Линейная алгебра

2024 — 2025

Содержание

1 Лекция 2.12.2024

1.1 Ранг матрицы

V - векторное пространство над F

Определение 1. *Ранг Матрицы* $rk(S) = \max\{|S|, S' \subseteq S, S$ - линейно независимо$\}$

1. Столбцовый Ранг
2. Строковый Ранг

Утверждение 1.1. *Ранг матрицы равен размерности подпространства*

Лемма 1.2. При элементраных преобразованиях строк сохраняются все линейные зависимости между стобцами.
$rk(A)$ не меняется при элементарных преобразованиях строк.

$$A \to B: < A^{(1)}, \dots, A^{(n)} > = < B^{(1)}, \dots, B^{(n)} >$$

Доказательство.

1. $B^{(i)} \in < A^{(1)}, \dots, A^{(n)} >$
2. Так как все элементарные преобразования обратимы, то включение ваерно и в обратную сторону
3. Ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях столбцов
4. Строковый ранг матрицы не менчяется при элементарных преобразованиях строк и столбцов

∎

Лемма 1.3 ($rkA = rkA^T$)**.** Если A имеет улучшенный ступенчатый вид, то $rkA = rkA^T$, причем оба числа равны количеству ненулвеых строк в A

Доказательство. 1. Пусть r - число ненулевых строк в A

2. Тогда:

$$e_1, \dots, e_r \subseteq \{A^{(1)}, \dots, A^{(n)}\}, \;\; r = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$< e_1, \dots, e_r > \subseteq < A^{(1)}, \dots, A^{(n)} >$$

3. С другой стороны $\forall i : A^{(i)} \in < e_1, \dots, e_r$

$$\Rightarrow < A^{(1)}, \dots, A^{(n)} > \subseteq < e_1, \dots, e_r >$$

4. Получаем:

$$< A^{(1)}, \dots, A^{(n)} > = < e_1, \dots, e_r > \Rightarrow rkA = dim < e_1, \dots, e_r > = r$$

5. Покажем, что $rkA^T = r$. Достаточно доказать, что строки $A^{(i)}$ линейно независимы. Пусть $1 \leqslant i_1 \leqslant \ldots \leqslant n$ - номера ведущих элементов строк в A и пусть $\alpha_1 A_{(1)} + \cdots + \alpha_n A_{(n)} = \vec{0}$ для некоторых $\alpha_i \in F$. i_k строка координата в левой части равна $\alpha_k \Rightarrow \alpha_k = 0$.

∎

Лемма 1.4. rkA равно rkA^T, что также равно количеству ненулевых строк в ступенчатом виде.

Пусть $A \in Mat_n(F)$.

Лемма 1.5. $rkA = n \Leftrightarrow \det A \neq 0$ и $rkA < n \Leftrightarrow \det A = 0$

Доказательство. 1. При приведении A к ступенчатому виду при помощи элементарных преобразованиях строк, rkA не меняется, ведь условие равенства определителя 0 не меняется

2. В случае ступенчатого вида $rkA < n \Rightarrow \exists i : A_{(i)} = \vec{0} \Rightarrow \det A = 0$
3. В случае ступенчатого вида $rkA = n \Rightarrow$ Матрица является верхнетреугольной $\Rightarrow \det A \neq 0$ (так как элементы на диагонали не равны 0)

∎

Определение 2. *Подматрица матрицы A* - любая матрица, полученная из исходной вычеркиванием каких-то строк и/или столбцов

Лемма 1.6. Ранг подматрицы не больше ранга матрицы

Доказательство. Если какие-то столбцы в S линейно независимые, то соответствующие столбцы в A и подавно линейно независимые. ∎

Определение 3. *Минор матрицы A* - определитель произвольной квадратной матрицы, являющейся подматрицей в A

Определение 4. *Базисные миноры* - Ненулевые миноры в A

Теорема 1.7.

$$\forall A \in Mat_{m \times n}$$

Следующие 3 числа равны:

1. rkA
2. rkA^T
3. *Наибольший порядок ненулевого минора в* A

Доказательство.

1. Мы знаем, что $I = II$
2. Пусть S - квадратная подматрица в A, размера r и $\det S \neq 0$. Тогда $r = rkS \leqslant rkA \Rightarrow III \leqslant I$
3. Обратно пусть $rkA = r$. Тогда в A есть r столбцов, которые линейно независимые. Пусть B - подмножество в A, составленная из этих столбцов. Тогда $rkB = r \Rightarrow$ В B есть r линейно независимых строк.
4. Пусть S - подматрица размера $r \times r$, составленная из этих строк. Тогда $rkS = r \Rightarrow \det S \neq 0 \Rightarrow III \geqslant I$
5. $III = I$

∎

1.2 Применения ранга матрицы к СЛУ

Рассмотрим $Ax = b, A \in Mat_{m \times n}(F), x \in F^n, b \in F^m$

Теорема 1.8 (Теорема Кронекера-Копели)**.** *СЛУ совместна тогда и только тогда $rkA = rk(A|b)$*

Доказательство.

