Урок 6   1
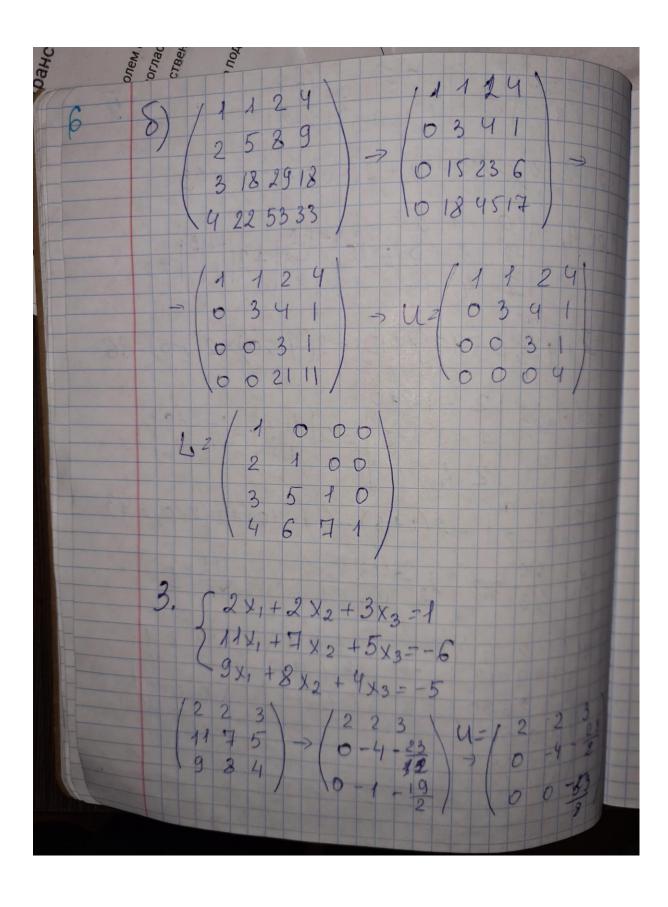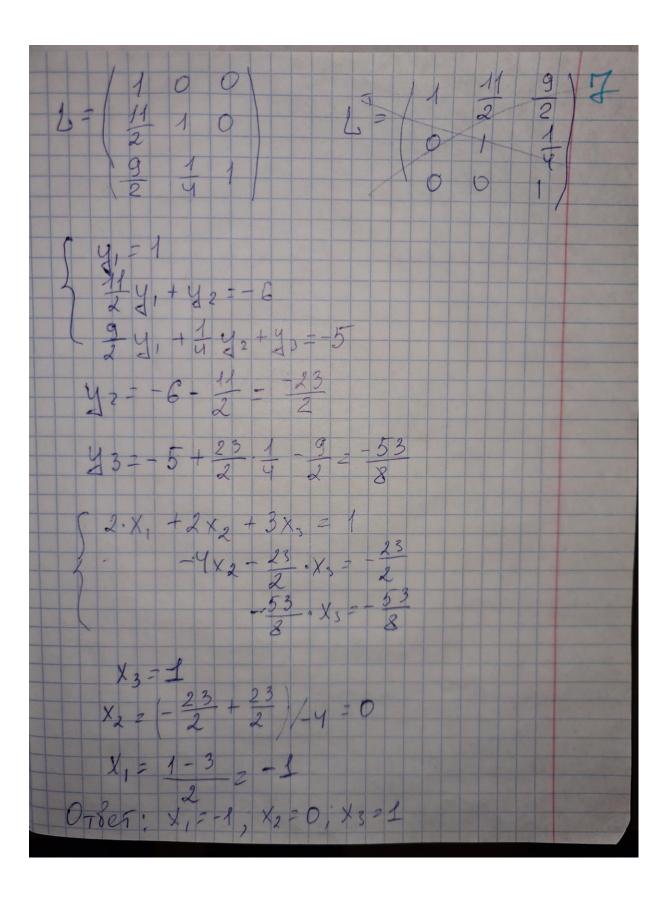
1) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -2, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 4. \end{cases}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & | & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & | & -2 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & | & 4 \end{pmatrix}$ $II - I \cdot 2; \; III - I \Rightarrow$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & | & 0 \\ 0 & -1 & +1 & 5 & | & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & | & 4 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ -x_2 + x_3 + 5x_4 = 0-2 \\ -2x_3 + 3x_4 = 4 \end{cases}$

