Interpolacja, aproksymacja

Załóżmy, że w pewnym procesie fizycznym dysponujemy zbiorem pomiarów wartości danego parametru. Np. mierzymy charakterystykę rezystora i dokonujemy pomiarów prądu dla kilku punktów napięcia zasilającego. Nie mamy charakterystyki danej w sposób ciągły, nie znamy funkcji, które opisuje dany rezystor.

Interpolacją nazywamy postępowanie prowadzące do znalezienia wartości pewnej funkcji f(x) w dowolnym punkcie przedziału na podstawie znanych wartości tej funkcji w punktach $x_0, x_1, \ldots, x_n$ zwanych węzłami interpolacji.

Postępowanie prowadzące do znalezienia wartości funkcji f(x) w punkcie leżącym poza przedziałem(x_0, x_1) nazywamy ekstrapolacją

Interpolację | Ekstrapolację stosujemy gdy:

1. nie znamy samej funkcji f(x), a tylko jej wartość w pewnych punktach(tak przeważnie bywa w naukach doświedczalnych)
2. obliczenie wartości pewnej funkcji F(x) bezpośrednio z określającego ją wzoru ***(nastręcza?) zbyt duże trudności rachunkowe. Wtedy zastępujemy ją prostszą funkcją f(x), w której zakładamy, że w punktach $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ma te same wartości co funkcja F(x); w tym przypadku F(x) to f. interpolawana, a f(x) to f. interpolująca.

Wielomian interpolacyjny Lagrange'a

W przypadku gdy wielomian interpolujący na postać

$$\begin{aligned} W_n(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_b)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)} + \cdots + \\ + y_n \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1})} = \sum_{j=0}^{n} y_j \Pi_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n} \frac{(x-x_k)}{(x_j-x_k)} \end{aligned}$$

mamy do czynienia z interpolacją Logrange'a. Wielomian ten zeruje się we wszystkich punktach a=$x_1, x_2, \ldots, x_n$=b co oznacza, że spełnia warunki interpolacji.

Przykład

Znaleźć wielomian interpoplacyjny Lagrange'a, który w punktach x=-2, -1, 0, 2 przyjmuje odpowiednio wartości 0,1,1,2.

Oblicz także przybliżoną wartość funkcji danej powyższymi wartościami w punkcie x=1.

> Wielomian Langrange'a jest wielomianem stopnia co najwyżej n i jest jednoznacznym rozwiązaniem zadania interpolacyjnego dla dowolnego wyboru n+1 różnych węzłów interpolacji.

x_i	-2	-1	0	2
y_i	0	1	1	2

$$\begin{aligned} W_3(x) &= 0\frac{(x+1)(x-0)(x-2)}{(-2+1)(-2-0)(-2-2)} + 1\frac{(x+2)(x-0)(x-2)}{(-1+2)(-1-0)(-1-2)} + 1\frac{(x+2)(x+1)(x-2)}{(0+2)(0+1)(0-2)} + 2\frac{(x+2)(x+1)(x-0)}{(2+2)(2+1)(2-0)} = \\ &= \frac{1}{3}x(x^2-4) - \frac{1}{4}(x^2-4)(x+1) + \frac{1}{12}x(x^2+3x+2) = \\ &= \frac{1}{3}(x^3-4x) - \frac{1}{4}(x^3+x^2-4x-4) + \frac{1}{12}(x^3+3x^2+2x) = \\ &= \frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x - \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + x + 1 + \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{6}x = \\ &= \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}x + 1 \end{aligned}$$

Używając tego wielomianu można teraz interpolować wartości funkcji f(x) w punktach przedziału <-2,2>. Przybliżona wartość funkcji f w punkcie x=1 wynosi:

$$f(1) \approx W_3(1) = \frac{1}{6}\cdot 1^3 - \frac{1}{6}\cdot 1 + 1 = 1$$

Zadanie 1

x_i	-2	0	1	3
y_i	1	-1	2	1

$W_3(x)$=?

