Ostbayerische Technische Hochschule Regensburg
Studiengang IN, IT
R. Wörle, Dr. G. Tapken WS 2023/24

4. Wiederholungsblatt zur Mathematik 2 – Lösungen

Lösung zu W4.1

$A(j,h) = l \cdot h$ mit $l \in [6;10], h \in [0;2]$

Nun müssen wir eine der beiden Variablen eliminieren. Da wir in der linken unteren Ecke bzw. rechten unteren Ecke ein rechtwinkliges, gleichschenkliges Dreieck haben, gilt: $l = 10 - 2h$ (bzw. daraus $h = 5 - \frac{1}{2}l$)

Variante 1

$$A(h) = h \cdot (10 - 2h) = 10h - 2h^2$$
$$A'(h) = 10 - 4h$$
$$A'(h) \stackrel{\text{def}}{=} 0$$
$$\Leftrightarrow \quad 10 - 4h = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad 10 = 4h$$
$$\Leftrightarrow \quad h = 2{,}5$$

Da 2,5 nicht im möglichen Bereich für h liegt kommt dieser Ort als Extremalstelle nicht in Frage, daher bleiben nur die beiden Randpunkte von $[0;2]$ als Extremalstellen übrig.

$$A(0) = 0$$
$$A(2) = 2 \cdot (10 - 2 \cdot 2) = 12 > 0$$

Daher ist die gesuchte Länge $l = 6\ cm$ ($l = 10 - 2h = 10 - 2 \cdot 2 = 6$).

Variante 2

$$A(l) = l \cdot \left(5 - \frac{1}{2} \cdot l\right) = 5 \cdot l - \frac{1}{2} \cdot l^2$$
$$A'(l) = 5 - l$$
$$A'(l) \stackrel{\text{def}}{=} 0$$
$$\Leftrightarrow \quad 5 - l = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad l = 5$$

Da 5 nicht im möglichen Bereich für l liegt kommt dieser Ort als Extremalstelle nicht in Frage, daher bleiben nur die beiden Randpunkte von $[6;10]$ als Extremalstellen übrig.

$$A(6) = 5 \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot 6^2 = 30 - 18 = 12 > 0$$
$$A(10) = 0$$

Daher ist die gesuchte Länge $\boldsymbol{l = 6\ cm}$.

Lösung zu Aufgabe W4.2

a)

$$\int_{-1}^{3} \overbrace{(2x+1)}^{\downarrow} \cdot \overbrace{e^{2x}}^{\uparrow}\, dx = \left[(2x+1)\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{2x}\right]_{-1}^{3} - \int_{-1}^{3} 2\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{2x}\, dx$$

$$= \left[(2x+1)\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{2x}\right]_{-1}^{3} - \left[\frac{1}{2}\cdot e^{2x}\right]_{-1}^{3}$$

$$= \left((6+1)\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{6}\right) - \left((-2+1)\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{-2}\right) - \left(\left(\frac{1}{2}\cdot e^{6}\right) - \left(\frac{1}{2}\cdot e^{-2}\right)\right)$$

$$= \frac{7}{2}\cdot e^{6} + \frac{1}{2}\cdot e^{-2} - \frac{1}{2}\cdot e^{6} + \frac{1}{2}\cdot e^{-2}$$

$$= \mathbf{3\cdot e^{6} + e^{-2}}$$

b) **Mit evidenter innerer Ableitung**

$$\int_{a}^{b} (3x-5)^{11} dx = \frac{1}{3}\cdot \int_{a}^{b} \underbrace{3}_{=g'(x)} \cdot \Big(\underbrace{3x-5}_{=g(x)}\Big)^{11} dx$$

Mit $g(x) = 3x - 5,\quad f(t) = t^{11}$ erhalten wir:

$$= \frac{1}{3}\cdot \int_{g(a)}^{g(b)} t^{11}\, dt$$

$$= \frac{1}{3}\cdot \left[\frac{1}{12} t^{12}\right]_{g(a)}^{g(b)}$$

$$= \frac{1}{36}\cdot \left(g(b)^{12} - g(a)^{12}\right) = \mathbf{\frac{1}{36}}\cdot \left(\mathbf{(3b-5)^{12}} - \mathbf{(3a-5)^{12}}\right)$$

Ohne evidente innere Ableitung

Wir substituieren mit

$$t(x) = 3x - 5 \quad \Leftrightarrow \quad x(t) = \frac{t(x)+5}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad dx = \frac{1}{3}\cdot dt$$

$$\int_{a}^{b} (3x-5)^{11}\, dx = \int_{t(a)}^{t(b)} t^{11}\cdot\frac{1}{3} dt = \frac{1}{3}\cdot\left[\frac{1}{12} t^{12}\right]_{3a-5}^{3b-5}$$

$$= \mathbf{\frac{1}{36}}\cdot \left(\mathbf{(3b-5)^{12}} - \mathbf{(3a-5)^{12}}\right)$$

