פתרון מטלה 10 — תורת המידה, 80517

9 בינואר 2026

שאלה 1

נבנה קבוצה מדידה $E \subseteq \mathbb{R}$ כך שאם $\lambda|_E\ (A) = \lambda(A \cap E)$ אז מתקיים

$$\overline{D}(\lambda|_E, \lambda, 0) = 1, \qquad \underline{D}(\lambda|_E, \lambda, 0) = 0$$

הוכחה: נגדיר

$$a_n = \frac{1}{(2n)!} \qquad b_n = \frac{1}{(2n+1)!}$$

מתקיים

$$0 < \dots < a_{n+1} < b_n < a_n < b_{n+1} < \dots > 1$$

ונגדיר

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} ([-a_n, b_n] \cup [b_n, a_n] = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\left[-\frac{1}{(2n)!}, -\frac{1}{(2n+1)!} \right] \cup \left[\frac{1}{(2n+1)!}, \frac{1}{(2n)!} \right] \right)$$

עבור $r_n = a_n$ נקבל

$$\lambda(E \cap (-a_n, a_n)) \geq \lambda([-a_n, -b_n]) + \lambda([b_n, a_n]) = 2(a_n - b_n)$$

שכן $E \cap (-a_n, a_n)$ מכיל את שני הקטעים שלנו ועוד זנב כלשהו של שארית בסמוך לראשית, כלומר

$$\frac{\lambda(E \cap (-a_n, a_n))}{\lambda((-a_n, a_n))} \geq \frac{2(a_n - b_n)}{2a_n} = 1 - \frac{b_n}{a_n} = 1 - \frac{\frac{1}{(2n+1)!}}{\frac{1}{(2n)!}} = 1 - \frac{(2n)!}{(2n+1)!} = 1 - \frac{1}{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

אז אכן $\overline{D}(\lambda|_E, \lambda, 0) = 1$.

עבור המקרה השני, נבחר $r_n = b_n$ ובמקרה זה האינטרוולים $[-a_n, -b_n], [b_n, a_n]$ הם מחוץ לחיתוך במקרה זה כי $E \cap (-b_n, b_n)$ מכיל רק זנב של אינדקסים, כלומר

$$\lambda(E \cap (-b_n, b_n)) = 2 \sum_{k=n+1}^{\infty} (a_k - b_k) < 2 \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k < 2 \cdot 2a_{n+1}$$

כאשר האי־שוויון האחרון נובע מקצב הגדילה של עצרת.
אז מתקיים

$$\frac{\lambda(E \cap (-b_n, b_n))}{\lambda(-b_n, b_n)} < \frac{2(2a_{n+1})}{2b_n} = 2\frac{a_{n+1}}{b_n} = 2\frac{\frac{1}{(2n+2)!}}{\frac{1}{(2n+1)!}} = 2\frac{(2n+1)!}{(2n+2)!} = 2\frac{\cancel{(2n+1)!}}{(2n+2)\cancel{(2n+1)!}} = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

אז אכן $\underline{D}(\lambda|_E, \lambda, 0) = 0$.

$\square$

שאלה 2

תהיי μ מידת רדון על $\mathbb{R}^d$ ונסמן ב־λ את מידת לבג על אותו מרחב.
בשאלה זו נוכיח שהפונקציה $\overline{D}(\mu,\lambda,\cdot):\mathbb{R}^d\to[-\infty,\infty]$ המוגדרת על־ידי

$$\overline{D}(\mu,\lambda,x)=\limsup_{r\to 0}\frac{\mu(B_r(x))}{\lambda(B_r(x))}$$

היא פונקציה מדידה בורל כאשר $B_r(x)$ הוא הכדור הסגור ברדיוס r מסביב ל־x.

סעיף א'

נעזר ברגולריות החיצונית של μ כדי להראות שהפונקציה $x\mapsto\mu(B_r(x))$ היא רציפה מלמעלה, כלומר שמתקיים

$$x_i\to x\Longrightarrow\limsup_{i\to\infty}\mu(B_r(x_i))\le\mu(B_r(x))$$

הוכחה: מהיות μ מידת רדון, מהרוגלריות החיצונית

$$\mu(B_r(x)=\inf\{\mu(U)\mid U\text{ is open},B_r(x)\subset U\})$$

יהי $\varepsilon>0$ אז קיימת U_ε פתוחה כך שמתקיימים

$$(1)\ B_r(x)\subset U_\varepsilon\qquad(2)\ \mu(U_\varepsilon)\le\mu(B_r(x))+\varepsilon$$

