NNSZCP-2023 题解

南宁三中 01 社

2023 年 10 月 2 日

题意

给定字符串，查询子串有没有 nnsz。字符串长度 ≤ 100。

题意

给定字符串，查询子串有没有 nnsz。字符串长度 ≤ 100。

签到题。

题意

给定字符串，查询子串有没有 nnsz。字符串长度 ≤ 100。

签到题。
枚举相邻的字符判断是否为 nnsz 即可。

题意

给定字符串，查询子串有没有 nnsz。字符串长度 ≤ 100。

签到题。
枚举相邻的字符判断是否为 nnsz 即可。
当然也可以用 KMP 做。

题意

给定字符串，查询子串有没有 nnsz。字符串长度 ≤ 100。

签到题。
枚举相邻的字符判断是否为 nnsz 即可。
当然也可以用 KMP 做。
时间复杂度 $O(n)$。

```
print("yes" if "nnsz" in input() else "no")
```

题意

给定 n 和长为 $n+1$ 的序列 a，求相邻两项最大差值、最大值。
保证 $1 \le n \le 3 \times 10^5$。

按题意模拟即可。

题意

给定 n 和长为 $n+1$ 的序列 a，求相邻两项最大差值、最大值。
保证 $1 \leq n \leq 3 \times 10^5$。

按题意模拟即可。
注意序列的长为 $n+1$。

题意

给定 n 和长为 $n+1$ 的序列 a，求相邻两项最大差值、最大值。
保证 $1 \le n \le 3 \times 10^5$。

按题意模拟即可。
注意序列的长为 $n+1$。

```
n = int(input())
a = [int(i) for i in input().split()]
print(max(a))
b = [a[i + 1] - a[i] for i in range(n)]
print(max(b))
```

题意

题意

按照一定规则对进行考生进行排名。
详细内容见题面。保证 $1 \leq n \leq 10^5$。

题意

题意

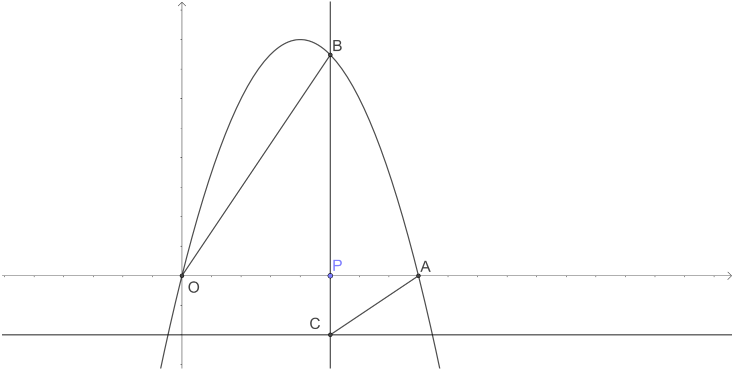
如图，在平面直角坐标系中，抛物线 $y=x(k-x)$ 与直线 $y=-1$ 相交。抛物线与 x 轴的另一个交点为 A。设线段 OA 上存在一动点 P，过点 P 作 y 轴的平行线交抛物线于点 B，交直线 $y=-1$ 于点 C。
试求 $\mathrm{OB}^2+\mathrm{AC}^2$ 的最大值。

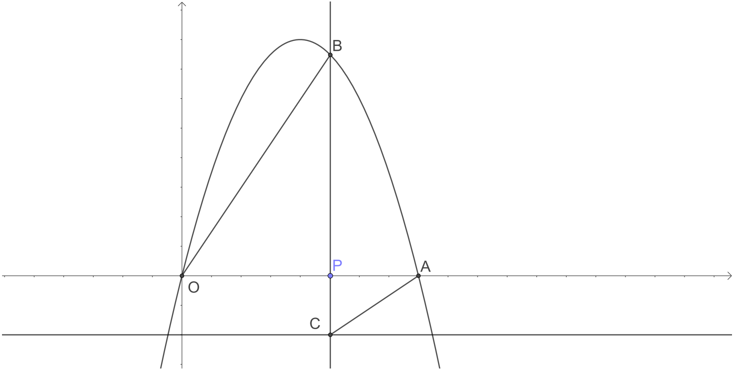
我会猜想！

我会猜想！
注意到：$P\left(\frac{365}{508},0\right)$ 时恰有：

$$\begin{aligned}\mathrm{OB}^2+\mathrm{AC}^2&=\frac{17,748,900,625}{66,597,028,096}+\frac{133,225}{129,032}+1\\&=\frac{153,107,081,521}{66,597,028,096}\approx 2.299007716985437295 78\end{aligned}$$

