פתרון מטלה 11 — פונקציות מרוכבות, 80519

6 בפברואר 2026

שאלה 1

תזכורת: בכיתה ראינו שאם $\gamma : I \to \mathbb{C}$ מסילה ו־$f : \gamma \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ רציפה אזי קיימת $\psi : I \to \mathbb{C}$ כך ש־$e^{\psi} = f \circ \gamma$.
הגדרנו

$$i\Delta_\gamma f := \Delta_\gamma \log(f) = \psi(b) - \psi(a)$$

סעיף א'

נוכיח שלכל γ_1, γ_2 הניתנות לשרשור מתקיים $\Delta_{\gamma_1+\gamma_2} = \Delta_{\gamma_1} + \Delta_{\gamma_2}$.
הוכחה: נניח ש־γ_1 מוגדרת על $[a,b]$ ו־γ_2 מוגדרת על $[b,c]$, אז $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ מוגדרת על־ידי

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & t \in [a,b] \\ \gamma_2(t) & t \in [b,c] \end{cases}$$

לפי למת הלוגריתם הרציף, קיימת $\psi : [a,c] \to \mathbb{C}$ כך ש־$f(\gamma(t)) = e^{\psi(t)}$ לכל $t \in [a,c]$.
אז ישירות מהגדרה

$$\Delta_\gamma f = \psi(c) - \psi(a) = \psi(c) - \psi(b) + \psi(b) - \psi(a)$$

אבל הצמצום של ψ לקטע $[a,b]$ הוא מועמד כשר ללוגריתם הרציף עבור $f \circ \gamma_1$ ולכן $\Delta_{\gamma_1}(f) = \psi(b) - \psi(a)$ ובאופן דומה הצמצום של ψ לקטע $[b,c]$ הוא מועמד כשר ללוגירתם הרציף עבור $f \circ \gamma_2$ ולכן $\Delta_{\gamma_2}(f) = \psi(c) - \psi(b)$ כלומר

$$\Delta_{\gamma_1+\gamma_2}(f) = \Delta_{\gamma_2} f + \Delta_{\gamma_1} f$$

□

סעיף ב'

נראה שלכל f, g רציפות מתקיים $\Delta_\gamma(f \cdot g) = \Delta_\gamma f + \Delta_\gamma g$.
הוכחה: נסמן ψ_f, ψ_g הלוגריתמים הרציפים של f, g בהתאמה (כלומר $e^{\psi_f} = f \circ \gamma, e^{\psi_g} = g \circ \gamma$).
נסתכל על $\Psi(t) = \psi_f(t) + \psi_g(t)$, מחוקי אקספוננט מתקיים

$$e^{\psi(t)} = e^{\psi_f(t)+\psi_g(t)} = e^{\psi_f(t)} \cdot e^{\psi_g(t)} = f(\gamma(t)) \cdot g(\gamma(t))$$

אבל ψ_f, ψ_g רציפות ולכן גם הסכום שלהם רציף ו־Ψ רציפה ולכן זה מועמד ראוי להיות הלוגריתם הרציף של $f \cdot g$, אז

$$\begin{aligned}
\Delta_\gamma(fg) &= \Psi(b) - \Psi(a) \\
&= \big(\psi_f(b) + \psi_g(b)\big) - \big(\psi_f(a) + \psi_g(a)\big) \\
&= \big(\psi_f(b) - \psi_f(a)\big) + \big(\psi_g(b) - \psi_g(a)\big) \\
&= \Delta_\gamma f + \Delta_\gamma g
\end{aligned}$$

□

סעיף ג'

נוכיח שעיקרון הארגומנט שקול לכך ש־$\#\{Z_f \cap G\} - \#\{P_f \cap G\} = \frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial G} f$.
הוכחה: תהיי $\psi(t)$ הלגוריתם הרציף של $f(\gamma(t))$, אז מכלל השרשרת

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\log(f(\gamma(t))) = \frac{f'(\gamma(t))}{f(\gamma(t))} \cdot \gamma'(t)$$

ולאורך העקומה נקבל

$$\int_\gamma \frac{f'}{f}\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \frac{f'(\gamma(t))}{f(\gamma(t))}\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \psi'(t)\,\mathrm{d}t = \psi(1) - \psi(0) = \Delta_\gamma f$$

אבל מעיקרון הארגומנט

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z=\#(Z_f)-\#(P_f)$$

כלומר

$$\frac{1}{2\pi i}\Delta_{\gamma}f=\#(Z_f)-\#(P_f)$$

□

שאלה 2

בכל סעיף נמצא כמה פתרונות (כולל ריבועיים) יש למשוואות בתחומים הנתונים.

תזכורת (משפט רושה): תהיינה $f,g\in \mathrm{Hol}(G)$ ותהיי $H\subseteq G$ כך ש־$\overline{H}\subseteq G$ ו־H תחום טוב.

נניח שלכל $z\in\partial H$ מתקיים $|g(z)|\le|f(z)|$, אזי

$$\#\big(Z_{f+g}\cap H\big)=\#\big(Z_f\cap H\big)$$

סעיף א'

$z^7-5z^4+z^2-2=0$ בדיסק היחידה $\mathbb{D}$.

פתרון: נגדיר $p(z)=z^7-5z^4+z^2-2$ כאשר $g(z)=-5z^4$ ו־$f(z)=z^4+z^2-2$, על $|z|=1$ מתקיים

$$|g(z)|=\left|-5z^4\right|=5\qquad |f(z)|=\left|z^4+z^2-2\right|=0$$

אז מתקיים $|f(z)|\le|g(z)|$ ול־g יש אפס אחד בראשית בריבוי 4 ולכן ממשפט רושה נקבל שיש למשוואה 4 פתרונות. □

סעיף ב'

$z^4+3z=1$ בטבעת $\{z\mid 1<|z|<2\}$.

