פתרון שאלות חזרה למבחן — חשבון אינפיניטסימלי 3, 80415

19 באוגוסט 2025

שאלה 1

שאלה 4 – מועד א' תשפ"ב של שיא.

יהי התחום $D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=1 \right\}$ ותהיי $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ הפונקציה הנתונה על־ידי $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$.

נקבע האם f משיגה מינימום ומקסימום ב־D ואם כן נחשב את הערך.

פתרון:

הגדרה 0.1 (הלגראנז'יאן): תהיי $B \subseteq \mathbb{R}^k$ פתוחה ו־$f, g_1, \cdots, g_n : B \to \mathbb{R}$ גזירות ברציפות עבור $n+1 \leq k$.

נגדיר את הקבוצה

$$A := \{x \in B \mid g_1(x) = \cdots = g_n(x) = 0\}$$

נניח כי לכל $a \in A$ מתקיים ש־$\nabla g_1(a), \cdots, \nabla g_n(a) \in \mathbb{R}^k$ בלתי־תלויים לינארית.

נגדיר את **הלגראנז'יאן** $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \times B \to \mathbb{R}$ באמצעות

$$\mathcal{L}(\lambda, x) = f(x) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i(x)$$

תהיי $(\lambda, a) \in \mathbb{R}^n \times A$ נקודת קריטית של הלגראנז'יאן ונסמן $\hat{H} = H\mathcal{L}_{(\lambda,a)}$. אז מתקיים

1. a היא מינימום מקומי של $f|_A$ אם $H\mathcal{L}_a^\lambda$ חיובית בהחלט על $\ker(Dg_a)$ ולפי ההסיאן המוגבל זה קורה אם $0 < ((-1)^n \det\left(\hat{H}_i\right))$ לכל $2n+1 \leq i \leq k+n$
2. a היא מקסימום מקומי של $f|_A$ אם $H\mathcal{L}_a^\lambda$ שלילית בהחלט על $\ker(Dg_a)$ ולפי ההסיאן המוגבל זה קורה אם $0 < ((-1)^{n+i} \det\left(\hat{H}_i\right))$ לכל $2n+1 \leq i \leq k+n$
3. a היא אוכף של $f|_A$ אם $H\mathcal{L}_a^\lambda$ אינה מוחלטת על $\ker(Dg_a)$ ולפי ההסיאן המוגבל זה קורה אם $\det\left(\hat{H}_{2n+1}\right), \cdots, \det\left(\hat{H}_i\right)$ בעלי סימנים המתאימים לאחד משני המקרים הקודמים אבל ל־$\det\left(\hat{H}_{i+1}\right)$ יש סימן הפוך

אז נגדיר $g(x,y,z) = x+y+z-1$ ונשים לב ש־$Dg_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$ לכל $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ נובע שניתן להשתמש בשיטת הלגראנז'יאן, והלגראנז'יאן נתון על־ידי

$$\mathcal{L}(\lambda, x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - \lambda x - \lambda y - \lambda z + \lambda$$

נחשב את הנקודות הקריטיות של $\mathcal{L}$ זוהי כמובן פונקציה רציפה

$$D\mathcal{L}_{(\lambda,x,y,z)} = \begin{pmatrix} -x-y-z+1 & 2x-\lambda & 4y-\lambda & 6z-\lambda \end{pmatrix}$$

נשווה ל־0 ונפתור את מערכת המשוואות

$$\begin{gathered} 2x - \lambda = 0 \implies 2x = \lambda \\ 4y - \lambda = 0 \implies 4y = \lambda \\ 6z - \lambda = 0 \implies 6z = \lambda \\ -x-y-z+1 = 0 \implies x+y+z = 1 \end{gathered}$$

אז

$$2x = 4y = 6z \implies x = 2y = 3z$$

ולכן

$$x+y+z = 1 \underset{x=2y}{\iff} 3y + z = 1 \iff z = 1 - 3y$$

אבל אבל

$$x = 3z \iff x = 3 - 9y \iff 11y = 3 \iff y = \frac{3}{11}$$

אז בסך־הכל

$$x = \frac{6}{11}, y = \frac{3}{11}, z = \frac{2}{11}, \lambda = \frac{12}{11}$$

ואכן גם מתקיימים

$$x+y+z=\frac{3}{11}+\frac{6}{11}+\frac{2}{11}=\frac{11}{11}=1\checkmark$$
$$\frac{12}{11}=2\cdot\frac{6}{11}=4\cdot\frac{3}{11}=6\cdot\frac{2}{11}\checkmark$$

ולכן יש נקודה אחת חשודה לקיצון והיא $(\lambda,x,y,z)=\left(\frac{12}{11},\frac{6}{11},\frac{3}{11},\frac{2}{11}\right)$, נחשב את ההסיאן של $\mathcal{L}$:

$$H\mathcal{L}_{(\lambda,x,y,z)}=\begin{pmatrix}0&-1&-1&-1\\-1&2&0&0\\-1&0&4&0\\-1&0&0&6\end{pmatrix}$$

צריך לבדוק את המינורים הראשיים מסדר מסדרים 3 ו־4.

מתקיים $(-1)^3\det(H\mathcal{L})=44$ ועבור המינור מסדר 3 מתקיים $(-1)^3\det\begin{pmatrix}0&-1&-1\\-1&2&0\\-1&0&4\end{pmatrix}=6$ ולכן זו נקודת מינימום יחידה.

$\square$

שאלה 2

שאלה 4 ממטלה 11 של דניאל: תהיי $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ הנתונה על־ידי $f(x,y,z)=2x+2y+3z$.

נסביר ונמצא למה f מקבלת ערך מקסימלי ומינימלי בקבוצה $A:=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x^2+y^2+3z^3=35,\ \ x+y+z=7\}$.

הוכחה: נטען ש־A קבוצה קומפקטית ולכן f שהיא פונקציה רציפה (פולינום בכמה משתנים) מקבלת עליה מינימום ומקסימום.

נגדיר $B:=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x^2+y^2+3z^3=35\}$ ונטען ש־B סגורה וחסומה ולכן לפי משפט היינה־בורל נקבל שהיא קומפקטית.

סגורה: אם $(x_n,y_n,z_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה ב־B שמתכנסת ל־(x,y,z) ובפרט $x_n\to x, y_n\to y, z_n\to z$.

לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $x_n^2+y_n^2+3z_n^2=35$ לכן מאריתמטיקה של גבולות נסיק שמתקיים $(x,y,z)=\lim_{n\to\infty}x_n^2+y_n^2+3z_n^2=35$ ולכן $(x,y,z)\in B$.

חסומה: נשים לב שמתקיים $\frac{x^2}{35}+\frac{y^2}{35}+\frac{z^2}{\frac{35}{3}}=1$ וזה בבירור חסום כי לדוגמה x מקבל ערך מקסימלי כאשר $y=z=0$ ואז $x=\sqrt{35}$.

אז B סגורה וחסומה ולכן לפי משפט היינה־בורל היא קומפקטית.

נגדיר $C:=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x+y+z=7\}$, זו בבירור קבוצה לא חסומה אבל זו כן קבוצה סגורה כי אם $(x_n,y_n,z_n)_{n=1}^{\infty}$ קבוצה ב־C שמתכנסת ל־(x,y,z) בפרט $x_n\to x, y_n\to y, z_n\to z$.

לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $x_n+y_n+z_n=7$ ולכן מאריתמטיקה של גבולות נסיק שמתקיים $x+y+z=\lim_{n\to\infty}x_n+y_n+z_n=7$ ולכן $(x,y,z)\in C$, אז C קבוצה סגורה.

נשים לב ש־$A=B\cap C$ ובהרצאה ראינו שחיתוך סופי של קבוצות סגורות הוא סגור (זה נובע מכך שאיחוד סופי של קבוצות פתוחות הוא פתוח, וקבוצה סגורה היא קבוצה שהמשלים שלה הוא פתוח ועם כללי דה־מורגן נקבל את הנדרש).

אז A קבוצה סגורה אבל מהגדרה $A\subseteq B$ ש־B קומפקטית וראינו שתת־קבוצה סגורה של קבוצה קומפקטית היא קומפקטית, ולכן A קומפקטית ולכן בהכרח f שרציפה מקבלת עליה מינימום ומקסימום.

אם f מינימום/מקסימום בנקודה פנימית של A, נוכל לבדוק לפי איפוס הגרדיאנט

$$\nabla f(x,y,z)=(2\ \ 2\ \ 3)\neq(0\ \ 0\ \ 0)$$

אז אין אף נקודה פנימית שבה f מקבלת מינימום/מקסימום, ולכן נצטרך להשתמש בשיטת כופלי לגראנז' (כי הנקודות קיצון מתקבלות רק על השפה של האילוצים).

נגדיר $g_1:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ על־ידי $g_1(x,y,z)=x^2+y^2+3z^2-35$ ו־$g_2:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ על־ידי $g_2(x,y,z)=x+y+z-7$ וכמובן ש־g_1,g_2 דיפרנציאביליות ברציפות כי אלו פולינומים ומתקיים

$$\nabla g_1(x,y,z)=(2x\ \ 2y\ \ 6z),\ \ \nabla g_2(x,y,z)=(1\ \ 1\ \ 1)$$

יש לנו בפועל שלוש משוואות של אילוצים שאנחנו יכולים להוציא

$$\nabla f(x,y,z)=\lambda\nabla g_1(x,y,z)+\mu\nabla g_2(x,y,z)\iff(2\ \ 2\ \ 3)=\lambda(2x,2y,6z)+\mu(1\ \ 1\ \ 1)$$

בבירור $\lambda\neq 0$ כי $(2\ \ 2\ \ 3)$ ו־$(1\ \ 1\ \ 1)$ בלתי תלויים לינארית ולכן $y=\frac{2-\mu}{\lambda}=x$ ואם נציב $x=y$ באילוץ השני נקבל

$$z=7-2x$$

ומהצבה באילוץ הראשון

$$2x^2+3(7-2x)^2=35\iff x=2,4$$

ולכן הנקודות הן $(2,2,3),(4,4,-1)$ ומתקיים $f(2,2,3)=17, f(4,4,-1)=13$ ולכן המינימום הוא 13 בנקודה $(4,4,-1)$ והמקסימום הוא 17 בנקודה$(2,2,3)$.

אפשר גם בצורה אלימה לפתור את מערכת המשוואות אז נקבל מערכת משוואות

$$2=2x\lambda+\mu\implies\mu=2-2x\lambda$$
$$2=2y\lambda+\mu\implies\mu=2-2y\lambda$$
$$3=6z\lambda+\mu\implies\mu=3-6z\lambda$$
$$x^2+y^2+3z^2=35$$
$$x+y+z=7$$

אבל אני אוותר. $\square$

שאלה 3

שאלה 7 תרגיל בית 11: בכל סעיף נתונה קבוצה ואינטגרל, נשתמש במשפט חילוף משתנה כדי לחשב את האינטגרל על הקבוצה.

משפט 0.1 (משפט חילוף משתנה – תזכורת): תהיינה $A, B \subseteq \mathbb{R}^k$ קבוצות פתוחות ו־$g : A \to B$ דיפאומורפיזם (חד־חד ערכית, על, גזירה ברציפות ובעלת הופכית גזירה ברציפות) ו־$f : B \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה.
אז f אינטגרבילית על B אם ורק אם הפונקציה $|x \mapsto (f \circ g)(x)|\det(Dg_x)$ אינטגרבילית על A ובמקרה זה מתקיים

$$\int_B f(t)dt = \int_A (f \circ g)(x)|\det(Dg_x)|dx$$

סעיף א'

תהיי $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - xy + y^2 < 2\}$ ונחשב את האינטגרל $\int_B (x^2 - xy + y^2)dxdy$ באמצעות משפט חילוף משתנה.
פתרון: הקבוצה B מהווה אליפסה סביב הראשית שאינה מקבילה לצירים, ולכן נצטרך לבצע חילוף משתנה לינארי כדי להפוך את האליפסה לעיגול.
נשתמש בהשלמה לריבוע:

$$x^2 - xy + y^2 = \left(x - \frac{1}{2}y\right)^2 - \frac{1}{4}y^2 + y^2 = \left(x - \frac{1}{2}y\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2$$

נבצע את חילוף המשתנה הלינארי $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - \frac{1}{2}y \\ \frac{\sqrt{3}}{2}y \end{pmatrix}$ ואז

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}^{-1}$$

נזכר שמתקיים $\det(T^{-1}) = \frac{1}{\det(T)}$ ולכן

$$dxdy = \left|\det(T^{-1})\right|dudv = \frac{2}{\sqrt{3}}dudv$$

נסמן $A = T(B) = B_2(0) \setminus \{0\}$ אז ממשפט חילוף משתנה, הפונקציה f אינטגרבילית על B אם ורק אם $f \circ T^{-1}$ אינטגרבילית על A ומתקיים

$$\int_B f(x,y)dxdy = \int_A u^2 + v^2 \cdot \frac{s}{\sqrt{3}}dudv = \frac{2}{\sqrt{3}} \underset{\text{קוטביות}}{=} \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^2 dr d\theta = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^{r=2} d\theta = \frac{24\pi}{3\sqrt{3}}$$

$\square$

סעיף ב'

תהיי

$$C := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y > 0,\ 1 < xy < 3,\ x^2 < y^2 < x^2 + 1\}$$

ונחשב באמצעות משפט חילוף משתנה את האינטגרל

$$\int_C (y^2 - x^2)^{xy}(x^2 + y^2)dxdy$$

פתרון: נשים לב שמהאילוץ $x^2 < y^2 < x^2 + 1$ אנחנו מקבלים $0 < y^2 - x^2 < 1$ לכן הגיוני שנגדיר $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ y^2 - x^2 \end{pmatrix}$ ואז

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x \\ -2x & 2y \end{pmatrix}$$

אז

$$\det(J) = 2y \cdot .y + x \cdot 2x = 2(x^2 + y^2)$$

ולכן

$$dxdy = \left|\det(J^{-1})\right|dudv \Longrightarrow dxdy = \frac{1}{2(x^2+y^2)}dudv$$

אז תחום האינטגרציה שלנו יהיה $A = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < u < 3, 0 < v < 1\}$ ולכן

$$\int_C f(x,y)dxdy = \int_A \frac{v^u\cancel{(x^2+y^2)}}{2\cancel{(x^2+y^2)}}dudv = \frac{1}{2}\int_A v^u dudv = \frac{1}{2}\int_0^1\int_1^3 v^u dudv = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\frac{v^u}{\ln(v)}\right]_{u=1}^{u=3}dv$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{v^3}{\ln(v)} - \frac{v}{\ln(v)}dv$$

אבל האינטגרל האחרון הוא לא אינטגרל שאנחנו יודעים לחשב, ולכן נשתמש במשפט פוביני

$$\frac{1}{2}\int_0^1\int_1^3 v^u dudv = \frac{1}{2}\int_1^3\int_0^1 v^u dvdu = \frac{1}{2}\int_1^3 \left[\frac{v^{u+1}}{u+1}\right]_{v=0}^{v=1} = \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{1^{u+1}}{u+1}du = \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{1}{u+1}du = \frac{1}{2}[\ln(u+1)]_{u=1}^{u=3}$$

$$= \frac{1}{2}(\ln(4) - \ln(2)) = \frac{1}{2}\ln(2)$$

$\square$

שאלה 4

מטלה 12 שאלה 1: תהי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ הפונקציה הנתונה על־ידי

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

נגדיר $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ על־ידי $g(x) = f(x)f(1-x)$.

סעיף א'

נוכיח כי g היא פונקציה חלקה (גזירה אינסוף פעמיים) עם תומך $\operatorname{supp}(g) = [0,1]$.

הוכחה: ניזכר

$$\operatorname{supp}(g) := \overline{\{x \in \mathbb{R}^k \mid g(x) \neq 0\}} \subseteq \mathbb{R}$$

עבור $x > 0$ בבירור f חלקה כי היא מזדהה עם הפונקציה החלקה $e^{-\frac{1}{x}}$ וגם אם $x \leq 0$ אז f מזדהה עם הפונקציה החלקה 0.
נשים לב של־g יש לנו 3 חלוקות:

1. $x > 1$ – במקרה זה, $f(x) > 0$ אבל $1 - x \leq 0$ ולכן $f(1-x) = 0$ ולכן $g(x) = 0$
2. $x < 1$ – במקרה זה $f(x) = 0$ ולכן $g(x) = 0$
3. $0 < x < 1$ במקרה זה מתקיים $f(x) > 0$ וגם $f(1-x) > 0$ כי $1 - x > 0$ ולכן במקרה זה $g(x) \neq 0$

בסך־הכל מצאנו שמתקיים

$$\{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \neq 0\} = (0,1)$$

ולכן כמובן שמתקיים

$$\operatorname{supp}(g) = \overline{\{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \neq 0\}} = \overline{(0,1)} = [0,1]$$

וכמובן ש־g חלקה כי בכל קטע היא מזדהה עם פונקציה חלקה (ובפרט מרציפות הגבול בשאיפה ל־0 זהה). $\square$

סעיף ב'

תהי $Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_k, b_k] \subseteq \mathbb{R}^k$ תיבה לא מנוונת. נגדיר $\phi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ על־ידי

$$\phi(x) = \prod_{i=1}^{k} g\left(\frac{x_i - a_i}{b_i - a_i}\right)$$

נוכיח כי ϕ היא פונקציה חלקה עם תומך $\operatorname{supp}(\phi) = Q$.

הוכחה: אנחנו מחפשים את $\operatorname{supp}(\phi) = \overline{\{x \in \mathbb{R} \mid \phi(x) \neq 0\}}$.
היות ו־ϕ היא מכפלה של g_i אז אנחנו צריכים שכל $g_i(x) \neq 0$. ממה שמצאנו בסעיף הקודם, זה קורה אם ורק אם

$$0\frac{\leq (x_i - a_i)}{b_i - a_i} \leq 1 \iff 0 \leq x_i - a_i \leq b_i - a_i \iff a_i \leq x_i \leq b_i$$

משמע $x_i \in [a_i, b_i]$ ולכן

$$\{x \in \mathbb{R} \mid \phi(x) \neq 0\} = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_k, b_k] = Q$$

אבל Q היא קבוצה קומפקטית ב־$\mathbb{R}^k$ ולכן סגורה, על־כן $\overline{Q} = Q$ ולכן אכן מתקיים $\operatorname{supp}(\phi) = \overline{\{x \in \mathbb{R} \mid \phi(x) \neq 0\}} = Q$. $\square$

שאלה 5

מטלה 12 שאלה 2: תהיי $A \subseteq \mathbb{R}^k$ קבוצה פתוחה ו־$f : A \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה.

