הכנה למבחן — משפטים והוכחות נבחרים — תורת המידה, 80517

25 בפברואר 2026

תוכן עניינים

1 מידה 4
1.1 תנאי מספיק בשביל פונקציה מדידה למרחב טופולוגי 4
1.2 תנאי שקול לפונקציה מדידה 5
1.3 מדידות נשמרת תחת הפעלת sup/inf/limsup/liminf 6
1.4 תכונות בסיסיות של מידה 7
2 אינטגרציה 8
2.1 לכל פונקציה מדידה יש סדרת פונקציות פשוטות שמתכנסת אליה 8
2.2 תכונות האינטגרל 9
2.3 משפט ההתכנסות המונוטונית 11
2.4 החלפת סדר אינטגרציה וסכום 12
2.5 קיום מידת אינטגרל 13
2.6 הלמה של פאטו 14
2.7 הלמה של בורל־קנטלי 15
2.8 משפט ההתכנסות הנשלטת 17
2.9 אי־שיוויון מרקוב 18
3 קבוצות ממידה אפס 19
3.1 סדרת פונקציות כמעט־תמיד 19
3.2 תנאים שקולים לשלמות 20
3.3 תנאי שקול לפונקציה אפסה כמעט־תמיד 21
3.4 טענה על ממוצעי פונקציה 22
4 משפט ההצגה של ריס 23
4.1 משפט ההצגה של ריס – יחידות 23
5 רגולריות ומידות רדון 24
5.1 תכונות מידת רדון על מרחב σ־קומפקטי 24
5.2 תנאים שגוררים שמידה היא מידת רדון 26
6 התכנסות חלשה-* 27
6.1 טענה מהמבחן 27
6.2 מידות הסתברות 28
7 דינמיקה 29
7.1 משפט Krylov–Bogolyubov 29
8 שלושת העקרונות של Littlewood 30
8.1 משפט לוזין 30
8.2 משפט אגרוב/אגורוף 31
9 מרחבי L^p 32
9.1 אי־שיוויון יאנסן 32
9.2 אי־שיוויון הולדר ואי־שיוויון מניקובסקי 33
9.3 $\mathcal{L}^p(\mu)$ הוא מרחב פסודו-נורמי מעל $\mathbb{C}$ 34
9.4 טענות חשובות מתרגילי הבית 35
9.5 לכל $p \in [1, \infty]$, המרחב הנורמי $\left(L^p(\mu), \|\cdot\|_p\right)$ הוא מרחב בנך 36
9.6 $L^p(\mu)$ צפופה ב־$\mathcal{S}$ 37
9.7 קירוב על־ידי פונקציות רציפות 38
10 יחסים בין מידות 39
10.1 טענה שקולה לרציפות בהחלט במרחב סופי 39
10.2 טענה שקולה לרציפות בהחלט במרחב σ־סופי 39
10.3 תנאי שקול למידת האפס 39
10.4 תנאי שקול לסינגולריות על מידות חיוביות 39

10.5 מסקנה מתרגילי הבית 39
11 מרחבי הילברט 40
11.1 משפט ההצגה של Riesz–Fréchet 40
11.2 אם μ איננה מידת האפס אז יש מידה סופית ששקולה לה 41
12 נגזרת רדון־ניקודים 42
12.1 משפט נגזרת רדון־ניקודים־לבג 42
12.2 איך מחשבים נגזרת רדון־ניקודים 44
13 גזירה של מידות רדון ב־$\mathbb{R}^d$ 45
13.1 מסקנות ממשפט הכיסוי של בסיקוביץ' 45
13.2 משפט לב הגזירה 46
13.3 משפט הגזירה של לבג־בסיקוביץ' 47
13.4 משפט הגזירה של לבג לפונקציה אינטגרבילית מקומית 49
13.5 משפט הגזירה של לבג (מהתרגול) 50
14 מרחבי מכפלה 51
14.1 משפט פוביני 51
14.2 תנאי שקול לפונקציה מדידה על מרחב מכפלה 52

1 מידה

1.1 תנאי מספיק בשביל פונקציה מדידה למרחב טופולוגי

משפט 1.1.1 (תנאי מספיק בשביל פונקציה מדידה למרחב טופולוגי): $(X,\mathcal{A})$ מרחב מדיד ו־(Y,τ) מרחב טופולוגי. אם $\mathbb{B}_Y:=\sigma(\tau)$ היא σ־אלגברת בורל על Y אז הפונקציה $f:(X,\mathcal{A})\to(Y,\mathbb{B}_Y)$ מדידה אם ורק אם המקור של כל קבוצה פתוחה ב־τ הוא מדיד, כלומר אם ורק אם לכל $U\in\tau$, $f^{-1}(U)\in\mathcal{A}$.

הוכחה: הכיוון הראשון נובע ישירות מהגדרת הפונקציה המדידה (כי מהגדרה בשביל שהפונקציה תהיה מדידה צריך שהמקור של כל קבוצה מדידה תחת f יהיה מדיד).

בכיוון השני, נסמן $\Omega:=\{E\subseteq Y \mid f^{-1}(E)\in\mathcal{A}\}$.

מההנחה, כל $U\in\tau$ מקיימת $f^{-1}(U)\in\mathcal{A}$ ולכן $\tau\subseteq\Omega$ ומטענה שראינו נובע ש־Ω היא σ־אלגברה.

מצד שני, σ־אלגברת בורל $\mathbb{B}_Y$ היא ה־σ־אלגברה הקטנה ביותר על Y שמכילה את τ ולכן $\sigma(\tau)=\mathbb{B}_Y\subseteq\Omega$ ולכן לכל $E\in\mathbb{B}_Y$ מתקיים $E\in\Omega$ כלומר $f^{-1}(E)\in\mathcal{A}$ ולכן f מדידה לפי $\mathbb{B}_Y$. □

1.2 תנאי שקול לפונקציה מדידה

משפט 1.2.1 (תנאי שקול לפונקציה מדידה): יהי $(X,\mathcal{A})$ מרחב מדיד ותהיי $f:X\to[-\infty,\infty]$.
אז f מדידה אם ורק אם $\forall\alpha\in\mathbb{R},\ f^{-1}((\alpha,\infty])\in\mathcal{A}$.

הוכחה: $\Leftarrow$ מיידי מהגדרה כי אם f מדידה לכל $E\in\mathbb{B}([-\infty,\infty])$ מתקיים $f^{-1}(E)\in\mathcal{A}$ ולכן בהינתן $\alpha\in\mathbb{R}$, מתקיים $(\alpha,\infty]\in\mathbb{B}([\infty,\infty])$ ובפרט $f^{-1}((\alpha,\infty])\in\mathcal{A}$.
$\Longrightarrow$ מספיק להראות שהמקור של כל אחת מהקבוצות

$$[-\infty,\beta)\qquad(\alpha,\infty]\qquad(\alpha,\beta)\qquad(\star)$$

הוא מדיד, ואכן:

1. בהינתן $\beta\in\mathbb{R}$ מתקיים

$$f^{-1}([-\infty,\beta))=\bigcup_{n=1}^{\infty}f^{-1}\left(\left[-\infty,\beta-\frac{1}{n}\right)\right)=\bigcup_{n=1}^{\infty}f^{-1}\left(\left(\beta-\frac{1}{n},\infty\right]^c\right)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(f^{-1}\left(\left(\beta-\frac{1}{n},\infty\right]\right)\right)^c\in\mathcal{A}$$

כאשר המעבר האחרון נובע מההנחה שלכל $\alpha\in\mathbb{R}$ מתקיים $f^{-1}((\alpha,\infty])$ ולכן לכל $n\in\mathbb{N}$ בפרט עבור $\alpha=\beta-\frac{1}{n}\in\mathbb{R}$ נקבל $f^{-1}\left(\left(\beta-\frac{1}{n},\infty\right]\right)\in\mathcal{A}$.
אבל $\mathcal{A}$ היא σ־אלגברה ולכן מצד אחד נקבל $\left(f^{-1}\left(\left(\beta-\frac{1}{n},\infty\right]\right)\right)^c$ לכל $n\in\mathbb{N}$ ומצד שני $\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(f^{-1}\left(\left(\beta-\frac{1}{n},\infty\right]\right)\right)^c\in\mathcal{A}$ לכל $\beta\in\mathbb{R}$, וזה סוגר את שני המקרים הימניים.

2. בהינתן $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

$$f^{-1}((\alpha,\beta))=f^{-1}([-\infty,\beta)\cap(\alpha,\infty])=f^{-1}([-\infty,\beta))\cap f^{-1}((\alpha,\infty])\in\mathcal{A}$$

כאשר המעבר האחרון נובע מכך ש־σ־אלגברה סגורה לחיתוכים סופיים.

כעת, אם $U\subseteq[-\infty,\infty]$ היא איחוד בן־מנייה של קבוצות מהצורה $(\star)$ וכי קבוצה פתוחה ב־$[-\infty,\infty]$ אזי $U=\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n$ כאשר לכל $n\in\mathbb{N}$, I_n הוא מהצורה של $(\star)$ ונקבל

$$f^{-1}(U)=f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n\right)=\bigcup_{n=1}^{\infty}f^{-1}(I_n)\in\mathcal{A}$$

כלומר המקור של כל קבוצה פתוחה הוא מדיד ולכן f מדידה. $\square$

1.3 מדידות נשמרת תחת הפעלת sup/inf/limsup/liminf

משפט 1.3.1 (מדידות נשמרת תחת הפעלת sup/inf/limsup/liminf): יהי $(X,\mathcal{A})$ מרחב מדידה. אם $\{f_n : X \to [-\infty,\infty]\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות מדידות, אז הפונקציות

$$(1)\ \sup_{n\in\mathbb{N}}\{f_n\} \qquad (2)\ \inf_{n\in\mathbb{N}}\{f_n\} \qquad (3)\ \limsup_{n\to\infty} f_n \qquad (4)\ \liminf_{n\to\infty} f_n$$

כולן מדידות.

הוכחה: (1) נסמן $g := \sup_{n\in\mathbb{N}}\{f_n\}$, ומספיק להראות שהקבוצה $g^{-1}((a,\infty])$ היא מדידה לכל $\alpha \in \mathbb{R}$, אז נרצה להראות

$$(\star)\ g^{-1}((\alpha,\infty)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}((a,\infty])$$

$\subseteq$: אם $x \in g^{-1}((\alpha,\infty])$ אז

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\{f_n(x)\} = g(x) \in (\alpha,\infty] > \alpha$$

כלומר קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש־$f_{n_0}(x) > \alpha$ (אחרת לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $f_n(x) \le \alpha$ וזו סתירה) אז

$$x \in f_{n_0}^{-1}((\alpha,\infty]) \Longrightarrow x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}((\alpha,\infty]) \Longrightarrow g^{-1}((\alpha,\infty]) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}((\alpha,\infty])$$

$\supseteq$: אם $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}((\alpha,\infty])$ אז קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש־$x \in f_n^{-1}((\alpha,\infty])$ ולכן $f_{n_0}(x) \in (\alpha,\infty]$ כלומר $f_{n_0}(x) > \alpha$ ומתקיים

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\{f_n(x)\} \ge f(n_0)(x) > \alpha \Longrightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}}\{f_n(x)\} > \alpha \Longrightarrow g(x) \in (\alpha,\infty] \Longrightarrow x \in g^{-1}((\alpha,\infty])$$

אז $(\star)$ נכון ולכן f_n מדידה לכל $n \in \mathbb{N}$ ולכן $f_n^{-1}((\alpha,\infty])$ מדידה לכל $n \in \mathbb{N}$, כלומר הקבוצה $g^{-1}((\alpha,\infty])$ היא איחוד בן־מנייה של קבוצות מדידות ולכן מדידה בעצמה וקיבלנו שהפונקציה g מדידה.
(2) זהה עבור קטעים מהצורה $[-\infty,\beta]$.
(3)

$$\limsup_{n\to\infty} f_n = \inf_{k\in\mathbb{N}}\left\{\sup_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\ge k}}\{f_n\}\right\}$$

ולכן עבור סדרת הפונקציות $\{h_k : X \to [-\infty,\infty]\}_{k=1}^{\infty}$ המוגדרת על־ידי

$$\forall k \in \mathbb{N},\ h_k := \sup_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\ge k}}\{f_n\}$$

מתקיים מ־(1) ש־$\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות מדידות ונקבל מ־(2) ש־$\inf_{k\in\mathbb{N}}\{h_k\}$ מדידה ולכן $\limsup_{n\to\infty} f_n$ מדידה.
(4) באותו אופן למקרה הקודם רק עבור

$$\liminf_{n\to\infty} f_n = \sup_{k\in\mathbb{N}}\left\{\inf_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\ge k}}\{f_n\}\right\}$$

$\square$

1.4 תכונות בסיסיות של מידה

משפט 1.4.1 (תכונות בסיסיות של מידה): אם $\mu : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ היא מידה על מרחב מדיד $(X,\mathcal{A})$ אזי

1. $\mu(\emptyset)=0 \iff \mu \not\equiv \infty$
2. **אדטיביות סופית:** לכל אוסף סופי זר בזוגות $(E_i)_{i=1}^n \subseteq \mathcal{A}$ מתקיים $\mu\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu(E_i)$
3. **מונוטוניות ביחס להכלה:** אם $A \subseteq B \in \mathcal{A}$ מדידות אזי $\mu(A) \le \mu(B)$
4. **רציפות לסדרות עולות:** תהיי $(A_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{A}$ סדרה עולה של קבוצות מדידות אזי $\mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) = \lim_{n\to\infty}\mu(A_n)$
5. **רציפות לסדרות יורדות:** תהיי $(C_n)_{n=1}^\infty$ סדרה יורדת של סדרות מדידות. אם $\mu(C_1) < \infty$ אזי $\mu\left(\bigcap_{n=1}^\infty C_n\right) = \lim_{n\to\infty}\mu(C_n)$
6. **σ־תת אדטיביות:** אם $(A_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{A}$ אוסף כלשהו של קבוצות מדידות אזי $\mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) \le \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n)$

הוכחה:

1. כיוון אחד נובע מהגדרת המידה, מהכיוון השני נובע שיש $A \in \mathcal{A}$ עם $\mu(A) < \infty$ ולכן ניתן להחסיר זאת, כלומר

$$\cancel{\mu(A)} = \mu\left(A \dot\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \emptyset\right) \underset{\text{הקבוצה הריקה זרה לעצמה}}{\overset{\sigma\text{־אדטיביות}}{=}} \cancel{\mu(A)} + \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(\emptyset) = 0$$

2. באופן דומה לסעיף הקודם נשרשר $\emptyset$ עם σ־אדטיביות וסיימנו

3. $$\mu(B) = \mu((B\setminus A)\,\dot\cup\, A) = \mu(B\setminus A) + \mu(A) \ge \mu(A)$$

4. נסמן $B_1 = E_1$ ולכל $n \in \mathbb{N}$ נגדיר $B_{n+1} = A_{n+1} \setminus A_n$ אזי $(B_n)_{n=1}^\infty$ סדרה של קבוצות מדידות וזרות בזוגות ולכל N מתקיים $\bigcup_{n=1}^N A_n = A_N = \dot\bigcup_{n=1}^N B_n$ ו־$\dot\bigcup_{n=1}^\infty B_n = \bigcup_{n=1}^\infty$ ולכן

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) = \mu\left(\dot\bigcup_{n=1}^\infty B_n\right) = \sum_{n=1}^\infty \mu(B_n) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^N \mu(B_n) = \lim_{N\to\infty}\mu\left(\bigcup_{n=1}^N A_n\right)$$

5. נסמן $D_n = C_n \setminus C_{n+1}$ ולכן $C_1 = \dot\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n \dot\bigcup \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$ ומהאדטיביות סופית והעברת אגפים (שאפשר מהסופיות) נקבל

$$\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n\right) = \mu(C_1) - \mu\left(\dot\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n\right) = \mu(C_1) - \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(D_n) = \lim_{N\to\infty} \mu(C_1) - \mu\left(\dot\bigcup_{n=1}^N D_n\right) = \lim_{N\to\infty}\mu(C_{N+1})$$

שכן $C_1 \setminus \dot\bigcup_{n=1}^N D_n = C_{N+1}$

6. זה בעצם אי־שיוויון בול מהסתברות רק על מרחבי מידה כלליים: נגדיר $B_1 = A_1, B_{n+1} = B_{n+1} \setminus \bigcup_{m=1}^n A_n$.
אז B_n זרים בזוגות, $B_n \subseteq A_n$ ו־$\dot\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ ומתקיים

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \mu\left(\dot\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

□

2 אינטגרציה

2.1 לכל פונקציה מדידה יש סדרת פונקציות פשוטות שמתכנסת אליה

משפט 2.1.1 (לכל פונקציה מדידה יש סדרת פונקציות פשוטות שמתכנסת אליה)**:** אם $f : X \to [0, \infty]$ פונקציה מדידה כלשהי, אז קיימת סדרת פונקציות פשוטות $\{s_n\} \mid X \to [0, \infty)_{n=1}^{\infty}$ כך שמתקיים

1. $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית עולה וחסומה על־ידי f, כלומר

$$\forall n, m \in \mathbb{N},\ m \leq n \Longrightarrow 0 \leq s_m \leq s_n \leq f$$

2. הסדרה $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת נקודתית ל־f, כלומר

$$\forall x \in X,\ s_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$$

הוכחה: נגדיר $\varphi_n : [0, \infty) \to [0, \infty)$ על־ידי

$$\forall x \in [0, \infty),\ \varphi_n(x) := \begin{cases} 2^{-n} \cdot \lfloor 2^n \cdot x \rfloor & 0 \leq x < n \\ n & x \geq n \end{cases}$$

אז לכל $n \in \mathbb{N}$, φ_n היא צירוף לינארי של פונקציות מהצורה $\mathbb{1}_{\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}}$ לכל $0 \leq k \leq n \cdot 2^n - 1$ ולכן היא מדידה בורל ביחס ל־$[0, \infty)$ ולכן תמונתה סופית ו־φ_n היא פונקציה פשוטה.
לכל $x \in [0, n]$ ולכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$\lfloor 2^n x \rfloor \leq 2^n x < \lfloor 2^n x \rfloor + 1 \Longleftrightarrow 2^{-n} \lfloor 2^n x \rfloor \leq x < 2^{-n}(\lfloor 2^n x \rfloor + 1)$$

כלומר

$$\varphi_n(x) \leq x < \varphi_n(x) + 2^{-n} \Longleftrightarrow \varphi_n(x) \leq x \wedge x < \varphi_n(x) + 2^{-n} \Longleftrightarrow x \geq \varphi_n(x) \wedge \varphi_n(x) > x - 2^{-n} \Longleftrightarrow x - 2^{-n} < \varphi_n(x) \leq x$$

ולכן $x - 2^{-n} < \varphi_n(x) \leq x$ לכל $n \in \mathbb{N}, x \in [0, n]$ ומכאן הרי ש־$\varphi_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ לכל $x \in [0, n]$ וכן לכל $x \in [0, \infty)$ מתקיים

$$\forall n, m \in \mathbb{N},\ n \leq m \Longrightarrow \varphi_n \leq \varphi_m \leq x$$

ולכן $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית עולה ואם לכל $n \in \mathbb{N}$ נגדיר $s_n := \varphi_n \circ f$ נקבל את הטענה שכן הרכבת פונקציות מדידות היא פונקציה מדידה, אז $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ מקיימת את הנדרש. $\square$

2.2 תכונות האינטגרל

משפט 2.2.1 (תכונות האינטגרל): תהיינה $f,g:X\to[0,\infty]$ פונקציות מדידות ותהיינה $A,B,E\in\mathcal{E}$ מדידות.
האינטגרל של f,g ביחס ל־μ מקיים את התכונות הבאות

1. מונטוניות של f,g: אם $0\le f\le g$ אזי $0\le\int_A f\,\mathrm{d}\mu\le\int_A g\,\mathrm{d}\mu$
2. מונטוניות ביחס להכלה: אם $0\le f$ ו־$A\subseteq B$ אזי $\int_A f\,\mathrm{d}\mu\le\int_B f\,\mathrm{d}\mu$
3. הומוגניות: אם $0\le f$ ו־$c\in[0,\infty)$ אזי $\int_A c\cdot f\,\mathrm{d}\mu=c\cdot\int_A f\,\mathrm{d}\mu$
4. אם $f|_E\equiv 0$ אזי $\int_E f\,\mathrm{d}\mu=0$ (גם אם $\mu(E)=\infty$)
5. אינטגרציה על קבוצות ממידה אפס: אם $\mu(E)=0$ אזי $\int_E f\,\mathrm{d}\mu=0$ (גם אם $f|_E\equiv\infty$)
6. אינטגרציה על קבוצה בניסוח עם הפונקציה המציינת: אם $0\le f$ אזי $\int_E f\,\mathrm{d}\mu=\int_X f\cdot\mathbb{1}_E\,\mathrm{d}\mu$
7. אינטגרציה על איחוד זר: אם $A\cap B=\emptyset$ אזי $\int_{A\cup B} f\,\mathrm{d}\mu=\int_A f\,\mathrm{d}\mu+\int_B\mathrm{d}\mu$

