Презентация по пятой лабораторной. Предмет - Математическое моделирование.

Попов Олег Павлович[1]

2021, 11 Марта – 13 Марта

[1]RUDN University, Moscow, Russian Federation

Модель Лотки-Вольтерры

Введение

Сегодня рассмотрим модель Лотки-Вольтерры или же модель “хищник-жертва”. Данная модель не дает максимально точных раезультатов, так как многие аспекты, такие как смертность от несчастных случаев и тому подобные, в ней отсутствуют. Однако, если нам не важна точность вычислений, то данная модель может пригодиться. Также модель Лотки-Вольтерры используется как основа в большинстве других модель, так что знание об этой модели лишним не будет.

Теория

В жестком виде система модели “хищник-жертва” выглядит так:

$$\frac{dx}{dt} = ax(t) - bx(t)y(t)$$

$$\frac{dy}{dt} = -cy(t) + dx(t)y(t)$$

где x - число жертв, y - число хищников, a - коэффициент прироста жертв, c - коэффициент смертности хищников. Вероятность взаимодействия жертвы и хищника считается пропорциональной как количеству жертв, так и числу самих хищников (xy). Каждый акт взаимодействия уменьшает популяцию жертв, но способствует увеличению популяции хищников (члены -bxy и dxy в правой части уравнения).

Теория

Математический анализ этой (жесткой) модели показывает, что имеется стационарное состояние (A на графике), всякое же другое начальное состояние (B) приводит к периодическому колебанию численности как жертв, так и хищников, так что по прошествии некоторого времени система возвращается в состояние B.

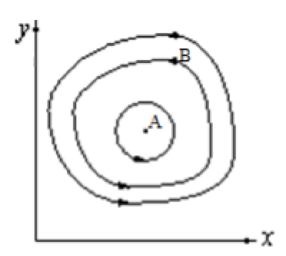

Figure 1: Модель Лотки-Вольтерры

Теория

Стационарное состояние системы (положение равновесия, не зависящее от времени решение) будет в точке: $x_0 = \frac{c}{d}, y_0 = \frac{a}{b}$. Если начальные значения задать в стационарном состоянии $x(0) = x_0, y(0) = y_0$, то в любой момент времени численность популяций изменяться не будет. При малом отклонении от положения равновесия численности как хищника, так и жертвы с течением времени не возвращаются к равновесным значениям, а совершают периодические колебания вокруг стационарной точки. Амплитуда колебаний и их период определяется начальными значениями численностей $x(0), y(0)$. Колебания совершаются в противофазе.

Теория

При малом изменении жесткой модели мы получим мягкую модель.

$$\frac{dx}{dt} = ax(t) - bx(t)y(t) + \epsilon f(x, y)$$

$$\frac{dy}{dt} = -cy(t) + dx(t)y(t) + \epsilon g(x, y), \epsilon << 1$$

Теория

В зависимости от вида малых поправок f и g возможны следующие сценарии:

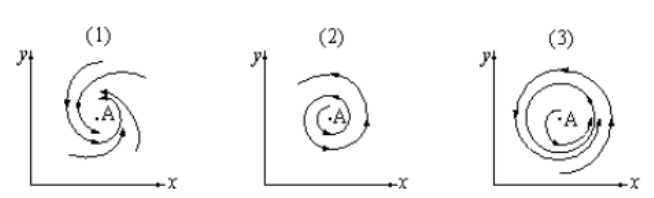

Figure 2: Сценарии

В случае 1 равновесное состояние A устойчиво. При любых других начальных условиях через большое время устанавливается именно оно.

Теория

В случае 2 система стационарное состояние неустойчиво. Эволюция приводит то к резкому увеличению числа хищников, то к их почти полному вымиранию. Такая система в конце концов попадает в область столь больших или столь малых значений x и y, что модель перестает быть применимой.

В случае 3 в системе с неустойчивым стационарным состоянием A с течением времени устанавливается периодический режим. В отличие от исходной жесткой модели Лотки-Вольтерры, в этой модели установившийся периодический режим не зависит от начального условия. Первоначально незначительное отклонение от стационарного состояния A приводит не к малым колебаниям около A, как в модели Лотки-Вольтерры, а к колебаниям вполне определенной амплитуды. Возможны и другие структурно устойчивые сценарии.

Итог

Жесткую модель всегда надлежит исследовать на структурную устойчивость полученных при ее изучении результатов по отношению к малым изменениям модели (делающим ее мягкой).

В случае модели Лотки-Вольтерры для суждения о том, какой же из сценариев 1-3 (или иных возможных) реализуется в данной системе, совершенно необходима дополнительная информация о системе.