МИНОБРНАУКИ РОССИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет «МЭИ»

Отчет по курсовой работе

по дисциплине «Численные методы»
по теме:
решение краевой задачи в двумерной области методом
конечных элементов

Работу выполнили
студенты группы А-13б-20
Бегунов Никита
Малышкин Павел
Научный руководитель:
Крымов Никита Евгеньевич

Москва 2022

Задание

Рассматривается задачи Дирихле в области

$$-(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) = f, (x, y) \in G \tag{1}$$

$$u = g, (x, y) \in \partial G \tag{2}$$

Уравнение (1) описывает установившееся в какой-то бесконечно далекий момент времени, при неизменности внешней среды и внутренних физико-химических процессов, распределение температуры u в пластине G. Здесь f - плотность внутренних источников тепла, g - температура внешней среды. Область представляет собой квадрат $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$. Уравнение (2) описывает температуру пластины на границе. Необходимо решить задачу методом конечных элементов.

Содержание

1 Введение

Необходимо разработать алгоритм для нахождения методом конечных элементов распределения температуры u в пластине G в квадрате $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$, описываемой задачей Дирихле, написать код на языке программирования $Python$, а также разработать тестовые примеры и проверить на них работоспособность полученной программы.

2 Метод конечных элементов

2.1 Вывод расчетных формул МКЭ для задачи Дирихле

Рассмотрим исходную задачу Дирихле для области:

$$-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = f$$

Раскроем скобки и домножим обе части на некоторую функцию φ, равную нулю на границе:

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\varphi - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\varphi = f\varphi, \text{где } \varphi(x,y) = 0, (x,y) \in \partial G$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{h}\begin{cases} 1 - (\frac{x}{h} - i); x_i \leq x \leq x_{i+1}, y_j \leq y \leq y_j + (x - x_i); (I) \\ 1 - (\frac{y}{h} - j); x_i \leq x \leq x_{i+1}, y_j + (x - x_i) \leq y \leq y_{j+1}; (II) \\ 1 + (\frac{x}{h} - i) - (\frac{y}{h} - j); x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_j \leq y \leq y_j + (x - x_{i-1}); (III) \\ 1 + (\frac{x}{h} - i); x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} + (x - x_{i-1}) \leq y \leq y_j; (IV) \\ 1 + (\frac{y}{h} - j); x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_{j-1} + (x - x_{i-1}); (V) \\ 1 - (\frac{x}{h} - i) + (\frac{y}{h} - j); x_i \leq x \leq x_{i+1}, y_{j-1} + (x - x_i) \leq y \leq y_j; (VI) \end{cases}$$

И добавим интегралы по области G в обе части равенства:

$$-\int\limits_G \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\varphi dxdy - \int\limits_G \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\varphi dxdy = \int\limits_G f\varphi dxdy$$

Проинтегрируем по частям интегралы в левой части (так как функция $\varphi = 0$ на границе):

$$\int\limits_G \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\varphi dxdy = \int\limits_G \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x}dxdy$$

$$\int\limits_G \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\varphi dxdy = \int\limits_G \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y}dxdy$$

Подставим полученные интегралы:

$$\int\limits_G \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x}dxdy + \int\limits_G \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y}dxdy = \int\limits_G f\varphi dxdy$$

Дискретизируем функцию φ как $\varphi_{i,j}$, $1 \le i \le N$, $1 \le j \le N$, каждая из $\varphi_{i,j} = 0$ на границе. Будем искать решение задачи в виде

$$\overline{u} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \alpha_{i,j} \varphi_{i,j}(x, y)$$

Используя $\overline{u}$ вычислим значения частных производных для u:

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \alpha_{i,j} \frac{\partial \varphi_{i,j}}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \alpha_{i,j} \frac{\partial \varphi_{i,j}}{\partial y}$$

И подставим полученное в равенство:

$$\int\limits_G \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \alpha_{i,j} \frac{\partial \varphi_{i,j}}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dxdy + \int\limits_G \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \alpha_{i,j} \frac{\partial \varphi_{i,j}}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} dxdy = \int\limits_G f \varphi dxdy$$

Поменяем местами знаки интегрирования и суммы:

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \int\limits_G \alpha_{i,j} \frac{\partial \varphi_{i,j}}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dxdy + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \int\limits_G \alpha_{i,j} \frac{\partial \varphi_{i,j}}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} dxdy = \int\limits_G f \varphi dxdy$$

Теперь вместо φ будем по очереди подставлять $\varphi_{k,l}, 1 \le k \le N$, $1 \le l \le N$ и вынесем $\alpha_{i,j}$ за знак интеграла:

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \alpha_{i,j} \int\limits_G \frac{\partial \varphi_{i,j}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{k,l}}{\partial x} dxdy + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \alpha_{i,j} \int\limits_G \frac{\partial \varphi_{i,j}}{\partial y} \frac{\partial \varphi_{k,l}}{\partial y} dxdy = \int\limits_G f \varphi_{k,l} dxdy$$

Вынесем знаки суммы и $\alpha_{i,j}$ за скобки:

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \alpha_{i,j} \Big(\int\limits_G \frac{\partial \varphi_{i,j}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{k,l}}{\partial x} dxdy + \int\limits_G \frac{\partial \varphi_{i,j}}{\partial y} \frac{\partial \varphi_{k,l}}{\partial y} dxdy \Big) = \int\limits_G f \varphi_{k,l} dxdy$$

В случае ненулевой границы:

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \alpha_{i,j} \Big(\int\limits_G \frac{\partial \varphi_{i,j}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{k,l}}{\partial x} dxdy + \int\limits_G \frac{\partial \varphi_{i,j}}{\partial y} \frac{\partial \varphi_{k,l}}{\partial y} dxdy \Big) =$$

$$= \int\limits_G f \varphi_{k,l} dxdy - g_{i,j} \Big(\int\limits_G \frac{\partial \varphi_{i,j}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{k,l}}{\partial x} dxdy + \int\limits_G \frac{\partial \varphi_{i,j}}{\partial y} \frac{\partial \varphi_{k,l}}{\partial y} dxdy \Big) \qquad (3)$$

Где $g_{i,j}$ - известное значение функции на границе.

2.2 Вычисление интегралов во всех случаях

Вычислим для функции φ частные производные:

$$\frac{\partial\varphi_{i,j}}{\partial x} = \frac{1}{h}\begin{cases} -\frac{1}{h}; x_i \le x \le x_{i+1}, y_j \le y \le y_j + (x - x_i); (I) \\ 0; x_i \le x \le x_{i+1}, y_j + (x - x_i) \le y \le y_{j+1}; (II) \\ \frac{1}{h}; x_{i-1} \le x \le x_i, y_j \le y \le y_j + (x - x_{i-1}); (III) \\ \frac{1}{h}; x_{i-1} \le x \le x_i, y_{j-1} + (x - x_{i-1}) \le y \le y_j; (IV) \\ 0; x_{i-1} \le x \le x_i, y_{j-1} \le y \le y_{j-1} + (x - x_{i-1}); (V) \\ -\frac{1}{h}; x_i \le x \le x_{i+1}, y_{j+1} + (x - x_i) \le y \le y_j; (VI) \end{cases}$$

$$\frac{\partial\varphi_{i,j}}{\partial y} = \frac{1}{h}\begin{cases} 0; x_i \le x \le x_{i+1}, y_j \le y \le y_j + (x - x_i); (I) \\ -\frac{1}{h}; x_i \le x \le x_{i+1}, y_j + (x - x_i) \le y \le y_{j+1}; (II) \\ -\frac{1}{h}; x_{i-1} \le x \le x_i, y_j \le y \le y_j + (x - x_{i-1}); (III) \\ 0; x_{i-1} \le x \le x_i, y_{j-1} + (x - x_{i-1}) \le y \le y_j; (IV) \\ \frac{1}{h}; x_{i-1} \le x \le x_i, y_{j-1} \le y \le y_{j-1} + (x - x_{i-1}); (V) \\ \frac{1}{h}; x_i \le x \le x_{i+1}, y_{j+1} + (x - x_i) \le y \le y_j; (VI) \end{cases}$$

А теперь вычислим сумму интегралов $\int\limits_G \frac{\partial\varphi_{i,j}}{\partial x}\frac{\partial\varphi_{k,l}}{\partial x}dxdy + \int\limits_G \frac{\partial\varphi_{i,j}}{\partial y}\frac{\partial\varphi_{k,l}}{\partial y}dxdy$ при всех взаимных расположениях, то есть при i и j относительно k и l:
1. Совпадают: i = k, j = l

$$\int\limits_G \frac{\partial\varphi_{i,j}}{\partial x}\frac{\partial\varphi_{i,j}}{\partial x}dxdy = \int\limits_G (\frac{\partial\varphi_{i,j}}{\partial x})^2 dxdy = \int\limits_I (\frac{\partial\varphi_{i,j}}{\partial x})^2 dxdy + \int\limits_{II} (\frac{\partial\varphi_{i,j}}{\partial x})^2 dxdy +$$
$$+ ... + \int\limits_{VI} (\frac{\partial\varphi_{i,j}}{\partial x})^2 dxdy = 4\frac{1}{2h^2} = \frac{2}{h^2}$$

