Линейная алгебра

2024 — 2025

Содержание

1 Лекция 5.12.2024

Задача 1.1. Пусть F - поле, $v_1, \dots v_m \in F^n$, которые являются линейно независимыми. Дополнить до базиса F^n.

Решение.

1. В матрицу $A \in Mat_{n\times(m+n)}(F)$ по столбцам запишем векторы $v_1, \dots v_m, e_1, \dots, e_n$
2. Элементарными строк приводим A к ступенчатому виду A'
3. В качестве базиса F^n возьмем те векторы из набора $v_1, \dots v_m, e_1, \dots, e_n$, номера которых совпадают с номерами столбцов, с лидерами строк (среди них будут $v_1, \dots v_m$)

Пример.

1. $v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, \;\; v_2 = \begin{pmatrix}2\\4\\5\\6\end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 4 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -3 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

2. Берем первые 4 столбца (с лидерами строк) - v_1, v_2, e_1, e_2

Решение.

1. *Рассмотрим более эффективный способ*
2. В матрицу A запишем $v_1, \dots, v_m$
3. Элементарными преобразованиями столбцов приведем к транспонированному ступенчатому виду (A')

$$\begin{pmatrix}* & 0 & 0 & \dots\\ * & * & 0 & \dots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{pmatrix}$$

4. Дополнить набор столбцов A' до базиса F^n теми векторами стандартного базиса, номера которых не являются номерами ведущих элементов столбцов
5. Эти векторы дополняют и $v_1, \dots, v_m$ до базиса

Пример.

1. $v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, \;\; v_2 = \begin{pmatrix}2\\4\\5\\6\end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\\ 3 & 5\\ 4 & 6\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 0\\ 3 & -1\\ 4 & -2\end{pmatrix}$$

2. Нет ведущего элемента в 2 и 4 строках, а значит этими векторами и надо дополнить нашу систему: v_1, v_2, e_2, e_4

Замечание. Дополнение до базиса не единственное. Вместо любого дополняющего набора можно взять любые векторы из его линейной оболочки

1.1 Ранг матрицы

Определение 1. Ранг набора

Пусть V - векторное подпространство над F и $v_1, \dots, v_m \in V$.

Рангом набора векторов называется $\dim < v_1, \dots, v_m >$

Ранг сохраняется приэлементарных преобразованиях

Определение 2. Ранг матрицы

Пусть $A \in Mat_{m\times n}(F)$

Рангом матрицы A называется ранг ее системы строк (как векторов в F^n).

Обозначается rkA

Свойства.

1. $rkA = rkA^T$
2. $0 \leqslant rkA \leqslant \min\{m, n\}$
3. $rkA = 0 \Leftrightarrow A = 0$
4. Ранг матрицы сохраняется при элементарных преобразованиях как строк, так и столбцов
5. Ранг A равен количеству ненулевых строк в ступенчатом виде

Лемма 1.1. Пусть $A \in Mat_{m\times n}(F)$

$$rkA = 1 \Leftrightarrow A = b \cdot c^T$$

где $b \in Mat_{m\times 1}(F),\ c \in Mat_{n\times 1},\ b \neq 0,\ c \neq 0$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 & \dots & c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \cdot c_1 & \dots & b_1 \cdot c_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_m \cdot c_1 & \dots & b_m \cdot c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \cdot c^T \\ \vdots \\ b_m \cdot c^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \cdot b & \dots & c_n \cdot b \end{pmatrix}$$

Доказательство.

1. Пусть b - ненулевой столбец $A,\ \forall j = 1, \dots n\ \exists \lambda_j \in F:\ A^{(j)} = \lambda_j \cdot b$
2. Тогда можно взять $c = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ и $A = b \cdot c^T$
3. Из разложение по столбцам обратный факт очевиден. (Берем $c \neq 0$, получаем ненулевой столбец ...)

