



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
<75.12> ANÁLISIS NUMÉRICO

DATOS DEL TRABAJO PRÁCTICO

2	2016	Modelación numérica del sistema hidráulico
	AÑO	de llenado y vaciado del tercer juego
	2	de esclusas del canal de Panamá
TP NRO	CUAT	TEMA

INTEGRANTES DEL GRUPO

6	Merlo Leiva Nahuel	92115
	APELLIDO Y NOMBRE	PADRÓN
GRUPO	APELLIDO Y NOMBRE	PADRÓN

DATOS DE LA ENTREGA

CT06.TXT	74-91073	14122016	14122016
ARCHIVO	NRO CONTROL	FECHA VENC	FECHA ENTR

CORRECCIONES

FECHA	NOTA	OBSERVACIONES
DOCENTE	FIRMA	

## Introducción

---

Las ecuaciones diferenciales relacionan funciones matemáticas con sus propias derivadas. Se presentan en numerosas aplicaciones de ingeniería, en el modelado de fenómenos físicos, y en otras áreas de estudio como la matemática o la economía.

En ciertos casos, cuando requiere hallar la solución de una ecuación diferencial, es posible obtener analíticamente una solución exacta. Sin embargo, cuando la resolución analítica es inviable, la solución se aproxima mediante métodos numéricos.

Actualmente existen diversos métodos numéricos que pueden ser ejecutados por computadora, haciendo uso del elevado poder de cálculo que estas poseen. No obstante, al momento de hallar una solución apropiada, deben considerarse los errores de truncamiento y de redondeo introducidos.

## Objetivos

---

- Desarrollar un modelo numérico tridimensional de una parte del sistema hidráulico de llenado y vaciado del tercer juego de esclusas del canal de Panamá.
- Realizar un ajuste del modelo mediante la comparación de los resultados producidos contra las mediciones obtenidas en las pruebas iniciales de la obra.
- Comparar la eficiencia de distintos métodos de resolución numérica de sistemas de ecuaciones diferenciales respecto del paso de avance utilizado.

## Resumen

---

En primer lugar, se desarrollarán los algoritmos para la resolución del sistema de ecuaciones diferenciales planteado a partir de los métodos Runge Kutta  $O(2)$  y Runge Kutta  $O(4)$ .

Luego, mediante sucesivas simulaciones se estimará el paso de avance necesario para acotar el error de truncamiento al valor requerido. Con el paso de avance establecido, se realizará una simulación de llenado de las esclusas para determinar el tiempo de estabilización de las oscilaciones en el nivel de agua.

Utilizando el paso de avance establecido, se realizará una calibración del modelo comparando las mediciones obtenidas en pruebas de llenado y vaciado de las esclusas contra los resultados de la simulación de las pruebas. Para cada prueba simulada se presentará el hidrograma correspondiente.

Finalmente, se llevará a cabo un análisis de los resultados obtenidos y de su relación con las bases teóricas correspondientes.

## Discretización del problema

Para discretizar el sistema de ecuaciones diferenciales planteado utilizando un método numérico de orden 2, se optó por el método Runge Kutta  $O(2)$ :

Definiendo:

$$f_{H_1}(H_1, H_2, Q, t) = -2 \frac{Q}{\Omega_1}$$

$$f_{H_2}(H_1, H_2, Q, t) = 2 \frac{Q}{\Omega_2}$$

$$f_Q(H_1, H_2, Q, t) = \frac{gA}{L}(H_1 - H_2) - \frac{f}{2D_e A} Q|Q| - \frac{k_e}{2AL} Q|Q| - \frac{k_v(t)}{2AL} Q|Q|$$

Desarrollando el método:

$$q_{1,H_1} = k f_{H_1}(H_{1n}, H_{2n}, Q_n, t_n)$$

$$q_{1,H_2} = k f_{H_2}(H_{1n}, H_{2n}, Q_n, t_n)$$

$$q_{1,Q} = k f_Q(H_{1n}, H_{2n}, Q_n, t_n)$$

$$q_{2,H_1} = k f_{H_1}(H_{1n} + q_{1,H_1}, H_{2n} + q_{1,H_2}, Q_n + q_{1,Q}, t_{n+1})$$

$$q_{2,H_2} = k f_{H_2}(H_{1n} + q_{1,H_1}, H_{2n} + q_{1,H_2}, Q_n + q_{1,Q}, t_{n+1})$$

