质点运动学答案

一、选择题：1、B　2、D　3、B

二、填空题：

1、(1) $\upsilon = \mathrm{d}S/\mathrm{d}t = b + ct$

（2）$a_t = \mathrm{d}\upsilon/\mathrm{d}t = c$

（3）$a_n = (b+ct)^2/R$

（4）$a = \sqrt{c^2 + \dfrac{(b+ct)^4}{R^2}}$

2、（1）$\vec{v} = 50(-\sin 5t\vec{i} + \cos 5t\vec{j})$；

（2）$\vec{a} = 250(-\cos 5t\vec{i} - \sin 5t\vec{j})$；

（3）$a_t = \mathrm{d}\upsilon/\mathrm{d}t = 0$

（4）$a_n = v^2/R = 250(m/s^2)$

（5）圆

3、（1）$t = \sqrt{\dfrac{4\pi}{\beta}}$

（2）$a_t = R\beta$

（3）$a_n = 4\pi\beta R$

（4）$a = R\beta\sqrt{1+16\pi^2}$

三、计算题

1、$v = v_0 + Ct^3/3$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{12}Ct^4$$

2、解：设质点在 x 处的速度为 υ，

$$a = \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2 + 6x^2$$

$$\int_0^{\upsilon}\upsilon\,\mathrm{d}\upsilon = \int_0^{x}\left(2+6x^2\right)\mathrm{d}x \qquad \upsilon = 2\left(x + x^3\right)^{1/2}$$

3、（1）$\dfrac{1}{v} = \dfrac{1}{v_0} + \dfrac{1}{10v_0}t$

（2）$x = 10v_0\ln(\dfrac{1}{10}t + 1)$

（3）$\mathrm{v} = \mathrm{v}_0\exp(-\dfrac{x}{10v_0})$

4、(1) $S=\dfrac{1}{3}ct^3$

(2) $a_t=2ct$

$a_n=c^2t^4/R$

$$a=\sqrt{a_t^2+a_n^2}=\sqrt{4c^2t^2+\frac{c^4t^8}{R^2}}$$

5、（1）$\omega=4t$ rad /s；$\alpha=4$ rad /s^2

(2) $a_n=16Rt^2$

$a_t=4R$

$$a=\sqrt{a_t^2+a_n^2}=4R\sqrt{16t^4+1}$$

6、(1) $\omega=4t^3-3t^2$

(2) $a_t=(12t^2-6t)R$ $a_n=(4t^3-3t^2)^2R$

(3) $\theta=\theta_0+t^4-t^3$

三、讨论与判断题

1、（1）错，切向加速度不变，法向加速度改变。

（2）错，$|\overline{\vec{v}}|\neq\overline{v}$

（3）对，$|\vec{v}|=v$

2、（1）变速率曲线运动；

（2）变速率直线运动；

（3）匀速率曲线运动；

（4）匀速直线运动。

3、题目更正：求小船在岸边的距离为 s 时的速度和加速度。

小船在岸边的距离为 s 时的速度：$v=-\sqrt{\dfrac{h^2+s^2}{s^2}}v_0$

小船在岸边的距离为 s 时的加速度：$a=-\dfrac{h^2v_0^2}{s^3}$

小船为变速率直线运动。

4、（1）略

（2）略

（3）$\dfrac{d\vec{r}}{dt}=\vec{v}$：瞬时速度矢量，反映位置变化快慢。

$\frac{\mathrm{d}|\vec{r}|}{\mathrm{d}t}$：没有明确的物理意义。

$\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2}=\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|=v$：在直角坐标下的瞬时速度的大小表示。

$\mathrm{d}S/\mathrm{d}t$：瞬时速率，和瞬时速度的大小$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|$相等。

（4）$\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{a}$：瞬时加速度矢量，反映速度变化快慢。

$\left|\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{dt}\right|=|\vec{a}|=a$：瞬时加速度的大小

$\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\right)^2}=\left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right|=a$：在直角坐标下的瞬时加速度的大小表示。

$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$：切向加速度的大小，加速度矢量在自然坐标系的切向分量，反映速度大小的变化快慢。

$\frac{\mathrm{v}^2}{R}$：法向加速度的大小，加速度矢量在自然坐标系的法向分量，反映速度方向的变化快慢。

$\left[\left(\frac{\mathrm{d}\mathrm{v}}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{v}^4}{R^2}\right)\right]^{1/2}=a$：在自然坐标下的瞬时加速度的大小表示。

