

4 Discrétisation totale par un schéma aux différences finies en espace et en temps

4.1 Schéma explicite centré

On introduit un découpage en temps: Δt est le pas de temps, $t^n = n\Delta t$. On note u_j^n une approximation de $u(x_j, t^n)$. Pour obtenir un schéma totalement discrétisé, on approche la dérivée en temps $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t^n)$ par une différence finie centrée d'ordre 2, ce qui conduit au schéma suivant:

$$(56) \quad \frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} - c^2 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0$$

ou encore:

$$(57) \quad \boxed{\frac{u_h^{n+1} - 2u_h^n + u_h^{n-1}}{\Delta t^2} + A_h u_h^n = 0}$$

avec $(A_h u_h)_j^n = -c^2 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2}$. C'est un schéma explicite:

$$u_j^{n+1} = 2\left(1 - \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2\right)u_j^n + \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 (u_{j-1}^n + u_{j+1}^n) - u_j^{n-1}$$

Schéma centré au point \times - Calcul au point \circ

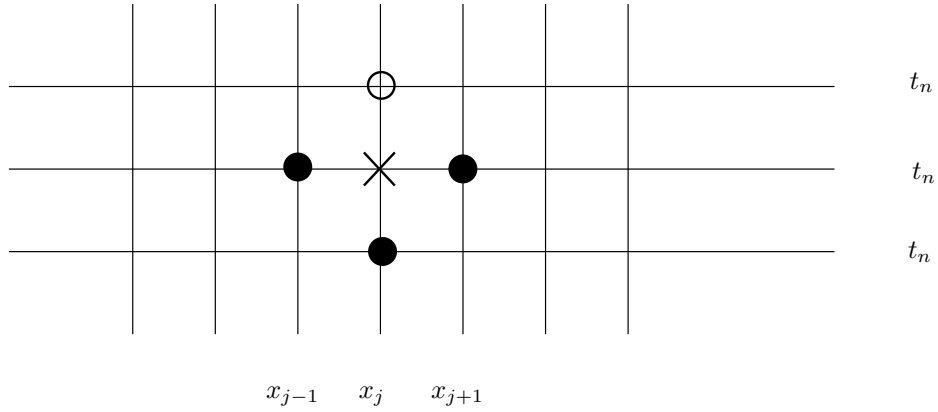


Figure 9: Schéma explicite centré

Démarrage: Choix des conditions initiales approchées

Pour le problème continu, comme pour le problème semi-discrétisé, les données initiales étaient définies par les valeurs de la solution à $t = 0$, ainsi que celles de sa dérivée en temps à $t = 0$:

Problème continu	Problème semi-discrétisé en espace
$u(x, 0) = u_0(x)$	$u_h(0) = u_{0,h}$,
$\frac{\partial u}{\partial t} = u_1(x)$	$\frac{du_h}{dt}(0) = u_{1,h}$

où on a noté $u_{\alpha,h}$ des approximations (en espace) de u_α .

Pour le problème totalement discrétisé, $u_h^n = (u_j^n)_{j \in \mathbb{Z}}$ est une approximation de $u(x_j, t^n)$ et on a besoin de u_h^0 et de u_h^1 pour pouvoir démarrer le schéma. On doit donc approcher $u(x_j, 0) = u_0(x_j)$ et $u(x_j, \Delta t)$. Pour le premier instant il est naturel de choisir, comme pour le problème semi-discrétisé:

$$(58) \quad \boxed{u_h^0 = u_{0,h}}$$

Pour approcher $u(x_j, \Delta t)$, on peut utiliser la formule de Taylor:

$$u(x_j, \Delta t) = u(x_j, 0) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, 0) + O(\Delta t^2)$$

ce qui conduit à l'approximation:

$$(59) \quad u_h^1 = u_{0,h} + \Delta t u_{1,h}$$

Ce choix correspond alors à une approximation d'ordre 1 en temps de $\partial u / \partial t$.

Pour avoir de l'ordre 2 en temps (plus cohérent avec le schéma à l'intérieur, comme on le verra plus loin) on pousse plus loin le développement:

$$u(x_j, \Delta t) = u_0(x_j) + \Delta t u_1(x_j) + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, 0) + O(\Delta t^3)$$

et on utilise l'équation: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, d'où

$$u(x_j, \Delta t) = u_0(x_j) + \Delta t u_1(x_j) + \frac{c^2 \Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, 0) + O(\Delta t^3)$$

Ce choix conduit cette fois à l'approximation:

$$u_j^1 = u_j^0 + \Delta t u_{1,j} + \frac{c^2 \Delta t^2}{2} \frac{u_{j+1}^0 - 2u_j^0 + u_{j-1}^0}{h^2}$$

qui s'écrit encore:

$$(60) \quad \boxed{u_h^1 = (I - \frac{\Delta t^2}{2} A_h) u_h^0 + \Delta t u_{1,h}}$$

C'est ce dernier choix que nous adopterons dans la suite du cours (sauf mention du contraire): le schéma est donc défini par (57), (58) et (60).

4.2 Ordre du schéma: consistance et erreur de troncature

On se donne une solution u régulière de l'équation des ondes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

On notera par $\bar{u}_j^n = u(x_j, t^n)$, pour distinguer des valeurs de la suite définie par le schéma u_j^n , et on définit l'erreur de troncature:

$$(61) \quad \varepsilon_j^n = \frac{\bar{u}_j^{n+1} - 2\bar{u}_j^n + \bar{u}_j^{n-1}}{\Delta t^2} + (A_h \bar{u}_h)_j^n$$

Définition 1 On dit que le schéma est consistant si l'erreur de troncature tend vers 0 ($\varepsilon_j^n \rightarrow 0$) lorsque Δt et Δx tendent vers 0.

Le schéma est consistant à l'ordre m en temps et k en espace si l'erreur de troncature est d'ordre m en temps et k en espace, i.e. si

$$\varepsilon_j^n = O(\Delta t^m + \Delta x^k),$$

lorsque Δt et Δx tendent vers 0.

Remarque 3 L'erreur de troncature est une erreur qui indique comment l'équation est approchée par le schéma. Ce n'est pas une erreur entre la solution exacte et la solution approchée (erreur de convergence), mais c'est une erreur qui quantifie à quel ordre la solution exacte vérifie le schéma.

