



Apellido, Nombre: \_\_\_\_\_,

**Problema 01** *Fractura de materiales*

(5 pts.) La Figura 1 presenta la tensión uniaxial requerida para propagar una grieta de semilargo  $a$ , perpendicular a la dirección de la tensión aplicada en una aleación de aluminio caracterizada por una tensión de fluencia  $R_{p0,2} = 350$  MPa. En el caso de una grieta de semilargo  $a = 200$   $\mu\text{m}$ , si la tensión aumenta hasta la falla, es esperable que el material falle:

- a) Solamente por fractura.
- b) Solamente por fluencia.
- c) Inicialmente por fluencia, después por fractura.
- d) Inicialmente por fractura, después por fluencia.

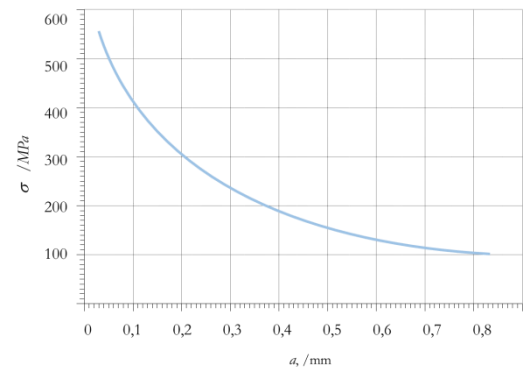


Figura 1

**Problema 02** *Fatiga de materiales*

(5 pts.) En la curva S-N mostrado para el acero AISI 1045 en la Figura 2, el límite de fatiga se determina como la tensión a la que:

- a) No se produce falla por fatiga (nunca)
- b) Se produce la falla a un determinado número de ciclos.
- c) Se produce la falla al primer ciclo de servicio.
- d) Se produce deformación permanente

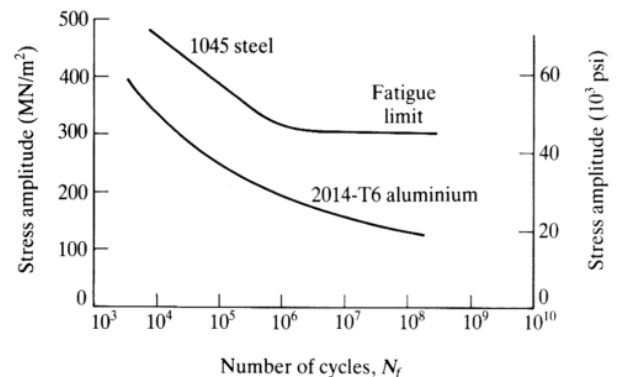


Figura 2

### Problema 03 Tenacidad a la fractura

(5 pts.) ¿Cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones referidas a la tenacidad a la fractura son correctas?

- I. La tenacidad a la fractura es una medida de la energía total necesaria para producir una grieta en el material.
- II. La fractura ocurre cuando la tensión aplicada excede un valor crítico,  $\sigma_c$ , en presencia de algún defecto como una grieta.
- III. La tenacidad a la fractura es alta para materiales cerámicos.
- IV. Un material con estructura BCC tiene una menor tenacidad a la fractura que un material FCC a bajas temperaturas.

Respuesta:

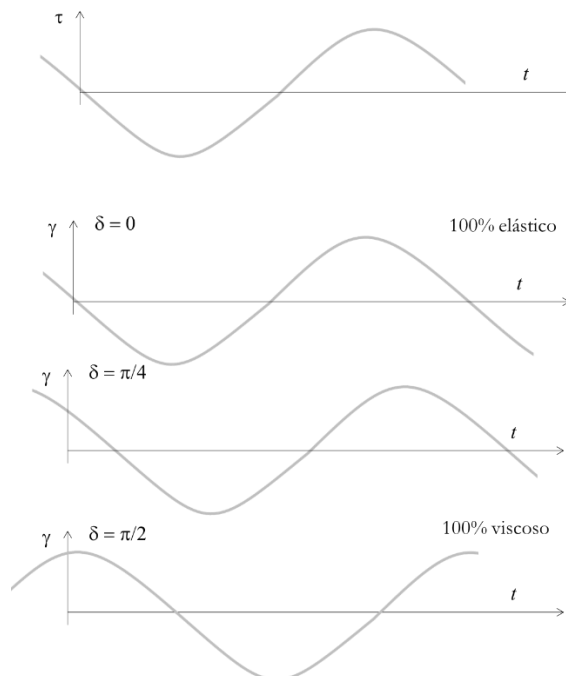
- a) I y III
- b) I, II y IV
- c) II y III
- d) II y IV

