פתרון מטלה 01 — פונקציות מרוכבות, 80519

1 בנובמבר 2025

שאלה 1

סעיף א'

נתון $z = 1 - i\sqrt{3}$, נמיר לקורדינאטות פולאריות ונצייר.

פתרון: נחשב $r = \sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$.

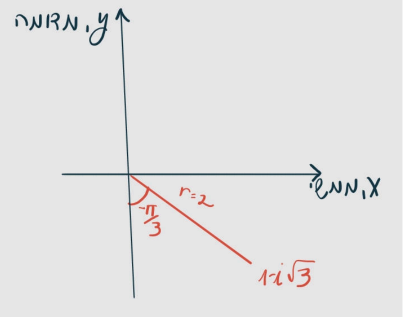
בשביל הארגומנט, נשים לב ש־$Re(z) > 0$ ו־$Im(z) < 0$ כלומר אנחנו נמצאים ברביע הרביעי ולכן

$$\alpha = \arctan\left(\left|\frac{-\sqrt{3}}{1}\right|\right) = \frac{\pi}{3}$$

וכדי שנהיה ברביע הנכון בשביל הארגומנט עלינו לשקף כלומר $Arg(z) = -\frac{\pi}{3}$.

אז בכתיב פולארי, מתקיים

$$z = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2e^{\frac{-i\pi}{3}}$$

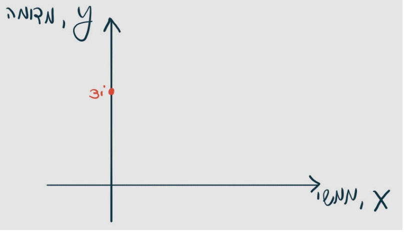


$\square$

סעיף ב'

נתון $z = 3e^{\frac{i\pi}{2}}$, נעביר לקורדינאטות פולאריות ונצייר.

פתרון: נתון $r = 3$ ולכן $z = 3(\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2})) = 3i$ כלומר ממש קיבלנו נקודה.



$\square$

סעיף ג'

נסמן $\mathbb{C} \ni z = x + iy, w = a + ib$ ותהיינה M_z, M_w המטריצות שמייצגות את המספר המרוכב z, w בהתאמה.

תזכורת: $M_z = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$.

תת־סעיף א'

נוכיח את הזהות $M_{z+w} = M_z + M_w$.

הוכחה: מתקיים

$$z + w \underset{\text{חיבור מרוכבים}}{=} (x+a) + i(y+b) \Longrightarrow M_{z+w} = \begin{pmatrix} x+a & -(y+b) \\ y+b & x+a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+a & -y-b \\ y+b & x+a \end{pmatrix}$$

מצד שני

$$M_z + M_w = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+a & -y-b \\ y+b & x+a \end{pmatrix} = M_{z+w}$$

□

תת־סעיף ב'

נוכיח את הזהות $M_{z\cdot w} = M_z \cdot M_w$.

הוכחה: מתקיים

$$z \cdot w \underset{\text{כפל מרוכבים}}{=} (x+iy)\cdot(a+ib) = (xa-yb) + i(ya+xb) \Longrightarrow M_{z\cdot w} = \begin{pmatrix} xa-yb & -ya-xb \\ ya+xb & xa-yb \end{pmatrix}$$

מצד שני

$$M_z \cdot M_w = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa-yb & -xb-yb \\ ya+xb & -yb+xa \end{pmatrix} = M_{z\cdot w}$$

□

שאלה 2

סעיף א'

נפתור $x^4 = -8 + i8\sqrt{3}$.

פתרון: אנחנו מחפשים את השורש ארבעת השורשים המרוכבים של המספר $z = -8 + i8\sqrt{3}$.

נעבור לקורדינאטות פולאריות

$$r = |z| = \sqrt{(-8)^2 + \left(8\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{64 + 192} = \sqrt{256} = 16 \ (r \geq 0)$$

ראינו $Arg(z) = \text{atan2}(y, x)$, כלומר $\arctan$ עם התחשבות ברביע.

