Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
6 de Octubre del 2017

MAT1630 ⋆ Cálculo III
Solución Interrogación 2

1. Sea $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ la curva que sigue de la intersección del cilindro elíptico $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ y el plano $4y + 3z = 1$. Calcular la masa de la curva Γ si la densidad en (x, y, z) está dada por $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2$ gramos por unidad de longitud de alambre.

   Solución. Una parametrización para la curva Γ es $r(t) = (5\cos(t), 3\,\mathrm{sen}(t), 1/3 - 4\,\mathrm{sen}(t))$, con $t \in [0, 2\pi]$. Luego, la masa del alambre es

$$
\begin{aligned}
\int_\Gamma \rho\, ds &= \int_0^{2\pi} \rho(r(t))\,\|r'(t)\|\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} (25\cos^2(t) + 9\,\mathrm{sen}^2(t))\sqrt{25\,\mathrm{sen}^2(t) + 9\cos^2(t) + 16\cos^2(t)}\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} (9 + 16\cos^2(t)) \cdot 5\, dt \\
&= 90\pi + 80\int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos(2t)}{2}\, dt \\
&= 90\pi + 80\pi = 170\pi
\end{aligned}
$$

2. Considere el campo de fuerzas $F(x, y, z) = (x - y, y + z, z - x)$. Calcule la integral de trabajo

$$\int_\Gamma F(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$$

   siendo Γ la curva de segmentos de recta que une los puntos $(0, 0, 0) \to (1, 0, 0) \to (1, 1, 0) \to (1, 1, 1)$.

   Solución. Usamos las propiedades de la integral de línea, separando el trabajo en cada segmento que compone la curva:

$$\int_\Gamma F(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_{\Gamma_1} F(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_2} F(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_3} F(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$$

   siendo Γ_1 el segmento que une los punto $(0, 0, 0)$ con $(1, 0, 0)$, Γ_2 el segmento que une los punto $(1, 0, 0)$ con $(1, 1, 0)$, y Γ_3 el segmento que une los punto $(1, 1, 0)$ con $(1, 1, 1)$. Usando las parametrización de los diferentes segmentos tendremos

$$
\begin{aligned}
\int_\Gamma F(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} &= \int_0^1 (t, 0, -t) \cdot (1, 0, 0)\, dt + \int_0^1 (1 - t, t, -1) \cdot (0, 1, 0)\, dt + \int_0^1 (1 - 1, 1 + t, t - 1) \cdot (0, 0, 1)\, d \\
&= \int_0^1 t\, dt + \int_0^1 t\, dt + \int_0^1 (t - 1)\, dt \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

3. Considere el campo de vectores

$$F(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + xe^{-y^2} \right) \hat{\imath} + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - x^2 y e^{-y^2} \right) \hat{\jmath}.$$

Se define $f(x,y) = \int\limits_C F \cdot dr$ donde C es cualquier curva simple (no cerrada) que va desde $(0,0)$ hasta cualquier punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

a) Calcule $f(x,y)$. (4 puntos)

b) Verifique que $\nabla f = F$. (2 puntos)

Solución:

a) Notemos que el campo vectorial $F = P\hat{\imath} + Q\hat{\jmath}$ satisface

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + xe^{-y^2} \right) = -\frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}} - 2xye^{-y^2} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - x^2ye^{-y^2} \right) = -\frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}} - 2xye^{-y^2} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Luego, F es un campo conservativo en cualquier dominio simplemente conexo del plano que no contenga al origen. Entonces, la integral de línea que define a la función f es independiente de la trayectoria. Basta calcular la integral de línea a lo largo de un segmento de recta que una los puntos $(0,0)$ y (x,y):

$$C: \qquad \alpha(t) = (1-t)(0,0) + t(x,y) = (tx, ty)\,, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1\,.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \int\limits_C P dx + Q dy \\ &= \int_0^1 \left[\left(\frac{tx}{\sqrt{(tx)^2+(ty)^2}} + txe^{-t^2y^2} \right) x + \left(\frac{ty}{\sqrt{(tx)^2+(ty)^2}} - (tx)^2(ty)e^{-t^2y^2} \right) y \right] dt \\ &= \int_0^1 \left[\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + tx^2 e^{-t^2y^2} + \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - t^3x^2y^2e^{-t^2y^2} \right] dt \\ &= \sqrt{x^2+y^2} + x^2 \int_0^1 te^{-t^2y^2}\, dt - x^2y^2 \int_0^1 t^3 e^{-t^2y^2}\, dt \\ &= \sqrt{x^2+y^2} + x^2 \left[\frac{1}{2y^2} - \frac{e^{-y^2}}{2y^2} \right] - x^2y^2 \left[\frac{1}{2y^4} - \frac{(y^2+1)e^{-y^2}}{2y^4} \right] \\ &= \sqrt{x^2+y^2} + \frac{x^2e^{-y^2}}{2}\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + \dfrac{x^2e^{-y^2}}{2}$

