# פתרון מטלה 06 — תורת ההסתברות 1, 80420

12 בדצמבר 2025

## שאלה 1

### סעיף א'

נפריך את הטענה שאם $X$ משתנה מקרי המוגדר על מרחב הסתברות $(\Omega, \mathbb{P})$ כך ש־$X \sim U(\{1,2,3\})$ אז $(\Omega, \mathbb{P})$ הוא מרחב הסתברות אחידה.

*הוכחה:* נגדיר

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$$

ונגדיר

$$\mathbb{P}(\{\omega_1\}) = \frac{1}{12},\ \mathbb{P}(\{\omega_2\}) = \mathbb{P}(\{\omega_3\}) = \mathbb{P}(\{\omega_4\}) = \frac{3}{12}$$

זהו אינו מרחב הסתברות אחיד, ואם נגדיר $X : \Omega \to \{1,2,3\}$ על־ידי

$$X(\omega_1) = X(\omega_2) = 1,\ X(\omega_3) = 2,\ X(\omega_4) = 3$$

אז מתקיים

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(\{\omega_1, \omega_2\}) = \mathbb{P}(\{\omega_1\}) + \mathbb{P}(\{\omega_2\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(\{\omega_3\}) = \frac{1}{3}$$

$$\mathbb{P}(X = 3) = \mathbb{P}(\{\omega_4\}) = \frac{1}{3}$$

ואכן $X \sim U(\{1,2,3\})$. $\square$

### סעיף ב'

נפריך את הטענה שאם $X, Y$ משתנים מקריים בלתי־תלויים ובעלי תומך סופי ומתקיים $\mathbb{E}(|X - Y|) = 0$ אזי $\mathbb{P}(X = Y) = 1$.

*הוכחה:* ניקח את $\Omega = \{1, -1\}$ ונניח שגם $X, Y$ משתנים מקריים בלתי־תלויים כך שמתקיים $X(\omega) = \omega, Y(\omega) = -\omega$ ואכן התומך של $X, Y$ סופי גם הוא. מצד אחד, מנוסחת התוחלת נקבל $\mathbb{E}(|X - Y|) = 0$ אבל $\mathbb{P}(X = Y) = 0$. $\square$

### סעיף ג'

נפריך את הטענה שאם $X$ משתנה מקרי בעל תוחלת אז גם $X^2$ משתנה מקרי בעל תוחלת.

*הוכחה:* נניח כי $X$ משתנה מקרי הנתמך על הטבעים ונגדיר $\mathbb{P}(X = n) = \frac{c}{n^3}$ עבור $c$ קבוע.

מצד אחד, הטור $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{c}{n^3}$ מתכנס בהחלט ומנגד $\mathbb{E}(X^2) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot \frac{c}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c}{n}$ מתבדר. $\square$

### סעיף ד'

נוכיח שאם $X$ משתנה מקרי כך ש־$X^2$ בעל תוחלת אז $X$ בעל תוחלת.

*הוכחה:*

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{s \in \mathbb{R}_{\geq 0}} s\mathbb{P}(X^2 = s) = \sum_{s \in \mathbb{R}_{\geq 0}} \sqrt{s} \cdot \sqrt{s} \cdot \mathbb{P}\big(X \in \{\sqrt{s}, -\sqrt{s}\}\big) = \sum_{s' \in \mathbb{R}_{\geq 0}} s' \cdot s' \cdot \mathbb{P}(X \in \{s', -s'\})$$

$$= \sum_{s' \in \mathbb{R}_{\geq 0}} s' \cdot s'(\mathbb{P}(X = s') + \mathbb{P}(X = -s')) = \sum_{s' \in \mathbb{R}_{\geq 0}} s' \cdot s'\mathbb{P}(X = s') + \sum_{s' \in \mathbb{R}_{<0}} s' \cdot s'\mathbb{P}(X = s')$$

$$= \sum_{s' \in \mathbb{R}_{\geq 0}} |s'||s'\mathbb{P}(X = s')| = \sum_{s' \in \mathbb{R}_{<0}} |s'||s'\mathbb{P}(X = s')| = \sum_{s' \in \mathbb{R}} |s'| \cdot |s'\mathbb{P}(X = s')| = \sum_{s \in \operatorname{supp}(X)} |s| \cdot |s\mathbb{P}(X = s)|$$

זהו טור מתכנס בהחלט ולכן ממבחן ההתכנסות גם

$$\sum_{s \in S} |s\mathbb{P}(X = s)|$$

הוא טור מתכנס. $\square$

### סעיף ה'

נפריך את הטענה שאם $X,Y$ משתנים מקריים כך ש־$\mathbb{E}(X)=\mathbb{E}(Y)$ וכן $\mathbb{E}(X^2)=\mathbb{E}(Y^2)$ אז $\mathbb{P}(X=Y)=1$.

