

פתרונות מטלה 05 – תורה ההסתברות 1

2025 בדצמבר 4



שאלה 1

בקופה n מטבעות.

נניח שני שחקנים מטילים קובייה בלתי-תלויה בכל סיבוב, כאשר ההתפלגות של הקובייה היא

$$\mathbb{P}(1) = \mathbb{P}(2) = \mathbb{P}(3) = \mathbb{P}(4) = \frac{1}{5}, \quad \mathbb{P}(5) = \mathbb{P}(6) = \frac{1}{10}$$

מי שמקבל את הערך הגבוה ביותר בהטלה זוכה במטבע אחד מן הקופה.

אם שני השחקנים מקבלים ערכיהם שווים – אף שהן אינן מקבלת מטבע.

סעיף א'

נמצא את התפלגות מספר המטבעות שכל אחד מהשחקנים מרווח בסוף המשחק.

פתרון: נסמן ב- Y ו- Z את תוצאות הנטלה של השחקן הראשון והשני בהתאמה.

ונגיד X_i המשתנה המקרי שהשחקן הראשון זכה במטבע ה- i ובהתאם S הוכיחות של המשתנה הראשון. אז

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_i = 1) &= \mathbb{P}(Y > Z) = \sum_{k=1}^6 \mathbb{P}(Y > Z, Z = k) = \mathbb{P}(Y > Z, Z = 1) + \dots + \mathbb{P}(Y > Z, Z = 6) \\ &= \underbrace{\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{5}}_{=\mathbb{P}(Y>Z,Z=1)} + \underbrace{\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{5}}_{\mathbb{P}(Y>Z,Z=2)} + \underbrace{\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{5}}_{\mathbb{P}(Y>Z,Z=3)} + \underbrace{\frac{2}{10} \cdot \frac{1}{5}}_{\mathbb{P}(Y>Z,Z=4)} + \underbrace{\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10}}_{\mathbb{P}(Y>Z,Z=5)} + \underbrace{0 \cdot \frac{1}{5}}_{\mathbb{P}(Y>Z,Z=6)} = \frac{41}{100} \end{aligned}$$

יש לנו משתנה מקרי עם n ניסיונות והסתברות הצלחה $p = 0.41$ וזה בידוק לפי הגדירה התפלגות בינומית.

סעיף ב'

נחשב את ההסתברות לקבלת תוצאה תיקו בהטלה מסוימת.

פתרון: מהסימטריה של כל משתנה לניצחון בסיבוב, ומהגדירה המשלבים נקבל שהסתברות לקבלת תוצאה תיקו בהטלה מסוימת היא $= 2 \cdot 0.41 \cdot 0.59 = 0.82$.

□ $.1 - 0.82 = 0.18$

סעיף ג'

נחשב את ההסתברות שמספר הסיבובים הכלול במשחק יהיה לכל יותר $1 + n$.

פתרון: יש לנו לפחות n סיבובים ולכן יש לפחות אפשרות אחת שזוכה בכל ה- n סיבובים הראשונים, או שהוא $1 + n$ סיבובים ובסיבוב $n+1$, משתחף אחד זכה ובשאר המשתחף השני זכה, או שבמקום שהמשתחף השני זכה באחד הסיבובים בידוק היה שבסיבוב אחד בידוק היה לננו תיקו.

ונגיד משתנה מקרי T – מספר תוצאות התקיימו, כאשר ההסתברות לתיקו לפי הסעיף הקודם מתפלג ברנולי עם פרמטר 0.18 , ויש לנו או תיקו אחד או אפס תיקו.

ונגיד W_i להיוות המשתנה המקרי שאומר שהסיבוב ה- i נגמר בניצחון ולפי סעיף א' זה מתפלג ברנולי עם פרמטר 0.41 .
נסמן ב- W המאורע שיהיו k סיבובים במשחק, כלומר $\mathbb{P}(W = k) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^k W_i = n\right)$
ולכן

$$\mathbb{P}(W \leq n+1) = \mathbb{P}(W < n) + \mathbb{P}(W = n) + \mathbb{P}(W = n+1) = 0 + 0.82^n + \binom{n+1}{n} 0.82^n \cdot 0.18$$

□

שאלה 2

יהי $n - X \stackrel{d}{=} Y$ ונניח $Y \sim Bin(n, 1 - p)$ ו- $X \sim Bin(n, p)$
הוכחה: ככלומר, נרצה להראות $(n - X) \sim Bin(n, 1 - p)$. מהגדרה מתקיים
 $\mathbb{P}(n - X = l) = \mathbb{P}(X = n - l) \underset{X \sim Bin(n, p)}{=} \binom{n}{n-l} p^{n-l} (1-p)^{n-(n-l)} \underset{\binom{n}{l} = \binom{n}{n-l}}{=} \binom{n}{l} p^{n-l} (1-p)^l$
 $\square \quad (n - X) \sim Bin(n, 1 - p)$ כנדרש

