הכנה למבחן מועד א' — משפטים והוכחות נבחרים — תורת המידה, 80517

28 בינואר 2026

תוכן עניינים

1 מידה

1.1 תנאי שקול לפונקציה מדידה

משפט 1.1 (תנאי שקול לפונקציה מדידה): יהי $(X,\mathcal{A})$ מרחב מדיד. אם $f:X\to[-\infty,\infty]$ פונקציה אזי f מדידה אם ורק אם $f^{-1}((\alpha,\infty])$ לכל $\alpha\in\mathbb{R}$.

הוכחה:

$\Leftarrow$ מיידי מהגדרה כי אם f מדידה לכל $E\in\mathbb{B}([-\infty,\infty])$ מתקיים $f^{-1}(E)\in\mathcal{A}$ ולכן בהינתן $\alpha\in\mathbb{R}$ כלשהו, מתקיים $(\alpha,\infty]\in\mathbb{B}([\infty,\infty])$ ובפרט $f^{-1}((\alpha,\infty])\in\mathcal{A}$.

$\Longrightarrow$ מספיק להראות שהמקור של כל אחת מהקבוצות

$$(\alpha,\beta),\qquad(\alpha,\infty],\qquad[-\infty,\beta)$$

הוא מדיד, ואכן:

1. בהינתן $\beta\in\mathbb{R}$ מתקיים

$$f^{-1}([-\infty,\alpha))=\bigcup_{n=1}^{\infty}f^{-1}\left(\left[-\infty,\beta-\frac{1}{n}\right)\right)=\bigcup_{n=1}^{\infty}f^{-1}\left(\left(\beta-\frac{1}{n},\infty\right]^{c}\right)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(f^{-1}\left(\left(\beta-\frac{1}{n},\infty\right]\right)\right)^{c}\in\mathcal{A}$$

כאשר המעבר האחרון נובע מההנחה שלכל $\alpha\in\mathbb{R}$ מתקיים $f^{-1}((\alpha,\infty])$ ולכן לכל $n\in\mathbb{N}$ בפרט עבור $\alpha=\beta-\frac{1}{n}\in\mathbb{R}$ נקבל $f^{-1}\left(\left(\beta-\frac{1}{n},\infty\right]\right)\in\mathcal{A}$.
אבל $\mathcal{A}$ היא σ־אלגברה ולכן מצד אחד נקבל $\left(f^{-1}\left(\left(\beta-\frac{1}{n},\infty\right]\right)\right)^{c}\in\mathcal{A}$ לכל $n\in\mathbb{N}$ ומצד שני $\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(f^{-1}\left(\left(\beta-\frac{1}{n},\infty\right]\right)\right)^{c}$ לכל $\beta\in\mathbb{R}$, וזה סוגר את שני המקרים הימניים.

2. בהינתן $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

$$f^{-1}((\alpha,\beta))=f^{-1}([-\infty,\beta)\cap(\alpha,\infty])=f^{-1}([-\infty,\beta))\cap f^{-1}((\alpha,\infty])\in\mathcal{A}$$

כאשר המעבר האחרון נובע מכך ש־σ־אלגברה סגורה לחיתוכים סופיים.

כעת, אם $U\subseteq[-\infty,\infty]$ היא איחוד בן־מנייה של קבוצות מהצורה $(\star)$ ונקבל — ליתר דיוק: כעת, אם $U\subseteq[-\infty,\infty]$ אזי $U=\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n$ כאשר לכל $n\in\mathbb{N}$, I_n הוא מהצורה של $(\star)$ וכי קבוצה פתוחה ב־$[-\infty,\infty]$ היא איחוד בן־מנייה של קבוצות מהצורה $(\star)$ ונקבל

$$f^{-1}(U)=f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n\right)=\bigcup_{n=1}^{\infty}f^{-1}(I_n)\in\mathcal{A}$$

כלומר המקור של כל קבוצה פתוחה הוא מדיד ולכן f מדידה. $\square$

1.2 מדידות נשמרת תחת הפעלת sup/inf/limsup/liminf

משפט 1.2 (מדידות נשמרת תחת הפעלת sup/inf/limsup/liminf): יהי $(X,\mathcal{A})$ מרחב מדידה. אם $\{f_n:X\to[-\infty,\infty]\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות מדידות, אז הפונקציות

$$(1)\ \sup_{n\in\mathbb{N}}\{f_n\}\qquad(2)\ \inf_{n\in\mathbb{N}}\{f_n\}\qquad(3)\ \limsup_{n\to\infty}f_n\qquad(4)\ \liminf_{n\to\infty}f_n$$

כולן מדידות.

הוכחה: (1) נסמן $g:=\sup_{n\in\mathbb{N}}\{f_n\}$, ומספיק להראות שהקבוצה $g^{-1}((a,\infty])$ היא מדידה לכל $\alpha\in\mathbb{R}$, אז נרצה להראות

$$(\star)\ g^{-1}((\alpha,\infty))=\bigcup_{n=1}^{\infty}f_n^{-1}((a,\infty])$$

$\subseteq$: אם $x\in g^{-1}((\alpha,\infty])$ אז

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\{f_n(x)\}=g(x)\in(\alpha,\infty]>\alpha$$

כלומר קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך ש־$f_{n_0}(x)>\alpha$ (אחרת לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $f_n(x)\le\alpha$ וזו סתירה) אז

$$x\in f_{n_0}^{-1}((\alpha,\infty])\Longrightarrow x\in\bigcup_{n=1}^{\infty}f_n^{-1}((\alpha,\infty])\Longrightarrow g^{-1}((\alpha,\infty])\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}f_n^{-1}((\alpha,\infty])$$

$\supseteq$: אם $x\in\bigcup_{n=1}^{\infty}f_n^{-1}((\alpha,\infty])$ אז קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך ש־$x\in f_n^{-1}((\alpha,\infty])$ ולכן $f_{n_0}(x)\in(\alpha,\infty]$ כלומר $f_{n_0}(x)>\alpha$ ומתקיים

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\{f_n(x)\}\ge f(n_0)(x)>\alpha\Longrightarrow\sup_{n\in\mathbb{N}}\{f_n(x)\}>\alpha\Longrightarrow g(x)\in(\alpha,\infty]\Longrightarrow x\in g^{-1}((\alpha,\infty])$$

אז $(\star)$ נכון ולכן f_n מדידה לכל $n\in\mathbb{N}$ ולכן $f_n^{-1}((\alpha,\infty])$ מדידה לכל $n\in\mathbb{N}$, כלומר הקבוצה $g^{-1}((\alpha,\infty])$ היא איחוד בן־מנייה של קבוצות מדידות ולכן מדידה בעצמה וקיבלנו שהפונקציה g מדידה.
(2) זהה עבור קטעים מהצורה $[-\infty,\beta]$.
(3)

$$\limsup_{n\to\infty}f_n=\inf_{k\in\mathbb{N}}\left\{\sup_{\substack{n\in\mathbb{N}\\n\ge k}}\{f_n\}\right\}$$

ולכן עבור סדרת הפונקציות $\{h_k:X\to[-\infty,\infty]\}_{k=1}^{\infty}$ המוגדרת על־ידי

$$\forall k\in\mathbb{N},\ h_k:=\sup_{\substack{n\in\mathbb{N}\\n\ge k}}\{f_n\}$$

מתקיים מ־(1) ש־$\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות מדידות ונקבל מ־(2) ש־$\inf_{k\in\mathbb{N}}\{h_k\}$ מדידה ולכן $\limsup_{n\to\infty}f_n$ מדידה.
(4) באותו אופן למקרה הקודם רק עבור

$$\liminf_{n\to\infty}f_n=\sup_{k\in\mathbb{N}}\left\{\inf_{\substack{n\in\mathbb{N}\\n\ge k}}\{f_n\}\right\}$$

□

2 אינטגרציה

2.1 לכל פונקציה מדידה יש סדרת פונקציות פשוטות שמתכנסת אליה

משפט 2.1 (לכל פונקציה מדידה יש סדרת פונקציות פשוטות שמתכנסת אליה): אם $f : X \to [0, \infty]$ פונקציה מדידה כלשהי, אז קיימת סדרת פונקציות פשוטות $\{s_n\} \mid X \to [0, \infty)_{n=1}^{\infty}$ כך שמתקיים

1. $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית עולה וחסומה על־ידי f, כלומר

$$\forall n, m \in \mathbb{N},\ m \leq n \Longrightarrow 0 \leq s_m \leq s_n \leq f$$

2. הסדרה $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת נקודתית ל־f, כלומר

$$\forall x \in X,\ s_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$$

הוכחה: נגדיר $\varphi_n : [0, \infty) \to [0, \infty)$ על־ידי

$$\forall x \in [0, \infty),\ \varphi_n(x) := \begin{cases} 2^{-n} \cdot \lfloor 2^n \cdot x \rfloor & 0 \leq x < n \\ n & x \geq n \end{cases}$$

אז לכל $n \in \mathbb{N}$, φ_n היא צירוף לינארי של פונקציות מהצורה $\mathbb{1}_{\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}}$ לכל $0 \leq k \leq n \cdot 2^n - 1$ ולכן היא מדידה בורל ביחס ל־$[0, \infty)$ ולכן תמונתה סופית ו־φ_n היא פונקציה פשוטה.
לכל $x \in [0, n]$ ולכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$\lfloor 2^n x \rfloor \leq 2^n x < \lfloor 2^n x \rfloor + 1 \Longleftrightarrow 2^{-n} \lfloor 2^n x \rfloor \leq x < 2^{-n}(\lfloor 2^n x \rfloor + 1)$$

כלומר

$$\varphi_n(x) \leq x < \varphi_n(x) + 2^{-n} \Longleftrightarrow \varphi_n(x) \leq x \wedge x < \varphi_n(x) + 2^{-n} \Longleftrightarrow x \geq \varphi_n(x) \wedge \varphi_n(x) > x - 2^{-n} \Longleftrightarrow x - 2^{-n} < \varphi_n(x) \leq x$$

ולכן $x - 2^{-n} < \varphi_n(x) \leq x$ לכל $n \in \mathbb{N}, x \in [0, n]$ ומכאן הרי ש־$\varphi_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ לכל $x \in [0, n]$ וכן לכל $x \in [0, \infty)$ מתקיים

$$\forall n, m \in \mathbb{N},\ n \leq m \Longrightarrow \varphi_n \leq \varphi_m \leq x$$

ולכן $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית עולה ואם לכל $n \in \mathbb{N}$ נגדיר $s_n := \varphi_n \circ f$ נקבל את הטענה שכן הרכבת פונקציות מדידות היא פונקציה מדידה, אז $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ מקיימת את הנדרש. $\square$

2.2 תכונות האינטגרל

משפט 2.2 (תכונות האינטגרל): תהיינה $f,g:X\to[0,\infty]$ פונקציות מדידות ותהיינה $A,B,E\in\mathcal{E}$ מדידות.
האינטגרל של f,g ביחס ל־μ מקיים את התכונות הבאות

1. מונוטוניות של f,g: אם $0\le f\le g$ אזי $0\le\int_A f\,\mathrm{d}\mu\le\int_A g\,\mathrm{d}\mu$
2. מונוטוניות ביחס להכלה: אם $0\le f$ ו־$A\subseteq B$ אזי $\int_A f\,\mathrm{d}\mu\le\int_B f\,\mathrm{d}\mu$
3. הומוגניות: אם $0\le f$ ו־$c\in[0,\infty)$ אזי $\int_A c\cdot f\,\mathrm{d}\mu=c\cdot\int_A f\,\mathrm{d}\mu$
4. אם $f|_E\equiv 0$ אזי $\int_E f\,\mathrm{d}\mu=0$ (גם אם $\mu(E)=\infty$)
5. אינטגרציה על קבוצות ממידה אפס: אם $\mu(E)=0$ אזי $\int_E f\,\mathrm{d}\mu=0$ (גם אם $f|_E\equiv\infty$)
6. אינטגרציה על קבוצה בניסוח עם הפונקציה המציינת: אם $0\le f$ אזי $\int_E f\,\mathrm{d}\mu=\int_X f\cdot\mathbb{1}_E\,\mathrm{d}\mu$
7. אינטגרציה על איחוד זר: אם $A\cap B=\emptyset$ אזי $\int_{A\cup B} f\,\mathrm{d}\mu=\int_A f\,\mathrm{d}\mu+\int_B\mathrm{d}\mu$

הוכחה:

1. בלי הגבלת הכלליות, $X=E$ אחרת ניקח לכל $E\in\mathcal{A}$, $g\cdot\mathbb{1}_E, f\cdot\mathbb{1}_E$ ועדיין נחשב אינטגרציה על כל X ונקבל מהגדרה

$$\int fd\mu=\sup\left\{\int_E sd\mu\mid 0\le s\le f,\ \text{פשוטה } s\right\}$$

מהיות $0\le f\le g$ נובע גם שלכל s כזאת מתקיים $0\le s\le g$ ולכן מתקיים

$$\left\{\int_E sd\mu\mid 0\le s\le f,\ \text{פשוטה } s\right\}\subseteq\left\{\int_E sd\mu\mid 0\le s\le g,\ \text{פשוטה } s\right\}$$

ובפרט בלקיחת סופרמום

$$\int fd\mu=\sup\left\{\int_E sd\mu\mid 0\le s\le f,\ \text{פשוטה } s\right\}\subseteq\sup\left\{\int_E sd\mu\mid 0\le s\le g,\ \text{פשוטה } s\right\}=\int gd\mu$$

