פתרון מטלה 02 — פונקציות מרוכבות, 80519

11 בנובמבר 2025

שאלה 1

לכל פונקציה נמצא איפה היא $\mathbb{C}$־דיפרנציאבילית ואיפה היא אנליטית.

תזכורת: נגיד שפונקציה $f:U_{z_0}\to\mathbb{C}$ היא $\mathbb{C}$־**דיפרנציאבילית** ב־z_0 אם הגבול $\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ קיים.

נגיד ש־f היא **אנליטית** ב־z_0 אם קיים r_{z_0} כך ש־f היא $\mathbb{C}$־דיפרנציאבילית לכל $z\in B_{r_{z_0}}(z_0)$.

סעיף א'

$z\mapsto|z|^2$.

הוכחה: יהי $\mathbb{C}\ni z=x+iy$, מתקיים

$$|z|^2=|x+iy|^2=\sqrt{x^2+y^2}^2=x^2+y^2=z\overline{z}$$

נבחרת את הגדרת $\mathbb{C}$־דיפרנציאבילית

$$\lim_{z\to z_0}\frac{|z|^2-|z_0|^2}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{z\overline{z}-z_0\overline{z_0}}{z-z_0}=\lim_{h\to 0}\frac{(z_0+h)\left(\overline{z_0+h}\right)-z_0\overline{z_0}}{z_0+h-z_0}=\lim_{h\to 0}\frac{z_0\overline{z_0}+z_0\overline{h}+h\overline{z_0}+h\overline{h}-z_0\overline{z_0}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{h\overline{h}+h\overline{z_0}+z_0\overline{h}}{h}=\lim_{h\to 0}\overline{h}+\overline{z_0}+z_0\frac{\overline{h}}{h}$$

נבחין שכאשר $h\to 0$, גם $\overline{h}\to 0$ ולכן הגורם הראשון מתבטל ונשארנו עם $\overline{z_0}+z_0\frac{\overline{h}}{h}$ אבל הביטוי האחרון תלוי בכיוון השאיפה האם אנחנו שואפים מכיוון 0^+ או מכיוון 0^- שכן מתקיים

$$\lim_{h\to 0^+}\overline{h}+\overline{z_0}+z_0\frac{\overline{h}}{h}=\overline{z_0}+z_0$$
$$\lim_{h\to 0^-}\overline{h}+\overline{z_0}+z_0\frac{\overline{h}}{h}=\overline{z_0}-z_0$$

כלומר, הגבול קיים אם ורק אם $z_0=0$ ואז גם ערך הנגזרת בנקודה יהיה אפס.

נובע מכך ש־f לא אנליטית בכלל שכן גם סביב הראשית אין סביבה קטנה דיו בה הפונקציה היא $\mathbb{C}$־דיפרנציאבילית. $\square$

סעיף ב'

$z\mapsto e^z$.

הוכחה: ניעזר ברמז ונרצה להראות $|e^z-1-z|\le e^{|z|}-1-|z|$.

ראשית נזכר שבהרצאה ראינו שטור טיילור של e^z הוא

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$$

באגף שמאל יש לנו

$$|e^z-1-z|=\left|\sum_{n=2}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\right|=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{|z^n|}{n!}$$

מצד ימין

$$e^{|z|}-1-|z|=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|z|^n}{n!}-1-|z|=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{|z|^n}{n!}$$

ומאי־שיוויון המשולש מתקיים $\left|\sum_{n=2}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\right|\le\sum_{n=2}^{\infty}\frac{|z|^n}{n!}$.

יהי $z\in\mathbb{C}$, נבחן את הגדרת ה־$\mathbb{C}$־דיפרנציאביליות

$$\lim_{z\to z_0}\frac{e^z-e^{z_0}}{z-z_0}\underset{w=z-z_0}{=}\lim_{z\to z_0}\frac{e^{z_0}e^{z-z_0}-e^{z_0}}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}e^{z_0}\cdot\frac{e^{z-z_0}-1}{z-z_0}$$

נגדיר $w=z-z_0$ (אפשר כי זו החלפת משתנה רציפה כפי שראינו בתרגול) ומספיק שנראה $\lim_{w\to 0}\frac{e^w-1}{w}=1$, מאי־השיוויון שהראינו מתקיים

$$\left|\frac{e^w-1}{w}-1\right| = \left|\frac{e^w-1-w}{w}\right| = \frac{|e^w-1-w|}{|w|} \le \frac{e^{|w|}-1-|w|}{|w|}$$

כאשר עלינו לבחון $w \to 0$ ולכן $|w| \to 0$ ולכן מספיק שנראה למקרה השני (כי $w \to 0$ אמם $|w| \to 0$) והגבול לעיל הוא גבול ממשי ולכן אפשר להשתמש בכלל לופיטל ולקבל שהגבול הוא אכן 1.

