# פתרון מטלה 05 — חשבון אינפיניטסימלי 3, 80415

13 במאי 2025

# שאלה 1

תהיי $A \subseteq \mathbb{R}^k$ פתוחה ו־$f, g : A \to \mathbb{R}^m$ פונקציות גזירות.

## סעיף א'

נוכיח כי לכל $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ הפונקציה $\alpha f + \beta g$ היא גזירה עם נגזרת הנתונה על־ידי

$$D(\alpha f + \beta g)_x = \alpha (Df)_x + \beta (Dg)_x$$

*הוכחה:* מהיות $f, g$ גזירות נובע שמתקיים $\lim_{v \to 0} \frac{f(x+v) - f(x) - Df_x(v)}{\|v\|} = 0$ $(\star)$, $\lim_{v \to 0} \frac{g(x+v) - g(x) - Dg_x(v)}{\|v\|} = 0$ $(\star\star)$.

הפונקציה $h = \alpha f + \beta g$ גזירה אם קיימת העתקה לינארית $Dh$ המקיימת

$$\lim_{v \to 0} \frac{h(x+v) - h(x) - Dh_x(v)}{\|v\|} = 0$$

אם $h$ גזירה עם נגזרת הנתונה על־ידי $Dh_x = \alpha (Df)_x + \beta (Dg)_x$, נבחן אם מתקיים הגבול לעיל

$$\lim_{v \to 0} \frac{h(x+v) - h(x) - Dh_x(v)}{\|v\|} = \lim_{v \to 0} \frac{\alpha f(x+v) + \beta g(x+v) - \alpha f(x) - \beta g(x) - \alpha (Df)_x(v) - \beta (Dg)_x(v)}{\|v\|}$$

$$\lim_{v \to} \frac{\alpha f(x+v) - \alpha f(x) - \alpha (Df)_x + \beta g(x+v) \beta g(x) - \beta (Dg)_x}{\|v\|}$$

$$= \lim_{v \to 0} \frac{\alpha (f(x+v) - f(x) - Df_x(v))}{\|v\|} + \lim_{v \to 0} \frac{\beta (g(x+v) - g(x) - Dg_x(v))}{\|v\|}$$

$$= \alpha \lim_{v \to 0} \frac{f(x+v) - f(x) - Df_x(v)}{\|v\|} + \beta \lim_{v \to 0} \frac{g(x+v) - g(x) - Dg_x(v)}{\|v\|}$$

$$\underset{(\star),(\star\star)}{=} \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$$

$\square$

## סעיף ב'

נוכיח כי הפונקציה $\langle f, g \rangle : A \to \mathbb{R}$ היא גזירה עם נגזרת הנתונה על־ידי

$$D(\langle f, g \rangle)_x = \langle Df_x, g(x) \rangle + \langle f(x), Dg_x \rangle$$

*הוכחה:* נתחיל מלהראות כי $\langle f, g \rangle$ היא פונקציה גזירה: אנחנו יודעים שמכפלה פנימית ניתנת לתיאור על־ידי

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \sum_{i=1}^{m} f_i(x) g_i(x) = f_1(x) g_1(x) + f_2(x) g_2(x) + ... + f_m(x) g_m(x)$$

כמו־כן, $f, g$ פונקציות גזירות ולכן גם $f_i, g_i$ גזירות לכל $1 \leq i \leq m$, ולכן ניתן להפעיל את כלל גזירת מכפלה

$$D(\langle f(x), g(x) \rangle)_x(v) = \sum_{i=1}^{m} (Df_i(x)(v) \cdot g_i(x) + f_i(x) \cdot Dg_i(x)(v))$$

$$= \sum_{i=1}^{m} Df_i(x)(v) \cdot g_i(x) + \sum_{i=1}^{m} f_i(x) \cdot Dg_i(x)(v) = \langle Df_x(v), g(x) \rangle + \langle f(x), Dg_x(v) \rangle$$