מוסכמה:

$$\forall\alpha\in\mathbb{R},\ \alpha+\infty=\infty,\ \infty-\infty=\infty$$

$$\forall\alpha\in\mathbb{R}^+,\ \alpha\cdot\infty=\infty,\ 0\cdot\infty=0$$

הוכחה:

1. בלי הגבלת הכלליות, $E=X$ אחרת ניקח לכל $E\in\mathcal{A}$, $f\cdot\mathbb{1}_E,g\cdot\mathbb{1}_E$ ועדיין נחשב אינטגרציה על כל X ונקבל מהגדרה

$$\int fd\mu=\sup\left\{\int_E sd\mu\mid 0\le s\le f,\ \text{פשוטה } s\right\}$$

מהיות $0\le f\le g$ נובע גם שלכל s כזאת מתקיים $0\le s\le g$ ולכן מתקיים

$$\left\{\int_E sd\mu\mid 0\le s\le f,\ \text{פשוטה } s\right\}\subseteq\left\{\int_E sd\mu\mid 0\le s\le g,\ \text{פשוטה } s\right\}$$

ובפרט בלקיחת סופרמום

$$\int fd\mu=\sup\left\{\int_E sd\mu\mid 0\le s\le f,\ \text{פשוטה } s\right\}\le\sup\left\{\int_E sd\mu\mid 0\le s\le g,\ \text{פשוטה } s\right\}=\int gd\mu$$

2. יהי $x\in X$.
אם $x\in A$ אז $\mathbb{1}_A(x)=1$ ומהנתון $A\subseteq B$ מתקיים $\mathbb{1}_B(x)=1$.
אם $x\notin A$ אזי $\mathbb{1}_A(x)=0$ ויש שתי אפשרויות: או ש־$x\in B$ או ש־$x\notin B$, כלומר או ש־$\mathbb{1}_B(x)=1$ או ש־$\mathbb{1}_B(x)=0$.
בין כה וכה, מכך ש-$A\subseteq B$ נובע כי בהתאמה מתקיים $\mathbb{1}_A(x)\le\mathbb{1}_B(x)$ לכל $x\in X$.
בפרט נובע מכך שלכל $x\in X$ מתקיים $f\cdot\mathbb{1}_A(x)\le f\cdot\mathbb{1}_B(x)$ והם בהתאמה מתאימים מהגדרה ל־$\int_A fd\mu,\int_B fd\mu$.
מהסעיף הקודם נובע אם כך ש־$\int_A fd\mu\le\int_B fd\mu$ (הסעיף הקודם הוא מונוטוניות האינטגרל) עבור $E=X$.

3. תהיי $E\in\mathcal{A}$, ותהיי $s\le f$ פונקציה פשוטה כך שמתקיים $s=\sum_{i=1}^n\alpha_i\mathbb{1}_{E_i}$ עם $\alpha_i\ge0$ ו־$\{E_i\}$ קבוצות זרות בזוגות ומדידות ב־E.
ראינו שמתקיים $\int_E sd\mu=\sum_{i=1}^n\alpha_i\mu(E_i)$ ונבחין שגם cs היא פונקציה פשוטה שכן

$$cs(x)=\sum_{i=1}^n(c\alpha_i)\mathbb{1}_{E_i}(x)\Longrightarrow\int_E cs(x)d\mu=\sum_{i=1}^n(c\alpha_i)\mu(E_i)=c\sum_{i=1}^n\alpha i\mu(E_i)=c\int_E sd\mu$$

נסמן מהגדרה

$$\int_E fd\mu=\sup\left\{\int_E sd\mu\mid 0\le s\le f,\ \text{פשוטה } s\right\}=:S_f\qquad\int_E cfd\mu=\sup\left\{\int_E pd\mu\mid 0\le p\le cf,\ \text{פשוטה } p\right\}=:S_{cf}$$

נשים לב שלכל $0\le p\le cf$, אם $c>0$ אז אם נגדיר פונקציה פשוטה $0\le s'=\frac{p}{c}\le f$ ומתקיים ממה שראינו לעיל,

$$\int_E pd\mu=\int_E csd\mu=c\int_E d\mu$$

זה נכון לכל p פשוטה כזאת ולכן

$$S_{cf} = \sup\left\{ c\int_E sd\mu \mid 0 \le s \le f,\ \text{פשוטה } s \right\} \underset{\text{מכפלה עם סופרמה אי־שלילית}}{=} c\cdot\sup\left\{ \int_E sd\mu \mid 0 \le s \le f,\ \text{פשוטה } s \right\} = c\cdot S_f$$

אם $c = 0$, אנחנו רוצים להראות

$$\int_E 0\cdot f\mu = 0\cdot\int_E fd\mu$$

בצד שמאל יש לנו פשוט את הפונקציה $g \equiv 0$ וזאת כמובן פונקציה פשוטה ולכן

$$\int_E 0d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i\mu(E_i) = \sum_{i=1}^n 0\mu(E_i) = 0$$

מצד שני, יש לנו $0\cdot\int_E fd\mu$ שתמיד כמובן שווה לאפס בזכות הקונבנציה $0\cdot\infty = 0$.

4. תהיי $s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ פונקציה פשוטה ואם נסתכל על E אזי $0 \le s \le f$ וכן $f|_E \equiv 0$ ולכן על E, $s(x) = 0$ לכל $x \in E$ ומהגדרה

$$\int_E s\,\mathrm{d}\mu = \sum \alpha_i\mu(A_i\cap E)$$

ולכן אם $A_i \cap E$ לא ריקה אז המקדמים α_i חייבים להיות אפסים ולכן הסכום הוא בידיוק 0; מהגדרת אינטגרל לבג

$$\int_E f\,\mathrm{d}\mu = \sup\left\{ \int_E s\,\mathrm{d}\mu \mid 0 \le s \le f, \text{פשוטה } s \right\}$$

אבל לכל פשוטה הנימוק לעיל תקף כלומר האינטגרל על כל הקבוצה הוא 0 ולכן $\int_E f\,\mathrm{d}\mu = 0$ (ניזכר כי $0\cdot\infty = 0$ ולכן גם הסוגריים נכונים).

5. תהיי $0 \le s \le f$ פונקציה פשוטה $s = \sum_{i=1}^n \alpha_i\mathbb{1}_{A_i}$ ומהגדרת האינטגרל

$$\int_E s\,\mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i\cdot\mu(A_i\cap E)$$

אבל $\mu(E) = 0$ ו־$A_i \cap E \subseteq E$ ולכן ממונטוניות, $\mu(A_i\cap E) = 0$ כלומר $\int_E s\,\mathrm{d}\mu = 0$; זה נכון לכל פונקציה פשוטה ולכן מהגדרת האינטגרל מתקיים $\int_E f\,\mathrm{d}\mu = 0$ (אפשר וצריך לסיים עם משפט ההתכנסות המונוטונית ועם $\{s_n\}_{n=1}^\infty$ פשוטות כך ש־$s_n \nearrow f$)

6. מתקיים

$$\int_E \mathbb{1}_A\,\mathrm{d}\mu = \mu(A\cap E)$$

אבל $\mathbb{1}_A\cdot\mathbb{1}_E = \mathbb{1}_{A\cap E}$ ולכן

$$\int_X \mathbb{1}_A\cdot\mathbb{1}_E\,\mathrm{d}\mu = \int_X \mathbb{1}_{A\cap E}\,\mathrm{d}\mu = \mu(A\cap E)$$

אז הטענה נכונה לאינדיקטורים; תהיי $s = \sum_{i=1}^n \alpha_i\mathbb{1}_{A_i}$ פונקציה פשוטה, אז

$$\int_E s\,\mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i\int_E \mathbb{1}_{A_i}\,\mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i\int_X \mathbb{1}_{A_i}\cdot\mathbb{1}_E\,\mathrm{d}\mu = \int_X\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\mathbb{1}_{A_i}\right)\cdot\mathbb{1}_E\,\mathrm{d}\mu = \int_X s\cdot\mathbb{1}_E\,\mathrm{d}\mu$$

והטענה נכונה לפונקציות פשוטות; לבסוף, נשתמש במשפט ההתכנסות המונוטונית שכן יש $\{s_n\}_{n=1}^\infty$ פשוטות כך ש־$s_n \nearrow f$ נקודתית ונקבל

$$\int_E f\,\mathrm{d}\mu = \int_E\left(\lim_{n\to\infty} s_n\right)\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty}\int_E s_n\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty}\int_X s_n\cdot\mathbb{1}_E\,\mathrm{d}\mu = \int_X\left(\lim_{n\to\infty} s_n\cdot\mathbb{1}_E\right)\mathrm{d}\mu = \int_X f\cdot\mathbb{1}_E\,\mathrm{d}\mu$$

7. מתקיים $\mathbb{1}_{A\uplus B}(x) = \mathbb{1}_A(x) + \mathbb{1}_B(x)$ ולכן מהפעלת הסעיף הקודם פעמיים בקצוות

$$\int_{A\uplus B} f\,\mathrm{d}\mu = \int_X f\cdot\mathbb{1}_{A\uplus B}\,\mathrm{d}\mu = \int_X f\cdot(\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B)\,\mathrm{d}\mu \underset{\text{לינאריות}}{=} \int_X f\cdot\mathbb{1}_A\,\mathrm{d}\mu + \int_X f\cdot\mathbb{1}_B\,\mathrm{d}\mu = \int_A f\,\mathrm{d}\mu + \int_B f\,\mathrm{d}\mu$$

□

2.3 משפט ההתכנסות המונוטונית

משפט 2.3.1 (משפט ההתכנסות המונוטונית): יהי $(X, \mathcal{A}, \mu)$ מרחב מידה ותהיי $\{f_n \mid X \to [0, \infty]\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות מדידות.
אם $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית עולה, אזי הפונקציה

$$f \coloneqq \lim_{n\to\infty} f_n = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{f_n\}$$

מקיימת

$$\forall A \in \mathcal{A} \qquad \int_A f \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n \, \mathrm{d}\mu \Longrightarrow \forall A \in \mathcal{A} \qquad \int_A \lim_{n\to\infty} f_n \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n \, \mathrm{d}\mu$$

הוכחה: נוכיח עבור $A = X$ ואז להתבונן ב-$g_n = f_n \mathbb{1}_A$ ולהסיק את המקרה הכללי.
ממונוטוניות האינטגרל $\int f \, \mathrm{d}\mu \geq \cdots \geq \int f_2 \, \mathrm{d}\mu \geq \int f_1 \, \mathrm{d}\mu \geq 0$ ולכן $\alpha = \sup_n \int f_n \, \mathrm{d}\mu$ יקיים $\alpha \leq \int f \, \mathrm{d}\mu$ ונרצה להראות $\alpha \geq \int f \, \mathrm{d}\mu$.
נראה שלכל $0 \leq s \leq f$ פשוטה מתקיים $\int s \, \mathrm{d}\mu \leq \alpha$: תהיי $0 \leq s \leq f$ פשוטה ונקבע $0 < c < 1$, נסמן $E_n \coloneqq \{x \in X \mid f_n(x) \geq cs(x)\}$ ו-$E_n \nearrow X$ כלומר זוהי סדרה עולה של קבוצות מדידות שאיחודן הוא כל X.
מרציפות המידה לסדרות עולות נסיק כי לכל $A \in \mathcal{A}$

$$\mu(A \cap E_n) \underset{(\star)}{\to} \mu(A \cap (\cup E_n)) = \mu(A)$$

s פשוטה ולכן $s = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ ולכל n מתקיים

$$\alpha \geq \int f_n \, \mathrm{d}\mu \geq \int_{E_n} f_n \, \mathrm{d}\mu \geq c \cdot \int_{E_n} s \, \mathrm{d}\mu = c \cdot \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(A_i \cap E_n) \underset{(\star)}{\to} c \cdot \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(A_i) = c \cdot \int s \, \mathrm{d}\mu$$

$\square$

2.4 החלפת סדר אינטגרציה וסכום

משפט 2.4.1 (החלפת סדר אינטגרציה וסכום): יהי $(X,\mathcal{A},\mu)$ מרחב מידה. אם $\{f_n \mid X\to[0,\infty]\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות מדידות, אזי

$$\int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\int_X f_n \,\mathrm{d}\mu$$

הוכחה: באינדוקציה על $N\in\mathbb{N}$.

מקרה בסיס הוא אדטיביות האינטגרל עבור $N=2$ (עבור $N=1$ הטענה טריוויאלית): תהיינה $s,t:X\to[0,\infty]$ פונקציות פשוטות כלשהן כאשר

$$s=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mathbb{1}_{A_i}\qquad t=\sum_{j=1}^{m}\beta_j\mathbb{1}_{B_j}$$

עבור $\{A_i\}_{i=1}^{n},\{B_j\}_{j=1}^{m}$ הן חלוקות של X ומתקיים

1. $\{A_i\cap B_j\}_{(i,j)\in[n\times m]}$ חלוקה של X
2. לכל $j\in[m]$ מתקיים $\dot{\bigcup}_{i=1}^{n}A_i\cap B_j=B_j$ כי $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ חלוקה של X
3. לכל $i\in[n]$ מתקיים $\dot{\bigcup}_{j=1}^{m}A_i\cap B_j=A_i$ כי $\{B_j\}_{j=1}^{m}$ חלוקה של X

מאדטיביות סופית של מידה נקבל

$$\sum_{j=1}^{m}\mu(A_i\cap B_j)\overset{(\star)}{=}\mu(A_i)\qquad \sum_{i=1}^{n}\mu(A_i\cap B_j)\overset{(\star\star)}{=}\mu(B_j)$$

אבל גם $s+t$ היא פונקציה פשוטה שכן

$$s+t=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(\alpha_i+\beta_j)\mathbb{1}_{A_i\cap B_j}$$

ולכן

$$\int_X (s+t)\,\mathrm{d}\mu=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(\alpha_i+\beta_j)\cdot\mu(A_i\cap B_j)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\cdot\sum_{j=1}^{m}\mu(A_j\cap B_j)+\sum_{j=1}^{m}\beta_j\cdot\sum_{i=1}^{n}\mu(A_i\cap B_j)$$
$$\underset{(\star),(\star\star)}{=}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\cdot\mu(A_i)+\sum_{j=1}^{m}B_j\cdot\mu(B_j)=\int_X s\,\mathrm{d}\mu+\int_X t\,\mathrm{d}\mu$$

אז הטענה נכונה עבור פונקציות פשוטות.

תהיינה $f_1,f_2\in\{f_n \mid X\to[0,\infty]\}_{n=1}^{\infty}$ מדידות ותהיינה $\{s_n\}_{n=1}^{\infty},\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרות עולות של פונקציות פשוטות כך שמתקיים

$$s_n\xrightarrow[n\to\infty]{}f_1\qquad t_n\xrightarrow[n\to\infty]{}f_2\ \text{(התכנסות נקודתית)}$$

ומאריתמטיקה של גבולות נקבל $s_n+t_n\xrightarrow[n\to\infty]{}f_1+f_2$ כאשר זו התכנסות עולה לכן לפי משפט ההתכנסות המונוטונית

$$\int_X(f_1+g_2)\,\mathrm{d}\mu=\lim_{n\to\infty}\int_X(s_n+t_n)\,\mathrm{d}\mu=\lim_{n\to\infty}\left(\int_X s_n\,\mathrm{d}\mu+\int_X t_n\,\mathrm{d}\mu\right)=\lim_{n\to\infty}\int_X s_n\,\mathrm{d}\mu+\lim_{n\to\infty}\int_X t_n\,\mathrm{d}\mu$$
$$=\int_X f_1\,\mathrm{d}\mu+\int_X f_2\,\mathrm{d}\mu$$

וזה מראה את בסיס האינדוקציה.

בשביל לסיים את האינדוקציה נשים לב $\sum_{n=1}^{N}f_n\xrightarrow[N\to\infty]{}\sum_{n=1}^{\infty}f_n$ נקודתית כאשר הסדרה $\left\{\sum_{n=1}^{N}f_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה מונוטונית עולה ולכן ממשפט ההתכנסות המונוטוניות נקבל את הטענה, כנדרש. □

2.5 קיום מידת אינטגרל

משפט 2.5.1 (קיום מידת אינטגרל): יהי $(X, \mathcal{A}, \mu)$ מרחב מידה.
אם $h : X \to [0, \infty]$ מדידה אזי הפונקציה $\nu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ המוגדרת על־ידי

$$\forall E \in \mathcal{A},\ \nu(E) = \int_E h \, \mathrm{d}\mu$$

היא מידה על $(X, \mathcal{A})$ ובמקרה זה נסמן $\mathrm{d}\nu := h \, \mathrm{d}\mu$ ויתר על־כן מתקיים

$$\int_X g \, \mathrm{d}\nu = \int_X g \cdot h \, \mathrm{d}\mu$$

לכל $g : X \to [0, \infty]$ מדידה.

הוכחה: בשביל להראות מידה עלינו להראות ש־ν אינה קבועה אינסוף ושהיא σ אדטיבית: ואכן, $\nu(\emptyset) = 0$ ושנית תהיי $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת כלשהי של קבוצות מדידות זרות בזוגות ונסמן $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ ואז

$$(\star)\ \mathbb{1}_E = \mathbb{1}_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{E_n}$$

ולכן

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} {}^{\cdot}\, E_n\right) = \nu(E) \underset{\text{הגדרה}}{=} \int_E h \, \mathrm{d}\mu = \int_X h \mathbb{1}_E \, \mathrm{d}\mu \underset{(\star)}{=} \int_X h \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{E_n} \, \mathrm{d}\mu$$
$$= \int_X \sum_{n=1}^{\infty} h \cdot \mathbb{1}_{E_n} \, \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X h \cdot \mathbb{1}_{E_n} \, \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} h \, \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n)$$

ולכן ν מידה על $(X, \mathcal{A})$.
עבור החלק השני, תהיי $s = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbb{1}_{E_i}$ פונקציה פשוטה, אז

$$\int_X s \, \mathrm{d}\nu = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \nu(E_i) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \int_{E_i} h \, \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{k} \int_{E_i} \alpha_i h \, \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{k} \int_X \alpha_i \mathbb{1}_{E_i} h \, \mathrm{d}\mu$$
$$= \int_X \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbb{1}_{E_i} h \, \mathrm{d}\mu = \int_X h \cdot \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbb{1}_{E_i} \, \mathrm{d}\mu = \int_X h \cdot s \, \mathrm{d}\mu$$

אז עבור g מדידה כלשהי ניקח $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה עולה של פונקציות פשוטות כך ש־$s_n \xrightarrow[n\to\infty]{} g$ ונקבל ממשפט ההתכנסות המונוטוניות על מרחב המידה $(X, \mathcal{A}, \nu)$ שמתקיים

$$\int_X g \, \mathrm{d}\nu = \lim_{n\to\infty} \int_X s_n \cdot h \, \mathrm{d}\mu = \int_X g \cdot h \, \mathrm{d}\mu$$

כי $\{s_n \cdot h\}_{n=1}^{\infty}$ היא עולה ו־$s_n \cdot h \xrightarrow[n\to\infty]{} g \cdot h$. □

2.6 הלמה של פאטו

משפט 2.6.1 (הלמה של פאטו): יהי $(X,\mathcal{A},\mu)$ מרחב מידה. אם $\{f_n : X\to[0,\infty]\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות מדידות כלשהי, אזי

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu \le \liminf_{n\to\infty}\int_X f_n \,\mathrm{d}\mu$$

הוכחה: לכל $k\in\mathbb{N}$ נסמן $g_k := \inf_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\ge k}}\{f_n\}$ אזי הסדרה $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית עולה ואי־שלילית.
ממשפט ההתכנסות המונוטונית נקבל

$$\int_X \lim_{k\to\infty} g_k \,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty}\int_X g_k \,\mathrm{d}\mu$$

ומתקיים מהגדרה

$$\lim_{k\to\infty} g_k = \lim_{k\to\infty}\inf_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\ge k}}\{f_n\} = \liminf_{n\to\infty} f_n$$

וביחד

$$(\star)\ \ \int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty}\int_X g_k \,\mathrm{d}\mu$$

מצד שני

$$\forall k\in\mathbb{N},\ \ g_k = \inf_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\ge k}}\{f_n\} \le f_k \Longrightarrow g_k \le f_k$$

ממונוטוניות האינטגרל נקבל

$$\forall k\in\mathbb{N},\ \ a_k := \int_X g_k \,\mathrm{d}\mu \le \int_X f_k \,\mathrm{d}\mu =: b_k$$

אז לכל $k\in\mathbb{N}$ מתקיים $a_k\le b_k$ וכן מ־$(\star)$ נובע כי $\lim_{k\to\infty} a_k$ קיים ונקבל

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu \underset{(\star)}{=} \lim_{k\to\infty}\int_X g_k \,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} a_k \le \liminf_{k\to\infty} b_k = \liminf_{k\to\infty}\int_X f_k \,\mathrm{d}\mu \Longrightarrow \int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu \le \liminf_{k\to\infty}\int_X f_k \,\mathrm{d}\mu$$

□

2.7 הלמה של בורל־קנטלי

משפט 2.7.1 (הלמה של בורל־קנטלי): יהי $(X,\mathcal{A},\mu)$ מרחב מידה ותהיי $\mathcal{A} \supseteq (E_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה של קבוצות מדידות כך שמתקיים

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)<\infty$$

אז

$$\mu\left(\limsup_{n\to\infty}E_n\right)=0$$

הוכחה: ממונוטוניות המידה והגדרת החיתוך

$$\limsup_{n\to\infty}E_n=\bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=i}^{\infty}E_j\Longrightarrow\mu\left(\limsup_{n\to\infty}E_n\right)=\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty}E_j\right)\underset{\forall i\in\mathbb{N}}{\leq}\mu\left(\bigcup_{j=i}^{\infty}E_j\right)\underset{\text{תת-אדטיביות המידה}}{\leq}\sum_{j=i}^{\infty}\mu\left(E_j\right)<\infty$$

כאשר המעבר האחרון נובע מההנחה ומטור זנב ולכן $\lim_{i\to\infty}\sum_{n=i}^{\infty}\mu(E_n)=0$, כלומר $\mu(\limsup_{n\to\infty}E_n)\leq 0$.
אבל μ מידה ולכן $0\leq\mu(\limsup_{n\to\infty}E_n)$ כלומר $\mu(\limsup_{n\to\infty}E_n)=0$. □

משפט 2.7.2 (אי־שוויון המשולש האינטגרלי): אם $f \in L^1(\mu)$ אזי $\left|\int_X f \,\mathrm{d}\mu\right| \leq \int_X |f| \,\mathrm{d}\mu$.

