

Curso : Inferencia Estadística
Sigla : EAA1520
Profesores : M Ignacia Vicuña (Sec 1), Felipe Ossa (Sec 2-3), Ricardo Olea (Sec 4)

Pauta Prueba 1

Problema 1

El precio de una acción varía de forma aleatoria, de manera que el incremento (positivo o negativo) del precio cada minuto, se puede modelar por una variable aleatoria discreta X (en pesos) con la siguiente función de probabilidad:

$$P(X = 25) = 0.5 \quad P(X = 0) = 0.2 \quad P(X = -25) = 0.3$$

- (a) [2.0 Ptos] Encuentre la probabilidad aproximada de que el precio de la acción aumente 800 pesos o más después de 3 horas.

Defina R_t a los retornos diarios del precio de la acción en el día t , los cuales se pueden asumir independientes entre sí y distribuyen Normal con media cero y varianza σ^2 . En finanzas, la desviación estándar de los retornos es conocida como la volatilidad. Como σ es desconocido, se estima la volatilidad a partir de los retornos registrados en los últimos n días mediante el siguiente estadístico:

$$V = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n R_t^2}$$

- (b) [2.0 Ptos] Para $n = 40$ días, encuentre la probabilidad de que la volatilidad estimada sea mayor a la verdadera volatilidad pero que no sobrepase su valor en un 12 %, es decir, calcule $P(\sigma < V < 1.12\sigma)$.
- (c) [2.0 Ptos] ¿Es V^2 un estimador insesgado para el parámetro σ^2 ?

Cuadro 1: Inversa de la función de distribución $\chi^2(n)$ de Pearson

α n	0.48	0.53	0.68	0.72	0.84	0.87	0.89
39	38.00	39.00	42.63	43.73	47.81	49.05	50.29
40	39.00	40.00	43.68	44.80	48.92	50.18	51.43
41	40.00	41.00	44.73	45.87	50.03	51.30	52.57

Solución

- (a) Sea X_i el incremento del precio de la acción en el minuto i .

Defina $T = \sum_{i=1}^{180} X_i$ el incremento total del precio de la acción después de 3 horas. [0.1 Ptos.]

Piden calcular $P(T > 800)$ de manera aproximada. [0.1 Ptos.] Por TLC se tiene que:

$$T = \sum_{i=1}^{180} X_i \approx \text{Normal}(180\mu, 180\sigma^2) \quad [0.4 \text{ Ptos.}]$$

donde,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_i) &= 0.5 \cdot 25 + 0.2 \cdot 0 + 0.3 \cdot (-25) = 5 \quad [\textbf{0.4 Ptos.}] \\ \text{Var}(X_i) &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X) \\ &= 0.5 \cdot (25)^2 + 0.2 \cdot 0^2 + 0.3 \cdot (-25)^2 - 5^2 = 475 \quad [\textbf{0.4 Ptos.}]\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}P(T > 800) &\approx P\left(\frac{T - 180 \cdot 5}{\sqrt{180 \cdot 475}} > \frac{800 - 180 \cdot 5}{\sqrt{180 \cdot 475}}\right) \quad [\textbf{0.2 Ptos.}] \\ &= 1 - \Phi(-0.34) \quad [\textbf{0.2 Ptos.}] \\ &= \Phi(0.34) = 0.6331 \quad [\textbf{0.2 Ptos.}]\end{aligned}$$

(b) Sea R_t el retorno diarios de la acción en el día t . Por enunciado se tiene que $R_t \sim \text{Normal}(0, \sigma^2)$.

Note que $\frac{nV^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$, [**0.5 Ptos.**] de esta manera,

$$\begin{aligned}P(\sigma < V < 1.12\sigma) &= P(\sigma^2 < V^2 < 1.12^2\sigma^2) \quad [\textbf{0.25 Ptos.}] \\ &= P\left(\frac{n\sigma^2}{\sigma^2} < \frac{nV^2}{\sigma^2} < \frac{1.12^2n\sigma^2}{\sigma^2}\right) \quad [\textbf{0.25 Ptos.}] \\ &= P\left(n < \frac{nV^2}{\sigma^2} < 1.2544n\right) \quad [\textbf{0.25 Ptos.}] \\ &= P\left(40 < \frac{nV^2}{\sigma^2} < 50.176\right) \quad [\textbf{0.25 Ptos.}]\end{aligned}$$

