

Урок 6

$$1) \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -2, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 4. \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 4 \end{array} \right) \quad \text{II} - \text{I} \cdot 2; \text{III} - \text{I} \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & +1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 4 \end{array} \right) \quad \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ -x_2 + x_3 + 5x_4 = -2 \\ 2x_3 + 3x_4 = 4 \end{cases}$$

$$x_3 = \frac{-(4 - 3x_4)}{2} = \frac{3}{2}x_4 - 2$$

$$x_2 = -\left(-\left(\frac{3}{2}x_4 - 2\right) - 5x_4 - 2\right) = \frac{13}{2}x_4$$

$$x_1 = -\frac{13}{2}x_4 + \frac{3}{2}x_4 - 2 + 2x_4 = -3x_4 - 2$$

Система имеет бесконечное число решений, лежащих на прямой и определяемой найденными соотношениями

2

2.

$$a) \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 = -17, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -5 & -3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(15+3) + (6+3) + (2+5) = 58 \Rightarrow \text{ранг} = 3$$

т.к. $\text{rank} A = \text{rank} \tilde{A} = n$, то система определена, ае имеет единственное решение.

$$b) \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -2, \\ 3x_1 - 6x_2 + 9x_3 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot 2) \\ \cdot 1) \\ \cdot 3) \end{matrix} \Rightarrow \text{ранг} = 1$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -2 \\ 3 & -6 & 9 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -15 \Rightarrow \text{ранг} = 2$$

т.к. $\text{rank} A < \text{rank} \tilde{A}$, система несовместна

3.

rank A

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

$$\text{rank } A = 4 \quad (\det A = 5 \cdot 3 \cdot 2 = 30)$$

тк rank A = rank $\tilde{A} = 4$, система
совместна, определена и имеет решение

4.

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & a & 5 \\ 5 & 6 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & c & 12 \end{array} \right)$$

rank A = 2

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & a \\ 5 & 6 & 8 \\ 8 & 9 & c \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 8 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= a(45 - 48) - 8(18 - 24) + c(12 - 15) = -3a + 68 - 3c =$$

система несовместна при:

$$-a + 28 - c \neq 0$$

4

Урок 7

$$1) a) \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 \\ 3x_1 - 4x_2 = 7 \end{cases}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -4 + 6 = 2$$

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} = -4 + 14 = 10$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 7 - 3 = 4$$

$$x_1 = \frac{10}{2} = 5 \quad x_2 = \frac{4}{2} = 2$$

$$\text{проверка: } 5 - 2 \cdot 2 = 1$$

$$b) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 10 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = -2 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ 2 \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 2(1 + 12) - (-1 - 20) + 2(3 - 5) = 43$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 10 & 5 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \cancel{20} - \cancel{10} - 5$$

$$2 \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 10 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 10 & 5 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} =$$

5

$$= 2(-2+3) - (10-5) + 2(-30+10) = -43$$

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 10 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ 2 \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 10(1-12) + 2(-1-20) + 2(3-5) = -86$$

$$\det A_{32} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 10 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 10 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ 2 \begin{vmatrix} -1 & 10 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2(1-8) - (-1-40) + 2(2-10) = 43$$

$$x_1 = \frac{86}{43} = 2 \quad x_2 = \frac{43}{43} = 1 \quad x_3 = \frac{43}{43} = 1$$

$$2a) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 9 & 12 \\ 3 & 26 & 30 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 20 & 18 \end{pmatrix} \xrightarrow{u} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

6

$$8) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 & 9 \\ 3 & 18 & 29 & 18 \\ 4 & 22 & 53 & 33 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 15 & 23 & 6 \\ 0 & 18 & 45 & 17 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 11 \end{pmatrix} \rightarrow U_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$L_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3. \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 11x_1 + 7x_2 + 5x_3 = -6 \\ 9x_1 + 8x_2 + 4x_3 = -5 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 11 & 7 & 5 \\ 9 & 8 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -\frac{23}{2} \\ 0 & -1 & -\frac{19}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{U} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -\frac{23}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{53}{2} \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{11}{2} & 1 & 0 \\ \frac{9}{2} & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{11}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 7$$

$$\begin{cases} y_1 = 1 \\ \frac{11}{2} y_1 + y_2 = -6 \\ \frac{9}{2} y_1 + \frac{1}{4} y_2 + y_3 = -5 \end{cases}$$

$$y_2 = -6 - \frac{11}{2} = -\frac{23}{2}$$

$$y_3 = -5 + \frac{23}{2} \cdot \frac{1}{4} - \frac{9}{2} = -\frac{53}{8}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ -4x_2 - \frac{23}{2}x_3 = -\frac{23}{2} \\ -\frac{53}{8}x_3 = -\frac{53}{8} \end{cases}$$

$$x_3 = 1$$

$$x_2 = \left(-\frac{23}{2} + \frac{23}{2} \right) / -4 = 0$$

$$x_1 = \frac{1-3}{2} = -1$$

$$\text{Answer: } x_1 = -1; x_2 = 0; x_3 = 1$$