Código de Honor: Como miembro de la comunidad de la Pontificia Universidad Católica de Chile, me comprometo a respetar los principios y normativas que la rigen. Asimismo, me comprometo a actuar con rectitud y honestidad en esta evaluación.
Adicionalmente declaro estar en condiciones de salud adecuadas para rendir esta evaluación y que me presento a ésta bajo mi responsabilidad. En caso de sentirme mal o tener alguna complicación, deberé informarlo inmediatamente al ayudante o profesor en sala.

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Economía y Administración

Segundo Semestre 2023

Curso	**:**	**Probabilidad y Estadística**
Sigla	**:**	**EAA1510**
Profesores	**:**	**Cristian Vásquez (Sec 1 - 2), Ricardo Aravena (Sec 3) y Ricardo Olea (Sec 4)**

Pauta Control 1

Problema 1

En una importante empresa de telecomunicaciones local, se hizo un estudio sobre el tiempo de vida útil de las antenas de celular de la compañía y, a partir de información histórica sobre estos dispositivos, se logró determinar que el tiempo de vida (en unidad de miles de horas) tiene un comportamiento en distribución según la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \kappa\, x\, e^{-x^2}, \quad x \geq 0,$$

donde κ es una constante desconocida. Con los antecedentes entregados realice lo siguiente:

a) **[1.0 Ptos]** Muestre que el valor de la constante $\kappa = 2$ para que la función del tiempo de vida de las antenas de celular sea efectivamente una función de densidad.

b) **[2.0 Ptos]** Determine la función de distribución acumulada y, por medio de esta función calcule la probabilidad que el tiempo de vida útil de una antena de celular de la compañía seleccionada al azar se mayor que 600 horas y menor que 1000 horas.

c) **[2.0 Ptos]** Determine la mediana del tiempo de vida útil de las antenas de celular.

d) **[1.0 Ptos]** Suponga que usted es el director de planificación para la mantención preventiva de las antenas de celular y, envía a una equipo a revisar una antena que se sabe que ya tiene al menos 600 horas de funcionamiento. ¿Cuál es la probabilidad de que la antena de celular que fue a revisar el equipo de mantención falle antes de las 1000 horas de funcionamiento?

Desarrollo

a) Para que $f(x)$ se función de densidad debe cumplir con $f(x) \geq 0$ y $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ **[0.2 Ptos.]**, por lo tanto, de esas condiciones se puede determinar el valor de κ;

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^\infty \kappa\, x\, e^{-x^2} dx, \\ &= -\frac{\kappa}{2} e^{-x^2}\Bigg|_{x=0}^{x=\infty}, \\ &= \frac{\kappa}{2}. \ \textbf{[0.5 Ptos.]} \end{aligned}$$

Así, despejando se tiene que $\kappa = 2$. **[0.3 Ptos.]**

b) Note que antes de 0, la función de densidad es $f(x) = 0$ **[0.2 Ptos.]**, por lo tanto, si $x > 0$ se tiene que,

$$\begin{aligned} F(x) &= \Pr(X \leq x), \\ &= \int_0^x 2\,u\,e^{-u^2} du, \\ &= -e^{-u^2}\Big|_{u=0}^{u=x}, \\ &= 1 - e^{-x^2}. \textbf{ [0.5 Ptos.]} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{sí } x < 0, \\ 1 - e^{-x^2}, & \text{sí } x \geq 0. \end{cases} \quad \textbf{[0.3 Ptos.]}$$

Por medio de esta función se puede determinar la probabilidad solicitada $\Pr(0.6 < X < 1)$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \Pr(0.6 < X < 1) &= F(1) - F(0.6), \textbf{ [0.3 Ptos.]} \\ &= 1 - e^{-1} - (1 - e^{-0.6^2}), \\ &= e^{-0.6^2} - e^{-1}, \\ &= 0.33 \textbf{ [0.7 Ptos.]} \end{aligned}$$

c) La mediana es el punto m que satisface la siguiente relación cuando se trabaja con variables aleatorias continuas $F(m) = 1/2$ **[0.5 Ptos.]**, por lo tanto;

$$\frac{1}{2} = 1 - e^{-m^2} \textbf{ [0.5 Ptos.]}, \Longrightarrow e^{-m^2} = \frac{1}{2}, \Longrightarrow m = \sqrt{\ln(2)} = 0.833 \textbf{ [0.8 Ptos.]}$$

