

# Линейная алгебра

2024 — 2025

## Содержание

<b>1</b>	<b>Лекция 5.12.2024</b>	<b>2</b>
1.1	Ранг матрицы . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Лекция 12.12.2024</b>	<b>6</b>
2.1	Миноры . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Лекция 10.01.2024</b>	<b>10</b>
3.1	Сумма и пересечение пространств . . . . .	10
3.1.1	Способы задания подпространств в $F^n$ . . . . .	10

# 1 Лекция 5.12.2024

**Задача 1.1.** Пусть  $F$  - поле,  $v_1, \dots, v_m \in F^n$ , которые являются линейно независимыми. Дополнить до базиса  $F^n$ .

**Решение.**

1. В матрицу  $A \in \text{Mat}_{n \times (m+n)}(F)$  по столбцам запишем векторы  $v_1, \dots, v_m, e_1, \dots, e_n$
2. Элементарными строк приводим  $A$  к ступенчатому виду  $A'$
3. В качестве базиса  $F^n$  возьмем те векторы из набора  $v_1, \dots, v_m, e_1, \dots, e_n$ , номера которых совпадают с номерами столбцов, с лидерами строк (среди них будут  $v_1, \dots, v_m$ )

*Пример.*

$$1. v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Берем первые 4 столбца (с лидерами строк) -  $v_1, v_2, e_1, e_2$

**Решение.**

1. Рассмотрим более эффективный способ
2. В матрицу  $A$  запишем  $v_1, \dots, v_m$
3. Элементарными преобразованиями столбцов приведем к транспонированному ступенчатому виду ( $A'$ )

$$\begin{pmatrix} * & 0 & 0 & \dots \\ * & * & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

4. Дополнить набор столбцов  $A'$  до базиса  $F^n$  теми векторами стандартного базиса, номера которых не являются номерами ведущих элементов столбцов
5. Эти векторы дополняют и  $v_1, \dots, v_m$  до базиса

*Пример.*

$$1. v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

2. Нет ведущего элемента в 2 и 4 строках, а значит этими векторами и надо дополнить нашу систему:  $v_1, v_2, e_2, e_4$

**Замечание.** Дополнение до базиса не единственное. Вместо любого дополняющего набора можно взять любые векторы из его линейной оболочки

## 1.1 Ранг матрицы

### Определение 1. Ранг набора

Пусть  $V$  - векторное подпространство над  $F$  и  $v_1, \dots, v_m \in V$ .

Рангом набора векторов называется  $\dim \langle v_1, \dots, v_m \rangle$

Ранг сохраняется при элементарных преобразованиях

### Определение 2. Ранг матрицы

Пусть  $A \in \text{Mat}_{m \times n}(F)$

Рангом матрицы  $A$  называется ранг ее системы строк (как векторов в  $F^n$ ).

Обозначается  $rk A$

### Свойства.

1.  $rk A = rk A^T$
2.  $0 \leq rk A \leq \min\{m, n\}$
3.  $rk A = 0 \Leftrightarrow A = 0$
4. Ранг матрицы сохраняется при элементарных преобразованиях как строк, так и столбцов
5. Ранг  $A$  равен количеству ненулевых строк в ступенчатом виде

**Лемма 1.1.** Пусть  $A \in \text{Mat}_{m \times n}(F)$

$$rk A = 1 \Leftrightarrow A = b \cdot c^T$$

где  $b \in \text{Mat}_{m \times 1}(F)$ ,  $c \in \text{Mat}_{n \times 1}$ ,  $b \neq 0$ ,  $c \neq 0$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \cdot (c_1 \quad \dots \quad c_n) = \begin{pmatrix} b_1 \cdot c_1 & \dots & b_1 \cdot c_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_m \cdot c_1 & \dots & b_m \cdot c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \cdot c^T \\ \vdots \\ b_m \cdot c^T \end{pmatrix} = (c_1 \cdot b \quad \dots \quad c_n \cdot b)$$

*Доказательство.*

1. Пусть  $b$  - ненулевой столбец  $A$ ,  $\forall j = 1, \dots, n \exists \lambda_j \in F: A^{(j)} = \lambda_j \cdot b$
2. Тогда можно взять  $c = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$  и  $A = b \cdot c^T$
3. Из разложения по столбцам обратный факт очевиден. (Берем  $c \neq 0$ , получаем ненулевой столбец ...)