הוכחה: $\int_X f \,\mathrm{d}\mu \in \mathbb{C}$ ולכן קיים $\alpha \in \mathbb{C}$ עם $|\alpha| = 1$ עבורו מתקיים $\left|\int_X f \,\mathrm{d}\mu\right| \in \mathbb{R}$ $= \alpha \int_X f \,\mathrm{d}\mu$ $(\star)$.
נקבל אם־כך

$$\begin{aligned}
\left|\int_X f \,\mathrm{d}\mu\right| &= \alpha \int_X f \,\mathrm{d}\mu \\
&= \underbrace{\int_X \alpha f \,\mathrm{d}\mu}_{\in\mathbb{R}} \\
&= \int_X Re(\alpha f) \,\mathrm{d}\mu + i \cancel{\int_X Im(\alpha f) \,\mathrm{d}\mu} \\
&= \int_X Re(\alpha f) \,\mathrm{d}\mu \\
&\leq \int_X |Re(\alpha f)| \,\mathrm{d}\mu \\
&\leq \int_X |\alpha f| \,\mathrm{d}\mu = \int_X |f| \,\mathrm{d}\mu
\end{aligned}$$

הערה: שכן אם נסמן $z = \int_X f \,\mathrm{d}\mu$ אז אם $z = 0$ אז $\alpha z = |z| \in \mathbb{R}$ לכל $\alpha \in \mathbb{C}$ עם $|\alpha| = 1$ כי נקבל ש־$0 = 0$.
אחרת, אם $z \neq 0$ אז קיים $\theta \in \mathbb{R}$ כך ש־$z = |z| \cdot e^{i\theta}$ וניקח $\alpha = e^{-i\theta}$ ונקבל

$$\alpha z = e^{-i\theta} \cdot \left(|z| e^{i\theta}\right) = |z|\left(e^{-i\theta} \cdot e^{i\theta}\right)) = |z| \in \mathbb{R}$$

ולכן יש $\alpha \in \mathbb{C}$ המקיים זאת.

$\square$

2.8 משפט ההתכנסות הנשלטת

הגדרה 2.8.1 (סדרת פונקציות נשלטת): תהיי X קבוצה ותהיי $\{f_n \mid X \to \mathbb{R}\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות כלשהי ותהיי $g : X \to \mathbb{R}$ פונקציה.
נאמר שהסדרה $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ נשלטת על־ידי הפונקציה g אם ורק אם לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $|f_n| \le g$.

משפט 2.8.1 (*משפט ההתכנסות הנשלטת*): תהיי $\{f_n : X \to \mathbb{C}\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות מדידות המתכנסת נקודתית לפונקציה $f : X \to \mathbb{C}$.
אם קיימת $g \in L^1(\mu)$ כך שהסדרה $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ נשלטת על־ידי g אזי $f \in L^1(\mu)$ ומתקיים

$$\int_X |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ובפרט

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu$$

הוכחה: ראשית מכך ש־$|f_n| \le g$ לכל $n \in \mathbb{N}$ נובע כי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq L^1(\mu)$ וגם מתקיים $|f| \le g$ אז $f \in L^1(\mu)$.
בפרט מתקיים לכל $n \in \mathbb{N}$ ש־$|f - f_n| \le 2g$ אז נגדיר $h_n := 2g - |f - f_n|$ ומהלמה של פאטו עבור סדרת הפונקציות $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ נקבל

$$(\star) \quad \int_X \liminf_{n\to\infty} h_n \, \mathrm{d}\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_X h_n \, \mathrm{d}\mu$$

וכן $h_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 2g$ נקודתית, אז בפרט $2g(x) = \liminf_{n\to\infty} h_n(x)$ לכל $x \in X$, אז יינבע מכך

$$\int_X 2g \, \mathrm{d}\mu = \int_X \liminf_{n\to\infty} h_n \, \mathrm{d}\mu \underset{(\star)}{\le} \liminf_{n\to\infty} \int_X h_n \, \mathrm{d}\mu = \liminf_{n\to\infty} \int_X (2g - |f - f_n|) \, \mathrm{d}\mu$$

מכאן מתקיים

$$\int_X 2g \, \mathrm{d}\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_X (2g - |f - f_n|) \, \mathrm{d}\mu \underset{\text{לינאריות האינטגרל}}{=} \liminf_{n\to\infty} \left(\int_X 2g \, \mathrm{d}\mu - \int_X |f - f_n| \, \mathrm{d}\mu \right)$$

$$= \liminf_{n\to\infty} \int_X 2g \, \mathrm{d}\mu + \liminf_{n\to\infty} \left(- \int_X |f - f_n| \, \mathrm{d}\mu \right) \underset{\liminf_{n\to\infty}(-a_n) = -\limsup_{n\to\infty} a_n}{=} \int_X 2g \, \mathrm{d}\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_X |f - f_n| \, \mathrm{d}\mu$$

כלומר

$$\int_X 2g \, \mathrm{d}\mu \le \int_X 2g \, \mathrm{d}\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_X |f - f_n| \, \mathrm{d}\mu$$

אבל $g \in L^1(\mu)$ אי־שלילית ולכן $\int_X 2g \, \mathrm{d}\mu < \infty$ ולכן ניתן להחסיר ולקבל $\limsup_{n\to\infty} \int_X |f - f_n| \, \mathrm{d}\mu = 0$ ובפרט מאי־שיוויון המשולש האינטגרלי

$$\left| \int_X f \, \mathrm{d}\mu - \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \right| = \left| \int_X (f - f_n) \, \mathrm{d}\mu \right| \le \int_X |f - f_n| \, \mathrm{d}\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

□

2.9 אי־שיוויון מרקוב

משפט 2.9.1 (אי־שיוויון מרקוב):

1. תהיי f מדידה ואי־שלילית, אז לכל $0 < a < \infty$ מתקיים

$$\mu(f^{-1}[\alpha,\infty]) \leq \frac{\int f\,\mathrm{d}\mu}{a}$$

2. תהיי $f : X \to [0,\infty]$ אינטגרבילית. אז $\mu(f^{-1}(\{\infty\})) = 0$ והקבוצה $f^{-1}((0,\infty))$ היא σ־סופית.

הוכחה:

1. נגדיר

$$E_a := f^{-1}([a,\infty]) = \{x \in X \mid f(x) \geq a\}$$
$$g(x) = a \cdot \mathbb{1}_{E_a}(x)$$

אם $x \in E_a$ אזי $f(x) \geq a$ ו־$g(x) = a \cdot 1 = a$ ולכן $f(x) \geq g(x)$.
אם $x \notin E_a$ אז $f(x) \geq 0$ ו־$g(x) = a \cdot 0 = 0$ ולכן $f(x) \geq g(x)$ כלומר לכל $x \in X$ מתקיים $g(x) \leq f(x)$.
ממונוטוניות אינטגרל לבג נקבל

$$\int_X g\,\mathrm{d}\mu \leq \int_X f\,\mathrm{d}\mu$$

אבל

$$\int_X g\,\mathrm{d}\mu = \int_X a \cdot \mathbb{1}_{E_a}\,\mathrm{d}\mu = a \cdot \int_X \mathbb{1}_{E_a}\,\mathrm{d}\mu = a \cdot \mu(E_a)$$

כלומר

$$a \cdot \mu(E_a) \leq \int_X f\,\mathrm{d}\mu$$

מהיות $0 < a < \infty$ ניתן לחלק בלי לשנות את כיוון אי־השיוויון ונקבל

$$\mu(E_a) \leq \frac{1}{a}\int_X f\,\mathrm{d}\mu$$

2. מהמקרה הקודם אנחנו מקבלים שאם $\int f\,\mathrm{d}\mu < \infty$ אזי אגף ימין שואף לאינסוף כאשר $a \to \infty$ ולכן מרציפות המידה מלמעלה (חיתוכים יורדים) נסיק כי

$$\mu(f^{-1}(\{\infty\})) = 0$$

מתקיים

$$\mu\left(f^{-1}\left[\frac{1}{n},\infty\right]\right) < \infty$$

ולכן

$$f^{-1}((0,\infty)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}\left(\left[\frac{1}{n},\infty\right]\right)$$

היא σ־סופית.

$\square$

3 קבוצות ממידה אפס

3.1 סדרת פונקציות כמעט־תמיד

משפט 3.1.1 (סדרות פונקציות וכמעט־תמיד): תהיי $\{f_n : X \to \mathbb{C}\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות מדידות המוגדרות μ־כמעט תמיד.
אם $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n|\,\mathrm{d}\mu < \infty$ אז

1. הפונקציה $f : X \to \mathbb{C}$ הנתונה על־ידי $x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מוגדרת μ־כמעט תמיד
2. $f \in L^1(\mu)$
3. $\int_X f\,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f_X f_n\,\mathrm{d}\mu$

הוכחה:

1. נניח ש־f_n מוגדרת על קבוצה $S_n \subseteq X$ כך ש־$\mu(S_n^c) = 0$, אז $\varphi = \sum_{n=1}^{\infty}|f_n|$ מוגדרת על $S := \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$ ומתקיים

$$\mu(S^c) = \mu\left(\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n\right)^c\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n^c\right) = 0 \Longrightarrow \mu(S^c) = 0$$

ולכן φ מוגדרת μ־כמעט תמיד ומהטענה אודות החלפת סדר של גבול ואינטגרל עבור טורים של פונקציות אי־שליליות מתקיים

$$\int_X \varphi\,\mathrm{d}\mu = \int_X \sum_{n=1}^{\infty}|f_n|\,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\int_X |f_n|\,\mathrm{d}\mu < \infty \Longrightarrow \int_X \varphi\,\mathrm{d}\mu < \infty$$

בפרט $\mu(|\varphi(x)|) < \infty$ μ־כמעט לכל $x \in X$ ולכן $\varphi \in L^1(\mu)$ ולכן עבור μ־כמעט לכל $x \in X$ הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס בהחלט μ־כמעט תמיד ולכן הוא מתכנס ב־$\mathbb{C}$ μ־כמעט תמיד ולכן $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ מוגדרת μ־כמעט תמיד

2. לכל $k \in \mathbb{N}$ נסמן $g_k := \sum_{n=1}^{k} f_n$ ומתקיים

$$\forall k \in \mathbb{N},\ |g_k| = \left|\sum_{n=1}^{k} f_n\right| \le \sum_{n=1}^{k}|f_n| \le \sum_{n=1}^{\infty}|f_n| = \varphi \Longrightarrow |g_k| \le \infty$$

כלומר סדרת הפונקציות $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ נשלטת על־ידי $\varphi \in L^1(\mu)$ ומכאן ממשפט ההתכנסות הנשלטת עבור f $\xrightarrow[k\to\infty]{}$ g_k נובע כי $f \in L^1(\mu)$ וכן מהטענה על החלפת סדר סכום ואינטגרל

$$\int_X f\,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty}\int_X g_k\,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\int_X f_n\,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\int_X f_n\,\mathrm{d}\mu \Longrightarrow \int_X f\,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\int_X f_n\,\mathrm{d}\mu$$

וזה מוכיח גם את 3.

$\square$

3.2 תנאים שקולים לשלמות

תזכורת: יהי $(X,\mathcal{A},\mu)$ מרחב מידה. נאמר שהמרחב **שלם** אם $E\in\mathcal{A}$ מקיימת שלכל $N\subseteq E$ מתקיים ש־N מדידה ו־$\mu(N)=0$.
ההשלמה של $(X,\mathcal{A},\mu)$ ניתנת על־ידי ה־σ־אלגברה

$$\overline{\mathcal{A}}:=\{A\cup E\mid A\in\mathcal{A},E\subseteq N,\mu(N)=0\}$$

והמידה

$$\overline{\mu}(A\cup E)=\mu(A)$$

משפט 3.2.1 (תנאים שקולים לשלמות): יהי $(X,\mathcal{A},\mu)$ מרחב מידה, אזי הגרירות הבאות נכונות אם ורק אם μ שלמה:

1. אם f מדידה ו־$f=g$ μ־כמעט תמיד, אז g היא מדידה
2. אם $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות מדידות ובנוסף $f_n\to f$ μ־כמעט תמיד, אזי f היא מדידה

הוכחה: בשביל ההוכחה נשתמש בטענה מהסוג הבא שנכונה במרחבי מידה שלמים: נניח כי E,G מדידות ו־$E\subseteq F\subseteq G$ עם $\mu(G\setminus E)=0$.
אז F מדידה: זה נכון כי $F\setminus E\subseteq G\setminus E$ והתלכדות המידות גוררת ש־$\mu(G\setminus E)=0$ ולכן $F\setminus E$ מדידה וגם F.
שלמות $\Longleftarrow$ 1: אם f מדידה ו־$f=g$ μ־כמעט תמיד, נרשום

$$N:=\{x\mid f(x)\neq g(x)\}$$

מהיות N מוכלת בקבוצה ממידה אפס ו־μ שלמה אזי N מדידה.
מתקיים לכל A מדידה בורל

$$g^{-1}(A)=(g^{-1}(A)\cap f^{-1}(A))\cup(g^{-1}(A)\setminus f^{-1}(A))$$

מהיות N^c היא בידיוק הקבוצה בה הפונקציות מתלכדות, נוכל לכתוב

$$f^{-1}(A)\cap N^c\subseteq f^{-1}(A)\cap g^{-1}(A)\subseteq f^{-1}(A)$$

ומהיות

$$f^{-1}(A)\setminus(f^{-1}(A)\cap N^c)\subseteq N$$

נדע ששרשרת ההכלות היא כפי שמופיע בטענה שנוסחה בתחילת ההוכחה ולכן הקבוצה $f^{-1}(A)\cap g^{-1}(A)$ היא מדידה ובאופן דומה נשים לב

$$g^{-1}(A)\setminus f^{-1}(A)\subseteq N$$

ולכן כקבוצה המוכלת בקבוצה ממידה אפס היא מדידה.
1 $\Longleftarrow$ שלמות: תהיי E קבוצה המוכלת בקבוצה ממידה אפס אזי $\mathbb{1}_E=0$ כמעט־תמיד ולכן $\mathbb{1}_E$ מדידה, אבל אינדיקטור מדיד אם ורק אם הקבוצה שהוא מציין מדידה, כלומר E מדידה.
1 $\Longleftarrow$ 2: מאחר והוכחנו ש־1 שקול לשלמות, אז μ שלמה. נניח ש־$f_n\to f$ μ־כמעט תמיד.
לכן קיימת קבוצה N כך ש־$\mu(N)=0$ ובנוסף $f_n(x)\to f(x)$ לכל $x\in N^c$ ונגדיר

$$\tilde{f}_n(x)=\begin{cases}f_n(x) & x\in N^c\\ 0 & x\in N\end{cases}$$

אזי מהסעיף הקודם לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים ש־$\tilde{f}$ מדידה כי $\tilde{f}_n=f_n$ μ־כמעט תמיד ו־$\tilde{f}$ מתכנסת נקודתית לפונקציה

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases}f(x) & x\in N^c\\ 0 & x\in N\end{cases}$$

ולכן $\tilde{f}$ מדידה ול־$f=\tilde{f}$ μ־כמעט תמיד ולכן f מדידה.
2 $\Longleftarrow$ 1: נניח ש־$f=g$ μ־כמעט תמיד ו־f מדידה, אז נגדיר את f_n להיות הסדרה הקבועה $f_n=f$ ומתקיים $f_n\to g$ כמעט־תמיד ולכן g מדידה מההנחה של 2, כנדרש. $\square$

3.3 תנאי שקול לפונקציה אפסה כמעט־תמיד

משפט 3.3.1 (תנאי שקול לפונקציה אפסה כמעט־תמיד)**:** אם $f : X \to [0,\infty]$ מדידה עם $\int_X f \,\mathrm{d}\mu = 0$ אם ורק אם $f \underset{\mu}{=} 0$.

הוכחה: ההנחה ש־$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = 0$ גוררת ש־$\mu\big(\{x \in X \mid f(x) \geq \frac{1}{n}\}\big) = 0$ לכל $n \in \mathbb{N}$ ולכן $f = 0$ μ־כמעט תמיד. $\square$

3.4 טענה על ממוצעי פונקציה

תזכורת (ממוצע של פונקציה): יהי $(X,\mathcal{A},\mu)$ מרחב מידה סופי, תהיי $f\in L^1(\mu)$ ותהיי $E\in\mathcal{A}$ קבוצה מדידה עם $\mu(E)>0$.
הממוצע של f על E ביחס ל־μ הוא

$$A_E(f):=\frac{1}{\mu(E)}\int_E f\,\mathrm{d}\mu$$

משפט 3.4.1 (טענה על ממוצעי פונקציה): יהי $(X,\mathcal{A},\mu)$ מרחב מידה סופי ותהיי $f\in L^1(\mu)$. אם $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ קבוצה סגורה כך שלכל קבוצה מדידה $E\in\mathcal{A}$ עם $\mu(E)>0$ מתקיים
$A_E(f)\in\Omega$ אז $f(x)\in\Omega$ μ־כמעט לכל $x\in X$.

