פתרון מטלה 05 — תורת ההסתברות 1, 80420

5 בדצמבר 2025

שאלה 1

בקופה n מטבעות.

נניח ששני שחקנים מטילים קובייה בלתי־תלויה בכל סיבוב, כאשר ההתפלגות של הקובייה היא

$$\mathbb{P}(1)=\mathbb{P}(2)=\mathbb{P}(3)=\mathbb{P}(4)=\frac{1}{5}, \qquad \mathbb{P}(5)=\mathbb{P}(6)=\frac{1}{10}$$

מי שמקבל את הערך הגבוה ביותר בהטלה זוכה במטבע אחד מן הקופה.

אם שני השחקנים מקבלים ערכים שווים – אף שחקן אינו מקבל מטבע.

סעיף א'

נמצא את התפלגות מספר המטבעות שכל אחד מהשחקנים מרוויח בסוף המשחק.

פתרון: נסמן ב־Y ו־Z את תוצאות ההטלה של השחקן הראשון והשני בהתאמה.

נגדיר X_i המשתנה המקרי שהשחקן הראשון זכה במטבע ה־i ובהתאם $X=\sum_{k=1}^{n} X_i$, סך הזכיות של המשתתף הראשון. אז

$$\mathbb{P}(X_i=1)=\mathbb{P}(Y>Z)=\sum_{k=1}^{6}\mathbb{P}(Y>Z,Z=k)=\mathbb{P}(Y>Z,Z=1)+\cdots+\mathbb{P}(Y>Z,Z=6)$$

$$=\underbrace{\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{5}+\frac{2}{10}\cdot\frac{1}{5}}_{=\mathbb{P}(Y>Z,Z=1)}+\underbrace{\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5}+\frac{2}{10}\cdot\frac{1}{5}}_{\mathbb{P}(Y>Z,Z=2)}+\underbrace{\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}+\frac{2}{10}\cdot\frac{1}{5}}_{\mathbb{P}(Y>Z,Z=3)}+\underbrace{\frac{2}{10}\cdot\frac{1}{5}}_{\mathbb{P}(Y>Z,Z=4)}+\underbrace{\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}}_{\mathbb{P}(Y>Z,Z=5)}+\underbrace{0\cdot\frac{1}{5}}_{\mathbb{P}(Y>Z,Z=6)}=\frac{41}{100}$$

יש לנו משתנה מקרי עם n ניסיונות והסתברות הצלחה $p=0.41$ וזה בידיוק לפי הגדרה התפלגות בינומית. $\square$

סעיף ב'

נחשב את ההסתברות לקבלת תוצאת תיקו בהטלה מסויימת.

פתרון: מהסימטרייה של כל משתתף לנצח בסיבוב, ומהגדרת המשלים נקבל שההסתברות לקבלת תוצאת תיקו בהטלה מסויימת היא $1-0.41\cdot 2=$ $1-0.82=0.18$. $\square$

סעיף ג'

נחשב את ההסתברות שמספר הסיבובים הכולל במשחק יהיה לכל היותר $n+1$.

פתרון: יש לנו לכל הפחות n סיבובים ולכן יש שלוש אפשרויות: או שיש שחקן שזכה בכל ה־n סיבובים הראשונים, או שהיו $n+1$ סיבובים ובסיבוב ה־$1\le k\le n$, משתתף אחד זכה ובשאר המשתתף השני זכה, או שבמקום שהמשתתף השני זכה באחד הסיבובים בידיוק יהיה שבסיבוב אחד בידיוק היה לנו תיקו.

נגדיר משתנה מקרי T – מספר תוצאות התיקו שהיו, כאשר ההסתברות לתיקו לפי הסעיף הקודם מתפלג ברנולי עם פרמטר 0.18, ויש לנו או תיקו אחד או אפס תיקו.

נגדיר W_i להיות המשתנה המקרי שאומר שהסיבוב ה־i נגמר בניצחון ולפי סעיף א' זה מתפלג ברנולי עם פרמטר 0.41.