סעיף א'

נוכיח כי אם f בעלת תומך קומפקטי אז f אינטגרבילית על A ומתקיים

$$\int_A f(x)dx = \int_{\text{supp}(f)} f(x)dx$$

הוכחה: נגדיר $f_+ = \max\{f, 0\}, f_- = -\min\{f, 0\}$.
f אינטגרבילית על A ולכן f_-, f_+ אינטגרביליות, כאשר אנחנו אומרים שהן אינטגרביליות אומר שמתקיים

$$\int_A f_\pm(x)dx := \sup\left\{\int_D f_\pm(x)dx \mid \text{קומפקטית בעלת נפח } D \subseteq A\right\} < \infty$$

f בעלת תומך קומפקטי, ולכן $f = 0$ לכל $x \in A \setminus \text{supp}(f)$ ולכן

$$\int_A f(x)dx = \int_{\text{supp}(f)} f(x)dx + \int_{A \setminus \text{supp}(f)} f(x)dx = \int_{\text{supp}(f)} f(x)dx$$

$\square$

שאלה 6

מטלה 13 שאלה 7 סמסטר א' 2025: תהיי $f:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^k$ פונקציה ליפשצית. נראה שאם $N\subseteq\mathbb{R}^k$ ממידה אפס, אז $f(N)$ ממידה אפס.

הוכחה: תהיי $N\subseteq\mathbb{R}^k$ ממידה אפס ויהי $\varepsilon>0$.

f ליפשיצית, ומכך שכל הנורמות שקולות אז בפרט הנורמות $\|\cdot\|_2,\|\cdot\|_\infty$ שקולות ולכן קיים L כך שלכל $x,y\in\mathbb{R}^k$ מתקיים

$$\|f(x)-f(y)\|_\infty\le L\|x-y\|_\infty$$

(מהלשפיציות ומהשקילות נורמות).

תהיי $B=\prod[a_i,b_i]$ תיבה, אז $f(B)$ מוכלת בתיבה שאורך צלעותיה הן $L(b_i-a_i)$.

N ממידה אפס ולכן קיים אוסף $\{B_n\}_{n=1}^\infty$ כך ש-B_n $N\subseteq\cup_{n=1}^\infty B_n$ ומתקיים

$$\sum_{n=1}^\infty V(B_n)<\frac{\varepsilon}{L^k}$$

ולכן

$$f(N)\subseteq f\left(\bigcup_{n=1}^\infty B_n\right)\subseteq\bigcup_{n=1}^\infty f(B_n)$$

ולכן

$$\sum_{n=1}^\infty V(f(B_n))\le\sum_{n=1}^\infty V(LB_n)\underset{\text{הגדרת נפח תיבה}}{=}L^k\sum_{n=1}^\infty V(B_n)=L^k\frac{\varepsilon}{L^k}<\varepsilon$$

$\square$

שאלה 7

נמצא את ערכי $\alpha \in \mathbb{R}$ עבורם האינטגרל הבא מתכנס

$$\int_B \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{\alpha}{2}}} dxdydz$$

כאשר

$$B := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 > 1, x,y,z > 0\}$$

פתרון: אם נעבור לכדוריות, מתקיים $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \varphi, \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ כי $x, z > 0$ ולכן

$$B = \left\{(r,\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^3 \mid r^2 > 1, \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

ואז האינטגרל שלנו הוא

$$\int_1^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{r^{\frac{\alpha}{2}}} r^2 \sin(\varphi) d\theta d\varphi dr = \int_1^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^{\frac{4-\alpha}{2}} \sin(\varphi) d\theta d\varphi dr$$

נשים לב שאפשר לשנות סדר אינטגרציה מפוביני כי הכל רציף ולכן אינטגרבילי, אבל נשים לב

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\varphi) d\varphi = [-\cos(\varphi)]_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} = -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos(0) = 1$$

וכן

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{2}$$

אז אנחנו רק צריכים לבדוק מתי האינטגרל הבא מתכנס

$$\int_1^\infty r^{\frac{4-\alpha}{2}} dr$$

נזכר ש־$r > 1$ ולכן מאינפי 2 אנחנו יודעים שהאינטגרל מתכנס אם ורק אם $6 < \alpha \iff 4-\alpha < -2 \iff \frac{4-\alpha}{2} < -1$.
לכן האינטגרל מתכנס אם ורק אם $\alpha > 6$. $\square$

שאלה 8

מטלה 13 שאלה 1: נוכיח כי קיימת פונקציה רציפה יחידה $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ עבורה לכל $x\in[0,1]$ מתקיים

$$f(x)=x+\frac{1}{2}\sin(f(x))$$

הוכחה: נעזר ברמז ונרצה להשתמש במשפט העתקה מכווצת.

משפט 0.2 (משפט העתקה מכווצת – תזכורת): יהי (X,d) מרחב מטרי שלם ו־$g:X\to X$ העתקה מכווצת. אז ל־f יש נקודת שבת אחת.

הגדרה 0.2 (העתקה מכווצת): $g:X\to X$ נקראת **העתקה מכווצת** אם יש $0<\lambda<1$ כך שלכל $x,y\in X$ מתקיים $d(f(x),f(y))\le\lambda d(x,y)$.

נגדיר $T:C[0,1]\to C[0,1]$ כאשר $C[0,1]=\{f:[0,1]\to\mathbb{R}\mid f \text{ רציפה}\}$ על־ידי $T(f)(x)=x+\frac{1}{2}\sin(f(x))$ ונזכר שבמרחב הפונקציות הרציפות אנחנו עובדים עם נורמת סופרמום $\|f\|_\infty=\sup_{x\in[0,1]}|f(x)|$.
לכל $x\in[0,1]$ מתקיים עבור $f,g\in C[0,1]$

$$|T(f)(x)-T(g)(x)|=\left|x+\frac{1}{2}\sin(f(x))-x-\frac{1}{2}\sin(g(x))\right|=\frac{1}{2}|\sin(f(x))-\sin(g(x))|$$

נשים לב ש־$\sin(x)$ עומדת בתנאי משפט לגראנז', ולכן קיימת $c\in(0,1)$ כך שמתקיים

$$|\sin(f(x))-\sin(g(x))|\le|f(x)-g(x)||\cos(c)|$$

ולכן

$$|T(f)(x)-T(g)(x)|\le\frac{1}{2}|f(x)-g(x)||\cos(c)|\underset{|\cos(c)|\le1}{\le}\frac{1}{2}|f(x)-g(x)|$$

וכשניקח סופרמום

$$\|T(f)(x)-T(g)(x)\|_\infty\le\frac{1}{2}\|f-g\|_\infty$$

ולכן T היא העתקה מכווצת עם $\lambda=\frac{1}{2}$, וממשפט העתקה מכווצת קיימת ל־T נקודת שבת אחת, קרי פונקציה רציפה אחת המקיימת $T(f)=f$, משמע

$$T(f)(x)=x+\frac{1}{2}\sin((f(x)))=f(x)$$

□

שאלה 9

מטלה 13 שאלה 2: תהיי $S \subseteq \mathbb{R}^k$ קבוצה קשירה מסילתית ו־$f : S \to \mathbb{R}$ פונקיה רציפה.

הגדרה 0.3 (תזכורת – קבוצה קשירה מסילתית): נגיד שקבוצה $S \subseteq \mathbb{R}^k$ היא קשירה מסילתית אם לכל $x_1, x_2 \in S$ קיימת מסילה $\gamma : [0,1] \to S$ כך ש־$\gamma(0) = x_0, \gamma(1) = x_1$.

סעיף א'

יהיו $a, b \in S$ ונניח שמתקיים $f(a) < f(b)$. נראה כי לכל $t \in (f(a), f(b))$ קיים $s \in S$ כך ש־$f(s) = t$.

הוכחה: S קשירה מסילתית ולכן יש $\gamma : [0,1] \to S$ כך שמתקיים $\gamma(0) = a, \gamma(1) = b$ (γ רציפה) ונסתכל על ההרכבה $f \circ \gamma : [0,1] \to \mathbb{R}$ שהיא רציפה כהרכבה של פונקציות רציפות.

נשים לב $\mathrm{Im}(f \circ \gamma) = [f(a), f(b)]$ (כי $f(\gamma(0)) = f(a), f(\gamma(1)) = f(b)$).

ממשפט ערך הביניים, $f \circ \gamma$ מקבלת כל ערך בין $f(a)$ לבין $f(b)$, גם בקטע הסגור וגם בקטע הפתוח ולכן קיים $s \in [0,1]$ כך ש־$f(\gamma(s)) = t$ לכל $t \in (f(a), f(b))$. □

סעיף ב'

נראה כי למשוואה הבאה יש פיתרון ב־$B_2(0) \subseteq \mathbb{R}^2$

$$x^2 + 2y^2 = e^{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2} \cos\left(e^{-\sin\left(\frac{y}{x+2}\right)}\right)$$

הוכחה: נגדיר $F(x,y) = x^2 + 2y^2 - e^{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2} \cos\left(e^{-\sin\left(\frac{y}{x+2}\right)}\right)$.

נשים לב ש־F רציפה: $x^2 + 2y^2$ רציפה כפולינום, $e^{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}$ גם־כן רציפה כי e חלקה וכן הרכבה של רציפות זה רציף.

נשאר לבחון האם $\cos\left(e^{-\sin\left(\frac{y}{x+2}\right)}\right)$ מהווה פונקצייה רציפה ב־$B_2(0)$ (הכדור הפתוח סביב 0 מרדיוס 2): נבחן את $\frac{y}{x+2}$, ונשים לב $x + 2 \not\in B_2(0)$ כי $x > 2$ ולכן הפונקציה $\frac{y}{x+2}$ היא פונקציה רציפה כמנה של פונקציות רציפות.

אז כל ההרכבה $\cos\left(e^{-\sin\left(\frac{y}{x+2}\right)}\right)$ היא רציפה כהרכבת פונקציות רציפות ב־$B_2(0)$, ולכן F היא סכום, מכפלה והרכבה של פונקציות רציפות ולכן רציפה.

אנחנו יודעים ש־$B_2(0)$ הוא קשיר מסילתית כי אם נגדיר $\gamma : [0,1] \to B_2(0)$ על־ידי $\gamma(t) = tx + (1-t)y$ עבור $x, y \in B_2(0)$ כי אנחנו יודעים שמתקיים $\|x\| < 2, \|y\| < 2$ ולכן

$$\|tx + (1-t)y\| = \|tx + (1-t)y - (t0 + (1-t)0)\| \le t\|x\| + (1-t)\|y\| < 2t + 2(1-t) = 2$$

לכן F רציפה על קבוצה קשירה מסילתית ולכן ניתן להשתמש בסעיף א'. נשים לב שמתקיים

$$F(0,0) = 0^2 + 2 \cdot 0^2 - e^{\left(0-\frac{1}{2}\right)^2} \cos\left(e^{-\sin\left(\frac{0}{0+2}\right)}\right) = -e^{\frac{1}{4}} \cos(1) < 0$$

ומצד שני

$$F(1,1) = 1^2 + 2 \cdot 1^2 - e^{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} \cos\left(e^{-\sin\left(\frac{1}{1+2}\right)}\right) = 3 - e^{\frac{1}{4}} \cos\left(e^{-\sin\left(\frac{1}{3}\right)}\right)$$

ברור שמתקיים $e^{-\sin\left(\frac{1}{3}\right)} < 1$ ולכן $\cos\left(e^{-\sin\left(\frac{1}{3}\right)}\right) < 1$ אז

$$F(1,1) < 3 - e^{\frac{1}{4}} > 0$$

לכן ממשפט ערך הממוצע שראינו בסעיף א' נובע שיש פיתרון למשוואה. □

סעיף ג'

יש טעות בשאלה, השאלה הנכונה היא להראות שהקבוצה $S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 \ge 1\right\}$ אינה קשירה מסילתית.

הוכחה: נעזר ברמז ונסתכל על הפונקציה $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ הנתונה על־ידי $f(x,y) = x$ ראינו שפונקציית ההטלה היא פונקציה רציפה.

מסעיף א', פונקציה רציפה על מרחב קשיר מסילתית מקיימת את משפט ערך הביניים.

ניקח את הנקודות $(-2,0), (2,0)$ ולכן מסעיף א' לכל $t \in (f(-2,0), f(2,0)) = (-2,2)$ יש $s \in S$ כך שמתקיים $f(s) = 0$, אבל מהגדרת S מתקיים $x^2 \ge 1 + y^2$ משמע $|x| \ge 1$ משמע $x \ge 1$ או $x \le 1$ אבל אז לא ייתכן $-1 < x < 1$ וזו סתירה. □

שאלה 10

מטלה 13 שאלה 5: תהיי $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה ברציפות ונניח כי $g(0,0)=0$. עבור $\varepsilon>0$ נגדיר

$$g_\varepsilon(x,y)=g(x,y)+\varepsilon(x+y)$$

סעיף א'

נוכיח כי קיים $\varepsilon_0>0$ כך שלכל $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ קיימת $\delta>0$, סביבה U של $(0,0)$ ופונקציה $f_\varepsilon:(-\delta,\delta)\to\mathbb{R}$ כך שלכל $(x,y)\in U$ מתקיים

$$y=f_\varepsilon(x)\iff g_\varepsilon(x,y)=0$$

הוכחה: מזכיר את משפט הפונקציה הסתומה.

משפט 0.3 (תזכורת – משפט הפונקציה הסתומה): תהיינה $A\subseteq\mathbb{R}^k, B\subseteq\mathbb{R}^m$ פתוחות ו־$G:A\times B\to B$ גזירה ברציפות. נניח שמתקיים $(x_0,y_0)\in A\times B$ ומתקיים $G(x_0,y_0)=0$ וכן כי $\left(\frac{\partial G_i}{\partial y_i}(x_0,y_0)\right)_{1\le i,j\le m}$ הפיכה.
אז יש $U\subseteq A\times B$ פתוחה סביב (x_0,y_0) ו־$V\in\mathbb{R}^k$ פתוחה ו־$f:V\to B$ גזירה ברציפות כך שלכל $(x,y)\in U$ מתקיים $f(x)=y\iff G(x,y)=0$.

מהנתון מתקיים $g_\varepsilon(0,0)=g(0,0)+\varepsilon(0+0)=0$ ומתקיים גם

$$\frac{\partial g_\varepsilon}{\partial y}(x,y)=g_y(x,y)+\varepsilon\Longrightarrow\frac{\partial g_\varepsilon}{\partial y}(0,0)=g_y(0,0)+\varepsilon$$

אז יש לנו שתי אופציות: $g_y(0,0)=0$ או $g_y(0,0)\neq0$.
אם זה השני, סיימנו ומשפט הפונקציה הסתומה נותן לנו את הנדרש ישירות.
אחרת, $\frac{\partial g_\varepsilon}{\partial y}(0,0)=\varepsilon>0$ ולכן עדיין תנאי משפט הפונקציה הסתומה מתקיימים.
אז קיימת סביבה $\varepsilon_0>0$ כך שלכל $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ מתקיים $\frac{\partial g_\varepsilon}{\partial y}(0,0)\neq0$ ולכן ממשפט הפונקציה הסתומה יש $\delta>0$ כך ש־$f_\varepsilon:(-\delta,\delta)\to\mathbb{R}$ וסביבה של $(0,0)$ כך שמתקיים לכל $(x,y)\in U$

$$g_\varepsilon(x,y)=0\iff y=f_\varepsilon(x)$$

□

סעיף ב'

נוכיח כי קיים $\varepsilon_1>0$ כך שלכל $\varepsilon\in(0,\varepsilon_1)$ הפונקציה f_ε הפיכה בסביבה של 0 עם הופכית גזירה ברציפות.
הוכחה: מזכיר את משפט הפונקציה ההפוכה.

משפט 0.4 (תזכורת – משפט הפונקציה ההפוכה): תהיי $f:A\to\mathbb{R}^k$ עבור $A\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה, f גזירה ברציפות ב־A ותהיי $a\in A$ עבורה $\det(Df)_a\neq0$.
אז יש $U\subseteq A$ פתוחה, $a\in U$ כך ש־$f|_U$ חד־חד ערכית, $f(U)=V$ פתוחה ו־$f^{-1}|_V$ גזירה ברציפות ומתקיים $\left(Df^{-1}\right)_y=\left[(Df)_{f^{-1}(y)}\right]^{-1}$ לכל $y\in V$.

ממשפט הפונקציה הסתומה קיבלנו

$$g_\varepsilon(x,f_\varepsilon(x))=0$$

נגזור לפי כלל שרשרת

$$\frac{\partial g_\varepsilon}{\partial x}(x,f_\varepsilon(x))+\frac{\partial g_\varepsilon}{\partial y}(x,f_\varepsilon(x))\cdot f_\varepsilon'(x)=0\Longrightarrow f_\varepsilon'(x)=-\frac{g_{\varepsilon,x}(x,f_\varepsilon(x))}{g_{\varepsilon,y}(x,f_\varepsilon(x))}$$

עבור $x=0, f_\varepsilon(0)=0$ ולכן

$$f_\varepsilon'(0)=-\frac{g_{\varepsilon,x}(0,0)}{g_{\varepsilon,y}(0,0)}=-\frac{g_x(0,0)+\varepsilon}{g_y(0,0)+\varepsilon}$$

ולכן עבור $\varepsilon>0$ קטן דיו נקבל $f_\varepsilon'(0)\neq0$, ולכן קיים $\varepsilon_1>0$ שלכל $\varepsilon\in(0,\varepsilon_1)$ מתקיים $f_\varepsilon'(0)\neq0$ ולכן אנחנו עומדים בתנאי משפט הפונקציה ההפוכה וממנה נקבל את הנדרש. □

סעיף ג'

עבור המקרה בו f_ε הפיכה בסביבה של 0 נביע את $\left(f_\varepsilon^{-1}\right)'(0)$ במונחי g ונגזורתיה.

פתרון: באינפי 1 ראינו שמתקיים

$$\left(f_\varepsilon^{-1}\right)'(0) = \frac{1}{f_\varepsilon'(f_\varepsilon^{-1}(0))}$$

ראינו כבר שמתקיים $f_\varepsilon(0) = 0$ ולכן $f_\varepsilon^{-1}(0) = 0$ ואז

$$\left(f_\varepsilon^{-1}\right)'(0) = \frac{1}{f_\varepsilon'(0)} = -\frac{g_{\varepsilon,y}(0,0)}{g_{\varepsilon,x}(0,0)} = -\frac{g_y(0,0)+\varepsilon}{g_x(0,0)+\varepsilon}$$

$\square$

שאלה 11

מטלה 13 שאלה 4: תהיי $A \subseteq \mathbb{R}^3$ החיתוך בין הפרבולואיד $z = x^2 + y^2$ והמישור $z + x = 2$. נוכיח כי קיימת ב-A נקודה הרחוקה ביותר מהראשית ונמצא אותה.