$$q_{2,Q} = k f_Q(H_{1n} + q_{1,H_1}, H_{2n} + q_{1,H_2}, Q_n + q_{1,Q}, t_{n+1})$$

$$H_{1n+1} = H_{1n} + 1/2 (q_{1,H_1} + q_{2,H_1})$$

$$H_{2n+1} = H_{2n} + 1/2 (q_{1,H_2} + q_{2,H_2})$$

$$Q_{n+1} = Q_n + 1/2 (q_{1,Q} + q_{2,Q})$$

Finalmente:

$$q_{1,H_1} = k \left( -2 \frac{Q_n}{\Omega_1} \right)$$

$$q_{1,H_2} = k \left( 2 \frac{Q_n}{\Omega_2} \right)$$

$$q_{1,Q} = k \left( \frac{gA}{L}(H_{1n} - H_{2n}) - \frac{f}{2D_e A} Q_n |Q_n| - \frac{k_e}{2AL} Q_n |Q_n| - \frac{k_v(t_n)}{2AL} Q_n |Q_n| \right)$$

$$q_{2, H_1} = k \left( -2 \frac{Q_n + q_{1,Q}}{\Omega_1} \right)$$

$$q_{2, H_2} = k \left( 2 \frac{Q_n + q_{1,Q}}{\Omega_2} \right)$$

$$q_{2,Q} = k \left( \frac{gA}{L} (H_{1n} + q_{1, H_1} - (H_{2n} + q_{1, H_2})) - \frac{f}{2D_e A} (Q_n + q_{1,Q}) |Q_n + q_{1,Q}| \right. \\ \left. - \frac{k_e}{2AL} (Q_n + q_{1,Q}) |Q_n + q_{1,Q}| - \frac{k_v(t_{n+1})}{2AL} (Q_n + q_{1,Q}) |Q_n + q_{1,Q}| \right)$$

$$H_{1n+1} = H_{1n} + 1/2 (q_{1, H_1} + q_{2, H_1})$$

$$H_{2n+1} = H_{2n} + 1/2 (q_{1, H_2} + q_{2, H_2})$$

$$Q_{n+1} = Q_n + 1/2 (q_{1,Q} + q_{2,Q})$$

Para discretizar el problema utilizando un método numérico de orden 4, se eligió el método Runge Kutta O(4). De forma similar al método anterior se desarrolló la discretización:

$$q_{1, H_1} = k \left( -2 \frac{Q_n}{\Omega_1} \right)$$

$$q_{1, H_2} = k \left( 2 \frac{Q_n}{\Omega_2} \right)$$

$$q_{1,Q} = k \left( \frac{gA}{L} (H_{1n} - H_{2n}) - \frac{f}{2D_e A} Q_n |Q_n| - \frac{k_e}{2AL} Q_n |Q_n| - \frac{k_v(t_n)}{2AL} Q_n |Q_n| \right)$$

$$q_{2, H_1} = k \left( -2 \frac{Q_n + 1/2 q_{1,Q}}{\Omega_1} \right)$$

$$q_{2, H_2} = k \left( 2 \frac{Q_n + 1/2 q_{1,Q}}{\Omega_2} \right)$$

$$q_{2,Q} = k \left( \frac{gA}{L} (H_{1n} + 1/2 q_{1, H_1} - (H_{2n} + 1/2 q_{1, H_2})) \right. \\ \left. - \frac{f}{2D_e A} (Q_n + 1/2 q_{1,Q}) |Q_n + 1/2 q_{1,Q}| \right. \\ \left. - \frac{k_e}{2AL} (Q_n + 1/2 q_{1,Q}) |Q_n + 1/2 q_{1,Q}| \right. \\ \left. - \frac{k_v(t_{n+1/2})}{2AL} (Q_n + 1/2 q_{1,Q}) |Q_n + 1/2 q_{1,Q}| \right)$$

$$q_{3,H_1} = k \left( -2 \frac{Q_n + 1/2 q_{2,Q}}{\Omega_1} \right)$$

$$q_{3,H_2} = k \left( 2 \frac{Q_n + 1/2 q_{2,Q}}{\Omega_2} \right)$$

$$q_{3,Q} = k \left( \begin{array}{l} \frac{gA}{L} (H_{1n} + 1/2 q_{2,H_1} - (H_{2n} + 1/2 q_{2,H_2})) \\ - \frac{f}{2D_e A} (Q_n + 1/2 q_{2,Q}) |Q_n + 1/2 q_{2,Q}| \\ - \frac{k_e}{2AL} (Q_n + 1/2 q_{2,Q}) |Q_n + 1/2 q_{2,Q}| \\ - \frac{k_v(t_{n+1/2})}{2AL} (Q_n + 1/2 q_{2,Q}) |Q_n + 1/2 q_{2,Q}| \end{array} \right)$$