Lemme 2 Le schéma (57) est consistant à l'ordre 2 en temps et en espace :

$$\varepsilon_j^n = O(\Delta t^2 + \Delta x^2)$$

Preuve: Si u est régulière, on peut faire des développements de Taylor:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{u}_j^{n+1} - 2\bar{u}_j^n + \bar{u}_j^{n-1}}{\Delta t^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t^n) + \frac{2}{4!} \Delta t^2 \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_j, t^n) + O(\Delta t^4) \\ \frac{\bar{u}_{j+1}^n - 2\bar{u}_j^n + \bar{u}_{j-1}^n}{\Delta x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t^n) + \frac{2}{4!} \Delta x^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j, t^n) + O(\Delta x^4) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \varepsilon_j^n &= \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t^n) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t^n)}_{=0} \\ &\quad + \frac{2}{4!} \left(\Delta t^2 \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_j, t^n) - c^2 \Delta x^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j, t^n) \right) \\ &\quad + O(\Delta t^4 + \Delta x^4) \end{aligned}$$

le premier terme est nul car u vérifie l'équation des ondes. On en déduit aussitôt que $\varepsilon_j^n = O(\Delta t^2 + \Delta x^2)$. Si on examine de plus près le second terme, en réutilisant l'équation des ondes, on a :

$$\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} = c^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} = c^4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$$

donc le second terme est égal à:

$$\frac{2}{4!} (\Delta t^2 c^4 - c^2 \Delta x^2) \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j, t^n) = \frac{2}{4!} c^2 \Delta x^2 (\alpha^2 - 1) \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j, t^n)$$

avec $\alpha = \frac{c\Delta t}{\Delta x}$, ce qui montre qu'on gagne un ordre lorsque $\alpha = 1$. On a donc un schéma d'ordre 2 exactement lorsque $\alpha \neq 1$ et un schéma d'ordre au moins 4 lorsque $\alpha = 1$. En fait on peut montrer que lorsque $\alpha = 1$ le schéma est d'ordre infini, c'est à dire que $\varepsilon_j^n = 0$ et que le schéma donne la solution exacte. On va donner une interprétation de ce résultat à partir du cône de dépendance.

Exercice 9 1- Montrer que l'erreur de troncature est nulle (en 1D) si $\alpha = 1$ (on utilisera l'expression de la solution exacte $u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct)$).

2- Ecrire un schéma de discrétisation totale de l'équation des ondes en 2D, centré et d'ordre 2.

3- Montrer que pour ce schéma, et en supposant que $\Delta x = \Delta y = h$, l'erreur de troncature reste d'ordre 2 même si $c\Delta t = h$, contrairement au cas 1D.

4.3 Cône de dépendance numérique- Condition nécessaire de convergence

Bien sûr, le fait que le schéma approche l'équation ne suffit pas à garantir que la solution discrète u_h^n converge vers la solution exacte, lorsque les paramètres de discrétisation h et Δt tendent vers 0. Nous donnons ici une condition nécessaire de convergence. On note toujours $\alpha = \frac{c\Delta t}{\Delta x}$, et on définit la vitesse numérique:

$$V_{num} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Nous regardons la convergence lorsque h et Δt tendent vers 0, avec α fixé.

Premier point de vue(cf Fig 10)

La solution exacte u issue des conditions initiales u_0 et u_1 est comprise dans le cône situé entre les deux droites “limites” de pente $\pm 1/c$. La solution discrète u_h se propage sur les points de la grille, avec une vitesse V_{num} (en gagnant un point à chaque itération). Si la pente $\frac{1}{V_{num}} > \frac{1}{c}$, alors $u_h = 0$ dans la zone comprise entre les 2 cônes, alors que $u \neq 0$, donc il ne peut pas y avoir convergence. Une **condition nécessaire de convergence** est donc que:

$$(62) \quad |\alpha| \leq 1 \iff \left| \frac{c\Delta t}{\Delta x} \right| \leq 1$$

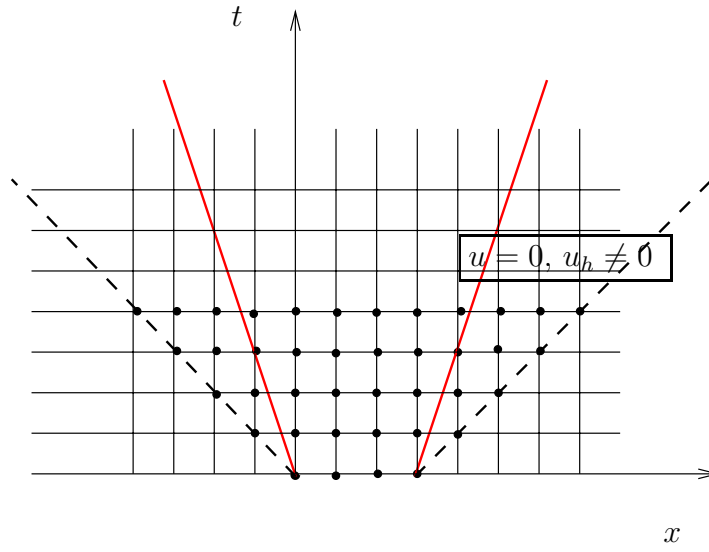
Nous verrons que cette condition, appelée condition CFL (Courant-Friedrichs-Levy), est également une condition nécessaire de stabilité du schéma.

Deuxième point de vue(cf Fig 11)

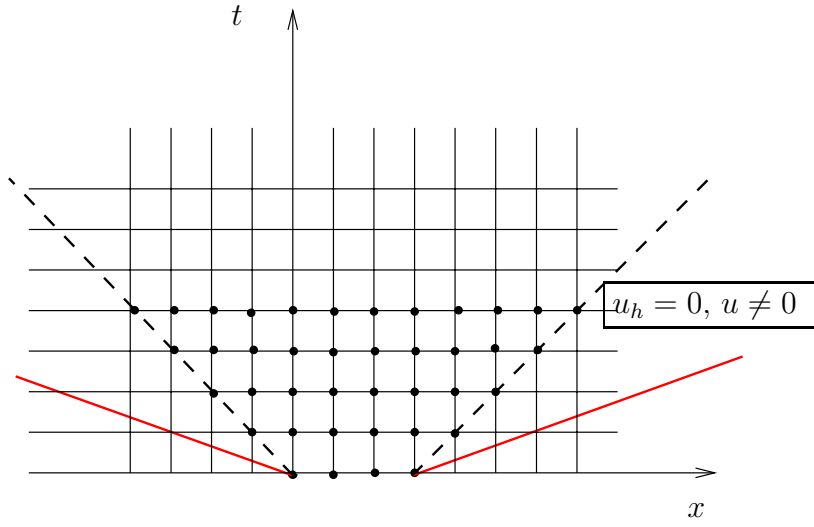
Soit $M = (x_j, t^n)$ un point de la grille de calcul. Les points qui ont servi à calculer u_j^n sont contenus dans un cône de sommet M d'arête les demi droites issues de M et de pente $\pm \Delta x / \Delta t$. On le note $K_\alpha^-(M)$. La solution u_j^n dépend donc uniquement des valeurs de u^0 et u^1 sur le segment $[M_{0,\alpha}^-, M_{0,\alpha}^+] = [x_{j-n}, x_{j+n}] = [(j-n)h, (j+n)h]$. La solution exacte, elle dépend des valeurs de u^0 et u^1 entre $[M^-, M^+]$, avec $M^- = (x_j - ct^n, 0)$ et $M^+ = (x_j + ct^n, 0)$. On a donc 2 cas:

Cas 1: $[M^-, M^+] \subset [M_{0,\alpha}^-, M_{0,\alpha}^+]$, i.e., le cône de dépendance numérique contient le cône de dépendance exact et on a donc toutes les infos nécessaires pour construire la solution approchée. Ce cas est le cas où $(j-n)h \leq x_j - ct^n \leq x_j + ct^n \leq (j+n)h$ c'est à dire $c\Delta t \leq h$.

Cas 2: $[M_{0,\alpha}^-, M_{0,\alpha}^+] \subset [M^-, M^+]$, i.e., le cône de dépendance numérique est strictement contenu dans le cône de dépendance exact et la solution approchée ne tient pas compte des valeurs de la solution (non nulle) à l'extérieur du cône numérique. Il ne peut donc pas y avoir convergence.



Cas 1 : $1/c > 1/V_{num}$ peut converger



Cas 2 : $1/c < 1/V_{num}$: ne peut pas converger

Figure 10: Condition nécessaire de convergence: $1/V_{num} \leq 1/c \iff \alpha = \frac{c\Delta t}{\Delta x} \leq 1$

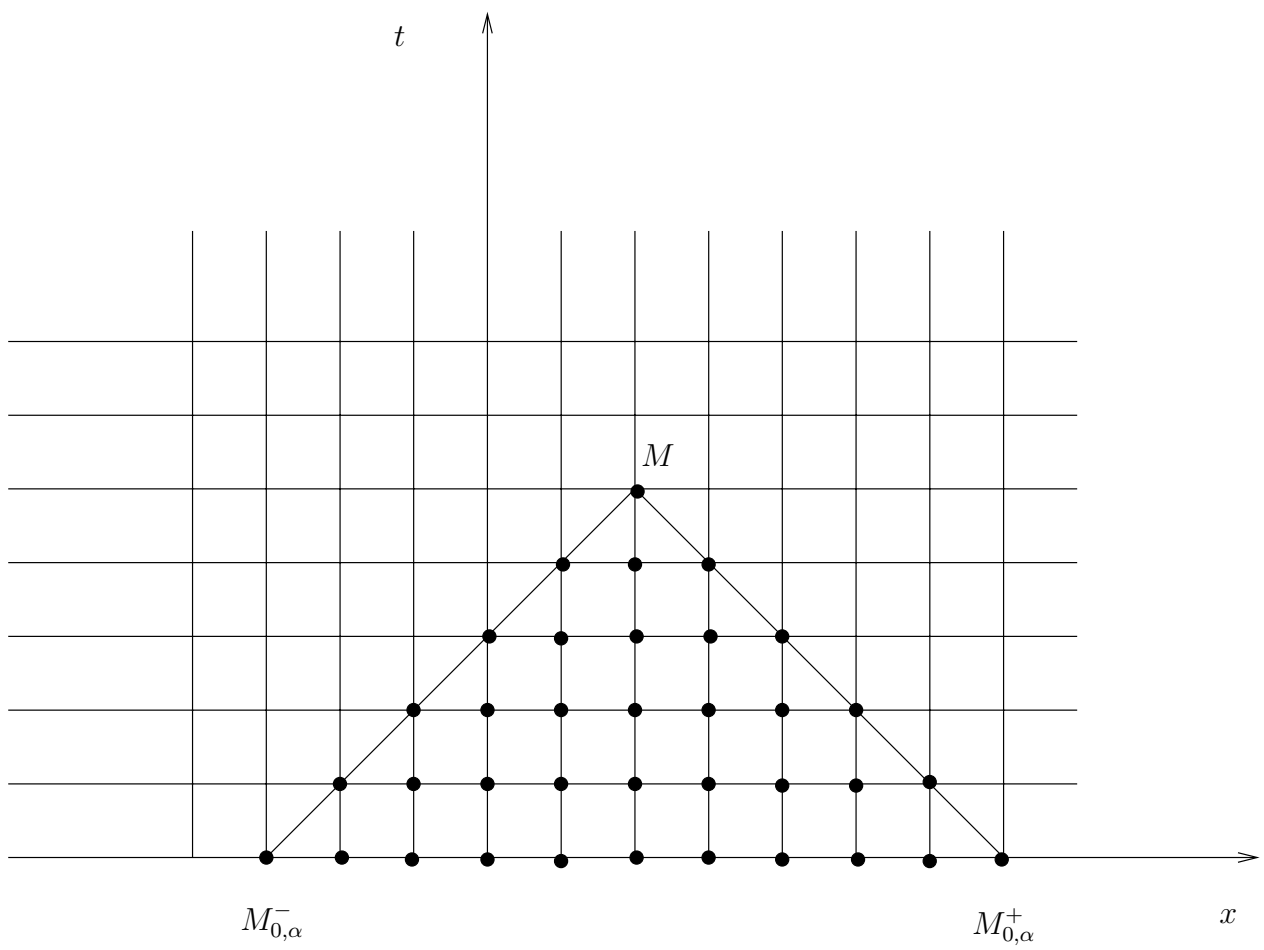


Figure 11: Convergence

4.4 Analyse de stabilité par Fourier

Avec la notion de consistance définie précédemment, la deuxième notion fondamentale associée à un schéma numérique est la stabilité. On dira que le schéma est stable si la solution discrète à l'instant t^n , u_h^n , est bornée indépendamment des paramètres de discrétisation h et Δt , pour toutes conditions initiales. La stabilité est une condition nécessaire de convergence. En fait, on peut montrer que si le schéma est consistant, alors c'est aussi une condition suffisante (si un schéma est stable et consistant alors il est convergent).