2. יהי $x\in X$.
אם $x\in A$ אז $\mathbb{1}_A(x)=1$ ומהנתון $A\subseteq B$ מתקיים $\mathbb{1}_B(x)=1$.
אם $x\notin A$ אזי $\mathbb{1}_A(x)=0$ ויש שתי אפשרויות: או ש־$x\in B$ או ש־$x\notin B$, כלומר או ש־$\mathbb{1}_B(x)=1$ או ש־$\mathbb{1}_B(x)=0$.
בין כה וכה, מכך ש-$A\subseteq B$ נובע כי בהתאמה מתקיים $\mathbb{1}_A(x)\le\mathbb{1}_B(x)$ לכל $x\in X$.
בפרט נובע מכך שלכל $x\in X$ מתקיים $f\cdot\mathbb{1}_A(x)\le f\cdot\mathbb{1}_B(x)$ והם בהתאמה מתאימים מהגדרה ל־$\int_A fd\mu,\int_B fd\mu$.
מהסעיף הקודם נובע אם כך ש־$\int_A fd\mu\le\int_B fd\mu$ (הסעיף הקודם הוא מונוטוניות האינטגרל) עבור $E=X$.
3. תהי $E\in\mathcal{A}$, ותהיי $s\le f$ פונקציה פשוטה כך שמתקיים $s=\sum_{i=1}^n\alpha_i\mathbb{1}_{E_i}$ עם $\alpha_i\ge 0$ ו־$\{E_i\}$ קבוצות זרות בזוגות ומדידות ב־E.
ראינו שמתקיים $\int_E sd\mu=\sum_{i=1}^n\alpha_i\mu(E_i)$.
נבחין שגם cs היא פונקציה פשוטה שכן

$$cs(x)=\sum_{i=1}^n(c\alpha_i)\mathbb{1}_{E_i}(x)\Longrightarrow\int_E cs(x)d\mu=\sum_{i=1}^n(c\alpha_i)\mu(E_i)=c\sum_{i=1}^n\alpha i\mu(E_i)=c\int_E sd\mu$$

נסמן מהגדרה

$$\int_E fd\mu=\sup\left\{\int_E sd\mu\mid 0\le s\le f,\ \text{פשוטה } s\right\}=S_f$$

$$\int_E cfd\mu=\sup\left\{\int_E pd\mu\mid 0\le p\le cf,\ \text{פשוטה } p\right\}=S_{cf}$$

נשים לב שלכל $0\le p\le cf$, אם $c>0$ אז אם נגדיר פונקציה פשוטה $0\le s'=\frac{p}{c}\le f$ ומתקיים ממה שראינו לעיל,

$$\int_E pd\mu=\int_E csd\mu=c\int_E d\mu$$

זה נכון לכל p פשוטה כזאת ולכן

$$S_{cf}=\sup\left\{c\int_E sd\mu \mid 0\le s\le f,\ \text{פשוטה } s\right\}\underset{\text{מכפלה עם סופרמה אי-שלילית}}{=}c\cdot\sup\left\{\int_E sd\mu \mid 0\le s\le f,\ \text{פשוטה } s\right\}=c\cdot S_f$$

אם $c=0$, אנחנו רוצים להראות

$$\int_E 0\cdot f\mu=0\cdot\int_E fd\mu$$

בצד שמאל יש לנו פשוט את הפונקציה $g\equiv 0$ וזאת כמובן פונקציה פשוטה ולכן

$$\int_E 0d\mu=\sum_{i=1}^n\alpha_i\mu(E_i)=\sum_{i=1}^n 0\mu(E_i)=0$$

מצד שני, יש לנו $0\cdot\int_E fd\mu$ שתמיד כמובן שווה לאפס בזכות הקונבנציה $0\cdot\infty=0$.

4. תהיי $s=\sum_{i=1}^n\alpha_i\mathbb{1}_{A_i}$ פונקציה פשוטה ואם נסתכל על E אזי $0\le s\le f$ וכן $f|_E\equiv 0$ ולכן על E, $s(x)=0$ לכל $x\in E$ ומהגדרה

$$\int_E s\,\mathrm{d}\mu=\sum\alpha_i\mu(A_i\cap E)$$

ולכן אם $A_i\cap E$ לא ריקה אז המקדמים α_i חייבים להיות אפסים ולכן הסכום הוא בידיוק 0; מהגדרת אינטגרל לבג

$$\int_E f\,\mathrm{d}\mu=\sup\left\{\int_E s\,\mathrm{d}\mu \mid 0\le s\le f,\text{פשוטה } s\right\}$$

אבל לכל פשוטה הנימוק לעיל תקף כלומר האינטגרל על כל הקבוצה הוא 0 ולכן $\int_E f\,\mathrm{d}\mu=0$ (ניזכר כי $0\cdot\infty=0$ ולכן גם הסוגריים נכונים).

5. תהיי $0\le s\le f$ פונקציה פשוטה $s=\sum_{i=1}^n\alpha_i\mathbb{1}_{A_i}$ ומהגדרת האינטגרל

$$\int_E s\,\mathrm{d}\mu=\sum_{i=1}^n\alpha_i\cdot\mu(A_i\cap E)$$

אבל $\mu(E)=0$ ו-$A_i\cap E\subseteq E$ ולכן ממונוטוניות, $\mu(A_i\cap E)=0$ כלומר $\int_E s\,\mathrm{d}\mu=0$; זה נכון לכל פונקציה פשוטה ולכן מהגדרת האינטגרל מתקיים $\int_E f\,\mathrm{d}\mu=0$ (אפשר וצריך לסיים עם משפט ההתכנסות המונוטונית ועם $\{s_n\}_{n=1}^\infty$ פשוטות כך ש-$s_n\nearrow f$)

6. מתקיים

$$\int_E\mathbb{1}_A\,\mathrm{d}\mu=\mu(A\cap E)$$

אבל $\mathbb{1}_A\cdot\mathbb{1}_E=\mathbb{1}_{A\cap E}$ ולכן

$$\int_X\mathbb{1}_A\cdot\mathbb{1}_E\,\mathrm{d}\mu=\int_X\mathbb{1}_{A\cap E}\,\mathrm{d}\mu=\mu(A\cap E)$$

אז הטענה נכונה לאינדיקטורים; תהיי $s=\sum_{i=1}^n\alpha_i\mathbb{1}_{A_i}$ פונקציה פשוטה, אז

$$\int_E s\,\mathrm{d}\mu=\sum_{i=1}^n\alpha_i\int_E\mathbb{1}_{A_i}\,\mathrm{d}\mu=\sum_{i=1}^n\alpha_i\int_X\mathbb{1}_{A_i}\cdot\mathbb{1}_E\,\mathrm{d}\mu=\int_X\left(\sum_{i=1}^n\alpha_i\mathbb{1}_{A_i}\right)\cdot\mathbb{1}_E\,\mathrm{d}\mu=\int_X s\cdot\mathbb{1}_E\,\mathrm{d}\mu$$

והטענה נכונה לפונקציות פשוטות; לבסוף, נשתמש במשפט ההתכנסות המונוטונית שכן יש $\{s_n\}_{n=1}^\infty$ פשוטות כך ש-$s_n\nearrow f$ נקודתית ונקבל

$$\int_E f\,\mathrm{d}\mu=\int_E\left(\lim_{n\to\infty}s_n\right)\mathrm{d}\mu=\lim_{n\to\infty}\int_E s_n\,\mathrm{d}\mu=\lim_{n\to\infty}\int_X s_n\cdot\mathbb{1}_E\,\mathrm{d}\mu=\int_X\left(\lim_{n\to\infty}s_n\cdot\mathbb{1}_E\right)\mathrm{d}\mu=\int_X f\cdot\mathbb{1}_E\,\mathrm{d}\mu$$

7. מתקיים $\mathbb{1}_{A\cup B}(x)=\mathbb{1}_A(x)+\mathbb{1}_B(x)$ ולכן מהפעלת הסעיף הקודם פעמיים בקצוות

$$\int_{A\cup B}f\,\mathrm{d}\mu=\int_X f\cdot\mathbb{1}_{A\cup B}\,\mathrm{d}\mu=\int_X f\cdot(\mathbb{1}_A+\mathbb{1}_B)\,\mathrm{d}\mu\underset{\text{לינאריות}}{=}\int_X f\cdot\mathbb{1}_A\,\mathrm{d}\mu+\int_X f\cdot\mathbb{1}_B\,\mathrm{d}\mu=\int_A f\,\mathrm{d}\mu+\int_B f\,\mathrm{d}\mu$$

$\square$

2.3 משפט ההתכנסות המונוטונית

משפט 2.3 (משפט ההתכנסות המונוטונית): יהי $(X, \mathcal{A}, \mu)$ מרחב מידה ותהיי $\{f_n \mid X \to [0, \infty]\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות מדידות.
אם $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית עולה, אזי הפונקציה

$$f \coloneqq \lim_{n\to\infty} f_n = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{f_n\}$$

מקיימת

$$\forall A \in \mathcal{A} \qquad \int_A f\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty}\int_A f_n\,\mathrm{d}\mu \Longrightarrow \forall A \in \mathcal{A} \qquad \int_A \lim_{n\to\infty} f_n\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty}\int_A f_n\,\mathrm{d}\mu$$

הוכחה: נוכיח עבור $A = X$ ואז להתבונן ב־$g_n = f_n \mathbb{1}_A$ ולהסיק את המקרה הכללי.
ממונוטוניות האינטגרל $0 \le \int f_1\,\mathrm{d}\mu \le \int f_2\,\mathrm{d}\mu \le \cdots \le \int f\,\mathrm{d}\mu$ ולכן $\alpha = \sup_n \int f_n\,\mathrm{d}\mu$ יקיים $\alpha \le \int f\,\mathrm{d}\mu$ ונרצה להראות $\alpha \ge \int f\,\mathrm{d}\mu$.
נראה שלכל $0 \le s \le f$ פשוטה מתקיים $\int s\,\mathrm{d}\mu \le \alpha$: תהיי $0 \le s \le f$ פשוטה ונקבע $0 < c < 1$, נסמן $E_n \coloneqq \{x \in X \mid f_n(x) \ge cs(x)\}$
ו־$E_n \uparrow X$ כלומר זוהי סדרה עולה של קבוצות מדידות שאיחודן הוא כל X.
מרציפות המידה לסדרות עולות נסיק כי לכל $A \in \mathcal{A}$

$$\mu(A \cap E_n) \underset{(\star)}{\to} \mu(A \cap (\cup E_n)) = \mu(A)$$

s פשוטה ולכן $s = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ ולכל n מתקיים

$$\alpha \ge \int f_n\,\mathrm{d}\mu \ge \int_{E_n} f_n\,\mathrm{d}\mu \ge c\cdot\int_{E_n} s\,\mathrm{d}\mu = c\cdot\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\mu(A_i \cap E_n) \underset{(\star)}{\to} c\cdot\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\mu(A_i) = c\cdot\int s\,\mathrm{d}\mu$$

$\square$

2.4 החלפת סדר אינטגרציה וסכום

משפט 2.4 (החלפת סדר אינטגרציה וסכום): יהי $(X,\mathcal{A},\mu)$ מרחב מידה. אם $\{f_n \mid X\to[0,\infty]\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות מדידות, אזי

$$\int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\int_X f_n\,\mathrm{d}\mu$$

הוכחה: באינדוקציה על $N\in\mathbb{N}$.
מקרה בסיס הוא אדטיביות האינטגרל עבור $N=2$ (עבור $N=1$ הטענה טריוויאלית): תהיינה $s,t : X\to[0,\infty]$ פונקציות פשוטות כלשהן כאשר

$$s=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \mathbb{1}_{A_i} \qquad t=\sum_{j=1}^{m}\beta_j\mathbb{1}_{B_j}$$

עבור $\{A_i\}_{i=1}^{n},\{B_j\}_{j=1}^{m}$ הן חלוקות של X ומתקיים

1. $\{A_i\cap B_j\}_{(i,j)\in[n\times m]}$ חלוקה של X
2. לכל $j\in[m]$ מתקיים $\bigcup_{i=1}^{n} A_i\cap B_j=B_j$ כי $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ חלוקה של X
3. לכל $i\in[n]$ מתקיים $\bigcup_{j=1}^{m} A_i\cap B_j = A_i$ כי $\{B_j\}_{j=1}^{m}$ חלוקה של X

מאדטיביות סופית של מידה נקבל

$$\sum_{j=1}^{m}\mu(A_i\cap B_j)\overset{(\star)}{=}\mu(A_i) \qquad \sum_{i=1}^{n}\mu(A_i\cap B_j)\overset{(\star\star)}{=}\mu(B_j)$$

אבל גם $s+t$ היא פונקציה פשוטה שכן

$$s+t=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(\alpha_i+\beta_j)\mathbb{1}_{A_i\cap B_j}$$

ולכן

$$\int_X (s+t)\,\mathrm{d}\mu=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(\alpha_i+\beta_j)\cdot\mu(A_i\cap B_j)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\cdot\sum_{j=1}^{m}\mu(A_j\cap B_j)+\sum_{j=1}^{m}\beta_j\cdot\sum_{i=1}^{n}\mu(A_i\cap B_j)$$

$$\underset{(\star),(\star\star)}{=}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\cdot\mu(A_i)+\sum_{j=1}^{m}B_j\cdot\mu(B_j)=\int_X s\,\mathrm{d}\mu+\int_X t\,\mathrm{d}\mu$$

אז הטענה נכונה עבור פונקציות פשוטות.
תהיינה $f_1,f_2\in\{f_n \mid X\to[0,\infty]\}_{n=1}^{\infty}$ מדידות ותהיינה $\{s_n\}_{n=1}^{\infty},\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרות עולות של פונקציות פשוטות כך שמתקיים

$$s_n\xrightarrow[n\to\infty]{}f_1 \qquad t_n\xrightarrow[n\to\infty]{}f_2$$

נקודתית ומאריתמטיקה של גבולות נקבל $s_n+t_n\xrightarrow[n\to\infty]{}f_1+f_2$ כאשר זו התכנסות עולה לכן לפי משפט ההתכנסות המונוטונית

$$\int_X(f_1+g_2)\,\mathrm{d}\mu=\lim_{n\to\infty}\int_X(s_n+t_n)\,\mathrm{d}\mu=\lim_{n\to\infty}\left(\int_X s_n\,\mathrm{d}\mu+\int_X t_n\,\mathrm{d}\mu\right)=\lim_{n\to\infty}\int_X s_n\,\mathrm{d}\mu+\lim_{n\to\infty}\int_X t_n\,\mathrm{d}\mu$$

$$=\int_X f_1\,\mathrm{d}\mu+\int_X f_2\,\mathrm{d}\mu$$

וזה מראה את בסיס האינדוקציה.
בשביל לסיים את האינדוקציה נשים לב $\sum_{n=1}^{N} f_n\xrightarrow[N\to\infty]{}\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ נקודתית כאשר הסדרה $\left\{\sum_{n=1}^{N} f_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה מונוטונית עולה ולכן ממשפט ההתכנסות המונוטוניות נקבל את הטענה, כנדרש. $\square$

2.5 קיום מידת אינטגרל

משפט 2.5 (קיום מידת אינטגרל): יהי $(X,\mathcal{A},\mu)$ מרחב מידה. אם $h:X\to[0,\infty]$ מדידה אזי הפונקציה $\nu:A\to[0,\infty]$ המוגדרת על־ידי

$$\forall E\in\mathcal{A},\ \nu(E)=\int_E h\,\mathrm{d}\mu$$

היא מידה על $(X,\mathcal{A})$ ובמקרה זה נסמן $\mathrm{d}\nu:=h\,\mathrm{d}\mu$ ויתר על־כן מתקיים

$$\int_X g\,\mathrm{d}\nu=\int_X g\cdot h\,\mathrm{d}\mu$$

לכל $g:X\to[0,\infty]$ מדידה.