כמו־כן, קיימת $\delta>0$ כך שמתקיים

$$B_{r+\delta}(x)\subset U_\varepsilon$$

מכך ש־$x_i\to x$, קיים N כך שלכל $i>N$ מתקיים

$$|x_i-x|<\delta$$

וכן

$$B_r(x_i)\subset B_{r+\delta}(x)\subset U_\varepsilon$$

וכן ממונוטוניות המידה

$$\mu(B_r(x_i))\le\mu(U_\varepsilon)\le\mu(B_r(x))+\varepsilon$$

ובפרט אם ניקח $\limsup$ נקבל

$$\limsup_{i\to\infty}\mu(B_r(x_i))\le\mu(U_\varepsilon)\le\mu(B_r(x))+\varepsilon$$

וזה נכון לכל ε אז

$$\limsup_{i\to\infty}\mu(B_r(x_i))\le\mu(B_r(x))$$

$\square$

סעיף ב'

נראה כי ניתן להגדיר את $\overline{D}$ בעזרת $\limsup$ על רציונליים ששואפים לאפס.
כלומר שנראה שמתקיים

$$\overline{D}(\mu,\lambda,x)=\limsup_{r\to 0,r\in\mathbb{Q}}\frac{\mu(B_r(x))}{\lambda(B_r(x))}$$

הוכחה: ראשית מכך שמתקיים

$$\{r\in\mathbb{Q}\mid r>0\}\subset\{r\in\mathbb{R}\mid r>0\}$$

נקבל ישירות

$$\limsup_{r\to 0, r\in\mathbb{Q}} \frac{\mu(B_r(x))}{\lambda(B_r(x))} \leq \limsup_{r\to 0} \frac{\mu(B_r(x))}{\lambda(B_r(x))}$$

נוכיח את אי־השיוויון בכיוון השני: תהיי $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת ממשיים המתכנסת ל־0.
לכל n נבחר את $q_n \in \mathbb{Q}$ להיות

$$r_n < q_n < r_n + \frac{1}{n}$$

מצפיפות הרציונליים בממשיים ומכלל הכריך נקבל $q_n \to 0$ וכן $B_{r_n}(x) \subset B_{q_n}(x)$.
ממונוטוניות המידה מתקיים

$$\mu\Big(B_{r_n}(x)\Big) \leq \mu\Big(B_{q_n}(x)\Big)$$

בגלל ש־λ מידת לבג

$$\lambda(B_r(x)) = \lambda(B_1(0))r^d$$

ולכן

$$\frac{\mu\Big(B_{r_n}(x)\Big)}{\lambda\Big(B_{r_n}(x)\Big)} \leq \frac{\mu\Big(B_{q_n}(x)\Big)}{\lambda(B_r(x))r_n^d} = \frac{\mu\Big(B_{q_n}(x)\Big)}{\lambda(B_1(0))q_n^d}\left(\frac{q_n}{r_n}\right)^d$$

אבל $\frac{q_n}{r_n} \to 1$ ולכן

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\mu\Big(B_{r_n}(x)\Big)}{\lambda\Big(B_{r_n}(x)\Big)} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{\mu\Big(B_{q_n}(x)\Big)}{\lambda\Big(B_{q_n}(x)\Big)}$$

הסדרה $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ הייתה שרירותית ולכן קיבלנו את אי־השיוויון בצד השני.
מטריכוטומיה נקבל

$$\overline{D}(\mu, \lambda, x) = \limsup_{r\to 0, r\in\mathbb{Q}} \frac{\mu(B_r(x))}{\lambda(B_r(x))}$$

□

סעיף ג'

