פתרון מטלה 08 — אנליזה פונקציונלית, 80417

9 ביוני 2025

שאלה 1

יהי $[a,b]$ קטע. נוכיח שהמרחב $\tilde{C}[a,b]$ של פונקציות רציפות המקיימות $f(a)=f(b)$ צפוף בנורמה $\|\cdot\|_2$ במרחב $C[a,b]$ (ולכן גם ב־$L^2[a,b]$).

הוכחה: עלינו להראות שלכל $f \in C[a,b]$ ולכל $\varepsilon > 0$ קיימת $g \in \tilde{C}[a,b]$ כך שמתקיים

$$\|f-g\|_2 < \varepsilon$$

וזה גורר צפיפות גם ב־$L^2[a,b]$ מכך שראינו ש־$C[a,b]$ צפופה ב־$L^2[a,b]$.

נגדיר את הקו הישר

$$\phi(x) = f(a) + \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)(x-a)$$

מתקיים

$$\phi(a) = f(a)$$
$$\phi(b) = f(b)$$

ונגדיר

$$h(x) = f(x) - \phi(x)$$

h כמובן רציפה מאריתמטיקה של פונקציות רציפות ומתקיים $h(a)=0, h(b)=0$ ולכן $h \in \tilde{C}[a,b]$. □

שאלה 2

נחשב את מקדמי טור פוריה של הפונקציה האינטגרבילית $f(x) = \operatorname{sgn}(x) \cdot \frac{\pi - |x|}{2}$, כאשר

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

הוכחה: ראשית נשים לב ש־$f(x)$ היא פונקציה אי־זוגית:

$$f(-x) = \operatorname{sgn}(-x) \cdot \frac{\pi - |x|}{2} \underset{\substack{\operatorname{sgn}(-x) = -\operatorname{sgn}(x) \\ |-x| = |x|}}{=} -\operatorname{sgn}(x) \cdot \frac{\pi - |x|}{2} = -f(x)$$

בתרגול 8 ראינו שעבור פונקציה אי־זוגית מתקיים $a_n = 0$ לכל $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

כמו־כן, מכפלה של פונקציה אי־זוגית בפונקציה אי־זוגית היא פונקציה זוגית ועבור פונקציה זוגית g מתקיים

$$\int_{-a}^{a} g(x)dx = 2\int_{0}^{a} g(x)dx$$

היות ו־$\sin(x)$ פונקציה אי־זוגית, אז $f(x) \cdot \sin(nx)$ היא פונקציה זוגית.

נחשב את b_n לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin((nx))dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x) \cdot \sin(nx)dx \\
&= \frac{2}{2\pi}\int_{0}^{\pi} (\operatorname{sgn}(x) \cdot |x| \cdot \sin(nx))dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} (\pi - x)\sin(nx)dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\pi\int_{0}^{\pi} \sin(nx)dx - \int_{0}^{\pi} x\sin(nx)\right) \\
&= \frac{1}{\pi}(\left[\frac{-\pi \cdot \cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} - \left[\left(\frac{\sin(nx)}{n^2} - \frac{x\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi}\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{n}\right) = \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

אז מצאנו שטור פורייה של f הוא $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sin(nx)$. $\square$

שאלה 3

נשתמש בזהות פרסבל על־מנת לחשב את סכומי הטורים בכל סעיף.

סעיף א'

הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ בעזרת הפונקציה $f(x) = x$ ונסיק מהו סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

הוכחה:

$\square$

סעיף ב'

הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$ בעזרת הפונקציה $f(x) = |x|$.

הוכחה:

$\square$

שאלה 4

נוכיח את מבחן ה־M של ויירשטראס: יהיו $I \subseteq \mathbb{R}$ קטע, $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות רציפות בקטע I ו־$(M_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$ כך שלכל n מתקיים $|f_n|_{\infty} < M_n$ בקטע I.
אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ מתכנס אז

$$f(x) = \sum(n=1)^{\infty} f_n(x)$$

מוגדרת היטב בקטע I, רציפה שם והטור מתכנס אליה במידה שווה.
הוכחה:

$\square$

שאלה 5

תהיי $f \in \tilde{C}[-\pi,\pi]$ כך ש-$f' \in \tilde{C}[-\pi,\pi]$ (בפרט, f גזירה ברציפות).
נסמן ב-a_n^f, b_n^f את מקדמי טור פורייה של f וב-a_n', b_n' את מקדמי טור פורייה של f'.

סעיף א'

נוכיח שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_n = -\frac{1}{n} b_n'$ וכן $b_n = \frac{1}{n} a_n'$.
הוכחה:

$\square$

סעיף ב'

ניזכר ש-$(a_n')_{n=1}^{\infty}, (b_n')_{n=1}^{\infty} \in l^2$ ונסיק ש-$(a_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty} \in l^1$ ובפרט שטור פורייה של f מתכנס במידה שווה.
הוכחה:

$\square$

סעיף ג'

נסיק שהטור מתכנס לפונקציה f במידה שווה, כלומר בנורמת $\|\cdot\|_\infty$.
הוכחה:

$\square$