∎

Лемма 1.2. Пусть V - векторное пространство над F.

$$u_1, \dots, u_n \in V$$
$$v_1, \dots, v_m \in V$$

$$\dim < u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_m > \ \leqslant\ \dim < u_1, \dots, u_n > + \dim < v_1, \dots, v_m >$$

Доказательство.

1. Пусть $u_{j_1}, \dots, u_{j_s}$ - базис векторной оболочки $< u_1, \dots, u_n >$
2. $v_{k_1}, \dots, v_{k_p}$ - базис векторной оболочки $< v_1, \dots, v_m >$
3. $r = \dim < u_1, \dots, u_n >,\ s = \dim < v_1, \dots, v_m >$
4. $< u_1, \dots, v_m > = < u_{j_1}, \dots, v_{k_p}$
5. $\dim < \dots > \leqslant r + s$

■

Лемма 1.3. Пусть $A, B \in Mat_{m\times n}(F)$

Свойства.

1. $rk(A+B) \leqslant rkA + rkB$
2. $rk(A-B) \geqslant rkA - rkB$

Доказательство. 1

1. $A = (a_1, \dots, a_n), B = (b_1, \dots, b_n)$
2. $A + B = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$
3. $< a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n > \leqslant < a_1, \dots, b_n >$
4. $rk(A+B) \leqslant rkA + rkB$

■

Доказательство. 2
$rkA = rk((A-B)+B) \leqslant rk(A-B) + rkB$

■

Замечание. Эти неравенства достигаются (например при $B = 0$)

Лемма 1.4. Пусть $A \in Mat_{m\times n}(F),\ r = rkA$

Свойства.

1. $A = B_1 + \dots + B_s,\ \ rkB_i = 1\ \ \forall i \Rightarrow s \geqslant r$
2. $\exists B_1, \dots, B_r,\ rkB_i = 1:\ A = B_1 + \dots + B_r$

Доказательство. 1
$r = rk(B_1 + \dots + B_s) \leqslant rkB_1 + \dots + rkB_s = s$

■

Доказательство. 2

1. $A = (a_1, \dots, a_r)$
2. Пусть $a_1, \dots, a_r$ - базис $< a_1, \dots, a_r$
3. $\forall 1 \leqslant k \leqslant n - r:\ \ a_{r+k} = \lambda_{k1} \cdot a_1 + \dots + \lambda_{kr} \cdot a_r$
4. тогда можно взять $B_i = a_i \cdot (0 \dots 01\ (i$ - ое место$)\ 0 \dots 0\lambda_{1i} \dots \lambda_{n-ri})$
5. Первые r - элементов - нули с 1 посередине

■

Доказательство. Алгоритм

1. Найти максимальную линейно-независимую системы столбцов $A^{(i_1)}, \dots, A^{(i_r)}$
2. В матрице A (т. е. найти базис пространства столбцов)

3. Линейно выразить остальные столбцы через этот базис

4. В j - ый столбец матрицы B_k записатт ту компоненту разложения столбца $A^{(j)}$ по базису $A^{(i_1)}, \dots, A^{(i_r)}$, которая пропорциональна $A^{(i_k)}$ (другими словами B_k это столбец $B_k = A^{(i_k)} \cdot b_k^T$)

■

Пример.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 & 1 \\ 0 & 1 & -1/3 & 1 \end{pmatrix}$

2. $A^{(1)}, A^{(2)}$ - базис
$$A^{(3)} = \frac{1}{3} \cdot A^{(1)} - \frac{1}{3} \cdot A^{(2)}$$
$$A^{(4)} = 1 \cdot A^{(1)} + 1 \cdot A^{(2)}$$

3. Пишем разложение:
$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}$$
$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1/3 & 1 \end{pmatrix}$$

2 Лекция 12.12.2024

2.1 Миноры

Определение 3.
Пусть $A \in Mat_{m\times n}(F)$.
Подматрицей в A называется матрица, которая стоит на пересечении некоторых строк и некоторых столбцов

