פתרון מטלה 04 — פונקציות מרוכבות, 80519

22 בנובמבר 2025

שאלה 1

שאלה 2

יהי $\sigma \in \mathbb{C}$.

סעיף א'

באמצעות הענף הראשי של הלוגריתם, נחשב את $\frac{d^n}{dz^n}(1+z)^\sigma$.

פתרון: לפי הגדרה שראינו בהרצאה מתקיים עבור הענף הראשי של הלוגריתם

$$(1+z)^\sigma = \exp(\sigma\, Log(1+z))$$

שאנליטית לכל $z \notin (-\infty, -1]$: זאת מכיוון שמהגדרה

$$Log(w) = \log|w| + i\, Arg\, w$$

אבל אנחנו יודעים שהארגומנט איננו רציף בקטע זה (הוא קופץ מ־π ל־$-\pi$), ולכן בפרט הפונקציה שלנו לא אנליטית מהרכבה בתחום הזה. בשאר התחומים, היא אנליטית כהרכבה של אנליטיות. נחשב

$$\frac{d}{dz}(1+z)^\sigma = \frac{d}{dz}\exp(\sigma\log(1+z))) = \exp(\sigma\log(1+z)))\cdot\left(\sigma\cdot\frac{1}{1+z}\right) = \sigma(1+z)^{\sigma-1}$$

בפרט, גם הפונקציה הזאת אנליטית כמכפלה של פונקציה אנליטית (מהרכבה) וקבוע אז נוכיח באינדוקציה:
בסיס – הוכחנו, נניח כי הטענה נכונה עבור k פעמים שגזרנו, כלומר

$$\frac{d^k}{dz^k}(1+z)^\sigma = \sigma(\sigma-1)\cdot\ldots\cdot(\sigma-k+1)(1+z)^{\sigma-k}$$

שוב יש לנו מכפלה של פונקציה אנליטית עם קבוע, ולכן אנליטית, נגזור

$$\frac{d^{k+1}}{dz^{k+1}}(1+z)^\sigma = \sigma(\sigma-1)\cdot\dots\cdot(\sigma-k+1)(\sigma-k)(1+z)^{\sigma-k-1}$$

כלומר לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים מעיקרון האינדוקציה

$$\frac{d^n}{dz^n}(1+z)^\sigma = \sigma(\sigma-1)\cdot\dots\cdot(\sigma-n+1)(1+z)^{\sigma-n}$$

$\square$

סעיף ב'

נסיק שלכל z עם $|z| < 1$ מתקיים

$$(1+z)^\sigma = \sum_{n=1}^{\infty}\binom{\sigma}{n}z^n$$

פתרון: התנאי של $|z| < 1$ הכרחי בשביל האנליטיות (כי יש נקודת אי־רציפות עבור $z = -1$), אבל מהיות $|z| < 1$ אז הכל אנליטי.
אנחנו מחשבים טור טיילור סביב $a = 0$ ולכן במקרה שלנו לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$f^n(0) = \sigma(\sigma-1)\cdot\ldots\cdot(\sigma-n+1)(1+0)^{\sigma-n} = \sigma(\sigma-1)\cdot\ldots\cdot(\sigma-n+1)$$

כלומר

$$a_n = \frac{f^n(0)}{n!} = \frac{\sigma(\sigma-1)\cdot\ldots\cdot(\sigma-n+1)}{n!} = \binom{\sigma}{n}$$

עבור $n = 0$ פשוט מתקיים $f^0(0) = f(0) = (1+0)^\sigma = 1$ וגם כקונבציה מתקיים $\binom{\sigma}{0} = 1$ ולכן

$$(1+z)^\sigma = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{f^n(0)}{n!}\right)z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{f^n(0)}{n!}\right)z^n$$

