

ICPC Sinchon



# 10. Dijkstra

10. 다익스트라

## 2023 Summer Algorithm Camp

# 목차

1. 다익스트라 개요
2. 다익스트라 구현
  - $O(V^2)$
  - $O(E \log E)$
3. 그 외 알아 둘 것
  - 최단 경로 트리, 역추적, 상태 확장 등

## 2023 Summer Algorithm Camp

# 다익스트라

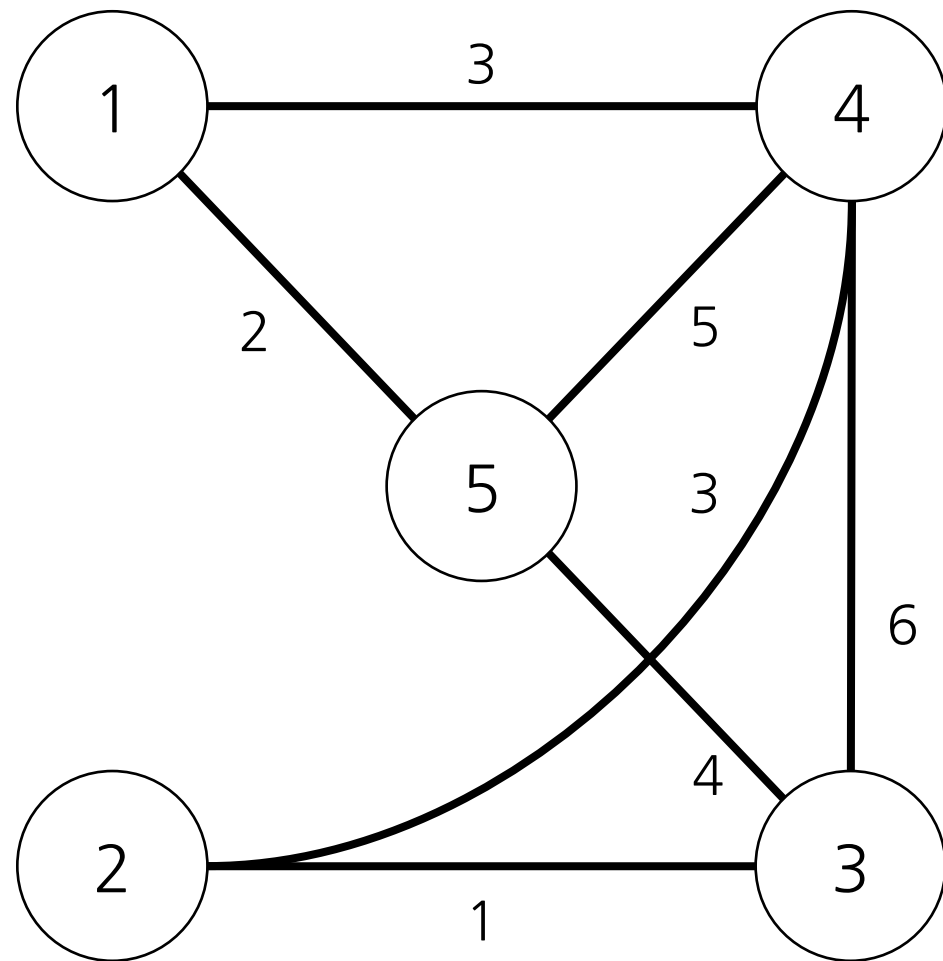
- 다익스트라Dijkstra 알고리즘
  - 두 꼭짓점 간의 가장 짧은 경로를 찾는 알고리즘
  - 일반적인 변형: 시작<sup>source</sup> 정점으로부터 모든 정점과의 최단 경로를 구하는 알고리즘
- 가중치가 양수인 그래프에서 사용할 수 있다.
  - 0과 음수인 그래프에서는 사용할 수 없다.
- 그 외 잘 알려진 최단 경로 알고리즘
  - 꼭 공부해 볼 것: 플로이드-워셜, 벨만포드 등
  - 알아두면 좋을 만한 것: SPFA
  - 이런 게 있다 정도만 알 것: A\* (휴리스틱 기반 알고리즘)

## 2023 Summer Algorithm Camp

# 다익스트라

- 변수 정의
  - $S$  : 최단 경로를 구한 정점의 집합
  - $W[i][j]$  : 간선  $(i, j)$ 의 가중치
    - 단방향이든 양방향이든 상관 없다.
  - $Dist[i]$  : 집합  $S$ 에 있는 정점만을 사용하였을 때, 시작 정점으로부터 정점  $i$ 까지의 최단 경로의 길이
    - 아직 구하지 않은 정점의 최단 경로의 길이는 **무한대**로 정의한다.
    - 알고리즘이 종료되고 나서도 길이가 무한대인 정점들은 도달할 수 없는 정점이라는 의미이다.
- 알고리즘 순서도
- 1. 시작 정점  $s$ 를 집합  $S$ 에 넣고,  $Dist[s] = 0$ 으로 둔다.
- 2. 가장 최근에  $S$ 에 추가된 정점을  $u$ 라고 하자.
- 3.  $u$ 의 인접한 모든 정점  $v$ 에 대하여  $Dist[v]$ 를 다시 계산한다.
  - $Dist[v] = \min(Dist[v], Dist[u] + W[u][v])$ ;
- 4.  $S$ 에 포함되지 않은  $v$  중에서  $Dist[v]$ 가 가장 작은  $v$ 를  $S$ 에 추가한다.
- 5. 모든 정점에 대한 최단 경로가 결정될 때까지 2~4번 과정을 반복한다.

