הכנה למבחן — פונקציות מרוכבות, 80519

8 בפברואר 2026

תוכן עניינים

1 אריתמטיקות בסיסיות שאת תמיד שוכחת

בהינתן $z = x + iy, w = a + ib$

1. ערך מוחלט

$$|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{(x+iy) \cdot (x-iy)} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

2. חילוק

$$\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \overline{w}}{w \cdot \overline{w}} = \frac{z \cdot \overline{w}}{|w|^2}$$

3. זהות אויילר

$$e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z)$$

4. $$e^{\pi i} = (-1) \qquad e^{2\pi i} = 1, \qquad e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$

5. $$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

6. $$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

7. $$\sinh(z) = -i\sin(iz) = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$$

8. $$\cosh(z) = \cos(iz) = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

9. $$|e^w| = e^{Re(w)}$$

2 ספרינט על החומר

2.1 גזירות מרוכבת

הקדמה

הגדרה 2.1.1 (תחום): נגיד ש־$G \subset \mathbb{C}$ היא תחום אם היא קבוצה פתוחה וקשירה. אם G פתוחה אז ניתן לכתוב $G = \dot{\bigcup}_{j=1}^{N} G_j$ כאשר G_j תחום.

הגדרה 2.1.2 (גזירות מרוכבת): תהיי $f : U_{z_0} \to \mathbb{C}$, נגיד שהיא $\mathbb{C}$־דיפרנציאבילית ב־z_0 אם הגבול הבא קיים וסופי

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

באופן שקול, קיים $a \in \mathbb{R}$ כך שהגבול הבא קיים וסופי

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - (f(z_0) + a(z - z_0))}{z - z_0}$$

כמובן שזה גורר רציפות ב־z_0.

הגדרה 2.1.3 (פונקציה אנליטית): פונקציה f היא אנליטית ב־z_0 אם קיימת סביבה U_{z_0} כך ש־f היא $\mathbb{C}$־דיפרנציאבילית בכל $z \in U_{z_0}$.
נגיד ש־f היא אנליטית ב־$\mathbb{C}$ אם לכל $z_0 \in \mathbb{C}$, f היא אנליטית ב־z_0.

הגדרה 2.1.4 (פונקציה הולומורפית): פונקציה f היא הולומורפית אם היא אנליטית ב־$\mathbb{C}$.
נסמן ב־$\mathrm{Hol}(G)$ את אוסף כל הפונקציות האנליטיות ב־G.

טורי חזקות

משפט 2.1.1 (משפט ה־M של ויירשטראס): תהיי $E \subset \mathbb{C}$ ו־$f_n : E \to \mathbb{C}$. אם לכל n, $|f_n| \leq M_n$ ו־$\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$ אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ מתכנס בהחלט ובמידה שווה ב־E

למה 2.1.1: אם $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (w - z_0)^n$ מתכנס עבור $w \neq z_0$ אז הסכום מתכנס במידה שווה ובהחלט ב־$\{z \mid |z - z_0| < q \text{ abs } w - z_0\}$ לכל $q \in (0, 1)$.

מסקנה 2.1.1: אחד מהבאים מתקיים

1. לכל $z \neq z_0$ הסכום $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)$ מתבדר
2. לכל $z \in \mathbb{C}$ הסכום $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)$ מתכנס
3. קיימים z_1, z_2 כך שהסכום $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z_1 - z_0)$ מתבדר והסכום $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z_2 - z_0)$ מתכנס

הגדרה 2.1.5 (רדיוס התכנסות ונוסחת הדאמר): הגדרנו את רדיוס ההתכנסות R_C להיות הממשי החיובי כך שלכל z המקיים $|z - z_0| < R_C$ הסכום מתכנס בהחלט ועבור כל z המקיים $|z - z_0| > R_C$ הטור מתבדר (לא ידוע מה קורה כאשר $|z - z_0| = R_C$ וכל פעם צריך לבדוק).
הגדרנו את נוסחת הדאמר להיות

$$\frac{1}{R_C} = \limsup_{n \to \infty} |c_n|^{\frac{1}{n}}$$

האקספוננט המורכב

משפט 2.1.2: אם f הולומורפית אז $f' = f$ אם ורק אם $f(z) = c \cdot e^z$ עבור c קבוע.

מסקנה 2.1.2 (מסקנות מזהות אויילר):

1. $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta), z = |z| + e^{i\theta} = |z|(\cos(\theta) + i \sin(\theta)))$
2. $z = x + iy \Longrightarrow e^z = e^x(\cos(y) + i \sin(y))$
3. $|e^z| = e^x, Arg(e^z) = y$

הלוגריתם המרוכב ופונקציית הארגומנט

TODOOOOOOOOOOOOOOOOOOO

הגדרה 2.1.6 (נגזרת לוגריתמית): אם $f : G \to \mathbb{C}$ לא מתאפסת, הנגזרת הלגוריתמית מוגדרת להיות $\frac{f'}{f}$.

משוואות קושי־רימן

סימון: תהיי $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ונסמן $Re(f) = u(x,y), Im(f) = v(x,y)$ כאשר $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ו־$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$.

