פתרון מטלה 08 — תורת המידה, 80517

19 בדצמבר 2025

שאלה 1

נניח כי $(X, \mathcal{A})$ מרחב מדיד וכי $T : X \to X$ מדידה.
הגדרנו מידה על X להיות T-אינווריאנטיות אם $\mu = T_* \mu$.
מידה T-אינווריאנטיות μ תיקרא ארגודית אם לכל A מדידה המקיימת $A = T^{-1}(A)$ הקבוצה A היא μ-טריוויאלית, כלומר $\mu(A) = 0$ או $\mu(A^c) = 0$.

סעיף א'

תהיי A מדידה ונגדיר

$$A_1 = A,\ \ A_{n+1} = T^{-1}(A_n)$$

נראה כי $\liminf A_n, \limsup A_n$ הן T-אינווריאנטיות.

הוכחה: $\square$

שאלה 2

בשאלה הזאת נוכיח את המשפט הבא: יהי X מרחב מדיד ו־$T : X \to X$ מדידה. אז כל שתי מידות הסתברות T־אינווריאנטיות ארגודיות שונות הן סינגולריות אחת לשנייה.
נניח לשם הפשטות ש־T הפיכה ו־T^{-1} מדידה גם־כן.

סעיף א'

יהיו μ, ν שתי מידות הסתברות T־אינווריאנטיות.
נכתוב את הפירוק לפי משפט לבג־רדון־ניקודים של ν לפי μ להיות $\nu = \nu_a + \nu_s$.
נראה כי ν_a, ν_s גם הן T־אינווריאנטיות.
הוכחה: ראשית מהפירוק לפי משפט לבג־רדון־ניקודים מתקיים $\nu_a \ll \mu$ וכן $\mu \perp \nu_s$.
μ, ν הן מידות T־אינווריאנטיות, כלומר

$$T_*\mu = \mu,\ T_*\nu = \nu \implies \forall A \in \mathcal{A},\ \mu(T^1(A)) = \mu(A),\ \nu(T^{-1}(A)) = \nu(A)$$

נניח כי $\mu(A) = 0$ ולכן $\mu(T^{-1}(A)) = 0$, אבל $\nu_a \ll \mu$, היא רציפה בהחלט ומתקיים $T_*\nu_a(A) = \nu_a(T^{-1}(A)) = 0$, כלומר $T_*\nu_a \ll \mu$.
מהיות $\mu \perp \nu_s$, אז קיימת קבוצה מדידה A כך שמתקיים

$$\nu_s(A^c) = 0 = \mu(A)$$

ולכן בפרט

$$T_*\nu_s\big((T^{-1}A)^c\big) = \nu_s(A^c) = 0,\ \mu(T^{-1}(A)) = \mu(A) = 0$$

כלומר $\mu \perp T_*\nu_s$.
אבל T_* היא לינארית, כלומר

$$T_*\nu = T_*\nu_a + T_*\nu_s$$

הערה בנוגע ללינאריות: אפשר לראות את ההוכחה ממש מהגדרה, אבל דחיפה קדימה של מידה היא לינארית בגלל שמידות הן לינארית על קבוצות ו־T מדידה והדחיפה קדימה של מידה פועלת על מקורות, ומידות עצמן הן פונקציות לינאריות על אינדיקטורים. אז T לינארית.
אבל ν היא T־אינווריאנטיות, כלומר

$$\nu = T_*\nu = T_*\nu_a + T_*\nu_s$$

נבחין כי ממה שמצאנו, $T_*\nu_a \ll \mu, T_*\nu_s \perp \mu$ מקיימים את תנאי משפט לבג־רדון־ניקודים, ומהיות משפט זה מביא לנו יחידות לפירוק נסיק כי

$$T_*\nu_a = \nu_a,\ T_*\nu_s = \nu_s$$

כלומר גם הן T־אינווריאנטיות. $\square$

סעיף ב'

