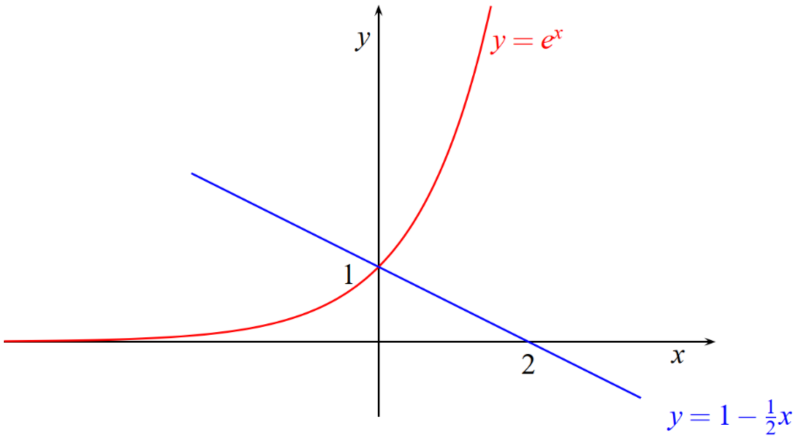
Ostbayerische Technische Hochschule Regensburg
Studiengang IN, IT
R. Wörle, Dr. G. Tapken

WS 2023/24

12. Übungsblatt zur Mathematik 2 – Lösungen

Lösung zu Aufgabe Ü12.1

Wir machen zunächst eine Skizze



Dann kann man sehen, dass wir die Fläche über zwei Integrale bestimmen müssen. Das erste Integral ist über dem Intervall $]-\infty; 0]$ und das zweite über dem Intervall $[0; 2]$.

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-\infty}^{0} e^x dx + \int_{0}^{2} \left(1 - \frac{1}{2} \cdot x\right) dx \\
&= \lim_{r \to -\infty} \int_{r}^{0} e^x dx + \int_{0}^{2} \left(1 - \frac{1}{2} \cdot x\right) dx \\
&= \lim_{r \to -\infty} [e^x]_r^0 + \left[x - \frac{1}{4}x^2\right]_0^2 \\
&= \lim_{r \to -\infty} (e^0 - e^r) + \left(2 - \frac{1}{4} \cdot 12^2\right) \\
&= (1 - 0) + (2 - 1) = 2
\end{aligned}
$$

Lösung zu Aufgabe Ü12.2

a) Berechnen Sie mit partieller Integration

$$\int x^2 \sin x \, dx$$

$$\int \underbrace{x^2}_{f(x)} \underbrace{\sin x}_{g'(x)} \, dx =$$

$$= x^2 \cdot (-\cos x) - \int 2x \cdot (-\cos x) \, dx =$$

$$= -x^2 \cos x + 2 \cdot \int x \cdot \cos x \, dx =$$

$$= -x^2 \cos x + 2 \cdot \int \underbrace{x}_{h(x)} \cdot \underbrace{\cos x}_{l'(x)} \, dx =$$

$$= -x^2 \cos x + 2\left(x \cdot \sin x - \int \sin x \, dx\right) =$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + c$$

Nebenrechnung:

$f(x) = x^2 \qquad g(x) = -\cos x$
$f'(x) = 2x \qquad g'(x) = \sin x$

$h(x) = x \qquad l(x) = \sin x$
$h'(x) = 1 \qquad l'(x) = \cos x$

oder:

$$\int_a^x t^2 \sin t \, dt$$

$$= \int_a^x \underbrace{t^2}_{f(t)} \cdot \underbrace{\sin t}_{g'(t)} \, dt =$$

$$= [-t^2 \cos t]_a^x - \int_a^x -2t \cdot \cos t \, dt =$$

$$= -x^2 \cos x - (-a^2 \cos a) + 2 \cdot \int_a^x \underbrace{t}_{h(t)} \cdot \underbrace{\cos t}_{l'(t)} \, dt =$$

$$= -x^2 \cos x + a^2 \cos a + 2 \cdot \left([t \cdot \sin t]_a^x - \int_a^x 1 \cdot \sin t \, dt\right) =$$

$$= -x^2 \cos x + a^2 \cos a + 2 \cdot (x \cdot \sin x - a \cdot \sin a) - [-\cos t]_a^x =$$

$$= -x^2 \cos x + \underbrace{a^2 \cos a}_{kost.} + 2x \sin x - \underbrace{2a \sin a}_{konst.} + \cos x - \underbrace{\cos a}_{konst.} =$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + \cos x + c$$

Nebenrechnung:

$f(t) = t^2 \qquad g(t) = -\cos t$
$f'(t) = 2t \qquad g'(t) = \sin t$

$h(t) = t \qquad l(t) = \sin t$
$h'(t) = 1 \qquad l'(t) = \cos t$

b) Berechnen Sie mit Hilfe der Substitution

$$\int (\sin x)^2 \cdot \cos x \, dx$$

$$\int \Big(\underbrace{\sin x}_{g(x)}\Big)^2 \cdot \underbrace{\cos x}_{g'(x)} \, dx =$$

$$= \int t^2 \, dt =$$

$$= \frac{1}{3} t^3 + c =$$

$$= \frac{1}{3} (\sin x)^3 + c$$

oder:

$$\int (\sin x)^2 \cdot \cos x \, dx =$$

$$= \int u^2 \, du =$$

$$= \frac{1}{3} u^3 + c =$$

$$= \frac{1}{3} (\sin x)^3 + c$$

Nebenrechnung:

$$u = \sin x$$

$$\frac{du}{dx} = \cos x$$

$$du = \cos x \, dx$$

c) Berechnen Sie das Integral

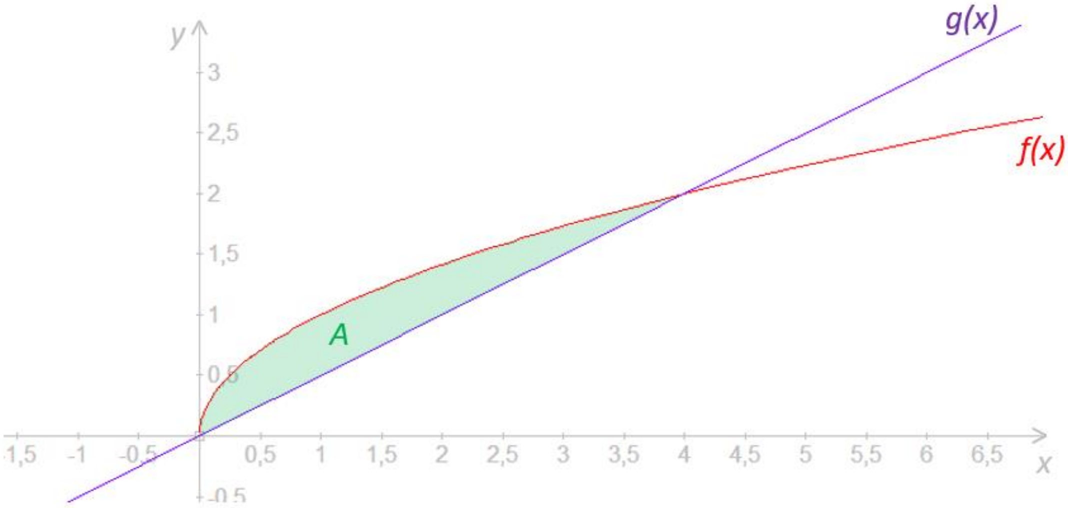
$$\int_0^\infty e^{-x} \, dx$$

$$\lim_{R \to \infty} \int_0^R e^{-x} \, dx = \lim_{R \to \infty} [-e^{-x}] \begin{matrix} R \\ 0 \end{matrix} = \lim_{R \to \infty} (-e^{-R} + e^0) = 0 + 1 = 1$$

Lösung zu Aufgabe Ü12.3

Eine Fläche A wird von den Funktionen $f(x) = \sqrt{x}$ und $g(x) = \frac{1}{2}x$ eingeschlossen.

a) Zeichnen Sie die beiden Funktionen in ein Koordinatensystem und markieren Sie die Fläche A.



b) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche A.

Zunächst müssen wir die Schnittpunkte der beiden Kurven berechnen, damit wir die Integralgrenzen der gesuchten Fläche bekommen:

$$f(x) = g(x) \qquad \sqrt{x} = \frac{1}{2}x \qquad |\,^2$$

$$x = \frac{1}{4}x^2$$

$$0 = \frac{1}{4}x^2 - x \qquad |\cdot 4$$

$$0 = x^2 - 4x$$

$$0 = x(x-4)$$

$$\Rightarrow \qquad x_1 = 0 \qquad x_2 = 4$$

Die gesuchte Fläche wird mit Hilfe des Integrals gelöst; dabei ist $f(x)$ die „obere“ und $g(x)$ die „untere“ Funktion.

$$A = \int_0^4 f(x) - g(x)\,dx$$

$$A = \int_0^4 \sqrt{x} - \frac{1}{2}x \, dx$$

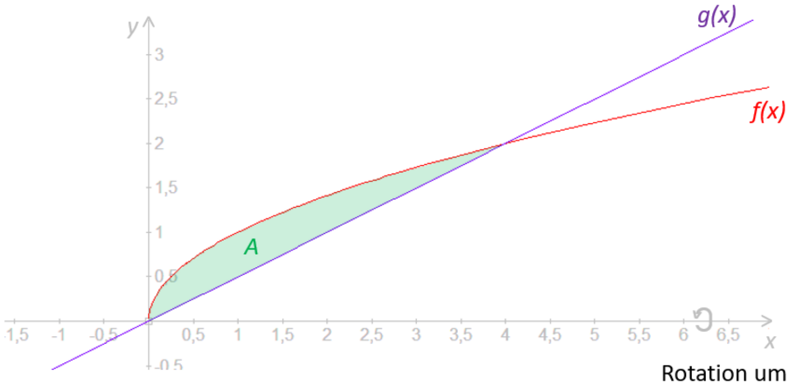
$$A = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}x^2\right]_0^4$$

$$A = \frac{2}{3} \cdot 4^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4} \cdot 4^2 - 0$$

$$A = \frac{2}{3} \cdot 2^3 - 4$$

$$A = \frac{16}{3} - \frac{12}{3} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$$

c) Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der bei einer Rotation von A um die x-Achse entsteht.



Rotation um die x-Achse

$$V = \pi \cdot \int_0^4 (f(x))^2 - (g(x))^2 dx$$

$$V = \pi \cdot \int_0^4 \left(\sqrt{x}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}x\right)^2 dx$$

$$V = \pi \cdot \int_0^4 x - \frac{1}{4}x^2 dx$$

$$V = \pi \cdot \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^2\right]_0^4$$

$$V = \pi \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 4^2 - \frac{1}{12} \cdot 4^3 - 0\right)$$

$$V = \pi \cdot \left(8 - \frac{16}{3}\right)$$

$$V = \frac{24 - 16}{3}\pi = \frac{8\pi}{3}$$