

פתרונות מטלה 07 – תורה ההסתברות 1

2025 בדצמבר 19



שאלה 1

סעיף א'

נוכיח שאם X משתנה מקרי שהתחום שלו הוא \mathbb{N}_0 אז $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{P}(X > 0)$.
הוכחה: מהגדלת התוחלת היות והמשתנה נתמך על הטבעיים

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k \mathbb{P}(X = k)$$

לכל $k \geq 1$ מתקיים

$$k \cdot \mathbb{P}(X = k) \geq \mathbb{P}(X = k)$$

זה נכון לכל k , משמע

$$\mathbb{E}(X) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X > 0)$$

□

סעיף ב'

יהי (G_n, p_n) גרען מקרי ונגידר $T(G_n)$ המשתנה המקרי שסופר את מספר המרובעים שקייםים בגרף כאשר מושב זה קבוצה של ארבעה קודקודים
שביניהם קיימות אך ורק הקשרות

$$(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_1)$$

נראה שעבור $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(T(G_n) = 0) = 1$ מתקיים $p_n = o(\frac{1}{n})$

פתרון:

TODOoooooooooooooo

שאלה 2

יצרן ברגים יודע מניסיון שב- 95% בוגר שמייצרת החברה שלו עומד בתו תקן באופן בלתי-תלוי בברגים אחרים שיוציאו. כל משולוח של 10,000 ברגים מגיע עם תעודה אחריות המבטיחה החזר במלא במקורה שיתר מ- 1% ברגים לא עובדים בתו התקן. נחשב כמה קטן r יכול להיות כך שלכל היותר 1% מהמשולוחים יהיו זכאים להחזר מלא.

פתרון: יהיו X_1, \dots, X_{10000} המשתנים המקרים מסווג אינדייקטור שמקבלים 1 אם הבוגר תקין, ככלומר לפי הנתונים (0.05) .
 $X_i \sim Ber(0.05)$
 נגיד $X = \sum_{i=1}^{10000} X_i$ וכאן מהוות כל המאורעות לעיל בלתי-תלויים מהנתון, או ראיינו שסכום של משתנים מקרים בלתי-תלויים המתפלגים ברנולי, מתפלג בינומי, ככלומר $X \sim Bin(10000, 0.05)$. משוננות של משתנה מקרי המתפלג ביןומית שראיינו

$$\text{Var}(X) = 10000 \cdot 0.05 \cdot (1 - 0.05) = 10000 \cdot 0.05 \cdot 0.95 = 475$$

או מאיר-שווין צ'בישוב נקבל עבור $a > 0$

$$\mathbb{P}(X - 500 \geq a) \leq \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \frac{\text{Var}(X)}{a^2} = \frac{475}{a^2}$$

זו ההסתברות שאנו רוצחים שתהיה קטנה מ- 1%, ככלומר

$$\frac{475}{a^2} \leq \frac{1}{100} \iff 47500 \leq a^2 \iff \sqrt{47500} \leq a$$

והודות למחשבון אנחנו יודעים שה- $a = 218$ הוא השלים המינימלי, ככלומר $r = 500 + 218 = 718$.

□

שאלה 3

יהי $n \leq 1$. נתונם n זוגות, כל זוג כולל גבר ואישה. מסדרים ה- i - n באקראי במעגל.

סעיף א'

עבור $n = 1, \dots, i$, יהי X_i המשתנה המקרי שתוצאו הוא 1 אם ורק אם בני הזוג i יושבים זה לצד זה ו-0 אחרת. נראה כי $X_i \sim Ber\left(\frac{2}{2n-1}\right)$ לכל i .

הוכחה: לכל זוג i נסמן W_i, M_i ולכל i אנחנו מփשים את המאורע $E_i = 1$ אם ורק אם הגבר M_i והאישה W_i יושבים אחד ליד השניה. כיוון, לסדר $2n$ אנשים במעגל יש לנו $(2n-1)!$ אפשרויות סידור ולכן זה מרחיב המדגם שלנו. עבורו, נסתכל על הזוג הלא סדור, (W_i, M_i) בתור אחד ולכן $2n-2+1=2n-1$ "אנשים" צריך לסדר במעגל, כלומר יש $(2n-2)!$ אפשרויות לסידור.