לכן

$$\lim_{z\to z_0}\frac{e^z-e^{z_0}}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0} e^{z_0}\cdot\lim_{z\to z_0}\frac{e^{z-z_0}-1}{z-z_0} = e^{z_0}$$

כלומר, לכל $z\in\mathbb{C}$ הפונקציה היא $\mathbb{C}$־דיפרנציאבילית ולכן בפרט אנליטית לכל $z\in\mathbb{C}$. $\square$

סעיף ג'

$f(x+iy)=(x^2+y^2)+i(-x^2+y^2)$.

הוכחה: יהיו $z=x+iy$ ו־$z_0=x_0+iy_0$.

נצטרך לבחון גם את קו האופק וגם את קו הרוחב. בקו האופקי, ניקח $z=x+iy_0$ אז $z\to z_0$ אומר ש־$x\to x_0$ כלומר $z-z_0=x-x_0$ ואז

$$\begin{aligned} f(z)-f(z_0) &= x^2+y_0^2+i(-x^2+y_0^2)-x_0^2-y_0^2-i(-x_0^2+y_0^2) \\ &= x^2-x_0^2-ix^2+ix_0^2 \\ &= (x-x_0)(x+x_0)-i((x-x_0)(x+x_0)) \\ &= (x-x_0)(x+x_0)(1-i) = \end{aligned}$$

כלומר

$$\begin{aligned} f'(z_0)_{\text{אופקית}} & \lim_{x\to x_0}\lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)(x+x_0)(1-i)}{x-x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0}(x+x_0)(1-i) = 2x_0-2ix_0 = 2x_0(1-i) \end{aligned}$$

באותו אופן אם נלך בקו האנכי אז $z-z_0=i(y-y_0)$ ואז נחשב נגזרת חלקית לפי x:

$$\begin{aligned} f'(z_0)_{\text{אנכית}} &= \lim_{y\to y_0}\frac{f(x_0+iy)-f(x_0+iy_0)}{i(y-y_0)} = \lim_{y\to y_0}\frac{x_0^2+y^2+i(-x_0^2+y^2)-x_0^2-y_0^2-i(-x_0^2+y_0^2)}{i(y-y_0)} \\ &= \lim_{y\to y_0}\frac{(y+y_0)(y-y_0)(1+i)}{i(y-y_0)} \underset{(\star)}{=} \lim_{y\to y_0}(y+y_0)(1-i) = 2y_0-2iy_0 = 2y_0(1-i) \end{aligned}$$

כאשר $(\star)$ נובע מכך שמתקיים

$$\frac{1+i}{i} = \frac{1+i}{i}\cdot\frac{-i}{-i} = \frac{-i+1}{(-i)\cdot i} = \frac{-i+1}{1} = 1-i$$

כלומר צריך להתקיים בשביל שיהיה גבול

$$2x_0(1-i) = 2y_0(1-i) \iff x_0 = y_0$$

כלומר f גזירה על הישר $x=y$ בלבד ולכן כמובן היא בהכרח לא אנליטית כי אין סביבה פתוחה סביב כל נקודה שבה הפונקציה היא $\mathbb{C}$־דיפרנציאבילית.

מספיק להסתכל על $z_0=1+i$, כל דיסק פתוח סביב z_0 יכיל נקודות שאינן על הישר $x=y$ וסיימנו. $\square$

סעיף ד'

$f(x+iy)=x^3+3iy$.

הוכחה: נפעל באופן דומה לסעיף הקודם, נכתוב $z=x+iy, z_0=x_0+y_0$.

עבור המקרה האופקי ניקח $z=x+iy_0$ אז $z\to z_0$ אומר ש־$x\to x_0$ כלומר $z-z_0=x-x_0$ ואז

$$f'(z_0)_{\text{אופקית}}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x+iy_0)-f(x_0+iy_0)}{y-y_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x^3+3iy_0^3-x_0^3-3iy_0^3}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x^3-x_0^3}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)(x^2+xx_0+x_0^2)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}x^2+xx_0+x_0^2=3x_0^2$$

באותו אופן אם נלך בקו האנכי אז $z-z_0=i(y-y_0)$ ואז

$$f'(z_0)_{\text{אנכית}}=\lim_{y\to y_0}\frac{f(x_0+iy)-f(x_0+iy_0)}{i(y-y_0)}=\lim_{y\to y_0}\frac{(3i)(y-y_0)}{i(y-y_0)}=3$$

אז בשביל קיום הגבול נצטרך $3x_0^2=3\iff x_0^2=1\iff x_0\pm 1$ אז הפונקציה גזירה רק במקומות בהם החלק הממשי הוא ±1, כלומר

$$\{z\in\mathbb{C}\mid Re(z)=1\}\cup\{z\in\mathbb{C}\mid Re(z)=-1\}$$

בפרט זה אומר שהפונקציה איננה אנליטית. $\square$

שאלה 2

תהיינה $f,g\in \mathrm{Hol}(G)$ עבור תחום $G\subset \mathbb{C}$.