On suppose ici que u_0 et u_1 sont données dans L^2 et que leurs approximations u_{0h} et u_{1h} vérifient les hypothèses (39). On cherche à obtenir des estimations de la solution discrète, indépendantes de $h, \Delta t$, pour toutes conditions initiales. Le schéma peut s'écrire

$$(63) \quad \frac{u_h^{n+1} - 2u_h^n + u_h^{n-1}}{\Delta t^2} + (A_h u_h)^n = 0$$

Comme pour le schéma semi-discrétisé en espace, on applique à (63) une transformée de Fourier discrète d'où

$$(64) \quad \frac{\hat{u}_h^{n+1} - 2\hat{u}_h^n + \hat{u}_h^{n-1}}{\Delta t^2} + D_h(k)\hat{u}_h^n = 0$$

avec $D_h(k) = \hat{A}_h(k) = \frac{4c^2}{h^2} \sin^2 \frac{kh}{2}$ ce qui est équivalent à

$$\hat{u}_h^{n+1} - 2(1 - 2\alpha^2 \sin^2 \frac{kh}{2})\hat{u}_h^n + \hat{u}_h^{n-1} = 0$$

Par conséquent, la solution est de la forme:

$$\hat{u}_h^n = A_h r_1(k)^n + B_h r_2(k)^n$$

où r_1 et r_2 sont les racines du polynôme caractéristique:

$$(65) \quad r^2 - 2(1 - \beta)r + 1 = 0$$

avec $\beta = 2\alpha^2 \sin^2 \frac{kh}{2} = 2\frac{c^2 \Delta t^2}{h^2} \sin^2 \frac{kh}{2}$. On a en particulier $0 \leq \beta \leq 2\alpha^2$ et $D_h(k)\Delta t^2 = 2\beta$.

Une condition nécessaire de stabilité L^2 est donc $\max_k (|r_1(k)|, |r_2(k)|) \leq 1$. Les deux racines vérifient:

$$(66) \quad \begin{cases} r_1 r_2 = 1 \\ r_1 + r_2 = 2(1 - \beta) \end{cases}$$

Les constantes A_h et B_h sont déterminées par les conditions initiales:

$$\begin{aligned} \hat{u}_h^0 &= A_h + B_h & \iff & A_h(r_2 - r_1) = \hat{u}_h^0 r_2 - \hat{u}_h^1 \\ \hat{u}_h^1 &= A_h r_1(k) + B_h r_2(k) & & B_h(r_2 - r_1) = \hat{u}_h^1 - r_1 \hat{u}_h^0 \end{aligned}$$

ce qui donne si $r_1 \neq r_2$ l'expression de la solution

$$(67) \quad \hat{u}_h^n = \frac{\hat{u}_h^0 r_2 - \hat{u}_h^1}{r_2 - r_1} r_1^n + \frac{\hat{u}_h^1 - r_1 \hat{u}_h^0}{r_2 - r_1} r_2^n = \hat{u}_h^0 \frac{r_2 r_1^n - r_1 r_2^n}{r_2 - r_1} + \hat{u}_h^1 \frac{r_2^n - r_1^n}{r_2 - r_1}$$

Le discriminant de (65) est :

$$\Delta(k) = (1 - \beta)^2 - 2 = - \underbrace{\beta}_{\geq 0} (2 - \beta)$$

On a donc 2 cas à considérer:

Cas 1: $\exists k, \Delta(k) > 0$

Les 2 racines sont donc réelles distinctes $(r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2$ et d'autre part on a d'après la première relation de (66)

$$|r_1| |r_2| = 1$$

donc dans ce cas on a $\max(|r_1|, |r_2|) > 1$ ce qui montre que le schéma est instable (il existe des conditions initiales pour lesquelles la solution explose: si par exemple $R > 1$, $R^n = e^{n \ln R} = e^{\frac{n \Delta t}{\Delta t} \ln R} = e^{\frac{t^n}{\Delta t} \ln R} \rightarrow +\infty$ lorsque $\Delta t \rightarrow 0$).

Cas 2: $\forall k, \Delta(k) \leq 0$

D'après ce qui précède, une condition nécessaire de stabilité s'écrit donc

$$\Delta(k) \leq 0, \quad \forall k \iff 2 - \beta \geq 0, \quad \forall k \iff |\alpha| \leq 1$$

Dans ce cas, les deux racines sont soit complexes conjuguées soit réelles et identiques. Dans les deux cas:

$$r_2 = \bar{r}_1$$

donc $|r_1| = |r_2| = 1$ et par conséquent:

$$(68) \quad |\hat{u}_h^n| \leq |A_h| + |B_h|$$

donc la solution n'explose pas en temps et il n'y a pas non plus d'amortissement ce qui est conforme au phénomène étudié et traduit la conservation d'énergie. Pour montrer qu'on a stabilité L^2 , il reste à vérifier que la solution est bornée indépendamment de h .

Estimation de la solution sous l'hypothèse $\alpha \leq 1$

Pour obtenir une estimation de la solution, (68) ne permet pas de conclure. On va reprendre l'expression de la solution en fonction des conditions initiales. Les étapes sont les suivantes:

On rappelle le choix des conditions initiales (cohérentes avec de l'ordre 2 en temps) (58)-(60):

$$u_h^0 = u_{0,h}$$

$$u_h^1 = (I - \frac{\Delta t^2}{2} A_h) u_h^0 + \Delta t u_{1,h}$$

ce qui montre que

$$\hat{u}_h^0 = \widehat{u_{0,h}}$$

$$\hat{u}_h^1 = (1 - \frac{\Delta t^2}{2} D_h(k)) \hat{u}_h^0 + \Delta t \widehat{u_{1,h}} = (1 - \beta) \hat{u}_h^0 + \Delta t \widehat{u_{1,h}} = \frac{r_1 + r_2}{2} \hat{u}_h^0 + \Delta t \widehat{u_{1,h}}$$

On injecte ces expressions dans l'expression de la solution (67), ce qui donne:

$$\widehat{u}_h^n = \frac{1}{r_2 - r_1} \left(\frac{1}{2} (r_2 r_1^n - r_1 r_2^n + r_2^{n+1} - r_1^{n+1}) \widehat{u}_h^0 + \Delta t (r_2^n - r_1^n) \widehat{u_{1,h}} \right)$$

En utilisant la relation $r_1 r_2 = 1$ et en posant $r_2 = r$ et $r_1 = 1/r$ on obtient:

$$\widehat{u}_h^n = \frac{1}{2} \frac{r^{2n} + 1}{r^n} \widehat{u}_h^0 + \Delta t \frac{r^{2n} - 1}{r^2 - 1} \frac{1}{r^{n-1}} \widehat{u_{1,h}}$$

ce qui implique ($|r| = 1$)

$$|\widehat{u}_h^n| \leq \frac{1}{2} \left| r^n + \frac{1}{r^n} \right| |\widehat{u}_h^0| + \Delta t \left| \frac{r^{2n} - 1}{r^2 - 1} \right| |\widehat{u_{1,h}}|$$

