פתרון מטלה 03 — חשבון אינפיניטסימלי 3, 80415

13 באפריל 2025

שאלה 1

סעיף א'

תהיי $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ הנתונה על־ידי

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^4+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

נוכיח כי לכל $v\in\mathbb{R}^2$ הפונקציה $f_v:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת על־ידי $f_v(t)=f(tv)$ היא פונקציה רציפה אבל f אינה רציפה.

הוכחה: נתחיל מלהראות ש־f לא רציפה.

f רציפה בכל $(x,y)\neq(0,0)$ מאריתמטיקה של פונקציות רציפות ונראה שהיא לא רציפה בראשית:

נניח בשלילה שהיא רציפה בראשית, ולכן לפי קריטריון הנייה לרציפות מספיק שנמצא סדרה (x_n,y_n) כך ש־$0 \xrightarrow[n\to\infty]{} (x_n,y_n)$ אבל $0 \neq\xrightarrow[n\to\infty]{} (x_n,y_n)$ ובבחירה של הסדרות $(x_n)=\frac{1}{n},(y_n)=\frac{1}{n^2}$ נקבל:

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n,y_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2y_n}{x_n^4+y_n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^4}}==\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{2}{n^4}}=\frac{1}{2}\neq0=f(0,0)$$

ולכן f לא רציפה בראשית.

נראה כעת כי לכל $v\in\mathbb{R}^2$ הפונקציה f_v רציפה: אם $v=(0,0)\in\mathbb{R}^2$ אז לכל $t\in\mathbb{R}$ מתקיים

$$f_v(t)=f(tv)=f(0,0)=0$$

וזו פונקציה רציפה לכל $t\in\mathbb{R}$.

אם $v=(x,y)\neq(0,0)\in\mathbb{R}^2$ אז לכל $t\in\mathbb{R}$ מתקיים

$$f_v(t)=f(tv)=f(xt,yt)=\frac{(xt)^2(yt)}{(xt)^4+(yt)^2}=\frac{x^2yt^3}{x^4t^4+y^2t^2}=\frac{x^2yt^3}{t^2(x^4t^2+y^2)}=\frac{x^2yt}{x^4t^2+y^2}$$

וזוהי פונקציה רציפה לכל $t\in\mathbb{R}$ מאריתמטיקה של פונקציות רציפות (המכנה לא מתאפס לאף $t\in\mathbb{R}$). $\square$

סעיף ב'

נראה כי הפונקציה $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ הנתונה על־ידי

$$g(x)=\begin{cases}\frac{x\sin(y)}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

היא רציפה.

פתרון: ראשית, $g(x)$ רציפה בכל $(x,y)\neq(0,0)\in\mathbb{R}^2$ מאריתמטיקה של פונקציות רציפות ולכן נשאר להראות שהיא רציפה גם בראשית.

נעבוד כמו בתרגול ונעבור לקורדינאטות קוטביות, נגדיר $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$ כאשר $r\geq0,\theta\in[0,2\pi]$. ואכן מתקיים:

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x\sin(y)}{\sqrt{x^2+y^2}}&=\lim_{r\to0}\frac{r\cos\theta\cdot\sin(r\sin\theta)}{\sqrt{r^2\cos\theta^2+r^2\sin\theta^2}}\\&=\lim_{r\to0}\frac{r\cos\theta\cdot\sin(r\sin\theta)}{\sqrt{r^2(\cos\theta^2+\sin\theta^2)}}\\&\underset{(1)}{=}\lim_{r\to0}\frac{r\cos\theta\cdot\sin(r\sin\theta)}{\sqrt{r^2}}\\&\underset{(2)}{=}\lim_{r\to0}\frac{r\cos\theta\cdot\sin(r\sin\theta)}{r}\\&=\lim_{r\to0}\cos\theta\cdot\sin(r\sin\theta)\underset{(3)}{=}0\end{aligned}$$

כאשר (1) נובע מהזהות הטריגונומטרית $\cos\theta^2+\sin\theta^2=1$, (2) נובע מהיות $r\geq0$ ו־(3) נובע מחסומה כפול אפסה ולכן g רציפה ב־$\mathbb{R}^2$. $\square$

שאלה 2

נוכיח כי כל מרחב מטרי (X,d) הומיאומורפי למרחב מטרי חסום.

