פתרון מטלה 06 — פונקציות מרוכבות, 80519

10 בדצמבר 2025

שאלה 1

נוכיח את הגרסה הבאה של משפט קושי למשולש ללא שימוש במה שראינו בהרצאה לגבי סינגולריות אינטגרבילית: יהי T משולש סגור ו־G סביבה שלו. יהיו $z_0 \in T^\circ$ (באופן פורמלי, אם $\{x_i\}_{i=1}^3$ הם קודקודי המשולש, אז קיימים $0 < \alpha_i < 1$ עבור $i \in \{1,2,3\}$ כך ש־$z_0 = \sum_{i=1}^3 \alpha_i x_i$) ו־$f : G \to \mathbb{C}$ הולומורפית על $G \setminus \{z_0\}$.

אם בנוסף f חסומה בסביבה של z_0 אזי $\int_{\partial T} f \,\mathrm{d}\gamma = 0$.

הוכחה: מהיות f הולומורפית וחסומה בסביבה של z_0 יש $r_0 > 0$ ו־$M > 0$ כך שלכל $0 < |z - z_0| < r_0 \implies |f(z)| \leq M$.

$z_0 \in T^\circ$ שפתוחה (כי $T, \partial T$ סגורים).

לא הצלחתי לפרמל את התשובה שרציתי לכתוב כמו שצריך, אז אני כותבת רק את הרעיון הכללי שלי: מהפתיחות נוכל לקחת $\delta' > 0$ ודיסק $D(\delta', z_0) \subseteq T^\circ$ ובפרט נוכל להסתכל על דיסק סגור $\overline{D\left(z_0, \frac{\delta'}{2}\right)} \subseteq T^\circ$ וניקח משולש שמוכל בו ושמכיל את z_0 ונסתכל על הקירוב

$$\varphi_n(z) := z_0 + \frac{1}{n}(z - z_0)$$

ונסתכל על התמונה של הפונקציה על המשולש שבחרנו, כלומר כיווצנו אותו סביב הנקודה.

נוכל להגדיר אז את ההפרש בין המשולש T הנתון למשולש הסגור שלנו, והוא זר פוליגונלית ו־z_0 לא נמצא בו, אבל f הולומורפית בו ולכן ממשפט קושי למשולשים, על הפרש המשולשים הזה האינטגרל הוא 0.

לבסוף נשתמש מהמשפט מההרצאה שחוסם את האינטגרל על־ידי מקסימום/סופרמום ולכן אנחנו תלויים רק באורך של השפה של המשולש הפנימי שלנו, אבל אנחנו הולכים ומקטינים אותו ובשאיפה לאינסוף הוא מתאפס (ומצד שני, המשולש לא מנוון ולכן אי־שלילי, אז בסך־הכל יצא שוב שהאינטגרל הוא אפס). $\square$

שאלה 2

תהיי Γ_R מסילה המתקבלת משרשור (חיבור) הקו הישר המחבר בין הנקודות R ו־$-R$ עם חצי מעגל ברדיוס R ממורכב סביב הראשית, העובר בין הנקודות R ו־$-R$.
נמצא באיזה חצי מישור צריך לעבור חצי המעגל כדי שיתקיים

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(ax)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R} \frac{e^{aiz}}{z^2+1}\,\mathrm{d}\gamma$$

פתרון: יהי $a \in \mathbb{R}$ ונגדיר

$$f(z) = \frac{e^{iaz}}{z^2+1}$$

ניקח $\Gamma_R = [-R,R] \cup \gamma_R$ כאשר γ_R זו המסילה של חצי המעגל ברדיוס R הממורכז סביב הראשית ועובר בין הנקודות $R,-R$.
אם $a>0$ נבחר את חצי המעגל העליון ואם $a<0$ נבחר את החצי מעגל התחתון.
מלינאריות האינטגרל נקבל

$$\int_{\Gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z$$

נשים לב שמתקיים עבור $a \in \mathbb{R}$

$$|f(x)| = \frac{\left|e^{iax}\right|}{x^2+1} = \frac{1}{x^2+1}$$

אבל אנחנו יודעים

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \pi$$

כלומר שהאינטגרל הזה מתכנס בהחלט, אז

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

נכתוב פרמטריזציה לחצי המעגל על־ידי $z = Re^{i\theta}$ עבור $\theta \in [0,\pi]$, אז