Lösung zu Aufgabe W4.3

a) Zu bestimmen ist:

Wir setzen $g(t) = (1-t^2)^4$. g ist stetig und damit integrierbar auf einem abgeschlossenen Intervall und hat die Stammfunktion G. Damit ergibt sich:

$$\frac{d}{dx}\int_x^0 (1-t^2)^4\,dt = \frac{d}{dx}\int_x^0 G'(t)\,dt = \frac{d}{dx}[G(t)]_x^0$$

$$= \frac{d}{dx}(G(0)-G(x)) = \frac{d}{dx}G(0) - \frac{d}{dx}G(x) = 0 - g(x) = \boldsymbol{-(1-x^2)^4}$$

b) Es gilt $\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx = F(x) + c$

Wir bestimmen nun eine konkrete Stammfunktion F. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt:

$$F(x) = \int_a^x \frac{e^{2s}}{1+e^s}\,ds$$

Wir substituieren $t(s) \coloneqq e^s \quad \Leftrightarrow \quad s(t) = \ln(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{ds}{dt} = \frac{1}{t} \quad \Rightarrow \quad ds = \frac{1}{t}\cdot dt$

$$= \int_{t(a)}^{t(x)} \frac{t^2}{1+t}\cdot\frac{1}{t}\,dt$$

$$= \int_{e^a}^{e^x} \frac{t}{1+t}\,dt$$

$$= \int_{e^a}^{e^x} \frac{t+1-1}{1+t}\,dt$$

$$= \int_{e^a}^{e^x} \frac{t+1}{t+1}\,dt - \int_{e^a}^{e^x} \frac{1}{1+t}\,dt$$

$$= \int_{e^a}^{e^x} 1\,dt - \int_{e^a}^{e^x} \frac{1}{1+t}\,dt$$

$$= [t]_{e^a}^{e^x} - [\ln(1+t)]_{e^a}^{e^x}$$

$$= e^x - e^a - (\ln(1+e^x) - \ln(1+e^a))$$

$$= e^x - \ln(1+e^x) + (\ln(1+e^a) - e^a)$$

Da der Term mit dem a nur eine Konstante ist, ergibt sich:

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx = \boldsymbol{e^x - \ln(1+e^x) + c}$$

Eine weitere Lösungsmöglichkeit besteht über Polynomdivision und dann Substitution mit evidenter innerer Ableitung.

Lösung zu Aufgabe 22, W4.4

a) Die richtige Lösung ist F_3. Es gibt verschiedene Möglichkeiten zu argumentieren, weswegen die anderen Funktionen nicht in Frage kommen

- Da das Integral $\int_2^x f(s)\,ds$ bei 2 beginnt, muss man $\lim\limits_{x \nearrow 2} F(x) = \lim\limits_{x \searrow 2} F(x) = 0$ sein. Damit scheiden F_1, F_2 und F_4 aus. (Würde also als alleinige Begründung reichen.)
- Da f im ganzen betrachteten Bereich nicht negativ ist, muss $F(x) = \int_2^x f(s)\,ds$ monoton wachsend sein. Damit scheiden F_2 und F_4 aus.
- Da f insbesondere im Intervall $[0; 2]$ nicht negativ ist, kann $F(x) = \int_2^x f(s)\,ds$ für $x \leq 2$ nicht größer 0 sein. Damit scheiden F_1 und F_2 aus.
- Die Stammfunktion einer beschränkten Funktion ist immer stetig. Damit scheiden F_1 und F_4 aus.

b)

$$
\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{1}{x^3} \cdot \ln(x)\,dx &= \lim_{R\to\infty} \int_1^R \overbrace{\frac{1}{x^3}}^{\uparrow} \cdot \overbrace{\ln(x)}^{\downarrow}\,dx \\
&= \lim_{R\to\infty} \left(\left[\frac{1}{-2} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \ln(x) \right]_1^R - \int_1^R \frac{1}{-2} \cdot \underbrace{\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x}}_{-\frac{1}{x^3}} dx \right) \\
&= \lim_{R\to\infty} \left(\left[\frac{1}{-2} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \ln(x) \right]_1^R - \left[\left(\frac{1}{-2} \right)^2 \cdot \frac{1}{x^2} \right]_1^R \right) \\
&= \lim_{R\to\infty} \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \ln(x) - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x^2} \right]_1^R \\
&= \lim_{R\to\infty} \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \ln(R) - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{R^2} \right) - \left(-\frac{1}{2} \cdot \underbrace{\ln(1)}_{=0} - \frac{1}{4} \right) = \mathbf{\frac{1}{4}}
\end{aligned}
$$

Lösung zu Aufgabe W4.5

Das Fässchen hat die Form eines Zylinders mit Radius $r \in]0; \infty[$ und Höhe $h \in]0; \infty[$ (eigentlich gehört an diese Stelle noch eine kleine Skizze, die diesen Zusammenhang veranschaulicht).

