

פתרון מטלה 02 – פונקציות מרוכבות, 80519

7 בנובמבר 2025



שאלה 1

לכל פונקציה נמצא איפה היא \mathbb{C} -דיפרנציאבילית ואיפה היא אנליטית.
 תזכורת: נגיד שפונקציה $f : U_{z_0} \rightarrow \mathbb{C}$ היא \mathbb{C} -דיפרנציאבילית ב- z_0 אם הגבול $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ קיים.
 נגיד ש- f היא אנליטית ב- z_0 אם קיים r_{z_0} כך ש- f היא \mathbb{C} -דיפרנציאבילית לכל $z \in B_{r_{z_0}}(z_0)$.

סעיף א'

$$z \mapsto |z|^2$$

הוכחה: יהי $z = x + iy \in \mathbb{C}$, מתקיים

$$|z|^2 = |x + iy|^2 = \sqrt{x^2 + y^2}^2 = x^2 + y^2 = z\bar{z}$$

נבחרת את הגדרת \mathbb{C} -דיפרנציאבילית

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|z|^2 - |z_0|^2}{z - z_0} &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z\bar{z} - z_0\bar{z}_0}{z - z_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(z_0 + h)(\overline{z_0 + h}) - z_0\bar{z}_0}{z_0 + h - z_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{z_0\bar{z}_0 + z_0\bar{h} + h\bar{z}_0 + h\bar{h} - z_0\bar{z}_0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h\bar{h} + h\bar{z}_0 + z_0\bar{h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \bar{h} + \bar{z}_0 + z_0\frac{\bar{h}}{h} \end{aligned}$$

נבחין שכאשר $h \rightarrow 0$, גם $\bar{h} \rightarrow 0$ ולכן הגורם הראשון מתבטל ונשארו עם $\bar{z}_0 + z_0\frac{\bar{h}}{h}$ אבל הביטוי האחרון תלוי בכיוון השאיפה האם אנחנו שואפים מכיוון 0^+ או מכיוון 0^- שכן מתקיים

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \bar{h} + \bar{z}_0 + z_0\frac{\bar{h}}{h} &= \bar{z}_0 + z_0 \\ \lim_{h \rightarrow 0^-} \bar{h} + \bar{z}_0 + z_0\frac{\bar{h}}{h} &= \bar{z}_0 - z_0 \end{aligned}$$

כלומר, הגבול קיים אם ורק אם $z_0 = 0$ ואז גם ערך הנגזרת בנקודה יהיה אפס.

נובע מכך ש- f לא אנליטית בכלל שכן גם סביב הראשית אין סביבה קטנה דיו בה הפונקציה היא \mathbb{C} -דיפרנציאבילית.

□

סעיף ב'

$$z \mapsto e^z$$

הוכחה: ניעזר ברמז ונרצה להראות $|e^z - 1 - z| \leq e^{|z|} - 1 - |z|$.

ראשית נזכר שבהרצאה ראינו שטור טיילור של e^z הוא

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

באגף שמאל יש לנו

$$|e^z - 1 - z| = \left| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!}$$

מצד ימין

$$e^{|z|} - 1 - |z| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} - 1 - |z| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!}$$

ומאישיוויון המשולש מתקיים $\left| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right| \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!}$.
 יהי $z \in \mathbb{C}$, נבחן את הגדרת ה- \mathbb{C} -דיפרנציאביליות

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{e^z - e^{z_0}}{z - z_0} = \lim_{w = z - z_0} \frac{e^{z_0 + w} - e^{z_0}}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} e^{z_0} \cdot \frac{e^{z - z_0} - 1}{z - z_0}$$

נגדיר $w = z - z_0$ (אפשר כי זו החלפת משתנה רציפה כפי שראינו בתרגול) ומספיק שנראה $\lim_{w \rightarrow 0} \frac{e^w - 1}{w} = 1$, מאישיוויון שהראינו מתקיים

$$\left| \frac{e^w - 1}{w} - 1 \right| = \left| \frac{e^w - 1 - w}{w} \right| = \frac{|e^w - 1 - w|}{|w|} \leq \frac{e^{|w|} - 1 - |w|}{|w|}$$

