Sktipt der Analysis für Informatiker WS12/13 UPB

Prof. Dr. Eike Lau

19.10.2012 -

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1.

Mengen

1.1. Definition

1)
Eine Menge ist eine Ansammlung verschiedener Objekte.

2)
Die Objekte einer Menge heißen <u>Elemente</u>.

Notation:
$a \in M$ heißt: a ist Element der Menge M
$a \notin M$ heißt: a ist kein Element der Menge M **3)**

Sei M eine Menge. Eine Menge U heißt Teilmenge von M, wenn jedes Element von U auch ein Element von M ist.

Notation:
$U \subseteq M$ heißt: U ist Teilmenge der Menge M
$U \nsubseteq M$ heißt: U ist keine Teilmenge der Menge M

1.2. Beispiele

1)
Sei M die Menge aller Studierenden in L1,
W die Menge aller weiblichen Studierenden in L1,
F die Menge aller Frauen.

Dann gilt: $W \subseteq M, W \subseteq F, M \nsubseteq F, F \nsubseteq M$.

2)
Die Menge der natürlichen Zahlen: $+N = \{1, 2, 3, ..\}$

G sei Menge der geraden natürlichen Zahlen.
$G := \{n \in \mathbb{N} |\ n \text{ gerade } \}$

$G := \{2m|m \in \mathbb{N}\}$
$N := \{2, 4, 6, 8, ...\}$

Es gilt $G \subseteq \mathbb{N}$, $\mathbb{N} \not\subseteq G$.

3)
Die Menge der ganzen Zahlen:
$\mathbb{Z} = \{0, -1, 1, -2, 2, ...\}$

4)
Menge der rationalen Zahlen:
$\mathbb{Q} = \frac{a}{b}|a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$

5)
Die Menge ohne Elemente heißt leere Menge.
Symbol: $\emptyset = \{\}$

Bemerkung

Für jede Menge M gilt: $\emptyset \subseteq M$
$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$

1.3. Definition

Sei M eine Menge, $U, V \subseteq M$ Teilmengen.

1)
Die Vereinigung von U und V ist $U \cup V := \{x \in M|x \in U \text{ oder } x \in V\}$

2)
Der Durchschnitt von U und V ist $U \cap V := \{x \in M|x \in U \text{ oder } x \in V\}$

3)
Die Differenzmenge von U und V ist $U/V := \{x \in U|x \notin V\}$

4)
Das Komplement von U ist $U^c = M/U = \{x \in M|x \notin U\}$

Beispiel
Sei $M = \mathbb{N}$.
$\{1, 3\} \cup \{3, 5\} = \{1, 3, 5\}$
$\{1, 3\} \cap \{3, 5\} = \{3\}$
$\{1, 3\} \cap \{2, 4, 7\} = \emptyset$,also sind $\{1, 3\}$ und $\{2, 4, 7\}$ disjunkt.

$\{1,2,3\}/\{3,4,5\} = \{1,2\}$
$\{1,3,5\}^c = \{2,4,6,7,8,...\}$

1.4. de Morgansche Regeln

M Menge, $U, V \subseteq M$ Teilmengen.

1)$(U \cup V)^c = U^c \cap V^c$
2)$(U \cap V)^c = U^c \cup V^c$

1.4.1. Beweis

1)
Sei $x \in M$. Es gilt:
$x \in (U \cup V)^c \Leftrightarrow x \notin U \cup V \Leftrightarrow x \notin U$ und $x \notin V$
$\Leftrightarrow x \in U^c$ und $x \in V^c \Leftrightarrow x \in U^c \cap V^c$

$\square$

2)
Übungsaufgabe

1.5. Prinzip der vollständigen Induktion

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei eine Aussage $A(n)$ gegeben.
Ziel: Beweisen, dass $A(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ wahr ist.
Dafür reicht es zu zeigen:

1)
Induktionsanfang: $A(1)$ ist wahr.

2)
Induktionsschritt: Wenn für ein $n \in \mathbb{N}$ $A(n)$ wahr ist, dann ist auch $A(n+1)$ wahr.

