Fakultet Elektrotehnike i računarstva

Seminar

Statisticko testiranje

Student:
Neven Miculinić

Mentor:
Prof. dr. sc. Bojana Dalbelo-Bašić
Dr. sc. Goran Glavaš

18. svibnja 2015.

Sadržaj

Poglavlje 1

Uvod

Ovaj seminar se bavi statistickim testovima, tj. prihvacanjem ili odbacivanjem hipoteza. Pocetna premisa je jednostavna, imamo neku hipotezu koju zelimo provjeriti. Ona moze biti svakojaka:

- na FERu je 99% muskaraca
- dnevno 1000 studenata FFZG idu u Cassandru
- Varianca bodova na SISu je 15

Kao sto vidimo u primjerima one testiraju vjerojatnost za neki paramater u populaciji Θ. On moze biti svakojak kao sto vidimo u primjerima: postotak pripadnika jedne subpopulacije u populaciji, broj, varijanca neke statistike i mnoge druge oblike. Za daljne primjere slucajna varijabla populacije ce biti X.

Uzorak nazivamo n-torku $(x_1, \ldots, x_n)$ koji su nezavisne realizacije slucajne varijable X. One imaju identicnu razdiobu kao i ona.[6]

Statistikom nazivamo svaku funkciju koja ovisi o uzorku $X_1, X_2, \ldots X_n$, a ne ovisi (eksplicitno) o nepoznatom parametru kojeg dobivamo iz tog uzorka. [6] Vrijednost te statistike naziva se procjenom parametra. [6]

Na temelju uzorka iz populacije donosimo zakljucke. Buduci da sami uzorci podlijezu sansi (npr. nas uzorak FERovaca sastoji se od 20 zena no prezentira li to sliku populacije?) zelimo znati koliko su sigurne nase pretpostavke.

Dodati neku sliku koja prezentira pogresku u uzorkovanju kroz statitski bias... npr. radimo anketu o bolestima pluca na studentima dok time netocno inferiramo za cijelu populaciju

Poglavlje 2

Hipoteza

Statisticka hipoteza je tvrdnja o parametru jedne ili vise populacija.[3] Npr. tvrdnja da prosjecan broj jabuka pojedenih na dan iznosi 2 je validna hipoteza.

- Nul hipoteza *(eng. null hypothesis)* H_0
- Altrenativna hipoteza *(eng. altrenative hypothesis)* H_a

2.1 Nul hipoteza

Nul hipoteza je nasa osnova pretpostavka o populaciji. Ona kao takva podlijeze statistici uzorka te populaciju. Zasto uzorka? Evo jedan primjer. Zelimo provjeriti hipotezu iz uvoda *na FERu je 99% muskaraca.* Nerealno je i skupo ici od svakog pojedinca na fakultetu, provjeriti s kojeg je on faksa te zapravo analizirati svakog pripadnika populacije.

Time se bavi deskriptivna statstika, dok statisticka testiranja ulaze u inferencijsku statistiku.

Zato radimo uzorak od n primjeraka iz populacije te na temelju njih zakljcujemo za cijelu populaciju.

2.2 Altrenativna hipoteza

No sto ako postupkom testiranja odbacujemo nul hipotezu? Onda prihvacamo altrentivnu hipotezu. To naravno ne implicira u apsolutnu tocnost jer na temelju rezultata dobivenih u uzorku ne mozemo nikad biti sasvim sigurni je li ponudena hipoteza ispravna ili ne. [6]

Neka je H_0 : *Varianca bodova na SISu je 15.* tj. $H_0 : \ \sigma^2 = 15$. Sto bi bila altrenativna hipoteza?

Logicno negacija H_0 te je time $H_a : \ \sigma^2 \neq 15$. Ovo je dvostrana altrenativna hipoteza jer parametar σ^2 u altrenative moze biti i veci i manji od nul hipoteze.

Postoji jos jedana mogucnost altrenativne hipoteze, a to je jednostrana. Glasi ovako: $H_a : \ \sigma^2 > 15$ ili $H_a : \ \sigma^2 < 15$. Kao sto vidimo ova altrenativna hipoteza gleda samo jednu stranu toga parametra te se zato zove jednostavna. [1]

Kada rabimo koju? Jednostranu rabimo samo ako smo iznimno uvjereni da je suprotan slucaj nemoguc, zbog fizikalnih, matematickih ili ostalih zakona. Stoga najcesce uzimamo dvostranu altrenativnu hipotezu.

