# פתרון תרגיל בונוס 2 חורת הקבוצות,

2025 ביוני



z = x + z = y עבורו  $z \in N$  קיים  $x \leq y$  המקיימים  $x, y \in N$  נוכיח שלכל

A=N ונראה  $A=\{x\in N\mid A_x=N\}$  ונסמן ונסמן  $A_x=\{y\in N\mid \exists z\in N\ s.t.\ x+z=y\land x\leq y\}$  ונראה , גדיר במילים אחרות, נגדיר

$$A = \{x \in N \mid \forall y \in N, x \le y \Rightarrow \exists z \in N \text{ s.t. } x + z = y\}$$

A=N־ש להראות להרצה ונרצה

.0+z=y ביתקיים ב $z\in N$  למצוא ,<br/>  $0\leq y$  ונניה שמתקיים עונניה ניקח ביקח  $y\in N$  ניקח<br/>  $0\in A$ שיתקיים מלהראות נתחיל

. הטענה על שרבחירה של נקבל לבקל על על בתרגול בתרגול בתרגול בתרגול בתרגול בתרגול אינו שראינו של אינו בתרגול לבתרגול בתרגול בתרגול בתרגול בתרגול של בתרגול בתרגול של בתרגול של בתרגול בת

. נסיים. האינדוקציה האינדוקציה ומאקסיומת שגם אבו להראות האינדוקציה ונרצה נכיים.  $x\in A$ 

x+z=y בובע שמתקיים ב $x\in N$ קיים איים קהמקיים שלכל שלכל עלכל מכך המקיים מכך המקיים בי

.S(x)+z=yהמקיים  $z\in N$ שקיים גורר אורר המקיים אורר המקיים אורר המקיים אורר אוני אלינו עלינו אינים אורר אור המקיים אורר אור אורר אורים א

. אם z=0 אז y=S(x) אם y=S(x) אם

אכן חזק). אי־שיוויון א $x \leq y$ גם בפרט גם ולכן אכך שמתקיים (בפרט, אי־שיוויון אם אכ $x \leq S(x)$ 

 $z \neq 0$  ובהכרח  $x \neq y$  בובע כמובן  $S(x) \leq y$  ומכך שי $S(x) \neq y$  מכך מכך אמתקיים מהנחת כך ב $z \in N$  נובע מהנחת אינדוקציה נובע שקיים אובהכרח  $z \neq 0$  בא

y=S(x)+k ולכן y=x+S(k)=S(x+k) ולכן עד z=S(k) כך ש־ $k\in N$  ולכן קיים א $0\neq S(x)$ , ולכן איים מהאקסיומה הראשונה מתקיים מהאקסיומה. אולכן אולכן

A=Nמעיקרון האינדוקציה קיבלנו

#### 'סעיף א

y=0 מתקיים x+0=x+y המקיימים  $y\in N$ ר בוכיח שלכל

y על צינדוקציה על נראה באינדוקציה על

 $x+y=x+0=x\Rightarrow x=x$  וגם x+0=x שמתקיים שמתקיים השלישית השלישית השלישית אנחנו x+0=x+y ומהאקסיומה אנחנו x+0=x+y=x+0 אם עבור x+y=x+0=x+y=x+0 ונראה שx+y=x+0=x+y=x+0 בעת, נניח בשלילה: ניקח y=S(k) עבור

מהאקסיומה הראשונה נובע  $S(k) \neq 0$  כי אלכן ולכן לכן אלכן מהאקסיומה מהערטיומה כי מהאקסיומה הראשונה נובע

$$x + S(k) = S(x+k) \neq x$$

ולכן

$$x + 0 = x \neq S(x + k) = x + S(k)$$

. השביעית השקסיומה בלבד y=0ולכן <br/>  $k\in N$ עבור עבור אx+0=x+yאה א<br/> אז אם אז א

מעיקרון האינדוקציה נקבל את הטענה.

#### 'סעיף ב

x=y=0 אז x+y=0 אם מתקיים  $x,y\in N$  נוכיח שלכל

.0 איננו x,y מבין אחד לכל לכל אבל אבל x+y=0 שיננו x,y איננו

נניח כי אקסיומה החיבור אקסיומה ער ארביעית בין ארכן של ארביעית בין ארכן ארכן אוניח נניח נניח ארביעית ארביעית ארביעית אוניח ארביעית אוביעית ארביעית ארביעית ארביעית ארביעית ארביעית אוביעית ארביעית אוביעית ארביעית ארביעית ארביעית ארביעית ארביעית ארביעית ארביעית אוביעית ארביעית ארביעית ארביעית ארביעית ארביעית ארביעית ארביעית אוביעית ארביעית ארביעית ארביעית ארביעית אוביעית ארביעית אוביעית אוביעית ארביעית ארביעית אוביעית ארביעית אוביעית אוביעית אוביעית אוביעית ארביעית אוביעית או

$$x + y = x + S(k) = S(x + k)$$

y באינדוקציה באינדוקציה על עבור x=S(m) ולכן אינדוקציה על עכשיו עכשיו נניח נניח אולכן

אם x+y=x+0=x מהאקסיומה השלישית, אבל x+y=x+0=x מהאקסיומה האשונה ולכן x+y=x+0=x וזו סתירה.