שאלה 3

יהיו $i \in [n]$ משתנים מקריים בלתי-תלויים. עבור $X_i \sim Ber(p)$, $Z_i \sim Ber(q)$

$$Y_i = X_i Z_i, \quad X = \sum_{i=1}^n X_i, \quad Y = \sum_{i=1}^n Y_i$$

סעיף א'

נראה כי $0 \leq m \leq n$ מתקיים $X \sim Bin(n, p)$, $Y \sim Bin(n, pq)$

$$Y | \{X = m\} \sim Bin(m, q)$$

הוכחה: בהרצתה ראיינו $X \sim Bin(n, p)$, נշׂוּזָר את הוכחה לשלהות: יהי $k \in \{0, \dots, n\}$ ונסמן $A_k := \sum_{i \in [n]} X_i$ ו $|A_k| = \binom{n}{k}$ ואנחנו יודעמו שמתקיים $\{(x_1, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^n \mid \sum_{i \in [n]} X_i = k\}$

$$\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{x \in A_k} \mathbb{P}(X = x) = \sum_{x \in A_k} \left(\prod_{i \in [n]} \mathbb{P}(X_i = x_i) \right) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$.Y \sim Bin(n, p)$

נוכיח להראות $Y \sim Bin(n, pq)$ לנכון שמתקיים לכל i עם האידתלות הנתונה:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_i = k) &= \mathbb{P}(X_i Z_i = k) = \begin{cases} \mathbb{P}(X_i = 1)\mathbb{P}(Z_i = 1) & k = 1 \\ \mathbb{P}(X_i = 1)\mathbb{P}(Z_i = 0) + \mathbb{P}(X_i = 0)\mathbb{P}(Z_i = 1) + \mathbb{P}(X_i = 0)\mathbb{P}(Z_i = 0) & k = 0 \\ \mathbb{P}(X_i = k)\mathbb{P}(Z_i = k) & \text{אחרת} \end{cases} \\ &= \begin{cases} pq & k = 1 \\ p(1-q) + q(1-p) + (1-q)(1-p) & k = 0 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} = \begin{cases} pq & k = 1 \\ 1 - pq & k = 0 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \end{aligned}$$

כאשר המקרה של "המשך" נובע מהתווך של משתנה ברנולי ולכון $Y_i \sim Ber(pq)$ ובפרט מהטענה לעיל.

$$\mathbb{P}(Y = t | X = m) = \frac{\mathbb{P}(Y = t, X = m)}{\mathbb{P}(X = m)} = \frac{\mathbb{P}(Y = t, X = m)}{\mathbb{P}(X = m)} \text{ מתקיים } 0 \leq t \leq n \text{ : } Y | \{X = m\} \sim Bin(m, q)$$

שקלול להגידי שיש $X_{j_i} = 1$ אך שלבכל אחד מהם, $j_1, \dots, j_m \in [n]$, ולשאר 0.

בשביל $\{Y = t\}$ יש לנו k_t, \dots, k_m שהם ב- j_1, \dots, j_m ובאינדקסים אלו גם $Z_i = 1$ ובשאר 0.

או יש לנו $\binom{n}{m}$ לבחירת אינדקסים ה- j -וי $\binom{m}{t}$ לבחירת Z_i ים שיקבלו 1 מתוך קבוצת האינדקסים של j , ומהאי תלוות נקבל

$$\mathbb{P}(Y = t | X = m) = \frac{\mathbb{P}(Y = t, X = m)}{\mathbb{P}(X = m)} = \frac{\binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m} \binom{m}{t} q^t (1-q)^{n-m}}{\binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m}} = \binom{m}{t} q^t (1-q)^{n-m}$$

$$\implies Y | \{X = m\} \sim Bin(m, q)$$

□

סעיף ב'

נראה כי אם עבור n מתקיים $0 \leq m \leq n$ אז $W \sim Bin(n, pq)$ ו- $\{X = m\} \sim Bin(m, q)$
הוכחה: נרצה להשתמש בנוסחת ההסתברות השלמה

$$\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{m=k}^n \mathbb{P}(Y = k \mid X = m) \mathbb{P}(X = m)$$