נסיק כי $\overline{D}$ היא מדידה בורל.
הוכחה: נקבע $(q_n)_{n=1}^{\infty}$ רציונליים חיוביים השואפים לאפס, כלומר $\mathbb{Q}_+ \cap (0,1) = \{q_1, q_2, q_3, ...\}$ ונגדיר

$$f_n(x) := \frac{\mu\Big(B_{q_n}(x)\Big)}{\lambda\Big(B_{q_n}(x)\Big)}$$

אז

$$\overline{D}(\mu, \lambda, x) = \limsup_{n\to\infty} f_n(x)$$

בסעיף א' ראינו שמתקיים $x \mapsto \mu(B_r(x))$ רציפה מלמעלה ולכן היא גם מדידה בורל, כלומר

$$f_n(x) = \frac{\mu\Big(B_{q_n}(x)\Big)}{\lambda(B_r(x))q_n^d}$$

היא מדידה בורל לכל n.
היות וסופרמה ואינפימה משמרים מדידות בורל ורציפות נובע כי $x \mapsto \limsup_{n\to\infty} f_n(x)$ היא מדידה בורל.
כלומר $x \mapsto \overline{D}(\mu, \lambda, x)$ היא מדידה בורל, כנדרש. □

שאלה 3

נסמן

$$C_r(x) = [x_1 - r, x_1 + r] \times [x_2 - r, x_2 + r] \times \cdots \times [x_d - r, x_d + r] \subset \mathbb{R}^d$$

כלומר $C_r(x)$ היא הקובייה מאורך צלע $2r$ שמרכזה ב־$(x_1, ..., x_d)$.
נוכיח כי

$$\mathcal{F} = \{C_r(x) \mid x \in \mathbb{R}^d, r > 0\}$$

מקיימת את תכונת כיסוי בסיקוביץ' החלשה, כלומר נראה כי קיים N התלוי רק ב־d כך שאם $C_{r_1}(z_1), ..., C_{r_k}(z_k)$ מקיימים

$$(1)\ \ \bigcap_{i=1}^{k} C_{r_i}(z_i) = \emptyset \qquad (2)\ \forall i \neq j, z_j \notin C_{r_i}(z_i)$$

אז $k \leq N$.
הוכחה: יהי $\left(C_{r_i}(z_i)\right)_{i=1}^{k}$ אוסף המקיים את התנאים לעיל ובלי הגבלת הכלליות נניח כי לכל $i \in \{1, ..., k\}$ מתקיים $0 \in C_{r_i}(z_i)$.
מהנתון על האוסף והמרכוז ניתן להסיק

$$(1)\ \|z_i\|_\infty \leq r_i \qquad (2)\ \forall m \in \{1, ..., d\}, \left|(z_i)_m\right| \leq r_i \qquad (3)\ \forall i \neq j, z_j \notin C_{r_i}(z_i) \Longrightarrow \left\|z_j - z_i\right\|_\infty > r_i$$

אז בהתאם לרמז נחלק את $\mathbb{R}^d$ לתוך 2^d רביעים סגורים לפי הסימן של הקורדינאטה, כלומר לכל $\sigma \in \{-1, 1\}^d$ נגדיר

$$Q_\sigma = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \forall m \in \{1, ..., d\},\ \sigma_m x_m \geq 0\}$$

כאשר נקודות עם קורדינאטות אפסיות יכולות להתאים לכל סימן.
אז אם נניח בשלילה ש־$k > 2^d$, לפי עיקרון שובך היונים קיימים $i \neq j$ אינדקסים כך שהמרכז שלהם z_i, z_j נמצאים באותו הרביע ובלי הגבלת הכלליות נניח $r_i \geq r_j$.
מכך ש־z_i, z_j באותו רביע נובע שלכל m, $\left(z_i\right)_m, \left(z_j\right)_m$ כאשר $m \in \{1, ..., d\}$ הם עם אותו הסימן או אפס.
אנחנו יודעים שמתקיים לכל שני איברים עם אותו הסימן

$$|a - b| \leq \max(|a|, |b|)$$

ומ־(1) אנחנו יודעים $\left|\left(z_j\right)_m\right| \leq r_j$,$\left|\left(z_i\right)_m\right| \leq r_i$ ומההנחה $r_i \geq r_j$ ולכן $\left|\left(z_j\right)_m\right| \leq r_i$ ונקבל

$$\left|\left(z_i\right)_m - \left(z_j\right)_m\right| \leq \max\left(\left|z_i\right|_m, \left|z_j\right|_m\right) \leq r_i$$

אז זה נכון לכל $m \in \{1, ..., d\}$ ולכן

$$\left\|z_i - z_j\right\|_\infty \leq r_i$$

אבל זה אומר ש־$z_j \in C_{r_i}(z_i)$ וזאת סתירה. $\square$

שאלה 4

סעיף א'

נראה כי משפט הכיסוי של בסיקוביץ' לא מתקיים עבור קבוצות לא חסומות ב־$\mathbb{R}^d$, כלומר ניתן דוגמה לקבוצה $A \subset \mathbb{R}^d$ עם כיסוי בסיקוביץ' ללא תת־כיסוי מריבוי סופי.