### Problema 04 Viscoelasticidad

(5 pts.) Para el caso de sollicitaciones cíclicas, la relación entre tensión de corte aplicada ( $\tau$ ) y deformación angular resultante ( $\gamma$ ) de un material visco-elástico depende del tiempo con un posible desfase  $\delta$ . Bosqueje la respuesta esperada para los tres valores de  $\delta$  indicados. Indique cuál de los casos corresponde al comportamiento netamente viscoso y cual al comportamiento netamente elástico.

Solución:

$\delta=0 \rightarrow 1,5$  ptos;  $\delta=\pi/4 \rightarrow 1,5$  ptos;  $\delta=\pi/2 \rightarrow 2$  ptos



**Problema 05 Mecánica de fractura**

(20 pts.) Se tiene un acueducto (Figura 8.1) que transporta agua desde una planta desalinizadora localizada en un puerto al nivel de mar a una mina de oro localizada a 3.500 m sobre el nivel de mar. Para lograr la conducción, el ducto está presurizado a una presión interna  $p_i = 50$  atm operando en presión atmosférica externa de  $p_o = 1$  atm (101,325 kPa). El ducto tiene 28 cm de diámetro interno y 100 km de largo. Está fabricado por soldadura de placas, de acero AISI 4340 de  $5 \times 20$  m, y  $t = 10$  mm de espesor



Figura 8.1

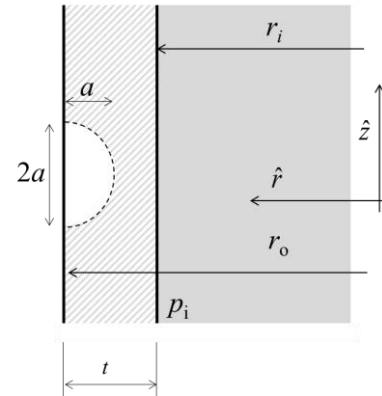


Figura 8.2

- Describa con sus propias palabras que significa el concepto de “fuga antes de ruptura” (*leak before break*) (5 pts)
- Determine si el ducto cumple con este criterio para grietas longitudinales (Figura 8.2) (15 pts.).

Propiedades de acero AISI 4340

$E = 192$  GPa     $\nu = 0,29$      $R_{p0,2} = 470$  MPa     $UTS = 745$  MPa     $K_{IC} = 38$  MPa $\sqrt{m}$

Factor geométrico de grieta longitudinal (L) y circunferencia (C)

$Y_L = 1,12$

$Y_C = 1,10$

Tensiones en el tubo de pared gruesa  $r_o-r_i$ , a presión interna  $p_i$  y presión externa  $p_o$ , con tensiones axiales despreciables:

$$\sigma_r = \frac{r_i^2 p_i - r_o^2 p_o}{r_o^2 - r_i^2} - \frac{(p_i - p_o) r_i^2 r_o^2}{(r_o^2 - r_i^2) r^2} \quad \sigma_\theta = \frac{r_i^2 p_i - r_o^2 p_o}{r_o^2 - r_i^2} + \frac{(p_i - p_o) r_i^2 r_o^2}{(r_o^2 - r_i^2) r^2} \quad \sigma_z = 0$$

**Solución:**

a) El concepto de “fuga antes de ruptura” se refiere a la condición de observar una fuga de contenido de una vasija a presión, en este caso un ducto, antes de que la grieta logre tamaño crítico para causar ruptura de la vasija. Esta condición se cumple cuando el espesor de la estructura este más delgado que la profundidad crítica de la grieta (correspondiente a semilargo de la grieta superficial):  $a_{crit} \geq t$  5 ptos

b) Para evaluar si se cumple el criterio, se compara el valor del factor de intensidad de tensiones para la grieta longitudinal de largo  $2t$  y profundidad  $t$ , y tensión tangencial en la superficie externa del tubo:  $r = r_o$ :

$$\sigma_\theta(r_o) = \frac{1}{r_o^2 - r_i^2} (r_i^2 p_i - r_o^2 p_o + (p_i - p_o) r_i^2) = 67,01 \text{ MPa} \quad (7 \text{ ptos})$$

$$K = Y_L \sigma_\theta(r_o) \sqrt{\pi t} = 13,3 \text{ MPa}\sqrt{m} \leq K_{IC} \quad (7 \text{ ptos})$$