כאשר עלינו לבחון $w \rightarrow 0$ ולכן $|w| \rightarrow 0$ ולכן מספיק שנראה למקרה השני (כי $w \rightarrow 0$ אממ $|w| \rightarrow 0$) והגבול לעיל הוא גבול ממשי ולכן אפשר להשתמש בכלל לופיטל ולקבל שהגבול הוא אכן 1.
לכן

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{e^z - e^{z_0}}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} e^{z_0} \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{e^{z-z_0} - 1}{z - z_0} = e^{z_0}$$

□

כלומר, לכל $z \in \mathbb{C}$ הפונקציה היא \mathbb{C} -דיפרנציאבילית ולכן בפרט אנליטית לכל $z \in \mathbb{C}$.

סעיף ג'

$$f(x + iy) = (x^2 + y^2) + i(-x^2 + y^2)$$

הוכחה: נחשב נגזרת חלקית לפי x :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + iy_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x + iy_0) - f(x_0 + iy_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 + y_0^2 + i(-x^2 + y_0^2) - x_0^2 - y_0^2 - i(-x_0^2 + y_0^2)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x_0^2 - ix^2 + ix_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0) - i((x - x_0)(x + x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)(1 - i)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0)(1 - i) = 2x_0 - 2ix_0 \end{aligned}$$

נחשב נגזרת חלקית לפי y :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + iy_0) &= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0 + iy) - f(x_0 + iy_0)}{y - y_0} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{x_0^2 + y^2 + i(-x_0^2 + y^2) - x_0^2 - y_0^2 - i(-x_0^2 + y_0^2)}{y - y_0} \\ &= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{(y + y_0)(y - y_0)(1 + i)}{y - y_0} = \lim_{y \rightarrow y_0} (y + y_0)(1 + i) = 2y_0 + 2iy_0 \end{aligned}$$

בהשוואת חלק ממשי ומדומה צריך להתקיים

$$\begin{cases} 2x_0 = 2y_0 \implies x_0 = y_0 \\ -2ix_0 = 2iy_0 \implies -x_0 = y_0 \end{cases}$$

□

סעיף ד'

$$f(x + iy) = x^3 + 3iy$$

□

הוכחה: TODOOOOOOOOOOOOOOOOOO

שאלה 2

תהייה $f, g \in \text{Hol}(G)$ עבור תחום $G \subset \mathbb{C}$.
 תזכורת: בהינתן G תחום, נסמן ב- $\text{Hol}(G)$ את קבוצת כל הפונקציות שאנליטיות על G .

סעיף א'

נראה כי $(f \pm g)' = f' \pm g'$ אנליטיות ושמתקיים

הוכחה: מהגדרת ה- \mathbb{C} -דיפרנציאביליות מתקיים

$$\begin{aligned}(f \pm g)'(z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(f \pm g)(z) - (f \pm g)(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \pm \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \pm \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}\end{aligned}$$

אבל $f, g \in \text{Hol}(G)$ ולכן הגבולות לעיל מוגדרים היטב וקיימים.

בפרט, לכל $z \in G$, הן f והן g אנליטיות ב- z , כלומר קיימת סביבה U_z כך ש- f ו- g הן \mathbb{C} -דיפרנציאביליות בכל $z' \in U_z$.
 מאריתמטיקה של גבולות מתקיים

$$(f \pm g)'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \pm \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) \pm g'(z_0)$$

□

היות וזה נכון לכל $z \in G$ אז $f \pm g \in \text{Hol}(G)$ ומתקיים $(f \pm g)' = f' \pm g'$.

סעיף ב'

נראה כי $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ אנליטיות ושמתקיים

הוכחה: בדומה לסעיף הקודם, מהגדרת ה- \mathbb{C} -דיפרנציאביליות ומהיות $f, g \in \text{Hol}(G)$ מתקיים

$$\begin{aligned}(f \cdot g)'(z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(f \cdot g)(z) - (f \cdot g)(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) \cdot g(z) - f(z_0) \cdot g(z_0)}{z - z_0} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(f(z) - f(z_0)) \cdot g(z) + f(z_0) \cdot g(z) - f(z_0) \cdot g(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \cdot g(z) + \frac{f(z_0) \cdot g(z) - f(z_0) \cdot g(z_0)}{z - z_0} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \cdot g(z) + \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z_0) \cdot g(z) - f(z_0) \cdot g(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0) \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} \\ &= f'(z_0) \cdot g(z_0) + f(z_0) \cdot g'(z_0)\end{aligned}$$

□

היות וזה נכון לכל $z \in G$ אז $f \cdot g \in \text{Hol}(G)$ ומתקיים $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$.