הוכחה: בשביל להראות מידה עלינו להראות ש־ν אינה קבועה אינסוף ושהיא σ אדטיבית: ואכן, $\nu(\emptyset)=0$ ושנית תהיי $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת כלשהי של קבוצות מדידות זרות בזוגות ונסמן $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$ ואז

$$(\star)\ \mathbb{1}_E=\mathbb{1}_{\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{1}_{E_n}$$

ולכן

$$\begin{aligned}\nu\left(\dot{\bigcup_{n=1}^{\infty}}E_n\right)=\nu(E)\underset{\text{הגדרה}}{=}\int_E h\,\mathrm{d}\mu=\int_X h\mathbb{1}_E\,\mathrm{d}\mu\underset{(\star)}{=}\int_X h\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{1}_{E_n}\,\mathrm{d}\mu\\=\int_X\sum_{n=1}^{\infty}h\cdot\mathbb{1}_{E_n}\,\mathrm{d}\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\int_X h\cdot\mathbb{1}_{E_n}\,\mathrm{d}\mu=\sum_{n=1}^{\infty}h\,\mathrm{d}\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\nu(E_n)\end{aligned}$$

ולכן ν מידה על $(X,\mathcal{A})$.

עבור החלק השני, תהיי $s=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\mathbb{1}_{E_i}$ פונקציה פשוטה, אז

$$\begin{aligned}\int_X s\,\mathrm{d}\nu=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\nu(E_i)=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\int_{E_i}h\,\mathrm{d}\mu=\sum_{i=1}^{k}\int_{E_i}\alpha_i h\,\mathrm{d}\mu=\sum_{i=1}^{k}\int_X\alpha_i\mathbb{1}_{E_i}h\,\mathrm{d}\mu\\=\int_X\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\mathbb{1}_{E_i}h\,\mathrm{d}\mu=\int_X h\cdot\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\mathbb{1}_{E_i}\,\mathrm{d}\mu=\int_X h\cdot s\,\mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

אז עבור g מדידה כלשהי ניקח $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה עולה של פונקציות פשוטות כך ש־$s_n\xrightarrow[n\to\infty]{}g$ ונקבל ממשפט ההתכנסות המונוטוניות על מרחב המידה $(X,\mathcal{A},\nu)$ שמתקיים

$$\int_X g\,\mathrm{d}\nu=\lim_{n\to\infty}\int_X s_n\cdot h\,\mathrm{d}\mu=\int_X g\cdot h\,\mathrm{d}\mu$$

כי $\{s_n\cdot h\}_{n=1}^{\infty}$ היא עולה ו־$s_n\cdot h\xrightarrow[n\to\infty]{}g\cdot h$. $\square$

2.6 הלמה של פאטו

משפט 2.6 (הלמה של פאטו): יהי $(X, \mathcal{A}, \mu)$ מרחב מידה. אם $\{f_n : X \to [0, \infty]\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות מדידות כלשהי, אזי

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \, \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu$$

הוכחה: לכל $k \in \mathbb{N}$ נסמן $g_k := \inf_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ n\Rightarrow k}} \{f_n\}$ אזי הסדרה $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית עולה ואי־שלילית.
ממשפט ההתכנסות המונוטונית נקבל

$$\int_X \lim_{k\to\infty} g_k \, \mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int_X g_k \, \mathrm{d}\mu$$

ומתקיים מהגדרה

$$\lim_{k\to\infty} g_k = \lim_{k\to\infty} \inf_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ n\geq k}} \{f_n\} = \liminf_{n\to\infty} f_n$$

וביחד

$$(\star) \ \int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \, \mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int_X g_k \, \mathrm{d}\mu$$

מצד שני

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ g_k = \inf_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ n\geq k}} \{f_n\} \leq f_k \Longrightarrow g_k \leq f_k$$

ממונוטוניות האינטגרל נקבל

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ a_k := \int_X g_k \, \mathrm{d}\mu \leq \int_X f_k \, \mathrm{d}\mu =: b_k$$

אז לכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_k \leq b_k$ וכן מ־$(\star)$ נובע כי $\lim_{k\to\infty} a_k$ קיים ונקבל

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \, \mathrm{d}\mu \underset{(\star)}{=} \lim_{k\to\infty} \int_X g_k \, \mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} a_k \leq \liminf_{k\to\infty} b_k = \liminf_{k\to\infty} \int_X f_k \, \mathrm{d}\mu \Longrightarrow \int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \, \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{k\to\infty} \int_X f_k \, \mathrm{d}\mu$$

$\square$

2.7 הלמה של בורל־קנטלי

משפט 2.7 (הלמה של בורל־קנטלי)**:** יהי $(X,\mathcal{A},\mu)$ מרחב מידה ותהיי $\mathcal{A} \supseteq (E_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה של קבוצות מדידות כך שמתקיים

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)<\infty$$

אז

$$\mu\Big(\limsup_{n\to\infty}E_n\Big)=0$$

הוכחה: ממונוטוניות המידה והגדרת החיתוך

$$\limsup_{n\to\infty}E_n=\bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=i}^{\infty}E_j \Longrightarrow \mu\Big(\limsup_{n\to\infty}E_n\Big)=\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty}E_j\right)\underset{\forall i\in\mathbb{N}}{\leq}\mu\left(\bigcup_{j=i}^{\infty}E_j\right)\underset{\text{תת-אדטיביות המידה}}{\leq}\sum_{j=i}^{\infty}\mu\big(E_j\big)<\infty$$

כאשר המעבר האחרון נובע מההנחה ומטור זנב ולכן $\lim_{i\to\infty}\sum_{n=i}^{\infty}\mu(E_n)=0$, כלומר $\mu(\limsup_{n\to\infty}E_n)\leq 0$.
אבל μ מידה ולכן $0\leq\mu(\limsup_{n\to\infty}E_n)$ כלומר $\mu(\limsup_{n\to\infty}E_n)=0$. □

משפט 2.8 (אי־שיוויון המשולש האינטגרלי): אם $f \in L^1(\mu)$ אזי $\left|\int_X f \,\mathrm{d}\mu\right| \le \int_X |f| \,\mathrm{d}\mu$.

הוכחה: $\int_X f \,\mathrm{d}\mu \in \mathbb{C}$ ולכן קיים $\alpha \in \mathbb{C}$ עם $|\alpha| = 1$ עבורו מתקיים $\alpha \int_X f \,\mathrm{d}\mu = \left|\int_X f \,\mathrm{d}\mu\right| \in \mathbb{R}$ $(\star)$.
נקבל אם־כך

$$\begin{aligned}
\left|\int_X f \,\mathrm{d}\mu\right| &= \alpha \int_X f \,\mathrm{d}\mu \\
&= \underbrace{\int_X \alpha f \,\mathrm{d}\mu}_{\in\mathbb{R}} \\
&= \int_X Re(\alpha f) \,\mathrm{d}\mu + i \cancel{\int_X Im(\alpha f) \,\mathrm{d}\mu} \\
&= \int_X Re(\alpha f) \,\mathrm{d}\mu \\
&\le \int_X |Re(\alpha f)| \,\mathrm{d}\mu \\
&\le \int_X |\alpha f| \,\mathrm{d}\mu = \int_X |f| \,\mathrm{d}\mu
\end{aligned}$$

הערה $(\star)$: שכן אם נסמן $z = \int_X f \,\mathrm{d}\mu$ אז אם $z = 0$ אז $\alpha z = |z| \in \mathbb{R}$ לכל $\alpha \in \mathbb{C}$ עם $|\alpha| = 1$ כי נקבל ש־$0 = 0$.
אחרת, אם $z \neq 0$ אז קיים $\theta \in \mathbb{R}$ כך ש־$z = |z| \cdot e^{i\theta}$ וניקח $\alpha = e^{-i\theta}$ ונקבל

$$\alpha z = e^{-i\theta} \cdot \left(|z| e^{i\theta}\right) = |z| \left(e^{-i\theta} \cdot e^{i\theta}\right) = |z| \in \mathbb{R}$$

ולכן יש $\alpha \in \mathbb{C}$ המקיים זאת.

□

2.8 משפט ההתכנסות הנשלטת

משפט 2.9 (משפט ההתכנסות הנשלטת):

הגדרה 2.1 (סדרת פונקציות נשלטת): תהיי X קבוצה ותהיי $\{f_n \mid X \to \mathbb{R}\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות כלשהי ותהיי $g : X \to \mathbb{R}$ פונקציה.
נאמר שהסדרה $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ נשלטת על־ידי הפונקציה g אם ורק אם לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $|f_n| \leq g$.

תהיי $\{f_n \mid X \to \mathbb{C}\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות מדידות המתכנסת נקודתית לפונקציה $f : X \to \mathbb{C}$.
אם קיימת $g \in L^1(\mu)$ כך שהסדרה $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ נשלטת על־ידי g אזי $f \in L^1(\mu)$ ומתקיים

$$\int_X |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ובפרט

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu$$

הוכחה: ראשית מכך ש־$|f_n| \leq g$ לכל $n \in \mathbb{N}$ נובע כי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq L^1(\mu)$ וגם מתקיים $|f| \leq g$ אז $f \in L^1(\mu)$.
בפרט מתקיים לכל $n \in \mathbb{N}$ ש־$|f - f_n| \leq 2g$ אז נגדיר $h_n := 2g - |f - f_n|$ ומהלמה של פאטו עבור סדרת הפונקציות $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ נקבל

$$(\star) \quad \int_X \liminf_{n\to\infty} h_n \, \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X h_n \, \mathrm{d}\mu$$

וכן $h_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 2g$ נקודתית, אז בפרט $2g(x) = \liminf_{n\to\infty} h_n(x)$ לכל $x \in X$, אז יינבע מכך

$$\int_X 2g \, \mathrm{d}\mu = \int_X \liminf_{n\to\infty} h_n \, \mathrm{d}\mu \underset{(\star)}{\leq} \liminf_{n\to\infty} \int_X h_n \, \mathrm{d}\mu = \liminf_{n\to\infty} \int_X (2g - |f - f_n|) \, \mathrm{d}\mu$$

מכאן מתקיים

$$\int_X 2g \, \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X (2g - |f - f_n|) \, \mathrm{d}\mu \underset{\text{לינאריות האינטגרל}}{=} \liminf_{n\to\infty} \left(\int_X 2g \, \mathrm{d}\mu - \int_X |f - f_n| \, \mathrm{d}\mu \right)$$

$$= \liminf_{n\to\infty} \int_X 2g \, \mathrm{d}\mu + \liminf_{n\to\infty} \left(- \int_X |f - f_n| \, \mathrm{d}\mu \right) \underset{\liminf_{n\to\infty}(-a_n) = -\limsup_{n\to\infty} a_n}{=} \int_X 2g \, \mathrm{d}\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_X |f - f_n| \, \mathrm{d}\mu$$

כלומר

$$\int_X 2g \, \mathrm{d}\mu \leq \int_X 2g \, \mathrm{d}\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_X |f - f_n| \, \mathrm{d}\mu$$

אבל $g \in L^1(\mu)$ אי־שלילית ולכן $\int_X 2g \, \mathrm{d}\mu < \infty$ ולכן ניתן להחסיר ולקבל $\limsup_{n\to\infty} \int_X |f - f_n| \, \mathrm{d}\mu = 0$ ובפרט מאי־שיוויון המשולש האינטגרלי

$$\left| \int_X f \, \mathrm{d}\mu - \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \right| = \left| \int_X (f - f_n) \, \mathrm{d}\mu \right| \leq \int_X |f - f_n| \, \mathrm{d}\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$\square$

2.9 אי־שיוויון מרקוב

משפט 2.10 (אי־שיוויון מרקוב):

1. תהיי f מדידה ואי־שלילית, אז לכל $0 < a < \infty$ מתקיים

$$\mu(f^{-1}[\alpha, \infty]) \leq \frac{\int f \,\mathrm{d}\mu}{a}$$

2. תהיי $f : X \to [0, \infty]$ אינטגרבילית. אז $\mu(f^{-1}(\{\infty\})) = 0$ והקבוצה $f^{-1}((0, \infty))$ היא σ־סופית.

