MODUL V TRANSFORMASI 2 DIMENSI

Setelah membaca modul ini, mahasiswa akan memiliki pengetahuan dan mampu menjelaskan (i) apa yang dimaksud dengan transformasi 2 dimensi pada objek grafik (ii) proses transformasi dasar dan melakukan proses komputasi transformasi dasar (iii) proses transformasi homogen dan mengimplementasikannya.

V. 1 Pengertian transformasi

Grafika komputer merupakan bidang yang menarik minat banyak orang. Salah sub bagian dari grafika komputer adalah pemodelan objek (*object modelling*). Dalam pemodelan objek dua dimensi (2D), didapati berbagai objek dapat dimodelkan menurut kondisi tertentu, objek yang dimodelkan itu perlu dimodifikasi. Pemodifikasian objek ini dapat dilakukan dengan melakukan berbagai operasi fungsi atau operasi transformasi geometri. Transformasi ini dapat berupa transformasi dasar ataupun gabungan dari berbagai transformasi geometri.

Contoh transformasi geometri adalah translasi, penskalaan, putaran (rotasi), balikan, *shearing* dan gabungan. Transformasi ini dikenal dengan transformasi *affine*. Pada dasarnya, transformasi ini adalah memindahkan objek tanpa merusak bentuk.

Tujuan transformasi adalah:

- Merubah atau menyesuaikan komposisi pemandangan
- Memudahkan membuat objek yang simetris
- Melihat objek dari sudut pandang yang berbeda
- Memindahkan satu atau beberapa objek dari satu tempat ke tempat lain, ini biasa dipakai untuk animasi komputer.

Proses transformasi dilakukan dengan mengalikan matriks objekl dengan matriks transformasi, sehingga menghasilkan matriks baru yang berisi koordinat objek hasil transformasi.

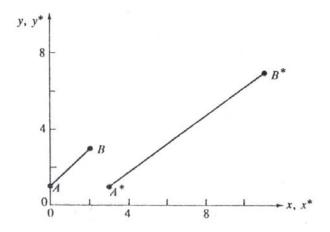
Sebagai contoh, apabila sebuah garis yang melalui titik A(0,1) dan titik B(2,3) ditransformasikan dengan matriks

$$\begin{bmatrix} T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

maka hasilnya adalah

$$\begin{bmatrix} L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 11 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L^* \end{bmatrix}$$

Secara visual proses transformasi ini dapat dilihat pada gambar berikut:



Gambar 5.1 Ilustrasi Transformasi Sebuah Garis

V. 2 Translasi

Transformasi translasi merupakan suatu operasi yang menyebabkan perpindahan objek 2D dari satu tempat ke tempat yang lain. Perubahan ini berlaku dalam arah yang sejajar dengan sumbu X dan sumbu Y. Translasi dilakukan dengan penambahan translasi pada suatu titik koordinat dengan translation vector, yaitu (tx,ty), dimana tx adalah translasi menurut sumbu x dan ty adalah translasi menurut sumbu y. Koordinat baru titik yang ditranslasi dapat diperoleh dengan menggunakan rumus :

$$\mathbf{x'} = \mathbf{x} + \mathbf{t}\mathbf{x}$$
 (x,y) = titik asal sebelum translasi
 $\mathbf{v'} = \mathbf{v} + \mathbf{t}\mathbf{v}$ (x',v') = titik baru hasil translasi

Translasi adalah transformasi dengan bentuk yang tetap, memindahkan objek apa adanya. Setiap titik dari objek akan ditranslasikan dengan besaran yang sama.

Dalam operasi translasi, setiap titik pada suatu entitas yang ditranslasi bergerak dalam jarak yang sama. Pergerakan tersebut dapat berlaku dalam arah sumbu X saja, atau dalam arah sumbu Y saja atau keduanya.

Translasi juga berlaku pada garis, objek atau gabungan objek 2D yang lain. Untuk hal ini, setiap titik pada garis atau objek yang ditranslasi dalam arah x dan y masing-masing sebesar tx,ty.

Contoh

Untuk menggambarkan translasi suatu objek berupa segitiga dengan koordinat A(10,10) B(30,10) dan C(10,30) dengan tx,ty(10,20), tentukan koordinat yang barunya!