$$q_{4,H_1} = k \left( -2 \frac{Q_n + q_{3,Q}}{\Omega_1} \right)$$

$$q_{4,H_2} = k \left( 2 \frac{Q_n + q_{3,Q}}{\Omega_2} \right)$$

$$q_{4,Q} = k \left( \begin{array}{l} \frac{gA}{L} (H_{1n} + q_{3,H_1} - (H_{2n} + q_{3,H_2})) \\ - \frac{f}{2D_e A} (Q_n + q_{3,Q}) |Q_n + q_{3,Q}| \\ - \frac{k_e}{2AL} (Q_n + q_{3,Q}) |Q_n + q_{3,Q}| \\ - \frac{k_v(t_{n+1})}{2AL} (Q_n + q_{3,Q}) |Q_n + q_{3,Q}| \end{array} \right)$$

$$H_{1n+1} = H_{1n} + 1/6 (q_{1,H_1} + 2q_{2,H_1} + 2q_{3,H_1} + q_{4,H_1})$$

$$H_{2n+1} = H_{2n} + 1/6 (q_{1,H_2} + 2q_{2,H_2} + 2q_{3,H_2} + q_{4,H_2})$$

$$Q_{n+1} = Q_n + 1/6 (q_{1,Q} + 2q_{2,Q} + 2q_{3,Q} + q_{4,Q})$$

## Coeficiente de pérdida de energía de la válvula

Para obtener los valores aproximados de  $k_v(t)$ , se realizó una interpolación lineal entre los pares ordenados de la tabla de relaciones dada:

$$k_v^*(tap_n) = \left( \frac{k_{v_2} - k_{v_1}}{tap_2 - tap_1} \right) (tap_n - tap_1) + tap_1$$

En donde:

$tap_n$ : tiempo de apertura porcentual en paso  $n$

$tap_1, tap_2$ : tiempos de apertura porcentuales según tabla

$k_{v_1}, k_{v_2}$ : coeficientes de pérdida de energía según tabla

## Aceleración de la gravedad

---

El valor de la aceleración de la gravedad a nivel del mar se calculó a partir de la latitud geográfica del canal mediante la siguiente expresión:

$$g = 9,780327[1 + 0.0053024 \sin^2(L_C) - 0.0000058 \sin^2(2L_C)]$$

Donde  $L_C = 8,985470$  es la latitud de las compuertas de Cocolí.

## Determinación del paso de avance

---

Dada una ecuación diferencial del tipo:

$$\frac{dy}{dt} = f(y, t)$$

Planteando la resolución mediante un método numérico explícito con paso simple  $k$ :

$$y(t^n) \approx u^n$$

$$\frac{dy}{dt} \approx \frac{u^{n+1} - u^n}{k} = f(u^n, t^n)$$

El error de truncamiento local debido a la discretización realizada está dado por:

$$\varepsilon^{n+1} = \frac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{k} - f(y(t^n), t^n)$$

Luego, es posible estimar el error considerando la aproximación:

$$\varepsilon^{n+1} \cong \frac{u^{n+1} - u^n}{k} - u^n$$

### Modelación numérica del sistema hidráulico de llenado y vaciado del tercer juego de esclusas del canal de Panamá

Con el objetivo de determinar el paso de avance necesario para garantizar una cota del error de truncamiento introducido por la discretización, se realizaron sucesivas simulaciones reduciendo el paso de avance en cada una.

Partiendo de un paso inicial  $k = 1\text{ m}$ , y reduciéndolo en  $0,001\text{ m}$  en cada simulación hasta acotar el error de truncamiento a  $0,01\text{ m}$  a lo largo de toda la simulación, se obtuvo el paso de avance necesario.

En cada simulación, partiendo de los parámetros iniciales, se procedió a abrir las compuertas permitiendo el paso del agua entre los reservorios. Las compuertas se abrieron en su totalidad y luego se alcanzó la altura máxima de llenado  $H_2$ . Luego el nivel de agua comenzó a oscilar disminuyendo la amplitud de oscilación a lo largo del tiempo. La simulación se detuvo al detectar una amplitud de oscilación menor a  $0,1\text{ m}$ .