# 다익스트라



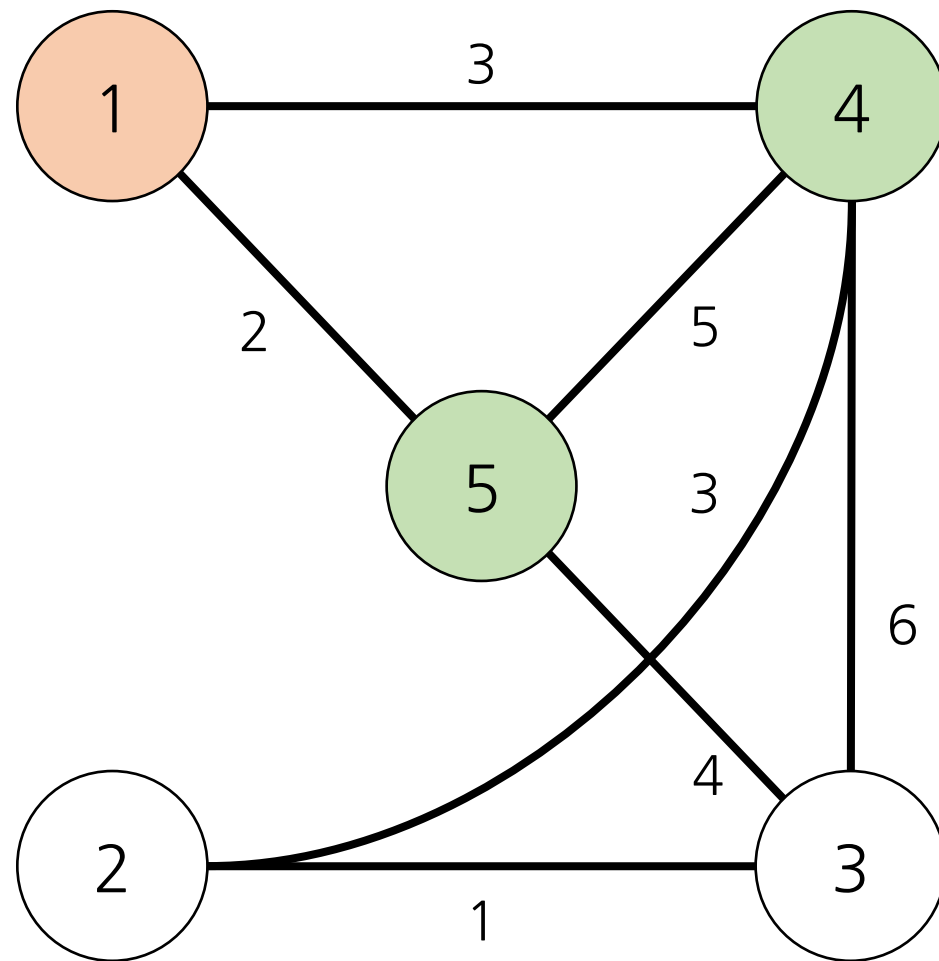
시작점 : 1

Dist[1] = 0으로 하고, S에 1을 넣는다.

$S = \{1\}$

정점	1	2	3	4	5
Dist[i]	0	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$

## 다익스트라



가장 최근에 S에 추가된 노드는 1이다.  
1과 인접한 정점인 4, 5에 대해서 Dist 배열을 갱신한다.

$$\text{Dist}[4] = \min(\text{Dist}[4] = \text{INF}, \text{Dist}[1] = 0 + W[1][4] = 3) = 3$$

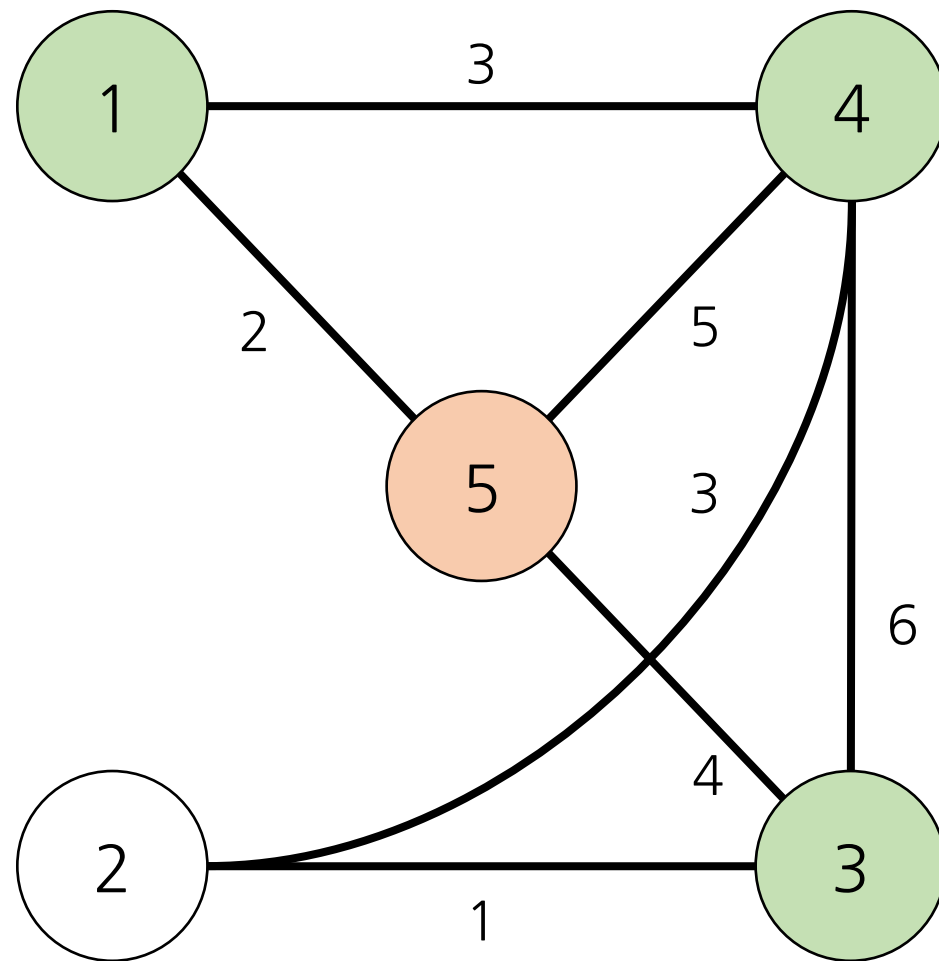
$$\text{Dist}[5] = \min(\text{Dist}[5] = \text{INF}, \text{Dist}[1] = 0 + W[1][5] = 2) = 2$$

Dist[5] = 2로 5번 정점이 S에 추가된다.

$$S = \{1, 5\}$$

정점	1	2	3	4	5
Dist[i]	0	$\infty$	$\infty$	3	2

## 다익스트라



가장 최근에 S에 추가된 노드는 5이다.  
5와 인접한 정점인 1, 3, 4에 대해서 Dist 배열을 갱신한다.

