Całkowanie numeryczne

Metody obliczania całek(całki występują w trakcie obliczania pracy energii, momentów zgienających)

1. Metodę Newtona-Cotesa
2. Metodę Gaussa
3. Iteracyjny algorytm Romberga
4. Metodę Monte Carlo

Całkę doprowadzamy do postaci standartowej
Wzory:

$$\gamma = \int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^1 F(\xi)d\xi$$
$$F(\xi) = \frac{b-a}{2} f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\xi\right)$$

(Zaletą zastosowania standaryzacji jest uniezależnienie sposobu obliczania całki od długości przedziału zmienności zmiennej niezależnej)

Następnie przedział $<$-1,1$>$ dzielimy na n równych podprzedziałów i wyznaczamy w punktach podziału wartość funkcji F(ξ). Następnie funkcję podcałkową zastępujemy wielomianem stopnia n-1. Wielomian ten całkujemy algebraicznie lub stosujemy równanie

$$\gamma = \int_{-1}^1 F(\xi)d\xi = \sum_{i=1}^n H_i F(\xi_i)$$

gdzie współczynniki H_i należy dobrać w zależności od stopnia wielomiana.

Najprostszy(ale i najmniej dokładny) wariant całkowania otrzymuje się, przyjmując n=2(tzw. metoda trapezów). Wtedy

$$\gamma = F(-1) + F(1)$$

gdy przyjęć n=3, otrzymujemy metodę Simpsona z regułą jednej trzeciej

$$\gamma = \frac{1}{3}\left[F(-1) + 4F(0) + F(1)\right]$$

dla n=4 mamy metodę Simpsona z regułą trzech ósmych

$$\gamma = \frac{1}{8}\left[F(-1) + 3F(-\frac{1}{3}) + 3F(\frac{1}{3}) + F(1)\right]$$

Metoda trapezów - ogólny wzór trapezów

$$E \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot M \text{gdzie M} = max_{x\in<a,b>}|f''(x)|$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{y_{i-1}+y_i}{2}h = \frac{1}{2}h(y_0+y_1)+$$

$$+\frac{1}{2}h(y_1+y_2)+\cdots+\frac{1}{2}h(y_{n-1}+y_1)=$$

$$=\frac{1}{2}h(y_0+2y_1+2y_2+\cdots+2y_{n-1}+y_1)=$$

$$=\frac{1}{2}h(y_0+y_n+2\sum_{i=1}^{n-1}y_i)$$

Zadanie 1

Obliczyć wartość całki $\int_0^1 \sqrt{1+x}$ stosując wzór ogólny trapezów z krokiem n=$\frac{1}{3}$.
Wynik analityczny to 1,21895
$h=\frac{b-a}{n} \rightarrow n=\frac{b-a}{n}=\frac{1-0}{\frac{1}{3}}=3$ - liczba podprzedziałów, a liczba węzłów jest równa (n+1) czyli 4
Węzły mają wartości:

$$x_0 = 0 - \text{lewy brzeg}$$
$$x_1 = x_0 + h = \frac{1}{3}$$
$$x_2 = x_1 + h = \frac{2}{3}$$
$$x_3 = x_2 + h = 1 - \text{lewy brzeg}$$

Wzór na kwadraturę to

$$y_0 = \sqrt{1+x_0} = \sqrt{1+0} = 1$$

$$\gamma_3 = \sum_{i=1}^{3} \frac{y_{i-1}+y_i}{2}h = \frac{1}{2}h\left(y_0+y_n+2\sum_{i=1}^{n-1}y_i\right)=$$
$$=\frac{1}{2}h\left(y_0+y_3+2\sum_{i=1}^{2}y_i\right)$$
$$=\frac{1}{2}h\left(1+\sqrt{1+1}+2\left(\sqrt{1+\frac{1}{3}}+\sqrt{1+\frac{2}{3}}\right)\right)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\left[1+\sqrt{2}+2\left(\sqrt{\frac{4}{3}}+\sqrt{\frac{5}{3}}\right)\right]=$$
$$=1,2176$$

Wartość błędu

$$E=\left|\frac{\gamma_3-\gamma}{\gamma}\right|\cdot 100\% = \left|\frac{1,2176-1,21895}{1,21895}\right|\cdot 100\% = 11,08\%$$

Zadanie 2

Ogólny wzór Simpsona

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{3}h\sum_{i=1}^{n-2}(y_{2i-2}+4y_{2i-1}+y_{2i}) = \frac{h}{3}\left[y_0+4(y_1+y_3+\cdots+y_{n-1})+2(y_2+y_4+\cdots+y_{n-2})+y_n\right]$$

$$\int_0^1 \sqrt{1+x}dx$$

Wartość kroku musi ulec zmianie bo przy h $= \frac{1}{3}$ „n“ nie jest liczbą parzystą.
Weźmy h=$\frac{1}{4}$, wtedy n=4. Węzły wyroszą 0, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, 1.
Wzór Simpsona

$$\begin{aligned}
S_4 &= \frac{1}{3}h\left(y_0 + 4y_1 + y_2 + y_2 + 4y_3 + y_4\right) = \\
&= \frac{1}{3}h\left[y_0 + 4(y_1 + y_3) + 2y_2 + y_4\right] = \\
&= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\left[f(0) + 4\left[f(\frac{1}{4}) + f(\frac{3}{4})\right] + 2f(\frac{1}{2}) + f(1)\right] = \\
&= \frac{1}{12}\left[\sqrt{1} + 4\left(\sqrt{\frac{5}{4}} + \sqrt{\frac{7}{4}}\right) + 2\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{2}\right] = 1,21895
\end{aligned}$$

Zadanie 3
Oblicz wartość całki $\int_1^7 e^x dx$ stosując wzór trapezów.
Użyj 6-ciu przedziałów h=$\frac{b-a}{n} = \frac{7-1}{6} = 1$
$e^7 - e^1 = 1093,914877$