Por tanto, el criterio de “fuga antes de ruptura” si se cumple. (1 pto)

**Problema 06** *Fatiga de materiales*

(20 pts.) El comportamiento a la fatiga de un acero al carbón (DIN 50CrMo4) fue determinado mediante ensayo de fatiga rotatoria con tensiones medias de  $\sigma_m = 0$ , pudiendo describirse la relación entre la amplitud alternante  $\sigma_a$  y el número de ciclos  $N$  mediante la siguiente relación:

$$\sigma_a = 1250 N^{-0.1}$$

Adicionalmente fueron realizados cuatro ensayos a distintas tensiones medias produciendo los siguientes resultados:

$\sigma_m$ /MPa	$\sigma_a$ /MPa	$N$	$\sigma_{ar}$ /MPa	$\sigma_a / \sigma_{ar}$
-100	457	155.300	378,3	1,21
120	306	340.600	349,7	0,86
300	217	91.800	398,7	0,54
400	137	262.000	359,0	0,38

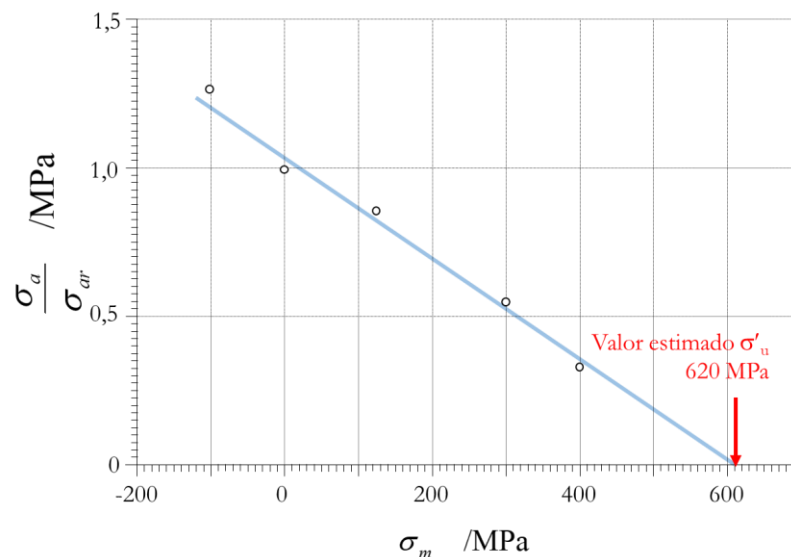
Estime gráficamente el valor de tensión de fluencia a la fatiga ( $\sigma'_u$ ) del criterio de Goodman.

**Solución:**

Para determinar el valor de  $\sigma'_u$  se utilizará el criterio de Goodman.

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_{ar}} + \frac{\sigma_m}{\sigma'_u} = 1 \quad (2 \text{ ptos})$$

Los valores de amplitud de tensiones equivalentes  $\sigma_{ar}$  se determinan de la relación empírica indicada para  $\sigma_m = 0$ . Por ejemplo para el  $\sigma_m = 300$  MPa, el número de ciclos hasta falla es 91.800, lo que corresponde a amplitud alternate  $\sigma_{ar} = 1250 \cdot 91.800^{-0.1} = 398,68$  MPa. Los valores obtenidos están resumidos en la tabla (Correctos cálculos de  $\sigma_{ar}$  y  $\sigma_a / \sigma_{ar}$  (6 ptos)). Aproximado la relación entre razón  $\sigma_a / \sigma_{ar}$  y la tensión media permite determinar el valor de  $\sigma'_u$  como intercepción con el eje  $\sigma_m$



Ejes gráficos (2 ptos) obtener el valor estimado (6 ptos) gráfica (4 ptos)

**Problema 07 Criterios de fluencia**

(20 pts.) Un grupo de alumnos de primer año quiere colgar una silla desde una de las vigas del patio y sentar en ella a un voluntario para hacerlo girar en el aire. Para esto cuentan con un alambre de acero de 1,7 mm de diámetro. La distancia entre la silla y la viga es de 3 m. La silla y el voluntario pesan en total 700 N. Usted intuye que se trata de una instalación bastante peligrosa desde el punto de vista de la resistencia de materiales, por lo que decide ayudar a los novatos con un par de cálculos.

