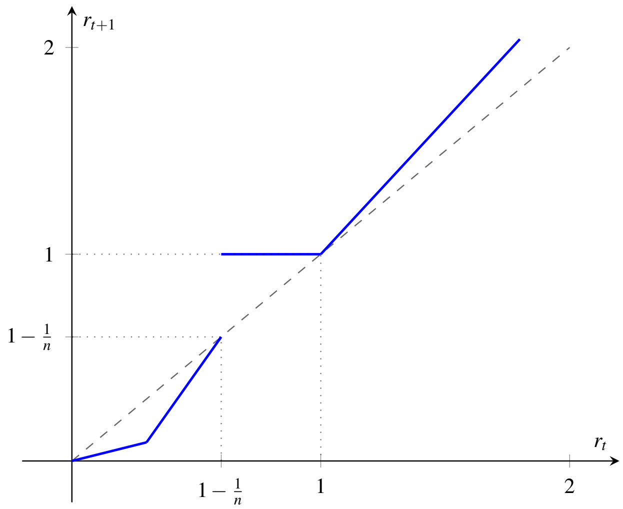
donde $|m|$ representa el valor absoluto de m.

En cada uno de los siguientes casos usted debe buscar los estados estacionarios (puntos de equilibrio), diagrama de fase, y estabilidad (de los estados estacionarios) de los sistemas.

1. $b = -0{,}5; c = 1$
2. $b = 0{,}5; c = -1$

6.14. R efectivo

Para estimar la evolución de la pandemia se estima el parámetro de contagiosidad, llamado r. En cada periodo t, r_t representa el valor del parámetro en ese periodo. Cuando se realizan n exámenes de PCR, la evolución del parámetro r sigue el siguiente diagrama de fase:



donde la línea discontinua diagonal representa la recta $r_{t+1} = r_t$.

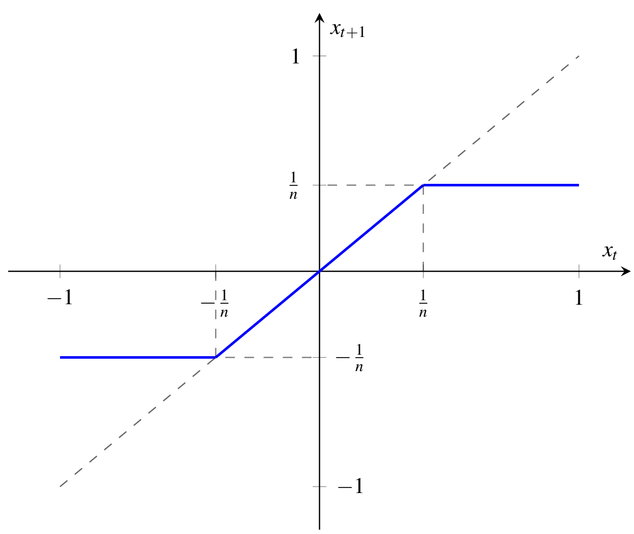
1. Encuentre los estados o soluciones estacionarias. Justifique.

2. Determine si los puntos encontrados anteriormente son estables o no. Si lo son, diga si lo son local o globalmente. Justifique.

3. Encuentre los estados estacionarios si $n \to \infty$ y clasifíquelos en base a su estabilidad local o global.

6.15. Infinitos puntos fijos

Para $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$, considere el siguiente diagrama de fase que representa a una ecuación en diferencias



La línea punteada diagonal representa a la recta $x_{t+1} = x_t$. Responda:

1. Encuentre los estados o soluciones estacionarias.

2. Determine si los puntos encontrados anteriormente son estables o no. Si lo son, diga si los son local o globalmente.

3. Encuentre los estados estacionarios si $n \to \infty$ y clasifíquelos en base a su estabilidad local o global.

6.16. Planificación de una excavación

Una empresa minera planifica todos los meses cuánto debe excavar en el futuro. A la cantidad excavada en cualquier tiempo t le llamaremos d_t. Al realizar su planificación en el mes t, escoge d_{t+1} basada en la última cantidad excavada: d_t.
Para simplificar, suponga que al elegir d_{t+1} la minera busca maximizar su ganancia del período, que depende de la cantidad extraída de mineral $L(d_{t+1}, d_t)$ que se vende a un precio unitario p y de los costos de excavar a la nueva profundidad $C(d_{t+1})$. Además, existe una restricción por regulación ambiental: la nueva cantidad excavada no puede superar a un múltiplo $D > 0$ ($D \neq 1$) de la última cantidad excavada, más un margen $M \geq 0$. Esto es:

$$d_{t+1} \leq Dd_t + M$$

Además, solo tiene sentido que $d_t \geq 0$. Con todo, el problema de optimización de la minera es:

$$\begin{aligned} \max_{d_{t+1}} \quad & pL(d_{t+1}, d_t) - C(d_{t+1}) \\ s.a \quad & d_{t+1} \leq Dd_t + M \\ & d_{t+1} \geq 0 \end{aligned} \tag{1}$$

(a) Suponga que $p \cdot \frac{\partial L}{\partial d_{t+1}} > C'$. Explique por qué, en el óptimo, la restricción ambiental está activa.

(b) Usando *(a)*, muestre que la solución óptima verifica la siguiente ecuación en diferencias:

$$d_{t+1} = Dd_t + M \tag{2}$$

¿De qué orden es? Dado un valor inicial d_0, ¿cuántas soluciones tiene esta ecuación?

(c) Encuentre la solución de (2) cuando $d_0 = 1$.

(d) Suponga que $0 < D < 1$, ¿cuántos puntos fijos **consistentes con el contexto del problema** tiene (2)? ¿Son estables, local o globalmente? ¿Y si $D > 1$, cuántos consistentes con el contexto hay?

(e) Suponga que el regulador quiere evitar que las excavaciones crezcan demasiado, porque debilitan el suelo y destruyen las ciudades aledañas ¿Debería fijar $0 < D < 1$ ó $D > 1$?

(f) Suponga que el regulador fijó $0 < D < 1$. Si además quisiera que eventualmente la minera deje de excavar, ¿en cuánto debe fijar M?

Preguntas desafiantes

6.17. Ecuaciones en Diferencias y Restricción Presupuestaria Intertemporal

[Este ejercicio es adaptado del libro de Gerhard Sorger Dynamic Economic Analysis]

Existe una secuencia infinita de generaciones, cada una consiste de un continuo con medida uno de agentes idénticos, que viven por dos periodos. La generación nacida en un periodo t sera llamada de generación t. Los agentes son llamados de jóvenes en su primero periodo de vida, y de viejos en su segundo periodo de vida. Además, existe una generación -1 de agentes que viven en periodo 0, y que mueren al final de este periodo.