תזכורת: בהינתן G תחום, נסמן ב־$\mathrm{Hol}(G)$ את קבוצת כל הפונקציות שאנליטיות על G.

סעיף א'

נראה כי $(f\pm g)$ אנליטית ושמתקיים $(f\pm g)'=f'\pm g'$.

הוכחה: מהגדרת ה־$\mathbb{C}$־דיפרנציאביליות מתקיים

$$(f\pm g)'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{(f\pm g)(z)-(f\pm g)(z_0)}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\pm\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}$$
$$=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\pm\lim_{z\to z_0}\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}$$

אבל $f,g\in \mathrm{Hol}(G)$ ולכן הגבולות לעיל מוגדרים היטב וקיימים.

בפרט, לכל $z\in G$, הן f והן g אנליטיות ב־z, כלומר קיימת סביבה U_z כך ש־f ו־g הן $\mathbb{C}$־דיפרנציאביליות בכל $z'\in U_z$.

מאריתמטיקה של גבולות מתקיים

$$(f\pm g)'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\pm\lim_{z\to z_0}\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}=f'(z_0)\pm g'(z_0)$$

היות וזה נכון לכל $z\in G$ אז $f\pm g\in \mathrm{Hol}(G)$ ומתקיים $(f\pm g)'=f'\pm g'$. $\square$

סעיף ב'

נראה כי $f\cdot g$ אנליטית ושמתקיים $(f\cdot g)'=f'\cdot g+f\cdot g'$.

הוכחה: בדומה לסעיף הקודם, מהגדרת $\mathbb{C}$־דיפרנציאביליות ומהיות $f,g\in \mathrm{Hol}(G)$ מתקיים

$$(f\cdot g)'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{(f\cdot g)(z)-(f\cdot g)(z_0)}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)\cdot g(z)-f(z_0)\cdot g(z_0)}{z-z_0}$$
$$=\lim_{z\to z_0}\frac{(f(z)-f(z_0))\cdot g(z)+f(z_0)\cdot g(z)-f(z_0)\cdot g(z_0)}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\cdot g(z)+\frac{f(z_0)\cdot g(z)-f(z_0)\cdot g(z_0)}{z-z_0}$$
$$=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\cdot g(z)+\lim_{z\to z_0}\frac{f(z_0)\cdot g(z)-f(z_0)\cdot g(z_0)}{z-z_0}=f'(z_0)g(z_0)+f(z_0)\lim_{z\to z_0}\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}$$
$$=f'(z_0)\cdot g(z_0)+f(z_0)\cdot g'(z_0)$$

היות וזה נכון לכל $z\in G$ אז $f\cdot g\in \mathrm{Hol}(G)$ ומתקיים $(f\cdot g)'=f'\cdot g+f\cdot g'$. $\square$

סעיף ג'

נראה כי $f\circ g$ אנליטית ושמתקיים $(f\circ g)'(z)=f'(g(z))\cdot g'(z)$.

הוכחה: מהגדרת $f,g\in \mathrm{Hol}(G)$ ומהגדרת ה־$\mathbb{C}$־דיפרנציאביליות מתקיים

$$(f\circ g)'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{(f\circ g)(z)-(f\circ g)(z_0)}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{f(g(z))-f(g(z_0))}{g(z)-g(z_0)}\cdot\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}=f'(g(z_0))\cdot g'(z_0)$$

אז אם g אנליטית ב־z ו־f אנליטית ב־$g(z)$ אז $f\circ g$ אנליטית ב־z, לכל $z\in G$ (שכן $f,g\in \mathrm{Hol}(G)$). $\square$

סעיף ד'

נניח כי $g(z) \neq 0$ לכל $z \in G$ ונראה $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$.

הוכחה: מספיק שנראה שמתקיים $\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}$ ומהסעיף אודות מכפלה של פונקציות אנליטיות נקבל את הנדרש.