הוכחה: לכל $r>0$ ולכל $\alpha\in\mathbb{C}$ נסמן ב־$\overline{B}_r(\alpha)$, הכדור הסגור ברדיוס r סביב α.
מכך ש־Ω סגורה נובע כי Ω^c פתוחה ולכן יש איחוד בן־מנייה של כדורים פתוחים שעל־ידו ניתן לייצג את Ω^c.
אבל ב־$\mathbb{C}$, כל כדור פתוח ניתן להצגה כאיחוד בן־מנייה של כדורים סגורים, ולכן Ω^c היא איחוד בן־מנייה של כדורים סגורים.
לכן, מספיק להראות שעבור כל $\overline{B}_r(\alpha)\subseteq\Omega^c$ מתקיים $\mu\left(f^{-1}\left(\overline{B}_r(\alpha)\right)\right)=0$, כאשר

$$f^{-1}\left(\overline{B}_r(\alpha)\right)=\left\{x\in X\mid f(x)\in\overline{B}_r(\alpha)\right\}$$

נניח בשלילה שקיים כדור סגור $\overline{B}_r(\alpha)\subseteq\Omega^c$ כך ש־$\mu\left(f^{-1}\left(\overline{B}_r(\alpha)\right)\right)>0$ ונסמן $E:=f^{-1}\left(\overline{B}_r(\alpha)\right)$.
על E מתקיים $|f-\alpha|\le r$ ולכן

$$|A_E(f)-\alpha|=\left|\frac{1}{\mu(E)}\int_E f\,\mathrm{d}\mu-\frac{1}{\mu(E)}\cdot\mu(E)\cdot\alpha\right|=\left|\frac{1}{\mu(E)}\int_E f\,\mathrm{d}\mu-\frac{1}{\mu(E)}\int_E\alpha\,\mathrm{d}\mu\right|$$

$$=\left|\frac{1}{\mu(E)}\left(\int_E f\,\mathrm{d}\mu-\int_E\alpha\,\mathrm{d}\mu\right)\right|\underset{\substack{\text{לינאריות האינטגרל}\\ \mu(E)>0}}{=}\frac{1}{\mu(E)}\left|\int_E(f-\alpha)\,\mathrm{d}\mu\right|\underset{\text{אי־שיוויון המשולש}}{\le}\frac{1}{\mu(E)}\int_E|f-\alpha|\,\mathrm{d}\mu\le\frac{1}{\mu(E)}\int_E r\,\mathrm{d}\mu$$

$$=\frac{1}{\mu(E)}\cdot r\cdot\mu(E)=r$$

כלומר $|A_E(f)-\alpha|\le r$ ולכן $A_E(f)\in\overline{B}_r(\alpha)\subseteq\Omega^c$ ולכן $A_E(f)\in\Omega^c$.
אבל זו סתירה להנחה ש־$A_E(f)\in\Omega$. $\square$

4 משפט ההצגה של ריס

4.1 משפט ההצגה של ריס – יחידות

משפט 4.1.1 (יחידות במשפט ההצגה של ריס): יהי $\Lambda : \mathbb{C}_C(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ פונקציונל לינארי חיובי ונניח כי μ_1, μ_2 הן מידות על $(\mathbb{R}, \mathrm{Borel}_{\mathbb{R}})$ המקיימות

1. $\int_X f \,\mathrm{d}\mu_i = \Lambda f$ לכל $f \in C_C(\mathbb{R})$
2. $\mu_i(K) < \infty$ לכל $K \subseteq \mathbb{R}$ קומפקטית
3. כל קבוצות בורל ב־$\mathbb{R}$ הן רגולריות פנימית וחיצונית ביחס ל־μ_i

הוכחה: ניזכר ש־$\mathbb{R}$ הוא מרחב האוסדרוף קומפקטי־מקומית.

נבחין תחילה ש־μ_1, μ_2 מוגדרות ביחידות על־ידי הערכים שלהן על קבוצות קומפקטיות.

ראשית מ־(2) נובע כי עבור $K \subseteq \mathbb{R}$ קומפקטית מתקיים $\mu_i(K) < \infty$.

יהי $\varepsilon > 0$ ומהרגולריות החיצונית נובע כי קיימת $K \subseteq V$ כאשר V פתוחה כך שמתקיים $\mu_2(V) < \mu_2(K) + \varepsilon$.

מהלמה של אוריסון נובע כי קיימת $f \in C_C(\mathbb{R})$ כך שמתקיים $f(X) \subseteq [0,1]$ ועוד מתקיים ש־$K \prec f \prec V$, כלומר $\mathbb{1}_K \leq f$ וכן $\mathrm{supp}(f) \subseteq V$ ולכן $\mathbb{1}_{\mathrm{supp}(f)} \subseteq \mathbb{1}_V$ אבל $f(X) \subseteq [0,1]$ ולכן $f \leq \mathbb{1}_V$, אזי

$$\mu_1(k) = \int_X \mathbb{1}_K \,\mathrm{d}\mu_1 \leq \int_X f \,\mathrm{d}\mu_1 \underset{(1)}{=} \Lambda f \underset{(1)}{=} \int_X f \,\mathrm{d}\mu_2 \leq \int_X \mathbb{1}_V \,\mathrm{d}\mu_2 = \mu_2(V) < \mu_2(K) + \varepsilon$$

כלומר $\mu_1(K) \leq \mu_2(K)$ לכל K קומפקטית ומהסימטרייה נקבל $\mu_2 \leq \mu_1$, כלומר $\mu_1 = \mu_2$. □

הערה (בניית המידה במשפט ההצגה של ריס): נגדיר את המידה μ על קבוצות פתוחות: לכל $V \subseteq X$ פתוחה נגדיר $\mu(V) := \sup_{f \prec V}\{\Lambda f\}$.

לכל $E \subseteq X$ נגדיר $\mu(E) := \inf\{\mu(V) \mid E \subseteq V \text{ פתוחה}\}$.

ההגדרות הללו מתלכדות בגלל שלכל $V \subseteq U \subseteq X$ פתוחות מתקיים $\mu(V) \leq \mu(U)$ ולכן ההרחבה גם כשרה ולכל $A \subseteq B$ מתקיים $\mu(A) \leq \mu(B)$.

הערה (בניית ה־σ אלגברה במשפט ההצגה של ריס): נגדיר

$$m_F := \{E \subseteq X \mid \mu(E) < \infty,\ \mu(E) = \sup\{\mu(K) \mid E \supseteq K \text{ קומפקטית}\}\}$$
$$m := \{E \subseteq X \mid E \cap K \in m_F \ \forall K \text{ קומפקטית}\}$$

נשים לב שאם $E \subseteq X$ עם $\mu(E) = 0$ אז $E \in m_F$ מכיוון ש־$\emptyset \subseteq E$ קומפקטית ו־$\mu(\emptyset) = 0$ ולכן $E \in m$ ונקבל כתוצר לוואי של ההוכחה ש־(X, m, μ) מרחב מידה שלם.

5 רגולריות ומידות רדון

5.1 תכונות מידת רדון על מרחב σ־קומפקטי

משפט 5.1.1 (תכונות מידת רדון על מרחב σ־קומפקטי): יהי $(X,\mathcal{m},\mu)$ מרחב מידה המכיל את σ־אלגברת בורל על X.
אם X הוא σ־קומפקטי ו־μ מידת רדון אז מתקיימים

1. לכל $\varepsilon>0$ ולכל $E\in\mathcal{m}$ קיימת קבוצה פתוחה $V\subseteq X$ וקבוצה סגורה $F\subseteq X$ עם $F\subseteq E\subseteq V$ כך ש־$\mu(V\setminus F)<\varepsilon$
2. כל קבוצה $E\in\mathcal{m}$ היא רגולרית פנימית וחיצונית
3. לכל $E\in\mathcal{m}$ קיימות $A,B\in\mathcal{m}$ כאשר A היא F_σ ו־B היא G_σ כך ש־$A\subseteq E\subseteq B$ וגם $\mu(B\setminus A)=0$

הוכחה: ראשית מהיות X σ־קומפקטי נובע שקיים אוסף בן־מנייה של קבוצות קומפקטיות $\{K_n\}_{n=1}^\infty$ כך ש־$X=\cup_{n=1}^\infty K_n$.

1. תהיי $E\in\mathcal{m}$ מדידה
   1. מהיות $\{K_n\}_{n=1}^\infty$ כיסוי של X מתקיים ש־$E=\cup_{n=1}^\infty E\cap K_n$.
   מהיות μ מידת רדון ו־K_n קומפקטית נובע ש־$\mu(K_n)<\infty$ לכל $n\in\mathbb{N}$ ולכן בפרט ממונוטוניות $\mu(E\cap K_n)<\infty$.
   מהרגולריות החיצונית של μ נובע שלכל $\varepsilon>0$ קיימת $V_n\in\mathcal{m}$ פתוחה עם $E\cap K_n\subseteq V_n$ כך ש־$\mu(V_n)\underset{(\star)}{<}\mu(E\cap K_n)+\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$.
   נסמן $V_n:=\cup_{n=1}^\infty V_n$ ומתקיים מכך ש־$E\cap K_n\subseteq K_n$

$$V\setminus E=\left(\bigcup_{n=1}^\infty V_n\right)\setminus\left(\bigcup_{n=1}^\infty E\cap K_n\right)\subseteq\bigcup_{n=1}^\infty V_n\setminus(E\cap K_n)$$

ולכן

$$\mu(V\setminus E)\underset{\text{מונוטוניות}}{\leq}\mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty V_n\setminus(E\cap K_n)\right)\underset{\text{תת־אדטיביות}}{\leq}\sum_{n=1}^\infty\mu(V_n\setminus(E\cap K_n))=\sum_{n=1}^\infty(\mu(V_n)-\mu(E\cap K_n))\underset{(\star)}{<}\sum_{n=1}^\infty\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}=\frac{\varepsilon}{2}$$

2. עבור $E^c\in\mathcal{m}$ מתקיים גם ש־$E^c=\cup_{n=1}^\infty E^c\cap K_n$ אפשר לעשות את אותו תהליך שוב: מהיות μ מידת רדון נובע כי $E^c\cap K_n$ רגולרית חיצונית ולכן קיימת פתוחה $U_n\in\mathcal{m}$ עם $E^c\cap K_n\subseteq U_n$ כך ש־$\mu(U_n)\underset{(\diamondsuit)}{<}\mu(E^c\cap K_n)+\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$.
נסמן $U:=\cup_{n=1}^\infty U_n$ ואז U פתוחה כאיחוד של פתוחות ו־$E^c\subseteq U$ (כי $E^c=\cup_{n=1}^\infty E^c\cap K_n\subseteq\cup_{n=1}^\infty U_n=U$) ונקבל

$$U\setminus E^c=\left(\bigcup_{n=1}^\infty U_n\right)\setminus\left(\bigcup_{n=1}^\infty E^c\cap K_n\right)\subseteq\bigcup_{n=1}^\infty U_n\setminus(E^c\cap K_n)$$

ובהתאם

$$\mu(U\setminus E^c)\leq\mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty U_n\setminus(E^c\cap K_n)\right)\leq\sum_{n=1}^\infty\mu(U_n\setminus E^c\cap K_n)=\sum_{n=1}^\infty\mu(U_n)-\mu(E^c\cap K_n)\underset{(\diamondsuit)}{<}\sum_{n=1}^\infty\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}=\frac{\varepsilon}{2}$$

אז אם נסמן $F:=U^c$ נקבל

1. U פתוחה $\Longleftarrow$ F סגורה
2. $E^c\subseteq U\Longleftarrow U^c\subseteq E\Longleftarrow F\subseteq E$
3. מתקיים

$$E\setminus F=E\cap F^c=F^c\cap E=F^c\setminus E^c\Longrightarrow\mu(E\setminus F)=\mu(F^c\setminus E^c)=\mu(U\setminus E^c)<\frac{\varepsilon}{2}$$

אם כך קיבלנו בסך־הכל קבוצה פתוחה $E\subseteq V$ ו־$F\subseteq E$ סגורה המקיימות

$$(1)\ \mu(V\setminus E)=\mu(V)-\mu(E)<\frac{\varepsilon}{2}\qquad(2)\ \mu(E\setminus F)=\mu(E)-\mu(F)<\frac{\varepsilon}{2}$$

ולכן

$$\mu(V\setminus F)=\underbrace{\mu(V)-\mu(E)}_{\mu(V\setminus E)}+\underbrace{\mu(E)-\mu(F)}_{\mu(E\setminus F)}\underset{(1),(2)}{<}\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\Longrightarrow\mu(V\setminus F)<\varepsilon$$

2. מהסעיף הקודם, לכל $E \in \mathcal{M}$ קיימת קיימת קבוצה סגורה $F \in \mathcal{M}$ עם $F \subseteq E$ ו־$\mu(E \setminus F) < \frac{\varepsilon}{2}$ ושוב מה־σ־קומפקטיות, $F = \cup_{n=1}^{\infty} F \cap K_n$, אבל לכל n, $F \cap K_n$ היא קבוצה קומפקטית (כי חיתוך של קבוצה קומפקטית עם קבוצה סגורה הוא קומפקטי) ולכן לכל $N \in \mathbb{N}$ נובע כי $\cup_{n=1}^{N} (F \cap K_n)$ היא קבוצה קומפקטית כאיחוד סופי של קומפקטיות, אז מרציפות המידה לאיחודים עולים נקבל

$$\lim_{N\to\infty} \mu\left(\bigcup_{n=1}^{N} F \cap K_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F \cap K_n\right) = \mu(F) \Longrightarrow \mu(F) = \lim_{N\to\infty} \mu\left(\bigcup_{n=1}^{N} F \cap K_n\right)$$

כלומר לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $k \geq N$ מתקיים

$$\mu\left(F \setminus \bigcup_{n=1}^{k} F \cap K_n\right) = \mu(F) - \mu\left(\bigcup_{n=1}^{k} F \cap K_n\right) < \frac{\varepsilon}{2}$$

נסמן $K := \cup_{n=1}^{N} F \cap K_n$ ואז $K \subseteq F \subseteq E$ כאשר K קומפקטית ומאי־השיוויון לעיל נקבל שלכל $\varepsilon > 0$ קיימת $K \subseteq X$ קומפקטית עם $K \subseteq E$ כך שמתקיים

$$\mu(E) - \mu(K) = \mu(E) - \mu(F) + \mu(F) - \mu(K) = \mu(E \setminus F) + \mu(F \setminus K) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\Longrightarrow \mu(E) - \mu(K) < \varepsilon \Longleftrightarrow \mu(K) > \mu(E) - \varepsilon \Longrightarrow \mu(E) = \sup\{\mu(C) \mid C \subseteq E \text{ קומפקטית } C\}$$

כלומר $E \in \mathcal{M}$ רגולרית פנימית ומהיות μ מידת רדון ולכן רגולרית חיצונית ביחס לכל קבוצה מדידה, מהיות $E \in \mathcal{M}$ שרירותי נובע כי סעיף 2 נכון.

3. תהיי $E \in \mathcal{M}$. מסעיף 1 נובע קיום של $V_n \in \mathcal{M}$ פתוחה ו־$F_n \in \mathcal{M}$ סגורה עם $F_n \subseteq E \subseteq V_n$ כך ש־$\mu(V_n \setminus F_n) < \frac{1}{n}$.
נגדיר $B := \cup_{n=1}^{\infty} V_n, A := \cup_{n=1}^{\infty} F_n$ אז A היא F_σ ו־B היא G_σ ומתקיים

$$B \setminus A = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right)^c = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n\right) \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n^c\right) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} (V_n \cap F_n^c) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (V_n \setminus F_n)$$

אבל $\mu(V_n \setminus F_n) < \frac{1}{n}$ ולכן

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq \mu(B \setminus A) \leq \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \setminus F_n\right) \underset{\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \setminus F_n \subseteq V_n \setminus F_n}{\leq} \mu(V_n \setminus F_n) < \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

□

5.2 תנאים שגוררים שמידה היא מידת רדון

משפט 5.2.1 (תנאים שגוררים שמידה היא מידת רדון): יהי X מרחב האוסדרוף קומפקטי־מקומית המקיים שכל קבוצה פתוחה בו היא σ־קומפקטית. אם μ מידה על $\mathbb{B}(X)$ המקיימת $\mu(K) < \infty$ לכל $K \subseteq X$ קומפקטית, אזי μ היא מידת רדון על $\mathcal{m}$ וכל קבוצה מדידה $E \in \mathcal{m}$ היא רגולרית פנימית וחיצונית.

הוכחה: מהיות μ סופית על קומפקטיות, נקבל ש־$\Lambda f = \int_X f \, \mathrm{d}\mu$ היינו פונקציונל לינארי חיובי על $C_c(X)$ וממשפט ההצגה של ריס נובע שקיימת מידת רדון λ על X המקיימת $\int_X f \, \mathrm{d}\mu \underset{(\star)}{=} \int_X f \, \mathrm{d}\lambda$, לכל $f \in C_C(X)$.

תהיי $V \in \mathcal{m}$ פתוחה, מהנתון נובע שהיא σ־קומפקטית ולכן קיים אוסף $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ של קבוצות קומפקטיות כך שמתקיים $V = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$.

מהלמה אוריסון, נובע שלכל $n \in \mathbb{N}$ קיימת $g_n \in C_C(X)$ עם $K_n \prec g_n \prec V$.

נגדיר $\{f_N\}_{N=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות על־ידי

$$\forall N \in \mathbb{N}, \ f_N := \max_{i \in [N]} \{g_i\}$$

ומתקיים ש־$\{f_N\}_{N=1}^{\infty} \subseteq C_C(X)$, $\{f_N\}_{N=1}^{\infty}$ מונוטונית עולה ו־$f_N \xrightarrow[N \to \infty]{} \mathbb{1}_V$ נקודתית כי $V = \cup_{n=1}^{\infty} K_n$ ו־$K_n \prec g_n \prec V$.

אם־כך, אנחנו מקיימים את תנאי משפט ההתכנסות המונוטונית ומשימוש כפול בו נקבל

$$\mu(V) = \int_X \mathbb{1}_V \, \mathrm{d}\mu = \int_X \lim_{N \to \infty} f_N \, \mathrm{d}\mu = \lim_{N \to \infty} \int_X f_N \, \mathrm{d}\mu = \lim_{N \to \infty} \int_X f_N \, \mathrm{d}\lambda = \int_X \lim_{N \to \infty} f_N \, \mathrm{d}\lambda = \int_X \mathbb{1}_V \, \mathrm{d}\lambda$$

כלומר μ, λ מסכימות על קבוצות פתוחות מדידות.

יהי $\varepsilon > 0$, λ מידת רדון ולכן לכל $E \in \mathcal{m}$ קיימת קבוצה פתוחה $U \subseteq X$ וקבוצה סגורה $F \subseteq X$ עם $F \subseteq E \subseteq U$ כך ש־$\lambda(U \setminus F) < \varepsilon$.

בפרט, נובע מהיות $F \subseteq E$ כי $U \setminus E \subseteq U \setminus F$ ולכן ממונוטוניות $\lambda(U \setminus E) \underset{(\star)}{<} \varepsilon$.

אבל $U \setminus F$ היא פתוחה (כי הפרש של פתוחה וסגורה היא פתוחה) ו־$\mu(V) = \lambda(V)$ לכל פתוחה ומדידה, ולכן $\mu(U \setminus F) = \lambda(U \setminus F) < \varepsilon$, כלומר

$$\mu(U) - \mu(E) \underset{\text{מונוטוניות}}{\leq} \mu(U) - \mu(F) = \mu(U \setminus F) < \varepsilon \Longrightarrow \mu(U) - \varepsilon < \mu(E)$$

ולכן מתקיים

$$\lambda(E) - \varepsilon \underset{\text{מונוטוניות}}{\leq} \lambda(U) - \varepsilon \underset{\substack{\lambda(U)=\mu(U) \\ \text{עבור } U \text{ פתוחה}}}{=} \mu(E) \underset{\text{מונוטוניות}}{<} \mu(U) \underset{\substack{\lambda(U)=\mu(U) \\ \text{עבור } U \text{ פתוחה}}}{=} \lambda(U) \underset{\star}{<} \lambda(E) + \varepsilon$$

$$\Longrightarrow \lambda(E) - \varepsilon < \mu(E) < \lambda(E) + \varepsilon \Longleftrightarrow -\varepsilon < \mu(E) - \lambda(E) < \varepsilon \Longleftrightarrow |\mu(E) - \lambda(E)| < \varepsilon$$

מהיות ε שרירותי נובע כי $\mu(E) = \lambda(E)$ לכל $E \in \mathcal{m}$ כלומר $\lambda = \mu$ ולכן μ מידת רדון, ומתכונות מידת רדון נובע כי כל קבוצה מדידה $E \in \mathcal{m}$ היא רגולרית פנימית וחיצונית. $\square$

6 התכנסות חלשה-*

6.1 טענה מהמבחן

משפט 6.1.1 (טענה מהמבחן)**:** יהי X מרחב מטרי קומפקטי ו־$(f_k)_{k=1}^{\infty}$ סדרה של פונקציות רציפות שהיינה צפופה ב־$C(X)$ ביחס למטריקת $\sup$.
תהיי μ_n סדרת מידות הסתברות על X ונוכיח כי אם קיים הגבול $\lim_{n\to\infty}\int f_k\,\mathrm{d}\mu_n$ לכל k אזי קיימת מידת הסתברות μ עבורה $\mu_n \overset{*}{\to} \mu$.