1. множество решений сохранится
2. rkA и $rk(A|b)$ не меняется
3. Система случаем, когда $(A|b)$ имеет ступенчатый вид.
4. А такая система будет иметь равный ранг, если не будет строк вида $0, \ldots, 0, b \neq 0$

∎

Теорема 1.9. *Пусть СЛУ совместна. Система имеет единственное решение тогда и только тогда $rkA = n$ (n - число независимых)*

Доказательство. Снова все сводится к ситуации, когда $(A|b)$ имеет ступенчатый вид; В таком случае решение единственное тогда и только тогда, когда нет свободных переменных, а значит главных переменных ровно n, а значит число ненулевых строк равно $n \Leftrightarrow rkA = n$ ∎

Лемма 1.10. Система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда определитель не равен 0

Доказательство.

1. **Единственность решения** $\Rightarrow rkA \Rightarrow rkA = rk(A|b) = n$
2. $\det A \neq 0 \Rightarrow rkA \Rightarrow rk(A|b) = rkA = n \Rightarrow$ СЛУ совместна и имеет одно решение

∎

Пусть теперь СЛУ: $Ax = 0$. Пусть $S \subseteq F^n$ - множество ее решений

Лемма 1.11. $dimS = n - rkA$

2 Лекция 9.12.2024

Предложение.

$$b_1, \dots, b_p \in F^n$$

$$B = (b_1, \dots, b_p) \in Mat_{n \times p}(F)$$

Пусть $a_1, \dots, a_q$ - ФСР для ОСЛУ $B^T x = 0$

$$A = (a_1, \dots, a_q) \in Mat_{n \times q}$$

Тогда $(b_1, \dots, b_p)$ - множество решений ОСЛУ $A^T x = 0$

Доказательство.

1. Пусть $S = \{x \in F^n | A^T x = 0\}$
2. $\forall i$ имеем $B^T a_i = 0 \Rightarrow B^T A = 0 \Rightarrow A^T B = 0 \Rightarrow \forall j : A^T b_j = 0 \Rightarrow b_1, \dots, b_p \in S \Rightarrow < b_1, \dots, b_p > \subseteq S$
3. Пусть $r = rk\{b_1, \dots, b_p\} = \dim < b_1, \dots, b_p > = rkB = rkB^T$
4. При этом $rkA = q = n - r$ (Из прошлой лекции)
5. Тогда $\dim S = n - q = n - (n - r) = r \Rightarrow \dim S = \dim < b_1, \dots, b_p > \to S = < b_1, \dots, b_p >$

■

Следствие. Всякое подпространство в F^n является множеством решений некоторой ОСЛУ.

2.1 Различные базисы

Пусть V - некоторое векторное пространство над F, пусть $\dim V = n$
Фиксируем некоторый базис (Отныне базисы считаем последовательностью, а не множеством):

$$(e_1 \quad \dots \quad e_n)$$

Знаем, что $\forall v \in V \exists! (x_1, \dots, x_n) : x_1 \cdot e_1 + \dots + x_n \cdot e_n = v$

Определение 5. *Координатами вектора* v называется последовательность скаляров $(x_1, \dots, x_n)$ в базисе $(e_1, \dots, e_n)$

Пример. $V = F^n, v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in F^n$, тогда $x_1, \dots, x_n$ - координаты вектора v в стандартном базисе

Предложение. Пусть $e'_1, \dots e'_n$ - какой-то набор векторов из n векторов:

$$e'_i = c_{1i} e_1 + \dots + c_{ni} e_n$$

$$(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot C, \ C = (c_{ij})$$

$(e'_1, \dots, e'_n)$ - *базис в* V *тогда и только тогда* $\det C \neq 0$

Доказательство.

