פתרון מטלה 02 — חשבון אינפיניטסימלי 3, 80415

7 באפריל 2025

שאלה 1

יהי $(X, \|\cdot\|)$ מרחב נורמי.

סעיף א'

נוכיח כי לכל $x \in X$ ו־$r > 0$ מתקיים $B_{r(x)} = \left(\hat{B}_{r(x)}\right)^{\circ}$

הוכחה: ראשית ראינו בהרצאה שבמרחב נורמי מתקיים $\overline{B_r(x)} = \hat{B}_r(x)$. נוכיח באמצעות הכלה דו כיוונית.
$B_r(x) \subseteq \left(\hat{B}_r(x)\right)^{\circ}$: מהגדרה, $B_r(x)$ הוא קבוצה פתוחה המוכלת ב־$\hat{B}_r(x)$ ולכן הוא מוכל ב־$\left(\hat{B}_r(x)\right)^{\circ}$.
$\left(\hat{B}_r(x)\right)^{\circ} \subseteq B_r(x)$: לכל נקודה $x' \in \left(\hat{B}_r(x)\right)^{\circ}$ יש סביבה $U_{x'} \subseteq \hat{B}_r(x)$.
נסמן $v = x' - x$ ולכן מהגדרה יש $c > 0$ כך שיתקיים $x' + cv = x + (1+c)v \in \hat{B}$.
אבל $\|v\| < r$ וגם $\|(1+c)v\| \leq r$ משמע קיבלנו $x' \in B_r(x)$. $\square$

סעיף ב'

נוכיח כי לכל $x \in X$ ו־$r > 0$ מתקיים $\partial B_r(x) = S_r(x)$

הוכחה: ראינו כי $\overline{B_r(x)} = \hat{B}_r(x)$ ובשילוב עם סעיף א' נקבל:

$$\partial B_r(x) = \hat{B}_r(x) \setminus B_r(x) = \{x \in X \mid d(x, x') \leq r, d(x, x') \nless r\} = \{x \in X \mid d(x, x') = r\} = S_r(x)$$

$\square$

שאלה 2

סעיף א'

נמצא את הפנים, הסגור והשפה של הקבוצה $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2) \supseteq \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z \leq 1\} = A$.

הוכחה: נראה כי A סגורה ואז $\overline{A} = A$: בהינתן סדרת הנקודות $A \ni (x_n, y_n, z_n)$ כך שמתקיים $(x_n, y_n, z_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} (x,y,z)$, לכל n מתקיים

$$x_n + y_n + z_n \leq 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} x+y+z \leq 1$$

משמע $A \ni (x,y,z)$ ולכן A סגורה ונקבל $\overline{A} = A$.
נעבור למצוא את הפנים של A ונטען כי $(A)^\circ = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z < 1\}$:
נגדיר $s = 1-(x+y+z) > 0$ ונבחר $\varepsilon = \frac{s}{2} > 0$. כעת, לכל $(x',y',z') \in B_\varepsilon((x,y,z))$ מתקיים:

$$x'+y'+z' < x+y+z+\|(x,y,z)-(x',y'z')\|_2 < x+y+z+\varepsilon = x+y+z+\frac{s}{2} = 1-\frac{s}{2} < 1$$

ולכן $x'+y'+z' < 1$ ולכן $(A)^\circ = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z < 1\}$.
נמצא כעת את ∂A:

$$\begin{aligned}\partial A = \overline{A} \setminus (A)^\circ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z \leq 1\} \setminus \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z < 1\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 1\}\end{aligned}$$

. $\square$

סעיף ב'

נמצא את הפנים, הסגור והשפה של הקבוצה $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty) \supseteq \{f \in C([0,1]) \mid f \text{ מונוטונית יורדת ממש}\} = B$

הוכחה: $\square$

סעיף ג'

נמצא את הפנים, הסגור והשפה של הקבוצה $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty) \supseteq \left\{x \in \ell^\infty \mid L \in (-1,1] \text{ וגם } L = \lim_{n\to\infty} x_n \text{ קיים הגבול}\right\} = C$

הוכחה: ראשית נבין מה היא C – קבוצת כל הפונקציות החסומות ומתכנסות שגבולן בקטע $(-1,1]$ כאשר הגדרנו במרחב ℓ^∞ את נורמת הסופרמום על־ידי $\|x\|_\infty = \sup_{n\in N}|x_n|$. $\square$

שאלה 3

יהי $p \in \mathbb{N}$ מספר ראשוני.