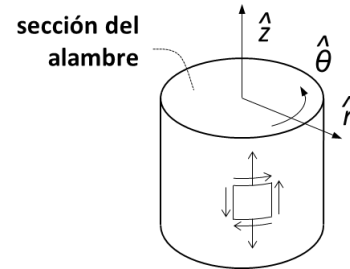
Para esto supone que las propiedades del acero son:

$$E: 210 \text{ GPa}$$

$$G: 80,77 \text{ GPa}$$

$$\nu: 0,3$$

$$Rp_{0,2}: 355 \text{ MPa}$$



Una consulta rápida a Wikipedia le permite anticipar que, además de la tensión debida a la carga axial, la torsión del alambre generará una tensión de corte en los planos de normal  $z$  (paralela al alambre) y normal  $\theta$  (tangencial al perímetro de la sección), que para cualquier punto de la sección se puede calcular a partir de:

$$T_z = \frac{J_{zz}}{r} \tau_{z\theta}$$

donde,  $T_z$  es el torque en torno al eje  $z$  ( $N \cdot m$ ),  $r$  es la distancia del punto al eje de torsión (m),  $\tau_{z\theta}$  es la tensión de corte resultante en el punto ( $N/m^2$ ) y  $J_{zz}$  es la constante torsional de la sección ( $m^4$ ), que para una sección circular es:  $\pi r^4/2$ . Considere que las tensiones normales en las direcciones  $r$  y  $\theta$  son nulas (ETP).

- (15 pts.) Determine el torque máximo admisible en las condiciones descritas utilizando el criterio de von Mises.
- (5 pts.) Considerando que la relación entre el ángulo de torsión del sólido ( $\theta$ , en radianes) y el torque aplicado ( $T$ , en  $N \cdot m$ ) para un sólido de sección uniforme es:  $\theta = TL/JG$  (donde  $L$  (m) es el largo del sólido a lo largo del eje de torsión y  $G$  (en  $N/m^2$ ) es el módulo de corte), determine el ángulo de torsión máximo admisible. Expresé el resultado en grados para que los novatos puedan visualizarlo.

**Solución:**

a) Dado que la tensión de corte debida al torque aumenta con la distancia desde el eje de torsión, el punto más desfavorable será cualquiera de los ubicados en la superficie del alambre, donde  $r = 0,85 \text{ mm}$ .

La utilización del criterio de von Mises requiere determinar las tensiones principales en este punto, por lo que éstas se deben determinar a partir de las componentes del estado general de tensiones. En este punto:

$$\begin{bmatrix} \sigma_z & \tau_{\theta z} & 0 \\ \tau_{z\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La tensión normal al plano de normal  $z$  está dada por la acción de la carga ( $W = 70 \text{ Kg} \cdot 10 \text{ m/s}^2 = 700 \text{ N}$ ) distribuida uniformemente sobre la sección transversal del alambre ( $A = \pi (0,85 \text{ mm})^2 = 2,27 \text{ mm}^2$ ), por lo que su valor es:  $308,4 \text{ MPa}$ . La tensión de corte  $\tau_{z\theta}$  es lo que debemos despejar para determinar el valor máximo de torque admisible.

Considerando que se trata de un Estado Plano de Tensiones, las tensiones principales resultan:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{\theta z}^2} \quad (0,5 \text{ ptos})$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_z}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{\theta z}^2} \quad (0,5 \text{ ptos})$$

$$\sigma_3 = 0 \quad (0,5 \text{ ptos})$$

La ecuación del criterio de von Mises nos permitirá entonces despejar el valor de  $\tau_{z\theta}$  a partir de los datos del enunciado ya que:

$$2\sigma_y^2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 \quad (\text{von Mises}) \quad (1,5 \text{ ptos})$$

En este caso:

$$2\sigma_y^2 = \left(2\sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{\theta z}^2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{\theta z}^2}\right)^2 + \left(-\frac{\sigma_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{\theta z}^2}\right)^2$$

$$2\sigma_y^2 = 4\left(\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{\theta z}^2\right) + 2\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + 2\left(\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{\theta z}^2\right)$$

$$2\sigma_y^2 = 2\sigma_z^2 + 6\tau_{\theta z}^2 \quad (3 \text{ ptos})$$

$$\tau_{\theta z} = \sqrt{\frac{\sigma_y^2 - \sigma_z^2}{3}}$$

Reemplazando las expresiones por sus valores numéricos:  $\tau_{z\theta} = \mathbf{101,5 \text{ MPa}} \quad (4 \text{ ptos})$

Reemplazando en la ecuación que relaciona Torque y tensión de corte (enunciado):

$$T_z = \frac{J_{zz}}{r} \tau_{z\theta}$$

$$T_z = \frac{0,82 \text{ mm}^4}{0,85 \text{ mm}} 101,5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = \mathbf{97,92 \text{ N mm}} \quad (5 \text{ ptos})$$

! Atención: las unidades son importantes !