5、

	A	M	B	C
$\vec{a}$	$\vec{g}$	$\vec{g}$	$\vec{g}$	$\vec{g}$
a_τ	$-g\sin\alpha$	$-g\sin\theta$	$g\sin\alpha$	0
a_n	$g\cos\alpha$	$g\cos\theta$	$g\cos\alpha$	g
ρ	$\frac{v_0^2}{g\cos\alpha}$	$\frac{v_0^2\cos^2\alpha}{g\cos^3\theta}$	$\frac{v_0^2}{g\cos\alpha}$	$\frac{v_0^2\cos^2\alpha}{g}$

牛顿运动定律答案

一、选择题：1、C　2、C　3、A　 4、D

二、填空题：

1、$1:\cos^2\theta$

2、$\dfrac{1}{2k}\ln\dfrac{g+kv_0^2}{g}$

3、Mk^2x；　　$\dfrac{1}{k}\ln\dfrac{x_1}{x_0}$

4、$\vec{v}=\dfrac{F_0}{m\omega}\sin\omega t\vec{i}$；　$\dfrac{F_0}{m\omega^2}(1-\cos\omega t)+x_0$

三、计算题

1、解：　$\vec{a}=\vec{F}/m=2\vec{i}-12t^2\vec{j}\quad=\mathrm{d}\vec{v}/\mathrm{d}t$

$\therefore\quad \mathrm{d}\vec{\upsilon}=(2\vec{i}-12t^2\vec{j})\mathrm{d}t$

$$\int_{\vec{\upsilon}_0}^{\vec{\upsilon}}\mathrm{d}\vec{\upsilon}=\int_0^t(2\vec{i}-12t^2\vec{j})\mathrm{d}t$$

$\therefore\quad \vec{\upsilon}-\vec{\upsilon}_0=2t\vec{i}-4t^3\vec{j}$

$\vec{\upsilon}=\vec{\upsilon}_0+2t\vec{i}-4t^3\vec{j}=(3+2t)\vec{i}+(4-4t^3)\vec{j}$

当 $t=1$ s 时，　$\vec{\upsilon}_1=5\vec{i}$　沿 x 轴

故这时，　$\vec{a}_n=\vec{a}_y=-12\vec{j}$

$$\vec{F}_n=m\vec{a}_n=-24\vec{j}\quad\text{(SI)}$$

2、解：(1) 子弹进入沙土后受力为－$K\upsilon$，由牛顿定律

$$-K\upsilon=m\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}$$

$\therefore\qquad -\dfrac{K}{m}\mathrm{d}t=\dfrac{\mathrm{d}\upsilon}{\upsilon},\qquad -\displaystyle\int_0^t\frac{K}{m}\mathrm{d}t=\int_{\upsilon_0}^{\upsilon}\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\upsilon}$

$\therefore\qquad \upsilon=\upsilon_0\mathrm{e}^{-Kt/m}$

(2) 求最大深度

解法一：　$\upsilon=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$

$$\mathrm{d}x=\upsilon_0\mathrm{e}^{-Kt/m}\,\mathrm{d}t\qquad \int_0^x\mathrm{d}x=\int_0^t\upsilon_0\mathrm{e}^{-Kt/m}\,\mathrm{d}t$$

$\therefore\qquad x=(m/K)\upsilon_0(1-\mathrm{e}^{-Kt/m})$

$$x_{\max}=m\upsilon_0/K$$

解法二：
$$-K\upsilon = m\frac{d\upsilon}{dt} = m(\frac{d\upsilon}{dx})(\frac{dx}{dt}) = m\upsilon\frac{d\upsilon}{dx}$$

∴ $$dx = -\frac{m}{K}d\upsilon \qquad \int_0^{x_{max}} dx = -\int_{\upsilon_0}^{0}\frac{m}{K}d\upsilon$$

∴ $$x_{max} = m\upsilon_0 / K$$

（3）$x_{max} = m\upsilon_0 / K$ 时，有 $e^{-Kt/m} = 0$。一般认为 $t = 3 m/K$ 时，$x_{max} = m\upsilon_0 / K$。

3、题目更正：（2）B 对支承面的压力的最大值和最小值。（取 $g = 10 m/s^2$）

（1）326.2 N；73.8 N
（2）726.2N；473.8 N。

4、解：（1） 由 $\frac{1}{2}Mv^2 = MgR(1-\cos\theta)$ 得 $a_n = \frac{v^2}{R} = 2g(1-\cos\theta)$

