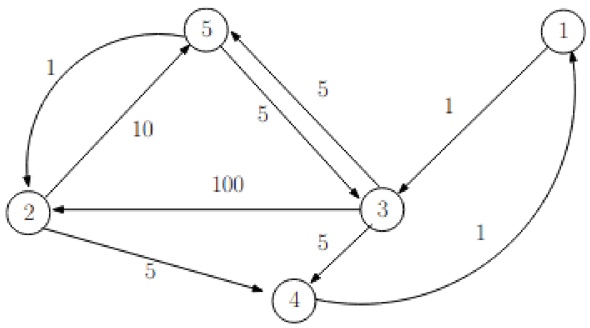
Nikolas Mavrogeneiadis
gravitorious
September 6, 2025

Συντομότερα Μονοπάτια - I

1. Έστω μια αρχική κορυφή 1 ενος μη κατευθυνόμενου βεβαρημένου γράφου $G(V, E, w), w : e \in E \to R$. Ορίζουμε ως (βεβαρημένο) δέντρο συντομότερων μονοπατιών $T(V, E^{'}, w)$, εκείνο το οποίο έχει ως ρίζα την κορυφή 1 και κάθε *path* από την 1 προς κάθε άλλη κορυφή, είναι το αντίστοιχο συντομότερο μονοπάτι στον γράφο G. Μέσω του T δηλαδή, καταγράφουμε όλα τα συντομότερα μονοπάτια από τον 1 προς όλες τις άλλες κορυφές. Να αιτιολογήσετε επαρκώς (να αποδείξετε αν κάτι ισχύει ή να δώσετε αντιπαράδειγμα) τα παρακάτω ερωτήματα.
   - (α΄) Αν υπάρχει όντως συντομότερο μονοπάτι από την κορυφή 1 προς κάθε άλλη κορυφή (δηλαδή δεν υπάρχουν αρνητικοί κύκλοι), μπορείτε να αιτιολογήσετε γιατί όντως το T είναι δέντρο;
   - (β΄) Τι επίπτωση έχει στο T ο πολλαπλασιασμός των συντελεστών των ακμών με αριθμό $b > 0$ του G;
   - (γ΄) Τι επίπτωση έχει στο T η αύξηση του συντελεστή των ακμών κατά $b > 0$ του G;
   - (δ΄) Τι επίπτωση έχει στο T η αντιστροφή των συντελεστών των ακμών του G;

2. Να γράψετε σε κώδικα τους αλγόριθμους του *Dijkstra* και $Bellman - Ford$. Τρέξτε τους αλγοριθμούς στον παρακάτω γράφο με δεδομένο ότι *source* κορυφή είναι η 5. Ποια είναι τα αποτελέσματα που δίνουν οι αλγόριθμοι; Τι πολυπλοκότητα έχουν; Να δώσετε ένα αντιπαράδειγμα στο γιατί ο *Dijkstra* δεν δουλεύει με αρνητικά βάρη.



Σχήμα 1

Υπάρχει περίπτωση να μπορούμε να σταματήσουμε τον αλγόριθμο του $Bellman - Ford$ πριν εκτελέσουμε το *relaxing* $|V(G)| - 1$ φορές;

3. Σε μία πόλη υπάρχουν κάποιες δομές που παρέχουν υπηρεσίες κοινής ωφελείας (π.χ. πυροσβεστικοί σταθμοί). Επίσης υπάρχουν σημεία ενδιαφέροντος (π.χ. σχολεία) τα οποία θα μπορούσαν να είναι χρήστες των υπηρεσιών των παραπάνω δομών. Δεδομένου ότι όλες οι αποστάσεις είναι γνωστές, να εκπονήσετε έναν αλγόριθμο ο οποίος για κάθε σημείο ενδιαφέροντος να υπολογίζει την κοντινότερη προς αυτό δομή κοινής ωφέλειας. Υποθέστε ότι έχουμε στη διάθεσή μας (ως υπορουτίνα) μια υλοποίηση $Dijkstra(V, E, w, s)$ του αλγορίθμου του $Dijkstra$ που δέχεται ως είσοδο ένα κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$ με μη αρνητικά βάρη στις ακμές του ($w(e) \geqslant 0$ για κάθε $e \in E$) και μία κορυφή $s \in V$. Ως έξοδο δίνει ένα διάνυσμα $d = [d(v)(v \in V)]$ με τα μήκη των συντομότερων διαδρομών από την s προς κάθε $v \in V$ και ένα διάνυσμα $p = [p(v)(v \in V)]$ με τη χρήση του οποίου μπορούμε να απεικονίσουμε τις συντομότερες διαδρομές.
Σημείωση : Στον αλγόριθμό σας επιτρέπεται να καλέσετε μόνο μία φορά την υπορουτίνα $Dijkstra(V, E, w, s)$.

