DSA - 1 - Discrete Fourier Transform

Fra tids-domæne til frekvens-domæne. DFT

$$X(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{\frac{-I \cdot 2\pi \cdot n \cdot m}{N}}$$

$$X(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi \cdot n \cdot m}{N} \right) - I \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot n \cdot m}{N} \right) \right)$$

$X(m)$: the mth DFT output component
m : the index of the DFT output in the frequency domain, m = 0, 1, 2, 3, . . ., N-1
$x(n)$: the sequence of input samples
n : the time-domain index of the input samples, n = 0, 1, 2, 3, . . ., N-1
N : the number of samples of the input sequence and the number of points in the DFT output
$I = \sqrt{-1}$

En DFT analyse består altså af lige så mange værdier som der er samples i data signalet, og hver værdi er udregnet ud fra samtlige samples i data signalet.
Hver DFT værdi er et komplekst tal hvor magnituden svarer til amplituden af en given frekvens og vinklen svarer til fasen af den frekvens.

En DFT analyse giver det spektrale indhold af inputtet i N lige store frekvens bins.

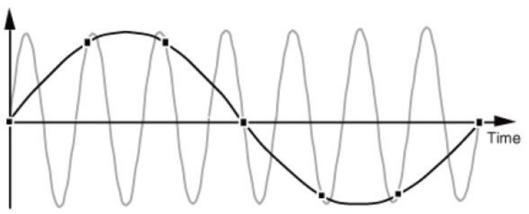
$$f_{analysis}(m) = \frac{m \cdot f_s}{N}$$

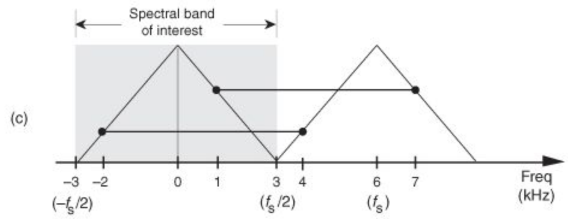
Fra frekvens domæne til tids-domæne. Invers DFT

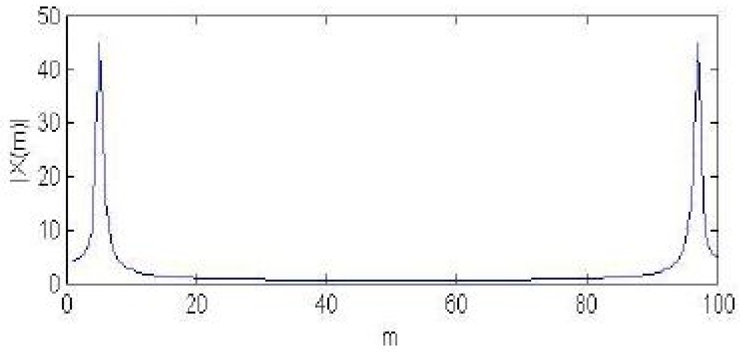
$$x(n) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{m=0}^{N-1} X(m) \cdot e^{\frac{I \cdot 2\pi \cdot m \cdot n}{N}}$$

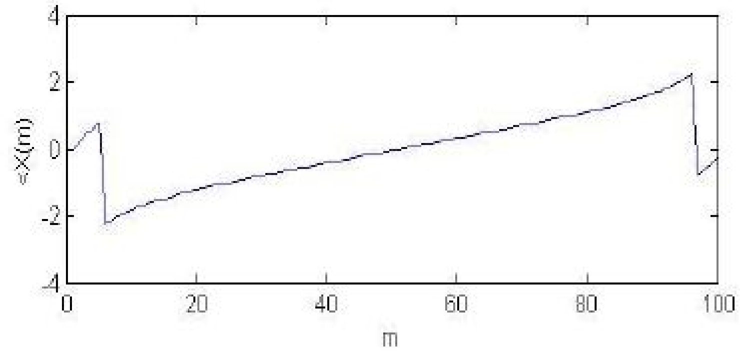
- Amplitudespektrum $|X(m)| = \sqrt{Re(X(m))^2 + Im(X(m))^2}$
- Effektspektrum $|X(m)|^2$
- Fasespektrum $< X(m) = \tan^{-1}\left(\frac{Im(X(m))}{Re(X(m))}\right)$

Eksempel:









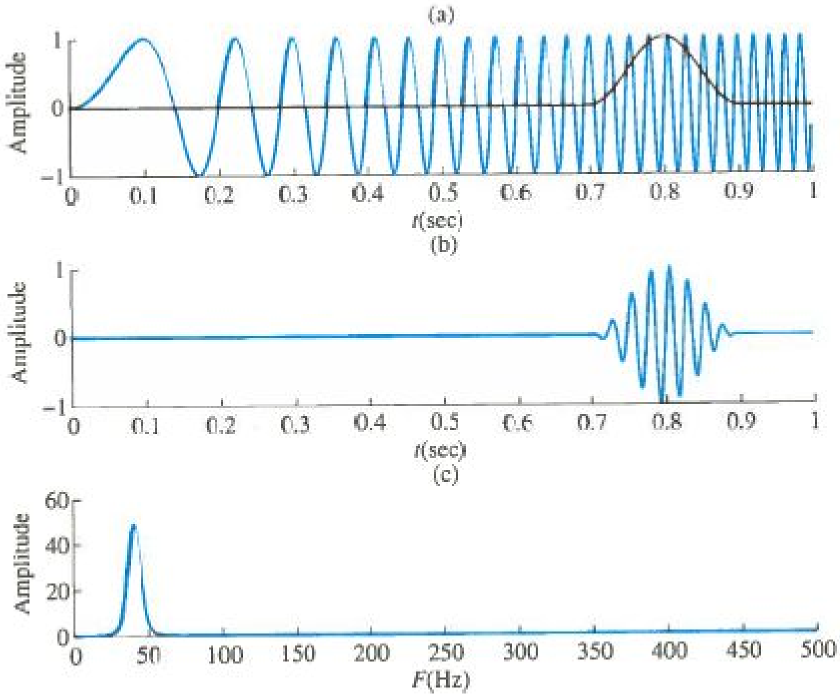
Fasen er ifht. en cos med samme frekvens. En tidslig forsinkelse kan ses som en faseforskydelse

Fast Fourier Transform

Hurtigere DFT udregning (færre beregninger) bruges eks. i Matlab. Samme resultat

$$DFT: \quad N^2 \qquad\qquad FFT: \quad \frac{N}{2} \cdot \log_2(N)$$

Spectrogram



Et spectrogram er en visuel presentation af DFT. Der foretages *short-time fourier analysis* på et signal og det plottes typisk som på billedet. (eksempel fra case 1)