פתרון מטלה 04 — חשבון אינפיניטסימלי 3, 80415

26 באפריל 2025

שאלה 1

נסמן ב־I את קטע היחידה $I = [0,1]$.

נגיד שמרחב מטרי (X,d) הוא קשיר מסילתית אם לכל $x_0, x_1 \in X$ קיימת מסילה $\gamma : I \to X$ כך ש־$\gamma(0) = x_0, \gamma(1) = x_1$.

סעיף א'

נוכיח כי אם $f : X \to Y$ פונקציה רציפה ועל כך ש־X קשיר מסילתית אז גם גם Y קשיר מסילתית.

הוכחה: תהיינה $y_1, y_2 \in f(X)$ ולכן קיימים x_1, x_2 כך שמתקיים $f(x_1) = y_1,\ f(x_2) = y_2$.

X קשיר מסילתית ולכן קיימת מסילה $\gamma : [0,1] \to X$ כך שמתקיים $\gamma(0) = x_1,\ \gamma(1) = x_2$.

נסתכל על ההרכבה $\varphi = f \circ \gamma : [0,1] \to f(X)$ שרציפה מהרכבת פונקציות רציפות.

בפרט, מתקיים $\varphi(0) = y_1$ ו־$\varphi(1) = y_2$ ולכן $f(X)$ קשירה מסילתית. □

סעיף ב'

נוכיח כי אם $f : X \to Y$ פונקציה רציפה, חד־חד ערכית ועל כך ש־X קומפקטי אזי f היא הומיאומורפיזם.

הוכחה: עלינו להראות ש־f על ו־f^{-1} רציפה.

נצמצם את f להיות $f : X \to f(X) \restriction Y$. היות ו־$X$ קומפקטי ו־f רציפה, ולכן $f(X) \subseteq Y$ קבוצה קומפקטית, ולכן סגורה וחסומה.

בפרט, נובע כי f היא פונקציה חד־חד ערכית ועל.

$f(X) \subseteq Y$ היא קבוצה קומפקטית ולכן סגורה וחסומה ו־X קבוצה סגורה (כי X קומפקטי) ולפי התנאים השקולים לרחציפות נובע כי f^{-1} היא פונקציה רציפה (כאשר $f^{-1} : f(X) \to X$ והמקור של קבוצה סגורה בפונקציה רציפה היא קבוצה סגורה).

מצאנו ש־f חד־חד ערכית, על, רציפה ו־f^{-1} רציפה ולכן f הומיאומורפיזם (כמובן שקיים שיכון $g : f(X) \to Y$ כך ש־$f = g \circ f$ כאשר מסתכלים על $f : X \to Y$). □

סעיף ג'

נוכיח כי אם $\gamma : I \to, rI^2$ מסילה ממלאת שטח (כלומר על) אז היא אינה חד־חד ערכית.

הוכחה: TODOOOOOOOOOOOOOOOOOO □

סעיף ד'

נביא דוגמה לפונקציה רציפה ועל $f : \mathbb{Z}_2 \to I^2$.

הוכחה: TODOOOOOOOOOOOOOOOOOO □

סעיף ה'

נוכיח כי $\mathbb{Z}_2$ אינו קשיר מסילתית ונסיק כי לא קיימת פונקציה רציפה ועל $f : I \to \mathbb{Z}_2$.

הוכחה: TODOOOOOOOOOOOOOOOOOO □

שאלה 2

יהי (X,d) מרחב מטרי חסום לחלוטין.

סעיף א'

נראה כי קיימת תת־קבוצה $A\subseteq X$ צפופה ובת־מנייה.

הוכחה: מהיות X מרחב מטרי חסום לחלוטין זה בפרט אומר כי $A\subseteq X$ (שכן אם אפשר לכסות את המרחב כולו על־ידי ε־רשת סופית, בפרט אפשר תת־קבוצה).