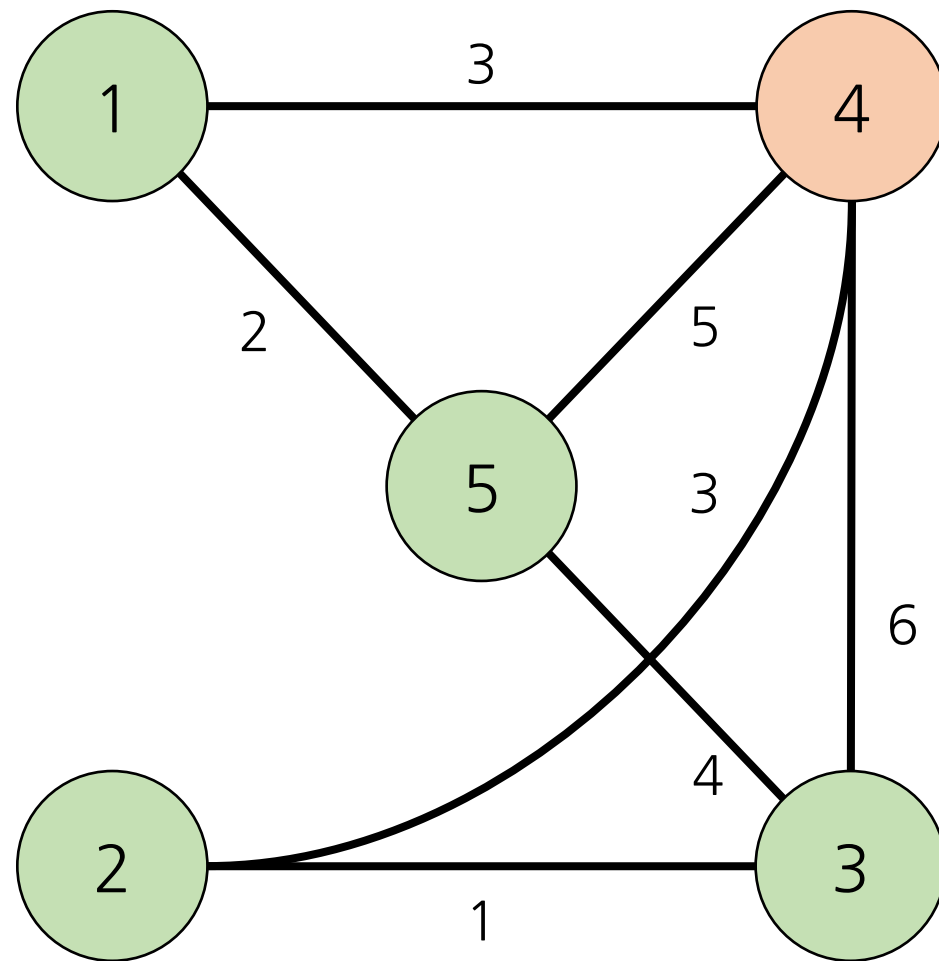
$$\begin{aligned} \text{Dist}[1] &= \min(\text{Dist}[1] = 0, \text{Dist}[5] = 2 + W[5][1] = 2) = 0 \\ \text{Dist}[3] &= \min(\text{Dist}[3] = \text{INF}, \text{Dist}[5] = 2 + W[5][3] = 4) = 6 \\ \text{Dist}[4] &= \min(\text{Dist}[4] = 3, \text{Dist}[5] = 2 + W[5][4] = 5) = 3 \end{aligned}$$

Dist[4] = 3으로 4번 정점이 S에 추가된다.

$$S = \{1, 5, 4\}$$

정점	1	2	3	4	5
Dist[i]	0	$\infty$	6	3	2

## 다익스트라



가장 최근에 S에 추가된 노드는 4이다.  
4와 인접한 정점인 1, 2, 3, 5에 대해서 Dist 배열을 갱신한다.

$$\begin{aligned} \text{Dist}[1] &= \min(\text{Dist}[1] = 0, \text{Dist}[4] = 3 + W[4][1] = 3) = 0 \\ \text{Dist}[2] &= \min(\text{Dist}[2] = \text{INF}, \text{Dist}[4] = 3 + W[4][2] = 3) = 6 \\ \text{Dist}[3] &= \min(\text{Dist}[3] = 6, \text{Dist}[4] = 3 + W[4][3] = 6) = 6 \\ \text{Dist}[5] &= \min(\text{Dist}[5] = 2, \text{Dist}[4] = 3 + W[4][5] = 5) = 2 \end{aligned}$$

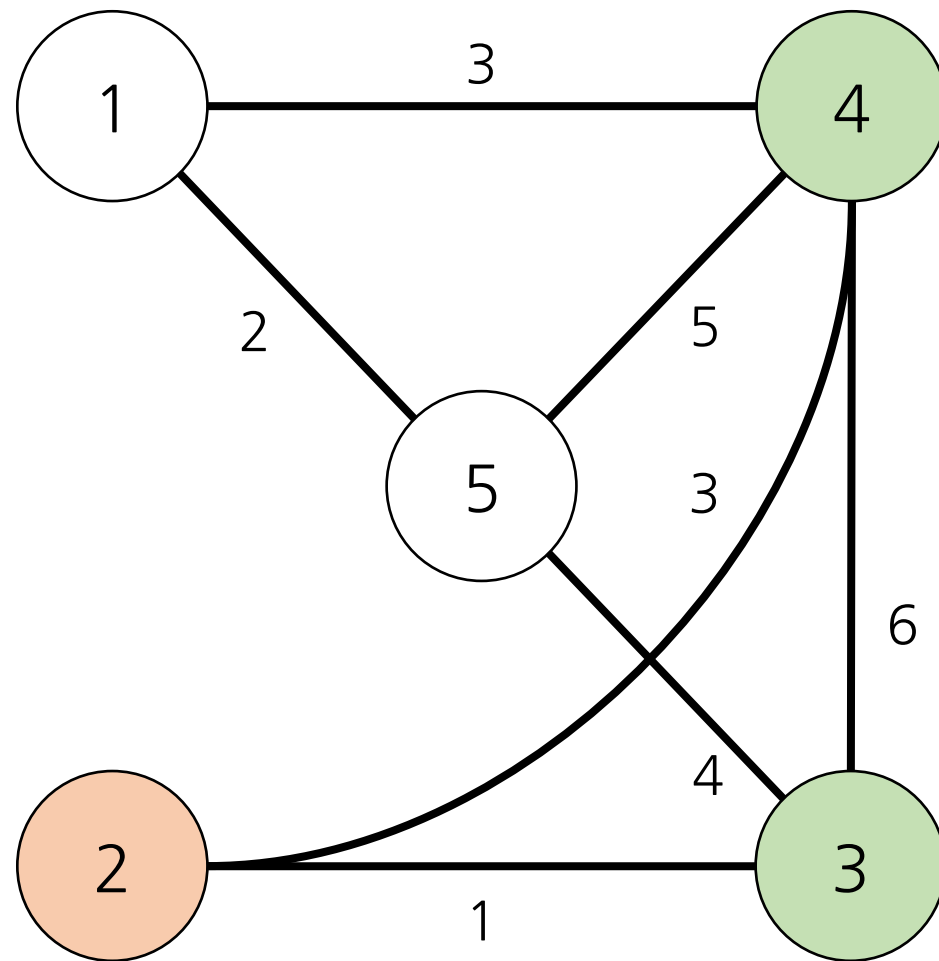
2와 3의 Dist 값이 같다. 아무거나 선택하면 된다.  
Dist[2] = 6으로 2번 정점이 S에 추가된다.

$$S = \{1, 5, 4, 2\}$$

정점	1	2	3	4	5
Dist[i]	0	6	6	3	2



# 다익스트라



가장 최근에 S에 추가된 노드는 2이다.

인접한 정점에 대해 위 작업을 반복하더라도  $\text{Dist}[2] = 6$ 이고, 나머지 Dist 값들이 모두 6 이하이므로 더 이상 갱신되지는 않을 것이다.

이는 3에 대해서도 같으니, Dist 갱신은 생략한다. (실제로 해보더라도 더 이상 Dist 배열이 갱신되지 않는다)

다음 표는 “정점 1”로부터의 최단 경로 길이를 구한 것이다.

