פתרון מטלה 02 — תורת המידה, 80517

11 בנובמבר 2025

שאלה 1

נוכיח את הלמה של בורל קנטלי: בהינתן מרחב מידה $(X, \mathcal{B}, \mu)$, נאמר שתכונה כלשהי של נקודות של X־ב מתקיימת **כמעט תמיד** או **כמעט בכל מקום** אם אוסף הנקודות שלא מקיימות את התכונה הזו מוכלת בקבוצה בעלת מידה אפס.

תהיי $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{B}$ כך שמתקיים

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$$

נוכיח כי התכונה "x שייך רק למספר סופי של A_n־ים" מתקיימת כמעט בכל מקום.

הוכחה: ניעזר בהדרכה

$$B = \lim_{n\to\infty} \sup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

יהי $x \in B$ ונרצה להראות ש־$\mu(B) = 0$.

מהיות $(X, \mathcal{B}, \mu)$ מרחב מידה זה אומר ש־$\mathcal{B}$ היא σ־אלגברה, אז עבור k מקובע, נובע מתכונת הסגירות תחת איחוד בן־מנייה שמתקיים $\bigcup_{k\geq n}^{\infty} A_n \in \mathcal{B}$ ומתת־אדטיביות מתקיים

$$\mu\left(\bigcup_{n\geq k}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=k}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$$

כשהמעבר האחרון נובע מהיות הטור שלנו טור־זנב של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ שנתון שמתכנס.

נגדיר $U_k = \bigcup_{k\geq n} A_n$ ונובע מהגדרת האיחוד שזו סדרה יורדת ... $U_1 \supseteq U_2 \supseteq$ ובפרט מתקיים ממונוטוניות ו־σ־אדיטיביות

$$\mu(U_1) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$$

נגדיר $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k$ ואז מתכונת הרציפות לסדרות יורדות נקבל

$$\mu(B) = \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} U_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(U_k)$$

אבל

$$\mu(U_k) \leq \sum_{n=k}^{\infty} \mu(A_n) \to 0$$

ולכן $\mu(B) = 0$, כלומר המשלים של התכונה "x שייך רק למספר סופי של A_n־ים" מוכל בקבוצה ממידה אפס ולכן לפי הגדרה התכונה מתקיימת כמעט בכל מקום. $\square$

שאלה 2

תהיי μ מידה המוגדרת על איזשהו מרחב מדיד $(X,\mathcal{B})$. נגדיר

$$\mathcal{N} := \{E \subseteq X \mid E \subseteq N \in \mathcal{B}, \mu(N) = 0\},$$
$$\overline{\mathcal{B}} := \{A \cup E \mid A \in \mathcal{B}, E \in \mathcal{N}\}$$

ותהיי $\overline{\mu} : \overline{\mathcal{B}} \to [0,\infty]$ כך שמתקיים $\overline{\mu}(A \cup E) = \mu(A)$ לכל $A \in \mathcal{B}, E \in \mathcal{N}$.

סעיף א'

נוכיח כי $\overline{\mathcal{B}}$ היא σ־אלגברה.

הוכחה: עלינו להראות את שלוש התכונות של σ־אלגברה עבור $\overline{\mathcal{B}}$.

$X \in \overline{\mathcal{B}}$ שכן $\mathcal{B}$ היא σ־אלגברה ולכן $X \in \mathcal{B}$ ו־$\emptyset \in \mathcal{N}$ שכן $\mu(\emptyset) = 0$ ולכן $X = X \cup \emptyset$ עבור $X \in \mathcal{B}$ ו־$\emptyset \in \mathcal{N}$ ולכן $X \in \overline{\mathcal{B}}$ וכמובן שבאותו אופן, $\emptyset \in \mathcal{B}$ ולכן $\emptyset \cup \emptyset \in \overline{\mathcal{B}}$.

נראה סגירות למשלים. יהי $C \in \overline{\mathcal{B}}$) ונרצה להראות ש־$C^c = X \setminus C \in \overline{\mathcal{B}}$.

מהיות $C \in \overline{\mathcal{B}}$ נובע שיש $A \in \mathcal{B}$ ו־$E \in \mathcal{N}$ כך שמתקיים $C = A \cup E$.

