Ostbayerische Technische Hochschule Regensburg WS 2023/24
Studiengang IN, IT
R. Wörle, Dr. G. Tapken

4. Übungsblatt zur Mathematik 2 – Lösungen

Lösung zu Aufgabe Ü4.1

a)

$$\frac{p}{q} = 0,\overline{4711} = \frac{4711}{10^4} + \frac{4711}{10^8} + \frac{4711}{10^{12}} + \frac{4711}{10^{16}} + \cdots$$
$$= 4711 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10^4}\right)^k = \frac{4711}{10^4} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10^4}\right)^k$$
$$= \frac{4711}{10^4} \cdot \frac{1}{1-10^{-4}} = \frac{4711}{10^4} \cdot \frac{10^4}{10^4 - 1} = \frac{4711}{9999}$$

b)

$$\frac{p}{q} = 0,1230\overline{443} = \frac{123}{10^3} + \frac{443}{10^7} + \frac{443}{10^{10}} + \frac{443}{10^{13}} + \cdots$$
$$= \frac{123}{10^3} + \frac{443}{10^3} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10^3}\right)^k = \frac{123}{10^3} + \frac{443}{10^7} \cdot \frac{1}{1-10^{-3}}$$
$$= \frac{123}{10^3} + \frac{443}{10^7} \cdot \frac{10^3}{10^3 - 1} = \frac{123}{10^3} + \frac{443}{10^4} \cdot \frac{1}{999} = \frac{123 \cdot 9990 + 443}{9\,990\,000} = \frac{1\,229\,213}{9\,990\,000}$$

Lösung zu Aufgabe Ü4.2

a) Gesucht ist der Konvergenzradius von

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right)}_{=a_n} \cdot \Bigg(x - \underbrace{0}_{=x_0}\Bigg)^n$$

Quotientenmethode

$$q = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+1}}\right) \cdot \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right)^{-1}\right|$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^{n+1} + 2^{n+1}}{6^{n+1}}}{\frac{3^n + 2^n}{6^n}} = \frac{1}{6} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1} + 2^{n+1}}{3^n + 2^n}$$
$$= \frac{1}{6} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{1}{6} \cdot \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{6} \cdot 3 = \frac{1}{2}$$

Der Konvergenzradius ist $r = \frac{1}{q} = 2$.

Wurzelmethode

$$w = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right|}$$

Wir möchten nun das Sandwich-Theorem anwenden. Dafür schätzen wir ab:

$$\frac{1}{2} = \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} \leq \sqrt[n]{\left|\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right|} \leq \sqrt[n]{\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n}} \leq \sqrt[n]{\frac{2}{2^n}} = \frac{\sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{2^n}} = \frac{\sqrt[n]{2}}{2}$$

Wir berechnen den Grenzwert der oberen Abschätzung

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2}}{2} = \frac{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2}}{2} = \frac{1}{2}$$

Wir berechnen den Grenzwert der unteren Abschätzung

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

damit ergibt sich insgesamt

$$w = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right|} = \frac{1}{2}$$

Der Konvergenzradius ist $r = \frac{1}{w} = 2$.

b) Gesucht: Konvergenzradius von

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{(k!)^k} \cdot (x+2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{(2k)!}{(k!)^k}}_{=a_k} \cdot \Big(x - \underbrace{(-2)}_{=x_0}\Big)^k$$

Quotientenmethode

$$0 \leq q = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{\big(2(k+1)\big)!}{\big((k+1)!\big)^{k+1}} \cdot \frac{(k!)^k}{(2k)!}\right|$$

$$= \lim_{k\to\infty}\frac{(2k+2)\cdot(2k+1)\cdot(k!)^k}{\big((k+1)\cdot k!\big)^{k+1}} = \lim_{k\to\infty}\frac{2(k+1)\cdot(2k+1)}{(k+1)^{k+1}\cdot k!}$$

$$\leq \lim_{k\to\infty}\frac{2(k+1)\cdot 2(k+1)}{(k+1)^{k+1}\cdot k!} = \lim_{k\to\infty}\frac{4}{(k+1)^{k-1}\cdot k!} = 0$$

Der Konvergenzradius ist $r = \frac{1}{q} = \infty$.