$S = \{1, 5, 4, 2, 3\}$

정점	1	2	3	4	5
Dist[i]	0	6	6	3	2

질문?

## 2023 Summer Algorithm Camp

# 다익스트라

- $\text{Dist}[v]$ 의 정의
  - 집합  $S$ 에 있는 정점만을 사용하였을 때, 시작 정점으로부터 정점  $v$ 까지의 최단 경로의 길이
- $\text{Dist}[v]$ 의 갱신
  - $\text{Dist}[v] = \min(\text{Dist}[v], \text{Dist}[u] + W[u][v]);$
- 적당히 알면 좋은 성질
  - $\text{Dist}[v]$ 는 이전에 구한 최단 경로 정보를 활용하여 계산한다.
    - 일종의 동적 계획법 Dynamic Programming
  - 집합  $S$ 에 있는 모든 원소  $u$ 의  $\text{Dist}[u]$ 는 집합  $S$ 에 없는 모든 원소  $v$ 의  $\text{Dist}[v]$ 보다 항상 작거나 같다.
    - $\forall u \in S (\forall v \notin S, \text{Dist}[u] \leq \text{Dist}[v])$
  - 과정마다 하나의 원소를  $S$ 에 넣기 때문에, 이 과정을 정확히  $n$ 번 반복하면 알고리즘은 종료된다.
    - 최단 경로에 포함되는 간선의 개수는 최대  $n - 1$  이하이다.

## 2023 Summer Algorithm Camp

# 다익스트라

- 이미 집합  $S$ 에 있는 원소들은 최단 경로가 확정된 정점들이다.
- 집합  $S$ 에 있는 원소들의 최단 경로가 더 이상 변경되지 않음을 보임으로써 다익스트라가 올바른 최단 경로를 구한다는 것을 보이자.
- $v$ 가 집합  $S$ 에 있을 때,  $\text{Dist}[v]$ 가 바뀌는지, 바뀌지 않는지 확인하자.
- 정점  $u$ 에서 정점  $v$ 로 갱신한다고 하면,
  - 정점  $u$ 가  $S$  안에 있는 원소라면,  $\text{Dist}[u] + W[u][v] < \text{Dist}[v]$  일 수도 있을 것이다.
    - 그러나, 이렇게 해서  $\text{Dist}[v]$ 가 갱신될 수 있었다면,  $v$ 는  $S$  밖에 있었을 것이다.
    - 왜냐하면  $\text{Dist}[u] < \text{Dist}[v]$ 인 상황이라는 것인데, 그러면 집합  $S$ 에  $u$ 가 추가된 후에  $v$ 가 추가된 것이므로 갱신 순서가  $u \rightarrow v$  순으로 되어야 함.
    - 지금은  $u$ 에 대한 갱신 작업을 하고 있으므로  $v$ 는  $S$  밖에 있어야 함.
  - 정점  $u$ 가  $S$  밖에 있는 원소라면,  $\text{Dist}[u] + W[u][v] \geq \text{Dist}[v]$ 이므로 갱신될 수 없다.
- 따라서, 집합  $S$ 에 있는 원소들의 최단 경로는 더 이상 바뀌지 않는다.

질문?

# STL - Container의 emplace 관련 함수

- STL 컨테이너의 `emplace_back` 또는 `emplace` 함수
  - 컨테이너는 `vector`, `map`, `set`, `list` 등 자료를 저장하고 관리하는 객체
- `tuple`이나 `pair`를 넣을 때, 중괄호로 묶을 필요 없이 그냥 값만 콤마로 구분해서 쓸 수 있음
- 예시)
  - `vector<pair<int, int>> vec;`
  - `vec.emplace_back(1, 2);`
  - `set<tuple<int, int, int>> S;`
  - `S.emplace(2, 3, 5);`

## 2023 Summer Algorithm Camp

다익스트라 -  $O(V^2)$ 

```
#include <bits/stdc++.h>

using namespace std;

int main() {
    int n, m; cin >> n >> m;
    vector<vector<pair<int, int>>> graph(n + 1);
    while (m--) {
        int u, v, w; cin >> u >> v >> w;
        graph[u].emplace_back(v, w);
        graph[v].emplace_back(u, w);
    }
    vector<int> dist(n + 1, 1e9);
```

```
    vector<int> S(n + 1);
    dist[1] = 0;
    for (int i = 1; i < n; i++) {
        pair<int, int> select = {1e9, 1e9}; // <현재 최단 경로, 정점>
        for (int j = 1; j <= n; j++) if (!S[j]) select = min(select, {dist[j], j});
        auto [curr, u] = select;
        S[u] = 1;
        for (const auto &[v, w] : graph[u]) dist[v] = min(dist[v], curr + w);
    }
    for (int i = 1; i <= n; i++) cout << dist[i] << "\n";
}
```

input	output
5 7	0
1 4 3	6
1 5 2	6
4 5 5	3
5 3 4	2
4 3 6	
2 3 1	
2 4 3	

## 2023 Summer Algorithm Camp

# 다익스트라 - $O(V^2)$

- 시간 복잡도 분석
- 반복문은  $N - 1$  번 반복됨
  - $O(N)$
- 반복문 내에서
  - “`for (int j = 1; j <= n; j++) if (!S[j]) select = min(select, {dist[j], j});`”
  - $O(N)$
- 반복문 내에서
  - “`for (const auto &[v, w] : graph[u]) dist[v] = min(dist[v], curr + w);`”
  - 는 각 정점에 대하여 부속된 간선을 보는 작업임.
  - 모든 정점에 대하여 위 작업의 연산량<sup>각 정점의 차수</sup>을 더하면  $\sum_{v \in V} \deg v = 2|E|$  handshaking lemma 이므로  $O(M)$
- 시간 복잡도 :  $O(N^2 + M)$



질문?

# 다익스트라 - $O(E \log E)$

- 최적화할 수 있을까?
- “매번 모든 정점  $u$ 에 대하여  $S$ 에 포함되어 있지 않으면서,  $\text{Dist}[u]$ 가 가장 작은 정점을 고르는 작업”을 최적화할 수 있다.
  - 원래는  $O(N)$ 이 걸림
- 우선순위 큐의 각 값을  $\{\text{Dist}[u], u\}$ 로 정의하고, 계산할 정점을 고를 때는 작은 것부터 빼서 보면 된다.
  - 아직 최단 경로가 계산되지 않은 정점  $u$  중에  $\text{Dist}[u]$ 가 가장 작은 정점을 바로 선형 탐색을 하지 않고 바로 찾을 수 있다.
  - 우선순위 큐의 삽입/삭제가  $O(\log N)$ 에 동작하기 때문에 효율적이다.
- $\text{Dist}$  배열의 갱신이 일어날 때마다 우선순위 큐에 해당 정점의 정보  $\{\text{Dist}[v], v\}$ 를 삽입하면 된다.
  - 같은 정점의 갱신이 여러 번 일어나서 여러 번 삽입할 수도 있다.
  - **pop을 하면서 같은 정점을 여러 번 갱신하지 않도록 처리해 주어야 한다.**