לכן, נובע שלכל $n\in\mathbb{N}$ קיימת D_n קבוצה סופית כך ש־$\bigcup_{x\in D_n} B_{\frac{1}{n}}(x)\supseteq X$ ותהיי $D=\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$.

D בת־מנייה כאיחוד בן־מנייה של קבוצות סופיות ולכן נשאר רק להראת ש־D צפופה: יהיו $\varepsilon>0$ ו־$X\ni B_\varepsilon(y)$ כדור פתוח.

יהי $n\in\mathbb{N}$ כך שמתקיים $\frac{1}{n}<\varepsilon$ ולכן $\bigcup_{x\in D_n} B_{\frac{1}{n}}(x)\supseteq X\ni y$.

לכן קיים $D\supseteq D_n\ni x$ כך שמתקיים $B_{\frac{1}{n}}(x)\ni y$ משמע $d(x,y)<\frac{1}{n}<\varepsilon$ ולכן $x\in B_\varepsilon(y)$ ולכן D צפופה ו־$X\supseteq D$ בת־מנייה וצפופה. □

סעיף ב'

נוכיח כי ההשלמה $\left(\hat{X},\hat{d}\right)$ היא קומפקטית.

הוכחה: ראשית, אנחנו יודעים שבמרחבים מטריים קומפקטיות וקומפקטיות סדרתית שקולות.

שנית, אנחנו יודעים שמרחב מטרי הוא קומפקטי סדרתית אם ורק אם הוא שלם וחסום לחלוטין.

כעת, אנחנו יודעים שההשלמה $\left(\hat{x},\hat{d}\right)$ היא מרחב שלם ואם נראה שהוא גם חסום לחלוטין אז מהטענה לעיל נקבל את הקומפקטיות:

יהי $\varepsilon>0$, X מרחב מטרי חסום לחלוטין ולכן $\bigcup_{i=1}^{N} B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_i)\supseteq X$ כאשר $x_1,...,x_n$ זה בעצם $\frac{\varepsilon}{2}$־רשת.

נסתכל על ההעתקה $i:X\to\hat{X}$ האיזומטריה שנובעת מההשלמה.

ידוע כי $i(X)$ צפופה ב־$\hat{X}$ ולכן לכל $y\in\hat{X}$ ו־$\delta>0$ קיים $x\in X$ כך שמתקיים $d(x,y)<\delta$.

יהי $y\in\hat{X}$ בפרט הטענה לעיל נכונה עבור $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$ ולכן קיים $x\in X$ כך שמתקיים $d(x,y)<\delta=\frac{\varepsilon}{2}$.

היות ו־$x\in X$ נובע מכך ש־X מרחב מטרי חסום לחלוטין שקיים x_i מהכיסוי לעיל כך שמתקיים $d(x,x_i)<\frac{\varepsilon}{2}$, מאי־שיוויון המשולש נקבל

$$d(y,x_i)\le d(y,x)+d(x,x_i)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

משמע עבור $\varepsilon>0$ מתקיים $\bigcup_{i=1}^{N} B_\varepsilon(x_i)\supseteq\hat{X}$ ולכן $\hat{X}$ מרחב מטרי חסום לחלוטין גם־כן.

$\hat{X}$ חסום לחלוטין ושלם ולכן קומפקטי סדרתית ועל־כן קומפקטי. □

סעיף ג'

נראה כי ניתן לשכן הומיאומורפית את X במרחב המכפלה $I^{\mathbb{N}}$.

הוכחה: מסעיף א' אנחנו יודעים שיש $\{x_1,x_2,...\}\subseteq X$ צפופה.