הוכחה: ניזכר כי מרחב מטרי יקרא חסום אם קיימים $x \in X$ ו־$r > 0$ כך שמתקיים $X \subseteq B_r(x)$.
נגדיר מטריקה d' על X על־ידי $d'(x,y) := \min\{1, d(x,y,)\}$ ונשים לב שמתקיים $d'(x,y) \leq 1$ לכל $x, y \in X$.
נראה ש־d' אכן מטריקה:

1. אי־שליליות נובע מהיות d מטריקה ואכן $d'(x,y) = 0 \Longleftrightarrow d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$
2. סימטריה – נובע מהיות d מטריקה
3. אי שיוויון המשולש – יהיו $x, y, z \in X$, מתקיים מהיות d מטריקה

$$d'(x,z) = \min\{1, d(x,z)\} \leq \min\{1, d(x,y) + d(y,z)\} \leq \min\{1, d(x,y)\} + \min\{1, d(y,z)\} = d'(x,y) + d'(y,z)$$

כעת, בתרגול ראינו שקבוצות פתוחות נשמרות תחת הומיאומורפיזם (זאת אומרת $U \subseteq (X,d)$ פתוחה אם ורק אם $U \subseteq (X,d')$ פתוחה).
נגדיר את הכדורים שלנו:

$$B_d(x,r) = \{y \in X \mid d(x,y) < r\}$$

$$B_{d'}(x,r) = \{y \in X \mid d'(x,y) < r\}$$

תהיי $U \subseteq X$ פתוחה תחת המטריקה d. ניזכר כי U פתוחה ב־d אם ורק אם לכל $x \in U$ קיים $\varepsilon_x > 0$ כך שמתקיים $B_d(x,\varepsilon_x) \subseteq U$.
אם $\varepsilon_x < 1$ אזי מהגדרת d' נקבל שמתקיים $B_{d'}(x,\varepsilon_x) \subseteq U$ ולכן U פתוחה ב־d'.
בכיוון השני, תהיי $V \subseteq X$ פתוחה תחת המטריקה d' ולכן עבור $\varepsilon_y < 1$ מתקיים $B_{d'}(y,\varepsilon_y) \subseteq V$ ואז מהגדרת d' נובע כי $B_d(y,\varepsilon_y) \subseteq V$.
הראינו כי קבוצה פתוחה ב־(X,d) אם ורק אם היא פתוחה ב־(X,d') משמע (X,d) ו־(X,d') הם הומיאומורפים ו־(X,d') חסום, כנדרש.

$\square$

שאלה 3

יהי $(X, \|\cdot\|)$ מרחב נורמי ממימד $n \in \mathbb{N}$ מעל $\mathbb{R}$.

סעיף א'

נוכיח כי X איזומטרי ל־$\mathbb{R}^n$ עם נורמה כלשהי ונסיק כי $A \subseteq X$ היא קומפקטית סדרתית אם ורק אם היא סגורה וחסומה.
TODOOOOOOOOOOOOOOOOOO תתקני אינדקסים כבר

הוכחה: נראה כי X איזומטרי ל־$\mathbb{R}^n$ עם נורמה כלשהי ובהרצאה ראינו שכל הנורמות על $\mathbb{R}^n$ הן שקולות.
מהיות X מרחב נורמי סוף מימדי נובע כי יש לו בסיס, נסמנו

$$\{x_1, x_2, ..., x_n\} \subseteq X$$

ונגדיר העתקה לינארית $T : \mathbb{R}^n \to X$ על־ידי

$$T(a_1, a_2, ..., a_n) = a_1 x_1 + ... + a_n x_n$$

זו כמובן העתקה לינארית והיא חד־חד ערכית ועל מכיוון שהיא מוגדרת על איברי הבסיס של X.
נראה כי T חד־חד ערכית: נשים לב שמתקיים

$$T(a_1, a_2, ..., a_n) = T(b_1, b_2, ..., b_n) \iff \sum a_i x_i = \sum b_i x_i \iff \sum (a_i - b_i) x_i = 0 \underset{(1)}{\iff} \forall i a_i - b_i = 0 \iff \forall i a_i = b_i$$

כאשר (1) נובע מהיות הבסיס בלתי־תלוי לינארית.
נראה כי T על: מהגדרת הבסיס נובע כי כל $x \in X$ הוא מהצורה

$$x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n$$

עבור $a_1, ..., a_n$ יחידים, ולכן נוכל לבחור $a = (a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ ואז $T(a) = x$ וקיבלנו ש־T על.
מהיות כל הנורמות שקולות נוכל להגדיר נגדיר נורמה על $\mathbb{R}^n$

$$\|(a_1, a_2, ..., a_n)\|' \coloneqq \|T(a_1, a_2, ..., a_n)\|_X = \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\|_X$$

נשים לב שזו אכן נורמה מהיות $\|\cdot\|_X$ נורמה (שלוש הדרישות מתקיימות מכך ישירות מהגדרה).
כעת, נגדיר $f : X \to \mathbb{R}^n$ על־ידי $f = T^{-1}$ שכמובן חד־חד ערכית ועל מהיות T איזומורפיזם, ולכן נשאר רק להראות שהיא משמרת מרחקים.
ואכן, לכל $x, y \in X$ מתקיים

$$\begin{aligned}
\|x - y\|_X &= \|f(x) - f(y)\|' \\
&= \|(a_1, a_2, ..., a_n) - (b_1, b_2, ..., b_n)\|' \\
&= \|T(a_1 - b_1, a_2 - b_2, ..., a_n - b_n)\|_X \\
&= \left\| \sum_{i=1}^n (a_i - b_i) x_i \right\|_X \\
&= \|x - y\|_X
\end{aligned}$$