$W_3(2)$=?

Zadanie 2

x_i	0	1	2
y_i	0	1	4

$W_2(x)$=?

$W_2(0,5)$=?

Interpolacja Newtona dla wielomianu dowolnego stopnia

Zakładamy, że znamy wartości funkcji f(x) w co najmniej n+1 punktach $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Poszukujemy funkcje interpolującej w postaci wielomianu stopnia n:

$$F(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + \cdots + b_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$$

Potrzebne wartości współczynników $b_0, b_1, \ldots, b_n$ można obliczyć ze wzorów rekurencyjnych.

$$\begin{array}{cccccccccc}
x_0 & f(x_0) & & & & & & & & \\
 & & \diagdown & & & & & & & \\
 & & & f_1(x_1) & & & & & & \\
 & & \diagup & & \diagdown & & & & & \\
x_1 & f(x_1) & & & & f_2(x_2) & & & & \\
 & & \diagdown & & \diagup & & \diagdown & & & \\
 & & & f_1(x_2) & & & & f_3(x_3) & & \\
 & & \diagup & & \diagdown & & \diagup & & \diagdown & \\
x_2 & f(x_2) & & & & f_2(x_3) & & & & f_4(x_4) \\
 & & \diagdown & & \diagup & & \diagdown & & \diagup & \\
 & & & f_1(x_3) & & & & f_3(x_4) & & \\
 & & \diagup & & \diagdown & & \diagup & & & \\
x_3 & f(x_3) & & & & f_2(x_4) & & & & \\
 & & \diagdown & & \diagup & & & & & \\
 & & & f_1(x_4) & & & & & & \\
 & & \diagup & & & & & & & \\
x_4 & f(x_4) & & & & & & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc}
-2 & 1 & & & & \\
 & & -\frac{2}{3} & & & \\
0 & -2 & & \frac{11}{6} & & \\
 & & \frac{1}{3} & & -\frac{2}{3} & \\
1 & 2 & & \frac{1}{2} & & \\
 & & 0 & & & \\
3 & 1 & & & &
\end{array}$$

$$f_1(x_1) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{-2 - 1}{0 + 2} = -\frac{3}{2}$$

$$f_1(x_2) = \frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0} = \frac{2 - 1}{1 + 2} = \frac{1}{3}$$

$$f_1(x_3) = \frac{y_3 - y_0}{x_3 - x_0} = \frac{1 - 1}{3 + 2} = 0$$

$$f_2(x_2) = \frac{f_1(x_2) - f_1(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{1}{3} - (-\frac{3}{2})}{1 - 0} = \frac{2}{6} + \frac{9}{6} = \frac{11}{6}$$

$$f_2(x_3) = \frac{f_1(x_3) - f_1(x_1)}{x_3 - x_1} = \frac{0 - (-\frac{3}{2})}{3 - 0} = \frac{\frac{3}{2}}{3} = \frac{1}{2}$$

$$f_3(x_3) = \frac{f_2(x_3) - f_2(x_3)}{x_3 - x_2} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{11}{6}}{3 - 1} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{6} - \frac{11}{6}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{8}{6}\right) = -\frac{8}{12} = -\frac{2}{3}$$

$$W_3(x) = 1 - \frac{3}{2}(x+2) + \frac{11}{6}(x+2)(x-0) - \frac{2}{3}(x+2)(x-0)(x-1) =$$
$$= 1 - \frac{3}{2}x - 3 + \frac{11}{6}x^2 + \frac{11}{3}x - \frac{2}{3}(x^3 + x^2 - 2x) =$$
$$= 1 - \frac{3}{2}x - 3 + \frac{11}{6}x^2 + \frac{11}{3}x - \frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x =$$
$$= -\frac{2}{3}x^3 + \frac{7}{6}x^2 + \frac{21}{6}x - 2 - \frac{3}{2} + \frac{4}{3} = \frac{-9+8}{6} = -\frac{1}{6} + \frac{22}{6}$$

Zadanie

-2	0
-1	1
0	1
2	2

$$W_3(x) = \dots$$

Interpolacja odwrotna

Traktując y_i jako węzły interpolacji, a x_i jako wartości funkcji w tych węzłach ($x_i = g(y_i)$) można utworzyć wielomian interpolujący f odwrotną do $f(x)$.

