פתרון מטלה 04 — אנליזה פונקציונלית, 80417

15 במאי 2025

שאלה 1

נוכיח שהמשפחה

$$\mathcal{F} := \left\{ g_{a_0,...,a_n} \mid n \in \mathbb{N}, a_0, ..., a_n \in \mathbb{Q} \right\}$$

צפופה ב־$C[0,1]$ בנורמת sup.

הוכחה: נגדיר $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{R}[x]$ ויהי $\varepsilon > 0$.
מצפיפות $\mathbb{Q}$ ב־$\mathbb{R}$ שנובע שלכל $a_i \in \mathbb{R}$ קיימים $n \in \mathbb{N}, q_i \in \mathbb{Q}$ כך שיתקיים

$$|a_i - q_i| < \frac{\varepsilon}{2(n+1)}$$

ונגדיר

$$q(x) = \sum_{i=0}^{n} q_i x^i$$

ולכן

$$|p(x) - q(x)| = \left| \sum_{i=0}^{n} (a_i - q_i) x^i \right| \le \sum_{i=0}^{n} |a_i - q_i| |x^i| \underset{x \in [0,1]}{\le} \sum_{i=0}^{n} \frac{\varepsilon}{2(n+1)} = \frac{\varepsilon}{2}$$

ולכן $\|p(x) - q(x)\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$ ו־$q \in \mathcal{F}$.
$f \in C[0,1]$ ולכן ממשפט הקירוב של ויירשטראס קיים $p \in \mathbb{R}[x]$ כך שמתקיים

$$\|f - p\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$$

אבל ראינו שאפשר לקרב את p בעזרת q ולכן

$$\|f - q\|_\infty \le \|f - p\|_\infty + \|p - q\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

מצאנו שלכל $f \in C[0,1]$ ולכל $\varepsilon > 0$ קיימת $q \in \mathcal{F}$ כך ש־$\|f - q\|_\infty < \varepsilon$ ולכן $\mathcal{F}$ צפופה ב־$C[0,1]$ עם נורמת sup. $\square$

שאלה 2

נניח ש־$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן. נראה כי קיימים פולינומים p_n כך ש־$\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b |f(x)-p_n(x)|^2 dx = 0$.

הוכחה: יהי $\varepsilon>0$, f אינטגרבילית רימן ולכן קיימת חלוקה $P=\{x_0,...,x_n\}$ כך ש־$U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon$ וגם

$$s(x)=f(t_i)\ x\in[x_{i-1},x_i),t_i\in[x_{i-1},x_i]]$$

כך ש־s היא פונקציית מדרגות, מאי־רגישות האינטגרל למספר סופי של שינויים נקבל

$$\int_a^b |(f(x)-s(x))|^2 dx = \int_a^b (f(x)-s(x))^2 dx = \sum_{i=0}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}(f(x)-f(t_i))dx < \frac{\varepsilon}{2}$$

עכשיו, s רציפה למעט בשתי נקודות הקצה בכל מקטע, ואת נקודות הקצה ניתן להרחיב על־ידי ישר שיחבר בין שני מקטעים שונים ונקבל פונקציה שהיא לינארית למקוטעין g ובהכרח רציפה ועל־כן ממשפט הקירוב של ויירשטראס קיימת סדרת פולינומים $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך ש־$g \rightrightarrows p_n$ בקטע, כך שמתקיים $\frac{\varepsilon}{4} > |s(x)-p_n(x)|$ לכל $n\in\mathbb{N}$ ו־$x\in[a,b]$, ולכן

$$\int_a^b |(f(x)-p_n(x))|^2 dx < \int_a^b \frac{\varepsilon}{4}dx = \frac{\varepsilon}{4}$$

כלומר מצאנו שקיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n>N$ מתקיים

$$\int_a^b |f(x)-p_n(x)|^2 dx$$

$$= \int_a^b |f(x)-s(x)+s(x)-g(x)+g(x)-p_n(x)|^2 dx$$

$$\leq \int_a^b |f(x)-s(x)|^2 dx + \int_a^b |s(x)-g(x)|^2 dx + \int_a^b |g(x)-p_n(x)|^2 dx < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}=\varepsilon$$

ומהגדרה זה אומר שמתקיים

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b |f(x)-p_n(x)|^2 dx = 0$$

$\square$

שאלה 3

נוכיח שאם $f \in C[a,b]$ אז מתקיים

$$\lim_{x\to\infty} \int_a^b f(t)\sin(xt)dt = 0$$

הוכחה: ראשית, $f(t)\sin(xt)$ היא פונקציה רציפה כמכפלה של פונקציות רציפות ולכן ממשפט הקירוב של ויירשטראס נובע שלכל $\varepsilon > 0$ קיים פולינום p כך ש־$\|f-p\|_\infty < \varepsilon$ ($\star$).
נגדיר

$$(\star\star)\ I(x) = \int_a^b f(t)\sin(xt)dt = \int_a^b p(t)\sin(xt)dt + \int_a^b (f(t)-p(t))\sin(xt)dt$$