נסמן ב־W המאורע שיהיו k סיבובים במשחק, כלומר $\mathbb{P}(W=k)=\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{k}W_i=n\right)$ כלומר לפי מה שראינו בהרצאה, $W\sim Bin(0.82)$ ולכן

$$\mathbb{P}(W\le n+1)=\mathbb{P}(W<n)+\mathbb{P}(W=n)+\mathbb{P}(W=n+1)=0+0.82^n+\binom{n+1}{n}0.82^n\cdot 0.18$$

$\square$

שאלה 2

יהיו $X \sim Bin(n,p)$ ו־$Y \sim Bin(n,1-p)$ ונוכיח $n - X \overset{d}{=} Y$.

הוכחה: כלומר, נרצה להראות $(n-X) \sim Bin(n,1-p)$. מהגדרה מתקיים

$$\mathbb{P}(n-X=l) = \mathbb{P}(X=n-l) \underset{X\sim Bin(n,p)}{=} \binom{n}{n-l} p^{n-l}(1-p)^{n-(n-l)} \underset{\binom{n}{l}=\binom{n}{n-l}}{=} \binom{n}{l} p^{n-l}(1-p)^{l}$$

כלומר $(n-X) \sim Bin(n,1-p)$. $\square$

שאלה 3

יהיו $X_i \sim Ber(p), Z_i \sim Ber(q)$ משתנים מקריים בלתי־תלויים. עבור $i \in [n]$ נגדיר

$$Y_i = X_i Z_i, \qquad X = \sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

סעיף א'

נראה כי $X \sim Bin(n,p), Y \sim Bin(n,pq)$ וכן שלכל $0 \le m \le n$ מתקיים

$$Y \mid \{X = m\} \sim Bin(m,q)$$

הוכחה: בהרצאה ראינו $X \sim Bin(n,p)$, נשחזר את ההוכחה לשלמות: יהי $k \in \{0,...,n\}$ ונסמן $Y = \sum_{i\in[n]} X_i$ וכן נסמן $A_k := \left\{(x_1,...,x_n) \in \{0,1\}^n \mid \sum_{i\in[n]} X_i = k\right\}$ וקומבינטורית אנחנו יודעים שמתקיים $|A_k| = \binom{n}{k}$, אז

$$\mathbb{P}(Y=k) = \sum_{x\in A_k} \mathbb{P}(X=x) \underset{\text{אי־תלות}}{=} \sum_{x\in A_k} \left(\prod_{i\in[n]} \mathbb{P}(X_i = x_i)\right) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

כלומר $Y \sim Bin(n,p)$.

נעבור להראות $Y \sim Bin(n,pq)$ נבחין שמתקיים לכל i עם האי־תלות הנתונה:

$$\mathbb{P}(Y_i = k) = \mathbb{P}(X_i Z_i = k) = \begin{cases} \mathbb{P}(X_i=1)\mathbb{P}(Z_i=1) & k=1 \\ \mathbb{P}(X_i=1)\mathbb{P}(Z_i=0) + \mathbb{P}(X_i=0)\mathbb{P}(Z_i=1) + \mathbb{P}(X_i=0)\mathbb{P}(Z_i=0) & k=0 \\ \mathbb{P}(X_i=k)\mathbb{P}(Z_i=k) & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} pq & k=1 \\ p(1-q)+q(1-p)+(1-q)(1-p) & k=0 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} = \begin{cases} pq & k=1 \\ 1-pq & k=0 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

כאשר המקרה של "האחרת" נובע מהתומך של משתנה ברנולי ולכן $Y_i \sim Ber(pq)$ ובפרט מהטענה לעיל, $Y \sim Bin(n,pq)$.

נשאר להראות $Y \mid \{X=m\} \sim Bin(m,q)$: לכל $0 \le t \le n$ מתקיים $\mathbb{P}(Y=t \mid X=m) = \frac{\mathbb{P}(Y=t, X=m)}{\mathbb{P}(X=m)}$.

$\{X=m\}$ שקול ללהגיד שיש $j_1,...,j_m \in [n]$ כך שלכל אחד מהם, $X_{j_i} = 1$ ולשאר 0.

בשביל $\{Y=t\}$ יש לנו $k_1,....,k_t$ שהם ב־$j_1,...,j_m$ ובאינדקסים אלו גם Z_i מקבל 1 ובשאר 0.

