פתרון מטלה 04 — פונקציות מרוכבות, 80519

26 בנובמבר 2025

שאלה 1

תהיי $f(z)=\sqrt{\frac{1+z}{1-z}}$, הרכבה של העתקת מוביוס ופונקציית השורש.

סעיף א'

תת־סעיף א'

נסמן $G_1=\mathbb{C}\setminus(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$. נראה כי העתקת מוביוס ממפה את G_1 אל $\mathbb{C}\setminus[0,\infty)$.

הוכחה: נסמן $m(z)=\frac{1+z}{1-z}$ ונניח בשלילה שקיים $z\in G_1$ כך שמתקיים $m(z)\in[0,\infty)$.

אז $z=\frac{t+1}{t-1}\iff z(1-t)=-(t+1)\iff 1+z=t(z-1)\iff\frac{1+z}{1-z}=t\iff t=m(z)$ ונחלק למקרים על $t\geq 0$:

1. אם $t>1$ אז $\frac{t+1}{t-1}>1$ כלומר $z\in(1,\infty)$
2. אם $0\leq t<1$ אז $\frac{t+1}{t-1}\leq -1$ ולכן $x\in(-\infty,-1]$
3. אם $t=0$ אז $z=-1$
4. לא ייתכן ש־$t=1$ כי אז $z=\infty$

בחלק המקרים מתקיים $z\in(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$, אבל $z\in G_1$ ולכן זו סתירה ולכן $m(G_1)\subseteq\mathbb{C}\setminus[0,\infty)$.

נשאר להראות את ההכלה בכיוון השני, עבור $\mathbb{C}\setminus[0,\infty)\subseteq m(G_1)$ כדי לקבל שיוויון.

לכל $w\in\mathbb{C}\setminus[0,\infty)$ נסמן

$$z=\frac{w+1}{w-1}$$

שמוגדר היטב מהתחום של w.

נניח ש־$z\notin G_1$ ולכן $z\in(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$ אבל אז $m(z)=w$ זה מספר ממשי אי־שלילי, אבל אמרנו ש־$w\notin[0,\infty)$ ולכן זו סתירה

וקיבלנו את ההכלה בכיוון השני.

הראנו הכלה דו־כיוונית ולכן $m(G_1)=\mathbb{C}\setminus[0,\infty)$. $\square$

תת־סעיף ב'

ניקח את הענף מהתרגול ונראה ש־f היא חד־חד ערכית ועל וממפה את הקטע $(-1,1)$ אל הישר $\{Re(z)=0\}$.

הוכחה: בתרגול לקחנו את הענף

$$l(z)=Log(e^{i\pi}z)+i\pi$$

כדי להגדיר

$$f(z)=e^{\frac{1}{2}l\left(\frac{1+z}{1-z}\right)}$$

מהסעיף הקודם נובע ש־m היא העתקה חד־חד ערכית ועל בין G_1 לבין $\mathbb{C}\setminus[0,\infty)$.

נסמן $w=\frac{1+z}{z-1}$ ואנחנו יודעים ש־$\log(Z)$ הוא הענף הראשי שמוגדר על $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ עם $Im(\log(Z))\in(-\pi,\pi]$.

נסמן $W=e^{i\pi}w=-w$ כי $w\in\mathbb{C}\setminus[0,\infty)$ אז $W=-w$ זו בידיוק הקבוצה $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$, כלומר $\log(w)$ זה הענף של $\log(-w)$ שמוזז ב־$i\pi$.

אז מכך ש־$W=-w$ נקבל $\log(w)=\log(W)+i\pi$ וניקח את הענף שמתאים לשורש $\sqrt{w}=e^{\frac{1}{2}\log(w)}$, כלומר

$$f(z)=e^{\frac{1}{2}l(w)}=e^{\frac{1}{2}\log(-w)+i\pi}=e^{\frac{1}{2}\log(-w)}e^{\frac{i\pi}{2}}$$

אבל $e^{\frac{i\pi}{2}}=i$ ולכן

$$f(z)=i\sqrt{-w}=i\sqrt{-\frac{1+z}{z-1}}=i\sqrt{\frac{1+z}{1-z}}$$

כלומר זה הענף שמתאים לשורש.

