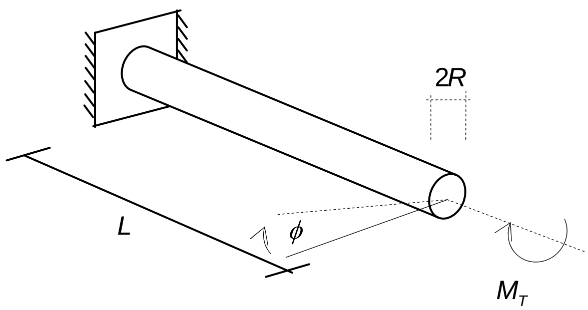
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Estructural y Geotécnica

ICE1302 – MECÁNICA DE SÓLIDOS
Ayudantía 12
Lunes 25 de mayo de 2009.

Problema 1

La barra de la figura (radio R = 2 cm, largo L = 100 cm) es sometida a un momento torsor (M_T = 2 ton-cm). La barra tiene propiedades E = 2100 ton/cm^2 y G = 840 ton/cm^2. Se pide calcular

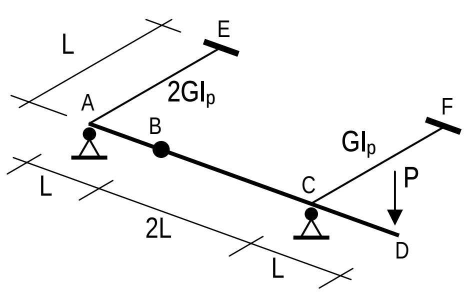
a) La rigidez torsional K_T
b) El giro total de la barra
c) La distribución de tensiones $\tau(r)$ en cualquier sección de la barra.



Problema 2

A la estructura de la figura, contenida en un plano horizontal, se le aplica una fuerza vertical P en el punto D. La barra ABCD es infinitamente rígida y está rotulada en B. La barras AE y CF tienen propiedades 2GI$_p$ y GI$_p$ respectivamente, y están empotradas en E y F. Determine:

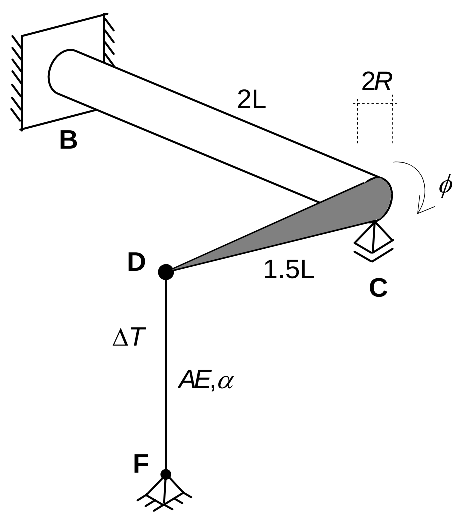
a) El desplazamiento vertical del punto B.
b) El momento torsor en las barras AE y CF.



Problema 3

La estructura de la figura consiste en una barra BC horizontal (radio R y largo 2L) sujeta a una manivela CD rígida (largo 1.5L), la cual está rotulada a una barra DF vertical (largo L, área A y coeficiente de dilatación térmica α) que es sometida a una diferencia de temperatura ΔT. Producto de esto la barra vertical cambiará de longitud, la manivela girará en torno a C, y la barra horizontal sufrirá torsión. Todos los materiales tienen propiedades E y G. Se pide calcular a partir de los datos:

a) La fuerza en la barra DF vertical
b) El giro del extremo C de la barra horizontal
c) La distribución de tensiones $\tau(r)$ en cualquier sección de la barra horizontal.