*הוכחה:* נסתכל על $\Omega=[4]^2$ מרחב ההטלה של שתי קוביות הוגנות בעלות 4 פאות.

נגדיר $X((\omega_1,\omega_2))=\omega_1$ וכן $Y((\omega_1,\omega_2))=\omega_2$.

ואכן, $X,Y\sim U([4])$ ולכן $\mathbb{E}(X)=\mathbb{E}(Y)$ וגם $\mathbb{E}(X^2)=\mathbb{E}(Y^2)$ אבל $\mathbb{P}(X=Y)=\frac{1}{4}\neq 1$. □

### סעיף ו'

נפריך את הטענה שקיים משתנה מקרי בדיד $X$ אי־שלילי בעל תוחלת סופית כך שמתקיים

$$\exists N\in\mathbb{N},\forall n\geq N,\mathbb{P}(X\geq n)=\frac{\mathbb{E}(X)}{n}$$

*הוכחה:* נניח בשלילה שאכן קיים משתנה מקרי כזה ויהי ה־$N$ המדובר, אז לכל $n>N$ מתקיים $\mathbb{P}(X\geq n)=\frac{\mathbb{E}(X)}{n}$ ולכן

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{n=1}^{\infty}n\mathbb{P}(X=n)\underset{(\star)}{=}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(X\geq n)=\sum_{n=1}^{N-1}\mathbb{P}(X\geq n)+\sum_{n=N}^{\infty}\mathbb{P}(X\geq n)=\sum_{n=1}^{N-1}\mathbb{P}(X\geq n)+\sum_{n=N}^{\infty}\frac{\mathbb{E}(X)}{n}$$

כאשר $(\star)$ נובע מנוסחת הזנב לחישוב תוחלת של משתנה מקרי הנתמך על הטבעיים..

נבחין $\sum_{n=1}^{N-1}\mathbb{P}(X\geq n)\in\mathbb{R}$ כי זהו סכום סופי של ערכים הקטנים/שווים לאחד מהגדרת פונקציות ההסתברות, אך מצד שני הסכום מצד ימין מתבדר כי הוא לא אחר מאשר כפולה של הטור ההרמוני שמתבדר, ולכן התוחלת מתבדרת ובפרט לא סופית ולכן סתירה. □

## שאלה 2

בוחרים באקראי באופן אחיד נקודה בקבוצה $\{(i,j) \mid i,j \in [10], 1 \le i \le j \le 10\}$ ונגדיר $X(i,j) = i, Y(i,j) = j$, משתנים מקריים.

### סעיף א'

נחשב את ההתפלגות השולית של $X, Y$

*פתרון:* ראשית נסמן

$$S := \{(i,j) \mid i,j \in [10], 1 \le i \le j \le 10\}$$

עלינו לחשב תחילה את $|S|$: כל $i, j$ אם קיבענו $j$ אז $i$ יכול לקבל ערכים מ־1 עד $j$ ומספר הזוגות בהם $j$ הוא הקורדינאטה השנייה הוא בידיוק $j$, כלומר

$$|S| = \sum_{j=1}^{10} j = \frac{10 \cdot 11}{2} = 55$$

וכן

$$\mathbb{P}(Y = j) = \frac{j}{55} \ (j \in \{1, ..., 10\})$$

נקבע $i$, אז מהיות $i \le j \le 10$ ייתכן כי $j \in \{i, i+1, ..., 10\}$ כלומר $\#j = 10 - i + 1 = 11 - i$ ולכן

$$\mathbb{P}(X = i) = \frac{11 - i}{55}, \ (i \in \{1, ..., 10\})$$

□

### סעיף ב'

נחשב את התוחלת של $X$.

*פתרון:* לפי מה שמצאנו בסעיף הקודם והגדרת התוחלת

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i \in \operatorname{supp}(X)} i\mathbb{P}(X = i) = \sum_{i=1}^{10} i\mathbb{P}(X = i) = \sum_{i=1}^{10} i\frac{11 - i}{55} = \frac{1}{55}\sum_{i=1}^{10}(11i - i^2) = \frac{220}{55} = 4$$

□

## שאלה 3

מטילים קובייה פעם אחר פעם ועוצרים כאשר התקבל בפעם הראשונה 5 או 6.
יהי $X$ מספר ההטלות הכולל עד העצירה ויהי $Y$ מספר המופעים של 1 ו־2 בסדרת ההטלות.