## 2023 Summer Algorithm Camp

다익스트라 -  $O(E \log E)$ 

```
#include <bits/stdc++.h>

using namespace std;

int main() {
    int n, m; cin >> n >> m;
    vector<vector<pair<int, int>>> graph(n + 1);
    while (m--) {
        int u, v, w; cin >> u >> v >> w;
        graph[u].emplace_back(v, w);
        graph[v].emplace_back(u, w);
    }
    vector<int> dist(n + 1, 1e9);
```

```
    priority_queue<pair<int, int>, vector<pair<int, int>>, greater<>> pq;
    dist[1] = 0;
    pq.emplace(0, 1);
    while (!pq.empty()) {
        auto [curr, u] = pq.top(); pq.pop();
        if (curr != dist[u]) continue;
        for (const auto &[v, w] : graph[u]) {
            int nxt = curr + w;
            if (dist[v] > nxt) dist[v] = nxt, pq.emplace(dist[v], v);
        }
    }
    for (int i = 1; i <= n; i++) cout << dist[i] << "\n";
}
```

input	output
5 7	0
1 4 3	6
1 5 2	6
4 5 5	3
5 3 4	2
4 3 6	
2 3 1	
2 4 3	

## 2023 Summer Algorithm Camp

다익스트라 -  $O(E \log E)$ 

- 간선 하나마다 우선순위 큐에  $\{\text{Dist}[v], v\}$ 를 넣는 작업을 **최대 한 번** 할 수 있다.
  - 모든 간선에 대해 이 작업을 한다고 가정하면  $O(E)$  시간이 걸리고,
  - 우선순위 큐의 자료 개수도 최대  $E$ 가 된다. (같은 정점을 여러 번 갱신해서 여러 개 넣을 수 있다)
- 우선순위 큐의 삽입/삭제 시간 분석
  - 우선순위 큐의 자료 개수가 최대  $E$ 이므로, 삽입/삭제에도  $O(\log E)$  시간이 걸린다.
- 전체 시간 복잡도는  $O(E \log E)$ 
  - 엄밀하지는 않으나,  $E \leq V^2$  이라서  $O(\log E) = O(\log V)$ 라 해도 비슷하다.
- 잊지 말고 해주어야 하는 것: `if (curr != dist[u]) continue;`
  - 같은 정점이 우선순위 큐에 여러 번 들어갈 수 있다.
  - 우선순위 큐에서 뺄 때마다 갱신 작업을 해주면 “답 자체는 올바르게 나오지만”, 한 정점에 대해 인접한 원소를 보는 행동을 여러 번 하게 될 수 있다.
  - 그러니까,  $\sum_{v \in V} \deg v = 2|E|$  handshaking lemma 가 성립하지 않으므로  $O(E)$  시간보다 더 걸리게 될 수 있다.
- ~~데이터가 약하면 안 해도 맞았습니다. 를 받을 때가 종종 있다.~~

질문?

# 다익스트라 - BFS와의 유사성

- 우선순위 큐를 사용하는 다익스트라는 사실 BFS를 이용하여 최단 경로를 구할 때와 크게 다르지 않다.
- 1) 단지 간선의 가중치가 모두 다르기 때문에, 큐에 먼저 들어간 정점이 실제 최단 경로가 아닐 수 있으므로,
  - 우선순위 큐를 사용하여 가장 짧은 최단 경로를 갖는 정점부터 뽑는다.
- 2) “`if (curr != dist[u]) continue;`”의 처리를 해준다.
  - BFS와 다르게 같은 정점이 우선순위 큐에 여러 번 들어갈 수 있기 때문이다.

## 2023 Summer Algorithm Camp

# 다익스트라 - 유의사항

- 보통 문제에서는  $E \ll V^2$ 임.
  - 간선의 개수가 완전 그래프의 간선 수(약  $V^2$ 개)보다 훨씬 적은 경우.
  - 대부분 문제에서  $O(V^2)$  다익스트라보다  $O(E \log E)$  다익스트라를 사용한다.
  - 그러나, dense한 그래프라면  $O(V^2)$  다익스트라를 사용해야 하는 문제도 종종 있다.
- Dist 배열의 초깃값을 INF로 채울 때, 값의 크기가 충분한지 확인하자.
  - 문제에서 주어질 수 있는 그래프 중 가장 긴 최단 경로의 길이보다 INF 값이 크면 된다.
  - 보통 int 범위라면  $1e9$ ,  $2e9$ , long long 범위라면  $1e18$ ,  $9e18$  정도로 잡는다.
- 모든 간선의 가중치가 같은 그래프라면, 다익스트라가 아니라 BFS를 사용하자.
  - 다익스트라를 사용해도 당연히 결과는 같지만 시간이 오래 걸린다.
- 복잡한 상태를 관리해야 한다면, map 등 자료구조의 키 값으로 string 등을 사용할 수도 있다.
  - 키의 자료형으로는 string이나 정수(bit masking), vector 등..
  - 정점이 불연속적으로 띄엄띄엄 있는 그래프에서도 사용할 수 있다.