由 $F_t = Mg\sin\theta$ 得 $a_t = g\sin\theta$

故 $a = \sqrt{4g^2(1-\cos\theta)^2 + g^2\sin^2\theta}$

（2）解：根据牛顿第二定律，小物体尚在球面上时，

$$Mg\cos\theta - N = Mv^2 / R$$

小物体脱离球面时刻，$N = 0$，因而有 $Mg\cos\theta = Mv^2 / R$ ①

由机械能守恒定律，得 $\frac{1}{2}M\upsilon^2 = MgR(1-\cos\theta)$ ②

①、②联立解得 $\cos\theta = 2/3$

$\theta = \cos^{-1}(2/3)$

(3) 由机械能守恒定律，得 $\frac{1}{2}M\upsilon^2 + \frac{1}{2}M\upsilon_0^2 = MgR(1-\cos\theta)$ ③

①、③联立解得 $\cos\theta = \frac{v_0^2}{3gR} + \frac{2}{3}$

$$\theta = \cos^{-1}(\frac{v_0^2}{3gR} + \frac{2}{3})$$

四、综合讨论题

1、（1）g $2g$

（2）$\frac{1}{2}mv^2 = mgR\sin\theta$ $v = \sqrt{2gR\sin\theta}$

$$N = mg\sin\theta + \frac{mv^2}{R} = 3mg\sin\theta$$

（3）E

2、（1）$mg/\cos\theta$

（2）$v = \sin\theta\sqrt{\frac{gl}{\cos\theta}}$

（3） T= $2\pi\sqrt{\dfrac{l\cos\theta}{g}}$

（4）0

（5）重力冲量：$mgT = 2\pi m\sqrt{gl\cos\theta}$ 竖直向下 ；

（6） 拉力冲量：$2\pi m\sqrt{gl\cos\theta}$ 竖直向上 ；

动量与冲量答案

一、选择题：1、D　2、B　 3、B　4、B

二、填空题：

1、（1）$(1+\sqrt{2})m\sqrt{gy_0}$ ；　　　（2）$\frac{1}{2}m\upsilon_0$

2、（1）$m\upsilon_0$ ；　　　　　　　　　（2）竖直向下

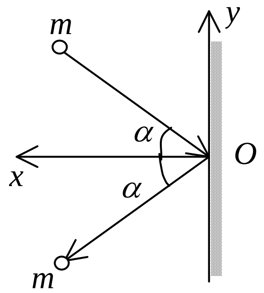
3、（1）$b\,t$ ；　　　　　　　　　　（2）$-P_0+b\,t$

4、（1）0.003 s；　　　　　　　　（2）0.6 N·s；　　　　　　　（3）2 g；

5、2 m/s

三、计算题

1、解：建立图示坐标，以 υ_x 、υ_y 表示小球反射速度的 x 和 y 分量，则由动量定理，小球受到的冲量的 x,y 分量的表达式如下：



x 方向：$\overline{F_x}\Delta t = m\upsilon_x-(-m\upsilon_x)=2m\upsilon_x$　　①

y 方向：$\overline{F_y}\Delta t = -m\upsilon_y-(-m\upsilon_y)=0$　　②

∴　　　$\overline{F}=\overline{F_x}=2m\upsilon_x/\Delta t$

$\upsilon_x=\upsilon\cos a$

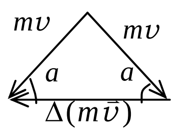
∴　　　$\overline{F}=2m\upsilon\cos\alpha/\Delta t$　方向沿 x 正向.

根据牛顿第三定律，墙受的平均冲力　$\overline{F}'=\overline{F}$

方向垂直墙面指向墙内.

解法二：作动量矢量图，由图知　$\left|\Delta(m\vec{\upsilon})\right|=2m\upsilon\cos\alpha$

方向垂直于墙向外



由动量定理:　　　$\overline{F}\Delta t=\left|\Delta(m\vec{\upsilon})\right|$

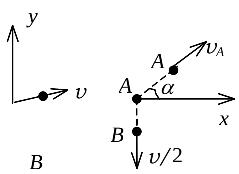
得　　　$\overline{F}=2m\upsilon\cos\alpha/\Delta t$