כמובן בתור הזוג שי לנו $2 \neq 2$ אפשרויות לסידור ולכן $|E_i| = 2 \cdot (2n-2)!$

$$p = \frac{2 \cdot (2n-2)!}{(2n-1)!}$$

נשים לב

$$(2n-1)! = (2n-1) \cdot ((2n-1)-1)! = (2n-1) \cdot (2n-2)!$$

אז

$$p = \frac{2 \cdot (2n-2)!}{(2n-1)!} = \frac{2 \cdot (2n-2)!}{(2n-1) \cdot (2n-2)!} = \frac{2}{2n-1}$$

כלומר $X_i \sim Ber\left(\frac{2}{2n-1}\right)$.

סעיף ב'

נחשב את תוחלת מספר הזוגות ש�ושבים יחד.

פתרון: נסמן $X = \sum_{i=1}^n X_i$ ולכן מיליניאריות התוחלת ומתחולת של משתנה מקרי מתפלג ברנולי

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{2}{2n-1}\right) = \frac{2n}{2n-1}$$

□

סעיף ג'

נראה שלכל $j, i \neq j$ $X_i X_j \sim Ber\left(\frac{4}{(2n-2)(2n-1)}\right)$.

פתרון: נזכיר שכפלת של משתנים מקרים שמתפלגים ברנולי הוא מתפלג ברנולי גם כן (התומך 0 או 1).

כמוקדם, נגיד $U_i = (W_i, M_i), U_j = (W_j, M_j)$ וכך $\mathbb{P}(U_i, U_j)$ ממספר הסידורים הפעם הוא 2 $(2n-4)+2=2n-2$ "אנשים" צריך לסדר במעגל.

כלומר $|(2n-2)!(2n-3)| = (2n-3)!(2n-2) = (2n-3)!$ סידורים אפשריים.

כמובן, לכל U_i, U_j כמובן יש שתי אפשרויות לסידור פנימי ולכן בסך הכל 4 ובסך הכל

$$\mathbb{P}(X_i X_j = 1) = \frac{4 \cdot (2n-3)!}{(2n-1)!} = \frac{4 \cdot (2n-3)!}{(2n-1) \cdot (2n-2) \cdot (2n-3)!} = \frac{4}{(2n-1)(2n-2)}$$

□

סעיף 7'

נחשב את שונות מספר הזוגות שיושבים זו לצד זו.

פתרון:

$$\text{Var}(S) = \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) + \sum_{i \neq j} \text{Cov}(X_i, X_j) = n \cdot \text{Var}(X_1) + n \cdot (n-1) \cdot \text{Cov}(X_1, X_2)$$

כאשר השיוויון האחרון נובע מסימטרית של השונות עבור $j \neq i$ וכמוות הצירופים האפשריים.
משמעות' א' נובע כי $X_i \sim \text{Ber}\left(\frac{2}{2n-1}\right)$ ולכן משונת של משתנה מקרי מתפלג בראנווי

$$\text{Var}(X_1) = \frac{2}{2n-1} \left(1 - \frac{2}{2n-1}\right) = \frac{2}{2n-1} \frac{2n-3}{2n-1} = \frac{4n-6}{(2n-1)^2}$$

נשאר להحسب את $\text{Cov}(X_1, X_2)$, מסעיפים ב' וג' נקבע

$$\text{Cov}(X_1, X_2) = \mathbb{E}(X_1 X_2) - \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2) = \frac{4}{(2n-1)(2n-2)} - \frac{4}{(2n-1)^2} = \frac{4(2n-1) - 4(2n-2)}{(2n-1)^2(2n-2)} = \frac{4}{(2n-1)^2(2n-2)}$$

ובס"ד הכל נקבע

$$\begin{aligned} \text{Var}(S) &= n \cdot \frac{4n-6}{(2n-1)^2} + n \cdot (n-1) \cdot \frac{4}{(2n-1)^2(2n-2)} = \frac{4n^2 - 6n}{(2n-1)^2} + n \cdot (n-1) \cdot \frac{4}{(2n-1)^2 2(n-1)} \\ &= \frac{4n^2 - 6n}{(2n-1)^2} + \frac{2n}{(2n-1)^2} = \frac{4n^2 - 4n}{(2n-1)^2} = \frac{4n(n-1)}{(2n-1)^2} \end{aligned}$$

□

סעיף ה'

לכל $n \leq 1$ יהי Y_n משתנה מקרי שתוצאתו היא מספר הזוגות שיושבים ביחד לאחר שימושibus n זוגות באקראי במעגל.

נחשב את הגבולות כאשר n שואף לאינסוף של התוחלת של Y_n ושל השונות של Y_n .

