,פתרון מטלה -01 מטלה

2025 באוקטובר 23



. תהיי X קבוצה לא ריקה

'סעיף א

 $.(\star)~E_1 \smallsetminus E_2 \in \mathcal{A}$ מתקיים $E_1, E_2 \in \mathcal{A}$ ולכל ולכל עד כך כך כך מ $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ תהיי

.X אלגברה על היא אלגברה על

הבאים: כדי שנגיד ש- \mathcal{A} היא אלגברה על X צריכים להתקיים הבאים:

- $X \in \mathcal{A}$.1
- משלים מחת לקיחת משלים \mathcal{A} .2
- סופיים איחודים חחת סגורה מזורה \mathcal{A} .3
- :תון, נבחן את שתי התכונות האחרות $X \in \mathcal{A}$

 וקיבלנו $E^c=X\setminus E\in\mathcal{A}$ שמתקיים שמתקיים (\star) נקבל מהנתון היות $X\in\mathcal{A}$. היות ש־ $E^c\in\mathcal{A}$ ונרצה להראות ונרצה להראות משלים: סגירות תחת לקיחת משלים.

 $.E_1 \cup E_2 \in \mathcal{A}$ ש ש־להראות ונרצה ונרצה ונרצה היינה חהיינה תהיינה סופיים: תהיינה ונרצה החת $E_1, E_2 \in \mathcal{A}$

. המשלים. החיתוך מהגדרת מהגדרת ב $E_1^c \cap E_2^c = E_1^c \setminus E_2$ וכן וכן וב $E_1 \cup E_2 = (E_1^c \cap E_2^c)^c$ מהגדרת מתקיים מכללי

 $(E_1^c \setminus E_2)^c \in \mathcal{A}$ וכן מתקיים גם $E_1^c \setminus E_2 \in \mathcal{A}$ ולפי (\star) ולפי ולכן $E_1^c \in \mathcal{A}$ וכן מתקיים גם \mathcal{A} ראינו ש־ \mathcal{A}

תחת סגורה תחת , $E_1\cup E_2\in\mathcal{A}$ יש אומר בידיוק וזה בידיוק ווה סגורה סגורה סגורה פורה סגורה הראינו ווה בידיוק ווה פורה סגורה סגורה סגורה סגורה מכללי החת מכללי שראינו לעיל מתקיים אומר פורה מכללי החת סגורה מורה מורה מכללי החת מכל איחודים סופיים.

אלגברה. אלגברה התנאים היא היא אלגברה. שלושת התנאים מתקיימים א

 $\mathcal{A}_n\subseteq\mathcal{A}_{n+1}$ מתקיים $n\in\mathbb{N}$ מלגבראות על X כך אלגבראות אלגבראות תהיינה מתקיים \mathcal{A} היא אלגברה על $\mathcal{A}=\bigcup_{n=1}^\infty\mathcal{A}_n$ נוכיח שמתקיים מתקיים היא אלגברה על א

 $X\in\mathcal{A}$ נובע כי $\mathcal{A}_1\subseteq\mathcal{A}=igcup_{n=1}^\infty\mathcal{A}_n$ מכך ש־ $X\in\mathcal{A}_1$ נובע כי $X\in\mathcal{A}_1$ נובע כי $X\in\mathcal{A}_1$ היות ו־ $X\in\mathcal{A}_1$

 $E^c \in \mathcal{A}$ ים. בראות לקיחת משלים: יהי הי $E \in \mathcal{A}$ יהי משלים: סגירות תחת לקיחת משלים: יהי

 $.E \in \mathcal{A}_k$ ער כך מינימלי מינימלי קיים נובע כי נובע בו $E \in \mathcal{A}$ מכך מכך מכך

. משלים. לקיחת תחת לקיחת היא ולכן ברה ולכן ברה ולכן מובע בי $\mathcal{A}_k\subseteq\mathcal{A}$ ומכך ברה ולכן משלים אלגברה ולכן סגורה ללקיחת משלים ולכן ומכך ברה ולכן מובע מובע היא אלגברה ולכן סגורה ללקיחת משלים ולכן נבחר תחת איחודים ולכן היא אלגברה ולכן אבל היא \mathcal{A}_k אבל אבל $E_1,E_2\in\mathcal{A}_k$ של הכלות העולה של השרשרת אלגברה ולכן ולכן מהנתון על השרשרת איחודים ולכן אבל אבר ולכן מהנתון אלגברה ולכן מחודים ולכן היא אלגברה ולכן סגורה איחודים ולכן מחודים ולכן מחודים ולכן מהנתון על השרשרת העולה של הכלות נקבל של השרשרת העולה של הכלות השרשרת העולה של הכלות נקבל של של הכלות ה . סופיים איחודים סגורה תחת סגורה וקיבלנו ש־ $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{A}$ איחודים מהגדרת איחודים אבל אבל הארב וקיבלנו ש־ $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{A}$ אבל אבל מהגדרת מהגדרת האיחוד ולכן אלגברה. התנאים מתקיימים ולכן היא אלגברה. שלושת התנאים מתקיימים מחקיימים שלו