不计小球重力，$\overline{F}$ 即为墙对球冲力

由牛顿第三定律,墙受的平均冲力　$\overline{F}'=\overline{F}$

方向垂直于墙，指向墙内

2、解：建坐标如图．设球 A、B 的质量分别为 m_A、m_B．由动量守恒定律可得：



x 方向：　$m_B\upsilon=m_A\upsilon_A\cos\alpha$　　①

y 分向：　$m_A\upsilon_A\sin\alpha-m_B\upsilon/2=0$　　②

联立解出　　α=26° 34′

3、解：弹簧被压缩量最大距离时，m_1、m_2 相对速度为零．这时

动量守恒　　　$m_1\upsilon_0=(m_1+m_2)\upsilon$

机械能守恒　　$\frac{1}{2}m_1\upsilon_0^2=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\upsilon^2+\frac{1}{2}kx^2$

由上二式可解得弹簧的最大被压缩量为

$$x=\upsilon_0\sqrt{\frac{m_1m_2}{k(m_1+m_2)}}$$

4、解：动量守恒 $m\upsilon_0=(m+M)V$

越过最高点条件 $(m+M)g=(m+M)\upsilon^2/l$

机械能守恒 $\frac{1}{2}(m+M)V^2=(m+M)g2L+\frac{1}{2}(m+M)\upsilon^2$

解上三式，可得 $\upsilon_0=(m+M)\sqrt{5gl}/m$

若是直杆，则越过最高点条件为（m+M）到达最高点时速度须大于零，由机械能守恒得：

$$\frac{1}{2}(m+M)\mathrm{V}^2=(m+M)g2L \qquad \mathrm{V}^2=4gL$$

动量守恒 $m\upsilon_0=(m+M)V$

解上二式，可得 $\mathrm{v}_0=(m+M)\sqrt{4gl}/m$

5、解： $k=Mg/x_0$

油灰与笼底碰前的速度 $\upsilon=\sqrt{2gh}$

碰撞后油灰与笼共同运动的速度为 V，应用动量守恒定律

$$m\upsilon=(m+M)V \qquad ①$$

油灰与笼一起向下运动，机械能守恒，下移最大距离Δx，则

$$\frac{1}{2}k(x_0+\Delta x)^2=\frac{1}{2}(M+m)V^2+\frac{1}{2}kx_0^2+(M+m)g\Delta x \qquad ②$$

联立解得： $\Delta x=\frac{m}{M}x_0+\sqrt{\frac{m^2x_0^2}{M^2}+\frac{2m^2hx_0g}{M(M+m)}}$

6、解：设 m 与 M 碰撞后的共同速度为 υ，它们脱离球面的速度为 u.

(1) 对碰撞过程，由动量守恒定律得

$$\upsilon=m\upsilon_0/(M+m) \qquad ①$$

m 与 M 沿固定光滑球面滑下过程中机械能守恒，在任一位置θ 时，有

$$\frac{1}{2}(M+m)\upsilon^2+(M+m)gR(1-\cos\theta)=\frac{1}{2}(M+m)u^2 \qquad ②$$

$$(M+m)g\cos\theta-N=(M+m)u^2/R \qquad ③$$

当物体脱离球面时，$N=0$，代入③式并与①、②式联立，可解得：

$$\cos\theta=\frac{\upsilon^2+2gR}{3gR}=\frac{m^2\upsilon_0^2}{3gR(M+m)^2}+\frac{2}{3}$$

∴ $$\theta=\cos^{-1}[\frac{m^2\upsilon_0^2}{3gR(M+m)^2}+\frac{2}{3}]$$

(2) 若要在 A 处使物体脱离球面，必须满足

$$(M+m)\upsilon_A^2/R\ge(M+m)g$$

即$\upsilon_A^2>Rg$，考虑到①式有 $m^2\upsilon_0^2/(M+m)\ge Rg$

所以油灰的速度至少应为 $\upsilon_0=(M+m)\sqrt{Rg}/m$

功与能答案

一、选择题：1、B　2、B　3、C　4、C　5、C

二、填空题：

1、12 J；

2、$mg\sin\theta(2gh)^{1/2}$

3、18 J；6 m/s；

4、$\dfrac{m^2g^2}{2k}$

三、计算题

1、解：由 $x=ct^3$ 可求物体的速度：　$\upsilon=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=3ct^2$

物体受到的阻力大小为：　$f=k\upsilon^2=9kc^2t^4=9kc^{2/3}x^{4/3}$

力对物体所作的功为：

$$W=\int\mathrm{d}W=\int_0^l -9kc^{2/3}x^{4/3}\mathrm{d}x=\frac{-27kc^{2/3}l^{7/3}}{7}$$