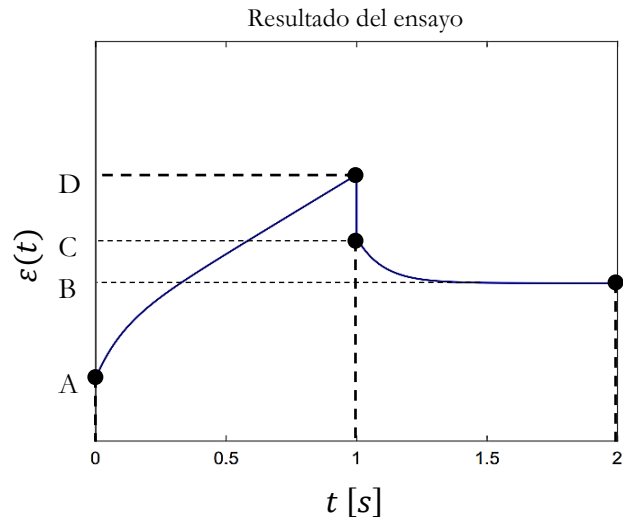
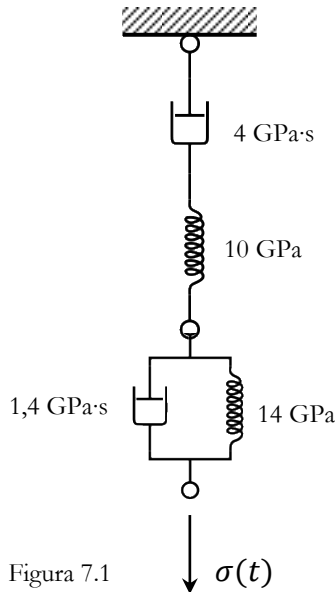
b) Utilizando el resultado obtenido en a) en la expresión y con los datos proporcionados en el enunciado:

$$\theta = \frac{TL}{JG} = \frac{97,9 \text{ N mm } 3000 \text{ mm}}{0,82 \text{ mm}^4 80,77 \cdot 10^3 \text{ N/mm}^2} = 4,435 \text{ (rad)} = \mathbf{254,1^\circ} \quad (5 \text{ ptos})$$

Es decir, con menos de una vuelta completa se alcanzaría la ruptura del alambre en las condiciones descritas.

**Problema 08 Viscoelasticidad**

(20 pts.) Un material puede ser representado mediante el modelo viscoelástico que se muestra en la Figura 7.1. En un ensayo se aplica una tensión de tracción constante  $\sigma(t) = 1 \text{ GPa}$  ( $10^9 \text{ Pa}$ ) durante un segundo, y luego la tensión se retira instantáneamente (descarga). El resultado de este ensayo se muestra en la curva de la Figura 7.2, donde las ordenadas A, B, C y D de los puntos que se muestran son desconocidas.



Recuerde que para un elemento Maxwell y para un elemento Kelvin-Voigt las expresiones de la respuesta para un ensayo de *creep* son las siguientes:

$$\text{Maxwell: } \varepsilon_m(t) = \frac{\sigma_o}{E_m} + \frac{\sigma_o}{\eta_m} t$$

$$\text{Kelvin - Voigt: } \varepsilon_k(t) = \frac{\sigma_o}{E_k} \left( 1 - e^{-\frac{E_k}{\eta_k} t} \right)$$

**Solución:**

- a) (12 pts.) Determine los valores de las ordenadas A, B, C y D en la curva del resultado del ensayo. Escribalos a continuación:

