Глава 4. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

4.1. КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ГЛАВЫ

Уравнения в частных производных описывают многие физические задачи в таких областях, как механика сплошных сред, термодинамика, квантовая механика, электродинамика, теория упругости и многие другие. Аналитическое решение уравнения в частных пронзводных удается получить лишь в единичных практически важных случаях, и поэтому роль численных методов для решения задач, описываемых уравнениями в частных пронзводных, особеино велика

В этой главе нзлагаются основные методы числеиного решения уравнений в частных пронзводных, такие как метод сеток, метод прямых и метод характернстик, метод установления, методы сквозного счета, а также некоторые специальные методы, нашедшие применение в последнее время.

Особое внимание уделяется методу сеток как наиболее развитому и употребительному методу решения уравнений в частных производных. Прн изложении метода сеток вводятся такие основные понятия, как аппроксимация, устойчнвость и сходимость разностной схемы, имеющие первостепеиное значение прн рассмотрении любого числеиного метода.

Представлены также некоторые сведения нз теории уравнений в частных пронзводных.

4.2. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Постановку задач для уравнений математической фнзики дадим на основе классических уравнений параболического, гиперболического н эллиптического типов

1. **Основные определения.** Если нскомая функция зависит не от одной, а от нескольких переменных, то прн рассмотрении многих важных задач возникают уравнения с частнымн пронзводнымн, связывающие между собой независнмые переменные $x_1, x_2, ..., x_k$, а также нскомую функцию $u(x_1, x_2, ..., x_k)$ и её частные пронзводные $\frac{\partial u}{\partial x_1}, .., \frac{\partial u}{\partial x_k}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_3}$ н т.д.

В общем случае уравненне в частных производных может быть записано в следующем виде

$$F\left(x_1,\ldots,x_k,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial u}{\partial x_k},\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2},\ldots,\frac{\partial^n u}{\partial x_1^{p_1}\partial x_2^{p_2}\ldots\partial x_k^{p_k}}\right)=0,$$

где $p_1+p_2+\ldots+p_k=n$.

Наивысший порядок входящей в дифференциальное уравнение производной называется порядком дифференциального уравнения.

Если функция F линейна относительно функции u и её производных, то приведенное выше уравнение называется линейным уравнением в частных производных. Если $F=L(u)=f$ – линейное дифференциальное уравнение, то уравнение $L(u)=f(x_k)$ называется неоднородным, а $L(u)=0$ – линейным однородным дифференциальным уравнением.

Если функция F линейна по высшим производным (n-го порядка), т.е. коэффициенты при высших производных могут зависеть лишь от функции u и производных до $(n-1)$-го порядка, то дифференциальное уравнение называется квазилинейным.

Классическим решением называется функция $u(x_1,\ldots,x_k)$, имеющая частные производные до требуемого порядка и обращающая приведенное выше уравнение в тождество. Решение уравнений с частными производными, как правило, не единственно. Если в случае ОДУ общее решение зависит от конечного числа параметров, то для уравнений в частных производных обычно имеется общее решение, зависящее от производных функций с числом аргументов на единицу меньше, чем у функции $u(x_1,\ldots,x_k)$.

Например, уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{\partial u}{\partial x_2}=0$$

имеет решение, зависящее от произвольной функции

$$u(x_1,x_2)=\varphi(x_1-x_2).$$

Таким образом, так же, как и для ОДУ, для выделения единственного решения необходимо задавать дополнительные условия, куда будут входить функции с числом аргументов $k-1$. В качестве таких условий можно потребовать, чтобы искомая функция $u(x_1,\ldots,x_k)$ принимала заданные значения на поверхности размерности $k-1$ в пространстве переменных $x_1,x_2,\ldots,x_k$. К этому типу условий относятся начальные и граничные условия, являющиеся наиболее часто встречающимися при постановке краевых задач математической физики.

2. **Уравнения математической физики.** Ниже будут рассмотрены в основном классические уравнения математической физики. В этих уравнениях в качестве независимых переменных используются время t и пространственные координаты: декартовы, цилиндрические и сферические.

Задача называется стационарной, если решение не зависит от времени, и нестационарной или эволюционной, если оно зависит от времени. Задачи с одной пространственной переменной называются одномерными, а с двумя – двумерными, с тремя – трехмерными.

