Презентация по первой лабораторной. Предмет - Математическое моделирование.

Попов Олег Павлович[1]

2021, 18 Февраля – 20 Февраля

[1]RUDN University, Moscow, Russian Federation

Задача о погоне

Введение

Жизнь полна различных задач и проблем. Нам это известно еще со школы из задачек по математике по типу “Сколько нужно времени, чтобы добраться из точки А в точку В?” Единственная проблема таких задач в том, что они слишком прямолинейные и конкретные: в них все известно изначально - скорость, путь и тем подобные переменные, как и условия, в большинстве задач не изменяются. Но что делать, если задача максимально приближена к реальности? Именно в таких случаях помогает математическое моделирование. Одним из примеров математической модели является задача о погоне.

Теория

Рассмотрим задачу преследования браконьеров береговой охраной. На море в тумане катер береговой охраны преследует лодку браконьеров. Через определенный промежуток времени туман рассеивается, и лодка обнаруживается на расстоянии k км от катера. Затем лодка снова скрывается в тумане и уходит прямолинейно в неизвестном направлении. Известно, что скорость катера в 2 раза больше скорости браконьерской лодки.

Необходимо определить по какой траектории необходимо двигаться катеру, чтоб нагнать лодку.

Постановка задачи

1. Принимает за $t_0 = 0, x_{l0} = 0$ - место нахождения лодки браконьеров в момент обнаружения, $x_{k0} = k$ - место нахождения катера береговой охраны относительно лодки браконьеров в момент обнаружения лодки.
2. Введем полярные координаты. Считаем, что полюс - это точка обнаружения лодки браконьеров $x_{l0}(theta = x_{l0} = 0)$, а полярная ось r проходит через точку нахождения катера береговой охраны

Постановка задачи

3. Траектория катера должна быть такой, чтобы и катер, и лодка все время были на одном расстоянии от полюса $theta$, только в этом случае траектория катера пересечется с траекторией лодки. Поэтому для начала катер береговой охраны должен двигаться некоторое время прямолинейно, пока не окажется на том же расстоянии от полюса, что и лодка браконьеров. После этого катер береговой охраны должен двигаться вокруг полюса удаляясь от него с той же скоростью, что и лодка браконьеров.

Постановка задачи

4. Чтобы найти расстояние x (расстояние после которого катер начнет двигаться вокруг полюса), необходимо составить простое уравнение. Пусть через время t катер и лодка окажутся на одном расстоянии x от полюса. За это время лодка пройдет x, а катер $k - x$ (или $k + x$, в зависимости от начального положения катера относительно полюса). Время, за которое они пройдут это расстояние, вычисляется как $\frac{x}{v}$ или $\frac{k-x}{2v}$ (во втором случае $\frac{x+k}{2v}$). Так как время одно и то же, то эти величины одинаковы.

Постановка задачи

Тогда неизвестное расстояние x можно найти из следующего уравнения:

$\frac{x}{v} = \frac{k-x}{2v}$ в первом случае или

$\frac{x}{v} = \frac{k+x}{2v}$ во втором.

Отсюда мы найдем два значения $x_1 = \frac{k}{3}$ и $x_2 = k$, задачу будем решать для двух случаев.

Постановка задачи

5. После того, как катер береговой охраны окажется на одном расстоянии от полюса, что и лодка, он должен сменить прямолинейную траекторию и начать двигаться вокруг полюса удаляясь от него со скоростью лодки v. Для этого скорость катера раскладываем на две составляющие: v_r - радиальная скорость и v_t - тангенциальная скорость. Радиальная скорость - это скорость, с которой катер удаляется от полюса, $v_r = \frac{dr}{dt}$. Нам нужно, чтобы эта скорость была равна скорости лодки, поэтому полагаем $\frac{dr}{dt} = v$.

Постановка задачи

Тангенциальная скорость – это линейная скорость вращения катера относительно полюса. Она равна произведению угловой скорости $\frac{d(theta)}{dt}$ на радиус $r, v_t = r\frac{d(theta)}{dt}$

При отображении всех скоростей на графике станет очевидно, что: $v_t = \sqrt{4v^2 - v^2} = \sqrt{3v^2}$ (учитывая, что радиальная скорость равна v). Тогда получаем $r\frac{d(theta)}{dt} = \sqrt{3v^2}$.

Итог постановки задачи

Решение исходной задачи сводится к решению системы из двух дифференциальных уравнений $\left(\frac{dr}{dt} = v; r\frac{d(theta)}{dt} = \sqrt{3v^2}\right)$ с начальными условиями $(theta_0 = 0; r_0 = x_1)$ или $(theta_0 = -\pi; r_0 = x_2)$.

Исключая из полученной системы производную по t, можно перейти к следующему уравнению: $\frac{dr}{d(theta)} = \frac{r}{\sqrt{3}}$.

Спасибо за внимание