Un agente joven de la generación t usa su esfuerzo para producir una cantidad y_t de un bien no almacenable, y vende el producto a un precio p_t para los agentes viejos de la generación $t-1$. En el próximo periodo $(t+1)$, cuando este agente ya esta viejo, el gasta el dinero que obtuvo en periodo t, comprando bienes de consumo producidos por los agentes jóvenes de la generación $t+1$. Los agentes viejos de la generación -1 tienen $M > 0$ unidades de dinero, que lo gastan en bienes de consumo producidos en el periodo 0. El agente representativo de la generación t toma los precios p_t y p_{t+1} como dados, y busca maximizar su utilidad dada por

$$-v(y_t) + u(c_{t+1})$$

donde $v(y) = y^2/2$ es la desutilidad de hacer esfuerzo para producir un cantidad y. ¿Cual la restricción presupuestaria de este modelo? Analice el modelo y la trayectoria y_t de equilibrio suponiendo: $u(c) = \ln c$ y $u(c) = \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma}$ (con $\sigma = 2$ y $\sigma = 1/2$). Puedes utilizar un gráfico cuando convenga.

6.18. Desafío: Ecuaciones en Diferencia de Primer Orden Aplicado a Teoria de Juegos

[Este ejercicio es adaptado del libro de Gerhard Sorger Dynamic Economic Analysis]

Ayuda: Es recomendable no resolver este ejercicio si no se está familiarizado con la teoria de juegos.

Considere el siguiente juego (G) de coordinación con dos jugadores y dos acciones:

	A	B
A	(a, a)	$(0, 0)$
B	$(0, 0)$	(b, b)

con $a, b > 0$. Este juego tiene tres equilibrios: (A, A), (B, B) y un equilibrio en estrategias mistas donde cada jugador elige A con probabilidad $\overline{x} = b/(a+b)$.

Suponga ahora que tenemos un continuo de jugadores en la población: jugadores que siempre juegan la estrategia A y jugadores que siempre juegan la estrategias B. Denote por x_t la fracción de jugadores que siempre juegan A en un periodo t. En cada periodo, se forman pares de 2 jugadores, elegidos de manera aleatoria en la población (o sea, la probabilidad de formar un par con un jugador que siempre juega A es x_t). La tasa de crecimiento de cada tipo de jugador es dada por la tasa entre el payoff esperado de jugadores jugando una acción y el payoff promedio en la población:

$$\frac{x_{t+1}}{x_t} = \frac{ax_t}{ax_t^2 + b(1-x_t)^2}$$

1. Como evoluciona x_t para cada posible x_0?

2. Explique porque este tipo de modelo hace sentido para seleccionar equilibrios en el juego (G) (piense en como evoluciona una población).

6.19. Desafío

[Este ejercicio es adaptado del libro de Gerhard Sorger Dynamic Economic Analysis]

Sea $a = \sqrt{2}$ y considere

$$x = a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}$$

Encuentre x.

Capítulo 7

Ecuaciones en Diferencias de Segundo Orden o Superior

7.1. Ecuaciones en Diferencias de Segundo Orden I

Resuelva las siguientes ecuaciones en diferencias (use las condiciones iniciales en los ejercicios donde están disponibles) y analice su estabilidad (global)

1. $y_{t+2} - 4y_{t+1} - 4y_t = 2^t$; con $y_0 = 0, y_1 = 1$
2. $y_{t+2} = 2y_{t+1} + 3y_t$; con $y_0 = 100, y_1 = 200$
3. $y_{t+2} = 2y_{t+1} + 3y_t + 80$; con $y_0 = 100, y_1 = 200$
4. $y_{t+2} = 4y_{t+1} - 4y_t$; con $y_0 = 1$ e $y_1 = 2$
5. $3y_{t+2} = 18y_{t+1} - 27y_t$,con $y_0 = 2$ e $y_1 = 2$
6. $y_{t+2} = -y_t$, con $y_0 = y_1 = 1$
7. $y_{t+2} = 5y_{t+1} - 5y_t$, con $y_0 = 0$ e $y_1 = 1$
8. $y_{t+2} - \frac{5}{2}y_{t+1} + y_t = 3^t$
9. $y_{t+2} + 2y_{t+1} + y_t = t$
10. $y_{t+1} - 4y_{t-1} = t$
11. $y_{t+2} - 7y_{t+1} + 6y_t = 0$
12. $y_{t+2} = y_{t+1} + y_t$ con $y_0 = 0$ y $y_1 = 1$
13. $2y_{t+2} + 8y_{t+1} + 6y_t = 32$ con $y_0 = 1$ e $y_1 = 2$
14. $y_{t+2} - 4y_{t+1} + 4y_t = 5$ con $y_0 = 1$ e $y_1 = 2$

7.2. Modelo Macroeconómico

Suponga el siguiente modelo para representar la economía de un país:

$$Y_t = C_t + I_t + G_t$$

$$C_{t+1} = aY_t$$

$$I_{t+1} = b(C_{t+1} - C_t)$$

$$G_t = G = 1, \text{ se supone constante}$$

Donde Y_t representa el ingreso nacional en el período t, C_t es el consumo en el período t, I_t es la inversión en el período t, G_t es el gasto de gobierno en el período t y a, b son constantes

1. Genera una expresión para el ingreso nacional del país que dependa de los ingresos obtenidos anteriormente.
2. Encuentre la solución al sistema, suponga que $a = 0,8$ y $b = 3$
3. ¿A qué tasa crecera el ingreso cuando t tiende a infinito?
4. Suponga que ahora usted no conoce el valor de b, determine los valores de b para los cuáles el sistema oscila
5. Calcule los valores para los cuales sistema converge y diverge, dado que el sistema oscila

7.3. Secuencia de Números

Suponga una ecuación en diferencias lineal homogénea de coeficientes constantes, de segundo orden que genera la siguiente secuencia de números:

$$1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, ...$$

1. Encuentre la ecuación en diferencias
2. Encuentre la solución de dicha ecuación

7.4. Dinámica de Precios

En el mercado de las uva de mesa, la demanda se puede representar como :

$$D_t = 1000 - 2P_t$$

y la oferta como:

$$S_t = -500 - 3P_{t-1} + 6P_{t-2}$$

1. Encuentre la ecuación que representa la dinámica para P_t.
2. Analice la evolución del precio en lo que se refiere a equilibrio, estabilidad y presencia de oscilaciones.