■

**Лемма 1.2.** Пусть  $V$  - векторное пространство над  $F$ .

$$u_1, \dots, u_n \in V$$

$$v_1, \dots, v_m \in V$$

$$\dim \langle u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_m \rangle \leq \dim \langle u_1, \dots, u_n \rangle + \dim \langle v_1, \dots, v_m \rangle$$

*Доказательство.*

1. Пусть  $u_{j_1}, \dots, u_{j_s}$  - базис векторной оболочки  $\langle u_1, \dots, u_n \rangle$
2.  $v_{k_1}, \dots, v_{k_p}$  - базис векторной оболочки  $\langle v_1, \dots, v_m \rangle$
3.  $r = \dim \langle u_1, \dots, u_n \rangle$ ,  $s = \dim \langle v_1, \dots, v_m \rangle$
4.  $\langle u_1, \dots, v_m \rangle = \langle u_{j_1}, \dots, v_{k_p} \rangle$
5.  $\dim \langle \dots \rangle \leq r + s$

**Лемма 1.3.** Пусть  $A, B \in \text{Mat}_{m \times n}(F)$

**Свойства.**

1.  $\text{rk}(A + B) \leq \text{rk}A + \text{rk}B$
2.  $\text{rk}(A - B) \geq \text{rk}A - \text{rk}B$

*Доказательство. 1*

1.  $A = (a_1, \dots, a_n), B = (b_1, \dots, b_n)$
2.  $A + B = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$
3.  $\langle a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n \rangle \leq \langle a_1, \dots, b_n \rangle$
4.  $\text{rk}(A + B) \leq \text{rk}A + \text{rk}B$

*Доказательство. 2*

$$\text{rk}A = \text{rk}((A - B) + B) \leq \text{rk}(A - B) + \text{rk}B$$

**Замечание.** Эти неравенства достигаются (например при  $B = 0$ )

**Лемма 1.4.** Пусть  $A \in \text{Mat}_{m \times n}(F)$ ,  $r = \text{rk}A$

**Свойства.**

1.  $A = B_1 + \dots + B_s, \text{rk}B_i = 1 \quad \forall i \Rightarrow s \geq r$
2.  $\exists B_1, \dots, B_r, \text{rk}B_i = 1 : A = B_1 + \dots + B_r$

*Доказательство. 1*

$$r = \text{rk}(B_1 + \dots + B_s) \leq \text{rk}B_1 + \dots + \text{rk}B_s = s$$

*Доказательство. 2*

1.  $A = (a_1, \dots, a_r)$
2. Пусть  $a_1, \dots, a_r$  - базис  $\langle a_1, \dots, a_r \rangle$
3.  $\forall 1 \leq k \leq n - r : a_{r+k} = \lambda_{k1} \cdot a_1 + \dots + \lambda_{kr} \cdot a_r$
4. тогда можно взять  $B_i = a_i \cdot (0 \dots 01 \text{ (} i \text{- ое место)} 0 \dots 0 \lambda_{1i} \dots \lambda_{ri})$
5. Первые  $r$  - элементов - нули с 1 посередине

*Доказательство. Алгоритм*

1. Найти максимальную линейно-независимую системы столбцов  $A^{(i_1)}, \dots, A^{(i_r)}$
2. В матрице  $A$  (т. е. найти базис пространства столбцов)

3. Линейно выразить остальные столбцы через этот базис

4. В  $j$ -ый столбец матрицы  $B_k$  записать ту компоненту разложения столбца  $A^{(j)}$  по базису  $A^{(i_1)}, \dots, A^{(i_r)}$ , которая пропорциональна  $A^{(i_k)}$  (другими словами  $B_k$  это столбец  $B_k = A^{(i_k)} \cdot b_k^T$ )



*Пример.*

$$1. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 & 1 \\ 0 & 1 & -1/3 & 1 \end{pmatrix}$$

2.  $A^{(1)}, A^{(2)}$  - базис

$$A^{(3)} = \frac{1}{3} \cdot A^{(1)} - \frac{1}{3} \cdot A^{(2)}$$

$$A^{(4)} = 1 \cdot A^{(1)} + 1 \cdot A^{(2)}$$

3. Пишем разложение:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot (1 \quad 0 \quad 1/3 \quad 1)$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot (0 \quad 1 \quad -1/3 \quad 1)$$

## 2 Лекция 12.12.2024

### 2.1 Миноры

#### Определение 3.

Пусть  $A \in Mat_{m \times n}(F)$ .

Подматрицей в  $A$  называется матрица, которая стоит на пересечении некоторых строк и некоторых столбцов

#### Определение 4.

Пусть  $A \in Mat_{m \times n}(F)$ .