$$\int\limits_G \frac{\partial\varphi_{i,j}}{\partial y}\frac{\partial\varphi_{i,j}}{\partial y}dxdy = \int\limits_G (\frac{\partial\varphi_{i,j}}{\partial y})^2 dxdy = \int\limits_I (\frac{\partial\varphi_{i,j}}{\partial y})^2 dxdy + \int\limits_{II} (\frac{\partial\varphi_{i,j}}{\partial y})^2 dxdy +$$
$$+ ... + \int\limits_{VI} (\frac{\partial\varphi_{i,j}}{\partial y})^2 dxdy = 4\frac{1}{2h^2} = \frac{2}{h^2}$$

$$\int\limits_G \frac{\partial\varphi_{i,j}}{\partial x}\frac{\partial\varphi_{i,j}}{\partial x}dxdy + \int\limits_G \frac{\partial\varphi_{i,j}}{\partial y}\frac{\partial\varphi_{i,j}}{\partial y}dxdy = \frac{4}{h^2}$$

2. Смещение вправо на 1: i = k + 1, j = l

$$\int\limits_G \frac{\partial \varphi_{i+1,j}}{\partial x}\frac{\partial \varphi_{i,j}}{\partial x} dxdy = -\frac{1}{h^2}$$

$$\int\limits_G \frac{\partial \varphi_{i+1,j}}{\partial y}\frac{\partial \varphi_{i,j}}{\partial y} dxdy = 0$$

$$\int\limits_G \frac{\partial \varphi_{i+1,j}}{\partial x}\frac{\partial \varphi_{i,j}}{\partial x} dxdy + \int\limits_G \frac{\partial \varphi_{i+1,j}}{\partial y}\frac{\partial \varphi_{i,j}}{\partial y} dxdy = -\frac{1}{h^2}$$

3. Смещение вправо-вверх на 1: i = k + 1; j = l + 1

$$\int\limits_G \frac{\partial \varphi_{i+1,j+1}}{\partial x}\frac{\partial \varphi_{i,j}}{\partial x} dxdy = 0$$

$$\int\limits_G \frac{\partial \varphi_{i+1,j+1}}{\partial y}\frac{\partial \varphi_{i,j}}{\partial y} dxdy = 0$$

$$\int\limits_G \frac{\partial \varphi_{i+1,j+1}}{\partial x}\frac{\partial \varphi_{i,j}}{\partial x} dxdy + \int\limits_G \frac{\partial \varphi_{i+1,j+1}}{\partial y}\frac{\partial \varphi_{i,j}}{\partial y} dxdy = 0$$

4. Смещение вверх на 1: i = k; j = l + 1

$$\int\limits_G \frac{\partial \varphi_{i+1,j+1}}{\partial x}\frac{\partial \varphi_{i,j}}{\partial x} dxdy = 0$$

$$\int\limits_G \frac{\partial \varphi_{i+1,j+1}}{\partial y}\frac{\partial \varphi_{i,j}}{\partial y} dxdy = -\frac{1}{h^2}$$

$$\int\limits_G \frac{\partial \varphi_{i+1,j+1}}{\partial x}\frac{\partial \varphi_{i,j}}{\partial x} dxdy + \int\limits_G \frac{\partial \varphi_{i+1,j+1}}{\partial y}\frac{\partial \varphi_{i,j}}{\partial y} dxdy = -\frac{1}{h^2}$$

5. Смещение влево на 1: i = k - 1; j = l

$$\int\limits_G \frac{\partial \varphi_{i-1,j}}{\partial x}\frac{\partial \varphi_{i,j}}{\partial x} dxdy = -\frac{1}{h^2}$$

$$\int\limits_G \frac{\partial \varphi_{i-1,j}}{\partial y}\frac{\partial \varphi_{i,j}}{\partial y} dxdy = 0$$

$$\int\limits_G \frac{\partial \varphi_{i-1,j}}{\partial x}\frac{\partial \varphi_{i,j}}{\partial x} dxdy + \int\limits_G \frac{\partial \varphi_{i-1,j}}{\partial y}\frac{\partial \varphi_{i,j}}{\partial y} dxdy = -\frac{1}{h^2}$$