פתרון: נסמן $Y_n = \sum_{i=1}^n X_i$ ומילינארית התוחלת ותוצאות הסעיפים הקודמים

$$\mathbb{E}(Y_n) = \frac{2n}{2n-1} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{2 - \frac{1}{n}} = 1$$

ועבור השונות עם תוצאות הסעיף הקודם

$$\text{Var}(Y_n) = \frac{4n(n-1)}{(2n-1)^2} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n(n-1)}{(2n-1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 4n}{4n^2 - 4n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 - \frac{4}{n}}{4 - \frac{4}{n} + \frac{1}{n}} = 1$$

□

שאלה 4

יהי $n \leq 3$. נתבונן בטבלה של $n \times n$ משבצות, כאשר כל אחד מהשבצות צבועה בשחור או לבן באקראי ובאופן בלתי-תלוי. יהיו X מספר הזוגות שצבעוים לבן, כלומר מספר הזוגות של משבצות סמוכות ששתיהן צבעוות לבן.

סעיף א'

נחשב מהו מספר הצלדים של זוגות חופפים (זוגות משבצות שחולקים בדיקון משבצת אחת).

פתרון: באופן כללי, יש $(n - 1)n$ זוגות אפשריים בצורה אופקית ובהתאם גם בצורה אנכית.

שני זוגות הם הופכים אם ורק אם הם חולקים בדיקון איבר אחד במשותף.

במקרה הראשון בהתחשב לדוגמה בטופס המטלה, כאשר הם חולקים איבר אחד אופקי או אנכי, אלו זוגות מהצורה

$$(i, j), (i, j+1) \quad \vee \quad (i, j), (i+1, j)$$

ומקבינטוריקה נקבל $(2 - n)n$ זוגות אפשריים הופכים הן אופקית והן אנכית.

צריך לטפל במקרים של צורת L – זה קורה כשזוג אופקי חולק איבר עם זוג אנכי, או משבצת (j, i) היא משבצת כזו שהיא השפה אבל לא בפינות של הטבלה. אם אני ושכן לבן אנכי.

יש לנו 4 פינות שבהן אפשר לבנות L ואזრיך להבדיל בין ריבוע פנימי לבין ריבוע שהוא יכול להיות על השפה אבל לא בפינות של הטבלה. אם אני פינה, למשבצת כזו יש בדיקון 3 שכנים, וכך $(2 - n)8$ אפשרויות בשביולו (כי כל אחד יכול פינה יכולה לתרום 2 צורות של L ויש 4 פינות).

בשביל הנקודות הפנימיות, יש $(2 - n)^2$ ריבועים פנימיים, כל ריבוע כזה יכול לתרום 4 סוגים של L .

בסוף הכל

$$2n(n - 2) + 4(n - 2)^2 + 8(n - 2) + 4 = 2n^2 - 4n + 4(n^2 - 4n + 4) + 16n - 16 + 4 = 6n^2 - 12n + 4$$

□

סעיף ב'

נחשב מהי תוחלת X .

פתרון: לכל זוג $E = (i, j)$ נגדיר

$$I_E = \begin{cases} 1 & \text{שתי הקורדינאות לבנות} \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

מהיות הצביעות בלתי-תלויה נובע כי $X = \sum_E I_E$ ו $I_E \sim Ber\left(\frac{1}{4}\right)$

כל שורה תרmeta $1 - n$ זוגות אופקיים וכל עמודה תרmeta $1 - n$ זוגות אנכיים ולכן בסך הכל יש לנו $2n(n - 1)$ זוגות שאנו רצים עליהם, כלומר $X = \sum_{i=1}^{2n(n-1)} I_{E_i}$

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{2n(n-1)} I_{E_i}\right) = \frac{2n(n-1)}{4} = \frac{n(n-1)}{2}$$

□

סעיף ג'

נחשב מהי שונות X .

פתרון: נרצה להשתמש בנוסחה לחישוב סכום שונות ויחד עם תוחלת של משתנה מקרי ברנולי

$$\text{Var}(X) = \text{Var}\left(\sum_e I_e\right) + 2 \text{Cov}_{e < f} \text{Cov}(I_e, I_f)$$

ואז

$$\text{Var}\left(\sum_e I_e\right) = 2n(n-1) \cdot \frac{3}{16} = \frac{3n(n-1)}{8}$$

בשביל השונות המשותפת עליינו לחשב את $\mathbb{E}(I_e I_f) = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$, כלומר יש לנו 3 משבצות לבנות אחת אחרי השניה, כלומר $\mathbb{E}(I_e I_f) = \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$