פתרון: גיאומטרית: אנחנו מחפשים חיתוך בין משטח לבין פרבלואיד וזה נותן לנו חישוק, אז ברור שיש נקודה שרחוקה ביותר מהראשית (חישוק זו קבוצה קומפקטית כי היא סגורה וחסומה).

נגדיר פורמלית, אנחנו מחפשים את החיתוך בין שתי הצורות ולכן עם השלמה לריבוע נקבל

$$A \coloneqq \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2,\ z + x = 2\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{4}\right\}$$

זה בעצם השפה של מעגל ברדיוס $\frac{3}{2}$ שמוזז 1 שמאלה על ציר ה־x.

זו השפה של מעגל מוזז ולכן כמובן סגורה, וזאת תת־קבוצה של מעגל ומעגל הוא קבוצה קומפקטית אז A קומפקטית (כי תת־קבוצה סגורה של קבוצה קומפקטית היא קומפקטית), אפשר גם להראות ישירות מהגדרה (זה לא ארוך).

נגדיר $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ על־ידי $f(x,y) = x^2 + y^2 + \left(x^2 + y^2\right)^2 = x^2 + y^2 + x^4 + y^4 + 2x^2y^2$ (כי $z = x^2 + y^2$) נזכר ששורש זו פעולה שמשמרת מינימום ומקסימום ולכן ניתן לוותר עליה ופונקציית האילוץ היא $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ על־ידי $g(x,y) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 - \frac{9}{4}$.

אלו כמובן שתי פונקציות רציפות והן גזירות ברציפות כפולינומים ומתקיים

$$\nabla f(x,y) = \left(2x + 4x(x^2 + y^2)\ \ 2y + 4y(x^2 + y^2)\right)$$

$$\nabla g(x,y) = (2x + 1\ \ 2y)$$

נשים לב ש־$\nabla f(x,y) = 0 \iff x = y = 0$ (כי $2x(1 + 2(x^2 + y^2)) = 0 \iff x = 0 \lor 1 + 2(x^2 + y^2) = 0$ והאחרון לא אפשרי כמובן).

אז הראשית היא נקודה חשודה ומתקיים מהאילוץ על g, $g(0,0) = \frac{1}{2^2} \neq \frac{9}{4}$ ולכן היא לא נקודה מעניינת.

אז קיצון אחר מתקבל על השפה, ומשיטת כופלי לגראנז' נקבל

$$\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \Longrightarrow \begin{cases} 2x + 4x(x^2 + y^2) = 2x(1 + 2(x^2 + y^2)) = \lambda(2x + 1) \\ 2y + 4y(x^2 + y^2) = 2y(1 + 2(x^2 + y^2)) = \lambda 2y \\ \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{4} \end{cases}$$

אם $y = 0$ זה פותר את המשוואה השנייה, ואז המשוואה השלישית מניבה $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \Longrightarrow x = -2, x = 1$ ואלו שתי נקודות חשודות.

אם $x = 0$ זה פותר את המשוואה הראשונה ואז המשוואה השלישית מניבה $y^2 = \frac{9}{4} \iff y = \pm\frac{3}{2}$ ולכן זה עוד צמד נקודות חשודות.

אם גם $x \neq 0, y \neq 0$ אז משילוב המשוואה הראשונה והשנייה נקבל

$$\frac{2x(1 + 2(x^2 + y^2))}{2x + 1} = \frac{2y(1 + 2(x^2 + y^2))}{2y} \iff \frac{2x(1 + 2(x^2 + y^2))}{2x + 1} = 1 + 2(x^2 + y^2)$$

$$\iff 2x + 4x(x^2 + y^2) = 2x + 4x(x^2 + y^2) + 1 + 2(x^2 + y^2) \iff -\frac{1}{2} = x^2 + y^2 ✗$$

ולאחרון כמובן אין פיתרון מעל $\mathbb{R}$.

אז יש לנו 4 נקודות חשודות

$$(-2,0), (1,0), \left(0, \frac{3}{2}\right), \left(0, -\frac{3}{2}\right)$$

ואם נציב ב־f נקבל

$$f(-2,0) = 20, f(1,0) = 2, f\left(0, \frac{3}{2}\right) = \frac{117}{16} = f\left(0, -\frac{3}{2}\right)$$

ולכן מקסימום מתקבל בנקודה $(-2,0,4)$ הנקודה שהכי רחוקה מהראשית על שתי הצורות. $\square$

שאלה 12

מטלה 13 שאלה 5: נכתוב כל קבוצה בקורדינאטות גליליות.

סעיף א'

$A \coloneqq \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| < y, x^2 + y^2 < z\}$.

פתרון: בגליליות מתקיים

$$0 < \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta \in [0, 2\pi) x = \rho\cos(\theta), y = \rho\sin(\theta), z = h$$

ברור שמתקיים $0 < \rho^2 < z$, וצריך להתקיים

$$|x| < y \Longrightarrow |r\cos(\theta)| = r\sin(\theta) \Longleftrightarrow |\cos(\theta)| \leq \sin(\theta)$$

אם אני אמורה לדעת מתי זה קורה זאת טעות, אבל הדסמוס אומר $\theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$, ולכן

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| < y, x^2 + y^2 < z\} = \left\{(\rho, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < \rho^2 < z, \theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right], z > 0\right\}$$

$\square$

סעיף ב'

$B \coloneqq \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y > 0, 0 < z < \frac{\pi}{2}, y < x\tan(z)\}$.

פתרון: נשים לב שעבור $0 < z < \frac{\pi}{2}$ מתקיים $0 \leq \tan(z) < \infty$ שזה תמיד נחמד.

כמובן מכך ש־$x > 0$ נובע כי $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ (יחד עם $y > 0$).

$$B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y > 0, 0 < z < \frac{\pi}{2}, y < x\tan(z)\right\} = \left\{(\rho, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < \rho, \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) < z, 0 < z < \frac{\pi}{2}\right\}$$

בגלל ש־$x, y > 0$ אז

$$y < x\tan(z) \Longleftrightarrow \frac{y}{x} < \tan(z) \Longleftrightarrow \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = z$$

ויתרתי באמצע. $\square$

שאלה 13

מטלה 13 שאלה 6: נכתוב כל קבוצה בקורדינאטות כדוריות. תזכורת:

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\ \theta\in[0,2\pi),\ \varphi\in[0,\pi],\ x=r\cos(\theta)\sin(\varphi),\ y=r\sin(\theta)\sin(\varphi),\ z=r\cos(\varphi)$$

סעיף א'

$A:=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid \frac{1}{3}z^2<x^2+y^2<3z^2\right\}$.

פתרון: ונשים לב ש־$r\neq 0$ כי זה לא מניב פיתרון לאי־שיוויון ולכן נוכל לחלק ב־r כשנצטרך. נשים לב

$$\frac{1}{3}z^2<x^2+y^2<3z^2\implies\frac{1}{3}r^2\cos^2(\varphi)<r^2\cos^2(\theta)\sin^2(\varphi)+r^2\sin^2(\theta)\sin^2(\varphi)<3r^2\cos^2(\varphi)\ (\star)$$

אז

$$r^2\cos^2(\theta)\sin^2(\varphi)+r^2\sin^2(\theta)\sin^2(\varphi)=r^2\sin^2(\varphi)(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta))\underset{\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)=1}{=}r^2\sin^2(\varphi)$$

אז

$$(\star)=\frac{1}{3}r^2\cos(\varphi)<r^2\sin^2(\varphi)<3r^2\cos^2(\varphi)\underset{r>0}{\iff}\frac{1}{3}\cos^2(\varphi)<\sin^2(\varphi)<3\cos^2(\varphi)$$

נמשיך להשתמש בזהות $\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)=1$ ונגזורתיה

$$\sin^2(\varphi)-\frac{1}{3}\cos^2(\varphi)>0\iff 1-\cos^2(\varphi)>\frac{1}{3}\cos^2(\varphi)\iff 1>\frac{4}{3}\cos^2(\varphi)\iff\cos^2(\varphi)<\frac{4}{3}\iff|\cos(\varphi)|<\frac{\sqrt{3}}{2}$$

וזה קורה כאשר $\varphi\in\left(\frac{\pi}{6},5\frac{\pi}{6}\right)$ תודה לדסמוס.

$$\sin^2(\varphi)<3\cos^2(\varphi)\iff\sin^2(\varphi)<3-3\sin^2(\varphi)\iff 4\sin^2(\varphi)<3\iff\sin^2(\varphi)<\frac{3}{4}\iff|\sin(\varphi)|<\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ובזכות דסמוס זה קורה כאשר $\varphi\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)\cup\left(2\frac{\pi}{3},\pi\right)$.

אם נחבר את התלויות נקבל $\varphi\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)\cup\left(2\frac{\pi}{3},\pi\right)$.

$$A:=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid\frac{1}{3}z^2<x^2+y^2<3z^2\right\}=\left\{(r,\theta,\varphi)\in\mathbb{R}^3\mid r>0,\theta\in[0,2\pi),\varphi\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)\cup\varphi\in\left(2\frac{\pi}{3},\pi\right)\right\}$$

□

סעיף ב'

$B:=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x,y,z>0,z^2(x^2+y^2)<x^2(x^2+y^2+z^2)\}$.

פתרון: נסמן $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ומהנתון של $x,y,z>0$ נקבל $r>0$ וגם מכך אנחנו לומדים ש־$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),\varphi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

$$x^2(x^2+y^2+z^2)\iff r^4\cos^2(\theta)\sin^2(\varphi)$$

וגם

$$z^2(x^2+y^2)=r^2\cos^2(\varphi)(r^2\cos^2(\theta)\sin^2(\varphi)+r^2\sin^2(\theta)\sin^2(\varphi))=r^2\cos^2(\varphi)(r^2\sin^2(\varphi)(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)))$$
$$\underset{\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)=1}{=}r^2\cos^2(\varphi)(r^2\sin^2(\varphi))=r^4\cos^2(\varphi)\sin^2(\varphi)$$

אז

$$r^4\cos^2(\varphi)\sin^2(\varphi)<r^4\cos^2(\theta)\sin^2(\varphi)\underset{r>0}{\iff}\cos^2(\varphi)\sin^2(\varphi)<\cos^2(\theta)\sin^2(\varphi)\underset{\sin^2(\varphi)>0,\varphi\in(0,\frac{\pi}{2})}{\iff}\cos^2(\varphi)<\cos^2(\theta)$$

אז בסך־הכל

$$B=\left\{(r,\theta,\varphi)\in\mathbb{R}^3\mid r>0,\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),\varphi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),\cos^2(\varphi)<\cos^2(\theta)\right\}$$

□

שאלה 14

מטלה 13 שאלה 7: נחשב את הנפח שכלוא בין הצילינדרים עם $a>0$

$$x^2+y^2=a^2, x^2+z^2=a^2, y^2+z^2=a^2$$

פתרון: אני רוצה לחשב את הנפח של

$$A=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2\le a^2, x^2+z^2\le a^2, y^2+z^2\le a^2\right\}$$

כמובן שנשתמש בקורדינאטות גליליות (דה) $x=r\cos(\theta), y=r\sin(\theta), z=z$.
כל הצילנדרים סימטריים ולכן מספיק שנסתכל על אחד הכיוונים, נניח הכיוון שבו $x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$ (יש לנו בסך־הכל $2^3=8$ כיוונים אז נצטרך לכפול בסוף ב־8), וברגע שהגבלנו את עצמנו לציר החיובי אנחנו יודעים בהכרח שמתקיים $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$.
ברור שמתקיים $0\le r=\sqrt{x^2+y^2}<a$ ונשים לב שגם מתקיים

$$\begin{cases} x^2+z^2\le a^2 \implies z\le\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-r^2\cos^2(\theta)} \\ y^2+z^2\le a^2 \implies z\le\sqrt{a^2-y^2}=\sqrt{a^2-r^2\sin^2(\theta)} \end{cases}$$

אנחנו כבר יודעים ש־$\cos(x)\ge\sin(x)$ בקטע $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ ולכן גם בקטע הזה $\sqrt{a^2-x^2}\ge\sqrt{a^2-y^2}$ וזה כמובן סימטרי בקטע השני ולכן פשוט ניקח את אחד מהם ונכפול ב־2.
את סדר האינטגרציה נקבע באמצעות משפט פוביני בהתאם למה שיהיה לנו נוח.

$$8\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-r^2\cos^2(\theta)}} dzdrzd\theta = 16\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^a r\sqrt{a^2-r^2\cos^2(\theta)}drd\theta=(\star)$$

נחשב בנפרד כי זה ארוך ונעשה החלפת משתנה

$$\int r\sqrt{a^2-r^2\cos^2(\theta)}dr \underset{\substack{x=a^2-r^2\cos^2(\theta)\\ -\frac{1}{2\cos^2(\theta)}dx=rdr}}{=} \frac{-1}{2\cos^2(\theta)}\int\sqrt{x}dx=-\frac{1}{2\cos^2(\theta)}\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}=\frac{-x^{\frac{3}{2}}}{3\cos^2(\theta)}=\frac{\left(r^2-\frac{a^2}{\cos^2(\theta)}\right)\sqrt{a^2-r^2\cos^2(\theta)}}{3}$$

ובחזרה לעניינו

$$(\star)=16\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{\left(r^2-\frac{a^2}{\cos^2(\theta)}\right)\sqrt{a^2-r^2\cos^2(\theta)}}{3}\right]_{r=0}^{r=a}=\frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(a^2-\frac{a^2}{\cos^2(\theta)}\right)\sqrt{a^2(1-\cos^2(\theta))}+\frac{a^3}{\cos^2(\theta)}d\theta\ (\star\star)$$

גם את האינטגרל הזה אנחנו עוד יודעים לחשב אבל זרקתי למחשבון כי אני לא שונאת את עצמי אז עשינו יחד עבודה מצויינת עם הרבה חילופי משתנה

$$\int\left(a^2-\frac{a^2}{\cos^2(\theta)}\right)\sqrt{a^2(1-\cos^2(\theta))}d\theta\underset{a>0}{=}-\frac{\sqrt{\tan^2(\theta)+1}(a^3\tan^2(\theta)+2a^3)|\tan(\theta)|}{\tan^3(\theta)+\tan(\theta)}$$

ובחזרה למקורות נשים לב שיש לנו פה גם אינטגרל לא אמיתי ובזכות מחשבונים טובים נגלה

$$\lim_{\theta\to 0^+}-\frac{\sqrt{\tan^2(\theta)+1}(a^3\tan^2(\theta)+2a^3)|\tan(\theta)|}{\tan^3(\theta)+\tan(\theta)}=-2a^3$$

ולסיום סיומת

$$(\star)(\star)=\frac{16}{3}\left[-\frac{\sqrt{\tan^2(\theta)+1}(a^3\tan^2(\theta)+2a^3)|\tan(\theta)|}{\tan^3(\theta)+\tan(\theta)}+a^3\tan(\theta)\right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{4}}=\frac{16}{3}\left(\frac{-3\sqrt{2}a^3}{2}+3a^3\right)$$

$$=\frac{16a^3}{3}\left(3\frac{-\sqrt{2}+2}{2}\right)=16a^3\left(\frac{-\sqrt{2}+2}{2}\right)=8a^3\left(2-\sqrt{2}\right)$$

שזו בידיוק הנוסחה מהאינטרנט. $\square$

שאלה 15

מבחן מועד א' סמסטר א' 2025 שאלה 2: יהי X מרחב מטרי קומפקטי, Y מרחב מטרי כלשהו ו־$f : X \to Y$.
נניח שלכל $x \in X$ קיימת $\delta > 0$ כך שלכל $x' \in B_\delta(x)$ מתקיים $d(f(x), f(x')) < \frac{1}{10}$.
נוכיח שקיימת $\delta > 0$ כך שלכל $x, x' \in X$ עם $d(x, x') < \delta$ מתקיים $d(f(x), f(x')) \le \frac{1}{5}$.

הוכחה: נניח שלא ככה, ולכן לא קיימת $\delta > 0$ כזאת.

לכן, לכל $n \in \mathbb{N}$ יש $(x_n)_{n=1}^\infty, (y_n)_{n=1}^\infty \in\subseteq X$ כך ש־$y_n \in B_{\frac{1}{n}}(x_n)$ וגם מתקיים $d(f(x_n), f(y_n)) > \frac{1}{5}$.
X קומפקטי ולכן קומפקטית סדרתית (במרחבים מטריים הטענות הללו שקולות) ולכן ל־$(x_n)_{n=1}^\infty$ יש תת־סדרה מתכנסת $\left(x_{n_k}\right)_{k=1}^\infty$ כך ש־$x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x_0 \in X$.
בפרט, לכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים $y_{n_k} \in B_{\frac{1}{n_k}}\left(x_{n_k}\right)$ ולכן $y_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x_0$ (זה מההגדרה השקולה להתכנסות).
מהנתון, ל־x_0 קיימת $\delta > 0$ כך שלכל $x' \in B_\delta(x_0)$ מתקיים $d(f(x_0), f(x')) < \frac{1}{10}$, אבל עבור k גדול מספיק מתקיים $x_{n_{k_0}}, y_{n_{k_0}} \in B_\delta(x_0)$ ואז מתקיים

$$\frac{1}{5} < d\left(f\left(x_{n_{k_0}}\right), f\left(y_{n_{k_0}}\right)\right) \underset{\text{אי־שיוויון המשולש}}{\le} d\left(f\left(x_{n_{k_0}}\right), f(x_0)\right) + d\left(f(x_0), f\left(y_{n_{k_0}}\right)\right) < \frac{1}{10} + \frac{1}{10} < \frac{1}{5}$$

וזאת סתירה. $\square$

שאלה 16

מבחן מועד א' סמסטר א' 2025 שאלה 4: תהיי $f:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^m$ גזירה. נניח שקיימים $\varepsilon,\delta>0$ ו־$x\in\mathbb{R}^k$ כך שלכל $y\in B_\delta(x)$ מתקיים $\left\|Df_y-Df_x\right\|_{\text{op}}<\varepsilon$.