因此 P 必定为 $\left(\frac{k}{2},0\right)$。


B
P
A
O
C



由基本不等式可知当 P 为中点时 $\mathrm{OP}^2+\mathrm{AP}^2$ 取到最大，而由抛物线性质 BP^2 同时取到最大。
std 直接计算了 BC^2（不难证明是等价的）。

题意

判断排序算法的正确性，并求这个排序算法的交换次数。

```
for (int i = 1; i <= n; ++i) {
  for (int j = 1; j <= n; ++j) {
    if (a[i] < a[j]) {
      std::swap(a[i], a[j]);
    }
  }
}
```

保证 $1 \leq n \leq 2 \times 10^5$。

我会模拟！

我会模拟！
模拟这个过程并判断序列是否有序。

我会模拟！
模拟这个过程并判断序列是否有序。
时间复杂度 $O(n^2)$。

我会模拟！
模拟这个过程并判断序列是否有序。
时间复杂度 $O(n^2)$。
期望通过 Subtask 0，得到 20 分。

我会模拟！
模拟这个过程并判断序列是否有序。
时间复杂度 $O(n^2)$。
期望通过 Subtask 0，得到 20 分。

```
int count = 0;
for (int i = 1; i <= n; ++i) {
  for (int j = 1; j <= n; ++j) {
    if (a[i] < a[j]) {
      std::swap(a[i], a[j]), ++count;
    }
  }
}
std::cout << count << '\n';
```

我会思考性质！

我会思考性质！
归纳法容易证明算法正确性（详见下发题解）。

我会思考性质！
归纳法容易证明算法正确性（详见下发题解）。

性质

除了第 1 轮外层循环，每轮外层循环对答案的贡献为序列 $\{a_1, a_2, a_{i-1}\}$ 中比 a_i 大的**不同**元素的个数。

我会思考性质!
归纳法容易证明算法正确性（详见下发题解）。

性质

除了第 1 轮外层循环，每轮外层循环对答案的贡献为序列 $\{a_1, a_2, a_{i-1}\}$ 中比 a_i 大的**不同**元素的个数。

朴素处理第 1 轮外层循环，再维护一个数据结构支持插入元素、查询大于某个元素的不同元素个数。

我会思考性质!
归纳法容易证明算法正确性（详见下发题解）。

性质

除了第 1 轮外层循环，每轮外层循环对答案的贡献为序列 $\{a_1, a_2, a_{i-1}\}$ 中比 a_i 大的**不同**元素的个数。

朴素处理第 1 轮外层循环，再维护一个数据结构支持插入元素、查询大于某个元素的不同元素个数。
平衡树、线段树和树状数组即可。

我会思考性质!
归纳法容易证明算法正确性(详见下发题解)。

性质

除了第 1 轮外层循环，每轮外层循环对答案的贡献为序列 $\{a_1, a_2, a_{i-1}\}$ 中比 a_i 大的**不同**元素的个数。

朴素处理第 1 轮外层循环，再维护一个数据结构支持插入元素、查询大于某个元素的不同元素个数。
平衡树、线段树和树状数组即可。
时间复杂度 $O(n \log n)$。python 常数大只有树状数组能过。

我会思考性质！
归纳法容易证明算法正确性（详见下发题解）。

性质

除了第 1 轮外层循环，每轮外层循环对答案的贡献为序列 $\{a_1, a_2, a_{i-1}\}$ 中比 a_i 大的**不同**元素的个数。

朴素处理第 1 轮外层循环，再维护一个数据结构支持插入元素、查询大于某个元素的不同元素个数。
平衡树、线段树和树状数组即可。
时间复杂度 $O(n \log n)$。python 常数大只有树状数组能过。
期望通过所有子任务。

题意

给定一棵无根树 T，每次删去一个叶子结点直至删空。
对合法的操作序列计数，对 $998,244,353$ 取模。
叶子结点的定义是度数不大于 1 的结点。
操作序列不同，当且仅当某一次删去的叶子不同。
保证 $1 \le n \le 2 \times 10^5$。