Jawab

A:
$$x'=10+10=20$$

$$y'=10+20=30$$

$$A'=(20,30)$$

B:
$$x'=30+10=40$$

$$y'=10+20=30$$

$$B'=(40,30)$$

$$C: x'=10+10=20$$

$$y'=30+20=50$$

$$C'=(20,50)$$

V. 3 Penskalaan

Penskalaan adalah suatu operasi yang membuat suatu objek berubah ukurannya baik menjadi mengecil ataupun membesar secara seragam atau tidak seragam tergantung pada faktor penskalaan (*scalling factor*) yaitu (sx,sy) yang diberikan. sx adalah faktor penskalaan menurut sumbu x dan sy faktor penskalaan menurut sumbu y. Koordinat baru diperoleh dengan

$$x' = x + sx$$
 (x,y) = titik asal sebelum diskala

$$y'=y + sy (x',y') = titik setelah diskala$$

Nilai lebih dari 1 menyebabkan objek diperbesar, sebaliknya bila nilai lebih kecil dari 1, maka objek akan diperkecil. Bila (sx,sy) mempunyai nilai yang sama, maka skala disebut dengan *uniform scaling*.

Contoh

Untuk menggambarkan skala suatu objek berupa segitiga dengan koordinat A(10,10) B(30,10) dan C(10,30) dengan (sx,sy) (3,2), tentukan koordinat yang barunya!

Jawab:

A:
$$x' = 10*3 = 30$$

$$y' = 10*2 = 20$$

A' =
$$(30,20)$$

B:
$$x' = 30*3 = 90$$

$$y' = 10*2 = 20$$

B' =
$$(90,20)$$

$$C: x' = 10*3 = 30$$

$$y' = 30*2 = 60$$

$$C' = (30,60)$$

V. 4 Rotasi

Putaran adalah suatu operasi yang menyebabkan objek bergerak berputar pada titik pusat atau pada sumbu putar yang dipilih berdasarkan sudut putaran tertentu. Untuk melakukan rotasi diperlukan sudut rotasi dan *pivot point* (xp,yp) dimana objek akan dirotasi.

Putaran biasa dilakukan pada satu titik terhadap sesuatu sumbu tertentu misalnya sumbu x, sumbu y atau garis tertentu yang sejajar dengan sembarang sumbu tersebut. Titik acuan putaran dapat sembarang baik di titik pusat atau pada titik yang lain. Aturan dalam geometri, jika putaran dilakukan searah jarum jam, maka nilai sudutnya adalah negatif. Sebaliknya, jika dilakukan berlawanan arah dengan arah jarum jam nilai sudutnya adalah positif.

Rotasi dapat dinyatakan dengan:

$$x' = r \cos(\phi + \theta) = r \cos\phi \cos \theta - r \sin\phi \sin \theta$$

y' =
$$r \sin(\phi + \theta) = r \cos\phi \sin \theta + r \sin\phi \cos \theta$$

sedangkan diketahui

$$x = r \cos \phi$$
, $y = r \sin \phi$

lakukan subtitusi, maka:

$$x' = x \cos \phi - y \sin \theta$$

$$y' = x \sin \phi + y \cos \theta$$

Matriks rotasi dinyatakan dengan:

$$P' = R.P$$

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Rotasi suatu titik terhadap pivot point (xp,yp):

$$x' = xp+(x-xp) \cos \theta - (y-yp) \sin \theta$$

y' =
$$yp+(x - xp) \sin \theta + (y - yp) \cos \theta$$

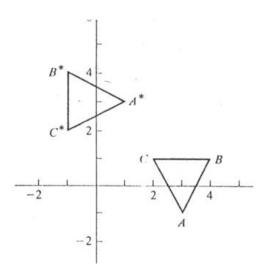
Contoh 1. Diketahui koordinat titik yang membentuk segitiga {(3, -1), (4, 1), (2, 1). Gambarkan objek tersebut kemudian gambarkan pula objek baru yang merupakan transformasi rotasi objek lama sebesar 90° CCW dengan pusat rotasi (0,0).