'סעיף ג

. אלגבראת אינו נכון עבור σ אלגבראות. כלומר, נראה שאיחוד עולה של σ אלגבראות אינו בהכרח אינו בהכרח בראה כי הסעיף הקודם אינו נכון עבור

^		۰
•,	ווארה	,

. פתוחה $U\subseteq\mathbb{R}$ תהיי . \mathbb{R} את לגברת בורל אל $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. מסמן ב־

'סעיף א

. בזוגות זרים פתוחים קטעים של אוסף של בזוגות להצגה להצגה ניתנת להצגה של אוסף ביו

הוכחה: TODOOOOOOOOOOOOOO

'סעיף ב

בזוגות. זרים מרוחים קטעים של בן־מנייה של אוסף בזרים בזוגות. נראה כי Uים היא איחוד של אוסף בן

'סעיף ג

 \mathbb{R}^{-} נוצרת הפתוחים הקטעים אוסף על־ידי על־נוצרת נוצרת נסיק פידי נסיק נוצרת נוצרת נוצרת אוסף נוצרת על

הוכחה: TODOOOOOOOOOOOO

'סעיף ד

הוכחתי.

תהיי על אלגברה על - σ , \mathcal{M}_2 יית ותהיי קבוצות בין פונקציה פונקציה ל $f:X_1\to X_2$ יתהיי תהיי

$$\mathcal{M}_1 = \left\{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{M}_2\right\}$$

 X_1 אלגברה על σ -אלגברה

:מתקיימים שהבאים להראות עלינו להראו σ היא \mathcal{M}_1 ש באים כדי כדי להנכחה: הוכחה:

 $.E^c \in \mathcal{M}_1$ יש ש־באות ונרצה ונרצה ונרצה ההיא סגורה משלים - יהי משלים משלים \mathcal{M}_1 .2

מתקיים ,
 $E=f^{-1}(A)$ כך כך כך $A\in\mathcal{M}_2$ קיים קיים כלומר
כ $E\in\mathcal{M}_1$

$$E = f^{-1}(A) \iff E^c = (f^{-1}(A))^c = X_1 \setminus f^{-1}(A)$$

הבאה הגרירות שרשרת מתקיימת לכל לכל מתקיימת $x \in X_1$

$$x \in X_1 \smallsetminus f^{-1}(A) \Longleftrightarrow x \not\in f^{-1}(A) \Longleftrightarrow f(x) \not\in A \Longleftrightarrow f(x) \in A^c \Longleftrightarrow x \in f^{-1}(A^c)$$

כלומר

$$(\star) E^c = f^{-1}(A^c)$$

 $.E^c \in \mathcal{M}_1$ נובע (*) עם ויחד א $A^c \in \mathcal{M}_2$ כי נובע כי אלגברה מהיות מהיות $\sigma \ \mathcal{M}_2$

. $\bigcup_{n=1}^\infty E_n\in\mathcal{M}_1$ שלורה תחת איחודים בת־מנייה – תהיי התהיי ל $\{E_n\}_{n=1}^\infty\subseteq\mathcal{M}_1$ ונרצה להראות בת־מנייה בת־מנייה בת־מנייה מכך שלכל $\{E_n\}_{n=1}^\infty\subseteq\mathcal{M}_2$ נובע כי קיימים ליימים $\{A_n\}_{n=1}^\infty\subseteq\mathcal{M}_2$ בהתאמה כך שלכל ל $\{E_n\}_{n=1}^\infty\subseteq\mathcal{M}_1$ מתקיים מתקיים

$$f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right)=\bigcup_{n=1}^\infty f^{-1}(A_n)$$

שכן לכל $x \in X_1$ מתקיים

$$x \in f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \Longleftrightarrow f(x) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Longleftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, f(x) \in A_n \Longleftrightarrow \exists n, x \in f^{-1}(A_n) \Longleftrightarrow x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A_n)$$

ובמקרה שלנו מתקיים

$$\bigcup_{n=1}^\infty E_n = \bigcup_{n=1}^\infty f^{-1}(A_n) = f^{-1}\Biggl(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\Biggr)$$

 $.f^{-1}\bigl(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\bigr)\in\mathcal{M}_1$ ולכן ולכן $\bigcup_{n=1}^\infty A_n\in\mathcal{M}_2$ מתקיים מתקיים היא היא \mathcal{M}_2 ולכן היות היא

4

. הלגברה מטרי בו הוא הפתוחות הקבוצות שאוסף מטרי מטרי מרחב מלגברה נניח נניח כי

נוכיח כי זה מרחב דיסקרטי.