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_0^{\pi} \frac{\left|e^{iaRe^{i\theta}}\right|}{|R^2e^{2i\theta}+1|} R\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi} \frac{e^{-aR\sin(\theta)}}{|R^2e^{2i\theta}+1|} R\,\mathrm{d}\theta$$

נשים לב שמאי־שיוויון המשולש ההפוך, עבור $R>1$

$$\left|R^2e^{2i\theta}+1\right| \ge \left|\left|R^2e^{2i\theta}\right|-1\right| = \left|R^2-1\right| = R^2-1$$

אז

$$\int_0^{\pi} \frac{e^{-aR\sin(\theta)}}{|R^2e^{2i\theta}+1|} R\,\mathrm{d}\theta \le \int_0^{\pi} \frac{Re^{-aR\sin(\theta)}}{R^2-1}\,\mathrm{d}\theta = \frac{R}{R^2-1}\int_0^{\pi} e^{-aR\sin(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$

נזכר כי $\sin(\theta)$ היא סימטרית עבור $\theta = \frac{\pi}{2}$, כלומר $\sin(\theta) = \sin(\pi-\theta)$ ולכן

$$\int_0^{\pi} e^{-aR\sin(\theta)}\,\mathrm{d}\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR\sin(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$

אבל בקטע זה גם מתקיים $\sin(\theta) \ge \frac{2\theta}{\pi}$ ולכן

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR\sin(\theta)}\,\mathrm{d}\theta \le 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR\frac{2\theta}{\pi}}\,\mathrm{d}\theta \underset{u=\frac{2aR\theta}{\pi},\,\mathrm{d}\pi=\frac{\pi}{2aR}}{=} \frac{\pi}{2aR}\int_0^{aR} e^{-u}du = \left[\frac{-\pi e^{-u}}{2aR}\right]_{u=0}^{u=aR} = \frac{\pi}{2aR}(1-e^{-aR}) \le \frac{\pi}{2aR}$$

כלומר

$$\int_0^\pi e^{-aR\sin(\theta)}\,\mathrm{d}\theta \le 2\cdot\frac{\pi}{2aR} = \frac{\pi}{aR}$$

אז בסך־הכל קיבלנו

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \frac{R}{R^2-1}\cdot\frac{\pi}{aR} = \frac{\pi}{a(R^2-1)} \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$$

ולבסוף מאריתמטיקה של גבולות

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

ואם ניקח את החלק הממשי נקבל בידיוק

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(ax)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R}\frac{e^{aiz}}{z^2+1}\,\mathrm{d}\gamma$$

כלומר, אם $a>0$ לוקחים את החצי מעגל העליון ואם $a<0$ לוקחים את חצי המעגל התחתון (ומחשבים עם $|a|$ את אותו תהליך לעיל). $\square$

שאלה 3

סעיף א'

נמצא ענף של הלוגריתם בתחום $W = \mathbb{C} \setminus \left\{re^{-\frac{\pi i}{2}} \mid r \geq 0\right\}$ ונוכיח שהוא אכן ענף של הלגוריתם.
פתרון: נגדיר את הפונקציה $L : \mathbb{C} \setminus W \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ על־ידי

$$L(z) = Arg\left(z \cdot e^{\frac{-\pi i}{2}}\right) + \frac{\pi}{2}$$

ונוכיח שהיא ענף של הארגומנט: נבחין כי היא סיבוב על הענף הראשי של הארגומנט ולכן רציפה תחת ההזזה בכל תחומה.
אם $z \in \mathbb{C} \setminus i[0, \infty)$ אז

$$L(z) = Arg\left(z \cdot e^{\frac{-\pi i}{2}}\right) + \frac{\pi}{2} = Arg(z) - \cancel{\frac{\pi}{2}} + 2\pi k + \cancel{\frac{\pi}{2}} \in \{Arg(z) + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