משפט 2.1.3: תהיי $f = u + iv$ פונקציה $\mathbb{C}$־דיפרנציאבילית, אזי

$$f' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

משפט 2.1.4 (משוואות קושי־רימן): תהיי $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ שהיא $\mathbb{C}$־דיפרנציאבילית ב־$z = x + iy$ אם ורק אם מתקיימות המשוואות הבאות (משוואות קושי־רימן)

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$$

ובמקרה זה זה שווה לנגזרת.

משפט 2.1.5: יהי $G \subset \mathbb{C}$ תחום ו־$f \in \mathrm{Hol}(G)$, הבאים שקולים

1. f קבועה
2. $f' \equiv 0$
3. $Re(f) = u$ קבוע
4. $Im(f) = v$ קבוע
5. $|f|$ קבועה
6. $\arg(f)$ קבועה (אם $f \neq 0$)

הגדרה 2.1.7 (Wirtinger Operators):

$$\partial_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \qquad \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

טענה 2.1.1:

1. $\partial_{\bar{z}} f = \frac{1}{2}\big(u_x - u_y + i\big(v_x + u_y\big)\big)$
2. f הולומורפית אם ורק אם $\partial_{\bar{z}} f = 0$
3. $\overline{\partial_z f} = \partial_{\bar{z}} \overline{f}$
4. $\overline{\partial_{\bar{z}} f} = \partial_z \overline{f}$
5. $\partial_z(f \cdot g) = (\partial_z f) \cdot g + f \cdot (\partial_z g)$
6. $\partial_{\bar{z}}(f \cdot g) = (\partial_{\bar{z}} f) \cdot g + f \cdot (\partial_{\bar{z}} g)$
7. $\partial_z(f \circ g) = ((\partial_z f) \circ g) \cdot \partial_z g + ((\partial_{\bar{z}} f) \circ g) \cdot \partial_z \overline{g}$
8. $\partial_{\bar{z}}(f \circ g) = ((\partial_z f) \circ g) \cdot \partial_{\bar{z}} g + ((\partial_{\bar{z}} f) \circ g) \cdot \partial_{\bar{z}} \overline{g}$

פונקציות הרמוניות

הגדרה 2.1.8 (הלפסליאן): תהיי $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ נגדיר את הלפסליאן להיות

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4\partial_{z\bar{z}} u$$

הגדרה 2.1.9 (פונקציה הרמונית): נגדיר כי $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ היא הרמונית אם היא גזירה פעמיים ומתקיים $\Delta u = 0$

משפט 2.1.6: אם $f \in \mathrm{Hol}(G) \cap C^2(G)$ אז $Re(f), Im(f)$ הן הרמוניות

הגדרה 2.1.10 (הרמונית צמודה): תהיינה $u, v \in \mathrm{Harm}(G)$, הן נקראות הרמוניות צמודות אם $u + iv \in \mathrm{Hol}(G)$ (כלומר מקיימות את משוואות קושי רימן) ואז $v = \overline{u}$ (בפרט, הצמידות היא יחידה).

מסקנה 2.1.3: אם G הוא דיסק או מלבן אז לכל $u \in \mathrm{Harm}(G)$ יש $\tilde{u} \in \mathrm{Harm}(G)$ כך ש־$u + i\tilde{v} \in \mathrm{Hol}(G)$.

משפט 2.1.7 (דרך לחישוב הרמונית צמודה): אם G דיסק או מלבן אז $(x_0, y_0) \in G$ ו־$u \in \mathrm{Harm}(G)$, אז

$$v(x_0, y_0) = \int_y^{y_0} u_x(x_0, t)\,\mathrm{d}t - \int_x^{x_0} u_y(t, y)\,\mathrm{d}t - v(x_0, y_0)$$

העתקות קונפורמיות

הגדרה 2.1.11 (נקודה רגולרית): $t_0 \in I$ תקרא רגולרית אם $\gamma'(t_0) \neq 0$.

משפט 2.1.8:

1. אם $f \in \mathrm{Hol}(G) \cap C^1(G)$ ו־$f'(z_0) \neq 0$ אז f משמרת זוויות בין מסילות כלומר z_0 היא נקודה רגולרית.
2. אם $f \in C^1(G)$ ו־f משמרת זוויות בין מסילות עבורן z_0 היא נקודה רגולרית אז f היא $\mathbb{C}$־דיפרנציאבילית ו־$f'(z_0) = 0$

הגדרה 2.1.12 (העתקה קונפורמית): נגדיר ש־f היא העתקה קונפורמית אם היא משמרת זוויות בין מסילות או באופן שקול אם היא הולומורפית ו־$f' \neq 0$.

בפרט, העתקה קונפורמית היא הפיכה וההופכית שלה היא גם העתקה קונפורמית.

2.2 אינטגרלים קווים

הקדמה

הגדרה 2.2.1 (אינטגרל קווי): יהיו $G \subseteq \mathbb{C}$ תחום, $f : G \to \mathbb{C}$ רציפה ו־γ מסילה C^1 שתמונתה מוכלת ב־G. האינטגרל המסילתי של f לאורך γ הוא

$$\int_\gamma f \,\mathrm{d}\gamma := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t$$

הגדרה 2.2.2 (מסילה פשוטה): מסילה γ תיקרא פשוטה אם היא חד־חד ערכית. עקומה תקרא פשוטה אם היא תמונה של מסילה פשוטה.