מהגדרת ה-$\mathbb{C}$-דיפרנציאביליות מתקיים

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{\frac{1}{g(z)} - \frac{1}{g(z_0)}}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{\frac{g(z_0) - g(z)}{g(z)(g(z_0))}}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{g(z_0) - g(z)}{z - z_0} \cdot \frac{1}{g(z)g(z_0)} = \frac{-g'(z)}{g^2(z)}$$

כמובן שהכל תחת ההנחה שלכל $z \in G$ מתקיים $g(z) \neq 0$ והיות וזה נכון לכל $z \in G$ אז $\frac{1}{g}$ היא אנליטית מכך ש-$g \in \mathrm{Hol}(G)$.

נשים לב שמתקיים $\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'$ ומהסעיף אודות נגזרת מכפלה של פונקציות אנליטיות מתקיים

$$\left(f \cdot \frac{1}{g}\right)' = f' \cdot \frac{1}{g} + f \cdot g' = \frac{f'}{g} + f \cdot \frac{-g'}{g^2} = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

מהסעיף הקודם והטענה לעיל אנחנו מקבלים את הנדרש. $\square$

סעיף ה'

נוכיח שאם לכל $z \in G$ מתקיים $f'(z) = 0$ אז f קבועה.

הוכחה: G תחום ולכן קבוצה פתוחה וקשירה ולכן קשירה מסילתית.

ניקח z_0, z_1 ומהקשירות יש מסילה $\gamma : [a,b] \to G$ כך ש-$\gamma(a) = z_0, \gamma(b) = z_1$ ונסתכל על ההרכבה $h(t) := f(\gamma(t))$ כך ש-$t \in [a,b]$.

נשים לב שמתקיים

$$h'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\gamma(t+h)) - f(\gamma(t))}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(\gamma(t+h)) - f(\gamma(t))}{\gamma(t+h) - \gamma(t)} \cdot \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h}$$

מתקיים $\gamma(t+h) - \gamma(t) \underset{h \to 0}{\to} 0$ ו-γ היא מסילה ולכן גזירה והגורם השני שואף לנגזרתה.

אז

$$h'(t) = f'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$$

אבל מהנתון, $f'(z) = 0$ לכל $z \in G$ ובפרט נקבל $h'(t) = 0$ לכל $t \in [a,b]$ אבל זה בידיוק גורר ש-h היא קבועה, זו פונקציה ממשית ולכן אפשר לראות זאת מהמשפט היסודי של החשבון האינפיניטסמלי

$$h(t_2) - h(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} h'(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} 0dt = 0$$

אזי h היא קבועה על $[a,b]$, כלומר

$$f(z_0) = h(\gamma(a)) = h(\gamma(b)) = f(z_1)$$

$\square$

סעיף ו'

נוכיח כי $f(\overline{z})$ היא לא פונקציה אנליטית אם $f \not\equiv C$ עבור C קבוע.

הוכחה: נגדיר $g(z) = f(\overline{z})$ ונקבע z_0 כך ש-$w_0 := \overline{z_0}$.

נניח כי g היא אנליטית, בפרט היא $\mathbb{C}$-דיפרנציאבילית ב-z_0, אז

$$g'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{g(z_0 + h) - g(z_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f\left(\overline{z_0 + h}\right) - f(z_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f\left(w_0 + \overline{h}\right) - f(w_0)}{h}$$

f היא אנליטית ולכן כאשר $h \to 0$

$$f\left(w_0 + \overline{h}\right) - f(w_0) = f'(w_0)\overline{h} + o\left(\left|\overline{h}\right|\right)$$

כלומר

$$\frac{f\left(w_0+\overline{h}\right)-f(w_0)}{h}=f'(w_0)\frac{\overline{h}}{h}+\frac{o\left(\left|\overline{h}\right|\right)}{h}$$

כלומר אם הגבול של $g'(z_0)$ קיים אז גם הגבול $f'(w_0)\frac{\overline{h}}{h}$ כאשר $h\to 0$ קיים ושווה לו.
אם h ממשי אז $\frac{\overline{h}}{h}=1$ ואז הביטוי שואף ל־$f'(w_0)$ אם h הוא מדומה אזי $h=it$ עם t ממשי כך ש־$t\to 0$ נקבל $\frac{\overline{h}}{h}=-1$ כלומר הביטוי שואף ל־$-f'(w_0)$.
אבל אם הגבול קיים, אז הנגזרות הכיווניות הללו חייבות להסכים על הערך, אז

$$f'(w_0)=-f'(w_0)\Longrightarrow f'(w_0)=0$$

אבל מהסעיף הקודם נובע כי f קבועה. אז אם f קבועה, באמת g אנליטית.
אם f איננה קבועה, קיבלנו סתירה מההנחה ש־g היא $\mathbb{C}$־דיפרנציאבילית ולכן היא איננה $\mathbb{C}$־דיפרנציאבילית. $\square$