我会枚举！

我会枚举！
考虑在树上暴搜方案。

我会枚举！
考虑在树上暴搜方案。
时间复杂度 $O(n!)$。

我会枚举！
考虑在树上暴搜方案。
时间复杂度 $O(n!)$。
期望通过 Subtask 0。

我会性质！

我会性质!
由于整棵树是一条链，在删除前 $n-1$ 个结点时，树上都恰好有 2 个叶子结点，故答案为 2^{n-1}。

我会性质！
由于整棵树是一条链，在删除前 $n-1$ 个结点时，树上都恰好有 2 个叶子结点，故答案为 2^{n-1}。
结合算法 0 期望通过 Subtask 0, 2。

我还会性质!

我还会性质！
对一个菊花树，在删除第 $i\,(i \leq n-2)$ 个结点时，树上有 $n-i$ 个叶子结点；在删除第 $n-1$ 个结点时，树上有 2 个叶子结点。

我还会性质！
对一个菊花树，在删除第 $i\ (i \leq n-2)$ 个结点时，树上有 $n-i$ 个叶子结点；在删除第 $n-1$ 个结点时，树上有 2 个叶子结点。
故答案为：

$$(n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 2 \times 1 = (n-1)! \times 2$$

我还会性质！
对一个菊花树，在删除第 $i\ (i \le n-2)$ 个结点时，树上有 $n-i$ 个叶子结点；在删除第 $n-1$ 个结点时，树上有 2 个叶子结点。
故答案为：

$$(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times 3\times 2\times 2\times 1=(n-1)!\times 2$$

结合算法 0, 1 期望通过 Subtask 0, 2, 3。

我会“動的計画法”!

我会“動的計画法”！
思考对于一棵一般的树怎么做。

我会“動的計画法”!
思考对于一棵一般的树怎么做。
以结点 x 为根，设 f_u 代表将结点 u 所在的子树删空的方案数。

我会“動的計画法”！
思考对于一棵一般的树怎么做。
以结点 x 为根，设 f_u 代表将结点 u 所在的子树删空的方案数。
不好转移，我们钦定 u 是 u 所在的子树最后删掉的点。

我会“動的計画法”!
思考对于一棵一般的树怎么做。
以结点 x 为根，设 f_u 代表将结点 u 所在的子树删空的方案数。
不好转移，我们钦定 u 是 u 所在的子树最后删掉的点。
这样就比较好转移了。转移考虑 u 的儿子 v:

$$\begin{aligned} f_u &= \prod_i \left(f_{v_i} \cdot \binom{\sum_j^i s_j}{s_i} \right) \\ &= \left(\prod_i f_{v_i} \right) \frac{(s_u - 1)!}{\prod_{v_i} (s_{v_i}!)} \end{aligned}$$

其中 s_u 代表以 u 为根所在的子树大小。

我会 “動的計画法”!
思考对于一棵一般的树怎么做。
以结点 x 为根，设 f_u 代表将结点 u 所在的子树删空的方案数。
不好转移，我们钦定 u 是 u 所在的子树最后删掉的点。
这样就比较好转移了。转移考虑 u 的儿子 v:

$$
\begin{aligned}
f_u &= \prod_i \left(f_{v_i} \cdot \binom{\sum_j^i s_j}{s_i} \right) \\
&= \left(\prod_i f_{v_i} \right) \frac{(s_u - 1)!}{\prod_{v_i} (s_{v_i}!)}
\end{aligned}
$$

其中 s_u 代表以 u 为根所在的子树大小。令 $x = 1, 2, \cdots, n$ 跑这个 DP，对所有 f_x 求和即为答案。
时间复杂度为 $O\left(n^2\right)$。
结合算法 1, 2 期望通过 Subtask 0, 1, 2, 3。

我会二次扫描！

我会二次扫描!
考虑优化。

我会二次扫描！
考虑优化。
设 g_u 代表将结点 u 视为树根且最后删，删空整棵树的方案数。

我会二次扫描！
考虑优化。
设 g_u 代表将结点 u 视为树根且最后删，删空整棵树的方案数。
转移依然考虑 u 的儿子 v：

$$
\begin{aligned}
g_v &= f_v \times \frac{g_u}{f_v \times \binom{n-1}{n-s_v-1}} \times \binom{n-1}{s_v-1} \\
&= g_u \times \frac{\binom{n-1}{s_v-1}}{\binom{n-1}{n-s_v-1}} = g_u \times \frac{s_v}{n-s_v}
\end{aligned}
$$