סעיף א'

נתאר את כדור היחידה הסגור $\left(\mathbb{Q}, d_p\right) \subseteq \hat{B}_1(0) =: \mathbb{Z}_p$.

הוכחה: $\square$

סעיף ב'

נוכיח כי $\mathbb{Z}_p = \overline{\mathbb{Z}}$ ונקבע מהו $\mathbb{Z}^\circ$.

הוכחה: $\square$

סעיף ג'

נוכיח כי $\mathbb{Z}_p$ אינה קומפקטית סדרתית.

הוכחה: $\square$

שאלה 4

יהיו $(X,d_X),(Y,d_Y)$ מרחבים מטריים ובתרגיל הקודם ראינו כי המכפלה $X\times Y$ היא מרחב מטרי ביחס למטריקה:

$$d((x_0,y_0),(x_1,y_1))=d_X(x_0,x_1)+d_Y(y_0,y_1)$$

סעיף א'

נוכיח כי הסדרה $((x_n,y_n))\subseteq X\times Y$ מתכנסת ל־(x,y) אם ורק אם $(x_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}x$ ו־$(y_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}y$.

הוכחה: נעשה את שני הכיוונים בפעם אחת, נשים לב שמהגדרת ההתכנסות עלינו לקיים את שרשרת הגרירות הבאה:

$$((x_n,y_n))\subseteq X\times Y\xrightarrow[n\to\infty]{}(x,y)\iff\lim_{n\to\infty}d((x_n,y_n),(x,y))=0\underset{(1)}{\iff}\lim_{n\to\infty}(d_X(x_n,x)+d_Y(y_n,y))=0$$

$$\iff\lim_{n\to\infty}d_X(x_n,x)+\lim_{n\to\infty}d_Y(y_n,y)=0\underset{(2)}{\iff}\lim_{n\to\infty}d_X(x_n,x)=0\wedge\lim_{n\to\infty}d_Y(y_n,y)=0\iff(x_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}x\wedge(y_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}y$$

כאשר (1) נובע מהגדרת המטריקה ו־(2) מהיות המטריקה אי־שלילית. □

סעיף ב'

נסמן ב־$p_X:X\times Y\to X$ וב־$p_Y:X\times Y\to Y$ את ההטלות. נוכיח כי p_X ו־p_Y רציפות.

הוכחה: בהרצאה ראינו שנגיד כי p_X רציפה אם ורק אם לכל $U\subseteq X$ פתוחה נובע כי $p_X^{-1}(U)\subseteq X\times Y$ פתוחה.

לכן תהיי $U\subseteq X$, מתקיים $p_X^{-1}(U)=U\times Y$ שאכן פתוחה ב־$X\times Y$ שכן U פתוחה ב־X וראינו בהרצאה ש־Y פתוחה ב־Y.

באותו באופן, נגיד כי p_Y רציפה אם ורק אם לכל $V\subseteq Y$ פתוחה נובע כי $p_Y^{-1}(V)\subseteq X\times Y$ פתוחה.

לכן תהיי $V\subseteq Y$, מתקיים $p_Y^{-1}(V)=X\times V$ שאכן פתוחה ב־$X\times Y$ שכן V פתוחה ב־Y וראינו בהרצאה ש־X פתוחה ב־X.

לכן ההטלות הן פונקציות רציפות. □

סעיף ג'

נוכיח כי לכל מרחב מטרי (Z,d_Z) ופונקציה $f:Z\to X\times Y$ מתקיים ש־f רציפה אם ורק אם $p_X\circ f$ ו־$p_Y\circ f$ רציפות.