הוכחה:

1. נגדיר

$$E_a := f^{-1}([a, \infty]) = \{x \in X \mid f(x) \geq a\}$$
$$g(x) = a \cdot \mathbb{1}_{E_a}(x)$$

אם $x \in E_a$ אזי $f(x) \geq a$ ו־$g(x) = a \cdot 1 = a$ ולכן $f(x) \geq g(x)$.
אם $x \notin E_a$ אז $f(x) \geq 0$ ו־$g(x) = a \cdot 0 = 0$ ולכן $f(x) \geq g(x)$ כלומר לכל $x \in X$ מתקיים $g(x) \leq f(x)$.
ממונוטוניות אינטגרל לבג נקבל

$$\int_X g \,\mathrm{d}\mu \leq \int_X f \,\mathrm{d}\mu$$

אבל

$$\int_X g \,\mathrm{d}\mu = \int_X a \cdot \mathbb{1}_{E_a} \,\mathrm{d}\mu = a \cdot \int_X \mathbb{1}_{E_a} \,\mathrm{d}\mu = a \cdot \mu(E_a)$$

כלומר

$$a \cdot \mu(E_a) \leq \int_X f \,\mathrm{d}\mu$$

היות ו־$0 < a < \infty$ ניתן לחלק בלי לשנות את כיוון אי־השיוויון ונקבל

$$\mu(E_a) \leq \frac{1}{a} \int_X f \,\mathrm{d}\mu$$

2. מהמקרה הקודם אנחנו מקבלים שאם $\int f \,\mathrm{d}\mu < \infty$ אזי אגף ימין שואף לאינסוף כאשר $a \to \infty$ ולכן מרציפות המידה מלמעלה (חיתוכים יורדים) נסיק כי

$$\mu(f^{-1}(\{\infty\})) = 0$$

מתקיים

$$\mu\left(f^{-1}\left[\frac{1}{n}, \infty\right]\right) < \infty$$

ולכן

$$f^{-1}((0, \infty)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}\left(\left[\frac{1}{n}, \infty\right]\right)$$

היא σ־סופית.

$\square$

3 קבוצות ממידה אפס

3.1 סדרת פונקציות כמעט־תמיד

משפט 3.1 (סדרות פונקציות וכמעט־תמיד): תהיי $\{f_n \mid X \to \mathbb{C}\}_{i=1}^{n}$ סדרת פונקציות מדידות המוגדרות μ־כמעט תמיד.
אם $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n|\,\mathrm{d}\mu < \infty$ אז

1. הפונקציה $f : X \to \mathbb{C}$ הנתונה על־ידי $x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מוגדרת μ־כמעט תמיד
2. $f \in L^1(\mu)$
3. $\int_X f\,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f_X f_n\,\mathrm{d}\mu$

הוכחה:

1. נניח ש־f_n מוגדרת על קבוצה $S_n \subseteq X$ כך ש־$\mu(S_n^c) = 0$, אז $\varphi = \sum_{n=1}^{\infty}|f_n|$ מוגדרת על $S := \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$ ומתקיים

$$\mu(S^c) = \mu\left(\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n\right)^c\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n^c\right) = 0 \Longrightarrow \mu(S^c) = 0$$

ולכן φ מוגדרת μ־כמעט תמיד ומהטענה אודות החלפת סדר של גבול ואינטגרל עבור טורים של פונקציות אי־שליליות מתקיים

$$\int_X \varphi\,\mathrm{d}\mu = \int_X \sum_{n=1}^{\infty}|f_n|\,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\int_X |f_n|\,\mathrm{d}\mu < \infty \Longrightarrow \int_X \varphi\,\mathrm{d}\mu < \infty$$

בפרט $\mu(|\varphi(x)|) < \infty$ μ־כמעט לכל $x \in X$ ולכן $\varphi \in L^1(\mu)$ ולכן עבור μ־כמעט לכל $x \in X$ הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס בהחלט μ־כמעט תמיד ולכן הוא מתכנס ב־$\mathbb{C}$ μ־כמעט תמיד ולכן $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ מוגדרת μ־כמעט תמיד

2. לכל $k \in \mathbb{N}$ נסמן $g_k := \sum_{n=1}^{k} f_n$ ומתקיים

$$\forall k \in \mathbb{N},\ |g_k| = \left|\sum_{n=1}^{k} f_n\right| \leq \sum_{n=1}^{k}|f_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty}|f_n| = \varphi \Longrightarrow |g_k| \leq \infty$$

כלומר סדרת הפונקציות $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ נשלטת על־ידי $\varphi \in L^1(\mu)$ ומכאן ממשפט ההתכנסות הנשלטת עבור f $g_k \xrightarrow[k\to\infty]{} f$ נובע כי $f \in L^1(\mu)$ וכן מהטענה על החלפת סדר סכום ואינטגרל

$$\int_X f\,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty}\int_X g_k\,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\int_X f_n\,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\int_X f_n\,\mathrm{d}\mu \Longrightarrow \int_X f\,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\int_X f_n\,\mathrm{d}\mu$$

וזה מוכיח גם את 3.

$\square$

3.2 תנאים שקולים לשלמות

משפט 3.2 (תנאים שקולים לשלמות): *תזכורת:* יהי $(X, \mathcal{A}, \mu)$ מרחב מידה. נאמר שהם **שלם** אם כל קבוצה $E \subseteq X$ המוכלת בקבוצה ממידה אפס היא מדידה בעצמה. ההשלמה של $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ניתנת על־ידי ה־σ־אלגברה

$$\overline{\mathcal{A}} := \{A \cup E \mid A \in \mathcal{A}, E \subseteq N, \mu(N) = 0\}$$

והמידה

$$\overline{\mu}(A \cup E) = \mu(A)$$

יהי $(X, \mathcal{A}, \mu)$ מרחב מידה, אזי הגרירות הבאות נכונות אם ורק אם μ שלמה:

1. אם f מדידה ו־$f = g$ μ־כמעט תמיד, אז g היא מדידה
2. אם $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות מדידות ובנוסף $f_n \to f$ μ־כמעט תמיד, אזי f היא מדידה

הוכחה: בשביל ההוכחה נשתמש בטענה מהסוג הבא שנכונה במרחבי מידה שלמים: נניח כי E, G מדידות ו־$E \subseteq F \subseteq G$ עם $\mu(G \setminus E) = 0$. אז F מדידה: זה נכון כי $F \setminus E \subseteq G \setminus E$ והתלכדות המידות גוררת ש־$\mu(G \setminus E) = 0$ ולכן $F \setminus E$ מדידה וגם F.

שלמות $\Longleftarrow$ 1: אם f מדידה ו־$f = g$ μ־כמעט תמיד, נרשום

$$N := \{x \mid f(x) \neq g(x)\}$$

מאחר ו־N מוכלת בקבוצה ממידה אפס ו־μ שלמה אזי N מדידה.
מתקיים

$$g^{-1}(A) = (g^{-1}(A) \cap f^{-1}(A)) \cup (g^{-1}(A) \setminus f^{-1}(A))$$

מאחר ו־N^c היא בידיוק הקבוצה בה הפונקציות מתלכדות, נוכל לכתוב

$$f^{-1}(A) \cap N^c \subseteq f^{-1}(A) \cap g^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(A)$$

ומהיות

$$f^{-1}(A) \setminus (f^{-1}(A) \cap N^c) \subseteq N$$

נדע ששרשרת ההכלות היא כפי שמופיע בטענה שנוסחה בתחילת ההוכחה ולכן הקבוצה $f^{-1}(A) \cap g^{-1}(A)$ היא מדידה ובאופן דומה נשים לב

$$g^{-1}(A) \setminus f^{-1}(A) \subseteq N$$

ולכן כקבוצה המוכלת בקבוצה ממידה אפס היא מדידה.
1 $\Longleftarrow$ שלמות: תהיי E קבוצה המוכלת בקבוצה ממידה אפס אזי $\mathbb{1}_E = 0$ כמעט־תמיד ולכן $\mathbb{1}_E$ מדידה, אבל אינדיקטור מדיד אם ורק אם הקבוצה שהוא מציין מדידה, כלומר E מדידה.
1 $\Longleftarrow$ 2: מאחר והוכחנו ש־1 שקול לשלמות, אז μ שלמה. נניח ש־$f_n \to f$ μ־כמעט תמיד.
לכן קיימת קבוצה N כך ש־$\mu(N) = 0$ ובנוסף $f_n(x) \to f(x)$ לכל $x \in N^c$ ונגדיר

$$\tilde{f}_n(x) = \begin{cases} f_n(x) & x \in N^c \\ 0 & x \in N \end{cases}$$

אזי מהסעיף הקודם לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים ש־$\tilde{f}$ מדידה כי $\tilde{f}_n = f_n$ μ־כמעט תמיד ו־$\tilde{f}$ מתכנסת נקודתית לפונקציה

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in N^c \\ 0 & x \in N \end{cases}$$

ולכן $\tilde{f}$ מדידה ול־$f = \tilde{f}$ μ־כמעט תמיד ולכן f מדידה.
2 $\Longleftarrow$ 1: נניח ש־$f = g$ μ־כמעט תמיד ו־f מדידה, אז נגדיר את f_n להיות הסדרה הקבועה $f_n = f$ ומתקיים $f_n \to g$ כמעט־תמיד ולכן g מדידה מההנחה של 2, כנדרש. $\square$

3.3 תנאים שקולים לפונקציה אפסה כמעט־תמיד

משפט 3.3 (תנאים שקולים לפונקציה אפסה כמעט־תמיד):

1. אם $f : X \to [0, \infty]$ מדידה עם $\int_X f \,\mathrm{d}\mu = 0$ אם ורק אם $f \underset{\mu}{=} 0$
2. אם $f : X \to \mathbb{C}$ מדידה ולכל $E \in \mathcal{A}$ מתקיים $\int_E f \,\mathrm{d}\mu = 0$ אזי $f \underset{\mu}{=} 0$

הוכחה:

1. ההנחה ש־$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = 0$ גוררת ש־$\mu\left(\left\{x \in X \mid f(x) \geq \frac{1}{n}\right\}\right) = 0$ הכח $n \in \mathbb{N}$ ולכן $f = 0$, μ־כמעט תמיד
2. נסמן $f = u + iv$ ותהיי $E = \{x \in X \mid u(x) \geq 0\}$. אז מהגדרת E ומההנחה שלכל $E \in \mathcal{A}$ מתקיים $\int_E f \,\mathrm{d}\mu = 0$ נובע $\int_E Re(f) \,\mathrm{d}\mu = 0$ ולכן לכל $h \in \{u, v\}$ מתקיים

$$0 = \int_E Re(f) \,\mathrm{d}\mu = \int_E h \,\mathrm{d}\mu = \int_X h^{\pm} \,\mathrm{d}\mu \Longrightarrow h^{\pm} \underset{\mu}{=} 0$$
$$\Longrightarrow h^{\pm} \underset{\mu}{=} 0 \Longrightarrow u^{\pm}, v^{\pm} \underset{\mu}{=} 0 \Longrightarrow u, v \underset{\mu}{=} 0 \Longrightarrow f \underset{\mu}{=} 0$$

$\square$

3.4 טענה על ממוצעי פונקציה

משפט 3.4 (טענה על ממוצעי פונקציה):

תזכורת (ממוצע של פונקציה): יהי $(X,\mathcal{A},\mu)$ מרחב מידה סופי, תהיי $f\in L^1(\mu)$ ותהיי $E\in\mathcal{A}$ קבוצה מדידה עם $\mu(E)>0$.
הממוצע של f על E ביחס ל־μ הוא

$$A_E(f):=\frac{1}{\mu(E)}\int_E f\,\mathrm{d}\mu$$

ועכשיו למשפט:

יהי $(X,\mathcal{A},\mu)$ מרחב מידה סופי ותהיי $f\in L^1(\mu)$. אם $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ קבוצה סגורה כך שלכל קבוצה מדידה $E\in\mathcal{A}$ עם $\mu(E)>0$ מתקיים $A_E(f)\in\Omega$ אז $f(x)\in\Omega$ μ־כמעט לכל $x\in X$.

הוכחה: לכל $r>0$ ולכל $\alpha\in\mathbb{C}$ נסמן ב־$\overline{B}_r(\alpha)$, הכדור הסגור ברדיוס r סביב α.
מכך ש־Ω סגורה נובע כי Ω^c פתוחה ולכן יש איחוד בן־מנייה של כדורים פתוחים שעל־ידו ניתן לייצג את Ω^c.
אבל ב־$\mathbb{C}$, כל כדור פתוח ניתן להצגה כאיחוד בן־מנייה של כדורים סגורים, ולכן Ω^c היא איחוד בן־מנייה של כדורים סגורים.
לכן, מספיק להראות שעבור כל $\overline{B}_r(\alpha)\subseteq\Omega^c$ מתקיים $\mu\Big(f^{-1}\Big(\overline{B}_r(\alpha)\Big)\Big)=0$, כאשר

$$f^{-1}\Big(\overline{B}_r(\alpha)\Big)=\Big\{x\in X\mid f(x)\in\overline{B}_r(\alpha)\Big\}$$

נניח בשלילה שקיים כדור סגור $\overline{B}_r(\alpha)\subseteq\Omega^c$ כך ש־$\mu\Big(f^{-1}\Big(\overline{B}_r(\alpha)\Big)\Big)>0$ ונסמן $E:=f^{-1}\Big(\overline{B}_r(\alpha)\Big)$.
על E מתקיים $|f-\alpha|\le r$ ולכן

$$|A_E(f)-\alpha|=\left|\frac{1}{\mu(E)}\int_E f\,\mathrm{d}\mu-\frac{1}{\mu(E)}\cdot\mu(E)\cdot\alpha\right|=\left|\frac{1}{\mu(E)}\int_E f\,\mathrm{d}\mu-\frac{1}{\mu(E)}\int_E\alpha\,\mathrm{d}\mu\right|$$

$$=\left|\frac{1}{\mu(E)}\left(\int_E f\,\mathrm{d}\mu-\int_E\alpha\,\mathrm{d}\mu\right)\right|\underset{\substack{\text{לינאריות האינטגרל}\\ \mu(E)>0}}{=}\frac{1}{\mu(E)}\left|\int_E(f-\alpha)\,\mathrm{d}\mu\right|\underset{\text{אי־שיוויון המשולש}}{\le}\frac{1}{\mu(E)}\int_E|f-\alpha|\,\mathrm{d}\mu\le\frac{1}{\mu(E)}\int_E r\,\mathrm{d}\mu$$

$$=\frac{1}{\mu(E)}\cdot r\cdot\mu(E)=r$$

כלומר $|A_E(f)-\alpha|\le r$ ולכן $A_E(f)\in\overline{B}_r(\alpha)\subseteq\Omega^c$ ולכן $A_E(f)\in\Omega^c$.
אבל זו סתירה להנחה ש־$A_E(f)\in\Omega$. $\square$

