

CHSH 不等式の破れについて

name

2024 年 1 月 3 日

1 CHSH 不等式の導出

量子力学において重要な意味を持つ CHSH 不等式について述べる。CHSH 不等式とは、以下の 2 つの性質が両方とも成立しているという仮定のもと成り立つ不等式である。

1. 実在性: 物理量は観測する以前から確定している。
2. 局在性: ある物理的な影響は、光速より早く伝搬しない。

これらの仮定のもと、CHSH 不等式を導出する。まず、図 1 のような実験を考える。

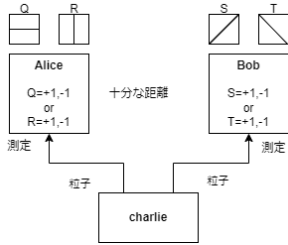


図 1 実験の概要

Alice は P_Q, P_R , Bob は P_S, P_T というラベル付けされた物理量が測定が可能であり、それぞれの測定結果は ± 1 とする。また P, Q, R, T を ± 1 とする測定結果の確率変数とする。また、具体的な測定結果を p, q, r, t とおく。具体例として、図上部の向きに偏光板を傾けたときに、光子が透過してきたときは $+1$, 透過してこなかったら -1 と定義すればよい。実験の手順としては以下の通りである。

1. Charlie が粒子のペアを Alice と Bob に送信

する。

2. Alice と Bob は、それぞれ送られてきた粒子に、一種類の測定を行う。
3. 測定結果の積 (QS, QT, RS, RT) がいずれかが得られる
4. 十分に大きな回数を繰り返す。
5. QS, QT, RS, RT の平均値をそれぞれ算出する。

ここで局所実在性の仮定を数式で表現する。まず、実在性について述べる。各粒子対の Q, R, S, T の測定結果は Charlie から送信された時点で確定している。4 種類の測定において、各測定値 (Q, R, S, T) が 2 通りのため、粒子対に対して測定結果は 16 通りしかなく、各粒子それぞれに $\lambda = 1, 2, \dots, 16$ 番号を振り分けることが可能である。つまり、測定結果は λ の関数とみなすことで、実在性を仮定する。また、各粒子対の λ が測定により変化しないという、片方の測定結果が他方の測定結果に影響を及ぼさという局在性の仮定をおく。

例として QS の平均値を算出する。実験に用いた粒子対 (Alice の粒子と Bob の粒子の組) に $1, 2, \dots, N$ (N は非常に大きな数) まで番号づけを行い。 k 番目の粒子対の粒子で P_Q を測定したときの測定結果を q_k と置き、他の場合も同様に定義する。イメージを図 2 を示す。 $+$, $-$ は測定結果は $+1, -1$ になることを表す。右の数字は、対応する λ である。

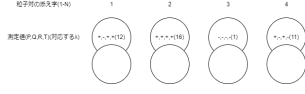


図2 番号付けのイメージ

これらのうち、 QS の測定が行われた粒子対の添え字の集合を $\{n\}$ 、元の個数を $\#\{n\}$ と表す。また QS の測定が行われた粒子のうち、 $\lambda = i$ が粒子の個数を $\#\{i\}$ と表すとき、この時、 QS の測定値の平均 (標本平均) $\bar{q}s$ は次の (2) で表せる。

$$\bar{q}s = \frac{1}{\#\{n\}} \sum_{k \in \{n\}} q_k \cdot s_k \quad (1)$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{16} \frac{\#\{\lambda\}}{\#\{n\}} q_k(\lambda) \cdot s_k(\lambda) \quad (2)$$

標本の大きさ $\#\{n\}$ を十分に大きくすることを考える。 N 個の粒子対のうち QS の測定がおこなわれる粒子対は無作為に選択されるので、 QS の測定における $\frac{\#\{\lambda\}}{\#\{n\}}$ を確率変数と考えると、この期待値は大量の法則より母集団である N 個の粒子対のうち測定結果の添え字が λ となる割合 $P(\lambda)$ へと収束する。以上より、 $\langle QS \rangle$ は次の式 (4) で表せる。

$$\langle QS \rangle = \mu \quad (3)$$

$$= \sum_{i=1}^{16} P(\lambda = i) Q(i) S(i) \quad (4)$$

これらの議論を踏まえて、式 (5) で α を定義する。

$$\alpha = \langle QS \rangle + \langle RS \rangle - \langle QT \rangle + \langle RT \rangle \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \langle QS \rangle + \langle RS \rangle + \langle RT \rangle - \langle QT \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{16} P(\lambda = i) Q(i) S(i) + \sum_{i=1}^{16} P(\lambda = i) R(i) S(i) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{16} P(\lambda = i) R(i) T(i) - \sum_{i=1}^{16} P(\lambda = i) Q(i) T(i) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^{16} P(i) [\{Q(i) + R(i)\} S(i) + \{R(i) - Q(i)\} T(i)] \\ &= \langle (Q + R)S - (Q - R)T \rangle \end{aligned}$$