אז לכל $v_1,\dots.,h.cv_k\in\mathbb{R}^k$ עם $\|v_i\|_2<\delta$ ו־$v_1+\dots+v_k=0$, מתקיים

$$\|f(x+v_1)+\cdots f(x+v_k)-kf(x)\|_2\le\varepsilon\left(\|v_1\|_2+\cdots+\|v_k\|_2\right)$$

הוכחה: ראשית, מהנתון $\|v_i\|_<\delta$ נובע ש־$x+v_i\in B_\delta(x)$ (star). שנית, מאי־שיוויון המשולש מתקיים

$$\|f(x+v_1)+\cdots f(x+v_k)-kf(x)\|_2=\left\|\sum_{i=1}^k f(x+v_i)-f(x)\right\|_2=\left\|\sum_{i=1}^k(f(x+v_i)-f(x)+Df_x(v_i))+\sum_{i=1}^k Df_x(v_i)\right\|_2$$

$$\le\left\|\sum_{i=1}^k(f(x+v_i)-f(x)+Df_x(v_i))\right\|+\left\|\sum_{i=1}^k Df_x(v_i)\right\|_2=\left\|\sum_{i=1}^k(f(x+v_i)-f(x)+Df_x(v_i))\right\|+\left\|Df_x\left(\sum_{i=1}^k v_i\right)\right\|_2$$

$Df_x(v)$ לינארית ולכן $\left\|Df_x\left(\sum_{i=1}^k v_i\right)\right\|_2=0\Longleftarrow v_1+\cdots v_k=0$.

נגדיר $g(v)=f(x+v)-f(x)-Df_x(v)$, נשים לב שזו פונקציה על כל $\mathbb{R}^k$ והיא גזירה מאריתמטיקה של פונקציות גזירות , $Df_x(v))$ זו הנגזרת כיוונית של f בנקודה x בכיוון v ולכן בגלל ש־f גזירה, זה גם גזיר) ולכן ניתן להשתמש במשפט ערך הממוצע: מתקיים

$$\|g(x)-g(y)\|\le\sup_{c\in[a,b]}\|Dg_c\|_{\text{op}}\|x-y\|_2$$

בפרט זה אומר שמתקיים

$$\sum_{i=1}^k\|f(x+v_i)-f(x)-Df_x(v)\|_2=\sum_{i=1}^k\|g(v_i)-g(0)\|_2\le\sum_{i=1}^k\sup_{c\in[0,v_i]}\|Dg_c\|_{\text{op}}\|v_i\|_2$$

אבל $Dg_c=Df_c-Df_x$ ולכן

$$\sum_{i=1}^k\sup_{c\in[0,v_i]}\|Dg_c\|_{\text{op}}\|v_i\|_2=\sum_{i=1}^k\sup_{c\in[0,v_i]}\|Df_c-Df_x\|_{\text{op}}\le\sup_{c\in B_\delta(x)}\|Df_c-Df_x\|_{\text{op}}\cdot\sum_{i=1}^k\|v_i\|_2\underset{\text{מהנתון}}{=}\varepsilon\sum_{i=1}^k\|v_i\|$$

□

שאלה 17

מבחן מועד א' סמסטר ב' 2022 שאלה 6: נגדיר $H:\Delta_d\to\mathbb{R}$ הנתונה על־ידי

$$H(x_1,\cdots,x_d)=-\sum_{i=1}^{d}x_i\ln(x_i)$$

כאשר $0\ln(0)=0$ ונתונה

$$\Delta_d:=\left\{(x_1,\cdots,x_d)\in\mathbb{R}^d\mid\sum_{i=1}^{d}x_i=1,x_i\geq 0\right\}$$

נעשה בפעם אחת – גם נמצא האם יש נקודות מינימום/מקסימום פנימיות ב־Δ_d° וגם המינימום-מקסימום של H בכל Δ_d.

פתרון: ראשית נצדיק למה בכלל מתקבלים מינימום-מקסימום: זה בגלל ש־Δ_d היא סגורה וחסומה ולכן קומפקטית ופונקציה רציפה (H רציפה כסכום של פונקציות רציפות) מקבלת מינימום/מקסימום בקבוצה קומפקטית.

החסומה זה ברור כי $\sum_{i=1}^{d}x_i=1$ והערכים הם אי־שליליים ולכן $x_i\in[0,1]$ לכל $1\leq i\leq d$.

נראה שהקבוצה סגורה: ניקח $\left\{(x_n)_1,\cdots,(x_n)_d\right\}$ סדרה ב־Δ_d כך שמתקיים $\sum_{i=1}^{d}x_n^i=1\wedge x_n^i\geq 0$ ונניח שהיא מתכנסת ל־$(x_1,\cdots,x_d)$. מאריתמטיקה של גבולות נקבל

$$x_i=\lim_{n\to\infty}x_n^i\geq 0$$

$$\sum_{i=1}^{d}x_i=\sum_{i=1}^{d}\lim_{n\to\infty}x_n^i=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{d}x_n^i=\lim_{n\to\infty}1=1$$

כשהשתמשנו ברציפות של הסכום ולכן $(x_1,\cdots,x_d)\in\Delta_d$ ולכן Δ_d סגורה וחסומה ולפי משפט היינה־בורל היא קומפקטית (וקומפקטית סדרתית מהשקילות במרחבים מטריים).

H סכום של פונקציות גזירות ולכן גזירה ומתקיים מכללי גזירת מכפלה

$$\nabla(H)=\begin{pmatrix}\frac{\partial H}{\partial x_i} & \cdots & \frac{\partial H}{\partial x_d}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\ln(x_1)-1 & \cdots & -\ln(x_d)-1\end{pmatrix}$$

ומתקיים

$$\nabla(H)=0\iff\forall\ 1\leq i\leq d,\ -\ln(x_i)-1=0\iff\ln(x_i)=-1$$

וזה כמובן היה מיותר כי אין פיתרון ועלינו להשתמש שיטת כופלי לגראנז' כדי לאלץ שהפיתרון יהיה על Δ_d, כלומר נגדיר את האילוץ

$$g(x_1,\cdots,x_d)=\sum_{i=1}^{d}x_i-1,\ \nabla(g)=\begin{pmatrix}1 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

משיטת כופלי לגראנז' נקבל

$$\nabla(g)=\begin{pmatrix}1 & \cdots & 1\end{pmatrix}\implies\nabla(H)=-\lambda\nabla(1,\cdots,1)\iff\ln(x_i)+1=\lambda\iff\ln(x_i)=\lambda-1\iff x_i=e^{\lambda-1}$$

אבל מתקיים

$$\sum_{i=1}^{d}x_i=1\implies de^{\lambda-1}=1\iff e^{\lambda-1}=\frac{1}{d}\implies x_i=\frac{1}{d}$$

ולכן יש לנו נקודה חשודה אחת לקיצון $\begin{pmatrix}\frac{1}{d} & \cdots & \frac{1}{d}\end{pmatrix}$ והיא מקיימת את כל התנאים של Δ_d, והיא כמובן נקודה פנימית אם בוחרים $\varepsilon<\frac{1}{d}$ וגם $x_i>0$.

בשביל נקודות על השפה, זה רק המקרים בהם $x_i=0$ ולכן יש לנו $k\in\{0,\cdots,d-1\}$ קורדינאטות שאינן מתאפסות.

אם $k=0$ אז ברור שנקבל מינימום כי יצא $H(0)=0$ וזה מינימום (כי $0\leq x_i\leq 1$ ולכן $\ln(x_i)\leq 0$ כלומר $x_i\ln(x_i)\leq 0$ ולכן $H(x_1,\cdots,x_d)\geq 0$).

אם יש k קורדינאטות שלא מתאפסות, אפשר לחזור על כל התהליך ממקודם עם ולהחליף את d עם k (כי בכל מקרה 0־ים בסכום לא משנים את הסכום) וכנראה ששוב נקבל שכל הקורדינאטות צריכות להיות שוות זו לזו.

אז $-\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{k}\ln\left(\frac{1}{k}\right)$ ו־$\ln(x)$ מונוטונית עולה ממש ולכן נקבל מקסימום עבור $x_i=\frac{1}{d}$ לכל $1\leq i\leq d$. $\square$

שאלה 18

מבחן מועד א' סמסטר ב' 2022 שאלה 7: יהי (X,d) מרחב מטרי קומפקטי. תהיי $f:K\to K$ פונקציה כך שלכל $x,y\in K$ מתקיים $d(f(x),f(y))<d(x,y)$.

סעיף א'

נוכיח כי ל־f יש לכל היותר נקודת שבת אחת ב־K.

הוכחה: נניח בשלילה שגם $x,y\in K$ הן נקודות שבת, קרי $f(x)=x,f(y)=y$. אזי מתקיים

$$d(x,y)=d(f(x),f(y))<d(x,y)$$

מהנתון וזאת כמובן סתירה. $\square$

סעיף ב'

נוכיח כי ל־f יש נקודת שבת ב־K.

הוכחה: K קומפקטית ובמרחבים מטריים קומפקטית סדרתית וקומפקטית הם שקולים ולכן קומפקטית סדרתית, על־כן לכל סדרה יש תת־סדרה מתכנסת והמרחב חסום וסגור.

נעזר ברמז ונגדיר $h(x)=d(x,f(x))$, זו פונקציה רציפה מאריתמטיקה של פונקציות רציפות (פונקציית המרחק רציפה) ופונקציה רציפה על מרחב קומפקטי מקבלת מינימום, נסמנו ב־m ולכן יש $x_0\in K$ כך שמתקיים $h(x_0)=m$.

נניח בשלילה ש־$m\neq 0$, ולכן מתקיים

$$h(f(x_0))=(f(x_0),f(f(x_0)))\underset{\text{העתקה מכווצת}}{<}d(x_0,f(x_0))=h(x_0)=m$$

אבל זאת סתירה להנחה ש־m הוא המינימום של h! ולכן בהכרח מתקיים $h(x_0)=d(x_0,f(x_0))=0$ וזה קורה אם ורק אם $f(x_0)=x_0$, קרי זאת נקודת שבת. $\square$

שאלה 19

מבחן מועד א' סמסטר ב' 2022 שאלה 9: תהיי

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1, y \geq 0\right\}$$

ותהיי $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ הנתונה על־ידי

$$f(x,y) = (x-y, y^2)$$

נוכיח שלקבוצה $f(A)$ יש שטח ("נפח ב־$\mathbb{R}^2$") ונמצא את $\text{Area}(f(A))$.

פתרון: קצת אלתור עם כלים של אנליזה2.

ראשית נשים לב ש־A היא קבוצה קומפקטית כי זה החצי העליון של מעגל היחידה.

נרצה להשתמש במשפט החלפת משתנה כדי לבטא מחדש את f, נגדיר $u = x-y, v = y^2$ ולכן

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2y \end{pmatrix} \Longrightarrow \det(J) = 2y$$

אז אנחנו רוצים לחשב את

$$\text{Area}(f(A)) = 2\int_A ydA \underset{\text{מעבר לקוטביות}}{=} 2\int_0^\pi \int_0^1 r^2\sin(\theta)drd\theta = \int_0^\pi \frac{\sin(\theta)}{3}d\theta = \frac{2}{3}$$

$\square$

שאלה 20

מבחן מועד א' סמסטר ב' 2022 שאלה 10: תהיי $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ המוגדרת על־ידי

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{y^3x^2}{x^8+y^4} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

סעיף א'

נוכיח שכל הנגזרות הכיווניות של f קיימות ב־$(0,0)$ (רשום במבחן y במקום f אבל זאת טעות).

הוכחה: יהי $\vec{v}=(a,b)\in\mathbb{R}^2$ ונראה שהנגזרת הכיוונית של f בכיוון v קיימת בראשית, כלומר קיים הגבול

$$\lim_{t\to0}\frac{f(0+tv)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{f(ta,tb)}{t}$$

נשים לב שהמקרה של $a=0\vee b=0$ סימטריים ולכן בלי הגבלת הכלליות $b=0$ ומתקיים

$$\lim_{t\to0}\frac{\frac{0}{t^8a^8}}{t}=0=\frac{\lim_{t\to0}}{t^9a^8}=0$$

כעת נניח ש־$a\neq0\wedge b\neq0$ ולכן מתקיים

$$\lim_{t\to0}\frac{\frac{t^5b^3a^2}{a^8t^8+b^4t^4}}{t}=\frac{\cancel{t^5}b^3a^2}{\cancel{t^5}(t^4a^8+b^4)}=\lim_{t\to0}\frac{b^3a^2}{t^4a^8+b^4}=\frac{b^3a^2}{b^4}=\frac{a^2}{b}$$

מצאנו שבכל מקרה הגבול קיים ולכן לכל כיוון הנגזרת הכיוונית של f קיימת בראשית. □

סעיף ב'

נקבע האם f דיפרנציאבילית ב־$(0,0)$.

הוכחה: נזכר שפונקציה דיפרנציאבילית בנקודה היא רציפה בנקודה ו־f בכלל לא רציפה בראשית, אפשר לראות את זה עם עיקרון היינה לרציפות: נבחר $x_n=\frac{1}{n},y_n=\frac{1}{n^2}$ ומתקיים

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(y_n)^3(x_n)^2}{(x_n)^8+(y_n)^4}=\frac{\frac{1}{n^6}\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^8}+\frac{1}{n^8}}=\frac{\frac{\frac{1}{n^8}}{2}}{n^8}=\frac{1}{2}\neq0$$

שזה הערך של הפונקציה בראשית ולכן בוודאי שלא רציפה, ובטח שלא דיפרנציאבילית. □

שאלה 21

שאלה של דניאל: לנסח את הנוסחה של פיתוח פולינום טיילור מסדר 2 ולחשב את הפולינום טיילור מסדר 2 סביב הראשית של $f(x,y)=e^{x^2+xy}$.

הוכחה: הנוסחה נתונה על־ידי

$$P_{f,2,(a,b)}(x,y)=f(a,b)+Df_{(a,b)}\begin{pmatrix}x-a\\y-b\end{pmatrix}+\frac{1}{2}(x-a\ \ y-b)D^2f_{(a,b)}\begin{pmatrix}x-a\\y-b\end{pmatrix}$$

f כמובן גזירה אינסוף פעמים כחלקה, אבל בשביל המקרה שלנו נשים לב שמתקיים

$$\frac{\partial f}{\partial x}=e^{x^2+xy}(2x+y),\ \frac{\partial f}{\partial y}=xe^{x^2+xy}\Longrightarrow Df_{(x,y)}=\left(e^{x^2+xy}(2x+y)\ \ xe^{x^2+xy}\right)$$

הנגזרת החלקיות רציפות בראשית ולכן לפי תנאי מספיק לדיפרנצאביליות הפונקציה f גזירה בראשית.
נחשב נגזרות שניות ונגזרות מעורבות (אלו כמובן גם פונקציות גזירות) ונשים לב שהנגזרות המעורבות תהיינה שוות

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}=(2x+y+2)^2e^{x^2+xy},\ \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}=x^2e^{x^2+xy},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=xe^{x^2+xy}(2x+y)+e^{x^2+xy}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$$

$$\Longrightarrow D^2f_{(x,y)}=\begin{pmatrix}(2x+y+2)^2e^{x^2+xy} & xe^{x^2+xy}(2x+y)+e^{x^2+xy}\\ xe^{x^2+xy}(2x+y)+e^{x^2+xy} & x^2e^{x^2+xy}\end{pmatrix}$$

כאשר $\partial x\partial y$ זה אומר קודם כל לפי x ואז לפי y.
נציב את הנקודה שלנו

$$Df_{(0,0)}=(0\ \ 0),D^2f_{(0,0)}=\begin{pmatrix}2&1\\1&0\end{pmatrix}$$

אז פולינום טיילור יהיה

$$P_{f,2,(0,0)}(x,y)=1+(x\ \ y)\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=1+(x+\frac{y}{2}\ \ \frac{x}{2})\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=1+\frac{(2x+y)x}{2}+\frac{yx}{2}$$

□

שאלה 22

מבחן מועד ב' סמסטר ב' 2022 שאלה 6: נמצא את המינימום של $f(x,y,z)=x^2+8y^2+27z^2$ תחת האילוץ

$$A:=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1, x,y,z>0\right\}$$

פתרון: ראשית f רציפה וגזירה מאריתמטיקה של פונקציות גזירות ובפרט מתקיים

$$\nabla f(x,y,z)=(2x\ \ 16y\ \ 54z)\Longrightarrow \nabla f(x,y,z)=0\Longleftrightarrow x=y=z=0$$

ונשים לב ש־$(0,0,0)\notin A$, אז גם אם מתקבל קיצון מינימלי ל־f הוא חייב להיות על השפה של A.
נשים לב שהתחום A הוא תחום שאינו חסום (אולי סגור) ולכן אי אפשר להפעיל את משפט כופלי לגראנז' עליו ישירות.
אין לי כח להשתמש בלגראנז'יאן כי זה ארוך, אבל נשים לב שמכך ש־$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$ נובע ש־$0<\frac{1}{x},\frac{1}{y},\frac{1}{z}<1$ ולכן $x,y,z>1$ ובפרט $f(x,y,z)>1^2+8\cdot1^2+27\cdot1^2=36$ ולכן בהכרח f חסומה מלרע תחת האילוץ על A והפונקציה היא אי־שלילית לכן היא רק עולה, אז נוכל ליצור קבוצה שעליה נבחן את ההתניות שלנו.
בנוסף, אם ניקח $x=100$ אז $f(x,y,z)>x^2=100^2$ ומצד שני $f(3,3,3)=3^2+8\cdot3^2+27\cdot3^2=324<100^2$ אז גם אם יש מינימום הוא כבר לא יתקבל, אז נגדיר

$$A'=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x,y,z\le 100\right\}$$

שהיא סגורה וחסומה ולכן אם מתקבל עליה מינימום (כי f רציפה ואפשר משיטת כופלי לגראנז') אז אותו מינימום יהיה אם מתאים לתנאי A גם המינימום של A.
אז נגדיר $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ על־ידי $g(x,y,z)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-1$ זו פונקציה רציפה וגזירה ומתקיים $\nabla g(x,y,z)=\left(-\frac{1}{x^2},-\frac{1}{y^2},-\frac{1}{z^2}\right)$
ונשתמש בשיטת כופלי לגראנז' (כבר פסלנו את הראשית כמובן ולכן החלוקה מוגדרת היטב)

$$\nabla f(x,y,z)=\lambda\nabla g(x,y,z)\Longrightarrow\begin{cases}2x=-\frac{\lambda}{x^2}\\ 16y=-\frac{\lambda}{y^2}\\ 54z=-\frac{\lambda}{z^2}\end{cases}\Longrightarrow 2x^3=16y^3=54z^3\Longleftrightarrow x^3=8y^3=27z^3\Longleftrightarrow x=2y=3z$$

כאשר הפעולה של לקחת שורש הוגדרה היטב כי $x,y,z>0$ ובפרט לקחנו את השורשים החיוביים של המקדמים.
עלינו לוודא שמתקיים האילוץ $g=0$ ולכן ממה שמצאנו נובע ש־$z=\frac{x}{3}, y=\frac{x}{2}$ ולכן בהצבה ב־g נקבל

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{\frac{x}{2}}+\frac{1}{\frac{x}{3}}-1=0\Longleftrightarrow\frac{1}{x}+\frac{2}{x}+\frac{3}{x}=1\Longleftrightarrow 6=x$$

ולכן $x=6, z=2, y=3$ ואכן $\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}+\frac{2}{6}+\frac{3}{6}=\frac{6}{6}=1$.
מצאנו רק נקודה אחת חשודה ואפשר לראות די בקלות שהיא מינימום ולכן $(6,2,3)$ מינימום מקומי ו־$f(6,2,3)=216$ $\square$

שאלה 23

מבחן מועד ב' סמסטר ב' 2022 שאלה 7: נראה שקיימת פונקציה יחידה $f \in C([0,1])$ כך שמתקיים

$$f(x) = x + \frac{xf(\sqrt{x}) + (1-x)f(x^2)}{2}$$

לכל $x \in [0,1]$.