או בסך הכל ועם סעיף א' קיבל

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= \frac{3n(n-1)}{8} + \frac{2 \cdot (6n^2 - 12n + 4)}{16} = \frac{3n(n-1)}{8} + \frac{6n^2 - 12n + 4}{8} = \frac{3n^2 - 3n + 6n^2 - 12n + 4}{16} \\ &= \frac{3n^2 - 15n + 4}{16}\end{aligned}$$

□

סעיף 7'

עבור כל $n \leq 2$ ידי X_n משתנה מקרי המתאר את מספר הזוגות הצבעים בלבן בטבלה מגודל $n \times n$. נבחן כיצד משתמש באינטואיטיבית כבישב כדי להסביר שלכל $0 < \varepsilon$ הסדרה $p_n = \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{2n(n-1)} - \frac{1}{4}\right| \geq \varepsilon\right)$ שווהפת לא-0 כאשר $n \rightarrow \infty$. ראוначה: ראשית

$$\left|\frac{X_n}{2n(n-1)} - \frac{1}{4}\right| \geq \varepsilon \iff \left|X_n - \frac{n(n-1)}{2}\right| \geq \varepsilon(2n(n-1))$$

אינטואיטיבית כבישב אומר שלכל $a > 0$ מתקיים

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \frac{\text{Var}(X)}{a^2}$$

כלומר במקרה שלנו

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{2n(n-1)} - \frac{1}{4}\right| \geq \varepsilon\right) &= \mathbb{P}\left(\left|X_n - \frac{n(n-1)}{2}\right| \geq \varepsilon(2n(n-1))\right) \leq \frac{\text{Var}(X_n)}{\varepsilon^2(4n^4 - 8n^2 + 4n)} \\ &\stackrel{\text{כבישב}}{=} \frac{\frac{3n^2 - 15n + 4}{16}}{\varepsilon^2(4n^4 - 8n^2 + 4n)} = \frac{3n^2 - 15n + 4}{16\varepsilon^2(4n^4 - 8n^2 + 4n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0\end{aligned}$$

כאשר המעבר האחרון נובע מאריתמטיקה של גבולות (הזהקה במכנה היא הגבואה יותר).

שאלה 5

נקבע $n \leq 3$ ונטיל מטבע a פעמיים באופן בלתי-תלוי, כאשר המטבע נופל בכל פעם על 1 בהסתברות p .
יהי X_n מספר הרצפים 1, 1, 1 בסדרת ההטלוות באורך n .

סעיף א'

נחשב את התוחלת של X_n .
פתרון: יהיו Y_1, Y_2, \dots, Y_n משתנים מקרים כאשר Y_i הוא תוצאה ההטלה ה- i .

$$\forall k \in \{1, \dots, n-2\}, I_k = \begin{cases} 1 & Y_k = Y_{k+1} = Y_{k+2} = 1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

ולכן, X_n , או מלינאריות התוחלת

$$\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n-2} I_k\right) = \sum_{k=1}^{n-2} \mathbb{E}(I_k) \stackrel{\substack{\text{תוחלת משתנה מקרי אנדייקטור} \\ \text{ומהתלוות של ההטלוות}}}{=} (n-2)p^3$$

□

סעיף ב'

נחשב את השונות של X_n .
פתרון: מהגוסחה לחישוב סכום של שונות

$$\text{Var}(X_n) = \text{Var}\left(\sum_{k=1}^{n-2} I_k\right) = \sum_{k=1}^{n-2} \text{Var}(I_k) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n-2} \text{Cov}(I_i, I_j)$$

נחשב את שני חלקיו הסקומי:

$$\text{Var}(I_k) = \mathbb{E}(I_k^2) - \mathbb{E}(I_k)^2 \stackrel{\substack{\text{משתנה מקרי אנדייקטור}}}{=} \mathbb{E}(I_k) - \mathbb{E}(I_k)^2 = p^3 - p^6 = p^3(1 - p^3)$$

עבור החלק השני, היות וההטלוות הן בלתי-תלוויות, נובע שעבור I_k, I_{k+1}, I_{k+3} המאורעות הם זרים וهم בלתי-תלוילים כי ההטלוות הן בלתי-תלוויות, כלומר $\text{Cov}(I_i, I_j) = 0$ לכל $|i - j| \geq 3$.
או המאורעות שהם תלויים הם המאורעות עבורם $|i - j| = 1$ או המאורעות עבורם $|i - j| = 2$ כולם הסתיימו ב-1 ומהאי-תלוות של ההטלוות נתחיל מהמקרה השני, ניקח $j = i + 1$ כולם ההטלוות $Y_i, Y_{i+1}, Y_{i+2}, Y_{i+3}$ נקבעו על ידי המקרה הראשון.

