Собственные векторы и собственные значения линейного преобразования

f: линейное преобр. n-мерного пр-ва X

Число λ - собственное значение f, если $\exists x \neq 0$: $f(x) = \lambda x$,

x - собственный вектор

Важно: $x \neq 0$, иначе подходит любое λ

$A\bar{x} = \lambda \bar{x}$

$(A - \lambda E)\bar{x} = \bar{0}$, $\bar{x} \neq \bar{0}$ $\Rightarrow$ $\det(A - \lambda E) = 0$ - <u>характеристическое уравнение</u>

$$\begin{vmatrix} x_{11}-\lambda & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \operatorname{Sp} A \cdot \lambda^{n-1} + \dots + \det A$$

$\operatorname{Sp} A = \operatorname{Tr} A = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$ - след матрицы A

Многочлен нечетной степени с действ. коэфф. обязательно имеет действ. корни

$\Downarrow$

ЛП нечетномерного пр-ва обязательно имеет собственный вектор

<u>Собственное подпр-во</u>

$E_\lambda = \{ x \in X : f(x) = \lambda x \}$ - подпр-во X

λ - собственное значение $\Rightarrow$ E_λ - собственное подпр-во

$\dim E_\lambda \leq \operatorname{Kp} \lambda_0$, $\forall$ собственного значения λ.

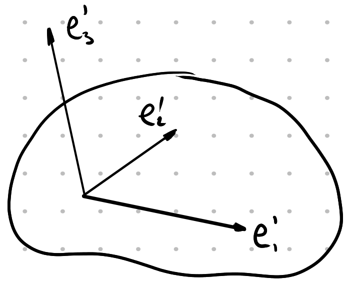
Если $\exists$ базис $e_1, \dots, e_n$, который состоит из собств. векторов $(f(e_i) = \lambda_i e_i,\ i = 1, \dots, n)$, то в этом базисе матрица имеет диагональный вид:

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$ Такое преобразование называется диагонализируемым.

№24.20.3

f - ортогональное проектирование $3^х$-мерного пр-ва $\mathbb{R}^3$ на плоскость $x+y+z=0$

Найти собственные значения, векторы, привести к собственному виду матрицу



	собственное значение:
$f(e_1')=e_1'$	1
$f(e_2')=e_2'$	1
$f(e_3')=0$	0

$E_1=\{(x,y,z):\ x+y+z=0\}$

E_0 - прямая с напр. век. $(1,1,1)^T$

$E_0=\{(x,y,z):\ x=y=z\}$

Матрица: $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ в базисе e_1', e_2', e_3'

Способ 2:

Из задачи 23.9.3: в стандартном базисе $e_1=(1\ 0\ 0)^T$, $e_2=(0\ 1\ 0)^T$, $e_3=(0\ 0\ 1)^T$

Матрица преобр: $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}\frac{2}{3}-\lambda&-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}-\lambda&-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-\lambda&-\lambda&-\lambda\\-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}-\lambda&-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda\begin{vmatrix}1&1&1\\-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}-\lambda&-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1-\lambda&0\\0&0&1-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(1-\lambda)^2=0$$

$\lambda=0$ кр. 1 $\quad \lambda=1$ кр 2.

$\lambda=0$: $(A-0\cdot E)=\bar{0}$

$$A-\lambda E=A\sim\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix},\quad rgA=2$$

$\dim E_0=n-rgA=3-2=1$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$\lambda=1$: $(A-1\cdot E)=\bar{0}$

$$A-E=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad rgA=1$$

$\dim E_1=n-rgA=3-1=2$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-1\\1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}C_1+\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}C_2$$

Итого $\bar{x}=C_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+C_3\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

№ 24.12.30

$$A = A_{283} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 5 & 1 \\ -1 & -3-\lambda & 0 \\ -2 & -3 & -2-\lambda \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & +3+\lambda & 0 \\ +2 & +3 & +2+\lambda \\ 2-\lambda & 5 & 1 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & 3+\lambda & 0 \\ 0 & -2\lambda-3 & 2+\lambda \\ 0 & \lambda^2+\lambda-1 & 1 \end{vmatrix} = -3-2\lambda-(2+\lambda)(\lambda^2+\lambda-1) =$$

$$= -(\lambda+1)^3$$

$\lambda = -1$, кр. 3

$(A+E)\bar{x} = \bar{0} \hookrightarrow \quad \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \bar{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} c$ – векторов не хватает на базис

$\Downarrow$

не диагонализируема

Критерий диагонализируемости.

ЛП диагонализируемо $\Leftrightarrow$ все корни характер. ур-я действительны и $\forall$ собственного значения $\lambda \hookrightarrow \dim E_\lambda = \text{Кр}\,\lambda$

Частный случай. Достаточное условие диагонализируемости.

Все собственные значения действительные и простые

Простые 2мерные примеры.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(5-\lambda) - 3 = (\lambda-2)(\lambda-6)$$

$\lambda_1 = 6 \qquad \lambda_2 = 2$

$A-6E = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \to \bar{x} = e_1\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$A-2E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \to \bar{x} = e_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Пример 2.

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda=0: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to \bar{x} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$A-\lambda E = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2, \quad \lambda=0$ кр. 2