11. Übungsblatt zur Mathematik 2 – Lösungen

Lösung zu Aufgabe Ü11.1

a)

$$\begin{aligned}
&\int \overbrace{t^2}^{\downarrow} \cdot \overbrace{e^t}^{\uparrow}\, dt \\
&= [t^2 \cdot e^t] - \int \overbrace{2t}^{\downarrow} \cdot \overbrace{e^t}^{\uparrow}\, dt \\
&= t^2 \cdot e^t - \left([2t \cdot e^t] - \int 2 \cdot e^t dt\right) \\
&= t^2 \cdot e^t - 2t \cdot e^t + 2 \cdot e^t + c \\
&= e^t \cdot (t^2 - 2t + 2) + c
\end{aligned}$$

b)

Zu bestimmen: $\int te^{t^2}\, dt$.

Substitution mit evidenter innerer Ableitung:

$$\int_a^t se^{s^2}\, ds = \frac{1}{2} \cdot \int_a^t \underbrace{2s}_{=g'(s)} \cdot e^{s^2} ds$$

es gilt $g(s) = s^2$ und $f(u) = e^u$, damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \cdot \int_{g(a)}^{g(t)} f(u) du = \frac{1}{2} \cdot \int_{a^2}^{t^2} e^u du \\
&= \frac{1}{2} \cdot [e^u]_{a^2}^{t^2} = \frac{1}{2} \cdot \left(e^{t^2} - e^{a^2}\right)
\end{aligned}$$

damit ergibt sich :

$$\int te^{t^2}\, dt = \frac{1}{2} \cdot e^{t^2} + c$$

Substitution ohne evidente innere Ableitung:

$$u(s) \coloneqq s^2 \quad \Leftrightarrow \quad s(u) = \pm\sqrt{u} \quad \Rightarrow \quad \frac{ds}{du} = \pm\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{u}} \quad \Rightarrow \quad ds = \pm\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{u}} du$$

und erhalten:

$$\begin{aligned}
&\int_a^t se^{s^2} ds = \int_{u(a)}^{u(t)} \left(\pm\sqrt{u}\right) \cdot e^u \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{u}} du\right) \\
&= \int_{a^2}^{t^2} \frac{1}{2} e^u du = \left[\frac{1}{2} e^u\right]_{a^2}^{t^2} = \frac{1}{2} e^{t^2} - \frac{1}{2} e^{a^2}
\end{aligned}$$

damit ergibt sich:

$$\int te^{t^2}dt = \frac{1}{2}\cdot e^{t^2} + c$$

Lösung zu Aufgabe Ü11.2

a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom 2. Ordnung mit Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ für

$$f(x) = \frac{x}{x+3}$$

$$f(x) = \frac{x}{x+3} \qquad f(1) = \frac{1}{4}$$

$$f'(x) = \frac{x+3-x}{(x+3)^2} = \frac{3}{(x+2)^2} \qquad f'(1) = \frac{3}{16}$$

$$f''(x) = \frac{-3\cdot 2\cdot (x+3)}{(x+3)^4} = -\frac{6}{(x+3)^3} \qquad f''(1) = -\frac{6}{64} = -\frac{3}{32}$$

$$T_2(f(x), x_0, x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{1}{2}\cdot f''(x_0)\cdot(x-x_0)^2$$

$$T_2(f(x),1,x) = f(1) + f'(1)\cdot(x-1) + \frac{1}{2}\cdot f''(1)\cdot(x-1)^2$$

$$T_2(f(x),1,x) = \frac{1}{4} + \frac{3}{16}\cdot(x-1) + \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{32}\right)\cdot(x-1)^2$$

$$T_2(f(x),1,x) = \frac{1}{4} + \frac{3}{16}x - \frac{3}{16} - \frac{3}{64}\cdot(x^2-2x+1)$$

$$T_2(f(x),1,x) = \frac{1}{4} + \frac{3}{16}x - \frac{3}{16} - \frac{3}{64}\cdot x^2 + \frac{3}{32}x - \frac{3}{64}$$

$$T_2(f(x),1,x) = -\frac{3}{64}x^2 + \frac{9}{32}x + \frac{1}{64}$$

Das ist eine nach unten geöffnete Parabel, also ein Polynom 2. Ordnung; die Parabel ist gestreckt (Faktor $\frac{3}{64}$) und schmiegt sich im Bereich um $x_0 = 1$ an die gebrochen-rationale Funktion an.