ניקח $z=x\in(-1,1)$ ולכן $1+x>0$ וכן $1-x>0$ כלומר $W'=\frac{1+x}{1-x}>0\in\mathbb{R}^+$.

$$R=\frac{1+x}{1-x}\iff x=\frac{R-1}{R+1}$$

אז

1. כאשר $x \to -1^+$ אז $1+x \to 0^+$ ולכן $R \to 0^+$
2. כאשר $x \to 0$ אז $R = 1$
3. כאשר $x \to -1^-$ מתקיים $1 - x \to 0^+$ כלומר $R = \infty$

כלומר הקטע $(-1,1)$ ממפה את W' אל $(0,\infty)$.

ולכן עבור $x \in (-1,1)$ יש לנו $f(x) = i\sqrt{R}$ כאשר $R \in (0,\infty)$ אבל $\sqrt{R}$ זה השורש החיובי של R ולכן התמונה של $(-1,1)$ זו הקבוצה

$$\{iy \mid y \in (0,\infty)\} \subseteq \{Re(z) = 0\}$$

ואנחנו על עליה כי $R \in (0,\infty)$ ולכן גם $\sqrt{R} \in (0,\infty)$ והיא חד־חד ערכית כי אם $f(x_1) = f(x_2)$ עבור $x_1, x_2 \in (-1,1)$ מתקיים

$$i\sqrt{\frac{1+x_1}{1-x_1}} = i\sqrt{\frac{1+x_2}{1-x_2}} \iff \frac{1+x_1}{1-x_1} = \frac{1+x_2}{1-x_2}$$

אבל אם נסתכל על $g : (-1,1) \to \mathbb{R}$ המוגדרת על־ידי $g(x) = \frac{1+x}{1-x}$ ונסתכל על מבחן הנגזרת

$$g'(x) = \frac{1(1-x)+1(1+x)}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2} \geq 0 \ \forall x \in (-1,1)$$

וממבחן הנגזרת השנייה

$$g''(x) = \frac{4-4x}{(1-x)^4} \geq \ \ \forall x \in (-1,1)$$

לכן הפונקציה מונוטונית עולה ממש וחד־חד ערכית.

נשאר להראות שהיא על וחד־חד ערכית על G_1:

עבור חד־חד ערכית, נניח שיש $z_1, z_2 \in G_1$ כך שמתקיים

$$f(z_1) = f(z_2) \iff e^{\frac{1}{2}l(w_1)} = e^{\frac{1}{2}l(w_2)} \iff \frac{1}{2}l(w_1) = \frac{1}{2}l(w_2) + 2\pi ik \iff l(w_1) = l(w_2) + 4\pi ik$$

אבל

$$Im(l(w)) = Im(\log(-w) + i\pi) = Arg(-w) + \pi$$

אבל $Arg(-w) \in (-\pi,\pi]$ ולכן $Im(l(w)) \in (0,2\pi]$ אז $k = 0$ כי גם $Im(l(w_2)) \in (0,2\pi]$ (לדוגמה אם $k = 1$ אז $Im(l(w_1)) = Im(l(w_2)) + 4\pi \geq Im(l(w_1)) > 4\pi$ וזאת סתירה).

אז $k = 0$ ולכן $l(w_1) = l(w_2)$ ו־$\log$ היא פונקציה חד־חד ערכית אז $Arg(-w_1) = Arg(-w_2)$ בהכרח וכן $|-w_1| = |-w_2|$ כלומר $-w_1 = -w_2$ או $w_1 = w_2$ אבל $w = \frac{1+z}{z-1}$ היא העתקת מוביוס שהיא חד־חד ערכית על G_1 ולכן קיבלנו חד־חד ערכיות.

בשביל העל, נסמן $u = Re(l(w)) = \ln(|-w|) = \ln(|w|)$ ו־$v = Im(\ln(w)) \in (0,2\pi)$ אז

$$f(z) = e^{\frac{u}{2}} e^{\frac{iv}{2}}$$

אבל

$$|f(z)| = e^{\frac{u}{2}} = \sqrt{|w|} \in (0,\infty), \quad Arg(f(z)) = \frac{v}{2} \in (0,\pi)$$

כלומר התמונה של G_1 זה בדיוק חצי המישור העליון. $\square$

תת־סעיף ג'

נגדיר ענף של $g(z) = \sqrt{z^2-1}$ ב־G_1 כך שמתקיימת הזהות $(1-z)f(z) = g(z)$.