$\square$

שאלה 3

יהי $G \subset \mathbb{C}$ תחום ו־$f \in \mathrm{Hol}(G)$.
תהיי $f = f(r,t) = u(r,t) + iv(r,t)$ ההצגה של f בקורדינאטות פולריות ($z = re^{it}$).
נראה ש־f הולומורפית ואם $z \neq 0$ אז $u_r = \frac{1}{r}v_t$ ו־$v_r = -\frac{1}{r}u_t$.
הוכחה:

$\square$

שאלה 4

יהי $G \subset \mathbb{C}$ תחום ותהיי $f \in \mathrm{Hol}(G)$. נסמן

$$Z_v := \{z = x + iy \mid u(x, y) = Im(f(z)) = 0\}$$

ונראה שאם לכל $z \notin Z_v$ מתקיים $f' = 0$ אז f קבועה.

הוכחה: נכתוב $f = u + iv$ עבור $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ולכן

$$Z_v := \{z \in G \mid v(z) = 0\}$$

נניח שלכל $z \in G \setminus Z_v$ מתקיים $f'(z) = 0$ ונראה ש־f קבועה.

יש לנו שתי אופציות – או ש־$G = Z_v$ או ש־$G \neq Z_v$ וניזכר כי הגדרנו את G להיות קבוצה פתוחה וקשירה.

אם $G = Z_v$ אז $v \equiv 0$ ולכן f היא פונקציה $f : G \to \mathbb{R}$ כלומר תמונתה רק ערכים ממשיים וזוהי פונקציה אנליטית.

משפט ההעתקה הפתוחה אומר שאם f היא פונקציה אנליטית שאיננה קבועה אז היא שולחת קבוצות פתוחות לקבוצות פתוחות, ולכן נניח בשלילה ש־f איננה קבועה:

אז $Im(f) \subseteq \mathbb{R}$ כאשר נתייחס ל־$\mathbb{R}$ כתת־קבוצה של $\mathbb{C}$ צריכה להיות קבוצה פתוחה מהמשפט ונטען שזה לא ייתכן:

נטען טענה חזקה יותר, שעבור $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ עם הטופולוגיה המושרית מ־$\mathbb{C}$ היא פתוחה אם $U = \emptyset$ בלבד: נניח שלא, כלומר $U \neq \emptyset$ ונזהה את U עם $U \times \{0\}$, כלומר כל $u \in U$ מתאים ל־$(u, 0) \in \mathbb{C}$.

כדי ש־U תהיה פתוחה ב־$\mathbb{C}$, לכל $(u, 0) \in U$ צריך שיהיה דיסק $D((u, 0), \delta) \subseteq U$ עבור $\delta > 0$ אבל כל דיסק כזה מכיל גם $(u + a, b)$ עבור $a, b \in (-\delta, \delta)$ אבל לא ייתכן ש־$b \neq 0$ (כי אז יש לנו גם ציר מדומה), ולכן קיבלנו סתירה להנחה ש־$U \neq \emptyset$ ולכן $U = \emptyset$.

כלומר, לא ייתכן ש־f איננה קבועה כי אז תמונתה חייבת להיות קבוצה פתוחה מה שראינו שלא ייתכן בתנאים, ולכן בהכרח f פתוחה.

נשים לב שאפשר לענות על השאלה גם בלי משפט ההעתקה הפתוחה: f אנליטית ולכן היא מקיימת את משוואות קושי־רימן ולכן מתקיים

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

אמרנו ש־$v \equiv 0$ ולכן $v_x = v_y = 0$ ולכן גם $u_x = 0 = u_y$ ובפרט זה אומר שהנגזרת מתאפסת לחלוטין בכל G ולפי תנאים שקולים שראינו זה אומר ש־f קבועה על G.

נשאר לבחון את המקרה השני בו $G \neq Z_v$: אנחנו יודעים ש־v רציפה (כי f הולומורפית) ולכן הקבוצה $Z_v = v^{-1}(\{0\})$ היא קבוצה סגורה ב־G ולכן $G \setminus Z_v$ היא קבוצה פתוחה (מהגדרת המשלים).