הגדרה 2.2.3 (תחום טוב): תחום G ייקרא תחום טוב אם G חסומה ואם ∂G היא איחוד סופי זר של מסילות פשוטות ו־C^1 למקוטעין מאורך סופי ונגדיר

$$\int_{\partial G} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} f(z)\,\mathrm{d}z$$

הגדרה 2.2.4 (תחום כוכב): תחום G נקרא תחום כוכב אם קיים z_0 כך שלכל $z \in G$ מתקיים $[z_0, z] \in G$.

משפט 2.2.1 (האי־שיוויון האהוב עלינו ממרוכבות): לכל $f \in \mathrm{Hol}(G), \gamma : I \to G$ מתקיים

$$\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq \max_\gamma |f| \cdot L(\gamma) := \max_{t\in I} |f(\gamma(t))| \cdot L(\gamma)$$

משפט 2.2.2: אם $f_n \to f$ במידה שווה מקומית (במידה שווה בכל קבוצה קומפקטית $K \subset G$) ב־G אז לכל $\gamma : I \to G$ מתקיים

$$\lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$$

משפט 2.2.3 (קירוב פוליגונלי): תהיי $\gamma : I \to G$ כאשר $I = [a, b]$ מסילה רציפה למקוטעין ותהיי $f \in \mathrm{Hol}(G)$.
אז לכל $\varepsilon > 0$ קיימת חלוקה של I, $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b$ כך שמתקיים

$$\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\sum_\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z\right| < \varepsilon$$

כאשר $\sum_\varepsilon = \sum_{k=1}^N \left[\gamma\left(t_{j-1}, \gamma\left(t_j\right)\right)\right]$.

משפט קושי

משפט 2.2.4 (משפט קושי במשולש): יהי T משולש סגור ו־G סביבה פתוחה של T, אזי לכל $f \in \mathrm{Hol}(G)$ מתקיים

$$\int_{\partial T} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

משפט 2.2.5 (משפט קושי בקבוצה קמורה): תהיי K קבוצה קמורה חסומה ו־G סביבה פתוחה של K, אז לכל $f \in \mathrm{Hol}(G)$ מתקיים

$$\int_{\partial K} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

תזכורת (קבוצה קמורה): $K \subset \mathbb{R}^k$ נקראת קמורה אם לכל $x, y \in K$ מתקיים

$$[x, y] := \{\lambda x + (1-\lambda)y \mid \lambda \in [0, 1]\} \subseteq K$$

משפט 2.2.6 (משפט קושי בתחום טוב): יהי G תחום טוב אז לכל $f \in \mathrm{Hol}\left(G \cap C\left(\overline{G}\right)\right)$ מתקיים

$$\int_{\partial G} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

מסקנות ממשפט קושי

משפט 2.2.7 (נוסחת אינטגרל קושי): יהי $G\subset\mathbb{C}$ תחום טוב, $\gamma=\partial G$ ותהיי $f\in\mathrm{Hol}(G)\cap C\left(\overline{G}\right)$. אזי

$$\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w=\begin{cases}2\pi i f(z) & z\in G\\ 0 & z\notin\overline{G}\end{cases}$$

כאשר האינטגרל בצד שמאל נקרא **אינטגרל קושי**.

משפט 2.2.8 (נוסחת אינטגרל קושי לנגזרת): תהיי γ איחוד סופי של מסילות C^1 ותהיי $\varphi\in C(\gamma)$. נגדיר

$$F(z):=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\varphi(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w$$

אז $F\in\mathrm{Hol}(\mathbb{C}\setminus\gamma)$ ויתר על־כן

$$F^n(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\varphi(w)}{(w-z)^{n+1}}\,\mathrm{d}w$$

מסקנה 2.2.1 (טיילור): אם f הולומורפית אז פיתוח טיילור של f מסביב ל־z מתכנס במידה שווה בדיסק. יתר על־כן,

$$f^n(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{\{|w-z|=\rho\}}\frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\,\mathrm{d}w$$

עבור $\rho<\mathrm{dist}(z,\partial G)$ ומתקיים

$$f(w)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^n(z)}{n!}(w-z)^n\qquad |z-w|<\delta$$

מסקנה 2.2.2: אם f הולומורפית אזי היא גזירה אינסוף פעמים במובן המורכב.

משפט 2.2.9 (משפט מוררה): אם G תחום ו־$f\in C(G)$ מקיימת שלכל משולש $T\subset G$ מתקיים $\int_{\partial T}f(w)\,\mathrm{d}w=0$ אז $f\in\mathrm{Hol}(G)$.

משפט 2.2.10 (משפט ויירטשטראס): אם $f_n\in\mathrm{Hol}(G)$ ונניח $f_n\to f$ בצורה לוקאלית במידה שווה, אז

1. $f\in\mathrm{Hol}(G)$
2. לכל j, $f_n^j\to f^j$ בצורה לוקאלית ובמידה שווה (j^j זו הנגזרת ה־j)

משפט 2.2.11 (אי־שיוויון קושי): תהיי $f\in\mathrm{Hol}(B(z_0,R))$ אז לכל $n\in\mathbb{N}$

$$|f^n(z)|=\frac{n!}{2\pi i}\int_{\{|w-z|=\rho\}}\frac{|f(w)|}{|w-z|^{n+1}}\,\mathrm{d}w\le\left|\frac{n!}{2\pi}\right|\frac{\max_{|w-z|=R}|f|}{R^{n+1}}\cdot L(\{|z-w|=R\})=\frac{n!}{R^n}\max_{|w-z|}|f|$$

משפט 2.2.12 (משפט ליוביל): אם $f\in\mathrm{Hol}(\mathbb{C})$ ו־f חסומה, אז f קבועה.