$$\mathbb{E}(I_i I_{i+1}) = \mathbb{P}(I_i = 1, I_{i+1} = 1) = \mathbb{P}(1111) = p^4$$

ולכן

$$\text{Cov}(I_i, I_{i+1}) = \mathbb{E}(I_i I_{i+1}) - \mathbb{E}(I_i) \mathbb{E}(I_{i+1}) = p^4 - p^6 = p^4(1 - p^2)$$

ויש לנו 3 זוגות כאלה.

עבור המקרה השני נפעיל באופן דומה: ניקח $j = i + 2$ או ההטלוות $Y_i, Y_{i+1}, Y_{i+2}, Y_{i+3}, Y_{i+4}$ סולן הסתיימו ב-1, ומהאי-תלוות של ההטלוות

$$\mathbb{E}(I_i I_{i+2}) = \mathbb{P}(I_i = 1, I_{i+2} = 1) = \mathbb{P}(111111) = p^5$$

ולכן

$$\text{Cov}(I_i, I_{i+2}) = \mathbb{E}(I_i I_{i+2}) - \mathbb{E}(I_i) \mathbb{E}(I_{i+2}) = p^5 - p^6 = p^5(1 - p)$$

ויש לנו 4 זוגות כאלה ובsek-הכל

$$\text{Var}(X_n) = \sum_{k=1}^{n-2} \text{Var}(I_k) - \sum_{1 \leq i < j \leq n-2} \text{Cov}(I_i, I_j) = (n-2)p^3(1 - p^3) + 2((n-3)p^4(1 - p^2) + (n-4)p^5(1 - p))$$

□

סעיף ג'

נשתמש באיד-שוויון צ'בישב כדי להסביר שלכל $\varepsilon > 0$ הסדרה $p_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} p$ כ- ε -ראשיה:

$$\left| \frac{X_n}{n-2} - p^3 \right| \geq \varepsilon \iff |X_n - (n-2)p^3| \geq \varepsilon(n-2)$$

אי-שוויון צ'בישב אומר שלכל $a > 0$ מתקיים

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \frac{\text{Var}(X)}{a^2}$$

ובמקרה שלנו, $X = X_n, a = \varepsilon(n-2)$

$$\mathbb{P}(|X_n - \mathbb{E}(X_n)| \geq \varepsilon(n-2)) \leq \frac{\text{Var}(X_n)}{\varepsilon^2(n-2)^2}$$

בסייף הקודם מצאנו שמתקיים

$$\text{Var}(X_n) = (n-2)p^3(1-p^3) + 2((n-3)p^4(1-p^2) + (n-4)p^5(1-p))$$

זה צירוף לנארי במשתנה n ולכן קיים $C > 0$ שקיימים רק במשתנה p כ- ε -שיתקיים עבור n גדול מספיק, ולכן

$$\frac{\text{Var}(X_n)}{\varepsilon^2(n-2)^2} \leq \frac{Cn}{\varepsilon^2(n-2)^2} = \frac{Cn}{\varepsilon^2(n^2 - 2n + 4)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

שכן המכנה דומיננטי יותר.

□

שאלה 6

יהיו X, Y משתנים מקריים בלתי-תלויים המקיימים

$$\text{Var}(X) = \text{Var}(Y) = \mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = 1$$

סעיף א'

נחשב את התוחלת והשונות של $X + Y$.
פתרון: מילינאריות התוחלת מתקיים

$$\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = 1 + 1 = 2$$

ובן מהיות X, Y בלתי-תלויים, מילינאריות השונות למשתנים מקריים בלתי-תלויים

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) = 1 + 1 = 2$$

□

סעיף ב'

נחשב את התוחלת והשונות של XY .
פתרון: X, Y בלתי-תלויים ולכן מכפלות התוחלת למשתנים בלתי-תלויים

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = 1 \cdot 1 = 1$$

נזכיר שריאנו שאם X, Y משתנים מקריים בלתי-תלויים או הם נשאים גם בלתי-תלויים תחת הפעלת פונקציה, כולם אם נסמן $z^2 = f(Z)$ אז $f(Y) = Y^2$ ו- $f(X) = X^2$ או מהגדרת השונות נקבל

$$\begin{aligned} \text{Var}(XY) &= \mathbb{E}((XY - 1)^2) = \mathbb{E}(X^2Y^2 - 2XY + 1) \underset{\text{לינאריות}}{=} \mathbb{E}(X^2Y^2) - 2\mathbb{E}(XY) + 1 = \mathbb{E}(X^2Y^2) - 1 \\ &= \mathbb{E}(X^2Y^2) - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) + 1 = \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2) - 1 \end{aligned}$$