我会二次扫描！
考虑优化。
设 g_u 代表将结点 u 视为树根且最后删，删空整棵树的方案数。
转移依然考虑 u 的儿子 v：

$$g_v = f_v \times \frac{g_u}{f_v \times \binom{n-1}{n-s_v-1}} \times \binom{n-1}{s_v-1}$$
$$= g_u \times \frac{\binom{n-1}{s_v-1}}{\binom{n-1}{n-s_v-1}} = g_u \times \frac{s_v}{n-s_v}$$

答案为：

$$\sum_{i=1}^{n} g_i$$

我会二次扫描!
考虑优化。
设 g_u 代表将结点 u 视为树根且最后删，删空整棵树的方案数。
转移依然考虑 u 的儿子 v:

$$g_v = f_v \times \frac{g_u}{f_v \times \binom{n-1}{n-s_v-1}} \times \binom{n-1}{s_v-1} = g_u \times \frac{\binom{n-1}{s_v-1}}{\binom{n-1}{n-s_v-1}} = g_u \times \frac{s_v}{n-s_v}$$

答案为:

$$\sum_{i=1}^{n} g_i$$

时间复杂度为 $O(n)$。
期望通过所有子任务。

题意

给定 n, q，和 q 个 (l, r, v)。
构造长为 n 且值域为 $[0, 4)$ 的整序列，使得：

$$\left(\prod_{i=l}^{r} a_i\right) \bmod 4 = v$$

保证有解。
保证 $1 \le n, q \le 2 \times 10^4$。

我会看表！

我会看表！
对 Subtask 0 发现 $q = 0$，输出任意一个长为 n 的序列即可。

我会看表!
对 Subtask 0 发现 $q = 0$，输出任意一个长为 n 的序列即可。
期望得分 2 分。

我会枚举！

我会枚举！
对 Subtask 1 发现 $1 \leq n, q \leq 10$。
枚举每一个位置放数，判断是否满足条件即可。

我会枚举！
对 Subtask 1 发现 $1 \leq n, q \leq 10$。
枚举每一个位置放数，判断是否满足条件即可。
时间复杂度 $O(n \cdot 3^n)$。
结合算法 -1，期望得分 15 分。

我会观察性质!

我会观察性质!
注意到:

我会观察性质!
注意到:

性质

$$3^i \bmod 4 = \begin{cases} 1, & i \bmod 2 = 0 \\ 3, & i \bmod 2 = 1 \end{cases}$$

$$2^i \bmod 4 = 3 \cdot 2^i \bmod 4 = \begin{cases} 2, & i = 1 \\ 0, & i \geq 2 \end{cases}$$

所以 $v_i = 2$ 意味着区间中有且仅有一个 2。
排序后贪心地填 2 即可。

我会观察性质!
注意到:

性质

$$3^i \bmod 4 = \begin{cases} 1, & i \bmod 2 = 0 \\ 3, & i \bmod 2 = 1 \end{cases}$$

$$2^i \bmod 4 = 3 \cdot 2^i \bmod 4 = \begin{cases} 2, & i = 1 \\ 0, & i \geq 2 \end{cases}$$

所以 $v_i = 2$ 意味着区间中有且仅有一个 2。
排序后贪心地填 2 即可。
结合算法 -1, 0 期望得到 32 分。

我会观察性质!

我会观察性质!
注意到 $v_i = 1, 3$，所以整个序列可以只填 1 或 3。

我会观察性质！
注意到 $v_i = 1, 3$，所以整个序列可以只填 1 或 3。
考虑设 x_i 代表第 i 个位置填 1 或 3，分别为 0 或 1。

我会观察性质!
注意到 $v_i = 1,3$，所以整个序列可以只填 1 或 3。
考虑设 x_i 代表第 i 个位置填 1 或 3，分别为 0 或 1。
$v_i = 1$ 代表有偶数个 x_i 为 3，而 $v_i = 3$ 代表有奇数个 x_i 为 1。