מהיות $f, g$ דיפרנציאביליות נקבל $(\star)$

$$f(x+v) = f(x) + Df_x(v) + r_f(v) \quad \left( \lim_{v \to 0} \frac{r_f(v)}{\|v\|} = 0 \right)$$

$$g(x+v) = g(x) + Dg_x(v) + r_g(v) \quad \left( \lim_{v \to 0} \frac{r_g(v)}{\|v\|} = 0 \right)$$

אם $D(\langle f,g\rangle)_x$ שמצאנו נכונה, הגבול הבא צריך להתקיים

$$(\star\star)\lim_{v\to 0}\frac{\langle f(x+v),g(x+v)\rangle-\langle f(x),g(x)\rangle-\langle Df_x(v),g(x)\rangle-\langle f(x),Dg_x(v)\rangle}{\|v\|}\underset{?}{=}0$$

נשים לב

$$\begin{aligned}\langle f(x+v),g(x+v)\rangle&=\langle f(x)+Df_x(v)+r_f(v),g(x)+Dg_x(v)+r_g(v)\\&=\langle f(x),g(x)\rangle+\langle Df_x(v),g(x)\rangle+\langle f(x),Dg_x(v)\rangle+\langle r_f(v),g(x)\rangle+\langle f(x),r_g(v)\rangle\\&+\langle Df_x(v),Dg_x(v)\rangle+\langle r_f(v),Dg_x(v)\rangle+\langle Df_x(v),r_g(v)\rangle+\langle r_f(v),r_g(v)\rangle\end{aligned}$$

ולכן נקבל

$$(\star\star)=\lim_{v\to 0}\frac{\langle r_f(v),g(x)\rangle+\langle f(x),r_g(x)\rangle+\langle Df_x(v),Dg_x(v)\rangle+\langle r_f(v),Dg_x(v)\rangle+\langle Df_x(v),r_g(v)\rangle+\langle r_f(v),r_g(v)\rangle}{\|v\|}$$

אבל $\frac{\langle r_f(v),g(x)\rangle}{\|v\|}\to 0$ כי $\frac{\|r_f(v)\|}{\|v\|}\to 0$ ולכן גם $\frac{\langle f(x),r_g(v)\rangle}{\|v\|}\to 0$.
אבל גם $\frac{\langle Df_x(v),Dg_x(v)\rangle}{\|v\|}\le C\|v\|\to 0$ מאי־שיוויון קושי־שוורץ, ובאותו אופן גם $\frac{\langle Df_x(v),Dr_f(v)\rangle}{\|v\|},\frac{\langle r_f(v),Dg_x(v)\rangle}{\|v\|}\to 0$.
אחרון חביב $\frac{\langle r_f(v),r_g(v)\rangle}{\|v\|}\to 0$ מ־($\star$) כל המחוברים בגבול שואפים לאפס ולכן מאריתמטיקה של גבולות גם סכומם שואף לאפס ולכן

$$(\star\star)\lim_{v\to 0}\frac{\langle f(x+v),g(x+v)\rangle-\langle f(x),g(x)\rangle-\langle Df_x(v),g(x)\rangle-\langle f(x),Dg_x(v)\rangle}{\|v\|}=0$$

$\square$

## שאלה 2

### סעיף א'

נראה באמצעות הגדרת הנגזרת כי הפונקציה $f:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$ הנתונה על־ידי $f(x)=\|x\|_2^2$ היא גזירה.