שאלה 3

ניזכר שהעתקה לינארית $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ יכולה להיות מתוארת על־ידי כפל מטריצות

$$L(x,y) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y)$$

סעיף א'

נראה כי ההעתקה לעיל יכולה להיכתב בצורה

$$z \mapsto z \cdot \left(\frac{\alpha+\delta}{2} + i\frac{\gamma-\beta}{2} \right) + \overline{z} \cdot \left(\frac{\alpha-\delta}{2} + i\frac{\gamma+\beta}{2} \right)$$

פתרון: נכתוב $\omega = (\alpha x + \beta y) + i(\gamma x + \delta y)$.
יהי $\mathbb{C} \ni z = a + ib$, נשים לב לזהות הבאה

$$z = a+ib \Longrightarrow a = \frac{z+\overline{z}}{2} = \frac{a+ib+a-ib}{2} = \frac{2a}{2} = a$$
$$z = a+ib \Longrightarrow b = \frac{z+\overline{z}}{2i} = \frac{a+ib-a+ib}{2i} = \frac{2ib}{2i} = b$$

ולכן במקרה שלנו מתקיים עבור $\mathbb{C} \ni z = x + iy$

$$\omega = \alpha\left(\frac{z+\overline{z}}{2}\right) + \beta\left(\frac{z-\overline{z}}{2}\right) + i\gamma\left(\frac{z+\overline{z}}{2}\right) + i\delta\left(\frac{z-\overline{z}}{2}\right)$$

ניזכר שמתקיים

$$\frac{1}{i} = -i$$

שכן מתקיים $\frac{1}{i} \cdot \frac{-i}{-i} = -\frac{i}{(-i)^2} = -\frac{i}{1} = -i$ ולכן אם נסתכל על המקדמים לעיל של z נקבל

$$\frac{\alpha}{2} - \frac{i\beta}{2} + \frac{i\gamma}{2} + \frac{\delta}{2} = \frac{1}{2}(\alpha+\delta) + \frac{i}{2}(\gamma-\beta) = \frac{\alpha+\delta}{2} + i\frac{\gamma-\beta}{2}$$

באותו אופן עבור $\overline{z}$ מתקיים

$$\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2i} + \frac{i\gamma}{2} - \frac{i\delta}{2i} = \frac{\alpha}{2} - \frac{-i\beta}{2} + \frac{i\gamma}{2} - \frac{\delta}{2} = \frac{1}{2}(\alpha-\delta) + \frac{i}{2}\frac{\beta+\gamma}{2} = \frac{\alpha-\beta}{2} + i\frac{\beta+\gamma}{2}$$

כלומר

$$\omega = z \cdot \left(\frac{\alpha+\delta}{2} + i\frac{\gamma-\beta}{2} \right) + \overline{z} \cdot \left(\frac{\alpha-\delta}{2} + i\frac{\beta+\gamma}{2} \right)$$

$\square$

סעיף ב'

נראה כי העתקה לינארית $f(z) = a \cdot z + b \cdot \overline{z}$ היא הולומורפית אם ורק אם $b = 0$.
תזכורת: נגיד שהעתקה היא הולומורפית אם היא אנליטית בכל $\mathbb{C}$ (כלומר, לכל $z \in \mathbb{C}$, ההעתקה אנליטית ב־z).
הוכחה: $\Longleftarrow$ נניח כי $b = 0$ ונראה כי f היא הולומורפית.
אז $f(z) = a \cdot z$, ומהגדרת ה־$\mathbb{C}$־דיפרנציאביליות מתקיים

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{a(z-z_0)}{z-z_0} = a$$

מהיות $z_0 \in \mathbb{C}$ שרירותי נובע כי הטענה נכונה לכל $z_0 \in \mathbb{C}$ ולכן f הולומורפית, כי היא אנליטית בכל $z_0 \in \mathbb{C}$.

$\Longleftarrow$ נניח כי f הולומורפית ונראה כי $b=0$.
f הולומורפית ולכן לכל $z_0 \in \mathbb{C}$, f אנליטית ב־z_0, כלומר יש סביבה U_{z_0} כך ש־f $\mathbb{C}$־דיפרנציאבילית בכל $z \in U_{z_0}$.
יהי $z_0 \in \mathbb{C}$, מתקיים מהגדרת ה־$\mathbb{C}$־דיפרנציאביליות

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{(a\cdot z + b\cdot \overline{z}) - (a\cdot z_0 + b\cdot \overline{z_0})}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{a(z-z_0)+b(\overline{z}-\overline{z_0})}{z-z_0}$$
$$= \lim_{z\to z_0} a\cdot \frac{z-z_0}{z-z_0} - b\cdot \frac{\overline{z}-\overline{z_0}}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0} a + b\frac{\overline{z-z_0}}{z-z_0} = a\cdot \lim_{z\to z_0} b\cdot \frac{\overline{z-z_0}}{z-z_0}$$