Запишем каноническую форму уравнений с двумя независимыми переменными. Заметим, что в общем случае для более чем двух независимых переменных таких канонических форм не существует.

Имеем

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+F\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0$$

с дважды непрерывно дифференцируемыми коэффициентами A, B, C, которые не обращаются в нуль одновременно. Имеем следующую классификацию дифференциальных уравнений в частных производных. Пусть $D=B^2-AC$, тогда при $D\equiv 0$ имеем параболическое, при $D>0$ – гиперболическое, а при $D<0$ – эллиптическое дифференциальное уравнение. При этом тип одного и того же уравнения может меняться в зависимости от области пространства.

Классическим уравнением гиперболического типа является волновое уравнение параболического типа – уравнение теплопроводности, а эллиптического типа – уравнение Лапласа.

В математической физике различают следующие задачи: задачу Коши (или задача с начальными данными), краевые или граничные задачи, смешанные краевые задачи или краевые (граничные) задачи с начальными данными. Задачи, в которых в качестве переменной имеется время t, иногда называют эволюционными.

В теории уравнений в частных производных важную роль играют характеристические поверхности, которые определяются как поверхности, в окрестности которых решения задачи Коши не существует, либо решение это не единственно. Можно показать, что в действительной плоскости характеристические поверхности существуют для гиперболических и параболических уравнений и не существуют для эллиптических уравнений.

Общая теория характеристик позволяет сформулировать для гиперболических уравнений некоторые специфические задачи, такие, как задача Гурса, смешанная задача и ряд других. Их решение можно построить, используя как аналитический, так и численный метод характеристик.

3. **Постановка задач для уравнений параболического типа.** Классическим примером уравнения параболического типа является уравнение *теплопроводности* или *диффузии* в области $[0,l]+[0,t]$ (рис. 4.1):

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad 0<x<l,$$

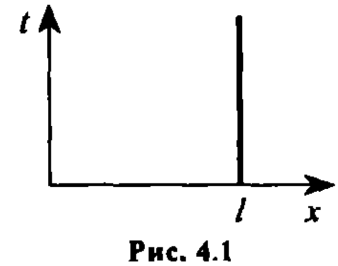

Рис. 4.1

где a – коэффициент теплопроводности (если u – температура) и массопроводности (если u – концентрация, давление в задачах фильтрации и т.п.). Поскольку имеется производная по времени, то необходимо задавать начальные условия при $t=0$ и граничные условия при $x=0, x=1,\ t>0$

Для уравнения теплопроводности при краевых (граничных) условиях

$$u(0,t)=\varphi_1(t),\ x=0,\ t>0,$$
$$u(l,t)=\varphi_2(t),\ x=l,\ t>0$$

и начальном условии

$$u(x,0)=\psi(x),\ 0\le x\le l,\ t=0$$

имеем *первую* начально-краевую или краевую задачу с начальными данными – (смешанную) задачу, иначе, задачу Коши с краевыми (граничными) условиями

Для уравнения теплопроводности с краевыми условиями

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=\varphi_1(t),\ x=0,\ t>0,$$
$$\frac{\partial u(l,t)}{\partial x}=\varphi_2(t),\ x=l,\ t>0$$

и начальными данными

$$u(x,0)=\psi(x),\ 0\le x\le l,\ t=0$$

имеем *вторую* краевую задачу с начальными данными (смешанную задачу)

Для уравнения теплопроводности с краевыми условиями

$$\alpha_0\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}+\beta_0 u(0,t)=\varphi_1(t),\ x=0,\ t>0,$$
$$\alpha_1\frac{\partial u(l,t)}{\partial x}+\beta_1 u(l,t)=\varphi_2(t),\ x=l,\ t>0$$

и начальными условиями

$$u(x,0)=\psi(x)$$

имеем *третью* краевую задачу с начальными данными (смешанную задачу)

Для бесконечной области ставится следующая *задача Коши* для уравнения теплопроводности

$$u(x,0)=\varphi(x),\ -\infty<x<+\infty,\ t=0$$

4 **Постановка задач для уравнений гиперболического типа.** Классическим примером уравнения гиперболического типа является *волновое уравнение*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0<x<l,\ t>0,$$