הוכחה: ניזכר כי $\mathcal{F}$ ייקרא כיסוי בסיקוביץ' של קבוצה A אם:

1. לכל $x \in A$ קיים כדור $B_{r_x}(x) \in \mathcal{F}$ שמרכזו הוא x
2. לכל x מתקיים ש־$r_x > 0$
3. $\mathcal{F}$ מכסה את A כלומר $A \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{F}} U$

נגדיר עבור $x_n := (2^{-n}, 0, ..., 0)$ את

$$A := \{0\} \cup \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}^d$$

ובנוסף נגדיר

$$B_0 := B_1(0),\ \ B_n := B_{2^{-(n+2)}}(x_n)$$

אז

$$\mathcal{F} := \{B_0\} \cup \{B_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

ובאופן די ישיר זה כיסוי בסיקוביץ'. כעת, נניח בשלילה שקיים לכיסוי בסיקוביץ' תת־כיסוי סופי שמכסה את A, נסמנו

$$E := \left\{B_{n_1}, ..., B_{n_k}\right\} \subset \mathcal{F}$$

אם $B_0 \in \neg E$ אז $0 \notin \bigcup B_{n_i}$ וזאת סתירה.
אם $B_0 \in E$, אז E מכסה רק כמות סופית של x_n־ים כי

$$|x_n| = 2^{-n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

אז לכל $n > n_k$ מתקיים לכל $m \le n_k$

$$|x_n - x_m| > 2^{-(m+2)}$$

כלומר

$$x_n \notin \bigcup_{m=0}^{n_k} B_m$$

וזאת סתירה. $\square$

סעיף ב'

נניח כי $d = 2$ ונסמן

$$R_{a,b}(x) = [x_1 - a, x_1 + a] \times [x_2 - b, x_2 + b]$$

לכל $N \ge 1$ נבנה "זר" של N מלבנים סביב 0, כלומר נמצא מלבנים

$$R_{a_1,b_1}(z_1), ..., R_{a_N,b_N}(z_N)$$

המקיימים

$$(1)\ \ 0 \in \bigcap_{i=1}^{N} R_{a_i,b_i}(z_i) \qquad (2)\ \ \forall i \neq j,\ \ z_j \notin R_{a_i,b_i}(z_i)$$

כלומר מלבנים ב־$\mathbb{R}^2$ לא מקיימים את תכונת הכיסוי החלשה של בסיקוביץ'.
נסיק כי משפט הכיסוי של בסיקוביץ' לא מתקיים עבור מלבנים ב־$\mathbb{R}^d$ עבור $d \ge 2$.

הוכחה: יהי $N \in \mathbb{N}$ ונגדיר לכל $i \in \{1, ..., N\}$

$$z_i := (2^{-i}, 0) \qquad a_i := 2^{-i} \qquad b_i := 2^{-2N}$$

לכל i מתקיים בכיוון האופקי

$$\left|0 - 2^{-i}\right| = 2^{-i} \le a_i$$

ובכיוון האנכי

$$|0 - 0| = 0 \le b_i$$

כלומר לכל i מתקיים $0 \in R_{a_i,b_i}(z_i)$ ובהכרח $0 \in \bigcap_{i=1}^{N} R_{a_i,b_i}(z_i)$.
בנוסף, לכל $j < i$ בחלק האופקי מתקיים

$$\left|2^{-j} - 2^{-i}\right| \ge 2^{-j} - 2^{-i} \ge 2^{-j-1}$$

אבל

$$a_i = 2^{-i} < 2^{-j-1}$$

כלומר $z_j \notin R_{a_i,b_i}(z_i)$.
באופן דומה מתקיים גם עבור $j > i$ בהחלפת תפקידים ולכן מלבנים ב-$\mathbb{R}^2$ לא מקיימים את תכונת הכיסוי החלשה של בסיקוביץ'.
עבור ההסקה, עבור $\varepsilon > 0$ קטן דיו נגדיר

$$R_i^d := R_i \times [-\varepsilon, \varepsilon]^{d-2}$$

ועדיין החלק הראשון מתקיים ולכן בפרט לא ייתכן שמשפט הכיסוי של בסיקוביץ' יתקיים. $\square$