פתרון שקרים 05 — שקרים מאוד מתקדמים 3 (80415)

13 בפברואר 2025

שאלה 1

תהיי G חבורה סופית ויהיו $P_1, P_2, \ldots, P_r$ חבורות P־סילו של G, אחת לכל אחד מהמספרים הראשוניים $p_1, p_2, \ldots, p_r$ המחלקים את $|G|$.
נוכיח ש $G = \langle P_1, P_2, \ldots, P_n \rangle = \langle \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \text{ prime}}}^{r} P_i \rangle$

הוכחה. נסמן $P = \langle \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \text{ prime}}}^{r} P_i \rangle$.
נבחין שלכל i מתקיים $P_i \leq P$ (ישירות מהגדרה של תת־חבורה) ולכן לפי משפט לגראנז' מתקיים $|P| \mid |P_i|$.
מצד שני, מתקיים באותו אופן $|G| \mid |P_i|$ מהגדרת חבורות P־סילו ולכן נקבל ש־ $|G|$ הוא LCM של כל $|P_i|$.
ולכן מהגדרה צריך להתקיים ש־ $|P|$ הוא כפולה של $|G|$.
אבל מהגדרת האיחוד והגדרת P נקבל שלכל היותר $|P| \leq |G|$.
נבחין כמובן שאם מתקיים $|G| < |P|$ נקבל ישירות סתירה כי אחרת זה לא כפולה ונסיק אם כך ש־ $|G| = |P|$ ומכיוון ש־ P מורכבת מהגדרתה רק מאיברים ב־ G נסיק כי $P = G$, כנדרש $\square$

שאלה 2

תהיי G חבורה, $N \leq Z(G)$ וידוע ש־ G/N נילפוטטנטית. נראה ש־ G נילפוטטנטית.

הוכחה. ראשית נבחין שמתקיים $N \trianglelefteq G$ שכן $N \leq Z(G)$ וגם $Z(G) \trianglelefteq G$ ועם קצת אלגברה בסיסית נוכל לקבל את הנורמליות.
מהיות G/N נילפוטטנטית נקבל כי יש לה סדרת הרכב עולה

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq \ldots \leq G_n = G/N$$

ויהי הומומורפיזם הטלה הקאנוני

$$\pi : G \to G/N$$

נסמן ב־ $\overline{G}_i$ את המקור של G_i ב־ π. ממשפט ההתאמה נקבל ש־ $\overline{G}_i = \pi^{-1}(G_i)$ ונקבל את הסדרת הרכב העולה הבאה

$$1 = N_0 \leq N \leq \overline{G_1} \leq \ldots \leq \overline{G_n} = G$$

□

שאלה 3

$$f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

סעיף א׳

נסמן $Y = X^2$.

תת־סעיף 1

נוכיח שהוא חסר שונות. ממש

הוכחה. אחת שתיים שלוש דג מלוח

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(s)\, ds$$

ולכן הטענה נכונה. לא ד $\square$