הוכחה: בהתאם למה שמצאנו בסעיפים הקודמים אנחנו רוצים שיתקיים

$$g(z) = (1-z)\left(i\sqrt{\frac{1+z}{1-z}}\right)$$

והענף בשביל השורש המדומה מוגדר על־ידי $\sqrt{Z} = \exp\left(\frac{1}{2}\log(Z)\right)$ נסמן $Z = z^2 - 1$ ונרצה $g(z) = \sqrt{Z}$, כלומר

$$g(z) = (1-z)f(z) = \exp\left(\log(1-z) + \frac{1}{2}l\left(\frac{1+z}{z-1}\right)\right) = (1-z)i\sqrt{\frac{1+z}{1-z}}$$

נסמן $w' = \frac{1+z}{1-z}$ נשים לב שמתקיים

$$w' = \frac{1+z}{-(z-1)} = -\frac{1}{w'}$$

אז w' זו התמונה של w מסובב ב־π והופכי, אבל $w \in \mathbb{C} \setminus [0,\infty)$ ולכן $w' \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ אז

$$\sqrt{w'} = \exp\Big(\frac{1}{2}\,Log(w')\Big), \;\; Arg(w') \in (-\pi, \pi)$$

וזה הענף שמקיים את הזהות הרצויה. $\square$

סעיף ב'

תת־סעיף א'

אם $G_2 = \mathbb{C} \setminus [-1.1)$, נראה כי העתקת מוביוס ממפה את G_2 אל $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

הוכחה: בדומה לתת־סעיף א', אם $x \in [-1,1)$ אז $1 + x \geq 0$ ו־$x - 1 < 0$ אז

$$m(x) = \frac{1+x}{1-x} \in \mathbb{R}^-$$

ב־$x = -1$ יש לנו $m(-1) = \frac{0}{-2} = 0$, כאשר $x \to 1^-$ אז המכנה שואף ל־0 ולכן $m(x) \to \infty$ ואם x עולה בין -1 ל־1 אז $m(x)$ יורד מ־0 ל־$-\infty$, כלומר $m([-1,1)) = (-\infty, 0]$ ולכן $m(G_2) = \mathbb{C} \setminus m([-1.1)) = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. $\square$

תת־סעיף ב'

נגדיר ענף של f על G_2.

הוכחה: נשים לב ש־Log הולומורפי על $(-\infty, 0]$ אז אם נגדיר

$$S(w) := \exp\Big(\frac{1}{2}\,Log(w)\Big), \;\; w \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$$

אז S הולומורפית כהרכבה של הולומורפיות ומקיימת $S(w)^2 = w$ כלומר התמונה היא $\{Re(z) > 0\}$ כי $Arg(w) \in (-\pi, \pi)$ גורר $Arg(S(w)) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

אז נגדיר ענף של f על G_2 להיות $f(z) := S(m(z)) = \exp\big(\frac{1}{2}\,Log(\frac{1+z}{z-1})\big)$ שמוגדר היטב בגלל הסעיף הקודם והולומורפי כהרכבה של הולומורפיות (זה אפילו חד־חד ערכית ועל על $\{Re(z) > 0\}$). $\square$

תת־סעיף ג'

נראה שיש ענף של f ב־G_2 עם תמונה $\{Re(z) > 0\}$ בו f חד־חד ערכית ועל ונראה שהקו הישר המחבר בין 1 ו־-1 דרך אינסוף ממופה אל $\{Im(z) = 0\}$.

הוכחה: ראשית הענף מהסעיף הקודם עונה על תנאי השאלה כי יש לנו הרכבה של פונקציות הולומורפיות וחד־חד ערכיות ועל. נשאר רק להראות שהתמונה של הקו הישר בין 1 ל־-1 דרך אינסוף ממופה אל $\{Im(z) > 0\}$:

נשים לב ש־$x \in \mathbb{R} \cap G_2 = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ ושם $m(x) \in (0, \infty)$ אז עבור $t > 0$ מתקיים $S(t) = \exp\big(\frac{1}{2}\ln(t)\big) = \sqrt{t} \in (0, \infty)$ אז $f(x) \in (0,\infty) \subseteq \mathbb{R}$ כלומר ממופה בידיוק אל $\{Im(w) = 0\}$ ונשים לב שמאריתמטיקה של גבולות אם $x = -1$ אז $S(m(x)) \to \infty$ על הציר הממשי החיובי.