ところで

$$\begin{aligned} |(Q + R)S - (Q - R)T| &\leq |Q + R| |S| + |Q - R| |T| \\ &= |Q + R| + |Q - R| \\ &= 2 \end{aligned} \quad (7)$$

したがって、式 (8) が成立する。

$$-2 \leq \langle QS \rangle + \langle RS \rangle + \langle RT \rangle - \langle QT \rangle \leq 2 \quad (8)$$

結論としては、局所实在論を仮定した場合に、物理量 P_Q, P_R, P_S, P_T を測定して α を計算すると、 $|\alpha| < 2$ が成立する。

2 理論による CHSH 不等式の破れの確認

量子力学の仮定に基づけば、前章で定義した相関量 $|\alpha| < 2$ が破れることを示す。

2.1 量子力学の4つの仮定

量子力学の仮定を示す。

仮定 1 (状態ベクトル)

量子ビットの状態は

$|\phi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ で記述できる。

ただし、 $|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, |1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$

仮定 1 より、量子ビットの状態は \mathbb{C}^2 の正規ベクトルで記述される。実用上はブロッホ球表現が用いられることが多い。また、正規直交基底を用いれば異なる基底で展開することも可能である。

仮定 2 (時間発展)

量子ビットの時間発展はユニタリ行列 $U(UU^\dagger = U^\dagger U = I)$ で記述される。

これについては後に具体例を示す。

仮定 3(射影測定)

量子力学において、観測量はエルミート行列で記述される。射影測定とは、状態ベクトルをエルミート行列の正規固有ベクトルの軸へ射影することである。 i 番目の正規固有ベクトル $|\phi_i\rangle$ が観測される確率は式 (9) で表せる。

$$p(i) = \langle \psi | (|\phi_i\rangle \langle \phi_i|) | \psi \rangle \quad (9)$$

$|\phi_i\rangle$ へ射影されたときの測定値は固有値 c_i である。

また、観測量のスペクトル分解が存在することを考えると、簡単に測定値の期待値が出せる。

$$\langle \psi | A | \psi \rangle = \left\langle \psi \left| \sum_i c_i |\phi_i\rangle \langle \phi_i| \right| \psi \right\rangle \quad (10)$$

$$= \sum_i c_i \langle \psi | (|\phi_i\rangle \langle \phi_i|) | \psi \rangle \quad (11)$$

$$= \sum_i c_i \cdot p(i) \quad (12)$$

エルミート行列 A は $A^\dagger = A$ が成立する行列であるまた、エルミート行列 A は式 (13) の形で表現できる。 $(c_i$ は実数、 $|\psi_i\rangle$ は正規直交ベクトル)

$$A = \sum_i c_i |\phi_i\rangle \langle \phi_i| \quad (13)$$

状態ベクトルを正規固有ベクトルの軸に射影するとは、なんらかの物理量 (電子のスピン、光子の変更) を軸 (X 軸方向、Y 軸方向、Z 軸方向) で計測することである。なお各量子ビットの測定結果 Q, S について、 $\bar{Q}\bar{S} = \bar{Q}S$ が成立する。

仮定 4 に用いるテンソル積について説明する。 $m \times n$ 行列 A , $i \times j$ 行列 B のテンソル積は以下のような $ni \times mj$ 行列として定義される。

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \dots & a_{mn}B \end{pmatrix} \quad (14)$$

仮定 4(複数ビットの記述)

n 個の量子ビットを用意し、 i 番目の量子ビットの状態ベクトルが $|\psi_i\rangle$ のとき、全体の状態ベクトルは式 (15) で記述される。

$$|\psi_0\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_i\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_n\rangle \quad (15)$$

仮定 1 から 4 の具体例を示す。まず、 $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ を考える。仮定 1 より $|\psi\rangle$ は正規ベクトルであり、 $\frac{1}{\sqrt{2}} \in \mathbb{C}$ である (当たり前だけど)。

