פתרון מטלה 08 — פונקציות מרוכבות, 80519

30 בדצמבר 2025

שאלה 1

סעיף א'

עבור $z_0 \in G$ התבוננו בכדור ברדיוס $r > 0$ קטן מספיק כך ש-G ⊇ $B_r(z_0)$ והגדרנו

$$F(z) = \int_{[z_0,z]} f(w)\,\mathrm{d}w$$

נוכיח ש-F אכן הולומורפית וש-$F' = f$ בכדור הזה.

הוכחה: יהי $z \in B_r(z_0)$, עבור h קטן דיו, $z + h \in B_r(z_0)$ ובגלל ש-$B_r(z_0)$ זה כדור, נסתכל על המשולש שקודקודיו הם $z_0, z, z+h$ מוכל לחלוטין בכדור $B_r(z_0)$ וממשפט קושי למשולש ומלינאריות האינטגרל

$$\int_{[z_0,z]} f(w)\,\mathrm{d}w + \int_{[z,z+h]} f(w)\,\mathrm{d}w + \int_{[z+h,z_0]} f(w)\,\mathrm{d}w = 0$$

ומהגדרת $F(z)$ נקבל

$$F(z+h) - F(z) = \int_{[z,z+h]} f(w)\,\mathrm{d}w \iff \frac{F(z+h)-F(z)}{h} = \frac{1}{h}\int_{[z,z+h]} f(w)\,\mathrm{d}w$$
$$\iff \frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z) = \frac{1}{h}\int_{[z,z+h]} (f(w)-f(z))\,\mathrm{d}w$$

שכן

$$\int_{[z,z+h]} f(z)\,\mathrm{d}w = [f(z)\cdot w]_{w=z}^{w=z+h} = f(z)\cdot h$$

אבל f הולומורפית ולכן רציפה ב-z ולכן לכל $\varepsilon > 0$ יש $\delta > 0$ כך שלכל w המקיים $|w-z| < \delta$ מתקיים $|f(w)-f(z)| < \varepsilon$.
אז אם נבחר $|h| < \delta$, לכל w על הקטע $[z, z+h]$ מתקיים $|w-z| < |h|$ ונקבל

$$\left|\frac{1}{h}\int_{[z,z+h]} (f(w)-f(z))\,\mathrm{d}w\right| \le \frac{1}{|h|}\cdot\varepsilon\cdot L([z,z+h]) = \frac{\varepsilon\cdot|h|}{|h|} = \varepsilon$$

כלומר כאשר $h \to 0$ הגבול שואף ל-0, כלומר בידיוק מתקיים $F'(z) = f(z)$ לכל z ולכן F גזירה במובן המורכב.
בנוסף, F היא גזירה במובן המורכב בכל נקודה בכדור ולכן היא הולומורפית. $\square$

שאלה 2

שאלה 3

תהיי $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות שלמות. נסמן ב־a_n^k את המקדם ה־n בפיתוח הטיילור של הפונקציה f_k סביב הראשית, כלומר $f_k = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^k z^n$.

סעיף א'

נוכיח שאם f_k מתכנסות במידה שווה מקומית לפונקציה f אז $a_n^k \to a_n$ כאשר $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

הוכחה: תזכורת לעצמי: התכנסות במידה שווה מקומית משמע לכל נקודה יש סביבה שבה f_k מתכנסת במידה שווה ל־f, כלומר לכל $R > 0$

$$\overline{B_R(0)} = \{z \mid |z| \leq R\}$$

אז $f_k \to f$ במידה שווה על $\overline{B_R(0)}$.