הקטע שהחסרנו $[-1,1)$ ממופה על־ידי m אל $(-\infty, 0]$ ותחת S אל $\{it \mid t \geq 0\}$ אבל הקטע הזה איננו ב־G_2 $\square$

שאלה 2

יהי $\sigma \in \mathbb{C}$.

סעיף א'

באמצעות הענף הראשי של הלוגריתם, נחשב את $\frac{d^n}{dz^n}(1+z)^\sigma$.

פתרון: לפי הגדרה שראינו בהרצאה מתקיים עבור הענף הראשי של הלוגריתם

$$(1+z)^\sigma = \exp(\sigma\, Log(1+z))$$

שאנליטית לכל $z \notin (-\infty, -1]$: זאת מכיוון שמהגדרה

$$Log(w) = \log|w| + i\, Arg\, w$$

אבל אנחנו יודעים שהארגומנט איננו רציף בקטע זה (הוא קופץ מ־π ל־$-\pi$), ולכן בפרט הפונקציה שלנו לא אנליטית מהרכבה בתחום הזה. בשאר התחומים, היא אנליטית כהרכבה של אנליטיות. נחשב

$$\frac{d}{dz}(1+z)^\sigma = \frac{d}{dz}\exp(\sigma\log(1+z))) = \exp(\sigma\log(1+z)))\cdot\left(\sigma\cdot\frac{1}{1+z}\right) = \sigma(1+z)^{\sigma-1}$$

בפרט, גם הפונקציה הזאת אנליטית כמכפלה של פונקציה אנליטית (מהרכבה) וקבוע אז נוכיח באינדוקציה:
בסיס – הוכחנו, נניח כי הטענה נכונה עבור k פעמים שגזרנו, כלומר

$$\frac{d^k}{dz^k}(1+z)^\sigma = \sigma(\sigma-1)\cdot\ldots\cdot(\sigma-k+1)(1+z)^{\sigma-k}$$

שוב יש לנו מכפלה של פונקציה אנליטית עם קבוע, ולכן אנליטית, נגזור

$$\frac{d^{k+1}}{dz^{k+1}}(1+z)^\sigma = \sigma(\sigma-1)\cdot\dots\cdot(\sigma-k+1)(\sigma-k)(1+z)^{\sigma-k-1}$$

כלומר לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים מעיקרון האינדוקציה

$$\frac{d^n}{dz^n}(1+z)^\sigma = \sigma(\sigma-1)\cdot\dots\cdot(\sigma-n+1)(1+z)^{\sigma-n}$$

□

סעיף ב'

נסיק שלכל z עם $|z|<1$ מתקיים

$$(1+z)^\sigma = \sum_{n=1}^{\infty}\binom{\sigma}{n}z^n$$

פתרון: התנאי של $|z|<1$ הכרחי בשביל האנליטיות (כי יש נקודת אי־רציפות עבור $z=-1$), אבל מהיות $|z|<1$ אז הכל אנליטי.
אנחנו מחשבים טור טיילור סביב $a=0$ ולכן במקרה שלנו לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$f^n(0) = \sigma(\sigma-1)\cdot\ldots\cdot(\sigma-n+1)(1+0)^{\sigma-n} = \sigma(\sigma-1)\cdot\ldots\cdot(\sigma-n+1)$$

כלומר

$$a_n = \frac{f^n(0)}{n!} = \frac{\sigma(\sigma-1)\cdot\ldots\cdot(\sigma-n+1)}{n!} = \binom{\sigma}{n}$$

עבור $n=0$ פשוט מתקיים $f^0(0)=f(0)=(1+0)^\sigma=1$ וגם כקונבציה מתקיים $\binom{\sigma}{0}=1$ ולכן

$$(1+z)^\sigma = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{f^n(0)}{n!}\right)z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{f^n(0)}{n!}\right)z^n$$

