PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Segundo semestre 2024

Pauta Interrogación 1 - MAT1203

1. Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ vectores en $\mathbb{R}^n$.

   (a) Demuestre que si $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son vectores no nulos, de igual norma y tales que el ángulo formado por $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ es el mismo que el ángulo formado por $\mathbf{w}$ y $\mathbf{v}$ entonces $\mathbf{u} - \mathbf{w}$ y $\mathbf{v}$ son perpendiculares.

   Solución:

   Recordamos que si θ es el ángulo formado por los vectores x e y, entonces

   $$\cos(\theta) = \frac{x \cdot y}{||x||\,||y||},$$

   entonces del enunciado tenemos que

   $$\frac{u \cdot v}{||u||\,||v||} = \frac{w \cdot v}{||w||\,||v||},$$

   como $||u|| = ||v|| = ||w||$, tenemos que $u \cdot v = w \cdot v$, lo que equivale a que $(u - w) \cdot v = 0$, es decir que (v-w) es ortogonal a v.

   (b) Demuestre que si $\mathbf{x}$ está en el conjunto generado por los vectores $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ entonces $\mathbf{x}$ está en el conjunto generado por los vectores$\{\mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$.

   Solución:

   Observe que $\mathbf{u}= \frac{1}{2}(\mathbf{u} - \mathbf{v})+\frac{1}{2}(\mathbf{u} + \mathbf{v})+0\mathbf{w}$, que $\mathbf{v}= -\frac{1}{2}(\mathbf{u} - \mathbf{v})+\frac{1}{2}(\mathbf{u} + \mathbf{v})+0\mathbf{w}$, por lo tanto si x está en el generado por los vectores $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$, es decir, si $x = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} + \gamma\mathbf{w}$ entonces

   $$x = \alpha\left(\frac{1}{2}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{0w}\right) + \beta\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{0w}\right) + \gamma\mathbf{w}$$

   es decir, si $\mathbf{x}$ está en el conjunto generado por los vectores $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ entonces $\mathbf{x}$ está en el conjunto generado por los vectores$\{\mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$.

Distribución de puntajes:

- (1 punto) Por conocer la fórmula del ángulo entre vectores.
- (1 punto) Por escribir al relación dada en el enunciado.
- (1 punto) Por desarrollar y concluir.

- (1 punto) Por evidenciar que conoce la definición de conjunto generado escribiendo un vector como combinación lineal de los otros.
- (1 punto) Por escribir los vectores del segundo como combinación lineal de los primeros o justificar este hecho.
- (1 punto) Por concluir correctamente.

2. Considere las rectas $L_1 : \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ y $L_2 : \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} \right\}$

   (a) Determine la intersección entre L_1 y L_2.
   Solución:
   Para determinar la intersección entre las rectas dadas debemos encontrar $s, t \in \mathbb{R}$ tales que
   $$1 = -s, \;\; -1 + 3t = 2\,,\; 2 + t = -1 - 4s$$
   observe que las tres ecuaciones se satisfacen con $s = -1$ y $t = 1$, de esta manera el punto de intersección es $(1, 2, 3)$.

   (b) Determine una ecuación general del plano que contiene a L_1 y L_2.
   Solución:

   Del punto anterior tenemos que la ecuación vectorial del plano que contiene a ambas rectas es:
   $$\Pi : \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} \right\}$$
   cuya ecuación paramétrica corresponde a
   $$x = 1 - s, \;\; y = 2 + 3t, \;\; z = 3 + t - 4s$$
   despejando los parámetros en las primera dos ecuaciones tenemos que $s = 1 - x, \;\; t = \dfrac{y-2}{3}$, reemplazando esto en la tercera ecuación obtenemos $z = 3 + \dfrac{y-2}{3} - 4(1-x)$ obteniendo la ecuación general que está dada por
   $$12x + y - 3z = 5.$$

Distribución de puntajes:

- (1 punto) Por escribir correctamente las condiciones para encontrar la intersección.
- (1 punto) Por determinar el punto de intersección.
- (2 punto) Por describir el plano o vectorialmente o de forma paramétrica.
- (1 punto) Por encontrar las relaciones entre los parámetros.
- (1 punto) ¨Por determinar una ecuación general.

3. Suponga que el sistema $A\mathbf{x}= 0$ tiene como solución el conjunto

$$\left\{ t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} ; t, s \in \mathbb{R} \right\}$$

(a) ¿Es $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -6 \\ -1 \end{bmatrix}$ solución del sistema $A\mathbf{x}= 0$?

(b) ¿Existe un vector $\mathbf{c}$ de modo que el sistema $Ax = \mathbf{c}$ tenga como solución el conjunto

$$\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -6 \\ -1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} ; t, s \in \mathbb{R} \right\}?$$

Solución:

Observe que el vector $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -6 \\ -1 \end{bmatrix}$ solución del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ si y solo si existen s y $t \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{cases} t + 2s & = & -1 \\ 2t - s & = & 3 \\ 3s & = & -6 \\ -t & = & -1 \end{cases}$$

de las últimas dos ecuaciones tenemos que $t = 1$ y $s = -2$, pero con estos valores no se satisfacen las primeras dos ecuaciones, por lo tanto el vector no es solución de $Ax = 0$.

