פתרון מטלה 04 — פונקציות מרוכבות, 80519

25 בנובמבר 2025

שאלה 1

תהיי $f(z) = \sqrt{\frac{1+z}{1-z}}$, הרבה של העתקת מוביוס ופונקציית השורש.

סעיף א'

תת־סעיף א'

נסמן $G_1 = \mathbb{C} \setminus (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$. נראה כי העתקת מוביוס ממפה את G_1 אל $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$.

הוכחה: נסמן $m(z) = \frac{1+z}{1-z}$ ונניח בשלילה שקיים $z \in G_1$ כך שמתקיים $m(z) \in [0, \infty)$.

אז $z = \frac{t+1}{t-1} \iff z(1-t) = -(t+1) \iff 1+z = t(z-1) \iff \frac{1+z}{1-z} = t \iff t = m(z)$ ונחלק למקרים על $t \geq 0$:

1. אם $t > 1$ אז $\frac{t+1}{t-1} > 1$ כלומר $z \in (1, \infty)$
2. אם $0 \leq t < 1$ אז $\frac{t+1}{t-1} \leq -1$ ולכן $x \in (-\infty, -1]$
3. אם $t = 0$ אז $z = -1$
4. לא ייתכן ש־$t = 1$ כי אז $z = \infty$

בחלק המקרים מתקיים $z \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$, אבל $z \in G_1$ ולכן זו סתירה ולכן $m(G_1) \subseteq \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$.

נשאר להראות את ההכלה בכיוון השני, עבור $\mathbb{C} \setminus [0, \infty) \subseteq m(G_1)$ כדי לקבל שיוויון.

לכל $w \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ נסמן

$$z = \frac{w+1}{w-1}$$

שמוגדר היטב מהתחום של w.

נניח ש־$z \notin G_1$ ולכן $z \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ אבל אז $m(z) = w$ זה מספר ממשי אי־שלילי,, אבל אמרנו ש־$w \notin [0, \infty)$ ולכן זו סתירה וקיבלנו את ההכלה בכיוון השני.

הראנו הכלה דו־כיוונית ולכן $m(G_1) = \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$. □

תת־סעיף ב'

ניקח את הענף מהתרגול ונראה ש־f היא חד־חד ערכית ועל וממפה את הקטע $(-1, 1)$ אל הישר $\{Re(z) = 0\}$.

הוכחה: בתרגול לקחנו את הענף

$$l(z) = Log(e^{i\pi}z) + i\pi$$

כדי להגדיר

$$f(z) = e^{\frac{1}{2}l\left(\frac{1+z}{1-z}\right)}$$

מהסעיף הקודם נובע ש־m היא העתקה חד־חד ערכית ועל בין G_1 לבין $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$.

□

שאלה 2

יהי $\sigma \in \mathbb{C}$.

סעיף א'

באמצעות הענף הראשי של הלוגריתם, נחשב את $\frac{d^n}{dz^n}(1+z)^\sigma$.

פתרון: לפי הגדרה שראינו בהרצאה מתקיים עבור הענף הראשי של הלוגריתם

$$(1+z)^\sigma = \exp(\sigma\, Log(1+z))$$

שאנליטית לכל $z \notin (-\infty, -1]$: זאת מכיוון שמהגדרה

$$Log(w) = \log|w| + i\, Arg\, w$$

אבל אנחנו יודעים שהארגומנט איננו רציף בקטע זה (הוא קופץ מ־π ל־$-\pi$), ולכן בפרט הפונקציה שלנו לא אנליטית מהרכבה בתחום הזה. בשאר התחומים, היא אנליטית כהרכבה של אנליטיות. נחשב

$$\frac{d}{dz}(1+z)^\sigma = \frac{d}{dz}\exp(\sigma \log(1+z))) = \exp(\sigma \log(1+z))) \cdot \left(\sigma \cdot \frac{1}{1+z}\right) = \sigma(1+z)^{\sigma-1}$$

בפרט, גם הפונקציה הזאת אנליטית כמכפלה של פונקציה אנליטית (מהרכבה) וקבוע אז נוכיח באינדוקציה:
בסיס – הוכחנו, נניח כי הטענה נכונה עבור k פעמים שגזרנו, כלומר

$$\frac{d^k}{dz^k}(1+z)^\sigma = \sigma(\sigma-1)\cdot \ldots \cdot(\sigma-k+1)(1+z)^{\sigma-k}$$

שוב יש לנו מכפלה של פונקציה אנליטית עם קבוע, ולכן אנליטית, נגזור

$$\frac{d^{k+1}}{dz^{k+1}}(1+z)^\sigma = \sigma(\sigma-1)\cdot \cdots \cdot(\sigma-k+1)(\sigma-k)(1+z)^{\sigma-k-1}$$