פתרון: מהמסקנה אודות ריבויים בטבעת, נחלק לשתי בדיקות

$$\#\{\text{zeroes in } 1<|z|<2\}=\#\{\text{zeroes in } |z|<2\}-\#\{\text{zeroes in } 1<|z|\}$$

1. על $|z|=2$, נכתוב $p(z)=z^4+(3z-1)$ כאשר $g(z)=z^4$ ו־$f(z)=3z-1$ ומתקיים

$$|g(z)|=|z|^4=16\qquad |f(z)|=|3z-1|=5$$

כלומר $|f(z)|<|g(z)|$ ולכן תנאי משפט רושה מתקיימים ולכן ל־p יש את אותה כמות אפסים כמו ל־g ול־g יש אפס אחד בראשית, אבל עם הכפליות יש לו ארבע.

2. על $|z|=1$ נכתוב $p(z)=3z+\left(z^4-1\right)$ כאשר $g(z)=3z$ ו־$g(z)=z^4-1$ ומתקיים

$$|g(z)|=|3z|=3\qquad |f(z)|=\left|z^4-1\right|=0$$

כלומר $|f(z)|<|g(z)|$ ולכן תנאי משפט רושה מתקיימים ולכן ל־p יש את אותה כמות אפסים כמו ל־g ול־g יש אפס אחד בראשית עם ריבוי אחד.

בסך־הכל קיבלנו $4-1=3$ כלומר 3 פתרונות למשוואה הנתונה. □

סעיף ג'

$e^z=3z^n$ בחצי מישור $\{z\in\mathbb{C}\mid Re(z)<1\}$ ו־$n\in\mathbb{N}$.

פתרון: נגדיר $F(z)=3z^n-e^z$ ונסתכל קודם כל על דיסק היחידה, על $|z|=1$ מתקיים

$$|f(z)|=|e^z|=e<3\qquad |g(z)|=|3z^n|=3^n=3$$

ושוב מתנאי משפט רושה מתקיים $|f(z)|<|g(z)|$ ולכן יש להם את אותה כמות אפסים, ול־g יש ריבוי אחד בראשית עם ריבוי n.

נבחן מה קורה אם $|z|\ge 1$ ו־$Re(z)<1$, אז

$$|f(z)|=|3z^n|\ge 3\qquad |g(z)|=|e^z|=e^{Re(z)}<e<3$$

כלומר

$$|3z^n|>|e^z|\Longrightarrow 3z^n-e^z\ne 0$$

כלומר אין התאפסויות בתחום הזה בכלל.

לסיכום יש לנו n אפסים, קרי n פתרונות. □

שאלה 3

נוכיח את משפט ההעתקה המקומית: תהיי $f \in \mathrm{Hol}(G)$ לא קבועה, $z_0 \in G$ ונסמן $w_0 = f(z_0)$ ויהי $m = \mathrm{ord}_{z_0}(f - w_0)$.
אז קיים $\varepsilon_0 > 0$ כך שלכל $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ קיימת $\delta > 0$ כך שלכל $w \in B^*_\delta(w_0)$ יש בידיוק m פתרונות שונים למשוואה $f(z) = w$ בדיסק $B_\varepsilon(z_0)$.
הוכחה: נסמן $w_0 = f(z_0)$, מכך ש-f איננה קבועה נובע שקיים $\varepsilon_0 > 0$ כך שלכל $B(z_0, \varepsilon_0)^*$ מתקיים $|f'(z)| > 0$ ו-$f(z) \neq w_0$ (אפשר להניח ממשפט היחיד8ות).
נקבע $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ ונגדיר

$$\delta = \min_{|z - z_0| = \varepsilon} |f(z) - w_0| > 0$$

ונגדיר $g_1(z) = f(z) - w_0$ ונבחר $w \in B(w_0, \varepsilon)^*$ ונגדיר $g_2(z) = w_0 - w$ (פונקציה קבועה) ונגדיר $G_1 = B(z_0, \varepsilon)$.
אזז לכל $z \in \partial G_1$ מתקיים

$$|g_2(z)| = |w - w_0| < \delta \leftarrow |f(z) - w_0| = |g_1(z)|$$

אז g_1, g_2 מקיימות את תנאי משפט רושה ולכן

$$\#\Big(Z_{g_1 + g_2} \cap B(z_0, \varepsilon)\Big) = \#\Big(Z_{g_1} \cap B(z_0, \varepsilon)\Big) = m$$

כלומר למשוואה $f(z) = m$ יש בידיוק m פתרונות. $\square$

שאלה 4

תהיי $f : U_a^* \to \mathbb{C}$ הולומורפית עם קוטב מסדר $m \geq 1$ בנקודה a.
נוכיח שקיימים $\varepsilon, r > 0$ כך שלכל $|w| > r$ קיימים בידיוק m פתרונות למשוואה $f(z) = w$ ב־$B_\varepsilon^*(a)$.
הוכחה: נגדיר $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ ומתקיים $g(a) = 0$ וכן $\mathrm{ord}_a(g) = m$.
מהגרסה המקומית של משפט רושה (שאלה קודמת) קיימים $\varepsilon, \delta > 0$ כך שלכל $w \in B(g(a), \delta)$ קיימים בידיוק m פתרונות למשוואה $g(z) = w$ ב־$B(a, \varepsilon)$.
עוד מתקיים

$$g(z) = w \iff f(z) = \frac{1}{w}$$

ולכן קיבלנו את הטענה עבור $\varepsilon, r = \frac{1}{\delta}$. $\square$