מהיות $E \in \mathcal{N}$ נובע כי $\mu(E) = 0$ וכן שיש $N \in \mathcal{B}$ כך שמתקיים $E \subseteq N$.

נבחין

$$(A \cup E)^c = A^c \cap E^c = A^c \cap (X \setminus E) = (A^c \cap (X \setminus N)) \cup (A^c \cap (N \setminus E))$$

שכן $X = (X \setminus N) \cup N$ (עבור ה־N שמקיים $S \subseteq N$) ובשימוש של זה לפשט את הביטוי

$$A^c \cap (X \setminus E) = A^c \cap (X \setminus E) \cap X = A^c \cap (X \setminus E) \cap ((X \setminus N) \cup N)$$
$$= A^c \cap (X \setminus E) \cap (X \setminus N)) \cup (A^c \cap (X \setminus E) \cap N) \underset{E \subseteq N}{=} A^c \cap (X \setminus N) \cup A^c \cap (N \setminus E)$$

עכשיו, $\mathcal{B}$ היא σ־אלגברה ולכן $A^c \in \mathcal{B}$ וכן $X \setminus N \in \mathcal{B}$ מהסגירות גם־כן.

כעת, $A^c \cap (N \setminus E) \subseteq N$ מהגדרת החיתוך ולכן ממונוטוניות המידה גם מתקיים $A^c \cap (N \setminus E) \in \mathcal{N}$.

כלומר $C^c = (A \cup E)^c$ הוא איחוד של איבר מ־$\mathcal{B}$ ואיחוד של איבר מ־$\mathcal{N}$ ולכן $C^c \in \overline{\mathcal{B}}$ וקיבלנו סגירות תחת משלים.

נראה סגירות תחת איחוד בן־מנייה: תהיי $(C_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \overline{\mathcal{B}}$ ונרצה להראות ש־$\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \in \overline{\mathcal{B}}$.

לכל $n \in \mathbb{N}$ ניתן לכתוב $C_n = A_n \cup E_n$ עבור $A_n \in \mathcal{B}$ ו־$E_n \in \mathcal{N}$, מהיות $E_n \in \mathcal{N}$ נובע כי יש $N_n \in \mathcal{B}$ כך שמתקיים $E_n \subseteq N_n$ וכן $\mu(N_n) = 0$, אז נכתוב

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \big(A_n \bigcup E_n\big) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \bigcup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = A \bigcup E$$

אבל $\mathcal{B}$ היא σ־אלגברה ומכך ש־$\mathcal{B}$־$(A_n)_{n=1}^{\infty}$ נובע מסגירות תחת איחוד בן־מנייה שמתקיים $A \in \mathcal{B}$.

נשים לב שמתקיים

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$$

אבל כל $N_n \subseteq \mathcal{B}$ ולכן שוב מסגירות תחת איחוד בן־מנייה מתקיים $\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n = \overline{N} \in \mathcal{B}$.

מתכונות המידה, מתקיים σ־אדיטיביות ולכן

$$\mu\big(\overline{N}\big) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(N_n) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$$

אז $\mu\big(\overline{N}\big) = 0$ ו־$E \subseteq \overline{N}$ ומתכונות המונוטוניות של המידה נובע כי $\mu(E) \le \mu\big(\overline{N}\big) = 0$ ומאי־שליליות המידה נובע כי $\mu(E) = 0$, וזה גורר כי $E \in \mathcal{N}$.

כלומר $A \in \mathcal{B}$ וכן $E \in \mathcal{N}$ ולכן מהגדרת $\overline{\mathcal{B}}$ נובע כי $A \cup E \in \overline{\mathcal{B}}$ וזה בדיוק אומר שיש סגירות תחת איחוד בן־מנייה.

כל שלושת התנאים ל־σ־אלגברה מתקיימים ולכן $\overline{\mathcal{B}}$ היא σ־אלגברה. $\square$

סעיף ב'

נוכיח כי $\overline{\mu}$ מוגדרת היטב.