Korzystając z obliczonego w ten sposób wielomianu można znaleźć x_p, dla którego funkcje(x) przyjmuje z góry zadaną wartość y_p.(Korzystne przy szukaniu miejsc zerowych)

Przykład

Znaleźćp przybliżenie miejsca zerowego równania $x - sin(x) = 0$ w przedziale $x \in < \frac{\Pi}{2}, \frac{3}{2}\Pi >$

W podobnym przedziale wprowadzimy 3 węzły obliczając wartości węzłowe na podstawie równania $f(x) = x - sin(x)$

i	1	2	3
x_i	$\frac{\Pi}{2}$	Π	$\frac{3}{2}\Pi$
$f_i = f(x_i)$	$\frac{\Pi}{2} - 1$	Π	$\frac{3}{2}\Pi + 1$

$$W_n(y) = x_0 \frac{(y-y_1)(y-y_2)\dots(y-y_n)}{(y_0-y_1)(y_0-y_2)\dots(y_0-y_n)} + \dots + x_n \frac{(y-y_0)(y-_1)\dots(y-y_{n-1})}{(y_n-y_0)(y_n-y_1)\dots(y_n-y_{n-1})}$$
$$W_3(y) = \frac{\Pi}{2} \frac{(y-\Pi)(y-\frac{3}{2}-1)}{(\frac{\Pi}{2}-1-\Pi)(\frac{\Pi}{2}-1-\frac{3}{2}\Pi-1)} + \Pi \frac{(y-\frac{\Pi}{2}+1)(y-\frac{3}{2}\Pi-1)}{(\Pi-\frac{\Pi}{2}+1)} + \frac{3}{2}\Pi \frac{(y-\Pi)(y-\frac{\Pi}{2}+1)}{(\frac{3}{2}\Pi+1-\Pi)(\frac{3}{2}\Pi+1-\frac{\Pi}{2}+1)}$$
$$W_3(y) = \frac{2\Pi}{2(\Pi+2)^2}(y-\Pi)(y-\frac{3}{2}\Pi-1) - \frac{4\Pi}{(2+\Pi)^2}(y-\frac{\Pi}{2}+1)(y-\frac{3}{2}\Pi-1) +$$
$$+\frac{3}{2}\Pi\frac{2}{(\Pi+2)^2}(y-\Pi)(y-\frac{\Pi}{2}+1) = \Pi\frac{y+2}{\Pi+2}$$

Przybliżenie miejsca zerowego równania

$$W_3(0) = \Pi\frac{0+2}{2+\Pi} = \frac{2\Pi}{2+\Pi}$$

Aproksymacja

Dla poniższych danych znaleźć aproksymację liniową. Rozpatrzymy 2 przypadki: metodę zwykłą i ważoną przyjmując każdemu z węzłów jego numer jako wagę.

i	1	2	3
x_i	0	1	2
f_i	0	1	4

Przyjmujemy f liniową $p(x) = ax + b$

Metoda zwykła

Układamy funkcjonał

$$B(a,b) = \sum_{i=1}^{3}(a - x_i + b - f_i)^2 = (a \cdot 0 + b - 0)^2 + (a \cdot 1 + b - 1)^2 + (a \cdot 2 + b - 4)^2$$

Różniczkujemy po zmiennych a i b.