Poglavlje 3

Struktura testa

3.1 Greske

Nakon uvoda u osnovne pojmove vezane uz hipotezu pogledajmo s kolikom sigurnoscu mozemo tvrditi istinost nase prosudbe u tesu. Imamo 4 moguca ishoda:

<table>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2">Nul hipoteza je</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>Tocna</td><td>Netocna</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Presuda testa je:</td><td>Odbaci</td><td>Greska 1. vrste
Lazno pozitivni
$P = \alpha$</td><td>Tocno</td></tr>
<tr><td>Prihvati</td><td>Tocno</td><td>Greska 2. vrste
Lazno negativni
$P = \beta$</td></tr>
</table>

Kakav god test odabrali da potvrdimo ili odbacimo H_0 on moze rezultirati u greskama 1. ili 2. vrste. Evo jednog ilustrativnog primjera za gresku 1. vrste.

3.1.1 Greske 1. vrste

Odbacivanje nul hipoteze kada je ona tocna naziva se greskom 1. vrste. [1]. Radi daljnjeg pojasnjenja pogledati primjer u nastavku:

Situacija je sljedeca. Vi ste cuvar nekoga sela i vasa je duznost oglasiti uzbunu ukoliko se vuk priblizava. Time je H_0 vuka nema. E ukoliko vuka stvarno nema, a vi ste oglasili uzbunu vi ste nacinili pogresku prve vrste ilitiga lazna pozitivnost.

Slicnu scenarij mozete vidjeti i s testom za trudnocu. Ukoliko krecete od hipoteze H_0 : *Nema trudnoce* te H_a : *trudnoca* te stvarno niste trudni, ali test pokazuje trudnocu to je jos jedan primjer Type I greske. Ona se oznacava s grckim slovom α te se naziva nivo znacajnost testa *(eng. significance level)*.

Pri samoj konstrukcji statistickog testa ukoliko je H_0 tocna mozemo lijepo ustimati α na prihvatljivu granicu te ga mozemo lijepo ustimati jer cesto pretpostavljamo kako funkcija razdiobe izgleda.

Ovdje dodati jos par slika i lijepse pojasniti

3.1.2 Greske 2. vrste

No dobro, ovo je sve super, mozemo podesiti test da nam je $\alpha \approx 0$ no sto time dobivamo? Tu u pricu ulaze greske 2. vrste koje imaju vjerojatnost β. Ne odbacivanjem nul hipoteze, H_0, kada je ona netocna se naziva pogreska 2. vrste. [1]

Koristeci primjere iz prethodne sekcije, vas test presudi da vuka nema dok on stvarno dolazi pred vasa vrata. Takoder vi ste trudni dok test za trudnocu to ne pokazuje dok nije prekasno. Faktor β je povezan s pojmom *snaga testa (eng. power)* koja iznosti $1 - \beta$. Ona je definirana kao vjerojatnost da ce test odbiti H_0 kada je ona lazna.

No taj faktor β je cesto nemoguce odrediti bez nekih pretpostavki. Npr. ((ovdje ubaciti neku normalnu distribuciju i koliko je beta ako je $\mu + \delta$ te kako on ovisi. Malo matematike i formulu upisati))

Kod izrade svakog statistickog testa dolazimo do biranja omjera snage i znacajnosti istoga. Oni se ponasaju kao na klackalici, sto je veca snaga testa to je veca znacajnost i obratno. Idealni test bi imao snagu 1 te znacajnost 0, no to u praksi nije moguce, te time treba pazljivo odabrati ta dva parametra tjekom izrade samoga testa.

3.2 P vrijednosti

Sljedeci vazan pojam u ovom kontekstu je p vrijednost. Ona se definira kao najmanja znacajnost test, α, za koju bi ovaj uzorak presudili odbacivanjem nul hipoteze, H_0 [1]

3.3 Podrucje prihvacanja

Potom zelimo konstruirati podrucje prihvacanja za nas test. [6] Ponovimo imamo H_0 hipotezu koja pretpostavlja neke parametre o distribuciju koju zelimo testirati.

Neka je slucajna varijabla $X \sim \mathcal{D}$. Prvo definirajmo oznaku kao u vecini literatura [6] [1]

x_α je $1 - \alpha$ percentil te zadane distribucije.