A=\_\_\_\_\_ B=\_\_\_\_\_ C=\_\_\_\_\_ D=\_\_\_\_\_

Claramente el modelo viscoelástico corresponde a un elemento tipo Maxwell en serie con un elemento tipo Kelvin - Voigt. Entonces, la deformación total del elemento compuesto será la suma de la deformación en el elemento Maxwell y la deformación en el elemento Kelvin - Voigt:

$$\varepsilon_{tot}(t) = \varepsilon_m(t) + \varepsilon_k(t)$$

$$\varepsilon_{tot}(t) = \frac{\sigma_o}{E_m} + \frac{\sigma_o}{\eta_m} t + \frac{\sigma_o}{E_k} \left( 1 - e^{-\frac{E_k}{\eta_k} t} \right)$$

Luego, para  $t=0$ :

$$\varepsilon_{tot}(t = 0) = \frac{\sigma_o}{E_m} = \frac{10^9 Pa}{10^{10} Pa} = 0,1$$

Como se puede ver, la deformación en  $t=0$  es solamente debida al “resorte” en el elemento Maxwell. Entonces:

$$\mathbf{A} = \mathbf{0}, \mathbf{1} \text{ (3 ptos)}$$

Para  $t=1$ :

$$\varepsilon_{tot}(t = 1) = \frac{10^9}{10^{10}} + \frac{10^9}{4 \cdot 10^9} + \frac{10^9}{14 \cdot 10^9} \left( 1 - e^{-\frac{14 \cdot 10^9}{1,4 \cdot 10^9}} \right) = 0,3500 + 0,0714 = 0,4214$$

En la expresión anterior, 0,35 corresponde a la deformación del elemento Maxwell en  $t=1s$  y 0,0714 corresponde a la deformación del elemento Kelvin – Voigt en  $t=1s$ . Entonces:

$$\mathbf{D} = \mathbf{0}, \mathbf{4214} \text{ (3 ptos)}$$

Al quitar la tensión aplicada en  $t=1s$  se produce instantáneamente un acortamiento del resorte en el elemento Maxwell, ya que la tensión en este elemento (por equilibrio) es igual a la tensión aplicada. Luego, en forma instantánea se produce un acortamiento igual al estiramiento del elemento Maxwell en  $t=0$ . Por lo tanto la ordenada del punto C será:

$$\varepsilon_{tot}(t = 1) - \varepsilon_m(t = 0) = 0,4214 - 0,1 = 0,3214$$

Entonces:

$$\mathbf{C} = \mathbf{0}, \mathbf{3214} \text{ (3 ptos)}$$

Finalmente, cuando el tiempo se hace muy grande, debido al resorte el elemento Kelvin – Voigt vuelve a tener deformación nula (es decir, se acorta 0,0714 que fue su alargamiento hasta  $t=1s$ ). El estiramiento permanente se debe únicamente al elemento viscoso en el elemento Maxwell, y será igual a:

$$\varepsilon_{tot}(t = 1) - \varepsilon_m(t = 0) - 0,0714 = 0,4214 - 0,1 - 0,0714 = 0,25$$

Entonces:

$$\mathbf{B} = \mathbf{0}, \mathbf{25} \text{ (3 ptos)}$$

- b) (2 pts.) ¿Por qué en  $t=0$  existe un valor  $\boldsymbol{\varepsilon}(t = \mathbf{0}) = \mathbf{A}$  distinto de cero? Explique a qué corresponde esta deformación. Use el espacio a continuación.

Corresponde directamente a la deformación instantánea en el elemento Maxwell. En el ensayo de Creep, la deformación inicial en los elementos viscosos siempre debe ser nula. Luego, en  $t=0$  instantáneamente se produce una deformación  $\boldsymbol{\sigma}_o/\mathbf{E}_m$  en el elemento.



Apellido, Nombre: \_\_\_\_\_ , \_\_\_\_\_

- c) (2 pts.) ¿Por qué al retirar la carga en  $t=1\text{s}$  se produce una disminución instantánea en la deformación del elemento (desde D a C)? Explique a qué corresponde esta deformación. Use el espacio a continuación.

Al retirar la carga, el resorte en el elemento Maxwell queda con tensión nula. Entonces, instantáneamente su deformación disminuye en  $\sigma_o/E_m$ . Este es el salto instantáneo de D a C en el momento en que se retira la carga.

- d) (4 pts.) ¿Por qué cuando el tiempo “tiende a infinito” existe una deformación residual en el elemento? Explique a qué corresponde esta deformación. Use el espacio a continuación.

Cuando pasa mucho tiempo, el elemento Kelvin (debido al resorte) vuelve a tener deformación nula. Luego, la deformación permanente en el elemento es únicamente la deformación con que quedó la componente viscosa del elemento Maxwell luego del proceso de carga.