# פתרון מטלה 09 — מבנים אלגבריים 2, 80446

13 ביוני 2025

# שאלה 1

תהיי $L/K$. עבור $\alpha \in L$ נסמן $M_\alpha : L \to L$ את הפונקציה $M_\alpha(x)$, אופרטור לינארי על $L$ כמרחב וקטורי מעל $K$.
בתרגול הגדרנו את הפונקציה $\mathrm{Tr}_{L/K} : L \to K$ על־ידי $\mathrm{Tr}_{L/K}(\alpha) = \mathrm{tr}(M_\alpha)$ ובאופן דומה את הפונקציה $N_{L/K} : L \to K$ על־ידי $N_{L/K}(\alpha) = \det(M_\alpha)$.
יהי $\alpha \in L$ עם פולינום מינימלי $f_{\alpha/K}(x) = x^d + c_1 x^{d-1} + + \cdots + c_d$.

## סעיף א'

יהי $\mathcal{B} = (b_1, \cdots, b_t)$ בסיס ל־$L/K(\alpha)$. ניזכר מדוע $\mathcal{C} = (1, x, \cdots x^{d-1}$ בסיס ל־$K(\alpha)$ מעל $K$ ומדוע

$$\mathcal{D} = \left(1 \cdot b_1, x \cdot b_1, \cdots x^{d-1} b_1, 1 \cdot b_2, x \cdot b_2, \cdots x^{d-1} b_2, \cdots, 1 \cdot b_t, \cdots x^{d-1} b_t\right)$$

בסיס ל־$L/K$.

*הוכחה:* עבור הבסיס $\mathcal{D}$ זה נובע ממגדל הרחבות ומכפלה ישרה של בסיסים ועבור $\mathcal{C}$ הוא בסיס של $K(\alpha)$ מעל $K$ כי $K(\alpha)$ הוא שקול ל־$K[x]/\left(f_{\alpha/K}\right)$ ואנחנו יודעים שהפולינום הזה מדרגה $d$ ולכן גם הבסיס יהיה מסדר $d$ וברגע שנעשה מודלו $d$ על $f_{\alpha/K}$ נקבל

$$x^d = -\left(c_1 x^{d-1} + \cdots + c_d\right)$$

כלומר שאם ניקח את הבסיס $\mathcal{C}$ נוכל להציג כל $g \in K(\alpha)$ על־ידו. □

## סעיף ב'

תהיי $T : K(\alpha) \to K(\alpha)$ ההעתקה שכופלת כל איבר ב־$\alpha$.
נראה שעבור בסיס $\mathcal{C}$ מסעיף א' מתקיים

$$[T]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 & & & -c_d \\ 1 & \ddots & & \ddots \\ & \ddots & 0 & -c_2 \\ & & 1 & -c_1 \end{bmatrix}$$

*הוכחה:* היות ו־$T$ העתקה לינארית מתקיים

$$T(\alpha^i) = \alpha \cdot \alpha^i = \alpha^{i+1}$$

וגם

$$T\left(\alpha^{d-1}\right) = \alpha \cdot \alpha^{d-1} = \alpha^d = f_{\alpha/k(\alpha)} - \sum_{i=0}^{d-1} c_i \alpha_i = 0 - \sum_{i=0}^{d-1} c_{d-i} \alpha^i$$

והמטריצה שמייצגת את ההעתקה הלינארית $T$ לפי הבסיס $\mathcal{C}$ היא

$$[T]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & -c_d \\ 1 & 0 & \cdots & -c_{d-1} \\ 0 & 1 & \cdots & -c_{d-2} \\ 0 & 0 & \cdots - c_1 & \end{bmatrix}$$

□

## סעיף ג'

נוכיח שעבור הבסיס $\mathcal{D}$ מסעיף א' מתקיים $[M_\alpha]_{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} [T]_{\mathcal{C}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & [T]_{\mathcal{C}} \end{bmatrix}$ ונסיק שמתקיים

$$\mathrm{Tr}_{L/K}(\alpha) = \frac{[L:K]}{d} \cdot (-c_1),\ \ N_{L/K}(\alpha) = \left((-1)^d c_d\right)^{\frac{[L:K]}{d}}$$

כאשר $[L : K(\alpha)] = \frac{[L:K]}{d}$.