אז יש לנו $\binom{n}{m}$ לבחירת אינדקסים ה־j ו־$\binom{m}{t}$ לבחירת ל־Z_i־ים שיקבלו 1 מתוך קבוצת האינדקסים של j־ ומהאי תלות נקבל

$$\mathbb{P}(Y=t \mid X=m) = \frac{\mathbb{P}(Y=t, X=m)}{\mathbb{P}(X=m)} = \frac{\binom{n}{m}p^m(1-p)^{n-m}\binom{m}{t}q^t(1-q)^{n-m}}{\binom{n}{m}p^m(1-p)^{n-m}} = \binom{m}{t} q^t (1-q)^{n-m}$$

$$\Longrightarrow Y \mid \{X=m\} \sim Bin(m,q)$$

□

סעיף ב'

נראה כי אם עבור $0 \leq m \leq n$ מתקיים $W \mid \{X = m\} \sim Bin(m, q)$ אז $W \sim Bin(n, pq)$.

הוכחה: נרצה להשתמש בנוסחת ההסתברות השלמה

$$\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{m=k}^{n} \mathbb{P}(Y = k \mid X = m)\mathbb{P}(X = m)$$

אז

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y = k) &= \sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k} q^k (1-q)^{m-k} \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m} \\
&\underset{(\star)}{=} q^k \binom{n}{k} \sum_{m=k}^{n} \binom{n-k}{m-k} (pq)^k (1-p)^{n-m} (1-q)^{m-k} \\
&= q^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \sum_{m=k}^{n} \binom{n-k}{m-k} (p(1-q))^{m-k} \\
&= q^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} (p(1-q))^{j} \\
&= q^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} (pq)^k (1-pq)^{n-k}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow Y \sim Bin(n, pq)$$

כאשר $(\star)$ נובע מכך $\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$. $\square$

שאלה 4

יהיו $X, Y \sim Geo(p)$ משתנים מקריים בלתי־תלויים.

סעיף א'

נחשב את ההתפלגות של $\min\{X, Y\}$.

פתרון: בהרצאה ראינו שמשתנה מקרי נתמך על השלמים מתפלג $Geo(p)$ אם ורק אם לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $\mathbb{P}(Z > n) = (1-p)^n$, אז בפרט מתקיים

$$\mathbb{P}(X \geq n) = \sum_{m=n}^{\infty} \mathbb{P}(X = m) = \sum_{m=n}^{\infty} (1-p)^{m-1} p = p \sum_{m=n+1}^{\infty} (1-p)^m \underset{\text{טור הנדסי}}{=} p \cdot \frac{(1-p)^{n+1} - 0}{1-(1-p)} = (1-p)^{n+1}$$

כאשר מהיות $p \in (0,1]$ מתקיים $\lim_{m\to\infty} (1-p)^m = 0$.
בפרט מתקיים

$$\mathbb{P}(\min\{X,Y\} \geq k) = \mathbb{P}(X \geq k, Y \geq k) \underset{\text{אי־תלות}}{=} \mathbb{P}(X \geq k)\mathbb{P}(Y \geq k) = (1-p)^{k-1}(1-p)^{k-1} = (1-p)^{2k-2}$$

נשאר אם־כך לחשב

$$\mathbb{P}(\min\{X,Y\} = k) = \mathbb{P}(\min\{X,Y\} \geq k) - \mathbb{P}(\min\{X,Y\} \geq k+1) = (1-p)^{2k-2} - (1-p)^{2k}$$
$$= (1-p)^{2k}((1-p)^{-2} - 1) = (1-p)^{2k} \frac{2p-p^2}{(1-p)^2} = (1-p)^{2k-2}(2p-p^2)$$

□

סעיף ב'

נחשב את ההתפלגות של $X + Y$.

פתרון: נגדיר משתנה מקרי חדש $Z = X + Y$ ונשתמש בקונבולוציה:

$$\mathbb{P}(Z = z) = \mathbb{P}(X + Y = z) = \sum_{k=1}^{z-1} \mathbb{P}(X = k, Y = z-k) \underset{\text{אי־תלות}}{=} \sum_{k=1}^{z-1} \mathbb{P}(X-k)\mathbb{P}(Y = z-k)$$
$$= \sum_{k=1}^{z-1} \big(p(1-p)^{k-1}\big)\big(p(1-p)^{z-k-1}\big) = \sum_{k=1}^{z-1} p^2(1-p)^{z-2} = p^2(1-p)^{z-2} \sum_{k=1}^{z-1} 1 = p^2(1-p)^{z-2}(z-1)$$

□

סעיף ג'

נחשב את ההתפלגות של $X - Y$.

