Simulation de la propagation des ondes en milieux 1D et 2D

Ce projet a pour sujet d'appliquer et d'étudier la méthode des différences finies espace-temps pour la résolution numérique de l'équation des ondes dans un milieu homogène, puis hétérogène. Les objectifs principaux sont d'implémenter différents schémas aux différences finis, de mener une analyse de convergence de ces schémas, et de comprendre les phénomènes de dispersion et d'anisotropie numériques. Si le temps le permet, la fin du projet sera consacrée aux équations de l'élastodynamique et à la simulation de sismogrammes (synthétiques) en temps à partir de la modélisation dans le domaine fréquentiel.

1 Motivations

L'une des principales difficultés lors de la simulation de phénomènes de propagation d'onde est la dispersion numérique qui rend la vitesse de l'onde dépendante de la fréquence. La dispersion numérique présente dans les principales méthodes numériques temporelles employées dans les codes industriels génère des erreurs de plus en plus grandes à mesure que la durée de simulation augmente. Ce phénomène mène au delà d'un certain temps à une déformation non physique du signal, et peut rendre inexploitable l'information de sismogrammes par exemple. Pour mieux comprendre cet inconvénient numérique et comparer la robustesse de schémas aux différences finis à la dispersion numérique, on calcule la relation de dispersion associée à chaque schéma et on trace les courbes de dispersion. Cette étude permet de savoir quels nombres de points de discrétisation par longueur d'onde λ et par période T il faudrait fixer pour diminuer l'erreur.

L'idée naturelle est de proposer des schémas aux différences finies d'ordre élevé tout en assurant un bon compromis entre coût de calcul et précision. Nous allons étudier des schémas permettant de contrôler la dispersion numérique.

2 Milieu homogène

La première partie du projet porte sur l'étude de l'équation des ondes dans un milieu homogène 1D. Soit $c > 0$ la vitesse de propagation, supposée constante, de l'onde. On considère le problème de Cauchy suivant : trouver $u : (t, x) \to u(t, x)$ telle que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) - c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = f(t,x),\ t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = u_1(x) \quad x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{1}$$

avec le terme source f et les données initiales u_0 et u_1 suffisamment régulières pour assurer l'existence et l'unicité de la solution du problème (1).

2.1 Etude du problème continu

2.1.1 Formule de D'Alembert

La formule de D'Alembert donne une formule explicite de la solution du problème de Cauchy (1). On a le résultat suivant

Théorème 2.1 *La solution du problème de Cauchy* (1) *est donnée par la formule de D'Alembert*

$$u(t,x) = \frac{1}{2}(u_0(x+ct) + u_0(x-ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} u_1(y)dy + \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{|y-s|<c(t-s)} f(y,s)dyds.$$

Preuve 2.1 *Revoir la preuve vue en cours.*

- Application : Propagation d'une onde sonore dans un tube de longueur 2ℓ sans terme source ($f = 0$) avec des conditions aux limites de Dirichlet homogènes

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) - c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = 0,\ t>0,\ x \in]-\ell,\ell[, \\ u(t,-\ell) = u(t,\ell) = 0,\ t > 0, \\ u(0,x) = u_0(x),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0, \quad x \in]-\ell,\ell[, \end{cases} \tag{2}$$

avec $u_0(x) = \cos\left(\dfrac{(2m+1)\pi}{2\ell}x\right)$. Calculer l'expression explicite de la solution $u(t,x)$ du problème (2). Vérifier que la période de l'onde est $T = \dfrac{4\ell}{(2m+1)c}$. Donner quelques illustrations numériques (exemple : fixer $m = 3$, $c = 1$, $\ell = 1$). Il serait intéressant de réaliser un film pour observer la propagation de l'onde.

2.1.2 Notion d'onde harmonique

On définit les quantités suivantes

- la fréquence f (en Hz),
- la pulsation ou fréquence angulaire $\omega := 2\pi f$,
- la longueur d'onde (ou période spatiale) $\lambda = \dfrac{c}{f}$ (en m),
- le nombre d'onde $k := \dfrac{2\pi}{\lambda} = \dfrac{\omega}{c}$ (ou fréquence spatiale, en rad.m^{-1}).

On considère des solutions particulières de l'équation des ondes sans terme source ($f = 0$) : les ondes harmoniques planes. Elles s'écrivent sous la forme

$$u(t,x) = e^{i(\omega t - kx)},\ (\omega,k) \in \mathbb{R}^2. \tag{3}$$

La fonction est oscillante en temps et en espace. Elle est périodique en temps de période T et en espace de période λ. On peut écrire

$$u(t,x) = e^{i\omega\left(t-\frac{x}{V}\right)}, \tag{4}$$

en posant $V = \dfrac{\omega}{k}$. Il s'agit d'une onde qui se propage à la vitesse V, dite vitesse de phase.

- Etablir la relation reliant $\omega := \omega(k)$ et k vérifiée par toute solution harmonique de l'équation des ondes. Cette relation est appelée relation de dispersion où k joue le rôle de paramètre.
- L'équation est dite dispersive si $\omega(k)$ est réelle et si $\det|J\omega| \neq 0$ avec $J\omega$ la matrice jacobienne de ω. L'équation des ondes est-elle dispersive ?
- En déduire la relation entre λ et T.
- Expliquer pourquoi, en milieu homogène, le signal n'est pas déformé au cours du temps.