Минором  $M_{i_1, \dots, i_k}^{j_1, \dots, j_k}$  порядка  $k$  называется определитель подматрицы на пересечении строк  $i_1, \dots, i_k$ , столбцов  $j_1, \dots, j_k$

Алгебраическим дополнением (без знака) это частный случай минора  $A_{ij} = (-1)^{(i+j)} M_i^j$

#### Теорема 2.1.

Ранг матрицы равен наибольшему порядку ненулевого минора

**Замечание.** В матрице  $m \times n$  количество миноров порядка  $k$  равно  $C_m^k \cdot C_n^k$

#### Определение 5.

Пусть  $A \in Mat_{m \times n}(F)$  и  $M$  - минор в ней.

Минор  $M'$  называется окаймляющим к  $M$  если  $M$  получается из  $M'$  вычеркиванием одной строки и одного столбца

#### Теорема 2.2. Метод окаймляющих миноров

Пусть в  $A$  есть ненулевой минор порядка  $k$ . Тогда в  $A$  есть ненулевой минор порядка  $k+1$  в том, и только в том случае, когда среди окаймляющих  $M$  миноров найдется ненулевой

**Замечание.** На  $k$ -ом шаге достаточно перебрать  $(m-k) \cdot (n-k)$  миноров

#### Задача 2.1.

Найти  $rkA$ , где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{23}^{12} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 10 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rkA \geq 2$$

Тогда:

$$rkA = 2 \Leftrightarrow M_{123}^{123} = M_{123}^{124} = 0$$

#### Задача 2.2.

Пусть  $U = \langle u_1, \dots, u_l \rangle \subseteq F^n$ . Требуется найти ОСЛУ  $Ax = 0$ ,  $A \in Mat_{m \times n}(F)$ , множеством решений которой является  $U$

Обозначим  $d = \dim U$ ,  $u_i = \begin{pmatrix} b_{i1} \\ \vdots \\ b_{in} \end{pmatrix}$

#### Лемма 2.3. Алгоритм

1.  $Av_i = 0$ . Посмотрим на эти уравнения как на ОСЛУ с коэффициентами - координатами  $v_i$  и неизвестными - ячейками в матрице  $A$ :  $a_{k1}b_{i1} + \dots + a_{kn}b_{in} = 0$
2. Записать векторы  $u_1, \dots, u_l$  в матрицу  $B$  по строкам
3. Для ОСЛУ  $By = 0$  найти ФСР  $v_1, \dots, v_{n-d}$
4. В качестве  $A$  можно взять матрицу, в которой  $v_1, \dots, v_{n-d}$  записаны по строкам

5. Докажем, что полученная матрица является искомой:

(a)  $W = \{x | Ax = 0\}$  Так как  $Au_l = 0 \forall l = 1, \dots, k$

(b)  $U \subseteq W$

(c) Никакие другие векторы не подходят. Так как  $\dim W = n - rkA = n - (n - d) = d$  (Одно подпространство содержится в другом и их размерности совпадают)

### Задача 2.3.

Найти ОСЛУ, задающее подпространство:

$$\langle (1, 1, 0, 2), (3, -3, 2, 0), (2, -1, 1, 1) \rangle$$

**Решение.**

1. Находим общее решение:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 & 1 \\ 0 & 1 & -1/3 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Находим ФСР:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

3. Записываем в матрицу по строкам:

$$A = \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Зафиксируем векторное пространство  $V$  над полем  $F$

Пусть  $e = (e_1, \dots, e_m)$  - некоторый набор векторов из  $V$  и  $e' = (e'_1, \dots, e'_k)$  - это набор векторов из  $\langle e \rangle$

$\exists c_{ij} \in F$

$$e'_j = \sum_{i=1}^m c_{ij} e_i$$

В матричном виде:

$$e' = eC, \text{ где}$$

$$C = (c_{ij}) \in Mat_{m \times k}(F) \text{ (то есть в } C \text{ столбцы записаны выражения векторов } e'_j)$$

### Лемма 2.4.

Пусть  $e = (e_1, \dots, e_m)$  - линейно - независимы. Тогда  $\forall C, D \in Mat_{m \times k}(F)$

$$eC = eD \rightarrow C = D$$

**Доказательство.**

1.  $j$  - й вектор в строках  $eC$  и  $eD$  равен

$$\sum_{i=1}^m e_i \cdot c_{ij} = \sum_{i=1}^m e_i \cdot d_{ij}$$

2. Так как векторы линейно независимы, тогда они выражаются единственным образом ( $c_{ij} = d_{ij}$ )