6. Смещение влево-вниз на 1: i = k - 1; j = l - 1

$$\int\limits_G \frac{\partial \varphi_{i-1,j-1}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{i,j}}{\partial x} dxdy = 0$$

$$\int\limits_G \frac{\partial \varphi_{i-1,j-1}}{\partial y} \frac{\partial \varphi_{i,j}}{\partial y} dxdy = 0$$

$$\int\limits_G \frac{\partial \varphi_{i-1,j-1}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{i,j}}{\partial x} dxdy + \int\limits_G \frac{\partial \varphi_{i-1,j-1}}{\partial y} \frac{\partial \varphi_{i,j}}{\partial y} dxdy = 0$$

7. Смещение вниз на 1: i = k; j = l - 1

$$\int\limits_G \frac{\partial \varphi_{i,j-1}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{i,j}}{\partial x} dxdy = 0$$

$$\int\limits_G \frac{\partial \varphi_{i,j-1}}{\partial y} \frac{\partial \varphi_{i,j}}{\partial y} dxdy = -\frac{1}{h^2}$$

$$\int\limits_G \frac{\partial \varphi_{i,j-1}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{i,j}}{\partial x} dxdy + \int\limits_G \frac{\partial \varphi_{i,j-1}}{\partial y} \frac{\partial \varphi_{i,j}}{\partial y} dxdy = -\frac{1}{h^2}$$

8. Во всех остальных случаях

$$\int\limits_G \frac{\partial \varphi_{i,j}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{k,l}}{\partial x} dxdy = 0$$

$$\int\limits_G \frac{\partial \varphi_{i,j}}{\partial y} \frac{\partial \varphi_{k,l}}{\partial y} dxdy = 0$$

$$\int\limits_G \frac{\partial \varphi_{i,j}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{k,l}}{\partial x} dxdy + \int\limits_G \frac{\partial \varphi_{i,j}}{\partial y} \frac{\partial \varphi_{k,l}}{\partial y} dxdy = 0$$

Таким образом, решение уравнения (3) сводится к решению СЛАУ $Ax = b$, где матрица A - пятидиагональная, на главное диагонали находится значение $\frac{4}{h^2}$, справа и слева от нее находятся значения $-\frac{1}{h^2}$, а также слева и справа на удалении N находятся значения $-\frac{1}{h^2}$, за исключением тех мест, где k или l доходят до границы. Пример матрицы A при шаге h = 0.25:

$$A = \begin{pmatrix} 64 & -16 & 0 & -16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -16 & 64 & -16 & 0 & -16 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -16 & 64 & 0 & 0 & -16 & 0 & 0 & 0 \\ -16 & 0 & 0 & 64 & -16 & 0 & -16 & 0 & 0 \\ 0 & -16 & 0 & -16 & 64 & -16 & 0 & -16 & 0 \\ 0 & 0 & -16 & 0 & -16 & 64 & 0 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & -16 & 0 & 0 & 64 & -16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -16 & 0 & -16 & 64 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -16 & 0 & -16 & 64 \end{pmatrix}$$

Вектор b вычисляется с помощью двойных интегралов, значения которых зависят от i и j:

$$b = \begin{pmatrix} \int\limits_G f\varphi_{1,1}dxdy + u_{0,1} * \frac{1}{h^2} + u_{1,0} * \frac{1}{h^2} \\ \vdots \\ \int\limits_G f\varphi_{N,N}dxdy + u_{N,N+1} * \frac{1}{h^2} + u_{N+1,N} * \frac{1}{h^2} \end{pmatrix}$$

3 Построение тестовых примеров

3.1 Реальные тестовые примеры

3.1.1 Первый тестовый пример

Рассмотрим функцию $u = sin(\pi x)cos(2y + \frac{\pi}{2})$, равную нулю на границе. Найдем для нее частные производные и вычислим функцию f:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\pi^2 sin(\pi x)cos(2\pi y + \frac{\pi}{2})$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -4\pi^2 cos(2\pi y + \frac{\pi}{2})sin(\pi x)$$
$$f = 5\pi^2 cos(2\pi y + \frac{\pi}{2})sin(\pi x)$$

На границе функция равна нулю:

$$u(0, y) = 0,\ \ 0 \leq y \leq 1$$
$$u(1, y) = 0,\ \ 0 \leq y \leq 1$$
$$u(x, 0) = 0,\ \ 0 \leq x \leq 1$$
$$u(x, 1) = 0,\ \ 0 \leq x \leq 1$$

В результате работы программы мы должны получить такой результат (с шагом $h = 0.001$):

