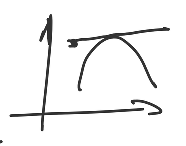
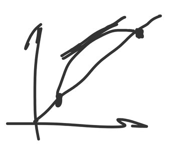
总复习：中值定理，数列求和

2024年12月9日 星期一　01:05

罗尔中值定理：当存在 $f(a)=f(b)$ 时，必存在 $f'(\varepsilon)=0$



拉格朗日中值定理：存在 $f'(\varepsilon)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$



（两个函数之差用导数代替）

柯西中值定理：存在 $\dfrac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

（前提：闭区间连续，开区间可导）

罗尔：

存在 $f(x)$ 有 $bf(a)-af(b)=0$ 证明 $\varepsilon\in(a,b)$ 有 $f(\varepsilon)=\varepsilon f'(\varepsilon)$

① 即证明 $g(x)=f(x)-xf'(x)=0$ → 罗尔中值定理

② $G(x)=\dfrac{f(x)}{x}$　$G'(x)=\dfrac{f(x)-xf'(x)}{x}=0$　即可证明

存在 $G(a)=G(b)$ 则存在

如何求辅助函数

$G(x)=e^{\alpha(x)}f(x)$

$G'(x)=e^{\alpha(x)}\cdot f'(x)+e^{\alpha(x)}\cdot\alpha' f(x)=e^{\alpha(x)}(f'(x)+\alpha' f(x))$

为了证明 $G(x)=0$，即 $f'(x)+\alpha' f(x)=0$　由上题即 $f(x)-xf'(x)=0$

$f'(x)-\frac{1}{x}f(x)=0$

$-\frac{1}{x}=\alpha'$　$\alpha=-\ln x$

算出辅助函数 $e^{\alpha(x)}f(x)$ 即 $e^{-\ln x}f(x)=\frac{f(x)}{x}$

拉格朗日：

将函数化为导数

$0<a<b$　试证明 $\dfrac{b-a}{b}<\ln\dfrac{b}{a}<\dfrac{b-a}{a}$

$(\ln b-\ln a)$

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\varepsilon)=\dfrac{1}{\varepsilon}$　即 $f(b)-f(a)=\dfrac{b-a}{\varepsilon}$

即 $\dfrac{b-a}{b}<\dfrac{b-a}{\varepsilon}<\dfrac{b-a}{a}$

求极限

① $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}\xrightarrow{①}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\sin x}(e^{x-\sin x}-1)}{x-\sin x}$　等价无穷小

↓②

$f(x)=e^x$

对于其有 $\dfrac{f(x)-f(\sin x)}{x-\sin x}=f'(\varepsilon)=e^{\varepsilon}$　ε 在 x 与 $\sin x$ 之间 在 $\lim\limits_{x\to0}$ 时 $\varepsilon=0$

即 $f(x)-f(\sin x)=(x-\sin x)e^{\varepsilon}$　代入原式 $=e^{\varepsilon}=1$

②

求 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\arctan\frac{1}{n}-\arctan\frac{1}{n+1}\right)$

$f(x)=\arctan x$　$\dfrac{f(\frac{1}{n})-f(\frac{1}{n+1})}{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}=f'(\varepsilon)=\dfrac{1}{1+\varepsilon^2}$

即 $f(\frac{1}{n})-f(\frac{1}{n+1})=\dfrac{1}{n(n+1)(1+\varepsilon^2)}$

原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}n^2\cdot\dfrac{1}{n(n+1)}\cdot\dfrac{1}{(1+\varepsilon^2)}$　ε 在 $\frac{1}{n}$ 和 $\frac{1}{n+1}$ 之间 无限趋向于零

$=1$

数列求和

分式裂项

等比等差求和公式

放缩（有一部分不影响式中时可用）

$$\frac{n^2+\frac{n(n+1)}{2}}{\sqrt{n^4+n^2}}<\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{\sqrt{n^4+1^2}}+\frac{n+2}{\sqrt{n^4+2^2}}+\cdots\frac{n+n}{\sqrt{n^4+n^2}}\right)<\frac{n^2+\frac{n(n+1)}{2}}{\sqrt{n^4+1}}$$

$\downarrow\frac{3}{2}\longrightarrow\quad\frac{3}{2}\quad\longleftarrow\frac{3}{2}\downarrow$

定积分

① $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots\frac{1}{n+n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}\cdots\frac{1}{1+1}\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}$　此处的 $\frac{1}{n}$ 即 dx，无限细分的 x

换 x 之后 上下界也要换！

$=\int_0^1\frac{1}{1+x}\cdot dx$

$=\ln2$

② $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1^2}+\frac{2}{n^2+2^2}+\cdots\frac{n}{n^2+n^2}\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n+\frac{1^2}{n}}+\frac{2}{n+\frac{2^2}{n}}\cdots\frac{n}{n+n}\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{i}{n+\frac{i^2}{n}}$　令 $dx=\frac{1}{n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\frac{i}{n}}{1+\frac{i^2}{n^2}}$

$=\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx$

$=\frac{1}{2}\ln2$