*הוכחה:* ראשית, נשים לב

$$f(x)=\|x\|_2^2=\sqrt{x_1^2+...x_k^2}^{\,2}=x_1^2+...+x_k^2=\sum_{i=1}^{k}x_i^2$$

זה פולינום, ולכן ננחש שהנגזרת היא

$$\nabla f(x)=\nabla f(x_1,...,x_k)=\begin{pmatrix}2x_1\\ \vdots\\ 2x_k\end{pmatrix}=2x$$

משמע $\nabla f(x)$ הוא העתקה לינארית (וכל העתקה לינארית היא רציפה ולכן $f$ היא גזירה), נחשב את הגבול לפי הגדרה

$$\lim_{v\to0}\frac{1}{\|v\|}(f(x+v)-f(x)-\nabla f(x)\cdot v)$$

$$=\lim_{v\to0}\frac{1}{\|(v_1,...,v_k)\|}(f(x_1+v_1,...,x_k+v_k)-f(x_1,...,x_k)-\nabla f(x_1,...,x_k)\cdot(v_1,...,v_k))$$

$$=\lim_{v\to0}\frac{1}{\|(v_1,...,v_k)\|}(\cancel{x_1^2}+\cancel{2x_1v_1}+v_1^2+...+\cancel{x_k^2}+\cancel{2x_kv_k}+v_k^2-\cancel{(x_1^2+...+x_k^2)}-\cancel{(2x_1v_1,...,2x_kv_k)})$$

$$=\lim_{v\to0}\frac{1}{\|(v_1,...,v_k)\|}(v_1^2+...+v_k^2)\underset{(\star)}{=}\lim_{v\to0}\frac{v_1^2+...+v_k^2}{\sqrt{v_1^2+...+v_k^2}}=\lim_{v\to0}\frac{\|v\|_2^2}{\|v\|_2}=\lim_{v\to0}\|v\|_2=0$$

ולכן מהגדרת הדיפרנציאביליות מצאנו כי $f$ גזירה.

בהמשך ל־$(\star)$, כמוסכמה אנחנו עובדים עם הנורמה האוקלידית ומותר לנו לעשות את זה כי כל הנורמות שקולות. $\square$

### סעיף ב'

נמצא את כל הנקודות בהן הפונקציה $g:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$ הנתונה על־ידי $g(x)=\|x\|_1$ היא גזירה.

*הוכחה:* קודם כל

$$g(x)=g(x_1,...,x_k)=\|(x_1,...,x_k)\|_1=|x_1|+...+|x_k|$$

ניזכר שעבור $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת על־ידי $f(x)=|x|$, ראינו באינפי 2 שהיא גזירה בכל $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

עבור כל $x\in\mathbb{R}^k$ שהפונקציה $g$ גזירה מתקיים

$$\nabla g(x)=\nabla g(x_1,...,x_k)=(sgn(x_1),...,sgn(x_k))$$

כאשר $sgn:\mathbb{R}\to\{-1,0,1\}$ היא פונקציית הסימן.

אז כמו במקרה של $\mathbb{R}$, נפריד לשני מקרים

1. לכל $1\le i\le k$ מתקיים $|x_i|\neq0$
2. קיים $1\le i\le k$ אחד לכל הפחות כך שמתקיים $|x_i|=x_i=0$

אם אנחנו במקרה הראשון, הפונקציה גזירה קורדינאטה קורדינאטה וסיימנו (שכן ראינו בהרצאה שזה שקול).

במקרה השני, נניח בשלילה כי $g$ עדיין גזירה, ולכן בפרט כל הנגזרות הכיווניות שלה קיימות בכל נקודה, בפרט זה נכון גם בראשית.

נסתכל על הראשית עם וקטור כיוון $(0,1...,1)\in\mathbb{R}^k$ ומהגדרת הנגזרת הכיוונית נקבל

$$\lim_{t\to0}\frac{g(x+t)-g(x)}{t}=\frac{|t|}{t}=\pm1$$

וזאת סתירה להנחה ש־$g$ גזירה בכל $\mathbb{R}^k$.

