Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Economía y Administración

Segundo Semestre 2021

| | | |
|---|---|---|
| **Curso** | **:** | **Porbabilidad y Estadística** |
| **Sigla** | **:** | **EAA1510** |
| **Profesores** | **:** | **Cristian Vásquez (Sec 1), Ricardo Aravena (Sec 2), Rafael Águila (Sec 3 - 4 - 5) y Alonso Molina (Sec 6)** |

# Pauta Control 1

## Problema 1

Suponga que usted está analizando la rentabilidad diaria de la acción de una importante empresa de retail para decidir si invertir un capital, un asesor financiero le informa a usted que la rentabilidad diaria es independiente, es decir, la rentabilidad de una acción el día de ayer es independiente de hoy. El asesor financiero, en base a la información histórica que dispone, le informa a usted que la rentabilidad de la acción de la empresa que está evaluando invertir será positiva con una probabilidad de 0,65 (rentabilidad $> 0$) y será negativa (rentabilidad $\leq 0$) con una probabilidad 0,35. Para tomar una decisión usted analizará la rentabilidad de la acción de los próximo 4 días. Con los antecedentes entregados realice lo siguiente:

(a) **[1.5 Ptos]** ¿Cuál es la probabilidad de que la rentabilidad sea positiva en los próximos 4 días?

(b) **[1.5 Ptos]** ¿Cuál es la probabilidad de que los dos primeros días la rentabilidad sea positiva y que los dos siguientes dias sea negativa?

(c) **[1.5 Ptos]** Defina la siguiente variable aleatoria:

$$X = \text{"Número de días en que la rentabilidad fue positiva de los 4 días que se están analizando"}$$

Reporte el soporte de la variable aleatoria $X$ y la función de probabilidad (de la variable aleatoria $X$).

(d) **[1.5 Ptos]** Utilizando la variable aleatoria $X$ descrita en el item $c$), reporte la esperanza $\mathrm{E}(X)$ y la mediana Mediana$(X)$.

# Desarrollo

($a$) La rentabilidad de cada día es independiente, entonce se puede definir el siguiente evento para los próximos 4 días,

$$A_i = \text{La rentabilidad del día } i \text{ de la acción de la empresa de retail es positiva}, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

donde $\Pr(A_i) = 0.65$ y $\Pr(A_i^c) = 0.35$ **[0.3 Ptos]**. Si la rentabilidad es positiva en los próximos 4 días, entonces se tiene $[A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4] = [A_1, A_2, A_3, A_4]$, por lo tanto la probabilidad se puede calcular de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \Pr(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) &= \Pr(A_1)\Pr(A_2)\Pr(A_3)\Pr(A_4) \ \textbf{[0.5 Ptos]}, \quad \text{por independencia} \\ &= 0.65^4 \ \textbf{[0.4 Ptos]}, \\ &= 0.1785 \ \textbf{[0.3 Ptos]} \end{aligned}$$

$(b)$ El cálculo de la probabilidad se puede realizar de manera similar al desarrollo presentado en $(a)$, el evento indicado es $A_1 \cap A_2 \cap A_3^c \cap A_4^c$. La probabilidad del evento está dado por:

$$
\begin{aligned}
\Pr(A_1 \cap A_2 \cap A_3^c \cap A_4^c) &= \Pr(A_1)\Pr(A_2)\Pr(A_3^c)\Pr(A_4^c) \ \textbf{[0.5 Ptos]}, \quad \text{por independencia}\\
&= 0.65 \cdot 0.65 \cdot 0.35 \cdot 0.35 \ \textbf{[0.5 Ptos]},\\
&= 0.0518 \ \textbf{[0.5 Ptos]}
\end{aligned}
$$

$(c)$ La variable aleatoria $X$ se define como "número de dias en que la rentabilidad fue positiva de los 4 días que se están analizando", por lo tanto, el mínimo valor que puede tomar es 0 cuando no se observa ningún día con rentabilidad positiva $[A_1^c, A_2^c, A_3^c, A_4^c]$, y el máximo valor es 4 $[A_1, A_2, A_3, A_4]$. Analizando todos los casos, el soporte está dado por

$$\Theta_X = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\} \ \textbf{[0.3 Ptos]}$$

Ahora basta con calcular las probabilidades de cada uno de los valores en el soporte,

$$
\begin{aligned}
&[X=0] = \{[A_1^c, A_2^c, A_3^c, A_4^c]\},\\
&[X=1] = \{[A_1, A_2^c, A_3^c, A_4^c], [A_1^c, A_2, A_3^c, A_4^c], [A_1^c, A_2^c, A_3, A_4^c], [A_1^c, A_2^c, A_3^c, A_4]\},\\
&[X=2] = \{[A_1, A_2, A_3^c, A_4^c], [A_1, A_2^c, A_3, A_4^c], [A_1, A_2^c, A_3^c, A_4], [A_1^c, A_2, A_3, A_4^c], [A_1^c, A_2, A_3^c, A_4], [A_1^c, A_2^c, A_3, A_4]\},\\
&[X=3] = \{[A_1, A_2, A_3, A_4^c], [A_1, A_2, A_3^c, A_4], [A_1, A_2^c, A_3, A_4], [A_1^c, A_2, A_3, A_4]\},\\
&[X=4] = \{[A_1, A_2, A_3, A_4]\} \ \textbf{[0.4 Ptos]}.
\end{aligned}
$$