Lemme 3 Si $|r| = 1$, alors

$$\frac{1}{2} \left| r^n + \frac{1}{r^n} \right| \leq 1, \quad \text{et} \quad \left| \frac{r^{2n} - 1}{r^2 - 1} \right| \leq n$$

Preuve: La première estimation est immédiate:

$$\frac{1}{2} \left| r^n + \frac{1}{r^n} \right| \leq \frac{1}{2} |r|^n + \left| \frac{1}{r} \right|^n = \frac{1}{2} (1 + 1) = 1$$

La deuxième estimation découle de l'identité:

$$\left| \frac{1 - (r^2)^n}{1 - r^2} \right| = \left| 1 + r^2 + \dots + (r^2)^{n-1} \right| \leq 1 + \dots + 1 = n \quad \blacksquare$$

A partir du lemme, il est immédiat d'obtenir une estimation de la solution :

$$\begin{aligned} |\widehat{u}_h^n(k)| &\leq |\widehat{u}_h^0| + \Delta t n |\widehat{u_{1,h}}| \\ \implies |\widehat{u}_h^n(k)|^2 &\leq 2 |\widehat{u}_h^0|^2 + 2 (t^n)^2 |\widehat{u_{1,h}}|^2 \\ \implies \|\widehat{u}_h^n\|_{L^2}^2 &\leq 2 \|\widehat{u}_h^0\|_{L^2}^2 + 2 (t^n)^2 \|\widehat{u_{1,h}}\|_{L^2}^2 \\ \implies \|u_h^n\|_{L^2}^2 &\leq 2 \|u_h^0\|_{L^2}^2 + 2 (t^n)^2 \|u_{1,h}\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

ce qui implique encore, en utilisant d'une part $\sqrt{a^2 + b^2} \leq |a| + |b|$ et d'autre part les hypothèses (39):

$$\|u_h^n\|_{L^2} \leq C (\|u_0\|_{L^2} + t^n \|u_1\|_{L^2})$$

qui est l'analogue de l'estimation (40) du cas semi-discret. On résume ces résultats dans la

Proposition 1 Soient u_0 et u_1 données dans L^2 et leurs approximations $u_{0h} \in L_h^2$ et $u_{1h} \in L_h^2$ vérifiant les hypothèses (39). Alors, sous la condition CFL: $\left| \frac{c\Delta t}{h} \right| \leq 1$, le schéma totalement discrétisé admet une solution unique et on a l'estimation:

$$(69) \quad \|u_h^n\|_{L^2} \leq C (\|u_0\|_{L^2} + t^n \|u_1\|_{L^2})$$

où C est une constante positive indépendante de h et Δt , ce qui montre la stabilité sur un intervalle de temps borné.

4.5 Analyse de dispersion

Comme pour le schéma semi-discrétisé, on peut faire une analyse par ondes planes. Ce paragraphe suit la même démarche que celle présentée pour schéma semi-discrétisé (le lecteur peut essayer de le faire comme exercice).

Ondes planes continues

On rappelle que l'analyse par ondes planes du problème continu consiste à s'intéresser aux solutions particulières de la forme $u(x, t) = e^{i(-\omega t + kx)}$, ce qui conduit à la relation de dispersion $\omega^2 = c^2 k^2$. La quantité $\omega/k = \pm c$ est la vitesse de phase de l'onde.

Ondes planes numériques

Ce sont les solutions particulières de la forme

$$u_j^n = e^{i(j\Delta x k - \omega_{h,\Delta t} n \Delta t)}$$

En injectant cette expression dans le schéma, on obtient la relation de dispersion du schéma:

$$\begin{aligned} \frac{2 \cos \omega_{h,\Delta t} \Delta t - 2}{\Delta t^2} - c^2 \frac{2 \cos \Delta x - 2}{\Delta x^2} &= 0 \\ \iff \frac{4}{\Delta t^2} \sin^2 \frac{\omega_{h,\Delta t} \Delta t}{2} &= \frac{4c^2}{h^2} \sin^2 \frac{kh}{2} \equiv D_h(k) \end{aligned}$$

Pour le schéma semi-discrétisé, rappelons qu'on avait obtenu comme relation (en cherchant des solution de la forme $u_j(t) = e^{i(jhk - \omega_h t)}$)

$$\omega_h^2 = D_h(k) = \frac{4c^2}{h^2} \sin^2 \frac{kh}{2}$$

le deuxième terme $D_h(k)$ provenant de la discrétisation en espace et le premier terme étant le symbole de l'opérateur ∂_t^2 qui n'a pas été discrétisé, et on avait $\omega_h^2 = k^2 c^2 + O(h^2)$. L'erreur de dispersion (rapport des vitesses continue et semi-discrétisée) s'exprimait alors:

$$\frac{\omega_h^\pm}{k} \frac{1}{c} = \pm \frac{2}{kh} \sin \frac{kh}{2}$$

Pour le schéma totalement discrétisé, ce premier terme est remplacé par le symbole de l'opérateur discret approchant ∂_t^2 :

$$(70) \quad \frac{4}{\Delta t^2} \sin^2 \frac{\omega_{h,\Delta t} \Delta t}{2} = D_h(k)$$

et on a $\omega_{h,\Delta t} = k^2 c^2 + O(h^2 + \Delta t^2)$. On peut réécrire (70) sous la forme

$$(71) \quad \omega_{h,\Delta t} = \pm \frac{2}{\Delta t} \operatorname{Arcsin} \left(\frac{c\Delta t}{h} \sin \frac{kh}{2} \right) \equiv \pm \frac{2}{\Delta t} \operatorname{Arcsin} \left(\alpha \sin \frac{kh}{2} \right)$$

ou encore, en posant $K = kh$,

$$(72) \quad \frac{1}{c} \frac{\omega_{h,\Delta t}}{k} = \pm \frac{2}{\alpha K} \operatorname{Arcsin} \left(\alpha \sin \frac{K}{2} \right)$$

Le nombre $G = \frac{K}{2\pi} = \frac{h}{\lambda}$ représente l'inverse du nombre de points par longueur d'onde $\lambda = \frac{2\pi}{k}$. La quantité $\frac{1}{c} \frac{\omega_{h,\Delta t}}{k}$ représente le rapport entre la vitesse de phase numérique et la vitesse de phase continue. Notons $\omega_{h,\Delta t}^+$ la solution telle que $0 \leq \omega_{h,\Delta t}^+ \Delta t / 2 \leq \pi/2$, et

$$q(\alpha, G) = \frac{1}{c} \frac{\omega_{h,\Delta t}^+}{k} = \frac{2}{\alpha K} \operatorname{Arcsin} \left(\alpha \sin \frac{K}{2} \right) = \frac{1}{\alpha \pi G} \operatorname{Arcsin}(\alpha \sin \pi G).$$

Quelques remarques (cf Figure 12)

- Si α est fixé et $h \rightarrow 0$, on a

$$q(\alpha, G) = 1 - (1 - \alpha^2)K^2/2 + \dots$$

On retrouve que le schéma est d'ordre 2 (et d'ordre infini si $\alpha = 1$).

