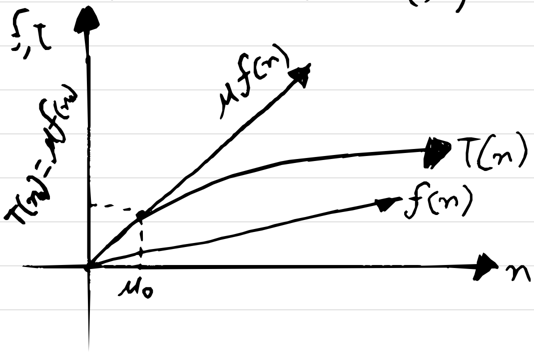
Μαθημα 3 - Συμπεριφορά συναρτήσεων 2

Στο προηγούμενο μάθημα...

$T(n) = O(f(n))$ iff $T(n)$ είναι bounded από ενα σταθερό πολλαπλάσιο (μ) της $f(n)$ μετά απο κάποιο n_0



Θεώρημα: Ολά τα πολυώνυμα με βαθμο k είναι $O(n^k)$

Proof: ψαχνω το n_0 και το c

Εστω το γενικό πολυώνυμο βαθμου k

$$T(n) = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots a_1 n + a_0$$

θετω $c = |a_k| + |a_{k-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0|$

Για κάθε όρο του πολυωνύμου ισχυει $a_i n^i \leq |a_i| n^i$

$a_i n^i \leq |a_i| n^k$

$$\begin{aligned} \text{Αρα } T(n) &\leq |a_k| n^k + |a_{k-1}| n^{k-1} + \cdots + |a_1| n + |a_0| \\ &\leq |a_k| n^k + |a_{k-1}| n^k + \cdots + |a_1| n^k + |a_0| n^k \\ &\leq n^k (|a_k| + |a_{k-1}| \cdots + |a_0|) \\ &\leq n^k \cdot c \end{aligned}$$

Αρα $T(n) = O(n^k)$ για $n \geq 1$

Definition: $T(n) = O(f(n))$ iff $\exists\, n_0, c$ s.t

άνω φράγμα.

$$T(n) \le c \cdot f(n) \quad \forall n \ge n_0$$

Proposition: Για οποιοδήποτε πολυώνυμο $T(n)$ βαθμού k ισχύει $T(n) \ne O(n^{k-1})$

Proof

Έστω ότι είναι $O(n^k)$, άρα $\exists\, n_0, c$ s.t

$$n^k \le c n^{k-1} \quad \forall n \ge n_0$$

$$n^k \le \frac{c n^k}{n}$$

$$1 \le c \frac{1}{n}$$

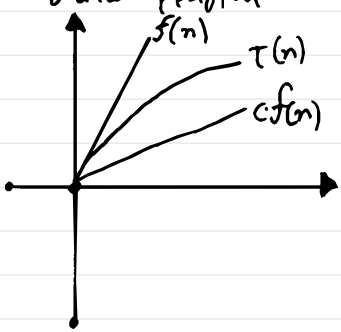
$$n \le c$$

άτοπο, το n είναι φραγμένο!

Definition

$T(n) = \Omega(f(n))$ iff $\exists\, c, n_0$ s.t $T(n) \ge c f(n)$, $n \ge n_0$

κάτω φράγμα



Definition $T(n) = \Theta(f(n))$ iff $\exists\, c_1, c_2 > 0 \land n_0$ s.t

$$c_1 f(n) \le T(n) \le c_2 f(n) \quad \forall n > n_0$$

- Άνω, κάτω φράγμα

$(\Leftarrow)$ Ισχυει $\exists\, c_1, c_2 > 0 \land \exists\, n_0 \leq n$ s.t

$$c_1 f(n) \leq T(n) \leq c_2 f(n)$$

Αρα επιλέγω c_2 και n_0 και $T(n) \leq c_2 f(n) \ \forall n > n_0$

αρα $T(n) = O(f(n))$ $\therefore$

Αναλογα το $T(n) = \Omega(f(n))$

$(\Rightarrow)$ Επειδη $T(n) = \Theta(f(n)) \Rightarrow T(n) = O(f(n)) = \Omega(f(n))$

Δηλαδη $\exists\, c_1 > 0, n_1$ s.t $T(n) \leq c_1 f(n) \ \forall n > n_1$
και $\exists\, c_2 > 0, n_2$ s.t $T(n) \geq c_2 f(n) \ \forall n > n_2$

Χωρίς βλάβη $n_0 \geq n_2$ και $n_2 \geq n_1$, τοτε για $n \geq n_0 \Rightarrow n \geq n_2$
και $n \geq n_1$

αντιστροφα πάλι ισχυει.
αρα για κάθε $n \geq n_2$ και $n \geq n_1$ ισχυει.