*הוכחה:* ראשית, $\alpha \equiv x$. שנית, יהי $0 \le i < d$ ו־$1 \le j \le t$ אז מתקיים

$$M_\alpha\left(x^i b_j\right) = \alpha \cdot x^i \cdot b_j = x^{i+1} b_j$$

מהסעיף הקודם מתקיים

$$x^{i+1} b_j = \left(-\sum_{i=0}^{d-1} c_{d-i} x^i\right) b_j = \sum_{i=0}^{d-1} (-c_{d-i} x^i) b_j = \sum_{i=0}^{d-1} \left(-c_{d-i} d_i^j\right)$$

כאשר $d_i^j \in \mathcal{D}$, אז נקבל (סליחה שדילגתי על שלב בכתיבה, הסתבכתי עם ה־typst, אבל זה ישיר)

$$\begin{bmatrix} | & | & & | \\ \left[M_\alpha\left(x^0 b_j\right)\right]_{\mathcal{D}} & \left[M_\alpha\left(x^1 b_j\right)\right]_{\mathcal{D}} & \cdots & \left[M_\alpha\left(x^{d-1} b_j\right)\right]_{\mathcal{D}} \\ | & | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [T]_{\mathcal{C}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & [T]_{\mathcal{C}} \end{bmatrix}$$

נעבור לחלק של ההסקה, מתקיים ממה שראינו

$$\mathrm{Tr}_{L/K}(\alpha) = \mathrm{tr}[M_\alpha]_{\mathcal{D}} = \sum_{i=1}^{t} \mathrm{tr}[T]_{\mathcal{C}} = \sum_{i=1}^{t} (-c_1) = -t c_1 = -[L : K(\alpha)] \cdot c_1 = -\frac{[L:K]}{[K(\alpha):K]} c_1 = -\frac{[L:K]}{d} c_1$$

$$N_{L/K}(\alpha) = \det[M_\alpha]_{\mathcal{D}} = \prod_{i=1}^{t} \det[T]_{\mathcal{C}} = (\det[T]_{\mathcal{C}})^t \underset{\text{פיתוח לפי שורה ראשונה}}{=} (-c_d)^t \underset{t=\left[K:K(\alpha)=\frac{[L:K]}{d}\right]}{=} (-c_d)^{\frac{[L:K]}{d}}$$

□

## סעיף ד'

נסיק בנוסף שאם $\alpha_1, \cdots, \alpha_d$ הם צמודים של $\alpha$ בסגור אלגברי של $K$ אז

$$\mathrm{Tr}_{L/K}(\alpha) = \frac{[L:K]}{d} \sum_i \alpha_i,\ \ N_{L/K}(\alpha) = \left(\prod_i \alpha_i\right)^{\frac{[L:K]}{d}}$$

*הוכחה:* מההנחה מתקיים

$$\prod_{i=1}^{d} (x - \alpha_i) = f_{\alpha/K}(x) = x^d + c_1 x^{d-1} + \cdots + c_d$$

ואז $c_1 = \sum_{i=1}^d \alpha_i, c_d = (-1)^d \prod_{i=1}^d \alpha_i$ וממה שמצאנו בסעיף א'

$$\mathrm{Tr}_{L/K}(\alpha) = -\frac{[L:K]}{d} c_1 = -\frac{[L:K]}{d} \sum_{i=1}^{d} \alpha_i$$

$$N_{L/K}(\alpha) = (-1)^{[L:K]} c_d^{\frac{[L:K]}{d}} = (-1)^{[L:K]} \left((-1)^d \prod_{i=1}^{d} \alpha_i\right)^{\frac{[L:K]}{d}} = \left(\prod_i \alpha_i\right)^{\frac{[L:K]}{d}}$$

□

## שאלה 2

יהי $F$ שדה ויהי $L = F(t_1, \cdots, t_n)$ עם הפעולה $S_n$ המוגדרת על־ידי $\sigma.P(t_1, \cdots, t_n) = P\left(t_{\sigma(1)}, \cdots t_{\sigma(n)}\right)$.
נסמן ב־$s_1, \cdots, s_n$ את הפולינומים הסימטריים האלמנטריים ב־$t_1, \cdots, t_n$ אלו הפולינומים המקיימים

$$\prod_{i=1}^{n}(x - t_i) = x^n - s_1x^{n-1} + s_2x^{n-2} - \cdots + (-1)^n s_n$$

בכל אחד מהסעיפים נתון איבר $P$ ב־$L^{S_n}$ ונבטא אותו באמצעות הפולינומים הסימטריים האלמנטריים.
*תזכורת:* הנוסחה שראינו בתרגול למציאת הפולינום הסימטרי $s_n$ עבור $k$ נעלמים היא

$$s_n = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_n \le k} \left(x_{i_1} \cdots x_{i_k}\right)$$

### סעיף א'

$P = t_1^3 + t_2^3 + \cdots + t_n^3$.
*פתרון:* ראשית, $P$ פולינום סימטרי (שכן כל החזקות אותו הדבר ולכן שינוי מיקום הסכימה לא משנה את סדר הסכימה).
נעבוד כמו בתרגול: בצעד הראשון, ניקח את $f - s_1^2$ כאשר $s_1 = t_1 + t_2 + t_3$.
נחשב את $s_1^3$

$$s_1^3 = (t_1 + \cdots + t_n)^3 \underset{\text{נוסחת הבינום}}{=} \sum_{i=1}^{n} t_i^3 + 3 \sum_{1 \le i < j \le n} t_i^2 t_j + 3 \sum_{1 \le i < j \le n} t_i t_j^2 + 6 \sum_{1 \le i < j < k \le n} t_i t_j t_k$$

