Ostbayerische Technische Hochschule Regensburg WS 2023/24
Studiengang IN, IT
R. Wörle, Dr. G. Tapken

6. Übungsblatt zur Mathematik 2 – Lösungen

Lösung zu Aufgabe Ü6.1

$$f(x) = \begin{cases} x-2 & \text{für } x < 2 \\ \dfrac{(x-1)^2}{2} - \dfrac{1}{2} & \text{für } x \geq 2 \end{cases}$$

Zunächst müssen wir untersuchen, ob die Funktion $f(x)$ in $x_0 = 2$ stetig ist (beide Funktionen sind in sich stetig auf ganz $\mathbb{R}$):

Der linksseitige Grenzwert:

$$\lim_{x \nearrow 2}(x-2) = \lim_{\varepsilon \searrow 0}\left(\underbrace{2-\varepsilon}_{x \nearrow x_0} - 2\right) = \lim_{\varepsilon \searrow 0}(-\varepsilon) = 0$$

der rechtseitige Grenzwert:

$$\lim_{x \searrow 2}\left(\frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \lim_{\varepsilon \searrow 0}\left(\left(\underbrace{2+\varepsilon}_{x \searrow x_0} - 1\right)^2 - 1\right) = \frac{1}{2} \cdot \lim_{\varepsilon \searrow 0}((1+\varepsilon)^2 - 1) = \frac{1}{2} \cdot (1-1) = 0$$

Der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert stimmen überein. Die Funktion ist auf ganz $\mathbb{R}$ stetig. Das ist eine Voraussetzung für Differenzierbarkeit.

Dann untersuchen wir die Funktion $f(x)$ in $x_0 = 2$ auf Differenzierbarkeit (beide Funktionen sind in sich differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}$):

Wir berechnen die Steigung der Funktion für $x < 2$, also links von x_0:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x_0+h-2) - (x_0-2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x_0+h-2-x_0+2}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1$$

Die Steigung der Funktion $f(x) = x - 2$ ist 1, an jeder Stelle ihres Definitionsbereichs, unabhängig von x_0.

Wir berechnen die Steigung der Funktion für $x > 2$, also rechts von x_0:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} =$$

Funktion einsetzen

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\left(\frac{(x_0+h-1)^2}{2}-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{(x_0-1)^2}{2}-\frac{1}{2}\right)}{h} =$$

Faktor $\frac{1}{2}$ ausklammern

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{2}\cdot((x_0+h-1)^2-1)-\frac{1}{2}\cdot((x_0-1)^2-1)}{h}$$

Faktor $\frac{1}{2}$ ausklammern und den Grenzwert ziehen, Klammern auflösen

$$= \frac{1}{2}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{(x_0+h-1)^2-1-(x_0-1)^2+1}{h} =$$

Summanden gruppieren un binomische Formel zu erhalten

$$= \frac{1}{2}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\left((x_0-1)+h\right)^2-(x_0-1)^2}{h} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{(x_0-1)^2+2h(x_0-1)+h^2-(x_0-1)^2}{h}$$

Binomische Formel lösen m $(x_0-1)^2$ als ein Summand

$$= \frac{1}{2}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{2h(x_0-1)+h^2}{h} =$$

Gleiches subtrahieren

$$= \frac{1}{2}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{2(x_0-1)+h}{1} =$$