или более общее, описывающее малые продольные колебания стержня и поперечные колебания струны, причем функция $u(x,t)$ – отклонение струны от положения равновесия и a – скорость перемещения колебаний К волновому уравнению сводятся также уравнения распространения малых акустических возмущений

Поскольку в волновое уравнение входит вторая производная по времени, то старший порядок производной по времени в начальных условиях не превышает единицы Тогда первая, вторая и третья начально-краевые или краевые задачи с начальными данными для волнового уравнения будут иметь соответственно следующий вид

$$\begin{cases} u(0,t) = \varphi_1(t), \ x=0, \ t>0, \\ u(l,t) = \varphi_2(t), \ x=l, \ t>0, \\ u(x,0) = \psi_1(x), \ 0 \le x \le l, \ t=0, \\ \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi_2(x), \ 0 \le x \le l, \ t=0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \varphi_1(t), \ x=0, \ t>0, \\ \dfrac{\partial u(l,t)}{\partial x} = \varphi_2(t), \ x=l, \ t>0, \\ u(l,t) = \psi_1(t), \ x=l, \ t>0, \\ u(x,0) = \psi_2(x), \ 0 \le x \le l, \ t=0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_0 \dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} + \beta_0 u(0,t) = \varphi_1(t), \ x=0, \ t>0, \\ \alpha_1 \dfrac{\partial u(l,t)}{\partial x} + \beta_1 u(l,t) = \varphi_2(t), \ x=l, \ t>0, \\ u(x,0) = \psi_1(x), \ 0 \le x \le l, \ t=0, \\ \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi_2(x), \ 0 \le x \le l, \ t=0 \end{cases}$$

В бесконечной области можно поставить задачу Коши

$$\begin{cases} u(x,0) = \psi_1(x), \ -\infty < x < +\infty, \ t=0, \\ \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi_2(x), \ -\infty < x < +\infty, \ t=0 \end{cases}$$

Отметим, что метод характеристик позволяет решать задачу Коши, Гурса и смешанные задачи при задании данных в ограниченной области

5 **Постановка задач для уравнений эллиптического вида.** Классическим примером уравнения эллиптического типа является *уравнение Лапласа*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad x, y \in \Omega,$$

или *уравнение Пуассона*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y),$$

описывающее течение идеальной (без вязкости и теплопроводности) жидкости в стационарных потоках, стационарное распределение температуры, стационарное распределение напряженности электрического или магнитного полей. При этом уравнение Лапласа описывает все эти явления, когда нет источников или стоков (нет правых частей), а уравнение Пуассона – с распределенными по области Ω источниками, задаваемыми правой частью $f(x,y)$ (рис. 4.2).

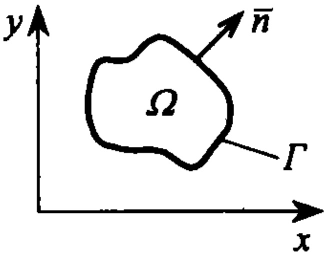

Рис. 4.2

Поскольку уравнение Лапласа (Пуассона) – стационарное, то начальные условия не задаются; на границах же Γ расчетной области $\Omega+\Gamma$ задаются граничные условия 1, 2 и 3-го родов.

Первая краевая задача для уравнения Лапласа (задача Дирихле):

$$u\big|_\Gamma=\varphi(x,y),\quad (x,y)\in\Gamma.$$

Вторая краевая задача для уравнения Лапласа (задача Неймана):

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma=\varphi(x,y),\quad (x,y)\in\Gamma.$$

Третья краевая задача для уравнения Лапласа:

$$\alpha\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma+\beta u\big|_\Gamma=\varphi(x,y),\quad (x,y)\in\Gamma.$$

При этом во второй и третьей краевой задаче производные берутся в направлении внешней нормали по отношению к области Ω.

