ƯỚC LƯỢNG

Bài tập 6.9. Đo đường kính của một chi tiết máy do một máy tiện tự động sản xuất, ta ghi nhận được số liệu như sau:

x	12.00	12.05	12.10	12.15	12.20	12.25	12.30	12.35	12.40
n	2	3	7	9	10	8	6	5	3

với n chỉ số trường hợp tính theo từng giá trị của X (mm).

(a) Tính trung bình mẫu $\overline{x}$ và độ lệch chuẩn s của mẫu.

(b) Ước lượng đường kính trung bình μ ở độ tin cậy 0.95.

(c) Nếu muốn sai số ước lượng không quá $\varepsilon = 0.02\ mm$ ở độ tin cậy 0.95 thì phải quan sát ít nhất mấy trường hợp.

Giải bài 6.9.

(a) $n = 53$, trung bình mẫu $\overline{x} = 12.21$, độ lệch chuẩn $s = 0.103$.

(b) Ta có, kích thước mẫu $n = 53 \geq 30$, σ^2 chưa biết. Do đó, với độ tin cậy 0.95, khoảng tin cậy của μ là

$$\left(\overline{x} - z_{0.975}\frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{0.975}\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

Thay $\overline{x}$, s và $z_{0.975} = 1.96$ vào biểu thức trên, ta tìm được khoảng tin cậy của μ là

$$(12.18, 12.24)$$

(c) Ta biết rằng khi n càng lớn thì dung sai càng nhỏ. Hơn nữa, với $n = 53$ trong câu b) ta thấy $\varepsilon = 0.028 > 0.02$. Do đó, giá trị n phải lớn hơn 53. Từ điều kiện

$$z_{0.975}\frac{s}{\sqrt{n}} \leq 0.02$$

Suy ra $n \geq 101.89$.
Vậy ta phải quan sát ít nhất 102 trường hợp.

Bài tập 6.7. Tuổi thọ của một loại bóng đèn được biết theo quy luật chuẩn với độ lệch chuẩn 100 giờ.

(a) Chọn ngẫu nhiên 100 bóng đèn để thử nghiệm, thấy mỗi bóng tuổi thọ trung bình là 1000 giờ. Hãy ước lượng tuổi thọ trung bình của bóng đèn xí nghiệp A sản xuất với độ tin cậy là 95%.

(b) Với dung sai của ước lượng tuổi thọ trung bình là 15 giờ, hãy xác định độ tin cậy.

(c) Để dung sai của ước lượng tuổi thọ trung bình không quá 25 giờ với độ tin cậy là 95% thì cần phải thử nghiệm ít nhất bao nhiêu bóng.

Giải bài 6.7.

(a) Ta có $n = 100 > 30$, $\sigma = 100$. Do đó, khoảng tin cậy cho tuổi thọ trung bình của bóng đèn có dạng

$$\left(\overline{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Trong đó, $\overline{x} = 1000$, $\alpha = 0.05$, $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0.975} = 1.96$.
Vậy khoảng tin cậy 95% cho tuổi thọ trung bình của bóng đèn là $(980.4, 1019.6)$.

(b) Ta có dung sai của ước lượng là $z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{100}{10} = 15$. Từ đó suy ra

$$z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.5$$

Tra bảng ta tìm được $\alpha = 0.13362$ và do đó độ tin cậy là $1 - \alpha = 0.8664 = 86.64\%$

(c) Ta biết rằng khi n càng lớn thì dung sai càng nhỏ. Hơn nữa, ta thấy rằng khi $n = 29 < 30$ thì $t^{28}_{0.975}\frac{100}{\sqrt{29}} = 38.0304 > 25$. Do đó giá trị n phải lớn hơn hoặc bằng 30. Từ điều kiện

$$1.96.\frac{100}{\sqrt{n}} \leq 25$$

Suy ra $n \geq 61.4656$.
Vậy ta cần thử nghiệm ít nhất 62 bóng

KIỂM ĐỊNH

Bài tập 7.9. Đo cholesterol (đơn vị mg%) cho một nhóm người, ta ghi nhận lại được

Chol.	150 –160	160 - 170	170 - 180	180 - 190	190 - 200	200 - 210
Số người	3	9	11	3	2	1

Cho rằng độ cholesterol tuân theo phân phối chuẩn.

(a) Tính trung bình mẫu $\overline{x}$ và phương sai mẫu s^2.

(b) Tìm khoảng ước lượng cho trung bình cholesterol trong dân số ở độ tin cậy 0.95.

(c) Có tài liệu cho biết lượng cholesterol trung bình là $\mu_0 = 175\ mg\%$. Giá trị này có phù hợp với mẫu quan sát không? (kết luận với $\alpha = 0.05$).

