פתרון מטלה 03 — אנליזה פונקציונלית, 80417

30 באפריל 2025

שאלה 1

יהיו $a<b, c<d \in \mathbb{R}$, $F:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ ליפשיצית עם קבוע K ו־$(x_0,y_0)\in(a,b)\times(c,d)$.
נוכיח שקיים $h>0$ ופונקציה גזירה $f:[x_0-h,x_0+h]\to[c,d]$ כך ש־$f(x_0)=y_0$ וכן $\forall x\in[x_0-h,x_0+h]: f'(x)=F(x,f(x))$

סעיף א'

נגדיר סדרת פונקציות על־ידי $f_0(x)=y_0$ ו־$f_{n+1}(x)=y_0+\int_{x_0}^x F(t,f_n(t))dt$. נוכיח שקיים $h>0$ כך ש־$f_n:[x_0-h,x_0+h]\to[c,d]$ מוגדרת היטב ורציפה לכל n.

הוכחה: נוכיח באינדוקציה: יהי $\varepsilon>0$, עבור $n=1$ נשים לב שמתקיים

$$f_1(x)=y_0+\int_{x_0}^x F(t,f_0(t))dt \underset{(f_0(x)=y_0)}{=} y_0+\int_{x_0}^x F(t,y_0)dt$$

F היא K־ליפשיצית ולכן היא רציפה ולכן גם אינטגרבילית (ובפרט חסומה) ולכן $f_2(x)$ לעיל מוגדרת היטב.
נראה שהיא גם רציפה, עבור כל $x\in[x_0-h,x_0+h]$, מתקיים

$$|f_1(x)-y_0|=\left|\int_{x_0}^x F(t,y_0)dt\right|\le M|x-x_0|\le Mh$$

כאשר $M=\sup_{t\in[a,b]}|F(t,y_0)|$ שקיים מהיות F רציפה בקטע קומפקטי.
נבחר $h>0$ קטן דיו כך שמתקיים

$$Mh\le\varepsilon=\min(y_0-c,d-y_0)$$

ולכן $f_1(x)$ רציפה, מוגדרת היטב ותמונתה נמצאת ב־$[c,d]$ עבור h קטן דיו.
כעת, נניח כי הטענה נכונה עבור $n\ge 1$ כלשהו, ונראה שנכון עבור $n+1$

$$f_{n+1}(x)=y_0+\int_{x_0}^x F(t,f_n(t))dt$$

f_n רציפה בקטע סגור ו־F ולכן גם ההרכבה $t\mapsto F(t,f_n(t))$ גם רציצפה על $[x_0-h,x_0+h]$.
כעת, F רציפה וחסומה על הקבוצה הקומפקטית $[a,b]\times[c,d]$ ומהרציפות נובע שקיים $M>0$ כך שמתקיים

$$|F(t,y)|\le M\forall(t,y)\in[a,b]\times[c,d]$$

ולכן גם עבור $x\in[x_0-h,x_0+h]$ ואז

$$\left|f_{n+1}(x)-y_0\right|=\left|\int_{x_0}^x F(t,f_n(t))dt\right|\le M|x-x_0|\le Mh$$

היות ו־$y_0\in(c,d)$ קיים $\varepsilon>0$ כך ש־$[y_0-\varepsilon,y_0+\varepsilon]\subset[c,d]$ ולכן בבחירה של $h=\frac{\varepsilon}{M}$ נקבל

$$\left|f_{n+1}(x)-y_0\right|\le Mh=\varepsilon$$

ולכן $f_{n+1}(x)\in[c,d]$, וקיבלנו מעיקרון האינדוקציה שהטענה נכונה לכל $n\in\mathbb{N}$. $\square$

סעיף ב'

נוכיח שהסדרה $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה במידה אחידה ורציפה במידה אחידה ולכן ממשפט ארצלה יש לה תת־סדרה $\left\{f_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ מתכנסת במידה שווה.

