Линейная алгебра

2024 — 2025

Содержание

1 Лекция 5.12.2024

Задача 1.1. Пусть F - поле, $v_1, \dots v_m \in F^n$, которые являются линейно независимыми. Дополнить до базиса F^n.

Решение.

1. В матрицу $A \in Mat_{n\times(m+n)}(F)$ по столбцам запишем векторы $v_1, \dots v_m, e_1, \dots, e_n$
2. Элементарными строк приводим A к ступенчатому виду A'
3. В качестве базиса F^n возьмем те векторы из набора $v_1, \dots v_m, e_1, \dots, e_n$, номера которых совпадают с номерами столбцов, с лидерами строк (среди них будут $v_1, \dots v_m$)

Пример.

1. $v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, \ \ v_2 = \begin{pmatrix}2\\4\\5\\6\end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix}1&2&1&0&0&0\\2&4&0&1&0&0\\3&5&0&0&1&0\\4&6&0&0&0&1\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&2&1&0&0&0\\0&-1&-3&0&1&0\\0&0&-2&1&0&0\\0&0&0&1&-2&1\end{pmatrix}$$

2. Берем первые 4 столбца (с лидерами строк) - v_1, v_2, e_1, e_2

Решение.

1. *Рассмотрим более эффективный способ*
2. В матрицу A запишем $v_1, \dots, v_m$
3. Элементарными преобразованиями столбцов приведем к транспонированному ступенчатому виду (A')

$$\begin{pmatrix}* & 0 & 0 & \dots\\ * & * & 0 & \dots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{pmatrix}$$

4. Дополнить набор столбцов A' до базиса F^n теми векторами стандартного базиса, номера которых не являются номерами ведущих элементов столбцов
5. Эти векторы дополняют и $v_1, \dots, v_m$ до базиса

Пример.

1. $v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, \ \ v_2 = \begin{pmatrix}2\\4\\5\\6\end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix}1&2\\2&4\\3&5\\4&6\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&0\\2&0\\3&-1\\4&-2\end{pmatrix}$$

2. Нет ведущего элемента в 2 и 4 строках, а значит этими векторами и надо дополнить нашу систему: v_1, v_2, e_2, e_4

Замечание. Дополнение до базиса не единственное. Вместо любого дополняющего набора можно взять любые векторы из его линейной оболочки

1.1 Ранг матрицы

Определение 1. Ранг набора
Пусть V - векторное подпространство над F и $v_1, \dots, v_m \in V$.
Рангом набора векторов называется $\dim < v_1, \dots, v_m$
Ранг сохраняется приэлементарных преобразованиях

Определение 2. Ранг матрицы
Пусть $A \in Mat_{m \times n}(F)$
Рангом матрицы A называется ранг ее системы строк (как векторов в F^n).
Обозначается rkA

Свойства.

1. $rkA = rkA^T$
2. $0 \leqslant rkA \leqslant \min\{m, n\}$
3. $rkA = 0 \Leftrightarrow A = 0$
4. Ранг матрицы сохраняется при элементарных преобразованиях как строк, так и столбцов
5. Ранг A равен количеству ненулевых строк в ступенчатом виде

Лемма 1.1. Пусть $A \in Mat_{m \times n}(F)$

$$rkA = 1 \Leftrightarrow A = f \cdot c^T$$

где $b \in Mat_{m \times 1}(F),\ c \in Mat_{n \times 1},\ b \neq 0,\ c \neq 0$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 & \dots & c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \cdot c_1 & \dots & b_1 \cdot c_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_m \cdot c_1 & \dots & b_m \cdot c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \cdot c^T \\ \vdots \\ b_m \cdot c^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \cdot b & \dots & c_n \cdot b \end{pmatrix}$$

Доказательство.

1. Пусть b - ненулевой столбец $A,\ \forall j = 1, \dots n\ \exists \lambda_j \in F:\ A^{(j)} = \lambda_j \cdot b$
2. Тогда можно взять $c = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ и $A = b \cdot c^T$
3. Из разложение по столбцам обратный факт очевиден. (Берем $c \neq 0$, получаем ненулевой столбец ...)