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial a}B(a,b) = 2(a+b-1) + 2 \cdot 2(2a+b-4) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial b}B(a,b) = 2b + 2(a+b-1) + 2(2a+b-4) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 5a + 3b = 9 \\ 3a + 3b = 5 \end{cases}$$

$$a = 2$$
$$b = -\frac{1}{3} \Rightarrow p(x) = 2x - \frac{1}{3}$$

Metoda ważona

Wagi: $w + 1 = 1; w_2 = 2; w_3 = 3$

$$B(a,b) = \sum_{i=1}^{3} w_i(a - x_i + b - f_i)^2 = (a \cdot 0 + b - 0)^2 + 2(a \cdot 1 + b - 1)^2 + 3(a \cdot 2 + b - 4)^2$$

Różniczkujemy po zmiennych a i b:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial a}B(a,b) = 2 \cdot 2(a+b-1) + 2 \cdot 2 \cdot 3(2a+b-4) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial b}B(a,b) = 1 \cdot 2 \cdot b + 2 \cdot 2(a+b-1) + 2 \cdot 3(2a+b-4) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 14a + 8b = 26 \\ 8a + 6b = 14 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2,2 \\ b = -0,6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p(x) = 2.2x - 0,6 \end{cases}$$

Zadanie

i	1	2	3	4
x_i	1	3	4	6
f_i	1	2	4	4

Metoda zwykła

i	1	2	3	4
x_i	1	3	4	6
y_i	1	2	4	4

$$B(a,b)=\sum_{i=1}^{4}(ax_i+b-y_i)^2=(a+b-1)^2+(3a+b-2)^2+(4a+b-4)^2+(6a+b-4)^2$$

$$\begin{cases}\frac{\partial B}{\partial a}=2(a+b-1)+6(3a+b-2)+8(4a+b-4)+12(6a+b-4)=0\\ \frac{\partial B}{\partial b}=2(a+b-1)+2(3a+b-2)+2(4a+b-4)+2(6a+b-4)=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}2a+2b-2+18a+6b-12+32a+8b-32+72a+12b-48=0\\ 2a+2b-2+6a+2b-4+8a-2b-8+12a-2b-8=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}124a+28b=94 \quad |:2\\ 28a+8b=22 \quad |:2\end{cases}\qquad\begin{cases}62a+14b=47\\ 14a+4b=11\end{cases}$$

$$4b=11-14a$$
$$b=\frac{11-14a}{4}$$

$$62a+\cancel{14}\left(\frac{11-14a}{\cancel{4}}\right)=47$$
$$62a+\frac{77}{2}-\frac{98}{2}a=47$$
$$62a+\frac{77}{2}-49a=47$$
$$13a=\frac{94-77}{2}$$
$$13a=\frac{17}{2}\quad\Big|\cdot\frac{1}{13}$$

$$b=\frac{11}{4}-\frac{\cancel{14}^{7}}{2}\cdot\frac{17}{\cancel{26}13}$$
$$b=\frac{11}{4}-\frac{119}{52}$$
$$b=\frac{13\cdot 11-119}{52}=\frac{24}{54}$$
$$b=\frac{6}{13}$$

i	1	2	3
x_i	0	1	2
f_i	0	1	4

Funkcja aproksymująca $p(x)=ax^2+bx+c$

$$B(a,b,c)=\sum_{i=1}^{3}(ax_i^2+bx_i+c-f_i)^2=(c-0)^2+(a+b+c-1)^2+(4a+2b+c-4)^2$$

$$\begin{cases}\frac{\partial B}{\partial a}=(a+b+c-1)+4(4a+2b+c-4)=0\\ \frac{\partial B}{\partial b}=(a+b+c-1)+2(4a+2b+c-4)=0\\ \frac{\partial B}{\partial c}=c+(a+b+c-1)+(4a+2b+c-4)=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}17a+9b+5c=17\\ 9a+5b+3c=9\\ 5a+3b+3c=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ b=0\\ c-0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p(x)=x^2\end{cases}$$

Jest to przypadek szczególny: budowanie aproksymacji kwadratowej na trzech węzłach daje w rezultacie interpolację: otrzymaliśmy wyjściową parabolę. Meotody ważonej nie ma sensu stosować.