סעיף ג'

נראה כי $(f \circ g)'(z) = f'(g(z)) \cdot g'(z)$ אנליטיות ושמתקיים

הוכחה: מהגדרת $f, g \in \text{Hol}(G)$ ומהגדרת ה- \mathbb{C} -דיפרנציאביליות מתקיים

$$(f \circ g)'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(f \circ g)(z) - (f \circ g)(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(g(z)) - f(g(z_0))}{g(z) - g(z_0)} \cdot \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = f'(g(z_0)) \cdot g'(z_0)$$

□

אז אם g אנליטית ב- z ו- f אנליטית ב- $g(z)$ אז $f \circ g$ אנליטית ב- z , לכל $z \in G$ (שכן $f, g \in \text{Hol}(G)$).

סעיף ד'

נניח כי $g(z) \neq 0$ לכל $z \in G$ ונראה $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$.
הוכחה: מספיק שנראה שמתקיים $\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}$ ומהסעיף אודות מכפלה של פונקציות אנליטיות נקבל את הנדרש.
מהגדרת ה- \mathbb{C} -דיפרנציאביליות מתקיים

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\frac{1}{g(z)} - \frac{1}{g(z_0)}}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\frac{g(z_0) - g(z)}{g(z)g(z_0)}}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z_0) - g(z)}{z - z_0} \cdot \frac{1}{g(z)g(z_0)} = \frac{-g'(z)}{g^2(z)}$$

כמובן שהכל תחת ההנחה שלכל $z \in G$ מתקיים $g(z) \neq 0$ והיות וזה נכון לכל $z \in G$ או $\frac{1}{g}$ היא אנליטית מכך ש- $g \in \text{Hol}(G)$.
נשים לב שמתקיים $\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'$ ומהסעיף אודות נגזרת מכפלה של פונקציות אנליטיות מתקיים

$$\left(f \cdot \frac{1}{g}\right)' = f' \cdot \frac{1}{g} + f \cdot g' = \frac{f'}{g} + f \cdot \frac{-g'}{g^2} = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

□ מהסעיף הקודם והטענה לעיל אנחנו מקבלים את הנדרש.

סעיף ה'

נוכיח שאם לכל $z \in G$ מתקיים $f'(z) = 0$ אז f קבועה.

□ הוכחה: **TODOOOOOOOOOOOOOOOOOOO**

סעיף ו'

נוכיח כי $f(\bar{z})$ היא לא פונקציה אנליטית.

□ הוכחה: **TODOOOOOOOOOOOOOOOOOOO**

שאלה 3

ניזכר שהעתקה לינארית $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ יכולה להיות מתוארת על-ידי כפל מטריצות

$$L(x, y) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y)$$

סעיף א'

נראה כי ההעתקה לעיל יכולה להיכתב בצורה

$$z \mapsto z \cdot \left(\frac{\alpha + \delta}{2} + i \frac{\gamma - \beta}{2} \right) + \bar{z} \cdot \left(\frac{\alpha - \delta}{2} + i \frac{\gamma + \beta}{2} \right)$$

פתרון: נכתוב $\omega = (\alpha x + \beta y) + i(\gamma x + \delta y)$

יהי $z = a + ib \in \mathbb{C}$, נשים לב לזהות הבאה

$$z = a + ib \implies a = \frac{z + \bar{z}}{2} = \frac{a + ib + a - ib}{2} = \frac{2a}{2} = a$$

$$z = a + ib \implies b = \frac{z - \bar{z}}{2i} = \frac{a + ib - a + ib}{2i} = \frac{2ib}{2i} = b$$

ולכן במקרה שלנו מתקיים עבור $z = x + iy \in \mathbb{C}$

$$\omega = \alpha \left(\frac{z + \bar{z}}{2} \right) + \beta \left(\frac{z - \bar{z}}{2} \right) + i\gamma \left(\frac{z + \bar{z}}{2} \right) + i\delta \left(\frac{z - \bar{z}}{2} \right)$$

