פתרון מטלה 07 — תורת ההסתברות 1, 80420

16 בדצמבר 2025

שאלה 1

סעיף א'

נוכיח שאם X משתנה מקרי שהתומך שלו הוא $\mathbb{N}_0$ אזי $\mathbb{P}(X>0) \le \mathbb{E}(X)$.

הוכחה: מהגדרת התוחלת היות והמשתנה נתמך על הטבעיים

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k\mathbb{P}(X=k)$$

לכל $k \ge 1$ מתקיים

$$k \cdot \mathbb{P}(X=k) \ge \mathbb{P}(X=k)$$

, וזה נכון לכל k, משמע

$$\mathbb{E}(X) \ge \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}(X>0)$$

$\square$

סעיף ב'

יהי $G_n(n, p_n)$ גרף מקרי ונגדיר $T(G_n)$ המשתנה המקרי שסופר את מספר המרובעים שקיימים בגרף כאשר מרובע זה קבוצה של ארבעה קודקודים v_1, v_2, v_3, v_4 שביניהן קיימות אך ורק הקשתות

$$(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_1)$$

נראה שעבור $p_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ מתקיים $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(T(G_n)=0) = 1$.

פתרון:

$\square$

TODOOOOOOOOOOOOOOOOOO

שאלה 2

יצרן ברגים יודע מניסיון שב־95% בורג שמייצרת החברה שלו עומד בתו תקן באופן בלתי־תלוי בברגים אחרים שיוצרו.
כל משלוח של $10,000$ ברגים מגיע עם תעודת אחריות המבטיחה החזר במלא במקרה שיותר מ־r ברגים לא עובדים בתו התקן.
נחשב כמה קטן r יכול להיות כך שלכל היותר 1% מהמשלוחים יהיו זכאים להחזר מלא.

פתרון: יהיו $X_1, ..., X_{10000}$ המשתנים המקריים מסוג אינדיקטור שמקבלים 1 אם הבורג תקול, כלומר לפי הנתונים $X_i \sim Ber(0.05)$.
נגדיר $X = \sum_{i=1}^{10000} X_i$ ולכן מהיות כל המאורעות לעיל בלתי־תלויים מהנתון, אז ראינו שסכום של משתנים מקריים בלתי־תלויים המתפלגים ברנולי, מתפלג בינומי, כלומר $X \sim Bin(10000, 0.05)$.
משונות של משתנה מקרי המתפלג בינומית שראינו

$$\mathrm{Var}(X) = 10000 \cdot 0.05 \cdot (1 - 0.05) = 10000 \cdot 0.05 \cdot 0.95 = 475$$

אז מאי־שיוויון צ'בישב נקבל עבור $a > 0$

$$\mathbb{P}(X - 500 \geq a) \leq \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{a^2} = \frac{475}{a^2}$$

זו ההסתברות שאנחנו רוצים שתהיה קטנה מ־1%, כלומר

$$\frac{475}{a^2} \leq \frac{1}{100} \iff 47500 \leq a^2 \iff \sqrt{47500} \leq a$$

והודות למחשבון אנחנו יודעים ש־$a = 218$ הוא השלם המינימלי, כלומר $r = 500 + 218 = 718$. $\square$

שאלה 3

יהי $n \geq 1$. נתונים n זוגות, כל זוג כולל גבר ואישה. מסדרים ה־$2n$ באקראי במעגל.

סעיף א'

עבור $i = 1, ..., n$, יהי X_i המשתנה המקרי שתוצאתו היא 1 אם ורק אם בני הזוג i יושבים זה לצד זה ו־0 אחרת.
נראה כי $X_i \sim Ber\left(\frac{2}{2n-1}\right)$ לכל i.
הוכחה: לכל זוג i נסמן W_i, M_i ולכל i אנחנו מחפשים את המאורע $E_i = 1$ אם ורק אם הגבר M_i והאישה W_i יושבים אחד ליד השנייה.
כידוע, לסדר $2n$ אנשים במעגל יש לנו $(2n-1)!$ אפשרויות סידור ולכן זה מרחב המדגם שלנו.
עבור i, נסתכל על הזוג **הלא סדור**, (W_i, M_i) בתור אחד ולכן $2n - 2 + 1 = 2n - 1$ "אנשים" שצריך לסדר במעגל, כלומר יש $(2n-2)!$ אפשרויות לסידור.
כמובן בתור הזוג שי לנו $2 \neq 2$ אפשרויות לסידור ולכן $|E_i| = 2 \cdot (2n-2)!$, ולכן

$$p = \frac{2 \cdot (2n-2)!}{(2n-1)!}$$

נשים לב

$$(2n-1)! = (2n-1) \cdot ((2n-1)-1)! = (2n-1) \cdot (2n-2)!$$

אז

$$p = \frac{2 \cdot (2n-2)!}{(2n-1)!} = \frac{2 \cdot (2n-2)!}{(2n-1) \cdot (2n-2)!} = \frac{2}{2n-1}$$

