3. Übungsblatt zur Mathematik 2 – Lösungen

Lösung zu Aufgabe Ü3.1

Da jedes Element der Matrix an genau einer Multiplikation beteiligt ist, ist die Matrix-Vektor-Multiplikation $O(n^2)$.

Lösung zu Aufgabe Ü3.2

a)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2^n-6)^2}{2\cdot 4^n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2^n)^2 - 12\cdot 2^n + 36}{2\cdot 4^n + 1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2^n} - 12\cdot 2^n + 36}{2\cdot 2^{2n}+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{12}{2^n} + \frac{36}{2^{2n}}}{2 + \frac{1}{2^{2n}}} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{12}{2^n} + \frac{36}{2^{2n}}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2 + \frac{1}{2^{2n}}\right)} = \frac{1}{2}$$

b)

$$\underbrace{0}_{=:c_n} \; 0 \le \underbrace{\frac{(\cos n)^2}{\sqrt{n}}}_{=:b_n} \le \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}}_{=:d_n}$$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

Damit gilt nach dem Sandwich-Theorem

$$b_n \coloneqq \frac{(\cos(n))^2}{\sqrt{n}} = 0$$

c)

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^2 - \sqrt{n^4+3n^2+2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(n^2 - \sqrt{n^4+3n^2+2}\right)\cdot\left(n^2 + \sqrt{n^4+3n^2+2}\right)}{n^2 + \sqrt{n^4+3n^2+2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^4 - (n^4+3n^2+2)}{n^2+\sqrt{n^4+3n^2+2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-3n^2-2}{n^2+\sqrt{n^4+3n^2+2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-3 - \frac{2}{n^2}}{1 + \sqrt{1 + \frac{3}{n^2} + \frac{2}{n^4}}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(-3 - \frac{2}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{3}{n^2} + \frac{2}{n^4}}\right)} = \frac{-3}{2}$$

d)

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} n \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{42}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n \cdot \left(1 - \sum_{k=0}^{42} \binom{42}{k} \cdot 1^{42-0} \cdot \left(-\frac{1}{n}\right)^{k}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n \cdot \left(1 - \left(1 - \binom{42}{1} \cdot \frac{1}{n} + \sum_{k=2}^{42} \binom{42}{k} \left(-\frac{1}{n}\right)^{k}\right)\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n \cdot \left(\binom{42}{1} \cdot \frac{1}{n} - \sum_{k=2}^{42} \binom{42}{k} \left(-\frac{1}{n}\right)^{k}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \binom{42}{1} - n \cdot \sum_{k=2}^{42} \binom{42}{k} \left(-\frac{1}{n}\right)^{k} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \binom{42}{1} + \sum_{k=2}^{42} \binom{42}{k} \left(-\frac{1}{n}\right)^{k} \cdot (-n) =$$

$$= \binom{42}{1} + \sum_{k=2}^{42} \underbrace{\lim_{n\to\infty} \binom{42}{k} \left(-\frac{1}{n}\right)^{k-1}}_{=0} = 42$$

e) Für alle $n \in \mathbb{N}$ so dass

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} = \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{n} \geq 2^n$$

damit ist die Folge $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ also mindestens so groß wie eine divergente und immer positive geometrische Folge und ist damit selbst divergent.

f)

$$\underbrace{\sqrt[n]{\sqrt[n]{1}}}_{=:a_n} \leq \underbrace{\sqrt[n]{\sqrt[n]{n!}}}_{=:f_n} \leq \underbrace{\sqrt[n]{\sqrt[n]{n^n}}}_{=:c_n}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt[n]{1}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt[n]{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

Damit gilt nach dem Sandwich-Theorem

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt[n]{n!}} = 1$$

Lösung zu Aufgabe Ü3.3.

a) Wir beweisen, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $\sqrt{x_0}$ nach unten beschränkt ist durch vollständige Induktion.

(IA) $n = 1\ \ a_1 > \sqrt{x_0}$ gemäß Definition der Folge

(IS) z.z. $\underbrace{a_n > \sqrt{x_0}}_{=(\text{IV})} \quad \Rightarrow \quad a_{n+1} > \sqrt{x_0}$

Variante 1:

$$\begin{aligned} & a_{n+1} > \sqrt{x_0} \\ \Leftrightarrow\quad & \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x_0}{a_n}\right) > \sqrt{x_0} \\ \Leftrightarrow\quad & a_n + \frac{x_0}{a_n} > 2\sqrt{x_0} \\ \Leftrightarrow\quad & a_n^2 + x_0 > 2\sqrt{x_0} \cdot a_n \\ \Leftrightarrow\quad & a_n^2 - 2\sqrt{x_0} \cdot a_n + x_0 > 0 \\ \Leftrightarrow\quad & \Big(\underbrace{a_n - \sqrt{x_0}}_{>0}\Big)^2 > 0 \end{aligned}$$

Variante 2:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x_0}{a_n}\right) > \sqrt{a_n \cdot \frac{x_0}{a_n}} = \sqrt{x_0}$$

Ungleichung zwischen geometrischem und arithmetischem Mittel (echte Ungleichung, da $a_n \neq \frac{x_0}{a_n}$ nach (IV)).