Wurzelmethode

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|\boldsymbol{a_k}|}$$

$$= \lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left|\frac{(2k)!}{(k!)^k}\right|}$$

$$= \lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt[k]{(2k)!}}{\sqrt[k]{(k!)^k}}$$

$$= \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k!}\sqrt[k]{(2k)!}$$

Wir möchten nun das Sandwich-Theorem anwenden. Dafür schätzen wir ab:

$$0 \leq \frac{1}{k!}\sqrt[k]{(2k)!} \leq \frac{1}{k!}\sqrt[k]{(2k)^{2k}}$$

Wir brauchen nur den Grenzwert der oberen Abschätzung zu berechnen:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k!}\sqrt[k]{(2k)^{2k}} = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k!}\cdot(2k)^2 = 0$$

Damit folgt:

$$w \coloneqq \lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|} = 0$$

Der Konvergenzradius ist damit $r = \frac{1}{w} = \infty$.

Lösung zu Aufgabe Ü4.3

a)

Ist die Summe $\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt[k]{k}}}_{=A_k}$ konvergent oder divergent?

Notwendiges Kriterium

$\lim\limits_{k\to\infty} A_k = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k}} = \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{k}} = 1 \neq 0$, damit ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k}}$ divergent.

Minoranten-Kriterium

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k}} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

Die Summe auf der rechten Seite ist die harmonische Reihe, also divergent. Damit ist auch die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k}}$ divergent.

Quotientenkriterium

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{A_{k+1}}{A_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{1}{\sqrt[k+1]{k+1}} \cdot \sqrt[k]{k}\right| = \frac{\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{k}}{\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k+1]{k+1}} = \frac{1}{1} = 1$$

D.h. dieses Kriterium hilft nichts, um zu entscheiden, ob die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k}}$ konvergiert.

Wurzelkriterium

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|A_k|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|\frac{1}{\sqrt[k]{k}}\right|} =*$$

Abschätzung nach oben

$$*\leq \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{\sqrt[k]{1}}} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{1} = 1$$

Abschätzung nach unten

$$*\geq \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{\sqrt[k]{k^k}}} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k}} = 1$$

Damit ergibt sich insgesamt

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|A_k|} = 1$$

D.h. dieses Kriterium hilft nichts, um zu entscheiden, ob die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k}}$ konvergiert.

b)

Ist die Summe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{\sin(n)}{n^2}}_{=A_k}$ konvergent oder divergent?

Notwendiges Kriterium

$0 \leq \lim_{n\to\infty} |A_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n)}{n^2} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, damit hilft das Kriterium nichts.

Majoranten-Kriterium

$$0 \leq \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^2}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin(n)}{n^2}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Die rechte Reihe ist eine verallgemeinerte harmonische Reihe mit $\alpha = 2$ und damit konvergent.

Daher ist auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^2}$ konvergent.

Quotientenkriterium

$$\left|\frac{A_{n+1}}{A_n}\right| = \left|\frac{\sin(n+1)}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{\sin(n)}\right| = \frac{n^2}{(n+1)^2} \left|\frac{\sin(n+1)}{\sin(n)}\right|$$

Dieser Quotient hat keinen Limes, denn $\sin(n)$ kann gegenüber $\sin(n+1)$ immer wieder beliebig klein werden, …

Damit ergibt sich aus diesem Kriterium keine Information über die Konvergenz der Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^2}$.

Wurzelkriterium

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|A_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{\sin(n)}{n^2}\right|} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}}\right)^2 = 1^2 = 1$$

Da es keine bessere Abschätzung geben kann, ergibt sich aus diesem Kriterium keine

Information über die Konvergenz der Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^2}$.