Jawab:

Matriks transformasi umum adalah

$$\begin{bmatrix} T_{90} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} T_{180} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} T_{270} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} T_{360} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Maka dengan mengalikan titik-titik segitiga tersebut dengan matriks transformasi yang sesuai, maka akan diperoleh hasil yang digambarkan sebagai berikut:



Gambar 4.2 Ilustrasi Rotasi

Contoh 2. Untuk menggambarkan rotasi suatu objek berupa segitiga dengan koordinat A(10,10), B(30,10) dan C(10,30) dengan sudut rotasi 300° terhadap titik pusat cartesian (10,10), dilakukan dengan menghitung koordinat hasil rotasi tiap titik satu demi satu.

Jawab:

$$x' = xp + (x - xp) \cos \theta - (y - yp) \sin \theta$$

=10+(10-10)*0.9 - (10-10)*0.5 = 10
 $y' = yp + (x - xp) \sin \theta + (y - yp) \cos \theta$
= 10+(10-10)*0.5 - (10-10)*0.9 = 10
Titik A'(10,10)

Titik B

$$x' = xp + (x - xp) \cos \theta - (y - yp) \sin \theta$$

= 10+(30-10)*0.9 - (10-10)*0.5 = 28
 $y' = yp + (x - xp) \sin \theta + (y - yp) \cos \theta$
= 10+(30-10)*0.5 - (10-10)*0.9 = 20

Titik B'(28,20)

Titik C

x' = xp+(x - xp) cos
$$\theta$$
 - (y - yp) sin θ
=10+(10-10)*0.9 - (30-10)*0.5 = 0
y' = yp+(x - xp) sin θ + (y - yp) cos θ
= 10+(10-10)*0.5 - (30-10)*0.9 = 28
Titik C'(0,28)

V. 5 Refleksi

Refleksi adalah transformasi yang membuat mirror (pencerminan) dari image suatu objek. Image mirror untuk refleksi 2D dibuat relatif terhadap sumbu dari refleksi dengan memutar 1800 terhadap refleksi. Sumbu refleksi dapat dipilih pada bidang x,y. Refleksi terhadap garis y=0, yaitu sumbu x dinyatakan dengan matriks

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Transformasi membuat nilai x sama tetapi membalikan nilai y berlawanan dengan posisi koordinat. Langkah :

- Objek diangkat
- Putar 180o terhadap sumbu x dalam 3D
- Letakkan pada bidang x,y dengan posisi berlawanan
- Refleksi terhadap sumbu y membalikan koordinat dengan nilai y tetap.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Refleksi terhadap sumbu x dan y sekaligus dilakukan dengan refleksi pada sumbu x terlebih dahulu, hasilnya kemudia direfleksi terhadap sumbu y. Transformasi ini dinyatakan dengan :

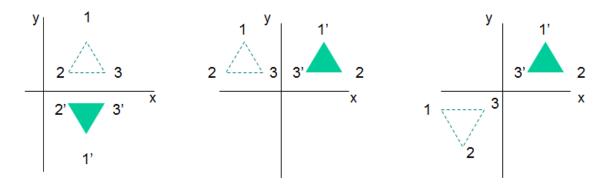
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Refleksi ini sama dengan rotasi 180° pada bidang xy dengan koordinat menggunakan

titik pusat koordinat sebagai pivot point. Refleksi suatu objek terhadap garis y=x dinyatakan dengan bentuk matriks.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ilustrasi proses refleksi pada sumbu-sumbu utama digambarkan pada gambar berikut:



Gambar 4.3 Ilustrasi Refleksi

Matriks dapat diturunkan dengan menggabungkan suatu sekuen rotasi dari sumbu koordinat merefleksi matriks. Pertama-tama dilakukan rotasi searah jarum jam dengan sudut 45° yang memutar garis y=x terhadap sumbu x. Kemudian objek direfleksi terhadap sumbu y, setelah itu objek dan garis y=x dirotasi kembali ke arah posisi semula berlawanan arah dengan jarum jam dengan sudut rotasi 90°.

Untuk mendapatkan refleksi terhadap garis y=-x dapat dilakukan dengan tahap :

- Rotasi 45° searah jarum jam
- Refleksi terhadap axis y
- Rotasi 90° berlawanan arah dengan jarum jam

Dinyatakan dengan bentuk matriks

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Refleksi terhadap garis y=mx+b pada bidang xy merupakan kombinasi transformasi translasi – rotasi – refleksi .

