Введение в вычислительную ~~математику~~ (пер. 1:20)

Обыкновенные дифференциальные уравнения — механика (различные движения), электротехника (расчёт электрических цепей), в экономике и многих других областях.

Мат. физика → переход к системам ОДУ

Произвольное дифференциальное уравнение порядка p $\quad u^{(p)} = f(x, u, u', u'', \dots u^{(p-1)})$
при помощи замены $u^{(k)} = u_k(x)$ можно свести к системе p уравнений первого порядка

$$\begin{cases} u_k'(x) = u_{k+1}(x) & 0 \le k \le p-2 \\ u_{p-1}' = f(x, u_0, u_1, \dots u_{p-1}) \end{cases}$$

где $u_0(x) = u(x)$

Используя данный переход м/о любую систему любого порядка свести к системе уравнений первого порядка поэтому в дальнейшем будем работать в основном с ними, а именно:

$$u'_k(x) = f_k(x, u_1, u_2, \dots u_p) \quad (*) \quad k = 1, 2 \dots p$$

В сокращённой векторной форме

$$u' = f(x, u)$$

$$\boxed{u = (u_1, u_2 \dots u_n)} \qquad \boxed{f = (f_1, f_2, \dots f_n)}$$

Данные системы уравнений в общем случае имеют множество решений зависящих от p параметров $\boxed{p \text{ - порядок}}$

$$c = (c_1, \dots c_p)$$

$$\Downarrow$$

$$u = u(x, c)$$

Для выделения единственного решения решения необходимо наложить p дополнительных условий. Существуют 3 типа задач для систем дифференц. уравнений: задача Коши, краевые задачи, задачи на собственные значения

Задача Коши или задача с начальными данными

Дополнительные условия

$u_k(x_0) = u_{0,k} \quad k = 1 \ldots p$

т.е В точке x_0 задаются значения всех ф-ций системы ур-й

Обычно решение просят найти на отрезке $[x_0, X_0]$

Если правые части системы (*) непрерывны и удовлетворяют условию Липшица по переменным u_k, $k=1 \ldots n$ то решение задачи Коши единственно & непрерывно зависит от координаты начальной точки. Если же правые части имеют непрерывные производные по всем аргументам до q-го порядка, то решение $u=u(x)$ имеет производные вплоть до порядка $q+1$.

3 типа методов решения:

Точные – позволяют выразить решение либо ч/з элементарные функции либо с помощью квадратур от элементарных ф-ций.

Ф-ция dsolve MATLAB

Иногда Matlab не может решить ДУ, например попробуйте решить ДУ $y' = \frac{y-t}{y+t}$ где y - ф-я от t и посмотрите вывод.

<u>Приближенные методы</u> – методы, в которых решение $u(x)$ получается как предел некоторой последовательности $u_n(x)$, где $u_n(x)$ выражается либо в аналитическом виде либо с помощью квадратур от элементарных ф-ий.

Численные <u>методы</u> – методы вычисления приближенных значений искомой ф-ции $u(x)$ в узлах некоторой сетки значений аргумента $x_1, \ldots x_n$.

Они могут найти частное решение, например решение задачи Коши, но не общее решение $u = u(x, C)$. Но это компенсируется тем, что данные методы универсальны и могут быть использованы для решения широкого класса диф. ур-й. Они могут быть использованы если задача корректно поставлена + хорошо обусловлена (малое изменение входных данных – малое изменение в решениях)

Пример численного метода – метод Пикара для задачи Коши

$$u' = f(x, u(x)) \qquad x_0 \le x \le X$$

$$u_0(x_0) = u_0$$

Интегрируя получаем интегральное уравнение:

$$u(x) = u_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, u(t))\,dt$$

Решая методом последовательных приближений получаем:

$$u_{n+1}(x) = u_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, u_n(t))\,dt$$

Приближенный метод

$$u'(x) = x^2 + u^2 \quad u(0) = 0$$

Метод Рунге-Кутты

Численный метод

$$u' = f(x, u(x)) \quad x_0 \le x \le X \quad u(x_0) = u_0$$

Выберем на отрезке $[x_0, X]$ некоторую ~~перв~~ вообще говоря неравномерную сетку $x_0 < x_1 < \ldots < x_n = X$

Разложим решение $u(x)$ в ряд Тейлора на отрезке $[x_n, x_{n+1}]$ в окрестности x_n