ניזכר שמתקיים

$$\frac{1}{i} = -i$$

שכן מתקיים $\frac{1}{i} \cdot \frac{-i}{-i} = -\frac{i}{(-i)^2} = -\frac{i}{1} = -i$ ולכן אם נסתכל על המקדמים לעיל של z נקבל

$$\frac{\alpha}{2} - \frac{i\beta}{2} + \frac{i\gamma}{2} + \frac{\delta}{2} = \frac{1}{2}(\alpha + \delta) + \frac{i}{2}(\gamma - \beta) = \frac{\alpha + \delta}{2} + i \frac{\gamma - \beta}{2}$$

באותו אופן עבור \bar{z} מתקיים

$$\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2i} + \frac{i\gamma}{2} - \frac{i\delta}{2i} = \frac{\alpha}{2} - \frac{-i\beta}{2} + \frac{i\gamma}{2} - \frac{\delta}{2} = \frac{1}{2}(\alpha - \delta) + \frac{i}{2} \frac{\beta + \gamma}{2} = \frac{\alpha - \delta}{2} + i \frac{\beta + \gamma}{2}$$

כלומר

$$\omega = z \cdot \left(\frac{\alpha + \delta}{2} + i \frac{\gamma - \beta}{2} \right) + \bar{z} \cdot \left(\frac{\alpha - \delta}{2} + i \frac{\beta + \gamma}{2} \right)$$

□

סעיף ב'

נראה כי העתקה לינארית $f(z) = a \cdot z + b \cdot \bar{z}$ היא הולומורפית אם ורק אם $b = 0$.

תזכורת: נגיד שהעתקה היא הולומורפית אם היא אנליטית בכל \mathbb{C} (כלומר, לכל $z \in \mathbb{C}$, ההעתקה אנליטית ב- z).

הוכחה: \implies נניח כי $b = 0$ ונראה כי f היא הולומורפית.

אז $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = a \cdot z$, ומהגדרת ה- \mathbb{C} -דיפרנציאביליות מתקיים

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{a(z - z_0)}{z - z_0} = a$$

מהיות $z_0 \in \mathbb{C}$ שרירותי נובע כי הטענה נכונה לכל $z_0 \in \mathbb{C}$ ולכן f הולומורפית, כי היא אנליטית בכל $z_0 \in \mathbb{C}$.

\Leftarrow נניח כי f הולומורפית ונראה כי $b = 0$.

f הולומורפית ולכן לכל $z_0 \in \mathbb{C}$, f אנליטית ב- z_0 , כלומר יש סביבה U_{z_0} כך ש- $f: U_{z_0} \rightarrow \mathbb{C}$ דיפרנציאבילית בכל $z \in U_{z_0}$.
יהי $z_0 \in \mathbb{C}$, מתקיים מהגדרת ה- \mathbb{C} -דיפרנציאביליות

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(a \cdot z + b \cdot \bar{z}) - (a \cdot z_0 + b \cdot \bar{z}_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{a(z - z_0) + b(\bar{z} - \bar{z}_0)}{z - z_0} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} a \cdot \frac{z - z_0}{z - z_0} - b \cdot \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} a + b \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} = a \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} b \cdot \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} \end{aligned}$$

מהיות f הולומורפית, נובע כי הגבול לעיל צריך להיות קיים ומוגדר היטב.

אם כך, אם אנחנו נעים על הציר הממשי, הביטוי לעיל יישאף ל-1. אם אנחנו נעים על הציר המדומה, הביטוי לעיל יישאף ל-1, כלומר הגבול הזה לא קיים אלא אם כן $b = 0$ ואז כל הביטוי הזה לא חלק מהגבול, ולכן $b = 0$ בהכרח.

□

סעיף ג'

נסיק שכדי שהעתקה לינארית תהיה הולומורפית חייב להתקיים $\alpha = \delta, \beta = -\gamma$.

