

NOIp Senior Day1 Solution

by Timber

1 color

1.1 题意

给定一个 H 行 W 列的矩阵，矩阵中的点一开始均为白色，然后将指定的 n 个点染成黑色，询问有多少个 3×3 的区域中有恰好 i 个黑色点 $0 \leq i \leq 9$ 。

$3 \leq H, W \leq 10^9, N \leq 10^5$ 。

1.2 100分算法

对于一个黑色的格子，只有9个 3×3 的矩阵能包含它。所以只要处理 n 个黑格子就行了。对于每个黑格子，假设用 3×3 的左上角的坐标代表这个矩阵，把矩阵中每个格子标记；然后用`std::map`处理一下，输出就可以了。

时间复杂度： $O(n \log n)$ 。

2 haiku

2.1 题意

给定一个长度为 N 的序列 a ，序列中的每个数都可以是 $1 \sim 10$ 中的某一个，总共有 10^N 种序列，现在给出 N, X, Y, Z ，问有多少个长度为 N 的序列满足其有四个下标 x, y, z, w 使得 $a[x] + a[x+1] + \dots + a[y-1] = X$ ， $a[y] + a[y+1] + \dots + a[z-1] = Y$ ， $a[z] + a[z+1] + \dots + a[w] = Z$ 。

$3 \leq N \leq 40, 1 \leq X \leq 5, 1 \leq Y \leq 7, 1 \leq Z \leq 5$ 。

2.2 50分做法

若找到四个下标，则剩余元素可以任意，暴力枚举第一个 x 出现的位置和三段的长度即可确定一类解，因为其余元素任意，枚举时明显重复计算了。

所以如果是暴力做法，那么不能够把第一个 x 出现的位置前的任意取的方案数和最后一个 w 之后的任意取的方案数同时用来计算方案，可以考虑枚举序列前缀的所有情况然后每次判断是否满足要求，如果满足要求，那么答案可以加上 $10^{\text{没有枚举的部分的长度}}$ 。这样暴力dfs一下就可以了。

2.3 100分做法

考虑用0/1串代表数字 $1 = "1"$ ， $2 = "10"$ ， $3 = "100"$ ，比如: $(1, 2, 1, 4) = "11011000"$ ，在前面的例子中，该段和即为该段的长度为 i ，第 i 位1，而且不难发现，这个数列可以在1的位置被分成几段，比如对于这个例子而言， $X = 1, Y = 2, Z = 5$ 是合法的。

$(X, Y, Z) = (5, 7, 5)$ ，那么结束状态为 $"10000100000010000"$ ， $X + Y + Z = 17$ ，则最多只需要用17个bit判断当前是否包含禁止状态，设 $dp[i][state]$ 插最后一个数时更新即可。

时间复杂度: $O(10 \times 2^{17} \times N)$

3 flower

3.1 题意

给定 m 种花， n 个位置，每个位置可以放花或不放，给定一些限制条件，即某两种花不能相邻摆放，问摆花的方案数。

$$n \leq 10^7, m \leq 100$$

3.2 30分做法

直接dfs，根据限制条件统计答案即可。

3.3 60分做法

令 $f_{i,j}$ 表示放置到第 i 个位置，当前位置放置的是第 j 种花，然后每次枚举下一个位置放什么，和当前位置放什么，根据事先给定的限制条件来转移即可，时间复杂度 $O(nm^2)$ 。

3.4 100分做法

在60分做法的基础上，使用矩阵乘法加速转移即可。时间复杂度 $O(m^3 \log n)$ 。