FEM

Classical formulation - sformułowanie klasyczne

Równanie:

$$
\begin{aligned}
EA\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \rho A\frac{\partial^2 (x,t)}{\partial t^2} &= 0 \quad | \quad : \rho A \\
\frac{E\cancel{A}}{\rho\cancel{A}}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} &= 0 \\
c^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} & \qquad c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}
\end{aligned}
$$

Metoda rozdzielania zmiennych: zakładamy rozwiązanie postaci

$$
\begin{aligned}
u(x_1 t) &= U(x)T(t) \\
\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{d^2 U(x)}{dx^2}T(t) & \qquad \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t} = U(x)\frac{d^2 T(t)}{dt^2} \\
c^2\frac{d^2 U(x)}{dx^2}T(t) &= U(x)\frac{d^2 T(t)}{dt^2} \quad | \quad : U \quad | : T \\
\frac{c^2}{U(x)}\frac{d^2 U(x)}{dx^2} &= \frac{1}{T(t)}\frac{d^2 T(t)}{dt^2} = -\omega^2 \\
\frac{c^2}{U(x)}\frac{d^2 U(x)}{dx^2} &= -\omega^2 \\
\frac{c^2}{U(x)}\frac{d^2 U(x)}{dx^2} + \omega^2 &= 0 \quad | \quad \cdot \frac{U(x)}{c^2}
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\frac{d^2 U(x)}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2}U(x) = 0}$$

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k^2$$

$$\Delta u + k^2 u = 0$$

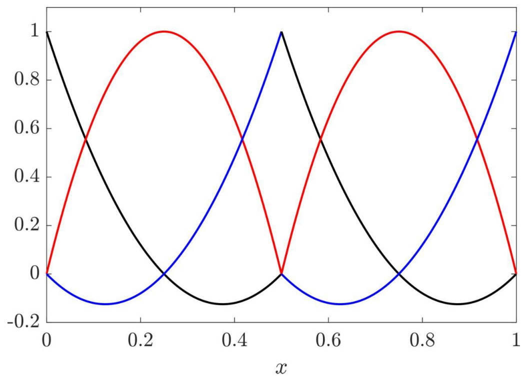
Zakładamy rozwiązanie przybliżone:

$$
\begin{aligned}
\tilde{u}(x) &= \sum_\nu a_\nu \varphi_\nu(x) \\
D\tilde{u}(x) &= \sum_\nu a_\nu D\varphi_\nu(x) \\
D^2\tilde{u}(x) &= \sum_\nu a_\nu D^2\varphi_\nu(x)
\end{aligned}
$$

Podstawiamy do równania:

$$\sum_\nu a_\nu D^2\varphi_\nu(x) + k^2\sum_\nu a_\nu \varphi_\nu(x) = 0$$

Dyskretyzacja obszaru: 2 elementy, 5 węzłów
Funkcje kształtu : stopień 2



$$\varphi_1(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}$$
$$\varphi_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}$$
$$\varphi_3(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

Macierze lokalne
Element 1

$$a_1^{(1)}[D^2\varphi_1^{(1)}(x_1)+k^2\varphi_1^{(1)}(x_1)]+a_2^{(1)}[D^2\varphi_2^{(1)}(x_1)+k^2\varphi_2^{(1)}(x_1)]+a_3^{(1)}[D^2\varphi_3^{(1)}(x_1)+k^2\varphi_3^{(1)}(x_1)]=0$$
$$a_1^{(1)}[D^2\varphi_1^{(1)}(x_2)+k^2\varphi_1^{(1)}(x_2)]+a_2^{(1)}[D^2\varphi_2^{(1)}(x_2)+k^2\varphi_2^{(1)}(x_2)]+a_3^{(1)}[D^2\varphi_3^{(1)}(x_2)+k^2\varphi_3^{(1)}(x_2)]=0$$
$$a_1^{(1)}[D^2\varphi_1^{(1)}(x_3)+k^2\varphi_1^{(1)}(x_3)]+a_2^{(1)}[D^2\varphi_2^{(1)}(x_3)+k^2\varphi_2^{(1)}(x_3)]+a_3^{(1)}[D^2\varphi_3^{(1)}(x_3)+k^2\varphi_3^{(1)}(x_3)]=0$$