□

שאלה 3

יהי $G \subset \mathbb{C}$ תחום ו־$f \in \mathrm{Hol}(G)$.
תהיי $f = f(r,t) = u(r,t) + iv(r,t)$ ההצגה של f בקורדינאטות פולריות ($z = re^{it}$).
נראה ש־f הולומורפית ואם $z \neq 0$ אז $u_r = \frac{1}{r}v_t$ ו־$v_r = -\frac{1}{r}u_t$.
הוכחה: יהי $z = re^{it}$ עם $r > 0$ ו־$t \in \mathbb{R}$, נכתוב

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) =: U(r,t) + iV(r,t)$$

כאשר

$$U(r,t) = u(x(r,t), y(r,t)) \ V(r,t) = v(x(r,t), y(r,t))$$
$$x = r\cos(x), \ \ y = r\sin(x)$$

נגזור

$$x_r = \cos(t), \ \ x_t = -r\sin(t), \ \ y_r = \sin(t), \ \ y_t = r\cos(t)$$

מכלל שרשרת נקבל

$$U_r = u_x x_r + u_y y_r = u_x \cos(t) + u_y \sin(t)$$
$$U_t = u_x x_t + u_y y_t = u_x(-r\sin(t)) + u_y(r\cos(t)) = r\big(-u_x \sin(t) + u_y \cos(t)\big)$$

ובאותו אופן גם נקבל

$$V_r = u_x \cos(t) + v_y \sin(t)$$
$$V_t = r\big(-v_x \sin(t) + v_y \cos(t)\big)$$

f הולומורפית ולכן ממשוואות קושי־רימן, מתקיים $u_x = v_y, \ \ u_y = -v_x$ ולכן

$$U_r = u_x \cos(t) + u_y \sin(t) = v_y \cos(t) + (-v_x)\sin(t) = v_y \cos(t) - v_x \sin(t)$$
$$\frac{1}{r}V_t = -v_x \sin(t) + v_y \cos(t)$$

כלומר $U_r = \frac{1}{r}V_t$.
באופן דומה נקבל גם

$$V_r = v_x \cos(t) + v_y \sin(t) = \big(-u_y\big)\cos(t) + u_x \sin(t)$$

ולכן

$$-\frac{1}{r}U_t = -\big(-u_x \sin(t) + u_y \cos(t)\big) = u_x \sin(t) - u_y \cos(t) \Longrightarrow V_r = -\frac{1}{r}U_t$$

□

שאלה 4

יהי $G \subset \mathbb{C}$ תחום ותהיי $f \in \mathrm{Hol}(G)$. נסמן

$$Z_v := \{z = x + iy \mid u(x, y) = Im(f(z)) = 0\}$$

ונראה שאם לכל $z \notin Z_v$ מתקיים $f' = 0$ אז f קבועה.

הוכחה: נכתוב $f = u + iv$ עבור $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ולכן

$$Z_v := \{z \in G \mid v(z) = 0\}$$

נניח שלכל $z \in G \setminus Z_v$ מתקיים $f'(z) = 0$ ונראה ש־f קבועה.

יש לנו שתי אופציות – או ש־$G = Z_v$ או ש־$G \neq Z_v$ וניזכר כי הגדרנו את G להיות קבוצה פתוחה וקשירה.

אם $G = Z_v$ אז $v \equiv 0$ ולכן f היא פונקציה $f : G \to \mathbb{R}$ כלומר תמונתה רק ערכים ממשיים וזוהי פונקציה אנליטית.

משפט ההעתקה הפתוחה אומר שאם f היא פונקציה אנליטית שאיננה קבועה אז היא שולחת קבוצות פתוחות לקבוצות פתוחות, ולכן נניח בשלילה ש־f איננה קבועה:

אז $Im(f) \subseteq \mathbb{R}$ כאשר נתייחס ל־$\mathbb{R}$ כתת־קבוצה של $\mathbb{C}$ צריכה להיות קבוצה פתוחה מהמשפט ונטען שזה לא ייתכן:

נטען טענה חזקה יותר, שעבור $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ עם הטופולוגיה המושרית מ־$\mathbb{C}$ היא פתוחה אם $U = \emptyset$ בלבד: נניח שלא, כלומר $U \neq \emptyset$ ונזהה את U עם $U \times \{0\}$, כלומר כל $u \in U$ מתאים ל־$(u, 0) \in \mathbb{C}$.