במקרה שלנו מתקיים $Re(z) = -8, Im(z) = 8\sqrt{3}$ כלומר z נמצא ברביע השני ו־$\arctan$ יחזיר לנו זווית בכיוון הפוך ולכן עלינו לתקן בהוספת π, אז

$$\text{atan2}(z) = \arctan\left(\frac{8\sqrt{3}}{-8}\right) + \pi = \frac{-\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3}$$

באופן דומה יכלנו למצוא באמצעות פתירת מערכת המשוואות

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \implies \cos(\theta) = \frac{-8}{16} = -\frac{1}{2} \\ y = r\sin(\theta) \implies \sin(\theta) = \frac{8\sqrt{3}}{16} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \implies \theta = \frac{2\pi}{3}$$

אז

$$z = 16\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 16e^{\frac{i2\pi}{3}}$$

יש 4 שורשים ולכן ממשפט דה־מואבר נקבל

$$x_k = \sqrt[n]{16}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right)\right), \ k \in \{0, 1, 2, 3\}, \ n = 4$$

נחשב

$$x_0 = 2\left(\cos\left(\frac{\frac{2\pi}{3} + 0}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{2\pi}{3} + 0}{4}\right)\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$x_1 = 2\left(\cos\left(\frac{\frac{2\pi}{3} + 2\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{2\pi}{3} + 2\pi}{4}\right)\right) = 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right),$$

$$x_2 = 2\left(\cos\left(\frac{\frac{2\pi}{3} + 4\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{2\pi}{3} + 4\pi}{4}\right)\right) = 2\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right),$$

$$x_3 = 2\left(\cos\left(\frac{\frac{2\pi}{3} + 6\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{2\pi}{3} + 6\pi}{4}\right)\right) = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right)$$

□

סעיף ב'

תהיי $\theta \in \mathbb{R}$ ו־$N \in \mathbb{N}$ ונמצא נוסחה סגורה לסכום בכל סעיף.

תת־סעיף א'

$\sum_{n=1}^{N} \cos(n\theta)$.

פתרון: ראינו $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ ולכן $\cos(n\theta) = Re\big(e^{in\theta}\big)$ ונקבל

$$\sum_{n=1}^{N} \cos(n\theta) = \sum_{n=1}^{N} Re\big(e^{in\theta}\big) = Re\left(\sum_{n=1}^{N} e^{in\theta}\right) \underset{\text{משפט דה־מואבר}}{=} Re\left(\sum_{n=1}^{N} \left(e^{i\theta}\right)^n\right) \underset{\text{תור הנדסי סופי}}{=} Re\left(\frac{e^{i\theta} - e^{i(N+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}\right)$$

$$Re\left(\frac{e^{\frac{i\theta}{2}}\left(e^{\frac{i\theta}{2}} - e^{i(N+\frac{1}{2})\theta}\right)}{e^{\frac{i\theta}{2}}\left(e^{\frac{-i\theta}{2}} - e^{\frac{i\theta}{2}}\right)}\right) = Re\left(\frac{e^{\frac{i\theta}{2}} - e^{i(N+\frac{1}{2})\theta}}{e^{\frac{-i\theta}{2}} - e^{\frac{i\theta}{2}}}\right)(\star)$$

מנוסחת דה־מואבר ומהיות $\sin, \cos$ פונקציות אי־זוגית וזוגית בהתאמה

$$e^{\frac{-i\theta}{2}} - e^{\frac{i\theta}{2}} = \cos\left(-\frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\theta}{2}\right) - \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) = \cancel{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} - i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - \cancel{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} - i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$= -2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

נניח $\theta \neq 2\pi k$ עבור $k \in \mathbb{Z}$, ולכן כאשר $(\star\star)$ נובע שוב מדה־מואבר

$$(\star) = Re\left(\frac{e^{\frac{i\theta}{2}} - e^{i(N+\frac{1}{2})\theta}}{-2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right) \underset{\frac{1}{-i}=i}{=} = Re\left(\frac{i\left(e^{\frac{i\theta}{2}} - e^{i(N+\frac{1}{2})\theta}\right)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)$$

$$\underset{(\star\star)}{=} Re\left(\frac{i\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - \cos\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)\theta\right) - i\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)\theta\right)\right)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)$$

$$= Re\left(\frac{i\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - i\cos\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)\theta\right) + \sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)\theta\right)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)$$

$$= \frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)\theta\right) - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

אם $\theta = 2\pi k$ עבור $k \in \mathbb{Z}$ אז

$$\sum_{n=1}^{N} \cos(n\theta) = \sum_{n=1}^{N} 1 = N$$

□

תת־סעיף ב'

$\sum_{n=1}^{N} \sin(n\theta)$.