Τελικα $n_0 = \max(n_1, n_2)$

Ερωτήσεις, ποια απο τα παρακάτω είναι σωστά.

$T(n) = \frac{1}{2} n^2 + 3n$

a) ✗ $T(n) = O(n)$ β) ✓ $T(n) = \Omega(n)$
γ) ✓ $T(n) = \Theta(n^2)$ δ) ✓ $T(n) = O(n^3)$

Definition, "little o", Αυστηρότερος ορισμός

Στο προηγούμενο μάθημα είχαμε ορίσει το "little o" ως εξής

$$T(n) = o(f(n)) \text{ iff } \lim_{x \to \infty} \frac{f(n)}{T(n)} = +\infty$$

Ομοίως

$$T(n) = o(f(n)) \text{ iff } \lim_{x \to \infty} \frac{T(n)}{f(n)} = 0$$

Ισοδύναμος ορισμός

$$T(n) = o(f(n)) \text{ iff } \forall c > 0, \exists n_0 \text{ s.t.}$$

$$T(n) < c f(n), \quad \forall n \geq n_0$$

Ερώτηση:

Θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι

$$T(n) = o(f(n)) \text{ iff } \lim_{x \to \infty} \frac{f(n)}{T(n)} = +\infty$$

και $T(n) = O(f(n))$ iff $\lim_{x \to \infty} \frac{f(n)}{T(n)} = +\infty$ ή $\lim_{x \to \infty} \frac{f(n)}{T(n)} = L \in \mathbb{R}$

Αποδειξη ισοδυναμου ορισμού.

Ισχυει $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$, $\forall \epsilon > 0$, $\exists N > 0$ s.t $|f(x) - L| < \epsilon$

$\forall x > N$. Αυτος ειναι ο ϵ-δ ορισμός του ορίου

Αν $T(n) = o(f(n))$ τοτε $\lim_{x \to \infty} \frac{T(n)}{f(n)} = 0$

οποτε $\left|\frac{T(n)}{f(n)} - L\right| < \epsilon \underset{\substack{T(n) \geq 0 \\ f(n) \geq 0}}{\iff} \frac{T(n)}{f(n)} - 0 < \epsilon \Rightarrow T(n) < \epsilon f(n)$

Αρα για $c = \epsilon$ και $n_0 > N$ ισχυει. ∴

Proposition:
Αν $T(n) = 2^{n+10}$, τοτε $T(n) = O(2^n)$

Proof:
αν $T(n) = O(2^n)$ τοτε $\exists\, c > 0, n_0$ s.t

$$T(n) \leq c \cdot 2^n \quad \forall n > n_0$$
$$2^{n+10} \leq c \cdot 2^n$$
$$2^{10} 2^n \leq c \cdot 2^n$$

ισχυει για $c = 2^{10}$ και $n_0 > 1$

$$T(n) = 2^{n + O(1)}$$

Proposition
Αν $T(n) = 2^{10n}$ τοτε $T(n) \neq O(2^n)$

Proof: Εστω $T(n) = 2^{10n}$ και $T(n) = O(2^n)$ σημαινει οτι

$\exists\, c$, s.t $T(n) \leq c 2^n$ για $n \geq n_0$. $2^{10n} \leq c 2^n \Rightarrow 2^{9n} \leq c$ ατοπο

c πρεπει να
ειναι σταθερα

Proposition

$$\text{Έστω } f,g: \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}^+ \text{ και } T(n) = \max(f(n), g(n))$$

$$\text{Τότε } T(n) = \Theta(f(n)+g(n))$$

Απόδειξη:

Ισχύει $\max\{f(x), g(x)\} \leq f(x) + g(x)$ Άνω

Ισχύει $2\max\{f(x), g(x)\} \geq f(x) + g(x)$

$\max\{f(x), g(x)\} \geq \frac{1}{2}(f(x) + g(x))$ κάτω

Τελικά $\frac{1}{2}(f(x)+g(x)) \leq \max\{f(x), g(x)\} \leq f(x)+g(x)$

για $c_2 = 1/2$ και $c_1 = 1$ ισχύει για όλο το πεδίο ορισμού.

