Algorithm Correctness Proof.

Definition elimination : removal of given element.

Theorem 1

Κάθε array μπορεί να καταλήξει σε unique?

- Έστω ότι δεν μπορεί.

Έστω array μεγέθους n για το οποίο ισχύει $a_{i-1} > a_i > a_{i+1}$ και $a_1 < a_n$

$a_i > a_{i+1} \Rightarrow a_i > a_n$
$a_n > a_1 \Rightarrow a_i > a_1$
$a_1 > a_{i-1} \Rightarrow a_i > a_{i-1}$ άτοπο $a_{i-1} < a_i$ $\blacksquare$

Leema 1

Ένας πίνακας n στοιχείων θα καταλήξει με 0 ή 1 στοιχεία μετά από k eliminations αν δεν περιλαμβάνει διπλότυπα

- Ο τελικός πίνακας μπορεί να έχει
  1 element αν $n > 0$
  0 elements αν $n = 0$

Proof.

για $n = 0$ trivial
για $n \neq 0$:

λύση με $n>1$
{ Έστω μετά από k eliminations έχουμε έγκυρη βέλτιστη μεγέθους $n>1$. Χωρίς βλάβη επιλέγω $n=2$
Άρα $a_1 = a_2$
Άτοπο. Ο αρχικός πίνακας δεν είχε διπλότυπα.

λύση με $n=0$
1) { Έστω μετά από k eliminations έχουμε έγκυρη βέλτιστη μεγέθους $n=0$. Άτοπο καθώς με $k-1$ eliminations έχουμε επίσης βέλτιστη λύση με 1 στοιχείο
2) { Επίσης για $n=1$ ισχύει $1 \leq i \leq 1$, και άρα $i+1$ δεν ορίζεται, οπότε elimination για $a_i < a_{i+1}$ δεν είναι εφικτό $\blacksquare$

Theorem 2

$k = n-1$ για πίνακα μεγέθους n χωρίς διπλότυπα.

Proof

Από θεώρημα 1 ισχύει ότι $\exists\, i \in [1, n-1]$ s.t $a_i \leq a_{i+1}$ για κάθε state του προβλήματος

Από Leema 1 ισχύει ότι για $n > 0$ το τελικό state θα έχει μέγεθος 1 (0 είναι trivial)

Θέλουμε ακριβώς $n-1$ eliminations για να φτάσουμε σε πίνακα μεγέθους 1.

$\blacksquare$

Theorem 3

$k = n-1$ βέλτιστο για πίνακα μεγέθους n χωρίς διπλότυπα.

Proof

Έστω βέλτιστες λύσεις

για $k > n-1 \Rightarrow k = n$

Argument 1
{ Έστω μετά από k eliminations έχουμε έγκυρη βέλτιστη μεγέθους $n=0$. Άτοπο καθώς με $k-1$ eliminations έχουμε επίσης βέλτιστη λύση με 1 στοιχείο

Argument 2
{ Επίσης για $n=1$ ισχύει $1 \leq i \leq 1$, και άρα $i+1$ δεν ορίζεται, οπότε elimination για $a_i < a_{i+1}$ δεν είναι εφικτό

για $k < n-1$.

{ Χωρίς βλάβη επιλέγω $k = n-2$
Άρα τελικός πίνακας με $n=2$ στοιχεία
- Είναι ίδια? Άτοπο καθώς αρχικός πίνακας χωρίς διπλότυπα
- Δεν είναι ίδια? : Άτοπο, η λύση ΔΕΝ είναι έγκυρη.

$\blacksquare$

Συνέπεια 1

Το θεώρημα 1 ισχύει και για $a_{i-1} > a_i > a_{i+1}$ και $a_1 = a_n$
Απόδειξη trivial.

Theorem 4

$k = n - d$ για πίνακα μεγέθους n και d ο αριθμός των φορών που εμφανίζεται το διπλότυπο νούμερο με τις περισσότερες εμφανίσεις.

- elements αρχικού πίνακα a: $a_i \dots a_n$

- μέγεθος αρχικού πίνακα n_a
- Έστω πίνακας με $a_i = a_{i+j}$ και $a_p \neq a_q$ $\forall p, q$ με $p \neq q$ και $p = i \wedge q = i+j$ ή αντίστροφα. (1). Επέλεξα $d=2$ χωρίς βλάβη της γενικότητας

$$A = [a_1 \dots a_i \dots a_{i+j} \dots a_n]$$

- Από συνέπεια 1 του θεωρήματος 1 και θεώρημα 2 θέλουμε $e = \underbrace{i+j-1}$ $- (i+1) = \cancel{i}+j-1-\cancel{i}-1 = j-2$ eliminations για να έχουμε

$$A' = [a_1 \dots \overset{\text{ίδια}}{a_i, a_l, a_{i+j}} \dots a_n]$$

διαφορετικό.

με $a_i = a_{i+j}$ και $a_i \neq a_l$.
(indexes είναι του A και όχι του A' πίνακα).

(2) Αν $a_i < a_l$ επιλέγουμε το a_l για elimination
Αν $a_i > a_l$ τότε $a_l < a_{i+1}$ και κάνουμε το ίδιο
Αν $a_i = a_l$ αδύνατον από (1)

„Σε κάθε περίπτωση θέλουμε $e = \cancel{i}+j\cancel{-1} = j$ eliminations για να "κολλήσουμε" τα a_i, a_{i+j}.

- Μεταξύ $a_1 \dots a_{i-1}$ ισχύει το θεώρημα 3 με $e = i-1-1 = i-2$ για να έχουμε $[a_x, a_i, a_{i+j}, \dots a_n]$.

- Μεταξύ $a_{i+j} \dots a_n$ ισχύει το θεώρημα 3 με $e = (n-i-j+1)-1$

- Καταλήγουμε με $e = \cancel{j}-2 + \cancel{i}-2 + n \cancel{-i} \cancel{-j} \cancel{+1} \cancel{-1} = n-4$

$$[a_x, a_i, a_{i+j}, a_y]$$

αν $a_x < a_i$ και $a_{i+j} < a_y$ τότε με $k = n-d$ έχουμε βέλτιστη λύση

αν $a_x > a_i$ και $a_{i+j} < a_y$ τότε αφαιρούμε το a_y, και καθώς $a_{i+j} < a_x$ ($a_i = a_{i+j}$) αφαιρούμε το a_x

Παρόμοια με κάθε συνδυασμό, καταλήγουμε σε $k = n-d$.

Είναι εύκολο να δούμε ότι για $d > 2$ θα δούλευε με τον ίδιο τρόπο. Για $d=1$ θα δούλευε από θεώρημα 3.

$\blacksquare$