$x_3 = -\dfrac{(4 - 3x_4)}{2} = \dfrac{3}{2}x_4 - 2$

$x_2 = -\left(-\left(\dfrac{3}{2}x_4 - 2\right) - 5x_4 - 2\right) = \dfrac{13}{2}x_4$

$x_1 = -\dfrac{13}{2}x_4 + \dfrac{3}{2}x_4 - 2 + 2x_4 = -3x_4 - 2$

Система имеет бесконечное число решений, лежащих на прямой и определяемой найденными соотношениями

2   2.

a) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_2 - 5x_2 - 3x_3 = -17, \\ x_1 + x_2 - 3x = 0. \end{cases}$

$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -5 & -3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$

$= 3(15+3) + (6+3) + (2+5) = 58 \Rightarrow$ ранг $= 3$

т.к $\text{rank} A = \text{rank} \tilde{A} = n$, то система

определена, т.е имеет единственное

решение.

б) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -2 \\ 3x_1 - 6x_2 + 9x_3 = 5 \end{cases}$

$\begin{pmatrix} 2 & -4 & -6 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot 2) \\ \\ \cdot 3 \end{matrix} \Rightarrow$ ранг $= 1$

$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & | & 1 \\ 1 & -2 & 3 & | & -2 \\ 3 & -6 & 9 & | & 5 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -15 \Rightarrow$ ранг $= 2$

т.к $\text{rank} A < \text{rank} \tilde{A}$, система несовмест-
на

3. rank A

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 & | & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & | & 1 \end{pmatrix}$$

rank $A = 4$ $(\det A = 5 \cdot 3 \cdot 2 = 30)$

т.к. rank $A =$ rank $\tilde{A} = 4$, система

совместна, определена и имеет 1 решение

4. $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & a \\ 4 & 5 & 6 & | & 8 \\ 7 & 8 & 9 & | & c \end{pmatrix}$ rank A 2

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & a \\ 5 & 6 & 8 \\ 8 & 9 & c \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 8 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} =$$

$= a(45-48) - 8(18-24) + c(12-15) = -3a + 68 - 3c =$

система несовместна при:

$-a + 28 - c \neq 0$

4

Урок 7

1) а) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 \\ 3x_1 - 4x_2 = 7 \end{cases}$

$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -4 + 6 = 2$

$\det A_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} = -4 + 14 = 10$

$\det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 7 - 3 = 4$

$x_1 = \dfrac{10}{2} = 5 \qquad x_2 = \dfrac{4}{2} = 2$

проверка: $5 - 2 \cdot 2 = 1$

б) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 10 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = -2 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} +$

$+ 2\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 2(1 + 12) - (-1 - 20) + 2(3 - 5) = 43$

$\det A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 10 & 5 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \cancel{10\,5}$

$$2\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 10 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 10 & 5 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(-2+3) - (10-5) + 2(-30+10) = -43$$

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 10 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 10\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+1\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 10(1+12) + 2(-1-20) + 1(3-5) = 86$$

$$\det A_{32} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 10 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 10 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+2\begin{vmatrix} -1 & 10 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2(1+8) - (-1-40) + 2(2-10) = 43$$

$$x_1 = \frac{86}{43} = 2 \qquad x_2 = \frac{-43}{43} = -1 \qquad x_3 = \frac{43}{43} = 1$$

$$2a) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 9 & 12 \\ 3 & 26 & 30 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 20 & 18 \end{pmatrix} \xrightarrow{U=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