• Lakukan translasi mencapai titik perpotongan koordinat

- Rotasi ke salah satu sumbu
- Refleksi objek menurut sumbu tersebut

Latihan

Diketahui sebuah objek dengan pasangan koordinat $\{(4,1), (5,2), (4,3)\}$.

- a. Refleksikan pada cermin yang terletak pada sumbu x
- b. Refleksikan pada garis y=-x.

V. 6 Shear

Shear adalah bentuk transformasi yang membuat distorsi dari bentuk suatu objek, seperti menggeser sisi tertentu. Terdapat dua macam *shear* yaitu *shear* terhadap sumbu x dan *shea*r terhadap sumbu y.

Shear terhadap sumbu x

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dengan koordinat transformasi

$$x'=x+shx.y$$
 $y'=y$

Parameter shx dinyatakan dengan sembarang bilangan. Posisi kemudian digeser menurut arah ho*rizontal*.

Shear terhadap sumbu y

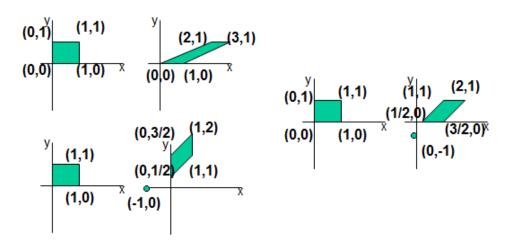
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dengan koordinat transformasi

$$x'=x$$
 $y'=shy.x+y$

Parameter shy dinyatakan dengan sembarang bilangan. Posisi koordinat kemudian menurut arah vertikal.

Gambar di bawah mengilustrasikan proses shearing.



Gambar 4.4 Ilustrasi Proses Shearing

Latihan

Diketahui sebuah bidang segiempat dengan koordinat A(3,1), B(10,1), C(3,5) dan D(10,5). Tentukan koordinat baru dari bidang tersebut dengan melakukan translasi dengan faktor translasi (4,3)

- 1. Lakukan penskalaan dengan faktor skala (3,2)
- 2. Dari hasil (1) lakukan rotasi terhadap titik pusat (A) dengan sudut rotasi 30o.
- 3. Transformasi shear dengan nilai shx = 2 dengan koordinat A(0,0), B(1,0), C(1,1), dan D(0,1)
- 4. Transformasi shear dengan nilai shy = 2 dengan koordinat A(0,0), B(1,0), C(1,1), dan D(0,1)

V. 7 Transformasi Homogen

Transformasi homogen merupakan transformasi yang memberikan cakupan proses transformasi secara umum. Dalam dunia nyata dimana objek nyata merupakan elemen yang kompleks dan memiliki koordinat masing-masing, maka peran transformasi homogen sangat diperlukan untuk menyelesaikan berbagai permasalahan yang ada.

Beberapa hal yang perlu diperhatikan dalam hal implemengtasi transformasi homogen adalah sebagai berikut:

- Origin bersifat INVARIAN. Koordinatnya tidak akan pernah berubah. Jika ditransformasikan, akan tetap di (0,0).
- Dalam kondisi nyata, origin tidak harus selalu absolut di (0,0). Untuk itu digunakan koordinat homogen
- Koordinat homogen memetakan titik (0,0) ke posisi lain. Untuk itu ada elemen tambahan pada matriks transformasi

Untuk itu maka didefinisikan Matriks Transformasi Umum (MTU) sebagai berikut:

$$[T] = \begin{bmatrix} a & b & p \\ c & d & q \\ m & n & s \end{bmatrix}$$

Dimana a, b, c, d merupakan elemen untuk skala, rotasi,refleksi dan *shearing*; m, n merupakan elemen untuk translasi; s adalah elemen untuk *overal scaling*; dan p, q adalah elemen untuk proyeksi.