1.6. Satz / Beispiel

Für jede natürliche Zahl n gilt: $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Probe:

n	1	2	3	4
$1+2+...+n$	1	3	6	10
$\frac{n(n+1)}{2}$	1	3	6	10

<u>Beweis des Satzes</u> (mit Induktion)

Abkürzung: $S(n) = 1 + 2 + ... + n$
Aussage: $A(n) : S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$

1) IA: $n = 1$ $S(1) = 1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$
2) IS: $n \to n+1$

Annahme: $A(n)$ gilt, $S(n) = \frac{n(n-1)}{2}$
Zu zeigen: $A(n+1)$ gilt, $S(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

$$S(n+1) = S(n) + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

Dies beendet den Beweis. $\square$

Zur Vereinfachung der Notation: Seien a_1, a_2, a_3,...,a_n Zahlen $n \in \mathbb{N}$
Setze $\sum\limits_{k=1}^{n} := a_1 + a_2 + ... + a_n$

Allgemeiner: Sei $l, m \in \mathbb{N}, l \leq m \leq n$
$\Rightarrow \sum\limits_{k=l}^{m} a_k := a_l + a_{l+1} + ... + a_m$

Aussage von Satz 1.6:
$\sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

1.7. Kombinatorik

1.7.1. Definition

Seien A,B Mengen. Das kartesische Produkt von A und B ist definiert als $A \times B := \{(a,b) | a \in A, b \in B\}$
Die Elemente von $A \times B$ heißen <u>geordnete Paare</u>.

Beispiel: $\{1,7\} \times \{2,3\} = \{(1,2),(1,3),(7,2),(7,3)\}$

Allgemeiner: Gegeben seien Mengen $A_1, ..., A_k$ mit $k \in \mathbb{N}$. Das kartesische Produkt

von $A_1, ..., A_k$ ist $A_1 \times ... \times A_k = \{(a_1, ..., a_k) | a_i \in A_i$ für $i = 1, ..., k\}$
Elemente von $A_1 \times ... \times A_k$ heißen k-Tupel.
Falls $A_1 = A_2 = ... = A_k = A$, schreibe auch $\underbrace{A \times ... \times A}_{k-Mal} = A^k$

1.8. Definition

Eine Menge A ist endlihc, wenn A nur endlich viele Elemente hat. Dann bezeichnet $\#A = |A|$ die Anzahl der Elemente von A.
Wenn A nicht endlich ist, dann schreiben wir $\#A = \infty$.

Beispiele: $\#\emptyset = 0$, $\#\mathbb{N} = \infty$, $\#\{1, 3, 5, 1\} = 3$

1.9. Bemerkung

1)
Sei A Menge, $U, V \subseteq A$ disjunkte Teilmengen.
Dann: $\#(U \cup V) = \#U + \#V$

2)
Seien $A_1, ..., A_k$ endliche Mengen, $k \in \mathbb{N}$.
Dann: $\#(A_1 \times A_2 \times ... \times A_k = \#A_1 \cdot \#A_2 \cdot ... \cdot \#A_k$

1.10. Definition

1)
Für $n \in \mathbb{N}$ setze $n! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n = \prod_{k=1}^{n} k$ $\leftarrow$ Produkt
Setze $0! = 1$

2)
Für $k, n \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leq k \leq n$ sei $\binom{n}{k := \frac{n!}{k!(n-k)!}}$ $\leftarrow$ Binomialkoeffizient

– TABELLE –

Beispiel: $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$

Bemerkung: $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$

1.11. Lemma

Für $0 \leq k \leq n$ gilt: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

Beweis
$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}$
$= \frac{k(n-k)!+(n-k)(n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$

$\square$

1.12. Geometrische Anordnung: Pascalsches Dreieck

$\binom{0}{0}$
$\binom{1}{0}\binom{1}{1}$
$\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{2}$
Folge $\binom{n}{k} \in \mathbb{N} \forall 0 \leq k \leq n$