הוכחה: צועק משפט העתקה מכווצת.

נזכר שמעל $C([0,1])$ אנחנו עובדים עם $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]}|f(x)|$.

נגדיר $T : C([0,1]) \to C([0,1])$ על־ידי

$$T(f)(x) = x + \frac{xf(\sqrt{x}) + (1-x)f(x^2)}{2}$$

נשים לב שמתקיים עבור $g, f \in C([0,1])$ ולכל $x \in [0,1]$

$$\begin{aligned}
\|T(f)(x) - T(g)(x)\|_\infty &= \left\| x + \frac{xf(\sqrt{x}) + (1-x)f(x^2)}{2} - x - \frac{xg(\sqrt{x}) + (1-x)g(x^2)}{2} \right\|_\infty \\
&= \frac{1}{2}\left\| xf(\sqrt{x}) + (1-x)f(x^2) - xg(\sqrt{x}) - (1-x)g(x^2) \right\|_\infty \\
&\underset{\substack{\text{אי־שיוויון} \\ \text{המשולש}}}{\leq} \frac{1}{2}\left(\left\| xf(\sqrt{x}) - xg(\sqrt{x}) \right\|_\infty + \left\| (1-x)f(x^2) - (1-x)g(x^2) \right\|_\infty \right) \\
&\underset{x\in[0,1]}{\leq} \frac{1}{2}\left(x\left\| f(\sqrt{x}) - g(\sqrt{x}) \right\|_\infty + (1-x)\left\| f(x^2) - g(x^2) \right\|_\infty \right) \\
&\leq \frac{1}{2}(x\|f-g\|_\infty + (1-x)\|f-g\|_\infty) = \frac{1}{2}\|f-g\|_\infty
\end{aligned}$$

אז T היא העתקה מכווצת ולכן יש לה נקודת שבת אחת, קרי יש פונקציה אחת המקיימת את הנדרש.

הנתון על הרציפות הוא הכרחי: כי $\infty = \infty \cdot \frac{1}{2}$. $\square$

שאלה 24

מבחן מועד ב' סמסטר ב' 2022 שאלה 8.

סעיף א'

נחשב את נפח הקבוצה $A := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \le 4, x^2+y^2 \le 1\}$ ונסביר למה הנפח קיים.

פתרון: פתרתי על דף.

הנפח קיים כי A היא חיתוך של גרפים ועל־כן היא ממידה אפס והיא גם קומפקטית (קל לראות את הסגורה והסומה) ובתרגול ראינו שקבוצות קומפקטיות ממידה אפס הן מתכולה אפס ועל־כן בעלות נפח (קבוצה מתכולה אפס היא בהכרח חסומה וממידה אפס). אפשר לעבור גם לגלילות וגם לכדוריות אז האחד של כדוריות מסובך יותר, האינטגרלים הם בכל אופן

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} r dz dr d\theta$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\min\left(2,\frac{1}{\sin(\varphi)}\right)} r^2\sin(\varphi) dr d\varphi d\theta$$

□

סעיף ב'

נחשב את האינטגרל

$$\int_0^1\left(\int_y^1 e^{-x^2}\right)dxdy$$

הוכחה: ראשית e^{-x^2} פונקציה רציפה ולכן אינטגרבילית, אבל זאת לא פונקציה אלמנטרית אז אנחנו לא יודעים לאנטגרל אותה ולכן עלינו להשתמש במשפט פוביני.

נצטרך לעשות שינוי של התחום, נשים לב שכרגע $0 \le y \le 1, y \le x \le 1$ וזה עושים קודם לפני x ואז לפי y ואנחנו רוצים קודם לפי y ואז לפני x.

קיבענו את $0 \le x \le 1$ ולכן $0 \le y \le x$ (אפשר לראות את זה גם על תזוזה על המשולש התחתון שחוצה את ריבוע היחידה) ולכן

$$\begin{aligned}
\int_0^1\left(\int_y^1 e^{-x^2}\right)dxdy &= \int_0^1\int_0^x e^{-x^2} dydx \\
&= \int_0^1 \left[ye^{-x^2}\right]_{y=0}^{y=x} dx \\
&= \int_0^1 xe^{-x^2} dx \\
&\underset{\substack{u=-x^2 \\ du=-2xdx}}{=} \int_0^1 -\frac{e^u}{2} du \\
&= \left[-\frac{1}{2}e^u\right]_{u=0}^{u=1} \\
&= \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_{x=0}^{x=1} \\
&= \frac{1-e^{-2}}{2}
\end{aligned}$$

□

שאלה 25

מבחן מועד ב' סמסטר ב' 2022 שאלה 9: תהיי $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ ו־$h : A \to \mathbb{R}^2$ הפונקציה הנתונה על־ידי

$$h(x,y) = (y^2\cos(x), y\sin(x))$$

סעיף א'

נוכיח שלכל נקודה $p \in A$ יש סביבה פתוחה $p \in U$ כך ש־$h|_U : U \to h(U)$ הפיכה.

הוכחה: צועק משפט הפונקציה ההפוכה.

נסמן לנוחות $h_1(x,y) = y^2\cos(x), h_2(x,y) = y\sin(x)$ ואז

$$Dh_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x} & \frac{\partial h_1}{\partial y} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x} & \frac{\partial h_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y^2\sin(x) & 2y\cos(x) \\ y\cos(x) & \sin(x) \end{pmatrix}$$

ומתקיים

$$J\Big(Dh_{(x,y)}\Big) = \det\begin{pmatrix} -y^2\sin(x) & 2y\cos(x) \\ y\cos(x) & \sin(x) \end{pmatrix} = -y^2\sin^2(x) - 2y^2\cos^2(x) = -y^2\big(\sin^2(x) + 2\cos^2(x)\big)$$

נטען ש־$J\Big(Dh_{(x,y)}\Big) \neq 0$: זה נובע מכך ש־$y > 0$ וכן $\sin^2(x) + 2\cos^2(x) > 0$ כסכום של שתי פונקציות אי־שליליות (זה בהכרח גדול מ־0 בגלל המחזוריות של פונקציות סינוס וקוסינוס).

כמובן ש־h גזירה ברציפות כי נגזרתה מורכבות מפונקציות רציפות ועל־כן כל התנאים של משפט הפונקציה ההפוכה מתקיימים ולכן הנדרש קיים. $\square$

סעיף ב'

נמצא את $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid h(x,y) = (1,0)\}$.

הוכחה: אנחנו מחפשים מתי

$$\begin{cases} y^2\cos(x) = 1 \\ y\sin(x) = 0 \end{cases}$$

y גדול מאפס ולכן $y\sin(x) = 0 \iff x \in \pi k$ עבור $k \in \mathbb{Z}$ ולכן $y^2\cos(\pi k) = 1$ אבל $\cos(\pi k) = (-1)^k$ ולכן $y^2(-1)^k = 1$, אבל $y > 0$ ולכן k חייב להיות זוגי ולכן $y^2 = 1$ ועל־כן $y = 1$.

אז כלל הפתרונות הם מהצורה $x = 2\pi k, y = 1$. $\square$

סעיף ג'

עבור כל $p \in S$ נסמן ב־g את הצמצום של h לסביבה $p \in U$ בה $h|_U$ הפיכה ונסמן $q = g^{-1}$. נמצא את $(Dq)_{(1,0)}$.

הוכחה: נזכר שמהגדרה מתקיים

$$(Dq)_{(1,0)} = (Dh)^{-1}_{(1,0)}$$

נשים לב שמתקיים

$$Dh_{(0,1)} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \implies \det\Big(Dh_{(0,1)}\Big) = -2$$

והמטריצה ההפיכה הנדרשת מתקבלת לפי

$$\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \implies -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$\square$

שאלה 26

שאלה מהמבחן של נויה.

סעיף א'

תהיי $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ הנתונה על־ידי $f(x,y)=|x|+|y|$.
נמצא את הערך המינימלי והמקסימלי של f, אם קיימים.

הוכחה: ראשית f רציפה מאריתמטיקה של פונקציות רציפות ובבירור גזירה לכל $(x,y)\neq 0$ מאריתמטיקה של פונקציות גזירות והדיפרנציאל נתון על־ידי

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}\frac{x}{|x|} & \frac{y}{|y|}\end{pmatrix}$$

אבל ת'כלס זה לא מעניין:
בבירור $(0,0)$ נקודת מינימום מקומית (כי הביטוי הוא אי־שלילי וחסום מלמטה על־ידי 0 שמתקבל אם ורק אם $(x,y)=(0,0)$) ונטען שאין מקסימום כי זו פונקציה מונוטונית עולה ממש.

□

סעיף ב'

מבין הנקודות על האליפסה $x^2+2x+4y^2=3$ נמצא את הנקודות שהכי קרובות והכי רחוקות מהראשית, אם קיימות.
פתרון: נגדיר $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ על־ידי $f(x,y)=x^2+y^2$ פונקציית המרחק שלנו (שורש משמר מרחק).
נגדיר את האילוץ שלנו להיות $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ על־ידי $g(x,y)=x^2+2x+4y^2-3$.
f,g רציפות וגזירות מאריתמטיקה פונקציות רציפות ומתקיים

$$\nabla f(x,y)=(2x\ \ 2y)$$
$$\nabla g(x,y)=(2x+2\ \ 8y)$$

נבחין ש־f מקבלת מינימום מקומי בראשית אבל הראשית לא נמצאת על האליפסה, לכן עלינו להשתמש בשיטת כופלי לגראנז'.
נזכיר את שיטת כופלי לגראנז': תהיי $B\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה ותהיינה $f,g_1,g_1,\cdots,g_n$ גזירות ברציפות לכל $n+1\leq k$.
נגדיר $A=\{b\in B\mid g_1(b)=\cdots=g_n(b)=0\}$ ונסתכל על $f|_A$ ונניח כי $a\in A$ נקודת קיצון מקומי של $f|_A$, אז בידיוק אחד מהבאים מתקיים:
1. $\nabla g_1(a),\cdots,\nabla g_n(a)$ תלויים לינארית
2. $\nabla g_1(a),\cdots,\nabla g_n(a)$ בלתי־תלויים לינארית ויש $\lambda_i,\cdots,\lambda_n\in\mathbb{R}$ הנקראים כופלי לגראנז' כך שמתקיים

$$\nabla f(a)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\nabla g_i(a)$$

נקודה המקיימת את אחד משני התנאים האלו היא נקודה חשודה לקיצון.
נקבל אם כך מערכת משוואות

$$\begin{cases}2x+\lambda(2x+2)=0\\ 2y+\lambda 8y=0\Longrightarrow y=-\lambda 4y\end{cases}$$

מהמשוואה השנייה נניח ש־$y\neq 0$, אז $\lambda=-\frac{1}{4}$ והמשוואה הראשונה נקבל

$$2x=\lambda(2x+2)\Longrightarrow 2x=-\frac{1}{4}(2x+2)\Longleftrightarrow -8x=2x+2\Longleftrightarrow -10x=2\Longleftrightarrow x=\frac{2}{-10}=-\frac{1}{5}$$

אם $x=\frac{1}{3}$ אז נציב באילוץ ונקבל

$$\left(\frac{1}{-5}\right)^2-\frac{2}{5}+4y^2-3=0\Longleftrightarrow y=\frac{\sqrt{84}}{\pm 10}$$

אם $y=0$ אז בשביל לעמוד באילוץ השני צריך שיתקיים $(x+3)(x-1)=0\Longleftrightarrow x^2+2x-3=0$ וזה קורה אם $x=-3,x=1$ □

סעיף ג'

נחשב את האינטגרל $\iint_D xydA$ כאשר $D \subset \mathbb{R}^2$ נמצא ברביע הראשון וחסום על־ידי העקומים $y = x, y = 3x, xy = 1, xy = 3$.

פתרון: נרצה להשתמש במשפט החלפת משתנה, נשים לב ש־$f(x,y) = xy$ היא פונקציה רציפה.

עלינו להגדיר החלפת משתנה משל עצמנו, נסמן $u = xy, v = \frac{y}{x}$ ובגלל שאנחנו ברביע הראשון נובע כי $x > 0$ ולכן v מוגדרת היטב (כי אחרת $xy = 0 \neq 1$, סתירה).

נבחין ש־u, v הן אכן דיפאומורפיזם: הן כמובן רציפות מאריתמטיקה של פונקציות רציפות ומתקיים

$$v = \frac{y}{x} \iff y = vx \implies u = xy \iff u = xvx \iff \frac{u}{v} = x^2 \iff x = \sqrt{\frac{u}{v}} \implies y = vx \iff y = v\sqrt{\frac{u}{v}} \iff y = \sqrt{v^2\frac{u}{v}} = \sqrt{vu}$$

והמהלכים מוגדרים היטב כי $u, v > 0$ מההנחות על התחום.

אז הפונקציה $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ \frac{y}{x} \end{pmatrix}$ היא דיפאומורפיזם ומתקיים

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{pmatrix}$$

אז

$$\det(J) = \frac{y}{x} + \frac{y}{x} = \frac{2y}{x} \implies dxdy = \left|\det(J)^{-1}\right| dudv = \frac{x}{2y} dudv$$

אז תחום האינטגרציה שלנו נהפך להיות $1 \le v \le 3, 1 \le u \le 3$ כלומר

$$\iint_D xydxdy = \int_1^3 \int_1^3 \frac{u}{2v} dudv = \int_1^3 \frac{1}{2v} \left[\frac{u^2}{2}\right]_{u=1}^{u=3} dv = 2\int_1^3 \frac{1}{v} dv = 2[\ln(v)]_{v=1}^{v=3} = 2\ln(3)$$

$\square$

שאלה 27

חימום – תרגיל מהתרגול: נתבונן במשוואה $e^{xz} + yz^2 = 5$.

סעיף א'

נראה כי בסביבת הנקודה $(0,1,2)$ המקיימת את המשוואה, ניתן לבטא את z כפונקציה של x, y.

פתרון: נסמן $G(x,y,z) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ על־ידי $G(x,y,z) = e^{xz} + yz^2 - 5$ ומתקיים

$$G(0,1,2) = e^{0\cdot 2} + 1 \cdot 2^2 - 5 = e^0 + 4 - 5 = 0 \checkmark$$

אז אכן הנקודה $(0,1,2)$ מקיימת את המשוואה.

כעת, נבחין ש־G גזירה (ואף ברציפות) מאריתמטיקה של פונקציות רציפות ומתקיים

$$(DG)_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ze^{xz} & z^2 & xe^{xz} + 2yz \end{pmatrix}$$

וכן מתקיים

$$(DG)_{(0,1,2)} = (2 \;\; 4 \;\; 4) \neq (0 \;\; 0 \;\; 0)$$

נבחין שכל תנאי **משפט הפונקציה הסתומה** מתקיימים: תהיינה $A \subseteq \mathbb{R}^k, B \subseteq \mathbb{R}^m$ פתוחות ותהיי $G : A \times B \to \mathbb{R}^m$ גזירה ברציפות ונסמן $(DG) = (\frac{\partial G}{\partial x} \;\; \frac{\partial G}{\partial y})$ כאשר $\frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y}$ הן מטריצות הנגזרות החלקיות לפי $x \in A$ ו־$y \in B$.

תהיי $(a,b) \in A \times B$ כך ש־$G(a,b) = 0$ ו־$(DG)_{(a,b)}$ הפיכה, כלומר $\det(DG)_{(a,b)} \neq 0$.

אז יש $(a,b) \in U \subseteq A \times B$ ו־$a \in V \subseteq A$ פתוחות ופונקציה גזירה ברציפות $f : V \to \mathbb{R}^m$ כך שלכל $(x,y) \in U$ מתקיים $G(x,y) = 0$ אם ורק אם $y = f(x)$.

