



### Código de Honor

Me comprometo a no entregar ni recibir ayuda indebida en esta evaluación. Esto incluye discutir la evaluación con compañeros que aún no lo han rendido. También declaro que si me percato de que existe fraude de cualquier tipo en esta evaluación, tengo el deber de comunicárselo a los Profesores del curso, quienes seguirán los procedimientos establecidos en la reglamentación de la Escuela de Ingeniería y de la Pontificia Universidad Católica de Chile para perseguir y sancionar cualquier acto de deshonestidad académica.

Apellido, Nombre: \_\_\_\_\_ , \_\_\_\_\_ Firma: \_\_\_\_\_

Número de alumno: \_\_\_\_\_ Sección: \_\_\_\_\_ Fecha: \_\_\_\_\_

### Problema 01

Si se deforma una barra de cobre en ciclos de trabajo en frío, ¿qué pasa con la microestructura y las propiedades mecánicas durante la deformación? (5 pts.)

- a) Los ciclos de deformación aportan más energía al material y aumenta su temperatura, por lo tanto la ductilidad sube con cada ciclo.
- b) Los ciclos de deformación aportan más energía al material y aumenta su temperatura, por lo tanto la resistencia baja con cada ciclo.
- c) Durante la deformación plástica las dislocaciones se desplazan y se multiplican, siendo supresores de movimiento de las dislocaciones, por lo tanto el límite de fluencia del material disminuye con cada ciclo.
- d) Durante la deformación plástica las dislocaciones se desplazan y se multiplican, siendo supresores de movimiento de las dislocaciones, por lo tanto el límite de fluencia aumenta con cada ciclo.

### Problema 02

Después de aplicar trabajo en frío en una probeta de cobre, se realiza un tratamiento térmico a alta temperatura (llamado tratamiento de recocido), eliminando las dislocaciones del material. Además, al aplicar temperatura por un prolongado periodo de tiempo, se sabe que los granos aumentan su tamaño. ¿Cuál(es) de la(s) siguiente(s) afirmación(es) es correcta en relación a cómo cambian las propiedades mecánicas según el tamaño de los granos en función de la temperatura? (5 pts.)

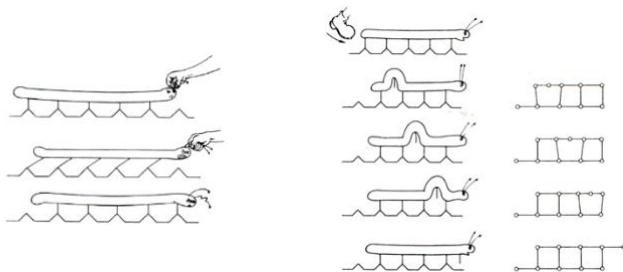
- I. Con granos más grandes, la ductilidad y la resistencia disminuyen.
  - II. Con granos más grandes, la ductilidad aumenta y la resistencia disminuye.
  - III. Para temperaturas altas la ductilidad y la resistencia disminuyen.
  - IV. Para temperaturas altas la ductilidad aumenta y la resistencia disminuye.
- 
- a) Solo I
  - b) Solo II
  - c) II y IV
  - d) I y III

**Problema 03**

Con respecto al comportamiento mecánico plástico de un metal, **dibuje y explique** las siguientes situaciones:

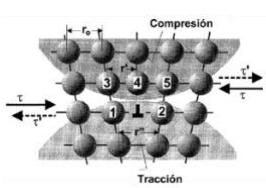
- a) Dislocación de borde y su movimiento a escala atómica (5pts.)

El movimiento es similar al movimiento de una oruga. Los enlaces se rompen y forman nuevos enlaces con los nuevos vecinos como se puede apreciar en el siguiente esquema:



- b) ¿Qué tipo de tensión es la responsable del movimiento de la dislocación de borde? Compare con el mecanismo de deformación elástica. (3 pts por explicar que el movimiento de las dislocación considerando la tensión de corte y 2 pts por comparación.)