7.5. Aplicación a la Ganadería

El siguiente modelo tiene por objetivo analizar la evolución de la masa ganadera en función de los principales factores que inciden en ella. Los supuestos en que descanza el modelo son los siguientes: una vaca alcanza madurez en T años, un porcentaje a de las vacas de edad T o más años tiene un ternero al año, un porcentaje b de los terneros son hembras, un porcentaje c de los terneros vive hasta alcanzar madurez reproductiva, la tasa de mortalidad natural anual de las vacas en edad reproductiva es $(1 - d)$, donde d es la tasa anual de sobrevivencia de las mismas y finalmente, r es el porcentaje de la población hembra adulta que se beneficia anualmente (tasa de extracción).Adicionalmente se supone que no hay importaciones ni exportaciones. Si define X_t como el número de vacas reproductoras en el año t, entonces la evolución de X_t está determinada por la relación:

$$X_t = abcX_{t-T} + (d-r)X_{t-1}$$

Suponga que $a = 0,7$; $b = 0,5$; $c = 0,82$; $d = 0,96$; $r = 0{,}20$; $T = 2$

1. Encuentre la ecuación característica del sistema, con los valores dados anteriormente.
2. Suponga que en $X_0 = 0$ y $X_1 = 10$. Encuentre la solución al sistema
3. Calcule el número de vacas reproductoras en el año 100.

7.6. Ecuaciones en Diferencia Aplicado a la Entomología

Las abejas hembras tienen dos padres, un macho y una hembra mientras que las abejas macho tienen un solo padre, que es hembra. ¿Cuántos ta-ta-ta-ta-(...)-tarabuelos (hembras y machos) tiene una abeja macho?

7.7. Ahorrando para la educación superior

Al nacer su hija un padre decide poner un monto X_0 en una cuenta de ahorro que entrega un interés de $r = 10\,\%$ anual, esperando acumular en 18 años un monto suficiente para asegurar el financiamento de su educación superior.

a) Si necesita acumular \$50 000 000 (50 millones) en $t = 18$, ¿Cuál debería ser el monto X_0 que invierte en $t = 0$? Puede dejar expresado su resultado sin resolver el monto exacto (pero debe despejar hasta el último paso).

b) Entusiasmado con la idea, el abuelo se compromete a aportar \$500 000 (500 mil) al final de cada año, por lo que obtiene

$$x_{t+1} = (1+r)x_t + 500\ 000$$

en cada fecha. Con este aporte, ¿cuánto debería poner el padre en $t = 0$ para acumular \$50 000 000 en $t = 18$? Puede dejar expresado su resultado sin resolver el monto exacto (pero debe despejar hasta el último paso).

c) Por último, suponga que una tía se compromete a aportar a partir de $t = 2$ un $5,75\,\%$ de lo que se haya logrado acumular dos años atrás. Así, se obtiene

$$x_{t+2} = (1+r)x_{t+1} + 0{,}0575x_t + 500\ 000$$

El padre calcula que poniendo $X_0 = 1\ 500\ 000$ en $t = 0$ puede juntar más de lo necesario.

c.1) Resuelva la ecuación en diferencias, considerando que $x_0 = 1\ 500\ 000$ y $x_1 = 2\ 150\ 000$. Puede dejar expresado(s) su(s) resultado(s) sin resolver cada número exactamente (pero debe despejar hasta el último paso las incógnitas que deba resolver).

c.2) Identifique qué variables afectan los valores de las raíces de la ecuación característica λ_1 y λ_2, y qué variables afectan el estado estacionario x^*. ¿En qué afectan entonces los montos iniciales x_0 y x_1? Justifique sus respuestas.

7.8. Evolución Macroeconómica

Sea Y_t el PIB de una economía en términos reales, C_t el consumo agregado y I_t la inversión agregada. La demanda por consumo es dada por

$$C_t = b + cY_{t-1},$$

donde $b > 0$ y $c \in (0, 1)$. La demanda por inversiones es dada por

$$I_t = \overline{I} + a\,(Y_t - Y_{t-1})\,,$$

donde $a, \overline{I} > 0$ y $a \neq 1$. La ecuación del consumo representa que cuanto mayor la renta de los agentes, mayor su consumo. La ecuación de la inversión captura el hecho de que cuando la economía crece más, las empresas aumentan su inversión. Además, el gobierno gasta una cantidad fija y constante en esta economía, representada por G. En equilibrio, se cumple que el PIB es igual al gasto total, o sea, $Y_t = C_t + I_t + G$.

1. Escriba una ecuación en diferencias que describe el PIB de equilibrio de la economía.
2. Encuentre el punto fijo (estado estacionario) de la ecuación del ítem anterior.
3. Encuentre la solución general de la ecuación que encontraste en el ítem 1 en términos del valor inicial del PIB. Es decir, representa el valor de Y_t en equilibrio como una función de parámetros, del tiempo y de Y_0.
4. Suponga que inicialmente la economía se encuentra en estado estacionario y el gobierno decide subir de manera permanente y inesperada el gasto del gobierno G. Un economista ha estimado que el parámetro a es igual a $2/3$, y que el parámetro c es igual a $1/2$ y argumenta que después de este cambio en el gasto del gobierno esta economía va tener ciclos económicos. Es decir, ocurrirán períodos de crecimiento del PIB, seguidos por períodos de caída del PIB. ¿Usted esta de acuerdo con esta predicción? Represente gráficamente la dinámica del PIB después de este cambio en un diagrama de fases con Y_{t+1} en el eje vertical y Y_t en el eje horizontal.
5. Suponga ahora que los parámetros estimados son $a = 1/2$ y $c = 2/3$. ¿Usted esta de acuerdo con la afirmación del economista en el ítem anterior? Una vez más, represente la dinámica del PIB después de la subida en el gasto del gobierno en un diagrama de fases con Y_{t+1} en el eje vertical y Y_t en el eje horizontal (y suponga de nuevo que antes del cambio en G la economía está en estado estacionario).

7.9. Ecuaciones en Diferencia de Segundo Orden Aplicado a Macroeconomía

Suponga que el producto nacional, y_t, está compuesto de producción más inversión. Parte de la producción actual está planificada para consumo, y parte para mantener un stock de inventario de bienes de consumo. Usaremos q_t para indicar la producción destinada a consumo y x_t para la producción destinada a inventario. Asumiremos que no hay rezago en la función de consumo y que los hogares consumen una fracción del producto nacional de cada período

$$c_t = \phi y_t$$

Los productores deben decidir cuanto producir antes de conocer el valor que tendrá el consumo en cada período. Asumiremos que los productores deciden su producción para consumo de modo que sea igual al nivel de consumo del período anterior, $q_t = c_{t-1}$. En el caso de la producción para inventarios, x_t, ellos producen una cantidad igual a la diferencia entre las ventas efectivas (iguales al consumo) y las ventas planificadas (iguales a la producción para el consumo) para el período anterior.

En el período t el producto nacional es $y_t = q_t + x_t + I$ donde I es una cantidad exógena y constante de inversión.