Buscando en la tabla chi-cuadrado con $n = 40$ grados de libertad se obtiene:

$$P(\sigma < V < 1.12\sigma) = P\left(40 < \frac{nV^2}{\sigma^2} < 50.176\right) = 0.87 - 0.53 = 0.34 \quad [\textbf{0.5 Ptos.}]$$

(c) Para evaluar si el estimador es insesgado debemos calcular $E(V^2)$.

$$\mathbb{E}(V^2) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n R_t^2\right) \stackrel{[\textbf{0.5 Ptos.}]}{=} \frac{1}{n} \left(\sum_{t=1}^n \mathbb{E}(R_t^2)\right) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \sigma^2 \mathbb{E}\left(\frac{R_t^2}{\sigma^2}\right) \stackrel{[\textbf{0.5 Ptos.}]}{=} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \sigma^2 \cdot 1 = \sigma^2.$$

ya que la variable $\frac{R_t^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(1)$, luego por formulario se tiene que $\mathbb{E}\left(\frac{R_t^2}{\sigma^2}\right) = 1$. [**0.5 Ptos.**] Lo que se concluye que V^2 es un estimador insesgado para σ^2 . [**0.5 Ptos.**]

Notar que alternativamente se puede calcular $\mathbb{E}(R_t^2)$ como $\mathbb{E}(R_t^2) = \text{Var}(R_t) = \sigma^2$ y se llega al mismo resultado.

Problema 2

En una ciudad, al ocurrir un apagón o corte de electricidad general, usualmente se espera un cierto tiempo hasta que la respectiva compañía eléctrica repare el desperfecto y reinicie el flujo nuevamente a los hogares. Luego de n cortes generales, se registraron los respectivos tiempos de apagón del sistema, en una muestra aleatoria T_1, \dots, T_n . Expertos sugieren la siguiente distribución de probabilidad,

$$f(t) = \frac{3}{\lambda + 1} \cdot t^2 \cdot e^{-t^3/(\lambda+1)}$$

para todo $t > 0$, donde $\lambda > -1$ es un parámetro desconocido. Esta distribución cuenta con las siguientes propiedades teóricas,

- $$E(T) = 0.893 \cdot (\lambda + 1)^{1/3}, \quad E(T^2) = 0.903 \cdot (\lambda + 1)^{2/3}, \quad E(T^3) = \lambda + 1, \quad E(T^6) = 2(\lambda + 1)^2.$$
- (a) [1.0 Ptos] Encuentre $\hat{\lambda}_{MM}$, el estimador de λ por el método de los momentos.
 - (b) [2.0 Ptos] Encuentre $\hat{\lambda}_{MV}$, el estimador de λ por el método de máxima verosimilitud.
 - (c) [1.0 Ptos] Calcule el sesgo del estimador $\hat{\lambda}_{MV}$ encontrado en parte (b). ¿Es insesgado? ¿Es asintóticamente insesgado? Justifique.
 - (d) [2.0 Ptos] Si se dispone de sólo una observación muestral T_1 , ¿Cuál estimador es preferible para estimar el parámetro λ ? Justifique su respuesta.

Solución

- (a) El estimador de momentos se encuentra igualando el primer momento poblacional al primer momento muestral,

$$0.893 \cdot (\lambda + 1)^{1/3} = \bar{T} \quad [0.5 \text{ Ptos.}]$$

Despejando λ de la ecuación, se obtiene que el estimador de momentos $\hat{\lambda}_{MM}$ está dado por

$$\hat{\lambda}_{MM} = \left(\frac{\bar{T}}{0.893} \right)^3 - 1 \quad [0.5 \text{ Ptos.}]$$

- (b) La función de verosimilitud de la muestra está dada por

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^n \frac{3}{\lambda + 1} \cdot T_i^2 \cdot e^{-t_i^3/(\lambda+1)} = \frac{3^n}{(\lambda + 1)^n} \cdot \left(\prod_{i=1}^n T_i^2 \right) \cdot e^{-\frac{1}{\lambda+1} \sum_{i=1}^n T_i^3} \quad [0.5 \text{ Ptos.}]$$

