Ostbayerische Technische Hochschule Regensburg
Studiengang IN, IT
R. Wörle, Dr. G. Tapken

WS 2023/24

9. Übungsblatt zur Mathematik 2 – Lösungen

Lösung zu Aufgabe Ü9.1

a)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^x - x}{1-x+\ln(x)} = \lim_{x\to 1}\frac{\exp(x\ln(x)) - x}{1-x+\ln(x)}$$

$$\overset{l'H}{\Leftrightarrow} \lim_{x\to 1}\frac{\exp(x\ln(x))\cdot\left(\ln(x)+\frac{x}{x}\right)-1}{-1+\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\exp(x\ln(x))\cdot(\ln(x)+1)-1}{-1+\frac{1}{x}}$$

$$\overset{l'H}{\Leftrightarrow} \lim_{x\to 1}\frac{\exp(x\ln(x))\cdot(\ln(x)+1)^2+\exp(x\ln(x))\cdot\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{1\cdot(0+1)^2+1\cdot 1}{-1} = \frac{2}{-1} = -2$$

b)

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln(x)}-\frac{x}{x-1}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{x-1-x\ln(x)}{\ln(x)\cdot(x-1)}$$

$$\overset{l'H}{\Leftrightarrow} \lim_{x\to 1}\frac{1-\left(\ln(x)+\frac{x}{x}\right)}{\frac{1}{x}\cdot(x-1)+\ln(x)\cdot 1}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{-\ln(x)}{1-\frac{1}{x}+\ln(x)}$$

$$\overset{l'H}{\Leftrightarrow} \lim_{x\to 1}\frac{-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{-x}{1+x} = \frac{-1}{2}$$

c)

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{(x-1)}} = \lim_{x\to 1} \exp\left(\frac{1}{x-1}\cdot \ln(x)\right)$$

$$= \exp\left(\lim_{x\to 1}\left(\frac{\ln(x)}{x-1}\right)\right)$$

$$\overset{l'H}{\Leftrightarrow} \exp\left(\lim_{x\to 1}\left(\frac{\frac{1}{x}}{1}\right)\right)$$

$$= \exp\left(\lim_{x\to 1}\frac{1}{x}\right) = \exp(1) = e$$

Lösung zu Aufgabe Ü9.2

a) **Variante 1: vorerst vereinfachen, dann Quotientenregel**

$$\frac{d}{dx}f_1(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}-x}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\left(1-\sqrt{x}\right) - \left(1+\sqrt{x}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{\sqrt{x}}}{\left(1-\sqrt{x}\right)^2} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2}}{\left(1-\sqrt{x}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\left(1-\sqrt{x}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{x}\left(1-\sqrt{x}\right)^2} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}^2\left(1-\sqrt{x}\right)^2} = \frac{\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-x\right)^2}$$

Variante 2: direkte Rechnung über Quotientenregel

$$\frac{d}{dx}f_1(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}-x}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}+x}{x^{\frac{1}{2}}-x}\right)$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+1\right)\cdot\left(x^{\frac{1}{2}}-x\right) - \left(x^{\frac{1}{2}}+x\right)\cdot\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}-1\right)}{\left(x^{\frac{1}{2}}-x\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{x}+\sqrt{x}-x-\left(\frac{1}{2}-\sqrt{x}+\frac{1}{2}\sqrt{x}-x\right)}{\left(x^{\frac{1}{2}}-x\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{x}-x-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{x}-x\right)}{\left(x^{\frac{1}{2}}-x\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{x}-x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{x}+x}{\left(x^{\frac{1}{2}}-x\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-x\right)^2}$$

b)

$$\frac{d}{dx}f_2(x) = \frac{d}{dx}\left(\sin\left(\frac{\cos(x)}{x}\right)\right)$$
$$= \cos\left(\frac{\cos(x)}{x}\right)\cdot\frac{(-\sin(x))\cdot x - \cos(x)\cdot 1}{x^2}$$

c)

$$\frac{d}{dx}f_3(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{sin(\sqrt{x})}{1-cos(\sqrt{x})}\right)$$
$$= \frac{cos(\sqrt{x})\cdot\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(1+cos(\sqrt{x})\right) - sin(\sqrt{x})\cdot\left(-sin(\sqrt{x})\cdot\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}\right)}{\left(1+cos(\sqrt{x})\right)^2}$$
$$= \frac{\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(cos(\sqrt{x}) + cos^2(\sqrt{x}) + sin^2(\sqrt{x})\right)}{\left(1+cos(\sqrt{x})\right)^2}$$
$$= \frac{\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(cos(\sqrt{x})+1\right)}{\left(1+cos(\sqrt{x})\right)^2} = \frac{\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}}{1+cos(\sqrt{x})} = \frac{1}{2\cdot\sqrt{x}\cdot\left(1+cos(\sqrt{x})\right)}$$