1. Derive la ecuación en diferencias para y_t.
2. Encuentre el estado estacionario
3. Encuentre la solución a la ecuación en diferencias
4. ¿Es estable el estadio estacionario?

7.10. Ecuaciones en Diferencia de Segundo Orden Aplicado en Macroeconomía

En un curso de macroeconomía le han dicho que la tasa de crecimiento anual promedio de largo plazo del ingreso nacional es de 5 % y que dicho ingreso no presenta oscilaciones. Estas afirmaciones, por supuesto, deben poder ser verificables a través de evidencia empírica.

En un primer paso usted decide plantear un modelo para la macroeconomía del país, el que consiste de las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} y_t =& c_t + i_t + g_t \\ c_{t+1} =& a + b y_t \\ i_{t+1} =& \mu[c_{t+1} - c_t] \\ g_t =& 1 \end{aligned}$$

donde y es el producto agregado, c es el consumo privado, i es la inversión, y g es el gasto público. Los parámetros a, b, y μ son constantes.

1. Usando las ecuaciones del modelo macroeconómico encuentre la ecuación en diferencias que describe la evolución del producto agregado de la economía

2. Encuentre el estado estacionario del producto agregado de esta economía (si es que hay)

3. ¿Qué restricciones necesita colocar sobre los parámetros del problema para que efectivamente el producto crezca a una tasa de 5 % en el largo plazo?

Apéndice A

Matrices

A.1. Menores Principales de una Matriz

Utilizaremos intensivamente el concepto de matrices (semi-) definidas positivas y negativas. Su principal utilidad en este contexto corresponde a determinar si las funciones que estamos analizando son cóncavas o convexas.

En esta nota nos enfocaremos en las definiciones de (semi-) definidas positivas y negativas y en como determinar si una matriz corresponde a algunas de estas categorías. Primero algunas definiciones necesarias.

Definición 1 *Dada una matriz* $\mathbf{A}$ *de tamaño* $n \times n$ *y un número entero* k *tal que* $0 < k \leq n$*, entonces*

- *El determinante de cualquier matriz* $k \times k$*, obtenida removiendo* $n-k$ *filas y* $n-k$ *columnas de* $\mathbf{A}$ *se denomina* menor
- *Si el determinante se obtiene de la matriz creada eliminando las mismas* $n-k$ *filas y columnas de* $\mathbf{A}$*, entonces se denomina* menor principal *de orden* k
- *Si el determinante se obtiene de la matriz creada eliminando las últimas* $n-k$ *filas y columnas de* $\mathbf{A}$*, entonces se denomina* menor principal dominante *de orden* k

Notar la diferencia entre las dos primeras definiciones. Supongamos que tenemos una matriz de 3×3. Podemos crear un menor de orden 2 eliminando la primera fila y la tercera columna. Para ser un menor principal, entonces debemos eliminar la primera columna **y** la primera fila, no podemos tomar columnas y filas de orden distinto. La tercera definición nos dice que el menor principal dominante de orden 2 se crea eliminando la tercera fila y la tercera columna. En general, para una matriz de dimensión $n \times n$ tenemos n menores principales de orden 1, y $\frac{n!}{(n-k)!k!}$ menores principales de orden k, lo que da un total de $2^n - 1$ menores principales. Veamos esto en un ejemplo.

Ejemplo Matriz 3×3

Tomemos la matriz $\mathbf{B}$,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

entonces el determinante

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

es un menor principal y también un menor principal dominante de orden $k = 2$ ya que eliminamos las $n - k = 3 - 2 = 1$ últimas filas y columnas. Sin embargo, el determinante

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{31} & b_{33} \end{vmatrix}$$

es un menor principal pero un menor principal dominante. Es un menor principal porque elimina la segunda columna y la segunda fila, pero para ser dominante debemos eliminar filas y columnas ordenadamente desde la última (la tercera en este caso). Similarmente, $|b_{11}|$ es un menor principal dominante, pero $|b_{22}|$ es solo menor principal.

De este modo, los menores principales dominantes de $\mathbf{B}$ son

$$|b_{11}|, \quad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

Para tener todos los menores principales debemos agregar a esta lista,

$$|b_{22}|, \quad |b_{33}|, \quad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{31} & b_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

que corresponde justamente a un total de $7 = 2^3 - 1$ menores principales.

Matrices Definida Positiva y Definida Negativa

Nos concentraremos en el caso de matrices simétricas, esto es matrices tales que $\mathbf{A} = \mathbf{A}'$. (Sin embargo esto es sin pérdida de generalidad.)[1]

Consideremos entonces una matriz $\mathbf{A}$ simétrica de dimensión $n \times n$. Llamemos D_k al menor principal dominante que se obtiene de eliminar las últimas $n - k$ filas y columnas de $\mathbf{A}$. La matriz $\mathbf{A}$ es definida positiva si todos los menores principales dominantes son positivos. En el caso de ser definida negativa los menores principales dominantes alternan de signo, partiendo con D_1 negativo. El siguiente teorema describe este resultado formalmente.

Teorema 1 *Sea* $\mathbf{A}$ *una matriz simétrica de dimensión* $n \times n$.

- *La matriz* $\mathbf{A}$ *es definida positiva si y solo si* $D_k > 0, \ \forall k = 1, \ldots, n$.
- *La matriz* $\mathbf{A}$ *es definida negativa si y solo si* $(-1)^k D_k > 0, \ \forall k = 1, \ldots, n$.

Notar que el teorema habla de "si y solo si" por lo que la implicancia va en ambas direcciones. Esto quiere decir que podemos determinar si la matriz es definida o no mediante el análisis de los menores principales. Al mismo tiempo esto nos indica que el máximo número de determinantes a calcular para inspeccionar la matriz es n.

Para el caso de semi-definida necesitamos cambiar el foco y mirar a los menores principales. Esto hace el proceso más tedioso porque el número de determinantes a revisar es mayor. Llamemos $\widetilde{D}_k$ a un menor principal de orden k de una matriz $\mathbf{A}$ simétrica de dimensión $n \times n$. Esta matriz es semi-definida positiva si todos los menores principales, independiente de su orden, son no negativos. Similarmente, es semi-definida negativa si los menores principales de orden impar son no positivos y los de orden par son no negativos. Notar que hay dos cambios respecto del criterio para definida, ya que aparte de considerar los menores principales, también pasamos a desigualdades no estrictas. El resultado formal aparece en el siguiente teorema.

Teorema 2 *Sea* $\mathbf{A}$ *una matriz simétrica de dimensión* $n \times n$.

[1]El interés en matrices simétricas para nosotros viene del hecho que trabajaremos con matrices de este tipo, partiendo por el Hessiano de una función.

