75:12 ANÁLISIS NUMÉRICO I

FACULTAD DE INGENIERIA
UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

TRABAJO PRACTICO Nº 1

2do Cuatrimestre 2018

Sistemas de ecuaciones lineales – Elástica de una viga

OBJETIVOS

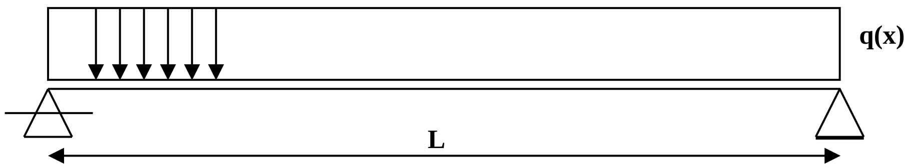
- Experimentar con el uso de métodos iterativos para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales ralos (poco densos) resultantes de discretizaciones mediante diferencias finitas de ecuaciones diferenciales.
- Verificar experimentalmente los resultados teóricos y las estimaciones empíricas respecto de la velocidad de convergencia del proceso iterativo.
- Analizar el efecto de incrementar la discretización del problema.

INTRODUCCIÓN

La ecuación diferencial de la elástica de una viga para pequeñas deformaciones viene dada por la siguiente expresión:

$$E \cdot I \cdot \frac{d^4 v}{dx^4} = q(x) \qquad \text{(ec. 1)}$$

Siendo *E:* módulo de Young, *I:* momento de inercia, y *q(x)* la carga aplicada sobre la viga.



Para el caso de una viga simplemente apoyada, como se ilustra en la figura anterior, las condiciones de borde de la ecuación diferencial son:

$$v(0) = 0$$

$$\frac{d^2 v}{dx^2}(x = 0) = 0$$

$$v(L) = 0$$

$$\frac{d^2 v}{dx^2}(x = L) = 0$$

Aplicando el método de las diferencias finitas para resolver la ecuación diferencial en las condiciones de contorno indicadas, se llega al siguiente sistema de ecuaciones lineales con n+1 incógnitas:

Para $i = 0$: $u_0 = 0$
Para $i = 1$: $-4u_0 + 5u_1 - 4u_2 + u_3 = f_1$
Para $1<i<n-1$: $u_{i-2} - 4u_{i-1} + 6u_i - 4u_{i+1} + u_{i+2} = f_i$ (ec. 2)
Para $i = n-1$: $u_{n-3} - 4u_{n-2} + 5u_{n-1} - 4u_n = f_{n-1}$
Para $i = n$: $u_n = 0$

Donde:

$$f_i = \frac{q(x_i)}{E \cdot I} \cdot \left(\frac{L}{n}\right)^4$$

$$x_i = \frac{i \cdot L}{n}$$

DESARROLLO DEL PRÁCTICO

1) Determine la función de carga $q(x)$ mediante la expresión:

$q(x) = g + g^2 \cdot (x - x^2)$, siendo g = número de grupo.

2) Aplicar las operaciones discretizadas indicadas en (ec. 2) para determinar la estructura que adquiere la matriz y expresar el sistema resultante $\mathbf{K}v = f$ para un valor de n genérico.

3) Escribir un programa para aplicar el método SOR al problema planteado.

4) Resolver el sistema $\mathbf{K}v = f$ para $n = 5$, $n = 10$, y $n = 100$, considerando una precisión relativa RTOL=0.01, y ω variable (1, 1.05, 1.10, ..., 1.95).

Para ello utilizar el siguiente criterio de convergencia:

$$R^{(k)} = \frac{\left\| v^{(k)} - v^{(k-1)} \right\|_\alpha}{\left\| v^{(k)} \right\|_\alpha} \leq RTOL$$

Utilizar $L = 1$ y $E.I = 1$

5) Presentar los resultados obtenidos graficando la cantidad ***k*** de iteraciones necesarias para converger en cada caso en función de ω. Estimar, para cada sistema de ecuaciones, el valor de ω que minimiza el número de iteraciones requeridas ($\omega_{\text{óptimo}}$).

6) Resolver el sistema $\mathbf{K}v = f$ para $n = 5$, $n = 10$, y $n = 100$, utilizando el valor del ω óptimo obtenido experimentalmente pero considerando ahora una precisión relativa $RTOL$=0.0001. Graficar los resultados obtenidos.

7) Calcular experimentalmente el orden de convergencia para cada n utilizando la siguiente expresión:

$$\frac{\left\| \varepsilon^{(k+1)} \right\|}{\left\| \varepsilon^{(k)} \right\|^{P}} = \lambda$$ siendo P: orden de convergencia y λ: constante asintótica del error

CONCLUSIONES

Presente sus conclusiones del trabajo práctico. En particular, comente sobre:

- La relación problema físico-problema matemático-problema numérico
- Los tipos de errores involucrados en la resolución del problema numérico y la importancia/efecto de cada uno
- Convergencia y velocidad de convergencia