פתרון: שוב עם קונבולוציה

$$\mathbb{P}(X - Y = z) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = k+z, Y = k) \underset{\text{אי־תלות}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = k+z)\mathbb{P}(Y = k)$$

כאשר האינדקסי סכימה נובעים מכך ש־$X = Z + Y$ ולכן הערכים האפשריים עבור Y הם עבור $k \geq 1$ כי משתנה מקרי גיאומטרי ובאותו אופן עבור X צריך להתקיין $z + k \geq 1 \implies k \geq 1 - z$.
אז האינדקס ההתחלתי לסכימה יהיה $\max\{1, 1-z\}$ ומהגדרת המשתנה המקרי הגיאומטרי יהיה חיבי להתקיים $k = 1$ להתחלה.
כעת יש שלוש אופציות:

$$X > Y \qquad X < Y \qquad X = Y \underset{\text{בהתאמה}}{\implies} z \geq 1, \qquad z \leq -1, \qquad z = 0$$

עבור $z = 0$ זה המקרה הדי טריוויאלי

$$\mathbb{P}(X-Y=0)=\mathbb{P}(X=Y)=\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=k)=\sum_{k=1}^{\infty}\big(p(1-p)^{k-1}\big)\big(p(1-p)^{k-1}\big)=p^2(1-p)^{-2}\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^2k$$

$$\underset{\text{טור הנדסי}}{=}p^2(1-p)^{-2}\frac{(1-p)^2}{p(2-p)}=\frac{p}{2-p}$$

כעת עבור $z\geq 1$ נקבל

$$\mathbb{P}(X-Y=z)=\sum_{k=1}^{\infty}\big(p(1-p)^{z+k-1}\big)\big(p(1-p)^{k-1}\big)=p^2\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{z+2k-2}=p^2(1-p)^{z-2}\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{2k}$$

$$\underset{\text{טור הנדסי}}{=}p^2(1-p)^{z-2}\frac{(1-p)^2}{p(2-p)}=\frac{p(1-p)^z}{2-p}$$

עבור $z\leq -1$ נשים לב שמתקיים

$$\mathbb{P}(X-Y=z)\underset{m=-z}{=}\mathbb{P}(X-Y=-m)=\mathbb{P}(Y-X=m)$$

אבל

$$\mathbb{P}(Y-X=m)=\mathbb{P}(X-Y=m)$$

מטעמי סימטרייה, ולכן עבור $z\leq -1$ נקבל מהמקרה הקודם

$$\mathbb{P}(X-Y=z)\mathbb{P}(Y-X=-z)=\frac{p(1-p)^{-z}}{2-p}$$

נשים לב שבעצם בכל המקרים קיבלנו את אותה התוצאה, כלומר לכל $k\in\mathbb{Z}$ מתקיים

$$\mathbb{P}(X-Y=k)=\frac{p(1-p)^{|k|}}{2-p}$$

□

סעיף ד'

נחשב את ההתפלגות של $\max\{X,Y\}$.

פתרון: ראשית נשים לב מהגדרת המקסימום שמתקיים

$$\mathbb{P}(\max\{X,Y\}\leq k)=\mathbb{P}(X\leq k,Y\leq k)\underset{\text{אי-תלות}}{=}\mathbb{P}(X\leq k)\mathbb{P}(Y\leq k)=\big(1-(1-p)^k\big)^2$$

ובאופן דומה לסעיפים הקודמים שכן אנחנו נתמכים על הטבעיים

$$\mathbb{P}(\max\{X,Y\}=k)=\mathbb{P}(\max\{X,Y\}\leq k)-\mathbb{P}(\max\{X,Y\}\leq k-1)=\big(1-(1-p)^k\big)^2-\big(1-(1-p)^{k-1}\big)^2$$

□

שאלה 5

נגדיר Y_i סדרה של משתנים מקריים בלתי־תלויים שווי התפלגות על $\mathbb{Z}$ ונגדיר

$$n \geq 0,\ X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i, \qquad Z = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{X_n=0}$$

נניח $p := 1 - \mathbb{P}(\exists n > 0 \mid X_n = 0) > 0$ ונראה כי $Z \sim Geo(p)$.

פתרון: ראשית נשים לב $\mathbb{P}(Z=0)=0$.