הוכחה: בסעיף א' ראינו שכל פונקציה בסדרה חסומה על־ידי h ולכן נשאר רק להראות רציפות במידה אחידה:

לכל $x, y \in [x_0 - h, x_0 + h], n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$\begin{aligned}|f_n(x) - f_n(y)| &= \left|\int_{x_0}^{x} F(t, f_{n-1}(t))dt - \int_{x_0}^{y} F(t, f_{n-1}(t))dt\right| \\ &= \left|\int_{x}^{y} F(t, f_{n-1}(t))dt\right| \leq \int_{x}^{y} |F(t, f_{n-1}(t))|dt \leq |x-y|\end{aligned}$$

לכן עבור $\varepsilon > 0$ נוכל לבחור $\delta = \varepsilon$ ונקבל $|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$ לכל $|x-y| < \delta$ וקיבלנו רציפות במידה אחידה.

ממשפט ארצלה נובע שלכל סדרה בקבוצה $\{f_n\}$ יש תת־סדרה קושי, בפרט $\left\{f_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ תת־סדרה קושי ומתכנסת במידה שווה. $\square$

סעיף ג'

נוכיח שהסדרה $\left\{F\left(x, f_{n_k}(x)\right)\right\}_{k=1}^{\infty}$ מתכנסת במידה שווה ונסיק ש־$f = \lim_k f_{n_k}$ היא הפונקציה המבוקשת.

הוכחה: נניח ש־$f_{n_k} \rightrightarrows f$ עבור $f : [a,b] \to [c,d]$ רציפה ונראה שהסדרה היא סדרת קושי

$$\left|F\left(x, f_{n_k}(x) - F\left(y, f_{n_k}(y)\right)\right)\right| \leq K\sqrt{(x-y)^2 + \left(f_{n_k}(x) - f_{n_k}(y)\right)^2} \leq K|x-y|(1+1) = 2K|x-y|$$

ולכן לכל $\varepsilon > 0$ נבחר $\delta = \frac{\varepsilon}{2K}$ וזו סדרת קושי.

נשים לב שגם מתקיים $f_{n_k} \rightrightarrows f$ ולכן נובע ש־$f'_{n_k} \rightrightarrows f'$ ולכן f רציפה וגזירה ומקיימת $f(x_0) = y_0$ מתכנסת נקודתית של הסדרה הקבועה $f_n(x_0) = y_0$.

כמו כן, F רציפה ולכן $f_{n_k} \rightrightarrows F(x, f(x))$ וקיבלנו ש־f מקיימת את כל התנאים למשפט הקיום של פאנו. $\square$

שאלה 2

תהיי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq C^1[0,1]$ סדרת פונקציות ונניח שקיים קטע $[a,b]\subseteq[0,1]$ ושקיימת סדרה $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ ששואפת לאינסוף, כך שלכל n ולכן $x\in[a,b]$ מתקיים $f_n'(x)\geq M_n$.

נוכיח שהסדרה $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ לא רציפה במידה אחידה.

הוכחה: אם הסדרה $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ לא רציפה במידה אחידה, זה אומר

$$\exists\varepsilon_0>0\ \forall\delta>0\ \exists x,x_0\in[0,1],\ \ |x_0-x|<\delta\ |f(x_0)-f(x)|\geq\varepsilon_0$$

יהי $\varepsilon_0=\frac{1}{2}$ ותהיי $\delta>0$.

מהיות $M_n\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$, נובע שקיים $n\in\mathbb{N}$ כך שמתקיים

$$M_n>\frac{1}{\delta}\Longleftrightarrow\delta>\frac{1}{M_n}$$

נקבע $n\in\mathbb{N}$ כנ"ל, ויהיו $x,y\in[a,b]$ כך שמתקיים $|x-y|=\frac{1}{M_n}<\delta$.

מהיות $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}\in C^1[0,1]$ ולכן נוכל להשתמש במשפט ערך הממוצע של לגראנז', ולקבל

$$f_n(x)-f_n(y)=f_n'(z)(x-y)$$

עבור $z\in(x,y)$.

מהנתון, $f_n'(x)\geq M_n$ לכל n ולכל $x\in[a,b]$ ולכן בפרט מתקיים

$$|f_n(x)-f_n(y)|=|f_n'(z)||x-y|\geq M_n|x-y|=M_n\cdot\frac{1}{M_n}=1$$

ובפרט מתקיים

$$|f_n(x)-f_n(y)|\geq 1\geq\frac{1}{2}=\varepsilon_0$$

נבין איך זה מסתדר עם מה שראינו בתרגול 3 דוגמה 1. ניזכר בסדרת הפונקציות הנגזרת המדוברת (נסמן ב־ g_n' כדי להבדיל)

$$g_n'(x)=\begin{cases}0 & x\leq 1-\frac{1}{n}\\ n^{\frac{3}{2}}\left(x-1+\frac{1}{n}\right) & x>1-\frac{1}{n}\end{cases}$$