מהיות f הולומורפית, נובע כי הגבול לעיל צריך להיות קיים ומוגדר היטב.
אם כך, אם אנחנו נעים על הציר הממשי, הביטוי לעיל יישאף ל־1. אם אנחנו נעים על הציר המדומה, הביטוי לעיל יישאף ל־-1, כלומר הגבול הזה לא קיים אלא אם כן $b=0$ ואז כל הביטוי הזה לא חלק מהגבול, ולכן $b=0$ בהכרח.

$\square$

סעיף ג'

נסיק שכדי שהעתקה לינארית תהיה הולומורפית חייב להתקיים $\alpha=\delta, \beta=-\gamma$.
פתרון: בעצם עלינו להראות שמתקיים $\frac{\alpha-\delta}{2}+i\frac{\gamma+\beta}{2}=0$
ניזכר ש־$0=z=a+ib \in \mathbb{C}$ אם ורק אם $Re(z)=0$ וגם $Im(z)=0$.
במקרה שלנו מתקיים

$$\begin{cases} \frac{\alpha-\delta}{2}=0 \Longleftrightarrow \alpha-\delta=0 \Longleftrightarrow \alpha=\delta \\ \frac{\gamma+\beta}{2}=0 \Longleftrightarrow \gamma+\beta=0 \Longleftrightarrow \beta=-\gamma \end{cases}$$

אז ההעתקה הלינארית יכולה להיות מיוצגת על־ידי מטריצה מהצורה $M=\begin{pmatrix} \alpha & -\gamma \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix}$.
תחת מקרה זה מסעיף א' מתקיים

$$\frac{\alpha+\delta}{2}+i\frac{\gamma-\beta}{2} = \frac{\alpha+\alpha}{2}+i\frac{\gamma-(-\gamma)}{2} = \frac{2\alpha}{2}+i\frac{2\gamma}{2} = \alpha+i\gamma$$

כלומר $L(z)=(\alpha+i\gamma)z$ שבסעיף הקודם ראינו שהיא הולומורפית.

$\square$

שאלה 4

בהינתן מטריצה A הגדרנו את העתקת מוביוס המתאימה להיות h_A.

תזכורת: אמרנו שהעתקה מהצורה

$$h(z) = \frac{a \cdot z + b}{c \cdot z + d}$$

כאשר $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ היא **העתקת מוביוס** והמטריצה המתאימה לייצוג ההעתקה היינה

$$A_h = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

סעיף א'

תהיינה A, B מטריצות ונראה כי $h_A \circ h_B = h_{AB}$.

פתרון: תהיינה $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

מצד אחד מתקיים

$$h_A \circ h_B(z) = h_A\left(\frac{ez+f}{gz+h}\right) = \frac{a\frac{ez+f}{gz+h} + b}{c\left(\frac{ez+f}{gz+h}\right) + d} = \frac{\frac{a(ez+f)+b(gz+h)}{gz+h}}{\frac{c(ez+f)+d(gz+h)}{gz+h}} = \frac{a(ez+f)+b(gz+h)}{c(ez+f)+d(gz+h)}$$

$$= \frac{aez+af+bgz+hb}{cez+cf+dgz+dh} = \frac{(ae+bg)z+(af+bh)}{(ce+dg)z+(cf+dh)}$$

מצד שני מתקיים

$$AB = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$$

נסמן $a' = ae+bg, b' = af+bh, c' = ce+dg, d' = cf+dh$ ולכן $AB = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ ונחשב

$$h_{AB}(z) = \frac{a'z+b'}{c'z+d'} = \frac{(ae+bg)z+(af+bh)}{(ce+dg)z+(cf+dh)}$$

וקיבלנו שיוויון. $\square$

סעיף ב'

נניח כי $\det(A) \neq 0$ ונראה כי $h_A^{-1} = h_{A^{-1}}$.

פתרון: מהיות $\det(A) \neq 0$ נובע כי A^{-1} קיימת ומתקיים $A^{-1}A = I$ ומהסעיף הקודם מתקיים

$$h_{A^{-1}} \circ h_A = h_{A^{-1}A} = h_I$$

אבל

$$h_I(z) = \frac{z+0}{0z+1} = z$$

אזי $h_{A^{-1}} \circ h_A = \mathrm{id}$ ובאותו אופן נקבל גם $h_A \circ h_{A^{-1}} = \mathrm{id}$, כלומר $h_{A^{-1}}$ היא ההופכית של h_A, כלומר $h_{A^{-1}} = (h_A)^{-1}$. $\square$

סעיף ג'

נראה כי כל העתקת מוביוס יכולה להתקבל מהרכבה של העתקות מוביוס אלמנטריות.