2、解：(1) 外力做的功

$$W=\int\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{x}$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}(52.8x+38.4x^2)\,\mathrm{d}x$$

$=31$ J

(2) 设弹力为 F'

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2=\int_{x_2}^{x_1}\vec{F}'\cdot\mathrm{d}\vec{x}=\int_{x_2}^{x_1}-F\,\mathrm{d}x=W$$

$$\upsilon=\sqrt{2W/m}$$

$=5.34$ m/s

(3) 此力为保守力，因为其功的值仅与弹簧的始末态有关．

3、(1) $GMm(\dfrac{1}{3R}-\dfrac{1}{R})$　或　$-\dfrac{2GMm}{3R}$

(2) $E_k=GMm/(6R)$　　$E_p=-GMm/(3R)$　　$E_m=-GMm/(6R)$

4、解：(1) 设 A 射入 B 内，A 与 B 一起运动的初速率为 $\overline{\upsilon}_0$，则由动量守恒

$$m\upsilon_0=(M+m)\overline{\upsilon}_0 \qquad ①$$

$$\overline{\upsilon}_0=\frac{mv_0}{m+M}$$

根据动能定理　$f\cdot s=\dfrac{1}{2}(m+M)\overline{\upsilon}_0^2$　　②

$$f=\mu(m+M)g \qquad ③$$

①、②、③联立解出 $\mu=\dfrac{m^2{v_0}^2}{2gs(m+M)^2}$

(2) $$W_1=\frac{1}{2}m\bar{v}_0^2-\frac{1}{2}mv_0^2\ =\frac{1}{2}m{v_0}^2[(\frac{m}{m+M})^2-1]$$

(3) $$W_2=\frac{1}{2}M\bar{v}_0^2\ =\frac{1}{2}M(\frac{mv_0}{m+M})^2$$

(4) W_1、W_2 大小不等，这是因为虽然木块与子弹之间的相互作用力等值反向，但两者的位移大小不等.

四、综合讨论题

1、（1）不一定为零。在无相对位移或相对位移与一对力垂直的情况下，一对力的功才为零。

（2）B

2、定理内容：略

（A）动量守恒，机械能不守恒；

（B）动量守恒，机械能守恒.

（C）动量守恒，机械能不一定守恒.

3、 (1)位矢 $\vec{r}=A\cos\omega t\,\vec{i}+B\sin\omega t\,\vec{j}$ (SI)

可写为 $x=A\cos\omega t$ ， $y=B\sin\omega t$

$$\mathbf{v}_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-A\omega\sin\omega t\,,\qquad \mathbf{v}_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=B\omega\cos\omega t$$

$$\vec{\mathbf{v}}=-A\omega\sin\omega t\vec{i}+B\omega\cos\omega t\vec{j}$$

$$\vec{a}=-A\omega^2\cos\omega t\vec{i}-B\omega^2\sin\omega t\vec{j}$$

由于 $\vec{a}=-A\omega^2\cos\omega t\vec{i}-B\omega^2\sin\omega t\vec{j}=-\omega^2\vec{r}$ ，加速度总指向圆心。

（2） $\dfrac{x^2}{A^2}+\dfrac{y^2}{B^2}=1$

（3）功：$\dfrac{1}{2}m\omega^2(A^2-B^2)$ 冲量：$m\omega(-A\vec{i}-B\vec{j})$

（4）在 A 点(A，0) ， $\cos\omega t=1$，$\sin\omega t=0$

$$E_{KA}=\frac{1}{2}m\mathbf{v}_x^2+\frac{1}{2}m\mathbf{v}_y^2=\frac{1}{2}mB^2\omega^2$$

在 B 点(0，B) ， $\cos\omega t=0$，$\sin\omega t=1$

$$E_{KB}=\frac{1}{2}m\mathbf{v}_x^2+\frac{1}{2}m\mathbf{v}_y^2=\frac{1}{2}mA^2\omega^2$$

(5) $$\vec{F}=ma_x\vec{i}+ma_y\vec{j}=-mA\omega^2\cos\omega t\,\vec{i}-mB\omega^2\sin\omega t\,\vec{j}$$