La deformación plástica consiste en migración de dislocaciones en ciertos planos cristalográficos (planos de deslizamiento) cuando la tensión aplicada excede el valor mínimo (límite de estricción). Consideraremos las relaciones de tensión y deformación alrededor de una dislocación: el faltante plano cristalográfico resulta en aumento de distancia entre planos 1 y 2 ( $r' > r_0$ ) -> tracción, mientras la distancia entre los planos 3 y 4 está disminuida ( $r' < r_0$ ) -> compresión. Como resultado, los enlaces 1-3 y 2-4 son inestables por lo que movimiento de la dislocación y formación de enlaces 1-4 o 2-3 es posible. La tensión necesaria para mover la dislocación se denomina por  $\tau_{\text{crit}}$ . Para  $\tau > \tau_{\text{crit}}$ , la dislocación se mueve hacia la izquierda; para  $\tau > \tau_{\text{crit}}$ , hacia la derecha.



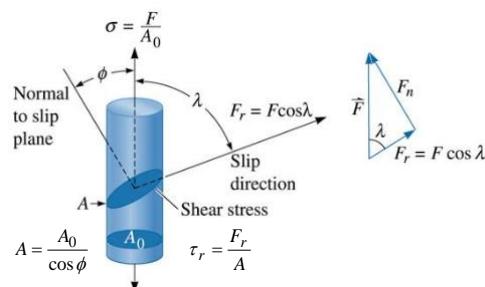
A nivel de enlaces atómicos, en la deformación plástica se rompen los enlaces y forman nuevos con sus nuevos "vecinos", ya que los planos se deslizan uno en función de otro. En cambio en la deformación elástica, los enlaces solamente se estiran.

- c) ¿Por qué en un ensayo de tracción uniaxial el plano de falla es inclinado? (5pts.)

Porque existe una tensión de corte en función de la tensión axial aplicada. La relación entre tensión de corte, tensión aplicada y orientación de los planos cristalinos está dada por la ley de Schmidt.

Tensión cortante resulta en un sistema de deslizamiento.

$$\tau_r = \sigma_{\text{appl}} \cos \lambda \cos \phi$$



### Problema 04

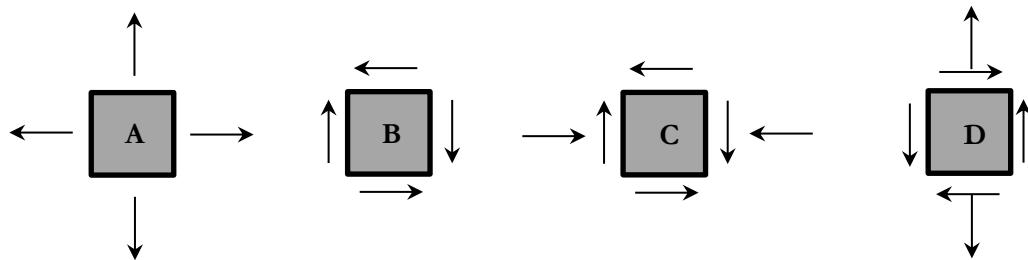
Mencione al menos 2 ensayos de dureza y explique brevemente en qué consisten. (5 pts.)

1. **Ensayo Brinell:** mide la resistencia del material al ser penetrado por una esfera en un determinado periodo de tiempo.
2. **Vickers Microhardness:** se utiliza como penetrador un diamante tallado en forma de pirámide cuadrangular con un ángulo de  $136^\circ$  entre dos caras opuestas
3. **Knoop microhardnes:** similar al anterior.
4. **Rockwell and superficial rockwell:** hay dos tipos de penetradores: unas bolas esféricas de acero endurecido (templado y pulido) de  $1/16$ ,  $1/8$ ,  $1/4$  y  $1/2$  pulg, y un penetrador cónico de diamante.

El valor de la dureza se obtiene dividiendo la fuerza aplicada al penetrador entre la superficie de la huella que deja en el material en general para todos los ensayos.