1.13. Satz

Sei A unendliche Menge
A = n
Sei k $\in \mathbb{Z}$ mit $0 \leq k \leq n$
$P_k(A) := \{U \subseteq A | \#U = k\}$
Menge aller k-elementigen Teilmengen von A, dann gilt $\#P_k(A) = \binom{n}{k}$

1.13.1. Beweis

Vorüberlegung: Sei k=0 oder k=n $P_0(A) = \{\emptyset\} P_n(A) = A$
$\#P_0(A) = 1 = \binom{n}{0} \#P_n(A) = 1 = \binom{n}{n} \surd$

Jetzt Induktionsbeweis nach n. I.A.: n=0 Dann k=0 $\surd$
I.S.: n $\rightarrow$ n+1 Sei #A= n+1
$0 \leq k \leq n+1$ Falls k=0 oder k=n+1: fertig
Sei also $0 < k < n+1$
Wähle $a \in A$ Sei B=A $\{a\}$$
Dann A = B $\cup \{a\}, \#B = n$
Man kann die Wahl einer k-elementigen Teilmenge U von A so strukturieren.
1. Entscheiden ob a$\in$U oder a$\notin$ U
2.a Wenn a$\notin$ U: Wähle k Elemente aus B.
2.b Wenn a$\in$ U: Wähle k-1 Elemente aus B.
Daraus folgt:
$\#P_k(A) = \#P_k(B) + P_{k-1}(B) \stackrel{I.V.}{=} \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \stackrel{1.11}{=} \binom{n+1}{k} \square$

1.14. Binomische Formel

Seien a,b Zahlen, n $\in \mathbb{N}$ Dann $(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + binomn1a^(n-1)b + binomn2a^(n-2)b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^(n-1) + \binom{n}{n}b^n \underline{z.B.:}(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

1.14.1. Beweis:

Schreibe $(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)\cdots(a+b)}_{nFaktoren}$
Ausmultiplizieren:
Erhalte Terme der Form $a^(n-k)b^k$ = Anzahl der Möglichkeiten aus n Faktoren k mal b zu wählen.
Das ist $\binom{n}{k}_{Satz1.13}$
Folgerung: Setze a=b=1 $a^(n-k)b^k = 1$
$(a+b)^n = 2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$

1.15. Definition

Sei A endliche Menge
Eine Anordnung von A ist ein n-Tupel$(a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n)$ mit $a_i \in A\forall$ i und j $a_i = a_j$ wenn $i \neq j$
Beispiel Anordnung von $\{1,2,3\}$: (123)(132)(213)(231)(312)(321)

1.16. Satz

Sei A endliche, nicht leere Menge , $\#A = n$
Dann ist die Anzahl der Anordnungen von A = !n

1.16.1. Beweis

Induktion nach n
I.A.: n = 1 klar
I.S.:$n \to n+1 Sei \#A = n+1$
Wahl einer Anordnung von A kann man so unterteilen:

1 Wähle 1 Element $a_1 \in A(n+1)$Möglichkeiten

2 Wähle Anordnung von $A\ \{a_1\}$

$\#(A\ \{a_1\}) = n \Rightarrow$n! Möglichkeiten bei 2.
Insgesamt (n+1)n! =(n+1)! Möglichkeiten □

1.17. Bemerkung - Zusammenhang zwischen anordnung und Teilmengen

Sei A endliche Menge mit $\#A = n0 \leq k \leq n$
Sei $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ Anordnung von A
$\rightarrow$ Teilmenge U:=$\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$. Dann
$U \subseteq A, \#U = kU \in P_k(A)$
Jedes U $\in P_k(A)$ entsteht so, aber mehrfach:
$\overset{Anordnungen\ \ von\ \ U}{k}\quad \overset{Anordnungen\ \ von\ \ A\ \ U}{(n-k!)}\quad mal$
n! $\#Anordnungen\ \ von\ \ A = P_k(A.k!(n-k!) \Rightarrow \#P_k(A) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
$\Rightarrow \#P_k(A) = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$

Kapitel 2.