- Pour α fixé, la fonction $G \rightarrow q(\alpha, G)$ est décroissante (+ on a de points par longueur d'onde, plus q est proche de 1).
- Pour G fixé, la fonction $\alpha \rightarrow q(\alpha, G)$ est une fonction croissante. Le meilleur schéma est donc obtenu pour le plus grand α possible (limité par la CFL) c'est à dire pour $\alpha = 1$. En 1D, on a même $q(1, G) = 1$ et le schéma est exact (faux en 2D, cf exercice 9).
- Sous la condition $\alpha \leq 1$ on retrouve la stabilité du schéma puisqu'alors $\omega_{h,\Delta t}^+$ est réel. Si ω était complexe, ça voudrait dire qu'il existe des solutions

$$u_j^n = e^{i(jhk - \omega n \Delta t)} = e^{i(jhk - \omega_R n \Delta t)} e^{\omega_I n \Delta t}$$

et on a 2 solutions ω^\pm donc une des deux est telle que $w_I > 0$ donc explose. Cette technique est très pratique pour déterminer la condition de stabilité d'un schéma.

- La limite quand $\alpha \rightarrow 0$ correspond à

$$q(\alpha \rightarrow 0, G) \sim \frac{1}{\pi G} \sin \pi G = \frac{2}{K} \sin \frac{K}{2}$$

qui correspond à l'erreur de dispersion du schéma semi-discretisé. On voit donc que sa dispersion est plus grande que celle du schéma totalement discretisé.

Exercice 10 On peut établir la condition de stabilité en 2D facilement, par le même argument que en 1D (cf. 4.).

1- Montrer que la relation de dispersion du schéma 2D s'écrit

$$(73) \quad \frac{4}{\Delta t^2} \sin^2 \frac{\omega_{h,\Delta t} \Delta t}{2} = \frac{4c^2}{h^2} \left(\sin^2 \frac{k_1 h}{2} + \sin^2 \frac{k_2 h}{2} \right)$$

2- Montrer que le schéma est stable sous la condition CFL

$$(74) \quad |\alpha| = \left| \frac{c \Delta t}{h} \right| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

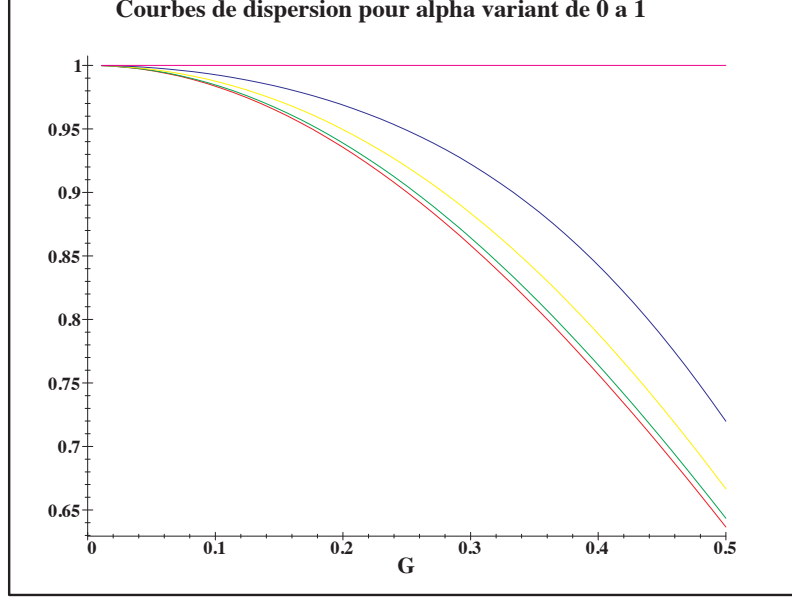


Figure 12: Courbes de dispersion du schéma aux différences finies

On peut interpréter cette condition de la façon suivante: en 2D, la solution élémentaire (fonction de Green) est:

$$G(x, t) = \frac{H(t - |x|/c)}{2\pi\sqrt{t^2 - |x|^2/c^2}}$$

dont le support est le disque $\{|x| \leq ct\}$. A l'instant $t^n = n\Delta t$, elle a donc atteint tous les points $|x| \leq cn\Delta t$. La solution numérique, elle, se propage sur un losange de demi-diagonale nh et donc de côté $l = nh/\sqrt{2}$. La condition CFL exprime le fait que le losange doit strictement contenir le disque. S'il existait des points du disque qui sont strictement à l'extérieur du losange, cela signifierait que en ces points la solution exacte est non nulle alors que la solution approchée l'est. Cette condition apparaît donc de nouveau comme une condition nécessaire de convergence du schéma. (Le losange contient strictement le disque si $l \geq cn\Delta t$ donc si $nh/\sqrt{2} \geq cn\Delta t \iff c\Delta t/h \leq \sqrt{2}/2$, cf Figure 13).

4.6 Stabilité par techniques énergétiques

Comme dans le cas continu et dans le cas semi-discret, on peut établir la stabilité en montrant la conservation d'une énergie.

Théorème 7 Soient $u_0 \in H^1$, $u_1 \in L^2$ et u_h^n la solution du schéma (57)-(58)-(60) où u_{0h} et u_{1h} vérifient les hypothèses (39) et (41)).

- La quantité

$$(75) \quad E_h^{n+1/2} = \frac{1}{2} \left\| \frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\Delta t} \right\|^2 + \frac{1}{2} (A_h u_h^n, u_h^{n+1})$$

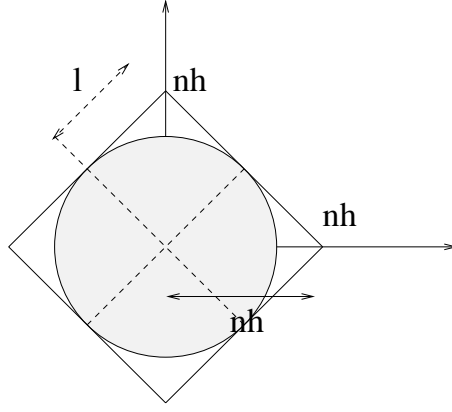


Figure 13: Support de la solution élémentaire exacte (disque) et de la solution élémentaire approchée (losange)

se conserve c'est à dire

$$(76) \quad E_h^{n+1/2} = E_h^{n-1/2}, \quad \forall n.$$

- Sous la condition CFL $\alpha = \frac{c\Delta t}{h} < 1$, $E_h^{n+1/2}$ est une forme quadratique positive et par conséquent le schéma est stable. Plus précisément, on a l'estimation suivante:

$$(77) \quad \frac{1}{2}(1 - \alpha^2) \left\| \frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\Delta t} \right\|^2 \leq E_h^{n+1/2}$$

Nous laissons au lecteur la preuve de ce théorème, au travers de l'exercice suivant.