Supposons u_0 et u_1 régulières à support compact. Mettons en évidence le lien entre les ondes planes harmoniques et le problème de Cauchy (1). Pour cela, on va utiliser la transformée de Fourier en espace, définie dans l'espace $L^1(\mathbb{R})$

$$\hat{u}(k) = \mathcal{F}u(k) := \int_{\mathbb{R}} u(x)e^{-ikx}dx. \tag{5}$$

La transformée de Fourier en x de la fonction $u(t,x)$ solution de (1) est définie par

$$\hat{u}(t,k) = \int_{\mathbb{R}} u(t,x)e^{-ikx}dx. \tag{6}$$

On peut alors reconstruire u à l'aide de la formule

$$u(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{u}(t,k)e^{ikx}dx. \tag{7}$$

- Vérifier que pour chaque $k \in \mathbb{R}$ la fonction $t \mapsto \hat{u}(t,k)$ est solution de l'EDO

  $$\frac{d^2\hat{u}}{dt^2} + c^2k^2\hat{u} = 0$$

  avec les conditions initiales $\hat{u}(0,k) = \hat{u}_0(k)$ et $\dfrac{d\hat{u}}{dt}(0,k) = \hat{u}_1(k)$ puis que

  $$\hat{u}(t,k) = \hat{u}_0(k)\cos(ckt) + \hat{u}_1(k)\frac{\sin(ckt)}{ck}$$

  et en déduire $u(t,x)$ par transformée de Fourier inverse.
- On pose $\hat{u}(t,k) = \hat{u}^+(t,k) + \hat{u}^-(t,k)$ avec $\hat{u}^+(t,k) = a^+(k)e^{-ickt}$ et $\hat{u}^-(t,k) = a^-(k)e^{ickt}$. Expliciter les fonctions complexes $a^+(k)$ et $a^-(k)$. En déduire que la solution $u(t,x)$ s'écrit comme la somme de deux ondes.

On retiendra que les ondes planes harmoniques constituent dans le cas d'un milieu homogène infini une base de solutions de l'équation des ondes.

2.1.3 Cas L-périodicité en espace

Soit $L > 0$ un paramètre réel. On suppose que les données initiales u_0 et u_1 sont 2L-périodiques. La solution est donc elle aussi 2L-périodique.

- Montrer que la condition de 2L-périodicité implique que les nombres d'onde k_M des solutions de type ondes planes harmoniques vérifient $k_M L = \pi M$, avec $M \in \mathbb{Z}$.
- En déduire l'expression des ondes planes harmoniques solution de (1) pour tout $M \in \mathbb{Z}$, $\forall t > 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}$ et les conditions initiales associées.
- Ecrire la relation de dispersion reriant ω_M^2 et k_M^2.

2.2 Semi-discrétisation en espace par un schéma aux différences finies

On suppose que les données initiales sont 2L-périodiques et que le terme source est nul.

Soit $h = \dfrac{2L}{J}$ le pas de discrétisation en espace du domaine $]-L, L[$, avec $J \in \mathbb{N}^*$. Les points de discrétisation sont définis par $x_j = -L + hj$, $j = 0, \ldots, J$. On pose pour tout $t > 0$ le vecteur $U_h(t) = (U_1(t), \ldots, U_J(t)) \in \mathbb{R}^J$ qui approche les valeurs prises $U_{\text{ex}}(t) = (u(t, x_1), \ldots, u(t, x_J))$ par la solution exacte au temps t aux points x_j, $j = 1, \ldots, J$. Les conditions de 2L-périodicité sont données par

$$U_0(t) = U_J(t) \text{ et } U_{J+1}(t) = U_1(t).$$

On choisit d'approcher la dérivée partielle d'ordre 2 en espace par une approximation centrée d'ordre 2. On obtient le schéma semi-discrétisé en espace suivant : trouver $U_h(t) \in \mathbb{R}^J$ 2L-périodique solution de

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 U_j}{\partial t^2}(t) - c^2 \dfrac{U_{j-1} - 2U_j + U_{j+1}}{h^2}(t) = 0, \ t > 0, \forall 1 \leq j \leq J, \\ \\ U_j(0) = U_{0,j}, \ \dfrac{dU_j}{dt}(0) = U_{1,j} \ \forall 1 \leq j \leq J, \end{cases} \tag{8}$$

où les vecteurs $U_{0,h} = (U_{0,j})_{1 \leq j \leq J}$ et $U_{1,h} = (U_{1,j})_{1 \leq j \leq J}$ sont des approximations en espace des données initiales u_0 et u_1. Pour des données suffisamment régulières, on a $U_{0,j} = u_0(x_j)$ et $U_{1,j} = u_1(x_j)$.

On cherche les solutions de la forme $U_j(t) = e^{i(\omega(k)t - kx_j)}$ et on la note $U_h(t) = e^{i(\omega(k)t} e^{-ikX_h}$, avec $X_h = (x_1, \ldots, x_J) \in \mathbb{R}^J$.

- Expliciter la relation de dispersion liant ω^2 et k^2.
- En déduire que pour un nombre d'onde k fixé, on a $\omega = \pm \omega_h(k)$ avec $\omega_h(k) = \dfrac{2c}{k} \sin \dfrac{kh}{2}$. Est-ce-que le signal se propage-t-il sans déformation ?
- Montrer que $\left| \sin\left(\dfrac{kh}{2}\right) - 1 \right| \leq \dfrac{k^2 h^2}{24}$.

- En déduire l'expression des ondes planes harmoniques solution de (8) pour tout $M \in \mathbb{Z}$, $\forall t > 0$ et les conditions initiales associées.
- En déduire que $\omega_{M,h} = \omega_L + \mathcal{O}(h^2)$ et donc que le schéma semi-discrétisé est d'ordre 2 en espace.

2.3 Discrétisation espace-temps par un schéma aux différences finies

- Ecrire un schéma aux différences finies explicite espace-temps d'ordre 2 en temps et en espace.

3 Milieu hétérogène

4 Elastodynamique et simulation de sismogrammes en temps