היה אפשר להגיע לזה גם מההגדרה השקולה.
עוד נתון כי

$$1 = \text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(X^2) - 1 \implies \mathbb{E}(X^2) = 2$$

וכמוון באותו אופן גם עבור $\text{Var}(Y)$ ולכן

$$\text{Var}(XY) = \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2) - 1 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$$

□

שאלה 7

لتוך שתי מעטפות אוטומות מוכנסים סכומי כסף מקרים, $10^X, 10^{X+1}$, עברו $X \sim Geo(\frac{1}{2})$. ahod מקבל מעטפה מקרים, מציין בתוכה ומחליט האם לחת אתה או להחליפה במעטפה השנייה.

סעיף א'

יש להראות כי בלי תלות בסכום שיגלה, בהינתן הסכום שבמעטפה, תוחלת הכספי שיקבל ahod תגדל אם הוא יחליף בין המעטפות. פתרון: נסמן $\{Y \in \{10^X, 10^{X+1}\} \text{ הבחירה של ahod.}$

נניח ש- $Y = 10^k$ ולכן יש לבדוק שת一切都:

1. $X = k$ ahod בחר את המעטפה הקטנה יותר

2. $X = k - 1$ ahod בחר את המעטפה הגדולה יותר

כלומר

$$\mathbb{P}(X = k) \cdot \frac{1}{2} = 2^{-k+1} \cdot \frac{1}{2} = 2^{-(k+2)}$$

$$\mathbb{P}(X = k - 1) \cdot \frac{1}{2} = 2^{-k} \cdot \frac{1}{2} = 2^{-(k+1)}$$

בהתאם בין המקרים לעיל, כלומר מנוסחת ההסתברות השלמה

$$2^{-(k+2)} + 2^{-(k+1)} = 2^{-k(k+2)} + 2^1 \cdot 2^{-(k+2)} = 2^{-(k+2)}(1 + 2) = 3 \cdot 2^{-(k+2)}$$

ומכלל בית נקבע

$$\mathbb{P}(Y = 10^k \mid \text{מעטפה עם סכום קטן יותר}) = \frac{1}{3}$$

$$\mathbb{P}(Y = 10^k \mid \text{מעטפה עם סכום גדול יותר}) = \frac{2}{3}$$

ומנוסחת התוחלת השלמה המותנית

$$\mathbb{E}(Y \mid Y = 10^k) = \frac{1}{3}10^{k+1} + \frac{2}{3}10^{k-1} = 10^k \left(\frac{10}{3} + \frac{2}{30} \right) = 10^k \cdot \frac{34}{30} > 10^k$$

מאותו טרייך מקודם עם החזקה.

מצד שני

$$\mathbb{E}(Y \mid Y = 10^k) = 10^k$$

שכן

$$\mathbb{E}(Y \mid Y = c) = c$$

□

סעיף ב'

מהסעיף הקודם הקודם נדמה כי ניתן להסיק כי עוד לפני שנפתחה המעטפה כדאי ahod להחליף בין המעטפות, אך מטעמי סימטריה הדבר כМОובן לא ניתן. נבחן כיצד נפתרור את הפרדוקס.

הוכחה: לפני שאנו פותחים מעטפה,שתי המעטפות שקולות אבל ברגע שאנו פותחים את המעטפה, וקיים את הערך Y , המעטפה כבר לא

שקולות בرمאה ההסתברותית שלהן: אחת ידועה הערך שלו, Y , השנייה יש לה הסתברות לא ידועה שתלויה ב- Y .

או יש לנו 3 אסטרטגיות: אסטרטגיה A – לא להחליף, אסטרטגיה B – תמיד להחליף, אסטרטגיה C – לפתח ואז להחליף אם להחליף.

אבל אסטרטגיה C אינה שcolaה לאסטרטגיות A ו-B שכן שקולות מבחינה התוחלת שלהן, כי היא תליה במתזאה אחרת.

כלומר, לפני שפתחנו את המעטפה, יש סימטריה והחלפה לא יכולה לעזור, אבל אחריו שפתחנו את המעטפה – רק אז הסימטריה נעלמת והחלפה יכולת לעזור.

□