

Введение в вычислительную математику (пара 1:20)

Обыкновенные дифференциальные уравнения - механика (различные движения), электротехника (расчет электрических цепей), в экономике и многих других областях.

Мат. физики \rightarrow переход к системам ОДУ

Произвольное дифференциальное уравнение порядка p $u^{(p)} = f(x, u, u', u'', \dots, u^{(p-1)})$
при помощи замены $u^{(k)} = u_k(x)$ можно свести к системе p уравнений первого порядка

$$\begin{cases} u'_k(x) = u_{k+1}(x) & 0 \leq k \leq p-2 \\ u'_{p-1} = f(x, u_0, u_1, \dots, u_{p-1}) \end{cases}$$

где $u_0(x) = u(x)$

Используя данный переход \forall любую систему любого порядка свести к системе уравнений первого порядка потому в дальнейшем будем работать в основном с ними, а именно:

$$U'_k(x) = S_k(x, U_1, U_2, \dots, U_p) \quad k=1, 2, \dots, p$$

В сокращенной векторной форме

$$U' = S(x, U)$$

$U = (U_1, U_2, \dots, U_n)$
 $S = (S_1, S_2, \dots, S_n)$

Данные системы уравнений в общем случае имеют множество решений зависящих от p параметров [p -параметры]

$$C = (C_1, \dots, C_p)$$

или

$$U = U(x, C)$$

Для выделения единственного решения необходимо наложить p дополнительных условий. Существуют 3 типа задач для систем дифференциальных уравнений: задача Коши, краевые задачи, задачи на собственные значения.

ПРИСОЕДИНЯЙСЯ К КУЛЬТУРНОЙ ПЕРЕЗАГРУЗКЕ!



[VK.COM/CULTURALL_REBOOT](https://vk.com/culturall_reboot)



ФОНД
ЦЕЛЕВОГО
КАПИТАЛА
МАТИ

Задача Коши или задача с начальными данными

~~Начальные~~ Дополнительные условия

$$u_k(x_0) = u_{0,k} \quad k=1 \dots n$$

В точке x_0 заданы значения всех q -х систем ур-в

Обычно решение просят найти на отрезке $[x_0, x_0]$

Если правые части системы (*)

непрерывны и удовлетворяют условию

Липшица по переменным $u_k, k=1 \dots n$

то решение задачи Коши единственно, непрерывно зависит от координат

начальной точки. Если же правые части имеют непрерывные производные по

всем аргументам до q -го порядка, то

решение $u=u(x)$ имеет производные вплоть до порядка $q+1$.

3 типа методов решения

Точные - позволяют выразить решение
либо ч/з элементарные функции
либо с помощью квадратур от
элементарных ф-ций.

Р-ча `dsolve` MATLAB

Иногда Матлаб не может решить
ДУ, например продифференцируйте
задав ДУ $y' = \frac{y-t}{y+t}$ где y - ф-я
от t и посмотрите вывод.

Приближенные методы - методы, в
которых решение $y(x)$ получается
как предел некоторой последовательности
 $y_n(x)$, где $y_n(x)$ выражается либо в
аналитическом виде либо с помощью
квадратур от элементарных ф-ций.

Численные методы - методы вычисления

ПРИСОЕДИНЯЙСЯ К КУЛЬТУРНОЙ ПЕРЕЗАГРУЗКЕ!



VK.COM/CULTURAL_REBOOT



ФОНД
ЦЕЛЕВОГО
КАПИТАЛА
МОТИ

присматривая значения искомой ф-ции $u(x)$ в узлах некоторой сетки, значения аргументов x_1, \dots, x_n .

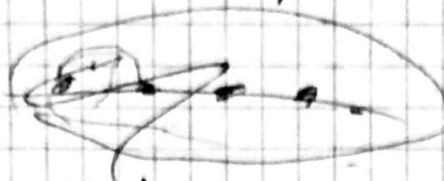
❖ Они могут найти частное решение, например решение задачи Коши, но не общее решение $u = u(x, C)$. Но это компенсируется тем, что данные методы универсальны и могут быть использованы для решения широкого класса диф. ур-в. Они могут быть использованы еще заурядно корректно поставленной хорошо обусловленной (малое изменение входных данных — малое изменение в решении x)

Пример численного метода — метод
Пикари для задачи Коши.

$$u' = f(x, u(x)) \quad x_0 \leq x \leq X \\ u_0(x_0) = u_0$$

Интерпретация получаемого интегрального уравнения:

$$u(x) = u_0 + \int_{x_0}^x f(t, u(t)) dt$$



Решая методом последовательных приближений, получаем:

$$u_{n+1}(x) = u_0 + \int_{x_0}^x f(t, u_n(t)) dt$$

$$u'(x) = x^2 + u^2 \quad u(0) = 0$$

Приближенный метод

Метод Рунге-Кутты

Численный метод

$$u' = f(x, u(x)) \quad x_0 \leq x \leq X \quad u(x_0) = u_0$$

Выберем на отрезке $[x_0, X]$ некоторую ~~не~~ вообще говоря неравностороннюю сетку $x_0 < x_1 < \dots < x_n = X$

Разложим решение $u(x)$ в ряд Тейлора на отрезке $[x_n, x_{n+1}]$ в окрестности x_n

ПРИСОЕДИНЯЙСЯ К КУЛЬТУРНОЙ ПЕРЕЗАГРУЗКЕ!



VK.COM/CULTURALL_REBOOT



ФОНД
ЦЕЛЕВОГО
КАПИТАЛА