פתרון מטלה 06 — תורת הקבוצות, 80200

16 במאי 2025

שאלה 1

נניח ש־A_n קבוצות סופיות לכל $n \in \mathbb{N}$ ונסמן $|A_n| = \mathfrak{a}_n = |[k_n]|$, כאשר $k_n \in \mathbb{N}$.

סעיף א'

נוכיח שמתקיים $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{a}_n \le \aleph_0$.

הוכחה: ראשית ניזכר בטענה 74 מהסיכום – פעולת הסכום האינסופי של עוצמות מוגדרת היטב וזאת מכיוון שהנחנו את אקסיומת הבחירה.

היות ולכן $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $|A_n| = \mathfrak{a}_n = |[k_n]|$, נובע שקיימת מהגדרת שיוויון עוצמות $f_n : [k_n] \to A_n$ חד־חד ערכית ועל, ונבחר לכל $n \in \mathbb{N}$ פונקציה חד־חד ערכית ועל f_n כזאת.

לכל $n \in \mathbb{N}$ אנחנו יודעים שמתקיים $|A_n| = \mathfrak{a_n} = |[k_n]| \in \mathbb{N}$ ולכן

$$S = \{(n, i) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid i < k_n)\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

עכשיו, ראינו ש־$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ מנייה (מטלה 1) ולכן $|S| \le \aleph_0$ שכן ראינו שכל תת־קבוצה של קבוצה בת־מנייה היא לכל היותר בת־מנייה (גם מטלה 1).

נגדיר $F : S \to \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ על־ידי $F(n, i) = f_n(i)$.

מהיות כל f_n חד־חד ערכית ועל, נובע כי F היא פונקציה על.

מכיוון שאנחנו מניחים את אקסיומת הבחירה ומצאנו פונקציה על $F : S \to \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ נובע כי $\left|\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right| \le |S|$ אבל $|S| \le \aleph_0$ כתת־קבוצה של קבוצה בת־מנייה, ולכן $\left|\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right| \le |S| \le \aleph_0$.

בהרצאה ראינו ש־$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{a}_n = \left|\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right|$ ולכן $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{a}_n \le \aleph_0$. □

סעיף ב'

נוכיח שמתקיים $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{a}_n = \aleph_0$ אם ורק אם הקבוצה $\{n \in \mathbb{N} \mid k_n \ne 0\}$ אינסופית.

הוכחה: קודם כל, הערה: מלמה 66 נובע ש־$\{n \in \mathbb{N} \mid k_n \ge 1\} \iff \{n \in \mathbb{N} \mid k_n \ne 0\}$.

$\Leftarrow$ בכיוון הראשון נניח שמתקיים $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{a}_n = \aleph_0$ ולכן מהסעיף הקודם נובע ש־$\left|\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right| = \aleph_0$.

נניח בשלילה ש־$\{n \in \mathbb{N} \mid k_n \ne 0\}$ היא סופית, ולכן מהגדרת הסכום $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{a}_n = \left|\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right|$ הוא לא סכום אינסופי אלא סכום סופי (שכן לפי למה שראינו, $\mathfrak{a} + 0 = \mathfrak{a}$ לכל עוצמה $\mathfrak{a}$ ולכן הסרה של סכומי 0 לא משנה את ערך הסכימה).

היות וכל $\mathfrak{a}_n = |[k_n]|$ לכל $n \in \mathbb{N}$, ומכך שסכום סופי של ערכים סופיים הוא סופי (ההוכחה היא באינדוקציה: עבור הבסיס, סכום של שני מספרים הוא סופי. נניח שהטענה נכונה עבור סכום של $n - 1$ איברים ונראה עבור n: נשים לב שברגע שנכניס סוגריים לסכום נקבל את סכום הנחת האינדוקציה (סופי) וסכום של עוד מספר סופי, ומבסיס האינדוקציה זה סופי. לכן סכום סופי של ערכים סופיים הוא סופי).

אבל אז $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{a}_n < \aleph_0$ והנחנו ש־$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{a}_n = \aleph_0$ וזאת סתירה, ולכן הקבוצה $\{n \in \mathbb{N} \mid k_n \ne 0\}$ היא אינסופית.

$\Longrightarrow$ בכיוון השני, נניח שהקבוצה $\{n \in \mathbb{N} \mid k_n \ne 0\}$ וזו תת־קבוצה של המספרים הטבעיים ולכן לפי למה 27 שראינו של תנאים שקולים לתת־קבוצה אינסופית של הטבעיים, נובע כי $\{n \in \mathbb{N} \mid k_n \ne 0\}$ היא קבוצה בת־מנייה.

