

8. Übungsblatt zur Mathematik 2 – Lösungen

Lösung zu Aufgabe Ü8.1

a)

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x) - 4}{3} &= -1 && | \cdot 3 \\ \Leftrightarrow \sin(x) - 4 &= -3 && | + 4 \\ \Leftrightarrow \sin(x) &= 1 && | \arcsin \\ \Leftrightarrow \arcsin(\sin(x)) &= \arcsin(1) \\ x &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\frac{13 - \cos(2y)}{7} &= 2 && | \cdot 7 \\ \Leftrightarrow 13 - \cos(2y) &= 14 && | - 13 \\ \Leftrightarrow -\cos(2y) &= 1 && | \cdot (-1) \\ \Leftrightarrow \cos(2y) &= -1 && | \arccos \\ \Leftrightarrow \arccos(\cos(2y)) &= \arccos(-1) \\ 2y &= \pi && | : 2 \\ \Leftrightarrow y &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\frac{a^3}{8} - 5 &= 3 && | + 5 \\ \Leftrightarrow \frac{a^3}{8} &= 8 && | \cdot 8 \\ \Leftrightarrow a^3 &= 64 && | \sqrt[3]{} \\ \Leftrightarrow \sqrt[3]{a^3} &= \sqrt[3]{64} \\ a &= 4\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} z^4 &= 81 && | \sqrt[4]{} \\ \Leftrightarrow z &= \sqrt[4]{81} \\ z &= 3 \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} 3^u &= 243 && | \log \\ \Leftrightarrow \log(3^u) &= \log(243) && | + 4 \\ u \cdot \log(3) &= \log(243) && | : \log(3) \\ \Leftrightarrow u &= \frac{\log(243)}{\log(3)} \\ u &= \log_3 243 \\ u &= 5 \end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned} \frac{5^x - 5^2}{5} &= 20 && | \cdot 5 \\ \Leftrightarrow 5^x - 25 &= 100 && | + 25 \\ \Leftrightarrow 5^x &= 125 \\ \Leftrightarrow x &= \log_5 125 \\ x &= 3 \\ \text{oder: } \log(5^x) &= \log 125 \\ x \cdot \log(5) &= \log 125 && | : \log(5) \\ x &= \frac{\log(125)}{\log(5)} \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe Ü8.2

Wir sollen zeigen: $\sin(x) + \cos(x) \leq \sqrt{2}$ für alle $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

Wir betrachten die Funktion $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$ und zeigen, dass das globale Maximum dieser Funktion auf $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ kleiner oder gleich $\sqrt{2}$ ist.

Wir suchen also zunächst die stationären Stellen von $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$:

$$f'(x) = \cos(x) - \sin(x)$$

$$f'(x) \stackrel{\text{def}}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(x) - \sin(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(x) = \sin(x)$$

$$\Leftrightarrow 1 = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\Leftrightarrow 1 = \tan(x)$$

$$\Leftrightarrow x = \arctan(x) = \tan^{-1}(x)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

Variante 1: Randpunkte

Das globale Maximum liegt also entweder in $x = \frac{\pi}{4}$ oder in einem der beiden Randpunkte $x = 0$ bzw. $x = \frac{\pi}{2}$.

$$f(0) = \sin(0) + \cos(0) = 0 + 1 = 1$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + 0 = 1$$

Variante 2: Krümmung

Wir untersuchen was in $x = \frac{\pi}{4}$ für eine Stelle vorliegt, indem wir die zweite Ableitung betrachten:

$$f''(x) = -\sin(x) - \cos(x)$$

da Sinus und Cosinus in $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ positiv sind, ist f'' in dem gegebenen Bereich negativ und damit hat die Funktion f in $\frac{\pi}{4}$ sein globales Maximum. Bleibt die Berechnung des Funktionswertes an dieser Stelle:

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Damit liegt das globale Maximum in $\frac{\pi}{4}$ und $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$. Damit ist die Behauptung bewiesen.