פתרון: נשתמש בסעיף א' עם אותן הגבלות על θ רק שאם $\theta = 2\pi k$ עבור $k \in \mathbb{Z}$ אז $\sum_{n=1}^{N} \sin(n\theta) = 0$

$$\sum_{n=1}^{N} \sin(n\theta) = \sum_{n=1}^{N} Im\big(e^{in\theta}\big) = Im\left(\sum_{n=1}^{N} e^{in\theta}\right) \underset{\text{משפט דה־מואבר}}{=} Im\left(\sum_{n=1}^{N} \left(e^{i\theta}\right)^n\right) \underset{\text{תור הנדסי סופי}}{=} Im\left(\frac{e^{i\theta} - e^{i(N+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}\right)$$

$$\underset{\text{סעיף א' רק מדומה במקום ממשי}}{\Longrightarrow} Im\left(\frac{i\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - i\cos\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)\theta\right) + \sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)\theta\right)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \cos\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)\theta\right)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \underset{\text{זהות}}{=} (\sin)$$

□

שאלה 3

סעיף א'

נוכיח שמתקיים

$$z_n \to z \iff Re(z_n) \to Re(z) \ \wedge \ \ Im(z_n) \to Im(z)$$

הוכחה: לכל $n \in \mathbb{N}$ נסמן $z_n = x_n + iy_n$ ו־$z = x + iy$.

$\Leftarrow$ נניח כי $z_n \to z$ ונרצה להראות $Re(z_n) \to Re(z)$ וכן $Im(z_n) \to Im(z)$.

יהי $\varepsilon > 0$, מההתכנסות נובע שיש $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq N$ מתקיים

$$|z_n - z| = |x_n + iy_n - (x + iy)| = |x_n - x + i(y_n - y)| = \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} < \varepsilon$$

מצד שני

$$|Re(z_n) - Re(z)| = |x_n - x| = \sqrt{(x_n - x)^2} \leq \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} < \varepsilon$$

$$|Im(z_n) - Im(z)| = |y_n - y| = \sqrt{(y_n - y)^2} \leq \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} < \varepsilon$$

כלומר, $Re(z_n) \to Re(z) \ \wedge \ \ Im(z_n) \to Im(z)$, כנדרש.

$\Longrightarrow$ נניח כי $Re(z_n) \to Re(z) \ \wedge \ \ Im(z_n) \to Im(z)$ ונרצה להראות $z_n \to z$.

יהי $\varepsilon > 0$ ומההתכנסות נובע שקיימים $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ כך שמתקיים לכל $k \geq N_1$ ו־$m \geq N_2$,

$$|Re(z_k) - Re(z)| < \frac{\varepsilon}{2}, \ |Im(z_m) - Im(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

נבחר $N = \max(N_1, N_2)$ ולכל $n \geq N$ מתקיים

$$|z_n - z| = |x_n + iy_n - (x + iy)| = |(x_n - x) + i(y_n - y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

כלומר, $z_n \to z$, כנדרש. $\square$

סעיף ב'

יהי $K \subset \mathbb{C}$ ונראה ש־K קומפקטי אם ורק אם לכל סדרה $K \supseteq (z_n)_{n=1}^{\infty}$ יש תת־סדרה $\left(z_{n_k}\right)_{k=1}^{\infty}$ מתכנסת ל־$z \in K$.