מהגדרת S בסעיף הקודם, נובע שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$n \in \{n \in \mathbb{N} \mid k_n \ne 0\} \iff \langle n, 0\rangle \in S$$

ולכן יש ל־S תת־קבוצה אינסופית (נסתכל על השיכון $f(n) = \langle n, 0\rangle \in S$ ו־$\mathrm{Im}(f) \subseteq S$ ולכן f משרה את אי־שיוויון העוצמות $|S| \le \aleph_0$).

אבל בסעיף א' ראינו ש־$|S| \le \aleph_0$ ולכן ממשפט קנטור־שרדר־ברנשטיין נובע ש־$|S| = \aleph_0$, ולכן מסעיף א' נקבל ש־$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{a}_n = \aleph_0$.

□

שאלה 2

סעיף א'

נסמן $P = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,r) \mid r \in \mathbb{R}\}$ קבוצת הנקודות פרט לציר ה־Z במרחב התלת מימדי.

נוכיח $|P| = 2^{\aleph_0}$.

הוכחה: ראשית ניזכר שבמטלה 4 ראינו שמתקיים $|\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$ ומכך ש־$|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$ קיבלנו ש־$|\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = |\mathbb{R}|$.
בפרט, זה נכון לכל מכפלה סופית (באינדוקציה), נראה עבור המקרה שלנו:

$$\left|\mathbb{R}^3\right| = \left|\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2\right| = |\mathbb{R}| \cdot \left|\mathbb{R}^2\right| = 2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 + \aleph_0} = 2^{\aleph_0}$$

(זה כמובן נכון גם אם $\left|\mathbb{R}^3\right| = \left|\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}\right|$ באותו אופן), ולכן $\left|\mathbb{R}^3\right| = |\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$.

כעת, נגדיר את $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ על־ידי $f(r) := \langle r, 1, 1 \rangle$, זו כמובן פונקציה מוגדרת היטב והיא בפרט שיכון: אם $r_1 \neq r_2$ נקבל שמתקיים

$$f(r_1) = \langle r_1, 1, 1 \rangle \neq \langle r_2, 1, 1 \rangle = f(r_2)$$

ולכן f שיכון.

כמו־כן, נשים לב שלכל $r \in \mathbb{R}$ מתקיים $f(r) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,r) \mid r \in \mathbb{R}\}$ מבנייה ולכן $\operatorname{Im}(f) \subseteq \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,r) \mid r \in \mathbb{R}\}$.

ניזכר שהכלה בין תתי־קבוצות גורר אי־שוויון בין העוצמות, ולכן מתקיים

$$|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0} \leq |\operatorname{Im}(f)| \leq \left|\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,r) \mid r \in \mathbb{R}\}\right| \leq \left|\mathbb{R}^3\right| = 2^{\aleph_0}$$

ממשפט קנטור־שרדר־ברנשטיין נקבל ש־$\left|\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,r) \mid r \in \mathbb{R}\}\right| = |P| = 2^{\aleph_0}$. □

סעיף ב'

תהיי $\mathcal{L}$ קבוצת הישרים במישור. נסיק מהסעיף הקודם ש־$\mathcal{L}$ היא מעוצמת הרצף.

הוכחה: נגדיר $f : \mathbb{R} \to \mathcal{L}$ על־ידי

$$f(x) = \{(x,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$$

נשים לב ש־f היא חד־חד ערכית: אם $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ ונניח ש־$f(r_1) = f(r_2)$, אז מתקיים

$$f(r_1) = \{(r_1, y) \mid y \in \mathbb{R}\} = \{(r_2, y) \mid y \in \mathbb{R}\} \iff r_1 = r_2$$

משמע f חד־חד ערכית, ולכן $2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}| \leq |\mathcal{L}|$.

עבור הכיוון השני, נשתמש בהנחה שאנחנו יכולים להניח בחירה ולהשתמש בטענה 76: מספיק שנראה שיש פונקציה על $f : P \to \mathcal{L}$:

נגדיר $f : P \to \mathcal{L}$ על־ידי

$$f((a,b,c)) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = c\right\}$$

f מוגדרת היטב שכן $ax + by = c$ זה ישר, ונראה שהיא על.

יהי $\ell \in \mathcal{L}$ ולכן קיימים $a, b, c \in \mathbb{R}$ כך ש־$a \neq 0, b \neq 0$ המקיימים $\ell = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = c\right\}$.