4 משפט ההצגה של ריס

4.1 משפט ההצגה של ריס – יחידות

משפט 4.1 (יחידות במשפט ההצגה של ריס): יהי $\Lambda : \mathbb{C}_C(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ פונקציונל לינארי חיובי ונניח כי μ_1, μ_2 הן מידות על $(\mathbb{R}, \mathrm{Borel}_{\mathbb{R}})$ המקיימות

1. $\int_X f \, \mathrm{d}\mu_i = \Lambda f$ לכל $f \in C_C(\mathbb{R})$
2. $\mu_i(K) < \infty$ לכל $K \subseteq \mathbb{R}$ קומפקטית
3. כל קבוצות בורל ב־$\mathbb{R}$ הן רגולריות פנימית וחיצונית ביחס ל־μ_i

הוכחה: נבחין תחילה ש־μ_1, μ_2 מוגדרות ביחידות על־ידי הערכים שלהן על קבוצות קומפקטיות.
ראשית מ־(2) נובע כי עבור $K \subseteq \mathbb{R}$ קומפקטית מתקיים $\mu_i(K) < \infty$.
יהי $\varepsilon > 0$ ומהרגולריות החיצונית נובע כי קיימת $K \subseteq V$ כאשר V פתוחה כך שמתקיים $\mu_2(V) < \mu_2(K) + \varepsilon$.
מהלמה של אוריסון נובע כי קיימת $f \in C_C(\mathbb{R})$ כך שמתקיים $f(X) \subseteq [0,1]$ ומהלמה של אוריסון מתקיים ש־$K \prec f \prec V$, כלומר $\mathbb{1}_K \leq f$ וכן $\mathrm{supp}(f) \subseteq V$ ולכן $\mathbb{1}_{\mathrm{supp}(f)} \subseteq \mathbb{1}_V$ אבל $f(X) \subseteq [0,1]$ ולכן $f \leq \mathbb{1}_V$, אזי

$$\mu_1(k) = \int_X \mathbb{1}_K \, \mathrm{d}\mu_1 \leq \int_X f \, \mathrm{d}\mu_1 \underset{(1)}{=} \Lambda f \underset{(1)}{=} \int_X f \, \mathrm{d}\mu_2 \leq \int_X \mathbb{1}_V \, \mathrm{d}\mu_2 = \mu_2(V) < \mu_2(K) + \varepsilon$$

כלומר $\mu_1(K) \leq \mu_2(K)$ לכל K קומפקטית ומהסימטרייה נקבל $\mu_1 \leq \mu_2$, כלומר $\mu_1 = \mu_2$. □

5 רגולריות ומידות רדון

5.1 תכונות מידת רדון על מרחב σ־קומפקטי

משפט 5.1 (תכונות מידת רדון על מרחב σ־קומפקטי): יהי $(X, \mathcal{M}, \mu)$ מרחב מידה המכיל את σ־אלגברת בורל על X.
אם X הוא σ־קומפקטי ו־μ מידת רדון אז מתקיימים

1. לכל $\varepsilon > 0$ ולכל $E \in \mathcal{M}$ קיימת קבוצה פתוחה $V \subseteq X$ וקבוצה סגורה $F \subseteq X$ עם $F \subseteq E \subseteq V$ כך ש־$\mu(V \setminus F) < \varepsilon$
2. כל קבוצה $E \in \mathcal{M}$ היא רגולרית פנימית וחיצונית
3. לכל $E \in \mathcal{M}$ קיימות $A, B \in \mathcal{M}$ כאשר A היא F_σ ו־B היא G_σ כך ש־$A \subseteq E \subseteq B$ וגם $\mu(B \setminus A) = 0$

הוכחה: ראשית מהיות X σ־קומפקטי נובע שקיים אוסף בן־מנייה של קבוצות קומפקטיות $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך ש־$X = \cup_{n=1}^{\infty} K_n$.

1. תהיי $E \in \mathcal{M}$ מדידה
   1. מהיות $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ כיסוי של X מתקיים ש־$E = \cup_{n=1}^{\infty} E \cap K_n$.
   מהיות μ מידת רדון ו־K_n קומפקטית נובע ש־$\mu(K_n) < \infty$ לכל $n \in \mathbb{N}$ ולכן בפרט ממונוטוניות $\mu(E \cap K_n) < \infty$.
   מהרגולריות החיצונית של μ נובע שלכל $\varepsilon > 0$ קיימת $V_n \in \mathcal{M}$ פתוחה עם $E \cap K_n \subseteq V_n$ כך ש־$\mu(V_n) \underset{(\star)}{<} \mu(E \cap K_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$.
   נסמן $V := \cup_{n=1}^{\infty} V_n$ ומתקיים מכך ש־$E \cap K_n \subseteq K_n$

$$V \setminus E = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n\right) \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E \cap K_n\right) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n \setminus (E \cap K_n)$$

ולכן

$$\mu(V \setminus E) \underset{\text{מונוטוניות}}{\leq} \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n \setminus (E \cap K_n)\right) \underset{\text{תת־אדטיביות}}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(V_n \setminus (E \cap K_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} (\mu(V_n) - \mu(E \cap K_n)) \underset{(\star)}{<} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \frac{\varepsilon}{2}$$

   2. עבור $E^c \in \mathcal{M}$ מתקיים גם ש־$E^c = \cup_{n=1}^{\infty} E^c \cap K_n$ אפשר לעשות את אותו תהליך שוב: מהיות μ מידת רדון נובע כי $E^c \cap K_n$ רגולרית חיצונית ולכן קיימת פתוחה $U_n \in \mathcal{M}$ עם $E^c \cap K_n \subseteq U_n$ כך ש־$\mu(U_n) \underset{(\diamondsuit)}{<} \mu(E^c \cap K_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$.
   נסמן $U := \cup_{n=1}^{\infty} U_n$ ואז U פתוחה כאיחוד של פתוחות ו־$E^c \subseteq U$ (כי $E^c = \cup_{n=1}^{\infty} E^c \cap K_n \subseteq \cup_{n=1}^{\infty} U_n = U$) ונקבל

$$U \setminus E^c = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n\right) \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E^c \cap K_n\right) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \setminus (E^c \cap K_n)$$

ובהתאם

$$\mu(U \setminus E^c) \leq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \setminus (E^c \cap K_n)\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(U_n \setminus E^c \cap K_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(U_n) - \mu(E^c \cap K_n) \underset{(\diamondsuit)}{<} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \frac{\varepsilon}{2}$$

אז אם נסמן $F := U^c$ נקבל
1. U פתוחה $\Longleftarrow F$ סגורה
2. $E^c \subseteq U \Longleftarrow U^c \subseteq E \Longleftarrow F \subseteq E$
3. מתקיים

$$E \setminus F = E \cap F^c = F^c \cap E = F^c \setminus E^c \Longrightarrow \mu(E \setminus F) = \mu(F^c \setminus E^c) = \mu(U \setminus E^c) < \frac{\varepsilon}{2}$$

אם כך קיבלנו בסך־הכל קבוצה פתוחה $E \subseteq V$ ו־$F \subseteq E$ סגורה המקיימות

$$(1)\ \mu(V \setminus E) = \mu(V) - \mu(E) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (2)\ \mu(E \setminus F) = \mu(E) - \mu(F) < \frac{\varepsilon}{2}$$

ולכן

$$\mu(V \setminus F) = \underbrace{\mu(V) - \mu(E)}_{\mu(V \setminus E)} + \underbrace{\mu(E) - \mu(F)}_{\mu(E \setminus F)} \underset{(1),(2)}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Longrightarrow \mu(V \setminus F) < \varepsilon$$

2. מהסעיף הקודם, לכל $E \in \mathfrak{m}$ קיימת קיימת קבוצה סגורה $F \in \mathfrak{m}$ עם $F \subseteq E$ ו־$\mu(E \setminus F) < \frac{\varepsilon}{2}$ ושוב מה־σ־קומפקטיות, $F = \cup_{n=1}^{\infty} F \cap K_n$, אבל לכל n, $F \cap K_n$ היא קבוצה קומפקטית (כי חיתוך של קבוצה קומפקטית עם קבוצה סגורה הוא קומפקטי) ולכן לכל $N \in \mathbb{N}$ נובע כי $\cup_{n=1}^{N} (F \cap K_n)$ היא קבוצה קומפקטית כאיחוד סופי של קומפקטיות, אז מרציפות המידה לאיחודים עולים נקבל

$$\lim_{N\to\infty} \mu\left(\bigcup_{n=1}^{N} F \cap K_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F \cap K_n\right) = \mu(F) \Longrightarrow \mu(F) = \lim_{N\to\infty} \mu\left(\bigcup_{n=1}^{N} F \cap K_n\right)$$

כלומר לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $k \geq N$ מתקיים

$$\mu\left(F \setminus \bigcup_{n=1}^{k} F \cap K_n\right) = \mu(F) - \mu\left(\bigcup_{n=1}^{k} F \cap K_n\right) < \frac{\varepsilon}{2}$$

נסמן $K := \cup_{n=1}^{N} F \cap K_n$ ואז $K \subseteq F \subseteq E$ כאשר K קומפקטית ומאי־השיוויון לעיל נקבל שלכל $\varepsilon > 0$ קיימת $K \subseteq X$ קומפקטית עם $K \subseteq E$ כך שמתקיים

$$\mu(E) - \mu(K) = \mu(E) - \mu(F) + \mu(F) - \mu(K) = \mu(E \setminus F) + \mu(F \setminus K) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\Longrightarrow \mu(E) - \mu(K) < \varepsilon \Longleftrightarrow \mu(K) > \mu(E) - \varepsilon \Longrightarrow \mu(E) = \sup\{\mu(C) \mid C \subseteq E \ \text{קומפקטית}\ C\}$$

כלומר $E \in \mathfrak{m}$ רגולרית פנימית ומהיות μ מידת רדון ולכן רגולרית חיצונית ביחס לכל קבוצה מדידה, מהיות $E \in \mathfrak{m}$ שרירותי נובע כי סעיף 2 נכון.

3. תהיי $E \in \mathfrak{m}$. מסעיף 1 נובע קיום של $V_n \in \mathfrak{m}$ פתוחה ו־$F_n \in \mathfrak{m}$ סגורה עם $F_n \subseteq E \subseteq V_n$ כך ש־$\mu(V_n \setminus F_n) < \frac{1}{n}$.
נגדיר $A := \cup_{n=1}^{\infty} F_n, B := \cup_{n=1}^{\infty} V_n$ אז A היא F_σ ו־B היא G_σ ומתקיים

$$B \setminus A = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right)^c = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n\right) \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n^c\right) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} (V_n \cap F_n^c) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (V_n \setminus F_n)$$

אבל $\mu(V_n \setminus F_n) < \frac{1}{n}$ ולכן

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq \mu(B \setminus A) \leq \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \setminus F_n\right) \underset{\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \setminus F_n \subseteq V_n \setminus F_n}{\leq} \mu(V_n \setminus F_n) < \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$\square$

5.2 תנאים שגוררים שמידה היא מידת רדון

משפט 5.2 (תנאים שגוררים שמידה היא מידת רדון)**:** יהי X מרחב האוסדרוף קומפקטי־מקומית המקיים שכל קבוצה פתוחה בו היא σ־קומפקטית. אם μ מידה על $\mathbb{B}(X)$ המקיימת $\mu(K) < \infty$ לכל $K \subseteq X$ קומפקטית, אזי μ היא מידת רדון על $\mathfrak{m}$ וכל קבוצה מדידה $E \in \mathfrak{m}$ היא רגולרית פנימית וחיצונית.

הוכחה: נחלק את ההוכחה לשלבים כדי לבנות מפתח:

1. **סופית על קומפקטיות:** מהיות μ סופית על קומפקטיות, נקבל ש־$\Lambda f = \int_X f \,\mathrm{d}\mu$ היינו פונקציונל לינארי חיובי על $C_c(X)$.
2. **משפט ההצגה של ריס:** ממשפט ההצגה של ריס נובע שקיימת מידת רדון λ על X המקיימת $\int_X f \,\mathrm{d}\mu \underset{(\star)}{=} \int_X f \,\mathrm{d}\lambda$, לכל $f \in C_C(X)$.
3. **שימוש ב־σ־קומפקטיות:** תהיי $V \in \mathfrak{m}$ פתוחה, מהנתון נובע שהיא σ־קומפקטית ולכן קיים אוסף $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ של קבוצות קומפקטיות כך שמתקיים
$$V = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$$
4. **שימוש בלמה של אוריסון:** מהלמה, נובע שלכל $n \in \mathbb{N}$ קיימת $g_n \in C_C(X)$ עם $K_n \prec g_n \prec V$.
תזכורת (הלמה של אוריסון): כי מהלמה של אוריסון, במרחב האוסדרוף קומפקטי־מקומית, לכל $K, V \subseteq X$ עם $K \subseteq V$ כאשר K קומפקטית ו־V פתוחה, קיימת $f \in C_C(X)$ המקיימת $K \prec f \prec V \iff \mathbb{1}_K \le f, \operatorname{supp}(f) \subseteq V$
5. **משפט ההתכנסות המונוטונית:** תהיי $\{f_N\}_{N=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות המוגדרת על־ידי
$$\forall N \in \mathbb{N},\ f_N \coloneqq \max_{i \in [N]} \{g_i\}$$
נשים לב שמתקיים
   1. $\{f_N\}_{N=1}^{\infty} \subseteq C_C(X)$
   2. $\{f_N\}_{N=1}^{\infty}$ מונוטונית עולה
   3. $f_N \xrightarrow[N \to \infty]{} \mathbb{1}_V$ נקודתית כי $V = \cup_{n=1}^{\infty} K_n$ ו־$K_n \prec g_n \prec V$