הוכחה: עלינו להראות שאם $C \in \overline{\mathcal{B}}$ ניתנת לכתיבה על־ידי $C = A_1 \cup E_1$ וגם $C = A_2 \cup E_2$ עבור $A_1, A_2 \in \mathcal{B}$ ו־$E_1, E_2 \in \mathcal{N}$ אז מתקיים

$$\overline{\mu} = \mu(A_1) = \mu(A_2)$$

נשים לב שמתקיים

$$A_1 \subseteq A_1 \cup E_1 = C = A_2 \cup E_2$$

מהיות $E_1 \in \mathcal{N}$, יש $N_1 \in \mathcal{B}$ כך ש־$E_1 \subseteq N_1$ ומתקיים $\mu(N_1) = 0$ ובאותו אופן גם $N_2 \in \mathcal{B}$ כך ש־$E_2 \subseteq N_2$ ומתקיים $\mu(N_2) = 0$.
אז

$$A_1 \subseteq A_2 \cup E_2 \implies A_1 = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap E_2)$$

אבל $E_2 \subseteq N_2$ ולכן $A_1 \cap E_2 \subseteq N_2$ וממונוטוניות ואי־שליליות המידה מתקיים $\mu(A_1 \cap E_2) = 0$.
נשים לב שמתקיים $\mu((A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap E_2)) = \mu(A_1 \cap A_2) + \mu(A_1 \cap E_2)$ למרות שלא בהכרח ש־$A_1 \cap A_2 \cap E_2 = \emptyset$, כי ממונוטוניות המידה, $\mu(A_1 \cap A_2 \cap E_2) = 0$ כי $A_1 \cap A_2 \cap E_2 \subseteq N$ ולכן עם עיקרון ההכלה וההפרדה נקבל

$$\mu(A_1) = \mu((A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap E_2)) = \mu(A_1 \cap A_2) + \underbrace{\mu(A_1 \cap E_2)}_{=0} - \underbrace{\mu(A_1 \cap A_2 \cap E_2)}_{=0} = \mu(A_1 \cap A_2)$$

באותו אופן יכולנו רק להשתמש בטענה מהתרגול של התת־מונוטוניות.
כעת, מהיות $A_1 \cap A_2 \subseteq A_2$ נובע ממונוטוניות המידה $\mu(A_1 \cap A_2) = \mu(A_1) \leq \mu(A_2)$.
משיקולי סימטרייה אם נעשה עם חלופת אינדקסים $A_2 \subseteq A_1 \cup E_1$ נקבל את האי־שיוויון $\mu(A_2) \leq \mu(A_1)$.
מטריכוטומיה נקבל $\mu(A_1) = \mu(A_2)$, כנדרש ולכן $\overline{\mu}$ מוגדרת היטב. □

סעיף ג'

נוכיח שכל מידה $\hat{\mu}$ על $\overline{\mathcal{B}}$ המקיימת $\hat{\mu}(A) = \mu(A)$ לכל $A \in \mathcal{B}$ למעשה מתלכדת עם $\overline{\mu}$.
כלומר נוכיח ש־$\overline{\mu}$ היא ההרחבה היחידה של μ למידה על $\overline{\mathcal{B}}$.

הוכחה: תהיי $\nu : \overline{\mathcal{B}} \to [0, \infty]$ הרחבה של מידה μ כך שמתקיים $\nu(A) = \mu(A)$ לכל $A \in \mathcal{B}$ ונרצה להראות ש־$\nu(C) = \overline{\mu}(C)$ לכל $C \in \overline{\mathcal{B}}$.
אז $C = A \cup E$ עבור $A \in \mathcal{B}$ ו־$E \in \mathcal{N}$ ולכן יש $N \in \mathcal{B}$ כך ש־$E \subseteq N$ ומתקיים $\mu(N) = 0$.
אז בהכרח מתקיים $\nu(N) = \mu(N) = 0$ כהרחבה של המידה μ וממונוטוניות ואי־שליליות המידה מתקיים $\nu(E) = 0$ גם־כן.
נזיר את הקבוצות ונכתוב $C = A \cup E = A \cup (E \setminus A)$ ו־$E \setminus A \subseteq N$ ולכן מאותו נימוק ממקודם, $\nu(E \setminus A) = 0$.
מ־σ־אדיטיביות של המידה מתקיים