由 $A\to B$ $$W_x=\int_A^0 F_x\mathrm{d}x=-\int_A^0 m\omega^2A\cos\omega t\mathrm{d}x=-\int_A^0 m\omega^2x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}mA^2\omega^2$$

$$W_y=\int_0^B F_y\mathrm{d}y=-\int_0^B m\omega^2B\sin\omega t\mathrm{d}y=-\int_0^B m\omega^2y\mathrm{d}y=-\frac{1}{2}mB^2\omega^2$$

（6）此质点对原点的角动量为 $m\omega ab$；此质点所受对原点的力矩为 0；此质点对原点的角动量是守恒的。

刚体定轴转动（一）答案

一、选择题：1、C　 2、C　 3、D

二、填空题：

1、6.54 rad / s^2 ；4.8 s

2、$\upsilon\approx$15.2 m /s；n_2＝500 rev /min

3、0.15 m • s^{-2}　　1.26 m • s^{-2}

参考解：　$a_t=R\cdot\beta=0.15\ m/s^2$　　　$a_n=R\omega^2=R\cdot 2\beta\theta=1.26\ m/s^2$

4、25 kg • m^2

5、（1）$\upsilon=\omega r$＝8.17×0.15=1.23 m/s

（2）$a_n=\omega^2 r=8.17^2\times 0.15=10\ m/s^2$

（3）N =9.75 rev

二、计算题

1、解：（1）$\beta=\dfrac{M}{J}=-\dfrac{k{\omega_0}^2}{4J}$

（2）根据转动定律：　$\dfrac{d\omega}{\omega^2}=-\dfrac{k}{J}dt$

两边积分：　$\int_{\omega_0}^{\omega_0/2}\dfrac{1}{\omega^2}d\omega=-\int_0^t\dfrac{k}{J}dt$

∴　$t=\dfrac{J}{k\omega_0}$

刚体定轴转动（二）答案

一、选择题：1、C　 2、C

二、填空题：

1、物理意义：反映了刚体转动惯性的大小；

决定因素：刚体的质量和质量分布以及转轴的位置（或刚体的形状、大小、密度分布和转轴位置；或刚体的质量分布及转轴的位置.）

2、 g / l； $g / (2l)$；

三、计算题

1、解：（1）设棒的质量为 m，当棒与水平面成 60° 角并开始下落时，根据转动定律

$$M = J\beta$$

其中 $$M = \frac{1}{2}mgl\sin 30^{\circ} = mgl/4$$

于是 $$\beta = \frac{M}{J} = \frac{3g}{4l}$$

（2）当棒转动到水平位置时， $M = \frac{1}{2}mgl$ 则 $\beta = \frac{M}{J} = \frac{3g}{2l}$

2、解：（1） $\beta = -\frac{\omega_0}{t} = -0.50 rad \cdot s^{-2}$

（2） $M = J\beta = \frac{ml^2}{12}\beta = -0.25 N \cdot m$

（3） $\theta_{10} = \omega_0 t + \frac{1}{2}\beta t^2 = 75 rad$

四、综合讨论题

1、（1）解：根据牛顿运动定律和转动定律列方程

对物体： $mg - T = ma$ ①

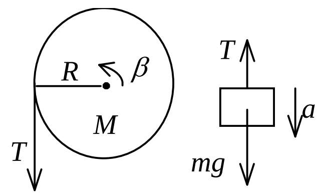
对滑轮： $TR = J\beta$ ②

运动学关系： $a = R\beta$ ③

将①、②、③式联立得

$$a = mgR^2 / (mR^2 + J)$$

$$T = \frac{J}{mR^2 + J}mg$$



（2） $v = at = mgR^2 t / (mR^2 + J)$

(3) $h = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}mgR^2 t^2 / (mR^2 + J)$

(4) $\beta = a / R = mgR / (mR^2 + J)$

$\omega = \beta t = mgR t / (mR^2 + J)$

$\theta = \frac{1}{2}\beta t^2 = \frac{1}{2}mgR t^2 / (mR^2 + J)$

（5） 变大了。因为物体带走了一部分能量。

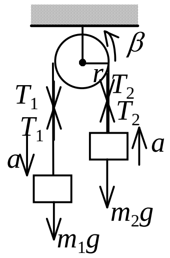
（6） 解： 由上题知 $\beta = mgR / (mR^2 + J)$

∵ $\omega = \omega_0 - \beta t$

当ω＝0 时，　　　　$t=\dfrac{\omega_0}{\beta}=\dfrac{mR^2+J}{mgR}\omega_0$

物体上升的高度 $h=R\theta=R\dfrac{\omega_0^2}{2\beta}=\dfrac{mR^2+J}{2mgR}R\omega_0^2=\dfrac{mR^2+J}{2mg}\omega_0^2$