נגדיר $f:X\to I^{\mathbb{N}}$ על־ידי

$$f(p)=\left(\min\{d(p,x_n),1\}\right)_{n=1}^{\infty}$$

f אכן רציפה כי פונקציית המרחק היא רציפה (וגם ראינו את זה במטלה הקודמת), נשאר להראת ש־f חד־חד ערכית, אבל זה נובע מהצפיפות: אם $p\neq q$ אבל $d(p,x_n)=d(q,x_n)$ נובע מהצפיפות כי בהכרח $p=q$ ולכן זו סתירה ו־$f(p)\neq f(q)$. TODOOOOOOOOOOOOOOOOOO

□

שאלה 3

תהיי $\gamma : I \to X$ מסילה במרחב מטרי (X,d) ונסמן את תמונתה ב־$C = \gamma(I)$.
נוכיח כי לכל פונקציה רציפה $f : C \to \mathbb{R}$ ו־$t \in [f(a), f(b)]$ עבור $a, b \in C$, קיים $c \in C$ כך שמתקיים $f(c) = t$.

הוכחה: TODOOOOOOOOOOOOOOOOOOO $\square$

שאלה 4

תהיי $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ עבור $n, m \geq 1$.

סעיף א'

נוכיח כי $\|A\|_F = \sqrt{\operatorname{tr}(A^tA)}$ כאשר $\|\cdot\|_F$ היא הנורמה האוקלידית תחת הזיהוי $\mathbb{R}^{nm} \backsimeq M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

הוכחה: $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ ולכן $A^t \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ ו־$A^tA \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. מהגדרת העקבה מתקיים

$$\operatorname{tr}(A^tA) = \sum_{i=1}^{n}\left(A^tA\right)_{ii} \underset{(1)}{=} \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} A_{ki}^2$$

כאשר (1) נובע מהיות $\left(A^tA\right)_{ii} = \sum_{k=1}^{m} A_{ki}^2$ לפי מה שראינו בתרגול

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left|A_{ij}\right|^2}$$

ואכן

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left|A_{ij}\right|^2} = \sqrt{\operatorname{tr}(A^tA)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} A_{ki}^2}$$

$\square$

סעיף ב'

נוכיח כי לכל שתי מטריצות אורתוגונליות $P \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ ו־$Q \in M_{m\times m}(\mathbb{R})$ מתקיים כי

$$\|QAP\|_F = \|A\|_F, \|QAP\|_{\mathrm{op}} = \|A\|_{\mathrm{op}}$$

הוכחה: נתחיל מלהראות את $\|QAP\|_F = \|A\|_F$, נשים לב שמתקיים מסעיף א'

$$\|QAP\|_F = \sqrt{\operatorname{tr}((QAP)^t(QAP))} = \sqrt{\operatorname{tr}((P^tA^tQ^t)(QAP))} = \sqrt{\operatorname{tr}(P^tA^tAP)} \underset{(1)}{=} \sqrt{\operatorname{tr}(P^{-1}A^tAP)} \underset{(2)}{=} \sqrt{\operatorname{tr}(A^tA)} = \|A\|_F$$

כאשר (1) נובע מהיות P מטריצה אורתוגונלית ולכן הפיכה ו־(2) נובע מהיות המטריצה A^tA מטריצה ריבועית ומהזהות

$$\operatorname{tr}\left(P^{-1}(AP)\right) = \operatorname{tr}\left((AP)P^{-1}\right) = \operatorname{tr}(A)$$

כאשר (1) נובע מהיות המטריצה A^tA מטריצה ריבועית ומהיות P מטריצה אורתוגונלית ולכן הפיכה.
נעבור להוכחת $\|QAP\|_{\mathrm{op}} = \|A\|_{\mathrm{op}}$. נשים לב שכמעט מאותם שיקולים בהוכחה לעיל מתקיים

$$\|QAP\|_{\mathrm{op}} = \sqrt{\lambda_{\max}((QAP)^t(QAP))} = \sqrt{\lambda_{\max}((P^tA^tQ^t)(QAP)))} = \sqrt{\lambda_{\max}(P^tA^tAP)} \underset{(1)}{=} \sqrt{\lambda_{\max}(P^{-1}A^tAP)}$$

$$\underset{(2)}{=} \sqrt{\lambda_{\max}(A^tA)} = \|A\|_{\mathrm{op}}$$

כאשר (1) זה כמו במקרה הקודם ו־(2) נובע מהיות המטריצות $M = P^{-1}A^tAP$ והמטריצה $B = A^tA$ מטריצות דומות ולכן בפרט יש להן את אותן ערכים העצמיים.