$$\nu(A \cup E) = \nu(A) + \nu(E \setminus A) = \nu(A) + 0 = \nu(A)$$

אז ν מסכים עם μ על $\mathcal{B}$, כלומר $\nu(A) = \mu(A)$, אז

$$\nu(A \cup E) = \nu(A) = \mu(A) = \overline{\mu}(A)$$

בסעיף הקודם ראינו שגם אם ההצגה $C = A \cup E$ איננה יחידה, כלומר $C = A \cup E = A' \cup E'$, על $\overline{\mu}$ ראינו שמתקיים $\overline{\mu}(A \cup E) = \overline{\mu}(A' \cup E')$ וגם על ν ראינו באמצעות ההזרה שניתן לעשות את התהליך לכל $C \in \overline{\mathcal{B}}$ ובגלל המידה אפס הטענה תישמר.
כלומר לכל $C \in \overline{\mathcal{B}}$ מתקיים $\nu(C) = \overline{\mu}(C)$ ולכן $\overline{\mu}$ היא ההרחבה היחידה של μ למידה על $\overline{\mathcal{B}}$. □

שאלה 3

תהיי $\Sigma \subset (A_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת קבוצות במרחב מידה (X,Σ,μ) ונגדיר

$$\liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$
$$\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

סעיף א'

נוכיח $\liminf A_n, \limsup A_n \in \Sigma$.

הוכחה: נוכיח עבור $\liminf A_n$.

מכך ש־Σ היא σ־אלגברה נובע כי היא סגורה תחת איחוד בן־מנייה ומכללי דה־מורגן נובע שהיא סגורה תחת חיתוך בן־מנייה.

מכך ש־$(A_k)_{k=n}^{\infty} \subseteq \Sigma$ הוא אוסף בן־מנייה, אם נסמן $B_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$ נקבל ש־$B_n \in \Sigma$.

נסתכל על $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ ושוב מתכונות σ־אלגברה היא סגורה לאיחוד בן־מנייה ולכן $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \Sigma$ אבל $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \liminf A_n$, כלומר $\liminf A_n \in \Sigma$.

עבור $\limsup A_n$ נשים לב שלפי חוקי דה־מורגן מתקיים

$$(\limsup A_n)^c = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=b}^{\infty} A_k^c = \liminf A_n^c$$

ראינו $\liminf A_n \in \Sigma$ ו־Σ היא σ־אלגברה ולכן $\liminf A_n^c \in \Sigma$ מסגירות למשלים של σ־אלגברה, ולכן $(\limsup A_n)^c \in \Sigma$ ושוב מהסגירות למשלים נקבל $\limsup A_c \in \Sigma$. $\square$

סעיף ב'

נוכיח $\mu(\liminf A_n) \le \liminf \mu(A_n)$.

הוכחה: נשתמש בסימון מהסעיף הקודם $B_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$ ונבחין שמהגדרת החיתוך מתקיים

$$B_1 \subseteq B_2 \subseteq B_3 \subseteq \dots$$

מתקיים

$$\mu(\liminf A_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \underset{\text{רציפות לסדרות עולות}}{=} \lim_{n\to\infty}\mu(B_n)$$

ומהגדרה לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $B_n \subseteq A_k$ לכל $k \ge n$ ומהמונוטוניות ביחס להכלה מתקיים $\mu(B_n) \le \mu(A_k)$.

בפרט מתקיים $\mu(B_n) \le \inf_{k\ge n}\mu(A_k)$ ואם נחזור לביטוי לעיל שראינו שמוגדר היטב וניקח גבול

$$\lim_{n\to\infty}\mu(B_n) \le \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{k\ge n}\mu(A_k)\right)$$

כלומר

$$\mu(\liminf A_n) \le \liminf A_n$$

$\square$

סעיף ג'

נוכיח כי אם מרחב המידה הוא סופי, כלומר $\mu(X) < \infty$ אז גם $\limsup \mu(A_n) \leq \mu(\limsup A_n)$.

הוכחה: נניח שלא כך, כלומר $\mu(\limsup A_n) < \limsup \mu(A_n)$.

בדומה לסעיפים הקודמים נגדיר $C_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} C_k$ ואז $\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$.

