7. Übungsblatt zur Mathematik 2 – Lösung

Lösung zu Aufgabe Ü7.1

a) Da $f'(x) = 3 \cdot x^2 + 2 > 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \implies f$ streng monoton wachsend und damit injektiv.

Da $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty \implies f$ surjektiv.

b) Gebraucht wird $f^{-1}(2)$.

Die Information dafür bekommen wir aus $f(x) = 2$

Wir müssen also zunächst die Gleichung $x^3 + 2x - 1 = 2$ lösen:
Die Lösung können wir nicht berechnen, nur erraten: $x = 1$

Daher wissen wir: $\quad f(1) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(2) = 1$

Nach dem Satz von der Umkehrfunktion gilt:

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(f^{-1}(2))} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{3 \cdot 1^2 + 2} = \frac{1}{5}$$

c) Hier müssen wir zunächst die richtige Formel herleiten. Das kann man beispielsweise tun, indem man die Formel aus dem Satz von der Umkehrfunktion ableitet.

$$(f^{-1})''(y) = \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{f'(f^{-1}(y))}\right)$$

$$= \frac{0 - 1 \cdot f''(f^{-1}(y)) \cdot \left((f^{-1})'(y)\right)}{\left(f'\left(f^{-1}(y)\right)\right)^2}$$

Und nun noch für die erste Ableitung von f^{-1} die Formel aus dem Satz von der Umkehrfunktion einsetzen

$$(f^{-1})''^{(y)} = -\frac{f''\left(f^{-1}(y)\right)}{\left(f'\left(f^{-1}(y)\right)\right)^3}$$

Um dies nun an der Stelle $y = 2$ auswerten zu können, brauchen wir noch die zweite Ableitung der Funktion f, also $f''(x) = 6x$ und erhalten

$$(f^{-1})''(2) = -\frac{f''^{\left(f^{-1}(2)\right)}}{\left(f'^{(f^{-1}(2))}\right)^3} = -\frac{f''(1)}{(f'^{(1)})^3} = -\frac{6}{5^3} = -\frac{6}{125}$$