- *La matriz* $\mathbf{A}$ *es semi-definida positiva si y solo si*

$$\widetilde{D}_k \geq 0, \ \forall k = 1, \ldots, n$$

- *La matriz* $\mathbf{A}$ *es semi-definida negativa si y solo si*

$$(-1)^k \widetilde{D}_k \leq 0, \ \forall k = 1, \ldots, n$$

  esto es los menores principales alternan signo de acuerdo a su orden.

Ejercicios

Determinemos si las siguientes matrices son (semi-)definida positiva, (semi-)definida negativa o indefinida.

1. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 6 & -3 & 7 \\ -3 & 5 & -6 \\ 7 & -6 & 9 \end{bmatrix}$

Solución

Haremos la parte 5 solamente. Las respuestas a las demás partes están al final. Consideramos primero los menores principales dominantes:

$$|3|, \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

El primer menor principal dominante es positivo. El segundo menor principal dominante es $3 \times 2 - 2 \times 2 = 2$ y positivo. El tercer menor principal dominante requiere calcular el determinante de la matriz completa. Para esto usaremos un "atajo" típico. Copiamos las dos primeras columnas de la matriz al lado derecho de esta.

$$\begin{array}{ccc|cc} 3 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Primero calculamos el producto de los números marcados en rojo, azul y verde, y los sumamos.

$$\begin{array}{ccc|cc} 3 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

y luego calculamos el producto de los números marcados en amarillo, gris y naranjo, y los restamos

$$\begin{array}{ccc|cc} 3 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

obteniendo $(3 \times 2 \times 1) + (2 \times 0 \times 1) + (-1 \times 2 \times 0) - (-1 \times 2 \times -1) - (3 \times 0 \times 0) - (2 \times 2 \times 1)$ que es 0. La matriz no puede ser positiva definida porque un menor principal dominante es 0 pero no estrictamente positivo. Para ver si es semi-definida necesitamos ver los otros menores principales. Notar que **no** puede ser negativa semi-definida porque un menor principal de orden 1 es positivo (y para ser negativa semi-definida debería ser negativo o 0). Chequeamos los otros menores principales de orden 1:

$$|2|, \quad |1|$$

que son todos positivos. Los menores principales de orden 2 son

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

y también son positivos. Con ello tenemos que esta matriz es semi-definida positiva porque todos los menores principales son no negativos.

Respuestas a los demás ejemplos: 1. positiva definida, 2. positiva semi-definida, 3. negativa definida, 4. negativa semi-definida, 6. positiva definida, 7. indefinida (no cumple con las condiciones ni para ser definida ni semi-definida).

A.2. Vectores y Valores Propios y Descomposición de Matrices

A ser incorporado.

Apéndice B

Formulario

Derivadas

- $\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a$.
- $\frac{d}{dx}\operatorname{sen}(x) = \cos(x)$.
- $\frac{d}{dx}\cos(x) = -\operatorname{sen}(x)$.

Suma geométrica

$$1 + a + \cdots + a^t = \sum_{i=0}^{t} a^i = \frac{1 - a^{t+1}}{1 - a}$$

Fórmula de Leibniz

Si $F(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f(t,x)\,dx$, entonces

$$F'(t) = f(t,b(t))b'(t) - f(t,a(t))a'(t) + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,dx$$

Diferencial total

Si $f(x,y)$ es una función, su diferencial total en el punto (x_0, y_0) es

$$df = f_x(x_0,y_0) \cdot dx + f_y(x_0,y_0) \cdot dy$$

Funciones homogéneas y homotéticas

Una función f es homogénea de grado k si para todo (x,y) y para todo $t > 0$, $f(tx,ty) = t^k f(x,y)$. Si $f(x,y)$ es homogénea de grado k, entonces sus derivadas parciales son homogéneas de grado $k-1$, la TMS es homogénea de grado 0 y además se cumple el teorema de Euler:

$$x \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = k \cdot f(x,y)$$

Las funciones homotéticas son transformaciones crecientes de funciones homogéneas y cumplen que su TMS es homogénea de grado 0.

Sea F una función de producción homogénea de grado k. Decimos que:

- F tiene retornos decrecientes a escala si $k < 1$.
- F tiene retornos constantes a escala si $k = 1$.
- F tiene retornos crecientes a escala si $k > 1$.

Teorema de Weierstrass

Si $f : D \to \mathbb{R}$ es continua y D es compacto (es decir, es cerrado y acotado), entonces f alcanza su máximo y su mínimo en D.

Optimización sin restricciones

1. Condiciones necesarias de primer orden

Si $f : D \to \mathbb{R}$ tiene un máximo o un mínimo local en D, entonces ese punto es un punto crítico.

2. Condiciones necesarias y suficientes de segundo orden

Si $f(x, y)$ es una función y (x_0, y_0) es un máximo (mínimo) local de f, entonces $H_f(x_0, y_0)$ es semidefinida negativa (positiva). Además, si (x_0, y_0) es un punto crítico para el cual $H_f(x_0, y_0)$ es:

- Definida positiva, entonces (x_0, y_0) es un mínimo local.
- Definida negativa, entonces (x_0, y_0) es un máximo local.
- Indefinida, entonces (x_0, y_0) es un punto silla.

3. Concavidad y convexidad

Una función $f(x, y)$ es convexa si para cualquier par de puntos (x_0, y_0), (x_1, y_1) y para cualquier $\lambda \in (0, 1)$,

$$f\left(\lambda(x_0, y_0) + (1 - \lambda)(x_1, y_1)\right) \leq \lambda f(x_0, y_0) + (1 - \lambda)f(x_1, y_1)$$

La función se dice estrictamente convexa si la desigualdad anterior es estricta. La función es (estrictamente) cóncava si la desigualdad (estricta) está invertida.

Si una función es cóncava (convexa), entonces sus máximos (mínimos) locales son máximos (mínimos) globales. Si son estrictas, además son únicos.

Se cumple además:

- Una función f es cóncava (convexa) si y solo si su matriz Hessiana (H_f) es semidefinida negativa (positiva) en todos los puntos.
- Si H_f es definida negativa (positiva) entonces f es estrictamente cóncava (convexa).

4. Matrices (semi)definidas positivas y negativas

Sea A una matriz simétrica. Un menor principal dominante (MPD) de orden k es el determinante de la matriz que resulta de mantener las primeras k filas y columnas de A. Un menor principal (MP) es el determinante que resulta de mantener ciertas k filas y **las mismas** k columnas. Luego:

- A es definida positiva si y solo si todos sus MPD son positivos.
- A es definida negativa si y solo si sus MPD alternan signo y el de orden 1 es negativo.
- A es semidefinida positiva si y solo si sus MP son ≥ 0.
- A es semidefinida negativa si y solo si sus MP de orden par son ≥ 0 y los de orden impar son ≤ 0.