כלומר $X_i \sim Ber\left(\frac{2}{2n-1}\right)$. □

סעיף ב'

נחשב את תוחלת מספר הזוגות שיושבים יחד.
פתרון: נסמן $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ ולכן מלינאריות התוחלת ומתוחלת של משתנה מקרי מתפלג ברנולי

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2}{2n-1}\right) = \frac{2n}{2n-1}$$

□

סעיף ג'

נראה שלכל $i \neq j$, $X_i X_j \sim Ber\left(\frac{4}{(2n-2)(2n-1)}\right)$.
פתרון: ניזכר שמכפלה של משתנים מקריים שמתפלגים ברנולי הוא מתפלג ברנולי גם כן (התומך 0 או 1).
כמקודם, נגדיר $U_i = (W_i, M_i), U_j = (W_j, M_j)$ ולכן מספר הסידורים הפעם הוא $(2n-4) + 2 = 2n - 2$ "אנשים" שצריך לסדר במעגל, כלומר $((2n-2)-1)! = (2n-3)!$ סידורים אפשריים.
כמובן, לכל U_i, U_j כמובן יש שתי אפשרויות לסידור פנימי ולכן בסך־הכל $\left|E_{i,j}\right| = 4 \cdot (2n-3)!$ ובסך־הכל

$$\mathbb{P}(X_i X_j = 1) = \frac{4 \cdot (2n-3)!}{(2n-1)!} = \frac{4 \cdot (2n-3)!}{(2n-1) \cdot (2n-2) \cdot (2n-3)!} = \frac{4}{(2n-1)(2n-2)}$$

□

סעיף ד'

נחשב את שונות מספר הזוגות שיושבים זו לצד זו.

פתרון:

$$\mathrm{Var}(S)=\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i)+\sum_{i\neq j}\mathrm{Cov}\big(X_i,X_j\big)=n\cdot\mathrm{Var}(X_1)+n\cdot(n-1)\cdot\mathrm{Cov}(X_1,X_2)$$

כאשר השיוויון האחרון נובע מסימטרית של השונות עבור $i\neq j$ וכמות הצירופים האפשריים.

מסעיף א' נובע כי $X_i\sim Ber\big(\frac{2}{2n-1}\big)$ ולכן משונות של משתנה מקרי מתפלג ברנולי

$$\mathrm{Var}(X_1)=\frac{2}{2n-1}\left(1-\frac{2}{2n-1}\right)=\frac{2}{2n-1}\frac{2n-3}{2n-1}=\frac{4n-6}{(2n-1)^2}$$

נשאר לחשב את $\mathrm{Cov}(X_1,X_2)$, מסעיפים ב' וג' נקבל

$$\mathrm{Cov}(X_1,X_2)=\mathbb{E}(X_1X_2)-\mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2)=\frac{4}{(2n-1)(2n-2)}-\frac{4}{(2n-1)^2}=\frac{4(2n-1)-4(2n-2)}{(2n-1)^2(2n-2)}=\frac{4}{(2n-1)^2(2n-2)}$$

ובסך־הכל נקבל

$$\mathrm{Var}(S)=n\cdot\frac{4n-6}{(2n-1)^2}+n\cdot(n-1)\cdot\frac{4}{(2n-1)^2(2n-2)}=\frac{4n^2-6n}{(2n-1)^2}+n\cdot(n-1)\cdot\frac{4}{(2n-1)^2 2(n-1)}$$
$$=\frac{4n^2-6n}{(2n-1)^2}+\frac{2n}{(2n-1)^2}=\frac{4n^2-4n}{(2n-1)^2}=\frac{4n(n-1)}{(2n-1)^2}$$

□

סעיף ה'

לכל $n\geq 1$ יהי Y_n משתנה מקרי שתוצאתו היא מספר הזוגות שיושבים ביחד לאחר שמושיבים n זוגות באקראי במעגל.

נחשב את הגבולות כאשר n שואף לאינסוף של התוחלת של Y_n ושל השונות של Y_n.

פתרון: נסמן $Y_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$ ומלינארית התוחלת ותוצאות הסעיפים הקודמים

$$\mathbb{E}(Y_n)=\frac{2n}{2n-1}\Longrightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{2-\frac{1}{n}}=1$$

ועבור השונות עם תוצאות הסעיף הקודם

$$\mathrm{Var}(Y_n)=\frac{4n(n-1)}{(2n-1)^2}\Longrightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{4n(n-1)}{(2n-1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-4n}{4n^2-4n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{4-\frac{4}{n}}{4-\frac{4}{n}+\frac{1}{n}}=1$$

□

שאלה 4

יהי $n \geq 3$. נתבונן בטבלה של $n \times n$ משבצות, כאשר כל אחד מהמשבצות צבועה בשחור או בלבן באקראי ובאופן בלתי־תלוי. יהי X מספר הזוגות שצבועים בלבן, כלומר מספר הזוגות של משבצות סמוכות ששתיהן צבועות בלבן.