אם־כך, אנחנו מקיימים את תנאי משפט ההתכנסות המונוטונית ולכן נקבל
$$\mu(V) = \int_X \mathbb{1}_V \,\mathrm{d}\mu = \int_X \lim_{N\to\infty} f_N \,\mathrm{d}\mu = \lim_{N\to\infty} \int_X f_N \,\mathrm{d}\mu = \lim_{N\to\infty} \int_X f_N \,\mathrm{d}\lambda = \int_X \lim_{N\to\infty} f_N \,\mathrm{d}\lambda = \int_X \mathbb{1}_V \,\mathrm{d}\lambda$$
כלומר לכל $V \in \mathfrak{m}$ פתוחה מתקיים $\mu(V) = \lambda(V)$
6. **שימוש בתכונות מידת רדון:** יהי $\varepsilon > 0$, מהיות λ מידת רדון נובע שלכל $E \in \mathfrak{m}$ קיימת קבוצה פתוחה $U \subseteq X$ וקבוצה סגורה $F \subseteq X$ עם $F \subseteq E \subseteq U$ כך ש־$\mu(V \setminus F) < \varepsilon$.
בפרט, נובע מהיות $F \subseteq E$ כי $U \setminus E \subseteq U \setminus F$ ולכן ממונוטוניות $\lambda(U \setminus E) \underset{(\star)}{<} \varepsilon$.
אבל $U \setminus F$ היא פתוחה (כי הפרש של פתוחה וסגורה היא פתוחה) ו־$\mu(V) = \lambda(V)$ לכל פתוחה ומדידה, ולכן $\mu(U \setminus F) = \lambda(U \setminus F) < \varepsilon$, כלומר
$$\mu(U) - \mu(E) \underset{\text{מונוטוניות}}{\le} \mu(U) - \mu(F) = \mu(U \setminus F) < \varepsilon \Longrightarrow \mu(U) - \varepsilon < \mu(E)$$
ולכן מתקיים
$$\lambda(E) - \varepsilon \underset{\text{מונוטוניות}}{\le} \lambda(U) - \varepsilon \underset{\substack{\lambda(U)=\mu(U) \\ \text{עבור } U \text{ פתוחה}}}{=} \mu(E) \underset{\text{מונוטוניות}}{<} \mu(U) \underset{\substack{\lambda(U)=\mu(U) \\ \text{עבור } U \text{ פתוחה}}}{=} \lambda(U) \underset{\star}{<} \lambda(E) + \varepsilon$$
$$\Longrightarrow \lambda(E) - \varepsilon < \mu(E) < \lambda(E) + \varepsilon \iff -\varepsilon < \mu(E) - \lambda(E) < \varepsilon \iff |\mu(E) - \lambda(E)| < \varepsilon$$
מהיות ε שרירותי נובע כי $\mu(E) = \lambda(E)$ לכל $E \in \mathfrak{m}$ כלומר $\mu = \lambda$ ולכן μ מידת רדון, ומתכונות מידת רדון נובע כי כל קבוצה מדידה $E \in \mathfrak{m}$ היא רגולרית פנימית וחיצונית.

$\square$

6 התכנסות חלשה-*

7 מרחבי L^p

7.1 אי־שיוויון יאנסן

משפט 7.1 (אי־שיוויון יאנסן): יהי $(X, \mathcal{A}, \mu)$ מרחב הסתברות ותהיי $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}$ קמורה. אם $f : X \to (a,b)$ פונקציה מדידה, אזי

$$\varphi\left(\int_X f \,\mathrm{d}\mu\right) \le \int_X \varphi \circ f \,\mathrm{d}\mu$$

הוכחה: נסמן $T := \int_X f \,\mathrm{d}\mu$.
מהיות $Im(f) \subseteq (a,b)$ ומהיות X מרחב הסתברות, נובע ש־$T \in (a,b)$ ונסמן

$$\beta := \sup_{s\in(a,T)} \left\{ \frac{\varphi(T)-\varphi(s)}{T-s} \right\}$$

אזי לכל $s \in (a,b)$ עם $s < T$ מתקיים

$$\frac{\varphi(T)-\varphi(s)}{T-s} \le \beta \iff \varphi(T)-\varphi(s) \le \beta(T-s) \iff \varphi(s) \ge \varphi(T) + \beta(s-T)$$

φ קמורה ולכן מהאיפיון השקול לקמירות עבור $s \in (a,b)$ עם $s > T$ מתקיים

$$\frac{\varphi(T)-\varphi(s)}{s-T} \ge \beta \iff \varphi(s)-\varphi(T) \ge \beta(s-T) \iff \varphi(s) \ge \varphi(T) + \beta(s-T)$$

ולכן לכל $s \in (a,b)$ מתקיים $\varphi(s) \ge \varphi(T) + \beta(s-T)$.
בפרט זה נכון לכל $x \in X$ (כי $s = f(x)$) ולכן $\varphi \circ f \ge \varphi(T) + \beta(f-T)$ ונקבל

$$\int_X \varphi \circ f \,\mathrm{d}\mu \underset{\text{מונוטוניות האינטגרל}}{\ge} \int_X (\varphi(T) + \beta(f-T)\,\mathrm{d}\mu) \underset{\text{לינארית האינטגרל}}{=} \int_X \varphi(T)\,\mathrm{d}\mu + \beta\left(\int_X f\,\mathrm{d}\mu - \int_X T\,\mathrm{d}\mu\right)$$

$$= \varphi(T)\varphi(X) + \beta(T - T\mu(X)) \underset{\mu(X)=1}{=} \varphi(T) + \beta(T-T) = \varphi\left(\int_X f\,\mathrm{d}\mu\right)$$

$\square$

7.2 אי־שיוויון הולדר ואי־שיוויון מניקובסקי

משפט 7.2 (אי־שיוויון הולדר ואי־שיוויון מניקובסקי)**:** יהי $(X, \mathcal{A}, \mu)$ מרחב מידה ונניח כי $1 \leq p, q \leq \infty$ ומקיימים

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

אז לכל f, g מדידות אי־שליליות מתקיימים

$$(1)\ \int_X fg \, \mathrm{d}\mu \leq \left(\int_X f^p \, \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X g^p \, \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$(2)\ \left(\int_X (f+g)^p \, \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_X f^p \, \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X g^p \, \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

כאשר הראשון זה אי־שיוויון הולדר והשני הוא אי־שיוויון מניקובסקי ואם $p = q = 2$ זה אי־שיוויון קושי־שוורץ.

הוכחה: נוכיח את (1) בהנחה ש־$\|f\|_p = \|g\|_q = 1$ ונראה כי $\|fg\|_1 \leq 1$: $\log$ היא פונקציה קעורה ולכן אם נניח ש־$fg \neq 0$ נקבל

$$\log(fg) = \log f + \log g = \frac{\log f^p}{p} + \frac{\log g^q}{q} \leq \log\left(\frac{f^p}{p} + \frac{g^q}{q}\right)$$

ואם נעלה את e בחזקת אלו נקבל

$$(\star)\ fg \leq \frac{f^p}{p} + \frac{g^q}{q}$$

אי־שיוויון זה טריוויאלי במקרה שבו $fg = 0$ ולכן נוכל להתעלם מההנחה הזאת ומלינאריות, מונוטוניות ומההנחה ש־$\|f\|_p = \|g\|_q = 1$ נקבל

$$\int_X \frac{f^p}{p} + \frac{g^q}{q} \, \mathrm{d}\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

ואם ניקח אינטגרל על שני האגפים, $(\star)$ יביא לנו $\|fg\|_1 \leq 1$.
כדי להוכיח את (2) נניח ש־$\|f\|_p = \|g\|_p = 1$ ונשתמש בקמירות x^p ונקבל שלכל $t \in (0,1)$

$$((1-t)f + tg)^p \leq (1-t)f^p + tg^p$$

ושוב מלינאריות וממונוטוניות

$$\int_X ((1-t)f + tg)^p \, \mathrm{d}\mu = (1-t) + t = 1$$

ולכן

$$\|(1-t)f + tg\|_p^p \leq 1$$

כלומר $\|(1-t)f + tg\| \leq 1$.
ללא ההנחה, נכתוב את $f + g$ כממוצע משוקלל של פונקציות מנורמה 1, כלומר $g = \|g\|_p \overline{g}, f = \|f\|_p \overline{p}$ ונקבל

$$\|f+g\|_p = \left\|\overline{f} \cdot \|f\|_p + \overline{g}\|g\|_p\right\|_p = \left(\|f\|_p + \|g\|_p\right) \cdot \left\|\overline{f}\frac{\|g\|_p}{\|f\|_p + \|g\|_p} + \overline{g}\frac{\|f\|_p}{\|f\|_p + \|g\|_p}\right\|_p$$

נבחין שאת גורם המכפלה מימין הוא בידיוק ביטוי של נורמה של ממוצע משוקלל של פונקציות מנורמה 1 ולכן נוכל לחסום אותו מלעיל על־ידי 1 ולקבל

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

$\square$

7.3 $\mathcal{L}^p(\mu)$ הוא מרחב וקטור מעל $\mathbb{C}$

משפט 7.3 ($\mathcal{L}^p(\mu)$ הוא מרחב וקטור מעל $\mathbb{C}$): $\mathcal{L}^p(\mu)$ הוא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$.

הוכחה:

משפט 7.4: אם $p,q \in [1,\infty]$ חזקות צמודות ו־$f \in \mathcal{L}^p(\mu), g \in \mathcal{L}^q(\mu)$ אזי $f \cdot g \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

הוכחה: עבור $p,q \in (1,\infty)$ הטענה נובעת מאי־שיוויון הולדר. אם $p = 1$ ו־$q = \infty$ מתקיים $g \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$ וגם $|g(x)| \le \|g\|_\infty (\star)$ μ־כמעט תמיד ולכן

$$\|f \cdot g\|_1 = \int_X |f \cdot g| \, \mathrm{d}\mu = \int_X |f| \cdot |g| \, \mathrm{d}\mu \underset{(\star)}{\le} \int_X |f| \cdot \|g\|_\infty \, \mathrm{d}\mu = \|g\|_\infty \cdot \int_X |f| \, \mathrm{d}\mu < \infty$$

כלומר $\|f \cdot g\|_1 < \infty$ ולכן $f \cdot g \in \mathcal{L}^1(\mu)$. □

משפט 7.5 (אי־שיוויון המשולש של נורמת p): אם $p \in [1,\infty]$ אזי לכל $f,g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ מתקיים $\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$.

הוכחה: אם $p \in (1,\infty)$ אז הטענה נובעת מאי־שיוויון מניקובסקי.

אם $p \in \{1,\infty\}$ אז הטענה נובעת מאי־שיוויון המשולש של הערך המוחלט ב־$\mathbb{R}$. □

הוכחה: נשאר להראות הומגניות – אם $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ ו־$\lambda \in \mathbb{C}$ אזי $\lambda \cdot f \in \mathcal{L}^p(\mu)$:

$$\int_X |f \lambda f|^p \, \mathrm{d}\mu = \int_X (|\lambda| \cdot |f|)^p \, \mathrm{d}\mu = \int_X |\lambda|^p \cdot |f|^\lambda \, \mathrm{d}\mu = |\lambda|^p \int_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu < \infty$$

כאשר השתמשנו בתכונות ערך המוחלט ומהומוגניות האינטגרל למכפלה בקבוע.

אי־השיוויון האחרון נובע מהיות $|\lambda|^p < \infty$ ומהיות $\int |f|^p \, \mathrm{d}\mu < \infty$ כי $f \in \mathcal{L}^p$ ולכן המכפלה היא סופית. □

7.4 טענות חשובות מתרגילי הבית

משפט 7.6 (טענות חשובות מתרגילי הבית):

משפט 7.7 (הכלת מרחבי L^p): יהי $(X,\mathcal{A},\mu)$ מרחבי מידה σסופי ויהיו $q \le p \in [1,\infty]$

1. $L^p(\mu) \subseteq L^q(\mu) \iff \mu(X) < \infty$
2. $L^q(\mu) \subseteq L^p(\mu) \iff \exists \varepsilon > 0,\ \forall A \in \mathcal{A},\ \mu(A) < \varepsilon \implies \mu(A) = 0$

משפט 7.8 (תכונות L^∞): נניח ש־$(X,\mathcal{A},\mu)$ מרחב מידה סופי ותהיי $f \in L^\infty(\mu)$

1. אם $\|f\|_\infty = 1$ אז הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ המוגדרת על־ידי $a_n = \int_X |f|^n \,\mathrm{d}\mu$ מתכנסת
2. אם $\|f\|_\infty > 0$ אזי

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|f\|_{n+1}^{n+1}}{\|f\|_n^n} = \|f\|_\infty$$

7.5 לכל $p \in [1,\infty]$, המרחב הנורמי $\left(L^p(\mu), \|\cdot\|_p\right)$ הוא מרחב בנך

משפט 7.9 (לכל $p \in [1,\infty]$ המרחב הנורמי $\left(L^p(\mu), \|\cdot\|_p\right)$ הוא מרחב בנך): לכל $p \in [1,\infty]$, המרחב הנורמי $\left(L^p(\mu), \|\cdot\|_p\right)$ הוא מרחב בנך (אם ורק אם הוא שלם במטריקה המושרית מהנורמה, כלומר כל סדרת קושי היא מתכנסת).

הוכחה: תהיי $\left\{[f_n]_\mu\right\}_{n=1}^\infty \subseteq L^p(\mu)$ סדרת קושי ותהיי $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ נציגים של מחלקות שקילות אלו.