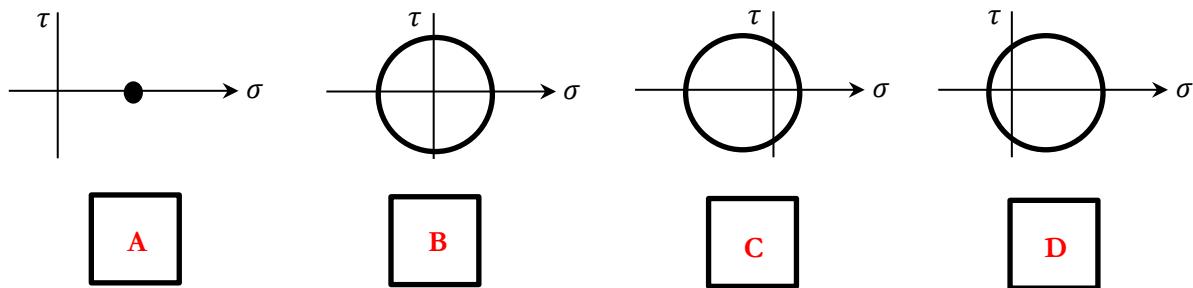
### Problema 05

Se tienen los siguientes estados de tensión plana representados en un elemento diferencial:



A continuación se muestran cuatro círculos de Mohr, cada uno de ellos representa uno de los estados de tensión anterior. Anote en el recuadro la letra A, B, C o D del estado de tensión al que cada uno mejor corresponda.

(5 pts.)



## Problema 06

Un cilindro metálico monocristalino, con estructura cristalina FCC, tiene una fuerza de tracción aplicada como se indica en la figura. (15 pts.)

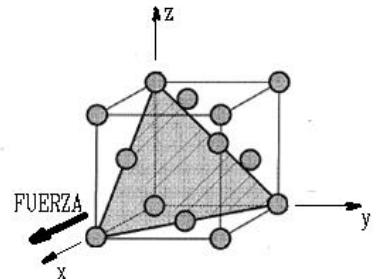
- a) ¿En qué dirección esta aplicada la fuerza? Indique las coordenadas (2 pts)

- b) Indique el plano de deslizamiento (2 pts)

- c) Dibuje la dirección [1-10] de deslizamiento y [0-11] (3 pts)

- d) Determine el valor de tensión de tracción necesaria para que ocurra deslizamiento en las dos direcciones indicadas en (c), considerando una tensión cortante de 0.5 MPa. (5 pts)

- e) ¿Cuál de las dos direcciones va a deslizar primero? ¿Por qué? (3 pts)

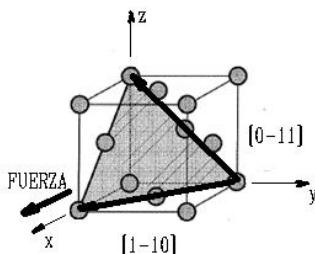


PAUTA

- a) [1 0 0]

- b) (1 1 1)

- c) Las direcciones son las siguientes:



d)  $\tau := \sigma_{\text{appl}} \cdot \cos(\lambda) \cdot \cos(\Phi)$

Para dirección 1 de desplazamiento:  $\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 0 \\ u_{11} & v_{11} & w_{11} \end{array}$   $u_{11} := 1$   
 $v_{11} := -1$   
 $w_{11} := 0$

Direccion de la fuerza aplicada:  $\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{matrix}$   $u_2 := 1$   
 $v_2 := 0$

Plano de deslizamiento:	1	1	1	$u_1 := 1$
	$u_1$	$v_1$	$w_1$	$v_1 := 1$

Para determinar el ancho  $\lambda_1$  se necesitan:

los indices miller de la direcció n 1 de deslizamiento

los índices miller de la dirección de la carga aplicada.

$$\lambda_1 := \cos \left( \frac{u_{11} \cdot u_2 + v_{11} \cdot v_2 + w_{11} \cdot w_2}{\sqrt{u_{11}^2 + v_{11}^2 + w_{11}^2} \cdot \sqrt{u_2^2 + v_2^2 + w_2^2}} \right)^{-1}$$

$$\lambda 1 := \cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-1} \quad 45 \text{ grados} \quad \text{o por geometria del cubo: } \frac{90}{2} = 45 \text{ grados}$$

