פתרון מטלה 11 — תורת ההסתברות 1, 80420

24 בינואר 2026

שאלה 1

תהיי $\lambda > 0$ ויהיו $X_n \sim Bin(\frac{\lambda}{n}, n)$. נוכיח כי $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} Poi(\lambda)$.

הוכחה: ראשית ניזכר שעבור $k \in \{0, ..., n\}$ מתקיים

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\dots\cdot(n-k+1)}{k!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$$
$$= \frac{\lambda^k}{k!}\frac{n\cdot(n-1)\cdot\dots\cdot(n-k+1)}{n^k}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$$

נבחן מה קורה כאשר $n \to \infty$ לכל איבר במכפלה, כאשר $\frac{\lambda^k}{k!}$ נשאר קבוע:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot(n-1)\cdot\dots\cdot(n-k+1)}{n^k} = \lim_{n\to\infty}\prod_{j=0}^{k-1}\frac{n-j}{n} = \lim_{n\to\infty}\prod_{j=0}^{k-1}\left(1-\frac{j}{n}\right) = 1$$

כלומר

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(X_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

אבל ראינו שאם $X \sim Poi(\lambda)$ מתקיים

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

וזו בדיוק ההגדרה של התכנסות בהתפלגות לפי נקודות הרציפות. $\square$

שאלה 2

סעיף א'

יהיו $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה של משתנים מקריים ויהי $c \in \mathbb{R}$, נוכיח כי $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} Y$ עבור $Y \overset{a.s.}{=} c$ אם ורק אם לכל $\varepsilon > 0$ מתקיים

$$\mathbb{P}(|X_n - c| < \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

הוכחה: $\Longleftarrow$ מההנחה נקבל

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & x < c \\ 1 & x \geq c \end{cases}$$

כלומר יש לנו רציפות לכל $x \neq c$.

מההגדרת התכנסות בהתפלגות נובע שבכל נקודת רציפות של F_Y מתקיים $F_{X_n}(x) \underset{n\to\infty}{\to} F_Y(x)$.

בפרט, לכל $\varepsilon > 0$ נחלק לשני מקרים

1. $c - \varepsilon < 0$ ולכן $F_{X_n}(c - \varepsilon) \to 0$
2. $c + \varepsilon > 0$ ולכן $F_{X_n}(c + \varepsilon) \to 1$

אבל

$$\mathbb{P}(|X_n - c| < \varepsilon) = F_{X_n}(c + \varepsilon) - F_{X_n}(c - \varepsilon) \underset{n\to\infty}{\to} 1 - 0 = 1$$

$\Longrightarrow$ בכיוון השני, מההנחה נובע שלכל $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}(c - \varepsilon < X_n < c + \varepsilon) \underset{n\to\infty}{\to} 1$$

כלומר

$$F_{X_n}(c - \varepsilon) \underset{n\to\infty}{\to} 0 \qquad F_{X_n}(c + \varepsilon) \underset{n\to\infty}{\to} 1$$

יהי $x \neq c$

1. אם $x < c$ נבחר ε כך ש־$x < c - \varepsilon$ ולכן

$$F_{X_n}(x) \leq F_{X_n}(c - \varepsilon) \underset{n\to\infty}{\to} 0 = F_Y(x)$$

2. אם $x > c$ נבחר ε כך ש־$x > c + \varepsilon$ ולכן

$$F_{X_n}(x) \geq F_{X_n}(c + \varepsilon) \underset{n\to\infty}{\to} 1 = F_Y(x)$$

כלומר בכל נקודת רציפות של F_Y מתקיים

$$F_{X_n}(x) \underset{n\to\infty}{\to} F_Y(x) \Longrightarrow X_n \overset{d}{\underset{n\to\infty}{\to}} Y \overset{a.s.}{=} c$$

□

סעיף ב'

תהיי $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה של משתנים מקריים כך ש־$X_n \overset{a.s.}{\geq} 0$ לכל n ויהי X משתנה מקרי בדיד כך ש־$\mathrm{supp}(X) \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$.

נוכיח כי $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X$ אם ורק אם לכל $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ולכל $1 > \varepsilon > 0$ מתקיים

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - m| \leq \varepsilon) = \mathbb{P}(X = m)$$

הוכחה: ראשית נבחין שאם נקבע $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ אז עבור $0 < \varepsilon < 1$ אנחנו מקבלים שהקטע $[m - \varepsilon, m + \varepsilon]$ מכיל רק את m מבחינת הטבעיים ולכן

$$\{|X - m| \leq \varepsilon\} = \{X = m\}$$

שכן X נתמך על $\mathbb{N} \cup \{0\}$ והוא משתנה מקרי בדיד.