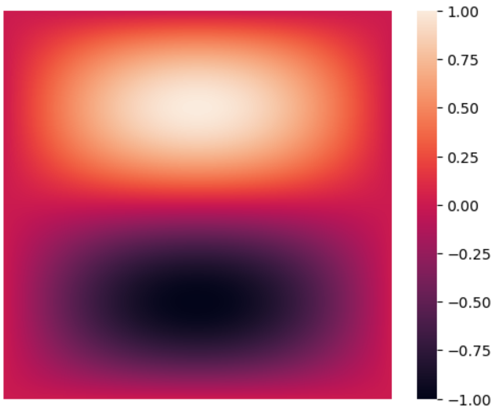

Рис. 1: Ожидаемый результат работы первого тестового примера

3.1.2 Второй тестовый пример

Далее рассмотрим простую функцию $u = x$, которая на границе уже не равна нулю. Для нее проделаем те же операции, что и с первой функцией:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$
$$f = 0$$

Получается, что в данном тестовом примере проверяется функция с правой частью равной нулю. Найдем для нее так же значения на границе:

$$u(0, y) = 0, \ 0 \leq y \leq 1$$
$$u(1, y) = 1, \ 0 \leq y \leq 1$$
$$u(x, 0) = x, \ 0 \leq x \leq 1$$
$$u(x, 1) = x, \ 0 \leq x \leq 1$$

В результате работы программы мы должны получить такой результат (с шагом $h = 0.001$):

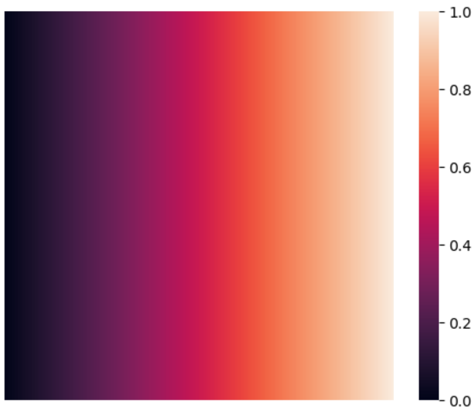

Рис. 2: Ожидаемый результат работы второго тестового примера

3.1.3 Третий тестовый пример

Рассмотрим третий уже более сложный пример с $u = (x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^3$ с правой частью не равной нулю и ненулевой границей. Аналогично вычислим значения частных производных и найдем функцию f:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6y - 3$$
$$f = 1 - 6y$$

Найдем ее значения на границе:

$$u(0, y) = (y - 0.5)^3 + 0.25, \ 0 \leq y \leq 1$$
$$u(1, y) = (y - 0.5)^3 + 0.25, \ 0 \leq y \leq 1$$
$$u(x, 0) = (x - 0.5)^2 - 0.125, \ 0 \leq x \leq 1$$
$$u(x, 1) = (x - 0.5)^2 + 0.125, \ 0 \leq x \leq 1$$

В результате работы программы мы должны получить такой результат (с шагом $h = 0.001$):

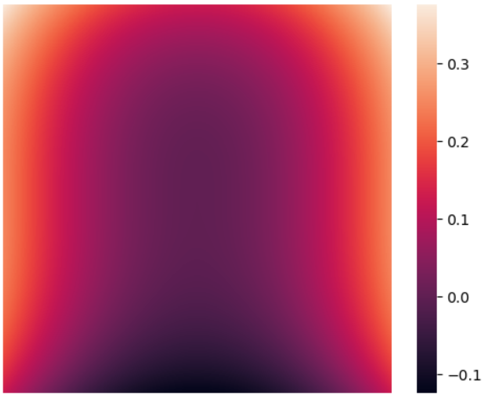

Рис. 3: Ожидаемый результат работы третьего тестового примера

3.2 Искусственные тестовые примеры

3.2.1 Четвертый тестовый пример

Создадим тестовый пример для проверки работоспособности программы при малой области функции f. Для этого зададим функцию f:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{(x, y)} \in (x - 0.3)^2 + (y - 0.5)^2 = (0.01)^2 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Данный тестовый пример равен нулю на границе:

$$u(0, y) = 0, \ 0 \leq y \leq 1$$
$$u(1, y) = 0, \ 0 \leq y \leq 1$$
$$u(x, 0) = 0, \ 0 \leq x \leq 1$$
$$u(x, 1) = 0, \ 0 \leq x \leq 1$$

