

Линейная алгебра

2024 — 2025

Содержание

1	Лекция 2.12.2024	2
1.1	Ранг матрицы	2
1.2	Применения ранга матрицы к СЛУ	3
2	Лекция 9.12.2024	4
2.1	Различные базисы	4

1 Лекция 2.12.2024

1.1 Ранг матрицы

V - векторное пространство над F

Определение 1. Ранг Матрицы $rk(S) = \max\{|S'|, S' \subseteq S, S' - \text{линейно независимо}\}$

1. Столбцовый Ранг
2. Строковый Ранг

Утверждение 1.1. Ранг матрицы равен размерности подпространства

Лемма 1.2. При элементарных преобразованиях строк сохраняются все линейные зависимости между столбцами. $rk(A)$ не меняется при элементарных преобразованиях строк.

$$A \rightarrow B : \langle A^{(1)}, \dots, A^{(n)} \rangle = \langle B^{(1)}, \dots, B^{(n)} \rangle$$

Доказательство.

1. $B^{(i)} \in \langle A^{(1)}, \dots, A^{(n)} \rangle$
2. Так как все элементарные преобразования обратимы, то включение ваерно и в обратную сторону
3. Ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях столбцов
4. Строковый ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях строк и столбцов

■

Лемма 1.3 ($rkA = rkA^T$). Если A имеет улучшенный ступенчатый вид, то $rkA = rkA^T$, причем оба числа равны количеству ненулевых строк в A

Доказательство. 1. Пусть r - число ненулевых строк в A

2. Тогда:

$$e_1, \dots, e_r \subseteq \{A^{(1)}, \dots, A^{(n)}\}, \quad r = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\langle e_1, \dots, e_r \rangle \subseteq \langle A^{(1)}, \dots, A^{(n)} \rangle$$

3. С другой стороны $\forall i : A^{(i)} \in \langle e_1, \dots, e_r \rangle$

$$\Rightarrow \langle A^{(1)}, \dots, A^{(n)} \rangle \subseteq \langle e_1, \dots, e_r \rangle$$

4. Получаем:

$$\langle A^{(1)}, \dots, A^{(n)} \rangle = \langle e_1, \dots, e_r \rangle \Rightarrow rkA = \dim \langle e_1, \dots, e_r \rangle = r$$

5. Покажем, что $rkA^T = r$. Достаточно доказать, что строки $A^{(i)}$ линейно независимы. Пусть $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_n$ - номера ведущих элементов строк в A и пусть $\alpha_1 A_{(1)} + \dots + \alpha_n A_{(n)} = \vec{0}$ для некоторых $\alpha_i \in F$. i_k строка координата в левой части равна $\alpha_k \Rightarrow \alpha_k = 0$.

■

Лемма 1.4. rkA равно rkA^T , что также равно количеству ненулевых строк в ступенчатом виде.

Пусть $A \in Mat_n(F)$.

Лемма 1.5. $rkA = n \Leftrightarrow \det A \neq 0$ и $rkA < n \Leftrightarrow \det A = 0$

Доказательство. 1. При приведении A к ступенчатому виду при помощи элементарных преобразованиях строк, rkA не меняется, ведь условие равенства определителя 0 не меняется

2. В случае ступенчатого вида $rkA < n \Rightarrow \exists i : A_{(i)} = \vec{0} \Rightarrow \det A = 0$

3. В случае ступенчатого вида $rkA = n \Rightarrow$ Матрица является верхнетреугольной $\Rightarrow \det A \neq 0$ (так как элементы на диагонали не равны 0)

■

Определение 2. Подматрица матрицы A - любая матрица, полученная из исходной вычеркиванием каких-то строк и/или столбцов

Лемма 1.6. Ранг подматрицы не больше ранга матрицы

Доказательство. Если какие-то столбцы в S линейно независимы, то соответствующие столбцы в A и подавно линейно независимы. ■

Определение 3. Минор матрицы A - определитель произвольной квадратной матрицы, являющейся подматрицей в A

Определение 4. Базисные миноры - Ненулевые миноры в A

Теорема 1.7.

$$\forall A \in Mat_{m \times n}$$

Следующие 3 числа равны:

1. $rk A$
2. $rk A^T$
3. Наибольший порядок ненулевого минора в A

Доказательство.