אז ממשפט הפונקציה הסתומה, קיימת סביבה פתוחה של $(0,1,2)$ שבה ניתן לבטא את z כפונקציה של x, y. $\square$

שאלה 28

שאלה 5 ממבחן של חשבון אינפיניטיסימלי מתקדם 1 - 80415, סמסטר א' - מועד א' תשפ"ב - 27/1/2021 של שיא.
נחשב את האינטגרל

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{3}x}^{\sqrt{4-x^2}} x\sqrt{x^2+y^2}dydx$$

פתרון: נגדיר $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ על־ידי $x\sqrt{x^2+y^2}$ ו־$A:=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 1, \sqrt{3}x\le y\le\sqrt{4-x^2}\right\}$.
נבחין כי f פונקציה רציפה מאריתמטיקה של פונקציות רציפות (השורש תמיד אי־שלילי) וגם A מוגדרת היטב כי $0\le x\le 1$ ולכן כל השורשים מוגדרים.
אפשר לפתור את האינטגרל הראשון כמו שהוא אבל האינטגרל יוצא מסובך ולכן נרצה לפשט את האינטגרנד באמצעות משפט חילוף משתנה.
לפני השימוש, נזכיר את הניסוח המדוייק של **משפט חילוף משתנה**:
תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחות כך ש־$f:B\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה ו־$g:A\to B$ **דיפאומורפיזם** כלומר, חד־חד ערכית, על, גזירה ברציפות ועם הופכית גזירה ברציפות.
נגיד כי f אינטגרבילית על B אם ורק אם $x\mapsto(f\circ g)(x)|\det(Dg_x)|$ אינטגרבילית על A ואם כן האינטגרלים שלהם שווים.
נשתמש בהחלפת קורדינאטות לקוטביות, כפי שראינו מתקיים $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r\cos\theta\\r\sin\theta\end{pmatrix}$ כאשר $r=\sqrt{x^2+y^2},\theta\in[0,2\pi]$.
נשים לב שמהגדרת A נקבל ש־$0\le x\le 1\Longrightarrow 0\le r\cos\theta\le 1$ וכן

$$\sqrt{3}x\le y\le\sqrt{4-x^2}\iff 3x^2\le y^2\le 4-x^2\iff 4x^2\le y^2+x^2\le 4\underset{(\star)}{\Longrightarrow}0\le r^2\le 4\iff 0\le r\le 2$$

כאשר $(\star)$ נובע מכך ש־$0\le x\le 1$.
צריך לבחון את התחום של θ, אם $r=0$ באסה לי, אם $r\neq 0$ נקבל

$$0\le\cos\theta\le\frac{1}{r}\iff\cos^{-1}(0)\le\theta\le\cos^{-1}\left(\frac{1}{r}\right)\iff\frac{\pi}{2}\le\theta\le\cos^{-1}\left(\frac{1}{r}\right)\underset{0\le r\le 2}{\Longrightarrow}\frac{\pi}{3}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$$

אז

$$\int_A f(x,y)dydx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2 r\cos(\theta)r^2drd\theta=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(\theta)\int_0^2 r^3drd\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(\theta)\left[\frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{r=2}d\theta=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}4\cos(\theta)d\theta=4[\sin(\theta)]_{\theta=\frac{\pi}{3}}^{\theta=\frac{\pi}{2}}=4\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)=4\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=4-2\sqrt{3}$$

□

שאלה 29

שאלה 6 ממבחן של חשבון אינפיניטיסימלי מתקדם 1 - 80415, סמסטר א' - מועד א' תשפ"ב - 27/1/2021 של שיא.
יהי (X,d) מרחב מטרי, $C\subset X$ קבוצה **סגורה** ו-$K\subset X$ קבוצה **קומפקטית** כך ש-$K\cap C=\emptyset$.

סעיף א'

נוכיח שמתקיים

$$\inf_{x\in C,y\in K} d(x,y)>0$$

הוכחה: ראשית נזכיר שבמרחבים מטריים קבוצה קומפקטית (לכל כיסוי פתוח יש תת־כיסוי סופי) וקומפקטיות סדרתית (לכל סדרה במרחב יש תת־סדרה מתכנסת) אלו טענות שקולות, במקרה זה נרצה להשתמש בקומפקטיות סדרתית.
נניח בשלילה ש-$\inf_{x\in C,y\in K} d(x,y)=0$, כלומר יש $(x_n)_{n=1}^{\infty}\in C$ ו-$(y_n)_{n=1}^{\infty}\in K$ כך שמתקיים $\lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n)=0$.
K קומפקטית סדרתית ולכן ל-$(y_n)_{n=1}^{\infty}$ יש תת־סדרה מתכנסת $\left(y_{n_k}\right)_{k=1}^{\infty}$ כך ש-$y\in K$ $y_{n_k}\xrightarrow[k\to\infty]{}y$.
מהגדרת המטריקה מתקיים

$$\lim_{k\to\infty} d\left(x_{n_k},y_{n_k}\right)=0 \iff \lim_{k\to\infty} x_{n_k}=\lim_{k\to\infty} y_{n_k}=y$$

אבל C היא קבוצה סגורה ולכן $y\in C$ אבל זאת סתירה לכך ש-$C\cap K=\emptyset$.

□

סעיף ב'

נראה שאם C אינה סגורה הטענה אינה בהכרח נכונה.
הוכחה: ניקח $K=[0,1]$ ו-$C=(1,2)$ עם המטריקה הסטנדרטית, אכן $K\cap C=\emptyset$ וניקח את הסדרה הקבועה $K\ni(1,1,\cdots)=(y_n)_{n=1}^{\infty}$ ואת $(x_n)_{n=1}^{\infty}\in C=1+\frac{1}{n}$, נשים לב שמתקיים

$$\inf_{x\in C,y\in K} d(x,y)=\inf_{x\in C,y\in K}|x_n-y_n|=\inf_{x\in C,y\in K}\left|1+\frac{1}{n}-1\right|=\frac{1}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

□

שאלה 30

שאלה 7 ממבחן של חשבון אינפיניטיסימלי מתקדם 1 - 80415, סמסטר א' - מועד א' תשפ"ב - 27/1/2021 של שיא.

סעיף א'

תהיי $U \subseteq \mathbb{R}^k$ פתוחה, $f : U \to [0, \infty)$ פונקציה רציפה וחסומה. נראה כי אם f אינה זהותית 0 אזי

$$\int_U f(x)dx > 0$$

הוכחה:
ראשית, f חסומה, ולכן קיים $M \in \mathbb{R}$ כך שלכל $x \in U$ מתקיים $|f| \leq M$ ומהנתון $f : U \to [0, \infty)$ כלומר f אי־שלילית ובפרט $0 \leq f \leq M$.
נניח כי $f \not\equiv 0$, כלומר יש $x_0 \in U$ כך ש־$f(x_0) = a > 0$.
f רציפה ולכן עבור $\varepsilon = \frac{a}{2}$, יש $\delta > 0$ כך שלכל $x \in U$ כך שמתקיים $|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ ויחד עם האי־שליליות של f נקבל

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \iff f(x) - f(x_0) < \varepsilon \iff f(x) < \frac{a}{2} - a \iff f(x) < -\frac{a}{2} \iff f(x) > \frac{a}{2}$$

U פתוחה ו־$x_0 \in U$ לכן יש $r > 0$ כך ש־$B_r(x_0) \subseteq U$, אבל כדור היחידה הוא ממימד מלא (של המרחב) והשפה שלו היא ממימד נמוך באחד, ולכן ממה שראינו – היא ממידה אפס, ולכן לכדור היחידה הפתוח יש נפח.
כעת, נשים לב שמתקיים ממונוטוניות האינטגרל

$$\int_U f(x)dx \geq \int_{B_r(x_0)} f(x)dx \geq \int_{B_r(x_0)} \frac{a}{2}dx = \frac{a}{2}\operatorname{Vol}(B_r(x_0)) > 0$$

הערה: קיום $\int_U f(x)dx$ הוא לא טריוויאלי וצריך להצדיק אותו: אם ניקח $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת מיצוי קומפקטית (כלומר סדרת תתי־קבוצות קומפקטיות ובעלות נפח של A כך ש־$K_n \subseteq K_{n+1}^{\circ}$ ו־$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$) של A ואז $\int_U f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{K_n} f(x)dx$ שקיים וסופי בגלל החסימות (עם מונוטוניות האינטגרל, לכל $\forall n \in \mathbb{N},\ \int_{K_n} f(x)dx \leq \int_{K_n} Mdx = M\operatorname{Vol}(K_n)$) $\square$

סעיף ב'

נראה כי הטענה איננה נכונה אם מניחים ש־f אינטגרבילית אך לא רציפה.
הוכחה: ניקח $U = (0, 1)$ ונסתכל על $f : U \to \infty$ הנתונה על־ידי $f(x) = \begin{cases} 1 & x=\frac{1}{2} \\ 0 & x\in(0,1)\setminus\{\frac{1}{2}\} \end{cases}$.
f רציפה למעט ביחידון ולכן קבוצת נקודות אי־הרציפות שלה היא ממידה אפס, וניתן להרחיב את $(0, 1)$ לקטע $[0, 1]$ כך שמתקיים

$$f_{(0,1)}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in (0, 1) \\ 0 & x \notin (0, 1) \end{cases}$$

ממשפט לבג נובע גם־כן ש־$f_{(0,1)}$ אינטגרבילית אבל די בבירור בלקיחת סכום עליון ותחתון נקבל ש־$\int_0^1 f_{(0,1)}dx = 0$. $\square$

שאלה 31

שאלה 1 ממבחן של חשבון אינפיניטיסימלי מתקדם 1 – 80415, סמסטר א' – מועד א' תשפ"ב – 27/1/2021 של שיא.
תהיי $U \subset \mathbb{R}^k$ קבוצה פתוחה ו-$f : U \to \mathbb{R}^k$ גזירה ברציפות. יהי $x_0 \in U$ כך ש-$f(x_0) \in \partial(f(U))$ ונוכיח כי $Jf(x_0) = 0$.
הוכחה: אין לי יותר מדי מה לעשות חוץ מלהניח בשלילה. נניח בשלילה ש-$Jf(x_0) \neq 0$ ולכן $Df(x_0)$ הפיכה.
נבחין שתחת הנחה זאת אנחנו עומדים בכל תנאי **משפט הפונקציה ההפוכה**:
"תהיי $A \subseteq \mathbb{R}^k$ ותהיי $f : A \to \mathbb{R}^k$ גזירה ברציפות כך שיש $a \in A$ שמקיימת $\det(Df)_a \neq 0$.
אז קיימת $a \in U \subseteq A$ פתוחה כך ש-$f|_U$ חד־חד ערכית, $U = f(V)$ פתוחה ו-$V \to U : {}^{-1}(f|_U)$ גזירה ברציפות."
אז יש סביבה פתוחה $x_0 \in W \subseteq U$ כך שמתקיים $f|_W$ חד־חד ערכית, $V = f(W)$ פתוחה ו-$V \to W : {}^{-1}(f|_W)$ גזירה ברציפות.
אז $f(x_0)$ היא נקודה **פנימית** של $f(U)$ כי $W \subseteq U$ אבל זאת סתירה לכך ש-$f(x_0) \in \partial(f(U))$ $\square$

שאלה 32

מבחן סמסטר א' מועד א' 2024 של תמי – שאלה 5 (תמי ממש אוהבת).
תהיי $f:[0,1]^n\to[0,1]$ פונקציה אינטגרבילית.

סעיף א'

נניח כי $\int_{[0,1]^n} f=0$ ונראה כי $f=0$ מחוץ לקבוצה בעלת מידה אפס.

הוכחה: נתייחס למקרה בו $f\geq 0$, זאת מכיוון שאם f איננה אי־שלילית, ניזכר כי f אינטגרבילית על A אם ורק אם f_+, f_- אינטגרביליות על A כאשר

$$f_+ := \max(f,0), \qquad f_- := -\min(f,0)$$

כי $f_+ + f_- = |f|$ ואין הבדל בין אינטגרביליות לאינטגרביליות בהחלט.
כעת, תהיי D קבוצת נקודות אי־הרציפות של f. מהיות f אינטגרבילית נובע כי D היא ממידה אפס.
נראה שאם $y\in[0,1]^n\setminus D$ אזי $f(y)=0$ (כי קבוצת הנקודות עליה $f(x)>0$ מוכלת ב־D ולכן בהכרח ממידה אפס).
תהיי $y\in[0,1]^n\setminus D$ ונניח ש־$f(y)>0$, אז y נקודת רציפות של f ולכן יש $\delta>0$ ומלבן R_0 כך ש־$y\in R^\circ$ כך ש־$f(x)>\frac{\delta}{2}$ לכל $x\in R_0$.
ניקח P חלוקה כך ש־$R_0\in P$ ונקבל $\int_{[0,1]^n} f\geq \underline{s}(f,P)\geq \delta\cdot \mathrm{Vol}(R_0)>0$.
זאת כמובן סתירה, ולכן $f(y)=0$. כלומר, $f\equiv 0$ מחוץ לקבוצה ממידה אפס. $\square$

סעיף ב'

נניח כי $f\equiv 0$ מחוץ לקבוצה בעלת מידה אפס ונראה שמתקיים $\int_{[0,1]^n} f=0$.

הוכחה: לנוחות נסמן $A=[0,1]^n$ ו־$E\subseteq A$ הקבוצה בעלת מידה אפס המדוברת, אז הנתון אומר ש־$f|_{A\setminus E}\equiv 0$.
בלי הגבלת הכלליות נניח ש־$E=\{x\in A \mid f(x)\neq 0\}$ ונסמן ב־D את קבוצת נקודות אי־הרציפות של f ולכן $E\subseteq D$ (כי אם f רציפה בנקודה, אז קיימת סביבה פתוחה של הנקודה שבה f איננה מתאפסת, אבל אז E לא ממידה אפס).
f אינטגרבילית ולכן D היא קבוצה ממידה אפס ממשפט לבג.
לכל $n\in\mathbb{N}$ נגדיר

$$E_n=\left\{x\in A \mid |f(x)|\leq \frac{1}{n}\right\},\ \overline{E_n} \underset{\text{מה שדניאל הראה אתמול}}{=} E_n\cup\left\{x\in A \mid \lim_{k\to\infty} f(x_k)=0\right\}=E_n\cup\{x\in A\mid f(x)=0\}$$

כעת, $\overline{E_n}\subseteq D$ כי אם f רציפה ב־$\overline{E_n}$ אז $x\in\overline{E_n}$ אז $|f(x)|\geq\frac{1}{n}$ אבל $E\subseteq D$ וזאת סתירה, אז $\overline{E_n}$ היא קבוצה סגורה וחסומה ב־$\mathbb{R}^k$ ולכן קומפקטית.
f אינטגרבילית ולכן חסומה אז קיים $M>0$ כך ש־$|f|\leq M$, אז לכל $n\in\mathbb{N}$ נגדיר

$$g_n(x)=\begin{cases} M & x\in\overline{E} \\ \frac{1}{n} & x\in A\setminus\overline{E_n}\end{cases}$$

אז g_n רציפה על $A\setminus\overline{E_n}$ ולכן קבוצת נקודות אי־הרציפות שלה מוכלות ב־$\overline{E_n}$ שהיא ממידה אפס ($\overline{E_n}\subseteq D$) ולכן g_n אינטגרבילית ומתקיים

$$\left|\int_A f(x)dx\right|\leq\int_A|f(x)|dx\leq\int_A g_n(x)dx$$

יהי $\varepsilon>0$, $\overline{E_n}$ היא קבוצה קומפקטית ממידה אפס ולכן היא מתכולה אפס, כלומר קיים כיסוי סופי $(B_i)_{i=1}^m$ של $\overline{E_n}$ על־ידי תיבות כך ש־$\sum_{i=1}^m \mathrm{Vol}(B_i)<\varepsilon$.
ניקח חלוקה P של A שמכילה את כל הקודקודים בכיסוי הזה וב־A, אז

$$\left|\int_A f(x)dx\right|\leq\int_A g_n(x)dx\leq\overline{S}(g_n,P)=\sum_{B\in P}M_B(g_n)V(B)\leq\sum_{i=1}^m\sum_{\substack{B\in P\\ B\subseteq B_i}}M_B(g_n)V(B)+\sum_{\substack{B\in P\\ B\cap\bigcup_{i=1}^m B_i=\emptyset}}M_B(g_n)V(B)$$

$$\leq\sum_{i=1}^m\sum_{\substack{B\in P\\ B\subseteq B_i}}MV(B)+\sum_{\substack{B\in P\\ B\cap\bigcup_{i=1}^m B_i=\emptyset}}\frac{1}{n}V(B)\leq\sum_{i=1}^m V(B_i)+\sum_{B\in P}\frac{1}{n}V(B)\leq\varepsilon+\frac{1}{n}V(A)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

$\square$

שאלה 33

מבחן סמסטר א' מועד א' 2024 של תמי – שאלה 6.

סעיף א'

נניח כי $A \subseteq \mathbb{R}^k$ פתוחה ו־$f : A \to \mathbb{R}$ רציפה. נגדיר את המושג "f אינטגרבילית על A".

הוכחה: תהיי $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ **סדרת מיצוי פתוחה של A**, כלומר סדרת תתי־קבוצות של A כך שלכל $N \geq 1$ מתקיים $U_n \subseteq U_{n+1}$ ו־$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$.
נגיד כי f אינטגרבילית על A אם ורק אם לכל $N \geq 1$, f אינטגרבילית על U_n והסדרה $\int_{U_n} |f| dx$ חסומה. במקרה זה מתקיים

$$\int_A f(x)dx = \lim_{N\to\infty} \int_{U_n} f(x)dx$$

□

סעיף ב'

תהיי $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2 + xy + y^2 < 1\}$ ותהיי $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+xy+y^2}}$.
נראה כי f אינטגרבילית על A ונחשב את $\int_E f$.
פתרון: נרצה לעשות השלמה לריבוע

$$x^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 - \frac{y^2}{4} + y^2 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}y}{4}\right)^2$$

לשמחתנו נצטרך להשתמש בהחלפת משתנה עצמאית! נזכיר את **משפט החלפת משתנה:**
"תהיינה $A, B \subseteq \mathbb{R}^k$ פתוחות, $g : A \to B$ דיפאומורפיזם (כלומר, חד־חד ערכית, על, גזירה ברציפות ועם הופכית גזירה ברציפות) ו־$f : B \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה. אז f אינטגרבילית על A אם ורק אם $x \mapsto (f \circ g)(x)|\det(Dg_x)|$ אינטגרבילית על A ואם כן האינטגרלים הללו שווים".
נגדיר $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \frac{y}{2} \\ \frac{\sqrt{3}y}{4} \end{pmatrix}$ (אלו פונקציות לינאריות לא טריוויאליות ולכן דיפאומורפיזם), אז הנגזרת היא

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \Longrightarrow \det \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

עשינו החלפת משתנה הפוכה מהכיוון שאנחנו רגילים בו, ולכן עלינו לקחת את היעקוביאן של ההופכית, שבמטריצות 2×2 נתון על־ידי ההופכי, כלומר

$$dxdy = \frac{2}{\sqrt{3}} dudv$$

כעת, נבחין ש־E מייצג אליפסה מסביב לראשית ללא הראשית, אז $B = B_1(0) \setminus \{0\}$, אז ממשפט חילוף משתנה, f אינטגרבילית על E אם ורק אם האינטגרל הבא מתכנס

$$\int_A f(x,y)dxdy = \int_B \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}} \frac{2}{\sqrt{3}} dudv \underset{\text{קוטביות}}{=} \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{1}{r} r dr d\theta = \frac{4\pi}{\sqrt{3}}$$

□

שאלה 34

חימום – סמסטר ב' מועד ב' 2022 חימום.

סעיף א'

הגדירו קבוצה ממידה אפס.

הוכחה: קבוצה $E \in \mathbb{R}^k$ היא ממידה אפס אם לכל $\varepsilon > 0$ יש סדרת תיבות $(B_i)_{i=1}^{\infty}$ כך ש־B_i $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ ומתקיים $\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{Vol}(B_i) < \varepsilon$. □

סעיף ב'

יהיו $(X, d_X), (Y, d_Y)$ מרחבים מטריים. תהיי $f : X \to Y$ פונקציה רציפה.