הוכחה:

$\Longleftarrow$ נניח כי f רציפה, ובסעיף הקודם ראינו כי p_X ו־p_Y רציפות והרכבה של פונקציות רציפות היא רציפה ולכן $p_X\circ f$ ו־$p_Y\circ f$ רציפות.

$\Longrightarrow$ בכיוון השני נניח כי $p_X\circ f$ ו־$p_Y\circ f$ רציפות ונרצה להראות כי f רציפה.

תהיי $(z_n)\in Z$ כך שמתקיים $z\in Z$ $(z_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}$.

מהיות ההרכבות $p_X\circ f$ ו־$p_Y\circ f$ רציפות, נובע כי מתקיים:

$$(p_X\circ f)(z_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}(p_X\circ f)(z)\in X,\quad(p_Y\circ f)(z_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}(p_Y\circ f)(z)\in Y$$

ולכן אנחנו מקבלים

$$f(z_n)=(((p_X\circ f)(z_n),(p_Y\circ f)(z_n)))\xrightarrow[n\to\infty]{}((p_X\circ f)(z),(p_Y\circ f)(z))\in X\times Y$$

דהיינו $f(z_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}f(z)$ ו־f רציפה. □

סעיף ד'

נניח כי X,Y קומפקטיים סדרתית. נוכיח כי גם המכפלה $X\times Y$ קומפקטית סדרתית. נסיק כי מכפלה סופית של מרחבים קומפקטיים סדרתית היא קומפקטית סדרתית.

הוכחה: תהיי $((x_n,y_n))_n \in X\times Y$ סדרה ונרצה להראות שיש לה תת־סדרה מתכנסת.
מהיות X מרחב קומפקטי סדרתי, ומכך ש־$(x_n)_n \in X$, נובע כי ל־x_n יש תת־סדרה מתכנסת $\left(x_{n_k}\right)_k \xrightarrow[k\to\infty]{} x\in X$.
באותו אופן מהיות Y מרחב קומפקטי סדרתי ומהיות $\left(y_{n_k}\right) k\in Y$ נובע כי ל־$\left(y_{n_k}\right)_k$ יש תת־סדרה מתכנסת $\left(y_{n_{k_l}}\right)_l \xrightarrow[l\to\infty]{} y\in Y$.
אבל $\left(x_{n_{k_l}}\right)_l$ היא תת־סדרה של $\left(x_{n_k}\right)_k$ ולכן ממשפט הירושה $\left(x_{n_{k_l}}\right)_l \xrightarrow[l\to\infty]{} x$. בסעיף א' ראינו שהתכנסות ב־$X\times Y$ היא התכנסות רכיב רכיב ולכן הסדרה $\left(\left(x_{n_{k_l}}\right),\left(y_{n_{k_l}}\right)\right)_l$ מתכנסת ב־$X\times Y$ והיא תת־סדרה של $((x_n,y_n))_n \in X\times Y$.
משמע מצאנו לסדרה שרירותית תת־סדרה מתכנסת ולכן $X\times Y$ היא קומפקטית סדרתית.
נסיק כי מכפלה סופית של מרחבים קומפקטיים סדרתית היא קומפקטית סדרתית. באינדוקציה:
את בסיס האינדוקציה הראנו עבור שתי מכפלות, ונניח כי הטענה עבור $n-1$ מכפלות ונרצה להראות עבור n מכפלות:

$$\bigtimes_{i=1}^{n} X_i = \left(\bigtimes_{i=1}^{n-1} X_i\right)\times X_n$$

נשים לב שמהנחת האינדוקציה, $\bigtimes_{i=1}^{n-1} X_i$ קומפקטית סדרתית ומבסיס האינדוקציה ראינו שמכפלה של שני מרחבים מטריים קומפקטיים סדרתיים היא קומפקטית סדרתי ולכן $\left(\bigtimes_{i=1}^{n-1} X_i\right)\times X_n$ קומפקטית סדרתית.
ולכן מכפלה סופית של מרחבים קומפקטיים סדרתית היא קומפקטית סדרתית. $\square$

שאלה 5

יהי (X,d) מרחב מטרי ו־$K \subseteq X$ קומפקטית סדרתית ו־$B \subseteq X$ כלשהי.