Aplicando logaritmo y derivando con respecto a λ e igualando a cero se obtiene

$$\begin{aligned} \ln L(\lambda) &= n \ln 3 - n \ln(\lambda + 1) + 2 \sum_{i=1}^n \ln T_i - \frac{1}{\lambda + 1} \sum_{i=1}^n T_i^3 \quad [0.5 \text{ Ptos.}] \\ \frac{\partial \ln L(\lambda)}{\partial \lambda} &= -\frac{n}{\lambda + 1} + \frac{1}{(\lambda + 1)^2} \sum_{i=1}^n T_i^3 = 0 \quad [0.5 \text{ Ptos.}] \\ \rightarrow \frac{n}{\lambda + 1} &= \frac{1}{(\lambda + 1)^2} \sum_{i=1}^n T_i^3 \\ \rightarrow \hat{\lambda}_{MV} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i^3 - 1 = \bar{T}^3 - 1 \quad [0.5 \text{ Ptos.}] \end{aligned}$$

- (c) Para calcular el sesgo del estimador, debemos calcular $E(\hat{\lambda}_{MV})$.

$$E(\hat{\lambda}_{MV}) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i^3 - 1\right) \stackrel{[0.3 \text{ Ptos.}]}{=} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(T_i^3) - 1 = \frac{1}{n} \cdot n \cdot (\lambda + 1) - 1 \stackrel{[0.3 \text{ Ptos.}]}{=} \lambda$$

Como $E(\hat{\lambda}_{MV}) = \lambda$ se concluye que es un estimador insesgado para λ , [0.2 Ptos.] por lo tanto el sesgo es cero. Naturalmente es además asintóticamente insesgado. [0.2 Ptos.]

- (d) Si sólo se dispone de Y_1 , entonces reemplazando por $n = 1$ en el estimador de momento y máximo verosímil de λ se tiene que

$$\hat{\lambda}_{MM} = \frac{T_1^3}{0.893^3} - 1 \text{ [0.1 Ptos.]} \quad \hat{\lambda}_{MV} = T_1^3 - 1 \text{ [0.1 Ptos.]}$$

Para ver cual estimador es preferible para estimar λ calculamos el ECM de cada estimador. Sabemos que

$$ECM(\hat{\lambda}) = \text{Var}(\hat{\lambda}) + B^2(\hat{\lambda}) \text{ [0.1 Ptos.]}$$

$$\begin{aligned} E(\hat{\lambda}_{MM}) &= \frac{E(T_1^3)}{0.893^3} - 1 = \frac{(\lambda + 1)}{0.893^3} - 1 \text{ [0.1 Ptos.]} \\ B(\hat{\lambda}_{MM}) &= E(\hat{\lambda}_{MM}) - \lambda = \frac{(\lambda + 1)}{0.893^3} - 1 - \lambda \text{ [0.1 Ptos.]} \\ &= 0.404(\lambda + 1) \text{ [0.1 Ptos.]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{\lambda}_{MM}) &= \text{Var}\left(\frac{T_1^3}{0.893^3} - 1\right) = \text{Var}\left(\frac{T_1^3}{0.893^3}\right) = \frac{1}{0.893^6} \text{Var}(T_1^3) \text{ [0.1 Ptos.]} \\ &= \frac{1}{0.5071} [E(T_1^6) - E^2(T_1^3)] \text{ [0.1 Ptos.]} \\ &= \frac{1}{0.5071} [2(\lambda + 1)^2 - (\lambda + 1)^2] \text{ [0.1 Ptos.]} \\ &= \frac{1}{0.5071} (\lambda + 1)^2 \text{ [0.1 Ptos.]} \end{aligned}$$

Por lo tanto el ECM del estimador de momentos está dado por

$$\begin{aligned} ECM(\hat{\lambda}_{MM}) &= \frac{1}{0.5071} (\lambda + 1)^2 + (0.404(\lambda + 1))^2 \text{ [0.2 Ptos.]} \\ &= \frac{1}{0.5071} (\lambda + 1)^2 + 0.404^2(\lambda + 1)^2 \\ &= 2.13535(\lambda + 1)^2 \text{ [0.2 Ptos.]} \end{aligned}$$

Por otro lado, por parte (c), $\hat{\lambda}_{MV}$ es un estimado insesgado, por lo tanto $ECM(\hat{\lambda}_{MV}) = \text{Var}(\hat{\lambda}_{MV})$.

$$\text{Var}(\hat{\lambda}_{MV}) = \text{Var}(T_1^3 - 1) = \text{Var}(T_1^3) = E(T_1^6) - E^2(T_1^3) = (\lambda + 1)^2 \text{ [0.4 Ptos.]}$$

Finalmente, como $ECM(\hat{\lambda}_{MV}) = (\lambda + 1)^2 < 2.13535(\lambda + 1)^2 = ECM(\hat{\lambda}_{MM})$, se prefiere el estimador máximo verosimil para estimar el parámetro λ . [0.2 Ptos.]