

# Assignment 4 Solutions

CS132

Fall 2025

## Basic Questions

① domain:  $\mathbb{R}^5$

codomain:  $\mathbb{R}^3$

$$\begin{bmatrix} -9 & 4 & 5 & -3 & 2 \\ 3 & 8 & 5 & -5 & 7 \\ -1 & 5 & -1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

② 
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 3 & 12 \\ -2 & 2 & -3 & -10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ -10 \end{bmatrix}$$

This is unique because there is only one solution to the linear system above.

$$\textcircled{3} \quad T(-3\vec{v}_1 - \vec{v}_2 - 2\vec{v}_3) =$$

$$-3T(\vec{v}_1) - T(\vec{v}_2) - 2T(\vec{v}_3) =$$

$$-3 \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \\ -2 \\ -10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 8 \\ -7 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 18 + 5 - 16 \\ -9 - 1 + 14 \\ 6 + 2 - 12 \\ 30 - 9 - 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -4 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$-3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} T \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) &= T \left( -3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \right) \\ &= -3 T \left( \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right) + 2 T \left( \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

$$= -3 \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & -8 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

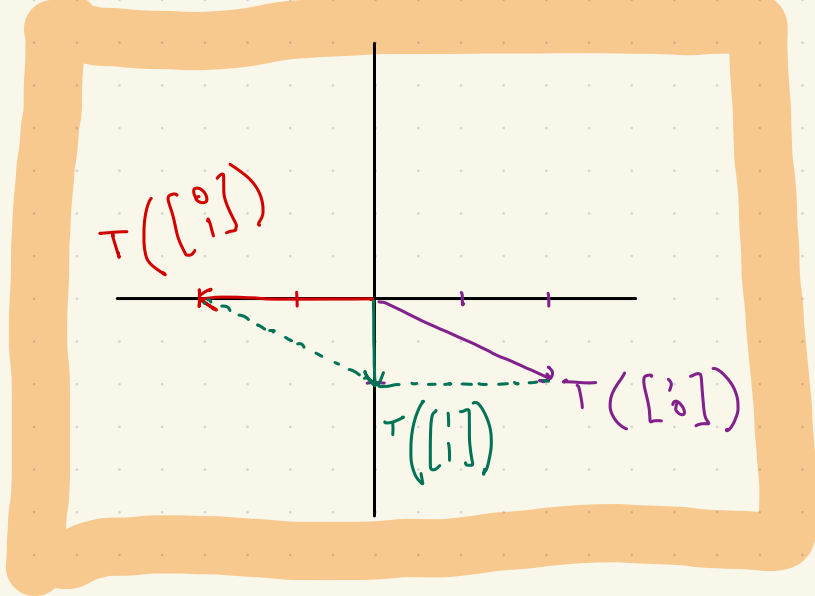
$$\begin{aligned} T \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) &= T \left( \frac{1}{2} \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( T \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) - T \left( \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$T(\vec{v}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \vec{v}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

5



6

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & -4 & 2 \\ -3 & -4 & -5 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} +2 \\ +4 \\ +4 \\ +2 \\ +3 \\ +6 \\ +6 \\ +3 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -8 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} -2 \\ -2 \\ -8 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}\right) = T\left(-5 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ -5 \end{bmatrix}\right)$$

$$= -5 T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}\right) + 4 T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix}\right) - T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ -5 \end{bmatrix}\right)$$

$$= -5 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -5 + 4 - 2 \\ -5 + 8 - 1 \\ -5 + 12 - 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

True / False

① False

$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \xrightarrow{\mathbb{R}^{2 \times 1}} \\ \xrightarrow{\mathbb{R}^{2 \times 1}} \\ \xrightarrow{\mathbb{R}^{2 \times 1}} \end{matrix} \quad \vec{x} \mapsto A\vec{x}$$

② True

③ False

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

④ False

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

⑤ True

# More Difficult Problems

①

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

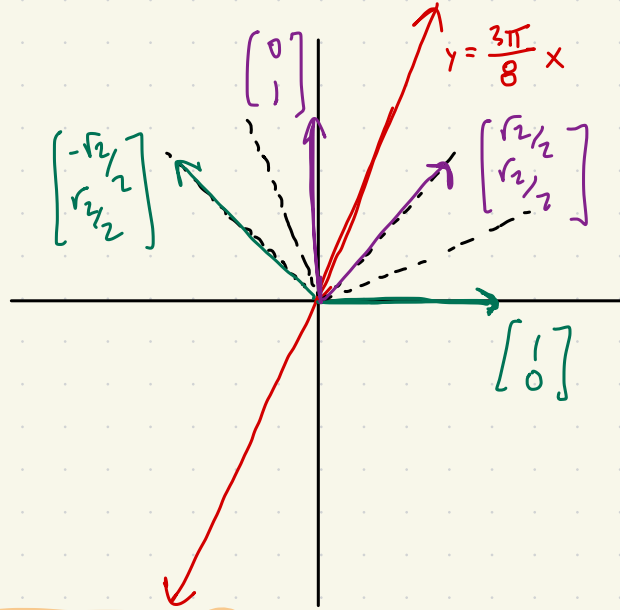
②

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3



$$\begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$