Si A no es semidefinida de ningún tipo se dice que es indefinida.

5. Cuasiconcavidad y cuasiconvexidad

Para una función $f(x, y)$, su Hessiano orlado es la matriz

$$\overline{H} = \begin{bmatrix} 0 & f_x & f_y \\ f_x & f_{xx} & f_{xy} \\ f_y & f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$$

Entonces

- La función f es cuasicóncava si para $\overline{H}$ los MPD de orden par son negativos y los de orden impar (mayores que 1) son positivos.
- Si f es cuasicóncava, entonces para $\overline{H}$ los MPD de orden par son ≤ 0 y los de orden impar (mayores que 1) son ≥ 0.
- f es cuasicóncava si y solo si el conjunto sobrenivel $P^c = \{(x, y) \mid f(x, y) \geq c\}$ es convexo para todo c.
- Si $f(\mathbf{x})$ es cuasicóncava y $F(z)$ es estrictamente creciente, entonces $F(f(\mathbf{x}))$ es cuasicóncava.
- f es cuasiconvexa si y solo si $-f$ es cuasicóncava.

Optimización con restricciones de igualdad

En esta parte, las letras en negrita corresponden a vectores. Por ejemplo, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ es un vector en $\mathbb{R}^n$.

1. Método de Lagrange

Sean $f, g_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con $j = 1, \ldots, m$ funciones con derivadas parciales continuas y sean $c_1, \ldots, c_m$ números reales. Supongamos que $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ es la solución del problema

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{s.a.} \quad & g_1(\mathbf{x}) = c_1 \\ & \vdots \\ & g_m(\mathbf{x}) = c_m \end{aligned}$$

y los vectores gradiente de las restriciones g_j evaluados en $\mathbf{x}^*$ son linealmente independientes. Entonces existen números $\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*$ tales que $(\mathbf{x}^*, \lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*)$ es un punto crítico de

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \left[g_j(\mathbf{x}) - c_j \right]$$

2. Condiciones de suficiencia local (2 variables y 1 restricción)

Sea $\tilde{H}$ la matriz

$$\tilde{H}(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & g_x(x, y) & g_y(x, y) \\ g_x(x, y) & f_{xx}(x, y) - \lambda g_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) - \lambda g_{xy}(x, y) \\ g_y(x, y) & f_{xy}(x, y) - \lambda g_{xy}(x, y) & f_{yy}(x, y) - \lambda g_{yy}(x, y) \end{pmatrix}$$

Sean f y g funciones bivariadas con derivadas parciales continuas y $c \in \mathbb{R}$. Consideremos los problemas

$$\begin{aligned} \max_{x,y} \quad & f(x, y) \\ \text{s.a.} \quad & g(x, y) = c \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} \min_{x,y} \quad & f(x, y) \\ \text{s.a.} \quad & g(x, y) = c \end{aligned}$$

con candidato (x^*, y^*, λ^*) que verifica el teorema de Lagrange. Considere $\tilde{H}^* = \tilde{H}(x^*, y^*, \lambda^*)$ la matriz Hessiana definida antes. Llame D al determinante de $\tilde{H}^*$. Entonces

- Si $D > 0$, (x^*, y^*) es un máximo local de f entre los puntos que cumplen la restricción.
- Si $D < 0$, (x^*, y^*) es un mínimo local de f entre los puntos que cumplen la restricción.

3. Condiciones de suficiencia local (el caso general)

Sea $\tilde{H}$ la matriz

$$\tilde{H}(\mathbf{x}, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \nabla g_1(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \nabla g_m(\mathbf{x}) \\ \\ \nabla g_1^T(\mathbf{x}) & \cdots & \nabla g_m^T(\mathbf{x}) & H_{\mathcal{L}}(\mathbf{x}, \lambda_1, \dots, \lambda_m) \end{pmatrix}$$

Sean $f, g_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con $j = 1, \dots, m$ funciones con derivadas parciales continuas y sean $c_1, \dots, c_m$ números reales. Consideremos el problema

$$\begin{array}{ll} \max\limits_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} & f(\mathbf{x}) \\ \text{s.a.} & g_j(\mathbf{x}) = c_j \quad \forall\, j \in \{1, \dots, m\} \end{array}$$

con candidato $(\mathbf{x}^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*)$. Considere $\tilde{H}^*$ la matriz $\tilde{H}$ evaluada en el candidato. Entonces,

- Si para $\tilde{H}^*$ los últimos $n - m$ menores principales dominantes alternan signo, y el último tiene el signo de $(-1)^n$, $\mathbf{x}^*$ es máximo local entre los puntos que cumplen las restricciones.
- Si para $\tilde{H}^*$ los últimos $n - m$ menores principales dominantes tienen el mismo signo de $(-1)^m$, $\mathbf{x}^*$ es un mínimo local entre los puntos que cumplen las restricciones.

4. Condiciones de suficiencia global

Sean $f, g_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con $j = 1, \dots, m$ funciones con derivadas parciales continuas y sean $c_1, \dots, c_m$ números reales. Consideremos los problemas

$$\begin{array}{ll} \max\limits_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} & f(\mathbf{x}) \\ \text{s.a.} & g_j(\mathbf{x}) = c_j \quad \forall\, j \in \{1, \dots, m\} \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{ll} \min\limits_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} & f(\mathbf{x}) \\ \text{s.a.} & g_j(\mathbf{x}) = c_j \quad \forall\, j \in \{1, \dots, m\} \end{array}$$

con candidato $(\mathbf{x}^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*)$. Definamos la función lagrangiana con λ_j^* fijado para todo j

$$\tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* \left[g_j(\mathbf{x}) - c_j \right]$$

Entonces:

- Si $\tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{x})$ es cóncava, $\mathbf{x}^*$ es solución del problema de maximización.
- Si $\tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{x})$ es convexa, $\mathbf{x}^*$ es solución del problema de minimización.