2、（1）解：作示力图．两重物加速度大小 a 相同，方向如图．



$m_1g－T_1＝m_1a$

$T_2－m_2g＝m_2a$

设滑轮的角加速度为β，则　$(T_1－T_2)R＝J\beta$

且有　　　　　　　　　$a＝R\beta$

由以上四式消去 T_1，T_2 得：

$$\beta=\frac{(m_1-m_2)gR}{(m_1+m_2)R^2+J}$$

（2）解：$T_1=m_1g-m_1a=\dfrac{J+2m_2R^2}{J+(m_1+m_2)R^2}m_1g$

$$T_2=m_2g+m_2a=\frac{J+2m_1R^2}{J+(m_1+m_2)R^2}m_2g$$

（3）解：方程如下：

$T_2－m_2g=m_2a_2$

$m_1g－T_1=m_1a_1$

$T_1R_1－T_2R_2=J\beta$

$R_2\beta=a_2$

$R_1\beta=a_1$

解得：$\beta=\dfrac{m_1R_1-m_2R_2}{J+m_1R_1^2+m_1R_2^2}g$

$a_1=\beta R_1=\dfrac{m_1R_1-m_2R_2}{J+m_1R_1^2+m_1R_2^2}R_1g$　　　$a_2=\beta R_2=\dfrac{m_1R_1-m_2R_2}{J+m_1R_1^2+m_1R_2^2}R_2g$

$T_1=\dfrac{J+m_2R_2^2+m_2R_1R_2}{J+m_1R_1^2+m_1R_2^2}m_1g$　　　$T_2=\dfrac{J+m_1R_1^2+m_1R_1R_2}{J+m_1R_1^2+m_1R_2^2}m_2g$

（4）解：　　方程如下：

$m_1g－T_1=m_1a$

$T_2－m_2g=m_2a$

$T_1R_1－T_3R_1=J_1\beta_1$

$T_3R_2－T_2R_2=J_2\beta_2$

$R_1\beta_1=a$

$R_2\beta_2=a$

解得：$a=\dfrac{m_1-m_2}{\dfrac{J_1}{R_1^2}+\dfrac{J_2}{R_2^2}+m_1+m_2}g$

$$\beta_1=\frac{a}{R_1}=\frac{m_1-m_2}{\frac{J_1}{R_1^2}+\frac{J_2}{R_2^2}+m_1+m_2}\frac{g}{R_1} \qquad \beta_2=\frac{a}{R_2}=\frac{m_1-m_2}{\frac{J_1}{R_1^2}+\frac{J_2}{R_2^2}+m_1+m_2}\frac{g}{R_2}$$

$$T_1=m_1(g-a)=\frac{2m_2+\frac{J_1}{R_1^2}+\frac{J_2}{R_2^2}}{\frac{J_1}{R_1^2}+\frac{J_2}{R_2^2}+m_1+m_2}m_1g$$

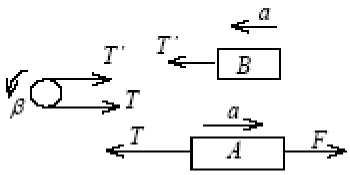
$$T_2=m_2(g+a)=\frac{2m_1+\frac{J_1}{R_1^2}+\frac{J_2}{R_2^2}}{\frac{J_1}{R_1^2}+\frac{J_2}{R_2^2}+m_1+m_2}m_2g \qquad T_3=\frac{2m_1m_2+\frac{m_2J_1}{R_1^2}+\frac{m_1J_2}{R_2^2}}{\frac{J_1}{R_1^2}+\frac{J_2}{R_2^2}+m_1+m_2}g$$

3、解：各物体受力情况如图.

$$F-T=ma$$

$$T'=ma$$

$$(T-T')R=J\beta=\frac{1}{2}mR^2\beta \quad a=R\beta$$



由上述方程组解得：

（1）$\beta=\dfrac{FR}{J+2mR^2}=\dfrac{2F}{5mR}$ （2） $T=\dfrac{3}{5}F$ （3）$T'=\dfrac{2}{5}F$