仮定 2 のユニタリ行列の具体例として、 $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ($XX^\dagger = X^\dagger X = I$) を用いる。 $X|0\rangle = |1\rangle, X|1\rangle = |0\rangle$ であり、NOT ゲートの用にふるまっている。

仮定 3 の測定について、状態ベクトルとして $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$, 観測量として $Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ($Z^\dagger = Z$) を用いる。単純な計算により、 Z の固有値 ± 1 , 固有ベクトル $|0\rangle, |1\rangle$ であることが分かる。 $+1$ が観測される確率は $p(1) = \langle \psi | |0\rangle \langle 0 | \psi \rangle$ より 0.5 と分かる。

仮定 4 については、2 量子ビットを用意して $|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), |\psi_1\rangle = |0\rangle$ と置く。直観的には Z 基底測定では 00, 10 がそれぞれ確率 0.5 で観測されてほしい。実際に計算すると $\{|\psi_0\rangle \otimes |\psi_1\rangle\}^T = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |0\rangle)$ であり、テンソル積が直観と対応していることが分かる。

2.2 テンソル積

今後用いるテンソル積のいくつかの性質を示す。

2.2.1 複数ビットに対して部分的な時間発展

ベクトル空間 V, W について、 $|v\rangle \in V, |w\rangle \in W$ と V 上の演算子 A と W 上の演算子 B について、 $(A \otimes B)(|v\rangle \otimes |w\rangle) = (A \otimes |v\rangle)(B \otimes |w\rangle)$ が成立する。

この性質を用いて、第 0 ビットのみに対してゲート操作 U を行う場合は、状態ベクトル $|\psi_0\rangle \otimes |\psi_1\rangle$ に対して、 $(U \otimes I)(|\psi_0\rangle \otimes |\psi_1\rangle) = (U \otimes |\psi_0\rangle)(I \otimes |\psi_1\rangle)$

の演算を行う。

2.2.2 テンソル積の混同積

行列 A, B, C, D について、 $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$ が成立する。

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B \\ a_{21}B & a_{22}B \end{pmatrix}$$

$$C \otimes D = \begin{pmatrix} c_{11}D & c_{12}D \\ c_{21}D & c_{22}D \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (A \otimes B)(C \otimes D) &= \begin{pmatrix} (AC)_{11}BD & (AC)_{12}BD \\ (AC)_{21}BD & (AC)_{22}BD \end{pmatrix} \\ &= (AC) \otimes (BD) \end{aligned}$$

2.2.3 エルミート共役

$(A \otimes B)^\dagger = A^\dagger \otimes B^\dagger$ が成立する。

証明は複素数 x, y について $x^*y^* = (xy)^*$ などを用いればよい。

2.3 量子ゲート

量子ゲート、つまり、ユニタリ行列をいくつか紹介する。物理的な意味は考えていない。

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$CNOT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$CX = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$R_x(\theta) = \cos\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)I - i\sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)X$$

2.4 相関量 α の期待値

観測量 $A(\theta), B(\phi)$ を定義する。

$$A(\theta) = R_x(\theta)ZR_x(-\theta) \quad (16)$$

$$B(\phi) = R_x(\phi)ZR_x(-\phi) \quad (17)$$

観測量 $A(\theta)$ の固有値は ± 1 , 固有ベクトルは $R_x(\theta)|0\rangle, R_x(\theta)|1\rangle$ である。ベル基底と呼ばれる状態 $|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ で、第 0 ビットで $A(\theta)$ ・第 1 ビットで $B(\phi)$ を測定するときの期待値は $\langle\psi^-|A \otimes B|\psi^-\rangle$ であり、これを計算すると、 $\cos(\theta - \phi)$ であることが導ける。

1 章で導入した物理量 P_Q, P_R, P_S, P_T をそれぞれ、 $A(0), A(-\frac{\pi}{2}), B(-\frac{\pi}{4}), B(-\frac{3\pi}{4})$ とすると、式 (18) となる。