Rotasi pada Sumbu Sembarang

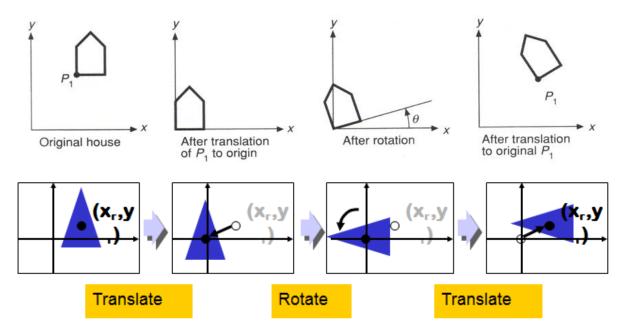
Jika sebuah objek dirotasikan sebesar θ° dengan pusat rotasi (m, n), maka langkahlangkah yang harus dilakukan adalah

- a. Translasikan pusat rotasi ke (0, 0); karena yang kita ketahui hanyalah rumus rotasi pada origin
- b. Lakukan rotasi sebesar yang diinginkan
- c. Re-translasi pusat rotasi ke posisi semula

Dengan demikian matriks transformasinya menjadi

$$\begin{bmatrix} T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -m & -n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & n & 1 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} x^* & y^* & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \end{bmatrix}$$

Proses ini diilustrasikan sebagai berikut:



Gambar 4.5 Ilustrasi Rotasi Pada Sumbu Sembarang

Refleksi pada Garis Sembarang

Jika sebuah objek direfleksikan pada sebuah garis maka langkah-langkah yang harus dilakukan adalah

- a. Translasikan cermin sedemikian rupa sehingga menyentuh titik origin
- b. Rotasikan cermin sehingga berimpit dengan salah satu sumbu utama
- c. Refleksikan objek
- d. Re-rotasi
- e. Re-translasi

Jadi MTU terdiri dari 5 buat matriks transformasi sebagai berikut:

$$[T] = [T_r][Rot][R][Rot^{-1}][T_r^{-1}]$$

Latihan:

1. Diketahui sebuah objek dengan koordinat

$$\{(0,0), (2,2), (2,1), (6,1), (6,-1), (2,-1), (-2,-2)\}$$

- a. Rotasikan objek sebesar 45° CCW dengan pusat rotasi pada (9, 4)
- b. Rotasikan objek sebesar 30° CW dengan pusat rotasi pada (-3,5)

Dari operasi transformasi

- 1. Gambarkan objek asli
- 2. Tentukan MTU
- 3. Tentukan Koordinat Objek Baru
- 4. Gambarkan objek hasil transformasi

2. Diketahui sebuah objek dengan koordinat

$$\{(0,0), (1,-2), (3,3), (2,3), (1,1), (0,2), (-1,1), (-2,3), (-3,3), (-1,-2), (0,0)\}.$$

- a. Refleksikan objek di atas pada cermin yang berimpit dengan garis y = -x+9.
- b. Refleksikan objek di atas pada cermin yang berimpit dengan garis y = x+9.

Dari operasi transformasi

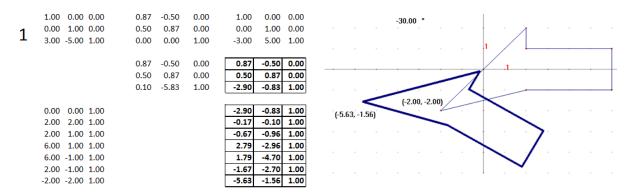
- 1. Gambarkan objek asli
- 2. Tentukan MTU
- 3. Tentukan Koordinat Objek Baru
- 4. Gambarkan objek baru hasil transformasi