פתרון: בעצם עלינו להראות שמתקיים $\frac{\alpha - \delta}{2} + i \frac{\gamma + \beta}{2} = 0$

ניזכר ש- $z = a + ib = 0$ אם ורק אם $Re(z) = 0$ וגם $Im(z) = 0$ במקרה שלנו מתקיים

$$\begin{cases} \frac{\alpha - \delta}{2} = 0 \iff \alpha - \delta = 0 \iff \alpha = \delta \\ \frac{\gamma + \beta}{2} = 0 \iff \gamma + \beta = 0 \iff \beta = -\gamma \end{cases}$$

אז ההעתקה הלינארית יכולה להיות מיוצגת על-ידי מטריצה מהצורה $M = \begin{pmatrix} \alpha & -\gamma \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix}$.

תחת מקרה זה מסעיף א' מתקיים

$$\frac{\alpha + \delta}{2} + i \frac{\gamma - \beta}{2} = \frac{\alpha + \alpha}{2} + i \frac{\gamma - (-\gamma)}{2} = \frac{2\alpha}{2} + i \frac{2\gamma}{2} = \alpha + i\gamma$$

כלומר $L(z) = (\alpha + i\gamma)z$ שבסעיף הקודם ראינו שהיא הולומורפית.

□

שאלה 4

בהינתן מטריצה A הגדרנו את העתקת מוביוס המתאימה להיות h_A .

תזכורת: אמרנו שהעתקה מהצורה

$$h(z) = \frac{a \cdot z + b}{c \cdot z + d}$$

כאשר $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ היא העתקת מוביוס והמטריצה המתאימה לייצוג ההעתקה היינה

$$A_h = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

סעיף א'

תהיינה A, B מטריצות ונראה כי $h_A \circ h_B = h_{AB}$

פתרון: תהיינה $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$

מצד אחד מתקיים

$$\begin{aligned} h_A \circ h_B(z) &= h_A\left(\frac{ez+f}{gz+h}\right) = \frac{a\frac{ez+f}{gz+h} + b}{c\left(\frac{ez+f}{gz+h}\right) + d} = \frac{\frac{a(ez+f)+b(gz+h)}{gz+h}}{\frac{c(ez+f)+d(gz+h)}{gz+h}} = \frac{a(ez+f) + b(gz+h)}{c(ez+f) + d(gz+h)} \\ &= \frac{aez + af + bgz + hb}{cez + cf + dgz + dh} = \frac{(ae + bg)z + (af + bh)}{(ce + dg)z + (cf + dh)} \end{aligned}$$

מצד שני מתקיים

$$AB = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}$$

נסמן $AB = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ ולכן $a' = ae + bg, b' = af + bh, c' = ce + dg, d' = cf + dh$ ונחשב

$$h_{AB}(z) = \frac{a'z + b'}{c'z + d'} = \frac{(ae + bg)z + (af + bh)}{(ce + dg)z + (cf + dh)}$$

□

וקיבלנו שיוויון.

סעיף ב'

נניח כי $\det(A) \neq 0$ ונראה כי $h_A^{-1} = h_{A^{-1}}$

פתרון: מהיות $\det(A) \neq 0$ נובע כי $A^{-1}A = I$ קיימת ומתקיים $A^{-1}A = I$ ומהסעיף הקודם מתקיים

$$h_{A^{-1}} \circ h_A = h_{A^{-1}A} = h_I$$

אבל

$$h_I(z) = \frac{z + 0}{0z + 1} = z$$

□

אזי $h_{A^{-1}} \circ h_A = \text{id}$ ובאותו אופן נקבל גם $h_A \circ h_{A^{-1}} = \text{id}$ כלומר $h_{A^{-1}}$ היא ההופכית של h_A , כלומר $h_{A^{-1}} = (h_A)^{-1}$.

סעיף ג'

נראה כי כל העתקת מוביוס יכולה להתקבל מהרכבה של העתקות מוביוס אלמנטריות.

הוכחה: בתרגול ראינו שארבעת העתקות מוביוס האלמנטריות הן סקלר, סיבוב, הזזה והופכי.