Exercice 11 1- En multipliant scalairement le schéma

$$\frac{u_h^{n+1} - 2u_h^n + u_h^{n-1}}{\Delta t^2} + A_h u_h^n = 0$$

par l'approximation centrée de $(\partial_t u)^n$, montrer que la quantité

$$E_h^{n+1/2} = \frac{1}{2} \left\| \frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\Delta t} \right\|^2 + \frac{1}{2} (A_h u_h^n, u_h^{n+1})$$

se conserve (i.e. $E_h^{n+1/2} = E_h^{n-1/2}$, $\forall n$). Comparer aux cas continus et semi-discrets. Commenter.

2- Montrer que pour les conditions initiales (58) et (60) (où u_{0h} et u_{1h} vérifient les hypothèses (39) et (41)) on a

$$E_h^{1/2} \leq CE(0) = C\left(\frac{1}{2} \|u_1\|^2 + \frac{1}{2} a(u_0, u_0)\right)$$

3- Montrer que pour tout v_h , on a

$$(78) \quad (A_h v_h, v_h) \leq \frac{4c^2}{h^2} \|v_h\|^2$$

4- En utilisant l'identité

$$a_h(u, v) = \frac{1}{4}a_h(u + v, u + v) - \frac{1}{4}a_h(u - v, u - v)$$

en déduire que

$$E_h^{n+1/2} \geq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{c^2 h^2}{\Delta t^2}\right) \left\| \frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\Delta t} \right\|^2$$

et conclure.

Estimation de la solution

On suppose que $\alpha = \frac{c\Delta t}{h} < 1$. L'estimation d'énergie obtenue au théorème 7 permet d'obtenir le résultat de stabilité suivant:

Corollaire 1 *La solution du schéma discrétisé vérifie l'estimation suivante:*

$$(79) \quad \|u_h^n\| \leq C(\alpha)(\|u_0\| + t^n \sqrt{E(0)})$$

Cette estimation est à rapprocher de l'estimation qu'on avait établie pour le schéma semi-discrétisé:

$$\|u_h(t)\| \leq \|u^0\| + \sqrt{2}t\sqrt{E(0)}$$

Démonstration: l'estimation (77) peut se réécrire, en utilisant l'identité (76):

$$\frac{1}{2}(1 - \alpha^2) \left\| \frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\Delta t} \right\|^2 \leq E_h^{n+1/2} = E_h^{1/2} \leq CE(0)$$

d'où

$$(80) \quad \|u_h^{n+1} - u_h^n\| \leq M\Delta t$$

avec

$$(81) \quad M = C\sqrt{\frac{2E(0)}{1 - \alpha^2}}$$

On a donc

$$\|u_h^n\| \leq \|u_h^n - u_h^{n-1}\| + \|u_h^{n-1}\| \leq M\Delta t + \|u_h^{n-1}\|$$

soit

$$\|u_h^n\| \leq nM\Delta t + \|u_h^0\|$$

■

Estimation d'énergie pour le schéma avec terme source

Par la même technique, il est facile de montrer:

Corollaire 2 *Sous les mêmes hypothèses que celles du théorème 7, si u_h^n est solution du schéma avec un terme source:*

$$(82) \quad \frac{u_h^{n+1} - 2u_h^n + u_h^{n-1}}{\Delta t^2} + A_h u_h^n = f_h^n$$

avec les conditions initiales (58) et (60), alors l'énergie $E_h^{n+1/2}$ vérifie l'identité suivante:

$$E_h^{n+1/2} - E_h^{n-1/2} = \frac{1}{2}(f_h^n, u_h^{n+1} - u_h^{n-1})$$

De plus, si $\alpha < 1$, nous avons l'estimation d'énergie suivante:

$$(83) \quad \sqrt{E_h^{n+1/2}} \leq \sqrt{E_h^{1/2}} + \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{1-\alpha^2}} \Delta t \sum_{k=1}^n \|f_h^k\|$$

Preuve: l'identité (82) est immédiate. Il est par ailleurs facile de voir qu'elle implique:

$$\frac{E_h^{n+1/2} - E_h^{n-1/2}}{(\sqrt{E_h^{n+1/2}} - \sqrt{E_h^{n-1/2}})(\sqrt{E_h^{n+1/2}} + \sqrt{E_h^{n-1/2}})} \leq \frac{1}{2} \|f_h^n\| (\|u_h^{n+1} - u_h^n\| + \|u_h^n - u_h^{n-1}\|)$$

Si $\alpha < 1$, l'estimation (77) montre que

$$\|u_h^{n+1} - u_h^n\| \leq \Delta t \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-\alpha^2}} \sqrt{E_h^{n+1/2}}$$

ce qui, avec l'inégalité précédente conduit à:

$$\sqrt{E_h^{n+1/2}} - \sqrt{E_h^{n-1/2}} \leq \frac{1}{2} \|f_h^n\| \Delta t \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-\alpha^2}}$$

et permet d'obtenir (83). ■

Remarque 4 *La constante $C(\alpha)$ de l'estimation (79) dépend de α : elle est en $\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}$.*

On perd donc l'estimation quand α se rapproche de 1, or on sait par ailleurs que le schéma s'améliore lorsque α se rapproche de 1. En fait, il existe une autre méthode, toujours liée à une énergie discrète, qui permet d'obtenir une estimation avec une constante C indépendante de α (voir Annexe B).

4.7 Convergence du schéma totalement discrétisé par différences finies

Le résultat général sur les schémas disant que si un schéma est consistant et stable alors il est convergent, s'applique ici. Plus précisément on a :

Théorème 8 *Soit u_h^n la solution du schéma (57)-(58)-(60) où u_{0h} et u_{1h} vérifient les hypothèses (39) et (41)) et approchent u_0 et u_1 en norme L^2 . Si la solution du problème continu est assez régulière et si $\alpha < 1$ alors*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sup_n \|u_h^n - \bar{u}_h^n\|_{L^2} = 0$$

où $\bar{u}_h(t^n)$ la fonction de L_h^2 définie à partir des valeurs de u aux noeuds ($u \in C^0$)

$$\bar{u}_j(t^n) = u(x_j, t^n)$$

Plus précisément, on montre que

$$(84) \quad \sqrt{E_h^{n+1/2}} \leq \sqrt{E_h^{1/2}} + \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{1-\alpha^2}} \Delta t \sum_{k=1}^n \|\varepsilon_h^k\|$$

où on a posé

$$(85) \quad E_h^{n+1/2} = \frac{1}{2} \left\| \frac{e_h^{n+1} - e_h^n}{\Delta t} \right\|^2 + \frac{1}{2} (A_h e_h^n, e_h^{n+1})$$

et où $e_h^n = \bar{u}_h^n - u_h^n$ est l'erreur de convergence.