כלומר לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים מעיקרון האינדוקציה

$$\frac{d^n}{dz^n}(1+z)^\sigma = \sigma(\sigma-1)\cdot \cdots \cdot(\sigma-n+1)(1+z)^{\sigma-n}$$

□

סעיף ב'

נסיק שלכל z עם $|z| < 1$ מתקיים

$$(1+z)^\sigma = \sum_{n=1}^{\infty}\binom{\sigma}{n}z^n$$

פתרון: התנאי של $|z| < 1$ הכרחי בשביל האנליטיות (כי יש נקודת אי־רציפות עבור $z = -1$), אבל מהיות $|z| < 1$ אז הכל אנליטי.
אנחנו מחשבים טור טיילור סביב $a = 0$ ולכן במקרה שלנו לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$f^n(0) = \sigma(\sigma-1)\cdot \ldots \cdot(\sigma-n+1)(1+0)^{\sigma-n} = \sigma(\sigma-1)\cdot \ldots \cdot(\sigma-n+1)$$

כלומר

$$a_n = \frac{f^n(0)}{n!} = \frac{\sigma(\sigma-1)\cdot \ldots \cdot(\sigma-n+1)}{n!} = \binom{\sigma}{n}$$

עבור $n = 0$ פשוט מתקיים $f^0(0) = f(0) = (1+0)^\sigma = 1$ וגם כקונבציה מתקיים $\binom{\sigma}{0} = 1$ ולכן

$$(1+z)^\sigma = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{f^n(0)}{n!}\right)z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{f^n(0)}{n!}\right)z^n$$

□

שאלה 3

יהי $\mathbb{C} \supset G$ תחום ו־$f \in \mathrm{Hol}(G)$.
תהיי $f = f(r,t) = u(r,t) + iv(r,t)$ ההצגה של f בקורדינאטות פולריות ($z = re^{it}$).
נראה ש־f הולומורפית ואם $z \neq 0$ אז $u_r = \frac{1}{r}v_t$ ו־$v_r = -\frac{1}{r}u_t$.
הוכחה: יהי $z = re^{it}$ עם $r > 0$ ו־$t \in \mathbb{R}$, נכתוב

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) =: U(r,t) + iV(r,t)$$

כאשר

$$U(r,t) = u(x(r,t), y(r,t)) \ V(r,t) = v(x(r,t), y(r,t))$$
$$x = r\cos(x), \ \ y = r\sin(x)$$

נגזור

$$x_r = \cos(t), \ \ x_t = -r\sin(t), \ \ y_r = \sin(t), \ \ y_t = r\cos(t)$$

מכלל שרשרת נקבל

$$U_r = u_x x_r + u_y y_r = u_x \cos(t) + u_y \sin(t)$$
$$U_t = u_x x_t + u_y y_t = u_x(-r\sin(t)) + u_y(r\cos(t)) = r\big(-u_x \sin(t) + u_y \cos(t)\big)$$

ובאותו אופן גם נקבל

$$V_r = u_x \cos(t) + v_y \sin(t)$$
$$V_t = r\big(-v_x \sin(t) + v_y \cos(t)\big)$$

f הולומורפית ולכן ממשוואות קושי־רימן, מתקיים $u_x = v_y, \ \ u_y = -v_x$ ולכן

$$U_r = u_x \cos(t) + u_y \sin(t) = v_y \cos(t) + (-v_x)\sin(t) = v_y \cos(t) - v_x \sin(t)$$
$$\frac{1}{r}V_t = -v_x \sin(t) + v_y \cos(t)$$

כלומר $U_r = \frac{1}{r}V_t$.
באופן דומה נקבל גם

$$V_r = v_x \cos(t) + v_y \sin(t) = \big(-u_y\big)\cos(t) + u_x \sin(t)$$

ולכן

$$-\frac{1}{r}U_t = -\big(-u_x \sin(t) + u_y \cos(t)\big) = u_x \sin(t) - u_y \cos(t) \Longrightarrow V_r = -\frac{1}{r}U_t$$

$\square$

שאלה 4

יהי $G \subset \mathbb{C}$ תחום ותהיי $f \in \mathrm{Hol}(G)$. נסמן

$$Z_v := \{z = x + iy \mid u(x,y) = Im(f(z)) = 0\}$$

ונראה שאם לכל $z \notin Z_v$ מתקיים $f' = 0$ אז f קבועה.

הוכחה: נכתוב $f = u + iv$ עבור $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ולכן

$$Z_v := \{z \in G \mid v(z) = 0\}$$

נניח שלכל $z \in G \setminus Z_v$ מתקיים $f'(z) = 0$ ונראה ש־f קבועה.

יש לנו שתי אופציות – או ש־$G = Z_v$ או ש־$G \neq Z_v$ וניזכר כי הגדרנו את G להיות קבוצה פתוחה וקשירה.