הוכחה:

תזכורת: ראשית, ראינו ש־$\mathbb{C}$ הוא מרחב מטרי. שנית, באינפי3 ראינו שבמרחבים מטריים, קומפקטיות וקומפקטיות סדרתית הן טענות שקולות. כלומר, להגיד שלקבוצה במרחב מטרי לכל סדרה יש תת־סדרה מתכנסת (קומפקטיות סדרתית) שקול ללהגיד שיש לכל כיסוי פתוח של הקבוצה יש תת־כיסוי סופי (קומפקטיות).

$\Leftarrow$ נניח כי K קומפקטי ונראה שלסדרה $K \supseteq (z_n)_{n=1}^{\infty}$ יש תת־סדרה מתכנסת.

תהיי $K \supseteq (z_n)_{n=1}^{\infty}$, כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $z_n = x_n + iy_n$.

מהיותK קומפקטי (סגור וחסום), נובע שקיים $M > 0$ כך שלכל $z \in K$ מתקיים $|z| \leq M$ ובפרט לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $|z_n| \leq M$.

נבחין ש־$(z_n)_{n=1}^{\infty}$ חסומה ב־$\mathbb{C}$ אם ורק אם $(Re(z_n))_{n=1}^{\infty} = (x_n)_{n=1}^{\infty}, (Im(z_n))_{n=1}^{\infty} = (y_n)_{n=1}^{\infty}$ חסומות ב־$\mathbb{R}$.

החסימות על $\mathbb{C}$ במקרה זה תקפה גם לחסימות על $\mathbb{R}$ ולכן ממשפט בולציאנו-ויירשטראס יש ל־$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ תת־סדרה מתכנסת, $\left(x_{n_k}\right)_{k=1}^{\infty}$ המתכנסת ל־$x \in \mathbb{R}$.

באותו אופן, ל־$\left(y_{n_k}\right)_{k=1}^{\infty}$ יש גם תת־סדרה מתכנסת, $\left(y_{n_{k_l}}\right)_{l=1}^{\infty}$ המתכנסת ל־$y \in \mathbb{R}$.

נסתכל על $\left(z_{n_{k_l}}\right)_{l=1}^{\infty}$ זו כמובן תת־סדרה של $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ כך שסדרת הממשיים וסדרת המדומים מתכנסות ל־x, y בהתאמה ולכן מהסעיף הקודם

$$\lim_{l \to \infty} z_{n_{k_l}} = \lim_{l \to \infty} \left(x_{n_{k_l}} + iy_{n_{k_l}}\right) = x + iy = z \in \mathbb{C}$$

מצאנו סדרה מתכנסת ב־K ומהיות K קומפקטי אז הוא סגור וחסום ולכן $z \in K$ (מהניסוח השקול כאוסף הנקודות הגבוליות).

נניח בשלילה כי K אינו קומפקטי־סדרתית, כלומר יש $z \supseteq (z_n)_{n=1}^{\infty}$ כך שאין לה תת־סדרה מתכנסת.

$\Longleftarrow$ נניח שלכל סדרה $K \supseteq (z_n)_{n=1}^{\infty}$ יש תת־סדרה מתכנסת $\left(z_{n_k}\right)_{k=1}^{\infty}$ ל־$z \in K$ ונרצה להראות ש־K סגור וחסום.
סגור: נובע מהניסוח השקול קבוצה סגורה כאוסף כל הנקודות הגבוליות במרחב ומכך שלכל סדרה יש תת־סדרה מתכנסת ל־$z \in K$, כלומר K אוסף כל הנקודות הגבוליות.
חסום: נניח ש־K לא חסום ולכן לכל $1 \le n \in \mathbb{N}$ יש $z_n \in K$ כך שמתקיים $|z_n| > n$ נגדיר ככה את הסדרה $(z_n)_{n=1}^{\infty}$.
מההנחה יש לסדרה זו תת־סדרה מתכנסת כך שמתקיים $\lim_{k\to\infty} z_n = z \in K$ ולכן בפרט שנובע שהסדרה חסומה.
אבל זו סתירה שכן לכל אינדקס n_k מתקיים $\left|z_{n_k}\right| > n_k$ ו־$n_k \to \infty$, כלומר $\lim_{k\to\infty}\left|z_{n_k}\right| = \infty$, בסתירה.
לכן הנחת השלילה לא נכונה ו־K חסום. $\square$

שאלה 4

תהיי $\mathbb{C} \supseteq (z_n)_{n=1}^{\infty}$.