Die reelen Zahlen

Was sind reelle Zahlen? Präzise Konstruktion ist umfangreich.
Axiomatische Zerlegung
Beschreibung der reelen Zahlen durch ihre Eigenschaften(Axiome).

1 Grundrechenarten $\rightarrow$ Körper

2 Ungleichungen $\rightarrow$ Angeordneter Körper

3 Lückenlosigkeit

2.1. Körper - Definition

Ein Körper ist eine Menge K mit 2 Rechenoperationen: Addition(+) und Multiplikation(*).
So, dass folgende 9 Eigenschaften erfüllt sind:
<u>Addition:</u>

1 (a+b)+c = a+(b+c) Assoziativ $\forall a, b, c \in K$

2 a+b = b+a Kommutativität

3 Es gibt ein Element 0 $\in$ K so, dass 0+a=a+0=a $\forall a$ $\in$K Nullelement

4 $\forall a \in$ K $\exists! b \in$K mit a+b=0 Additives Inverses

Bemerkung 1 0 $\in$K ist eindeutig.

Beweis zu 1 $\acute{0}$ $\in$K mit $\acute{0}$+a = a $\forall a$ $\in$K, dann
$0 = \acute{0} + 0 = 0 + \acute{0} = \acute{0}\square$

Bemerkung 2 Das b in 4. ist eindeutig.

Notation b = -a (Negatives von a)

Beweis zu 2 Sei $\acute{b} + a = 0.b = b + 0 = b + (a + \acute{b}) = (b + a) + \acute{b} = 0 + \acute{b} = \acute{b}\square$

Multiplikation:

5 a*(b*c) = (a*b)*c $\forall a, b, c$ ∈K außerdem sei a*b=ab

6 ab = ba $\forall a, b$ ∈K

7 $\exists!1 \in$ K mit 1≠ 0 so, dass 1a=a $\forall a$ ∈K

8 $\forall a \in$ K $a \neq 0 \exists! b$ ∈K mit ab=1

Bemerkung 1 ist eindeutig. b in 8 ist eindeutig.

Bezeichnung b aus 8 b=$a^(- 1)$

Beweis analog □

Distributivgesetz

9 a*(b+c)= ab+ac $\forall a, b, c$ ∈K

Weitere Bezeichnung: a-b:=a+(-b) $\frac{a}{b}$:= a$b^(- 1)$ für b≠0
Die üblichen Bedeutungen folgen aus den Axiomen 1-9
z.B. -(-a)=a a(b-c)= ab-ac, a(-b)=-(ab)

2.2. Beispiel

$\mathbb{Q}$ ist ein Körper
$\mathbb{Z}$ ist kein Körper, da 8 nicht gegeben ist.

2.3. Beispiel

$$\mathbb{F}_2 = \{0,1\} \quad \begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} * & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

2.3.1. Bemerkung

Sei K endlicher Körper
Dann gilt #K = p^r wobei p Primzahl, r ∈ $\mathbb{N}$
∀ q = p^r ∈!Körper K mit # K = q

2.3.2. Notation

a∈ K, n ∈ $\mathbb{N}$ Setzte $a^n := \underbrace{a * a \cdots * a}_{n-Faktoren}$
$a^0 := 1$
$a^{(} - n) := (a^{(} - 1))^n$
$\Rightarrow a^n$ definiert wenn a $\neq$0 , n ∈ $\mathbb{N}$ Regeln der Potenzrechnung
$a^{(}n + m) = a^n * a^m$, $a^{(}n * m) = (a^n)^m$ für a ≠ 0 n,m ∈ $\mathbb{Z}$
Beweis: Übung

2.4. Angeordnete Körper - Definition

Ein angeordnerter Körper ist ein Körper K, für dessen Elemente eine „kleiner Beziehung“ ¡ definiert ist so, dass folgende Eigenschaften erfüllt sind.