$\square$

סעיף ג'

נוכיח כי אם $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ מטריצה סימטרית אז $\|A\|_{\text{op}} = \lambda_{\max}(A)$.

הוכחה: A סימטרית ולכן $A^t = A$ ובפרט $A^tA = AA = A^2$.

A סימטרית ולכן נורמלית, לכסינה אורתוגונלית ועוד הרבה תכונות יפות. ממשפט הפירוק הספקטרלי (עבור מטריצות הרמיטיות ממשיות), קיימות מטריצה אורתוגונלית ממשית Q ומטריצה אלכסונית ממשית D כך שמתקיים

$$A = QDQ^t$$

ולכן

$$A^2 = (QDQ^t)(QDQ^t) = QDQ^tQDQ^t \underset{(1)}{=} QD^2Q^t$$

כאשר (1) נובע מהיות Q מטריצה אורתוגונלית ולכן $QQ^t = Q^tQ = I$.

היות ו־D היא המטריצה האלכסונית הממשית המכילה את הערכיים העצמיים (הממשים, כי A סימטרית) של A אז D^2 מכילה את הערכיים העצמיים בריבוע של A.

במילים אחרות, עבור מטריצה סימטרית הערכיים העצמיים של A^2 הם ריבוע הערכיים העצמיים של A.

נסמן ב־$\lambda_{A_{\max}} = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, ..., |\lambda_n|)\}$ את הערך העצמי הגדול ביותר (בערך מוחלט) של A, ולכן $\lambda_{A^2_{\max}} = \lambda^2_{A_{\max}}$.

נזכיר $\|A\|_{\text{op}} = \sqrt{\lambda_{\max}(A^tA)}$ ולכן במקרה שלנו מתקיים

$$\|A\|_{\text{op}} = \sqrt{\lambda_{A^2_{\max}}} = \sqrt{\lambda^2_{A_{\max}}} = \lambda_{A_{\max}} = \lambda_{\max}(A)$$

$\square$

סעיף ד'

נוכיח כי לכל $B \in M_{n\times k}(\mathbb{R})$ מתקיים כי

$$\|AB\|_F \le \|A\|_{\text{op}}\|B\|_F \le \|A\|_F\|B\|_F$$

הוכחה: נשים לב – $AB \in M_{m\times k}(\mathbb{R})$, ואנחנו מדברים על נורמות ולכן רק מספרים אי־שליליים (ובפרט חיוביים כי ב־0 הטענה טריוויאלית), אז נוכל להעלות בריבוע כדי להיפטר מהשורש וזה לא ישפיע על התוצאה.

נראה תחילה שמתקיים $\|AB\|_F \le \|A\|_F\|B\|_F$:

$$\begin{aligned}\|AB\|_F^2 = \sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^k \left|(AB)_{ij}\right|^2 = \sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^k \left|\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}\right| &\underset{(1)}{\le} \sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^k\left(\sum_{k=1}^n |a_{ik}|^2\sum_{k=1}^n |b_{kj}|^2\right)\\ &= \sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^k\left(\sum_{k,l=1}^n |a_{ik}|^2|b_{lj}|^2\right)\\ &= \sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^k |a_{ik}|^2\sum_{l=1}^n\sum_{j=1}^k |b_{lj}|^2\\ &= \|A\|_F^2\|B\|_F^2\end{aligned}$$

כאשר (1) נובע מאי־שיוויון קושי־שוורץ, ולכן $\|AB\|_F \le \|A\|_F\|B\|_F$.

בתרגול ראינו שמתקיים

$$\|A\|_{\text{op}} \le \|A\|_F \le \sqrt{n}\|A\|_{\text{op}}$$

אז בפרט יתקיים

$$\|A\|_{\text{op}}\|B\|_F \le \|A\|_F\|B\|_F$$

נשאר רק להראות שמתקיים גם $\|AB\|_F \le \|A\|_{\text{op}}\|B\|_F$.