הוכחה: תהיי $f\in C(X)$ ו־$\varepsilon>0$. מהצפיפות נובע שקיימת f_{k_0} כך שמתקיים $\left\|f-f_{k_0}\right\|_\infty<\varepsilon$ אז לכל n

$$\left|\int f\,\mathrm{d}\mu_n-\int f_{k_0}\,\mathrm{d}\mu_n\right|\le\left\|f-f_{k_0}\right\|_\infty<\varepsilon$$

וגם עבור $m\in\mathbb{N}$

$$\left|\int f\,\mathrm{d}\mu_m-\int f_{k_0}\,\mathrm{d}\mu_m\right|<\varepsilon$$

ונרצה להראות שזאת סדרת קושי, כלומר

$$\left|\int f\,\mathrm{d}\mu_n-\int f\,\mathrm{d}\mu_m\right|\le\left|\int f-f_{k_0}\,\mathrm{d}\mu_n\right|+\left|\int f_{k_0}\,\mathrm{d}\mu_n-\int f_{k_0}\,\mathrm{d}\mu_m\right|+\left|\int f_{k_0}-f\,\mathrm{d}\mu_m\right|\le\varepsilon+\left|\int f_{k_0}\,\mathrm{d}\mu_n-\int f_{k_0}\,\mathrm{d}\mu_m\right|$$

אבל מההנחה $\int f_{k_0}\,\mathrm{d}\mu_n$ מתכנסת וזאת סדרת קושי ולכן עבור n,m גדולים דיו

$$\left|\int f_{k_0}\,\mathrm{d}\mu_n-\int f_{k_0}\,\mathrm{d}\mu_m\right|<\varepsilon\Longrightarrow\left|\int f\,\mathrm{d}\mu_n-\int f\,\mathrm{d}\mu_m\right|<3\varepsilon$$

ולכן $\left\{\int f\,\mathrm{d}\mu_n\right\}$ זאת סדרת קושי ב־$\mathbb{R}$.
נגדיר $L(f):=\lim_{n\to\infty}\int f\,\mathrm{d}\mu_n$ והגבול הזה קיים לכל $f\in C(X)$.
אבל μ_n הן מידות הסתברות ולכן אם $f\ge 0$ אזי $L(f)\ge 0$ ו־$L(1)=1$ ולכן $|L(f)|\le\|f\|_\infty$.
ממשפט הצגה של ריז נובע ש־$L(f)=\int f\,\mathrm{d}\mu$ (כי קיימת ויחידה μ מידת הסתברות כזאת) ולכן $\int f\,\mathrm{d}\mu_n\xrightarrow[n\to\infty]{}\int f\,\mathrm{d}\mu$ לכל $f\in C(X)$ וזו בידיוק ההגדרה $\mu_n\overset{*}{\to}\mu$.

□

6.2 מידות הסתברות

הגדרה 6.2.1:

$$\mathscr{P}(X) := \{\mu : \mathbb{B}(X) \to [0,\infty] \mid \mu(X) = 1 \text{ } (\mu \text{ is a probability measure})\}$$

הגדרה 6.2.2 (מרחק בין מידות הסתברות): תהיינה $\mu,\nu \in \mathscr{P}(X)$ שתי מידות הסתברות על $\mathbb{B}(X)$ ותהיי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C(X)$ קבוצה צפופה ב־$C(X)$ כך ש־$0_{C(X)} \notin \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$.

$$d(\mu,\nu) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \|f_n\|_\infty} \left| \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu - \int_X f_n \, \mathrm{d}\nu \right|$$

למה 6.2.1: המרחק בין מידות הסתברות היא מטריקה על $\mathscr{P}(X)$ ולכן $(\mathscr{P}(X), d)$ הוא מרחב מטרי.

הוכחה: ברור כי d אי־שלילית וסימטרית ומקיימת את אי־שיוויון המשולש. נשאר להוכיח שאם $\mu = \nu \Longleftarrow d(\mu,\nu) = 0$. מתקיים

$$0 = d(\mu,\nu) \implies \forall n \in \mathbb{N}, \ \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu = \int_X f_n \, \mathrm{d}\nu$$

שכן זו הדרך היחידה שנחבר מספרים חיוביים ושזה יהיה אפס.
אז לכל $g \in C(X)$ קיימת תת־סדרה $f_{n_k} \to g$ במידה שווה (בנורמת sup) ומהיות g חסומה הרי שהחל ממקום מסוים איברי הסדרה מקיימים $\left\|f_{n_k}\right\|_\infty \le \|g\|_\infty + 1$.
הפונקציה הקבועה $\|g\|_\infty + 1$ אינטגרבילית ביחס ל־μ,ν (מידות הסתברות) אז ממשפט ההתכנסות הנשלטת

$$\int g \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_{n_k} \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_{n_k} \, \mathrm{d}\nu = \int g \, \mathrm{d}\nu$$

כלומר μ,ν מגדירות את אותו פונקציונל על $C_C(X)$ ולכן מהיחידות במשפט ההצגה של ריז נסיק $\mu = \nu$. □

משפט 6.2.1: אם X מרחב מטרי קומפקטי אזי $(\mathscr{P}(X), d)$ מרחב מטרי קופקטי.

הוכחה: תהיי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C(X)$ צפופה ב־$C(X)$ ותהיי $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathscr{P}(X)$ ונראה שיש לה תת־סדרה מתכנסת.
מהיות $\left\{\int_X f_1 \, \mathrm{d}\mu_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה ב־$\mathbb{C}$, מבולציאנו־ויירשטראס נקבל $\{\mu_{n,1}\}_{n=1}^{\infty}$ ו־$\alpha_1 \in \mathbb{C}$ כך ש־$\int_X f_1 \, \mathrm{d}\mu_{n,1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha_1$.
נמשיך בטיעון דומה לכל f_k ונקבל מטיעון אלכסון כי תת־הסדרה $\{\mu_{n,n}\}_{n=1}^{\infty}$ מקיימת $\int_X f_k \, \mathrm{d}\mu_{n,n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha_k$ לכל $k \in \mathbb{N}$.
בהינתן $g \in C(X)$ ו־$\varepsilon > 0$, קיים $i \in \mathbb{N}$ כך ש־$\|f_i - g\| < \frac{\varepsilon}{3}$ ובנוסף קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N < n,m \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$\left| \int_X f_i \, \mathrm{d}\mu_{n,n} - \int_X f_i \, \mathrm{d}\mu_{m,m} \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

שכן זאת סדרת קושי, אז

$$\left| \int_X g \, \mathrm{d}\mu_{n,n} - \int_X g \, \mathrm{d}\mu_{m,m} \right| \le \left| \int_X g \, \mathrm{d}\mu_{n,n} - \int_X f_i \, \mathrm{d}\mu_{n,n} \right| + \left| \int_X f_i \, \mathrm{d}\mu_{n,n} - \int_X f_i \, \mathrm{d}\mu_{m,m} \right| + \left| \int_X f_i \, \mathrm{d}\mu_{m,m} - \int_X g \, \mathrm{d}\mu_{m,m} \right|$$

$$\le \int_X |g - f_i| \, \mathrm{d}\mu_{n,n}) + \left| \int_X f_i \, \mathrm{d}\mu_{n,n} - \int_X f_i \, \mathrm{d}\mu_{m,m} \right| + \int_X |f_i - g| d \, \mathrm{d}\mu_{m,m}$$

$$\le \|g - f_i\|_\infty \mu_{n,n}(X) + \left| \int_X f_i \, \mathrm{d}\mu_{n,n} - \int_X f_i \, \mathrm{d}\mu_{m,m} \right| + \|g - f_i\|_\infty \mu_{m,m}(X) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

כלומר $\left\{\int_X g \, \mathrm{d}\mu_{n,n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי ב־$\mathbb{C}$ ולכן מתכנסת ב־$\mathbb{C}$.
נגדיר $\Lambda : C(X) \to \mathbb{C}$ על־ידי $\Lambda g := \lim_{n\to\infty} \int_X g \, \mathrm{d}\mu_{n,n}$ ולכן ממשפט ההצגה של ריז קיימת מידה μ המתאימה ל־Λ.
נבחין כי $\mu \in \mathscr{P}(X)$ כי $\mathbb{1}_X \in C(X)$ שכן $\mu(X) = \lim_{n\to\infty} \int_X \mathbb{1}_X \, \mathrm{d}\mu_{n,n} = 1$. □

7 דינמיקה

7.1 משפט Krylov–Bogolyubov

משפט 7.1.1 (Krylov–Bogolyubov): אם X מרחב מטרי קומפקטי ו־$T : X \to X$ רציפה אזי קיימת μ מידת הסתברות T־אינווריאנטית (כלומר $T_*\mu = \mu$) על X.

הוכחה: נבחר $x_0 \in X$ ונתבונן על

$$\mu_n := \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\delta_{T^k(x_0)} \in \mathcal{P}(X)$$

מהקומפקטיות של $\mathcal{P}(X)$ נובע שקיימת μ מידת הסתברות עבורה $\mu_{n_k} \xrightarrow{*} \mu$ ונראה שהיא T־אינווריאנטית: תהיי $f \in C_C(X)$, אזי

$$\begin{aligned}\left|\int f\,\mathrm{d}\mu - \int f\circ T\,\mathrm{d}\mu\right| &= \lim_{k\to\infty}\left|\int f\,\mathrm{d}\mu_{n_k} - \int f\circ T\,\mathrm{d}\mu_{n_k}\right| \\ &\le \lim_{k\to\infty}\left|\frac{1}{n_k}\sum_{i=0}^{n_k-1}(f - f\circ T)(T^i(x_0))\right| \\ &= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{1}{n_k}\sum_{i=0}^{n_k-1} f(T^i(x_0)) - f(T^{i+1}(x_0))\right| \\ &\underset{(\star)}{=} \lim_{k\to\infty}\frac{1}{n_k}|f(x_0) - f(T^{n_k}(x_0))| \\ &\le \lim_{k\to\infty}\frac{2\|f\|_\infty}{n_k} = 0\end{aligned}$$

כאשר $(\star)$ נובע מכך שזה טור טלסקופי.

מהיחידות במשפט ההצגה של ריס נסיק $T_*\mu = \mu$. □

8 שלושת העקרונות של Littlewood

8.1 משפט לוזין

משפט 8.1.1 (*משפט לוזין*)**:** *יהי X מרחב האוסדרוף קומפקטי מקומית, תהיי μ מידת רדון על X ותהיי $f : X \to \mathbb{C}$ מדידה. אם קיימת A כך ש־$\mu(A) < \infty$ המקיימת $\{x \mid f(x) \neq 0\} \subseteq A$ אזי לכל $\varepsilon > 0$ קיימת $g \in C_C(X)$ עבורה $\mu(\{x \mid f(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon$.*

הוכחה עבור מרחב מידה סופי: נוכיח את משפט לוזין במקרה של מרחב מידה סופי ונשתמש במשפט אגרוב/אגורוף.

יהי $\varepsilon > 0$, אם $f = \mathbb{1}_E$ עבור E מדידה, מרגולריות נוכל למצוא $U \subseteq E \subseteq F$ כך ש־F קומפקטית ו־U פתוחה ו־$\mu(U \setminus F) < \varepsilon$.

מהלמה של אוריסון נוכל בחור $\mathbb{1}_K \leq g \leq \mathbb{1}_U$ רציפה וזה מסיים עבור פונקציות מציין.

עבור פונקציות פשוטות שהן הסכום של k פונקציות מציינות נשתמש בלוזין עבור פונקצייה מציינת לכל אחת מהן כשנזרוק כל פעם $\frac{\varepsilon}{k}$ ושוב נסיים.

אם f מדידה ניקח סדרה של פשוטות המתכנסות אליה $s_n \to f$. ממשפט לוזין לפונקציות פשוטות נוכל לכל n לבחור g_n המתלכדת עם s_n מחוץ לקבוצה ממידה $\frac{\varepsilon}{2} \cdot 2^{-n}$.

אז מחוץ לאיחוד כל הקבוצות האלו שמתת־אדטיביות תהיה לו מידה $\frac{\varepsilon}{2}$ לכל היותר מתקיים $g_n \to f$. בעזרת משפט אגרוב/אגורוף נוכל לזרוק עוד קבוצה ממידה $\frac{\varepsilon}{2}$ שמחוץ אליה $g_n \to f$ במידה שווה ואז קיבלנו שמחוץ לקבוצה ממידה ε יש סדרת פונקציות המתכנסת ל־f במידה שווה, כלומר f רציפה בקבוצה זו. $\square$

8.2 משפט אגרוב/אגורוף

משפט 8.2.1 (משפט אגרוב/אגורוף): יהי $(X, \mathcal{A}, \mu)$ מרחב מידה סופי ונניח כי $f_n : X \to \mathbb{R}$ מתכנסת כמעט־תמיד ל־$f : X \to \mathbb{R}$ מדידה.
אז לכל $\varepsilon > 0$ קיימת $E \in \mathcal{A}$ עם $\mu(E) < \varepsilon$ כך ש־$f_n \to f$ במידה שווה ב־E^c.

הוכחה: יהי $\varepsilon > 0$ ונסמן

$$n_k(x) := \min\left\{n \mid \forall N > n,\ |f_N(x) - f(x)| < \frac{1}{k}\right\} \qquad (\min(\emptyset) = \infty)$$

עבור $x \in X$, $f_n(x) \to f(x)$ מתקיים $n_k(x) < \infty$ לכל $k \in \mathbb{N}$ ולכן מהנתון על התכנסות כמעט־תמיד נובע ש־$n_k^{-1}(\{\infty\})$ היא ממידה אפס לכל $k \in \mathbb{N}$.
נסתכל על הקרנות $(0, m)$ עבור $m \in \mathbb{N}$ ונקבל ש־n_k מדידה:

$$x \in n_k^{-1}((0, m)) \iff n_k(x) \geq m \iff x \in \bigcup_{N \geq m} \left\{x \mid |f_N(x) - f(x)| < \frac{1}{k}\right\}$$

והימנית מדידה, אז

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} n_k^{-1}((m, \infty]) = n_k^{-1}(\{\infty\})$$

מרציפות מלמעלה (ניתן להשתמש כי הנחנו שהמרחב מידה סופי).
אז לכל $k \in \mathbb{N}$ הסדרה $\mu(n_k^{-1}((m, \infty]))$ מתכנסת ל־0.
לכל $k \in \mathbb{N}$ נבחר m_k כך שלכל $m > m_k$ מתקיים

$$\mu(n_k^{-1}((m, \infty])) < \varepsilon \cdot 2^{-k} \implies \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} n_k^{-1}((m_k, \infty])\right) < \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon \cdot 2^{-k} = \varepsilon$$

אז $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} n_k^{-1}((m_k, \infty])$ ולכן לכל $x \in E^c$ ולכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים $x \notin n_k^{-1}((m_k, \infty])$ כלומר $n_k(x) \leq m_k(x)$ כלומר לכל $N \geq m_k$ מתקיים $|f_N(x) - f(x)| < \frac{1}{k}$ ולכן $f_n \to f$ במידה שווה ב־E^c. $\square$

9 מרחבי L^p

9.1 אי־שיוויון יאנסן

משפט 9.1.1 (אי־שיוויון יאנסן)**:** יהי $(X, \mathcal{A}, \mu)$ מרחב הסתברות ותהיי $\varphi : (a, b) \to \mathbb{R}$ קמורה.
אם $f : X \to (a, b)$ פונקציה מדידה, אזי

$$\varphi\left(\int_X f \,\mathrm{d}\mu\right) \leq \int_X \varphi \circ f \,\mathrm{d}\mu$$

הוכחה: נסמן $T := \int_X f \,\mathrm{d}\mu$ ונסמן $\beta := \sup_{s \in (a,T)} \left\{\frac{\varphi(T)-\varphi(s)}{T-s}\right\}$.
אזי לכל $s < T$ מתקיים

$$\varphi(T) - \varphi(s) \leq \beta(T - s) \Longrightarrow \varphi(T) - \beta(s - T)$$

והאי־שיוויון הזה מתקיים טריוויאלית עבור $s = T$.
לכל $T < s$ מהקמירות של φ מתקיים

$$\beta \leq \frac{\varphi(s) - \varphi(T)}{s - T}$$

ולכן נובע

$$\varphi(s) \geq \varphi(T) + \beta(s - T)$$

ולכן אי־השיוויון הזה מתקיים לכל $s \in (a, b)$ ולכל $x \in X$ מתקיים מהיות המרחב מרחב הסתברות

$$\varphi(f(x)) \geq \varphi(T) + \beta(f(x) - T) \Longrightarrow \int \varphi \circ f \,\mathrm{d}\mu \geq \varphi\left(\int f \,\mathrm{d}\mu\right) + \beta\left(\int f - T \,\mathrm{d}\mu\right) = \varphi\left(\int f \,\mathrm{d}\mu\right) + \cancel{\beta(T - T\mu(X))}$$

□

9.2 אי־שיוויון הולדר ואי־שיוויון מניקובסקי

משפט 9.2.1 (אי־שיוויון הולדר ואי־שיוויון מניקובסקי): יהי $(X,\mathcal{A},\mu)$ מרחב מידה ונניח כי $1\le p,q\le\infty$ ומקיימים

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

אז לכל f,g מדידות אי־שליליות מתקיימים

$$(1)\ \int_X fg\,\mathrm{d}\mu\le\left(\int_X f^p\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_X g^p\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$(2)\ \left(\int_X (f+g)^p\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}\le\left(\int_X f^p\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_X g^p\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

כאשר הראשון זה אי־שיוויון הולדר והשני הוא אי־שיוויון מניקובסקי ואם $p=q=2$ זה אי־שיוויון קושי־שוורץ.

הוכחה: נוכיח את (1) בהנחה ש־$\|f\|_p=\|g\|_q=1$ ונראה כי $\|fg\|_1\le 1$: $\log$ היא פונקציה קעורה ולכן אם נניח ש־$fg\neq 0$ נקבל

$$\log(fg)=\log f+\log g=\frac{\log f^p}{p}+\frac{\log g^q}{q}\le\log\left(\frac{f^p}{p}+\frac{g^q}{q}\right)$$

ואם נעלה את e בחזקת אלו נקבל

$$(\star)\ fg\le\frac{f^p}{p}+\frac{g^q}{q}$$

אי־שיוויון זה טריוויאלי במקרה שבו $fg=0$ ולכן נוכל להתעלם מההנחה הזאת ומלינאריות, מונוטוניות ומההנחה ש־$\|f\|_p=\|g\|_q=1$ נקבל

$$\int_X\frac{f^p}{p}+\frac{g^q}{q}\,\mathrm{d}\mu=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

ואם ניקח אינטגרל על שני האגפים, $(\star)$ יביא לנו $\|fg\|_1\le 1$.
כדי להוכיח את (2) נניח ש־$\|f\|_p=\|g\|_p=1$ ונשתמש בקמירות x^p ונקבל שלכל $t\in(0,1)$

$$((1-t)f+tg)^p\le(1-t)f^p+tg^p$$

ושוב מלינאריות וממונוטוניות

$$\int_X((1-t)f+tg)^p\,\mathrm{d}\mu=(1-t)+t=1$$

ולכן

$$\|(1-t)f+tg\|_p^p\le 1$$

כלומר $\|(1-t)f+tg\|\le 1$.
ללא ההנחה, נכתוב את $f+g$ כממוצע משוקלל של פונקציות מנורמה 1, כלומר $f=\|f\|_p\overline{p},\ g=\|g\|_p\overline{g}$ ונקבל

$$\|f+g\|_p=\left\|\overline{f}\cdot\|f\|_p+\overline{g}\|g\|_p\right\|_p=\left(\|f\|_p+\|g\|_p\right)\cdot\left\|\overline{f}\frac{\|g\|_p}{\|f\|_p+\|g\|_p}+\overline{g}\frac{\|f\|_p}{\|f\|_p+\|g\|_p}\right\|_p$$

נבחין שגורם המכפלה מימין הוא בדיוק ביטוי של נורמה של ממוצע משוקלל של פונקציות מנורמה 1 ולכן נוכל לחסום אותו מלעיל על־ידי 1 ולקבל

$$\|f+g\|_p\le\|f\|_p+\|g\|_p$$

□

9.3 $\mathcal{L}^p(\mu)$ הוא מרחב פסודו-נורמי מעל $\mathbb{C}$

משפט 9.3.1 ($\mathcal{L}^p(\mu)$ הוא מרחב פסודו-נורמי מעל $\mathbb{C}$): $\mathcal{L}^p(\mu)$ הוא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$.