נגדיר כעת $\ell : W \to \mathbb{C}$ על־ידי

$$\ell(z) = \log|z| + L(z)i$$

ונראה שזה ענף של הלגוריתם בתחום W: לכל $z \in W$ מתקיים לפי מה שמצאנו

$$\exp(\ell(z)) = \exp(\log|z|) \cdot \exp(iL(z)) = |z| \cdot e^{i\,Arg(z)} = z$$

כמו־כן, ℓ רציפה ב־W כי L רציפה ב־W ו־ℓ היא הרכבת פונקציה רציפה ב־$\mathbb{C}$ ו־L ולכן ℓ ענף של הלגוריתם ב־W.
כלומר הענף של הלוגריתם שלנו כפי שכתבנו בתרגול הוא

$$\log\left(re^{i\theta}\right) = \begin{cases} \log(r) + i(\theta + 2\pi(k+1)) & \theta \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \\ \log(r) + i(\theta + 2\pi k) & \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}$$

□

סעיף ב'

נכתוב פרמטריזציה ונצייר את כיוון העקומה $\Gamma_{\varepsilon,R}$ הנוצרת מסכימת העקומות הבאות:

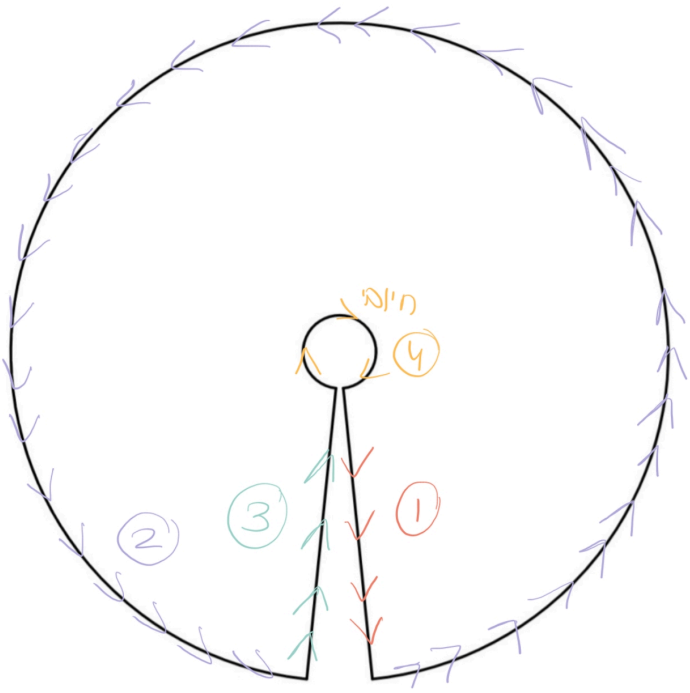
1. מעגל ממורכז סביב הראשית ברדיוס R עם פתח בזווית 2ε סביב הנקודה $Re^{-\frac{\pi i}{2}}$
2. מעגל ממורכב סביב הראשית ברדיוס $\frac{1}{R}$ עם פתח בזווית 2ε סביב הנקודה $\frac{1}{R}e^{-\frac{\pi i}{2}}$
3. ישר המחבר בין הנקודות $Re^{-\frac{\pi i}{2}-\varepsilon i}$ ו־$\frac{1}{R}e^{-\frac{\pi i}{2}-\varepsilon i}$
4. ישר המחבר בין הנקודות $Re^{-\frac{\pi i}{2}+\varepsilon i}$ ו־$\frac{1}{R}e^{-\frac{\pi i}{2}+\varepsilon i}$

פתרון: נגדיר את העקומות הבאות

$$\begin{cases} \gamma_1(t) = \exp\left(\frac{-\pi i}{2} + i\varepsilon\right)t & t \in \left[\frac{1}{R}, R\right] \\ \gamma_2(t) = R\exp(it) & t \in \left[-\frac{\pi}{2} + \varepsilon, \frac{3\pi}{2} - \varepsilon\right] \\ \gamma_3(t) = \exp\left(\frac{-\pi i}{2} - i\varepsilon\right)t & t \in \left[\frac{1}{R}, R\right] \\ \gamma_4(t) = \frac{1}{R}\exp(it) & t \in \left[-\frac{\pi}{2} + \varepsilon, \frac{3\pi}{2} - \varepsilon\right] \end{cases}$$