3.2.2 Пятый тестовый пример

Создадим тестовый пример для проверки работоспособности программы при малой области на границе. Функция f в данном тестовом примере будет равна нулю:

$$f = 0$$

Зададим малый участок $x \in [0.1,\ 0.101]$ на нижней и верхней границах:

$$u(0,y) = \begin{cases} 1, & \text{x} \in [0.1, 0.101] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases},\ 0 \leq y \leq 1$$

$$u(1,y) = \begin{cases} 1, & \text{x} \in [0.1, 0.101] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases},\ 0 \leq y \leq 1$$

$$u(x,0) = 0,\ 0 \leq x \leq 1$$

$$u(x,1) = 0,\ 0 \leq x \leq 1$$

4 Описание алгоритма программы

Для решения поставленной задачи создадим фунцию Calculate, принимающую в качестве аргументов шаг вычисления h, функцию f и границу $Border$. Функция будет проходить последовательно снизу вверх и слева направо по области с шагом h и заполнять матрицу левой части в зависимости от расположения «домиков». Вектор правой части вычисляется с помощью функции вычисления двойных интегралов из пакета *scipy*. Полученная СЛАУ $Ax = b$ решается с помощью функции решения СЛАУ так же из пакета *scipy* с точностью 10^{-10}. Математические операции производятся с помощью пакета *numpy*. Для построения тепловой карты преобразуется размер полученного решения в двумерный массив, инвертируется ось у и преобразуется в $DataFrame$ из пакета *pandas*. Для построения полученной тепловой карты используется функция *heatmap* из пакета *seaborn*.

5 Решение программой тестовых примеров

Для начала оценим работу программы на реальных примерах. Запустим программу на первом тестовом примере (с шагом $h = 0.01$):

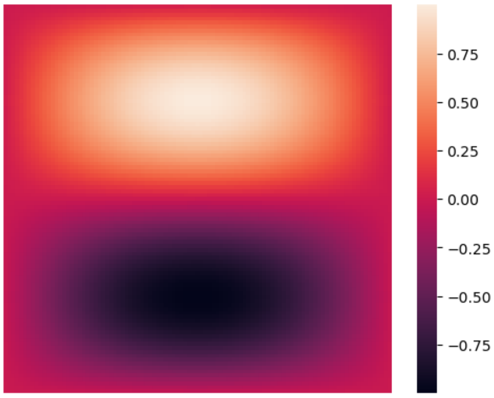

Рис. 4: Результат работы программы на первом тестовом примере

Запустим программу на втором тестовом примере (с шагом $h = 0.01$):

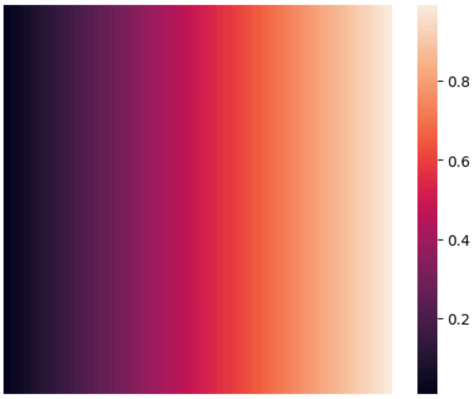

Рис. 5: Результат работы программы на втором тестовом примере

Запустим программу на третьем тестовом примере (с шагом $h = 0.01$):

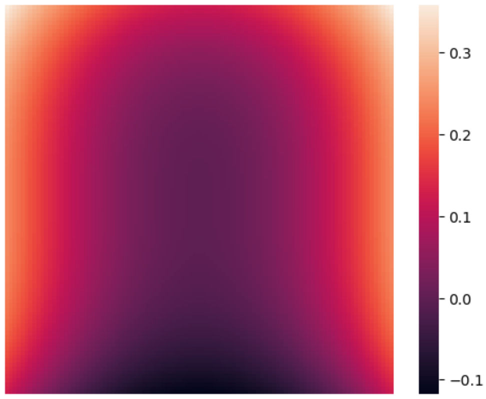

Рис. 6: Результат работы программы на третьем тестовом примере

Как видно, результаты, вычисленные с помощью программы, полностью совпадают с ожидаемыми, описанными в тестовых примерах. Теперь запустим программу на искуственных тестовых примерах. Четвертый тестовый пример (с шагом $h = 0.01$):