הוכחה: בתרגול ראינו שארבעת העתקות מוביוס האלמנטריות הן סקלר, סיבוב, הזזה והופכי.

נסמן

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, h_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

אם $c=0$ אז $h_A(z)=\frac{az+b}{d}=\frac{a}{d}z+\frac{b}{d}$ שזה בידיוק הרכבה של הזזה וכיווץ בסקלר.
בתרגול טענו את הטענה הנדרשת יחד עם ההנחה $\det(A)\neq 0$ ולכן נמשיך תחת מקרה זה.
נשים לב

$$az+b=\frac{a}{c}(cz)+b=\frac{a}{c}(cz+d-d)+b=\frac{a}{c}(cz+d)-\frac{ad}{c}+b$$

ולכן

$$\frac{az+b}{cz+d}=\frac{\frac{a}{c}(cz+d)+\left(b-\frac{ad}{c}\right)}{cz+d}=\frac{a}{c}+\frac{b-\frac{ad}{c}}{cz+d}$$

כעת ניזכר ש־$\det(A)\neq 0$ ולכן

$$b-\frac{ad}{c}=\frac{bc-ad}{c}=-\frac{ad-bc}{c}=-\frac{\det(A)}{c}$$

אז

$$\frac{a}{c}+\frac{b-\frac{ad}{c}}{cz+d}=\frac{a}{c}+\frac{\frac{-\det(A)}{c}}{cz+d}=\frac{a}{c}-\frac{\det(A)}{c}\cdot\frac{1}{cz+d}=\frac{a}{c}-\frac{\det(A)}{c^2}\cdot\frac{1}{z+\frac{d}{c}}$$

נסמן ב־T_1 את ההזזה $z_1=z+\frac{d}{c}$, ב־I את ההופכי $z_2=\frac{1}{z_1}=\frac{1}{z+\frac{d}{c}}$, ב־$D$ את הסקלריות $z_3=\frac{-\det(A)}{c^2}\cdot z_2=-\frac{\det(A)}{c(cz+d)}$ וב־T_2 את ההזזה $h(z)=\frac{a}{c}+z_3$ ואכן מתקיים

$$\begin{aligned}(T_2\circ D\circ I\circ T_1)(z)&=(T_2\circ D\circ I)\left(z+\frac{d}{c}\right)=(T_2\circ D)\left(\frac{c}{cz+d}\right)=T_2\left(-\frac{\det(A)}{c(cz+d)}\right)=\frac{a}{c}+-\frac{\det(A)}{c(cz+d)}\\&=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c(cz+d)}=\frac{a(cz+d)-ad+bc}{c(cz+d)}=\frac{acz+ad-ad+bc}{c(cz+d)}=\frac{c(az+b)}{c(cz+d)}=\frac{az+b}{cz+d}\end{aligned}$$

כלומר, כל העתקת מוביוס יכולה להתקבל מהרכבה של העתקות מוביוס אלמנטריות. $\square$

שאלה 5

סעיף א'

בכל סעיף נחשב את רדיוס ההתכנסות, נכתוב את תחום ההתכנסות ונקבע האם הוא מתכנס במידה שווה או לא.

תת־סעיף א'

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$.

פתרון: ראשית בהרצאה ראינו ש־$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ ולכן הטור שקיבלנו הוא בעצם הטור של e^z-1.

נשים לב שמתקיים

$$L=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{(n)!}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n+1}\right|=\infty$$

אז רדיוס ההתכנסות הוא ∞, ולכן הטור מתכנס לכל $z\in\mathbb{C}$.

כדי להראות שהטור לא מתכנס במידה שווה על $\mathbb{C}$, יהי $\varepsilon=1$, לו היה מתכנס במידה שווה, היה קיים N כך שלכל $n\geq N$ ולכל $z\in\mathbb{C}$ היה מתקיים $\left|\sum_{k=(n+1)}^{\infty}\frac{z^k}{k!}\right|<\varepsilon$.

נסתכל על $\frac{z^{N+1}}{(N+1)!}$, אם נניח בשלילה שהטור מתכנס במידה שווה, היה מתקיים שכאשר $n\to\infty$ אז הביטוי הזה היה שואף ל־0.

אבל לכל N, נשים לב שבבחירה של z גדול מספיק, כלומר $|z|=(N+1)!$ היה מתקיים שהביטוי לעיל הוא 1, כלומר לא ניתן לקבל את ההגדרה להתכנסות במידה שווה. $\square$

תת־סעיף ב'

$\sum_{n=1}^{\infty}z^n$.