ולבסוף נגדיר

$$\Gamma_{\varepsilon,R} = \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4$$



איור 1: כיוון העקומה הנוצרת מסכימת העקומות

$\square$

סעיף ג'

נוכיח שקיים $k \in \mathbb{Z}$ שעבורו מתקיים

$$\lim_{R\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_{\varepsilon,R}} \frac{z^{\frac{1}{\pi}}}{1-z^2}\,\mathrm{d}\gamma = -ie^{-\frac{i}{2}}e^{2ik}(1-e^{2i})\int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{\pi}}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

כאשר פונקציה החזקה מושרית מהענף של הלוגריתם מסעיף א'.

פתרון: האינטגרל הממשי באגף ימין מתכנס בהחלט ולכן

$$\int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{\pi}}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_{R^{-1}}^{R} \frac{x^{\frac{1}{\pi}}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

עלינו להראות שהאינטגרל על המעגל החיצוני שואף ל־0:

$$\lim_{R\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\left|\int_{\gamma_1} \frac{z^{\frac{1}{\pi}}}{1-z^2}\,\mathrm{d}z\right| = \lim_{R\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\left|\int_{\gamma_1} \frac{e^{\frac{1}{\pi}\log(z)}}{1+z^2}\,\mathrm{d}z\right| = \lim_{R\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\left|\int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} \frac{e^{\frac{1}{\pi}\log\left(Re^{it-\frac{\pi i}{2}}\right)}}{1-R^2e^{2it-i\pi}}\cdot iRe^{it-\frac{i\pi}{2}}\right|\mathrm{d}t$$

$$\underset{\triangle}{\leq} \lim_{R\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon}\left|\frac{e^{\frac{1}{\pi}\log\left(Re^{it-\frac{\pi i}{2}}\right)}}{1-R^2e^{2it-i\pi}}\cdot iRe^{it-\frac{i\pi}{2}}\right|\mathrm{d}t \underset{R>1}{\leq} \lim_{R\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon}\frac{e^{\frac{1}{\pi}\log(R)}}{R^2-1}Rdt = \lim_{R\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}(2\pi-2\varepsilon)\frac{R^{1+\frac{1}{\pi}}}{R^2-1} = 0$$

שכן

$$\left|iRe^{it-\frac{\pi i}{2}}\right| = R$$

וכן מאי־שיוויון המשולש ההפוך

$$1-R^2e^{2it-\pi i} \geq \left||1| - \left|R^2e^{2it-i\pi}\right|\right| = \left|1-R^2\right|$$

נעבור לאינטגרל על המעגל הפנימי: אותו חישוב רק שבמקום R יש לנו $\frac{1}{R}$ ולכן

$$\lim_{R\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\left|\int_{\gamma_3}\frac{e^{\frac{1}{\pi}\log(z)}}{1-z^2}\,\mathrm{d}z\right| = \lim_{R\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\left|\int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon}\frac{e^{\frac{1}{\pi}\log\left(\frac{1}{R}e^{-it-\frac{\pi i}{2}}\right)}}{1-R^-2e^{-2it-i\pi}}\cdot i\frac{1}{R}e^{-it-\frac{i\pi}{2}}\,\mathrm{d}t\right|$$

$$\underset{\triangle}{\leq}\lim_{R\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon}\left|\frac{e^{\frac{1}{\pi}\log\left(\frac{1}{R}e^{-it-\frac{\pi i}{2}}\right)}}{1-R^-2e^{-2it-i\pi}}\cdot i\frac{1}{R}e^{-it-\frac{i\pi}{2}}\right|\mathrm{d}t \leq \lim_{R\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon}\frac{e^{\frac{1}{\pi}\log\left(\frac{1}{R}\right)}}{1-R^2}\,\mathrm{d}t = \lim_{R\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}(2\pi-2\varepsilon)\frac{R^{-1-\frac{1}{\pi}}}{1-R^-2} = 0$$

נשאר לחשב את האינטגרלים על הישרים γ_2,γ_4.

