פתרון מטלה 02 — תורת ההסתברות 1, 80420

8 בנובמבר 2025

שאלה 1

כל אחד מבין n אנשים נולד ביום מקרי בשנה בת m ימים.

נסמן ב־$A_{n.m}$ את המאורע שלפחות לשניים יש ימי־הולדת באותו היום.

נמצא פונקציה $f(m)$ כך שעבור $n=o(f(m))$ כלומר $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{f(m)}=0$ ומתקיים

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\big(A_{n,m}\big)=0$$

ואילו עבור $n=\omega(f(m))$ כלומר $\lim_{m\to\infty}\frac{f(m)}{n}=0$ מתקיים

$$\lim_{m\to\infty}\mathbb{P}\big(A_{n,m}\big)=1$$

פתרון: $\square$

שאלה 2

על שולחן שני מטבעות – אחד הוגן ואחד מזוייף שמוציא תוצאת עץ בסיכוי $\frac{3}{4}$.
עורכים את שלושת הניסויים הבאים:

1. מטילים פעם אחת מטבע שנבחר באקראי ובפעם השנייה את השני
2. מטילים פעם אחת מטבע שנבחר באקראי ואז משיבים אותו ומטילים שוב מטבע שיצא באקראי
3. בוחרים מטבע באקראי ומטילים אותו פעמיים

נסמן $L_1 = ([0,1], \mathcal{F}, \mathbb{P}_1)$ מרחב ההסתברות המתאים לניסוי ברנולי $\frac{1}{2}$ ו-$L_2 = ([0,1], \mathcal{F}, \mathbb{P}_2)$ מרחב ההסתברות המתאים לניסוי ברנולי $\frac{3}{4}$ (כלומר למטבע ההוגן והלא הוגן בהתאמה).

סעיף א'

נראה כי את כל הניסויים הללו ניתן לתאר במרחב המכפלה $(L_1)^4 \times (L_2)^2$, כלומר כל תוצאה של הניסוי מתאימה למאורע במרחב זה.

הוכחה: $\square$

סעיף ב'

נחשב מה ההסתברות לקבל לפחות פעם אחת עץ בכל אחד מהניסויים.

פתרון: $\square$

שאלה 3

אם בוחרים ילד מקרי בתיכון "ברייקבילס" סיכוייו להיות בחוג אומנות הם 10%, בחוט לבלט 20% ובחוג גננות הוא 30%.

נראה שבבחירת ילד מקרי ההסתברות שהוא מצוי בשני חוגים לפחות היא לכל היותר 30%.

הוכחה: ראשית, לא משנה איזה צמד של חוגים נבחר בגלל שאנחנו מחפשים צמד של שני חוגים מבין שלושה, בכל קומבינציה נקבל לפחות חוג אחד שהילד נמצא בו (אם לקחנו ילד שנמצא בשני חוגים).

אז נסמן ב־E את קבוצת הילדים שנמצאים בשני חוגים, A ילדים בחוג לגננות ו־B ילדים בחוג לבלט ולכן $E \subseteq A \cup B$ ולכן

$$\mathbb{P}(E) \underset{\text{מונוטוניות}}{\leq} \mathbb{P}(A \cup B) \underset{\text{חסם האיחוד}}{\leq} \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

$\square$

שאלה 4

יהי $m\in\mathbb{N}$. נבחן באקראי סדרה של $n_m\geq 7$ מספרים מתוך קבוצה $[m]$ עם חזרות (ומכיוון שזו סדרה, גם עם חשיבות לסדר).
נסמן ב־p_m את ההסתברות שבסדרה שבחרנו מופיע אותו איבר 7 פעמים.
נראה באמצעות חסם האיחוד כי עבור $n_m=o\left(m^{\frac{6}{7}}\right)$ כלומר $\lim_{m\to\infty}\frac{n_m}{m^{\frac{6}{7}}}=0$ מתקיים $\lim_{m\to\infty}p_m=0$.
הוכחה: ראשית $\Omega=[m]^n$ ואנחנו בהסתברות אחידה לפי הנתון ולכן $p(\omega)=\frac{1}{m^n}$.
יהי A_i עבור $i\in[m]$ המאורע ש־i מופיע לפחות 7 פעמים, אז מתקיים

$$|A_i|=m^n-\left(\sum_{k=0}^{6}\binom{n}{k}(m-1)^{n-k}\right)$$

נגדיר $A=\bigcup_{i\in[m]}A_i$ המאורע שיש לפחות שבעה מופעים לאחד המספרים ומחסם האיחוד

$$p_m=\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in[m]}A_i\right)\leq\sum_{i\in[m]}\mathbb{P}(A_i)=m\cdot\frac{|A_i|}{|\Omega|}$$