מנוסחת האינטגרל של קושי, לכל $R > 0$ מתקיים

$$a_n^k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f_k(z)}{z^{n+1}} \, \mathrm{d}z, \qquad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{z^{n+1}} \, \mathrm{d}z$$

ונתבונן

$$a_n^k - a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f_k(z)}{z^{n+1}} \, \mathrm{d}z - \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{z^{n+1}} \, \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f_k(z) - f(z)}{z^{n+1}} \, \mathrm{d}z$$

אבל $|z| = R$ זה תחום קומפקטי, כלומר לכל $\varepsilon > 0$ קיים K כך שלכל $k > K$ ולכל w על העיגול $|z| = R$ מתקיים

$$|f_k(w) - f(w)| < \varepsilon$$

אבל מאי־שיוויון ML שראינו בהרצאה (טענה 4.12 בסיכומי ההרצאה של עדי)

$$\left|a_n^k - a_n\right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \max_{|z|=R} \left|\frac{f_k(z) - f(z)}{z^{n+1}}\right| \cdot (2\pi R) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{R^{n+1}} \max_{|z|=R} |f_k(z) - f(z)| \cdot (2\pi R) = \frac{1}{R^n} \max_{|z|=R} |f_k(z) - f(z)|$$

אבל $f_k \to f$ במידה שווה מקומית על $|z| \leq R$, כלומר

$$\max_{|z|=R} |f_k(z) - f(z)| \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$$

ובפרט נובע מכך שלכל $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ מתקיים

$$\left|a_n^k - a_n\right| \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$$

אז מאי־שיוויון המשולש (האינטגרלי/ערך מוחלט)

$$\left|a_n^k - a_n\right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=R} \frac{|f_k(z) - f(z)|}{|z^{n+1}|} \, \mathrm{d}z$$

□

סעיף ב'

נביא דוגמה נגדית: אם $a_n^k \to a_n$ אז f_k לא מתכנסת במידה שווה מקומית לפונקציה $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ בתחום שבו הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ מתכנס.

הוכחה: נגדיר

$$f_k(z) := k z^k$$

אז פיתוח טיילור סביב הראשית יהיה

$$f_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^k z^n$$

כאשר

$$a_n^k = \begin{cases} k & n = k \\ 0 & n \neq k \end{cases}$$

כלומר לכל n $k > n$ ממתקיים $a_n^k = 0$ כלומר $a_n^k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ ולכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_n = 0$, כלומר

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = 0$$

נסתכל על

$$K \coloneqq \{z \mid |z| \leq 1\}$$

זו קבוצה קומפקטית כי סגורה וחסומה אבל

$$\sup_{|z|\leq 1} |f_k(z)| = \sup_{|z|\leq 1} k|z|^k = k$$

כלומר

$$\sup_{|z|\leq 1} |f_k(z) - 0| = k \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$$

אז f_k לא מתכנסת במידה שווה על K או בצורה מקומית באף סביבה של הראשית ולכן זו סתירה. □

שאלה 4

במשפט היחידות השני הנחנו שקיימת סדרה z_n המתכנסת לנקודה $z_0 \in G$.
נקבע האם חשוב שהנקודה z_0 היא פנימית, כלומר נקבע האם המשפט נכון כאשר z_n מתכנסת לנקודה על השפה.
הוכחה: נטען כי z_0 חייבת להיות נקודה פנימית: נסתכל על התחום G שהוא החצי מישור העליון כאשר $Re(z) > 0$ ונגדיר

$$f(z) = \sin\left(\frac{1}{z}\right)$$

זו פונקציה הולומורפית בחצי מישור העליון ומתקיים

$$f(z) = 0 \iff \frac{1}{z} = n\pi$$

כלומר הסדרה $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ הנתונה על־ידי $z_n = \frac{1}{n\pi}$ מקיימת ש-$(z_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq G$.
מצד שני, $z_0 = \lim_{n\to\infty} z_n = 0$ ולכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $f(z_n) = 0$ אבל $f \not\equiv 0$!
זאת לא סתירה למשפט כי 0 היא נקודה סינגולרית עיקרית (לא סליקה ולא קוטב) של f ולכן f לא ניתנת להמשכה אנליטית בה. $\square$