מהגדרת האיחוד מתקיים

$$C_1 \supseteq C_2 \supseteq C_3 \supseteq \dots$$

וממונוטוניות המידה מתקיים $\mu(C_1) \geq \mu(C_2) \geq \dots$ ובפרט מתקיים $\mu(C_1) < \mu(X)$ כי $C_1 \subseteq X$.

שוב מרציפות לסדרות יורדות מתקיים

$$\mu(\limsup A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(C_n)$$

וממה שמצאנו מתקיים

$$\lim_{n\to\infty} \mu(C_n) < \limsup \mu(A_n)$$

ושוב ממונוטוניות המידה,

$$\mu(C_n) = \mu\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \geq \mu_{k\geq n}(A_k) \Longrightarrow \mu(C_n) \geq \sup_{k\geq n} \mu(A_k)$$

ניקח גבול ונקבל

$$\lim_{n\to\infty} \mu(C_n) \geq \lim_{n\to\infty} \left(\sup_{k\geq n} \mu(A_k)\right) = \limsup \mu(A_n)$$

וזאת כמובן סתירה. $\square$

שאלה 4

יהי $(X,\mathcal{B})$ מרחב מדיד.

סעיף א'

תהיי $f_n : X\to[0,\infty]$ סדרה של פונקציות מדידות.
נראה כי קבוצת הנקודות $x\in X$ בהן הסדרה $f_n(x)$ מתכנסת היא מדידה וכי אם נסמן קבוצה זו ב־E ונגדיר את $f : E\to[-\infty,\infty]$ על־ידי $f:=\lim_{n\to\infty}f_n$ זו תהיה פונקציה מדידה.

הוכחה: נסמן

$$\overline{f}=\lim_{n\to\infty}\sup f_n(x),\ \ \underline{f}=\lim_{n\to\infty}\inf f_n(x)$$

מהיות כל $f_n\in\mathcal{B}$ נובע כי $\overline{f},\underline{f}\in\mathcal{B}$, נראה בשביל $\overline{f}$ והמקרה של $\underline{f}$ זהה:
מהגדרה, $\overline{f}(x)=\inf_{k\ge1}(\sup_{n\ge k}f_n(x))$, נסמן $g_k(x)=\sup_{n\ge k}f_n(x)$ ולפי טענה מההרצאה, לקיחת סופרמום משמר את הקבוצה כמדידה.
באותו אופן, $\overline{f}=\inf_{k\ge1}g_k(x)$ היא גם מדידה כלקיחת אינפימום על מדידה.
אז $\overline{f},\underline{f}$ מדידות.
ניזכר שמהגדרת הגבול, $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת אם ורק אם $\overline{f}(x)=\underline{f}(x)$ ולכן נגדיר

$$E=\left\{x\in X\mid\overline{f}(x)=\underline{f}(x)\right\}$$

ומההנחה בשאלה, E מדידה.
כעת נסתכל על f, עלינו להראות שלכל $B\subseteq[0,\infty]$ מתקיים $f^{-1}(B)$ מדידה, כלומר $f^{-1}(B)\subseteq E$ ו־$f^{-1}\in\mathcal{B}$.
מההגדרה, לכל $x\in X$ מתקיים $f(x)=\overline{f}(x)$ ולכן לכל $a\in[0,\infty)$ מתקיים

$$f^{-1}([0,a])=\{x\in E\mid f(x)\le a\}=\left\{x\in E\mid\overline{f}(x)\le a\right\}$$

וכן

$$f^{-1}([0,a])=E\cap\left\{x\in E\mid\overline{f}(x)\le a\right\}$$

אבל E היא מדידה מההנחה, ו־$\left\{x\in E\mid\overline{f}(x)\le a\right\}$ מדידה גם־כן כי $\overline{f}$ מדידה ולפי טענה שראינו פונקציה היא מדידה אמם המקור של כל קבוצה פתוחה הוא מדיד.
אז $f^{-1}([0,a])$ היא חיתוך של שתי קבוצות מדידות ולכן מדיד. $\square$

סעיף ב'

נסמן לכל $x\in[0,1]$ את הפיתוח הבינארי שלו כ־$0,d_1d_2d_3\ldots$ כאשר

$$d_n(x)=\begin{cases}0 & \exists m\in\mathbb{N}\ s.t.\ x\in\left[\frac{2m}{2^n},\frac{2m+1}{2^n}\right)\\ 1 & \exists m\in\mathbb{N}\ s.t.\ x\in\left[\frac{2m-1}{2^n},\frac{2m}{2^n}\right)\end{cases}$$

ונסיק מהסעיף הקודם כי קבוצת הנקודות $x\in[0,1]$ עבורן

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{d_i(x)}{n}=\frac{1}{2}$$

היא מדידה בורל.