1 $\forall a, b \in$ K gilt genau eine der drei Relationen a¡b, a=b , b¡a

2 Für a,b,c∈K gilt, wenn a¡b ∧ b¡c ⇒ a¡c (Transitivität)

3 Wenn a,b,c ∈ K gilt: Wenn a¡b ⇒ (a+c)¡(b+c)

4 Für a,b,c ∈ K gilt: Wenn a¡b und 0¡c, dann ac¡bc

2.4.1. Beispiel

a¿b heißt b¡a
a ≤ b heißt a¡b ∨ a=b
a ∈ K heißt positiv, wenn a ¿ 0
a ∈ K heipt negativ, wenn a ¡ 0

2.5. Bemerkung

1. Wenn a¡0 dann -a¿0 2. $\forall a$ ∈K mit $a \neq 0$ ist $a^2 \geq 0$ 3.1¿0 denn 1=1^2 ⇒ □

2.5.1. Beweis zu 1

a¡0$\overset{\Rightarrow}{3}$ a+(-a)¡0+(-a)⇒ 0¡-a □

2.5.2. Beweis zu 2

2 Möglichkeiten a.) a¿0 oder b.) a¿0
a.) a¿0 ⇒a*a¿0*a ⇒ a^2¿0
b.) Wenn a¡0 dann -a¿0 $a^2 = (-a)^2 > 0$□

2.6. Bemerkung

Sei K ein angeordneter Körper
0¡1⇒0+1¡1+1⇒1+1¡1+1+1 usw.
Für n∈ ℕ setze n:= $\underbrace{1+1+\cdots+1}_{nSummanden} \in$ K
Dann 0¡1¡2¡3¡$\cdots$ in K

2.6.1. Folge

Verschiedene natürliche Zahlen bleiben in K verschieden → Fasse ℕ als Teilmenge von K auf.
Dann auch $\mathbb{Z} = \{a-b|a,b \in \mathbb{N}\}$ ⊆K
Dann auch $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b}|a,b \in \mathbb{N} b \neq 0\}$ ⊆K
Insbesondere ist K unendlich!
z.B. $\mathbb{F}_2$ hat keine Anordnung wie Definition 2.4

2.7. Definition

Sei K ein angeordneter Körper, a∈K. Der Absolutbetrag von a ist definiert als $|a| : a := \begin{cases} a & \text{wenn } a \geq 0 \\ -a & \text{wenn } a < 0 \end{cases}$

2.8. Satz

Sei K angeordneter Körper a∈K dann gilt:

1 $a = 0 \text{wenn} |a| = 0$

2 $-|a| \leq a \leq |a|$

3 Dreiecksungleichung: $|a-b| \leq |a| + |b|$

4 Untere Dreiecksungleichung: $|a-b| \geq |a| - |b|$

2.8.1. Beweis

1 Klar.

2 Wenn $a \geq 0 : |a| = a \geq 0 \Rightarrow -|a| \leq 0 \leq a = |a|$
Wenn $a < 0$ dann $-|a| = 0 < 0 < |a|$

3 Es gilt $-|a| \leq a \leq |a|$, $-|b| \leq b \leq |b|$
Wenn $a+b>0$ dann $|a+b| = a+b \leq |a|+b \leq |a|+|b|$
Wenn $a+b<0$ dann $|a+b|? - (a+b) = (-a)+(-b) \leq |a|+|b|$

4 $(a-b)+b = a \Rightarrow |a| = |(a-b)+b| \leq |a-b|+|b| \Rightarrow |a|-|b| \leq |a-b|_\Box$

2.9. Satz - Bernoullische Ungleichung

Sei K angeordneter Körper, $a \in$ K, $a > -1$ und n$\in \mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$ Dann gilt $(1+a)^n \geq 1+na*$

2.9.1. Beweis

Induktion nach n
Anfang n=0 $(1+a)^0 = 1 = 1+0*a\surd$
I.V. *gelte
I.S. Schritt $n \to n+1$ Annahme $(1+a).+1 = (1+a)(1+a)^n \geq (1+a)(1+na) = 1+(n+1)a+na^2 \geq 1+(n+1)a$ weil $a^2 \geq 0 \Rightarrow na^2 \geq 0_\Box$

2.10. Definition

Sei K angeordneter Körper M⊆K eine Teilmenge a∈K

1 M≤a heißt x≤a∀x∈M Analog M≥a etc.

2 a heißt obere Schranke von M, wenn M≤a

3 M heißt nach oben beschränkt, wenn M eine obere Schranke hat.
Analog nach unten beschränkt.
M heißt beschränkt, wenn M nach oben ∧ unten berschränkt ist.