אז

$$p_m\leq m\cdot\frac{1}{m^n}\left(m^n-\left(\sum_{k=0}^{6}\binom{n}{k}(m-1)^{n-k}\right)\right)=\frac{1}{m^{n-1}}\left(m^n-\left(\sum_{k=0}^{6}\binom{n}{k}(m-1)^{n-k}\right)\right)$$
$$=m-\left(\sum_{k=0}^{6}\binom{n}{k}\frac{(m-1)^{n-k}}{m^{n-1}}\right)$$

לפתוח את הסכום יהיה ארוך ומבלבל, אז נשים לב שעבור $k\in\{0,...,6\}$ מתקיים

$$\binom{n}{k}\frac{(m-1)^{n-k}}{m^{n-1}}=\binom{n}{k}\frac{\left(m\left(1-\frac{1}{m}\right)\right)^{n-k}}{m^{n-1}}=\binom{n}{k}\frac{m^{n-k}\left(1-\frac{1}{m}\right)^{n-k}}{m^{n-1}}=\binom{n}{k}m^{(n-k)-(n-1)}\left(1-\frac{1}{m}\right)^{n-k}$$
$$=\binom{n}{k}m^{1-k}\left(1-\frac{1}{m}\right)^{n-k}=\binom{n}{k}\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)^{n-k}}{m^{k-1}}$$

נניח כי $n_m=o\left(m^{\frac{6}{7}}\right)$ (זו הנחה הכרחית לקיום הגבול הרצוי) ולכן $n\to\infty$ גורר $m\to\infty$ ומתקיים

$$0\leq\lim_{m\to\infty}p_m\leq\lim_{m\to\infty}m-\left(\sum_{k=0}^{6}\binom{n}{k}\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)^{n-k}}{m^{k-1}}\right)$$

אבל מההנחה, $\left(1-\frac{1}{m}\right)^{n-k}\to 1$ ולכן כל הביטוי שואף ל־0. $\square$

שאלה 5

בכל בוקר ילד מקבל מהוריו סכום קבוע לקנות חטיף. בכל חטיף נמצאת אות אחת מ־22 אותיות בהסתברות שווה ועל הילד להרכיב את המילה "עוגה".

סעיף א'

עבור $n \in \mathbb{N}$, נחשב את ההסתברות שביום ה־n לילד לא הייתה את האות a עבור $a \in \{\text{ה},\text{ג},\text{ו},\text{ע}\}$.

פתרון: נסמן $\Omega = \{\text{ת},...,\text{א}\}^n = 22^n$ עם n חזרות ואנחנו מחפשים את המאורע

$$A = \{(x_1, ..., x_n) \mid \forall i \in [n], x_i \notin \{\text{ה},\text{ג},\text{ו},\text{ע}\}\}$$

ולכן מהגדרת ההסתברות האחידה

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \left(\frac{21}{22}\right)^n$$

כאשר את $|A|$ חישבנו באמצעות המשלים. □

סעיף ב'

נחשב את ההסתברות שלאחר n ימים הילד עדיין לא הצליח להרכיב את המילה "עוגה".

פתרון:

□

שאלה 6

מגרילים פעמיים מספר טבעי לפי התפלגות נקודתית $p(n)=\theta(1-\theta)^{n-1}$ עבור $0<\theta<1$.
נחשב מהי ההסתברות שהתוצאה בהגרלה השנייה תהיה גדולה/שווה לתוצאה בהגרלה הראשונה.