משפט 2.2.13 (המשפט היסודי של האלגברה): יהי p פולינום מרוכב מדרגה של לפחות 1, אז יש לו שורש.

מסקנה 2.2.3: כל פולינום מדרגה d ניתן לכתיבה כמכפלה $p(z)=a_0\prod_{j=1}^{d}(z-z_k)$ עבור $z_k\in\mathbb{C}$.

משפט 2.2.14 (משפט ערך הממוצע): אם $f\in\mathrm{Hol}(G)$, $z\in G$ ו־$\rho<\mathrm{dist}(z,\partial G)$ אז

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(z+\rho e^{it}\right)\mathrm{d}t$$

כלומר, $f(a)$ הוא הממוצע של הערכים ב־$\partial B(z,\rho)$.

משפט 2.2.15 (עיקרון המקסימום): אם $f\in\mathrm{Hol}(G)\cap C\left(\overline{G}\right)$ ולא קבועה אז $|f|$ מקבלת מינימום ומקסימום גלובאליים על השפה של G.

משפט 2.2.16 (עיקרון פרגמן-לינדלוף): יהי $G \subset \mathbb{C}$ תחום לא חסום ו־$f \in \mathrm{Hol}(G)$ פונקציה חסומה המקיימת $|f(z)| \leq M$ לכל $z \in \partial G$. אז $|f| \leq M$ על G, כלומר $|f|$ חסומה על G.

משפט 2.2.17 (משפט היחידות 1): יהי G תחום ו־$f \in \mathrm{Hol}(G)$. נניח שקיים $z_0 \in G$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $f^n(z_0) = 0$. אזי $f \equiv 0$.

משפט 2.2.18 (טענה שלפני משפט היחידות 2): יהי G תחום ו־$f \in \mathrm{Hol}(G)$ ונניח שהריבוי של f ב־z_0 הוא m.
אזי $f(z) = g(z)(z - z_0)^m$ עבור $g \in \mathrm{Hol}(G)$ המקיימת $g(z_0) \neq 0$.

משפט 2.2.19 (משפט היחידות 2): יהי G תחום ו־$f \in \mathrm{Hol}(G)$ ונניח שקיימת $z_0 \in G$ כך ש־$\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset G$ מקיימת $z_n \to z_0$.
אם $f(z_n) = 0$ לכל $n \in \mathbb{N}$ אז $f \equiv 0$.

2.3 טורי לורן

הגדרה 2.3.1 (טור לורן): טור מהצורה

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{c_n}{(z-z_0)^{-n}} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = \sum_{-} + \sum_{+}$$

ייקרא טור לורן, כאשר הרדיוס התכנסות עבור

$$\frac{1}{R_+} := \limsup_{n\to\infty} |c_n|^{\frac{1}{n}}$$

$$\frac{1}{R_-} := \limsup_{n\to\infty} |c_{-n}|^{\frac{1}{n}}$$

הוא $\{R_- < |z-z_0| < R_+\}$.

משפט 2.3.1: תהיי $f \in \mathrm{Hol}(\{R_-\} < |z-z_0| < R_+\})$, אזי $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ מתכנס לוקאלית במידה שווה ל־f ומתקיים

$$c_n := \frac{1}{2\pi i} \int_{\{|\zeta - z_0| = r\}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \,\mathrm{d}\zeta$$

נקודות סינגולריות

הגדרה 2.3.2 (נקודה סינגולרית אינטגרבילית): x_0 נקראת סינגולרית אינטגרבילית של $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ אם f רציפה על $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ ומתקיים

$$\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} |f(t)| \,\mathrm{d}t < \infty$$

הערה: נקודה סינגולרית סליקה היא סינגולרית אינטגרבילית.

הגדרה 2.3.3: עבור $a \in \mathbb{C}$ נסמן ב־U_a סביבה פתוחה של z וב־U_a^* את הסביבה המנוקבת $U_a \setminus \{a\}$.

הגדרה 2.3.4 (נקודות סינגולריות): תהיי $f \in \mathrm{Hol}(U_a^*)$. נסווג את הנקודות הסינגולריות של f ב־$z = a$ באופן הבא

1. סליקה – ניתן להמשיך את f לנקודה a כך שתהיה הולומורפית (כלומר, אם $f|_{U_a^*}$ חסומה)
2. קוטב – הנקודה a איננה סינגולריות סליקה וקיים $m \geq 1$ כך שלפונקציה $(z-a)^m f(z)$ יש סינגולריות סליקה ב־a.
   נגדיר את סדר הקוטב של f ב־a להיות ה־m המינימלי המקיים זאת.
3. עיקרית – הגבול $\lim_{z\to a} f(z)$ איננו קיים במובן הרחב

משפט 2.3.2: a קוטב של f אם ורק אם $\lim_{z\to f(z)} = \infty$ (כלומר $\lim_{z\to a} |f(z)| = \infty$).