REPASO

Compatibilidad geométrica

Para secciones circulares

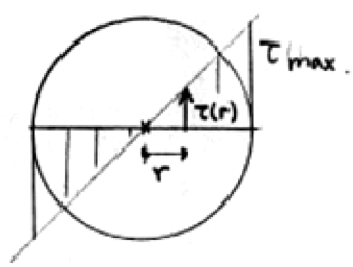
$$\gamma_{\theta z} = r\frac{d\phi}{dz}$$

Tensión deformación

$$\tau_{\theta z} = G\gamma_{\theta z}$$

Equilibrio (equivalencia)

Queremos ver qué equivalencia existe entre las tensiones de corte que se producen y la aplicación de un momento torsor. Supongamos una sección circular llena



$$M = \int r \cdot dF$$
$$\rightarrow M = \int_A r\tau_{\theta z} dA$$
$$\rightarrow M = \int_A G\frac{d\phi}{dz} r^2 dA$$
$$\rightarrow M = G\frac{d\phi}{dz}\int_A r^2 dA$$
$$\rightarrow M = G\frac{d\phi}{dz}\int_0^R\int_0^{2\pi} r^3 d\theta dr$$
$$\rightarrow M = G\frac{d\phi}{dz}\int_0^R r^3 2\pi dr$$
$$\rightarrow M = G\frac{d\phi}{dz}\frac{R^4\pi}{2}$$

Observar que la ecuación se puede escribir como un diferencial del área de un anillo

$$\left(M = G\frac{d\phi}{dz}\int_0^R r^2 dA \rightarrow dA = 2\pi r \cdot dr \right)$$

Si definimos al ***segundo momento de área polar*** (para barra circular)

$$I_p = \frac{R^4\pi}{2}$$

De manera más general (para otras secciones) se puede definir

$$I_p = \int_A r^2 dA$$

Finalmente obtenemos la siguiente relación de equivalencia

$$\frac{d\phi}{dz} = \frac{M}{GI_p}$$

Distorsión angular

Juntando la primera y tercera ecuación obtenemos una expresión para la distorsión angular en función del radio

$$\gamma_{\theta z}(r) = \frac{M}{GI_p} r$$

Tensión de corte

Reemplazando la segunda ecuación obtenemos una expresión para la tensión de corte en función del radio

$$\tau_{\theta z}(r) = \frac{M}{I_p} r$$

Giro de la sección

También, si integramos la ecuación de equilibrio

$$\frac{d\phi}{dz} = \frac{M}{GI_p} \rightarrow d\phi = \frac{M}{GI_p} dz \rightarrow \Delta\phi = \int_0^L \frac{M}{GI_p} dz$$

Vemos que si la sección permanece constante $I_p(z) = cte$, el momento torsor permanece constante $M(z) = cte$, y el material no cambia $G(z) = cte$, el giro total está dado por

$$\Delta\phi = \frac{M}{GI_p} L$$

Rigidez torsional

Si imaginamos el problema como si fuera un resorte torsional, cuya relación giro-momento está dada por

$$M = k_T \cdot \Delta\phi \rightarrow k_T = \frac{M}{\Delta\phi} = \frac{GI_p}{L}$$

PROBLEMA 1

Sabemos que para una sección circular llena, el momento de inercia polar corresponde a