6

б)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 & 9 \\ 3 & 18 & 29 & 18 \\ 4 & 22 & 53 & 33 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 15 & 23 & 6 \\ 0 & 18 & 45 & 17 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 21 & 11 \end{pmatrix} \rightarrow U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

3.
$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 11x_1 + 7x_2 + 5x_3 = -6 \\ 9x_1 + 8x_2 + 4x_3 = -5 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 11 & 7 & 5 \\ 9 & 8 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -\frac{23}{12} \\ 0 & -1 & -\frac{19}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{U=} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -\frac{23}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-53}{3} \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{11}{2} & 1 & 0 \\ \dfrac{9}{2} & \dfrac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \qquad L^T = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{11}{2} & \dfrac{9}{2} \\ 0 & 1 & \dfrac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7

$$\begin{cases} y_1 = 1 \\ \dfrac{11}{2} y_1 + y_2 = -6 \\ \dfrac{9}{2} y_1 + \dfrac{1}{4} y_2 + y_3 = -5 \end{cases}$$

$$y_2 = -6 - \dfrac{11}{2} = -\dfrac{23}{2}$$

$$y_3 = -5 + \dfrac{23}{2} \cdot \dfrac{1}{4} - \dfrac{9}{2} = -\dfrac{53}{8}$$

$$\begin{cases} 2 \cdot x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ -4x_2 - \dfrac{23}{2} \cdot x_3 = -\dfrac{23}{2} \\ -\dfrac{53}{8} \cdot x_3 = -\dfrac{53}{8} \end{cases}$$

$$x_3 = 1$$

$$x_2 = \left(-\dfrac{23}{2} + \dfrac{23}{2}\right) / -4 = 0$$

$$x_1 = \dfrac{1 - 3}{2} = -1$$

Ответ: $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$

4. $\begin{cases} 81x_1 - 45x_2 + 45x_3 = 531 \\ -45x_1 + 50x_2 - 15x_3 = -460 \\ 45x_1 - 15x_2 + 38x_3 = 193 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 81 & -45 & 45 \\ -45 & 50 & -15 \\ 45 & -15 & 38 \end{pmatrix}$$

$l_{11} = \sqrt{81} = 9$

$l_{21} = \dfrac{-45}{9} = -5$

$l_{31} = \dfrac{45}{9} = 5$

$l_{22} = \sqrt{50 - 25} = 5$

$l_{32} = \dfrac{1}{5}(-15 - (-5)\cdot 5) = \dfrac{1}{5}\cdot 10 = 2$

$l_{33} = \sqrt{38 - 25 - 4} = \sqrt{9} = 3$

$$L = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -5 & 5 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad L^T = \begin{pmatrix} 9 & -5 & 5 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$Ly = b$

$$\begin{cases} 9y_1 = 531 \\ -5y_1 + 5y_2 = -460 \\ 5y_1 + 2y_2 + 3y_3 = 193 \end{cases}$$

$y_1 = 59$

$5y_2 = -460 + 5 \cdot 59 = -165 \qquad y_2 = -33$

$3y_3 = 193 - 5 \cdot 59 + 2 \cdot 33 = -36 \qquad y_3 = -12$

$L^T x = y$

$$\begin{cases} 9x_1 - 5x_2 + 5x_3 = 59 \\ 5x_2 + 2x_3 = -33 \\ 3x_3 = -12 \end{cases}$$

$x_3 = -12/3 = -4$

$5x_2 = -33 + 2 \cdot 4 = -25 \qquad x_2 = \dfrac{-41}{5} = -5$

$9x_1 = 59 + 5 \cdot 4 + 5(-5) = +54 \qquad x_1 = \dfrac{+54}{9} \qquad x_1 = 6$

Ответ: $x_1 = 6, \quad x_2 = -5, \quad x_3 = -4$