משפט 2.3.3 (הקשר בין טור לורן לבין נקודות סינגולריות): נניח $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$, אז

1. a קוטב אם ורק אם קיים $m \geq 1$ כך שלכל $m \leftarrow n$ מתקיים $c_n = 0$ (כלומר , טור הלורן מכיל רק מספר סופי של חזקות שליליות)
2. a סינגולרית עיקרית אם ורק אם טור הלורן מכיל אינסוף חזקות שליליות

משפט 2.3.4 (משפט קורטוזי־ויירשטראס): אם a סינגולרית עיקרית של הפונקציה f, אז V, סביבה פתוחה של a, הקבוצה $f(V \setminus \{a\})$ צפופה ב־$\mathbb{C}$ (כלומר $\overline{f(V \setminus \{a\})} = \mathbb{C}$).

הגדרה 2.3.5 (פונקציה רציונלית): פונקציה $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ היא פונקציה רציונלית אם f ניתנת לכתיבה על־ידי $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ ו־p, q פולינומים בלי שורשים משותפים.

הגדרה 2.3.6 (נקודות סינגולריות ב־∞):

1. נגדיר ש־f אנליטית ב־∞ אם F יש סינגולריות סליקה ב־0
2. אם ל־f יש קוטב ב־∞ אז נגדיר של־F יש קוטב ב־0
3. אם ל־f יש סינגולרית עיקרית ב־∞ אז ל־F יש סינגולרית עיקרית ב־0

הגדרה 2.3.7 (פונקציה מרומורפית): תהיי $f : G \to \mathbb{C}^*$ ל־$G \subset \mathbb{C}$. נאמר ש־f היא מומורפית אם לכל $a \in G$ קיימת סביבה $U_a \subseteq G$ כך ש־$f \in \text{Hol}(U_a^*)$ וכן f הולומורפית ב־a או ש־a קוטב (באופן שקול, f מומורפית אם היא הולומורפית בכל $\mathbb{C}$ מלבד בקבוצה של קטבים מבודדים).
את אוסף הפונקציות המומורפיות נסמן ב־$\text{Mer}(G)$ (זהו כמובן שדה).

מסקנה 2.3.1: תהיי $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$

1. אם f הולומורפית ב־$\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ אז f קבועה
2. אם f הולומורפית ב־$\mathbb{C}$ ויש לה קוטב ב־∞ אז f פולינום
3. אם f הולומורפית ב־$\mathbb{C}^* \setminus \{a_1, a_2, ..., a_N\}$ ולכל j, a_j היא קוטב מסדר j, אז f פונקציה רציונלית

מסקנה 2.3.2: אם $f \in \text{Hol}(\mathbb{C})$ לא רציונלית, אז ל־f יש סינגולרית עיקרית ב־∞.

שאריות

הגדרה 2.3.8 (שארית בנקודה): יהיו $a \in \mathbb{C}$ ו־$f \in \text{Hol}(U_a^*)$. נקבע $\varepsilon > 0$ כך ש־$\{0 < |z-a| < \varepsilon\} \subset U_a^*$ ונגדיר את השארית ב־a להיות

$$\text{res}_f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z$$

משפט 2.3.5 (משפט השארית של קושי): יהי $G \subset \mathbb{C}$ תחום טוב, $f \in \text{Hol}\Big((G \setminus \{a_1, a_2, ..., a_N\}) \cap \left(\overline{G} \setminus \{a_1, a_2, ..., a_N\}\right)\Big)$. אזי

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{N} \text{res}_f(a_j)$$

טענה 2.3.1: אם $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ מקיימת $\psi(a) = 0, \varphi(a) \neq 0, \psi'(a) \neq 0$ אזי $\text{res}_f(a) = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$.

טענה 2.3.2: אם $f \in \text{Hol}(G \setminus \{a\})$ ו־a קוטב מסדר n, אזי

$$\text{res}_f(a) = \frac{\left((z-a)^n f(z)\right)^{n-1}(a)}{(n-1)!}$$

הגדרה 2.3.9 (שארית באינסוף): תהיי f הולומורפית בסביבה של ∞ (כלומר $f \in \text{Hol}(\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R_0\})$ ונגדיר

$$\text{res}_f(\infty) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R} f(z)\,\mathrm{d}z\ (R > R_0)$$

טענה 2.3.3: השארית של נגזרת לוגריתמית היא הסדר של האפס.

בחזרה לחישוב אינטגרלים ממשיים

למה 2.3.1: אם $\varphi : \{Im(z) \geq 0\} \to \mathbb{C}$ פונקציה הולומורפית המקיימת

$$\limsup_{R\to\infty} \max_{\{|z|=R\}} |z \cdot \varphi(z)| < \infty$$

אז לכל $\lambda > 0$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\{|z|=R,\, Im(z)>0\}} e^{i\lambda z}\varphi(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

2.4 עקרונות גיאומטריים

עקרון הארגומנט

משפט 2.4.1 (עקרון הארגומנט): תהיי $f \in \mathrm{Mer}(G)$ ו־G ו־$G_1 \Subset G$ ($G_1 \subset G$ ו־$\overline{G} \subseteq G$) תחום טוב.
נניח כי על ∂G_1 ל־f אין קטבים או אפסים, אזי

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G_1} \frac{f'}{f}\,\mathrm{d}z = \#\big(Z_f \cap G_1\big) - \#\big(P_f \cap G_1\big)$$

כאשר Z_f האפסים של f ו־P_f הקטבים של f (כולל ריבויים).