■

### Задача 2.4.

Пусть  $e = (e_1, \dots, e_n)$  - базис в  $V$  и  $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$  - некоторый набор векторов. Обозначим  $e = e' \cdot C$ . Тогда  $e'$  является базисом  $\Leftrightarrow C$  обратима

**Доказательство.**

1.  $e = e' \cdot D$ . Тогда  $e' = e' \cdot E = e \cdot C = e' \cdot DC$

2. По предыдущей задаче получаем, что  $DC = E$

3. Докажем в обратную сторону.  $e' = eC \Rightarrow e'c^{-1} = e \Rightarrow \langle e' \rangle = V$  и их  $n$  штук  $\Rightarrow e'$  - базис

#### Определение 6.

Пусть  $e = (e_1, \dots, e_n)$  и  $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$  - базисы  $V$ . Единственная матрица  $C$ , для которой  $e' = eC$  называется матрицей перехода от базиса  $e$  к базису  $e'$ . Обозначение  $C = C_{e \rightarrow e'}$

**Замечание.** При фиксированном базисе в  $V$ , все базисы в  $V$  описываются невырожденными матрицами  $n \times n$

#### Свойства.

Пусть  $e, e', e''$  - базисы  $V$

$$1. C_{e \rightarrow e''} = C_{e \rightarrow e'} \cdot C_{e' \rightarrow e''}$$

$$2. C_{e' \rightarrow e} = C_{e \rightarrow e'}^{-1}$$

**Доказательство. 1**

$$1. e' = eC_{e \rightarrow e'}, e'' = e'C_{e' \rightarrow e''}$$

$$2. e'' = e'C_{e' \rightarrow e''} = eC_{e \rightarrow e'} \cdot C_{e' \rightarrow e''}$$

**Доказательство. 2**

$$1. e' = eC_{e \rightarrow e'} \Rightarrow e = e'C_{e \rightarrow e'}^{-1} = e'C_{e' \rightarrow e} \text{ по предыдущей задаче}$$

#### Задача 2.5.

Пусть базисы  $e'$  и  $e''$  заданы своими координатами в некотором базисе  $e$ :  $e' = eC'$ ,  $e'' = eC''$

Тогда  $C_{e' \rightarrow e''} = C_{e' \rightarrow e} \cdot C_{e \rightarrow e''} = (C')^{-1} \cdot C''$

#### Лемма 2.5.

Пусть  $e, e'$  - базисы в  $V$ . Рассмотрим вектор  $v \in V$ .

В первом базисе у него координаты  $x_1e_1 + \dots + x_n e_n = x'_1e'_1 + \dots + x'_n e'_n$

В матричном виде:

$$v = ex = e'x'$$

Тогда:

$$ex = e'x' = eCx' \Rightarrow x = Cx'$$

**Замечание.** В частности, чтобы найти координаты в новом базисе, нужно обратить матрицу  $C$  (то есть решить СЛУ  $(C|x)$ )

#### Задача 2.6.

Пусть  $C \in F$ . В пространстве  $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$ :

1. матрица перехода от стандартного базиса  $1, x, \dots, x^n$  к базису  $1, (x-c), \dots, (x-c)^n$

2. Найти координаты вектора  $f(x) = a_0 + \dots + a_n x^n$  в новом базисе

**Решение. 1**



$$1. e'_k = (x - c)^k = \sum_{i=0}^k C_k^i x^i (-c)^{k-i} = \sum_{i=0}^k C_k^i (-c)^{k-i} e_i$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -c & \dots & (-c)^k & \dots \\ 0 & 1 & \dots & k(-c)^{k-1} & \dots \\ 0 & 0 & \dots & C_k^2(-c)^{k-2} & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \vdots & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots & \ddots & \dots \end{pmatrix}$$

$$2. \text{ Базис: } y = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}. \text{ В новом базисе: } z = \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

$$3. y = Cz, z = c^{-1}y$$

4. Можно обратить:

$$f(x) = f(x - c + c) = \sum_{i=0}^n a_i ((x - c) + c)^i$$

### 3 Лекция 10.01.2024

#### 3.1 Сумма и пересечение пространств

##### 3.1.1 Способы задания подпространств в $F^n$

1. Как линейная оболочка векторов
2. Как множество решений некоторой ОСЛУ

##### Замечание.

Переход между ними сводится к поиску ФСР

**Лемма 3.1.** 1. Если  $U = \langle u_1, \dots, u_k \rangle$  и  $W = \langle w_1, \dots, w_n \rangle$ , то  $U + W = \langle u_1, \dots, u_k, w_1, \dots, w_n \rangle$