Preuve: linéarité, il est facile de voir que l'erreur de convergence vérifie :

$$\begin{cases} \frac{e_h^{n+1} - 2e_h^n + e_h^{n-1}}{\Delta t^2} + A_h e_h^n = \varepsilon_h^n \\ e_h^0 = \bar{u}_h^0 - u_h^0, & (e_j^0 = u_0(x_j) - u_{0j}) \\ e_h^1 = \bar{u}_h^1 - u_h^1, & (e_j^1 = u(x_j, \Delta t) - u_j^1) \end{cases}$$

où ε_h^n est l'erreur de troncature, définie en (61). D'après l'estimation (83) du corollaire 2, l'énergie associée à ce problème (85) vérifie:

$$\sqrt{E_h^{n+1/2}} \leq \sqrt{E_h^{1/2}} + \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{1-\alpha^2}} \Delta t \sum_{k=1}^n \|\varepsilon_h^k\|$$

Sous la condition CFL $\alpha < 1$, c'est à dire **si le schéma est stable**, cette énergie est une quantité quadratique positive, ce qui montre que si le second membre de cette estimation tend vers 0, alors l'énergie tend vers 0 et ceci impliquera que l'erreur tend vers 0. On remarque qu'il y a deux sources d'erreur:

- le terme

$$\sqrt{E_h^{1/2}} = \frac{1}{2} \left\| \frac{e_h^1 - e_h^0}{\Delta t} \right\|^2 + \frac{1}{2} (A_h e_h^0, e_h^1)$$

qui représente l'erreur due à l'approximation des conditions initiales. Ce terme tend vers 0 si les données initiales sont bien approchées.

• le terme $\Delta t \sum_{k=1}^n \|\varepsilon_h^k\|$ provenant de l'erreur de troncature. **Pour n'importe quel schéma consistant**, on peut montrer que ce terme tend vers 0. En effet, dans ce cas on sait que $\varepsilon_j^k \rightarrow 0$ lorsque Δt et Δx tendent vers 0, ce qui veut aussi dire qu'on a une estimation du type:

$$|\varepsilon_j^k| \leq C(\Delta t, h) \nu_j^k$$

où ν_h^k est une suite de fonctions bornées de L_h^2 et $C(\Delta t, h) \rightarrow 0$ lorsque Δt et Δx tendent vers 0. Il est facile d'en déduire que

$$\|\varepsilon_h^k\| \leq C(\Delta t, h) \|\nu_h^k\|, \quad \forall k$$

Par conséquent:

$$\Delta t \sum_{k=1}^n \left\| \varepsilon_h^k \right\| \leq \Delta t C(\Delta t, h) \sum_{k=1}^n \left\| \nu_h^k \right\|$$

Plus particulièrement, pour notre schéma, on peut montrer¹ que si la solution est assez régulière (on voit la régularité nécessaire dans l'estimation), on a

$$\Delta t \sum_{k=1}^n \left\| \varepsilon_h^k \right\| \leq C \left(\Delta t^2 \left\| \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} \right\|_{C^0(0,T;L^2)} + h^2 \left\| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right\|_{C^0(0,T;L^2)} + \Delta t^2 h \left\| \frac{\partial^5 u}{\partial t^4 \partial x} \right\|_{C^0(0,T;L^2)} \right)$$

Donc l'erreur de consistance est d'ordre 2.

Ce qui montre que le schéma est convergent. ■

Remarque 5 - Sur l'erreur due à l'approximation des conditions initiales

Le terme $\sqrt{E_h^{1/2}}$ dans le membre de droite de l'estimation d'erreur (84) représente l'erreur commise sur l'approximation des conditions initiales. Si par exemple, nous faisons le choix d'approcher u_0 et u_1 par u_{0h} et u_{1h} définis en (28), c'est à dire les valeurs ponctuelles, on a

$$e_h^0 = 0$$

et

$$e_j^1 = u(x_j, \Delta t) - u_j^1 = u_0(x_j) + \Delta t u_1(x_j) + \frac{\Delta t^2}{2} c^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}(x_j) + O(\Delta t^3) - u_j^1$$

C'est sur ce terme qu'on va voir l'importance du choix du démarrage.

- Si on avait fait le choix (59), c'est à dire:

$$u_j^1 = u_{0j} + \Delta t u_{1j}$$

on voit que on obtient

$$e_j^1 = \underbrace{u_0(x_j) - u_{0j}}_{=0} + \Delta t \underbrace{(u_1(x_j) - u_{1j})}_{=0} + O(\Delta t^2) = O(\Delta t^2)$$

Or dans le terme d'erreur ce n'est pas e_h^1 qui intervient mais $e_h^1/\Delta t$:

$$E_h^{1/2} = \frac{1}{2} \left\| \frac{e_h^1 - e_h^0}{\Delta t} \right\|^2 + \frac{1}{2} (A_h e_h^0, e_h^1) = \frac{1}{2} \left\| \frac{e_h^1}{\Delta t} \right\|^2 = O(\Delta t^2) \Rightarrow \sqrt{E_h^{1/2}} = O(\Delta t)$$

- Par contre, si on démarre avec (60), c'est à dire:

$$u_j^1 = u_{0j} - \frac{\Delta t^2}{2} (A_h u_{0h})_j + \Delta t u_{1j}$$

¹Nous ne faisons pas la démonstration ici qui est technique sans être difficile: elle repose sur des développements de Taylor avec reste intégral

on obtient:

$$\begin{aligned}
e_j^1 &= u_0(x_j) - u_{0j} + \Delta t(u_1(x_j) - u_{1j}) + \frac{\Delta t^2}{2}(c^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (A_h u_{0h})_j) + O(\Delta t^3) \\
&= \frac{\Delta t^2}{2} \underbrace{(c^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}(x_j) + (A_h u_{0h})_j)}_{O(h^2)} + O(\Delta t^3)
\end{aligned}$$

et cette fois ci on peut montrer que

$$\sqrt{E_h^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\| \frac{e_h^1}{\Delta t} \right\| = O(\Delta t^2)$$