הוכחה: ראשית נשים לב ש־$d_i(x)$ היא פונקציה פשוטה כי תמונתה סופית ומתקיים

$$\{x\in[0,1]\mid d_i(x)=1\}=\bigcup_{m=1}^{2^{i-1}}\left[\frac{2m-1}{2^i},\frac{2m}{2^i}\right)$$

כאשר כל קטע הוא ב־σ־אלגברת בורל וזה איחוד סופי ולכן הקבוצה לעיל ב־σ־אלגברת בורל, באותו אופן גם

$$\{x \in [0,1] \mid d_i(x) = 0\} = \bigcup_{m=1}^{2^{i-1}} \left[\frac{2m}{2^i}, \frac{2m+1}{2^i}\right)$$

נמצאת ב־σ־אלגברת בורל ובגלל שהמקור של כל קבוצה פתוחה הוא הוא מדיד נובע כי $d_n(x)$ פונקציה מדידה.
נגדיר

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i(x)$$

ונטען ש־$(f_n)_{n=1}^{\infty}$ היא פונקציה מדידה לכל $n \in \mathbb{N}$ כי מהיות $d_i(x)$ מדידה לכל i אז גם הסכום הסופי הוא מדיד לפי אריתמטיקה של פונקציות מדידות וגם מכפלה בסקלר משמר את היות הפונקציה מדידה.
נגדיר

$$E = \left\{x \in [0,1] \mid \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{1}{2}\right\} \subseteq \left\{x \in [0,1] \mid \text{קיים } \lim_{n\to\infty} f_n(x)\right\}$$

ונגדיר

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

ומסעיף א', f מדידה בורל. כמו־כן, $[0,1]$ הוא מרחב האוסדרוף ולכן יחידון הוא קבוצה סגורה ולכן $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ הוא בורל ולכן $E = f^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right)$ היא מדידה בורל. $\square$

שאלה 5

נזכיר את ה־σ־אלגברה מהתרגול הראשון על קבוצה $\mathbb{R}$

$$\mathcal{A} = \{E \subseteq \mathbb{R} \mid |A| \le \aleph_0, |E^c| \le \aleph_0\}$$

סעיף א'

נגדיר $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ על־ידי

$$\mu(E) = \begin{cases} 0 & |E| \le \aleph_0 \\ 1 & \text{אחרת} \end{cases}$$

נראה כי μ מהווה מידה על $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$.

הוכחה: עלינו להראות כי μ היא σ־אדיטיביות ואיננה טריוויאלית ∞, כלומר יש $A \in \mathcal{A}$ כך ש־$\mu(A) < \infty$.
ראשית, $\emptyset \in E$ ו־$|\emptyset| \le \aleph_0$ ולכן $\mu(\emptyset) = 0$ ולכן μ היא איננה טריוויאלית ∞.
עבור ה־σ־אדיטיביות, תהיי $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A}$ קבוצות מדידות וזרות בזוגות.
יש לנו שתי אפשרויות: או שלכל $n \in \mathbb{N}$, $|A_n| \le \aleph_0$ ולכן $\mu(A_n) = 0$ ותחת הנחת אקסיומת הבחירה, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ זה איחוד בן־מנייה של קבוצות בנות־מנייה ולכן האיחוד בן־מנייה, כלומר $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\right) = 0$ וקיבלנו שתחת מקרה זה מתקיימת σ־אדיטיביות.
באפשרות השנייה, נטען שיש לכל היותר $k \in \mathbb{N}$ יחד כך ש־A_k איננו בן־מנייה: אז A_k^c הוא בן־מנייה, וכדי שיהיה לנו איחוד של קבוצות זרות בזוגות, כל קבוצה אחרת שנאחד צריכה להיות זרה ל־A ולכן היא ב־A^c שהיא בת־מנייה, כלומר לא ייתכן שהיא תהיה לא בת־מנייה.
מהיות $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ זרות בזוגות, נובע שלכל $k \neq n$ מתקיים $A_n \subseteq A_k^c$ ולכן לכל n כנ"ל מתקיים $\mu(A_n) = 0$.
ניתן לכתוב $\dot\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_k \,\dot\cup \left(\dot\bigcup_{n\neq k} A_n\right)$, אבל $\dot\bigcup_{n\neq k} A_n$ הוא קבוצה בת־מנייה (מהנחת אקסיומת הבחירה) אבל $|A_k| > \aleph_0$ ולכן האיחוד $\dot\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ איננו בן־מנייה, כלומר