הוכחה:

משפט 9.3.2: אם $p,q \in [1,\infty]$ חזקות צמודות ו־$f \in \mathcal{L}^p(\mu), g \in \mathcal{L}^q(\mu)$ אזי $f \cdot g \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

הוכחה: עבור $p,q \in (1,\infty)$ הטענה נובעת מאי־שיוויון הולדר. אם $p = 1$ ו־$q = \infty$ מתקיים $g \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$ וגם $|g(x)| \leq \|g\|_\infty (\star)$ μ־כמעט תמיד ולכן

$$\|f \cdot g\|_1 = \int_X |f \cdot g| \, \mathrm{d}\mu = \int_X |f| \cdot |g| \, \mathrm{d}\mu \underset{(\star)}{\leq} \int_X |f| \cdot \|g\|_\infty \, \mathrm{d}\mu = \|g\|_\infty \cdot \int_X |f| \, \mathrm{d}\mu < \infty$$

כלומר $\|f \cdot g\|_1 < \infty$ ולכן $f \cdot g \in \mathcal{L}^1(\mu)$. □

משפט 9.3.3 (אי־שיוויון המשולש של נורמת p): אם $p \in [1,\infty]$ אזי לכל $f,g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ מתקיים $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

הוכחה: אם $p \in (1,\infty)$ אז הטענה נובעת מאי־שיוויון מניקובסקי ואחרת הטענה נובעת מאי־שיוויון המשולש של הערך המוחלט ב־$\mathbb{R}$. □

הוכחה: נשאר להראות הומגניות – אם $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ ו־$\lambda \in \mathbb{C}$ אזי $\lambda \cdot f \in \mathcal{L}^p(\mu)$:

$$\int_X |f\lambda|^p \, \mathrm{d}\mu = \int_X (|\lambda| \cdot |f|)^p \, \mathrm{d}\mu = \int_X |\lambda|^p \cdot |f|^\lambda \, \mathrm{d}\mu = |\lambda|^p \int_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu < \infty$$

כאשר השתמשנו בתכונות ערך המוחלט ומההומוגניות האינטגרל למכפלה בקבוע.

אי־השיוויון האחרון נובע מהיות $|\lambda|^p < \infty$ ומהיות $\int |f|^p \, \mathrm{d}\mu < \infty$ כי $f \in \mathcal{L}^p$ ולכן המכפלה היא סופית. □

הערה: זה מרחב פסודו-נורמי כי זו לא באמת נורמה $f \equiv 0 \not\Longleftarrow \|f\|_p = 0$ אבל $\|f\|_p = 0$ אכן גורר $f \underset{\mu}{=} 0$.

9.4 טענות חשובות מתרגילי הבית

משפט 9.4.1 (טענות חשובות מתרגילי הבית):

משפט 9.4.2 (הכלת מרחבי L^p): יהי $(X, \mathcal{A}, \mu)$ מרחב מידה σ־סופי ויהיו $q \leq p \in [1, \infty]$. אז

1. $L^p(\mu) \subseteq L^q(\mu) \iff \mu(X) < \infty$
2. $L^q(\mu) \subseteq L^p(\mu) \iff \exists \varepsilon > 0,\ \forall A \in \mathcal{A},\ \mu(A) < \varepsilon \implies \mu(A) = 0$

משפט 9.4.3 (תכונות L^∞): נניח ש־$(X, \mathcal{A}, \mu)$ מרחב מידה סופי ותהיי $f \in L^\infty(\mu)$. אז

1. אם $\|f\|_\infty = 1$ אז הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ המוגדרת על־ידי $a_n = \int_X |f|^n \,\mathrm{d}\mu$ מתכנסת
2. אם $\|f\|_\infty > 0$ אזי

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|f\|_{n+1}^{n+1}}{\|f\|_n^n} = \|f\|_\infty$$

9.5 לכל $p\in[1,\infty]$, המרחב הנורמי $\left(L^{p}(\mu),\|\cdot\|_{p}\right)$ הוא מרחב בנך

משפט 9.5.1 (לכל $p\in[1,\infty]$ המרחב הנורמי $\left(L^{p}(\mu),\|\cdot\|_{p}\right)$ הוא מרחב בנך): לכל $p\in[1,\infty]$, המרחב הנורמי $\left(L^{p}(\mu),\|\cdot\|_{p}\right)$ הוא מרחב בנך.

הוכחה:

1. נניח ש־$p\in[1,\infty)$ ותהיי $\{f_n\}$ סדרת קושי, אז קיימת תת־סדרה המקיימת

$$\left\|f_{(n_i)+1}-f_{n_i}\right\|_p<2^{-i}$$

נגדיר

$$g_k:=\sum_{i=1}^{k-1}\left|f_{(n_i)+1}-f_{n_i}\right|$$

מאי־שיוויון מניקובסקי נקבל

$$\|g_k\|_p\le\sum_{i=1}^{k-1}\left\|f_{(n_i)+1}-f_{n_i}\right\|_p\le 1$$

ולכן $g_k\in L^p(\mu)$ לכל k וכן $g_1^p\le g_2^p\le\cdots$ וממשפט ההתכנסות המונוטונית מתקיים עבור $g=\sum_{i=1}^{\infty}\left|f_{(n_i)+1}-f_{n_i}\right|=\lim_{k\to\infty}g_k$

$$\int g^p\,\mathrm{d}\mu=\lim_{k\to\infty}\int g_k^p\,\mathrm{d}\mu\le\lim_{k\to\infty}\|g_k\|_p^p\le 1$$

ולכן $g\in L^p(\mu)$ ובפרט $g<\infty$ μ־כמעט תמיד ולכן

$$f=f_{n_1}+\sum_{i=1}^{\infty}\left(f_{(n_i)+1}-f_{n_i}\right)$$

מתכנסת בהחלט μ־כמעט תמיד ונגדיר $f=0$ היכן שהטור מתבדר ומכך שהטור טלסקופי נובע $f=\lim_{i\to\infty}f_{n_i}$ ויתר על־כן

$$\|f\|_p\le\left\|f_{n_1}\right\|_p+\|g\|_p<\infty\Longrightarrow f\in L^p(\mu)$$

מכך שהסדרה $\{f_n\}$ קושי נובע שלכל $\varepsilon>0$ יש N כך שלכל $n,m>N$ מתקיים $\|f_n-f_m\|_p<\varepsilon$ ולכן עבור $m>N$

$$\|f-f_m\|_p^p=\int\lim_{i\to\infty}\left|f_m-f_{n_i}\right|^p\mathrm{d}\mu\underset{\text{פאטו}}{\le}\liminf_{i\to\infty}\int\left|f_m-f_{n_i}\right|^p\mathrm{d}\mu=\liminf_{i\to\infty}\left\|f_m-f_{n_i}\right\|_p^p<\varepsilon^p\Longrightarrow\|f-f_n\|_p\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

2. נניח ש־$p=\infty$ ונסמן

$$A_n:=\left\{x\in X\mid |f_n|.\|f_n\|_\infty\right\}\qquad B_{n,m}:=\left\{x\in X\mid |f_n-f_m|>\|f_n-f_m\|_\infty\right\}$$

אז $E=\bigcup_{n,m}B_{n,m}\cup\bigcup_n A_n$ היא קבוצה מ־μ־מידה אפס (מהגדרת ess sup) ועל E^c מתקיים ש־$f_n\to f=\lim_{n\to\infty}f_n$ במידה שווה ולכן $\|f-f_n\|_\infty\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.

□

9.6 $L^p(\mu)$ צפופה ב־$\mathcal{S}$

משפט 9.6.1 ($\mathcal{S}$ צפופה ב־$(L^p(\mu)$): נסמן ב־$\mathcal{S}_f$ את אוסף הפונקציות הפשוטות $s : X \to \mathbb{C}$ המקיימות $\mu(\{x \in X \mid s(x) \neq 0\}) < \infty$.
אזי לכל $p \in [1, \infty)$, $\mathcal{S}_f$ צפופה ב־$L^p(\mu)$.

הוכחה: תהיי $0 \le f \in L^p(\mu)$ ותהיי $0 \le s_n \le f$ סדרת הפונקציות הפשוטות שמתכנסת אליה ונבחין $\mu(\{s_n \neq 0\}) < \infty$.
לכן $s_n \in \mathcal{S}_f$ וכן $|s_n - f| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ נקודתית ומתקיים

$$0 \le |f - s_n|^p \le f^p$$

לכן ממשפט ההתכנסות הנשלטת

$$\|f - s_n\|_p^p = \int |f - s_n|^p \,\mathrm{d}\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

כל $f \in L^p(\mu)$ היא צירוף לינארי של פונקציות אי־שליליות ב־$L^p(\mu)$ ומכאן הטענה. □

הערה (אי־נכונות הטענה ב־L^∞): $\mathcal{S}$ איננה צפופה ב־$L^\infty(\mathrm{Leb}_\mathbb{R})$: ניקח $f(x) = 1$ לכל $x \in \mathbb{R}$ ו־$f \in L^\infty(\mathbb{R})$ כי $\|f\|_\infty = 1$.
תהיי $s \in \mathcal{S}$ ולכן קיימת E כך ש־$\mu(E) < \infty$ ו־s נתמכת על E ולכן

$$s(x) = 0 \ \forall x \in E^c$$

אזי

$$\|f - s\|_\infty = \text{ess sup}_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - s(x)|$$

אבל $\mu(\mathbb{R}) = \infty$ ו־$\mu(E) < \infty$ ולכן $\mu(E^c) = \infty$ וכמובן איננה ממידה אפס ועל E^c מתקיים

$$|f(x) - s(x)| = |1 - 0| = 1 \Longrightarrow \|f - s\|_\infty \ge 1$$

אז אי אפשר לבנות סדרה שמתכנסת ל־0 ולכן $\mathcal{S}$ לא צפופה ב־$L^\infty(\mathrm{Leb}_\mathbb{R})$.

9.7 קירוב על־ידי פונקציות רציפות

משפט 9.7.1 (קירוב על־ידי פונקציות רציפות): יהי X מרחב האוסדרוף קומפקטי־מקומית ותהיי μ ממידת רדון על X.
לכל $p \in [1, \infty)$ הקבוצה $C_C(X)$ צפופה ב־$L^p(\mu)$.

הוכחה: מטענה שראינו מספיק להוכיח ש־$\mathcal{S}_f \subseteq \overline{C_C(X)}$.
תהיי $s \in \mathcal{S}_f$ אז s עומדת בתנאי משפט לוזין ולכן לכל $\varepsilon > 0$ קיימת פונקציה $g \in C_C(X)$ עבורה $\mu(\{s \neq g\}) < \varepsilon$.
יתר על־כן, ניתן לבחור g כך ש־$\sup g \leq \sup s$ ולכן

$$\|g - s\|_p^p = \int |g - s|^p \,\mathrm{d}\mu = \underbrace{\int_{\{s=g\}} |g - s|^p \,\mathrm{d}\mu}_{=0} + \underbrace{\int_{\{s \neq g\}} |g - s|^p \,\mathrm{d}\mu}_{\mu(\{s \neq g\} < \varepsilon)} \leq 0 + \varepsilon(2\|s\|_\infty)^p$$

□

הערה (אי־נכונות הטענה ב־L^∞): הדוגמה מהטענה הקודמת מראה את אי־נכונות הטענה גם כאן: מהגדרה, אם $f \in C_C(\mathbb{R})$ אז קיים $M \in \mathbb{R}^+$ כך שמחוץ לקטע $[-M, M]$ מתקיים $f(x) = 0$.
ניקח $g(x) = 1$ ו־$g \in L^\infty(\mathbb{R})$ שכן $\|g\|_\infty = 1$.
אם ננסה לקרב את $g(x)$ עם כל $f \in C_C(\mathbb{R})$ נקבל

$$\|g - f\|_\infty = \text{ess sup}_{x \in \mathbb{R}} |1 - f(x)|$$

אז מהיות $f \in C_C(\mathbb{R})$ נובע שעבור $|x| > M$ כלשהו מתקיים

$$|g(x) - f(x)| = |1 - 0| = 1$$

כלומר $\|g - f\|_\infty \geq 1$ ולכן לא ניתן לקרב ו־$C_C(\mathbb{R})$ לא צפופה ב־$L^\infty(\mathbb{R})$.

10 יחסים בין מידות

תהיינה μ, ν מידות על מרחב מדיד $(X, \mathcal{A})$.

הגדרה 10.0.1 (מידה רציפה בהחלט, מידות שקולות): נאמר ש־ν **רציפה בהחלט** ביחס ל־μ ונסמן $\nu \ll \mu$ אם ורק אם

$$\forall E \in \mathcal{A},\ \mu(E) = 0 \Longrightarrow \nu(E) = 0$$

נגיד שהמידות הן **שקולות** ונסמן $\mu \sim \nu$ אם ורק אם $\nu \ll \mu$ וגם $\mu \ll \nu$, כלומר $\forall E \in \mathcal{A}, \mu(E) = 0 \iff \nu(E) = 0$.

הגדרה 10.0.2 (מידות סינגולריות): נאמר ש־μ ו־ν **סינגולריות** ונסמן $\nu \perp \mu$ אם ורק אם קיימות $A, B \in \mathcal{A}$ מדידות וזרות כך שמתקיים $\mu(A^c) = \mu(B^c) = 0$ (באופן שקול, אם $A \uplus B = X$ ו־$\nu(B) = \mu(A) = 0$).

10.1 טענה שקולה לרציפות בהחלט במרחב סופי

משפט 10.1.1 (טענה שקולה לרציפות בהחלט במרחב סופי): אם μ סופית אז $\nu \ll \mu$ אם ורק אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם $\nu(A) < \delta$ אזי $\mu(A) < \varepsilon$.

הוכחה: $\Longleftarrow$ נניח כי $\nu \ll \mu$. יהי $\varepsilon > 0$ ונניח בשלילה שלכל $n \in \mathbb{N}$ קיימת A_n עם $\nu(A_n) < 2^{-n}$ כך ש־$\mu(A^n) > \varepsilon$.

לפי בורל־קנטלי $\nu(\cap \cup A_n) = 0$ אבל מרציפות בהחלט ומסופיות μ

$$\mu\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n\right) = \mu(\limsup A_n) \geq \limsup \mu(A_n) \geq \varepsilon$$

$\Longrightarrow$ נניח כי $\nu(A) = 0$ אז $\nu(A) < \delta$ לכל $\delta > 0$ ולכן $\mu(A) < \varepsilon$ לכל $\varepsilon > 0$ ולכן $\mu(A) = 0$. □

10.2 טענה שקולה לרציפות בהחלט במרחב σ־סופי

משפט 10.2.1 (טענה שקולה לרציפות בהחלט במרחב σ־סופי): אם μ מידה σ־סופית ו־ν מידה כלשהי אז $\nu \ll \mu$ אם ורק אם $\nu|_A \ll \mu|_A$ לכל A עם $\mu(A) < \infty$.

הוכחה: $\Longleftarrow$ כי אם $\nu \ll \mu$ זה נכון גם לצמצום.

$\Longrightarrow$ נכתוב $X = \bigcup_n A_n$ עם $\mu(A_n) < \infty$ ונניח כי $\mu(E) = 0$ אז $E_n = A_n \cap E$ ומהיות $\mu(E) = 0$ נובע כי $\mu(E_n) = 0$ ממונוטוניות המידה (כי חיתוך קבוצות מדידות הוא קבוצה מדידה) ולכן $\mu|_{A_n}(E) = 0$ ומההנחה נקבל

$$\nu|_{A_n}(E) = 0 = \nu(E \cap A_n) \Longrightarrow \nu(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E \cap E_n) = 0$$

□

10.3 תנאי שקול למידת האפס

משפט 10.3.1 (אם מידה רציפה בהחלט וסינגולרית ביחס למידה אחרת היא מידת האפס): אם $\mu \ll \nu$ וגם $\mu \perp \nu$ אז μ היא מידת האפס.

הוכחה: מהסינגולריות של המידות נובע כי μ נתמכת על הקבוצה A כך ש־$\nu(A) = 0$ ומרציפות בהחלט נובע כי $\mu(A) = 0$, כלומר $\mu \equiv 0$. □

10.4 תנאי שקול לסינגולריות על מידות חיוביות

משפט 10.4.1 (תנאי שקול לסינגולריות על מידות חיוביות): תהיינה μ, ν מידות חיוביות על X.
אז $\nu \perp \mu$ אם ורק אם לכל $\varepsilon > 0$ קיימת קבוצה $A \subset X$ מדידה כך ש־$\mu(A) < \varepsilon, \nu(A^c) < \varepsilon$.

הוכחה: $\Longleftarrow$ אם $\nu \perp \mu$ אזי קיימת קבוצה A כך ש־$\mu(A) = 0$ ו־$\nu(A^c) = 0$, כנדרש.
$\Longrightarrow$ נבחר $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת קבוצות כך שמתקיים $\mu(A_n) < 2^{-n}, \nu(A_n^c) < 2^{-n}$.
נגדיר $A = \limsup A_n$ ומבורל־קנטלי נקבל $\mu(A) = 0$; מצד שני מהלמה של פאטו $\nu(A^c) = \nu(\liminf A_n^c) \leq \liminf \nu(A_n^c) = 0$. □

10.5 מסקנה מתרגילי הבית

משפט 10.5.1 (מסקנה מתרגילי הבית): $\mu, \nu_1, \nu_2, \ldots$ מידות חיוביות על X ונגדיר $\nu = \sum_{i=1}^{\infty} \nu_i$ אזי

$$(1)\ \forall i \in \mathbb{N},\ \nu_i \perp \mu \Longrightarrow \nu \perp \mu \qquad (2)\ \forall i \in \mathbb{N},\ \nu_i \ll \mu \Longrightarrow \nu \ll \mu$$

11 מרחבי הילברט

11.1 משפט ההצגה של Riesz–Fréchet

תזכורת:

$$\mathcal{H}^* := \left\{\phi \in \mathrm{Hom}(\mathcal{H},\mathbb{C}) \mid \|\phi\|_{\mathsf{op}} < \infty\right\}$$

משפט 11.1.1 (משפט ההצגה של Riesz–Fréchet): יהי $\mathcal{H}$ מרחב הילברט, ההעתקה ששולחת כל וקטור $h \in \mathcal{H}$ לפונקציונל $\phi_h(x) := \langle x, h\rangle$ הינה איזומורפיזם צמוד־לינארי בין $\mathcal{H}$ ל־$\mathcal{H}^*$ שהיינה גם איזומטריה.

הוכחה: מהגדרת המכפלה הפנימית נסיק $\phi_h \mapsto h$ היא צמודה־לינארית.
מאי־שיוויון קושי־שוורץ לכל $\|x\| = 1$ מתקיים

$$|\varphi_h(x)| = |\langle x,h\rangle| \le \|x\| \cdot \|h\| = \|h\|$$

נובע אם כך $\|\phi_h\|_{\mathsf{op}} \le \|h\|$ אבל $\frac{h}{\|h\|}$ הוא מנורמה 1 ומקיים $\phi_h\left(\frac{h}{\|h\|}\right) = \langle \frac{h}{\|h\|}\ ,\ h\rangle = \|h\|$ אז $\|\phi_h\|_{\mathsf{op}} = \|h\|$ ולכן ההעתקה היא איזומטריה.
יהי $\ell \in \mathcal{H}^*$ ונסמן $V = \ker \ell$, אז $V \subseteq \mathcal{H}$ תת־מרחב סגור כי ℓ פונקציונל חסום ולכן רציף ו־V היא המקור של קבוצה סגורה $\{0\}$.
אם $V = \mathcal{H}$ אז $\ell = \phi_0$; אחרת, $V \subset \mathcal{H}$ ולכן קיים $0 \neq z \in V^{\perp}$ אז נוכיח שהוקטור $w = \frac{\overline{\ell(z)}}{\|z\|^2} \cdot z$ מקיים $\ell = \phi_w$.
ואכן לכל $x \in \mathcal{H}$ מתקיים

$$\ell(\ell(z) \cdot x - \ell(x) \cdot z) = \ell(z) \cdot \ell(x) - \ell(x) \cdot \ell(z) = 0$$
$$\Longrightarrow \ell(z) \cdot x - \ell(x) \cdot z \in \ker \ell = V$$
$$\Longrightarrow \langle \ell(z) \cdot x - \ell(x) \cdot z\ ,\ z\rangle = 0$$
$$\Longrightarrow \ell(x) = \langle x\ ,\ \frac{\overline{\ell(z)}}{\|z\|^2} \cdot z\rangle \Longrightarrow \ell = \phi_w$$

□

11.2 אם μ איננה מידת האפס אז יש מידה סופית ששקולה לה

משפט 11.2.1: אם $\mu \neq 0$ מידה σ־סופית על מרחב מדיד $(X, \mathcal{A})$, אזי קיימת מידה סופית ν על $(X, \mathcal{A})$ כך ש־$\nu \sim \mu$.