$\Longleftarrow$ מהגדרת ההתכנסות בהתפלגות נובע

$$\mathbb{P}(a < X_n \leq b) \underset{n\to\infty}{\to} \mathbb{P}(a < X \leq b)$$

כאשר a, b נקודות רציפות של F_X.
מההערה לעיל ומהיות $m-\varepsilon, m+\varepsilon$ נקודות רציפות של F_X, כלומר

$$\mathbb{P}(|X_n - m| \leq \varepsilon) = \mathbb{P}(m-\varepsilon \leq X_n \leq m+\varepsilon) \underset{n\to\infty}{\to} \mathbb{P}(m-\varepsilon \leq X \leq m+\varepsilon) = \mathbb{P}(X = m)$$

$\Longrightarrow$ מההנחה בכיוון השני נובע עבור $\varepsilon \in (0,1)$

$$F_{X_n}(k) = \mathbb{P}(X_n \leq k) = \sum_{m=0}^{k} \mathbb{P}(|X_n - m| \leq \varepsilon)$$

אבל המאורעות $\{|X_n - m| \leq \varepsilon\}$ הם זרים עבור $\varepsilon < 1$ נובע שאם ניקח גבול

$$F_{X_n}(k) \underset{n\to\infty}{\to} \sum_{m=0}^{k} \mathbb{P}(X = m) = F_X(k)$$

כלומר לכל נקודת רציפות של F_X מתקיים

$$F_{X_n}(k) \underset{n\to\infty}{\to} F_X(x)$$

ומהגדרה

$$X_n \underset{n\to\infty}{\overset{d}{\to}} X$$

$\square$

שאלה 3

יהיו $X \sim Exp(2), Y \sim Unif([1,2])$ משתנים מקריים בלתי־תלויים. נחשב את $\mathbb{E}\left(\frac{X}{Y}\right)$.

פתרון: נבחין ראשית כי $Y > 0$ כמעט־תמיד ומהיות X ו־Y בלתי־תלויים נובע כי X ו־$\frac{1}{Y}$ בלתי־תלויים (אי־תלות נשמרת תחת הפעלת פונקציות).
אז מהגדרת התוחלת למשתנים מקרים בלתי־תלויים

$$\mathbb{E}\left(\frac{X}{Y}\right) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}\left(\frac{1}{Y}\right)$$

מהיות $X \sim Exp(2)$ נובע כי

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2}$$

מהיות $Y \sim Unif([1,2])$ נובע כי

$$\forall 1 \le y \le 2,\ \ f_Y(y) = 1$$

שכן

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ \frac{t-1}{2-1} = (t-1) & 1 \le t \le 2 \\ 1 & t > 2 \end{cases}$$

ואז עם האבחנה שנגזרת פונקציית ההסתברות המצטברת היא פונקציית צפיפות ואם־כך לפי הגדרת התוחלת של פונקציה של משתנה מקרי

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{Y}\right) = \int_1^2 \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = [\ln(y)]_{y=1}^{y=2} = \ln(2)$$

אז

$$\mathbb{E}\left(\frac{X}{Y}\right) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}\left(\frac{1}{Y}\right) = \ln(2)\cdot\frac{1}{2}$$

□

שאלה 4

יהי $X \sim Unif([0,1])$ ו־$Z \sim Exp(2)$ בלתי־תלויים ויהי $Y = X + Z$. נחשב את הצפיפות של Y.

פתרון: כידוע

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \qquad f_Z(z) = \begin{cases} 2e^{-2z} & z \ge 0 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

לפי טענה 8.55 על צפיפות משותפת של סכום ועם נוסחת הקונבולוציה נקבל

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Z(y-x)\,\mathrm{d}x$$

נבחן את תחומי האינטגרציה: מהיות $0 \le x \le 1$ ומכך שצריך להתקיים $y - x \ge 0$ נקבל $x \le y$ וביחד $x \in [0, \min(y,1)]$ ולכן

$$f_Y(y) = \int_0^{\min(y,1)} 2e^{-2(y-x)}\,\mathrm{d}x = 2e^{-2y}\int_0^{\min(y,1)} e^{2x}\,\mathrm{d}x = 2e^{-2y}\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_{x=0}^{x=\min(y,1)} = e^{-2y}\left(e^{2\min(1,y)} - 1\right)$$

אם $0 \le y < 1$ אז $\min(1,y) = y$ ונקבל

$$f_Y(y) = e^{-2y}\left(e^{2y} - 1\right) = 1 - e^{-2y}$$

אם $y \ge 1$ אז $\min(1,y) = 1$ ונקבל

$$f_Y(y) = e^{-2y}(e^2 - 1)$$

כלומר

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1 - e^{-2y} & 0 \le y < 1 \\ e^{-2y}(e^2-1) & y \ge 1 \\ 0 & y < 0 \end{cases}$$

$\square$

שאלה 5

סעיף א'