Entonces, utilizando el supuesto de independencia:

$$
\begin{aligned}
\Pr[X=0] &= \Pr\left(A_1^c, A_2^c, A_3^c, A_4^c\right),\\
&= \Pr(A_1^c)\Pr(A_2^c)\Pr(A_3^c)\Pr(A_4^c),\\
&= 0.35^4,\\
&= 0.015 \ \textbf{[0.1 Ptos]}.\\
\Pr[X=1] &= \Pr\{[A_1, A_2^c, A_3^c, A_4^c], [A_1^c, A_2, A_3^c, A_4^c], [A_1^c, A_2^c, A_3, A_4^c], [A_1^c, A_2^c, A_3^c, A_4]\},\\
&= \Pr(A_1, A_2^c, A_3^c, A_4^c) + \Pr(A_1^c, A_2, A_3^c, A_4^c) + \Pr(A_1^c, A_2^c, A_3, A_4^c) + \Pr(A_1^c, A_2^c, A_3^c, A_4),\\
&= 4 \cdot 0.65 \cdot 0.35^3,\\
&= 0.111 \ \textbf{[0.2 Ptos]}.\\
\Pr[X=2] &= \Pr\{[A_1, A_2, A_3^c, A_4^c], [A_1, A_2^c, A_3, A_4^c], [A_1, A_2^c, A_3^c, A_4], [A_1^c, A_2, A_3, A_4^c], [A_1^c, A_2, A_3^c, A_4], [A_1^c, A_2^c, A_3, A_4]\},\\
&= \Pr(A_1, A_2, A_3^c, A_4^c) + \Pr(A_1, A_2^c, A_3, A_4^c) + \Pr(A_1, A_2^c, A_3^c, A_4) + \Pr(A_1^c, A_2, A_3, A_4^c)\\
&+ \Pr(A_1^c, A_2, A_3^c, A_4) + \Pr(A_1^c, A_2^c, A_3, A_4),\\
&= 6 \cdot 0.35^2 \cdot 0.65^2,\\
&= 0.311 \ \textbf{[0.2 Ptos]}.\\
\Pr[X=3] &= \Pr\{[A_1, A_2, A_3, A_4^c], [A_1, A_2, A_3^c, A_4], [A_1, A_2^c, A_3, A_4], [A_1^c, A_2, A_3, A_4]\},\\
&= \Pr(A_1, A_2, A_3, A_4^c) + \Pr(A_1, A_2, A_3^c, A_4) + \Pr(A_1, A_2^c, A_3, A_4) + \Pr(A_1^c, A_2, A_3, A_4),\\
&= 4 \cdot 0.65^3 \cdot 0.35,\\
&= 0.384 \ \textbf{[0.2 Ptos]}.\\
\Pr[X=4] &= \Pr\left(A_1, A_2, A_3, A_4\right),\\
&= \Pr(A_1)\Pr(A_2)\Pr(A_3)\Pr(A_4),\\
&= 0.65^4,\\
&= 0.179 \ \textbf{[0.1 Ptos]}.
\end{aligned}
$$

($d$) Con la función de probabilidad determinada en el item ($c$) se pueden determinar los estadísticos $\mathrm{E}(X)$ y Mediana$(X)$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \sum_{k=0}^{4} k\,\Pr(X=k) \; \textbf{[0.3 Ptos]},\\
&= 0\Pr[X=0] + 1\Pr[X=1] + 2\Pr[X=2] + 3\Pr[X=3] + 4\Pr[X=4],\\
&= 0\cdot 0.015 + 1\cdot 0.111 + 2\cdot 0.311 + 3\cdot 0.384 + 4\cdot 0.179,\\
&= 2.601 \; \textbf{[0.5 Ptos]}.
\end{aligned}$$

Para determinar la mediana, note la siguiente busqueda

$$\begin{aligned}
\Pr(X\leq 0) &= F(0) = 0.015,\\
\Pr(X\leq 1) &= F(1) = 0.126,\\
\Pr(X\leq 2) &= F(2) = 0.437,\\
\Pr(X\leq 3) &= F(3) = 0.821 \; \textbf{[0.3 Ptos]},
\end{aligned}$$

El punto en el soporte $m=3$ cumple con la definición de la mediana, dado que $\Pr(X\leq 3) = 0.821 \geq 0.5$ y $\Pr(X\geq 3) = 0.563 \geq 0.5$. Por lo tanto, la media es Mediana$(X) = 3$ **[0.4 Ptos]**.