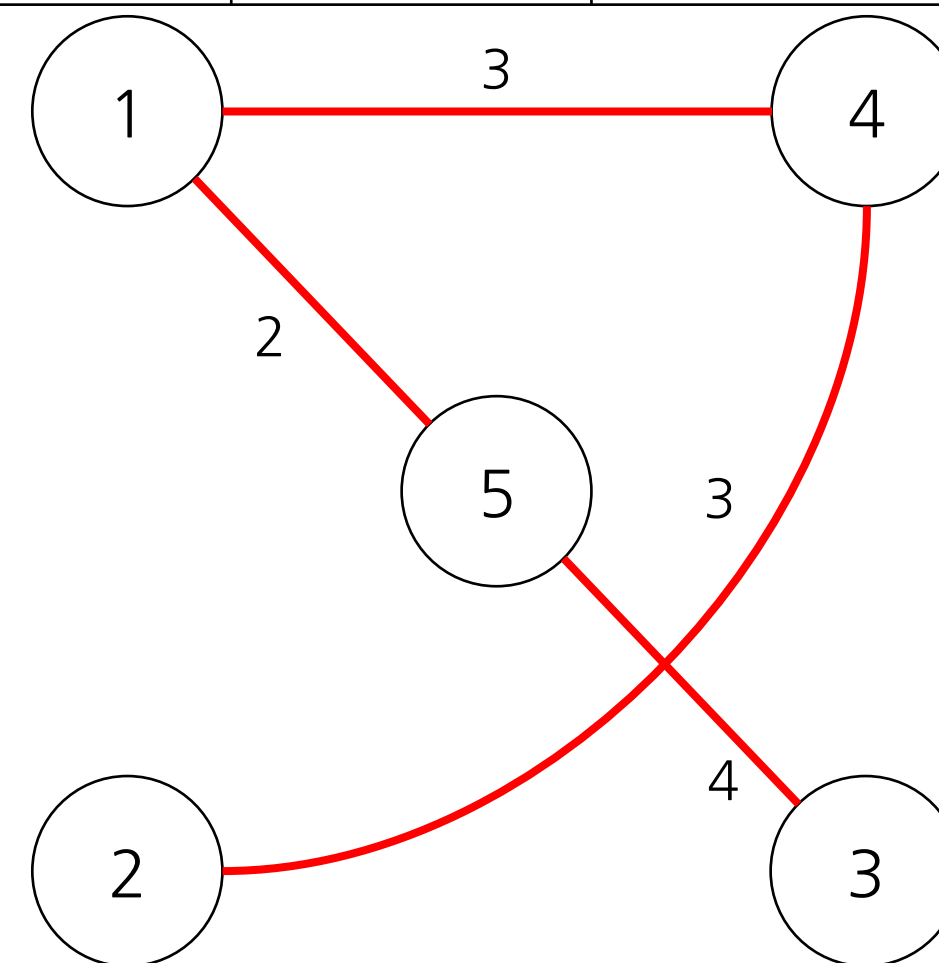
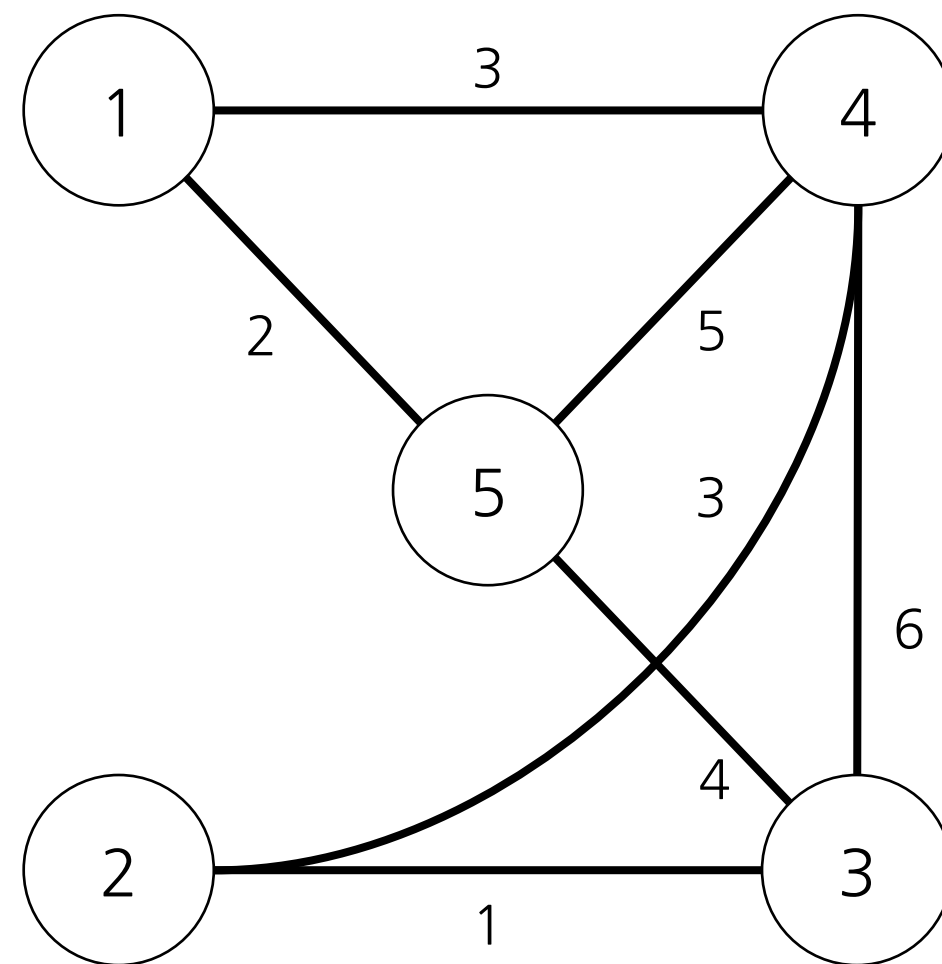
질문?



# 최단 경로 트리

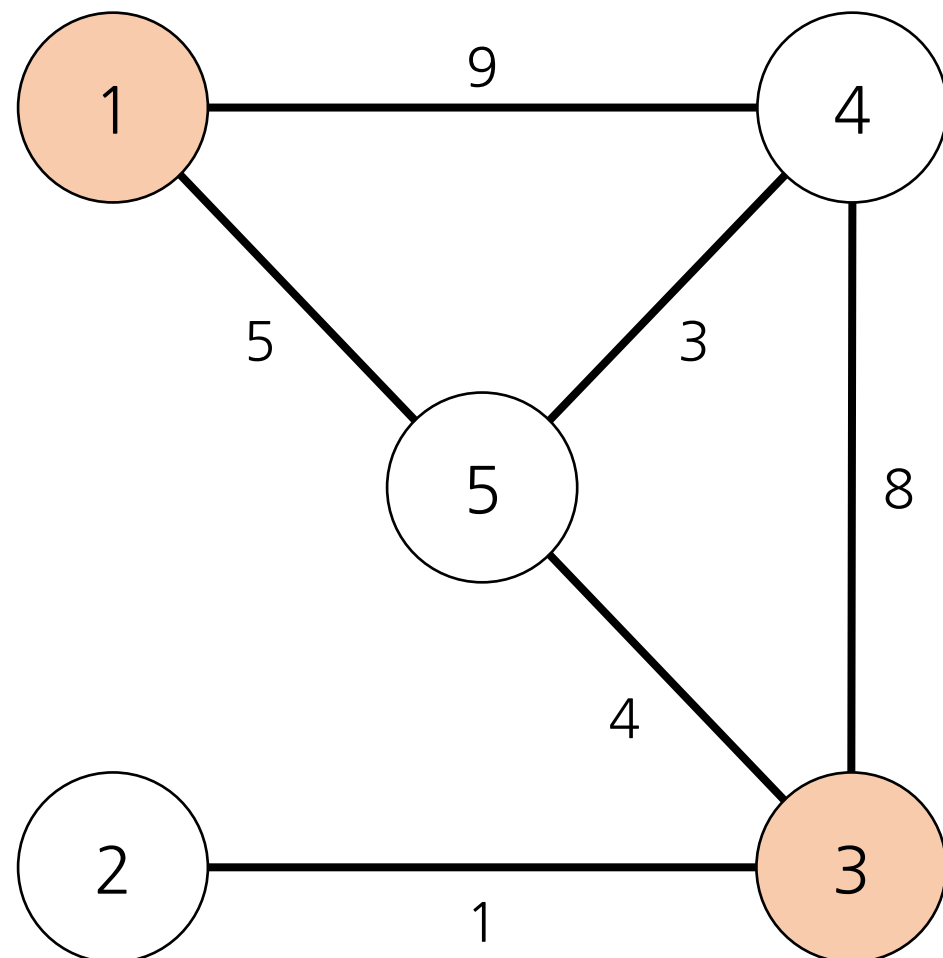
- 다익스트라에서 사용되는 간선으로만 만든 그래프를 최단 경로 트리<sup>Shortest-path tree</sup>라고 한다.
  - 만들어진 “그래프”는 트리임.
  - 왜인지는 다익스트라 역추적 과정을 보면 알 수 있음.
- 이후 알고리즘을 계속 공부한다면 종종 보게 될 단어이니 알아 두도록 하자.
- 최단 경로 트리 위에서 뭔가를 하는 문제들이 있다.