ו- \forall

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y = k) &= \sum_{m=k}^n \binom{m}{k} q^k (1-q)^{m-k} \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m} \\ &\stackrel{(*)}{=} q^k \binom{n}{k} \sum_{m=k}^n \binom{n-k}{m-k} (pq)^k (1-p)^{n-m} (1-q)^{m-k} \\ &= q^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \sum_{m=k}^n \binom{n-k}{m-k} (p(1-q))^{m-k} \\ &= q^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} (p(1-q))^j \\ &= q^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} (pq)^k (1-pq)^{n-k} \end{aligned}$$

$$\implies Y \sim Bin(n, pq)$$

$$\square \quad \text{כאמור } (*) \text{ נובע מכך } \binom{n}{m} \binom{m}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{m-k}$$

שאלה 4

יהיו $X, Y \sim Geo(p)$ משתנים מקרים בלתי-תלויים.

סעיף א'

נחשב את ההסתפוגות של $\min\{X, Y\}$.

פתרון: בהרצתה ראיינו משתנה מקרי נתרן על השלמים מתפלג $Geo(p)$ אם ורק אם לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $(1-p)^n$, או בפרט מתקיים

$$\mathbb{P}(X \geq n) = \sum_{m=n}^{\infty} \mathbb{P}(X = m) = \sum_{m=n}^{\infty} (1-p)^{m-1} p = p \sum_{m=n+1}^{\infty} (1-p)^m = p \cdot \frac{(1-p)^{n+1} - 0}{1 - (1-p)} = (1-p)^{n+1}$$

כאשר מתקיים $p \in (0, 1]$. $\lim_{m \rightarrow \infty} (1-p)^m = 0$ בפרט מתקיים

$$\mathbb{P}(\min\{X, Y\} \geq k) = \mathbb{P}(X \geq k, Y \geq k) = \mathbb{P}(X \geq k)\mathbb{P}(Y \geq k) = (1-p)^{k-1}(1-p)^{k-1} = (1-p)^{2k-2}$$

נשאר אם-כך לחשב

$$\mathbb{P}(\min\{X, Y\} = k) = \mathbb{P}(\min\{X, Y\} \geq k) - \mathbb{P}(\min\{X, Y\} \geq k+1) = (1-p)^{2k-2} - (1-p)^{2k}$$

$$= (1-p)^{2k}((1-p)^{-2} - 1) = (1-p)^{2k} \frac{2p - p^2}{(1-p)^2} = (1-p)^{2k-2}(2p - p^2)$$

□

סעיף ב'

נחשב את ההסתפוגות של $X + Y$.

פתרון: נגדיר משתנה מקרי חדש $Z = X + Y$ ונשתמש בקונבולוציה:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z = z) &= \mathbb{P}(X + Y = z) = \sum_{k=1}^{z-1} \mathbb{P}(X = k, Y = z-k) = \sum_{k=1}^{z-1} \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = z-k) \\ &= \sum_{k=1}^{z-1} (p(1-p)^{k-1})(p(1-p)^{z-k-1}) = \sum_{k=1}^{z-1} p^2(1-p)^{z-2} = p^2(1-p)^{z-2} \sum_{k=1}^{z-1} 1 = p^2(1-p)^{z-2}(z-1) \end{aligned}$$

□

סעיף ג'

נחשב את ההסתפוגות של $X - Y$.

פתרון: שוב עם קונבולוציה

$$\mathbb{P}(X - Y = z) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = k+z, Y = k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = k+z)\mathbb{P}(Y = k)$$

כאשר האינדקס סכימה נובעים מכך ש- $X = Z + Y$ והערכאים האפשריים עבור Y הם עבור $1 \geq k \geq 1-z$ כי משתנה מקרי גיאומטרי ואותו אופן $z+k \geq 1 \Rightarrow k \geq 1-z$.

או האינדקס ההתחלתי לסכימה יהיה $\max\{1, 1-z\}$ ומהדרת המשתנה המקרי הגיאומטרי יהיה חייבי להתקיים $k = 1$ לתחלה.