וקיבלנו ש־f היא איזומטריה ולכן X איזומטרי ל־$\mathbb{R}^n$ עם נורמה כלשהי.
נסיק כעת כי $A \subseteq X$ היא קומפקטית סדרתית אם ורק אם היא סגורה וחסומה:
$\Leftarrow$ ראינו בהרצאה שמרחב קומפקטי סדרתי הוא סגור וחסום לכל מרחב מטרי, ופרט למרחב נורמי.
$\Longrightarrow$ נניח כי A סגורה וחסומה ונרצה להראות שהיא קומפקטית. מההוכחה לעיל נובע שנוכל להוכיח עבור $n = 2$ (לשאר, ינבע באינדוקציה).
תהיי $(a_n) = (x_n, y_n)_{n=1}^\infty \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^2$. היות ו־$(x_n, y_n)$ חסומה, נובע שקיים $M > 0$ עבורו לכל n מתקיים

$$\|(x_n, y_n)\|_\infty \leq M$$

משמע $|x_n| \leq M$ וגם $|y_n| \leq M$.
היות ו־$(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ סדרה וחסומה ב־$\mathbb{R}$, ממשפט בולציאנו וירשטראס נובע שיש לה תת־סדרה מתכנסת $\left(x_{n_k}\right)_{k=1}^\infty$ כך שמתקיים

$$x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x_0$$

היות ו־$\left(y_{n_k}\right)$ היא תת־סדרה של $\left(y_n\right)$ שהיא סדרה חסומה ולכן $\left(y_{n_k}\right)$ חסומה ממשפט הירושה, וממשפט בולציאנו וירשטראס נובע שיש לה תת־סדרה מתכנסת $\left(y_{n_{k_l}}\right)_{l=1}^{\infty}$ כך שמתקיים

$$y_{n_{k_l}} \xrightarrow[l\to\infty]{} y_0$$

וממשפט הירושה נובע גם כי

$$x_{n_{k_l}} \xrightarrow[l\to\infty]{} x_0$$

וראינו שהתכנסות ב־$\mathbb{R}^2$ שקולה להתכנסות קורדינאטה־קורדינאטה, ולכן

$$\left(x_{n_{k_l}}, y_{n_{k_l}}\right) \xrightarrow[l\to\infty]{} (x_0, y_0)$$

אבל מההנחה A סגורה וחסומה ולכן $(x_0, y_0) \in A$. מצאנו תת־סדרה שמתכנסת לאיבר ב־A ולכן נובע כי A קומפקטית סדרתית. $\square$

סעיף ב'

נוכיח כי לכל מרחב נורמי Y (לאו דווקא סוף מימדי) מתקיים $B(X,Y) = \mathrm{Hom}(X,Y)$.
במילים אחרות, נראה שלכל העתקה לינארית $T : X \to Y$ מתקיים $\|T\|_{\mathsf{op}} < \infty$.

הוכחה: מספיק שנראה שכל העתקה לינארית במרחב נורמי סופי היא רציפה.
תהיי $T : X \to Y$ העתקה לינארית ותהיי $a \in X$.
מהיות X סוף מימדי נסתכל על הבסיס שלו מהסעיף הקודם, אז מתקיים

$$T(a) = T(a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(a_i)$$

מאי־שיוויון המשולש מתקיים

$$\|T(a)\| = \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i f(a_i)\right\| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \|T(a_i)\|$$

נבחר

$$M = \sup_i \{\|T(a_i)\|\}$$

שקיים מהיות הקבוצה סופית.
היות וכל הנורמות שקולות, נובע שקיים $0 < C \in \mathbb{R}$ כך שמתקיים $\sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq C\|x\|$, משמע

$$\|T(a)\| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) M \leq CM\|a\|$$

ולכן T היא אופרטור לינארי חסום, נראה שהיא ליפשיצית ונקבל רציפות.
נסמן $M = \|T\|_{\mathsf{op}}$ ואז לכל $a, b \in X$ מתקיים

$$\|Ta - Tb\|_Y = \|T(a-b)\|_Y \leq |a-b|_X \cdot \|T\|_{\mathsf{op}} = C|a-b|_Y$$

פונקציה ליפשיצית היא רציפה, ופונקציה רציפה היא חסומה ולכן $B(X,Y) = \mathrm{Hom}(X,Y)$.