정점	1	2	3	4	5
Dist[i]	0	6	6	3	2



# Multi-source 다익스트라

- 시작점이 하나가 아니라 여러 군데여도 된다.
- 시작할 때, 모든 시작점  $u$ 에 대하여  $\text{Dist}[u] = 0$ 으로 하고, 우선순위 큐에  $\{0, u\}$ 를 삽입해주면 된다.
- 다익스트라 구현 부는 건드리지 않아도 된다.



정점	1	2	3	4	5
Dist[i]	0	1	0	7	4

## 2023 Summer Algorithm Camp

# 다익스트라 역추적

- 지금까지는 Dist 배열을 통해 시작 정점으로부터의 “최단 경로 길이”만을 알고 있었다.
- 길이가 아닌 실제 최단 경로<sup>실례</sup>는 어떻게 구할 수 있을까?
- 동적 계획법<sup>Dynamic Programming</sup>의 역추적과 똑같이 하면 된다.
- “ $\text{Dist}[v] = \min(\text{Dist}[v], \text{Dist}[u] + W[u][v])$ ;”는 **DP의 점화식**이라고 볼 수 있다.
- 따라서,  $\text{Dist}[v]$ 가  $u$ 에서  $v$ 로 가면서 갱신되었다면,  **$v$ 에서는  $u$ 로 되돌아가면 된다는 정보만** 저장해주면 된다.
  - $u$ 로 되돌아가서는?  $u$ 에서도  $\text{Dist}[u]$ 가 갱신되는 시점에서 돌아갈 정점을 저장했었을 것이기 때문에  $u$ 가 어떤지는 신경 쓰지 않아도 된다.
  - 그러니까  $v$ 에서  $u$ 로 가는 간선을 이어주는 것과 같다. 이는 트리에서  $v$ 의 부모가  $u$ 라는 것과 같으니, 다익스트라에서 사용된 간선을 모으면 트리가 된다.
  - 트리의 루트는 시작 정점이 된다.
- 이를 재귀적으로(또는 반복문으로) 시작 정점으로 돌아갈 때까지 반복해 주면 실제 경로를 알 수 있음.

## 2023 Summer Algorithm Camp

## 다익스트라 역추적

```
#include <bits/stdc++.h>
```

```
using namespace std;
```

```
int main() {
```

```
    int n, m; cin >> n >> m;
```

```
    vector<vector<pair<int, int>>> graph(n + 1);
```

```
    while (m--) {
```

```
        int u, v, w; cin >> u >> v >> w;
```

```
        graph[u].emplace_back(v, w);
```

```
        graph[v].emplace_back(u, w);
```

```
    }
```

```
    vector<int> dist(n + 1, 1e9);
```

```
    vector<int> path(n + 1);
```

```
    priority_queue<pair<int, int>, vector<pair<int, int>>, greater<>> pq;
```

```
    dist[1] = 0;
```

```
    pq.emplace(0, 1);
```

```
    while (!pq.empty()) {
```

```
        auto [curr, u] = pq.top(); pq.pop();
```

```
        if (curr != dist[u]) continue;
```

```
        for (const auto &[v, w] : graph[u]) {
```

```
            int nxt = curr + w;
```

```
            if (dist[v] > nxt) dist[v] = nxt, path[v] = u, pq.emplace(dist[v], v);
```

```
        }
```

```
    }
```

```
    for (int i = 1; i <= n; i++) {
```

```
        int curr = i;
```

```
        vector<int> res;
```

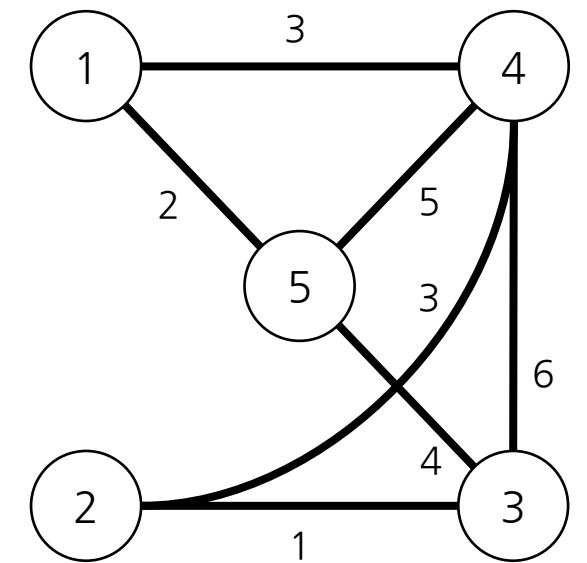
```
        while (curr) res.push_back(curr), curr = path[curr]; // path[1] = 0임
```

```
        reverse(res.begin(), res.end());
```

```
        for (int j : res) cout << j << " "; cout << "\n";
```

```
    }
```

```
}
```



input	output
5 7	1
1 4 3	1 4 2
1 5 2	1 5 3
4 5 5	1 4
5 3 4	1 5
4 3 6	
2 3 1	
2 4 3	

질문?

## 2023 Summer Algorithm Camp

# 다익스트라의 상태 확장

- 다익스트라는 결국 DP와 같고, Dist 배열의 정의는 마음껏 변형할 수 있다.
- 꼭 Dist 배열은 정점의 정보 하나만을 저장하는 1차원 배열이어야 할까?
- [BOJ 23801](#) (두 단계 최단 경로 2)
- 출발 정점 X부터 도착 정점 Z로 최단 거리로 이동하되 P개의 중간 정점 중 적어도 **하나의 정점**을 지나야 함.
- Dist[u][flag]
  - flag = 0 : 정점이 u이고, 중간 정점을 지나지 않았을 때 최단 경로
  - flag = 1 : 정점이 u이고, 중간 정점을 하나라도 지났을 때 최단 경로
- 상태 전이 State Transition
  - u에서 다음 정점 v가 집합 P에 속한다면, flag를 1로 변경해서 Dist 배열을 계속 채워주면 된다.
  - 그렇지 않으면, 현재 flag 값을 계속 유지하면서 Dist 배열을 채워준다.
- 답은 Dist[Z][1]

