פתרון מטלה 05 — תורת הקבוצות, 80200

25 באפריל 2025

שאלה 1

נוכיח מאקסיומות פאנו את הטענה הבאה

$$\forall x \ \forall y \ (x \cdot y = y \cdot x)$$

הוכחה: $\square$

שאלה 2

תהיינה X, Y, Z קבוצות. ניזכר $X \uplus X' = (X \times \{0\}) \cup (X' \times \{1\})$.

סעיף א'

נוכיח שמתקיים $|X \times (Y \uplus Z)| = |(X \times Y) \uplus (X \times Z)|$.

הוכחה: נגדיר $f : X \times (Y \uplus Z) \to (X \times Y) \uplus (X \times Z)$ על־ידי

$$f(x,(l,i)) = ((x,l),i)$$

f מוגדרת היטב: נשים לב שאיברי $X \times (Y \uplus Z) X \times (Y \uplus Z)$ הם משתי צורות אפשריות:

1. $(x,(y,0))$ עבור $x \in X, y \in Y$ שימופה ביחידות אל $((x,y),0)$
2. $(x,(z,1))$ עבור $x \in X, z \in Z$ שימופה ביחידות אל $((x,z),1)$

ולכן f מוגדרת היטב. נראה כי היא חד־חד ערכית ועל.

על: יהי $b = ((x,l),i) \in (X \times Y) \uplus (X \times Z)$ נשים לב שבבחירה של $a = (x,(l,i)) \in X \times (Y \uplus Z)$ נקבל $f(a) = b$ ולכן f על.

חד־חד ערכיות: יהיו $a = (x_1,(l_1,i_1)), c = (x_2,(l_2,i_2)) \in X \times (Y \uplus Z)$, נשים לב שמתקיים

$$f(a) = f(c) \iff ((x_1,l_1),i_1) = ((x_2,l_2),i_2) \iff x_1 = x_2 \wedge l_1 = l_2 \wedge i_1 = i_2 \iff a = c$$

ולכן f חד־חד ערכית.

מצאנו פונקציה חד־חד ערכית ועל f ולכן לפי הגדרת שיוויון עוצמות מתקיים $|X \times (Y \uplus Z)| = |(X \times Y) \uplus (X \times Z)|$. $\square$

סעיף ב'

נוכיח שמתקיים $\left|(X \times Y)^Z\right| = \left|X^Z \times Y^Z\right|$.

הוכחה: לכל $f \in (X \times Y)^Z$ ולכל $z \in Z$ נסמן $f(z) := \langle x, y \rangle$.

נגדיר גם $g : Z \to X, h : Z \to Y$ על־ידי $g(z) = x,\ h(z) = y$ (לכל $z \in Z$ בהתאם ל־f).

בהתאמה, נגדיר את $\varphi : (X \times Y)^Z \to \left(X^Z \times Y^Z\right)$ על־ידי $\varphi(f) := \langle g, h \rangle$.

נראה כי φ חד־חד ערכית ועל:

על: יהיו $(g,h) \in \left(X^Z \times Y^Z\right)$ ולכן $\psi(z) = \langle g(z), h(z) \rangle$ (ואכן $\psi : Z \to X \times Y$ מקיימת $\varphi(\psi) = \langle g, h \rangle$).

חד־חד ערכית: יהיו $f_1, f_2 \in (X \times Y)^Z$, נשים לב שמתקיים

$$\varphi(f_1) = \varphi(f_2) \iff \langle g_1, h_1 \rangle = \langle g_2, h_2 \rangle \iff \forall z \in Z, g_1(z) = g_2(z) \wedge h_1(z) = h_2(z) \iff f_1 = f_2$$

ולכן φ חד־חד ערכית.

מצאנו פונקציה חד־חד ערכית ועל ולכן לפי הגדרת שיוויון עוצמות מתקיים $\left|X^Z \times Y^Z\right| = \left|(X \times Y)^Z\right|$. $\square$

סעיף ג'

נוכיח שמתקיים $\left|X^Y \times X^Z\right| = \left|X^{Y \uplus Z}\right|$.

הוכחה: נשים לב שמתקיים

$$\left|X^{Y \uplus Z}\right| = \left|X^{(Y \times \{0\} \cup (Z \times \{1\}))}\right| \underset{(1)}{=} \left|\left(X^{(Y \times \{0\})^{Z \times \{1\}}}\right)\right| =$$

$\square$