(b) Ta có $n = 29 < 30$, σ^2 chưa biết. Do đó, khoảng tin cậy cho trung bình cholesterol trong dân số có dạng

$$\left(\overline{x} - t^{n-1}_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{x} + t^{n-1}_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

Trong đó, $\alpha = 0.05, t^{n-1}_{1-\frac{\alpha}{2}} = t^{28}_{0.975} = 2.048$.

Thay vào ta tìm được khoảng tin cậy 95% cho trung bình cholesterol trong dân số là $(168.7226, 177.8292)$.

(c) Ta cần kiểm định các giả thuyết

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 175 \\ H_1 : \mu \neq 175 \end{cases}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} t &= \frac{\sqrt{n}(\overline{x} - \mu)}{s} \\ &= \frac{\sqrt{29}(173.2759 - 175)}{11.9729} \\ &= -0.7755 \end{aligned}$$

Ta thấy $|t| \leq t^{28}_{0.975} = 2.048$. Do đó ta chấp nhận giả thuyết H_0. Nghĩa là giá trị mẫu phù hợp với tài liệu.

Cách trình bày

Lời giải. a) Ta có: $n = 100$, $\overline{x} = \frac{\sum x}{n} = 190,2$ nên $s = \sqrt{\sum \frac{(x_i - \overline{x})^2}{n-1}} = 16,142$ và $\alpha = 0,1$. Do không rõ độ lệch chuẩn của phân phối nên ta dùng t-distribution.

Độ tin cậy: $t_{n-1,\alpha/2} = t_{99,0.05} = 1.658 \rightarrow E = t_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = 1,658 \cdot \frac{16,14}{\sqrt{100}} = 2,676$.

Khoảng tin cậy: $\overline{x} - E < \mu < \overline{x} + E \Leftrightarrow 187,524 < \mu < 192,876$.

b) Số bánh đạt chuẩn là: $20 + 28 + 10 + 6 = 64$ nên $p = \frac{64}{100} = 0,64$ và $q = 1 - p = 0,36$. Ta có:

$$p - E < p < p + E.$$

Do có np > 5 và nq > 5 nên ta có thể xấp xỉ bằng phân phối chuẩn. Khoảng tin cậy 95% nên $z_{\alpha/2} = 1,96$, suy ra $E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} = 1,96.\sqrt{\frac{0,64.0,36}{100}} = 0,09408$.

Do đó: $0,64 - 0,0941 < p < 0,64 + 0,0941 \Leftrightarrow 0,5459 < p < 0,7341$.

Lời giải.

a) Từ đề bài, ta tính được

$$\overline{x} = 2,98,\ \mu_0 = 3,3,\ s = 2,364,\ \alpha/2 = 0,05 \text{ và } n = 200.$$

Kiểm định giả thuyết: $H_0 : \mu = 3,3$ và $H_1 : \mu \neq 3,3$.

Ta có $t_0 = \frac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{2,98 - 3,3}{2,364/\sqrt{200}} = -1,914$.

Từ $\alpha/2 = 0,05$ ta tính được $t_{0,05}^{199} = 1,972$ nên miền bác bỏ là $(-\infty; -1,972) \cup (1,972; +\infty)$ vì t_0 không thuộc miền trên nên không bác bỏ H_0. Kết luận: báo cáo của cty là đáng tin cậy.

b) Kiểm định giả thuyết: $H_0 : \mu = 3,0$ và $H_1 : \mu < 3,0$.

Ta có $t_0 = \frac{2,98 - 3}{2,364/\sqrt{200}} = -0.1196$.

Từ $\alpha/2 = 0,05$ ta tính được à $t_{0,05}^{199} = 1,972$ nên cũng không bác bỏ H_0. Kết luận: đáng tin cậy.

Lời giải.

a) Ta có: $n = 10$, $\overline{x} = 6,6$, $s_X = 7,382$, $\overline{y} = 67,8$, $s_Y = 12,127$.

$$\text{cov}(X,Y) = \frac{\sum(\overline{x} - x_i)(\overline{y} - y_i)}{n-1} = -71,978.$$

Hàm hồi quy: $y = b + ax$ với

$$a = \frac{\text{cov}(X,Y)}{s_X^2} = \frac{-71,978}{7,382^2} = -1,321 \text{ và } b = \overline{y} - a\overline{x} = 67,8 - (-1,321).6,6 = 76,518.$$

Đáp số: $y = 76,518 - 1,321x$.

b) Thay $x = 15$ thì được $y = 56,703$ tuổi.