4. Δίνεται ένα απλό συνδεδεμένο γράφημα $G(V, E)$ με μη-αρνητικά βάρη στις κορυφές του και τρεις διακεκριμένες κορυφές του $s, t, u \in V$. Συμβολίζουμε με $c(v)$ το βάρος της κορυφής $v \in V$. Υποθέστε ότι οι κορυφές $v \in V/\{s, t\}$ αντιστοιχούν σε διαφορετικές πόλεις και το κόστος παραμονής σε ξενοδοχείο της κάθε πόλης δίνεται από τον συντελεστή $c(v)$. Ένας ταξιδιώτης θέλει να ταξιδέψει με το φθινότερο τρόπο από την πόλη s στην πόλη t αλλά θα ήθελε να μείνει και στο ξενοδοχείο της πόλης u (κάνοντας μία παράκαμψη) αν αυτό δεν αύξανε κατά πολύ το κόστος του ταξιδιού του. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι μία αύξηση της τάξης μέχρι 10% στο κόστος του ταξιδίου είναι μία αποδεκτή αύξηση προκειμένου να ικανοποιηθεί η επιθυμία του ταξιδιώτη. Υποθέστε ότι έχετε στη διάθεση σας μία υλοποίηση $Dijkstra(V, E, w, s, t)$ του αλγορίθμου του $Dijkstra$ που δέχεται ως είσοδο ένα κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$ με μη-αρνητικά βάρη στις ακμές του ($w(e) \geqslant 0$) για κάθε $e \in E$) και κορυφές $s, t \in V$ και παράγει σαν έξοδο το μήκος της συντομότερη διαδρομής από την κορυφή s στην κορυφή t. Να εκπονήσετε αλγόριθμο ο οποίος να απαντά αν ο ταξιδιώτης μπορεί να ικανοποιήσει την επιθυμία του.

5. Στην αγορά συναλλάγματος νομίσματα ανταλλάσονται με συγκεκριμένες ισοτιμίες. Για παράδειγμα ο παρακάτω πίνακας περιέχει τις ισοτιμίες ανάμεσα σε ευρώ, δολλάριο, λίρα (αγγλίας) και ελβετικό φράνκο. Το πρόβλημα ου *arbitrage* συνίσταται στον εντοπισμό μίας σειράς ανταλλαγών που ξεκινώντας από κάποιο νόμισμα καταλήγει στο ίδιο νόμισμα με μεγαλύτερο ποσό από το αρχικό. Να εντοπίσετε αν υπάρχει μία τέτοια σειρά με βάση τις παραπάνω ισοτιμίες έχοντας σαν αρχικό ποσό ένα εκατομύριο ευρώ. Για να

	EUR	USD	GBP	CHF
EUR	1	1,122000	0,899300	1,113300
USD	0,891266	1	0,801500	0,992200
GBP	1,111976	1,247661	1	1,238000
CHF	0,89823	1,007861	0,807754	1

Σχήμα 2

αντιληφθούμε καλύτερα τους αριθμούς (τις ισοτιμίες) του Πίνακα αν έχουμε 500 ευρώ μπορούμε να πάρουμε $500 * 1,122 = 561$ δολλάρια. Εναλλακτικά (μία περίπτωση), θα μπορούσαμε να κάνουμε τα ευρώ λίρες και τις λίρες δολλάρια, Στην περίπτωση αυτή θα είχαμε $500 * 0,8993 * 1.247661 = 561.01$ δολλάρια. Δηλαδή στην εναλλακτική περίπτωση θα είχαμε κέρδος 1 cent παραπάνω.
Hint: Ίσως το να λογαριθμίζατε τις ισοτιμίες να σας βοηθούσε.

6. Να λύσετε τα παρακάτω προβλήματα στο *course* που έχει δημιουργηθεί στο *CSES* (να τα κάνετε *sumbit* εκεί). Προτείνετε να διαβάσετε πρώτα όλα τα προβλήματα. Να γράψετε τι πολυπλοκότητα έχει ο κώδικας σε κάθε πρόβλημα που λύνετε.
   (α′) Shortest Routes I
   (β′) High Score
   (γ′) Flight Discount
   (δ′) Cycle Finding
   (ε′) Flight Routes
   (ϛ′) Investigation

   Στο τελευταίο πρόβλημα, απλά χρησιμοποιείστε την σχέση $(a+b) \ \% \ mod = (a \ \% \ mod + b \ \% \ mod) \ \% \ mod$.