Element 2

$$a_1^{(2)}[D^2\varphi_1^{(2)}(x_1)+k^2\varphi_1^{(2)}(x_1)]+a_2^{(2)}[D^2\varphi_2^{(2)}(x_1)+k^2\varphi_2^{(2)}(x_1)]+a_3^{(2)}[D^2\varphi_3^{(2)}(x_1)+k^2\varphi_3^{(2)}(x_1)]=0$$
$$a_1^{(2)}[D^2\varphi_1^{(2)}(x_2)+k^2\varphi_1^{(2)}(x_2)]+a_2^{(2)}[D^2\varphi_2^{(2)}(x_2)+k^2\varphi_2^{(2)}(x_2)]+a_3^{(2)}[D^2\varphi_3^{(2)}(x_2)+k^2\varphi_3^{(2)}(x_2)]=0$$
$$a_1^{(2)}[D^2\varphi_1^{(2)}(x_3)+k^2\varphi_1^{(2)}(x_3)]+a_2^{(2)}[D^2\varphi_2^{(2)}(x_3)+k^2\varphi_2^{(2)}(x_3)]+a_3^{(2)}[D^2\varphi_3^{(2)}(x_3)+k^2\varphi_3^{(2)}(x_3)]=0$$

$$A = \begin{bmatrix}
D^2\varphi_1^{(1)}(x_1)+k^2\varphi_1^{(1)}(x_1) & D^2\varphi_2^{(1)}(x_1)+\cancel{k^2\varphi_2^{(1)}(x_1)} & D^2\varphi_3^{(1)}(x_1)+\cancel{k^2\varphi_3^{(1)}(x_1)} & 0 & 0 \\
D^2\varphi_1^{(1)}(x_2)+\cancel{k^2\varphi_1^{(1)}(x_2)} & D^2\varphi_2^{(1)}(x_2)+k^2\varphi_2^{(1)}(x_2) & D^2\varphi_3^{(1)}(x_2)+\cancel{k^2\varphi_3^{(1)}(x_2)} & 0 & 0 \\
D^2\varphi_1^{(1)}(x_3)+\cancel{k^2\varphi_1^{(1)}(x_3)} & D^2\varphi_2^{(1)}(x_3)+\cancel{k^2\varphi_2^{(1)}(x_3)} & \begin{matrix} D^2\varphi_3^{(1)}(x_3)+k^2\varphi_3^{(1)}(x_3)+ \\ +D^2\varphi_3^{(2)}(x_3)+k^2\varphi_3^{(2)}(x_3) \end{matrix} & D^2\varphi_4^{(2)}(x_3)+\cancel{k^2\varphi_4^{(2)}(x_3)} & D^2\varphi_5^{(2)}(x_3)+\cancel{k^2\varphi_5^{(2)}(x_3)} \\
0 & 0 & D^2\varphi_3^{(2)}(x_4)+\cancel{k^2\varphi_3^{(2)}(x_4)} & D^2\varphi_4^{(2)}(x_4)+k^2\varphi_4^{(2)}(x_4) & D^2\varphi_5^{(2)}(x_4)+\cancel{k^2\varphi_5^{(2)}(x_4)} \\
0 & 0 & D^2\varphi_3^{(2)}(x_5)+\cancel{k^2\varphi_3^{(2)}(x_5)} & D^2\varphi_4^{(2)}(x_5)+\cancel{k^2\varphi_4^{(2)}(x_5)} & D^2\varphi_5^{(2)}(x_5)+k^2\varphi_5^{(2)}(x_5)
\end{bmatrix}$$

$$RHS = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

lokalnie	globalne
1 1	1
1 2	2
1 3	3
2 1	3
2 2	4
2 3	5

Uwzględnienie warunków brzegowych

$U\|_{x=0}=0$ Element 1 Warunek Dirichleta	$\frac{du}{dx}\|_{x=l}=0$ Element 2 Warunek Neumanna

Warunek Dirichleta

$$U|_{x=0}=0 \rightarrow a_1\varphi_1^1(x_1)+\cancel{a_2\varphi_2^1(x_1)}+\cancel{a_3\varphi_3^1(x_1)}=0$$

Funkcje $\varphi_2^1(x_1)$ i $\varphi_3^1(x_1)$ są równe 0 w pierwszym węźle

Warunek Neumanna

$$\frac{du}{dx}|_{x=l}=0 \rightarrow a_3D\varphi_3^2(x_5)+a_4D\varphi_4^2(x_5)+a_5d\varphi_5^2(x_5)=0$$

Wszystkie pochodne mają wartość $\neq$ 0

* *W pierwszym węźle równanie nie jest spełnione, obowiązuje warunek brzegowy.*

* *W ostatnim węźle równanie nie jest spełnione, obowiązuje warunek brzegowy.*

Dlatego równanie dla pierwszego i ostatniego węzła(węzły brzegowe) zastępujemy równaniami warunków brzegowych:

Pierwszy wiersz macierzy A:

$$\begin{bmatrix}\varphi_1^1(x_1) & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Ostatni wiersz macierzy A:

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & D\varphi_3^2(x_5) & D\varphi_4^2(x_5) & D\varphi_5^2(x_5)\end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}\varphi_1^{(1)}(x)=\frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}\\ D^2\varphi_1^{(1)}(x)=\frac{2}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}=\frac{2}{(0-0.25)(0-0.5)}=16\end{array}\right\}\text{węzeł 1}\\
\left.\begin{array}{l}\varphi_2^{(1)}(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}\\ D^2\varphi_2^{(1)}(x)=\frac{2}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}=\frac{2}{(0.25-0)(0.25-0.5)}=-32\end{array}\right\}\text{węzeł 2}\\
\left.\begin{array}{l}\varphi_3^{(1)}(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}\\ D^2\varphi_3^{(1)}(x)=\frac{2}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}=\frac{2}{(0.5-0)(0.5-0.25)}=16\end{array}\right\}\text{węzeł 3}
\end{array}\right\}\text{Element 1}$$

$$\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}\varphi_3^{(2)}(x)=\frac{(x-x_4)(x-x_5)}{(x_3-x_4)(x_3-x_5)}\\ D\varphi_3^{(2)}(x)=\frac{2x-x_4-x_5}{(x_3-x_4)(x_3-x_5)}\\ D^2\varphi_3^{(2)}(x)=\frac{2}{(x_3-x_4)(x_3-x_5)}=\frac{2}{(0.5-0.75)(0.5-1)}=16\end{array}\right\}\text{węzeł 3}\\
\left.\begin{array}{l}\varphi_4^{(2)}(x)=\frac{(x-x_3)(x-x_5)}{(x_4-x_3)(x_4-x_5)}\\ D\varphi_4^{(2)}(x)=\frac{2x-x_3-x_5}{(x_4-x_3)(x_4-x_5)}\\ D^2\varphi_4^{(2)}(x)=\frac{2}{(x_4-x_3)(x_4-x_5)}=\frac{2}{(0.75-0.5)(0.75-1)}=-32\end{array}\right\}\text{węzeł 4}\\
\left.\begin{array}{l}\varphi_5^{(2)}(x)=\frac{(x-x_3)(x-x_4)}{(x_5-x_3)(x_5-x_4)}\\ D\varphi_5^{(2)}(x)=\frac{2x-x_3-x_4}{(x_5-x_3)(x_5-x_4)}\\ D^2\varphi_5^{(2)}(x)=\frac{2}{(x_5-x_3)(x_5-x_4)}=\frac{2}{(1-0.5)(1-0.75)}=16\end{array}\right\}\text{węzeł 5}
\end{array}\right\}\text{Element 2}$$

$$A = \begin{bmatrix} & & \text{Warunek Dirichleta} & & \\ \varphi_1^1(x_1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D^2\varphi_1^1(x_2) & D^2\varphi_2^1(x_2) + k^2\varphi_2^1(x_2) & D^2\varphi_3^1(x_2) & 0 & 0 \\ D^2\varphi_1^1(x_3) & D^2\varphi_2^1(x_3) & D^2\varphi_3^1(x_3) + k^2\varphi_3^1(x_3) + D^2\varphi_3^2(x_3) + k^2\varphi_3^2(x_3) & D^2\varphi_4^2(x_3) & D^2\varphi_5^2(x_3) \\ 0 & 0 & D^2\varphi_3^2(x_4) & D^2\varphi_4^2(x_4) + k^2\varphi_4^2(x_4) & D^2\varphi_5^2(x_4) \\ 0 & 0 & D\varphi_3^2(x_5) & D\varphi_4^2(x_5) & D\varphi_5^2(x_5) \\ & & \text{Warunek Neumanna} & & \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 16 & -32 + k^2 \cdot 1 = -29.4957 & 16 & 0 & 0 \\ 16 & -32 & 16 + k^2 \cdot 1 + 16 + k^2 = 37.0087 & -32 & 16 \\ 0 & 0 & 16 & -32 + k^2 \cdot 1 = -29.4957 & 16 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & 6 \end{bmatrix}$$

Dane: materiał: aluminium, $E = 69 \cdot 10^9 PQ, \rho = 2700\frac{kg}{m^3}, c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \omega = 8000, k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} = 2.5043$

Wymuszenie
Siła punktowa w x_3
Przykładowe równanie dla węzła x_2:

$$a_1 D^2\varphi_1^{(1)}(x_2) + a_2(D^2\varphi_2^{(1)}(x_2) + k^2\varphi_2^{(1)}(x_2)) + a_3 D^2\varphi_3^{(1)}(x_2) = 0$$

Dla x_3:

$$a_1 D^2\varphi_1^{(1)}(x_3) + a_2 D^2\varphi_2^{(1)}(x_3) + a_3[D^2\varphi_3^{(1)}(x_3) + k^2\varphi_3^{(1)}(x_3) + D^2\varphi_3^{(2)}(x_3) + k^2\varphi_3^{(2)}(x_3)]$$
$$+ a_4 D^2\varphi_4^{(2)}(x_3) + a_5 D^2\varphi_5^{(2)}(x_3) = f$$

Założenie: f=1N
Wektor wymuszeń (RHS):

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie URL(za pomocą MATLABA): A\b

$$Q = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.4370 \\ 2.6492 \\ 3.4620 \\ 3.7329 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

$$\tilde{u}(x) = a_1\varphi_1^1 + a_2\varphi_2^1 + a_3(\varphi_3^1 + \varphi_3^2) + a_4\varphi_4^2 + a_5\varphi_5^2$$