PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer semestre 2019

Pauta Interrogación 3 - MAT1610

1. *a*) Calcule el valor de

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e-1}{n}\left(\frac{1}{1+\dfrac{e-1}{n}}+\frac{1}{1+\dfrac{2(e-1)}{n}}+\frac{1}{1+\dfrac{3(e-1)}{n}}+\cdots+\frac{1}{e}\right)$$

Solución:

Si consideramos la partición regular del intervalo $[1,e]$ en n intervalos tenemos que $1 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = e$ y por lo tanto el largo de cada uno de ellos $\Delta_i = \dfrac{e-1}{n}$ y que en esta partición se tiene que $x_i = 1 + \dfrac{(e-1)i}{n}$ y por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e-1}{n}\left(\frac{1}{1+\dfrac{e-1}{n}}+\frac{1}{1+\dfrac{2(e-1)}{n}}+\frac{1}{1+\dfrac{3(e-1)}{n}}+\cdots+\frac{1}{e}\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_i)\Delta_i$$

donde $f(x) = \dfrac{1}{x}$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e-1}{n}\left(\frac{1}{1+\dfrac{e-1}{n}}+\frac{1}{1+\dfrac{2(e-1)}{n}}+\frac{1}{1+\dfrac{3(e-1)}{n}}+\cdots+\frac{1}{e}\right) = \int_1^e \frac{1}{x}\,dx = 1$$

Distribución de puntaje:

- (1 punto) Por determinar la suma de Riemann
- (1 punto) Por plantear la integral
- (1 punto) Por calcular el valor

b) Calcule

$$\int_{-3}^{3} |x^2+2x-3|dx$$

Solución:

Observe que $x^2+2x-3<0$ si $-3<x<1$, por lo tanto

$$\begin{aligned}
\int_{-3}^{3} |x^2+2x-3|dx &= \int_{-3}^{1} -x^2-2x+3\,dx + \int_{1}^{3} x^2+2x-3\,dx \\
&= \left(-\frac{x^3}{3}-x^2+3x\right)\Bigg|_{-3}^{1} + \left(\frac{x^3}{3}+x^2-3x\right)\Bigg|_{1}^{3} \\
&= \frac{64}{3}
\end{aligned}$$

Distribución de puntaje:

- (1 punto) Por separar correctamente la integral
- (1 punto) Por correctamente correctamente la primera integral
- (1 punto) Por correctamente correctamente la segunda integral

2. Determine las siguientes integrales

a) $\displaystyle\int_1^9 \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^4}\,dx$ *b)* $\displaystyle\int \frac{2\cos(x)\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,dx$

Solución:

a) Si $u = 1+\sqrt{x}$ tenemos que $du = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx$ por lo tanto con este cambio de variable tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_1^9 \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^4}\,dx &= 2\int_2^4 \frac{1}{u^4}du \\
&= 2\left(-\frac{1}{3u^3}\right)\Bigg|_2^4 \\
&= \frac{7}{96}
\end{aligned}$$

Distribución de puntaje:

- (1 punto) Por sustitución adecuada
- (1 punto) Por plantear correctamente la nueva integral
- (1 punto) Por el cálculo

b) Si $u = 1+\cos^2(x)$ tenemos que $du = -2\cos(x)\mathrm{sen}(x)dx$ por lo tanto con este cambio de variable tenemos que

$$\begin{aligned}
\int \frac{2\cos(x)\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,dx &= -\int \frac{1}{u}\,du \\
&= -\ln(u)+c \\
&= -\ln\left(1+\cos^2(x)\right)+c
\end{aligned}$$

Distribución de puntaje:

- (1 punto) por sustitución
- (1 punto) Por plantear correctamente la nueva integral
- (1 punto) Por determinar la integral. Descontar 0,5 si olvida el c

3. Considere la función g definida por

$$g(x) = \int_x^0 \frac{1}{t^2+t+1} dt$$

Determine los intervalos donde g es cóncava hacia arriba.