Apellido, Nombre: \_\_\_\_\_ , \_\_\_\_\_

Para determinar el angulo  $\phi_1$  se necesitan:

los indices miller del plano de deslizamiento

los indices miller de la direccion de la carga aplicada

$$\phi_1 := \cos \left( \frac{u_1 \cdot u_2 + v_1 \cdot v_2 + w_1 \cdot w_2}{\sqrt{(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2)(u_2^2 + v_2^2 + w_2^2)}} \right)^{-1}$$

$$\phi_1 := \cos \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^{-1} \quad 54,7 \text{ grados} \quad \text{o por geometria del cubo: } \operatorname{tg} \left( \frac{\text{arista} \cdot \sqrt{2}}{\text{arista}} \right)^{-1}$$

$$\sigma_{appl\_1} := \frac{\tau}{\cos(\lambda_1) \cdot \cos(\phi_1)}$$

$$\sigma_{appl\_1} := 1,42 \text{ MPa}$$

Para direccion 2 de deslizamiento:  $0 -1 1$        $u_{12} := 0^+$   
 $u_{12} \quad v_{12} \quad w_{12}$        $v_{12} := -1$   
 $w_{12} := 1$

Direccion de la fuerza aplicada:  $1 0 0$        $u_2 := 1$   
 $u_2 \quad v_2 \quad w_2$        $v_2 := 0$   
 $w_2 := 0$

Plano de deslizamiento:  $1 1 1$        $u_1 := 1$   
 $u_1 \quad v_1 \quad w_1$        $v_1 := 1$   
 $w_1 := 1$

Para determinar el angulo  $\lambda_2$  se necesitan:

los indices miller de la direccion 2 de deslizamiento

los indices miller de la direccion de la carga aplicada

$$\lambda_2 := \cos \left( \frac{u_{12} \cdot u_2 + v_{12} \cdot v_2 + w_{12} \cdot w_2}{\sqrt{(u_{12}^2 + v_{12}^2 + w_{12}^2)(u_2^2 + v_2^2 + w_2^2)}} \right)^{-1}$$

$$\lambda_2 := \cos \left( \frac{0}{\sqrt{2}} \right)^{-1} \quad 90 \text{ grados} \quad \text{o por geometria del cubo: } 90 \text{ grados}$$

$$\lambda_2 := 90 \quad \phi_1 := \phi_2 \quad \phi_2 := \cos \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^{-1} \quad 54,7 \text{ grados}$$

$$\sigma_{appl\_2} := \frac{\tau}{\cos(\lambda_2) \cdot \cos(\phi_2)} \text{ MPa} \quad \sigma_{appl\_2} := \frac{0,5}{\cos(90) \cdot \cos(54,7)} \quad \infty$$

0

- e)  $[1 -1 0]$  ángulo más pequeño. La dirección  $[0 -1 1]$  de deslizamiento es perpendicular con la fuerza aplicada (ángulo de 90 grados) se necesitaría una tensión muy alta para obtener deslizamiento en esta dirección; aparte otros planos vanos a deslizar mucho antes  $[1 -1 0]$ , por ende nunca va a pasar deslizamiento en segunda dirección.

Nota: para el problema (c) considerar direcciones equivalentes y para el (d) fijarse en el desarrollo en vez del valor final.

**Problema 07**

En el laboratorio de DICTUC de la Universidad Católica de Chile, se realizó un ensayo en corte y compresión de un muro fabricado de un material con módulo de elasticidad  $E=20\text{GPa}$  y razón de Poisson  $\nu=0,20$ , como muestra esquemáticamente la figura 1. Para medir las deformaciones en un punto en el centro sobre la superficie del muro (punto P en la figura 1) se colocó una roseta de deformaciones orientada en  $45^\circ$  como se muestra en la figura 2. La lectura de la roseta fue: (30 pts.)

$$\varepsilon_a = 0,2 \cdot 10^{-3}$$

$$\varepsilon_b = 0,1 \cdot 10^{-3}$$

$$\varepsilon_c = -1 \cdot 10^{-3}$$

- Determine las tensiones principales y la orientación de los ejes principales respecto a los ejes  $x$  e  $y$  en el punto P. Dibuje el estado principal de tensiones en un elemento diferencial orientado según los ejes principales.
- Determine la tensión de corte máxima y la orientación en la que se produce respecto a los ejes  $x$  e  $y$  en el punto P. Dibuje el estado de tensión de corte máxima en un elemento diferencial orientado según los ejes en que se produce.