נסיק כי אם ν ארגודית אז או ש־$\nu = \nu_a$ או $\nu = \nu_s$.
הוכחה: נניח כי ν ארגודית, כלומר לכל A מדידה המקיימת $A = T^{-1}(A)$ הקבוצה A היא ν־טריוויאלית, כלומר $\nu(A^c) = 0 \vee \nu(A) = 0$.
מהיות $\mu \perp \nu_s, \mu \gg \nu_a$ נובע כי קיימת A מדידה כך ש־$\nu_s(A) = 0 = \nu_a(A^c)$.
לכן מתקיים

$$\nu(A) = \nu_a(A) + \nu_s(A) = 0 + \nu_s(X) = \nu_s(X)$$
$$\nu(A^c) = \nu_a(A^c) + \nu_s(A^c) = \nu_a(X) + 0$$

ν ארגודית ונסתכל על A, מתקיים $\nu(A) = 1 \vee \nu(A) = 0$ (כי מידות הסתברות ומהגדרת הארגודית), וראינו $\nu(A) = \nu_s(X)$ אז בהכרח מתקיים

$$\nu_s(X) = 0 \vee \nu_s(X) = 1$$

כלומר

$$\nu(A) = \nu_s(X),\ \nu(A^c) = \nu_a(X)$$

$\square$

סעיף ג'

נניח כי μ ארגודית וכן $\nu = \nu_a$ ונגדיר את h להיות נגזרת רדון־ניקודים $\frac{\mathrm{d}\nu_a}{\mathrm{d}\mu}$.
נראה כי $\int_A h \circ T \,\mathrm{d}\mu = \int_A h \,\mathrm{d}\mu$ לכל A מדידה ונסיק כי $h = h \circ T$ μ־כמעט בכל מקום.

הוכחה: TODOOOOOOOOOOOOOOOOOOO $\square$

סעיף ד'

נראה כי $h = 1$ μ־כמעט תמיד ונסיק כי $\mu = \nu$.

הוכחה: TODOOOOOOOOOOOOOOOOOOO $\square$

שאלה 3

סעיף א'

יהיו $f,g\in L^1(\mathbb{R})$ פונקציות אינטגרביליות לבג המחזירות ערכים אי־שליליים.
נסמן את המידות שניתנות מאינטגרציה של פונקציות אלו

$$\mu(E)=\int_E f\,\mathrm{d}\lambda,\qquad \nu(E)=\int_E g\,\mathrm{d}\lambda$$

נמצא תנאי מספיק והכרחי לכך ש־$\nu\perp\mu$.

הוכחה: נסמן $\nu\perp\mu$ אם ורק אם קיימות $A,B\in\mathbb{R}$ מדידות וזרות כך ש־$\mu(A^c)=\nu(B^c)=0$.
נבחין שנובע מכך שמהיות A,B זרות, אז $A\subseteq B^c$ ולכן $0=\nu(B^c)\geq\nu(A)\implies\nu(A)=0$, ולכן נוכל לקחת את B להיות A^c.
כלומר ההגדרה שראינו למידות סינגולריות שקולה ללהגיד שקיימת A מדידה כך ש־$\mu(A)=0=\nu(A^c)$, נשתמש בהגדרה הזאת כי היא נוחה יותר.
נטען שזה מתקיים אם ורק אם $f(x)\cdot g(x)=0$ λ־כמעט לכל $x\in\mathbb{R}$.
נניח $f\cdot g=0$ λ־כמעט לכל $x\in\mathbb{R}$ ונראה ש־$\nu\perp\mu$: נגדיר את הקבוצות

$$A\coloneqq\{x\in\mathbb{R}\mid f(x)>0\},\ \ B\coloneqq\{x\in\mathbb{R}\mid g(x)>0\}$$

מהיות $f\cdot g=0$ λ־כמעט תמיד, נובע כי $\lambda(A\cap B)=0$.
נסתכל על A,A^c:

$$\nu(A)=\int_A g\,\mathrm{d}\lambda=\int_{A\cap B}g\,\mathrm{d}\lambda+\int_{A\setminus B}g\,\mathrm{d}\lambda$$