ראשית בגלל ש־$\{Y_i\}$ שווי התפלגות על $\mathbb{Z}$ נובע שאפשר לקבל ערכים שליליים עליהם ואם נסתכל על הסכום $X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ עבור $n \geq 0$ אז הוא יכול להיות אפס אם החלק השלילי של הסכום מבטל את החלק החיובי של הסכום, כלומר אם נסתכל על זה כצעדים חזרנו למקור.

אז נגדיר

$$T_0 = 0,\ T_1 = \inf\{n >, X_n = 0\},\ T_k = \inf\{n > T_{k-1} \mid X_n = 0\}$$

כאשר כקונבנציה $\inf\emptyset = \infty$ ונגדיר $q = \mathbb{P}(T_1 < \infty)$ ולכן $p = 1 - q$ (שמתאים להגדרה שנתונה לנו) ולכן באופן שקול אפשר להסתכל על $Z = 1 + \#\{n > 0 \mid X_n = 0\}$ ונרצה להראות $\mathbb{P}(Z=m) = q^{m-1}p$ עבור $m \geq 1$:

עבור $k \geq 1$ מתקיים

$$\{Z \geq k+1\} = \{\text{חזרנו לפחות } k+1 \text{ פעמים לראשית}\} = \{T_k < \infty\}$$

כלומר

$$\mathbb{P}(Z \geq k+1) = \mathbb{P}(T_k < \infty)$$

ונראה באינדוקציה על k שמתקיים $\mathbb{P}(T_k < \infty) = q^k$: מקרה בסיס נכון מהגדרה ולכן נניח ש־$\{T_k = n\}$ ונרצה להראות $\{T_{k+1} < \infty\}$ בהינתן $\{T_k = n\}$, אז עבור $m > n$ יש לנו

$$X_m = X_n + \sum_{i=n+1}^{m} Y_i = \sum_{i=n+1}^{m} Y_i$$

אבל מהגדרת האי־תלות אם נסמן $A = \{T_k = n\}$ ו־$B = \{T_{k+1} < \infty\}$ הם בלתי־תלויים : שכן A תלוי רק ב־$Y_1, ..., Y_n$ ו־B תלוי ב־$Y_{n+1}, Y_{n+2}, ...$ ולכן

$$\mathbb{P}(T_{k+1} \mid T_k = n) = \frac{\mathbb{P}(T_{k+1} < \infty, T_k = n)}{\mathbb{P}(T_k = n)} = \mathbb{P}(T_{k+1} < \infty)\frac{\mathbb{P}(T_k = n)}{\mathbb{P}(T_k = n)} = \mathbb{P}(T_{k+1} < \infty) = \mathbb{P}(T_1 < \infty) = q$$

כאשר המעבר האחרון נובע מכך שלא משנה באיזה זמן התחלנו, ההסתברות שלא נחזור לראשית היא תמיד q, לא משנה בנקודה בזמן של תחילת הצעדים.

אם כך מתקיים

$$\mathbb{P}(T_{k+1} < \infty) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(T_{k+1} < \infty, T_k = n) \underset{\text{הסתברות שלמה}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(T_k = n)\mathbb{P}(T_{k+1} < \infty \mid T_k = n) = q\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(t_k = n)$$
$$= q \cdot \mathbb{P}(T_k < \infty) \underset{\text{הנחת האינדוקציה}}{=} q \cdot q^k = q^{k+1}$$

אז סיימנו את מהלך האינדוקציה.

אם $Z \sim Geo(p)$ הוא נתמך על הטבעיים ולכן עבור $m \geq 1$ יש לנו

$$\mathbb{P}(Z \geq m) = \mathbb{P}(T_{m-1} < \infty) = q^{m-1}$$

כלומר

$$\mathbb{P}(Z = m) = \mathbb{P}(Z \geq m) - \mathbb{P}(Z \geq m+1) = q^{m-1} - q^m = q^{m-1}(1-q) = q^{m-1}p$$

אם $m = 1$ זה בסדר כי כקונבנציה הגדרנו $\mathbb{P}(Z=0)=0$. $\square$

שאלה 6

נראה כי אם $X \sim Poi(\lambda), Y \sim Poi(\eta)$ בלתי־תלויים אז לכל $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ מתקיים

$$(X \mid X+Y=n) \sim Bin\left(n, \frac{\lambda}{\lambda+\eta}\right)$$

פתרון: נגדיר את המשתנה המקרי $Z = X+Y$ ולפי מה שראינו בהרצאה/תרגול מתקיים $Z \sim Poi(\lambda+\eta)$.
מהגדרת ההסתברות המותנית אנחנו מחפשים את

$$\mathbb{P}(X=k \mid X+Y=n) = \frac{\mathbb{P}(X=k, X+Y=n)}{\mathbb{P}(X+Y=n)}$$