5. Interpretación económica de los multiplicadores

Sean $f, g_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con $j = 1, \dots, m$ funciones y sean $c_1, \dots, c_m$ números reales. Consideremos el problema

$$\begin{array}{ll} \max\limits_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} & f(\mathbf{x}) \\ \text{s.a.} & g_j(\mathbf{x}) = c_j \quad \forall\, j \in \{1, \dots, m\} \end{array}$$

con solución $(\mathbf{x}^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*)$ que dependen de $c_1, \dots, c_m$ (es decir, son funciones de m variables). Si $\mathbf{x}^*$ y λ_j^* son funciones con derivada continua para cada j y además se cumple la condición de calificación de restricciones en la solución óptima. Entonces

$$\lambda_j^*(c_1, \dots, c_m) = \frac{\partial}{\partial c_j} f(\mathbf{x}^*(c_1, \dots, c_m))$$

6. Teorema de la envolvente

Sean $f, h_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con $j = 1, \ldots, m$ funciones que dependen de un vector de parámetros $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$. Sean $\mathbf{x}^*(\mathbf{a})$, $\lambda_j^*(\mathbf{a})$ (con $j = 1, \ldots, m$) la solución óptima del problema

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \quad & f(\mathbf{x}; \mathbf{a}) \\ \text{s.a.} \quad & h_j(\mathbf{x}; \mathbf{a}) = 0 \quad \forall\, j \in \{1, \ldots, m\} \end{aligned}$$

que tiene lagrangiano $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda_1, \ldots, \lambda_m; \mathbf{a})$ y función de valor $f^*(\mathbf{a})$. Supongamos que $\mathbf{x}^*$ y λ_j^* son funciones con derivadas parciales continuas con respecto a a_i para todo j y que se satisface la condición de calificación de restricciones en la solución óptima. Entonces

$$\frac{\partial}{\partial a_i} f^*(\mathbf{a}) = \frac{\partial}{\partial a_i} \mathcal{L}(\mathbf{x}^*(\mathbf{a}), \lambda_1^*(\mathbf{a}), \ldots, \lambda_m^*(\mathbf{a}); \mathbf{a})$$

Optimización con restricciones de desigualdad

En esta parte, las letras en negrita corresponden a vectores. Por ejemplo, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ es un vector en $\mathbb{R}^n$.

1. Condiciones necesarias de KKT

Sean $f, g_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con $j = 1, \ldots, m$ funciones con derivadas parciales continuas y sean $c_1, \ldots, c_m$ números reales. Supongamos que $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ es la solución del problema

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{s.a.} \quad & g_1(\mathbf{x}) \leq c_1 \\ & \quad \vdots \\ & g_m(\mathbf{x}) \leq c_m \end{aligned}$$

Defina $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ como antes. Entonces, existen números $\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*$ tales que:

1. $\mathcal{L}_{x_i}(\mathbf{x}^*, \lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*) = 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.
2. $\lambda_j^* \geq 0$ y $\lambda_j^* \big[g_j(\mathbf{x}^* - c_j)\big] = 0$ para todo $j \in \{1, \ldots, m\}$.
3. $g_j(\mathbf{x}^*) \leq c_j$ para todo $j \in \{1, \ldots, m\}$.

2. Condiciones de suficiencia global

Sean $f, g_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con $j = 1, \ldots, m$ funciones con derivadas parciales continuas y sean $c_1, \ldots, c_m$ números reales. Consideremos el problema

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{s.a.} \quad & g_j(\mathbf{x}) \leq c_j \quad \forall\, j \in \{1, \ldots, m\} \end{aligned}$$

con candidato $(\mathbf{x}^*, \lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*)$que cumple las condiciones de KKT. Definimos como antes el lagrangiano con λ_j^* fijado

$$\tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* \big[g_j(\mathbf{x}) - c_j\big]$$

Entonces, si $\tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{x})$ es cóncava, $\mathbf{x}^*$ es solución del problema.

3. Condiciones de suficiencia global con cuasiconcavidad/cuasiconvexidad

Sean $f, g_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con $j = 1, \dots, m$ funciones con derivadas parciales continuas y sean $c_1, \dots, c_m$ números reales. Supongamos que el punto $(\mathbf{x}^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*)$ satisface las condiciones de KKT para el problema

$$\begin{aligned} \max_{x,y} \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{s.a.} \quad & g_j(\mathbf{x}) \le c_j \quad \forall\, j \in \{1, \dots, m\} \end{aligned}$$

Entonces $\mathbf{x}^*$ resuelve el problema si

- $\mathbf{x}^*$ no es un punto crítico de f.
- f es cuasicóncava y $\lambda_j^* g_j$ es cuasiconvexa para todo j.

4. Condiciones de suficiencia local (2 variables y 1 restricción activa)

Sea $\tilde{H}$ la matriz

$$\tilde{H}(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & g_x(x,y) & g_y(x,y) \\ g_x(x,y) & f_{xx}(x,y) - \lambda g_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) - \lambda g_{xy}(x,y) \\ g_y(x,y) & f_{xy}(x,y) - \lambda g_{xy}(x,y) & f_{yy}(x,y) - \lambda g_{yy}(x,y) \end{pmatrix}$$

Sean f y g funciones bivariadas con derivadas parciales continuas y $c \in \mathbb{R}$. Consideremos el problema

$$\begin{aligned} \max_{x,y} \quad & f(x,y) \\ \text{s.a.} \quad & g(x,y) \le c \end{aligned}$$

con candidato (x^*, y^*, λ^*) que verifica las condiciones de KKT. Considere $\tilde{H}^* = \tilde{H}(x^*, y^*, \lambda^*)$ la matriz Hessiana definida antes, evaluada en el candidato. Llame D al determinante de $\tilde{H}^*$. Entonces

- Si $D > 0$, (x^*, y^*) es un máximo local de f entre los puntos que cumplen la restricción.
- Si $D < 0$, (x^*, y^*) es un mínimo local de f entre los puntos que cumplen la restricción.

5. Condiciones de suficiencia local (el caso general)

Suponga que para un candidato a solución $(x^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*)$ del problema

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{s.a.} \quad & g_j(\mathbf{x}) \le c_j \quad \forall\, j \in \{1, \dots, m\} \end{aligned}$$

las primeras k restricciones están activas. Con esto se define $\tilde{H}$ la matriz

$$\tilde{H}(\mathbf{x}, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \nabla g_1(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \nabla g_k(\mathbf{x}) \\ & & & \\ \nabla g_1^T(\mathbf{x}) & \cdots & \nabla g_k^T(\mathbf{x}) & H_{\mathcal{L}}(\mathbf{x}, \lambda_1, \dots, \lambda_m) \end{pmatrix}$$

Note que si $k = 0$, entonces no se pone ningún gradiente y $\tilde{H}$ es la matriz Hessiana de f. Considere $\tilde{H}^*$ la matriz $\tilde{H}$ evaluada en el candidato. Entonces,

- Si para $\tilde{H}^*$ los últimos $n - k$ menores principales dominantes alternan signo, y el último tiene el signo de $(-1)^n$, $\mathbf{x}^*$ es máximo local entre los puntos que cumplen las restricciones.
- Si para $\tilde{H}^*$ los últimos $n - k$ menores principales dominantes tienen el mismo signo de $(-1)^k$, $\mathbf{x}^*$ es un mínimo local entre los puntos que cumplen las restricciones.