$\square$

שאלה 4

יהי (X,d) מרחב מטרי ו־$\hat{X}$ $i : X \to$ השיכון של X בהשלמה.

סעיף א'

נוכיח כי לכל מרחב מטרי שלם (Y,ρ) ושיכון איזומטרי צפוף $j : X \to Y$ (כלומר $j : X \to j(X)$ איזומטריה ו־$j(X)$ צפופה ב־Y), ניתן להרחיב את j באופן יחיד לאיזומטריה $\hat{j} : \hat{X} \to Y$ המקיימת $j = \hat{j} \circ i$.

הוכחה: TODOOOOOOOOOOOOOOOOOOO $\square$

סעיף ב'

נוכיח כי לכל $A \subseteq X$ מתקיים $\overline{i(A)} \subseteq \hat{X}$ איזומטרי להשלמה של A.

הוכחה: TODOOOOOOOOOOOOOOOOOOO $\square$

שאלה 5

יהי $p \in \mathbb{N}$ מספר ראשוני.

סעיף א'

נוכיח כי ההשלמה $\left(\mathbb{Q}_p, \hat{d}_p\right)$ של $\left(\mathbb{Q}, d_p\right)$ היא שדה והמטריקה $\hat{d}_p$ מקיימת את־שיוויון המשולש האולטרה־מטרי.

הוכחה: TODOOOOOOOOOOOOOOOOOO $\square$

סעיף ב'

נוכיח כי לכל סדרה $(a_n) \subseteq \mathbb{Q}_p$, הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ מתכנס אם ורק אם $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

הוכחה:

$\Leftarrow$ נניח שהטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ מתכנס ונראה כי $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

מהיות הטור מתכנס, נובע שסדרת הסכומים החלקיים שלנו מתכנס. ולכן $S_k = \sum_{n=0}^{k} a_n$ זו סדרת קושי מתכנסת, ולכן:

$$\left|a_{k+1}\right|_p = \left|S_{k+1} - S_k\right|_p \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

ולכן $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

$\Longrightarrow$ נניח כי $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ונראה שהטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ מתכנס.

ראינו ש־$\mathbb{Q}_p$ עם המטריקה ה־p־אדית הוא מרחב אולטרה־מטרי ולכן מקיים את אי־שיוויון המשולש החזק.

יהי $\varepsilon > 0$ ומהיות (a_n) סדרה מתכנסת נובע שקיים $N \in \mathbb{N}$ שלכל $N < n \in \mathbb{N}$ מתקיים $|a_n|_p < \varepsilon$, ולכן עבור $m > n$ מתקיים

$$|S_m - S_n|_p = \left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right|_p \underset{(1)}{\leq} \max_{n+1\leq k\leq m} |a_k|_p < \varepsilon$$

כאשר (1) נובע מאי־שיוויון המשולש החזק.

מצאנו כי (S_k) זו סדרת קושי מתכנסת ולכן הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ מתכנס ב־$\mathbb{Q}_p$. $\square$

שאלה 6

יהי (X,d) מרחב מטרי קומפקטי סדרתית ו־$f:X\to X$ פונקציה כמעט מכווצת, כלומר לכל $x,y\in X$ מתקיים $d(f(x),f(y))<d(x,y)$ נוכיח כי קיימת ל־f נקודת שבת יחידה.

הוכחה: נגדיר $g:X\to\mathbb{R}$ על־ידי $g(x)=d(x,f(x))$.
g רציפה כהרכבת פונקציות רציפות – כן הרכבת רציפות היא רציפה ו־f כמעט מכווצת ולכן ליפשיצית והמטריקה רציפה.
X מרחב קומפקטי סדרתית ו־g רציפה ולכן g מקבלת עליו מינימום ולכן קיים $x_0\in X$ כך ש־$g(x_0)=m\in\mathbb{R}$ הוא מינימום של g.
נראה כי $g(x_0)=m=0$: נניח בשלילה ש־$m\neq 0$ ולכן מתקיים:

$$g(f(x_0))=d(f(x_0),f(f(x_0)))\underset{(1)}{<}d(x_0,f(x_0))=g(x_0)=m$$

כאשר (1) נובע מהיות f מכווצת, אבל זו סתירה שכן הנחנו ש־m הוא המינימום של $g(x)$ ולכן בהכרח מתקיים $g(x)=d(x_0,f(x_0))=0$ ולכן $x_0=f(x_0)$ ומצאנו נקודת שבת.
נראה כי היא יחידה: נניח שקיימות $x_1,x_2\in X$ כך ש־$x_1\neq x_2$ וגם $f(x_1)=x_1, f(x_2)=x_2$, ולכן:

$$d(x_1,x_2)=d(f(x_1),f(x_2))\underset{(1)}{<}d(x_1,x_2)$$

כאשר (1) נובע מהיות f מכווצת וזו כמובן סתירה. $\square$