כדי ש־U תהיה פתוחה ב־$\mathbb{C}$, לכל $(u, 0) \in U$ צריך שיהיה דיסק $D((u, 0), \delta) \subseteq U$ עבור $\delta > 0$ אבל כל דיסק כזה מכיל גם $(u + a, b)$ עבור $a, b \in (-\delta, \delta)$ אבל לא ייתכן ש־$b \neq 0$ (כי אז יש לנו גם ציר מדומה), ולכן קיבלנו סתירה להנחה ש־$U \neq \emptyset$ ולכן $U = \emptyset$.

כלומר, לא ייתכן ש־f איננה קבועה כי אז תמונתה חייבת להיות קבוצה פתוחה מה שראינו שלא ייתכן בתנאים, ולכן בהכרח f פתוחה.

נשים לב שאפשר לענות על השאלה גם בלי משפט ההעתקה הפתוחה: f אנליטית ולכן היא מקיימת את משוואות קושי־רימן ולכן מתקיים

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

אמרנו ש־$v \equiv 0$ ולכן $v_x = v_y = 0$ ולכן גם $u_x = 0 = u_y$ ובפרט זה אומר שהנגזרת מתאפסת לחלוטין בכל G ולפי תנאים שקולים שראינו זה אומר ש־f קבועה על G.

נשאר לבחון את המקרה השני בו $G \neq Z_v$: אנחנו יודעים ש־v רציפה (כי f הולומורפית) ולכן הקבוצה $Z_v = v^{-1}(\{0\})$ היא קבוצה סגורה ב־G ולכן $G \setminus Z_v$ היא קבוצה פתוחה (מהגדרת המשלים).

מההנחה, לכל $z \in G \setminus Z_v$ מתקיים $f'(z) = 0$ אבל G הוא תחום קשיר ו־f הולומורפית, לכן אם $z \in U \subset G$ מקיימת $f'(z) = 0$ לכל $z \in U \subseteq G$ אז סביב כל נקודה כזאת יש סביבה בה הפונקציה מתאפסת ולכן בהכרח $f'(z) = 0$ לכל $z \in G$.

מהתנאים השקולים נקבל ש־f קבועה על G גם במקרה זה. $\square$

שאלה 5

תזכורת:

$$\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y), \qquad \partial_{\overline{z}} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$$

סעיף א'

נוכיח את הזהות $\overline{\partial_{\overline{z}} f} = \partial_z \overline{f}$.

הוכחה: ניזכר כי עבור $w_1, w_2, \in \mathbb{C}$ מתקיים $\overline{w_1 + w_2} = \overline{w_1} + \overline{w_2}$ וכן $\overline{i} = -i$, אז

$$\overline{\partial_{\overline{z}} f} = \frac{1}{2}\Big(\overline{\partial_x f + i\partial_y f}\Big) = \frac{1}{2}\Big(\overline{u_x + iv_x + i(u_y - iv_y)}\Big) = \frac{1}{2}\overline{(u_x + iv_x + iu_y + v_y)} = \frac{1}{2}(u_x - iv_x - iu_y + v_y)$$
$$= \frac{1}{2}((u_x - v_y) - i(v_x + u_y))$$

מצד שני, $\overline{f} = u - iv$ ולכן

$$\partial_z \overline{f} = \frac{1}{2}\Big(\partial_x \overline{f} + i\partial_y \overline{f}\Big) = \frac{1}{2}(u_x - iv_x - iu_y - i(-i)v_y) = \frac{1}{2}(u_x - iv_x - iu_y - v_y) = \frac{1}{2}((u_x - v_y) - i(v_x + u_y))$$

אז יש לנו שיוויון. □

סעיף ב'

נוכיח את הזהות $\partial_z(f \cdot g) = (\partial_z f) \cdot g + f \cdot \partial_z g$.