סעיף א'

נוכיח $\rho(z_n,\infty) \to 0$ אם ורק אם $|z_n| \to \infty$.

הוכחה:

תזכורת:

$$\rho(z,\infty) = \lim_{w\to\infty} \rho(z,w) = \lim_{w\to\infty} \frac{2\left|1-\frac{z}{w}\right|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{\frac{1}{|w|^2}+1}} = \frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}}$$

$\Longleftarrow$ נניח כי $\rho(z_n,\infty) \to 0$ ונרצה להראות $|z_n| \to \infty$.

מתקיים

$$\lim_{n\to\infty} \rho(z_n,\infty) = 0 \underset{\text{הגדרה}}{\Longleftrightarrow} \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1+|z_n|^2}} = 0 \underset{\text{אריתמטיקה של גבולות}}{\Longleftrightarrow} \lim_{n\to\infty} \sqrt{1+|z_n|^2} = \infty$$

$$\underset{\text{אי-שליליות}}{\Longleftrightarrow} \lim_{n\to\infty} 1+|z_n|^2 = \infty \underset{\text{קבוע}}{\Longleftrightarrow} \lim_{n\to\infty} |z_n|^2 = \infty \underset{\text{אי-שליליות}}{\Longleftrightarrow} \lim_{n\to\infty} |z_n| = \infty$$

$\Longrightarrow$ נניח כי $|z_n| \to \infty$ ונרצה להראות $\rho(z_n,\infty) \to 0$.

מתקיים

$$\lim_{n\to\infty} \rho(z_n,\infty) = \frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}}$$

היות $|z_n| \to \infty$ אזי המכנה שואף ל־∞ ומאריתמטיקה של גבולות $\lim_{n\to\infty} \rho(z_n,\infty) = 0$. $\square$

סעיף ב'

נוכיח $\rho(z_n,z) \to 0$ אם ורק אם $|z_n - z| \to 0$.

הוכחה: *תזכורת:*

$$\rho(z,w) = \frac{2|z-w|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|w|^2}}$$

$\Longleftarrow$ נניח כי $\rho(z_n,z) \to 0$ ונראה כי $|z_n - z| \to 0$.

מתקיים

$$\lim_{n\to\infty} \rho(z_n,z) = 0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{2|z_n - z|}{\sqrt{1+|z_n|^2}\sqrt{1+|z|^2}} = 0$$

ראשית, $\sqrt{1+|z|^2} = C \in \mathbb{R}$ קבוע כלשהו.

שנית, נובע מהגדרת הגבול שהמונה שואף ל־0 או שהמכנה שואף ל־∞.

אם המונה שואף ל־0 אזי $\lim_{n\to\infty} 2|z_n - z| = 0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty}|z_n - z| = 0$ וסיימנו.

לא ייתכן שהמכנה שואף ל־∞: ההגדרה $\rho(z_n,z) \to 0$ אומרת שהמרחק בין z_n לבין $z \in \mathbb{C}$ שהיא נקודה סופית שואף ל־0 על הספירה של רימן.

אם יתקיים $\lim_{n\to\infty}|z_n| = \infty$, יהיה חייב להתקיים $\rho(\infty,z) = \frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}} \in \mathbb{R}$ וזאת סתירה.

$\Longleftarrow$ נניח כי $|z_n - z| \to 0$ ונראה כי $\rho(z_n,z) \to 0$.