יהיו $\omega, \tau > 0$ ויהו $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2\tau^2), Y \sim \mathcal{N}(0, \tau^2)$. אזי

$$\sigma Y \overset{d}{=} X$$

הוכחה: נגדיר $W = \sigma Y$ והוא משתנה נורמלי לפי טענה 8.45 שראינו בהרצאה על תכונות של משתנה נורמלית בבחירת $\alpha = \sigma, \beta = 0$ ונקבל

$$\sigma Y \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2\tau^2)$$

מהנתון אותו $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2\tau^2)$ נקבל ישר כי $\sigma Y \overset{d}{=} X$. □

סעיף ב'

יהיו $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2), Y \sim \mathcal{N}(0, \tau^2)$ בלתי־תלויים עבור $\tau, \sigma > 0$ כלשהם. אזי

$$X + Y \sim \mathcal{N}(0, \tau^2 + \sigma^2)$$

הוכחה: יהי $Z \in \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ ולפי טענה 8.45 תכונות של משתנה מקרי נורמלי מתקיים

$$\mathbb{E}(Z) = \mu \qquad \mathrm{Var}(Z) = \sigma^2$$

ובמקרה שלנו עם לינאריות התוחלת נקבל

$$\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = 0$$

היות והמשתנים בלתי־תלויים אז $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$ ולכן מסכום של שנויות

$$\mathrm{Var}(X + Y) = \sigma^2 + \tau^2$$

□

סעיף ג'

יהי $\mu \in \mathbb{R}$ ויהי $Z \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, נוכיח כי

$$\mu + Z \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

הוכחה: לפי ההערה בהוכחה של טענה 8.45 מספיק שנראה שהתוחלת היינה μ והשונות היינה σ^2.
החלק של השונות הוא ישיר מתכונת האדישות להזזות של השונות שכן $\mathrm{Var}(X + t) = \mathrm{Var}(X)$ לכל $t \in \mathbb{R}$ (כאשר ל־X יש שונות כמובן).
עבור התוחלת, מלינאריות התוחלת

$$\mathbb{E}(\mu + Z) = \mathbb{E}(\mu) + \mathbb{E}(Z) \underset{Z \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)}{=} \mu + 0 = \mu$$

□

סעיף ד'

יהיו $\sigma > 0, \mu \in \mathbb{R}$ ויהי $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$, נוכיח כי

$$\mu + \sigma Z \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

הוכחה: באופן דומה לסעיף הקודם, מספיק שנראה כי $\mathbb{E}(\mu + \sigma Z) = \mu, \mathrm{Var}(\mu + \sigma Z) = \sigma^2$.
נתחיל שוב מהשונות כי זה ישיר

$$\mathrm{Var}(\mu + \sigma Z) \underset{\text{אדישות להזזות}}{=} \mathrm{Var}(\sigma Z) \underset{\text{כיול ריבועי}}{=} \sigma^2\,\mathrm{Var}(Z) \underset{Z \sim \mathcal{N}(0,1)}{=} \sigma^2 \cdot 1 = \sigma^2$$

בשביל התוחלת

$$\mathbb{E}(\mu + \sigma Z) \underset{\text{לינאריות}}{=} \mathbb{E}(\mu) + \sigma\mathbb{E}(Z) \underset{Z \sim \mathcal{N}(0,1)}{=} \mu + \sigma \cdot 0 = \mu$$

□

סעיף ה'

יהיו $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ $\sigma, \tau > 0,$ ויהיו $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2), Y \sim \mathcal{N}(\nu, \tau^2), Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ ונמצא $a, b \in \mathbb{R}, b > 0$ כך שמתקיים

$$X + Y \overset{d}{=} a + bZ$$

הוכחה: נובע ישירות מכל הסעיפים הקודמים שכל משתנה נורמלי יכול להיכתב על־ידי צירוף לינארי עם משתנה מקרי נורמלי סטנדרטי

$$a + bZ$$

עבור $b > 0$, ואם כך

$$X + Y \overset{d}{=} \mu + \nu + \sqrt{\sigma^2 + \nu^2} Z$$

כאשר השורש נובע מהכיול הריבועי של השונות שנצטרך לנרמל ובעצם קיבלנו מכל הסעיפים לעיל הצגה אפינית לסכום של משתנים מקריים מתפלגים נורמלית. $\square$

שאלה 6

תהיי $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה של משתנים מקריים כך ש־$X_n \sim Unif([n])$. נוכיח כי מתקיים

$$\frac{X_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{d} Unif([0,1])$$

הוכחה: נגדיר $Y_n = \frac{X_n}{n}$ אזי מהיות ערכי $X_n \in \{1,2,...,n\}$ נובע כי $Y_n \in \left\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., 1\right\}$ $(\star)$.
אז לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$\mathbb{P}\left(\frac{X_n}{n} \leq x\right) = \mathbb{P}(X_n \leq xn)$$