V sei das Volumen und A die Oberfläche des Fässchens

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot h = 2\ Liter \qquad \Rightarrow \qquad h(r) = \frac{V}{r^2 \cdot \pi} = \frac{2}{r^2 \cdot \pi}$$

$$A(r,h) = 2 \cdot r^2 \cdot \pi + 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h$$

wir setzen die oben bestimmte Höhe (in Abhängigkeit von r) ein, so dass unserer (Haupt-)Funktion nur noch von einer Variablen abhängt

$$A(r) = 2 \cdot r^2 \cdot \pi + 2 \cdot r \cdot \pi \cdot \frac{2}{r^2 \cdot \pi} = 2 \cdot r^2 \cdot \pi + \frac{4}{r}$$

$$A'(r) = 4r \cdot \pi - \frac{4}{r^2}$$

Wir suchen nun die kritischen Stellen der Funktion A, also die Stellen in denen die Ableitung 0 wird.

$$
\begin{aligned}
& & A'(r) &\stackrel{\text{def}}{=} 0 \\
&\Leftrightarrow & 4r \cdot \pi &= \frac{4}{r^2} \\
&\Leftrightarrow & r^3 &= \frac{1}{\pi} \\
&\Leftrightarrow & r_0 &= \sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}
\end{aligned}
$$

In $r = r_0$ ist also eine kritische Stelle, es bleibt noch zu überprüfen, ob dort auch wirklich das globale Minimum der Oberfläche ist. Dafür betrachten wir die zweite Ableitung:

$$A''(r) = 4\pi + \frac{8}{r^3} > 0$$

diese Ableitung ist für alle echt positiven Radien positiv, d.h. also, die Funktion ist positiv gekrümmt, d.h. in $r_0 > 0$ (der einzigen Stelle mit $A'(r) = 0$) liegt also das globale Minimum.

Gesucht ist das Verhältnis

$$\frac{h(r_0)}{2 \cdot r_0} = \frac{2}{r_0^2 \cdot \pi \cdot 2r_0} = \frac{1}{r_0^3 \cdot \pi} = \frac{1}{\left(\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}\right)^3 \cdot \pi} = \frac{\pi}{\pi} = \mathbf{1}$$

Das Verhältnis Höhe zu Durchmesser des Fässchens muss also 1 sein, damit die Oberfläche minimal wird.

Lösung zu Aufgabe 24, W4.6

a) Es gilt

$$\lim_{x\to-\infty} P(x) = \lim_{x\to-\infty}(x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e) = -\infty$$
$$\lim_{x\to\infty} P(x) = \lim_{x\to\infty}(x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e) = \infty$$

Damit gibt es sicher ein $m \in \mathbb{R}$, mit $|m|$ genügend groß mit $P(m) < 0$ und es gibt sicher ein $M \in \mathbb{R}$, M genügend groß mit $P(M) > 0$.
Da die Funktion P als Polynom sicher stetig ist, gibt es nach dem Zwischenwertsatz ein
$\xi \in]m; M[$ mit $P(\xi) = 0$.

b) Bestimmen Sie eine Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für die gilt: $f(1) = 6, f(2) = 12$ und $f''(x) = 6$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

$$f''(x) = 6$$
$$f'(x) = \left(\int_a^x f''(t)\,dt\right) + c = \left(\int_a^x 6\,dt\right) + c = 6x + c$$
$$f(x) = \left(\int_a^x f'(t)\,dt\right) + d = \left(\int_a^x 6t + c\,dt\right) + d = 3x^2 + cx + d$$

nun müssen wir noch die beiden Funktionswerte von f verwenden, um die Konstanten c und d zu bestimmen:

$$f(1) = 3 \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d = 3 + c + d \stackrel{\text{def}}{=} 6 \qquad \Leftrightarrow \qquad c + d = 0$$
$$f(2) = 3 \cdot 2^2 + c \cdot 2 + d = 12 + 2c + d \stackrel{\text{def}}{=} 12 \qquad \Leftrightarrow \qquad 2c + d = 0$$

Wir haben also ein lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten, das wir z.B. mit dem Gauß-Verfahren lösen können

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{II}:=\mathrm{II}\cdot 2\cdot 1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{I}:=\mathrm{I}+\mathrm{II}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{II}:=(-1)\cdot\mathrm{II}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} c = -3 \\ d = 6 \end{array}$$

Die gesuchte Funktion ist damit $\boldsymbol{f(x) = 3x^2 - 3x + 6}$.