הוכחה: מהיות $(X, \mathcal{A}, \mu)$ מרחב מידה σ־סופי נובע שקיים אוסף $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ עם $\mu(A_n)$ לכל $n \in \mathbb{N}$ כך ש־A_n $X = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$.
נגדיר $w : X \to [0, 1]$ על־ידי

$$w(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n}}{1 + \mu(A_n)} \cdot \mathbb{1}_{A_n}(x)$$

ו־w מדידה כגבול של סדרת פונקציות שהן צירופים לינאריים סופיים של פונקציות מציינות שהן כמובן מדידות.
נשים לב שמתקיים $0 \leq w \leq 1$ שכן לכל $x \in X$ ברור שהביטוי אי־שלילי ומה־σ־סופיות נובע שקיים לפחות $N \in \mathbb{N}$ אחד כך ש־$x \in A_n$ ולכן

$$w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n}}{1 + \mu(A_n)} \cdot \mathbb{1}_{A_n}(x) \geq \frac{2^{-n}}{1 + \mu(A_n)} \cdot \mathbb{1}_{A_n}(x) = \frac{2^{-n}}{1 + \mu(A_n)} > 0$$

בנוסף, מהיות $\mu(A_n) > 0$ נובע כי $1 + \mu(A_n) > 1$ ולכן $\frac{1}{1+\mu(A_n)} \leq 1$, אז

$$0 < w \underset{\text{הורדנו אינדקטור}}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n}}{1 + \mu(A_n)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1 \Longrightarrow w(x) \in (0, 1]$$

אז נגדיר $u : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ מידה המוגדרת על־ידי $\mathrm{d}\nu = w\,\mathrm{d}\mu$ ראינו שזאת מידה וש־$\nu \ll \mu$, נשאר להראות $\mu \ll \nu$, ואכן:
תהיי $E \in \mathcal{A}$ כך ש־$\int_E w\,\mathrm{d}\mu = \nu(E) = 0$.
מהיות $w > 0$ נסיק כי $\mu(E) = 0$ כי אחרת אם $w > 0$ וגם $\mu(E) > 0$ נקבל כי $0 = \nu(E) = \int_E w\,\mathrm{d}\mu > 0$ בסתירה ולכן $\mu \ll \nu$.
מצאנו ש־$\nu \ll \mu$ וכן $\mu \ll \nu$ ולכן מהגדרה $\nu \sim \mu$ קרי המידות שקולות. □

12 נגזרת רדון־ניקודים

12.1 משפט נגזרת רדון־ניקודים־לבג

משפט 12.1.1 (משפט נגזרת רדון־ניקודים־לבג): יהי $(X,\mathcal{A})$ מרחב מדיד ויהיו μ,ν שתי מידות σ־סופיות על X.
אזי קיימות ויחידות שתי מידות ν_a,ν_s המקיימות $\nu=\nu_a+\nu_s$ כאשר $\nu_a\ll\mu$ וגם $\nu_s\perp\mu$ (פירוק לבג).
כמו־כן, קיימת ויחידה $h:X\to[0,\infty)$ מדידה עבורה מתקיים $\mathrm{d}\nu_a=h\,\mathrm{d}\mu$ ונקרא ל־h נגזרת רדון־ניקודים של ν_a ביחס ל־μ ונסמנה $\frac{\mathrm{d}\nu_a}{\mathrm{d}\mu}$.
יתר על־כן אם ν סופית אזי $h\in L^1(\mu)$.

הוכחה:

1. נניח שהטענה נכונה כאשר ν מידה סופית ו־μ מידה σ־סופית ונראה את הנכונות עבור מידות μ,ν שהן σ־סופיות:
המרחב $(X,\mathcal{A},\nu)$ הוא מרחב σ־סופי נובע שקיים אוסף $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{A}$ של קבוצות מדידות ממידה סופית תחת ν ובלי הגבלת הכלליות נניח שהן זרות זו מזו (תמיד ניתן להזיר אותם) כך ש־$X\underset{(\star)}{=}\biguplus_{n=1}^{\infty}A_n$ ולכל $n\in\mathbb{N}$ נסמן את מרחב המידה המצומצם

$$v_n:=\nu|_{A_n}\qquad\mathcal{A}_n:=\mathcal{A}|_{A_n}$$

אז ν_n מידה על מרחב מדיד מצומצם ומהסופיות של ν_n נובע שגם $(A_n,\mathcal{A}_n)$ מרחב מידה סופי.
מ־$(\star)$ נובע כי $\nu=\sum_{n=1}^{\infty}\nu_n$ ומההנחה ניתן ליישם את הטענה עבור המידות μ ו־ν_n על $(A_n,\mathcal{A}_n)$:
אז קיימות $\nu_{n,a},\nu_{n,s}$ על $(A_n,\mathcal{A}_n)$ עם $\nu_{n,a}\ll\mu$ וגם $\nu_{n,s}\perp\mu$ כך ש־$\nu_n=\nu_{n,a}+\nu_{n,s}$ אז נגדיר

$$\nu_s:=\sum_{n=1}^{\infty}\nu_{n,s}\qquad\nu_a:=\sum_{n=1}^{\infty}\nu_{n,a}$$

ונקבל אם כך

$$\nu=\sum_{n=1}^{\infty}\nu_n=\sum_{n=1}^{\infty}\nu_{n,a}+\nu_{s,n}=\sum_{n=1}^{\infty}\nu_{n,a}+\sum_{n=1}^{\infty}\nu_{s,n}=\nu_a+\nu_s$$

ולכל $n\in\mathbb{N}$:

1. אם $E\in\mathcal{A}_n$ עם $\mu(E)=0$ אזי $\nu_{n,a}\ll\mu$ ולכן $\nu_{n,a}(E)=0$, מכאן ש־$\nu_a(E)=\sum_{n=1}^{\infty}\nu_{n,a}=0$ ולכן $\nu_a\ll\mu$
2. מכך ש־$\nu_{n,s}\perp\mu$ ולכן קיימות $A,B\in\mathcal{A}$ מדידות וזרות כך ש־$\mu(A^c)=\nu_{n,s}(B^c)=0$ ולכן

$$\nu_s(B^c)=\sum_{n=1}^{\infty}\nu_{n,s}(B^c)=0=\mu(A^c)\implies\nu_s\perp\mu$$

2. נניח ש־ν מידה סופית.
מטענה שראינו נובע שקיימת פונקציה מדידה וחיובית $w:X\to(0,1]$ שעבורה $w\,\mathrm{d}\mu$ היא ממידה סופית אז נגדיר את המידה הסופית $\mathrm{d}\lambda=\mathrm{d}\nu+w\,\mathrm{d}\mu$ לכל $f\in L^2(\lambda)$ מתקיים

$$\left|\int f\,\mathrm{d}\nu\right|\le\int|f|\,\mathrm{d}\nu\le\int|f|(\mathrm{d}\nu+w\,\mathrm{d}\mu)=\int|f|\cdot1\,\mathrm{d}\lambda\underset{\text{קושי־שוורץ}}{\le}\sqrt{\int|f|^2\,\mathrm{d}\lambda}\sqrt{\int|1^2|\,\mathrm{d}\lambda}=\sqrt{\lambda(X)}\|f\|_{L^2(\lambda)}$$

אז הפונקציונל $\phi:L^2(\lambda)\to\mathbb{C}$ הנתון על־ידי $\phi(f)=\int f\,\mathrm{d}\nu$ הוא חסום וממשפט הצגה של פרשה־ריס נסיק שקיימת $g\in L^2(\lambda)$ כך שלכל $f\in L^2(\lambda)$ מתקיים

$$(\triangle)\quad\int f\,\mathrm{d}\nu=\phi(f)=\int f\cdot g\,\mathrm{d}\lambda$$

לכל $E\in\mathcal{A}$ עם $\lambda(E)>0$ מתקיים $\mathbb{1}_E\in L^2(\lambda)$ ולכן $\nu(E)=\int_E g\,\mathrm{d}\lambda$, כלומר

$$0\le\frac{\nu(E)}{\lambda(E)}=\frac{1}{\lambda(E)}\int_E g\,\mathrm{d}\lambda\le1$$

מלמה שראינו על ממוצעים של פונקציות על קבוצות מדידות נסיק $0\le g\le1$ λ־כמעט תמיד ועל־ידי שינוי של g על קבוצה מ־λ־מידה אפס נוכל להסיק כי $0\le g\le1$ תמיד נגדיר

$$A:=\{x\in X\mid g(x)\in[0,1)\}\qquad B:=\{x\in X\mid g(x)=1\}$$
$$\nu_a:=\nu|_A\qquad\nu_s:=\nu|_B$$

מכך ש-$X = A \uplus B$ הרי ש-$\nu = \nu_a + \nu_s$.
שכתוב של $\triangle$ מביא שלכל f

$$\int f \,\mathrm{d}\nu = \int fg \,\mathrm{d}\nu + \int fgw \,\mathrm{d}\mu \underset{(\star)}{\iff} \int f(1-g) \,\mathrm{d}\nu = \int fgw \,\mathrm{d}\mu$$

נראה ש-$\mu \perp \nu_s$: מהיות $(1-g)|_B \equiv 0$ אז $f = \mathbb{1}_B$ ומ-$(\star)$ נקבל

$$0 = \int_B (1-g) \,\mathrm{d}\nu = \int_B gw \,\mathrm{d}\mu$$

אבל $w > 0$ ולכן $\mu(B) = 0$ ולכן $\nu_s(B^c) = 0 = \mu(B)$ כלומר $\nu_s \perp \mu$.
נראה ש-$\nu_a \ll \mu$: כי $f = (1+g+g^2+\cdots+g^n)\mathbb{1}_E$ אז עבור $E \in \mathcal{A}$ מ-$(\star)$ נקבל

$$\int_E (1-g^{n+1}) \,\mathrm{d}\nu = \int_E (1+g+g^2+\cdots+g^n)gw \,\mathrm{d}\mu$$

אבל $g|_A < 1$ והרי $1_{A\cap E} \nearrow (1-g^{n+1})\mathbb{1}_E$ מונטונית ולכן באגף שמאל נקבל

$$\int_E (1-g^{n+1}) \,\mathrm{d}\nu \xrightarrow[n\to\infty]{} \nu(A\cap E) = \nu_a(E)$$

מצד שני $h \nearrow (1+g+g^2+\cdots+g^n)gw$ מתכנסת מונוטונית ל-h מדידה ב-$[0,\infty)$ ולכן באגף ימין

$$\int_E (1+g+g^2+\cdots+g^n)gw \,\mathrm{d}\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_E h \,\mathrm{d}\mu$$

אז $\mathrm{d}\nu_a = h \,\mathrm{d}\mu$ ולכן $\nu_a \ll \mu$.
מכך ש-ν_a ממידה סופית נסיק כי $h \in L^1(\mu)$.

$\square$

12.2 איך מחשבים נגזרת רדון־ניקודים

נניח שיש לנו את המידות μ, ν ואנחנו רוצים לחשב את הנגזרת רדון־ניקודים $\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$.

1. קודם כל חייב להתקיים $\nu \ll \mu$ כלומר אם $\mu(E) = 0$ אזי $\nu(E) = 0$ אחרת תנאי המשפט לא מתקיימים
2. כמו־כן, חייב שהמרחב שעלינו אנחנו מחשבים הוא σ־סופי
3. חלוקה למקרים של "מסת" המידות

1. אם ν מוגדרת על־ידי חלוקה כלשהי – נניח $\nu(E) = \sum a_n \mu(E_n \cap E)$ כאשר $\{E_n\}$ חלוקה של המרחב, אז אם נכתוב

$$\nu(E) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{E\cap E_n} a_n \, \mathrm{d}\lambda = \int_E \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \mathbb{1}_{E_n}(x) \, \mathrm{d}\lambda(x) \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\lambda}(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \mathbb{1}_{E_n}(x)$$

כלומר הערך בתוך האינטגרל הוא הנגזרת רדון־ניקודים

2. אם לשתי המידות יש צפיפות – כלומר μ, ν מוגדרות על $\mathbb{R}$ עם צפיפויות $g(x), h(x)$ ביחס למידת לבג אז

$$\mathrm{d}\nu = h(x) \, \mathrm{d}x \qquad \mathrm{d}\mu = g(x) \, \mathrm{d}x$$

אזי

$$\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}(x) = \frac{h(x)}{g(x)}$$

כאשר זה מוגדר μ־כמעט בכל מקום כאשר $g(x) > 0$

3. המשפט היסודי של האלגברה – אם μ מידת לבג ו־$F(x) = \nu((-\infty, x])$ (כלומר F היא רציפה בהחלט) אזי

$$\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\lambda}(x) = F'(x)$$

4. החלפת משתנה ודחיפה קדימה של המידה – אם $\nu = f_* \mu$ ואנחנו רוצים את נגזרת רדון־ניקודים ביחס ל־μ זה פשוט היעקוביאן.
אם $T : X \to X$ (במימד אחד לנוחות) גזירה ו־$\nu(E) = \mu(T^{-1}(E))$ אזי

$$\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}(x) = \frac{1}{|T'(T^{-1}(x))|}$$

13 גזירה של מידות רדון ב-$\mathbb{R}^d$

13.1 מסקנות ממשפט הכיסוי של בסיקוביץ'

מסקנה 13.1.1 (מסקנה 1): תהיי μ מידת בורל סופית על $\mathbb{R}^d$ (בפרט מידת רדון) ותהיי $A \subseteq \mathbb{R}^d$ חסומה. אז לכל כיסוי בסיקוביץ' $\mathcal{F}$ של A קיים תת־אוסף $\tilde{\mathcal{E}} \subseteq \mathcal{F}$ סופי של כדורים אוקלידיים סגורים וזרים בזוגות המקיימים $\mu\left(\bigcup_{B\in\tilde{\mathcal{E}}} B\right) \geq \frac{1}{2Q}\mu(A)$, כאשר Q הקבוע האוניברסלי ממשפט הכיסוי.

הוכחה: ממשפט הכיסוי קיימים תתי־אוספים $\mathcal{E}_1, ..., \mathcal{E}_Q$ (אולי חלקם ריקים) שמהווים חלוקה של תת־הכיסוי $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$ המובטח ממשפט הכיסוי. אזי

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup \mathcal{E} \cap A\right) = \sum_{i=1}^{Q} \mu\left(\left(\bigcup \mathcal{E}_i\right) \cap A\right)$$

ולכן לא ייתכן שקיים $1 \leq i \leq Q$ שעבורו מתקיים $\mu(\bigcup \mathcal{E}_i \cap A) < \frac{1}{Q}\mu(A)$.

לכן קיים $i_0 \in [Q]$ המקיים $\mu(\bigcup \mathcal{E}_i \cap A) \geq \frac{1}{Q}\mu(A)$ ומאחר ש־$\mathcal{E}_i$ אוסף בן־מנייה של כדורים זרים בזוגות, ניתן לחלץ תת־אוסף סופי $\tilde{\mathcal{E}} \subseteq \mathcal{E}_i$ ממידה $\mu\left(\bigcup \tilde{\mathcal{E}} \cap A\right) \geq \frac{1}{2Q}\mu(A)$. □

מסקנה 13.1.2 (מסקנה 2): תהיי μ מידת רדון על $\mathbb{R}^d$ ותהיי $A \subseteq \mathbb{R}^d$ מדידה עם כיסוי בסיקוביץ' $\mathcal{F}$ המקיים שלכל $x \in A$ מתקיים $\inf\{r \mid B_r(x) \in \mathcal{F}\} = 0$.

אז קיים תת־אוסף בן־מנייה $\tilde{\mathcal{E}} \subseteq \mathcal{F}$ המורכב מכדורים זרים בזוגות המקיים $\mu\left(A \setminus \bigcup \tilde{\mathcal{E}}\right)$.

הוכחה: נניח ש־$A \subseteq \mathbb{R}^d$ חסומה.

אז מהיות μ מידת רדון היא סופית על קומפקטיות ורגולרית חיצונית ולכן קיימת $A \subseteq U$ פתוחה המקיימת $\mu(U) < \left(1 + \frac{1}{4Q}\right)\mu(A)$.

נזרוק מ־$\mathcal{F}$ את כל הכדורים שלא מוכלים ב־U ומהמסקנה לעיל נובע שקיים תת־אוסף סופי $\tilde{\mathcal{E}}_1 \subseteq \mathcal{F}$ המקיים $\mu\left(\bigcup \tilde{\mathcal{E}}_1 \cap A\right) \geq \frac{1}{2Q}\mu(A)$.

נסמן $A_1 := A \setminus \bigcup \tilde{\mathcal{E}}_1$ ונקבל

$$\mu(A_1) \leq \mu\left(U \setminus \bigcup \tilde{\mathcal{E}}_1\right) \leq \mu(U) - \mu\left(\bigcup \tilde{\mathcal{E}}_1\right) \leq \left(1 + \frac{1}{4Q}\right)\mu(A) - \frac{1}{2Q}\mu(A) = \left(1 - \frac{1}{4Q}\right)\mu(A)$$

ניקח $A_1 \subseteq U_1$ פתוחה עם $\mu(U_1) < \left(1 + \frac{1}{4Q}\right)\mu(A_1)$ ונחזור על התהליך עד שנקבל $\mu(A_n) = 0$ או עד אינסוף.

נגדיר $\tilde{\mathcal{E}} := \bigcup_{i=1}^{\infty} \tilde{\mathcal{E}}_n$ ומהבנייה לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$\mu\left(A \setminus \bigcup \tilde{\mathcal{E}}\right) \leq \mu(A_n) \leq \left(1 - \frac{1}{4Q}\right)^n \mu(A) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

וכן $\tilde{\mathcal{E}} \subseteq \mathcal{F}$ מורכב מכדורים זרים בזוגות וסיימנו.

אם $A \subseteq \mathbb{R}^d$ אינה חסומה, נוכל לחלק את $\mathbb{R}^d$ לאוסף בן־מנייה של תתי־קבוצות פתוחות, זרות וחסומות ולקבוצה מ־μ־מידה אפס.

מאחר ש־μ סופית על קומפקטיות הרי שיש לכל היותר מספר בן־מנייה של ספירות סביב הראשית ממידה חיובית.

אילו היה אוסף לא בן־מניהי של ספירות ממידה חיובית $(\partial B_r(0))$ אז היו קיימות מספר אינסופי ולא בן־מניה של ספירות ממידה $\delta > 0$ המוכלות ב־$B_R(0)$ עבור $R, \delta > 0$ כלשהו וזו סתירה לכך ש־$\mu(B_R(0)) < \infty$.

לכן קיימים $r_n \nearrow \infty$ עם $r_{n+1} - r_n > 1$ עם ספירה ממידה אפס ואם נחלק את A לאיחוד בן־מנייה על רכיבי הקשירות הנותרים ונפעיל את הטיעון על קבוצות חסומות נקבל את הטענה. □

13.2 משפט לב הגזירה

משפט 13.2.1 (משפט לב הגזירה): תהיינה λ, μ מידות רדון על $\mathbb{R}^d$ ו־$A \subseteq \mathbb{R}^d$ קבוצה מדידה וחסומה ו־$0 < t < \infty$

1. אם $\underline{D}(\mu,\lambda,x) \le t$ לכל $x \in A$ אזי $\mu(A) \le t \cdot \lambda(A)$
2. אם $\overline{D}(\mu,\lambda,x) \ge t$ לכל $x \in A$ אזי $\mu(A) \ge t \cdot \lambda(A)$

הוכחה: נוכיח את (1) ו־(2) הוא אנלוגי.