4 a heißt Maximum von M wenn M≤a und a∈M
Minimum analog.

Notation: a=max(M) bzw. a=min(M)

2.10.1. Bemerkung

Wenn M ein Maximum hat, ist es eindeutig.

2.10.2. Beweis

Sei a,b∈M, M≤a , M≤b dann
b≤a und a≤b ⇒ a=b □

2.10.3. Beispiel

K=$\mathbb{Q}$

1 M=$\mathbb{N}$ Sei a$\in$ $\mathbb{Q}$a$\leq$ $\mathbb{N}$ a$\leq$ n $\forall$n$\in$ $\mathbb{N}$ $\mathbb{N}$ ist nach unten beschränkt 1=min($\mathbb{N}$).
$\mathbb{N}$ ist nicht nach oben beschränkt.

2 M= $\{\frac{-1}{n}|n \in \mathbb{N}\}0 \notin$M
-1=min(M)$\Rightarrow$ M nach unten beschränkt
M<0 $\Rightarrow$ M ist nach oben beschränkt hat aber kein Maximum

3 M= $\{\frac{-1}{n}|n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ min(M)= $-1|max(M) = 0$

4 M= $\emptyset$ hat kein Maximum und kein Minimum jedes a$\in$ $\mathbb{Q}$ erfüllt a$\leq$ M und M$\leq$a

2.10.4. Beweis zu 2

Sei a$\in$M, dann $a = \frac{-1}{n}$, n $\in \mathbb{N}$ $\frac{-1}{n1}$ $\in$M
$n + 1 > n \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{-1}{n+1} > \frac{-1}{n}$ $\Rightarrow$M$\not\subseteq$ $\frac{-1}{n}$ a keine obere Schranke$\square$

2.11. Satz

Sei K angeordneter Körper

1 Wenn M$\subset$K endlich und nicht leer, dann hat M ein Maximum und Minimum

2 (Wohlordnungsprinzip) Jede nichtleere Teilmenge M$\subset$ $\mathbb{N}$ hat ein Minimum

2.11.1. Beweis

zu 1 Klar.

zu 2 M ist nicht leer.
Wähle n$\in$M $\{1, 2, \cdots, n\}\cap$M endlich und nicht leer, dann min($\{1, 2, \cdots, n\}\cap$M)=min(M)$\square$

2.12. Vollständigkeit - Definition

Sei K angeordneter Körper, M$\subseteq$K a$\in$K aheißt <u>kleinste obere Schranke oder Supremum</u> von M wenn:

1 M$\leq$a und

2 kein b$\in$K mit b<a M$\leq$b erfüllt

a heißt <u>größte untere Schranke oder Infimum</u> von M wenn:

1 a$\leq$a und

2 Kein b∈K mit a<b b≤M erfüllt.

Notation a=sup(M) bzw. a=inf(M)

2.12.1. Bemerkung

Wenn a=max(M) dann a=sup(M)

2.12.2. Beweis

Sei a= max(M)⇒M≤a
Seib<a a∈M, a≰b⇒ M ≰ b ⇒ a=sup(M)□

2.12.3. Bemerkung

Wenn ein Supremum existiert, dann ist es eindeutig

2.12.4. Beweis

Angenommen a,b sind Suprema von M⇒M≤a , M≤b⇒a≤b , b≤a ⇒ a=b

2.12.5. Beispiel

$sup(\{\frac{-1}{n}|n \in \mathbb{N}\}) = 0$

Anhang A.

Schluss

`l2tabu`, die `FAQ der Newsgroup de.text.tex` und natürlich der `scrguide` immer sehr hilfreich.