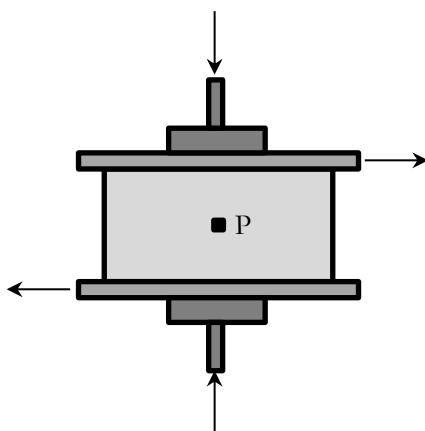


Figura 1

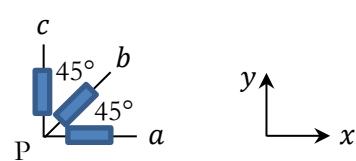


Figura 2

Para la roseta en  $60^\circ$  de la figura 2, se tienen las siguientes relaciones entre las deformaciones:

$$\varepsilon_a = \varepsilon_x \quad (1\text{p}) \quad (1)$$

$$\varepsilon_b = \frac{(\varepsilon_x + \varepsilon_y)}{2} + \frac{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)}{2} \cos(90) + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin(90) = \frac{(\varepsilon_x + \varepsilon_y)}{2} + \frac{1}{2} \gamma_{xy} \quad (1\text{p}) \quad (2)$$

$$\varepsilon_c = \varepsilon_y \quad (1\text{p}) \quad (3)$$

Reemplazando (1) y (3) en (2) se obtiene:

$$\varepsilon_b = \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_c}{2} + \frac{\gamma_{xy}}{2} \quad (4)$$

Entonces, despejando:

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_b - \varepsilon_a - \varepsilon_c \quad (5)$$

Apellido, Nombre: \_\_\_\_\_ , \_\_\_\_\_

Reemplazando la lectura de la roseta, se obtiene el estado de deformación en  $x - y$ :

$$\varepsilon_x = 0,2 \cdot 10^{-3} \quad (1.5\text{pto}) \quad (6)$$

$$\varepsilon_y = -1 \cdot 10^{-3} \quad (1.5\text{pto}) \quad (7)$$

$$\gamma_{xy} = 1 \cdot 10^{-3} \quad (1.5\text{pto}) \quad (8)$$

Usando las ecuaciones constitutivas, y considerando un estado plano de tensiones:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E} \sigma_y \quad (9)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E} \sigma_x \quad (10)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad (11)$$

El valor de  $G$  puede calcularse a partir de  $E$  y  $\nu$ :

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{25}{2(1+0,25)} = 10\text{GPa} \quad (1.5\text{pts}) \quad (12)$$

Despejando las tensiones de las ecuaciones (9), (10) y (11), y reemplazando (6), (7) y (8):

$$\sigma_x = \frac{E(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y)}{1-\nu^2} = \frac{20 \cdot 10^9 (0,2 - 0,2 \cdot 1) \cdot 10^{-3}}{1-0,2^2} = 0 \quad (2\text{pts}) \quad (13)$$

$$\sigma_y = \frac{E(\nu\varepsilon_x + \varepsilon_y)}{1-\nu^2} = \frac{20 \cdot 10^9 (0,2 \cdot 0,2 - 1) \cdot 10^{-3}}{1-0,2^2} = -20\text{MPa} \quad (2\text{pts}) \quad (14)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = 10 \cdot 10^9 \cdot 1 \cdot 10^{-3} = 10\text{MPa} \quad (2\text{pts}) \quad (15)$$

El estado de tensiones principales se obtiene mediante una rotación del estado de tensiones anterior. Esto se puede hacer usando las expresiones de rotación de tensiones, o bien usando el círculo de Mohr.