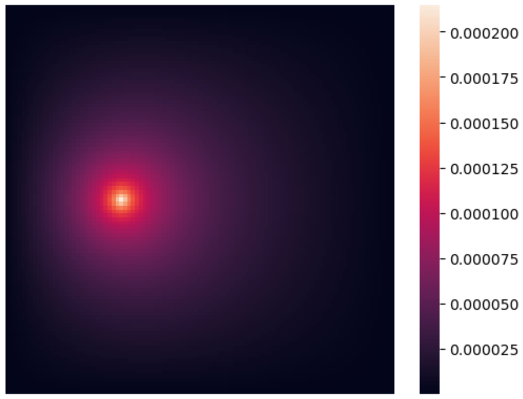

Рис. 7: Результат работы программы на четвертом тестовом примере

Запустим программу на пятом тестовом примере (с шагом $h = 0.01$):

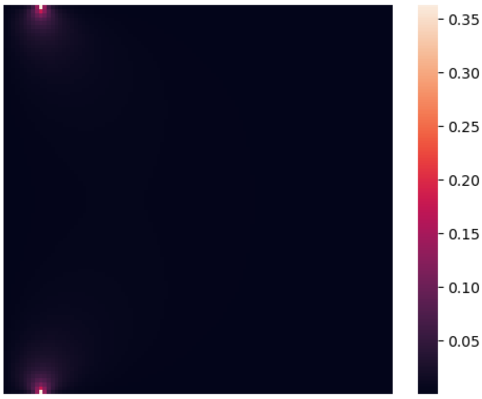

Рис. 8: Результат работы программы на пятом тестовом примере

Как видно, искуственные тестовые примеры работают так же корректно и отображают участки на необходимых местах.

6 Заключение

В результате выполенения курсовой работы удалось построить метод для нахождения распределения температуры u в пластине G в квадрате $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$, то есть решения краевой задачи, заданной задачей Дирихле, заданной уравнением Пуассона. Так же были составлены тестовые примеры для проверки работоспрособности программы и написан код для решения поставленной задачи на языке программирования $Python$. После проверки работоспособности программы получилось, что ожидаемые результаты совпали с полученными, то есть написанная программа работает полностью корректно.

7 Список использованных источников

1. Г.И. Марчук, В.И. Агошков. Введение в проекционно сеточные методы - Москва «НАУКА» 1981

2. А.А. Амосов, Ю.А. Дубинский, Н.В. Копченова. Вычислительные методы для инженеров - Москва «Высшая школа» 1994