למה 2.4.1 (לוגריתם רציף): יהי $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ ותהיי $h : I \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ העתקה רציפה. אז קיימת העתקה $\psi : I \to \mathbb{C}$ כך ש־$e^{\psi} = h$ והיא יחידה עד כדי $2\pi i\mathbb{Z}$.

הגדרה 2.4.1 (השינוי של הארגומנט): תהיי $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ונניח ש־$f : \gamma \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
מהלמה של הלוגריתם הרציף ראינו שקיימת $\psi : I \to \mathbb{C}$ רציפה כך ש־$e^{\psi} = f \circ \gamma$. נגדיר את השינוי/הגידול של הארגומנט ב־f לאורך γ להיות

$$i\Delta_\gamma f \coloneqq \Delta_\gamma \log(f) = \psi(b) - \psi(a) \in 2\pi\mathbb{Z}$$

משפט רושה

משפט 2.4.2 (משפט רושה): תהיינה $f, g \in \mathrm{Hol}(G)$ ותהיי $H \subseteq G$ כך ש־$\overline{H} \subseteq G$ ו־H תחום טוב.
נניח שלכל $z \in \partial H$ מתקיים $|g(z)| \le |f(z)|$, אזי

$$\#\big(Z_{f+g} \cap H\big) = \#\big(Z_f \cap H\big)$$

מסקנה 2.4.1 (משפט גאוס): תהיי $g(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k$ וניקח $f(z) = a_n z^n$ כאשר $a_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. אז ל־$f + g$ יש n אפסים (כולל ריבוי).

מסקנה 2.4.2 (ריבויים בטבעת): בהתאם לתנאי משפט רושה, ובהינתן $A = \{z \in \mathbb{C} \mid a < |z| < b\}$ טבעת, אזי

$$\#\{\text{zeroes in } a < |z| < b\} = \#\{\text{zeroes in } |z| < b\} - \#\{\text{zeroes in } a < |z|\}$$

משפט 2.4.3 (העתקה מקומית): תהיי $f \in \mathrm{Hol}(G)$ לא קבועה, $z_0 \in G$ ו־$w_0 = f(z_0)$. יהי m סדר ההתאפסות של $f - w_0$ בנקודה z_0.
אז קיים $\varepsilon_0 > 0$ כך שלכל $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ יש $\delta > 0$ כך שלכל $B(w_0, \delta)^*$ יש בדיוק m פתרונות שונים למשוואה $f(z) = w$ בכדור $B(z_0, \varepsilon)$.

אינדקס ליפוף

הגדרה 2.4.2 (אינדקס ליפוף): תהיי $\gamma : I \to \mathbb{C}$ עקומה סגורה, נגדיר את אינדקס הליפוף של γ להיות

$$\mathrm{ind}_\gamma(z) \coloneqq \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta$$

משפט 2.4.4:
1. הפונקציה $\mathrm{ind}_\gamma(\cdot) : \mathbb{C} \setminus \gamma \to \mathbb{Z}$ היא רציפה
2. $\mathrm{ind}_\gamma(\infty) = \lim_{z \to, \infty} \mathrm{ind}_\gamma(z) = 0$
3. אם $\mathbb{C} \setminus \gamma = \cup\, \Omega_j$ כאשר Ω_j הם הרכיבי קשירות של $\mathbb{C} \setminus \gamma$ אזי $\mathrm{ind}_\gamma(\cdot)|_{)}\big(\Omega_j\big)$ סופי ו־$\mathrm{ind}_\gamma(\cdot)|_{\Omega_\infty} = 0$ כאשר Ω_∞ זה הרכיב קשירות הלא חסום.

הגדרה 2.4.3 (מעגל מוכלל): תהיי γ עקומה גזירה ברציפות למקוטעין. נאמר ש־γ היא מעגל מוכלל אם היא פשוטה וסגורה.

משפט 2.4.5 (משפט קושי גרסה מוכללת): אם $G \subset \mathbb{C}$ תחום ו־$\gamma : I \to G$ מעגל מוכלל המקיים $\mathrm{ind}_\gamma(z) = 0$ לכל $z \notin \overline{G}$ אזי לכל $f \in \mathrm{Hol}(G)$

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

מסקנה 2.4.3: לכל γ $z \in G \setminus \gamma$ ו־$f \in \mathrm{Hol}(G)$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}z = \mathrm{ind}_{\gamma}(z)\cdot f(z)$$

הלמה של שוורץ

למה 2.4.2 (הלמה של שוורץ)**:** תהיי $f:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ פונקציה לא קבועה הולומורפית המקיימת $f(0)=0$, אזי

1. $|f(z)| < |z|$
2. $|f'(0)| \le 1$
3. אם קיים $z_0 \neq 0$ כך ש־$|f(z_0)| = |z_0|$ או $|f'(0)| = 1$ אז $f(z) = \lambda \cdot z$ עבור $\lambda \in \mathbb{T}$ כלומר f היא סיבוב

הגדרה 2.4.4 ($\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$)**:**

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{D}) := \{f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}), \mathbb{D} \text{ היא חד־חד ערכית ועל } f\}$$

משפט 2.4.6: $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D}) \iff f(z) = \lambda \cdot \frac{z-a}{1-z\cdot\bar{a}}$ עבור $a \in \mathbb{D}, |\lambda| = 1$.