אבל $\lambda(A\cap B)=0$ ולכן המחובר הראשון הוא אפס, אבל גם המחובר השני הוא אפס כי בקבוצה $A\setminus B$ מתקיים $g(x)=0$ לכל x.
בנוסף

$$\mu(A^c)=\int_{A^c}f\,\mathrm{d}\lambda$$

אבל מהגדרת A, $f(x)=0$ לכל $x\in A^c$, כלומר $\mu(A^c)=0$ (כי הפונקציה אי־שלילית).
כלומר $\nu(A)=0=\mu(A^c)$ וזה בידיוק אומר $\nu\perp\mu$ מהגדרה.
בכיוון השני, נניח ש־$\nu\perp\mu$ ולכן יש E מדידה כך ש־$\mu(E)=0=\nu(E^c)$, ולכן מהגדרות

$$\mu(E)=\int_E f\,\mathrm{d}\lambda=0$$

$$\nu(E^c)=\int_{E^c}g\,\mathrm{d}\lambda=0$$

מהראשון אנחנו מקבלים ש־$f(x)=0$ λ־כמעט לכל $x\in E$ ומהשני אנחנו מקבלים ש־$g(x)=0$ λ־כמעט לכל $x\in E^c$ ונבחן את המכפלה שלהם עבור $\mathbb{R}=E\cup E^c$:
עבור $x\in E$, $f(x)=0$ λ־כמעט תמיד ולכן $f(x)g(x)=0$ כמעט־תמיד.
עבור $x\in E^c$, $g(x)=0$ λ־כמעט תמיד ולכן $f(x)g(x)=0$ כמעט־תמיד.
וקיבלנו ש־$f(x)g(x)=0$ λ־כמעט לכל $x\in\mathbb{R}$. $\square$

שאלה 4

יהיו $\mu,\nu_1,\nu_2,\ldots$ מידות חיוביות על X ונגדיר $\nu=\sum_{j=1}^{\infty}\nu_j$.

סעיף א'

נוכיח שאם $\mu\perp\nu_j$ לכל $j\geq 1$ אזי $\mu\perp\nu$.

הוכחה: בדומה למה שראינו בשאלה הקודמת, מהיות $\mu\perp\nu_j$ לכל j נובע שקיימת A_j מדידה כך ש־$\mu(A_j)=\nu\left(A_j^c\right)=0$.
נגדיר $A=\bigcap_{j=1}^{\infty}A_j$ ועלינו להראות ש־$\nu(A)=0$: נבחין שלכל j מתקיים $A\subseteq A_j$ על־כן מתקיים ממונוטוניות המידה $\nu_j(A)\leq\nu_j(A_j)$ וידוע גם $\nu_j(A_j)=0$ ולכן $\nu_j(A)=0$, אז לכל j מתקיים $0\leq\nu_j(A)\leq 0$ ולכן

$$\nu(A)=\sum_{j=1}^{\infty}\nu_j(A)=\sum_{j=1}^{\infty}0=0$$

עוד צריך להראות כי $\nu(A^c)=0$: נבחין

$$A^c=\left(\bigcap_{j=1}^{\infty}A_j\right)=\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j^c$$

אבל מ־σ־אדטיביות של המידה מתקיים

$$\mu(A^c)=\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j^c\right)\leq\sum_{j=1}^{\infty}\mu\left(A_j^c\right)=\sum_{j=1}^{\infty}0=0$$

אבל μ מידה חיובית ולכן $\mu(A^c)=0$.
אז $A=\bigcap_{j=1}^{\infty}A_j$ מקיימת $\nu(A)=0=\mu(A^c)$, כלומר $\nu\perp\mu$. □

סעיף ב'

אם $\mu\ll\nu_j$ לכל $j\geq 1$ אז $\mu\ll\nu$.

הוכחה: יהי $A\in\mathcal{A}$ מדידה כך ש־$\mu(A)=0$.
מהיות $\mu\ll\nu_j$ לכל $j\geq 1$, נובע כי $\nu_j(A)=0$ לכל $j\geq 1$ ולכן מהגדרת המידה נקבל

$$\nu(A)=\sum_{j=1}^{\infty}\nu_j(A)=\sum_{j=1}^{\infty}0=0$$

כלומר $\mu\ll\nu$. □