נוכיח שלכל $K \subseteq X$ קומפקטית גם $f(K)$ קומפקטית.

הוכחה: תהיי $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq f(K)$, נמצא תת־סדרה שלה $y \in f(K)$ $y_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} y$.

$y_n \in f(K)$ אם ורק אם קיים $x_n \in X$ כך ש־$y_n = f(x_n)$.

K קומפקטית ולכן קיימת תת־סדרה $x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x \in K$ ולכן $f\left(x_{n_k}\right) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x)$ (מרציפות f) ולכן

$$y_{n_k} = f\left(x_{n_k}\right) \xrightarrow[k\to\infty]{} y = f(x) \in f(K)$$

□

סעיף ג'

תהיי $C \subseteq \mathbb{R}^d$ קבוצה סגורה ו־$K \subseteq \mathbb{R}^d$ קבוצה קומפקטית. נקבע האם הקבוצה הבאה היא סגורה ב־$\mathbb{R}^d$

$$K + C = \{a + b \mid a \in K,\ b \in C\}$$

הוכחה: ראשית ניזכר שנגיד שקבוצה A היא סגורה אם ורק אם לכל סדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ אם $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ אזי $x \in A$.

תהיי $(z_n)_{n=1}^{\infty} \in K + C$ ונניח שהיא מתכנסת ל־$z \in \mathbb{R}^d$ אנחנו רוצים להראות ש־$z \in K + C$.

אז יש $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in K$ ו־$(y_n)_{n=1}^{\infty} \in C$ כך ש־$z_n = x_n + y_n$.

K קומפקטי סדרתית ולכן יש תת־סדרה מתכנסת $x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x \in K$.

אז $y_{n_k} = z_{n_k} - x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} z - x$ אבל y סגורה, ולכן $z - x \in Y$.

אז $z = x + (z - x) = z \in K + C$, כנדרש, כלומר – הקבוצה סגורה. □

שאלה 35

חשבון אינפיניטיסימלי מתקדם 1 – 80315 – מועד א' סמסטר ב' 2020 – שאלה 1.
נגדיר $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ על־ידי

$$f(x,y)=x^2\cdot e^{xy}$$

נחשב את פולינום טיילור מסדר 2 של f סביב $(x,y)=(1,1)$.

פתרון: f גזירה ברציפות מאריתמטיקה של פונקציות גזירות ברציפות (שכן e^{xy} היא פונקציה חלקה). נגזור ונחשב את Df_x, D^2f_x

$$Df_x=\begin{pmatrix}e^{xy}(2x+x^2y) & x^3e^{xy}\end{pmatrix},\qquad D^2f_x=\begin{pmatrix}ye^{xy}(2x+x^2y)+e^{xy}(2+2xy) & e^{xy}(3x^2+yx^3)\\ e^{xy}(3x^2+yx^3) & x^4e^{xy}\end{pmatrix}$$

ובנקודה הנתונה מתקיים

$$Df_{(1,1)}=\begin{pmatrix}3e & e\end{pmatrix},\qquad D^2f_{(1,1)}=\begin{pmatrix}7e & 4e\\ 4e & e\end{pmatrix}$$

וכן

$$f(1,1)=1^2\cdot e^{1\cdot 1}=e$$

אז מהנוסחה שראינו בתרגול לפולינום טיילור מסדר 2 סביב $(1,1)$ נקבל

$$\begin{aligned}P_{f,2,(1,1)}&=f(1,1)+Df_{(1,1)}\begin{pmatrix}x-1\\ y-1\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}x-1 & y-1\end{pmatrix}D^2f_{(1,1)}\begin{pmatrix}x-1\\ y-1\end{pmatrix}\right)\\
&=e+3ex-4e+ey+\frac{1}{2}((x-1)(7ex-11e+4ey)+(y-1)(4ex-5e+ye))\\
&=3ex-3e+ey+\frac{1}{2}(7ex^2-11ex+4eyx-7ex-11e-4ey+4exy-5ye+y^2e-4ex+5e-ye)\\
&=3ex-3e+ey+\frac{1}{2}(7ex^2-22ex+8exy-10ey+16e+y^2e)\\
&=3ex-3e+ey+\frac{7ex^2}{2}-11ex+4exy-5ey+8e+\frac{y^2e}{2}\\
&=\frac{7ex^2}{2}+\frac{y^2e}{2}-8ex+5e-4ey+4exy\\
&=e\left(\frac{7x^2}{2}+\frac{y^2}{2}-8x+5-4y+4xy\right)\end{aligned}$$

$\square$

שאלה 36

חשבון אינפיניטיסימלי מתקדם 1 – 80315 – מועד א' סמסטר ב' 2020 – שאלה 2.

יהי (X,d) מרחב מטרי ותהיי $A\subset X$ קבוצה קומפקטית. יהי $Y\subset X$ מרחב שלם ביחס למטריקה המושרית. נוכיח כי $A\cap Y$ היא קבוצה קומפקטית.

הוכחה: שוב ניזכר שבמרחבים מטריים קומפקטיות וקומפקטיות סדרתית שקולים ופה אנחנו מדברים על קומפקטיות סדרתית.

תהיי $(x_n)_{n=1}^{\infty}\in A\cap Y$ אם נראה שיש לה תת־סדרה מתכנסת כך שמתקיים $x_{n_k}\xrightarrow[k\to\infty]{}x\in A\cap Y$, נקבל ש־$A\cap Y$ היא קומפקטית סדרתית.

מהגדרת החיתוך נובע כי (x_n) היא סדרה ב־A ו־A קומפקטית סדרתית ולכן יש לה תת־סדרה מתכנסת $x_{n_k}\xrightarrow[k\to\infty]{}x\in A$.

Y שלם ולכן כל סדרת קושי מתכנסת בו.

x_{n_k} היא קושי (כי מתכנסת) ומהגדרת המרחב השלם ומיחידות הגבול נובע כי $x\in Y$, כלומר $x\in A\cap Y$. $\square$

שאלה 37

חשבון אינפיניטיסימלי מתקדם 1 – 80315 – מועד א' סמסטר ב' 2020 – שאלה 4.

תהיי $f:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^k$ פונקציה דיפרנציאבילית ברציפות ויהי $a\in\mathbb{R}^k$ כך שמתקיים $\|(Df)_a\|_{\text{op}}<1$.

נגדיר $g:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^k$ על־ידי $g(x)=x-f(x)$.

נראה ש־g הפיכה בסביבה של a.

הוכחה: נניח בשלילה כי g איננה הפיכה בסביבה של a, כלומר $\det(Dg_a)=0$, כאשר $Dg_a=I-Df_a$, אז יש $v\in\mathbb{R}^k$ כך שמתקיים $(Dg)_a(v)=0$, כלומר

$$(Dg)_a(v)=0\iff v-(Df)_a(v)\iff(Df)_a(v)=v\underset{u=\frac{v}{\|v\|}}{\iff}(Df)_a(u)=u$$

אבל זאת סתירה! כי לפי הנתון מתקיים

$$\|(Df)_a\|_{\text{op}}<1$$

אבל

$$\|(Df)_a\|_{\text{op}}\geq\|(Df)_a(u)\|=\|u\|=1$$

כלומר, כל תנאי **משפט הפונקציה ההפוכה** מתקיימים: תהיי $A\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה, $f:A\to\mathbb{R}^k$ גזירה ברציפות ותהיי $a\in A$. אם $(Dg)_a$ הפיכה, אזי קיימת סביבה פתוחה $a\in U\subseteq A$ כך ש־$f|_U$ חד־חד ערכית, $V=f(U)$ פתוחה ו־$(f|_U)^{-1}:V\to U$ גזירה ברציפות".

כאשר במקרה שלנו, g גזירה ברציפות מאריתמטיקה של פונקציות גזירות (העתקה לינארית) וראינו שלא ייתכן ש־g לא הפיכה ב־a וממשפט הפונקציה ההפוכה נקבל את הנדרש. $\square$

שאלה 38

חשבון אינפיניטיסימלי מתקדם 1 – 80315 – מועד א' סמסטר ב' 2020 – שאלה 5.

נגדיר $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^4 \le 4\} \subseteq \mathbb{R}^k$ ונגדיר $f : A \to \mathbb{R}$ על־ידי $f(x,y) = x^2 + 4y$.

נוכיח ש־f מקבלת מינימום ומקסימום ב־A, נמצא היכן הם מתקבלים ונחשב את ערכם.

פתרון: ראשית, f רציפה וגזירה מאריתמטיקה של פונקציות רציפות ומתקיים

$$\nabla f(x,y) = (2x \ \ 4)$$

ניזכר כי אם f מקבלת נקודת קיצון פנימית, מתקיים $\nabla f(x,y) = 0$ ונבחין שאין $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ כך ש־$\nabla f(x,y) = 0$ כי $4 \ne 0$.

אז כל נקודת קיצון אחרת היא נקודת קיצון פנימית ל־A (כלומר על השפה של A או מקומית ל־A).

אם כך, נרצה להשתמש **במשפט כופלי לגראנז'**: "תהיי $B \subseteq \mathbb{R}^k$ פתוחה ותהיינה $f, g_1, \cdots g_n : B \to \mathbb{R}$ פונקציות גזירות ברציפות לכל $k \ge n + 1$. נגדיר

$$A = \{x \in B \mid g_1(x) = \cdots g_n(x) = 0\}$$

ותהיי $a \in A$ נקודה קיצון מקומית של $f|_A$, אז בידיוק אחד משני המקרים הבאים מתקיים

1. $\nabla g_1(a), \cdots, \nabla g_n(a)$ תלויים לינארית
2. $\nabla g_1(a), \cdots, \nabla g_n(a)$ בלתי־תלויים לינארית וקיימים $\lambda_1, \cdots \lambda_n \in \mathbb{R}$ (הנקראים כופלי לגראנז') כך שמתקיים

$$\nabla f(a) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \nabla_i(a)$$

נקודה שמקיימת את אחד משני התנאים האלו היא נקודה חשודה לקיצון." נסתכל על A, A היא קבוצה סגורה וחסומה ולכן ממשפט היינה־בורל היא קומפקטית סדרתית.

היא חסומה כי היא חסומה בנורמת $\|\cdot\|_\infty$ וכל הנורמות שקולות. אז החסימות נובעת מכך שברור ש־$|x| \le 2$ וגם $|y| \le 2$.

בשביל הסגירות, פשוט נשים לב שאם $(x_n, y_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה ב־A אשר מתכנסת ל־(x,y) בהתאמה אז לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$x_n^2 + y_n^4 \le 4 \underset{\text{אריתמטיקה של גבולות}}{\Longrightarrow} x^2 + y^4 = \lim_{n \to \infty} x_n^2 + y_n^4 \le 4$$

כלומר $(x,y) \in A$.

אז A קומפקטית סדרתית ולכן f בתור פונקציה רציפה מקבלת עליה מינימום ומקסימום.

נגדיר את פונקציית האילוץ שלנו להיות $g(x,y) = x^2 + y^4 - 4$ שאכן גזירה ברציפות ומתקיים

$$\nabla g(x,y) = \left(2x \ \ 4y^3\right)$$

ממשפט כופלי לגראנז' נקבל את מערכת המשוואות

$$\begin{cases} \lambda 2x = 2x \\ 4 = 4y^3 \lambda \\ x^2 + y^4 = 4 \end{cases}$$

כאשר האילוץ האחרון הוא עבור השפה.

מהמשוואה הראשונה, אם $x \ne 0$ אזי $\lambda = 1$ ומהמשוואה השנייה נקבל

$$4 = 4y^3 \Longleftrightarrow y^3 = 1 \Longleftrightarrow y = 1$$

ואז מהאילוץ השלישי נקבל $x^2 + y^2 = 4 \Longleftrightarrow x^2 = 3 \Longleftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$.

אם $x = 0$ אז מהאילוץ שהלישי נקבל $y^4 = 4 \Longleftrightarrow y = \pm\sqrt[4]{4} = \pm\sqrt{2}$.

כלומר בסך־הכל מצאנו את הנקודות

$$\left(\sqrt{3}, 1\right), \left(-\sqrt{3}, 1\right), \left(0, \sqrt{2}\right), \left(0, -\sqrt{2}\right)$$

נציב ב־f ונקבל

$$f\left(\sqrt{3}, 1\right) = 7, f\left(-\sqrt{3}, 1\right) = 7, f\left(0, \sqrt{2}\right) = 4\sqrt{2}, f\left(0, -\sqrt{2}\right) = -4\sqrt{2}$$

כלומר מינימום מתקבל בנקודה $\left(0, -\sqrt{2}\right)$ כשהערך הוא 7 ומקסימום מתקבל בנקודות $f\left(\pm\sqrt{3}, 1\right)$ כשהערך הוא $-4\sqrt{2}$ □

שאלה 39

חשבון אינפיניטיסימלי מתקדם 1 – 80315 – מועד א' סמסטר ב' 2020 – שאלה 7.

יהי (X,d) מרחב מטרי ו־$A,B\subset X$ קבוצות קומפקטיות ולא ריקות. עבור $\varepsilon>0$ נגדיר

$$A^{\varepsilon}=\{x\in X\mid \exists a\in A,d(x,a)<\varepsilon\}$$

סעיף א'

נוכיח שקיים $\varepsilon>0$ כך ש־$B\subset A^{\varepsilon}$.

הוכחה: B קומפקטית ולכן סגורה וחסומה. אז יהי $r>0$ ו־$x\in X$ אזי $B\subset B_r(x)$.

A לא ריקה ולכן יהי $a\in A$, נסמן $\varepsilon=r+d(a,x)$ ונראה ש־$B\subset A^{\varepsilon}$:

לכל $b\in B\subset B_r(x)$ כלומר $d(b,x)<r$, אבל מאי־שיוויון המשולש

$$d(b,a)\le d(b,x)+d(a,x)<r+d(x,a)=\varepsilon$$

ומהגדרת A^{ε} נקבל $b\in A^{\varepsilon}$. $\square$

סעיף ב'

נוכיח שאם $\inf\{\varepsilon>0\mid B\subset A^{\varepsilon}\}=0$ אזי $B\subset A$.

הוכחה: יהי $b\in B$ ונרצה להראות ש־$b\in A$.

מהנתון נובע שיש סדרה $(\varepsilon_n)_{n=1}^{\infty}$ כך ש־$B\subset A^{\varepsilon_n}$ לכל $n\in\mathbb{N}$ וכן

$$b\in B\subset A^{\varepsilon_n}$$

אז יש $a_n\in A$ כך ש־$d(b,a_n)<\varepsilon_n$ אבל $\varepsilon_n\to 0$ אז $a_n\to b$.

A קומפקטית ולכן סגורה, כלומר כל סדרה בקבוצה שמתכנסת מתכנסת לערך בקבוצה, אז $b\in A$, כנדרש. $\square$

שאלה 40

חשבון אינפיניטיסימלי מתקדם 1 – 80315 – מועד ב' סמסטר ב' 2020 – שאלה 1.
יהי (X,d) מרחב מטרי ועבור $\varepsilon>0$ וקבוצה $X \subset\neq \emptyset$ נגדיר

$$A^\varepsilon = \{x \in X \mid \exists a \in A, d(x,a) < \varepsilon\}$$

נוכיח שהקבוצה A^ε פתוחה.

הוכחה: ניזכר שנגיד כי קבוצה A היא פתוחה אם יש $x \in A$ ו־$r>0$ כך שמתקיים $B_r(x) \subset A$.
יהי $x \in A^\varepsilon$ ולכן קיים $a \in A$ כך שמתקיים $d(x,a) < \varepsilon$. אז נגדיר $r = \varepsilon - d(x,a)$ ונשים לב שלכל $y \in B_r(x)$ מתקיים $d(x,y) < r$, אז מאי־שיוויון המשולש

$$d(y,a) \le d(x,y) + d(x,a) < r + d(x,a) = \varepsilon - d(x,a) + d(x,a) = \varepsilon$$

כלומר $y \in A^\varepsilon$, כלומר מצאנו $r>0$ כך ש־$B_r(x) \subset A^\varepsilon$. $\square$

שאלה 41

חשבון אינפיניטיסימלי מתקדם 1 – 80315 – מועד ב' סמסטר ב' 2020 – שאלה 2.
נגדיר את הפונקציה $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ על־ידי $f(x,y)=x^3-3x-y^2-2$.
נמצא ונסווג את כל נקודות הקיצון של f.

הוכחה: f גזירה ברציפות מאריתמטיקה של פונקציות רציפות ומתקיים

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}3x^2-3 & -2y\end{pmatrix}$$

ניזכר שנקודות קריטיות מתקבלות אם $\nabla f(x,y)=0$ ולכן במקרה שלנו צריך לקיים את מערכת המשוואות

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}\iff\begin{cases}3x^2-3=0\iff x^2=1\iff x=\pm1\\ -2y=0\implies y=0\end{cases}$$

אז הנקודות החשודות לקיצון הן $(1,0),(-1,0)$ בלבד.
נבחין ש־f חלקה כפולינום ולכן גם הנגזרות השניות שלה קיימות (ובפרט נקבל שגם הנגזרות המעורבות שלה קיימות) ונעזר במבחן הנגזרת השנייה.
נחשב אם כך

$$Hf_{(x,y)}=\begin{pmatrix}6x & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$$

בתרגול ראינו שלמקרה של פונקציות $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ ניתן להסתכל על הדטרמיננטה ועל העקבה כדי לחשב את סוג הקיצון תחת המיפוי הבא:

1. דטרמיננטה חיובית ועקבה חיובית – מינימום מקומי
2. דטרמיננטה חיובית ועקבה שלילית – מקסימום מקומי
3. דטרמיננטה שלילית – אוכף (יש ערך עצמי שלילי וחיובי)
4. דטרמיננטה אפס לא ניתן לדעת

$$Hf_{(1,0)}=\begin{pmatrix}6 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}\implies\det\begin{pmatrix}6 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}=-12,\ \ \mathrm{tr}\begin{pmatrix}6 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}=4\implies(1,0)\text{ is saddle point}$$

$$Hf_{(-1,0)}=\begin{pmatrix}-6 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}\implies\det\begin{pmatrix}-6 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}=12,\ \ \mathrm{tr}\begin{pmatrix}-6 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}=-8\implies(-1,0)\text{ is maximum point}$$

□

שאלה 42

חשבון אינפיניטיסימלי מתקדם 1 – 80315 – מועד ב' סמסטר ב' 2020 – שאלה 4.