אם $G = Z_v$ אז $v \equiv 0$ ולכן f היא פונקציה $f : G \to \mathbb{R}$ כלומר תמונתה רק ערכים ממשיים וזוהי פונקציה אנליטית.

משפט ההעתקה הפתוחה אומר שאם f היא פונקציה אנליטית שאיננה קבועה אז היא שולחת קבוצות פתוחות לקבוצות פתוחות, ולכן נניח בשלילה ש־f איננה קבועה:

אז $Im(f) \subseteq \mathbb{R}$ כאשר נתייחס ל־$\mathbb{R}$ כתת־קבוצה של $\mathbb{C}$ צריכה להיות קבוצה פתוחה מהמשפט ונטען שזה לא ייתכן:

נטען טענה חזקה יותר, שעבור $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ עם הטופולוגיה המושרית מ־$\mathbb{C}$ היא פתוחה אם $U = \emptyset$ בלבד: נניח שלא, כלומר $U \neq \emptyset$ ונזהה את U עם $U \times \{0\}$, כלומר כל $u \in U$ מתאים ל־$(u, 0) \in \mathbb{C}$.

כדי ש־U תהיה פתוחה ב־$\mathbb{C}$, לכל $(u, 0) \in U$ צריך שיהיה דיסק $D((u,0), \delta) \subseteq U$ עבור $\delta > 0$ אבל כל דיסק כזה מכיל גם $(u + a, b)$ עבור $a, b \in (-\delta, \delta)$ אבל לא ייתכן ש־$b \neq 0$ (כי אז יש לנו גם ציר מדומה), ולכן קיבלנו סתירה להנחה ש־$U \neq \emptyset$ ולכן $U = \emptyset$.

כלומר, לא ייתכן ש־f איננה קבועה כי אז תמונתה חייבת להיות קבוצה פתוחה מה שראינו שלא ייתכן בתנאים, ולכן בהכרח f פתוחה.

נשים לב שאפשר לענות על השאלה גם בלי משפט ההעתקה הפתוחה: f אנליטית ולכן היא מקיימת את משוואות קושי־רימן ולכן מתקיים

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

אמרנו ש־$v \equiv 0$ ולכן $v_x = v_y = 0$ ולכן גם $u_x = 0 = u_y$ ובפרט זה אומר שהנגזרת מתאפסת לחלוטין בכל G ולפי תנאים שקולים שראינו זה אומר ש־f קבועה על G.

נשאר לבחון את המקרה השני בו $G \neq Z_v$: אנחנו יודעים ש־v רציפה (כי f הולומורפית) ולכן הקבוצה $Z_v = v^{-1}(\{0\})$ היא קבוצה סגורה ב־G ולכן $G \setminus Z_v$ היא קבוצה פתוחה (מהגדרת המשלים).

מההנחה, לכל $z \in G \setminus Z_v$ מתקיים $f'(z) = 0$ אבל G הוא תחום קשיר ו־f הולומורפית, לכן אם $z \in U \subset G$ מקיימת $f'(z) = 0$ לכל $z \in U \subseteq G$ אז סביב כל נקודה כזאת יש סביבה בה הפונקציה מתאפסת ולכן בהכרח $f'(z) = 0$ לכל $z \in G$.

מהתנאים השקולים נקבל ש־f קבועה על G גם במקרה זה. $\square$

שאלה 5

תזכורת:

$$\partial_z = \frac{1}{2}\big(\partial_x - i\partial_y\big), \qquad \partial_{\overline{z}} = \frac{1}{2}\big(\partial_x + i\partial_y\big)$$

סעיף א'

נוכיח את הזהות $\overline{\partial_{\overline{z}} f} = \partial_z \overline{f}$.

הוכחה: ניזכר כי עבור $w_1, w_2, \in \mathbb{C}$ מתקיים $\overline{w_1 + w_2} = \overline{w_1} + \overline{w_2}$ וכן $\overline{i} = -i$, אז

$$\overline{\partial_{\overline{z}} f} = \frac{1}{2}\Big(\overline{\partial_x f + i\partial_y f}\Big) = \frac{1}{2}\Big(\overline{u_x + iv_x + i\big(u_y - iv_y\big)}\Big) = \frac{1}{2}\overline{\big(u_x + iv_x + iu_y + v_y\big)} = \frac{1}{2}\big(u_x - iv_x - iu_y + v_y\big)$$
$$= \frac{1}{2}\big(\big(u_x - v_y\big) - i\big(v_x + u_y\big)\big)$$

מצד שני, $\overline{f} = u - iv$ ולכן

$$\partial_z \overline{f} = \frac{1}{2}\Big(\partial_x \overline{f} + i\partial_y \overline{f}\Big) = \frac{1}{2}\big(u_x - iv_x - iu_y - i(-i)v_y\big) = \frac{1}{2}\big(u_x - iv_x - iu_y - v_y\big) = \frac{1}{2}\big(\big(u_x - v_y\big) - i\big(v_x + u_y\big)\big)$$

אז יש לנו שיוויון. $\square$

סעיף ב'

נוכיח את הזהות $\partial_z(f \cdot g) = (\partial_z f) \cdot g + f \cdot \partial_z g$.