我会观察性质！
注意到 $v_i = 1, 3$，所以整个序列可以只填 1 或 3。
考虑设 x_i 代表第 i 个位置填 1 或 3，分别为 0 或 1。
$v_i = 1$ 代表有偶数个 x_i 为 3，而 $v_i = 3$ 代表有奇数个 x_i 为 1。
考虑 q 个异或方程

$$x_l \oplus x_{l+1} \oplus \cdots \oplus x_r = 0/1$$

高斯消元解异或方程组即可。

我会观察性质！
注意到 $v_i = 1, 3$，所以整个序列可以只填 1 或 3。
考虑设 x_i 代表第 i 个位置填 1 或 3，分别为 0 或 1。
$v_i = 1$ 代表有偶数个 x_i 为 3，而 $v_i = 3$ 代表有奇数个 x_i 为 1。
考虑 q 个异或方程

$$x_l \oplus x_{l+1} \oplus \cdots \oplus x_r = 0/1$$

高斯消元解异或方程组即可。
考虑 bitset 优化，时间复杂度为 $O(\frac{n^3}{w})$。
结合算法 -1, 0, 1 期望得到 59 分。

考虑进行一个算法的合并!

考虑进行一个算法的合并！
对于填 2 的情况，实际上是限制区间里 2 的个数。

考虑进行一个算法的合并！
对于填 2 的情况，实际上是限制区间里 2 的个数。
考虑建图跑差分约束即可。

考虑进行一个算法的合并!
对于填 2 的情况，实际上是限制区间里 2 的个数。
考虑建图跑差分约束即可。
对于填 $1,3$ 的情况，考虑一个前缀异或 $y_i = \bigoplus_{j=1}^{i} x_j$。

考虑进行一个算法的合并！
对于填 2 的情况，实际上是限制区间里 2 的个数。
考虑建图跑差分约束即可。
对于填 $1,3$ 的情况，考虑一个前缀异或 $y_i = \oplus_{j=1}^{i} x_j$。
这些方程等价于 $y_r \oplus y_{l-1} = 0/1$。

考虑进行一个算法的合并!
对于填 2 的情况，实际上是限制区间里 2 的个数。
考虑建图跑差分约束即可。
对于填 $1,3$ 的情况，考虑一个前缀异或 $y_i = \oplus_{j=1}^{i} x_j$。
这些方程等价于 $y_r \oplus y_{l-1} = 0/1$。
还要高斯消元吗？

考虑进行一个算法的合并!
对于填 2 的情况，实际上是限制区间里 2 的个数。
考虑建图跑差分约束即可。
对于填 1, 3 的情况，考虑一个前缀异或 $y_i = \oplus_{j=1}^{i} x_j$。
这些方程等价于 $y_r \oplus y_{l-1} = 0/1$。
还要高斯消元吗？
注意到：求解的过程就是把 y_i 等于 0 的放到一个集合，等于 1 的放到另一个集合。

考虑进行一个算法的合并！
对于填 2 的情况，实际上是限制区间里 2 的个数。
考虑建图跑差分约束即可。
对于填 $1,3$ 的情况，考虑一个前缀异或 $y_i = \oplus_{j=1}^{i} x_j$。
这些方程等价于 $y_r \oplus y_{l-1} = 0/1$。
还要高斯消元吗？
注意到：求解的过程就是把 y_i 等于 0 的放到一个集合，等于 1 的放到另一个集合。
考虑进行一个 2-SAT 的 Tarjan 做法。

考虑进行一个算法的合并!
对于填 2 的情况，实际上是限制区间里 2 的个数。
考虑建图跑差分约束即可。
对于填 $1,3$ 的情况，考虑一个前缀异或 $y_i = \oplus_{j=1}^{i} x_j$。
这些方程等价于 $y_r \oplus y_{l-1} = 0/1$。
还要高斯消元吗？
注意到：求解的过程就是把 y_i 等于 0 的放到一个集合，等于 1 的放到另一个集合。
考虑进行一个 2-SAT 的 Tarjan 做法。
时间复杂度为 $O(nq+n)$。
期望得到 100 分。

题意

给你长度为 n 的序列 a_i，和两个数 x, y。
q 组询问 (l_t, r_t)，求出所有满足

$$\{a_k \mid i \le k \le j\} \subseteq \{k \mid x \le k \le y\}$$

的子区间 $[i, j]$ 的区间长度和。
每次的输出要异或上一次的输出。首次输出为首次询问的答案。
保证 $1 \le n, q \le 2 \times 10^5$。

我会暴力！考虑枚举 i, j,