אז בסך־הכל כרגע יש לנו

$$f - s_1^3 = t_1^3 + \cdots + t_n^3 - \left(\sum_{i=1}^{n} t_i^3 + 3 \sum_{1 \le i < j \le n} t_i^2 t_j + 3 \sum_{1 \le i < j \le n} t_i t_j^2 + 6 \sum_{1 \le i < j < k \le n} t_i t_j t_k\right)$$
$$= -\left(3 \sum_{1 \le i < j \le n} t_i^2 t_j + 3 \sum_{1 \le i < j \le n} t_i t_j^2 + 6 \sum_{1 \le i < j < k \le n} t_i t_j t_k\right)$$

כעת נשים לב שמתקיים (זה בגלל חישוב של פתיחת סוגריים ומהגדרה)

$$3 \sum_{1 \le i < j \le n} t_i^2 t_j + 3 \sum_{1 \le i < j \le n} t_i t_j^2 = 3 \sum_{1 \le i < j \le n} t_i t_j (t_1 + \cdots + t_n) = 3 s_2 s_1$$

הגורם האחרון שנשאר לנו לבטא באמצעות הפולינומים הסימטריים הוא כמובן

$$6 \sum_{1 \le i < j < k \le n} t_i t_j t_k = 6 s_3$$

מצאנו שבסך־הכל מתקיים

$$P = t_1^3 + \cdots t_n^3 = s_1^3 - 3 s_1 s_2 + 6 s_3$$

$\square$

### סעיף ב'

$.P=\sum_{1\le i\neq j\le n}t_it_j^2$

*פתרון* : קודם כל, $P$ אכן פולינום סימטרי (אפשר לראות כבר עבור $n=2$), ולכן נשתמש במשפט היסודי.

נפרק את $P$ לביטוי שיהיה לנו נוח יותר לעבודה:

$$P=\sum_{1\le i\neq j\le n}t_it_j^2=\sum_{i=1}^{n}t_i\sum_{i\neq j}t_j^2=\sum_{i=1}^{n}t_i\left(\sum_{j=1}^{n}t_j^2-t_i^2\right)=\sum_{i=1}^{n}t_i\sum_{j=1}^{n}t_j^2-\sum_{i=1}^{n}t_i^3$$

זה ביטוי שיותר נוח לנו: דרך מפורשת יותר להגיד שלכל $i\in[n]$ אנחנו סוכמים את כל המכפלות של $t_i$ עם כל $t_j$ עבור $i\neq j$, זאת־אומרת שאנחנו **לא** רוצים את חזקות 3 של $t_i$ בסכום שלנו, ובצורה הזאת הפולינומים הסימטריים הנדרשים נובעים כמעט ישירות: מהסעיף הקודם

$$\sum_{i=1}^{n}t_i^3=s_1^3-3s_1s_2++6s_3$$

ניקח $i\in[n]$ ונשים לב שמתקיים

$$\sum_{\substack{1\le j\le n\\ i\neq j}}t_j^2=s_1^2-2s_2=(t_1+\cdots t_n)^2-2\sum_{1\le k<l\le n}t_kt_l$$

וכמובן

$$\sum_{i=1}^{n}t_i=s_1$$

נרכיב ביחד ונקבל

$$P=\sum_{1\le i\neq j\le n}t_it_j^2=\sum_{i=1}^{n}t_i\sum_{j=1}^{n}t_j^2-\sum_{i=1}^{n}t_i^3=s_1(s_1^2-2s_2)-(s_1^3-3s_1s_2+6s_3)\underset{s_1s_2=s_2s_1}{=}\cancel{s_1^3}-2s_1s_2-\cancel{s_1^3}+3s_1s_2-6s_3$$
$$=s_1s_2-6s_3$$

□

### סעיף ג'

$.P=[(t_1-t_2)(t_1-t_3)(t_2-t_3)]^2$

*פתרון* : נתחיל מלחשב את הביטוי הפנימי

$$(t_1-t_2)(t_1-t_3)(t_2-t_3)=(t_1^2-t_1t_3-t_2t_1+t_2t_3)(t_2-t_3)=t_1^2t_2-t_1^2t_3+t_1(t_3^2-t_2^2)+t_2^2t_3-t_2t_3^2$$