הוכחה: נזכר

תהיי א שאיננה ש־X שאיננה היא היא \mathcal{M}^- ש ונניח ש־לגברה תהיי א קבוצה תהיי

'סעיף א

. זרות מכילה של אינסופי אינסופי מכילה מכילה \mathcal{M} כי נראה בי

 $\emptyset\in\mathcal{M}$ וכן $X\in\mathcal{M}$ וכמובן $A_1^c\in\mathcal{M}$ אינסופית, שינס מכך ש $A_1\in\mathcal{M}$ כך שי $A_1\neq\emptyset,A_1\neq X$ כך שי $A_1\in\mathcal{M}$ וכן אינסופית, מאינסופיות $A_1^c\in\mathcal{M}$ וכן אינסופיות A_1,A_2,\cdots וכן אינסופיות A_1,A_2,\cdots וכן אינסופיות אינסופיות שינסופיות אינסופיות שינסופיות אינסופיות שינסופית ונגדיר

$$\begin{split} B_1 &= A_1,\\ B_2 &= A_2 \setminus A_1 = A_2 \cap A_1^c = A_2 \cap A_1^c \underset{\text{columination}}{=} \left(A_2^c \cup (A_1^c)^c\right)^c = \left(A_2^c \cup A_1\right)^c,\\ B_3 &= A_3 \setminus (A_1 \cup A_2) = A_3 \setminus B_2,\\ &: \end{split}$$

 $A_2^c \cup A_1 \in \mathcal{M}$, מהיות לקיחת היא סגורה בן־מנייה (ולכן גם איחוד בלומר משלים כלומר מחת משלים מסגירות משלים, ומסגירות משלים, $A_2^c \in \mathcal{M}$ מהיות משלים, $A_2^c \cup A_1$).

 $.B_n\cap B_m=\emptyset$ מתקיים $n,m\in\mathbb{N}$ לכל לכל ומבנייה $\left\{B_n\right\}_{n=1}^\infty\subseteq\mathcal{M}$ כלומר

כלומר $B_K=\emptyset$ מתקיים או של אל כך שלכל בשלילה נניח של אינסופי של קבוצות זרות, היה נובע כי קיים לובע או מספר אינסופי של אמכילה מספר אינסופי של קבוצות זרות, היה נובע כי היה מספר אינסופי של או מספר אינסופי של קבוצות זרות, היה נובע כי היים או מספר אינסופי של היים או מספר או מספר אינסופי של היים או מספר או מספר אינסופי של היים או מספר או מספר או מספר אינסופי של היים או מספר או מספר אינסופי של היים או מספר א

$$B_K = A_K \smallsetminus (A_1 \cup \dots \cup A_{K-1}) = \emptyset \Longrightarrow A_K \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_{K-1}$$

. בסתירה סופית, בסתירה היא א־ σ היא היינו היינו קבועה, היא היא א היא היא לנתון כלומר כלומר כלומר החל היא לנתון היא א היא לנתון היא כלומר כלומר כלומר החל היא היא לנתון

'סעיף ב

. בת־מנייה אינה בת־מנייה \mathcal{M}

 $\{A_n\}_{n=1}^\infty\subseteq\mathcal{M}$ הוכחה: מהסעיף הקודם נובע שיש מספר אינסופי של קבוצות זרות, נגדירן גדירן \mathbb{M} הות הקודם נובע שיש מספר אינסופי של קבוצות זרות, כלומר בהינתן איחוד שהיא סגורה תחת איחוד בן־מנייה, כלומר בהינתן $S\subseteq\mathbb{N}$ מתקיים $S\subseteq\mathbb{N}$ היות ובע כי כל אוסף איחודים שנבחר יהיה שונה מאיחוד אחר, ומטעמי עוצמה אנחנו יודעים שמתקיים $|\mathcal{P}(\mathbb{N})|=2^{\aleph_0}$

. תתי־הקבוצות של $\mathbb N$ היא איננה בת־מנייה ולכן בפרט מתקיים 2^{\aleph_0} , שכן יש לנו כמות לא בת־מנייה של איחודים נוספים שנוכל לעשות.