ניזכר בהגדרה של כפל מטריצות ונסמן $B = [b_1, b_2, ..., b_k] \in \mathbb{R}^{n\times k}$ וקטורי העמודה של B, ולכן $AB = [Ab_1 Ab_2 ... Ab_k]$.

ולכן

$$\|AB\|_F^2 = \sum_{j=1}^{k} \left\|Ab_j\right\|_2^2$$

זה נובע מסעיף א' ומהסתכלות על וקטורי עמודה וגם זה די מהגדרת נורמת פרובניוס.
במטלה 1 ראינו שמתקיים $\left\|Ab_j\right\|_2 \le \|A\|_{\mathrm{op}}\left\|b_j\right\|_2$ ולכן בפרט מתקיים $\left\|Ab_j\right\|^2 \le \|A\|_{\mathrm{op}}^2\left\|b_j\right\|_2^2$ ולכן

$$\|AB\|_F^2 = \sum_{j=1}^{k} \left\|Ab_j\right\|_2^2 \le \|A\|_{\mathrm{op}}^2 \sum_{j=1}^{k} \left\|b_j\right\|_2^2 = \|A\|_{\mathrm{op}}^2\|B\|_F^2$$

ולכן קיבלנו גם שמתקיים $\|AB\|_F \le \|A\|_{\mathrm{op}}\|B\|_F$.
בסך־הכל ראינו שמתקיים $\|AB\|_F \le \|A\|_{\mathrm{op}}\|B\|_F \le \|A\|_F\|B\|_F$. $\square$

שאלה 5

תהיי $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ המטריצה הבאה

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

סעיף א'

נחשב את $\|A\|_F$ ואת $\|A\|_{\text{op}}$

פתרון:

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\left|A_{ij}\right|^2} = \sqrt{\left|A_{11}\right|^2 + (A_{12})^2 + (A_{21})^2 + (A_{22})^2} = \sqrt{4+9+0+4} = \sqrt{17}$$

עבור הנורמה האופרטורית, ניזכר כי $\|A\|_{\text{op}} = \sqrt{\lambda_{\max}(A^tA)}$, כאשר $\lambda_{\max} = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\}$, כאשר λ_1, λ_2 הם הערכים העצמיים של A^tA.

$$A^tA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 13 \end{pmatrix}$$

זוהי מטריצה סימטרית ולכן כל ערכייה העצמיים ממשיים, נמצא אותם:

$$\det\begin{bmatrix} 4-\lambda & 6 \\ 6 & 13-\lambda \end{bmatrix} = (4-\lambda)(13-\lambda) - 36 = 52 - 17\lambda + \lambda^2 - 36 = \lambda^2 - 17\lambda + 16 \Rightarrow (\lambda-1)(\lambda-16) = 0$$

ולכן $\lambda = 1, \lambda = 16$ הם ערכים עצמיים של A^tA ולכן $\lambda_{\max} = 16$ ונקבל $\|A\|_{\text{op}} = \sqrt{\lambda_{\max}(A^tA)} = \sqrt{16} = 4$. $\square$

סעיף ב'

נראה כי A לכסינה אך $\lambda_{\max}(A) < \|A\|_{\text{op}}$.

הוכחה: נראה כי A לכסינה, נמצא ערכים עצמיים:

$$\det\begin{bmatrix} \lambda-2 & -3 \\ 0 & \lambda+2 \end{bmatrix} = (\lambda-2)(\lambda+2)$$

מצאנו של־A יש שני ערכים עצמיים שונים ($\lambda = \pm 2$) והיא ממימד 2 ולכן A לכסינה ואכן מתקיים

$$\lambda_{\max}(A) = \max\{2, -2\} = 2 \underset{(1)}{<} 4 = \|A\|_{\text{op}}$$

כאשר (1) נובע מסעיף א'. $\square$