מההנחה, לכל $z \in G \setminus Z_v$ מתקיים $f'(z) = 0$ אבל G הוא תחום קשיר ו־f הולומורפית, לכן אם $z \in U \subset G$ מקיימת $f'(z) = 0$ לכל $z \in U \subseteq G$ אז סביב כל נקודה כזאת יש סביבה בה הפונקציה מתאפסת ולכן בהכרח $f'(z) = 0$ לכל $z \in G$.

מהתנאים השקולים נקבל ש־f קבועה על G גם במקרה זה. $\square$

שאלה 5

תזכורת:

$$\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y), \qquad \partial_{\overline{z}} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$$

סעיף א'

נוכיח את הזהות $\overline{\partial_{\overline{z}} f} = \partial_z \overline{f}$.

הוכחה: ניזכר כי עבור $w_1, w_2, \in \mathbb{C}$ מתקיים $\overline{w_1 + w_2} = \overline{w_1} + \overline{w_2}$ וכן $\overline{i} = -i$, אז

$$\overline{\partial_{\overline{z}} f} = \frac{1}{2}\overline{\partial_x f + i\partial_y f} = \frac{1}{2}\overline{u_x + iv_x + i(u_y + iv_y)}$$

$$= \frac{1}{2}\overline{(u_x + v_y) + i(v_x + u_y)} = \frac{1}{2}((u_x + v_y) + i(v_x + u_y)) = \frac{1}{2}((u_x + iv_x) + i(u_y + iv_y))$$

$$= \frac{1}{2}()$$

TODOOOOOOOOOOOOOOOOOOO

$$\overline{\partial_{\overline{z}} f} = \overline{\frac{1}{2}(\partial_x f + i\partial_y f)} = \frac{1}{2}\left(\partial_x \overline{f} - i\partial_y \overline{f}\right) = \partial_z \overline{f}$$

$\square$

סעיף ב'

נוכיח את הזהות $\partial_z(f \cdot g) = (\partial_z f) \cdot g + f \cdot \partial_z g$.

הוכחה:

$$\partial_z(f \cdot g) = \frac{1}{2}(\partial_x(f \cdot g) - i\partial_y(f \cdot g)) = \frac{1}{2}(\partial_x f \cdot g + \partial_x g \cdot f - i(\partial_y f \cdot g + \partial_y g \cdot f))$$
$$= \frac{1}{2}(\partial_x f - i\partial_y f) \cdot g + \frac{1}{2} \cdot f(\partial_x g - i\partial_y g) = (\partial_z f) \cdot g + f \cdot (\partial_z g)$$

$\square$

סעיף ג'

נוכיח את הזהות $\partial_{\overline{z}}(f \cdot g) = (\partial_{\overline{z}} f) \cdot g + f \cdot (\partial_{\overline{z}} g)$.

הוכחה:

$$\partial_{\overline{z}}(f \cdot g) = \frac{1}{2}(\partial_x(f \cdot g) + i\partial_y(f \cdot g)) = \frac{1}{2}(\partial_x f \cdot g + \partial_x g \cdot f + i(\partial_y f \cdot g + \partial_y g \cdot f))$$
$$= \frac{1}{2}(\partial_x f + i\partial_y f) \cdot g + \frac{1}{2} \cdot f(\partial_x g + i\partial_y g) = (\partial_{\overline{z}} f) \cdot g + f \cdot (\partial_{\overline{z}} g)$$

$\square$

סעיף ד'

נוכיח את הזהות $\partial_{\overline{z}}(f \circ g) = ((\partial_z f) \circ g)\partial_{\overline{z}} g + ((\partial_{\overline{z}} f) \circ g)\partial_{\overline{z}} \overline{g}$.

הוכחה:

$$\partial_{\overline{z}}(f \circ g) = \frac{1}{2}(\partial_x(f \circ g) + i\partial_y(f \circ g)) = \frac{1}{2}$$

$\square$

TODOOOOOOOOOOOOOOOOOOO