Za zadani nivo znacajnosti α to zapravo znaci $P(x \in \langle l, u \rangle) = 1 - \alpha$. Tj. da sansa da ukoliko je H_0 tocna vjerojatnost tocne presude iznosti $1 - \alpha$

Najcesce se rabe tri tipa podrucja prihvacanja:

- Gornji: $x \in \langle x_\alpha, +\infty \rangle$
- Doljni: $x \in \langle -\infty, x_{1-\alpha} \rangle$
- Dvostrani: $x \in \left\langle x_{1-\frac{\alpha}{2}}, x_{\frac{\alpha}{2}} \right\rangle$

Poglavlje 4

Statističko testiranje ocekivanja

U ovom poglavlju cu prikazati kako se testiranje vrsi na prosjek uzoraka. Prvo pretpostavljamo da je populacija normalno distribuirana.

Zatim zelimo odrediti koliki nam mora biti uzorak iz te populacije da bi znacajnost testa te njegova snaga bila zadovoljavajuca i uz to sve izbalansirati. Konkretni postupci odredivanj velicine uzorka izlaze izvan okvira ovog seminara.

Treba naravno napomenti da ce uzorak biti distribuiran po t distribuciji jer nam varijanca populacije nije poznata te pretpostavljamo normalnu distribuciju populacije.

Ukoliko je H_0 tocna nasa statisika:

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \mu)}{s} \sim t_{n-1}$$

slijedi t distribuciju s $n - 1$ stupnja slobode. Nakon malo matematike uz pretpostavku H_0:

$$\bar{x} \sim \frac{s}{\sqrt{n}} \cdot t_{n-1} + \mu$$

Uz znacajnost testa α dobivamo podrucje prihvacanja H_0 kao [3]:

$$\bar{x} \in \left\langle \mu - \frac{s}{\sqrt{n}} \cdot t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}, \mu + \frac{s}{\sqrt{n}} \cdot t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \right\rangle$$

gdje $t_{n,\alpha}$ gdje pretstavlja $1-\alpha$ percentila t distribucije s n stupnjeva slobode, prikazano u prethodnom poglavlju.

Potom uz odredeni α napravimo podrucje prihvacanja za ovaj test. Ukoliko je prosjek uzorka unutar tog intervala nas test nije odbio H_0 te je presuda nul hipoteza, dok u suprotnom biramo H_a.

U nastavku je dan primjer programskog koda koju uz pythona te biblioteka NumPy odraduje cijeli postupak testiranja.

Treba ovdje uzeti neki primjer podataka i lijepo ih obraditi... ako stignem

```
from pylab import *
from numpy import *
from scipy.stats import t, norm
from numpy.random import normal

#Ovo je primjer ulaznih podata za testiranje
data = normal(3.1, 2, 15)
mu_test = 3
alpha = 0.05



n = data.size         # Broj uzoraka
s = data.std(ddof=1) # Procjena standardne devijacije populaije (ne uzoraka)
mu_s = data.mean()    # Procjena prosjeka iz uzoraka
mu_s_s = s/sqrt(n)    # Standardna devijacija prosjeka uzoraka

#Plottanje cisto da vidimo ulazne podatke
hist(data, bins=7);

(l,u) = t.interval(1-alpha, n - 1, mu_test,  mu_s_s)
print (l,u) #Podrucje prihvacanja

if l < mu_s and  mu_s < u:
    print ("H_0")
else:
    print ("H_a")
```

Poglavlje 5

Zakljucak

U ovako kratkom seminarskom radu je nemoguce prekriti svu raskos statisckih testova te on pokriva samo najelementarnije testiranje statistike. No ono moze biti preduvjet kao pretpostavke za neke naprednije testove koji pretpostavljaju mnogo vise nego normalnu distribuciju populacije te naravno puno vise i zakljucuju.

Bibliografija

[1] N. F. Hubele D. C. Montgomery, G. C. Runger. *Engineering statistics.* London: John Wiley & Sons, Inc., 2001.

[2] V. A. Clark O. J. Dunn. *Applied statistics: analysis of variance and regression.* London: John Wiley & Sons, Inc., 1974.

[3] Željko Pauše. *Uvod u matematičku statistiku.* Školska knjiga, 1993.

[4] Neven Elezović. *Diskretna vjerojatnost.* Element, Zagreb, 2007.

[5] Neven Elezović. *Slučajne variable.* Element, Zagreb, 2007.

[6] Neven Elezović. *Matematička statistika i stohastički procesi.* Element, Zagreb, 2007.