A continuación se presentan los parámetros iniciales y los resultados obtenidos:

	Runge Kutta O(2)	Runge Kutta O(4)
$H_1$ inicial (m)	18	18
$H_2$ inicial (m)	0	0
Factor de fricción $f$	0,02	0,02
Coefficiente de pérdida de energía $k_e$	0	0
<b>Paso de cálculo (s)</b>	<b>0,367</b>	<b>0,486</b>
Altura máxima de llenado (m)	10,413	10,397
Tiempo de apertura (s)	240	240
<b>Tiempo de estabilización (s)</b>	<b>12305</b>	<b>12026</b>
Caudal máximo ( $\text{m}^3/\text{s}$ )	521,216	521,309

Los valores presentados en esta tabla se encuentran redondeados simétricamente.

## Calibración del modelo

La comparación de las mediciones de las pruebas contra los resultados de las simulaciones se realizó mediante la siguiente expresión:

$$\varepsilon = \text{máx}(|m(t^n) - s(t^n)|)$$

Dónde:

$m(t^n)$ : medición de la altura de llenado en tiempo  $t^n$

$s(t^n)$ : simulación de la altura de llenado en tiempo  $t^n$

Con el objetivo de determinar el coeficiente de pérdida de energía  $k_e$  que ajuste lo mejor posible los resultados de las simulaciones con las mediciones de las pruebas, se realizaron para cada prueba sucesivas simulaciones incrementando el  $k_e$  en cada una.

Partiendo de un coeficiente de pérdida de energía inicial  $k_e = 0$ , e incrementándolo en  $0,001$  en cada simulación hasta hallar el  $\varepsilon$  mínimo, se obtuvo el  $k_e$  óptimo para cada prueba.

Modelación numérica del sistema hidráulico de llenado y vaciado del tercer juego de esclusas del canal de Panamá

En cada simulación, partiendo de los parámetros iniciales, se procedió a abrir las compuertas permitiendo el paso del agua entre los reservorios. Las compuertas se abrieron en su totalidad y el nivel  $H_2$  continuó aumentando. Siguiendo la rutina de la prueba correspondiente se procedió a cerrar las compuertas. Estas se cerraron completamente minimizando el caudal de agua. La simulación se detuvo al cumplirse el tiempo total de la prueba.

A continuación se presentan los parámetros iniciales y los resultados obtenidos:

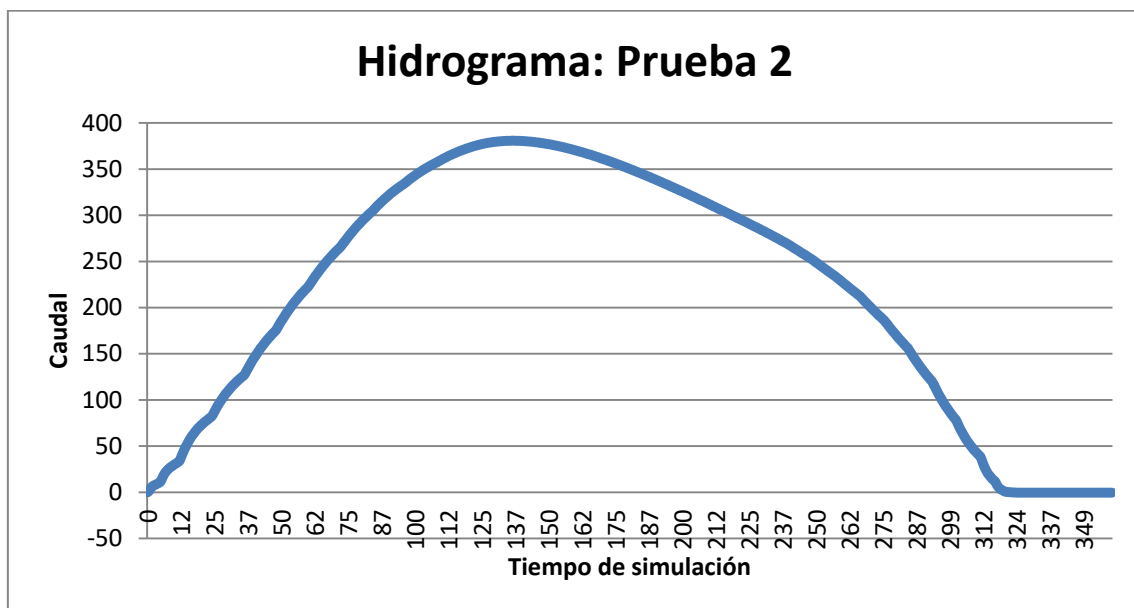
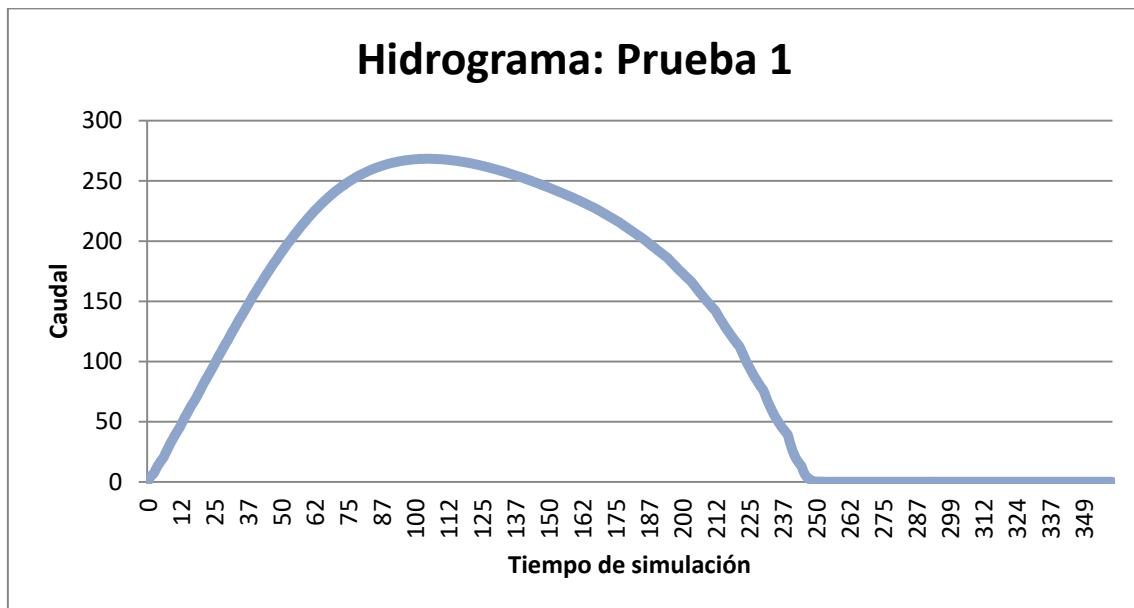
	Prueba 1	Prueba 2	Prueba 3	Prueba 4
$H_1$ inicial (m)	11,934	22,252	24,996	24,892
$H_2$ inicial (m)	5,423	11,265	9,329	7,483
Factor de fricción $f$	0,02	0,02	0,02	0,02
<b>Coefficiente de pérdida de energía <math>k_e</math></b>	<b>1,501</b>	<b>0,958</b>	<b>1,116</b>	<b>0,858</b>
Paso de cálculo (s)	0,367	0,367	0,367	0,367
Tiempo de apertura (s)	60	120	180	240
Tiempo de apertura total (s)	158	230	309	345
Tiempo de cierre (s)	90	90	90	90
<b>Caudal máximo (<math>m^3/s</math>)</b>	<b>268,364</b>	<b>380,737</b>	<b>431,563</b>	<b>442,433</b>
Velocidad media máxima (m/s)	4,974	7,057	7,999	8,201