אבל $X_n \sim Unif([n])$ ומ־$(\star)$ נובע כי עבור $0 \leq x \leq 1$ מתקיים

$$\mathbb{P}(X_n \leq nx) = \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$$

כלומר

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

אז אם נקבע $x \in (0,1)$ ונשאיף את n לאינסוף נקבל

$$\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \underset{n\to\infty}{\to} x$$

כלומר לכל $x \in (0,1)$

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = x$$

כלומר

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

אבל ההתכנסות הזאת רציפה על כל ערכייה ולכן נסיק

$$\frac{X_n}{n} \overset{d}{\to} Unif([0,1])$$

$\square$

שאלה 7

לכל $i \in [n^2]$ נגדיר $X_i \sim Exp(i)$ כך ש־$X_1, ..., X_{n^2}$ בלתי־תלויים ונחשב את

$$\mathbb{P}\left(\det\begin{bmatrix} X_1 & X_{n+1} & \cdots & X_{n^2-n+1} \\ X_2 & X_{n+2} & \cdots & X_{n^2-n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_n & X_{2n} & \cdots & X_{n^2} \end{bmatrix} = 0\right)$$

פתרון: ראשית $X_i \sim Exp(i)$ ולכן לכל $c \in \mathbb{R}$ מתקיים $\mathbb{P}(X_i = c) = 0$ מהגדרת המשתנה המקרי הרציף.
באינדוקציה על n:
עבור $n = 1$ מתקיים $A = (X_1)$ וכן $\det[X_1] = X_1$ ו־$X_1 \sim Exp(1)$ אז

$$\mathbb{P}(X_1 = 0) = 0 = \int_0^0 e^{-x}\,\mathrm{d}x = 0$$

שכן זו התפלגות רציפה.
נניח שהטענה נכונה למטריצות מגודל $(n-1)\times(n-1)$ ונפתח את הדטרמיננטה של A לפי העמודה האחרונה

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+n}X_{n^2-n+k}M_k$$

כאשר M_k הוא המינור שמתקבל ממחיקת השורה k והעמודה האחרונה.
אז אם נתנה על

$$\mathcal{F} = \sigma(X_1, ..., X_{n^2-n})$$

כל המינורים M_k הם קבועים והמשתנים $X_{n^2-n+1}, ..., X_{n^2}$ נשארים בלתי־תלויים, כלומר

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+n}M_kX_{n^2-n+k}$$

אבל מהנחת האינדוקציה, תת־המטריצה מסדר $(n-1)\times(n-1)$ היא הפיכה בהסתברות 1 ולכן לא ייתכן שכל המינורים $M_1, ..., M_k$ מתאפסים בו זמנית אלא באירוע בהסתברות 0 כמעט־תמיד, כלומר

$$\mathbb{P}(M_1, ..., M_n = 0) = 0$$

נשים לב שאם נקבע k כך ש־$M_k \neq 0$ נקבל

$$Y = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+n}M_kX_{n^2-n+k}$$

שכן לא כל המקדמים הם אפס בהסתברות 1 שכן אחרת ה־$n-1$ עמודות הקודמות היו תלויות לינארית בסתירה להנחה שלנו וכן Y משתנה מקרי לא קבוע רציף בהחלט (אקספוננציאלי) כסכום של משתנים מקריים כאלו.
אבל מהגדרת המשתנה המקרי הרציף אנחנו יודעים שמתקיים

$$\mathbb{P}(Y = 0 \mid \mathcal{F}) = 0$$

אבל מנוסחת התוחלת השלמה המותנית

$$\mathbb{P}(\det(A) = 0) = \mathbb{E}[\mathbb{P}(\det(A) = 0 \mid \mathcal{F})] = 0 \Longrightarrow \mathbb{P}(\det(A) = 0) = 0$$

קצת הסתבכתי עם לא לערב תורת המידה עם ההצדקה ללמה במקרה הזה הקבוצה $\{A \mid \det(A) = 0\}$ היא ממידה אפס, זה כן נובע אבל (נראה לי) מהעובדה שכשאנחנו מסתכלים על קבוצה ממימד נמוך יותר מהמרחב שאנחנו מדברים עליו הם ממידה אפס (רואים את זה גם באינפי3 על גרף של פונקציה): כי בסופו של יום דטרמיננטה $\det : \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$ היא פולינום לא קבוע כך שהקבוצה

$$\left\{x \in \mathbb{R}^{n^2} \mid \det(x) = 0\right\}$$

היא בעצם אוסף הפתרונות למשוואה אחת, כלומר ממימד נמוך יותר ועל־כן ממידה אפס ובהתאם עם הסתברות אפס (כי פונקציית הסתברות היא פונקציית מידה) שכן ל־$(X_1, ..., X_{n^2})$ יש צפיפות משותפת. $\square$