$\varepsilon > 0$ אזי קיים כיסוי בסיקוביץ' $\mathcal{F}$ של A המקיים

$$(1)\ \forall B \in \mathcal{F}, \frac{\mu(B)}{\lambda(B)} < t + \varepsilon \qquad (2)\ \forall x \in A, \inf\{r \mid B_r(x) \in \mathcal{F}\} = 0$$

מהיות μ מידת רדון נוכל לבחור $A \subseteq U$ פתוחה עבורה מתקיים $\lambda(U) < \lambda(A) + \varepsilon$ $(\star)$.

נזרוק מ־$\mathcal{F}$ את כל הכדורים שלא מוכלים ב־U והכיסוי החדש עדיין מקיים את $(1), (2)$ ובפרט זה עדיין כיסוי בסיקוביץ' (בגלל (2)).

ממשפט שראינו נובע שקיים תת־אוסף בן־מנייה $\tilde{E} \subseteq \mathcal{F}$ של כדורי זרים בזוגות עם $\mu\left(A \setminus \bigcup \tilde{E}\right) = 0$ ולכן משימוש במונוטוניות נקבל

$$\mu(A) \le \mu\Big(\bigcup \tilde{E}\Big) + \mu\Big(A \setminus \bigcup \tilde{E}\Big) \underset{\text{תת־אדטיביות}}{\le} \sum_{B \in \tilde{E}} \mu(B) \underset{(1)}{\le} \sum_{B \in \tilde{E}} (t+\varepsilon)\lambda(B) \underset{(\star\star)}{=} (t+\varepsilon) \cdot \lambda\Big(\bigcup \tilde{E}\Big)$$

$$\underset{(\star)}{\le} (t+\varepsilon)\lambda(U) \underset{(\star)}{\le} (t+\varepsilon)(\lambda(A)+\varepsilon) = t \cdot \lambda(A) + \varepsilon(\lambda(A)+\varepsilon+t) \underset{\varepsilon \to 0}{\to} t \cdot \lambda(A)$$

כאשר $(\star\star)$ נובע מכך שזה אוסף זר של כדורים זרים בזוגות ומ־σ־אדטיביות.

$\square$

13.3 משפט הגזירה של לבג־בסיקוביץ'

משפט 13.3.1 (משפט הגזירה של לבג־בסיקוביץ'): תהיינה λ,μ מידות רדון על $\mathbb{R}^d$

1. $D(\mu,\lambda,x)$ קיים וסופי λ־כמעט תמיד
2. $\underline{D}(\mu,\lambda,x)<\infty$ μ־כמעט תמיד אם ורק אם $\mu\ll\lambda$
3. אם $\mu\ll\lambda$ אזי $D(\mu,\lambda,x)=\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\lambda}$

הוכחה:

1. לכל $0<r<\infty, 0\le s<t<\infty$ נגדיר

$$A_{s,t,r}\coloneqq\left\{x\in B_r(0)\mid \underline{D}(\mu,\lambda,x)\le s<t\le\overline{D}(\mu,\lambda,x)\right\}\qquad A_{t,r}\coloneqq\left\{x\in B_r(0)\mid\overline{D}(\mu,\lambda,x)\ge t\right\}$$

ומתקיים $A_{s,t,r}\subseteq A_{t,r}$ מתקיים מטענה על גזירה שראינו

$$t\cdot\lambda\left(A_{s,t,r}\right)\underset{\overline{D}\ge t}{\le}\mu\left(A_{s,t,r}\right)\underset{\underline{D}\le s}{\le}\cdot\lambda\left(A_{s,t,r}\right)$$

ומהיות $s<t$ ו־$\lambda\left(A_{s,t,r}\right)<\infty$ הרי ש־$\lambda\left(A_{s,t,r}\right)=0$ לכל $s<t,r$. עבור $A_{t,r}$ מתקיים

$$t\cdot\lambda\left(A_{t,r}\right)\le\mu\left(A_{t,r}\right)\le\mu(B_r(0))<\infty$$

נסמן

$$A_{\infty,r}\coloneqq\left\{x\in B_r(0)\mid\overline{D}(\mu,\lambda,x)=\infty\right\}$$

ולכן $A_{\infty,r}=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}A_{n,r}$ מהיות $\lambda(A_1,r)<\infty$ וממונוטוניות לסדרות יורדות נסיק

$$\lambda\left(A_{\infty,r}\right)=\lim_{n\to\infty}\lambda\left(A_{n,r}\right)\le\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\mu(B_r(0))=0$$

אזי

$$\left\{x\in B_r(0)\mid\overline{D}(\mu,\lambda,x)=0\ \text{או}\ D(\mu,\lambda,x)\ \text{לא קיים}\right\}=A_{\infty,r}\bigcup_{s<t\in\mathbb{Q}}A_{s,t,r}$$

זה איחוד בן־מנייה של קבוצות מ־λ־מידה אפס ולכן זה נכון לכל $r>0$ וזה גורר את 1

2. $\Longrightarrow$ אם $\mu\ll\lambda$ אז מ־(1) נובע ש־$D<\infty$ קיים μ־כמעט תמיד.
$\Longleftarrow$ אם A עם $\lambda(A)=0$, אז אם $\underline{D}(\mu,\lambda,x)<\infty$ μ־כמעט תמיד אז

$$\mu(A)=\mu\left(\bigcup_{\substack{n\in\mathbb{N}\\k\in\mathbb{N}}}A_{n,k}\right)$$

כאשר

$$A_{n,k}\coloneqq\{x\in A\cap B_k(0)\mid\underline{D}(\mu,\lambda,x)\le n\}$$

ולכן מטענה שראינו נובע

$$\mu\left(A_{n,k}\right)\le n\cdot\lambda\left(A_{n,k}\right)\le n\cdot\lambda(A)=0\Longrightarrow\mu(A)=0\Longrightarrow\mu\ll\lambda$$

3. תהיי $B\subseteq\mathbb{R}^d$ מדידה וחסומה כלשהי ונראה ש־$\int_B D(\mu,\lambda,x)\,\mathrm{d}\lambda\le\mu(B)$ ויתקיים שוויון כאשר $\mu\ll\lambda$.
נבחר $1<t<\infty$ כלשהו ונסמן עבור $p\in\mathbb{Z}$

$$B_+\coloneqq\{x\in B\mid 0<D(\mu,\lambda,x)<\infty\}=\bigcupdot_{p\in\mathbb{Z}}B_p\qquad B_p\coloneqq\{x\in B\mid t^p\le D(\mu,\lambda,x)\le T^{p+1}\}$$

אז

$$\int_B D(\mu,\lambda,x)\,\mathrm{d}\lambda\underset{(1)}{=}\int_{B_+}D(\mu,\lambda,x)\,\mathrm{d}\lambda=\sum_{p\in\mathbb{Z}}\int_{B_p}D(\mu,\lambda,x)\,\mathrm{d}\lambda\le\sum_{p\in\mathbb{Z}}t^{p+1}\lambda\left(B_p\right)\underset{(\star)}{\le}\sum_{p\in\mathbb{Z}}t^{p+1}\left(\frac{1}{t^p}\mu\left(B_p\right)\right)=t\sum_{p\in\mathbb{Z}}\mu\left(B_p\right)\le t\mu(B)$$

כאשר (1) נובע מסעיף (1) ומכך שזרקנו קבוצה עליה האינטגרנד הוא אפס ו־$(\star)$ נובע מהטענה שראינו על גזירה. כאשר $t \searrow 1$ נקבל את הטענת עזר.

אם $\lambda \ll \mu$ אז מ־(1) וההלפת תפקידים בין λ, μ נסיק $D(\lambda, \mu, x) < \infty$ μ־כמעט תמיד ולכן $D(\mu, \lambda, x) > 0$ μ־כמעט תמיד

ומאחר ש־$\lambda \ll \mu$ הרי ש־$D(\mu, \lambda, x) < \infty$ μ־כמעט תמיד ולכן $\mu(B) = \mu(B_+)$ ולכן

$$\int_B D(\mu, \lambda, x)\,\mathrm{d}\lambda = \int_{B_+} D(\mu, \lambda, x)\,\mathrm{d}\lambda = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \int_{B_p} D(\mu, \lambda, x)\,\mathrm{d}\lambda \geq \sum_{p \in \mathbb{Z}} t^p \lambda(B_p) \geq \sum_{p \in \mathbb{Z}} \frac{t^p}{t^{p+1}} \mu(B_p) = t^{-1} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \mu(B_p) = t^{-1} \mu(B_+) = t^{-1} \mu(B)$$

נשאיף את $t \searrow 1$ ונקבל שיוויון ואת (3).

$\square$

13.4 משפט הגזירה של לבג לפונקציה אינטגרבילית מקומית

משפט 13.4.1 (משפט הגזירה של לבג עבורה פונקציה אינטגרבילית מקומית): תהיי λ מידת רדון ב־$\mathbb{R}^d$ ו־$f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ אינטגרבילית מקומית (כלומר לכל קבוצה מדידה וחסומה $E \subseteq \mathbb{R}^d$ מתקיים $f \cdot \mathbb{1}_E \in L^1(\lambda)$).
אז עבור λ־כמעט כל $x \in \mathbb{R}^d$ מתקיים

$$\frac{1}{\lambda(B_r(x))} \int_{B_r(x)} f \, \mathrm{d}\lambda \xrightarrow[r \to 0]{} f(x)$$

בפרט לכל $A \subseteq \mathbb{R}^d$ מדידה מתקיים λ־כמעט תמיד

$$\frac{\lambda(B_r(x) \cap A)}{\lambda(B_r(x))} \xrightarrow[r \to 0]{} \mathbb{1}_A$$

הוכחה: מספיק להוכיח עבור פונקציות אי־שליליות אינטגרבליות מקומית $f : \mathbb{R}^d \to [0, \infty]$.
אז עבור המידה $\mathrm{d}\mu = f \, \mathrm{d}\lambda$ היא מידת רדון וכן $\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\lambda} = f$ וממשפט הגזירה של לבג־בסיקוביץ' נקבל $D(\mu, \lambda, x) = f(x)$ λ־כמעט תמיד שהרי

$$\frac{\int_{B_r(x)} f \, \mathrm{d}\lambda}{\lambda(B_r(x))} = \frac{\mu(B_r(x))}{\lambda(B_r(x))} \xrightarrow[r \to 0]{} D(\mu, \lambda, x) = f(x)$$

□

13.5 משפט הגזירה של לבג (מהתרגול)

משפט 13.5.1 (משפט הגזירה של לבג): תהיי $f \in L^1([a,b])$. אזי הפונקציה $F(x) = \int_a^x f \, \mathrm{d}\lambda$ גזירה כמעט בכל מקום ומקיימת $F'(x) = f(x)$ עבור כמעט כל $x \in [a,b]$ (ביחס למידת לבג).

הוכחה: נראה שכמעט לכל $x \in [a,b]$ מתקיים

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f \, \mathrm{d}\lambda = f(x)$$

אם f רציפה אז זה המשפט היסודי ולכן נניח ש־f חסומה.

לפי משפט לוזין לכל $n \in \mathbb{N}$ יש קבוצה A_n כך ש־$\lambda(A_n) < \frac{1}{n}$ ופונקציה רציפה g_n כך שמחוץ ל־A_n, f ו־g_n מתלכדות ונסמן λ_n מידת לבג מצומצמת ל־A_n.

מהיות $\frac{\mathrm{d}\lambda_n}{\mathrm{d}\lambda} = \mathbb{1}_{A_n}$ נובע ממשפט הגזירה של בסיקוביץ כמעט לכל $x \in A_n^c$ מתקיים

$$\lim_{h \to 0} \frac{\lambda_n((x-h,x+h))}{\lambda((x-h,x+h))} = \lim_{h \to 0} \frac{\lambda(A_n \cap (x-h,x+h))}{2h} = \mathbb{1}_{A_n}(x) = 0$$

אם $x \in A_n^c$ מתקיים

$$\left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f \, \mathrm{d}\lambda - \frac{1}{h} \int_x^{x+h} g \, \mathrm{d}\lambda \right| \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f-g| \, \mathrm{d}\lambda) = \frac{1}{h} \int_{A_n \cap (x,x+h)} |f-g| \, \mathrm{d}\lambda$$

g חסומה ב־$[a,b]$ כפונקציה רציפה ו־f חסומה מההנחה ולכן קיים $M > 0$ כך שמתקיים $|f-g| < M$, כלומר

$$\frac{1}{h} \int_{A_n \cap (x,x+h)} |f-g| \, \mathrm{d}\lambda \leq M \cdot \frac{\lambda(A_n \cap (x-h,x+h))}{h}$$

אגף ימין שואף ל־0 כאשר $h \to 0$ ולכן אם ניקח גבול נקבל

$$\lim_{h \to 0} \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f \, \mathrm{d}\lambda - \frac{1}{h} \int_x^{x+h} g \, \mathrm{d}\lambda \right| = 0 \Longrightarrow \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f \, \mathrm{d}\lambda = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} g \, \mathrm{d}\lambda = g(x) = f(x)$$

קיבלנו את השיוויון שרצינו לכל $x \in A_n^c$ ומאחר ונוכל לקחת את A_n להיות עם מידה קטנה כרצוננו, כמעט כל $x \in [a,b]$ יהיה באחת מ־A_n^c והטענה נכונה עבור f חסומה.

עבור f כללית, נסמן לכל $n \in \mathbb{N}$ את $f_n = \mathbb{1}_{|f|<n} \cdot f$ וממשפט הגזירה של בסיקוביץ' (על המידות $|f - f_n| \, \mathrm{d}\lambda, \mathrm{d}\lambda$) מתקיים כמעט לכל $x \in [a,b]$

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f - f_n| \, \mathrm{d}\lambda \leq \lim_{h \to 0} \frac{2}{2h} \int_x^{x+h} |f - f_n| \, \mathrm{d}\lambda = |f(x) - f_n(x)|$$

אגף ימין הוא אפס כמעט לכל $x \in \mathbb{1}_{|f|<n}$ ומאחר $f \in L^1$ אז $|f|^{-1}(\{\infty\})$ קבוצה ממידה אפס ולכן כמעט כל $x \in [a,b]$ נמצא ב־$\mathbb{1}_{|f|<n}$ עבור n כלשהו ולכן

$$f(x) = f_n(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f_n(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(x)$$

□

14 מרחבי מכפלה

14.1 משפט פוביני

משפט 14.1.1 (משפט פוביני): יהיו $(X,\mathcal{A},\mu)$ ו־$(Y,\mathcal{C},\nu)$ מרחבי מידה σ־סופיים.

1. תהיי $f:X\times Y\to[0,\infty]$ מדידה, אזי f_x ו־f^y הן $\mathcal{A},\mathcal{C}$־מדידות (בהתאמה) לכל x,y וכן

$$\int f\,\mathrm{d}(\mu\times\nu)=\int\left(\int f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)\right)\mathrm{d}\nu(y)=\int\left(\int f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\right)\mathrm{d}\mu(x)$$

2. אם $f:X\times Y\to\mathbb{C}$ מדידה ומקיימת $\int|f_x|\,\mathrm{d}\nu<\infty$ אזי $f\in L^1(\mu\times\nu)$
3. אם $f\in L^1(\mu\times\nu)$ אזי $f_x\in L^1(\nu)$ μ־כמעט לכל $x\in X$ וגם $f^y\in L^1(\mu)$ ν־כמעט לכל $y\in Y$ ומתקיים

$$\int f\,\mathrm{d}(\mu\times\nu)=\iint f\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}\nu=\iint f\,\mathrm{d}\nu\,\mathrm{d}\mu$$

הוכחה:

1. הוכחנו את הטענה עבור פונקציות מציינות $\mathbb{1}_Q$ כש־$Q\in\mathcal{A}\times\mathcal{C}$ ולכן זה נכון עבור פונקציות פשוטות (כסכום סופי של פונקציות מציינות).
תהיי $f:X\times Y\to[0,\infty]$ מדידה ותהיי $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה של פונקציות פשוטות שמתכנסות ל־f.
ממשפט ההתכנסות המונוטונית, הפונקציות

$$\varphi(x)=\int f_x\,\mathrm{d}\nu\qquad\psi(y)=\int f^y\,\mathrm{d}\nu$$

הן גבולות עולים של

$$\varphi_n(x)=\int (s_n)_x\,\mathrm{d}\nu\qquad\psi_n(y)=\int (s_n)^y\,\mathrm{d}\nu$$

ואילו צירופים לינאריים של פשוטות ולכן φ_n,ψ_n מדידות ולכן גם φ_ψ.
נעשה שימוש נוסף במשפט ההתכנסות המונוטונית ייתן מ־$\varphi_n\nearrow\varphi,\psi_n\nearrow\psi$ שמתקיים

$$\int\varphi\,\mathrm{d}\mu=\lim_{n\to\infty}\int\varphi_n\,\mathrm{d}\mu=\lim_{n\to\infty}\int\psi_n\,\mathrm{d}\nu=\int\psi\,\mathrm{d}\nu$$

ומתקיים השיוויון

$$\int f\,\mathrm{d}(\mu\times\nu)=\lim_{n\to\infty}s_n\,\mathrm{d}(\mu\times\nu)=\int\varphi\,\mathrm{d}\mu=\int\psi\,\mathrm{d}\nu$$

2. נפעיל את (1) עם $|f|$
3. נפעיל את (1) עם הפירוק של פונקציות מרוכבות לסכום אי־שלילי

$$f=u+iv=u_+-u_-+i(v_+-v_-)$$

ומכך שמתקיים $\iint|f|\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}\nu<\infty$ גורר שמתקיים ל־ν־כמעט כל $y\in Y$ ש־$\int|f^y|\,\mathrm{d}\mu<\infty$ וכנ"ל הפוך.

□

מסקנה 14.1.1: אם $f:X\times Y\to\mathbb{C}$ מדידה ומקיימת $\iint|f(x,y)|\,\mathrm{d}\mu(x)\,\mathrm{d}\nu(y)<\infty$ אזי $\int f\,\mathrm{d}(\mu\times\nu)=\iint f\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}\nu=\iint f\,\mathrm{d}\nu\,\mathrm{d}\mu$

הוכחה: נובע ישירות מ־(2) + (3) במשפט פוביני. □

14.2 תנאי שקול לפונקציה מדידה על מרחב מכפלה

משפט 14.2.1 (תנאי שקול לפונקציה מדידה על מרחב מכפלה): תהיי $f : (X, \mathcal{A}) \to (Y \times Z, \mathcal{B} \otimes \mathcal{C})$ העתקה ותהיינה ההעתקות הקנוניות

$$\pi_Y : Y \times Z \to Y \qquad \pi_Z : Y \times Z \to Z$$

אז f מדידה אם ורק אם ההרכבה שלה עם כל הטלה על מרכב המכפלה היא מדידה.

הוכחה: $\Longleftarrow$ נניח ש־f מדידה ונרצה להראות ש־$\pi_Y \circ f, \pi_Z \circ f$ מדידות אבל זה נכון כי ראינו ש־π_Y, π_Z הן פונקציות מדידות והרכבה של פונקציות מדידות היא תמיד מדידה.

$\Longrightarrow$ נניח ש־$\pi_y \circ f, \pi_z \circ f$ מדידות ונראה ש־f מדידה.
עלינו להראות ש־$f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$ לכל $E \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{C}$, אז נגדיר $\mathcal{R} := \{B \times C \mid B \in \mathcal{B}, C \in \mathcal{C}\}$ ויהי $R = B \times C \in \mathcal{R}$ מלבן.
ניתן לכתוב $B \times C = \pi_Y^{-1}(B) \cap \pi_Z^{-1}(C)$ ואם נסתכל על המקור תחת f נקבל

$$f^{-1}(B \times C) = f^{-1}(\pi_Y^{-1}(B) \cap \pi_Z^{-1}(C)) = f^{-1}(\pi_Y^{-1}(B)) \cap f^{-1}(\pi_Z^{-1}(C)) = (\pi_Y \circ f)^{-1}(B) \cap (\pi_Z \circ f)^{-1}(C)$$

אבל מההנחה, $\pi_Y \circ f$ מדידה ולכן $(\pi_Y \circ f)^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ ובאופן דומה $(\pi_z \circ f)^{-1}(C) \in \mathcal{A}$.
היות וחיתוך סופי של קבוצות מדידות הוא מדיד (מהגדרת ה־σ־אלגברה) נובע כי $(\pi_Y \circ f)^{-1}(B) \cap (\pi_Z \circ f)^{-1}(C) \in \mathcal{A}$, וזה נכון לכל $R \in \mathcal{R}$ ולכן f מדידה. $\square$