פתרון: נסמן ב־X את ההטלה הראשונה וב־Y את ההטלה השנייה ומתקיים

$$\mathbb{P}(X=n)=\mathbb{P}(Y=n)=\theta(1-\theta)^{n-1}$$

אנחנו רוצים את ההסתברות שהתוצאה בהגרלה השנייה תהיה גדולה/שווה לתוצאה בהגרלה הראשונה, כלומר בהינתן שיצא $\mathbb{P}(X=k)$ עבור $k\in\mathbb{N}$, אנחנו רוצים $\mathbb{P}(Y\geq X)$ זה בעצם שקול ללכתוב $\mathbb{P}(Y\geq k \text{ and } X=k)$, אבל נבחין ששתי ההטלות הן **בלתי־תלויות** ולכן

$$\mathbb{P}(Y\geq k \text{ and } X=k)=\mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y\geq k)$$

אנחנו רוצים זאת לכל $k\in\mathbb{N}$ ולכן נרצה לחשוב את הסכום

$$\mathbb{P}(Y\geq X)=\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y\geq k)$$

ראשית נשים לב שמתקיים

$$\mathbb{P}(Y\geq k)=\sum_{n=k}^{\infty}\mathbb{P}(Y=k)=\sum_{n=k}^{\infty}\theta(1-\theta)^{n-1}=\theta(1-\theta)^{k-1}\sum_{n=0}^{\infty}(1-\theta)^{n}\underset{\text{טור גיאומטרי}}{=}\theta(1-\theta)^{k-1}\cdot\frac{1}{\theta}=(1-\theta)^{k-1}$$

ולכן

$$\mathbb{P}(Y\geq X)=\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y\geq k)=\sum_{k=1}^{\infty}\theta(1-\theta)^{n-1}\theta(1-\theta)^{n-1}=\theta\sum_{n=1}^{\infty}(1-\theta)^{2k-2}$$

$$\underset{m=k-1}{=}\theta\sum_{m=0}^{\infty}(1-\theta)^{2m}\underset{\text{טור גיאומטרי}}{=}\theta\cdot\frac{1}{1-(1-\theta)^2}=\frac{\theta}{\theta(2-\theta)}=\frac{1}{2-\theta}$$

אז ההסתברות בשאלה היא $\frac{1}{2-\theta}$. $\square$

שאלה 7

בוחרים סידור אקראי בשורה של 3 כדורים אדומים, 5 לבנים ו־8 שחורים. נחשב מהי ההסתברות ששני הקצוות יהיו באותו הצבע.

פתרון: נסמן $n_1 = 3, n_2 = 5, n_3 = 8$.

אנחנו לא נמצאים בידיוק בהסתברות אחידה אלא בהסתברות אחידה פר צבע כדור בהתאם לנקודה בזמן שאנחנו נמצאים בה.

מה הכוונה? לכדור הראשון ההסתברות לבחור כדור בצבע ה־i היא $\mathbb{P}(n_i) = \frac{n_i}{16}$, אבל כשנרצה לחשב את ההסתברות שעכשיו נשים בפינה השנייה את הכדור ה־n_i ההסתברות תהיה $\mathbb{P}(n_i) = \frac{n_i - 1}{15}$.

אז בעצם

$$\mathbb{P}(\text{הכדורים בקצוות הם באותו הצבע}) = \sum_{i=1}^{3} \frac{n_i}{16} \cdot \frac{n_i - 1}{15} = \frac{1}{240} \sum_{i=1}^{3} n_i(n_i - 1) = \frac{1}{240}(3 \cdot 2 + 5 \cdot 4 + 8 \cdot 7) = \frac{82}{240} = \frac{41}{120}$$

נבחין שזה נובע מנוסחת ההסתברות השלמה כי אנחנו מחפשים

$$\mathbb{P}(\text{הכדורים בקצוות הם באותו הצבע}) = \mathbb{P}(\text{הכדורים בקצוות לבנים}) + \mathbb{P}(\text{הכדורים בקצוות שחורים}) + \mathbb{P}(\text{הכדורים בקצוות אדומים})$$

ובכל מקרה בנפרד יש לנו ניסוי דו־שלבי. $\square$