Geben Sie die Ableitung des Integrals an: $\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt$

$$\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{\sin(t)}{t}dt = \frac{d}{dx}\int_0^x g(t)\,dt = \frac{d}{dx}\int_0^x G'(t)\,dt =$$

$$= \frac{d}{dx}[G(t)]_0^x = \frac{d}{dx}\big(G(x)-G(0)\big) =$$

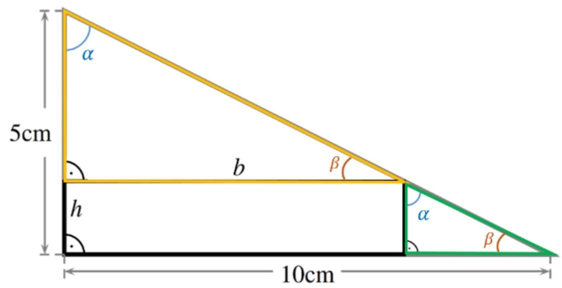
$$= \frac{d}{dx}(G(x)) - \frac{d}{dx}\underbrace{\big(G(0)\big)}_{konst.} = g(x) - 0 = g(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

Lösung zu Aufgabe Ü11.3

Gesucht ist die Fläche eines Rechtecks mit den Seitenlängen h und b. b kann nicht länger als 10cm und h nicht länger als 5cm sein.
Wir müssen nun eine Gleichung für die Fläche A aufstellen, in der nur eine Variable (h, b, x) vorkommen darf.

Einerseits wissen wir für die Rechteckfläche gilt $A = h \cdot b$.
Eine der beiden Variablen müssen wir eliminieren; dafür brauchen wir einen Zusammenhang zwischen den beiden Werten, der durch die Geometrie im gegebenen Dreieck beschrieben wird (wenn b länger wird, wird h kleiner und umgedreht). Dafür gibt es verschiedene Möglichkeiten.

<u>Möglichkeit 1 (Zentrische Streckung):</u>
Durch das Rechteck wird das große graue Quadrat aufgeteilt in ein Rechteck, ein gelbes und ein grünes Dreieck. Die drei Dreiecke (grau, gelb und grün) haben die gleichen Winkel (α, β, rechter Winkel), sie unterscheiden sich jedoch in den Seitenlängen; die drei Dreiecke sind kongruent.
Für kongruente Dreiecke gilt, dass die Seitenverhältnisse gleich bleiben.



Z.B. kann man diese Seiten vergleichen:

$$\frac{kleine\ Kathete}{Hypotenuse} = \frac{kleine\ Kathete}{Hypotenuse} = \frac{kleine\ Kathete}{Hypotenuse}$$ oder

$$\frac{große\ Kathete}{Hypotenuse} = \frac{große\ Kathete}{Hypotenuse} = \frac{große\ Kathete}{Hypotenuse}$$ oder

$$\frac{kleine\ Kathete}{große\ Kathete} = \frac{kleine\ Kathete}{große\ Kathete} = \frac{kleine\ Kathete}{große\ Kathete}$$ oder

$$\frac{kleine\ Kathete}{kleine\ Kathete} = \frac{große\ Kathete}{große\ Kathete}$$ oder
...