סעיף א'

נחשב מהו מספר הצמדים של זוגות חופפים (זוגות משבצות שחולקים בידיוק משבצת אחת).

פתרון: TODOOOOOOOOOOOOOOOOOO $\square$

סעיף ב'

נחשב מהי תוחלת X.

פתרון: TODOOOOOOOOOOOOOOOOOO $\square$

סעיף ג'

נחשב מהי שונות X.

פתרון: TODOOOOOOOOOOOOOOOOOO $\square$

סעיף ד'

עבור כל $n \geq 2$ יהי X_n משתנה מקרי המתאר את מספר הזוגות הצבועים בלבן בטבלה מגודל $n \times n$.
נבחן כיצד נשתמש באי־שיוויון צ'בישב כדי להסיק שלכל $\varepsilon > 0$ הסדרה $p_n = \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{2n(n-1)} - \frac{1}{4}\right| \geq \varepsilon\right)$ שואפת ל־0 כאשר $n \to \infty$.

פתרון: TODOOOOOOOOOOOOOOOOOO $\square$

שאלה 5

נקבע $n \geq 3$ ונטיל מטבע n פעמים באופן בלתי־תלוי, כאשר המטבע נופל בכל פעם על 1 בהסתברות p.
יהי X_n מספר הרצפים $1,1,1$ בסדרת ההטלות באורך n.

סעיף א'

נחשב את התוחלת של X_n.

פתרון: יהיו $Y_1,...,Y_n$ משתנים מקריים כאשר Y_i הוא תוצאת ההטלה ה־i.

$$\forall k \in \{1,...,n-2\},\ \ I_k = \begin{cases} 1 & Y_k = Y_{k+1} = Y_{k+2} = 1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

ולכן $X_n = \sum_{k=1}^{n-2} I_k$, אז מלינאריות התוחלת

$$\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n-2} I_k\right) = \sum_{k=1}^{n-2} \mathbb{E}(I_k) \underset{\substack{\text{תוחלת משתנה מקרי אינדיקטור} \\ \text{ומהאי־תלות של ההטלות}}}{=} (n-2)p^3$$

□

סעיף ב'

נחשב את השונות של X_n.

פתרון: מהנוסחה לחישוב סכום של שונות

$$\operatorname{Var}(X_n) = \operatorname{Var}\left(\sum_{k=1}^{n-2} I_k\right) = \sum_{k=1}^{n-2} \operatorname{Var}(I_k) + 2\sum_{1\leq i<j\leq n-2} \operatorname{Cov}\big(I_i, I_j\big)$$

נחשב את שני חלקי הסכום:

$$\operatorname{Var}(I_k) = \mathbb{E}(I_k^2) - \mathbb{E}(I_k)^2 \underset{\text{משתנה מקרי אינדיקטור}}{=} \mathbb{E}(I_k) - \mathbb{E}(I_k)^2 = p^3 - p^6 = p^3(1-p^3)$$

עבור החלק השני, היות וההתלות הן בלתי־תלויות, נובע שעבור I_k, I_{k+3} המאורעות הם זרים והם בלתי־תלויים כי ההטלות הן בלתי־תלויות, כלומר לכל $|i-j| \geq 3$ מתקיים ש־I_i, I_j בלתי־תלויים וראינו שאי־תלות גוררת אי־מתואמות ולכן $\operatorname{Cov}\big(I_i, I_j\big) = 0$.
אז המאורעות שהם תלויים הם המאורעות עבורם $|i-j| = 2$ או המאורעות עבורם $|i-j| = 1$.
נתחיל מהמקרה השני, ניקח $j = i+1$ כלומר ההטלות $Y_i, Y_{i+1}Y_{i+2}, Y_{i+3}$ כלומר הסתיימו ב־1 ומהאי־תלות של ההטלות

$$\mathbb{E}(I_i I_{i+1}) = \mathbb{P}(I_i = 1, I_{i+1} = 1) = \mathbb{P}(1111) = p^4$$

ולכן

$$\operatorname{Cov}(I_i, I_{i+1}) = \mathbb{E}(I_i I_{i+1}) - \mathbb{E}(I_i)\mathbb{E}(I_{i+1}) = p^4 - p^6 = p^4(1-p^2)$$