סעיף א'

נוכיח כי כל פונקציה רציפה $f : K \to \mathbb{R}$ מקבלת מינימום ומקסימום.

הוכחה: בהרצאה ראינו כי $f(K) \in \mathbb{R}$ היא קבוצה קומפקטית ועל־כן היא סגורה וחסומה.
לפי משפטי ויירשטראס קיימים $a,b \in \mathbb{R}$ כך שמתקיים $f(K) \subseteq [a,b]$ ובפרט מתקיים $\sup\{y : y \in f(K)\} = M < \infty$.
ולכן קיימת סדרה $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq f(K)$ כך שמתקיים $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} M$.
אבל $f(K)$ סגורה ולכן נובע כי $M \in f(K)$ ולכן קיים $x_M \in X$ כך שמתקיים $f(x_M) = M$.
עבור inf נוכיח באופן דומה, או שלחילופין נסתכל $-f$ ונקבל את הנדרש. $\square$

סעיף ב'

נוכיח כי $d(x,B) = 0$ אם ורק אם $x \in \overline{B}$.

הוכחה:
$\Leftarrow$ נניח כי $d(x,B) = 0$ ונרצה להראות ש־$x \in \overline{B}$.
מההנחה נובע שלכל $\varepsilon > 0$ קיים $y_\varepsilon \in B$ כך שמתקיים $d(x,y_\varepsilon) < \varepsilon$ ולכן $B_\varepsilon(x_0) \cap B \neq \emptyset$.
אבל כל כדור פתוח סביב x יכיל סביבה של $B_\varepsilon(x)$ עבור $\varepsilon > 0$ משמע החיתוך שלו עם B לא ריק ולכן $x \in \overline{B}$.
$\Longrightarrow$ נניח כי $x \in \overline{B}$ ונרצה להראות כי $d(x,B) = 0$.
מההנחה נובע שלכל $\varepsilon > 0$ קיים כדור פתוח $B_\varepsilon(x)$ כך שמתקיים $B_\varepsilon(x) \cap B \neq \emptyset$.
יהי $y_\varepsilon \in B_\varepsilon(x) \cap B$ אבל $\varepsilon > 0$ שרירותי ולכן $d(x,B) \le d(x,y_\varepsilon) < \varepsilon$ ולכן $d(x,B) = 0$. $\square$

סעיף ג'

נוכיח כי קיים $x \in K$ כך ש־$d(K,B) = d(x,B)$ ונסיק כי $d(K,B) > 0$ אם ורק אם $K \cap \overline{B} = \emptyset$.

הוכחה: נגדיר $f : K \to \mathbb{R}$ על־ידי $f(x) = d(x,B) := \inf\limits_{b\in B} d(x,b)$ ונראה תחילה כי זוהי פונקציה רציפה.
יהיו $k,k' \in K$ נשים לב שלכל $b \in B$ מאי־שוויון המשולש מתקיים:

$$|d(k,b) - d(k',b)| \le d(k,k')$$

משמע לכל $b \in B$ מתקיים:

$$d(k,b) \le d(k',b) + d(k,k')$$

$$d(k',b) \le d(k,b) + d(k,k')$$

ניקח אינפימום על כל $b \in B$ ונקבל:

$$f(k') = \inf_{b\in B} d(k,b) = \inf_{b\in B}(d(k',b) + d(k,k')) = f(k') + d(k,k')$$

$$f(k) = \inf_{b\in B} d(k',b) = \inf_{b\in B}(d(k,b) + d(k,k')) = f(k) + d(k,k')$$

וקיבלנו $|f(k) - f(k')| \le d(k,k')$ ולכן f רציפה.
כעת, f רציפה על מרחב קומפקטי ולכן היא מקבלת מינימום (וזה גם האינפימום) ולכן קיים $k_0 \in K$ כך שמתקיים

$$f(k_0) = \min_{k\in K} f(k) = \min_{k\in K} d(k,B)$$

משמע:

$$f(k_0) = d(k_0,B) = \inf_{k\in K, b\in B} d(k,b) = d(K,B)$$

ולכן $d(K,B) = d(k_0,B)$.