נעלה בריבוע

$$(t_1^2t_2-t_1^2t_3+t_1(t_3^2-t_2^2)+t_2^2t_3-t_2t_3^2)(t_1^2t_2-t_1^2t_3+t_1(t_3^2-t_2^2)+t_2^2t_3-t_2t_3^2)$$
$$=t_1^4t_2^2-2t_1^4t_2t_3+t_1^4t_3^2-2t_1^3t_2^3+2t_1^3t_2^2t_3+2t_1^3t_2t_3^2-2t_1^3t_3^3$$
$$+t_1^2t_2^4+2t_1^2t_2^3t_3-6t_1^2t_2^2t_3^2+2t_1^2t_2t_3^3+t_1^2t_3^4-2t_1t_2^4t_3+2t_1t_2^3t_3^2+2t_1t_2^2t_3^3-2t_1t_2t_3^4+t_2^4t_3^2-2t_2^3t_3^3+t_2^2t_3^4$$

קצת מגעיל אבל ניגש לעבודה: נתחיל מהביטויים של חזקת 4, הם מופיעים עם

$$s_1^2s_2^2=\sum_{1\le i<j\le n}t_i^2t_j^2$$

$$P-s_1^2s_2^2$$

TODOOOOOOOOOOOOOOOOOOO

□

## שאלה 3

### סעיף א'

תהיי $L/K$ הרחבת גלואה כך ש־$\mathrm{Gal}(L/K) = G$. נשתמש בהתאמת גלואה כדי להוכיח שלכל $H \leq G$ מתקיים $[L^H : K] = [G : H]$.

*הוכחה:* ראשית, אנחנו עובדים עם הרחבות סופיות בלבד לפי הערה שמיכאל אמר. אז בלי הגבלת הכלליות, ההרחבת גלואה $L/K$ היא הרחבה סופית.
מהתאמת גלואה אנחנו יודעים שיש התאמה חד־חד ערכית ועל בין תתי חבורות של $G$ לבין שדות ביניים של ההרחבה $L/K$ ובפרט שאם $H \leq G$ אז $L^H$ הוא שדה ביניים בין $K$ לבין $L$ (כי $K \subseteq L^H \subseteq L$ כי $K \subseteq L^H$ כי $K$ מכיל את כל האיברים שנשמרים תחת כל האוטומורפיזמים ב־$G$, בפרט אלו ב־$H$) ולכן לפי טענה שראינו בהרצאה מתקיים גם $H = \mathrm{Gal}(L/L^H)$ ונובע על־כן $|H| = [L : L^H]$.
נשתמש בטענות על מגדל הרחבות וכפליות הדרגה

$$[L : K] = [L : L^H] \cdot [L^K : K]$$

מהתאמת גלואה נובע גם $[L : K] = |G|$ אז בסך־הכל

$$[L : K] = |G| = |H| \cdot [L^k : K] = [L : L^H] \cdot [L^K : K]$$

ולכן

$$\frac{|G|}{|H|} = [G : H] = [L^H : K]$$

□

### סעיף ב'

נוכיח של־$A_4$ אין תת־חבורה מאינדקס 2 ונסיק שאם $\mathrm{Gal}(L/K) \simeq A_4$ אז אין הרחבת ביניים $L/F/K$ כך ש־$[F : K] = 2$.

*הוכחה:* ראשית, תת־חבורה מאינדקס 2 ב$A_4$ היא מסדר 6 ($|A_4| = \frac{4!}{2} = 12, \frac{|A_4|}{2} = 6$).
נניח כי יש תת־חבורה כזאת, ואנחנו כבר יודעים שיש רק 2 חבורות מסדר 6 בידיוק (לפי משפטי סילו) וזה או $\mathbb{Z}_6$ או $S_3$.
נניח כי יש תת־חבורה כזאת $H$ ולכן מלגראנז' נקבל ש־$H \lhd A_4$.
אז $g^2 \in H$ לכל $g \in A_4$ ולכן כל 3־מחזור $(a, b, c) \in A_4$ מתקיים $(a, b, c)^2 \in H$ ולכן כל ה־3 מחזורים של $A_4$ הם גם ב־$H$.
אבל מספר ה־3־מחזורים ב־$A_4$ נתונים על־ידי

$$\binom{4}{3} \cdot 2! = 8$$

ולכן ב־$H$ יש שמונה איברים, אבל זאת סתירה.
עבור החלק השני, נניח ש־$L/K$ הרחבת גלואה ו־$\mathrm{Gal}(L/K) \simeq A_4$, ולכן מהתאמת גלואה אנחנו יודעים שלכל $H \leq A_4$ יש התאמה חד־חד ערכית ועל אל $K \subseteq L^H$ וראינו בסעיף הקודם שמתקיים $[L^H : K] = [A_4 : H]$.
אם הייתה הרחבת ביניים $L/F/K$ כך ש־$[F : K] = 2$, היה נובע כי ה־$H$ המתאימה לה מהתאמת גלואה היא חבורה נורמלית ב־$A_4$ וראינו שזה לא אפשרי.

□