Da wir keine Information über die Hypotenusen haben, wird für uns die letzte Zeile interessant sein, denn wir wissen:

$$kleine\ Kathete = 5 - h \qquad kleine\ Kathete = 5$$
$$große\ Kathete = b \qquad große\ Kathete = 10$$

Damit ergibt sich

$$\frac{kleine\ Kathete}{kleine\ Kathete} = \frac{große\ Kathete}{große\ Kathete}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{5}{5-h} = \frac{10}{b} \qquad |:5$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{5-h} = \frac{2}{b} \qquad |\cdot b$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{b}{5-h} = 2 \qquad |\cdot(5-h)$$

$$\Leftrightarrow \quad b = 2(5-h)$$

$$\Leftrightarrow \quad b = 10-2h$$

Wir können jetzt b durch h ausdrücken und können diesen Ausdruck für b in die Gleichung von A einsetzen und so den Flächeninhalt, nur abhängig von h schreiben:

$$A = h \cdot b$$

$$\Leftrightarrow \quad A(h) = h \cdot (10-2h)$$

$$\Leftrightarrow \quad A(h) = 10h - 2h^2$$

(Selbstverständlich kann man auch den Zusammenhang anderer Seitenverhältnisse verwenden)

<u>Möglichkeit 2 (kongruente Dreiecke, gleiche Winkel):</u>

Der Winkel β kann durch den Tangens ausgedrückt werden: $\tan\beta = \frac{Ankathete}{Gegenkathete}$

$$\tan\beta = \frac{b}{5-h} \qquad \tan\beta = \frac{10}{5}$$

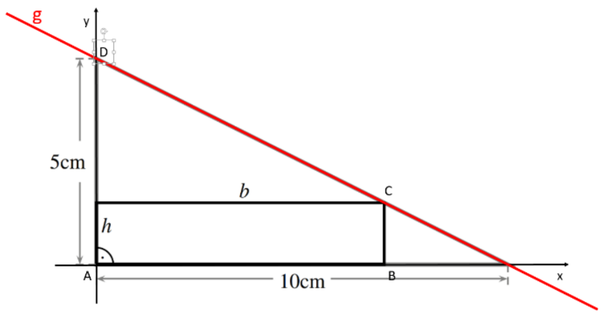
$$\Rightarrow \quad \frac{b}{5-h} = \frac{10}{5}$$

$$\Leftrightarrow \quad b = 2(5-h)$$

$$\Leftrightarrow \quad b = 10-2h$$

Weiter wie oben.

<u>Möglichkeit 3 (Geradengleichung g):</u>



Wir setzen das Dreieck in ein Koordinatensystem. Der Punkt A liegt im Ursprung, B auf der x-Achse. Wir definieren eine Gerade g, die auf der Hypotenuse des Dreiecks liegt. Mit Hilfe der einfachen Geradengleichung $y = mx + t$ kann die Gleichung der Geraden aufgestellt werden:

$$y = mx + t$$

$$\text{g(x):} \quad y = -\tfrac{5}{10}x + 5$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 5$$

mit $b = x$ und $h = g(x) \Rightarrow$ $h = -\frac{1}{2}b + 5$

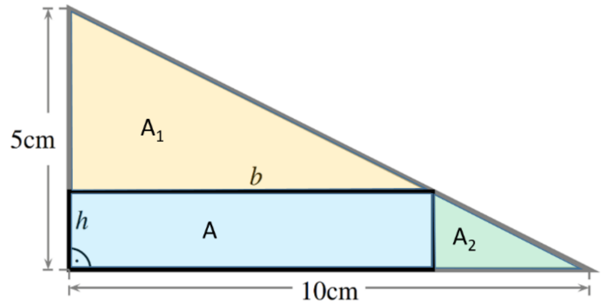
$$A(x) = x \cdot \left(-\frac{1}{2}x + 5\right)$$

$$A(x) = \frac{1}{2}x^2 + 5x$$

(Entsprechend kann der Term bei den ersten beiden Möglichkeiten aussehen, wenn A in Abhängigkeit von b angegeben wird, als $A(b)$.)