1. נניח ש־$p \in [1,\infty)$, אז לכל $k \in \mathbb{N}$ קיים $n_k \in \mathbb{K}$ כך ש־$\left\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right\| < \frac{1}{2^k}$ כי הסדרה קושי.
תהיי $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ $\left\{f_{n_k}\right\}_{k=1}^\infty$ תת־הסדרה המקיימת זאת ולכל $k \in \mathbb{N}$ נגדיר

$$g_k := \sum_{i=1}^k \left|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\right|$$

ומתקיים

$$\left\|g_k\right\|_p = \left\|\sum_{i=1}^k \left|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\right|\right\|_p \le \sum_{i=1}^k \left\|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\right\|_p < \sum_{i=1}^k \frac{1}{2^i} < \infty$$

ולכן $g_k \in L^p(\mu)$ ונסמן $g := \sum_{i=1}^\infty \left|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\right|$ והסדרה $\left\{g_k^p = \left[\sum_{i=1}^k \left|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\right|\right]^p\right\}_{k=1}^\infty$ היא סדרה מונוטוניות עולה של פונקציות אי־שלילית המקיימת $g_k^p \xrightarrow[k\to\infty]{} g^p = \left[\sum_{i=1}^\infty \left|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\right|\right]^p$ נקודתית, אז ממשפט ההתכנסות המונוטונית נקבל

$$\|g\|_p^p = \int_X \left(\sum_{i=1}^\infty \left|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\right|\right)^p \mathrm{d}\mu = \int_X g^p \,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int_X g_k^p \,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \|g_k\|_p^p < 1$$

כאשר אי־השיוויון האחרון נובע מהיות

$$\left\|g_k\right\|_p < \sum_{i=1}^k \frac{1}{2^i} < \sum_{i=1^\infty} \frac{1}{2^i} \underset{\text{סכום טור הנדסי}}{=} \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1 \Longrightarrow \left\|g_k\right\|_p < 1 \Longrightarrow \left\|g_k\right\|_p^p < 1$$

ולכן בפרט $\|g\|_p < 1$ ולכן $g(x) < \infty$ μ־כמעט לכל $x \in X$ כלומר הטור מתכנס בהחלט μ־כמעט תמיד אז נגדיר

$$f := f_{n_1} + \sum_{i=1}^\infty \left(f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\right)$$

ונרצה להראות שהסדרה $\{f_m\}_{m=1}^\infty$ מתכנסת ל־f וכן ש־$f \in L^p(\mu)$: f מוגדרת μ־כמעט תמיד לכן נקבע $f = 0$ היכן ש־f לא מוגדרת ואז

$$f(x) = f_{n_1} + \sum_{i=1}^\infty \left(f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\right) = \lim_{i\to\infty} f_{n_i}(x)$$

שכן זהו טור טלסקופי ולכל $m \in \mathbb{N}$ מתקיים $\left|f_m - f_{n_i}\right|^p \xrightarrow[i\to\infty]{} |f_m - f|^p$ כמעט לכל $x \in X$, אז

$$\|f_m - f\|_p^p = \int_X |f_m - f|^p \,\mathrm{d}\mu = \int_X \liminf_{i\to\infty} \left|f_m - f_{n_i}\right|^p \mathrm{d}\mu \underset{\text{פאטו}}{\le} \liminf_{i\to\infty} \int_X \left|f_m - f_{n_i}\right|^p \mathrm{d}\mu = \liminf_{i\to\infty} \left\|f_m - f_{n_i}\right\|_p^p$$

אבל $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ היא סדרת קושי, אז לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n, m \in \mathbb{N}$ עם $n, m > N$ מתקיים $\left\|f_m - f_{n_i}\right\|_p < \varepsilon$ ובפרט עבור $m > N$ נקבל

$$\|f_m - f\|_p^p \le \liminf_{i\to\infty} \left\|f_m - f_{n_i}\right\|_p^p < \varepsilon^p \Longrightarrow f_m \xrightarrow[m\to\infty]{\|\cdot\|_p} f$$

וכן

$$\|f\|_p \underset{\text{אי־שיוויון המשולש}}{\le} \|f - f_m\|_p + \|f_m\|_p < \infty \Longrightarrow f \in L^p(\mu)$$

2. אם $p=\infty$ אז $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq L^{\infty}(\mu)$ סדרת קושי של נציגים עבורה קיימת תת־סדרה $\left\{f_{n_i}\right\}_{i=1}^{\infty}$ כך שמתקיים

$$\forall i\in\mathbb{N},\ \left\|f_{n_{i+1}}-f_{n_i}\right\|_{\infty}<\frac{1}{2^k}$$

נסמן לכל $n\in\mathbb{N},k\in\mathbb{N}$

$$A_n:=\left\{x\in X\mid |f_n(x)|>\|f_n\|_{\infty}\right\}=|f_n|^{-1}\left(\left(\|f_n\|_{\infty},\infty\right]\right)$$

$$B_{n,k}:=\left\{x\in X\mid |f_n(x)-f_k(x)|>\|f_n-f_k\|_{\infty}\right\}=|f_n-f_k|^{-1}\left(\left(\|f_n-f_k\|_{\infty},\infty\right]\right)$$

אבל $f_n\in L^{\infty}(\mu)$ אז מהגדרה $\text{ess sup}\{|\cdot|\}=\|\cdot\|_{\infty}$ ש־$\mu(A_n)=\mu\left(B_{n,k}\right)=0$ אז

$$E:=\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n\right)\cup\left(\bigcup_{n,k\in\mathbb{N}}B_{n,k}\right)$$

ומ־σ־אדטיביות של μ נקבל $\mu(E)=0$.
כעת $\sum_{i=1}^{\infty}\left(f_{n_{i+1}}-f_{n_i}\right)$ מתכנס במידה שווה ממבחן ה־M של ויירשטראס על $X\setminus E$ (כי $\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}<\infty$) ולכן $f_{n_1}+\sum_{i=1}^{\infty}\left(f_{n_{i+1}}-f_{n_i}\right)$ מתכנסת במידה שווה ל־f על $X\setminus E$.
אז $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי ונקבל שהגבול $f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)$ מוגדר וקיים μ־כמעט לכל $x\in X$ ו־f חסומה על־ידי $\lim_{n\to\infty}\|f_n\|_{\infty}$ μ־כמעט לכל $x\in X$, כלומר $f\in L^{\infty}(\mu)$ ומתקיים $\|f-f_n\|_{\infty}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.

$\square$

7.6 $L^p(\mu)$ צפופה ב־$\mathcal{S}$

משפט 7.10 ($\mathcal{S}$ צפופה ב־$L^p(\mu)$): יהי $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{C}^X$ האוסף הנתון על־ידי

$$\mathcal{S} := \{s : X \to \mathbb{C}, \text{פשוטה } s \mid \mu(\{x \in X \mid s(x) \neq 0\}) < \infty\}$$

אזי לכל $p \in [1, \infty)$ מתקיים ש־$\mathcal{S}$ צפופה ב־$L^p(\mu)$ (כלומר, לכל $f \in L^p(\mu)$ קיימת סדרת פונקציות $\{s_n\}_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{S}$ כך ש־f $(s_n \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|_p} f$).

הוכחה: מכך שלכל $s \in \mathcal{S}$ מתקיים $|s(X)| < \infty$, יחד עם התנאי $\mu(\{x \in X \mid s(x) \neq 0\}) < \infty$ נסיק כי $S \subseteq L^p(\mu)$ לכל $p \in [1, \infty)$.
תהיי $f \in L^p(\mu)$ אי־שלילית ותהיי $\{s_n : X \to \mathbb{C}\}_{n=1}^\infty$ המתכנסת אליה נקודתית.
אזי מהתנאי $0 \le s_n \le f \in L^p(\mu)$ נובע $\{s_n\}_{n=1}^\infty \subseteq L^p(\mu)$.
נניח בשלילה שקיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש־$s_{n_0} \notin \mathcal{S}$, כלומר $\mu\Big(\Big\{x \in X \mid s_{n_0}(x) \neq 0\Big\}\Big) = \infty$, אז נסמן

$$c := \min\Big\{0 \le \alpha < \infty \mid \mu\Big(\Big\{x \in X \mid s_{n_0}(x) = \alpha\Big\}\Big)\Big\} = \alpha$$

שמוגדר היטב כי $|s(X)| < \infty$.
מתקיים

$$s_{n_0}^{-1}(\{\alpha\}) = \Big\{x \in X \mid s_{n_0}(x) = \alpha\Big\} \Longrightarrow c = \min\Big\{\alpha \in [0, \infty) \mid \mu\Big(s_{n_0}^{-1}(\{\alpha\})\Big) = \infty\Big\}$$

ולכן

$$\|f\|_p^p = \int_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu \underset{(1)}{=} \int_X f^p \,\mathrm{d}\mu \underset{(2)}{\ge} \int_X s_{n_0}^p \,\mathrm{d}\mu \underset{(3)}{\ge} \int_{s_{n_0}^{-1}(\{c\})} s_{n_0}^p \,\mathrm{d}\mu \underset{(4)}{\ge} c^p \cdot \mu\Big(s_{n_0}^{-1}(\{c\})\Big) = \infty$$

כאשר

1. נובע מהיות f אי־שלילית
2. לכל $n \in \mathbb{N}$, $f \ge s_n \ge 0$ אם ורק אם $f^p \ge s_n^p \ge 0$
3. מונוטוניות המידה ביחס להכלה
4. מהגדרת $s_{n_0}^{-1}(\{c\})$ ומהגדרת c

כלומר $\|f\|_p = \infty \iff \|f\|_p^p = \infty$ אבל $f \in L^p(\mu)$ וזאת סתירה ולכן $\mu(\{x \in X \mid s_n(x) \neq \infty\}) < \infty$ לכל $n \in \mathbb{N}$.
מתקיים

$$s_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f \iff s_n - f \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \iff |s_n - f| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \iff |s_n - f|^p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

כלומר $|s_n - f|^p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ נקודתית ומתקיים לכל $n \in \mathbb{N}$

$$|f - s_n|^p = (f - s_n)^p \le f^p \in L^p(\mu)$$

כלומר הסדרה $\big\{|f - s_n|^p\big\}_{n=1}^\infty$ נשלטת על־ידי הפונקציה f^p אבל $f \in L^p(\mu)$ ולכן $f \in L^1(p)$ וממשפט ההתכנסות הנשלטת

$$\|f - s_n\|_p^p = \int_X |f - s_n|^p \,\mathrm{d}\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Longrightarrow s_n \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|_p} f$$

מהיות f שרירותית נובע כי ניתן לקרב כל $f \in L^p(\mu)$ על־ידי איברים מ־$\mathcal{S}$ ולכן $\overline{\mathcal{S}} = L^p(\mu)$. □

הערה (אי־נכונות הטענה ב־L^∞): $\mathcal{S}$ איננה צפופה ב־$L^\infty(\mathrm{Leb}_\mathbb{R})$: ניקח $f(x) = 1$ לכל $x \in \mathbb{R}$ ו־$f \in L^\infty(\mathbb{R})$ כי $\|f\|_\infty = 1$.
תהיי $s \in \mathcal{S}$ ולכן קיימת E כך ש־$\mu(E) < \infty$ ו־s נתמכת על E ולכן

$$s(x) = 0 \ \forall x \in E^c$$

אזי

$$\|f - s\|_\infty = \text{ess sup}_{x\in\mathbb{R}}|f(x) - s(x)|$$

אבל $\mu(\mathbb{R}) = \infty$ ו־$\mu(E) < \infty$ ולכן $\mu(E^c) = \infty$ וכמובן איננה ממידה אפס ועל E^c מתקיים

$$|f(x) - s(x)| = |1 - 0| = 1 \Longrightarrow \|f - s\|_\infty \ge 1$$

אז אי אפשר לבנות סדרה שמתכנסת ל־0 ולכן $\mathcal{S}$ לא צפופה ב־$L^\infty(\mathrm{Leb}_\mathbb{R})$.

7.7 קירוב על־ידי פונקציות רציפות

משפט 7.11 (קירוב על־ידי פונקציות רציפות): יהי X מרחב האוסדרוף קומפקטי־מקומית ותהיי μ ממידת רדון על X.
לכל $p \in [1, \infty)$ הקבוצה $C_C(X)$ צפופה ב־$L^p(\mu)$.

הוכחה:

1. **$C_C(X) \subseteq L^p(\mu)$:** אם $f \in C_C(X)$ אזי f רציפה ו־$\operatorname{supp}(f)$ קומפקטית ולכן f חסומה ב־$\operatorname{supp}(f)$ וכן $|f|^p$ חסומה ב־$\operatorname{supp}(f)$ ולכן קיים $M > 0$ כך ש־M $|f|^p \le$ על $\operatorname{supp}(f)$.
μ מידת רדון ולכן היא סופית על קומפקטיות ומתקיים $\mu(\operatorname{supp}(f)) < \infty$ ולכן

$$\|f\|_p^p = \int_{\operatorname{supp}(f) \uplus} (\operatorname{supp}(f))^c |f|^p \,\mathrm{d}\mu = \int_{\operatorname{supp}(f)} |f|^p \,\mathrm{d}\mu + \int_{(\operatorname{supp}(f))^c} |f|^p \,\mathrm{d}\mu = \int_{\operatorname{supp}(f)} |f|^p \,\mathrm{d}\mu$$
$$\le \int_{\operatorname{supp}(f)} M \,\mathrm{d}\mu = M \cdot \mu(\operatorname{supp}(f)) < \infty \Longrightarrow f \in L^p(X)$$

2. **שימוש בצפיפות $\mathcal{S}$:** אז אם

$$\mathcal{S} := \{s : X \to \mathbb{C}, \text{פשוטה } s \mid \mu(\{x \in X \mid s(x) \neq 0\}) < \infty\}$$

מספיק שנראה $S \subseteq \overline{C_C(X)}$ כי אז נקבל $L^p(\mu) = \overline{S} \subseteq \overline{C_C(X)} \subseteq \overline{L^p(\mu)} = L^p(\mu)$ שהמעבר האחרון נובע מהיות $\left(L^p(\mu), \|\cdot\|_p\right)$ מרחב שלם.
אז תהיי $s \in \mathcal{S}$ וממשפט Lusin, לכל $\varepsilon > 0$ קיימת $g \in C_C(X)$ עם

$$\sup_{x \in X}\{|g(x)|\} \le \sup_{x \in X}\{|s(x)|\} =: M_s$$

כך שמתקיים

$$\mu(\{x \in X \mid s(x) \neq g(x)\}) \ll \frac{\varepsilon^p}{2^p M_s^p}$$

ומאי־שיוויון המשולש נקבל $|g - s| \le 2M_s$.
נסמן

$$A := \{x \in X \mid g(x) = s(x)\}$$

ואז על A מתקיים $|g - s|^p =\equiv 0$ וגם $\mu(A^c) < \frac{\varepsilon^p}{2^p M_s^p}$ ונקבל

$$\|g - s\|_p^p = \int_X |g - s|^p \,\mathrm{d}\mu = \int_{A \uplus A^c} |g - s|^p \,\mathrm{d}\mu = \int_A |g - s|^p \,\mathrm{d}\mu + \int_{A^c} |g - s|^p \,\mathrm{d}\mu$$
$$\le \int_{A^c} 2^p M_s^p \,\mathrm{d}\mu = 2^p M_s^p \cdot \mu(A^c) < 2^p M_s^p \cdot \frac{\varepsilon^p}{2^P M_s^p} = \varepsilon^p$$

כלומר

$$\|g - s\|_p^p < \varepsilon^p \Longrightarrow \|g - s\|_p < \varepsilon$$

אז הטענה נכונה לכל $\varepsilon > 0$ ו־M_s תלוי ב־s ולא ב־g אז לכל s ניתן לצוא חסם M_s שחוסם את $g \in C_C(X)$, כלומר כל $s \in \mathcal{S}$ ניתן לקירוב על־ידי פונקציה מ־$C_C(X)$ ולכן $C_C(X)$ צפופה ב־$\mathcal{S}$ כשהאחרון צפוף ב־$L^p(\mu)$ ולכן $C_C(X)$ צפוף ב־$L^p(\mu)$.