ויש לנו $n-3$ זוגות כאלו.
עבור המקרה השני נפעל באופן דומה: ניקח $j = i+2$ אז ההטלות $Y_i, Y_{i+1}, Y_{i+2}, Y_{i+3}, Y_{i+4}$ כולן הסתיימו ב־1, ומהאי־תלות של ההטלות

$$\mathbb{E}(I_i I_{i+2}) = \mathbb{P}(I_i = 1, I_{i+2} = 1) = \mathbb{P}(111111) = p^5$$

ולכן

$$\operatorname{Cov}(I_i, I_{i+2}) = \mathbb{E}(I_i I_{i+2}) - \mathbb{E}(I_i)\mathbb{E}(I_{i+2}) = p^5 - p^6 = p^5(1-p)$$

ויש לנו $n-4$ זוגות כאלו ובסך־הכל

$$\operatorname{Var}(X_n) = \sum_{k=1}^{n-2} \operatorname{Var}(I_k) - \sum_{1\leq i<j\leq n-2} \operatorname{Cov}\big(I_i, I_j\big) = (n-2)p^3(1-p^3) + 2\big((n-3)p^4(1-p^2) + (n-4)p^5(1-p)\big)$$

□

סעיף ג'

נשתמש באי־שיוויון צ'בישב כדי להסיק שלכל $\varepsilon > 0$ הסדרה $p_n = \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n-2} - p^3\right| \geq \varepsilon\right)$ כך ש־$p_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

פתרון: ראשית

$$\left|\frac{X_n}{n-2} - p^3\right| \geq \varepsilon \iff \left|X_n - (n-2)p^3\right| \geq \varepsilon(n-2)$$

אי־שיוויון צ'בישב אומר שלכל $a > 0$ מתקיים

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{a^2}$$

ובמקרה שלנו, $X = X_n, a = \varepsilon(n-2)$ ונקבל

$$\mathbb{P}(|X_n - \mathbb{E}(X_n)| \geq \varepsilon(n-2)) \geq \frac{\mathrm{Var}(X_n)}{\varepsilon^2(n-2)^2}$$

בסעיף הקודם מצאנו שמתקיים

$$\mathrm{Var}(X_n) = (n-2)p^3(1-p^3) + 2\big((n-3)p^4(1-p^2) + (n-4)p^5(1-p)\big)$$

זה צירוף לינארי במשתנה n ולכן קיים $C > 0$ שתלוי רק במשתנה p כך שיתקיים $\mathrm{Var}(X_n) < Cn$ עבור n גדול מספיק, ולכן

$$\frac{\mathrm{Var}(X_n)}{\varepsilon^2(n-2)^2} \leq \frac{Cn}{\varepsilon^2(n-2)^2} = \frac{Cn}{\varepsilon^2(n^2-2n+4)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

שכן המכנה דומיננטי יותר. $\square$

שאלה 6

יהיו X, Y משתנים מקריים בלתי־תלויים המקיימים

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y) = \mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = 1$$

סעיף א'

נחשב את התוחלת והשונות של $X + Y$.

פתרון: מלינאריות התוחלת מתקיים

$$\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = 1 + 1 = 2$$

וכן מהיות X, Y בלתי־תלויים, מחיבוריות השונות למשתנים מקריים בלתי־תלויים

$$\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) = 1 + 1 = 2$$

$\square$

סעיף ב'

נחשב את התוחלת והשונות של XY.

פתרון: X, Y בלתי־תלויים ולכן מכפליות התוחלת למשתנים בלתי־תלויים

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = 1 \cdot 1 = 1$$

ניזכר שראינו שאם X, Y משתנים מקריים בלתי־תלויים אז הם נשארים גם בלתי־תלויים תחת הפעלת פונקציה, כלומר אם נסמן $f(Z) = z^2$ אזי $f(X) = X^2$ ו־$f(Y) = Y^2$ הם בלתי־תלויים.
אז מהגדרת השונות נקבל

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(XY) &= \mathbb{E}((XY - 1)^2) = \mathbb{E}(X^2Y^2 - 2XY + 1) \underset{\text{לינאריות}}{=} \mathbb{E}(X^2Y^2) - 2\mathbb{E}(XY) + 1 = \mathbb{E}(X^2Y^2) - 1 \\ &= \mathbb{E}(X^2Y^2) - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) + 1 = \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2) - 1\end{aligned}$$

היה אפשר להגיע לזה גם מההגדרה השקולה.
עוד נתון כי

$$1 = \mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(X^2) - 1 \Longrightarrow \mathbb{E}(X^2) = 2$$

וכמובן באותו אופן גם עבור $\mathrm{Var}(Y)$ ולכן

$$\mathrm{Var}(XY) = \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2) - 1 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$$

$\square$