מהתזכורת, מספיק שנבחן את המכנה (כי המונה שואף ל־0 מההנחה), מתקיים

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{1+|z_n|^2}\sqrt{(1+|z|^2)} \underset{\text{הנחה}}{=} \sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|z|^2} = 1+|z|^2 \Longrightarrow \mathbb{R} \ni 1+|z|^2 \neq 0$$

נסמן $C = 1+|z|^2$ ונקבל $\lim_{n\to\infty} \rho(z_n,z) = \lim_{n\to\infty} \frac{2|z_n - z|}{\underbrace{\left(\sqrt{1+|z_n|^2}\sqrt{1+|z|^2}\right)}_{=1+|z|^2=:C}} = \frac{0}{C} = 0$. $\square$

שאלה 5

תהיי $P=(x_0,y_0,z_0)$ כך שמתקיים $\phi^{-1}(z)=P$, כלומר

$$\phi^{-1}(z)=\phi^{-1}(x+iy)=\left(\frac{2x}{1+x^2+y^2},\frac{2y}{1+x^2+y^2},1-\frac{2}{1+x^2+y^2}\right)=(x_0,y_0,z_0)$$

$$\phi(z)=\left(\frac{2\,Re(z)}{1+|z|^2},\frac{2\,Im(z)}{1+|z|^2},\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right)$$

סעיף א'

נראה כי $P_1=(x_0,-y_0,z_0)$ הוא התמונה של $\overline{z}$, כלומר $\phi(\overline{z})=P_1$.

פתרון: ניזכר

$$|z|=\sqrt{z\cdot\overline{z}}\Longrightarrow|\overline{z}|=\sqrt{\overline{z}\cdot\overline{\overline{z}}}=\sqrt{\overline{z}\cdot z}=|z|$$

מתקיים $\overline{z}=x-iy$ ולכן

$$\phi(\overline{z})=\phi(x-iy)=\left(\frac{2x}{1+|z|^2},\frac{-2y}{1+|z|^2},\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right)=P_1$$

□

סעיף ב'

נראה כי $P_2=(x_0,y_0,-z_0)$ הוא התמונה של $\frac{1}{\overline{z}}$, כלומר $\phi(\frac{1}{\overline{z}})=P_2$.

פתרון: נסמן $z=x+iy$ ולכן $\overline{z}=x-iy$ ונגדיר $w=\frac{1}{\overline{z}}=\frac{1}{x-iy}$, נרצה לייצג את w בצורה $w=a+ib$ עבור $a,b\in\mathbb{R}$, אז

$$w=\frac{1}{x-iy}=\frac{1}{x-iy}\cdot\frac{x+iy}{x+iy}=\frac{x+iy}{x^2+y^2}=\frac{x+iy}{|z|^2}$$

ובאותו אופן מהסעיף הקודם $|z|=|\overline{z}|$ ולכן $|w|^2=\frac{1}{|z|^2}$ ומתקיים

$$\phi\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)=\phi(w)=\phi\left(\frac{x+iy}{|z|^2}\right)=\left(\frac{2\cdot\frac{x}{|z|^2}}{1+\frac{1}{|z|^2}},\frac{2\cdot\frac{y}{|z|^2}}{1+\frac{1}{|z|^2}},\frac{\frac{1}{|z^2|}-1}{\frac{1}{|z|^2}+1}\right)$$

$$=\left(\frac{2x}{1+|z|^2},\frac{2y}{1+|z|^2},\frac{1-|z|^2}{1+|z|^2}\right)=(x_0,y_0,-z_0)=P_2$$

□

סעיף ג'

נראה כי $P_3=(x_0,-y_0,-z_0)$ הוא התמונה של $\frac{1}{z}$, כלומר $\phi(\frac{1}{z})=P_3$.

פתרון: שוב נסמן $z=x+iy$ ולכן $w=\frac{1}{z}=\frac{1}{x+iy}$ ונרצה לייצג את w בצורה $w=a+ib$ עבור $a,b\in\mathbb{R}$, אז

$$w=\frac{1}{x+iy}=\frac{1}{x+iy}\cdot\frac{x-iy}{x-iy}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}=\frac{x-iy}{|z|^2}$$

מתקיים

$$\phi\left(\frac{1}{z}\right)=\phi(w)=\phi\left(\frac{x-iy}{|z|^2}\right)=\left(\frac{2\cdot\frac{x}{|z|^2}}{1+\frac{1}{|z|^2}},\frac{2\cdot\frac{-y}{|z|^2}}{1+\frac{1}{|z|^2}},\frac{\frac{1}{|z^2|}-1}{\frac{1}{|z|^2}+1}\right)$$

$$=\left(\frac{2x}{1+|z|^2},\frac{-2y}{1+|z|^2},\frac{1-|z|^2}{1+|z|^2}\right)=(x_0,-y_0,-z_0)=P_3$$

□

סעיף ד'

נראה כי הפעולות בסעיפים הקודמים משמרים את ρ.