1. Мы знаем, что $I = II$
 2. Пусть S - квадратная подматрица в A , размера r и $\det S \neq 0$. Тогда $r = rk S \leq rk A \Rightarrow III \leq I$
 3. Обратно пусть $rk A = r$. Тогда в A есть r столбцов, которые линейно независимы. Пусть B - подмножество в A , составленная из этих столбцов. Тогда $rk B = r \Rightarrow B$ есть r линейно независимых строк.
 4. Пусть S - подматрица размера $r \times r$, составленная из этих строк. Тогда $rk S = r \Rightarrow \det S \neq 0 \Rightarrow III \geq I$
 5. $III = I$
-

1.2 Применения ранга матрицы к СЛУ

Рассмотрим $Ax = b, A \in Mat_{m \times n}(F), x \in F^n, b \in F^m$

Теорема 1.8 (Теорема Кронекера-Копели). СЛУ совместна тогда и только тогда $rk A = rk(A|b)$

Доказательство.

1. множество решений сохранится
 2. $rk A$ и $rk(A|b)$ не меняется
 3. Система случаем, когда $(A|b)$ имеет ступенчатый вид.
 4. А такая система будет иметь равный ранг, если не будет строк вида $0, \dots, 0, b \neq 0$
-

Теорема 1.9. Пусть СЛУ совместна. Система имеет единственное решение тогда и только тогда $rk A = n$ (n - число независимых)

Доказательство. Снова все сводится к ситуации, когда $(A|b)$ имеет ступенчатый вид; В таком случае решение единственное тогда и только тогда, когда нет свободных переменных, а значит главных переменных ровно n , а значит число ненулевых строк равно $n \Leftrightarrow rk A = n$ ■

Лемма 1.10. Система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда определитель не равен 0

Доказательство.

1. Единственность решения $\Rightarrow rk A \Rightarrow rk A = rk(A|b) = n$
 2. $\det A \neq 0 \Rightarrow rk A \Rightarrow rk(A|b) = rk A = n \Rightarrow$ СЛУ совместна и имеет одно решение
-

Пусть теперь СЛУ: $Ax = 0$. Пусть $S \subseteq F^n$ - множество ее решений

Лемма 1.11. $\dim S = n - rk A$

2 Лекция 9.12.2024

Предложение.

$$b_1, \dots, b_p \in F^n$$

$$B = (b_1, \dots, b_p) \in \text{Mat}_{n \times p}(F)$$

Пусть a_1, \dots, a_q - ФСР для ОСЛУ $B^T x = 0$

$$A = (a_1, \dots, a_q) \in \text{Mat}_{n \times q}$$

Тогда (b_1, \dots, b_p) - множество решений ОСЛУ $A^T x = 0$

Доказательство.

1. Пусть $S = \{x \in F^n \mid A^T x = 0\}$
2. $\forall i$ имеем $B^T a_i = 0 \Rightarrow B^T A = 0 \Rightarrow A^T B = 0 \Rightarrow \forall j : A^T b_j = 0 \Rightarrow b_1, \dots, b_p \in S \Rightarrow \langle b_1, \dots, b_p \rangle \subseteq S$
3. Пусть $r = \text{rk}\{b_1, \dots, b_p\} = \dim \langle b_1, \dots, b_p \rangle = \text{rk} B = \text{rk} B^T$
4. При этом $\text{rk} A = q = n - r$ (Из прошлой лекции)
5. Тогда $\dim S = n - q = n - (n - r) = r \Rightarrow \dim S = \dim \langle b_1, \dots, b_p \rangle \rightarrow S = \langle b_1, \dots, b_p \rangle$

Следствие. Всякое подпространство в F^n является множеством решений некоторой ОСЛУ.

2.1 Различные базисы

Пусть V - некоторое векторное пространство над F , пусть $\dim V = n$

Фиксируем некоторый базис (Отныне базисы считаем последовательностью, а не множеством):

$$(e_1 \quad \dots \quad e_n)$$

Знаем, что $\forall v \in V \exists! (x_1, \dots, x_n) : x_1 \cdot e_1 + \dots + x_n \cdot e_n = v$

Определение 5. Координатами вектора v называется последовательность скаляров (x_1, \dots, x_n) в базисе (e_1, \dots, e_n)

Пример. $V = F^n, v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in F^n$, тогда x_1, \dots, x_n - координаты вектора v в стандартном базисе

Предложение. Пусть e'_1, \dots, e'_n - какой-то набор векторов из n векторов:

$$e'_i = c_{1i}e_1 + \dots + c_{ni}e_n$$

$$(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot C, \quad C = (c_{ij})$$

(e'_1, \dots, e'_n) - базис в V тогда и только тогда $\det C \neq 0$

Доказательство.