Variante 3:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x_0}{a_n}\right) = \frac{1}{2a_n} \cdot \left({a_n}^2 + x_0\right) \\ &= \frac{1}{2a_n} \cdot \left({a_n}^2 - 2a_n\sqrt{x_0} + x_0 + 2a_n\sqrt{x_0}\right) \\ &= \frac{1}{\underbrace{2a_n}_{\substack{>0 \\ \text{nach (IV)}}}} \underbrace{\left(a_n - \sqrt{x_0}\right)^2}_{\substack{>0 \\ \text{nach (IV)}}} + \sqrt{x_0} > \sqrt{x_0} \end{aligned}$$

b) Wir zeigen, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist.

Variante 1: Induktion

Induktionsanfang=(IA) $n = 1$

$$
\begin{aligned}
& a_2 < a_1 \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{1}{2}\cdot\left(a_1 + \frac{x_0}{a_1}\right) < a_1 \\
\Leftrightarrow\quad & a_1 + \frac{x_0}{a_1} < 2a_1 \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{x_0}{a_1} < a_1 \\
\Leftrightarrow\quad & x_0 < {a_1}^2 \\
\Leftrightarrow\quad & \sqrt{x_0} < a_1 \qquad \checkmark
\end{aligned}
$$

Induktionsanfang=(IA) $n = 1$

$$
\begin{aligned}
& a_{n+2} < a_{n+1} \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{1}{2}\cdot\left(a_{n+1} + \frac{x_0}{a_{n+1}}\right) < \frac{1}{2}\cdot\left(a_n + \frac{x_0}{a_n}\right) \\
\Leftrightarrow\quad & \left(a_{n+1} + \frac{x_0}{a_{n+1}}\right) < \left(a_n + \frac{x_0}{a_n}\right) \\
\Leftrightarrow\quad & a_{n+1}^2 \cdot a_n + x_0 \cdot a_n \\
& \qquad < a_n^2 \cdot a_{n+1} + x_0 \cdot a_{n+1} \\
& a_{n+1}^2 \cdot a_n - x_0 \cdot a_{n+1} \\
& \qquad < a_n^2 \cdot a_{n+1} - x_0 \cdot a_n \\
& a_{n+1} \cdot \underbrace{(a_n \cdot a_{n+1} - x_0)}_{>0} \\
& \qquad < a_n \underbrace{(a_n \cdot a_{n+1} - x_0)}_{>0} \\
\Leftrightarrow\quad & a_{n+1} < a_n
\end{aligned}
$$

Variante 2: Abschätzung

Nach a) ist die Folge durch $\sqrt{x_0} > 0$ nach unten beschränkt und für $n \in \mathbb{N}$ ist

$$
a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}\cdot\left(a_n + \frac{x_0}{a_n}\right) - a_n = \frac{x_0 - a_n^2}{2a_n} = \frac{\overbrace{\sqrt{x_0} - a_n}^{<0\text{ (nach a)}} \cdot \overbrace{\sqrt{x_0} + a_n}^{>0\text{ (nach a)}}}{2a_n} < 0
$$

Somit ist die Folge (sogar streng) monoton fallend.

c) Die Folge konvergiert nach dem „hinreichenden Konvergenzkriterium" für folgen (Satz 2.6ii) gegen einen Grenzwert a.
Wegen $\lim_{n\to\infty} a_n = a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$ muss gelten

$$
\begin{aligned}
& & a &= \frac{1}{2}\cdot\left(a+\frac{x_0}{a}\right)\\
&\Leftrightarrow & 2a &= a+\frac{x_0}{a}\\
&\Leftrightarrow & a &= \frac{x_0}{a}\\
&\Leftrightarrow & a^2 &= x_0\\
&\overset{a>0}{\Leftrightarrow} & a &= \sqrt{x_0}
\end{aligned}
$$

Also ist $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{x_0}$.

Lösung zu Aufgabe Ü3.4

a) Gesamtfördermenge = (Anzahl Jahre) · (Fördermenge/Jahr)

$\Leftrightarrow$ $13 \cdot 10^9$ Tonnen = (Anzahl Jahre) · $0{,}25 \cdot 10^9$ Tonnen/Jahr

$\Leftrightarrow$ Anzahl Jahre = $\frac{13 \cdot 10^9 \text{ Tonnen}}{0{,}25 \cdot 10^9 \text{ Tonnen/Jahr}}$ = 52 Jahre

b) Fördermenge im 0. Jahr (1999) $:= u = 0{,}25 \cdot 10^9$
Fördermenge im 1. Jahr (2000) $= u \cdot (0{,}98)$
Fördermenge im 2. Jahr (2001) $= u \cdot (0{,}98)^2$
Fördermenge im 3. Jahr
$\vdots$
Fördermenge in n Jahren $= u \cdot (0{,}98)^2$

$$u + u\cdot(0{,}98) + u\cdot(0{,}98)^2 + \ \dots + u\cdot(0{,}98)^n =$$

$$= u \cdot \sum_{k=0}^{n} (0{,}98)^k$$

$$= u\cdot\frac{1-(0{,}98)^{n+1}}{1-0{,}98} = u\cdot\frac{1-(0{,}98)^{n+1}}{0{,}02}$$

$$= 50\cdot u\cdot(1-(0{,}98)^{n+1})$$

$$= 12{,}5\cdot 10^9 \cdot \underbrace{(1-(0{,}98)^{n+1})}_{\le 1} \le 12{,}5\cdot 10^9 < 13\cdot 10^9$$

Auf diese Weise werden sich die Ölvorkommen nie erschöpfen.