Линейная алгебра

2024 — 2025

Содержание

1 Лекция 2.12.2024

1.1 Ранг матрицы

V - векторное пространство над F

Определение 1. *Ранг Матрицы* $rk(S) = \max\{|S|, S' \subseteq S, S$ - линейно независимо$\}$

1. Столбцовый Ранг
2. Строковый Ранг

Утверждение 1.1. *Ранг матрицы равен размерности подпространства*

Лемма 1.2. При элементраных преобразованиях строк сохраняются все линейные зависимости между стобцами. $rk(A)$ не меняется при элементарных преобразованиях строк.

$$A \to B: < A^{(1)}, \dots, A^{(n)} >=< B^{(1)}, \dots, B^{(n)} >$$

Доказательство.

1. $B^{(i)} \in < A^{(1)}, \dots, A^{(n)} >$
2. Так как все элементарные преобразования обратимы, то включение ваерно и в обратную сторону
3. Ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях столбцов
4. Строковый ранг матрицы не менчяется при элементарных преобразованиях строк и столбцов

■

Лемма 1.3 ($rkA = rkA^T$)**.** Если A имеет улучшенный ступенчатый вид, то $rkA = rkA^T$, причем оба числа равны количеству ненулвеых строк в A

Доказательство.

1. Пусть r - число ненулевых строк в A
2. Тогда:
$$e_1, \dots, e_r \subseteq \{A^{(1)}, \dots, A^{(n)}\}, \;\; r = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$< e_1, \dots, e_r > \subseteq < A^{(1)}, \dots, A^{(n)} >$$
3. С другой стороны $\forall i : A^{(i)} \in < e_1, \dots, e_r$
$$\Rightarrow < A^{(1)}, \dots, A^{(n)} > \subseteq < e_1, \dots, e_r >$$
4. Получаем:
$$< A^{(1)}, \dots, A^{(n)} >=< e_1, \dots, e_r > \Rightarrow rkA = dim < e_1, \dots, e_r >= r$$
5. Покажем, что $rkA^T = r$. Достаточно доказать, что строки $A^{(i)}$ линейно независимы. Пусть $1 \leqslant i_1 \leqslant \dots \leqslant n$ - номера ведущих элементов строк в A и пусть $\alpha_1 A_{(1)} + \dots + \alpha_n A_{(n)} = \vec{0}$ для некоторых $\alpha_i \in F$. i_k строка координата в левой части равна $\alpha_k \Rightarrow \alpha_k = 0$.

■

Лемма 1.4. rkA равно rkA^T, что также равно количеству ненулевых строк в ступенчатом виде.

Пусть $A \in Mat_n(F)$.

Лемма 1.5. $rkA = n \Leftrightarrow \det A \neq 0$ и $rkA < n \Leftrightarrow \det A = 0$

Доказательство.

1. При приведении A к ступенчатому виду при помощи элементарных преобразованиях строк, rkA не меняется, ведь условие равенства определителя 0 не меняется
2. В случае ступенчатого вида $rkA < n \Rightarrow \exists i : A_{(i)} = \vec{0} \Rightarrow \det A = 0$
3. В случае ступенчатого вида $rkA = n \Rightarrow$ Матрица является верхнетреугольной $\Rightarrow \det A \neq 0$ (так как элементы на диагонали не равны 0)

■

Определение 2. *Подматрица матрицы A* - любая матрица, полученная из исходной вычеркиванием каких-то строк и/или столбцов

Лемма 1.6. Ранг подматрицы не больше ранга матрицы

Доказательство. Если какие-то столбцы в S линейно независимые, то соответствующие столбцы в A и подавно линейно независимые. ■

Определение 3. *Минор матрицы A* - определитель произвольной квадратной матрицы, являющейся подматрицей в A

Определение 4. *Базисные миноры* - Ненулевые миноры в A

Теорема 1.7.

$$\forall A \in Mat_{m\times n}$$

Следующие 3 числа равны:

1. rkA
2. rkA^T
3. *Наибольший порядок ненулевого минора в A*

Доказательство.

1. Мы знаем, что $I = II$
2. Пусть S - квадратная подматрица в A, размера r и $\det S \neq 0$. Тогда $r = rkS \leqslant rkA \Rightarrow III \leqslant I$
3. Обратно пусть $rkA = r$. Тогда в A есть r столбцов, которые линейно независимые. Пусть B - подмножество в A, составленная из этих столбцов. Тогда $rkB = r \Rightarrow$ В B есть r линейно независимых строк.
4. Пусть S - подматрица размера $r \times r$, составленная из этих строк. Тогда $rkS = r \Rightarrow \det S \neq 0 \Rightarrow III \geqslant I$
5. $III = I$

■

1.2 Применения ранга матрицы к СЛУ

Рассмотрим $Ax = b, A \in Mat_{m\times n}(F), x \in F^n, b \in F^m$

Теорема 1.8 (Теорема Кронекера-Копели)**.** *СЛУ совместна тогда и только тогда $rkA = rk(A|b)$*

Доказательство.

1. множество решений сохранится
2. rkA и $rk(A|b)$ не меняется
3. Система случаем, когда $(A|b)$ имеет ступенчатый вид.
4. А такая система будет иметь равный ранг, если не будет строк вида $0, \ldots, 0, b \neq 0$

■

Теорема 1.9. *Пусть СЛУ совместна. Система имеет единственное решение тогда и только тогда $rkA = n$ (n - число независимых)*

Доказательство. Снова все сводится к ситуации, когда $(A|b)$ имеет ступенчатый вид; В таком случае решение единственное тогда и только тогда, когда нет свободных переменных, а значит главных переменных ровно n, а значит число ненулевых строк равно $n \Leftrightarrow rkA = n$ ■

Лемма 1.10. Система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда определитель не равен 0

Доказательство.

1. **Единственность решения** $\Rightarrow rkA \Rightarrow rkA = rk(A|b) = n$
2. $\det A \neq 0 \Rightarrow rkA \Rightarrow rk(A|b) = rkA = n \Rightarrow$ СЛУ совместна и имеет одно решение

■

Пусть теперь СЛУ: $Ax = 0$. Пусть $S \subseteq F^n$ - множество ее решений

Лемма 1.11. $dimS = n - rkA$