Определение 4.
Пусть $A \in Mat_{m\times n}(F)$.
Минором $M_{i_1,\dots,i_k}^{j_1,\dots,j_k}$ порядка k называется определитель подматрицы на пересечении строк $i_1,\dots,i_k$, столбцов $j_1,\dots,j_k$
Алгебраическим дополнением (без знака) это частный случай минора $A_{ij} = (-1)^{(i+j)} M_i^j$

Теорема 2.1.
Ранг матрицы равен наибольшему порядку ненулевого минора

Замечание. В матрице $m \times n$ количество миноров порядка k равно $C_m^k \cdot C_n^k$

Определение 5.
Пусть $A \in Mat_{m\times n}(F)$ и M -минор в ней.
Минор M' называется окаймляющим к M если M получается из M' вычеркиванием одной строки и одного столбца

Теорема 2.2. *Метод окаймляющих миноров*
Пусть в A есть ненулевой минор порядка k. Тогда в A есть ненулевой минор порядка $k+1$ в том, и только в том случае, когда среди окаймляющих M миноров найдется ненулевой

Замечание. На k-ом шаге достаточно перебрать $(m-k)\cdot(n-k)$ миноров

Задача 2.1.
Найти rkA, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{23}^{12} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 10 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rkA \geqslant 2$$

Тогда:

$$rkA = 2 \Leftrightarrow M_{123}^{123} = M_{123}^{124} = 0$$

Задача 2.2.
Пусть $U =< u_1,\dots,u_l >\subseteq F^n$. Требуется найти ОСЛУ $Ax = 0, \quad A \in Mat_{m\times n}(F)$, множеством решений которой является U

Обозначим $d = dimU, \quad u_i = \begin{pmatrix} b_{i1} \\ \vdots \\ b_{in} \end{pmatrix}$

Лемма 2.3. Алгоритм

1. $Av_i = 0$. Посмотрим на эти уравнения как на ОСЛУ с коэффицентами - координатами v_i и неизвестными - ячейками в матрице A: $a_{k1}b_{l1} + \dots + a_{kn}b_{ln} = 0$
2. Записать векторы $u_1,\dots,u_l$ в матрицу B по строкам
3. Для ОСЛУ $By = 0$ найти ФСР $v_1,\dots,v_{n-d}$
4. В качестве A можно взять матрицу, в которой $v_1,\dots,v_{n-d}$ записаны по строкам

5. Докажем, что полученная матрица является искомой:
   (a) $W = \{x|Ax = 0\}$ Так как $Au_l = 0 \forall l = 1, \ldots, k$
   (b) $U \subseteq W$
   (c) Никакие другие векторы не подходят. Так как $dimW = n - rkA = n - (n - d) = d$ (Одно подпространство содержится в другом и их размерности совпадают)

Задача 2.3.
Найти ОСЛУ, задающее подпространство:

$$< (1, 1, 0, 2), (3, -3, 2, 0), (2, -1, 1, 1) >$$

Решение.

1. Находим общее решение:
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 & 1 \\ 0 & 1 & -1/3 & 1 \end{pmatrix}$$
2. Находим ФСР:
$$\{ \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$$
3. Записываем в матрицу по строкам:
$$A = \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Зафиксируем векторное пространство V над полем F
Пусть $e = (e_1, \ldots, e_m)$ - некоторый набор векторов из V и $e' = (e'_1, \ldots, e'_k)$ - это набор векторов из $< e >$
$\exists c_{ij} \in F$
$e'_j = \sum_{i=1}^{m} c_{ij} e_i$
В матричном виде:
$e' = eC$, где
$C = (c_{ij}) \in Mat_{m \times k}(F)$ (то есть в C столбцы записаны выражения векторов e'_j)

Лемма 2.4.
Пусть $c = (e_1, \ldots, e_m)$ - линейно - независимы. Тогда $\forall C, D \in Mat_{m \times k}(F)$

$$eC = eD \to C = D$$

Доказательство.