### a) Estado principal de tensiones

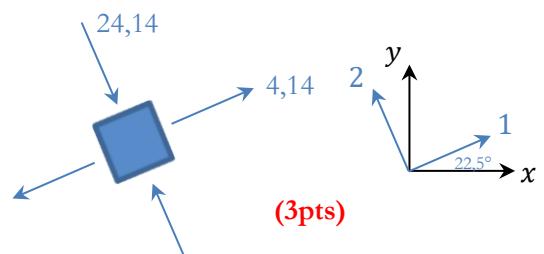
$$\tan(2\theta_1) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{20}{0 + 20} = 1$$

$$\theta_1 = 22,5^\circ \quad (1\text{pts})$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = -10 \pm 10\sqrt{2}$$

$$\sigma_1 = 4,14\text{MPa}$$

$$\sigma_2 = -24,14\text{MPa} \quad (3\text{pts})$$



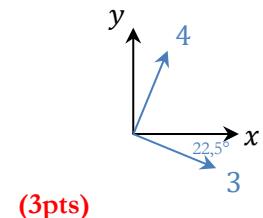
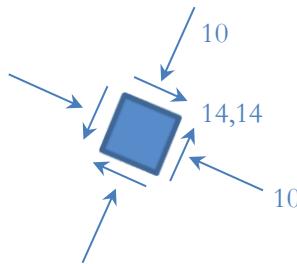
b) Estado de corte máximo

$$\tan(2\theta_3) = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} = -\frac{0 + 20}{20} = -1$$

$$\theta_3 = -22,5^\circ \quad \text{(1pto)}$$

$$\sigma_3 = \sigma_4 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = -10 MPa \quad \text{(2pts)}$$

$$\tau_{34} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin(2\theta_3) + \tau_{xy} \cos(2\theta_3) = -\frac{0+20}{2} \sin(-45) + 10 \cos(-45) = 14,14 MPa \quad \text{(2pts)}$$



**Problema 08**

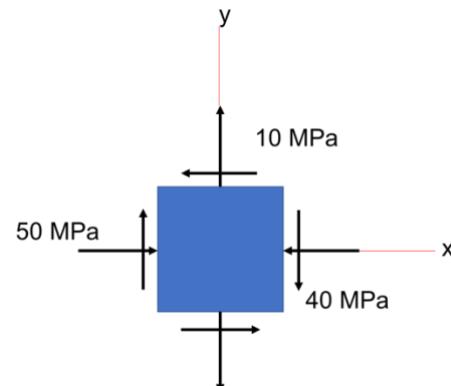
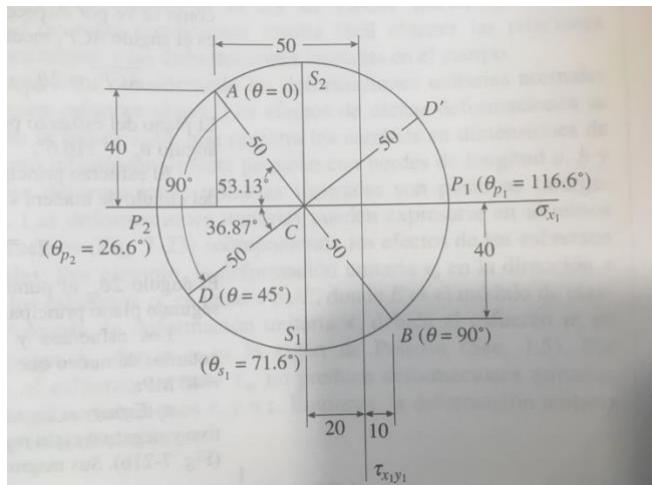
En un punto sobre la superficie de un material, se tiene el estado plano de tensiones que se muestra en la figura. (20 pts.)

Usando el Círculo de Mohr, determine:

- El tensor de tensiones con respecto a un sistema de ejes rotados en un ángulo de  $\theta = 45^\circ$  en sentido antihorario.
- Las tensiones y direcciones principales.
- El estado de tensión de corte máximo.