### סעיף א'

נמצא את ההתפלגות של $X$ ושל $Y \mid \{X = n\}$ עבור $n \geq 1$.

*פתרון:* ראשית, מהיות הקובייה הוגנת ההסתברות לקבל הטלה שמובילה לסיום המשחק היא $p = \frac{1}{3}$.
במילים אחרות, אנחנו מבצעים את ההטלות עד שנקבל הצלחה (שקול לזה שקיבלנו 5 או 6) כאשר הצלחה אינה תלויה בתוצאות הניסויים הקודמים:
זהו משתנה מקרי גיאומטרי! אז עבור $k \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1}p = \left(\frac{2}{3}\right)^{1-p}\left(\frac{1}{3}\right)$$

כלומר $X \sim Geo\left(\frac{1}{3}\right)$.
כעת, המאורע $\{X = n\}$ אומר שהטלות $1, ..., n-1$ הסתיימו בכישלון (קרי תוצאת ההטלה היא בין 1 ל־4) ובהטלה ה־$n$ יצא לנו 5 או 6.
כדי לתרום לערכים של $Y$ צריך שתוצאת ההטלה שאנחנו מתנים עליה תהיה 1 או 2, כאשר אנחנו יודעים שלא ייתכן שיצא 5 או 6 בהטלות עד $n-1$, ולכן בהטלות הללו יש הסתברות אחידה של $\frac{1}{4}$ לקבל את אחד מהערכים $\{1, 2, 3, 4\}$, נחשב את ההסתברות המותנית אם כך (נסמן $k$ תוצאת ההטלה לקריאות)

$$\mathbb{P}(k \in \{1,2\} \mid k \in \{1,2,3,4\}) = \frac{\mathbb{P}(k \in \{1,2\})}{\mathbb{P}(k \in \{1,2,3,4\})} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{4}{6}} = \frac{1}{2} \Longrightarrow Y \mid \{X = n\} \sim Bin\left(n-1, \frac{1}{2}\right)$$

(יש לנו $n-1$ הטלות כי רק בהן יכול לצאת 1 או 2). □

### סעיף ב'

נחשב את התוחלת של $Y$.

*פתרון:* נשתמש בנוסחת התוחלת המותנית השלמה.
מהיות $Y \mid \{X = n\} \sim Bin\left(n-1, \frac{1}{2}\right)$ מתוחלת משתנה מקרי בינומי

$$\mathbb{E}(Y \mid \{X = n\}) = \frac{n-1}{2}$$

ומנוסחת התוחלת השלמה עבור הסתברות מותנית

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(Y \mid X = n)\mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

ראשית נבחין כי $\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ זה טור הנגזרות של טור הנדסי, שאותו אנחנו יודעים לחשב:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \underset{\substack{k=n-1 \\ x=\frac{2}{3}}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} kx^k = \frac{1}{1-x}$$

זה מתכנס במידה שווה ולכן אפשר לגזור איבר איבר ולקבל

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

ולכן נכפול שוב ב־$x$ כדי לחזור לסכום המקורי ונקבל

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2} \underset{x=\frac{2}{3}}{\Longrightarrow} \frac{\frac{2}{3}}{\left(1-\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\frac{2}{3}}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{18}{3} = 6$$

$$\Longrightarrow \mathbb{E}(Y) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(Y \mid X = n)\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{6} \cdot 6 = 1$$

□

## סעיף ג'

נמצא $k \in \mathbb{N}$ עבורו המאורע $\{Y < k\}$ מתרחש בהסתברות של לפחות $\frac{2}{3}$.

*פתרון:* נרצה להשתמש באי־שיוויון מרקוב, עבור $k > 0$ מתקיים

$$\mathbb{P}(Y \geq k) \leq \frac{\mathbb{E}(Y)}{k}$$

ולכן עם תוצאות הסעיפים הקודמים

$$\mathbb{P}(Y \geq k) \leq \frac{1}{k}$$

אז אנחנו רוצים $k$ עבורו $\mathbb{P}(Y \geq k) \leq \frac{1}{3}$

$$\mathbb{P}(Y < k) = 1 - \mathbb{P}(Y \geq k)$$

כאשר מהנחה, אנחנו מחפשים $\mathbb{P}(Y < k) \geq \frac{2}{3}$ ולכן אנחנו מחפשים $k$ עבורו $\mathbb{P}(Y \geq k) \leq \frac{1}{3}$ ולכן

$$\frac{1}{k} \leq \frac{1}{3} \iff k \geq 3$$

ולכן $k = 3$ מספיק. □

## סעיף ד'

נחשב את $\mathbb{E}(X \mid Y = 0)$ ולהסביר מדוע תוחלת זו אינה שווה לתוחלת משתנה מקרי גיאומטרי בעל סיכוי הצלחה $\frac{1}{2}$.