הוכחה: במילים אחרות, אנחנו רוצים להראות שהפונקציות $z \mapsto \frac{1}{z}, z \mapsto \frac{1}{\overline{z}}, z \mapsto \overline{z}$ הן כולן איזומטריות.

כפעולות על $\mathbb{C}$ – שיקוף על־פני ציר xz, שיקוף על־פני ציר xy וסיבוב ב־π מסביב לציר ה־x, בהתאמה לסעיף.

נכתוב $z = x_0 + iy_0, w = x_1 + iy_1$.

עבור סעיף א' עלינו להראות $\rho(\overline{z}, \overline{w}) = \rho(z, w)$, כלומר

$$\frac{2|z-w|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|w|^2}} = \frac{2|\overline{z}-\overline{w}|}{\sqrt{1+|\overline{z}|^2}\sqrt{1+|\overline{w}|^2}}$$

אכן כבר ראינו $|\overline{z}| = |z|$ $(\star)$ לכל $z \in \mathbb{C}$ וכן

$$\overline{z} - \overline{w} = x_0 - iy_0 - (x_1 - iy_1) = (x_0 - x_1) - i(y_0 - y_1) = \overline{z-w} \Longrightarrow |\overline{z} - \overline{w}| = |z - w|$$

כלומר אכן יש למעלה שיוויון.

עבור סעיף ב' עלינו להראות $\rho\left(\overline{\frac{1}{|z|}}, \overline{\frac{1}{|w|}}\right)$, כלומר

$$\frac{2|z-w|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|w|^2}} = \frac{2\left|\frac{1}{\overline{z}} - \frac{1}{\overline{w}}\right|}{\sqrt{1+\left|\frac{1}{\overline{z}}\right|^2}\sqrt{1+\left|\frac{1}{\overline{w}}\right|^2}}$$

מתקיים

$$\left|\frac{1}{\overline{z}} - \frac{1}{\overline{w}}\right| = \left|\frac{\overline{w}-\overline{z}}{\overline{zw}}\right| \underset{|\overline{w}-\overline{z}|=|\overline{w-z}|}{=} = \frac{|w-z|}{|\overline{z}||\overline{w}|} \underset{(\star)}{=} \frac{|w-z|}{|z||w|}$$

$$\sqrt{1+\left|\frac{1}{\overline{z}}\right|^2} \underset{(\star)}{=} \sqrt{1+\frac{1}{|z|^2}} = \sqrt{\frac{|z|^2+1}{|z|^2}} = \frac{\sqrt{1+|z|^2}}{|z|}$$

ולכן

$$\rho\left(\frac{1}{\overline{z}}, \frac{1}{\overline{w}}\right) = \frac{2 \cdot \frac{|z-w|}{\cancel{(|z||w|)}}}{\frac{\sqrt{1+|z|^2}}{\cancel{|z|}} \frac{1+|w|^2}{\cancel{|w|}}} = \frac{2|z-w|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|w|^2}}$$

ושוב קיבלנו לעיל שיוויון.

עבור סעיף ג', נבחין שזה נובע משני המקרים הקודמים כהרכבה של איזומטריות שכן $\overline{\frac{1}{\overline{z}}} = \frac{1}{z}$ וכידוע הרכבה של איזומטריות היא איזומטרייה, ולכן גם מתקיים

$$\frac{2|z-w|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|w|^2}} = \frac{2\left|\frac{1}{z} - \frac{1}{w}\right|}{\sqrt{1+\left|\frac{1}{z}\right|^2}\sqrt{1+\left|\frac{1}{w}\right|^2}}$$

כלומר, כל הסעיפים הקודמים הם איזומטריות על ספירת רימן. $\square$