6. **Постановка многомерных задач математической физики.** В заключение приведем примеры постановок многомерных по пространственным переменным задач для уравнений параболического и эллиптического типов (рис. 4.3)

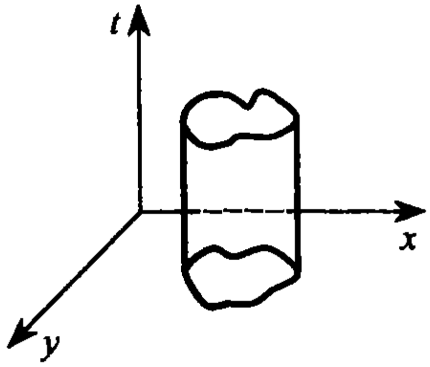

Рис. 4.3

Первая начально-краевая задача для двумерного уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \ (x, y) \in \Omega, \ t > 0, \\ u|_{\Gamma} = \varphi(x, y, t), \ (x, y) \in \Gamma, \ t > 0, \\ u(x, y, 0) = \psi(x, y), \ (x, y) \in \Omega + \Gamma, \ t = 0. \end{cases}$$

Вторая начально-краевая задача для двумерного уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \ (x, y) \in \Omega, \ t > 0, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} = \varphi(x, y), \ (x, y) \in \Gamma, \ t > 0, \\ u(x, y, 0) = \psi(x, y, t), \ (x, y) \in \Omega + \Gamma, \ t = 0. \end{cases}$$

Третья начально-краевая задача для двумерного уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \ (x, y) \in \Omega, \ t > 0, \\ \alpha \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} + \beta u|_{\Gamma} = \varphi(x, y, t), \ (x, y) \in \Gamma, \ t > 0, \\ u(x, y, 0) = \psi(x, y), \ (x, y) \in \Omega + \Gamma, \ t = 0. \end{cases}$$

Первая начально-краевая задача для двумерного волнового уравнения:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \ (x, y) \in \Omega, \ t > 0, \\ u|_{\Gamma} = \varphi(x, y, t), \ (x, y) \in \Gamma, \ t > 0, \\ u(x, y, 0) = \psi_1(x, y), \ (x, y) \in \Omega + \Gamma, \ t = 0, \\ \dfrac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = \psi_2(x, y), \ (x, y) \in \Omega + \Gamma, \ t = 0. \end{cases}$$

Вторая начально-краевая задача для двумерного волнового уравнения:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \ (x,y) \in \Omega, \ t > 0, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} = \varphi(x,y), \ (x,y) \in \Gamma, \ t > 0, \\ u(x,y,0) = \psi_1(x,y,t), \ (x,y) \in \Omega + \Gamma, \ t = 0, \\ \dfrac{\partial u(x,y,0)}{\partial t} = \psi_2(x,y), \ (x,y) \in \Omega + \Gamma, \ t = 0. \end{cases}$$

Третья начально-краевая задача для двумерного волнового уравнения:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \ (x,y) \in \Omega, \ t > 0, \\ \alpha\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} + \beta u|_{\Gamma} = \varphi(x,y,t), \ (x,y) \in \Gamma, \ t > 0, \\ u(x,y,0) = \psi_1(x,y), \ (x,y) \in \Omega + \Gamma, \ t = 0, \\ \dfrac{\partial u(x,y,0)}{\partial t} = \psi_2(x,y), \ (x,y) \in \Omega + \Gamma, \ t = 0. \end{cases}$$

4.3. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МЕТОДА СЕТОК. ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

Метод сеток (или метод конечных разностей) сводит решение систем уравнений в частных производных к решению систем, как правило, линейных алгебраических уравнений с достаточно разреженными матрицами. При этом построение решения в методе сеток осуществляется в три этапа.

1. Область непрерывного изменения аргумента (или аргументов) заменяется конечным дискретным множеством точек, называемых разностной сеткой. В разностной сетке выделяются внутренние и граничные узлы. Решение ищется во внутренних узлах, а в граничных узлах значение искомой функции задается при аппроксимации граничных условий исходной дифференциальной задачи. Функция дискретного аргумента, определенная на разностной сетке, называется сеточной функцией.

2. Дифференциальное уравнение и граничные условия заменяются по определенным правилам своими разностными аналогами. Разностные операторы, соответствующие дифференциальному уравнению, записываются во внутренних узлах сетки. Разностные операторы, соответствующие граничным условиям, записываются в граничных узлах. В результате получается система алгебраических уравнений, число которых пропорционально числу внутренних узлов разностной сетки.

3. Осуществляется решение системы алгебраических уравнений каким-либо из известных методов. В большинстве случаев получаемая система урав-