נסמן

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, h_A(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

אם $c = 0$ אז $h_A(z) = \frac{az+b}{d} = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ שזה בידויק הרכבה של הזזה וכיווץ בסקלר.
 בתרגול טענו את הטענה הנדרשת יחד עם ההנחה $\det(A) \neq 0$ ולכן נמשיך תחת מקרה זה.
 נשים לב

$$az + b = \frac{a}{c}(cz) + b = \frac{a}{c}(cz + d - d) + b = \frac{a}{c}(cz + d) - \frac{ad}{c} + b$$

ולכן

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{\frac{a}{c}(cz + d) + (b - \frac{ad}{c})}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cz + d}$$

כעת ניזכר ש- $\det(A) \neq 0$ ולכן

$$b - \frac{ad}{c} = \frac{bc - ad}{c} = -\frac{ad - bc}{c} = -\frac{\det(A)}{c}$$

אז

$$\frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{-\frac{\det(A)}{c}}{cz + d} = \frac{a}{c} - \frac{\det(A)}{c} \cdot \frac{1}{cz + d} = \frac{a}{c} - \frac{\det(A)}{c^2} \cdot \frac{1}{z + \frac{d}{c}}$$

נסמן ב- T_1 את ההזזה $z_1 = z + \frac{d}{c}$, ב- I את ההופכי $z_2 = \frac{1}{z_1} = \frac{1}{z + \frac{d}{c}}$, ב- D את הסקלריות $z_3 = -\frac{\det(A)}{c(cz+d)}$ וב- T_2 את ההזזה $h(z) = \frac{a}{c} + z_3$ ואכן מתקיים

$$\begin{aligned} (T_2 \circ D \circ I \circ T_1)(z) &= (T_2 \circ D \circ I)\left(z + \frac{d}{c}\right) = (T_2 \circ D)\left(\frac{c}{cz + d}\right) = T_2\left(-\frac{\det(A)}{c(cz + d)}\right) = \frac{a}{c} - \frac{\det(A)}{c(cz + d)} \\ &= \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c(cz + d)} = \frac{a(cz + d) - ad + bc}{c(cz + d)} = \frac{acz + ad - ad + bc}{c(cz + d)} = \frac{c(az + b)}{c(cz + d)} = \frac{az + b}{cz + d} \end{aligned}$$

□

כלומר, כל העתקת מוביוס יכולה להתקבל מהרכבה של העתקות מוביוס אלמנטריות.

שאלה 5

סעיף א'

בכל סעיף נחשב את רדיוס ההתכנסות, נכתוב את תחום ההתכנסות ונקבע האם הוא מתכנס במידה שווה או לא.

תת-סעיף א'

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

פתרון: ראשית בהרצאה ראינו ש- $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ ולכן הטור שקיבלנו הוא בעצם הטור של $e^z - 1$.

נשים לב שמתקיים

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n+1} \right| = 0$$

אז רדיוס ההתכנסות הוא ∞ , ולכן הטור מתכנס לכל $z \in \mathbb{C}$.

כדי להראות שהטור לא מתכנס במידה שווה על \mathbb{C} , יהי $\varepsilon = 1$, לו היה מתכנס במידה שווה, היה קיים N כך שלכל $n \geq N$ ולכל $z \in \mathbb{C}$ היה מתקיים

$$\left| \sum_{k=n}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \right| < \varepsilon$$

נסתכל על $\frac{z^{N+1}}{(N+1)!}$, אם נניח בשלילה שהטור מתכנס במידה שווה, היה מתקיים שכאשר $n \rightarrow \infty$ אז הביטוי הזה היה שואף ל-0.

אבל לכל N , נשים לב שבבחירה של z גדול מספיק, כלומר $|z| = (N+1)!$ היה מתקיים שהביטוי לעיל הוא 1, כלומר לא ניתן לקבל את ההגדרה

להתכנסות במידה שווה.

□

תת-סעיף ב'

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n$$

פתרון: נשים לב ש- $a_n = 1$ אז נסתכל על מקרים שונים עבור z .

אם $|z| < 1$ אז זה טור גיאומטרי ומתכנס בהחלט, אם $|z| > 1$ אז הטור מתבדר (כי אפילו $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n \neq 0$ וזה תנאי הכרחי) אם $|z| = 1$ זה אומר

□

ש- z על מעגל היחידה **TODOOOOOOOOOOOOOOOOOOO**

תת-סעיף ג'

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$$

פתרון:

□