

MAT1203 - ÁLGEBRA LINEAL

Clase 12: Caracterizaciones de matrices invertibles

1. Una **matriz triangular superior** de $m \times n$ es aquella cuyas entradas debajo de la diagonal principal son ceros. ¿Cuándo es invertible una matriz triangular superior cuadrada?. Justifique su respuesta.
2. Una **matriz triangular inferior** de $m \times n$ es aquella cuyas entradas arriba de la diagonal principal son ceros. ¿Cuándo es invertible una matriz triangular inferior cuadrada?. Justifique su respuesta.
3. ¿Puede ser invertible una matriz de 4×4 , cuando sus columnas no generan a \mathbb{R}^4 ?
¿Por qué?
4. Si una matriz A de $n \times n$ es invertible, entonces las columnas de A^T son linealmente independientes. Explique por qué.
5. ¿Puede una matriz cuadrada con dos filas idénticas ser invertible? ¿Por qué?
6. Sean A y B matrices de $n \times n$. Demuestre que si AB es invertible, también lo es A .
[Sugerencia. Existe una matriz W tal que $ABW = I$. ¿Por qué?]
7. Si A es una matriz de 5×5 y la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es consistente para toda \mathbf{b} en \mathbb{R}^5 , ¿es posible que, para alguna \mathbf{b} , la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tenga más de una solución?
¿Por qué?
8. Si la ecuación $C\mathbf{u} = \mathbf{v}$ tiene más de una solución para alguna \mathbf{v} en \mathbb{R}^n , ¿pueden las columnas de la matriz C de $n \times n$ generar a \mathbb{R}^n ? ¿Por qué?
9. Si las matrices E y F de $n \times n$ tienen la propiedad de que $EF = I$, entonces E y F conmutan. Explique por qué.
10. Suponga que F es una matriz de $n \times n$. Si la ecuación $F\mathbf{x} = \mathbf{y}$ es inconsistente para alguna \mathbf{y} en \mathbb{R}^n , ¿qué se puede decir acerca de la ecuación $F\mathbf{x} = \mathbf{0}$? ¿Por qué?
11. Considere $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una transformación lineal dada por
 - a) $T(x_1, x_2) = (-5x_1 + 9x_2, 4x_1 - 7x_2)$
 - b) $T(x_1, x_2) = (2x_1 - 8x_2, -2x_1 + 7x_2)$

Demuestre que T es invertible y encuentre una fórmula para T^{-1} .