על המסילה γ_2 מתקיים $\log\left(re^{i\theta}\right)=\log(r)+(\theta+2\pi(k+1))i$, אז

$$\lim_{R\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_2}\frac{e^{\frac{1}{\pi}\log(z)}}{1-z^2}\,\mathrm{d}z = \lim_{R\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-R}^{-\frac{1}{R}}\frac{e^{\frac{1}{\pi}\log\left(-te^{-\frac{\pi i}{2}-\varepsilon i}\right)}}{1-t^2e^{-\pi i-2\varepsilon i}}\cdot e^{\frac{-\pi i}{2}-\varepsilon i} \underset{\varepsilon\text{ רציפות}}{=} = \lim_{R\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-R}^{-\frac{1}{R}}\frac{e^{\frac{1}{\pi}(\log(-t)+(-\frac{\pi}{2}+2\pi(k+1)i))}}{1-t^2e^{-\pi i}}\cdot e^{-\frac{\pi i}{2}}\,\mathrm{d}t$$

$$= \lim_{R\to\infty}\frac{t^{\frac{1}{\pi}}+e^{\frac{1}{\pi}(-\frac{\pi}{2}+2\pi(k+1)i)}}{1+t^2}\cdot(-i)\,\mathrm{d} = -\lim_{R\to\infty}\left(-i\cdot e^{\frac{1}{\pi}(-\frac{\pi}{2}+2\pi(k+1))i}\right)\int_{-R}^{-\frac{1}{R}}\frac{t^{\frac{1}{\pi}}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = ie^{-\frac{i}{2}+2ki+2i}\int_{-R}^{-\frac{1}{R}}\frac{t^{\frac{1}{\pi}}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$\xrightarrow[R\to\infty]{} ie^{-\frac{i}{2}+2ki+2i}\int_0^{\infty}\frac{t^{\frac{1}{\pi}}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

באופן דומה, על γ_4 מתקיים $\log\left(re^{i\theta}\right)=\log(r))+(\theta+2\pi k)i$:

$$\lim_{R\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_2}\frac{e^{\frac{1}{\pi}\log(z)}}{1-z^2}\,\mathrm{d}z = \lim_{R\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\frac{1}{R}}^{R}\frac{e^{\frac{1}{\pi}\log\left(te^{-\frac{\pi i}{2}+\varepsilon i}\right)}}{1-t^2e^{-\pi i+2\varepsilon i}}\cdot e^{-\frac{\pi i}{2}+\varepsilon i}\,\mathrm{d}t = \lim_{R\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\frac{1}{R}}^{R}\frac{e^{\frac{1}{\pi}(\log(|-t|+(-\frac{\pi}{2}-\varepsilon+2\pi k)i))}}{1-t^2e^{-\pi i+\varepsilon i}}\cdot e^{-\frac{\pi i}{2}+\varepsilon i}\,\mathrm{d}t$$

$$\underset{\varepsilon\text{ רציפות}}{=}\lim_{R\to\infty}\int_{\frac{1}{R}}^{R}\frac{e^{\frac{1}{\pi}(\log(|-t|)+(-\frac{\pi}{2}+2\pi k)i)}}{1-t^2e^{-\pi i}}\cdot e^{-\frac{\pi i}{2}}\,\mathrm{d}t = \lim_{R\to\infty}\left(-i\frac{e^{(-\frac{\pi}{2}+2\pi k)i}}{\pi}\right)\int_{\frac{1}{R}}^{R}\frac{t^{\frac{1}{\pi}}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$\xrightarrow[R\to\infty]{} -ie^{-\frac{i}{2}+2ki}\int_0^{\infty}\frac{t^{\frac{1}{\pi}}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

ובסך־הכל

$$\lim_{R\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_{\varepsilon,R}}\frac{z^{\frac{1}{\pi}}}{1-z^2}\,\mathrm{d}z = 0+0+ie^{-\frac{i}{2}+2ki+2i}\int_0^{\infty}\frac{t^{\frac{1}{\pi}}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t - ie^{-\frac{i}{2}+2ki}\int_0^{\infty}\frac{t^{\frac{1}{\pi}}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

$\square$