נראה באינדוקציה על מעלת הפולינום שמתקיים

$$\lim_{x\to\infty} \int_a^b f(t)\sin(xt)dt = 0$$

בסיס האינדוקציה: עבור פולינום $p(t)$ ממעלה 1 (בלי הגבלת הכלליות $p(t)=t$ פולינום ממעלה 1, הסקלר לא משנה כי הוא יוצא באינטגרל בכל מקרה והמכפלה היא פונקציה רציפה ועל־כן אינטגרבלית)

$$I_p(x) = \int_a^b t\sin(xt)dt \underset{x\neq 0}{=} \left[\frac{\sin(xt)}{x^2} - \frac{t\cos(xt)}{x}\right]_a^b = \frac{\sin(xb)}{x^2} - \frac{b\cos(bx)}{x} - \frac{\sin(xa)}{x^2} + \frac{a\cos(ax)}{x}$$

אבל $|\sin(xt)| \le 1, |\cos(ax)| \le 1$ ולכן

$$\left|I_p(x)\right| \le \frac{1}{x^2} - \frac{|b|}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{|a|}{x} = \frac{|a|-|b|}{x} \underset{x\to\infty}{\to} 0$$

נניח כעת שהטענה נכונה עבור פולינום מדרגה $n-1$ ונראה עבור $p(t)$ מדרגה n, באמצעות אינטגרציה בחלקים נסמן $u(t)=p(t), dv = \sin(xt)dt$ ולכן $du = p'(t), v = \frac{-\cos(xt)}{x}$ ונקבל

$$I(x) = \int_a^b p(t)\sin(xt)dt = \left[\frac{-p(t)\cos(xt)}{x}\right]_a^b + \frac{1}{x}\int_a^b p'(t)\cos(xt)dt$$

מהנחת האינדוקציה נובע שהאינטגרל $\frac{1}{x}\int_a^b p'(t)\cos(xt)dt$ קיים ומתקיים $\frac{1}{x}\int_a^b p'(t)\cos(xt)dt \underset{x\to\infty}{\to} 0$, ומתקיים גם

$$\left[\left|\frac{-p(t)\cos(xt)}{x}\right|\right]_a^b = \left|\frac{-p(b)\cos(bt) - p(a)\cos(at)}{x}\right| \le \left|\frac{-(p(b)+p(a))}{x}\right| \underset{\text{פולינומים רציפים ולכן חסומים}}{\le} \left|\frac{M}{x}\right| \underset{x\to\infty}{\to} 0$$

ולכן $\lim_{x\to\infty} I_p(x) = 0$ והטענה נכונה עבור פולינומים, נחזור ל־($\star\star$) ונקבל

$$|I(x)| \le \underbrace{\left|\int_a^b p(t)\sin(xt)dt\right|}_{\underset{x\to\infty}{\to} 0} + \left|\int_a^b (f(t)-p(t))\sin(xt)dt\right|$$

עבור הביטוי השני בסכום, מהיות $|\sin(xt)| \le 1$ נקבל

$$\left|\int_a^b (f(t)-p(t))\sin(xt)dt\right| \le \int_a^b |f(t)-p(t)|dt \underset{(\star)}{<} \varepsilon(b-a)$$

ובסך־הכל קיבלנו שמתקיים

$$\lim_{x\to\infty} \int_a^b f(t)\sin(xt)dt = 0$$

□

שאלה 4

סעיף א'

נוכיח שאם $f:[a.b]\to\mathbb{R}$ אינה פולינום ו־$\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פולינומים שמתכנסת ל־f במידה שווה ב־$[a,b]$ אז $\deg(p_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$.

הוכחה: נניח בשלילה ש־$\deg(p_n)=M\in\mathbb{R}$.

בפרט, זה אומר שנוכל לבחור תת־סדרה $\left\{p_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ המקיימת לכל $k\in\mathbb{N}$ ש־$\deg\left(p_{n_k}\right)<M$.

מכך ש־$f\rightrightarrows\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ ב־$[a,b]$ נובע שלכל $\varepsilon>0$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n>N$ ולכל $x\in[a,b]$ מתקיים

$$|f(x)-p_n(x)|<\varepsilon$$

בפרט, מהיות $\left\{p_{n_k}\right\}$ תת־סדרה של סדרה מתכנסת נובע שגם לכל $k\in\mathbb{N}$ כך ש־$n_k>N$ מתקיים

$$\left|f(x)-p_{n_k}(x)\right|<\varepsilon$$

כעת, $\left\{p_{n_k}\right\}$ מגדירה מרחב נורמי ממימד סופי ולכן זה מרחב שלם אז כל סדרת קושי בו מתכנסת וגבולה בתוך המרחב בכל הנורמות – בפרט בנורמת sup.

בנוסף, כל סדרה מתכנסת היא גם סדרת קושי ולכן $\left\{p_{n_k}\right\}$ סדרת קושי שמתכנסת לגבול במרחב הפולינומים שדרגתם קטנה ממש מ־M, אבל $f\rightrightarrows\left\{p_{n_k}\right\}$ והנחנו ש־f היא לא פולינום, וזאת סתירה. $\square$

סעיף ב'

נגדיר $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ על־ידי $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$.