h im Zähler ausklammern u kürzen

$$= \frac{1}{2}\cdot\lim_{h\to 0}(2(x_0-1)+h) =$$

der Summand h geht gegen

$$= \frac{1}{2}\cdot 2(x_0-1)$$

$$f'(x_0) = x_0-1$$

wir interessieren uns für die Stelle $x_0 = 2$

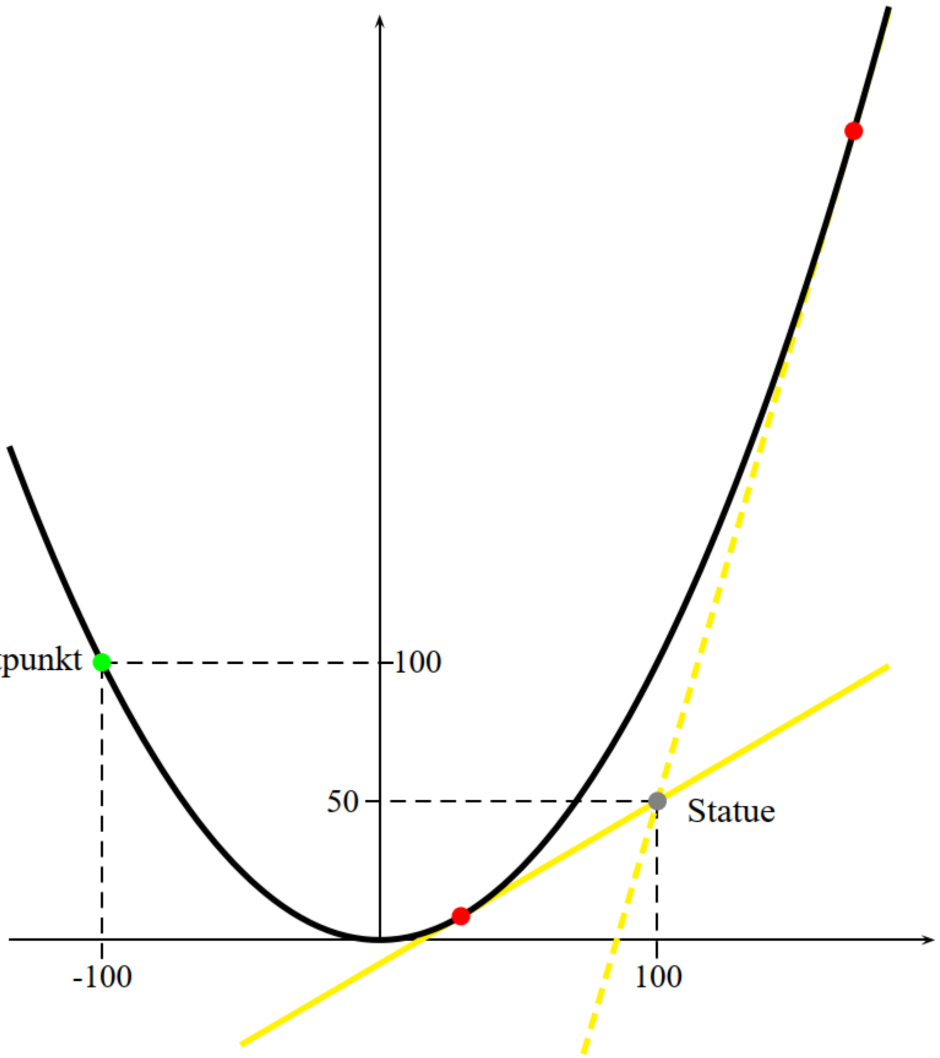
$$f'(2) = 2-1 = 1$$

Die Steigung der Funktion $f(x) = \frac{(x-1)^2}{2}-\frac{1}{2}$ ist x_0-1, also an jeder Stelle abhängig von x_0.
An der Stelle $x_0 = 2$ beträgt die Steigung 1.

Damit hat die Tangente von links und von rechts an der Stelle $x_0 = 2$ die gleiche Steigung.

Damit ist die Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar.
(„Die Funktion kann durchgezeichnet werden und hat keinen Knick.“)

Lösung zu Aufgabe Ü6.2



Eine Parabel hat die Form

$$p(x) = a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

Für die hier gegebene Parabel gilt:

(1)	$p(0) = 0$	da $(0\|0)$ der Scheitel und damit auf alle Fälle auch ein Punkt auf der Parabel ist
(2)	$p(-100) = 100$	da $(-100\|100)$ ein Punkt auf der Parabel ist
(3)	$p'(0) = 0$	da in $(0\|0)$ der Scheitel ist

Durch (1) – (3) haben wir also drei Gleichungen gegeben und wir suchen die 3 Variablen a_0, a_1, a_2.

Aus (1) folgt $p(0) = a_2 \cdot 0^2 + a_1 \cdot 0 + a_0 = a_0 = 0 \quad \Longrightarrow \quad a_0 = 0$
Aus (3) folgt $p'(0) = 2 \cdot a_2 \cdot 0 + a_1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad a_1 = 0$

Dies setzen wir nun in die (2) ein und erhalten:

$$p(-100) = a_2 \cdot (-100)^2 + a_1 \cdot (-100) + a_0 = a_2 \cdot (-100)^2 \overset{\text{def}}{=} 100 \quad \Longleftrightarrow \quad a_2 = \frac{1}{100}$$

Die Parabel hat also die Funktion $p(x) = \frac{1}{100} \cdot x^2$

Die Tangente an p im Punkt x_0 hat die Form:

$$\begin{aligned} t_{x_0}(x) &= p(x_0) + p'(x_0) \cdot (x - x_0) = a_2 \cdot x_0^2 + 2 \cdot a_2 \cdot x_0 \cdot (x - x_0) \\ &= a_2 \cdot x_0^2 + 2 \cdot a_2 \cdot x_0 \cdot x - 2 \cdot a_2 \cdot x_0^2 = 2 \cdot a_2 \cdot x_0 \cdot x - a_2 \cdot x_0^2 \end{aligned}$$

Wir suchen nun das x_0, für welches t_{x_0} durch den Punkt $(100|50)$ läuft, d.h.

$$\begin{aligned} & t_{x_0}(100) \stackrel{\text{def}}{=} 50 \\ \Leftrightarrow \quad & 2 \cdot a_2 \cdot x_0 \cdot 100 - a_2 \cdot x_0^2 = 50 \\ \Leftrightarrow \quad & -\frac{1}{100} \cdot x_0^2 + 2 \cdot x_0 - 50 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{1}{100} \cdot x_0^2 - 2 \cdot x_0 + 50 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (x_0)_{1|2} = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot \frac{1}{100} \cdot 50}}{2 \cdot \frac{1}{100}} \\ & = 100 \pm 100 \cdot \frac{\sqrt{4-2}}{\frac{1}{50}} \\ & = 100 \pm 50 \cdot \sqrt{2} = \begin{cases} 29{,}289 \\ 170{,}711 \end{cases} \end{aligned}$$

Da das Auto von Westen kommt (negative x-Achse) und die Scheinwerfer vorne am Auto sind, muss das Auto westlicher (kleinere x-Werte) sein, also die Statue x = 100 Meter, wenn diese von den Scheinwerfern erfasst werden. Damit ist die einzige Lösung für den Standpunkt des Autos $\left(29{,}3 \middle| p(29{,}3)\right) = (29{,}3|8{,}6)$ Meter.