8 Приложение

```
import numpy as np
from pandas import DataFrame
from seaborn import heatmap
from scipy.integrate import dblquad as CalculateDoubleIntegral
from scipy.sparse.linalg import bicgstab as Solve

# Функция вычисления методом конечных элементов
def Calculate(h, F, Border):
    def RightPart(i, j, h, f, Border):
        def phi1(phiy, phix):
            return 1/h *(1 - phix/h + i) \
                * f(phix, phiy)
        def phi2(phiy, phix):
            return 1/h * (1 - phiy/h + j) \
                * f(phix, phiy)
        def phi3(phiy, phix):
            return 1/h \
                * (1 + phix/h - i - phiy/h + j) \
                * f(phix, phiy)
        def phi4(phiy, phix):
            return 1/h * (1 + phix/h - i) \
                * f(phix, phiy)
        def phi5(phiy, phix):
            return 1/h * (1 + phiy/h - j) \
                * f(phix, phiy)
        def phi6(phiy, phix):
            return 1/h \
                * (1 - phix/h + i + phiy/h - j) \
                * f(phix, phiy)

        xi = i*h
        yj = j*h
        res = 0
        res += CalculateDoubleIntegral(phi1, xi, xi+h, yj,
                                       lambda t: yj+t-xi)[0]
        res += CalculateDoubleIntegral(phi2, xi, xi+h,
                                       lambda t: yj+t-xi,
                                       yj+h)[0]
        res += CalculateDoubleIntegral(phi3, xi-h, xi, yj,
                                       lambda t: yj+t-(xi-h))[0]
        res += CalculateDoubleIntegral(phi4, xi-h, xi,
```

```
                                    lambda t: yj-h+t-(xi-h),
                                    yj)[0]
    res += CalculateDoubleIntegral(phi5, xi-h, xi, yj-h,
                                    lambda t: yj-h+t-(xi-h))[0]
    res += CalculateDoubleIntegral(phi6, xi, xi+h,
                                    lambda t: yj-h+t-xi,
                                    yj)[0]
    res /= h

    if xi - h == 0 and yj - h == 0:
        res += Border(xi-h, yj) * 1/(h**2) \
            + Border(xi, yj-h) * 1/(h**2)
    elif xi + h == 1 and yj - h == 0:
        res += Border(xi+h, yj) * 1/(h**2) \
            + Border(xi, yj-h) * 1/(h**2)
    elif xi - h == 0 and yj + h == 1:
        res += Border(xi-h, yj) * 1/(h**2) \
            + Border(xi, yj+h) * 1/(h**2)
    elif xi + h == 1 and yj + h == 1:
        res += Border(xi+h, yj) * 1/(h**2) \
            + Border(xi, yj+h) * 1/(h**2)
    elif xi - h == 0:
        res += Border(xi-h, yj) * 1/(h**2)
    elif xi + h == 1:
        res += Border(xi+h, yj) * 1/(h**2)
    elif yj - h == 0:
        res += Border(xi, yj-h) * 1/(h**2)
    elif yj + h == 1:
        res += Border(xi, yj+h) * 1/(h**2)

    return res

n = int(1/h) - 1
h = 1/(n+1)
A = np.zeros((n**2, n**2))
rp = []
for j in range(n): #y
    for i in range(n): #x
        m = j*n + i
        A[m][m] = 4/(h**2)
        if (i > 0): #L
            A[m][m - 1] = -1/(h**2)
        if (i < n - 1): #R
```

```
                A[m][m + 1] = -1/(h**2)
            if (j > 0): #D
                A[m][m - n] = -1/(h**2)
            if (j < n - 1): #U
                A[m][m + n] = -1/(h**2)
            rp.append(RightPart(i+1, j+1, h, F, Border))

    return Solve(A, rp, tol=10**(-10))[0], n

# Функция для вывода результата, вычисленного программой
def DrawPicture(result, n):
    result = result.reshape(n, n)
    # Инвертируем ось y для правильного построения тепловой карты
    resultInv = np.zeros((n, n))
    for i in range(len(result)):
        resultInv[n - 1 - i] = result[i].copy()
    resultheat = DataFrame(resultInv)
    heatmap(resultheat, square = True,
            xticklabels = False, yticklabels = False)

# Функция для вывода результата оригинальной функции
def DrawOriginal(u, h):
    n = int(1/h)+1
    A = np.zeros((n, n), dtype = float)
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            A[n-j-1][i] = u(i*h, j*h)

    resultheat = DataFrame(A)
    heatmap(resultheat, square = True,
            xticklabels = False, yticklabels = False)

# Получение ожидаемого результата от первого тестового примера
def u1(x, y):
    return np.sin(np.pi * x) * np.cos(2*np.pi*y+np.pi/2)

h = 0.001
DrawOriginal(u1, h)

# Получение ожидаемого результата от второго тестового примера
def u2(x, y):
    return x
```

```
h = 0.001
DrawOriginal(u2, h)

# Получение ожидаемого результата от третьего тестового примера
def u3(x, y):
    return (x-0.5)**2 + (y-0.5)**3

h = 0.001
DrawOriginal(u3, h)

# Проверка первого тестового примера
def f1(x, y):
    return 5 * np.pi**2 \
        * np.cos(2 * np.pi*y+ np.pi/2) \
        * np.sin(np.pi*x)

def Border1(x, y):
    return 0

h = 0.01
result, n = Calculate(h, f1, Border1)
DrawPicture(result, n)

# Проверка второго тестового примера
def f2(x, y):
    return 0

def Border2(x, y):
    if x == 0:
        return 0
    elif x == 1:
        return 1
    elif y == 0:
        return x
    elif y == 1:
        return x

h = 0.01
result, n = Calculate(h, f2, Border2)
DrawPicture(result, n)

# Проверка третьего тестового примера
def f3(x, y):
```

```
    return 1 - 6*y

def Border3(x, y):
    if x == 0:
        return (y - 0.5)**3 + 0.25
    elif x == 1:
        return (y - 0.5)**3 + 0.25
    elif y == 0:
        return (x - 0.5)**2 - 0.125
    elif y == 1:
        return (x - 0.5)**2 + 0.125

h = 0.01
result, n = Calculate(h, f3, Border3)
DrawPicture(result, n)

# Проверка четвертого тестового примера
def f4(x, y):
    if (x-0.3)**2 + (y-0.5)**2 <= 0.01**2:
        return 1
    else:
        return 0

def Border4(x, y):
    return 0

h = 0.01
result, n = Calculate(h, f4, Border4)
DrawPicture(result, n)

# Проверка пятого тестового примера
def f5(x, y):
    return 0

def Border5(x, y):
    if x >= 0.1 and x <= 0.101:
        return 1
    else:
        return 0

h = 0.01
result, n = Calculate(h, f5, Border5)
DrawPicture(result, n)
```