b) Se tiene que

$$\nabla f(x,y) = (f_x(x,y), f_y(x,y)) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + xe^{-y^2}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - x^2ye^{-y^2} \right) = F(x,y).$$

4. Calcule el área en el plano encerrada por la curva: $x(t) = \cos(t)$ e $y(t) = \operatorname{sen}(2t)$ para $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

Solución Esta curva está simple cerrada, suave por tramos con orientación positiva, entonces podemos usar el teorema de Green

$$\int_C Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

para funciones P y Q tales que $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$.

Versión 1 Para $P = 0$ y $Q = x$, tenemos

$$\begin{aligned} A &= \iint_D 1dA = \int_C xdy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x(t)y'(t)dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(t) 2\cos(2t)dt \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\cos(t)\left(1 - 2\operatorname{sen}^2(t)\right) dt = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\cos(t) - 2\cos(t)\operatorname{sen}^2(t)\right) dt \\ &= 2\left[\operatorname{sen}(t) - \frac{2}{3}\operatorname{sen}^3(t)\right]_{t=-\pi/2}^{\pi/2} = 2\left(2 - \frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Versión 2 Para $P = -y$ y $Q = 0$, tenemos

$$\begin{aligned} A &= \iint_D 1dA = \int_C (-y)dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (-y(t))x'(t)dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (-\operatorname{sen}(2t))(-\operatorname{sen}(t))dt \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2\operatorname{sen}(t)\cos(t))\operatorname{sen}(t)dt = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(t)\operatorname{sen}^2(t)dt \\ &= 2\left[\frac{1}{3}\operatorname{sen}^3(t)\right]_{t=-\pi/2}^{\pi/2} = 2\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Versión 3 Otras opciones, tales como $P = -\frac{1}{2}y$ y $Q = \frac{1}{2}x$, dan el mismo resultado.

5. Sea $\overrightarrow{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $\overrightarrow{F}(x,\ y) = (e^{xy}(1 + xy),\ x^2 + e^{y^2} + x^2 e^{xy})$.

   Encontrar $\int_\lambda \overrightarrow{F} \cdot d\,\overrightarrow{\lambda}$ si λ recorre la semicircunferencia $x^2 + y^2 = 1,\ y \geq 0$ en sentido antihorario.

   Solución

   Sea $D = \{(x,\ y) : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$ entonces $\lambda + \mu$ recorre positivamente la frontera de D siendo μ el trazo desde (-1, 0) hasta (1, 0).

   $\overrightarrow{F}$ es de clase $\mathcal{C}^1$ en todo $\mathbb{R}^2$, por Green se tiene que

$$\iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + e^{y^2} + x^2 e^{xy}) - \frac{\partial}{\partial y} e^{xy}(1 + xy)\right) dA = \int_{\lambda+\mu} \overrightarrow{F} \cdot d\,\overrightarrow{\lambda}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + e^{y^2} + x^2 e^{xy}) - \frac{\partial}{\partial y} e^{xy}(1 + xy) = 2x + 2xe^{xy} + x^2 y e^{xy} - ye^{xy}(1 + xy) - xe^{xy} = 2x$$

   Por lo tanto $\iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(x + e^{y^2} + x^2 e^{xy}) - \frac{\partial}{\partial y} e^{xy}(1 + xy)\right) dA = \iint_D 2x\, dA = 0.$

   Parametrizamos $\mu(t) = (t, 0)$, con $-1 \leq t \leq 1$ tenemos que

$$\int_\mu \overrightarrow{F} \cdot d\,\overrightarrow{\mu} = \int_{-1}^{1} (1, 1 + 2t^2) \cdot (1, 0)\ dt = 2$$

   Por lo tanto, $\int_\lambda \overrightarrow{F} \cdot d\,\overrightarrow{\lambda} = -2$