□

הערה (אי־נכונות הטענה ב־L^∞): הדוגמה מהטענה הקודמת מראה את אי־נכונות הטענה גם כאן.

8 יחסים בין מידות

תהיינה μ, ν מידות על מרחב מדיד $(X, \mathcal{A})$.

הגדרה 8.1 (מידה רציפה בהחלט): נאמר ש־ν רציפה בהחלט ביחס ל־μ ונסמן $\nu \ll \mu$ אם ורק אם

$$\forall E \in \mathcal{A},\ \mu(E) = 0 \Longrightarrow \nu(E) = 0$$

הגדרה 8.2 (מידות שקולות): נאמר ש־μ ו־ν הן שקולות ונסמן $\mu \sim \nu$ אם ורק אם $\nu \ll \mu$ וגם $\mu \ll \nu$, כלומר

$$\forall E \in \mathcal{A},\ \mu(E) = 0 \Longleftrightarrow \nu(E) = 0$$

הגדרה 8.3 (מידות סינגולריות): נאמר ש־μ ו־ν סינגולריות ונסמן $\nu \perp \mu$ אם ורק אם קיימות $A, B \in \mathcal{A}$ מדידות וזרות כך שמתקיים $\mu(A^c) = \mu(B^c) = 0$ (באופן שקול, אם $A \uplus B = X$ ו־$\nu(B) = \mu(A) = 0$).

8.1 טענה שקולה לרציפות בהחלט במרחב סופי

משפט 8.1 (טענה שקולה לרציפות בהחלט במרחב סופי): אם μ סופית אז $\nu \ll \mu$ אם ורק אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם $\nu(A) < \delta$ אזי $\mu(A) < \varepsilon$.

הוכחה: $\Longleftarrow$ נניח כי $\mu \ll \nu$. יהי $\varepsilon > 0$ ונניח בשלילה שלכל $n \in \mathbb{N}$ קיימת A_n עם $\nu(A_n) < 2^{-n}$ כך ש־$\mu(A^n) > \varepsilon$.
לפי בורל־קנטלי $\nu(\cap \cup A_n) = 0$ אבל מרציפות בהחלט ומסופיות μ

$$\mu\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n\right) = \mu(\limsup A_n) \geq \limsup \mu(A_n) \geq \varepsilon$$

$\Longrightarrow$ נניח כי $\nu(A) = 0$ אז $\nu(A) < \delta$ לכל $\delta > 0$ ולכן $\mu(A) < \varepsilon$ לכל $\varepsilon > 0$ ולכן $\mu(A) = 0$. $\square$

8.2 טענה שקולה לרציפות בהחלט במרחב σ־סופי

משפט 8.2 (טענה שקולה לרציפות בהחלט במרחב σ־סופי): אם μ מידה σ־סופית ו־ν מידה כלשהי אז $\mu \ll \nu$ אם ורק אם $\mu|_A \ll \nu|_A$ לכל A עם $\mu(A) < \infty$.

הוכחה: $\Longleftarrow$ כי אם $\mu \ll \nu$ זה נכון גם לצמצום.
$\Longrightarrow$ נכתוב $X = \bigcup_n A_n$ עם $\mu(A_n) < \infty$ ונניח כי $\mu(E) = 0$ אז נראה כי $\nu(E) = 0$: $E_n = A_n \cap E$ אז מהיות $\mu(E) = 0$ נובע כי $\mu(E_n) = 0$ ממונוטוניות המידה (כי חיתוך קבוצות מדידות הוא קבוצה מדידה) ולכן $\mu|_{A_n}(E) = 0$ ולכן מההנחה

$$\nu|_{A_n}(E) = 0 = \nu(E \cap A_n)$$

ולכן

$$\nu(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E \cap E_n) = 0$$

$\square$

8.3 תנאי שקול למידת האפס

משפט 8.3 (אם מידה רציפה בהחלט וסינגולרית ביחס למידה אחרת היא מידת האפס): אם $\mu \ll \nu$ וגם $\mu \perp \nu$ אז μ היא מידת האפס.

הוכחה: מהסינגולריות של המידות נובע כי μ נתמכת על הקבוצה A כך ש־$\nu(A) = 0$ ומרציפות בהחלט נובע כי $\mu(A) = 0$, כלומר $\mu \equiv 0$. $\square$

8.4 תנאי שקול לסינגולריות על מידות חיוביות

משפט 8.4 (תנאי שקול לסינגולריות על מידות חיוביות): יהיו μ, ν מידות חיוביות על X. אז $\nu \perp \mu$ אם ורק אם לכל $\varepsilon > 0$ קיימת קבוצה $A \subset X$ מדידה כך ש־$\mu(A) < \varepsilon, \nu(A^c) < \varepsilon$.

הוכחה: $\Longleftarrow$ אם $\nu \perp \mu$ אזי קיימת קבוצה A כך ש־$\mu(A) = 0$ ו־$\nu(A^c) = 0$, כנדרש.
$\Longrightarrow$ נבחר $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת קבוצות כך שמתקיים

$$\mu(A_n) < 2^{-n}, \nu(A_n^c) < 2^{-n}$$

נגדיר $A = \limsup A_n$ ומבורל־קנטלי נקבל $\mu(A) = 0$, מצד שני מהלמה של פאטו

$$\nu(A^c) = \nu(\liminf A_n^c) \le \liminf_{n\to\infty} \nu(A_n^c) = 0$$

□

8.5 מסקנה מתרגילי הבית

משפט 8.5 (מסקנה מתרגילי הבית): $\mu, \nu_1, \nu_2, \ldots$ מידות חיוביות על X ונגדיר $\nu = \sum_{i=1}^{\infty} \nu_i$ אזי

$$(1)\ \forall i \in \mathbb{N},\ \nu_i \perp \mu \Longrightarrow \nu \perp \mu \qquad (2)\ \forall i \in \mathbb{N},\ \nu_i \ll \mu \Longrightarrow \nu \ll \mu$$

9 מרחבי הילברט

9.1 אם μ איננה מידת האפס

משפט 9.1: אם $\mu \neq 0$ מידה σ־סופית על מרחב מדיד $(X, \mathcal{A})$, אזי קיימת מידה סופית ν על $(X, \mathcal{A})$ כך ש־$\nu \sim \mu$.

הוכחה: שוב נפרק את ההוכחה לפרקים אולי יעזור לזיכרון...

1. **שימוש ב־σ סופיות:** מהיות $(X, \mathcal{A}, \mu)$ מרחב מידה σ־סופי נובע שקיים אוסף $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ עם $\mu(A_n)$ לכל $n \in \mathbb{N}$ כך ש־A_n $X = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$
2. **הגדרת פונקציית עזר:** נגדיר $w : X \to [0, 1]$ על־ידי

$$w(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n}}{1 + \mu(A_n)} \cdot \mathbb{1}_{A_n}(x)$$

3. **w מדידה:** כגבול של סדרת פונקציות שהן צירופים לינאריים סופיים של פונקציות מציינות שהן כמובן מדידות
4. **$0 \leq w \leq 1$:** לכל $x \in X$ ברור שהביטוי אי־שלילי. כמו־כן, מה־σ־סופיות נובע שקיים לפחות $N \in \mathbb{N}$ אחד כך ש־$x \in A_n$ ולכן

$$w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n}}{1 + \mu(A_n)} \cdot \mathbb{1}_{A_n}(x) \geq \frac{2^{-n}}{1 + \mu(A_n)} \cdot \mathbb{1}_{A_n}(x) = \frac{2^{-n}}{1 + \mu(A_n)} > 0$$

5. **חסימות:** מהיות $\mu(A_n) > 0$ נובע כי $1 + \mu(A_n) > 1$ נובע כי $\frac{1}{1+\mu(A_n)} \leq 1$, אז

$$0 < w \underset{\text{הורדנו אינדקטור}}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n}}{1 + \mu(A_n)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1 \Longrightarrow w(x) \in (0, 1]$$

6. **הגדרת מידה חדשה:** נגדיר $u : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ מידה המוגדרת על־ידי $\mathrm{d}\nu = w \, \mathrm{d}\mu$ ראינו שזאת מידה וש־$\nu \ll \mu$
7. **$\mu \ll \nu$:** תהיי $E \in \mathcal{A}$ כך ש־$0 = \nu(E) = \int_E w \, \mathrm{d}\mu$.
   מהיות $w > 0$ נסיק כי $\mu(E) = 0$ כי אחרת אם $w > 0$ וגם $\mu(E) > 0$ נקבל כי $0 = \nu(E) = \int_E w \, \mathrm{d}\mu > 0$ בסתירה ולכן $\mu \ll \nu$
8. **הגדרה של מידות שקולות:** מצאנו כי $\nu \ll \mu$ וכן $\mu \ll \nu$ ולכן מהגדרה של מידות שקולות נובע כי $\nu \sim \mu$

$\square$

10 נגזרת רדון־ניקודים

10.1 משפט נגזרת רדון־ניקודים־לבג

משפט 10.1 (משפט נגזרת רדון־ניקודים־לבג): אם μ ו־ν מידות σ־סופיות על מרחב מדיד $(X,\mathcal{A})$, אזי קיימות שתי מידות יחידות ν_a,ν_s על $(X,\mathcal{A})$ כך שמתקיים

1. $\nu=\nu_a+\nu_s$ כאשר $\nu_a\ll\mu$ וגם $\nu_s\perp\mu$
2. קיימת פונקציה מדידה $h:X\to[0,\infty)$ יחידה עד־כדי מידה אפס תחת μ המקיימת
   1. $\mathrm{d}\nu_a=h\,\mathrm{d}\mu$ כלומר $\nu_a(E)=\int_E h\,\mathrm{d}\mu$ לכל $E\in\mathcal{A}$
   2. אם $X=\cup_{n=1}^{\infty}A_n$ עבור $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{A}$ עם $\nu(A_n)<\infty$ אזי $h\mathbb{1}_{A_n}\in L^1(\mu)$ לכל $n\in\mathbb{N}$
   3. אם ν מידת סופית אזי $h\in L^1(\mu)$

הערה: הפונקציה h נקראת **נגזרת רדון־ניקודים של ν ביחס ל־μ** ומסומנת $h=\frac{\mathrm{d}\nu_a}{\mathrm{d}\mu}$.

הוכחה:

1. נניח שהטענה נכונה כאשר ν מידה סופית ו־μ מידה σ־סופית ונראה כי זה גורר נכונות עבור מידות ν, μ σ־סופיות:
$(X,\mathcal{A},\nu)$ הוא מרחב מידה σ־סופי ולכן קיים אוסף $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{A}$ של קבוצות מדידות ממידה סופית תחת ν ובלי הגבלת הכלליות נניח שהן זרות זו מזו (תמיד ניתן להזיר אותם) כך ש־$X\underset{(\star)}{=}\uplus_{n=1}^{\infty}A_n$ ולכל $n\in\mathbb{N}$ נסמן

$$v_n:=\nu|_{A_n}\qquad A_n:=\mathcal{A}|_{A_n}\qquad \left(\mathcal{A}|_{A_n}:=\{E\cap A_n\mid E\in\mathcal{A}\}\right)$$

כלומר ν_n היא מידה על המרחב המדיד המצומצם $(A_n,\mathcal{A}_n)$ ומהסופיות של ν_n נובע שגם הוא מרחב מידה סופי.
מ־$(\star)$ נובע כי $\nu=\sum_{n=1}^{\infty}\nu_n$ ומההנחה ניתן ליישם את הטענה עבור המידות μ ו־ν_n על $(A_n,\mathcal{A}_n)$:
אז קיימות $\nu_{n,a},\nu_{n,s}$ על $(A_n,\mathcal{A}_n)$ עם $\nu_{n,a}\ll\mu$ וגם $\nu_{n,s}\perp\mu$ כך ש־$\nu_n=\nu_{n,a}+\nu_{n,s}$ אז נגדיר

$$\nu_s:=\sum_{n=1}^{\infty}\nu_{n,s}\qquad \nu_a:=\sum_{n=1}^{\infty}\nu_{n,a}$$

ונקבל אם כך

$$\nu=\sum_{n=1}^{\infty}\nu_n=\sum_{n=1}^{\infty}\nu_{n,a}+\nu_{s,n}=\sum_{n=1}^{\infty}\nu_{n,a}+\sum_{n=1}^{\infty}\nu_{s,n}=\nu_a+\nu_s$$

ולכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיימים

   1. תהיי $E\in\mathcal{A}_n$ עם $\mu(E)=0$ אזי $\nu_{n,a}\ll\mu$ ולכן $\nu_{n,a}(E)=0$, מכאן ש־$\nu_a(E)=\sum_{n=1}^{\infty}\nu_{n,a}=0$ ולכן $\nu_a\ll\mu$
   2. $\mu\perp\nu_{n,s}$ ולכן קיימות $A,B\in\mathcal{A}$ מדידות וזרות כך ש־$\mu(A^c)=\nu_{n,s}(B^c)=0$ ולכן $\nu_s(B^c)=\sum_{n=1}^{\infty}\nu_{n,s}(B^c)=0=\mu(A^c)$ ולכן $\mu\perp\nu_s$

2. נוכיח את הטענה תחת ההנחה ש־ν מידה סופית ו־μ מידה σ־סופית

□