עבור $X+Y=n$ כאשר $X=k$ אנחנו צריכים $Y=n-k$ ולכן $\{X=k, X+Y=n\} = \{X=k, Y=n-k\}$.
$X, Y \sim Poi$ ולכן אי־שליליים ועל־כן $k \geq 0$ ובהתאמה $n-k \geq 0 \iff k \leq n$ ולכן $k \in \{0,1,...,n\}$ וכמובן X, Y בלתי־תלויים ומתפלגים פואסון ולכן בסך־הכל

$$\mathbb{P}(X=k \mid X+Y=n) = \frac{\mathbb{P}(X=k, X+Y=n)}{\mathbb{P}(X+Y=n)} = \frac{\mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=n-k)}{\mathbb{P}(X+Y=n)} = \frac{\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}\frac{e^{-\eta}\eta^{n-k}}{(n-k)!}}{\frac{e^{-(\lambda+\eta)}(\lambda+\eta)^n}{n!}}$$

$$= \frac{\frac{e^{-(\lambda+\eta)}\lambda^k\eta^{n-k}}{k!(n-k)!}}{\frac{e^{-(\lambda+\eta)}(\lambda+\eta)^n}{n!}} = \frac{\frac{\lambda^k\eta^{n-k}}{k!(n-k)!}}{\frac{(\lambda+\eta)^n}{n!}} = \frac{n!\lambda^k\eta^{n-k}}{k!(n-k)!(\lambda+\eta)^n} = \binom{n}{k} \cdot \frac{\lambda^k}{(\lambda+\eta)^k} \cdot \frac{\eta^{n-k}}{(\lambda+\eta)^{n-k}}$$

$$= \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{\lambda}{\lambda+\eta}\right)^k \cdot \left(\frac{\eta}{\lambda+\eta}\right)^{n-k}$$

נסמן

$$p = \frac{\lambda}{\lambda+\eta} \Longrightarrow 1-p = 1 - \frac{\lambda}{\lambda+\eta} = \frac{\eta}{\lambda+\eta}$$

ונקבל

$$\mathbb{P}(X=k \mid X+Y=n) = \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{\lambda}{\lambda+\eta}\right)^k \cdot \left(\frac{\eta}{\lambda+\eta}\right)^{n-k} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

וזו בידיוק התפלגות בינומית עם פרמטר $p = \frac{\lambda}{\lambda+\eta}$. $\square$

שאלה 7

אלקרס וג'וקוביץ משחקים טניס זה מול זה. ההסתברות של אלקרס לנצח במערכה אחת של המשחק היא $\frac{2}{3}$, באופן בלתי־תלוי בתוצאות המערכות הקודמות. השניים משחקים עד אשר אחד מהם זוכה ב־3 מערכות.

מה ההסתברות שאלקרס יזכה במשחק? איך הדבר קשור להתפלגות בינומית?

פתרון: נסמן ב־X_i את המאורע שאלקרס זכה במערכה ה־i ולפי הנתון $X_i \sim Ber\left(\frac{2}{3}\right)$ ולכן מהנתון על האי־תלות נקבל $X = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Bin\left(n, \frac{2}{3}\right)$ כאשר יש לנו n סיבובים.

נבחין שאם $n > 5$ יש לפחות 3 נצחונות לאחד מהם ולכן סיימנו, אז מספיק לחשב עד $n = 5$ אז

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \geq 3) &= \mathbb{P}(X = 3) + \mathbb{P}(X = 4) + \mathbb{P}(X = 5) \\
&\underset{X \sim Bin\left(n, \frac{2}{3}\right)}{=} \sum_{k=3}^{5} \binom{5}{k} \left(\frac{2}{3}\right)^{k} \left(\frac{1}{3}\right)^{5-k} \\
&= \binom{5}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{2} + \binom{5}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{1} + \binom{5}{5}\left(\frac{2}{3}\right)^{5}\left(\frac{1}{3}\right)^{0} \\
&= 0.79
\end{aligned}$$

□