נסיק אם כך ש־$g$ גזירה בכל $\mathbb{R}^k\setminus\{x\in\mathbb{R}^k \mid \exists i\in[k]\ s.t.\ x_i=0\}$, זאת אומרת בכל $x\in\mathbb{R}^k$ שאף קורדינאטה שלו היא אינה 0. $\square$

## שאלה 3

### סעיף א'

נראה כי הפונקציה $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ הנתונה על־ידי

$$f(x,y,z)=\begin{pmatrix}x^4-2xy^2+3z^3\\ \sin(y+z^2)\end{pmatrix}$$

היא גזירה ונחשב את נגזרתה.

*הוכחה:* נסמן $f_1=x^4-2xy^2+3z^3, f_2=\sin(y+z^2)$.

נשים לב נשים לב ש־$f_1,f_2$ גזירות מאריתמטיקה של פונקציות גזירות ולכן נחשב נגזרות חלקיות והמועמדת לנגזרת של $f$ היא

$$Df_{(x,y,z)}=\begin{pmatrix}\partial_x f_1 & \partial_y f_1 & \partial_z f_1\\ \partial_x f_2 & \partial_y f_2 & \partial_z f_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4x^3-2y^2 & -4yx & 9z^2\\ 0 & \cos(y+z^2) & 2z\cos(y+z^2)\end{pmatrix}$$

כל הרכיבים (הנגזרות החלקיות) רציפים מאריתמטיקה של פונקציות רציפות לכל $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ ולכן $f$ גזירה לכל $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

$\square$

### סעיף ב'

נראה כי הפונקציה $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ הנתונה על־ידי

$$g(x,y)=\begin{pmatrix}e^{xy}+4x\\ y\sqrt{1+x^2}\\ \ln(1+x^2+y^2)\end{pmatrix}$$

היא גזירה ונחשב את נגזרתה.

*הוכחה:* נסמן $g_1=e^{xy}+4x, g_2=y\sqrt{1+x^2}, g_3=\ln(1+x^2+y^2)$ ו תהיי $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

נשים לב ש־$g(x,y)$ מוגדרת היטב:

$$g_3=\ln(1+x^2+y^2)\geq\ln(1)=0$$

$$g_2=\sqrt{1+x^2}\geq\sqrt{1}=1$$

שכן בגלל החזקה אנחנו מוסיפים רק ערכים חיוביים ולא שוברים את תחום ההגדרה של כל פונקציה.

בפרט, $g_1,g_2,g_3$ הן פונקציות גזירות מאריתמטיקה של פונקציות גזירות, ולכן המועמדת לנגזרת של $g$ היא

$$Dg_{(x,y)}=\begin{pmatrix}\partial_x g_1 & \partial_y g_1\\ \partial_x g_2 & \partial_y g_2\\ \partial_x g_3 & \partial_y g_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{xy}y+4 & e^{xy}x\\ \frac{yx}{\sqrt{1+x^2}} & \sqrt{1+x^2}\\ \frac{2x}{1+x^2+y^2} & \frac{2y}{1+x^2+y^2}\end{pmatrix}$$

נשים לב שכל הרכיבים רציפים: זה שוב נובע מכך שלכל $x,y\in\mathbb{R}^2$ מתקיים $1+x^2>0, 1+x^2+y^2\geq 1$ ולכן כל הפונקציות מוגדרות היטב ובפרט רציפות מאריתמטיקה של פונקציות רציפות.

מצאנו שכל הנגזרות החלקיות רציפות בכל $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ ולכן $g$ גזירה בכל $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

$\square$

## שאלה 4

תהיי $f:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה בנקודה $x\in\mathbb{R}^k$.

### סעיף א'

נוכיח כי $\|Df_x\|_{\text{op}}=\|\nabla f(x)\|$.