מההנחה, $(a,b,c) \in P = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,r) \mid r \in \mathbb{R}\}$ ולכן $\ell = f(a,b,c)$ ולכן קיים $x \in P$ כך ש־$f(x) = \ell$.

מצאנו פונקציה על ולכן גם מתקיים $|\mathcal{L}| \leq |P| = 2^{\aleph_0}$.

ממשפט קנטור־שרדר־ברנשטיין נקבל ש־$|\mathcal{L}| = 2^{\aleph_0}$. □

סעיף ג'

נסיים את ההוכחה שהקבוצה X של ישרים במישור המקיימת $\bigcup X = \mathbb{R}^2$ היא בעוצמת הרצף.

הוכחה: תחילה, מסעיף ב' מכך ש־$X \subseteq \mathcal{L}$ נקבל מכך שהכלה של קבוצות מובילה לאי־שוויון בין עוצמתם שמתקיים $|X| \leq |\mathcal{L}| = 2^{\aleph_0}$.

עבור החלק השני, נעבוד כמו בתרגול: נניח בשלילה ש־$|X| < 2^{\aleph_0}$ ומההגדרה של אי־שיוויון חזק בין עוצמות נקבל שקיים $\ell \in \mathcal{L} \setminus X$. נגדיר

$$X_0 = \{\ell' \in X \mid \ell' \cap l \neq \emptyset\}$$

ושוב מהיחס בין הכלת קבוצות לאי־שיוויון עוצמות נקבל שגם $|X_0| \leq |X| < 2^{\aleph_0} = \mathcal{L}$.

מההנחה, $\ell' \neq \ell$ כי X $\ell \in \mathcal{L} \setminus X$, ומהגדרת הישרים אנחנו יודעים להגיד ש־$|\ell \cap \ell'| = 1$ כי הישרים יכולים להיחתך לכל היותר רק בנקודה אחת (אחרת, ישרים שנחתכים ביותר מנקודה אחת הם מזדהים אחד עם השני שכן ישר מוגדר על־פי שתי נקודות).

נגדיר $f : X_0 \to \ell$ כך שלכל $\ell' \in X_0$ מתקיים $f(\ell')$, נקודת החיתוך היחידה בין הישרים הללו ומהנימוק לעיל הפונקציה f מוגדרת היטב.

מכיוון שהנחנו בחירה, אם נראה ש־f על, בשימוש עם טענה 76 נוכל לסיים (עם קנטור־שרדר־ברנשטיין, כמובן):
יהי $x \in \ell$. מהנתון, $\mathbb{R}^2 = \bigcup X$ ולכן $x \in \mathbb{R}^2$ ולכן קיים $\ell' \in X$ כך ש־$x \in \ell'$, וכן גם בהכרח מתקיים $x \in \ell \cap \ell'$ ומהיחידות של נקודות החיתוך שנימקנו לעיל נקבל ש־$x = f(\ell')$, דהיינו f על.
מטענה 76 נקבל שמתקיים $|\ell| \le |X_0|$.
אבל אנחנו יודעים שכל ישר $\ell \in \mathbb{R}^2$ יש לו פרמטריזציה על־ידי שתי נקודות והוא נקבל לפיהן ביחידות (עם שיפוע), זאת אומרת

$$\ell = \{(x_0, y_0) + t(a, b) \mid t, x_0, y_0, a, b \in \mathbb{R} \wedge (a \ne 0 \vee b \ne 0))\}$$

בפרט, זה אומר שפונקציה שמגדירה שיפוע לישר היא חד־חד ערכית: נגדיר $g : \mathbb{R} \to \ell$ על־ידי $g(t) = (x_0, y_0) + t(a, b)$ ויהיו $t, s \in \mathbb{R}$ כך שמתקיים $g(t) = g(s)$ ולכן

$$g(t) = f(s) \iff (x_0, y_0) + t(a, b) = (x_0, y_0) + s(a, b) \iff t(a, b) = s(a, b) \underset{(a,b)\ne(0,0)}{\Rightarrow} t = s$$

מכיוון ש־g חד־חד ערכית נובע כי $2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}| \le |\ell|$.
קיבלנו את שרשרת אי־שיוויונות

$$2^{\aleph_0} = |\ell| \le (X_0) \le |X| < 2^{\aleph_0} = |\mathcal{L}|$$

וזאת כמובן סתירה, ולכן ההנחה ש־$|X| < 2^{\aleph_0}$ שגויה ולכן $|X| \le 2^{\aleph_0}$.
ממשפט קנטור־שרדר־ברנשטיין נקבל ש־$|X| = 2^{\aleph_0}$. □