## 2023 Summer Algorithm Camp

## 다익스트라의 상태 확장

```
#include <bits/stdc++.h>

using namespace std;

int main() {
    int n, m; cin >> n >> m;
    vector<vector<pair<int, int>>> graph(n + 1);
    while (m--) {
        int u, v, w; cin >> u >> v >> w;
        graph[u].emplace_back(v, w);
        graph[v].emplace_back(u, w);
    }
    int X, Z; cin >> X >> Z;
    int k; cin >> k;
    vector<int> P(n + 1);
    while (k--) {
        int a; cin >> a;
        P[a] = 1;
    }
```

```
vector<vector<long long>> dist(n + 1, vector<long long>(2, 1e18));

priority_queue<tuple<long long, int, int>, vector<tuple<long long, int, int>>, greater<>> pq;
// 거리, 정점, flag

pq.emplace(dist[X][0] = 0, X, 0);
while (!pq.empty()) {
    auto [curr, u, flag] = pq.top(); pq.pop();
    if (dist[u][flag] != curr) continue;
    for (const auto &[v, w] : graph[u]) {
        long long nxt = curr + w;
        int nxt_flag = flag | P[v];
        if (dist[v][nxt_flag] > nxt) pq.emplace(dist[v][nxt_flag] = nxt, v, nxt_flag);
    }
}
cout << (dist[Z][1] == 1e18L ? -1 : dist[Z][1]);
}
```

# 다익스트라의 상태 확장

- [BOJ 10776](#) (제국)
- 두께가 K인 뗏목이 있음. N개의 섬과 M개의 바닷길이 있고, 섬 A에서 섬 B로 최단 시간으로 이동하려고 함.
- 이때, 바닷길은 길이는 시간  $t_i$ 와 뗏목을 깎아내리는 정도  $h_i$ 가 있고, 뗏목의 두께가 이동하는 중 0cm 이하가 되면 안 됨.
  - 즉, 사용한 간선에 대하여 뗏목을 깎아내리는 정도의 합이 K 미만이어야 함.
- $1 \leq K \leq 200, 2 \leq N \leq 2000, 1 \leq M \leq 10000$
- $\text{Dist}[u][\text{height}]$ 
  - 현재 정점 u에 있고, 뗏목의 높이가 height일 때 최단 경로의 길이
- 상태 전이<sup>State Transition</sup>
  - u에서 다음 정점 v로 이동할 때,  $\text{Dist}[v][\text{height} - h_i] = \min(\text{Dist}[v][\text{height} - h_i], \text{Dist}[u][\text{height}] + t_i)$  (단,  $\text{height} > h_i$ )
- 답은  $\min_{1 \leq i \leq K}(\text{Dist}[B][i])$ 
  - 정점 B에 도착했을 때, 남은 뗏목의 높이가 1 이상 K 이하기만 하면 됨



## 2023 Summer Algorithm Camp

## 다익스트라의 상태 확장

```
#include <bits/stdc++.h>

using namespace std;

int main() {
    int K, n, m; cin >> K >> n >> m;
    vector<vector<tuple<int, int, int>>> graph(n + 1);
    while (m--) {
        int u, v, w, h; cin >> u >> v >> w >> h;
        graph[u].emplace_back(v, w, h);
        graph[v].emplace_back(u, w, h);
    }
    int A, B; cin >> A >> B;
    vector<vector<int>> dist(n + 1, vector<int>(K + 1, 1e9));
```

```
    priority_queue<tuple<int, int, int>, vector<tuple<int, int, int>>, greater<>> pq; //
    거리, 정점, 높이
    pq.emplace(dist[A][K] = 0, A, K);
    while (!pq.empty()) {
        auto [curr, u, k] = pq.top(); pq.pop();
        if (dist[u][k] != curr) continue;
        for (const auto &[v, w, h] : graph[u]) {
            long long nxt = curr + w;
            int nxt_height = k - h;
            if (nxt_height > 0 && dist[v][nxt_height] > nxt) pq.emplace(dist[v][nxt_height]
= nxt, v, nxt_height);
        }
    }
    int ans = *min_element(dist[B].begin() + 1, dist[B].end());
    cout << (ans == 1e9 ? -1 : ans);
}
```

# 다익스트라의 상태 확장

- 문제에서 주어진 제약 조건에 따라, Dist 배열의 상태 정의를 잘 하면 된다.
- “두 단계 최단 경로 2” 문제에서는
  - 현재 있는 **정점 정보**와 중간 정점을 한 번이라도 지났는지, 지나지 않았는지에 대한 **정보<sup>flag</sup>**를 저장해주면 되었다.
  - 따라서, 상태 정의가  $\text{Dist}[u][\text{flag}]$ 와 같은 2차원 형식으로 되었다.
- “제국” 문제에서는
  - 현재 있는 **정점 정보**와 뗏목의 남은 **높이**를 각각 저장해주면 되었다.
  - 따라서, 상태 정의가  $\text{Dist}[u][\text{height}]$ 와 같은 2차원 형식으로 되었다.
- 다익스트라의 상태 확장을 이용하는 문제는 꽤 자주 볼 수 있는 유형이다.
  - 이 정보만 가지고, 같은 정의를 가지는 다음 상태를 만들 수 있을지 생각해 보면 된다. 정보가 충분한지 생각해 보자는 뜻이다.
- 상태 확장을 할 때는 “정말 차원 하나를 늘리는 것(정보 하나를 추가하는 것)이 꼭 필요한지” 생각해 보고,
- 그렇게 늘렸을 때 나올 수 있는 경우의 수가 얼마나 되는지 세보아야 한다.

질문?

## 2023 Summer Algorithm Camp

# 문제

- 필수 문제
- [BOJ 1753](#) (최단경로)
- [BOJ 11779](#) (최소비용 구하기 2) 다익스트라 역추적
- [BOJ 23801](#) (두 단계 최단 경로 2) 다익스트라 상태 확장
- [BOJ 10776](#) (제국) 다익스트라 상태 확장
- [BOJ 28283](#) (해킹) Multi-source BFS/Dijkstra
  - 간선의 가중치가 모두 같으므로 BFS로도 풀린다. Multi-source 다익스트라나 Multi-source BFS나 크게 다르지 않으니 아무렇게나 풀어볼 것
- 연습/심화 문제
- [BOJ 1504](#) (특정한 최단 경로)
- [BOJ 13549](#) (숨바꼭질 3)
- [BOJ 2917](#) (늑대 사냥꾼) 2차원 격자에서의 다익스트라
  - 2차원 좌표를 1차원 정수로 일대일대응 시키는 방법을 생각해 보자. 이러면 단순 1차원 Dist 배열로 다익스트라를 돌릴 수 있다.
- [BOJ 16118](#) (달빛 여우) 다익스트라 상태 확장
- [BOJ 28707](#) (배열 정렬) 현재 배열의 상태를 하나의 정점으로 보고, 그래프를 string 같은 것으로 바꾸어 저장하자. Dist 배열은 map 등을 사용하면 된다.
- [BOJ 24888](#) (노트 조각) 다익스트라 역추적 + 상태 정의를 1차원으로 하되 정의를 잘해야 한다.