הוכחה:

$$\partial_z(f \cdot g) = \frac{1}{2}(\partial_x(f \cdot g) - i\partial_y(f \cdot g)) = \frac{1}{2}(\partial_x f \cdot g + \partial_x g \cdot f - i(\partial_y f \cdot g + \partial_y g \cdot f))$$
$$= \frac{1}{2}(\partial_x f - i\partial_y f) \cdot g + \frac{1}{2} \cdot f(\partial_x g - i\partial_y g) = (\partial_z f) \cdot g + f \cdot (\partial_z g)$$

□

סעיף ג'

נוכיח את הזהות $\partial_{\overline{z}}(f \cdot g) = (\partial_{\overline{z}} f) \cdot g + f \cdot (\partial_{\overline{z}} g)$.

הוכחה:

$$\partial_{\overline{z}}(f \cdot g) = \frac{1}{2}(\partial_x(f \cdot g) + i\partial_y(f \cdot g)) = \frac{1}{2}(\partial_x f \cdot g + \partial_x g \cdot f + i(\partial_y f \cdot g + \partial_y g \cdot f))$$
$$= \frac{1}{2}(\partial_x f + i\partial_y f) \cdot g + \frac{1}{2} \cdot f(\partial_x g + i\partial_y g) = (\partial_{\overline{z}} f) \cdot g + f \cdot (\partial_{\overline{z}} g)$$

□

סעיף ד'

נוכיח את הזהות $\partial_{\overline{z}}(f \circ g) = ((\partial_z f) \circ g)\partial_{\overline{z}} g + ((\partial_{\overline{z}} f) \circ g)\partial_{\overline{z}} \overline{g}$.

הוכחה: נפעל כמו בתרגול, נכתוב את f על־ידי $z, \overline{z}$ כלומר $g, \overline{g}$ לאחר ההרכבה, ונקבל

$$\partial_{\overline{z}}(f \circ g) = \partial_{\overline{z}}(f(g(z, \overline{z}), \overline{g}(z, \overline{z})))$$

לנוחות נסמן $w = g(z, \overline{z}), \overline{w} = \overline{g(z, \overline{w})}$ ומכלל השרשרת לפונקציות ממשיות

$$\partial_x\Big(f\Big(g(z), \overline{g(z)}\Big)\Big) = f_w \partial_x w + f_{\overline{w}} \partial_x \overline{w}$$
$$\partial_y\Big(f\Big(g(z), \overline{g(z)}\Big)\Big) = f_w \partial_y w + f_{\overline{w}} \partial_y \overline{w}$$

כאשר

$$f_w = \partial_w f,\ \ f_{\overline{w}} = \partial_{\overline{w}} f$$

ולכן

$$\partial_{\overline{z}}(f \circ g) = \frac{1}{2}\big(\partial_x + i\partial_y\big)(f(w(z))) = \frac{1}{2}\big(f_w \partial_x w + f_{\overline{w}} \partial_x \overline{w} + i f_w \partial_y w + f_{\overline{w}} \partial_y \overline{w}\big)$$
$$= \frac{1}{2}\big(f_w\big(\partial_x w + i\partial_y w\big) + f_{\overline{w}}\big(\partial_x \overline{w} + i\partial_y \overline{w}\big)\big) = f_w \cdot \frac{1}{2}\big(\partial_x + i\partial_y\big)w + f_{\overline{w}} \cdot \frac{1}{2}\big(\partial_x + i\partial_y\big)\overline{w}$$

נשים לב

$$\frac{1}{2}\big(\partial_x + i\partial_y\big)w = \partial_{\overline{z}} w = \partial_{\overline{z}} g,\ \ \frac{1}{2}\big(\partial_x + i\partial_y\big)\overline{w} = \partial_{\overline{z}} \overline{w} = \partial_{\overline{z}} \overline{g}$$

כעת, $w = g(z)$ וכן $\partial_W f = \partial_z f, \partial_{\overline{w}} f = \partial_{\overline{w}} f$ ולכן

$$\partial_{\overline{w}}(f \circ g) = (\partial_w f \circ g)\partial_{\overline{z}} g + (\partial_{\overline{w}} f \circ g)\partial_{\overline{z}} \overline{g} = (\partial_z f \circ g)\partial_{\overline{z}} g + (\partial_{\overline{z}} f \circ g)\partial_{\overline{z}} \overline{g}$$

$\square$