d) **Variante 1: zuerst mit Hilfe der Logarithmengesetze vereinfachen**

$$f_4(x) = \ln\left(\frac{x^3}{ln\left(\frac{x^3}{ln(x)}\right)}\right) = \ln(x^3) - \ln\left(\ln\left(\frac{x^3}{\ln(x)}\right)\right)$$
$$= 3\cdot\ln(x) - \ln(\ln(x^3) - \ln(\ln(x))) = 3\cdot\ln(x) - \ln(3\cdot\ln(x) - \ln(\ln(x)))$$
$$\frac{d}{dx}f_4(x) = \frac{d}{dx}\left(\ln\left(\frac{x^3}{\ln\left(\frac{x^3}{\ln(x)}\right)}\right)\right) = \frac{d}{dx}(3\cdot\ln(x) - \ln(3\cdot\ln(x) - \ln(\ln(x))))$$
$$= \frac{3}{x} - \frac{1}{3\cdot\ln(x) - \ln(\ln(x))}\cdot\left(\frac{3}{x} - \frac{1}{\ln(x)}\cdot\frac{1}{x}\right)$$
$$= \frac{3}{x} - \frac{3\ln(x) - 1}{(3\cdot\ln(x) - \ln(\ln(x)))\cdot x\ln(x)}$$

Variante 2: direkt Ableiten

Bevor wir ans Ableiten von $\ln\left(\frac{x^3}{ln\left(\frac{x^3}{\ln(x)}\right)}\right)$ herangehen, leiten wir zunächst $g(x) = \ln\left(\frac{x^3}{\ln(x)}\right)$ ab

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\ln\left(\frac{x^3}{\ln(x)}\right) = \left(\frac{x^3}{\ln(x)}\right)^{-1}\cdot\frac{3x^2\cdot\ln(x) - x^3\frac{1}{x}}{(\ln(x))^2}$$
$$= \frac{\ln(x)}{x^3}\cdot\frac{x^2\cdot(3\ln(x)-1)}{(\ln(x))^2} = \frac{3\ln(x)-1}{x\ln(x)}$$

$$\frac{d}{dx} f_4(x) = \frac{d}{dx}\left(\ln\left(\frac{x^3}{\ln\left(\frac{x^3}{\ln(x)}\right)}\right)\right) = \frac{d}{dx}\left(\ln\left(\frac{x^3}{g(x)}\right)\right)$$
$$= \left(\frac{x^3}{g(x)}\right)^{-1} \cdot \frac{3x^2 \cdot g(x) - x^3 \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$
$$= \frac{g(x)}{x^3} \cdot \frac{3x^2 \cdot g(x) - x^3 \cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2} = \frac{3g(x) - x \cdot g'(x)}{x \cdot g(x)}$$
$$= \frac{3}{x} - \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{3}{x} - \frac{3\ln(x) - 1}{x\ln(x)} \cdot \frac{1}{\ln\left(\frac{x^3}{\ln(x)}\right)} = \frac{3}{x} - \frac{3\ln(x) - 1}{x\ln(x) \cdot \ln\left(\frac{x^3}{\ln(x)}\right)}$$
$$= \frac{3}{x} - \frac{3\ln(x) - 1}{(3 \cdot \ln(x) - \ln(\ln(x))) \cdot x\ln(x)}$$

Lösung zu Aufgabe Ü9.3

Wir kennen die Taylorreihe für die e-Funktion

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

D.h. nach dem Satz von Taylor gilt

$$e^x = T_N(f(x) = e^x, x_0 = 0, x) + R_{N+1}(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!} + R_{N+1}(x)$$

Wir müssen also nur noch schauen, für welches N der Fehler $R_{N+1}(x)$ kleiner als $5 \cdot 10^{-5}$ ist. Für die Lagrange-Form des Restgliedes gilt: $R_{N+1}(x) = \frac{f^{N+1}(\xi)}{(N+1)!} \cdot (x-0)^{N+1}$ für ein ξ zwischen x und x_0. Da $x \in [0;1]$ ist, ist wenn $\frac{f^{N+1}(\xi)}{(N+1)!} < 5 \cdot 10^{-5}$ für jedes $\xi \in [0;1]$ gilt, die Bedingung sicher erfüllt. Da jede Ableitung von e^x wieder gleich e^x ist, gilt:

$$R_{N+1}(x) = \frac{f^{N+1}(\xi)}{(N+1)!} \cdot (x-0)^{N+1} = \frac{e^{\xi}}{(N+1)!} \cdot (x-0)^{N+1} \leq \frac{e^1}{(N+1)!} \leq 5 \cdot 10^{-5}$$

Das löst man nun nach N auf

$$(N+1)! \geq \frac{e^1}{5 \cdot 10^{-5}} = \underbrace{2 \cdot 10^4 \cdot e}_{5 \cdot 10^4 \leq \cdots \leq 10^5} \xLeftrightarrow{\text{Fakultäten ausprobieren}} N \geq 8$$

$(8! = 40\,320; 9! = 362\,880)$

Damit das gesuchte Polynom:

$$e^1 \approx T_8(e^x, x_0 = 0, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

z.B. für $x = 1$ ergibt sich dann:

$$e^1 \approx \sum_{k=0}^{8} \frac{1}{k!} = \frac{109\,601}{40\,320} = 2{,}71827 \pm 0{,}00005$$