נשתכנע ש־f היא אנליטית ונוכיח שסדרת פולינומי טיילור של f לא מתכנסת במידה שווה לפונקציה f בקטע $[-1,1]$ כאשר הפיתוח הוא סביב $x_0=0$ (ולכן זה גם נכון לכל קטע שמכיל את $[-1,1]$ וגם אם הפיתוח לא סביב 0).

הוכחה: נגדיר $g(x)\frac{1}{1+x}$ המוגדרת ב־$\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ ואז $f(x)=g\circ x^2=g(x^2)$ ומהמשפט אודות הרכבת פונקציות ופולינומי טיילור נקבל

$$p_{n,f,x_0}(x)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i x^{2i}$$

פיתוח טיילור של f לסדר $2n$, שמתכנס כטור אינסופי אם ורק אם $\left|-x^2\right|<1$, משמע $x\in(-1,1)$ אבל זה גם מה שמעיד לנו שהפונקציה הנ"ל אנליטית.

נניח בשלילה שסדרת פולינומי טיילור של f מתכנסות במידה שווה ל־f בקטע $[-1,1]$ ולכן הסדרה מתכנסת נקודתית ולאותו גבול בקטע $[-1,1]$, נשים לב שבגלל החזקה מספיק שנבדוק עבור $x=1$:

$$p_{n,f,x_0}(1)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i=\begin{cases}1 & i \bmod 2=0\\ 0 & i \bmod 2=1\end{cases}$$

וגם מתקיים

$$\left|p_{n,f,x_0}(1)-f(1)\right|=\frac{1}{2}$$

אבל בבחירה של $\varepsilon=\frac{1}{4}$ נקבל שלכל $N\in\mathbb{N}$ קיים $N<n\in\mathbb{N}$ כך שמתקיים $\left|p_{n,f,x_0}(1)-f(1)\right|>\varepsilon$ וזו סתירה, ולכן סדרת פולינומי טיילור של f לא מתכנסת במידה שווה ל־f בקטע $[-1,1]$. $\square$

סעיף ג'

נוכיח שאת הפונקציה $f(x)=e^x$ לא ניתן לקרב במידה שווה בעזרת פולינומים (לאו דווקא פולינומי טיילור) על כל הישר.

הוכחה: נניח בשלילה שאפשר לקרב את $f(x)$ במידה שווה בעזרת פולינומים ולכן קיימת סדרת פולינומים $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך שמתקיים

$$\|e^x-p_n(x)\|_\infty \underset{x\to\infty}{\to} 0$$

ולכן לכל $\varepsilon>0$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n>N$ מתקיים

$$\forall x\in\mathbb{R},\ |e^x-p_n(x)|<\varepsilon$$

ולכן נגדיר

$$f_n(x)=e^x-p_n(x)\Rightarrow |f_n(x)|\leq\varepsilon$$

אבל $e_x \underset{x\to\infty}{\to}=\infty$ ו־e^x גדל מהר יותר מכל פולינום (ראינו כבר באינפי2, אפשר עם לופיטל כמה פעמים או עם אינדוקציה על מעלה שלמה ואז עם זה שלכל $b\in\mathbb{R}$ מתקיים $b\leq\lceil b\rceil$ ואז בפרט זה נשאר בין גבולות ומהאינדוקציה על הטבעיים נקבל את הטענה).

ולכן בפרט יתקיים $\lim_{x\to\infty}f_n(x)=\lim_{x\to\infty}(e^x-p_n(x))=\infty$ וזאת סתירה להנחה ולכן לא ניתן לקרב במידה שווה את $f(x)$ בעזרת פולינומים. $\square$

סעיף ד'

נוכיח שאם $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ חסומה ולא קבועה אז לא ניתן לקרב אותה במידה שווה בעזרת פולינומים על כל הישר.

הוכחה: נניח ש־f היא פולינום (לא קבוע) ולכן $\lim_{x\to\infty}|f(x)|=\infty$, בסתירה לחסימות (בפרט, כל פולינום ממעלה של לפחות 1 שאינו קבוע הוא לא חסום ב־$\mathbb{R}$).

יהי $\varepsilon>0$, נניח אז ש־$f \rightrightarrows p_n$ עבור $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פולינומים כך שאפשר לקרב את f על כל הישר ואז

$$\|f(x)-p_n(x)\|_\infty<\varepsilon$$

מאי־שיוויון המשולש ההפוך נקבל

$$|p_n(x)|-|f(x)|\leq|f(x)-p_n(x)|<\varepsilon$$

ולכן מהיות $f(x)$ חסומה קיים $M\in\mathbb{R}$ כך שלכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $f(x)\leq M$, ואז

$$|p_n(x)|<\varepsilon+|f(x)|<\varepsilon+M$$

אבל מהמקרה הפרטי שראינו לעיל נובע שאם פולינום חסום הוא פולינום קבוע ומסעיף א' נקבל שגם f היא פולינום קבוע, אבל f לא קבועה ולכן זו סתירה. $\square$