1 Урок 1

1) $f_1(x)=e^x,\ f_2(x)=1,\ f_3(x)=x+1,\ f_4(x)=x-e^x$

$f_4=f_3-f_2-f_1=x+1-1-e^x=x-e^x \Rightarrow$
линейно зависимы

2) $f_1(x)=2,\ f_2(x)=x,\ f_3(x)=x^2,\ f_4(x)=(x+1)^2$

$f_4(x)=x^2+2x+1=(x+1)^2$

$f_4(x)=f_3+2\cdot f_2+\frac{1}{2}f_1=x^2+2\cdot x+1 \Rightarrow$
линейно зависима

3) $x=(2,3,5)\in R^3$ $b_1=(0,0,10)$, $b_2=(2,0,0)$
$b_3=(0,1,0)$
$x=0{,}5b_1+b_2+3b_3$
$x=(0{,}5,1,3)$

4) $3x^2-2x+2\in R^3[x]$:

а) $(2,-2,3)$

б)
$$\begin{array}{l|l} 3x^2-2x+2 & x^2,\ x-1 \\ \underline{3x^2} & 3,-2,0 \\ \quad -2x+2 & \\ \quad \underline{-2x+2} & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

$(3, -2, 0)$

2

5. а) Возьмем $x_1 = (0, 1, 3) \in L_4$

$x_2 = (10, 0, 5) \in L$

$x_1 + x_2 = (10, 1, 8) \notin L$

$\Rightarrow$ не является

б) Возьмем например:

$x_1 = \sum \alpha_i u_i \in L$

$x_2 = \sum \beta_i u_i \in L$

проверим 1-е утверждение 1) $u + v \in L$

$x_1 + x_2 = \sum \alpha_i u_i + \sum \beta_i u_i =$

$= \sum (\alpha_i u_i + \beta_i u_i) = \sum u_i (\alpha_i + \beta_i) \in L$

проверим 2-е утвержд. 2) $\alpha \cdot u \in L$

$\beta x_1 = \beta \sum \alpha_i u_i = \sum \beta \cdot \alpha_i u_i \in L \Rightarrow$

$\Rightarrow$ являются

3

Урок 2:

1. а) $x=(0,-3,6)$, $y=(-4,7,9)$

$(x,y)=0\cdot(-4)+(-3)\cdot 7+6\cdot 9=33$

б) $x=(7,-4,0,1)$, $y=(-3,1,11,2)$.

$(x,y)=7\cdot(-3)+(-4)\cdot 1+0\cdot 11+1\cdot 2=-23$

2. $x=(4,2,4)$ и $y=(12,3,4)$

$\|x\|_2=\sqrt{4^2+2^2+4^2}=6$

$\|y\|_2=\sqrt{12^2+3^2+4^2}=13$

$\cos\alpha=\frac{(x,y)}{\|x\|\cdot\|y\|}=\frac{70}{6\cdot 13}$

$\alpha=\arccos(0{,}8974)\approx 0{,}46$ рад

3. а) $(x,y)=|x|\cdot|y|$ проверим на соответствие 4-м аксиомам:

1) $|x|\cdot|y|=|y|\cdot|x|=(y,x)$ +

2) $(\lambda x, y) = |\lambda x| \cdot |y| = \lambda |x| \cdot |y| =$

$= \lambda (x, y)$ (+) 4

3) Возьмем, например $x = (0,1)$ $y = (1,0)$

$(x+y, y) = |x+y| \cdot |y| = \sqrt{2} \cdot 1$

$(x, y) + (y, y) = 1 + 1 = 2 \neq \sqrt{2}$ (—) $\Rightarrow$

не является

б) $(x, y) = 3 \sum x_i y_i$

1) $(x, y) = 3 \sum x_i y_i = 3 \sum y_i x_i = (y, x)$ (+)

2) $(\lambda x, y) = 3 \sum \lambda x_i y_i = 3\lambda \sum x_i y_i = \lambda (x, y)$ (+)

3) $(x_1 + x_2, y) = 3 \sum (x_{1i} + x_{2i}) y_i =$

$= 3 \sum (x_{1i} \cdot y_i + x_{2i} y_i) = 3 \sum x_{1i} y_i + 3 \sum x_{2i} y_i =$

$= 3(x_1, y) + 3(x_2, y)$ (+)

4) $(x, x) = 3 \sum x^2 \geq 0;$ (+) $\Rightarrow$

$3 \sum 0 = 0$

является

4) а) – не является, т.к. нужен 3-й вектор

б) $(x_1; x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{-1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 = 0$

$(x_1, x_3) = 0$

$(x_2, x_3) = 0$

$|x_1|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 = 1$

$|x_2|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 = 1$

$|x_3|^2 = 0 + 0 + 1 = 1 \Rightarrow$

являются ортонормиров. базисами

в) $(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \cdot 0 - \frac{1}{4} + 0 = -\frac{1}{4} \Rightarrow$

не ортогональны $\Rightarrow$ не образуют ортонормиров. базис

г) $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ – образуют ортонормиров. базис в R^3