Aufgabe 1.
Es seien zwei Punkte $p_0, p_1 \in \mathbb{R}^3$ mit $\|p_0\| = \|p_1\|$ gegeben. Gesucht sind die Parameter einer Rotation, welchen den ersten auf den zweiten Punkt rotiert.

(a) Gib eine Formel an, um den Rotationswinkel α zwischen p_0 und p_1 zu bestimmen.

(b) Gib eine Formel an, um die Rotationsachse v mit $\|v\| = 1$ zu bestimmen.

Lösung (a). Wir wissen, dass

$$\langle p_0, p_1 \rangle = \|p_0\| \|p_1\| \cos(\alpha).$$

Damit gilt

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\langle p_0, p_1 \rangle}{\|p_0\|\|p_1\|}\right) = \arccos\left(\frac{\langle p_0, p_1 \rangle}{\|p_0\|^2}\right).$$

◇

Lösung (b). Um p_0 auf p_1 zu rotieren, benötigen wir eine Rotationsachse, die orthogonal zu den beiden Punkten ist. Dies ist gegeben durch

$$v = \frac{p_0 \times p_1}{\|p_0 \times p_1\|}.$$

◇

Aufgabe 2.
Es sei ein Punkt $p \in \mathbb{R}^3$ in homogenen Koordinaten $\begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix}^T$ gegeben.

(a) Leite eine Matrix M_1 her, welche den Punkt p zuerst um einen Winkel α um die Achse $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ dreht und ihn dann um einen Vektor $\begin{bmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \end{bmatrix}^T$ verschiebt.

(b) Leite eine Matrix M_2 her, welche den Punkt p zuerst um den Vektor $\begin{bmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \end{bmatrix}^T$ verschiebt und ihn dann um einen Winkel α um die Achse $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ dreht.

(c) Beschreibe, in welcher Weise die Reihenfolge der obigen Operationen die jeweilige Transformationsmatrix beeinflusst.

Lösung (a). Wir erhalten M_1 durch das Produkt $M_{\text{trans}} \cdot M_{\text{rot}}$ mit

$$M_{\text{trans}} = \left[\begin{array}{ccc|c} & & & t_1 \\ & \boldsymbol{I}_3 & & t_2 \\ & & & t_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \quad M_{\text{rot}} \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Damit ist

$$M_1 = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & t_1 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & t_2 \\ 0 & 0 & 1 & t_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

◇

Lösung (b). Analog zur vorherigen Lösung erhalten wir

$$M_2 = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & t_1\cos\alpha - t_2\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & t_1\sin\alpha + t_2\cos\alpha \\ 0 & 0 & 1 & t_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

◇

Lösung (c). Bei (a) erfolgt die Translation unabhängig von der Rotation, wie auch an der letzten Spalte von M_1 zu sehen ist. Dies ist bei (b) nicht mehr der Fall, da die Translation mitrotiert wird. ◇