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \quad (18)$$

$\alpha = 2\sqrt{2}$ となり、CHSH 不等式が破れていることが分かる。

3 実験による CHSH 不等式の破れの確認

IBM Q とは、量子回路のデータを送信することで、IBM が所有する実物の量子コンピュータにおいて送信した回路を実行した結果を得ることができるサービスである。

3.1 基底変換

2 章で得た測定を実際の回路で行うことで、局所実在論が成立していないことが確認できる。しかし、IBM Q では Z 基底での測定しか行えないので、工夫する。物理量 $A \otimes B$ の期待値を求める。

$$\begin{aligned} \langle\psi|A \otimes B|\psi\rangle &= \langle\psi|R_x(\theta)ZR_x(-\theta) \otimes R_x(\phi)ZR_x(-\phi)|\psi\rangle \\ &= \langle\psi|(R_x(\theta)Z \otimes R_x(\phi)Z)(R_x(-\theta) \otimes R_x(-\phi))|\psi\rangle \\ &= \langle\psi|(R_x(\theta) \otimes R_x(\phi))(Z \otimes Z)(R_x(-\theta) \otimes R_x(-\phi))|\psi\rangle \\ &= \langle(R_x(-\theta) \otimes R_x(-\phi))|Z \otimes Z|(R_x(-\theta) \otimes R_x(-\phi))\rangle \end{aligned}$$

つまり、 $|\psi\rangle$ における $A \otimes B$ の期待値は、 $(R_x(-\theta) \otimes R_x(-\phi))|\psi\rangle$ における $Z \otimes Z$ の期待値に等しいことが分かる。1 章

で導入した物理量 P_Q, P_R, P_S, P_T をそれぞれ、 $A(0), A(-\frac{\pi}{2}), B(-\frac{\pi}{4}), B(-\frac{3\pi}{4})$ としてので、量子ビットの測定直前にそれぞれ $I, R_x(\frac{\pi}{4}), R_x(\frac{\pi}{4}), R_x(\frac{3\pi}{4})$ を作用させれば、 $A(\theta) \otimes B(\phi)$ の基底で測定したことになる。

3.2 測定回路の説明

今回は図 3, 図 4, 図 5, 図 6 の 4 つの量子回路を用いる。



図 3 回路 1:QS の測定

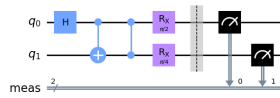


図 4 回路 2:RS の測定

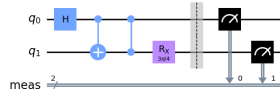


図 5 回路 3:QT の測定

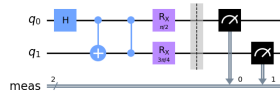


図 6 回路 4:RT の測定

IBM Q の仕様として、量子ビットの左端は $|0\rangle$ である。比較すると回路の左部分はベル基底 $|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ をそれぞれ生成する回路になることが、先ほど記載した行列表現で確認できる。

回転ゲートは測定を指定した基底で行うためのも

のであり、説明した通りである。

$$|\psi^-\rangle = C_{NOT}(H \otimes I)(|0\rangle \otimes |0\rangle) \quad (19)$$

3.3 実験結果

IBM Q での実行結果を示す。まず、qiskit シミュレーションでの実行結果を示す。 Z の固有値が $+1, -1$ であり、固有ベクトルが $|0\rangle, |1\rangle$ であり、固有値が観測値になることを思い出せば、 $|00\rangle, |11\rangle$ が $+1$ であり、他 2 つが -1 となるので、 $\bar{q}s$ が出せる。各測定回路 1000 回づつ測定して、平均を出す

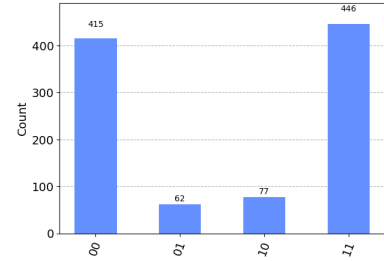


図 7 回路 1:QS のシミュレーション結果

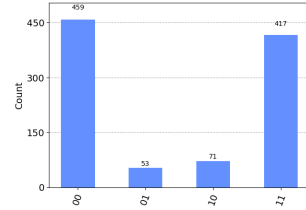


図 8 回路 2:RS のシミュレーション結果

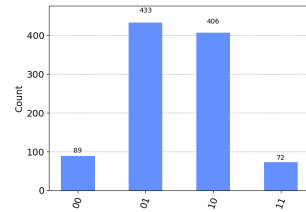


図 9 回路 3:QT のシミュレーション結果

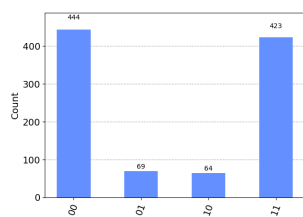


図 10 回路 4:RT のシミュレーション結果

1 章で定義した α を計算すると、それぞれの回路で $0.722+0.752+0.678+0.734=2.886$ であり、2 を超えている。実機では 4000 ショットずつ実行した。(IBM lab の方で見せる)