Para la segunda pregunta basta tomar $\mathbf{c}=A \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -6 \\ -1 \end{bmatrix}$, ya que si

$$x = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -6 \\ -1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix},$$

tendremos que

$$Ax = A \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -6 \\ -1 \end{bmatrix} + A \left(t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = A \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -6 \\ -1 \end{bmatrix} + 0 = \mathbf{c}.$$

Distribución de puntajes:

- (1 punto) Por determinar el sistema que debe resolver para determinar si es solución o no.
- (1 punto) Por concluir que no es solución.
- (2 punto) Por encontrar el valor de C.
- (2 punto) Por justificar el valor de C.

4. Considere el sistema de ecuaciones en las variables x, y, z

$$\begin{cases} x + y + az &= 1 \\ x + ay + z &= 1 \\ ax + y + z &= 1 \end{cases}$$

(a) Determine para qué valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$ el sistema tiene solución.

(b) Determine, si es posible, para qué valores a la solución de este sistema es una recta.

Solución:
Escalonando la matriz ampliada asociada al sistema, tenemos que

$$\begin{array}{rl} & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \\ F_2 \to F_2 - F_1 \quad \sim & \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & (a-1) & (1-a) & 0 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \\ F_3 \to F_3 - aF_1 \quad \sim & \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & (a-1) & (1-a) & 0 \\ 0 & (1-a) & (1-a^2) & (1-a) \end{array}\right] \\ F_3 \to F_3 + F_2 \quad \sim & \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & (a-1) & (1-a) & 0 \\ 0 & 0 & (1-a)(a+2) & (1-a) \end{array}\right] \end{array}$$

Observe que si $a = 1$ la matriz queda

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

lo que correspondería a un sistema consistente con dos variables libres, es decir, un sistema cuya solución es un plano en $\mathbb{R}^3$.

Si $a \neq 1$ podemos seguir escalonando, obteniendo que

$$\begin{array}{rl} & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & (a-1) & (1-a) & 0 \\ 0 & 0 & (1-a)(a+2) & (1-a) \end{array}\right] \\ F_2 \to \dfrac{1}{(a-1)} F_2 \quad \sim & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-a)(a+2) & (1-a) \end{array}\right] \\ F_3 \to \dfrac{1}{(1-a)} F_3 \quad \sim & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & (a+2) & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

Por lo tanto, si $a = -2$, la matriz queda

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

lo que corresponde a un sistema inconsistente.

Ahora, si $a \neq 1$ y $a \neq -2$, tenemos que una FER de la matriz es

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{1}{a+2} \end{array}\right]$$

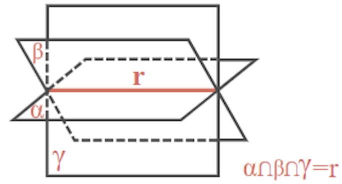
lo que corresponde a un sistema con solución única.

De lo anterior podemos concluir que el sistema tiene solución si y solo si $a \neq -2$, y que no existe valor de a de modo que la solución sea una recta. **Distribución de puntajes:**

- (1 punto) Por plantear la matriz ampliada correctamente.
- (1 punto) Por escalonar la matriz.
- (1 punto) Por estudiar el caso $a = 1$
- (1 punto) Por estudiar el caso $a \neq 1$ y $a \neq -2$
- (1 punto) Por estudiar caso $a = -2$.
- (1 punto) Por responder, justificadamente que no es posible tener por solución una recta.

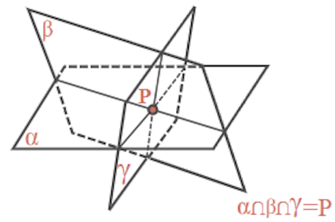
5. Determine cuáles de los sistemas de ecuaciones lineales que aparecen en la columna de la izquierda, podrían corresponder a las posiciones relativas de planos ilustradas en la columna de la derecha. Justifique su respuesta en cada caso.

$$A \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x+y-z & = & 3 \\ x-y-z & = & 1 \\ 2x+y-2z & = & 0 \end{array} \right.$$



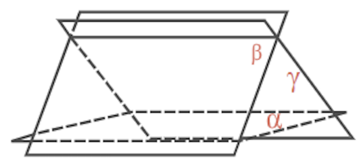
I

$$B \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x+y-z & = & 3 \\ x-y-z & = & 1 \\ x+2y-z & = & 4 \end{array} \right.$$



II

$$C \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x+y-z & = & 3 \\ x-y-z & = & 1 \\ x+2y+z & = & 1 \end{array} \right.$$



III

Solución:
Dado que las dos primeras ecuaciones de los tres sistemas son las mismas, podemos construir una matriz ampliada que contenga a todas las ecuaciones y escalonarla para realizar el análisis.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 \end{array}\right]$$

Así, tenemos formas escalonadas de cada uno de los sistemas anteriores:

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad C = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 \end{array}\right]$$

Como se puede ver, el sistema A no tiene solución, porque su tercera ecuación se transforma en una contradicción. Esta situación corresponde al gráfico III, donde no hay intersección de los tres planos.

Para el sistema B hay dos variables principales y una libre, por lo que el sistema tiene infinitas soluciones, que se representan por una recta. Esta situación se describe en el gráfico I.

En el sistema C todas las variables son principales, la solución del sistema es única y corresponde a un punto, como se describe en el gráfico II.

Distribución de puntajes:

- (0.5 punto) Por plantear la matriz (o las matrices por separados).
- (1 punto) Por escalonar (o resolver).
- (1.5 punto) Por justificar para identificar A con III.
- (1.5 punto) Por justificar para identificar B con I.
- (1.5 punto) Por justificar para identificar C con II.