משפט 2.4.7 (משפט שוורץ-פיק)**:** תהיי $f:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ לא קבועה והולומורפית

1. כל $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ מקיימים

$$\left|\frac{f(z_2)-f(z_1)}{1-f(z_2)\overline{f(z_1)}}\right| \le \left|\frac{z_2 - z_1}{1 - z_2\overline{z_1}}\right|$$

2. כל $z \in \mathbb{D}$ מקיים

$$|f'(z)| \le \frac{1-|f(z)|^2}{1-|z|^2}$$

3. אם באחת הנקודות יש שיוויון באחד משני המקרים הקודמים, $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$

משפט ההעתקה של רימן

הגדרה 2.4.5 (תחום פשוט קשר)**:** תחום $G \subset \mathbb{C}$ נקרא פשוט קשר אם המשלים של G ב־$\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ הוא קשיר.

משפט 2.4.8: הבאים שקולים

1. G תחום פשוט קשר
2. האינטגרל של כל פונקציה הולומורפית ב־G לאורך מסילה סגורה וחלקה למקוטעין הוא אפס
3. כל פונקציה הולומורפית ב־G היא נגזרת של פונקציה הולומורפית
4. כל פונקציה הולומורפית ב־G שלא מתאפסת היא בעלת לוגריתם
5. כל פונקציה הולומורפית ב־G שלא מתאפסת היא בעלת שורש
6. לכל מסילה סגורה, חלקה למקוטעין ב־G, אינדקס הליפוף של כל נקודה שאיננה ב־G הוא אפס

משפט 2.4.9 (משפט ההעתקה של רימן)**:** יהי $G \subset \mathbb{C}$ תחום פשוט קשר כך ש־$\mathbb{C}\setminus\mathbb{G} \neq \emptyset$ ו־$a \in G$. אז אז קיימת העתקה קונפורמית (פונקציה הולומורפית, חד־חד ערכית ועל שההופכית שלה היא הולומורפית, נקרא ביהולומורפית) יחידה $\varphi:\mathbb{D}\to G$ המקיימת $\varphi(0) = a$ ו־$\varphi'(0) > 0$.

משפט 2.4.10 (משפט מונטל)**:** כל משפחה מקומית חסומה של פונקציות הולומורפיות $\mathcal{F}$ המוגדרת על תחום G מגדירה משפחת נורמות, כלומר לכל $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ יש תת־סדרה מתכנסת.

משפט 2.4.11 (משפט הורוויץ)**:** תהיי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות הולומורפיות המתכנסת במידה שווה מקומית בתחום G לפונקציה f שאינה קבועה אפס.

אם ל־f יש אפס מסדר m בנקודה z_0 אז לכל $\varepsilon > 0$ מספיק קטן ולכל n מספיק גדול, לפונקציה f_n יש בדיוק m אפסים בדיסק $B(z_0,\varepsilon)$ (כולל ריבוי). בנוסף, האפסים האלו מתכנסים לנקודה z_0 כאשר $n\to\infty$.

3 דברים שימושים בפתרונות תרגילים

3.1 למצוא כמה פתרונות (כולל ריבויים)

שאלות קלאסיות לשימוש משפט רושה (אני לחייך) ומשפט רושה בטבעת (אני לחייך)

דוגמה 3.1.1: נמצא כמה פתרונות (כולל ריבועיים) יש למשוואות בתחומים הנתונים.

1. $z^7 - 5z^4 + z^2 - 2 = 0$ בדיסק היחידה $\mathbb{D}$
2. $z^4 + 3z = 1$ בטבעת $\{z \mid 1 < |z| < 2\}$
3. $e^z = 3z^n$ בחצי מישור $\{z \in \mathbb{C} \mid Re(z) < 1\}$ ו־$n \in \mathbb{N}$

פתרון:

1. נגדיר $p(z) = z^7 - 5z^4 + z^2 - 2$ כאשר $g(z) = -5z^4$ ו־$f(z) = z^4 + z^2 - 2$, על $|z| = 1$ מתקיים

$$|g(z)| = \left|-5z^4\right| = 5 \qquad |f(z)| = \left|z^4 + z^2 - 2\right| = 0$$

אז מתקיים $|f(z)| \leq |g(z)|$ ול־g יש אפס אחד בראשית בריבוי 4 ולכן ממשפט רושה נקבל שיש למשוואה 4 פתרונות.

2. מהמסקנה אודות ריבויים בטבעת, נחלק לשתי בדיקות

$$\#\{\text{zeroes in } 1 < |z| < 2\} = \#\{\text{zeroes in } |z| < 2\} - \#\{\text{zeroes in } 1 < |z|\}$$

   1. על $|z| = 2$, נכתוב $p(z) = z^4 + (3z - 1)$ כאשר $g(z) = z^4$ ו־$f(z) = 3z - 1$ ומתקיים

$$|g(z)| = |z|^4 = 16 \qquad |f(z)| = |3z - 1| = 5$$

כלומר $|g(z)| > |f(z)|$ ולכן תנאי משפט רושה מתקיימים ולכן ל־p יש את אותה כמות אפסים כמו ל־g ול־g יש אפס אחד בראשית, אבל עם הכפליות יש לו ארבע.