2. Если  $U : Ax = 0$  и  $W : Bx = 0$ , то  $U \cap W : \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} x = 0$

##### Задача 3.1.

Для заданных (I или II способом)

$U, W \in F^n$ . Найти базис  $U + W$  и базис  $U \cap W$

1. Если  $U$  и  $W$  заданы первым способом, то легко найти базис  $U + W$
2. Если  $U$  и  $W$  заданы вторым способом, то легко найти базис  $U \cap W$
3. В общем случае можно перейти к удобному способу задания

##### Задача 3.2.

Найти базис суммы и базис пересечения для:

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

**Решение.** 1. Записываем в систему по столбцам и пользуемся элементарными преобразованиями строкам, что дает сохранение линейных зависимостей

$$U + W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

2. Записываем в систему по строкам и пользуемся элементарными преобразованиями строк, что дает сохранение линейной оболочки
3. Записываем векторы двух систем по строкам

$$U \cap W : \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Базис  $U \cap W : (2 \ 3 \ 1 \ 1)$

##### Теорема 3.2.

$U, W \leq V$  - подпространства, то  $\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$

**Замечание.** В частности, если из этих 4-ех чисел известно 3, то и 4-ое можно легко найти.

Потому, если  $U, W \in F^n$  заданы одним и тем же способом, то задача вычислить  $\dim(U + W)$  и  $\dim(U \cap W)$  решается легко

##### Лемма 3.3. Алгоритм:

Альтернативный способ построения базиса  $U \cap W$  для  $U, W$  заданных 1 способом

Пусть  $U = \langle u_1, \dots, u_k \rangle, W = \langle w_1, \dots, w_l \rangle$

1.  $\forall v \in U \cap W : \exists \alpha_i, \mu_j : v = \dots$
2. Это ОСЛУ на коэффициенты  $\alpha_i, \mu_j$ .  $\lambda_1 \cdot u_1 + \dots + \lambda_k \cdot u_k - \mu_1 \cdot w_1 - \dots - \mu_l \cdot w_l = 0$
1. Записать векторы  $u_1, \dots, u_k$  в столбцы матрицы  $B$
2. Привести матрицу  $(A|B)$  к улучшенному ступенчатому виду (целиком)
3. По улучшенному ступенчатому виду выписать ФСР для нашей ОСЛУ (на самом деле мы ищем ФСР для матрицы  $(A|B)$ )
4. Для каждого элемента  $(\lambda_1, \dots, \lambda_k, \mu_1, \dots, \mu_l)$  из ФСР находим вектор  $v$  по одной из формул:  $v = \lambda_1 \cdot u_1 + \dots + \lambda_k \cdot u_k = \mu_1 \cdot w_1 + \dots + \mu_l \cdot w_l$
5. Полученный набор векторов  $v$  порождают  $U \cap W$ , остается выделить базис их линейной оболочки

**Замечание.** Если  $U, W$  заданы первым способом, то для нахождения базиса суммы нужно привести ту же матрицу  $(A|B)$  к ступенчатому виду

### Задача 3.3.

Альтернативный способ для  $U$  и  $W$  из задачи 1

**Решение.** 1.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2.  $(A|B) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

3. ФСР:  $(1 \ 1 \ 1 \ 1)$

4.  $v = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

5. Базис  $U \cap W : \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

### Лемма 3.4.

Если в альтернативном алгоритме каждый из 2-х наборов  $u_1, \dots, u_k$  и  $w_1, \dots, w_l$  является базисом, то полученные на шаге 4 векторы  $v$  автоматически образуют вектор пересечения (5 шаг не нужен)

**Доказательство.** 1. Пусть  $s$  - количество векторов в ФСР, полученной на шаге 3, тогда  $s = (k + l) - rk(A|B) = \dim U + \dim W - \dim(U + W) = \dim(U \cap W)$

2. ■

**Замечание.** Формула включения-исключения не обобщается для размерностей множеств. Для  $n = 3$  можно построить контр-пример

Проблема возникает из-за  $U_1 \cap (U_2 + U_3) \neq U_1 \cap U_2 + U_1 \cap U_3$

### Задача 3.4.

Пусть  $A \in M_n(F)$ ,  $\bar{A}$  - присоединенная матрица

1.  $rk A = n \Rightarrow rk \bar{A}$  (так как она обратима)
2.  $rk A \leq n - 2 \Rightarrow \bar{A} = 0 \Rightarrow rk \bar{A}$
3.  $rk = n - 1 \Rightarrow rk \bar{A} = 1$