$$I_p = \frac{R^4 \pi}{2} = 25.13[cm^4]$$

Luego, la rigidez torsional de la barra corresponde a

$$k_T = \frac{GI_p}{L} = \frac{840 \cdot 25.13}{100} = 211.12[ton \cdot cm]$$

Finalmente, el giro producido en la sección corresponde a

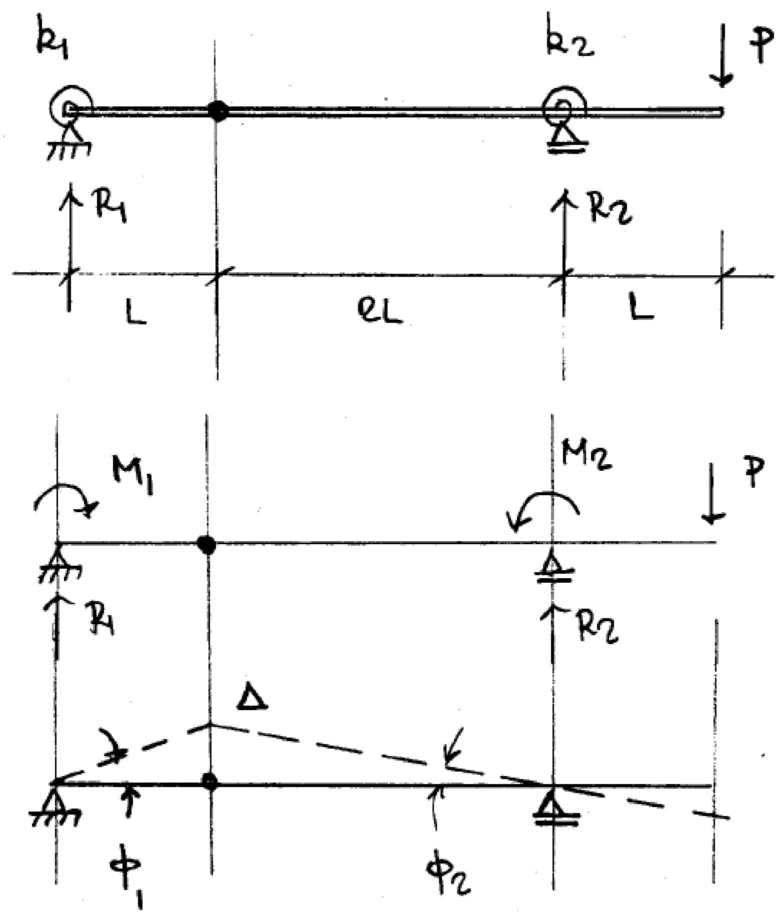
$$\phi = \frac{M}{k_T} = \frac{2}{211.12} = 9.5 \cdot 10^{-3}$$

Las tensiones tangenciales en función del radio están dadas por (r en cm)

$$\tau(r) = \frac{M}{I_p} \cdot r = \frac{2000}{25.13} \cdot r = 79.58r\,[kgf / cm^2]$$

PROBLEMA 2

El problema podemos pensarlo como una barra (como la de la figura) a la cual se le restringe el movimiento mediante resortes torsionales



Equilibrio

$$R_1 + R_2 = P \qquad (1)$$

$$R_2 \cdot (2L) + M_2 = P \cdot (3L) \qquad (2)$$

$$R_1 \cdot (L) + M_1 = 0 \qquad (3)$$

Compatibilidad geométrica

$$\phi_1 = \frac{\Delta}{L}$$

$$\phi_2 = \frac{\Delta}{2L}$$

Fuerza deformación

$$M_1 = k_1\phi_1 = \frac{2GI_p}{L}\phi_1$$
$$M_2 = k_2\phi_2 = \frac{GI_p}{L}\phi_2$$

Reemplazamos todo esto en las ecuaciones (1), (2) y (3). Nos queda un sistema de ecuaciones con 3 ecuaciones y 3 incógnitas R_1, R_2, Δ. Resolvemos y obtenemos

$$\Delta = \frac{2}{9}\frac{PL^3}{GI_p}$$
$$R_1 = -\frac{4}{9}P$$
$$R_2 = \frac{13}{9}P$$

Luego reemplazamos en las ecuaciones de fuerza deformación y obtenemos

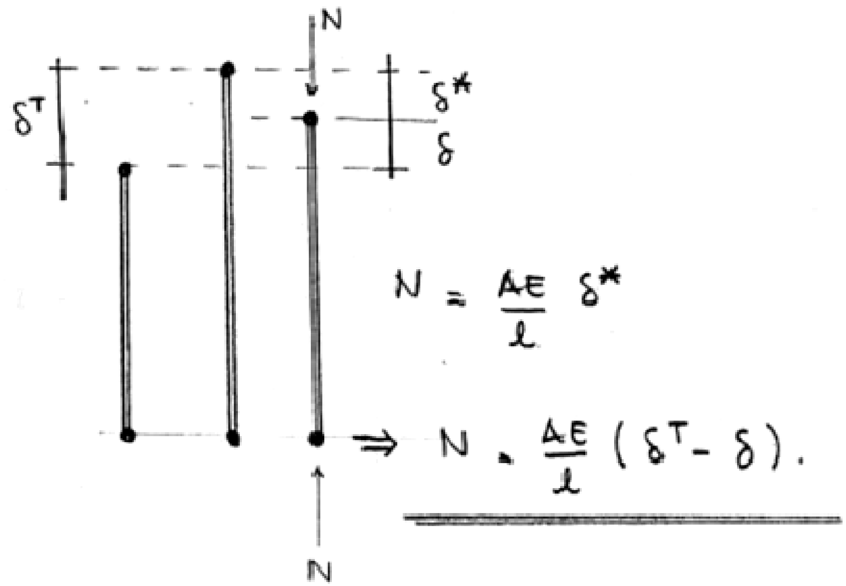
$$\phi_1 = \frac{\Delta}{L} = \frac{2}{9}\frac{PL^2}{GI_p}$$
$$\phi_2 = \frac{\Delta}{2L} = \frac{1}{9}\frac{PL^2}{GI_p}$$