   2. על $|z| = 1$ נכתוב $p(z) = 3z + (z^4 - 1)$ כאשר $g(z) = 3z$ ו־$g(z) = z^4 - 1$ ומתקיים

$$|g(z)| = |3z| = 3 \qquad |f(z)| = \left|z^4 - 1\right| = 0$$

כלומר $|g(z)| > |f(z)|$ ולכן תנאי משפט רושה מתקיימים ולכן ל־p יש את אותה כמות אפסים כמו ל־g ול־g יש אפס אחד בראשית עם ריבוי אחד.

בסך־הכל קיבלנו $4 - 1 = 3$ כלומר 3 פתרונות למשוואה הנתונה.

3. נגדיר $F(z) = 3z^n - e^z$ ונסתכל קודם כל על דיסק היחידה, על $|z| = 1$ מתקיים

$$|f(z)| = |e^z| = e < 3 \qquad |g(z)| = |3z^n| = 3^n = 3$$

ושוב מתנאי משפט רושה מתקיים $|g(z)| > |f(z)|$ ולכן יש להם את אותה כמות אפסים, ול־g יש ריבוי אחד בראשית עם ריבוי n.
נבחן מה קורה אם $|z| \geq 1$ ו־$Re(z) < 1$, אז

$$|f(z)| = |3z^n| \geq 3 \qquad |g(z)| = |e^z| = e^{Re(z)} < e < 3$$

כלומר

$$|3z^n| > |e^z| \Longrightarrow 3z^n - e^z \neq 0$$

כלומר אין התאפסויות בתחום הזה בכלל.
לסיכום יש לנו n אפסים, קרי n פתרונות.

□

3.2 טורי לורן

פיתוחים שימושים

1. $$|w|<1,\ \frac{1}{1-w}=\sum_{n=0}^{\infty} w^n$$

2. $$\frac{1}{1+w}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n w^n$$

3. $$\frac{1}{(1-w)^k}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k-1} w^n$$

4. $$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$$

5. $$|w|<1,\ (1+w)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{w^n}{n}$$

6. $$\sin(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

7. $$\cos(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

8. $$|w|<1,\ (1+w)^k\sum_{n=0}^{\infty}\binom{k}{n} w^n$$

How To Guide

נזכור שטור לורן הוא חמדן/זללן, ולכן מתכנס **בכל טבעת** שבו הוא רק יכול.
אז בגדול זה בכל תחום שבו הוא מוגדר היטב (כלומר, הנקודות הסינגולריות שלו הן הנקודות קפיצה).
את הנקודות הסינגולריות נקבע לפי המיפויים (אני לחיץ).
לפעמים נרצה לעבור בשיטה של מרים ("שיטת מקדמים לא נקבעים") עם הפונקציות הרציונליות, לדוגמה

$$\frac{z^2}{(z-2)(z-4)}=\frac{z^2}{z^2-6z+8}=\frac{z^2-6z+8+6z-8}{z^2-6z+8}=1+\frac{-6z+8}{z^2-6z+8}$$

$$\Longrightarrow \frac{-6z+8}{z^2-6z+8}=\frac{A}{z-2}+\frac{B}{z-4}=\frac{A(z-4)+B(z-2)}{z^2-6z+8}=\frac{z(A+B)-2(B+2A)}{z^2-6z+8}$$

$$\begin{cases} A+B=6 \\ -2B-4A=-8 \end{cases}$$

פותרים את המערך משוואות, מקבלים פונקציה ומפתחים בהתאם: משתמשים בהגבלות כדי לחסום ולהגיע לטורים ידועים.
תמיד נרצה להגיע לאחד מהטורים שרשום לעיל כי הם הכי קלים.

3.3 כשאתה מבולבל – הרם קושי אל־על

יש לנו 3 מסקנות חזקות מאוד ממשפט קושי

1. **משפט 3.3.1** (נוסחת אינטגרל קושי): יהי $G \subset \mathbb{C}$ תחום טוב, $\gamma = \partial G$ ותהיי $f \in \mathrm{Hol}(G) \cap C\left(\overline{G}\right)$. אזי

$$\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w = \begin{cases} 2\pi i f(z) & z \in G \\ 0 & z \notin \overline{G} \end{cases}$$

כאשר האינטגרל בצד שמאל נקרא **אינטגרל קושי**.

2. **משפט 3.3.2** (נוסחת אינטגרל קושי לנגזרת): תהיי γ איחוד סופי של מסילות C^1 ותהיי $\varphi \in C(\gamma)$. נגדיר

$$F(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\varphi(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w$$

אז $F \in \mathrm{Hol}(\mathbb{C} \setminus \gamma)$ ויתר על־כן

$$F^n(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\varphi(w)}{(w-z)^{n+1}}\,\mathrm{d}w$$

3. **משפט 3.3.3** (אי־שיוויון קושי): תהיי $f \in \mathrm{Hol}(B(z_0, R))$ אז לכל $n \in \mathbb{N}$

$$|f^n(z)| = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\{|w-z|=\rho\}} \frac{|f(w)|}{|w-z|^{n+1}}\,\mathrm{d}w \leq \left|\frac{n!}{2\pi}\right| \frac{\max_{|w-z|=R}|f|}{R^{n+1}} \cdot L(\{|z-w|=R\}) = \frac{n!}{R^n}\max_{|w-z|}|f|$$

הם כולם עוזרים לנו לקבל מידע על הפונקציות גם כשאנחנו לא יודעים עליהן כלום.

3.4 תוכיחי קיום/אי קיום