**PAUTA**

El centro del círculo de Mohr está dado por:



(2pts)

$$C = \frac{-50+10}{2} \text{ MPa} = -20 \text{ MPa. (1pto)}$$

El punto A, que representa las tensiones sobre la cara  $x$  del elemento, tiene coordenadas:

$$\sigma_x = -50 \text{ MPa} \quad \tau_{xy} = -40 \text{ MPa}$$

Similarmente, las coordenadas del punto B, que representan las tensiones sobre la cara  $y$ , son:

$$\sigma_y = 10 \text{ MPa} \quad \tau_{yx} = -40 \text{ MPa}$$

El diámetro AB corresponde al estado de tensiones del elemento según los ejes x e y. Ahora se traza el círculo por los puntos A y B, con centro en C y radio R igual a:

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 50 \text{ MPa (1pto)}$$

- a) Las tensiones sobre un elemento inclinado a un ángulo  $\theta = 45^\circ$ , están dados por las coordenadas del punto  $D$ , que se muestra en la figura, que se halla a un ángulo  $2\theta = 90^\circ$  desde el punto  $A$ . Para evaluar estas coordenadas, necesitaremos conocer el ángulo entre la línea  $CD$  y el eje de las ordenadas negativo (es decir el ángulo  $ACP_2$ ). Estos ángulos se determinan a partir de la geometría del círculo como sigue:

$$\tan(ACP_2) = \frac{40 \text{ MPa}}{30 \text{ MPa}} = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow ACP_2 = 53,13^\circ$$

$$DCP_2 = 90^\circ - ACP_2 = 36,87^\circ$$

Conocidos estos ángulos, podemos obtener las coordenadas del punto  $D$  directamente de la figura, que corresponden a las tensiones en una cara de normal  $x_1$ .

$$\sigma_{x1} = -20 \text{ MPa} - (50 \text{ MPa})(\cos 36,87^\circ) = -60 \text{ MPa}$$

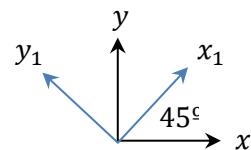
$$\tau_{x1y1} = (50 \text{ MPa})(\sin 36,87^\circ) = 30 \text{ MPa}$$

De manera análoga, podemos encontrar las tensiones representados por el punto  $D'$ , que corresponden a las tensiones en una cara de normal  $y_1$ .

$$\sigma_{y1} = -20 \text{ MPa} + (50 \text{ MPa})(\cos 36,87^\circ) = 20 \text{ MPa}$$

$$\tau_{x1y1} = (50 \text{ MPa})(\sin 36,87^\circ) = 30 \text{ MPa}$$

Finalmente el tensor está dado por:



$$\sigma_{x1y1} = \begin{bmatrix} -60 & 30 \\ 30 & 20 \end{bmatrix} \text{ MPa} \quad (\text{8pts})$$

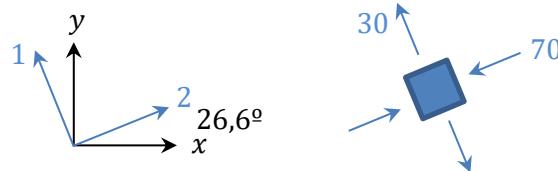
- b) Las tensiones principales están representadas por los puntos  $P_1$  y  $P_2$  en el círculo de Mohr. La tensión principal mayor es:

$$\sigma_1 = -20 \text{ MPa} + 50 \text{ MPa} = 30 \text{ MPa}$$

y la tensión principal menor es:

$$\sigma_2 = -20 \text{ MPa} - 50 \text{ MPa} = -70 \text{ MPa}$$

donde las direcciones principales son  $\theta_{P1} = 116,6^\circ$  y  $\theta_{P2} = 26,6^\circ$  respectivamente. Es decir, el estado principal de tensiones se obtiene con una rotación de  $\theta_1 = 26,6^\circ$  en sentido anti – horario. **(6pts)**



Las tensiones de corte máximos están representadas por los puntos  $S_1$  y  $S_2$  en el círculo de Mohr. El módulo de la tensión máxima es igual al radio del círculo de Mohr,  $|\tau_{max}| = 50 \text{ MPa}$ . Del círculo de Mohr, el **estado** de corte máximo se produce mediante una rotación en  $18,4^\circ$  en sentido horario de los ejes  $x$  e  $y$ . Entonces, el estado de corte máximo según los ejes 3 y 4 de la figura será: **(2pts)**

$$\sigma_3 = \sigma_4 = -20 \text{ MPa}$$

$$\tau_{34} = -50 \text{ MPa}$$

