פתרון מטלה 09 — תורת ההסתברות 1, 80420

28 בדצמבר 2025

שאלה 1

תזכורת (חסם האיחוד): יהיו $\{A_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{F}$ אוסף סופי או בן־מנייה של מאורעות, אזי

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \leq \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i)$$

סעיף א'

סעיף ב'

שאלה 2

יהי $X \sim Unif([4,7])$ ונחשב את פונקציות ההתפלגות המצטברת ופונקציית הצפיפות של המשתנה המקרי $Y = X^2$.

פתרון: ראינו בהרצאה שמתקיים עבור משתנה מקרי אחיד $Z \sim Unif([a,b])$ מתקיים

$$f_Z(x) = \frac{\mathbb{1}_{[a,b]}(x)}{b-a}, \qquad F_Z(t) = \begin{cases} 0 & t < a \\ \frac{t-a}{b-a} & a \le t \le b \\ 1 & t > b \end{cases}$$

ולכן במקרה שלנו עבור $4 \le x \le 7$

$$f_X(x) = \frac{1}{7-4} = \frac{1}{3}, \qquad F_X(t) = \frac{t-4}{3}$$

מהיות $Y = X^2$ אז המינימום מתקבל ב־$Y = 4^2 = 16$ והמקסימום מתקבל כאשר $Y = 7^2 = 49$ ולכן $\mathrm{supp}(Y) = [16, 49]$.

בשביל פונקציית ההתפלגות המצטברת

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \le y) = \mathbb{P}(X^2 \le y)$$

מהיות $X \sim Unif([4,7])$ אז כל הערכים חיוביים ולכן ניתן לקחת מהם שורש, כלומר

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(X \le \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) = \frac{\sqrt{y}-4}{3}$$

כלומר

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 16 \\ \frac{\sqrt{y}-4}{3} & 16 \le y \le 49 \\ 1 & y > 49 \end{cases}$$

ופונקציית הצפיפות היא לפי אבחנה 8.14

$$f(y) = \begin{cases} F_Y'(y) & \text{גזירה ב־ } y \ F_Y \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} & \text{גזירה ב־ } y \ F_Y \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{6\sqrt{y}} & \text{גזירה ב־ } y \ F_Y \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

□

שאלה 3

יהי X משתנה מקרי רציף בהחלט ותהיי $\alpha > 1$, נתון כי

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ (1+x)^\alpha - 1 & 0 \le x \le \beta \\ 1 & \beta < x \end{cases}$$

נמצא את β ונחשב את פונקציית הצפיפות של X.

פתרון: מהיות X משתנה מקרי רציף בהחלט ומתכונות פונקציית ההתפלגות המצטברת כמונוטונית עולה חלש ועולה מאפס לאחת מתקיים

$$\lim_{x \to \beta^-} F_X(x) = F_X(\beta) = 1$$

(כי מהרציפות בהחלט היא רציפה גם מימין מהגדרת פונקציית ההתפלגות המצטברת ורציפה משמאל בזכות הרציפות בהחלט).
וכן

$$F_X(\beta) = (1+\beta)^\alpha - 1 = 1 \iff (1+\beta)^\alpha = 2 \iff 1 + \beta = 2^{\frac{1}{\alpha}} \iff \beta = 2^{\frac{1}{\alpha}} - 1$$

ואכן מהיות $\alpha > 1$ נובע כי $0 < \frac{1}{\alpha} < 1$ ולכן בפרט $2^{\frac{1}{\alpha}} > 1$ ולכן $x \ge 0$ וגם הרציפות נשמרת כי

$$F_X(0) = (1+0)^\alpha - 1 = 1 - 1 = 0$$

שתקין עבור $x < 0$ ומשמר רציפות.
עבור פונקציית הצפיפות, שוב נשתמש באבחנה 8.14 שנגזרת של פונקציית ההסתברות המצטברת היא פונקציית צפיפות:

$$f(x) = \begin{cases} F_X'(x) & \text{גזירה ב-}\ x\ F_X \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} = \begin{cases} \alpha(1+x)^{\alpha-1} & 0 \le x \le 2^{\frac{1}{\alpha}} - 1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

$\square$

שאלה 4

שאלה 5

שאלה 6

שאלה 7