*הוכחה:* ראשית $Df_x:\mathbb{R}^k\to R$ זו העתקה לינארית (פונקציונל לינארי) ולכן כפי שראינו בתרגול

$$Df_x(v)=\langle v,Df_x\rangle=\langle v,\nabla f(x)\rangle\Rightarrow\|Df_x(v)\|_{\text{op}}=\|(\langle v,Df_x\rangle)\|_{\text{op}}=\|(\langle v,\nabla f(x)\rangle)\|_{\text{op}}$$

מאי־שיוויון קושי שוורץ נקבל

$$\|(Df_x(v))\|_{\text{op}}\le\|\nabla f_x\|_{\text{op}}\cdot\|v\|_2=\|\nabla f_x\|_{\text{op}}$$

אם $\nabla f_x=0$ נקבל שיוויון. אם $\nabla f_x\neq 0$ אז נוכל לסמן $v=\frac{f_x}{\|\nabla f_x\|}$ ונקבל

$$Df_x(v)=\langle v,\nabla f_x\rangle=\langle\frac{f_x}{\|\nabla f_x\|}\nabla f_x\rangle=\frac{\|\nabla f_x\|^2}{\|\nabla f_x\|}=\|\nabla f_x\|$$

□

### סעיף ב'

נמצא את כל וקטורי היחידה $v\in\mathbb{R}^k$ (כלומר $\|v\|=1$) בהם מתקבל המקסימום $\|Df_x(v)\|=\|\nabla f(x)\|$

*פתרון:* מהסעיף הקודם אנחנו מקבלים שהוקטורים בהם יתקבל המקסימום יהיו אלו שתלויים ב־$\nabla f_x$ ומאורך 1

$$\|\lambda\nabla f_x\|=1\iff|\lambda|\|\nabla f_x\|=1\iff\lambda=\pm\frac{1}{\|\nabla f_x\|}$$

*משמע* המקסימום מתקבל כאשר $v=\pm\nabla\frac{f_X}{\|\nabla f_x\|}$. □

## שאלה 5

תהיי $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ הפונקציה הנתונה על־ידי

$$f(x,y)=\begin{cases}1 & y=x^2\neq 0\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

### סעיף א'

נראה כי לכל $v\in\mathbb{R}^2$ הנגזרת הכיוונית של $f$ בכיוון $v$ קיימת בראשית, כלומר קיים הגבול

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(0+tv)-f(0,0)}{t}$$

*הוכחה:* לכל כיוון $\vec{v}=(a,b)\in\mathbb{R}^2$ נגדיר $g(t)=f(tv)$ ואז הפונקציה $g$ היא זהותית 0 למעט נקודה אחת ואז $g'(0)=0$.
נעבור להראות אם־כך שהגבול הנתון באמת קיים:

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(0+tv)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(ta,tb)}{t}$$

נשים לב תחילה

$$f(ta,tb)=1\iff tb=t^2a^2\Rightarrow b=ta^2$$

משמע בידיוק ב־$t\neq 0$ אחד וספציפי נקבל $f(ta,tb)=1$, ולכן כמעט לכל $t$ נקבל $f(ta,tb)=0$ ולכן בפרט עבור $t$ קטן דיו, הנגזרת הכיוונית של $f$ מתאפסת בראשית לכל וקטור כיוון $v\in\mathbb{R}^2$ ונקבל

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(0+tv)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(ta,tb)}{t}=0$$

$\square$

### סעיף ב'

נוכיח ש־$f$ לא גזירה בראשית.

*הוכחה:* ניזכר כי אם פונקציה גזירה בנקודה, היא בהכרח רציפה בנקודה ונטען ש־$f$ בכלל לא רציפה בראשית.
נניח בשלילה שהיא כן רציפה ונבחר סדרות היינה $x_n=\frac{1}{n}$ ו־$y_n=\frac{1}{n^2}$ ונקבל $f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n^2}\right)=1$ שכן $x_n^2=\left(\frac{1}{n}\right)^2=\frac{1}{n^2}=y_n$.
מנגד, מתקיים $f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n^2}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}1$ אבל $f(0,0)=0$ וזו סתירה ולכן $f$ אינה רציפה בראשית ובטח לא דיפרנציאבילית בראשית. $\square$