Jawaban

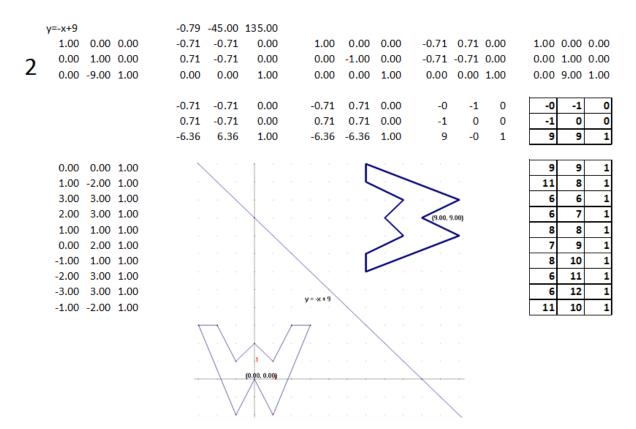
1.a

	1.00 0.00 0.00	0.71 0.71 0.00	1.00 0.00 0.00	
1	0.00 1.00 0.00	-0.71 0.71 0.00	0.00 1.00 0.00	
Т	-9.00 -4.00 1.00	0.00 0.00 1.00	9.00 4.00 1.00	
		0.71 0.71 0.00	0.71 0.71 0.00	
		-0.71 0.71 0.00	-0.71 0.71 0.00	
		-3.54 -9.19 1.00	5.46 -5.19 1.00	(-2.00, -2.00)
				(=2.00, =2.00)
	0.00 0.00 1.00		5.46 -5.19 1.00	
	2.00 2.00 1.00		5.46 -2.36 1.00	
	2.00 1.00 1.00		6.17 -3.07 1.00	
	6.00 1.00 1.00		9.00 -0.24 1.00	
	6.00 -1.00 1.00		10.41 -1.66 1.00	
	2.00 -1.00 1.00		7.59 -4.49 1.00	
	-2.00 -2.00 1.00		5.46 -8.02 1.00	
				(5.46, -8.02)

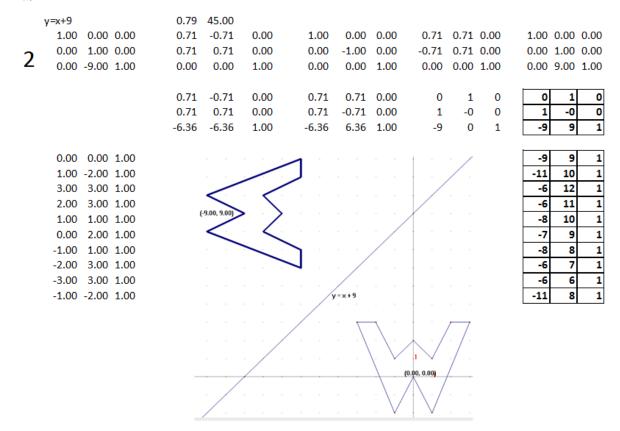
1.b



2.a



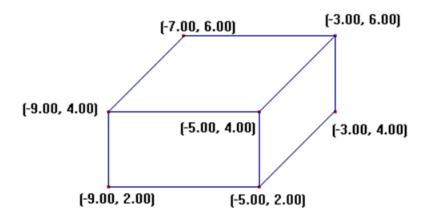
2.b



Latihan

- 1. Jelaskan istilah-istilah dalam Grafika Komputer sebagai berikut:
 - a. Ukuran layar monitor
 - b. Resolusi layar
 - c. Dot Pitch
 - d. Interlace/Non-Interlace
 - e. Flat/Non Flat
 - f. RGB
 - q. LCD
 - h. CGA, EGA, VGA, XGA
- 2. [10] Turunkan matriks transformasi umum (MTU) untuk rotasi dengan pusat rotasi pada sebuah titik sembarang (x, y) dan sudut rotasi sebesar θ° searah jarum jam (clock wise).

3. Diketahui sebuah objek grafis seperti di bawah ini.



Tentukan:

- a. Matriks Transformasi Umum jika objek di atas dirotasikan sebesar PHI/4 radian Clock Wise dengan pusat rotasi (-1, -2)
- b. Tentukan koordinat objek baru hasil transformasi dengan MTU pada soal a
- c. Gambarkan objek baru hasil transformasinya

4. Tentukan:

- a. Matriks Transformasi Umum jika objek pada soal 3 direfleksikan pada cermin yang berimpit dengan garis y = 2x/5 + 4
- b. Tentukan koordinat objek baru hasil transformasi dengan MTU pada soal a
- c. Gambarkan objek baru hasil transformasinya
- 5. Tuliskan algoritma perkalian matriks 2 dimensi menggunakan bahasa C atau Pascal!

Daftar Pustaka

- 1. David F. Rogers, Alan J. Adams, Mathematical Elements for Computer Graphics (2nd edition), McGraw-Hill, 1989
- 2. John F. Hughes, Andries Van Dam, Morgan Mcguire, David F. Sklar, James D. Foley, Steven K. Feiner, Kurt Akeley, Computer Graphics: Principles and Practice (3rd edition), Addison-Wesley, 2014
- Ollie Cornes, Jay Glynn, Burton Harvey, Craig McQueen, Jerod Moemeka, Christian Nagel, Simon Robinson, Morgan Skinner, Karli Watson, Professional C# - Graphics with GDI+, Wrox, 2001