Ostbayerische Technische Hochschule Regensburg
Studiengang IN, IT
R. Wörle, Dr. G. Tapken

10. Übungsblatt zur Mathematik 2 – Lösungen

Lösung Ü10.1

a)

$$f(10) \coloneqq -\frac{1}{250}10^3 + \frac{1}{10}10^2 = -4 + 10 = 6$$

b)

$$
\begin{aligned}
& f(t) \stackrel{\text{def}}{=} 0 \\
\Leftrightarrow\quad & -\frac{1}{250}t^3 + \frac{1}{10}t^2 = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & t^2\left(-\frac{1}{250}t + \frac{1}{10}\right) = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & -\frac{1}{250}t + \frac{1}{10} = 0 \quad \vee \quad t = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{1}{10} = \frac{1}{250}t \quad \vee \quad t = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{250}{10} = t \quad \vee \quad t = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & t = 25 \quad \vee \quad t = 0
\end{aligned}
$$

D.h. die obige Funktion beschreibt die Anzahl der Erkrankten im Intervall $[0; 25]$.

c)

$$f'(t) = -\frac{3}{250}\cdot t^2 + \frac{2}{10}\cdot t$$

$$
\begin{aligned}
& f'(t) \stackrel{\text{def}}{=} 0 \\
\Leftrightarrow\quad & -\frac{3}{250}\cdot t^2 + \frac{2}{10}\cdot t = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & t\cdot\left(-\frac{3}{250}\cdot t + \frac{2}{10}\right) = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & -\frac{3}{250}\cdot t + \frac{2}{10} = 0 \quad \vee \quad t = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{2}{10} = \frac{3}{250}\cdot t \quad \vee \quad t = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{2\cdot 250}{10\cdot 3} = \frac{3}{250}\cdot t \quad \vee \quad t = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & t = \frac{50}{3} \quad \vee \quad t = 0
\end{aligned}
$$

D.h. in $t = 0$ bzw. $t = \frac{50}{3}$ sind kritische Punkte. Damit könnte die maximale Anzahl der Erkrankten in $t = 0, t = \frac{50}{3}$ bzw. $t = 25$ (also in den kritischen Punkten bzw. in den Randpunkten) erreicht werden.
Da wir die Funktionswerte in $t = 0$ und $t = 25$ in der Teilaufgabe b) bereits als 0 bestimmt haben, reicht es zu zeigen, dass in $t = \frac{50}{3}$ die Anzahl positiv ist, um dort das globale Maximum gefunden zu haben.

$$f\left(\frac{50}{3}\right) =:= -\frac{1}{250}\left(\frac{50}{3}\right)^3 + \frac{1}{10}\left(\frac{50}{3}\right)^2$$
$$= \frac{5^3 \cdot 10^3}{250 \cdot 27} + \frac{5^2 \cdot 10^2}{90} = \frac{-500 + 750}{27} = \frac{250}{27} > 0$$

Prinzipiell könnte man auch anders überprüfen, ob in $t = \frac{50}{3}$ das globale Maximum liegt (z.B. über die 2. Ableitung), da wir den Funktionswert aber ohnehin haben wollen, wäre das hier nicht sinnvoll.
Die maximale Anzahl der Erkrankten wird bei $t = \frac{50}{3} \approx 16{,}7$ Tage mit einer Anzahl von $\frac{250}{27} \approx 9{,}26$ Personen erreicht.

c) Die größte Änderung der Anzahl, also die Suche nach dem t, das ein Maximum von $|f'|$ liefert.

$$f''(t) = -\frac{6}{250} \cdot t + \frac{2}{10}$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \quad & f''(t) \stackrel{\text{def}}{=} 0 \\
\Leftrightarrow \quad & -\frac{6}{250} \cdot t + \frac{2}{10} = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{2}{10} = \frac{6}{250} \cdot t \\
\Leftrightarrow \quad & t = \frac{6 \cdot 10}{250 \cdot 2} = \frac{25}{3}
\end{aligned}$$

Damit ist in $\frac{25}{3}$ die einzige kritische Stelle. Das betragsmäßige Maximum von f' kann also in dem Punkt oder in einem der beiden Randpunkte $t = 0$ bzw. $t = 25$ liegen. Da wir hier nicht wissen, ob wir ein Maximum oder ein Minimum suchen, ist der Weg über die Funktionswerte der einzig sinnvolle.

$$f'(0) = 0$$

$$f'\left(\frac{25}{3}\right) = -\frac{3}{250}\left(\frac{25}{3}\right)^2 + \frac{2}{10}\cdot\left(\frac{25}{3}\right)$$

$$= -\frac{25}{30} + \frac{5}{3} = \frac{-25+50}{25} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}$$

$$f'(25) = -\frac{3}{25}\cdot 25^2 + \frac{2}{10}\cdot 25 = \frac{-75+50}{10} = \frac{-25}{10} = -\frac{5}{2}$$

Da $\left|-\frac{5}{2}\right| = 2{,}5 > \frac{5}{6}$ ist die größte Änderung am letzten Tag $(t = 25)$ der Epidemie.

Lösung zu Ü10.2

Die Gerade hat die Gleichung $y = m\cdot x + t$, wobei wir durch den Punkt $P_0(3|2)$, durch den die Gerade verlaufen soll, einen Zusammenhang zwischen den vorkommenden Variablen finden können.

$$2 = 3\cdot m + t \quad \Leftrightarrow \quad t = 2 - 3m \quad \Leftrightarrow \quad m = \frac{2-t}{3}$$

Die y-Koordinate des Punktes $P_2(0|y)$ ist $y = m\cdot 0 + t = t = 2 - 3m$.
Nun brauchen wir noch die x–Koordinate des Punktes $P_1(x|0)$.

$$\begin{aligned} & 0 = m\cdot x + t \\ \Leftrightarrow \quad & 0 = m\cdot x + (2 - 3m) \\ \Leftrightarrow \quad & 3m - 2 = m\cdot x \\ \Leftrightarrow \quad & 3 - \frac{2}{m} = x \end{aligned}$$

Geben Sie hier eine Formel ein.damit ergibt sich die Funktion der Fläche:

$$A(m) = \frac{1}{2}\cdot(2-3m)\cdot\left(3 - \frac{2}{m}\right) = -\frac{2}{m} + 3 + 3 - \frac{9}{2}\cdot m$$

$$= -\frac{2}{m} + 6 - \frac{9}{2}\cdot m$$

Diese Funktion wollen wir nun minimieren:

$$A'(m) = \frac{2}{m^2} - \frac{9}{2}$$

$$A'(m) \stackrel{\text{def}}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{2}{m^2} - \frac{9}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{2}{m^2} = \frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{4}{9} = m^2$$

$$\Leftrightarrow \qquad m = \pm\frac{2}{3}$$

Da nach Angabe in der Aufgabenstellung $m < 0$ gelten muss, kommt nur $m = -\frac{2}{3}$ in Frage. Wir prüfen noch, ob in diesem Punkt wirklich das globale Minimum liegt:

$$A''(m) = -\frac{4}{m^3} > 0$$

da $m < 0$ gelten muss, ist die zweite Ableitung stets positiv, d.h. die Funktion hat positive Krümmung, d.h. die einzige Stelle mit horizontaler Tangente, also $m = -\frac{2}{3}$ ist der Ort des globalen Maximums. Der maximale Flächeninhalt für dieses m beträgt:

$$A\left(-\frac{2}{3}\right) = 12$$