פתרון מטלה 10 — תורת ההסתברות 1, 80420

7 בינואר 2026

שאלה 1

תהיי $(Y_i)_{i=1}^{\infty}$ סדרה של משתנים מקריים בלתי־תלויים ושווי התפלגות כך ש־$Y_i \sim Unif([0,1])$ לכל i.
נגדיר סדרה נוספת של משתנים מקריים $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ על־ידי $X_i = Y_i Y_{i+1}$.

סעיף א'

נחשב את תוחלת X_i לכל i.

פתרון: נתון כי $(Y_i)_{i=1}^{\infty}$ היא סדרה של משתנים מקריים בלתי־תלויים ולכן

$$\mathbb{E}(X_i) = \mathbb{E}(Y_i Y_{i+1}) = \mathbb{E}(Y_i)\mathbb{E}(Y_{i+1})$$

כאשר ראינו כבר בהרצאה את התוחלת של משתנה מקרי אחיד על $[0,1]$:

$$\mathbb{E}(Y_i) = \int_0^1 y \cdot f(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^1 y \cdot 1\,\mathrm{d}y = \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{2}$$

ולכן

$$\mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

□

סעיף ב'

נחשב את השונות של X_i לכל i.

פתרון: שוב מהיות Y_i בלתי־תלויים מטענה שראינו גם בהפעלה של פונקציה רציפה עליהם האי־תלות נשמרת ולכן גם Y_i^2, Y_{i+1}^2 הם בלתי־תלויים ונקבל

$$\mathrm{Var}(X_i) = \mathbb{E}(X_i^2) - \mathbb{E}(X_i)^2 = \mathbb{E}(Y_i^2 Y_{i+1}^2) - \mathbb{E}(Y_i Y_{i+1})^2 = \mathbb{E}(Y_i^2)\mathbb{E}(Y_{i+1}^2) - \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

כאשר את $\mathbb{E}(Y_i^2)$ נחשב על־ידי טענה 8.31 – תוחלת של פונקציה של משתנה מקרי ונקבל

$$\mathbb{E}(Y_i^2) = \int_0^1 y^2\,\mathrm{d}y = \left[\frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{3}$$

ולכן

$$\mathrm{Var}(X_i) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{9} - \frac{1}{16} = \frac{7}{144}$$

בשביל השונות המשותפת עלינו להבחין ש־X_i, X_{i+1} בעלי שונות משותפת כי הם שניהם מסתמכים על Y_{i+1} כלומר לכל i מתקיים ש־X_i, X_{i+1} תלויים ולכל $j \neq i+1$ מתקיים X_i, X_j שהם בלתי־תלויים. ונחשב:

$$\mathrm{Cov}(X_i, X_{i+1}) = \mathbb{E}(X_i X_{i+1}) - \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_{i+1}) = \mathbb{E}(X_i X_{i+1}) - \frac{1}{16}$$

ונכתוב

$$X_i X_{i+1} = (Y_i Y_{i+1})(Y_{i+1} Y_{i+2}) = Y_i Y_{i+1}^2 Y_{i+2}$$

ולכן מהיות המשתנים המקריים בלתי־תלויים (כזכור הפעלת הפונקציה משמרת את האי־תלות)

$$\mathbb{E}(X_i X_{i+1}) = \mathbb{E}(Y_i Y_{i+1}^2 Y_{i+2}) = \mathbb{E}(Y_i)\mathbb{E}(Y_{i+1}^2)\mathbb{E}(Y_{i+2}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

ולכן

$$\mathrm{Cov}(X_i, X_{i+1}) = \frac{1}{12} - \frac{1}{16} = \frac{1}{48}$$

$\square$

סעיף ג'

נוכיח כי סדרת הממוצעים מקיימת

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{d} \mathbb{E}(X_i)$$