פתרון: ראשית זה טור סביב $z_0=0$ ולכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $a_n=1$, כלומר $\sum_{n=1}^{\infty}z_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(z-z_0)$.

מנוסחת הדמארד מתקיים

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sup\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sup 1=1$$

ולכן רדיוס ההתכנסות הוא 1.

נבחן מקרים שונים של z:

1. אם $|z|<1$ אז זה טור גיאומטרי ומתכנס בהחלט
2. אם $|z|=1$ או $|z|>1$ אז הטור מתבדר (כי אפילו $\lim_{n\to\infty}z_n\neq 0$ וזה תנאי הכרחי)

אז תחום ההתכנסות הוא

$$\{z\in\mathbb{C}\mid |z|<1\}$$

נשים לב שיש תחום בו הטור מתכנס במידה שווה ויש תחום שלא: אם ניקח דיסק ברדיוס $0<r<1$ ונסתכל על $\overline{D_r}=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|\leq r\}$ אז לכל $z\in\overline{D_r}$ מתקיים $|z^n|=|z|^n\leq r^n$ אז ממבחן ה־M של ויירשטראס אם נבחר $M_n=r^n$ אז זה טור גיאומטרי מתכנס ולכן הטור מתכנס בדיסקים הללו.

מצד שני, אנחנו יודעים ש־$S_N(z)=\sum_{n=1}^{N}z^n=\frac{z}{1-z}$ ולו הוא היה מתכנס במידה שווה על הדיסק אזי היה מתקיים

$$\lim_{N\to\infty}\sup_{|z|<1}|S(z)-S_N(z)|=0$$

אזי $S(z)=S_N(z)=\frac{z^{N+1}}{1-z}$, עבור בחירה של $z=1-\delta$ כאשר $\delta>0$ קטן כרצוננו, היה מתקיים

$$\lim_{N\to\infty}\sup_{|z|<1}|S(z)-S_N(z)|=\frac{|1-\delta|^{N+1}}{\delta}\to\infty$$

כלומר אין התכנסות במידה שווה בדיסק הפתוח. $\square$

תת־סעיף ג'

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$.

פתרון: נסמן $z_0=0$ ו־$a_n=\frac{1}{n^2}$, אז לפי נוסחת הדמארד מתקיים

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sup\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sup\left|\frac{1}{n^2}\right|^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\sup e^{\left(\frac{1}{n}\right)\ln\left(\frac{1}{n^2}\right)}=1$$

אז לכל $|z|<1$ מתקיים שהטור מתכנס ואחרת הוא מתבדר, עבור $|z|=0$ מתקיים

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{z^n}{n^2}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1^n}{n^2}<\infty$$

ולכן הטור מתכנס גם עבור $|z|=1$ ובעצם תחום ההתכנסות הוא דיסק היחידה הסגור

$$\overline{\mathbb{D}}=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|\leq 1\}$$

בשביל להראות התכנסות במידה שווה מספיק שניקח $M_n=\frac{1}{n^2}$ וזה טור שמתכנס ולכן לפי מבחן ה־M של ויירשטראס מתקיים שהטור מתכנס במידה שווה על דיסק היחידה. $\square$

סעיף ב'

נביא דוגמה נגדית שהתכנסות במידה שווה על דיסק פתוח לא גוררת התכנסות במידה שווה על הדיסק הסגור.

הוכחה: ניקח את הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n+1}$, זה טור סביב 0 ו־$a_n=n+1$.

מנוסחת הדמארד מתקיים

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sup\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sup\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}\implies R=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sup\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}}=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sup\frac{1}{e^{\frac{1}{n}\ln(n+1)}}}\underset{\text{לופיטל}}{=}1$$

אז הוא מתכנס בדיסק הפתוח $\{z\in\mathbb{C}\mid |z|<1\}$, כאשר $|z|=1$.

ממבחן אבל אם ניקח $a_n=\frac{1}{n+1},b_n=z^n$ אז הטור שלנו מתכנס (כמכפלה של שני אלו), אבל אם $|z|=1$ נקבל וריאציה של הטור ההרמוני שמתבדר.

מתקיים

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n+1}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{n+1}=\frac{1}{z}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k}=-\frac{1}{z}\ln(1-z)$$

אבל כאשר $z\to 1^-$ הביטוי שלנו לעיל שואף ל־$-\infty$ ובפרט זה אומר שגם שסדרת הסכומים החלקיים לא יכולה להתכנס במידה שווה (כי הסכום החלקי אפילו לא חסום). $\square$