$M_1 = \frac{4}{9}PL$ (momento torsor barra AE)

$M_2 = \frac{1}{9}PL$ (momento torsor barra CF)

PROBLEMA 3

Analicemos la barra que se estira



Después de que la barra vertical se haya estirado, la punta superior habrá ascendido (incógnita)

$$\delta$$

Supongamos que la barra vertical puede expandirse libremente. En estas condiciones

$$\delta_T = \alpha \Delta T L$$

Entonces de la expansión libre (δ_T) tenemos que pasar a la expansión con el resto de la estructura (δ). En este "paso" se generan irrevocablemente tensiones a partir de las deformaciones. Luego por la relación **tensión-deformación de la barra vertical**, donde N corresponde a la fuerza axial (incógnita)

$$\frac{N}{A} = E\frac{(\delta_T - \delta)}{L} \qquad (1)$$

De la misma forma, la relación **tensión-deformación de la barra horizontal**, donde M corresponde al momento torsor generado en la barra (incógnita)

$$\phi = \frac{M}{GI_p} 2L \rightarrow \phi = \frac{4ML}{GR^4 \pi} \qquad (2)$$

El problema debe estar **equilibrado**. Esto se logra igualando el momento torsor de la barra horizontal con el momento que genera la fuerza axial de la barra vertical (palanca)

$$N \cdot 1.5L = M \qquad (3)$$

Finalmente, la **compatibilidad geométrica** del problema se resume en encontrar una relación entre el estiramiento de la barra vertical y el giro en la barra horizontal

$$\delta = \phi \cdot 1.5L \qquad (4)$$

Con esto tenemos 4 ecuaciones y 4 incógnitas (M, N, δ, ϕ). Resolvemos y obtenemos

$$\phi = \frac{6EAL^2 \cdot}{GR^4\pi + 9EAL^2}$$

$$\delta = \frac{9EAL^3 \cdot \alpha\Delta T}{GR^4\pi + 9EAL^2}$$

$$N = \frac{EA \cdot \alpha\Delta T \cdot GR^4\pi}{GR^4\pi + 9EAL^2}$$

$$M = \frac{3}{2}L \cdot \frac{EA \cdot \alpha\Delta T \cdot GR^4\pi}{GR^4\pi + 9EAL^2}$$

Supongamos que, por ejemplo, tenemos acero (E = 2100 ton/cm^2, G = 840 ton/cm^2), el largo L = 100 cm, el área A = 2 cm^2, ΔT = 200° C, α = 10^{-5} 1/°C, R = 5 cm, lo valores serían

$$\begin{aligned} &\phi = 1.33 \cdot 10^{-3} \\ &N = 36.49[kgf] \\ &\delta = 0.19913[cm] \\ &M = 5473.9[kgf \cdot cm] \end{aligned}$$

Finalmente, la distribución de tensiones de corte en la barra horizontal corresponden a

$$\tau(r) = \frac{M}{I_p} r = 3L \cdot \frac{EA \cdot \alpha\Delta T \cdot G}{GR^4\pi + 9EAL^2} \cdot r$$

Para el mismo ejemplo anterior, la tensión tangencial en función del radio (en cm) corresponde a

$$\tau(r) = 5.58r[kgf / cm^2]$$