נשאר להסיק כי $d(K,B)>0$ אם ורק אם $K\cap\overline{B}=\emptyset$.

$\Leftarrow$ נניח כי $d(K,B)>0$ ונרצה להראות כי $K\cap\overline{B}=\emptyset$.

נניח שלא, ולכן קיים $x_n\in K\cap\overline{B}$. מהיות K קומפקטי, נובע של־x_n יש תת־סדרה מתכנסת $x_{n_k}\xrightarrow[k\to\infty]{}x\in K$.

אבל $x_n\in\overline{B}$ שזוהי קבוצה סגורה ולכן $x\in\overline{B}$, משמע $d(x_n,x)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ וזו סתירה להנחה.

$\Longrightarrow$ נניח כי $K\cap\overline{B}=\emptyset$ ונרצה להראות כי $d(K,B)>0$.

נשתמש ב־f שהגדרנו לעיל וראינו כי היא מקבלת מינימום ב־$k_0\in K$ ונרצה ונרצה להראות כי תחת תנאים אלו $f(k_0)>0$.

נניח שלא, ולכן:

$$f(k_0)=0\Longleftrightarrow d(k_0,B)=0$$

זאת אומרת, קיים $(b_n)\subseteq B$ כך שמתקיים $d(k_0,b_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$, ולכן $b_n\xrightarrow[n\to\infty]{}k_0$.

אבל אז מהגדרה ינבע $k_0\in\overline{B}$, אבל מההנחה כי $K\cap\overline{B}=\emptyset$ וזאת סתירה. $\square$

שאלה 6

נוכיח כי $\hat{B}_1(0) \subseteq (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ היא קבוצה סגורה וחסומה שאינה קומפקטית סדרתית.

הוכחה: נסמן $B = \hat{B}_1(0) \subseteq (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$. ראשית, B חסומה מהגדרתה, נשאר להראות כי היא סגורה: יהי $f_n \in B$ ונניח כי $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ במידה שווה, משמע $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
נשים לב שמתקיים עבור n גדול מספיק:

$$\|f\|_\infty \leq \|f_n\|_\infty + \|f_n - f\|_\infty \leq 1 + \varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 1$$

ולכן מהגדרה קיבלנו כי B סגורה.
נראה כעת כי B לא קומפקטית סדרתית: נגדיר $f_n(x) = x^n$, נשים לב שמתקיימים הבאים:

1. כל f_n רציפה ב־$[0,1]$
2. $x^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
3. $f_{n(1)} = 1$

ולכן $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$ (נקודתית) כאשר

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1] \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

אבל $f \notin C[0,1]$ שכן f לא רציפה ב־0, ונטען כי היא לא מתכנסת במידה שווה לאף $g \in C[0,1]$. נניח בשלילה שהיא כן, ולכן:

$$\|f_n - g\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Longrightarrow f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} g$$

כמו כן g מתכנסת נקודתית ולאותם ערכים, משמע $g(x) = f(x)$ וזו סתירה מאי־הרציפות של $f(x)$.
מצאנו סדרת פונקציות המתכנסת נקודתית אך פונקציית הגבול אינה רציפה ולכן אין התכנסות במידה שווה (שכן אם הייתה התכנסות במידה שווה הרי שגם פונקציית הגבול רציפה), שכן תת־סדרה של פונקציות מתכנסת לגבול הנקודתי של הסדרה המקורית.
אין תת־גבול שהוא כן במידה שווה ולכן אף תת־סדרה לא יכולה להתכנס ולכן B אינה קומפקטית סדרתית. $\square$