$$\mu\left(\dot\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1$$

מצד שני מתקיים

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \mu(A_k) + \sum_{n\neq k} \mu(A_n) = 1 + 0 = 1$$

כלומר קיבלנו σ־אדיטיביות, כנדרש. □

סעיף ב'

נמצא את כל הפונקציות המדידות מ־$(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ ליישר הממשי ולכל אחת נחשב את האינטגרל שלה.
הוכחה: בשביל שפונקציה $f : (\mathbb{R}, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ תהיה מדידה, צריך להתקיים לכל $B \subseteq \mathbb{R}$ ש־$f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$, כלומר לכל $y \in \mathbb{R}$ צריך להתקיים $f^{-1}(\{y\}) \in \mathcal{A}$.
נשים לב שלא ייתכן שעבור $y_1 \neq y_2$ נקבל ש־$f^{-1}(\{y_1\}), f^{-1}(\{y_2\})$ שניהם לא בני־מנייה, כי המשלים של שניהם יהיה בן־מנייה ואם יש לנו שתי קבוצות זרות לא בנות־מנייה זה גורר ש־$\mathbb{R}$ הוא איחוד של שתי קבוצות בנות־מנייה אבל $\mathbb{R}$ איננו בן־מנייה. אז יש $c \in \mathbb{R}$ יחיד כך ש־$\left|f^{-1}(\{c\})^c\right| \le \aleph_0$.
כמו־כן, $\bigcup_{y\in\mathbb{R}} f^{-1}(\{y\}) = \mathbb{R}$, כי אם כל $f^{-1}(\{y\})$ היה בן־מנייה, אז $\mathbb{R}$ היה איחוד בן־מנייה של קבוצות בנות־מנייה ולכן בן־מנייה וזאת כמובן סתירה. אז יש לפחות $c \in \mathbb{R}$ אחד כך ש־$f^{-1}(\{c\})$ לא בת־מנייה, כלומר המשלים שלו הוא בן־מנייה, אז לכל $y \neq c, f^{-1}(\{c\})$ הוא בן־מנייה.
אבל זה בידיוק אומר ש־f היא מדידה אם ורק אם יש $c \in \mathbb{R}$ ו־$N \subset \mathbb{R}$ כך ש־N בת־מנייה ו־$f(x) = c$ לכל $x \in \mathbb{R} \setminus N$.
אז כל B מקיימת ש־$f^{-1}(B) \subset N$ ולכן בת־מנייה או $f^{-1}(B) \subset \mathbb{R} \setminus N$ כלומר לא בת־מנייה (אם הסרנו קבוצה בת־מנייה מקבוצה לא בת־מנייה, היא כמובן לא בת־מנייה), כלומר, $f^{-1} \in \mathcal{A}$.
עם μ מהסעיף הקודם מתקיים $\mu(N) = 0, \mu(\mathbb{R} \setminus N) = 1$, ואם נחלק את האינטגרל לחלוקה בהתאם

$$\int_{\mathbb{R}} f d\mu = \int_{\mathbb{R}\setminus N} f d\mu + \int_{N} f d\mu = c \cdot \mu(\mathbb{R} \setminus N) 0 = c \Longrightarrow \int_{\mathbb{R}} f d\mu = c$$

□