La mediana es cerca de las 833 horas de vida de duración. **[0.2 Ptos.]**

d) Aquí se tiene información a priori, por lo tanto, se debe utilizar probabilidad condicional;

$$\begin{aligned} \Pr(X < 1 \,|\, X \geq 0.6) &= \frac{\Pr[(X \geq 0.6) \cap (X < 1)]}{\Pr(X \geq 0.6)}, \textbf{ [0.3 Ptos.]} \\ &= \frac{\Pr(0.6 \leq X < 1)}{\Pr(X \geq 0.6)}, \\ &= \frac{\Pr(0.6 \leq X < 1)}{1 - \Pr(X < 0.6)}, \textbf{ [0.2 Ptos.]} \\ &= \frac{0.33}{e^{-0.6^2}}, \qquad \text{cálculos del item } b), \\ &= 0.473 \textbf{ [0.5 Ptos.]} \end{aligned}$$

Formulario

Axiomas de una medida de probabilidad P:

- **Axioma 1**: Sea A un evento del espacio muestral S. Entonces $P(A) \geq 0$
- **Axioma 2**: La probabilidad del evento certeza S es $P(S) = 1$
- **Axioma 3**: Sean A y B dos eventos mutuamente excluyentes (disjuntos) definidos en S, entonces
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$
- **Axioma 4**: Cuando S tiene un número infinito de eventos, se requiere de un cuarto axioma. Sean $A_1, A_2, ...$ eventos definidos en S, tal que $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$ entonces
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Propiedades de una medida de probabilidad P:

- $P(A^c) = 1 - P(A)$
- $P(\emptyset) = 0$
- Si $A \subset B$ entonces $P(A) \leq P(B)$
- Para cualquier evento A, se tiene que $P(A) \leq 1$
- $P(A) = P(A \cap B^C) + P(A \cap B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Probabilidad Condicional: Sean A y B dos eventos definidos en S tales que $P(B) > 0$. La probabilidad condicional de A, suponiendo que B ya ha ocurrido, está dada por

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Propiedades:

- $P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$
- $P(A \cap B \cap C) = P(C|A \cap B)P(A|B)P(B)$
- $P(B^c|A) = 1 - P(B|A)$
- $P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C) - P(A \cap B|C)$

Probabilidades Totales: Sean $A_1, A_2, ..., A_n$ una partición del espacio muestral S, entonces para cualquier evento B se tiene que

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)$$

dicho resultado se conoce como el Teorema de Probabilidades Totales.

Formulario

Función de Distribución: La función de distribución acumulada de una variable aleatoria X se define por

$$F(x) = P(X \leq x)$$

Propiedades de la función de distribución:

- *i)* $F(x)$ está definida para todos los números reales. *ii)* $0 \leq F(x) \leq 1$, puesto que está definida a través de una probabilidad. *iii)* $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$
- *iv)* Es una función continua por la derecha, cuya gráfica en el caso discreto, $F(x)$ es una función escalonada (constante a trozos), cuyos saltos se producen en los valores que toma la variable

Valor Esperado: El valor esperado de una variable X, μ_X, está dado por:

$$\mu_X = \mathrm{E}(X) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{x\in\Theta_X} x \cdot p_X(x), & \text{Caso Discreto} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\, dx, & \text{Caso Continuo} \end{cases}$$

Valor Esperado de $g(X)$: Dada una función de una variable aleatoria $g(X)$, el valor esperado de esta puede ser obtenido como:

$$\mathrm{E}[g(X)] = \begin{cases} \displaystyle\sum_{x\in\Theta_X} g(x) \cdot p_X(x), & \text{Caso Discreto} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x)\, dx, & \text{Caso Continuo} \end{cases}$$

Varianza: La varianza de una variable aleatoria X está dada por:

$$\sigma_X^2 = \mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}[(X-\mu_X)^2] = \begin{cases} \displaystyle\sum_{x\in\Theta_X} (x-\mu_X)^2 \cdot p_X(x), & \text{Caso Discreto} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_X)^2 \cdot f_X(x)\, dx, & \text{Caso Continuo} \end{cases}$$

También se puede calcular con $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - \mu_X^2$.

Función Generadora de Momentos: La FGM de una variable aleatoria X se define como

$$M_X(t) = \mathrm{E}[\exp(t\,X)]$$

El r-ésimo momento de X se puede determinar siguiente forma $M^{(r)}(0) = \mathrm{E}(X^r)$