∎

Лемма 1.2. Пусть V - векторное пространство над F.

$$u_1, \dots, u_n \in V$$
$$v_1, \dots, v_m \in V$$

$$\dim < u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_m > \ \leqslant\ \dim < u_1, \dots, u_n > + \dim < v_1, \dots, v_m >$$

Доказательство.

1. Пусть $u_{j_1}, \dots, u_{j_s}$ - базис векторной оболочки $< u_1, \dots, u_n >$
2. $v_{k_1}, \dots, v_{k_p}$ - базис векторной оболочки $< v_1, \dots, v_m >$
3. $r = \dim < u_1, \dots, u_n >,\ s = \dim < v_1, \dots, v_m >$
4. $< u_1, \dots, v_m > = < u_{j_1}, \dots, v_{k_p}$
5. $\dim < \dots > \leqslant r + s$

$\blacksquare$

Лемма 1.3. Пусть $A, B \in Mat_{m\times n}(F)$

Свойства.

1. $rk(A+B) \leqslant rkA + rkB$
2. $rk(A-B) \geqslant rkA - rkB$

Доказательство. 1

1. $A = (a_1, \dots, a_n), B = (b_1, \dots, b_n)$
2. $A + B = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$
3. $< a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n > \leqslant < a_1, \dots, b_n$
4. $rk(A+B) \leqslant rkA + rkB$

$\blacksquare$

Доказательство. 2
$rkA = rk((A-B)+B) \leqslant rk(A-B) + rkB$

$\blacksquare$

Замечание. Эти неравенства достигаются (например при $B = 0$)

Лемма 1.4. Пусть $A \in Mat_{m\times n}(F),\ r = rkA$

Свойства.

1. $A = B_1 + \dots + B_s,\ \ rkB_i = 1\ \ \forall i \Rightarrow s \geqslant r$
2. $\exists B_1, \dots, B_r,\ rkB_i = 1:\ A = B_1 + \dots + B_r$

Доказательство. 1
$r = rk(B_1 + \dots + B_s) \leqslant rkB_1 + \dots + rkB_s = s$

$\blacksquare$

Доказательство. 2

1. $A = (a_1, \dots, a_r)$
2. Пусть $a_1, \dots, a_r$ - базис $< a_1, \dots, a_r$
3. $\forall 1 \leqslant k \leqslant n - r:\ \ a_{r+k} = \lambda_{k1}\cdot a_1 + \dots + \lambda_{kr}\cdot a_r$
4. тогда можно взять $B_i = a_i \cdot (0 \dots 01\ (i$ - ое место$)\ 0 \dots 0\lambda_{1i} \dots \lambda_{n-ri})$
5. Первые r - элементов - нули с 1 посередине

$\blacksquare$

Доказательство. Алгоритм

1. Найти максимальную линейно-независимую системы столбцов $A^{(i_1)}, \dots, A^{(i_r)}$
2. В матрице A (т. е. найти базис пространства столбцов)

3. Линейно выразить остальные столбцы через этот базис

4. В j - ый столбец матрицы B_k записатт ту компоненту разложения столбца $A^{(j)}$ по базису $A^{(i_1)}, \dots, A^{(i_r)}$, которая пропорциональна $A^{(i_k)}$ (другими словами B_k это столбец $B_k = A^{(i_k)} \cdot b_k^T$)

■

Пример.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 & 1 \\ 0 & 1 & -1/3 & 1 \end{pmatrix}$

2. $A^{(1)}, A^{(2)}$ - базис
$$A^{(3)} = \frac{1}{3} \cdot A^{(1)} - \frac{1}{3} \cdot A^{(2)}$$
$$A^{(4)} = 1 \cdot A^{(1)} + 1 \cdot A^{(2)}$$

3. Пишем разложение:
$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}$$
$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1/3 & 1 \end{pmatrix}$$