6. Interpretación económica de los multiplicadores

Sean $f, g_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con $j = 1, \ldots, m$ funciones y sean $c_1, \ldots, c_m$ números reales. Consideremos el problema

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{s.a.} \quad & g_j(\mathbf{x}) \le c_j \quad \forall\, j \in \{1, \ldots, m\} \end{aligned}$$

con solución $(\mathbf{x}^*, \lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*)$ que dependen de $c_1, \ldots, c_m$ (es decir, son funciones de m variables). Si $\mathbf{x}^*$ y λ_j^* son funciones con derivada continua para cada j y además se cumple la condición de calificación de restricciones en la solución óptima. Entonces

$$\lambda_j^*(c_1, \ldots, c_m) = \frac{\partial}{\partial c_j} f(\mathbf{x}^*(c_1, \ldots, c_m))$$

7. Teorema de la envolvente

Sean $f, h_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con $j = 1, \ldots, m$ funciones que dependen de un vector de parámetros $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$. Sean $\mathbf{x}^*(\mathbf{a})$, $\lambda_j^*(\mathbf{a})$ (con $j = 1, \ldots, m$) la solución óptima del problema

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \quad & f(\mathbf{x}; \mathbf{a}) \\ \text{s.a.} \quad & h_j(\mathbf{x}; \mathbf{a}) \le 0 \quad \forall\, j \in \{1, \ldots, m\} \end{aligned}$$

que tiene lagrangiano $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda_1, \ldots, \lambda_m; \mathbf{a})$ y función de valor $f^*(\mathbf{a})$. Supongamos que $\mathbf{x}^*$ y λ_j^* son funciones con derivadas parciales continuas con respecto a a_i para todo j y que se satisface la condición de calificación de restricciones en la solución óptima. Entonces

$$\frac{\partial}{\partial a_i} f^*(\mathbf{a}) = \frac{\partial}{\partial a_i} \mathcal{L}(\mathbf{x}^*(\mathbf{a}), \lambda_1^*(\mathbf{a}), \ldots, \lambda_m^*(\mathbf{a}); \mathbf{a})$$

Ecuaciones en diferencias (EeD)

1. Teorema de existencia y unicidad

Considere el problema de encontrar una solución a la siguiente EeD de orden k

$$x_{t+k} = f(t, x_{t+k-1}, \ldots, x_t)$$

que además verifique $x_0 = c_0$, $x_1 = c_1$, $\ldots$, $x_{k-1} = c_{k-1}$. Este problema tiene una única solución.

2. Combinaciones lineales de soluciones

Considere la EeD lineal homogénea

$$x_{t+k} + a_{k-1}(t)x_{t+k-1} + \cdots + a_0(t)x_t = 0, \qquad t \in \mathbb{N}_0, \quad t \ge t_0$$

Sea x_t una solución y sea $c_1 \in \mathbb{R}$. Entonces el sistema dinámico $c_1 x_t$ también es solución.

Además, si y_t es otra solución y $c_2 \in \mathbb{R}$, entonces el sistema dinámico $c_1 x_t + c_2 y_t$ también es solución.

3. Solución general a la ecuación en diferencias lineal no homogénea

Considere la EeD lineal no homogénea

$$x_{t+k} + a_{k-1}(t)x_{t+k-1} + \cdots + a_0(t)x_t = g(t), \qquad t \in \mathbb{N}_0, \quad t \ge t_0$$

y sea y_t una solución particular. Sea x_t una solución a la ecuación homogénea asociada,

$$x_{t+k} + a_{k-1}(t)x_{t+k-1} + \cdots + a_0(t)x_t = 0, \qquad t \in \mathbb{N}_0, \quad t \ge t_0$$

Entonces toda solución para la EeD lineal no homogénea es de la forma $cx_t + y_t$ con $c \in \mathbb{R}$.

4. EeDs lineales de primer orden con coeficientes constantes

Considere la EeD lineal homogénea

$$x_{t+1} = ax_t, \qquad t \geq 0$$

donde $a \in \mathbb{R}$. Entonces toda solución a esta ecuación es de la forma ca^t, con $c \in \mathbb{R}$.

Considere la EeD lineal no homogénea

$$x_{t+1} = ax_t + b, \qquad t \geq 0$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces son soluciones particulares:

- $\frac{a^t-1}{a-1}b$, si $a \neq 1$.
- bt, si $a = 1$.

5. EeDs lineales de segundo orden con coeficientes constantes

Considere la EeD lineal homogénea

$$x_{t+2} + a_1 x_{t+1} + a_0 x_t = 0, \qquad t \geq 0$$

donde $a_1, a_0, \in \mathbb{R}$. Sean $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ las dos soluciones de la ecuación característica

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$$

Entonces la solución general de EeD lineal homogénea es:

1. $c_1\lambda_1^t + c_2\lambda_2^t$ si $\lambda_1 \neq \lambda_2$.
2. $c_1\lambda_1^t + c_2\lambda_2^t t$ si $\lambda_1 = \lambda_2$.

Además, c_1, c_2 son tales que la solución es un número real para todo t.

6. Método de los coeficientes indeterminados para EeDs lineales

Considere las EeDs lineales no homogéneas

$$x_{t+1} = ax_t + b_t, \qquad t \geq 0$$
$$x_{t+2} + a_1 x_{t+1} + a_0 x_t = b_t$$

Entonces, la forma de la solución particular puede obtenerse de la siguiente tabla:

b_t	Candidato
ba^t	Aa^t
$\operatorname{sen}(bt)$ ó $\cos(bt)$	$A\operatorname{sen}(bt) + B\cos(bt)$
bt^n	$A_0 + A_1 t + \cdots + A_n t^n$

Y si b_t es combinación de algunas de las opciones, el candidato también lo es.

7. Puntos fijos y soluciones a EeDs lineales

Suponga que x_t es solución a alguna de las siguientes EeDs lineales

$$x_{t+1} = ax_t + b \tag{1}$$
$$x_{t+2} + a_1 x_{t+1} + a_0 x_t = b \tag{2}$$

y suponga que x^* es un punto fijo de x_t. Entonces,

- Si x_t resuelve (1), $x_t = a^t(x_0 - x^*) + x^*$.
- Si x_t resuelve (2), entonces $x_t = \tilde{x}_t + x^*$, donde $\tilde{x}_t$ es solución general a la versión homogénea de (2).

8. Estabilidad de puntos fijos

Sea f una función continuamente diferenciable y sea x_t un sistema dinámico que satisface la siguiente EeD de primer orden

$$x_{t+1} = f(x_t)$$

Sea x^* un punto fijo de x_t. Entonces

- Si $|f'(x^*)| < 1$, entonces x^* es localmente estable.
- Si $|f'(x^*)| > 1$, entonces x^* no es localmente estable (ni globalmente estable).