כעת יש שלוש אפשרויות:

$$X > Y \quad X < Y \quad X = Y \xrightarrow{\text{בהתאם}} z \geq 1, \quad z \leq -1, \quad z = 0$$

עבור $z = 0$ זה המקרה הרוי טרייזואלי.

$$\mathbb{P}(X - Y = 0) = \mathbb{P}(X = Y) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) \mathbb{P}(Y = k) = \sum_{k=1}^{\infty} (p(1-p)^{k-1})(p(1-p)^{k-1}) = p^2(1-p)^{-2} \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^2 k$$

$$\stackrel{\text{צ'ר הנדס}}{=} p^2(1-p)^{-2} \frac{(1-p)^2}{p(2-p)} = \frac{p}{2-p}$$

כעת עבור $z \geq 1$ נקבל

$$\mathbb{P}(X - Y = z) = \sum_{k=1}^{\infty} (p(1-p)^{z+k-1})(p(1-p)^{k-1}) = p^2 \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{z+2k-2} = p^2(1-p)^{z-2} \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{2k}$$

$$\stackrel{\text{צ'ר הנדס}}{=} p^2(1-p)^{z-2} \frac{(1-p)^2}{p(2-p)} = \frac{p(1-p)^z}{2-p}$$

עבור $-1 \leq z$ נשים לב שמתקיים

$$\mathbb{P}(X - Y = z) \underset{m=-z}{=} \mathbb{P}(X - Y = -m) = \mathbb{P}(Y - X = m)$$

אבל

$$\mathbb{P}(Y - X = m) = \mathbb{P}(X - Y = m)$$

משמעותי סימטריה, ולכן עבור $-1 \leq z$ נקבל מהמקרה הקודם

$$\mathbb{P}(X - Y = z) \mathbb{P}(Y - X = -z) = \frac{p(1-p)^{-z}}{2-p}$$

נשים לב שבעצם בכל המקרים קיבלנו את אותה התוצאה, כלומר לכל $k \in \mathbb{Z}$ מתקיים

$$\mathbb{P}(X - Y = k) = \frac{p(1-p)^{|k|}}{2-p}$$

□

סעיף 7'

נחשב את החתפנות של $\max\{X, Y\}$.

פתרון: ראשית נשים לב מהגדרת המקסימום שמתקיים

$$\mathbb{P}(\max\{X, Y\} \leq k) = \mathbb{P}(X \leq k, Y \leq k) \underset{\text{א'ילו?}}{=} \mathbb{P}(X \leq k) \mathbb{P}(Y \leq k) = (1 - (1-p)^k)^2$$

ובאופן דומה לסעיפים הקודמים שכן אנחנו נתמכים על הטעמים

$$\mathbb{P}(\max\{X, Y\} = k) = \mathbb{P}(\max\{X, Y\} \leq k) - \mathbb{P}(\max\{X, Y\} \leq k-1) = (1 - (1-p)^k)^2 - (1 - (1-p)^{k-1})^2$$

□

שאלה 5

נדיר Y_i סדרה של משתנים מקרים בלתי-תלויים שווי התפלגות על \mathbb{Z} ונגיד

$$n \geq 0, \quad X_n = \sum_{i=1}^n Y_i, \quad Z = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{X_n=0}$$

. $Z \sim Geo(p)$ ונראה כי $p := 1 - \mathbb{P}(\exists n > 0 \mid X_n = 0) > 0$

. $\mathbb{P}(Z = 0) = 0$

פתרון: ראשית נשים לב

TODoooooooooooooo

□

שאלה 6

נראה כי אם $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ מתקיים

$$(X \mid X + Y = n) \sim Bin\left(n, \frac{\lambda}{\lambda + \eta}\right)$$

□

פתרון: **TODOOOOOOOOOOOOOOOOOOOO**

שאלה 7

אלקרים וג'וקוביין משחקים טenis זה מול זה. ההסתברות של אלקרים לניצח במשחק היא $\frac{2}{3}$, באופן בלתי-יתלוי בתוצאות המערכתtes הקודמות. השניים משחקים עד אשר אחד מהם זוכה ב-3 מערכות.

מה ההסתברות שאלקרים יזכה במשחק? איך הדבר קשור להסתברות ביןומית?

פתרון: נסמן ב- X_i את המאורע שאלקרים זכה במערכה ה- i ולכון מהנתון על האינטלוות קיבל $\sim Bin(n, \frac{2}{3})$ כאשר יש לנו n סיבובים.

נניח שאם $n > 5$ יש לפחות 3 נצחות לאחד מהם ולכון סימנו, אז מספיק לחשב עד $n = 5$ אז

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \geq 3) &= \mathbb{P}(X = 3) + \mathbb{P}(X = 4) + \mathbb{P}(X = 5) \\ &\stackrel{X \sim Bin(n, \frac{2}{3})}{=} \sum_{k=3}^5 \binom{5}{k} \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{5-k} \\ &= \binom{5}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \binom{5}{4} \left(\frac{2}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \binom{5}{5} \left(\frac{2}{3}\right)^5 \left(\frac{1}{3}\right)^0 \\ &= 0.79 \end{aligned}$$

□