1. j - й вектор в строках eC и eD равен
$$\sum_{i=1}^{m} e_i \cdot c_{ij} = \sum_{i=1}^{m} e_i \cdot d_{ij}$$
2. Так как векторы линейно независимы, тогда они выражаются единственным образом ($c_{ij} = d_{ij}$)

■

Задача 2.4.
Пусть $e = (e_1, \ldots, e_n)$ - базис в V и $e' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ - некоторый набор векторов. Обозначим $e = e' \cdot C$. Тогда e' является базисом $Leftrightarrow$ C обратима

Доказательство.

1. $e = e' \cdot D$. Тогда $e' = e' \cdot E = e \cdot C = e' \cdot DC$
2. По предыдущей задаче получаем, что $DC = E$

3. Докажем в обратную сторону. $e' = eC \Rightarrow e'c^{-1} = e \Rightarrow < e' >= V$ и их n штук $Rightarrow$ e' - базис

■

Определение 6.
Пусть $e = (e_1, \dots, e_n)$ и $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$ - базисы V. Единственное матрицы C, для которой $e' = eC$ называется *матрицей перехода от базиса* e *к базису* e'. Обозначение $C = C_{e \to e'}$

Замечание. При фиксированном базисе в V, все базисы в V описываются невырожденными матрицами $n \times n$

Свойства.
Пусть e, e', e'' - базисы V

1. $C_{e \to e''} = C_{e \to e'} \cdot C_{e' \to e''}$
2. $C_{e' \to e} = C^{-1}_{e \to e \to e'}$

Доказательство. 1

1. $e' = eC_{e \to e'},\ e'' = e'C_{e' \to e''}$
2. $e'' = e'C_{e' \to e''} = eC_{e \to e'} \cdot C_{e' \to e''}$

■

Доказательство. 2

1. $e' = eC_{e \to e'} \Rightarrow e = e'C^{-1}_{e \to e'} = e'C_{e' \to e}$ по предыдущей задаче

■

Задача 2.5.
Пусть базисы e' и e'' заданы своими координатами в некотором базисе e: $e' = eC',\ e'' = eC''$
Тогда $C_{e' \to e''} = C_{e' \to e} \cdot C_{e \to e''} = (C')^{-1} \cdot C''$

Лемма 2.5.
Пусть e, e' - базисы в V. Рассотрим вектор $v \in V$.
В первом базисе у него координаты $x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = x'_1 e'_1 + \dots + x'_n e'_n$
В матричном виде:

$$v = ex = e'x'$$

Тогда:

$$ex = e'x' = eCx' \Rightarrow x = Cx'$$

Замечание. В частности, чтобы найти координаты в новом базисе, нужно обратить матрицу C (то есть решить СЛУ $(C|x)$)

Задача 2.6.
Пусть $C \in F$. В пространству $\mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$:

1. матрица перехода от стандартного базиса $1, x, \dots, x^n$ к базису $1, (x - c), \dots, (x - c)^n$
2. Найти координаты вектора $f(x) = a_0 + \dots a_n x^n$ в новом базисе

Решение. 1

1. $e'_k = (x-c)^k = \sum_{i=0}^k C_k^i x^i (-c)^{k-i} = \sum_{i=0}^k C_k^i (-c)^{k-i} e_i$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -c & \dots & (-c)^k & \dots \\ 0 & 1 & \dots & k(-c)^{k-1} & \\ 0 & 0 & \dots & C_k^2(-c)^{k-i} & \\ 0 & 0 & \dots & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \dots & \ddots & \end{pmatrix}$$

2. Базис: $y = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$. В новом базисе: $z = \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$

3. $y = Cz, \ z = c^{-1} y$

4. Можно обратить:

$$f(x) = f(x - c + c) = \sum_{i=0}^{n} a_i ((x-c)+c)^i$$