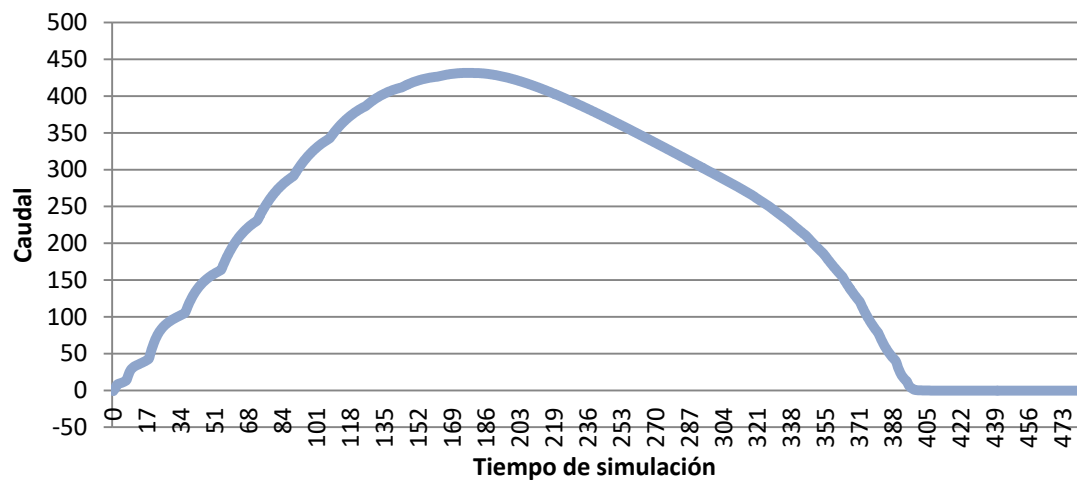
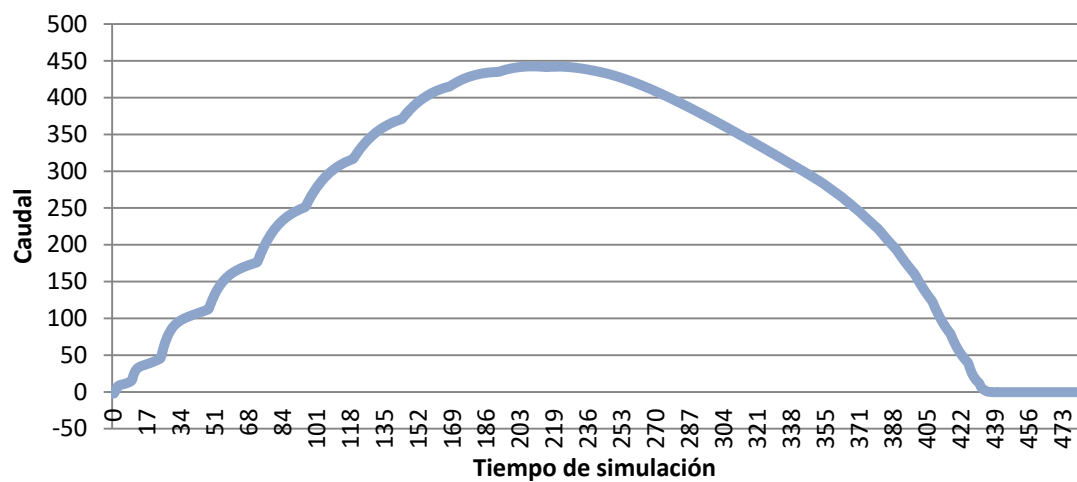
Los valores presentados en esta tabla se encuentran redondeados simétricamente.



## Modelación numérica del sistema hidráulico de llenado y vaciado del tercer juego de esclusas del canal de Panamá

A continuación se presentan los hidrogramas correspondientes a cada simulación realizada con el  $k_e$  de mejor ajuste:



**Hidrograma: Prueba 3****Hidrograma: Prueba 4**

## Conclusiones

---

La primera simulación de llenado se realizó con los métodos numéricos Runge Kutta  $O(2)$  y Runge Kutta  $O(4)$ . Ya que para ambos algoritmos se impuso la misma condición sobre el error de truncamiento, era esperable que el paso de avance requerido por el primer método sea menor al del segundo por ser menor su orden.

Por otro lado, el modelo no sólo predijo correctamente las oscilaciones en el nivel de agua durante el llenado sino también la disminución de su amplitud al aumentar el tiempo de simulación, lo que permitió determinar el tiempo de estabilización bajo el criterio establecido.

Al calcular los valores de  $k_v(t)$  mediante una interpolación lineal se está introduciendo un nuevo error de truncamiento debido a la aproximación realizada ya que la función no es de naturaleza lineal. Este error puede disminuirse mejorando el método de interpolación.

Al ajustar el modelo mediante la comparación de los resultados de la simulación contra las mediciones reales, se obtuvo para cada prueba un coeficiente de pérdida de energía. Sin embargo, no se esperaba que este coeficiente tuviera una variación tan notable para cada prueba simulada, por ser considerado una constante propia del problema.

Por último, comparando los hidrogramas realizados para cada prueba se pudo observar que al aumentar el tiempo de apertura se produjo un aumento en las oscilaciones del caudal de agua durante el llenado. Además como era de esperarse al iniciar el cierre de la compuerta el caudal de agua disminuye hasta anularse en el momento en que la compuerta se encuentra totalmente cerrada.

## Anexo: Código fuente y salida

---

Tanto el código fuente como los archivos de salida y el original de este informe se encuentran disponibles públicamente en <https://github.com/nmerloleiva/canal>.