*פתרון:* ראשית נבחין שהמאורע שאנחנו מדברים עליו אומר שב־ $n-1$ הטלות הראשונות תוצאת ההטלה היא רק 3 או 4 ובהטלה ה־$n$ קיבלנו 5 או 6, כאשר כל ההטלות הן בלתי־תלויות, כלומר

$$\mathbb{P}(X = n, Y = 0) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n}$$

מנוסחת ההסתברות השלמה

$$\mathbb{P}(Y = 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = n, Y = 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n} \underset{\text{טור הנדסי}}{=} \frac{\frac{1}{3}}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)} = \frac{1}{2}$$

ולכן

$$\mathbb{P}(X = n \mid Y = 0) = \frac{\mathbb{P}(X = n, Y = 0)}{\mathbb{P}(Y = 0)} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n}}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot \frac{1}{3^n} = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

כאשר את המעבר האחרון עשינו כדי לכתוב את ההסתברות בדומה למשתנה מקרי שמתפלג גיאומטרית עם פרמטר $q = \frac{2}{3}$ להצלחה, ולכן מהגדרת התוחלת למשתנה מקרי שמתפלג גיאומטרי

$$\mathbb{E}(X \mid Y = 0) = \frac{1}{q} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$$

נסביר מדוע תוחלת זו אינה שווה לתוחלת של משתנה מקרי גיאומטרי בעל סיכוי הצלחה $\frac{1}{2}$: זאת מכיוון שהתנינו שאף אחת מההטלות אינה 1 או 2, ולכן מרכז המסה של ההטלות מכריח שהמשחק יהיה יותר קצר כדי ולכן נצטרך בממוצע לבצע פחות הטלות ולכן יש הסתברות גבוהה יותר לסיום מהיר יותר (שכן, תוחלת של משתנה מקרי מתפלג גיאומטרית עם פרמטר $\frac{1}{2}$ היא 2, כלומר סיימנו את המשחק בממוצע מהר יותר). □

## שאלה 4

$N$ יצרנים מתחרים בעמידות הנורות שהם מפיקים. הנורות של כולם שקולות ובכל יום כל אחת מהן עלולה להישרף בהסתברות של $1-p$.
כל יצרן מקבל 3 נקודות על כל נורה של יצרן אחר שהחזיקה פחות ימים משלו ובמקרה של תיקו אף אחד משני היצרנים לא מקבל נקודות.

### סעיף א'

נחשב מהי תוחלת כמות הנקודות שמתקבלת על־ידי כל היצרנים.

*פתרון:* נגדיר תחילה $X_i$ להיות המשתנה של כמות הימים שהנורה של היצרן ה־$i$ שרדה לפני שנשרפה.

מהנתון, נובע כי $\mathbb{P}(X_i = k) = (1-p)p^{k-1}$ (ההסתברות לשריפה היא $1-p$).

לכל $i \neq j$, $X_i > X_j$ גורר שהיוצר ה־$i$ יקבל 3 נקודות ובתיקו לא מקבל כלום, אז נגדיר את $S = 3\sum_{i\neq j}\mathbb{1}_{\{X_i > X_j\}}$.

נשתמש בלינארית התוחלת ונקבל

$$\mathbb{E}(S) = 3 \cdot N(N-1)\mathbb{P}(X_1 > X_2)$$

מהיות המאורעות בלתי־תלויים מהנתון מתקיים

$$\mathbb{P}(X_1 > X_2) = \sum_{k\geq 1}\mathbb{P}(X_2 = k)\mathbb{P}(X_1 > k) = \sum_{k\geq 1}(1-p)p^{k-1}p^k = \sum_{k\geq 1}(1-p)p^{2k-1} \underset{\text{טור גיאומטרי}}{=} \frac{(1-p)p}{1-p^2} = \frac{p}{1+p}$$

כלומר

$$\mathbb{E}(S) = \frac{3 \cdot N(N-1) \cdot p}{1+p}$$

□

### סעיף ב'

נחסום מלמעלה את ההסתברות שביום האחרון תישרפנה ביחד שתי נורות בידיוק.

*הערה:* אוהד אמר שמספיק לחסום מלמעלה.