$\therefore$

Ασκήσεις για το σπίτι

1) Έστω $f,g: \mathbb{Z}^+ \to [2, +\infty)$ και f,g γνησίως αύξουσες. Ισχύει $f(n) = O(g(n))$ και c θετική σταθερά.

$$\text{Είναι } f(n) \cdot \log_2(f(n)^c) = O(g(n) \cdot \log_2(g(n))) \text{ ?}$$

Επιλέξτε ποιά από τα παρακάτω ισχύουν, να αιτιολογήσετε την απάντηση σας

a) Ναι $\forall f,g,c$

β) Ποτέ, για κανένα f,g,c

γ) Κάποιες φορές Ναι, εξαρτάται το c ← Σωστό.

δ) Κάποιες φορές Ναι, εξαρτάται από τις f,g

$\star 1$ $\log_2 \nearrow$

$\star$ $f,g \nearrow$

Απάντηση

1

$f(n) = O(g(n)) \Rightarrow$ υπάρχει n_0, c_1 s.t $f(n) \leq c_1 g(n)$ για $n \geq n_0 \Rightarrow$

2

$f^c(n) \leq (c_1 g(n))^c \overset{\star 1}{\Rightarrow} \log(f^c(n)) \leq \log(c_1 g(n)^c) \Rightarrow \log(f^c(n)) \leq c \cdot \log(c_1 g(n))$

$f(n)\log(f^c(n)) \leq c\log(c_1 g(n)) \cdot c_1 g(n) \Rightarrow$

$f(n)\log(f^c(n)) \overset{\star 2}{\leq} c \cdot c_1 \log(c_1 g(n))\, g(n) \Rightarrow f(n)\log f^c(n) = O((\log g(n) + O(1))g(n))$

$f(n)\log f^c(n) = O(\log(g(n)) \cdot g(n))$ $\therefore$

2) Έστω οι γνησίως αύξουσες συναρτήσεις f, g, έτσι ώστε $f(n) = O(g(n))$. Ισχύει
$$2^{f(n)} = O(2^{g(n)}) \;;$$
α) Ναι για κάθε f, g
β) Ποτέ, για οποιοδήποτε f, g ← Σωστό.
γ) Κάποιες φορές ναι, κάποιες φορές όχι, εξαρτάται από τις f, g
δ) Ναι, για κάθε f, g, με αρκούντως μεγάλο n.

Λύση:
Έστω ότι είναι. Άρα $\exists\, c, n_0$ s.t. $2^{f(n)} \leq c \cdot 2^{g(n)}$ για $n_0 \leq n \Rightarrow \dfrac{2^{f(n)}}{2^{g(n)}} \leq c \Rightarrow$
$2^{f(n)-g(n)} \leq c$, άτοπο καθώς $\forall c, \exists\, n_0$ έτσι ώστε
$$2^{f(n)-g(n)} \not\leq c \Rightarrow 2^{f(n)-g(n)} > c$$

3) Ταξινομήστε τα παρακάτω με την $g(n)$ να ακολουθεί την $f(n)$ i.f.f $f(n) = O(g(n))$

α) $\sqrt{n}$ β) 10^n γ) $n^{1.5}$ δ) $2^{\sqrt{\log_2 n}}$ ε) $n^{5/3}$

$n^{1/2}$ 10^n $n^{3/2}$ $2^{\sqrt{\log_2 n}}$ $n^{5/3}$

$n^{1/2},\ n^{3/2},\ n^{5/3},\ 2^{\sqrt{\log_2 n}},\ 10^n$

β) $n^2 \log_2 n,\ 2^n,\ 2^{2n},\ n^{\log_2 n},\ n^2$

4^n

$n^2,\ n^2 \log_2 n,\ 2^n,\ 4^n,\ n^{\log_2 n}$

γ) $2^{\log_2 n},\ 2^{2^{\log_2 n}},\ n^{5/2},\ 2^{n^2},\ n^2 \log_2(n)$

$n^{5/2},\ n^2 \log(n),\ 2^{\log_2 n},\ 4^{\log_2 n},\ 2^{n^2}$

Αν $f, g : Z^+ \longrightarrow R^+$, ν.δ.ο $f(n) = O(g(n))$ i.f.f $g(n) = \Omega(f(n))$

Αν $g(n) = \Omega(f(n)) \Rightarrow \exists\, c, n_0$ s.t $g(n) \geq c \cdot f(n) \Rightarrow f(n) \leq \frac{1}{c} g(n)$
άρα $f(n) = O(g(n))$ για $c_2 = \frac{1}{c_1}$