1. (e'_1, \dots, e'_n) - базис в V , тогда $(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot C$ для некоторой $C' \in M_n$
2. $(e_1, \dots, e_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot C \cdot C'$
3. Так как векторы e_1, \dots, e_n линейно независимы, то j столбец будет равен столбцу, у которого стоит единственный ненулевой элемент, равный единице на j позиции. Следовательно $C \cdot C' = E \Rightarrow \det C \neq 0$
4. Докажем, что e'_1, \dots, e'_n линейно независимы (и тогда раз их n штук они образуют базис в V)
5. Пусть $\alpha_1 \cdot e'_1 + \dots + \alpha_n \cdot e'_n = 0$, тогда:

$$(e'_1, \dots, e'_n) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (e_1, \dots, e_n) \cdot C \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = 0$$

б. так как e_1, \dots, e_n линейно независимы, то $C \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = 0$. Так как $\det C \neq 0$, то $\exists C^{-1} \Rightarrow$, умножая на C^{-1} слева,

полученная $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ линейно независимы, то это базис

■

Определение 6. Пусть (e_1, \dots, e_n) и (e'_1, \dots, e'_n) - два базиса в V . $(e_1, \dots, e_n) = (e'_1, \dots, e'_n) \cdot C$, $C \in M_n(F)$, $\det C \neq 0$
Матрицей перехода от базиса (e_1, \dots, e_n) к базису (e'_1, \dots, e'_n) называется матрица C
В столбце $C^{(j)}$ записаны координаты вектора e'_j в базисе (e_1, \dots, e_n) .

Замечание. Из свойства следует, что $(e_1, \dots, e_n) = (e'_1, \dots, e'_n) \cdot C^{-1}$

Предложение.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

Доказательство.

$$1. v = (e_1 \quad \dots \quad e_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (e'_1 \quad \dots \quad e'_n) \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = (e_1 \quad \dots \quad e_n) \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

$$2. \text{ Так как } e_1, \dots, e_n - \text{линейно независимы, то } \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

■

Предложение. $U, W \subseteq V$ - два подпространства. Тогда $U \cap W$ - тоже подпространство

Определение 7. Суммой двух подпространств называется $U + W = \{u + w | u \in U, w \in W\}$

Замечание. Так как $U \cap W \subseteq U = U + \{0\} \subseteq U + W$, то $\dim U \cap W \leq \dim U \leq \dim U + W$

Теорема 2.1. $\dim U \cap W + \dim U + W = \dim U + \dim W$

Пример.

1. $V = \mathbb{R}^3$, следовательно две любые плоскости содержат общую прямую:
2. $\dim U = 2, \dim V = 2, \dim U + W \leq 3 \Rightarrow \dim U \cap W \geq 2 + 2 - 3 = 1$

Доказательство.

1. Пусть $\dim U \cap W = p, \dim U = q, \dim W = r$. Пусть $a = \{a_1, \dots, a_p\}$ - базис в $U \cap W$
2. Дополним его векторами $b = \{b_1, \dots, b_{q-p}\}$ до базиса в U
3. Дополним его векторами $c = \{c_1, \dots, c_{r-p}\}$ до базиса в W
4. Докажем, что $a \cup b \cup c$ - базис в $U + W$

(а) $U + W = \langle a \cup b \cup c \rangle$. Имеем, что $\langle a \cup b \cup c \rangle \subseteq U + W$

(b) $v \in U + W \Rightarrow v = u + w, u \in U, w \in W, u \in U = \langle a \cup b \rangle \subseteq \langle a \cup b \cup c \rangle, w \in W = \langle a \cup c \rangle \subseteq \langle a \cup b \cup c \rangle \Rightarrow v = u + w \in \langle a \cup b \cup c \rangle \Rightarrow U + W \subseteq \langle a \cup b \cup c \rangle$

(c) $a \cup b \cup c$ - линейно независимы

5. Пусть для некоторых $\alpha_i, \beta_j, \gamma_k \in F$

$$\alpha_1 a_1 + \dots + \gamma_{r-p} c_{r-p} = \vec{0}$$

6. $z = -x - y \in U$. Так как $z \in W$, то $z \in U \cap W \Rightarrow z = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_p a_p; \lambda_j \in F \Rightarrow \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_p a_p - \gamma_1 c_1 - \dots - \gamma_{r-p} c_{r-p} = \vec{0}$

7. Так как $a \cup c$ линейно независимы (базис c в W), то $\lambda_1 = \dots = \gamma_{r-p} = 0$ и $z = 0$, следовательно $\alpha_1 a_1 + \dots + \gamma_{r-p} c_{r-p} = \vec{0}$, так как $A \cup b$ линейно независимы (базис в U), то $\alpha_1 = \dots = \beta_{q-p} = 0$

8. $a \cup b \cup c$ - базис в $U + W$, следовательно $\dim U + W = |a| + |b| + |c| = p + q - p + r - p = \dim U \cap W$

■