הוכחה:

$$\partial_z(f \cdot g) = \frac{1}{2}\big(\partial_x(f \cdot g) - i\partial_y(f \cdot g)\big) = \frac{1}{2}\big(\partial_x f \cdot g + \partial_x g \cdot f - i\big(\partial_y f \cdot g + \partial_y g \cdot f\big)\big)$$
$$= \frac{1}{2}\big(\partial_x f - i\partial_y f\big) \cdot g + \frac{1}{2} \cdot f\big(\partial_x g - i\partial_y g\big) = (\partial_z f) \cdot g + f \cdot (\partial_z g)$$

$\square$

סעיף ג'

נוכיח את הזהות $\partial_{\overline{z}}(f \cdot g) = (\partial_{\overline{z}} f) \cdot g + f \cdot (\partial_{\overline{z}} g)$.

הוכחה:

$$\partial_{\overline{z}}(f \cdot g) = \frac{1}{2}\big(\partial_x(f \cdot g) + i\partial_y(f \cdot g)\big) = \frac{1}{2}\big(\partial_x f \cdot g + \partial_x g \cdot f + i\big(\partial_y f \cdot g + \partial_y g \cdot f\big)\big)$$
$$= \frac{1}{2}\big(\partial_x f + i\partial_y f\big) \cdot g + \frac{1}{2} \cdot f\big(\partial_x g + i\partial_y g\big) = (\partial_{\overline{z}} f) \cdot g + f \cdot (\partial_{\overline{z}} g)$$

$\square$

סעיף ד'

נוכיח את הזהות $\partial_{\overline{z}}(f \circ g) = ((\partial_z f) \circ g)\partial_{\overline{z}} g + ((\partial_{\overline{z}} f) \circ g)\partial_{\overline{z}} \overline{g}$.

הוכחה: נפעל כמו בתרגול, נכתוב את f על־ידי $z, \overline{z}$ כלומר $g, \overline{g}$ לאחר ההרכבה, ונקבל

$$\partial_{\overline{z}}(f \circ g) = \partial_{\overline{z}}(f(g(z, \overline{z}), \overline{g}(z, \overline{z})))$$

לנוחות נסמן $w = g(z, \overline{z}), \overline{w} = \overline{g(z, \overline{w})}$ ומכלל השרשרת לפונקציות ממשיות

$$\partial_x\Big(f\Big(g(z), \overline{g(z)}\Big)\Big) = f_w \partial_x w + f_{\overline{w}} \partial_x \overline{w}$$
$$\partial_y\Big(f\Big(g(z), \overline{g(z)}\Big)\Big) = f_w \partial_y w + f_{\overline{w}} \partial_y \overline{w}$$

כאשר

$$f_w = \partial_w f,\ \ f_{\overline{w}} = \partial_{\overline{w}} f$$

ולכן

$$\partial_{\overline{z}}(f \circ g) = \frac{1}{2}\big(\partial_x + i\partial_y\big)(f(w(z))) = \frac{1}{2}\big(f_w \partial_x w + f_{\overline{w}} \partial_x \overline{w} + i f_w \partial_y w + f_{\overline{w}} \partial_y \overline{w}\big)$$
$$= \frac{1}{2}\big(f_w\big(\partial_x w + i\partial_y w\big) + f_{\overline{w}}\big(\partial_x \overline{w} + i\partial_y \overline{w}\big)\big) = f_w \cdot \frac{1}{2}\big(\partial_x + i\partial_y\big)w + f_{\overline{w}} \cdot \frac{1}{2}\big(\partial_x + i\partial_y\big)\overline{w}$$

נשים לב

$$\frac{1}{2}\big(\partial_x + i\partial_y\big)w = \partial_{\overline{z}} w = \partial_{\overline{z}} g,\ \ \frac{1}{2}\big(\partial_x + i\partial_y\big)\overline{w} = \partial_{\overline{z}} \overline{w} = \partial_{\overline{z}} \overline{g}$$

כעת, $w = g(z)$ וכן $\partial_W f = \partial_z f, \partial_{\overline{w}} f = \partial_{\overline{w}} f$ ולכן

$$\partial_{\overline{w}}(f \circ g) = (\partial_w f \circ g)\partial_{\overline{z}} g + (\partial_{\overline{w}} f \circ g)\partial_{\overline{z}} \overline{g} = (\partial_z f \circ g)\partial_{\overline{z}} g + (\partial_{\overline{z}} f \circ g)\partial_{\overline{z}} \overline{g}$$

□