נגדיר $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ על־ידי $f(x,y)=|x|^3y$ ונראה ש־f דיפרנציאבילית בכל נקודה.

הוכחה: לפשטות נגדיר

$$f(x,y)=\begin{cases}x^3y & x>0\\ 0 & x=0\\ -x^3y & x<0\end{cases}$$

בבירור f דיפרנציאבילית בכל פונקציה בנפרד ורק נשאר לראות מה קורה כאשר $x\to 0$ משני הכיוונים, כלומר לבחון $(0,b)$ לכל $b\in\mathbb{R}$, אז

$$\lim_{h=(h_1,h_2)\to 0}\frac{f(h_1,b+h_2)-f(0,b)}{\|h\|}=\lim_{h=(h_1,h_2)\to 0}\frac{|h_1|^3(b+h_2)}{\|h\|}$$

נשים לב שמתקיים $|h_1|\geq\sqrt{h_1^2+h_2^2}=\|h\|$ וניזכר כי $h\to 0$ אם ורק אם $h_1\to 0,h_2\to 0$ ואז

$$\lim_{h=(h_1,h_2)\to 0}\frac{|h_1|^3|(b+h_2)|}{\|h\|}\leq\frac{|h_1|^3|b+h_2|}{|h_1|}=|h_1|^2|b+h_2|\underset{h\to 0}{\to}0$$

וזהו. $\square$

שאלה 43

חשבון אינפיניטיסימלי מתקדם 1 – 80315 – מועד ב' סמסטר ב' 2020 – שאלה 7.

נגדיר $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ על־ידי $g(x,y)=e^{x^2y}+e^{x+y^3}$.

יהיו $x_0,y_0\in\mathbb{R}$ ויהי $2<a\in\mathbb{R}$ כך שמתקיים $g(x_0,y_0)=a$.

נראה שקיים $\varepsilon>0$ וקיימת פונקציה רציפה $f:(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$ כך שלכל $x\in(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$ מתקיים $g(x,f(x))$.

הוכחה: טוב – זה צועק **משפט הפונקציה הסתומה**:

"תהיינה $A\subseteq\mathbb{R}^k, B\subseteq\mathbb{R}^m$ פתוחות ו־$G:A\times B\to\mathbb{R}^m$ גזירה ברציפות ונניח שב-$(a,b)\in A\times B$ מתקיים $G(a,b)=0$ ו־$Dg_{(a,b)}$ הפיכה.
אז קיימת $(a,b)\in U\subseteq A\times B$ פתוחה ו־$a\in V\subseteq A$ פתוחה כך ש־$f:V\to\mathbb{R}^m$ גזירה ברציפות ומתקיים לכל $(x,y)\in U$ ש־$G(x,y)=0$ אם ורק אם $y=f(x)$"

במקרה שלנו, $A=\mathbb{R}=B$ ואכן g גזירה ברציפות ולא מתאפסת ב־(x_0,y_0), כי

$$\nabla g(x,y)=\begin{pmatrix}e^{x^2y}2yx+e^{x+y^3} & x^2e^{x^2y}+3y^2e^{x+y^3}\end{pmatrix}$$

ונבחין שכל קורדינאטה היא אי־שלילית! כלומר, $x_0=y_0=0 \iff g(x_0,y_0)=0$ אבל אז $G(x_0,y_0)=e^0+e^0=2$ אבל נתון $g(x_0,y_0)=a>2$ וזאת סתירה.

אז נגדיר $G:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ על־ידי $G(x,y)=g(x,y)-a$ והיא עומדת בכל תנאיי משפט הפונקציה הסתומה.

תפרטי עוד קצת אבל הבנת. $\square$

שאלה 44

מבחן סמסטר א' מועד ב' 2024 של תמי – שאלה 5.
תהיי $f:[0,1]^2\to\mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית.

סעיף א'

תהיינה

$$g(x)=\underline{\int} f(x,y)dy,\qquad h(x)=\overline{\int} f(x,y)dy$$

נוכיח כי $h(x)\equiv g(x)$ מחוץ לקבוצה בעלת מידה אפס.

הוכחה: ניזכר **במשפט פוביני**: תהיי Q תיבת מכפלה, כלומר $Q=A\times B$ כאשר $A\in\mathbb{R}^k, B\in\mathbb{R}^m$ תיבות. נניח ש־$f:Q\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית. אז מתקיים

$$\int_Q f(x,y)dxdy=\int_B\left(\underline{\int}_A f(x,y)dx\right)dy=\int_B\left(\overline{\int}_A f(x,y)dx\right)dy$$

$$\int_Q f(x,y)dxdy=\int_A\left(\underline{\int}_B f(x,y)dy\right)dx=\int_A\left(\overline{\int}_B f(x,y)dy\right)dx$$

כעת, f רציפה ולכן מקיימת את משפט פוביני.
לכן ממשפט פוביני נקבל שמתקיים $|h(x)-g(x)|=0$ ותמיד מתקיים $g(x)\le h(x)$ ולכן $g(x)=h(x)$ מחוץ לקבוצה ממידה אפס. $\square$

סעיף ב'

נחשב את

$$\int_0^1\left(\int_{\sqrt{y}}^1\frac{1}{1+x^3}dx\right)dy$$

פתרון: ראשית, נבחין שהפונקציה $f(x,y)=\frac{1}{x^3+1}$ רציפה לכל $x\neq-1$.
נרשום את התחום שלנו

$$A:=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid 0\le y\le 1,\sqrt{y}\le x\le 1\right\}$$

כלומר, f רציפה על A ולכן אינטגרבילית.
נבחין שהאינטגרל $\int\frac{1}{1+x^3}dx$ הוא אינטגרל מסובך, ולכן נרצה להשתמש פוביני (שניתן מהיות הפונקציה אינטגרבילית). מתקיים

$$\sqrt{y}\le x\le 1\iff y\le x^2\le 1\wedge 0\le y\le 1\implies A':=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid 0\le x\le 1,0\le y\le x^2\right\}(A'=A)$$

וממשפט פוביני נקבל

$$\int_0^1\left(\int_{\sqrt{y}}^1\frac{1}{1+x^3}dx\right)dy=\int_0^1\left(\int_0^{x^2}\frac{1}{1+x^3}dy\right)dx=\int_0^1\left[\frac{y}{1+x^3}\right]_{y=0}^{y=x^2}dx=\int_0^1\frac{x^2}{1+x^3}dx$$

כאשר את האחרון אנחנו כבר יודעים לחשב באמצעות משפט החלפת משתנה של אינפי 2

$$\int\frac{x^2}{1+x^3}dx\underset{\substack{u=x^3+1\\ \frac{du}{3}=x^2dx}}{=}\frac{1}{3}\int\frac{1}{u}=\frac{\ln(|u|)}{3}=\frac{\ln\left(\left|x^3+1\right|\right)}{3}\implies\int_0^1\frac{x^2}{1+x^3}dx=\left[\frac{\ln\left(\left|x^3+1\right|\right)}{3}\right]_{x=0}^{x=1}=\frac{\ln(2)}{3}$$

כלומר

$$\int_0^1\left(\int_{\sqrt{y}}^1\frac{1}{1+x^3}dx\right)dy=\frac{\ln(2)}{3}$$

$\square$

שאלה 45

מבחן סמסטר ב' מועד א' – 2024 – שאלה 3.
יהיו $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$ כך שמתקיים $A \cap B = \emptyset$ ו־$A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$, כך ש־$A$ סגורה ו־B קומפקטית.
נראה ש־$\operatorname{dist}(A,B) = \inf\{\|a-b\|_d \mid a \in A, b \in B\}$ מתקבל ושהוא חיובי.
הוכחה: ראשית נראה שמתקיים $\operatorname{dist}(A,B) > 0$: נניח בשלילה שהוא 0, אזי קיימות סדרות $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in A, (b_n)_{n=1}^{\infty} \in B$ כך שמתקיים

$$\lim_{n\to\infty} \|a_n - b_n\|_d = 0$$

B קומפקטית סדרתית ולכן ל־$\{b_n\}$ יש תת־סדרה מתכנסת $b_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} b \in B$, אבל מהגדרת הגבול נובע כי

$$\lim_{k\to\infty} \left\|a_{n_k} - b_{n_k}\right\|_d = 0 \iff \lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \lim_{k\to\infty} b_{n_k} = b$$

אבל A סגורה ולכן $b \in A$ אבל זאת סתירה לכך ש־$A \cap B = \emptyset$. אז $\operatorname{dist}(A,B) > 0$.
נראה כעת שהמרחק מתקבל.
B קומפקטית ולכן סגורה וחסומה, כלומר קיים $R > 0$ כך שמתקיים $B \subseteq B_R(0)$, ניקח $r > 0$ כך ש־$r > \operatorname{dist}(A,B)$ ונסתכל על

$$C \coloneqq A \cap \overline{B_{M+r}(0)}$$

ניזכר שהכדור הסגור הוא קבוצה קומפקטית, וראינו שתת־קבוצה סגורה של קבוצה קומפקטית היא קומפקטית ולכן C קבוצה קומפקטית ב־$\mathbb{R}^d$.
נסתכל על $f : C \times B \to \mathbb{R}$ הנתונה על־ידי $f(a,b) = \|a-b\|_d$ זוהי פונקציה רציפה וראינו בתרגיל שמכפלה קרטזית של קבוצות קומפקטיות היא קומפקטית, אז לפי משפט ויירשטראס – f מקבלת מינימום על $C \times B$, כלומר יש $(a_0, b_0) \in C \times B \subseteq A \times B$ כך שמתקיים

$$\|a_0 - b_0\|_d = \min\{\|a-b\|_d \mid a \in C, b \in B\}$$

מהבנייה שעשינו נסיק שלא יכול להיות ש־$a_0 \in A \setminus C$ כי אז $\operatorname{dist}(a,B) > \operatorname{dist}(A,B) + 1$, אבל $\operatorname{dist}(A,B) = \inf\{\|a-b\|_d \mid a \in A, b \in B\}$ ואז בהכרח $\operatorname{dist}(a,B) > \operatorname{dist}(A,B)$ אז האינפימום לא יתקבל. $\square$

שאלה 46

מבחן סמסטר ב' מועד א' – 2024 – שאלה 4.

נגדיר $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ על־ידי $f(x,y)=\begin{pmatrix}1+ax^2+by & bx\end{pmatrix}$ כאשר $a,b\in\mathbb{R}$.

סעיף א'

נחשב את $Df_{(x,y)}$ ואת $Jf(x,y)$.

פתרון: ראשית f גזירה קורדינאטה קורדינאטה ולכן גזירה. נסמן

$$f_1(x,y)=1+ax^2+by,\qquad f_2(x,y)=bx$$

$$Df_{(x,y)}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2ax & b\\ b & 0\end{pmatrix}$$

ולכן

$$Jf(x,y)=\det\left(Df_{(x,y)}\right)=\det\begin{pmatrix}2ax & b\\ b & 0\end{pmatrix}=-b^2$$

□

סעיף ב'

נניח ש־$b\neq 0$. נראה שיש $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ שהיא דיפאומורפיזם ושלכל $B\subseteq\mathbb{R}^2$ קומפקטית ובעלת נפח $\mathrm{Vol}(f(B))=b^2\,\mathrm{Vol}(B)$.

הוכחה: ניזכר **דיפאומורפיזם** – פונקציה חד־חד ערכית ועל, גזירה ברציפות עם הופכית גזירה ברציפות.

מההנחה ש־$b\neq 0$, נרצה להשתמש במשפט **הפונקציה ההפוכה** כי כל התנאים שלו מתקיימים.

משפט הפונקציה הפוכה: "תהיי $A\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה ו־$g:A\to\mathbb{R}^k$ גזירה ברציפות. נניח שלכל $a\in A$ מתקיים ש־Dg_a הפיכה (כלומר יעקוביאן שונה מ־0).

אז קיימת סביבה פתוחה $a\in U\subseteq A$ כך ש־$f|_U$ חד־חד ערכית, $V=f(U)$ פתוחה ו־$(f|_U)^{-1}:V\to U$ גזירה ברציפות."

מההנחה כי $b\neq 0$ נובע כי f הנתונה היא דיפאומורפיזם:

1. f גזירה ברציפות כי כל רכיב ב־Df שמצאנו בסעיף הקודם הוא רציף (קבוע או פולינום)
2. f על – יהי $(c,d)\in\mathbb{R}^2$ ונרצה להראות שקיימים $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ כך שמתקיים $f(x,y)=(c,d)$, כלומר

$$\begin{cases}1+ax^2+by=c\\ bx=d\end{cases}$$

היות ו־$b\neq 0$, מהמשוואה השנייה נקבל $x=\frac{d}{b}$ ובהצבה במשוואה הראשונה

$$1+a\left(\frac{d}{b}\right)^2+by=c\iff 1+\frac{ab^2}{d^2}+by=c\iff by=c-1-\frac{ab^2}{d^2}\iff y=\frac{c}{b}-\frac{1}{b}-\frac{ab}{d^2}$$

כלומר $f\left(\frac{d}{b},\frac{c}{b}-\frac{1}{b}-\frac{ab}{d^2}\right)=(a,b)$ ולכן f על.

3. f חד־חד ערכית: נניח שלא, ולכן יש $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$ כך שמתקיים

$$f(x_1,y_1)=f(x_2,y_2)\iff\begin{pmatrix}1+ax_1^2+by_1 & bx_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+ax_2^2+by_2 & bx_2\end{pmatrix}\iff\begin{cases}ax_1^2+by_1=ax_2^2+by_2\\ bx_1=bx_2\end{cases}$$

אבל $b\neq 0$ ולכן מהמשוואה השנייה $x_1=x_2$ ובאופן ישיר נקבל אז גם ש־$y_1=y_2$ ולכן f חד־חד ערכית.

כעת, ממשפט הפונקציה ההפוכה שציטטנו קודם, היות ו־f היא פונקציה מקבוצה פתוחה לקבוצה פתוחה שהיא גזירה ברציפות וחד־חד ערכית ועל שם – נקבל ישירות כי f^{-1} גם גזירה ברציפות ולכן f דיפאומורפיזם, כנדרש.

עבור החלק השני, f היא דיפאומורפיזם ולכן עומדת בתנאי משפט חילוף משתנה, ו־$B\subseteq\mathbb{R}^2$ קומפקטית ובעלת נפח נקבל

$$\int_{f(B)}1dx=\int_{f^{-1}(f(B))}1\circ f(x)|Jf|dt=\int_B b^2dt=\mathrm{Vol}(B)b^2$$

□

שאלה 47

מבחן סמסטר ב' מועד א' – 2024 – שאלה 5.

נמצא בקבוצה $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2x + 2y^2 = 35\}$ אשר הקרובות והרחוקות ביותר מהראשית.

פתרון: ראשית נבחין כי A מתאר אליפסה בהזזה מהראשית ועל־כן זה תחום סגור וחסום וממשפט היינה־בורל, A קומפקטית.
אפשר לראות זאת על־ידי השלמה לריבוע

$$x^2 + 2x + 2y^2 = 35 = (x+1)^2 + 2y^2 = 36$$

נגדיר $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ להיות פונקציית המרחק שלנו ואת $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ להיות פונקציית האילוץ שלנו, על־ידי

$$f(x,y) = x^2 + y^2, \qquad g(x,y) = x^2 + 2x + 2y^2 - 35$$

נבחין שהראשית היא נקודת קיצון פנימית של f אבל לא ב־A אז כל קיצון אחר הוא מקומי ל־$f|A$, תצטטי את משפט כופלי לגראנז'...

$$\nabla f(x,y) = (2x \;\; 2y), \qquad \nabla g(x,y) = (2x+2 \;\; 4y) \Longrightarrow \begin{cases} 2x = \lambda(2x+2) \\ 2y = \lambda 4y \end{cases}$$

מהמשוואה השנייה נקבל

$$y = \lambda 2y$$

אם $y = 0$ אזי מהאילוץ

$$x^2 + 2x = 35 \iff x^2 + 2x - 35 = 0 \underset{\text{נוסחת שורשים}}{\iff} (x+7)(x-5) = 0$$

כלומר $(5,0), (-7,0)$ נקודות חשודות לקיצון. אם $y \neq 0$ אזי מהמשוואה השנייה נקבל $\lambda = \frac{1}{2}$ ומהמשוואה הראשונה

$$2x = \frac{1}{2}(2x+2) \iff 2x = x + 1 \iff x = 1$$

ומהצבה באילוץ $1 + 1 + 2y^2 = 35 \iff 2y^2 = 32 \iff y^2 = 16 \iff y = \pm 4$ ולכן $(1,-4), (1,4)$ נקודות חשודות לקיצון.
חישוב יניב לנו

$$f(1,4) = f(1,-4) = 17, f(-7,0) = 49, f(5,0) = 25$$

ולכן הנקודה הרחוקה ביותר מהראשית היא $(-7,0)$ ובה מתקבל הערך 49 והנקודות הכי קרובות לראשית הן $f(1,4), f(1,-4)$ שעליהן הפונקציה מקבלת את הערך 17. $\square$

שאלה 48

מבחן סמסטר א' מועד ב' – 2023 – שאלה 2.
תחשבי את האינטגרל

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \int_0^z y\cos(z^6)dxdzdy$$

פתרון: ראשית האינטגרל הפנימי הוא קל

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \int_0^z y\cos(z^6)dxdzdy = \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 zy\cos(z^6)dzdy$$

כעת האינטגרל הפנימי הוא לא פונקציה אלמנטרית אז אנחנו לא יודעים לאנטגרל אותה, אך נבחין שהפונקציה רציפה על התחום הזה מאריתמטיקה של פונקציות רציפות ועל־כן היא אינטגרבילית ואפשר להשתמש במשפט פוביני שציטטתי איפשהו.
נחשב את תחום האינטגרציה המתאים

$$0 \le y \le 1, \sqrt{y} \le z \le 1 \Longrightarrow y \le z^2 \le 1 \Longrightarrow 0 \le z \le 1, 0 \le y \le z^2$$

אז מפוביני

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 zy\cos(z^6)dzdy &= \int_0^1 \int_0^{z^2} zy\cos(z^6)dydz \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \left[y^2 z\cos(z^6)\right]_{y=0}^{y=z^2} dz \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 z^5\cos(z^6)dz \\ &\underset{(\star)}{=} \frac{1}{12}\int_0^1 \cos(u)du \\ &= \frac{1}{12}[\sin(u)]_{u=0}^{u=1} \\ &= \frac{\sin(1)}{12}\end{aligned}$$

כאשר $(\star)$ נובע מההחלפת משתנה של אינפי2 – $u = z^6, du = 6z^5dz$. □