Ostbayerische Technische Hochschule Regensburg WS 2023/24
Studiengang IN, IT
R. Wörle, Dr. G. Tapken

5. Übungsblatt zur Mathematik 2 – Lösungen

Lösung zu Aufgabe Ü5.1

Wir sollen den Wert von $\sqrt{3}$ approximieren,
d.h. wir sollen die positive Lösung der Gleichung $x^2 = 3$ approximieren,
d.h. wir sollen die positive Nullstelle der Funktion $f(x) = x^2 - 3$ approximieren.

Wir werden die Intervallhalbierungsmethode auf die Funktion $f(x) = x^2 - 3$ an.
Da $f(1) = 1^2 - 3 = -2 < 0$ und $f(3) = 3^2 - 3 = 6 > 0$ ist $[1; 3]$ als Startintervall geeignet.

Da das Startintervall eine Länge von 2 hat und wir am Ende, d.h. nach *n* Halbierungen eine Länge von $\leq 0{,}1$ haben müssen, brauchen wir 5 Schritte des Verfahrens um das zu erreichen $\left(2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \leq 0{,}1\right)$.

$$f\left(\frac{1+3}{2}\right) = f\left(\frac{4}{2}\right) = f(2) = (2)^2 - 3 = 4 - 3 = 1 > 0$$

$$\Rightarrow \qquad \sqrt{3} \in [1; 2]$$

$$f\left(\frac{1+2}{2}\right) = f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 = \frac{9}{4} - \frac{12}{4} < 0$$

$$\Rightarrow \qquad \sqrt{3} \in \left[\frac{3}{2}; 2\right] = [1{,}5; 2]$$

$$f\left(\frac{\frac{3}{2} + 2}{2}\right) = f\left(\frac{3}{4} + \frac{4}{4}\right) = f\left(\frac{7}{4}\right) = \left(\frac{7}{4}\right)^2 - 3 = \frac{49}{16} - \frac{48}{16} > 0$$

$$\Rightarrow \qquad \sqrt{3} \in \left[\frac{3}{2}; \frac{7}{4}\right] = [1{,}5; 1{,}75]$$

$$f\left(\frac{\frac{3}{2} + \frac{7}{4}}{2}\right) = f\left(\frac{6}{8} + \frac{7}{8}\right) = f\left(\frac{13}{8}\right) = \left(\frac{13}{8}\right)^2 - 3 = \frac{169}{64} - \frac{192}{64} < 0$$

$$\Rightarrow \qquad \sqrt{3} \in \left[\frac{13}{8}; \frac{7}{4}\right] = [1{,}625; 1{,}75]$$

$$f\left(\frac{\frac{13}{8} + \frac{7}{4}}{2}\right) = f\left(\frac{13}{16} + \frac{14}{16}\right) = f\left(\frac{273}{16}\right) = \left(\frac{27}{16}\right)^2 - 3 = \frac{729}{256} - \frac{768}{256} < 0$$

$$\Rightarrow \qquad \sqrt{3} \in \left[\frac{27}{16}; \frac{7}{4}\right] = [1{,}6875; 1{,}75]$$

Lösung zu Aufgabe Ü5.2

a) $f(x) = \begin{cases} \sin(x-3)+4 & \text{für } x \leq 3 \\ (x-2)^3+3 & \text{für } x > 3 \end{cases}$

Sowohl die Funktion $\sin(x-3)+4$ als auch die Funktion $(x-2)^3+3$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ stetig. Es muss nur die Stelle $x_0 = 3$ auf Stetigkeit untersucht werden.

Zunächst suchen wir den linksseitigen Grenzwert:

$$\lim_{x \nearrow 3}(\sin(x-3)+4) = 4 + \lim_{\varepsilon \searrow 0} \sin\left(\underbrace{3-\varepsilon}_{x \nearrow x_0} - 3\right) = 4 + \lim_{\varepsilon \searrow 0} \sin(\varepsilon) = 4 + 0 = 4$$

dann suchen wir den rechtseitigen Grenzwert:

$$\lim_{x \searrow 3}((x-2)^3+3) = 3 + \lim_{\varepsilon \searrow 0}\left(\underbrace{3+\varepsilon}_{x \searrow x_0} - 2\right)^3 = 3 + \lim_{\varepsilon \searrow 0}(1+\varepsilon)^3 = 3 + 1^3 = 4$$

Der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert stimmen überein. Die Funktion ist stetig auf ganz $\mathbb{R}$.

b) $g(x) = \begin{cases} \cos(x+2)-1 & \text{für } x \leq -2 \\ -(x+2)^2+1 & \text{für } x > -2 \end{cases}$

Sowohl die Funktion $\cos(x+2)-1$ als auch die Funktion $-(x+2)^2+1$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ stetig. Es muss nur die Stelle $x_0 = -2$ auf Stetigkeit untersucht werden.

Zunächst suchen wir den linksseitigen Grenzwert:

$$\lim_{x \nearrow -2}(\cos(x+2)-1) = -1 + \lim_{\varepsilon \searrow 0} \cos\left(\underbrace{-2-\varepsilon}_{x \nearrow x_0} + 2\right) = -1 + \lim_{\varepsilon \searrow 0} \cos(-\varepsilon)$$
$$= -1 + 1 = 0$$

dann suchen wir den rechtseitigen Grenzwert:

$$\lim_{x \searrow -2}(-(x+2)^2+1) = 1 + \lim_{\varepsilon \searrow 0} -\left(\left(\underbrace{-2+\varepsilon}_{x \searrow x_0} + 2\right)^2\right) = 1 - \lim_{\varepsilon \searrow 0}(\varepsilon)^2 = 1 - 0 = 1$$

Der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert stimmen nicht überein. Die Funktion ist nicht stetig.

c) $h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x < 1 \\ x^3 & \text{für } x > 1 \end{cases}$

Sowohl die Funktion x^2 als auch die Funktion x^3 ist auf ganz $\mathbb{R}$ stetig. Es muss nur die Stelle $x_0 = 1$ auf Stetigkeit untersucht werden. Dieser Stelle ist jedoch für keine der Funktionen definiert. Für $x_0 = 1$ ist eine Definitionslücke.
Die Funktion ist nicht stetig.