刚体定轴转动（三）答案

一、选择题：1、C　 2、D　 3、C　 4、 A

二、填空题：

1、零；　$m\upsilon d$

参考解: $\vec{L}=\vec{r}\times m\vec{\upsilon}$　　　$L=m\upsilon d$

2、内容：定轴转动刚体所受外力对轴的冲量矩等于转动刚体对轴的角动量（动量矩）的增量；

数学表达式：$\int_{t_1}^{t_2} M_z\,\mathrm{d}t = J\omega-(J\omega)_0$

守恒条件：刚体所受对轴的合外力矩等于零

3、$0.2\pi\mathrm{rad\cdot s}^{\ 1}$

4、（1）转速　$n\approx 200$ rev/min

(2) A 轮受的冲量矩　$\int M_A\,\mathrm{d}t = J_A(\omega-\omega_A)=-4.19\times10^{\ 2}$ N • m • s

负号表示与 $\vec{\omega}_A$ 方向相反.

（3）B 轮受的冲量矩　$\int M_B\,\mathrm{d}t = J_B(\omega-0)=4.19\times10^{2}$ N • m • s

方向与 $\vec{\omega}_A$ 相同.

三、计算题

1、解：（1）角动量守恒　　$\mathrm{m}r_1^{\ 2}\omega_1=\mathrm{m}r_2^{\ 2}\omega_2$

$$\omega_2=\omega_1\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$$

（2）拉力作功　　$W=\frac{1}{2}m\omega_1^{\ 2}r_1^{\ 2}\left[\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2-1\right]$

（3）物体作圆周运动的向心力由绳的张力提供　　$N=m\omega^2R$

再由 $\mathrm{m}r_1^{\ 2}\omega_1=\mathrm{m}R^2\omega$ 式可得：　$R=(m\omega_1^{\ 2}r_1^{\ 4}/N)^{1/3}$

2、解：(1) 以子弹和圆盘为系统，在子弹击中圆盘过程中，对轴 O 的角动量守恒.

$$m\upsilon_0R=\left(\frac{1}{2}MR^2+mR^2\right)\omega$$

$$\omega=\frac{m\upsilon_0}{\left(\frac{1}{2}M+m\right)R}$$

(2) 设σ表示圆盘单位面积的质量，可求出圆盘所受水平面的摩擦力矩的大小为　$M_f=\int_0^R r\mu g\sigma\cdot2\pi r\,\mathrm{d}r=(2/3)\pi\mu\sigma gR^3=(2/3)\mu MgR$

设经过Δt 时间圆盘停止转动，则按角动量定理有

$$-M_f\Delta t=0-J\omega=-\left(\frac{1}{2}MR^2+mR^2\right)\omega=-m\upsilon_0R$$

∴　$$\Delta t=\frac{m\mathrm{v}_0R}{M_f}=\frac{m\mathrm{v}_0R}{(2/3)\mu MgR}=\frac{3m\mathrm{v}_0}{2\mu Mg}$$

3、(1) 角动量守恒：　$m\upsilon L=\frac{1}{3}ML^2\omega+\frac{m\upsilon L}{2}$　得　$\omega=\frac{3m\upsilon}{2ML}$

(2)　　$-M_r=\frac{1}{3}ML^2\beta$

由 $0-\omega^2=2\beta\theta$ 得 $\theta=\dfrac{3m^2v^2}{8MM_r}$

由 $0=\omega+\beta t$ 得 $t=\dfrac{mvL}{2M_r}$

4、（1）角动量守恒： $mv_0L=\left(\dfrac{1}{3}ML^2+mL^2\right)\omega$

$\therefore$ $\omega=\dfrac{mv_0}{\left(\dfrac{1}{3}M+m\right)L}$

（2）撞击后的摆动过程，以棒、子弹（两者一体）与地球为一系统，分析易知此系统用机械能守恒。可求得最大摆角为：

$$\theta_{\max}=\arccos\left(1-\frac{m^2v_0^2}{(M+2m)(\frac{1}{3}M+m)gl}\right)$$

四、综合讨论题

1、（1） $\beta=\dfrac{3g}{2L}$ $\omega=0$

（2） $\beta=\dfrac{3g}{2L}\sin\theta$ $\omega=\sqrt{\dfrac{3g\cos\theta}{L}}$

（3） $\beta=0$ $\omega=\sqrt{\dfrac{3g}{L}}$ $E_k=\dfrac{MgL}{2}$

（4）非匀加速摆动，其角速度逐渐增大，其角加速度逐渐减小。

2、角动量守恒，但动量不守恒。

动能守恒，机械能也守恒。