*פתרון:* נקבע $m \geq 1$ ונסתכל על המאורע שאומר שבידיוק שתי נורות הגיעו ליום ה־$m$ והשאר נשרפו, כלומר

$$\binom{N}{2}(\mathbb{P}(X = m))^2\mathbb{P}(X < m)^{N-2} = \binom{N}{2}(1-p)^2p^{2(m-1)}\left(1-p^{m-1}\right)^{N-2}$$

נסמן $r = m-1$ ולכן

$$P = \binom{N}{2}(1-p)^2\sum_{r=0}^{\infty}p^{2r}\left(1-p^r\right)^{N-2}$$

מתקיים $\left(1-p^r\right)^{N-2} \leq 1$ שכן $p \in [0,1]$ ולכן

$$P \leq \binom{N}{2}(1-p)^2\sum_{r=0}^{\infty}p^{2r} = \binom{N}{2}(1-p)^2 \cdot \frac{1}{1-p^2} = \frac{1-p}{1+p}$$

□

## שאלה 5

תהיי $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ משפחה בת־מנייה של מאורעות במרחב הסתברות $(\Omega, 2^\Omega, \mathbb{P})$.

### סעיף א'

עבור כל $N \in \mathbb{N}$ נבטא את המאורע $\bigcup_{n=1}^N A_n$ כמאורע המתואר על־ידי משתנה מקרי $X$ המוגדר כסכום המשתנים המקריים $X = \sum_{n=1}^N \mathbb{1}_{A_n}$.
*פתרון:* עבור $N$ מקובע, $X(\omega)$ סוכם כמה מאורעות מתוך $A_1, \dots, A_N$ מתרחשים.
המאורע $\bigcup_{n=1}^N A_n$ אומר שלפחות אחד מתוך $A_1, \dots, A_N$ קורה (מהגדרת האיחוד), כלומר

$$\bigcup_{n=1}^N A_n = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \geq 1\} = \{X \geq 1\}$$

□

### סעיף ב'

נשתמש באי־שיוויון מרקוב ובלינאריות התוחלת כדי להוכיח מחדש את חסם האיחוד (אי־שיוויון בול) עבור איחודים סופיים.
*הוכחה:* נשתמש במשתנה המקרי $X = \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{A_n}$, זהו משתנה מקרי אי־שלילי ומהסעיף הקודם $\bigcup_{n=1}^N A_n = \{X \geq 1\}$.
מאי־שיוויון מרקוב עבור $a = 1$ נקבל

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^N A_n\right) = \mathbb{P}(X \geq 1) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{1} = \mathbb{E}(X)$$

אבל מלינאריות התוחלת

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{A_n}\right) = \sum_{i=1}^N \mathbb{E}\big(\mathbb{1}_{A_n}\big) = \sum_{i=1}^N \mathbb{P}(A_n)$$

כאשר המעבר האחרון נובע מהיות התומך של פונקציה מציינת 0 או 1 ו־0 לא תורם כלום.
כלומר

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^N A_n\right) \leq \sum_{i=1}^N \mathbb{P}(A_n)$$

□

## שאלה 6

מטילים מטבע הוגן $n$ פעמים, נחשב את תוחלת מספר הרצפים של התוצאה עץ.

*פתרון:* המטבע הוגן ולכן יש לנו הסתברות $\frac{1}{2}$ לקבל עץ ויהיו $X_1,...,X_n$ כאשר $X_i$ הוא תוצאת ההטלה ה־$i$.

נגדיר את האינדיקטור $I_k$ להיות 1 כאשר רצף של עצים התחיל בהטלה ה־$k$ כאשר רצף מתחיל אם ורק אם $X_k$ הוא עץ ואו ש־$k=1$ או ש־$X_{k-1}$ זה פלי.

ראשית נשים לב $\mathbb{E}(I_1)=\mathbb{P}(X_1=H)=\frac{1}{2}$ ועבור $k\geq 2$ אנחנו מחפשים בעצם

$$\mathbb{E}(I_k)=\mathbb{P}(X_{k-1}=T,X_k=H)\underset{\text{ההטלות בלתי-תלויות}}{=}\frac{1}{4}$$

כאשר התוחלות הללו נובעות מתוחלת משתנה מקרי מתפלג ברנולי.

נגדיר $I=\sum_{k=1}^{n}I_k$ ונקבל עם לינאריות התוחלת

$$\mathbb{E}(I)=\mathbb{E}(I_1)+\sum_{k=2}^{n}\mathbb{E}(I_k)=\frac{1}{2}+\frac{n-1}{4}=\frac{n+1}{4}$$

□