1. $(e'_1, \dots, e'_n)$ - базис в V, тогда $(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot C$ для некоторой $C' \in M_n$
2. $(e_1, \dots, e_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot C \cdot C'$
3. Так как векторы $e_1, \dots, e_n$ линейно независимы, то j столбец будет равен столбцу, у которого стоит единственный ненулевой элемент, равный единице на j позиции. Следовательно $C \cdot C' = E \Rightarrow \det C \neq 0$
4. Докажем, что $e'_1, \dots, e'_n$ линейно независимы (и тогда раз их n штук они образуют базис в V)
5. Пусть $\alpha_1 \cdot e'_1 + \dots + \alpha_n \cdot e'_n = 0$, тогда:

$$(e'_1, \dots, e'_n) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (e_1, \dots, e_n) \cdot C \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = 0$$

6. так как $e_1, \dots, e_n$ линейно независимы, то $C \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = 0$. Так как $\det C \neq 0$, то $\exists C^{-1} \Rightarrow$, умножая на C^{-1} слева, полученная $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ линейно независимы, то это базис

■

Определение 6. Пусть $(e_1, \dots, e_n)$ и $(e'_1, \dots, e'_n)$ - два базиса в V. $(e_1, \dots, e_n) = (e'_1, \dots, e'_n) \cdot C,\ C \in M_n(F), \det C \neq 0$
Матрицей перехода от базиса $(e_1, \dots, e_n)$ к базису $(e'_1, \dots, e'_n)$ называется матрица C
В столбце $C^{(j)}$ записаны координаты вектора e'_j в базисе $(e_1, \dots, e_n)$.

Замечание. Из свойства следует, что $(e_1, \dots, e_n) = (e'_1, \dots, e'_n) \cdot C^{-1}$

Предложение.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

Доказательство.

1. $v = \begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e'_1 & \dots & e'_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$
2. Так как $e_1, \dots, e_n$ - линейно независимы, то $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$

■

Предложение. $U, W \subseteq V$ - два подпространства. Тогда $U \cap W$ - тоже подпространство

Определение 7. *Суммой двух подпространств* называется $U + W = \{u + w | u \in U, w \in W\}$

Замечание. Так как $U \cap W \subseteq U = U + \{0\} \subseteq U + W$, то $\dim U \cap W \leqslant \dim U \leqslant \dim U + W$

Теорема 2.1. $\dim U \cap W + \dim U + W = \dim U + \dim W$

Пример.

1. $V = \mathbb{R}^3$, следовательно две любые плоскости содержат общую прямую:
2. $\dim U = 2, \dim V = 2, \dim U + W \leqslant 3 \Rightarrow \dim U \cap W \geqslant 2 + 2 - 3 = 1$

Доказательство.

1. Пусть $\dim U \cap W = p, \dim U = q, \dim W = r$. Пусть $a = \{a_1, \dots, a_p\}$ - базис в $U \cap W$
2. Дополним его векторами $b = \{b_1, \dots, b_{q-p}\}$ до базиса в U
3. Дополним его векторами $c = \{c_1, \dots, c_{k-p}\}$ до базиса в W
4. Докажем, что $a \cup b \cup c$ - базис в $U + W$
    (a) $U + W =< a \cup b \cup c >$. Имеем, что $< a \cup b \cup c >\subseteq U + W$

(b) $v \in U+W \Rightarrow v=u+w, u \in U, w \in W, u \in U =< a \cup b > \subseteq < a \cup b \cup c >, w \in W =< a \cup c > \subseteq < a \cup b \cup c > \Rightarrow v = u+w \in < a \cup b \cup c > \Rightarrow U+W \subseteq < a \cup b \cup c >$

(c) $a \cup b \cup c$ - линейно независимы

5. Пусть для некоторых $\alpha_i, \beta_j, \gamma_k \in F$
$$\alpha_1 a_1 + \dots + \gamma_{r-p} c_{r-p} = \vec{0}$$

6. $z = -x - y \in U$. Так как $z \in W$, то $z \in U \cap W \Rightarrow z = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_p a_p; \lambda_j \in F \Rightarrow \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_p a_p - \gamma_1 c_1 - \dots - \gamma_{r-p} c_{r-p} = \vec{0}$

7. Так как $a \cup c$ линейно независимы (базис c в W), то $\lambda_1 = \dots = \gamma_{r-p} = 0$ и $z = 0$, следовательно $\alpha_1 a_1 + \dots + \gamma_{r-p} c_{r-p} = \vec{0}$, так как $A \cup b$ линейно независимы (базис в U), то $\alpha_1 = \dots = \beta_{q-p} = 0$

8. $a \cup b \cup c$ - базис в $U+W$, следовательно $\dim U+W = |a|+|b|+|c| = p+q-p+r-p = \dim U \cap W$

■

3 Лекция 16.12.2024

Лемма 3.1.
V - векторное пространство над полем $F, \dim V < \infty$
$U, W \subseteq V$ - подпространства
Новые пространства:

1. $U \cap W$
2. $U + W = \{u + w \mid u \in U,\ w \in W\}$

Замечание.

$$\dim(U \cap W) + \dim(U + W) = \dim U + \dim W$$

Определение 8.
Пусть $U_1, \dots, U_m$ - набор подпространтсв
Сумма подпространтсв $U_1, dots, U_m$ - это

$$U_1 + \dots + U_m = \{u_1 + \dots + u_2 \mid u_1 \in U_1, \dots u_m \in U_m\}$$