Solución:

Observe que por TFC tenemos que $g'(x) = -\dfrac{1}{x^2+x+1}$ y por lo tanto $g''(x) = \dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$, luego $g''(x) > 0$ si y solo si $x > -\dfrac{1}{2}$, por lo tanto g es cóncava hacia arriba en el intervalo $\left(-\dfrac{1}{2}, \infty\right)$

Distribución de puntaje:

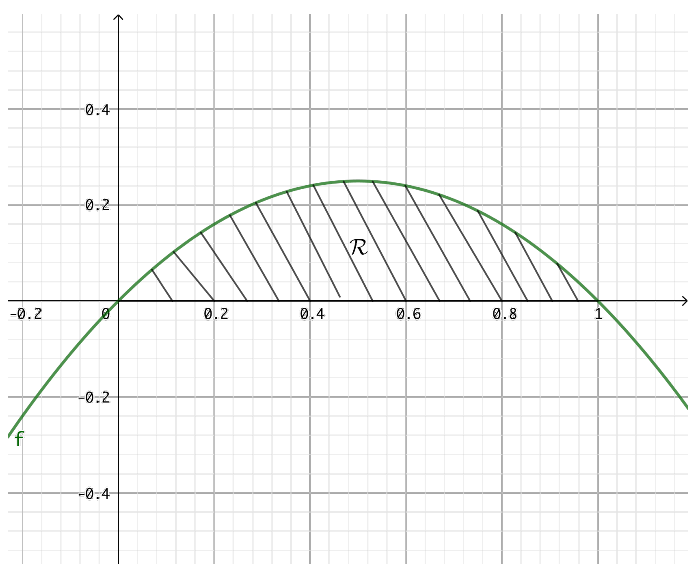
- (2 puntos) por determinar g'
- (2 puntos) por determinar g''
- (2 puntos) por determinar el intervalo

4. Sea $\mathcal{R}$ la región acotada por la parábola de ecuación $y = x - x^2$ y el eje X.

   a) Determine el área de la región $\mathcal{R}$.(2 ptos.)

   Solución:

   Observemos que la región $\mathcal{R}$ corresponde a la de la figura adjunta.



y por lo tanto tenemos que

$$\text{Área}(\mathcal{R}) = \int_0^1 (x - x^2)dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{6}$$

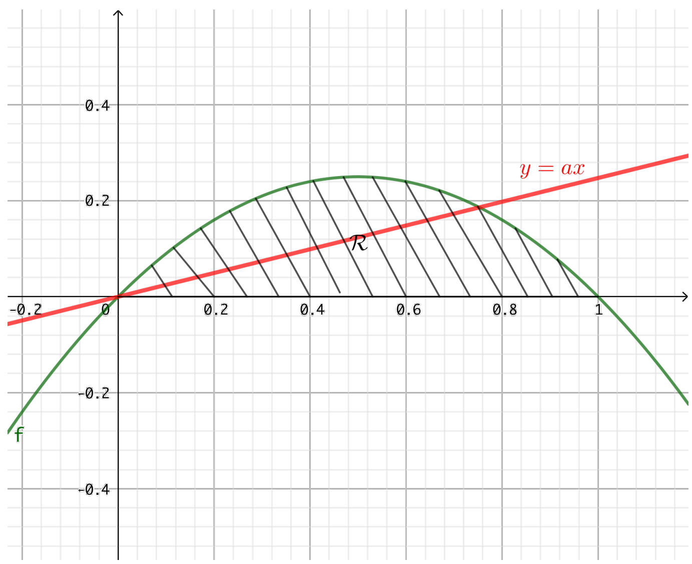
Distribución de puntaje:

- (1 punto) Por plantear la integral que determina el área
- (1 punto) Por determinar correctamente el área

b) Existe una recta que pasa por el origen que divide a la región $\mathcal{R}$ en dos regiones de igual área. ¿Cuál es la pendiente de la recta?(4 ptos)

Solución:

Si la recta tiene ecuación $y = ax$ como muestra la figura adjunta



Tenemos que la abcisa del punto de intersección, que no es el origen, de la recta y la parábola es $x = (1 - a)$, por lo tanto necesitamos determinar el valor de a tal que

$$\int_0^{1-a} \left(x - x^2 - ax\right) dx = \frac{1}{12}$$

integrando el lado derecho de la igualdad obtenemos que

$$\int_0^{1-a} \left(x - x^2 - ax\right) dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{ax^2}{2}\right)\Big|_0^{1-a} = \frac{(1-a)^3}{6}$$

por lo tanto $\dfrac{(1-a)^3}{6} = \dfrac{1}{12}$ obteniendo que la pendiente de la recta pedida es $1 - \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$

Distribución de puntaje:

- (1 punto) Por determinar el punto de intersección correctamente
- (2 punto) Por plantear la igualdad que resuelve el problema
- (1 punto) Por determinar el valor de la epndiente