אז נקבל  $n \in N$  אז עבור y = S(n) אם

$$x + y = x + S(n) = S(x+n) \neq 0$$

 $.x \neq 0$ גם ולכן הרביעית הרביעית עם יחד השלישית שוב שוב מהאסיומה שוב

x=y=0 אז x+y=0 בסך־הכל קיבלנו

```
(טריכונוטומיה) x=y אז מתקיים או y \leq x וגם וגם x \leq y המקיימים או נוכיח שלכל
```

y=0 או  $y\neq 0$  או הכלליות בלי הגבלת מקרים, נוחלק שני ונחלק  $x\neq y$  או  $x\neq y$ 

אבל סתירה ש־x=0 אבל x=0 אבל מאקסיומה אבל משמע משמע  $x\leq y$  אבל אבל  $x\neq 0$  אבל מהנחה.

.7 אם סתירה או שוב חזו עקבל נקבל אם x=0אם או את אם אם אם או  $y\neq 0$ אם א

אחרת,  $x'\neq y'$  ולכן מספר מופי אבל מתקיים  $S(x')\neq S(y')$  ולכן מתקיים גם הבל אבל וולכן אבל וולכן מספר סופי של אבל אבל זו אבל אבל זו שוב סתירה לאקסיומה 7. צעדים עד שנגיע למקרה בו x'=0 וזה יהווה סתירה לx'=0 מכך אבל זו שוב סתירה לאקסיומה 7.

x=y ולכן אין, אין ש־ע להנחה מירה מירה קיבלנו מקרה בכל

 $x+z \leq y+z$  מתקיים מהקיים א המקיימים מאלכל אוכיה מלכל מיטים מחלכל אוכיה המקיימים מא

z נוכיח באינדוקציה על

עבור y+z=y+0=y ומכך שמתקיים אx+z=x+0=x ולכן אנחנו מקבלים מקבלים אנחנו אנחנו אנחנו x+z=x+0=x ולכן אנחנו מקבלים x+z=y+0=x ומכך אנחנו אנחנו x+z=x+0=x ומכך אנחנו מקבלים אנחנו x+z=x+0=x

.S(z) גם עבור שהטענה להראות ונרצה אור ונרצה א $x+z \leq y+z$ מתקיים ב $z \in N$  נניח שעבור

מהאקסיומה הרביעית מתקיים

$$x + S(z) = S(x + z), \ y + S(z) = S(y + z)$$

y+z=x+z+k כך שיתקיים א כך קיים 1, קיים משאלה מהנחת האנידוקציה ומשאלה א

---

$$S(y+z) = S(x+z+k) = S(x+z) + k = (x+S(z)) + k$$

78

$$y + S(z) = x + S(z) + k$$

ולכן משאלה 1 נקבל

$$x + S(z) \le y + S(z)$$

 $x,y,z\in N$  מעיקרון האינדוקציה הטענה הטענה אינדוקציה

 $x \leq z$  מתקיים מאכל מתקיים א המקיימים מאכל א המקיים מאכל מתקיים א המקיימים מאכל מ

כך שמתקיים  $m\in N$  נובע שקיים  $y\leq z$  שמתקיים אופן ובאותו x+k=y כך שמתקיים ל $x\in N$  נקבל שקיים בקבל  $x\leq y$  נובע אופן מכך x+k=y כך שמתקיים באותו ומכך x+k=y נובע הקיים אופן באותו באותו ומכך באותו האופן מכך באותו האופן באותו האומן באותו האופן באותו האומן באותו האופן באותו האומן באותו האופן באותו האופן באותו האופן באותו האומן באותו

מאסוציאטיביות החיבור אנחנו יודעים שמתקיים

$$\forall x, y, z \in N((x+y)+z) = x + (y+z))$$

78

$$z = y + m = (x + k) + m = x + (k + m)$$

נסמן האקסיומה האקסיומה לב עם כי  $n \geq 0$  נסמן התשיעית השלישית הראשונה, השלישים לב שמהאקסיומה לב ונשים לב חומה השלישית והתשיעית וא

$$z = x + (k+m) = x+n$$

 $x \le z$  ולכן