Замечание. Сумма подпространств является подпространством.

$$\dim(U_1 + \dots + U_m) \leqslant \dim U_1 + \dots + \dim U_m$$

Определение 9.
Подпространста $U_1, \dots, U_k$ называются линейно независимыми, если $\forall u_1 \in U_1, \dots, u_k \in U_k$ из условия $u_1 + \dots + u_k = \vec{0}$ следует $u_1 = \dots = u_k = \vec{0}$

Пример. $\dim U_i = 1,\ \forall i, U_i =< e_i >$ следует $U_1, \dots, U_k$ линейно независимые, что равносильно линейной независимости e_i

Теорема 3.2.
Слудующие условия эквиваленты:

1. $U_1, \dots, U_k$ *линейно независимые*
2. $\forall u \in U_1 + \dots + U_k :\ \exists u_i \in U_i$, *такие что* $u = u_1 + \dots + u_k$
3. *если* e_i *- базис в* U_i, *то* $e_1 \cup \dots \cup e_k$ *- базис в* $U_1 + \dots + U_k$
4. $\dim(U_1 + \dots + U_k) = \dim U_1 + \dots + \dim U_k$
5. $\forall i :\ U_i \cap (\sqcup_{j \neq i} U_j = \{\vec{0}\})$ *(Объединение мультимножеств:* $\sqcup$*)*

Доказательство. $1 \to 2$

1. Пусть $u \in U_1 + \dots + U_k$ и существуют 2 представления $u = u_1 + \dots + u_k = u_1' + \dots + u_k'$
2. Вычтем: $(u_1 - u_1') + \dots + (u_k - u_k') = \vec{0} \Rightarrow u_i = u_i'$

∎

Доказательство. $2 \to 3$

1. Пусть $u \in U_1 + \dots + U_k$ в силу условия 2 $u = u_1 + \dots + u_k$ (однозначно представлен)
2. Так как e_i - базис в U_i, то всякий u_i - единственным образом представим в виде линейной комбинации векторов из e_i
3. Знаем, что u - однозначно представим в виде линейной комбинации векторов из $\sqcup_i e_i$, следовательно $\sqcup_i e_i$ - базис в сумме

∎

Доказательство. $3 \to 4$
$\dim(U_1 + \dots + U_m) = |\sqcup e_i| = |e_1| + \dots + |e_m| = \dim U_1 + \dots + \dim U_k$

∎

Доказательство. $4 \to 5$

1. $\overline{U_i} = U_1 + \cdots + U_{i-1} + U_{i+1} + U_k$
2. $\dim(U_i \cap \overline{U_i}) = \dim U_i + \dim \overline{U_i} - \dim(U_i + \overline{U_i}) \leqslant \dim U_i + \dim U_1 + \ldots \dim U_k - \dim U_1 - \cdots - \ldots \dim U_k = 0$
3. $\dim(U_i \cap \overline{U_i}) \leqslant 0$

■

Доказательство. $5 \to 1$

1. Пусть $u_1 \in U_1, \ldots, u_k \in U_k$, таковы, что $u_1 + u_k = \vec{0}$. Тогда для любого номера $u_i = -u_1 - \ldots u_{i-1} - u_{i+1} - \ldots u_k \in U_i \cap \overline{U_i} = \vec{0}$

■

Следствие. Подпространста $U, W \subseteq V$ линейно независимы, что равносильно $U \cap W = \{\vec{0}\}$

Определение 10. Разложение в прямую сумму
Говорят, что векторы разлагаются в прямую сумму своих подпространств $U_1, \ldots, U_k$, если:

$$U_1, \ldots, U_k$$

и обозначают: $U_1 \oplus \cdots \oplus U_k$

Пример. $e_1, \ldots, e_n$ - базис в V, то
$V =< e_1 > \oplus \cdots \oplus < e_n >$

Замечание. 1. При $k = 2$

2. $V = U_1 \oplus U_2 \Leftrightarrow \begin{cases} V = U_1 + U_2 \\ U_1 \cap U_2 = \vec{0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dim V = \dim U_1 + \dim U_2 \\ U_1 \cap U_2 = \{\vec{0}\} \end{cases}$
3. $V = U_1 \oplus U_2 \Rightarrow \forall v \in V : \ \exists! u_1 \in U_1, u_2 \in U_2 : \ V = U_1 + U_2$

Определение 11. В этой ситуации u_1 *проекцией* вектора v на подпространтсво U_1 вдоль подпространства U_2

3.1 Линейные отображения - в слайдах