נשים לב שבמקרה שלנו $f_n'(x)$ מתבדרת בתחום סופי, בעוד $g_n'(x)$ מתבדרת לאינסוף בקטע שהולך וקטן ולכן גם לא קיימת לה סדרה $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתאימה המתבדרת לאינסוף, ובפרט לא נוכל להגדיר δ כפי שהגדרנו, משמע הטענה לא נכונה עבור $g_n'(x)$ מהתרגול. $\square$

שאלה 3

תהיי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C(\mathbb{R})$ סדרה המוגדרת על־ידי $f_n(x) = \frac{1}{(x-n)^2+1}$

סעיף א'

נוכיח שהסדרה חסומה במידה אחידה, רציפה במידה אחידה ומתכנסת נקודתית לפונקצית האפס.

הוכחה: נשים לב שמתקיים לכל $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ מתקיים $(x-n)^2 + 1 \geq 1$ ולכן $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \leq 1$ משמע חסומה במידה אחידה.
עבור רציפות במידה אחידה, נשים לב שמתקיים

$$f_n'(x) = \frac{-2(x-n)}{((x-n)^2+1)^2}$$

נסמן $y = x - n$ ולכן $f_n'(x) = g(y) = \frac{-2y}{(y^2+1)^2}$ זה פולינום ולכן חלק, אז מכלל השרשרת $g'(y) = \frac{-2(-3y^2+1)}{(y^2+1)^3}$.
נבחן מתי הנגזרת מתאפסת: המכנה לא מתאפס לאף $y \in \mathbb{R}$ ולכן מתאפס רק כאשר

$$6y^2 - 2 = 0 \iff y^2 = \frac{1}{3} \iff y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

ומתקיים

$$g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{-\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}^2}+1\right)^2} = \frac{-\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{16}{9}} = -\frac{18}{16\sqrt{3}} = -\frac{9}{8\sqrt{3}} = -\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$$

$$g\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$$

זו נקודה מסוג מקסימום, כי $g'\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) > 0$ שכן כל המחוברים חיוביים.
אז נקבל $|g(y)| \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$ ובפרט $\lim_{y\to\pm\infty} g(y) = 0$ משמע מצאנו $|f_n'(x)| \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$.
לפי טענה שראינו בהרצאה נובע ש־$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה במידה אחידה וגם רציפה במידה אחידה.
עבור התכנסות נקודתית, נקבע $x \in \mathbb{R}$ ונשים לב שמתקיים $(x-n)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ ולכן $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ משמע $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת נקודתית ל־0. $\square$

סעיף ב'

נראה שהסדרה לא מתכנסת במידה שווה לפונקציית האפס.

הוכחה: לו הייתה $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ הייתה מתכנסת במידה שווה לפונקציית האפס, היה מתקיים מההגדרה האלטרנטיבית להתכנסות במידה שווה

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - 0| = 0$$

ונשים לב;

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} f_n(x) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{(x-n)^2+1}$$

והסופרמום מתקבל כאשר המכנה מקסימלי, משמע כאשר $x = n$ ואז מתקיים

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} f_n(x) = 1$$

וזו כמובן סתירה. $\square$

שאלה 4

יהי $P\subseteq C[0,1]$ מרחב הפולינומים המוגדרים על הקטע $[0,1]$ עם הנורמה $\|\cdot\|_\infty$, זהו מרחב נורמי.
נוכיח ש־P אינו מרחב שלם ולכן אינו מרחב בנך.

הוכחה: נוכיח שקיימת סדרת פולינומים $\{p_n\}_{n=1}^\infty\in P$ כך ש־$\{p_n\}_{n=1}^\infty$ מתכנסת במידה שווה לפונקציה $f\in C[0,1]$ אבל f אינה פולינום.
נגדיר

$$p_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!}$$

נשים לב שזהו פיתוח טיילור של $\exp$ וכן $p_n\to\exp$ בהתכנסות נקודתית, ולכן לפי טענה מהתרגול נובע גם $p_n\rightrightarrows\exp$, אבל $\exp\notin P$ שכן לכל $p\in P$ מתקיים $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{p(x)}=\infty$ $\square$