<u>Möglichkeit 4 (Summe der Teilflächen):</u>

Durch das einbeschriebene (blaue) Rechteck wird das Dreieck in drei Teilflächen unterteilt:
das gesuchte Rechteck mit der Fläche A, zwei Dreiecke mit den Flächen A_1 und A_2.
Das ursprüngliche Dreieck hat die Fläche



$$A_0 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10 = 25$$

bzw.

$$A_0 = A + A_1 + A_2$$

$$\Rightarrow \quad 25 = b \cdot h + \frac{1}{2} \cdot (5 - h) \cdot b + \frac{1}{2} \cdot h \cdot (10 - b)$$

$$\Leftrightarrow \quad 25 = b \cdot h + \frac{5}{2} b - \frac{1}{2} hb + \frac{10}{2} h - \frac{1}{2} bh$$

$$\Leftrightarrow \quad 25 = \frac{5}{2} b + 5h$$

$$\Leftrightarrow \quad b = 2 \cdot \frac{25 - 5h}{5} = 2 \cdot (5 - h)$$

$$\Leftrightarrow \quad b = 10 - 2h$$

Damit ergibt sich $A(h) = 10h - 2h^2$ (oder $A(b) = -\frac{1}{2}b^2 + 5b$ oder $A(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 5x$).

Die Definitionsmenge haben wir uns bereits am Anfang überlegt; sie wird für die Variable angegeben, von der der Flächeninhalt abhängt:

$\mathbb{D} = [0; 5]$ wenn die entsprechende Variable h ist, für die Variablen b oder x gilt $\mathbb{D} = [0; 10]$.

Wir sollen das Rechteck mit der größtmöglichen Fläche berechnen; wir brauchen also ein Maximum; und dafür die Ableitungen der Fläche:

$$A(h) = 10h - 2h^2 \qquad \text{bzw.} \qquad A(b) = -\frac{1}{2}b^2 + 5b$$

$$A'(h) = 10 - 4h \qquad\qquad A'(b) = -b + 5$$

$$A''(h) = -4 < 0 \qquad\qquad A''(b) = -1 < 0$$

In beiden Fällen ist die zweite Ableitung negativ, unabhängig von der Variable b oder h. Damit können wir an diesen Stellen von einem lokalen oder gar einem globalen Maximum ausgehen. Die erste Ableitung ist jeweils eine Gerade; sie hat eine konstante Steigung, die sich nie ändert. Damit kann es sich nur um ein globales Maximum handeln.
Wäre es nur ein lokales Maximum, dann könnte das Globale nur an den Rändern liegen. Deshalb werden wir auch die Ränder untersuchen.

Zunächst jedoch muss die Stelle des Maximums berechnet werden. Das ist dort, wo die erste Ableitung den Wert 0 annimmt:

$$A'(h) \stackrel{\text{def}}{=} 0 \qquad \text{bzw.} \qquad A'(b) \stackrel{\text{def}}{=} 0$$
$$10 - 4h = 0 \qquad -b + 5 = 0$$
$$4h = 10 \qquad b = 5$$
$$h = 2{,}5$$

$$A(0) = 10 \cdot 0 - 2 \cdot 0^2 = 0$$

$$A(2{,}5) = 10 \cdot 2{,}5 - 2 \cdot 2{,}5$$
$$= 25 - 2 \cdot 6{,}25 = 12{,}5$$

$$A(5) = 10 \cdot 5 - 2 \cdot 5^2 = 50 - 2 \cdot 25 = 0$$

$$A(0) = -\frac{1}{2} \cdot 0^2 + 5 \cdot 0$$

$$A(5) = -\frac{1}{2} \cdot 5^2 + 5 \cdot 5 = -\frac{1}{2} \cdot 25 + 25$$
$$= 12{,}5$$

$$A(10) = -\frac{1}{2} \cdot 10^2 + 5 \cdot 10$$
$$= -50 + 50 = 0$$

Das Maximum liegt also tatsächlich an den berechneten Stellen; es ist ein globales Maximum.

Es fehlt noch die jeweils andere Variable:

$$b = 10 - 2h \qquad h = -\frac{1}{2}b + 5$$

$$b = 10 - 2 \cdot 2{,}5 \qquad h = -\frac{1}{2} \cdot 5 + 5$$

$$b = 5 \qquad h = 2{,}5$$

Die Fläche des Rechtecks wird maximal für $h = 2{,}5cm$ und $b = 5cm$. Die Fläche des Rechtecks beträgt dabei
$A = 12{,}5cm^2$. (Dieses Ergebnis ist für alle Rechenwege gleich.)