פתרון מטלה 02 — תורת הקבוצות, 80200

31 במרץ 2025

שאלה 1

תהיינה X, Y, X', Y' קבוצות המקיימות $|X| = |Y|, |X'| = |Y'|$.

סעיף א'

נוכיח שמתקיים $|X \times X'| = |Y \times Y'|$.

הוכחה: מכך שמתקיים $|X| = |Y|$ נובע שקיימת פונקציה חד־חד ערכית ועל $f : X \to Y$ ומכך שמתקיים $|X'| = |Y'|$ קיימת פונקציה חד־חד ערכית ועל $g : X' \to Y'$.

נגדיר $f : X \times X' \to Y \times Y'$ על־ידי $h(x, x') = (f(x), g(x'))$. נראה כי היא חד־חד ערכית ועל:

חד־חד ערכית: נשים לב שמתקיים

$$h(x_1, x_1') = h(x_2, x_2') \iff (f(x_1), g(x_1')) = (f(x_2), g(x_2')) \iff f(x_1) = f(x_2) \land g(x_1') = g(x_2') \underset{(1)}{\iff} x_1 = x_2 \land x_1' = x_2'$$

כאשר (1) נובע מהיות f ו־g חד־חד ערכיות.

על: יהי $(y, y') \in Y \times Y'$. מהיות f על, נובע כי קיים $x_y \in X$ כך שמתקיים $f(x) = y$ ומכך ש־g על נובע שקיים $x'_{y'} \in X'$ כך שמתקיים $g(x') = y'$. ולכן $h\left(x_y, x'_{y'}\right) = (y, y')$ וקיבלנו ש־h על.

מצאנו פונקציה חד־חד ערכית ועל ולכן מהגדרת שיוויון עוצמות נובע $|X \times X'| = |Y \times Y'|$. $\square$

סעיף ב'

נניח שמתקיים $X \cap X' = Y \cap Y' = \emptyset$. נוכיח שמתקיים $|X \cup X'| = |Y \cup Y'|$.

הוכחה: מכך שמתקיים $|X| = |Y|$ נובע שקיימת פונקציה חד־חד ערכית ועל $f : X \to Y$ ומכך שמתקיים $|X'| = |Y'|$ קיימת פונקציה חד־חד ערכית ועל $g : X' \to Y'$.

נגדיר כמו בתרגול:

$$f \oplus g(x) = \begin{cases} f(x) & x \in X \\ g(x) & x \in X' \end{cases}$$

הפונקציה מוגדרת היטב שכן מכך ש־$X \cap X' = Y \cap Y' = \emptyset$ נובע שכל $x \in X \cup X'$ נשלח לערך יחיד תחת $f \oplus g$.

נראה שהיא חד־חד ערכית ועל: את החד־חד ערכיות ראינו בתרגול, נראה שהיא גם על: יהי $y \in Y \cup Y'$.

מכך שמתקיים $Y \cap Y' = \emptyset$ נובע כי $y \in Y$ או $y \in Y'$.

אם $y \in Y$, מהיות f על, נובע כי קיים $x \in X$ כך שמתקיים $f(x) = y$.

אם $y \in Y'$, מהיות g על, נובע כי קיים $x \in X'$ כך שמתקיים $g(x') = y$.

מכך שמתקיים $X \cap X' = \emptyset$ נובע כי $x \neq x'$ ואלו שני מקרים שונים.

מהגדרת $f \oplus g$ נובע כי קיים $x \in X \cup X'$ כך שמתקיים $f \oplus g(x) = y$ וקיבלנו כי $f \oplus g$ חד־חד ערכית ועל.

מצאנו פונקציה חד־חד ערכית ועל ולכן מהגדרת שיוויון עוצמות נובע $|X \cup X'| = |Y \cup Y'|$. $\square$

סעיף ג'

נוכיח שמתקיים $\left|X^{X'}\right| = \left|Y^{Y'}\right|$.

הוכחה: מכך שמתקיים $|X| = |Y|$ נובע כי קיימת פונקציה חד־חד ערכית ועל $f : X \to Y$ ומכך שמתקיים $|X'| = |Y'|$ נובע שקיימת פונקציה חד־חד ערכית ועל $g : X' \to Y'$.

נגדיר $\varphi : X^{X'} \to Y^{Y'}$ על־ידי $\varphi(h) = f \circ h \circ g^{-1}$ ונרצה להראות כי φ היא חד־חד ערכית ועל. TBD $\square$

שאלה 2

תהיינה X, X' קבוצות.

סעיף א'

נוכיח ש־$(X \times \{0\}) \cap (X' \times \{1\}) = \emptyset$.

הוכחה: נניח בשלילה ש־$(X \times \{0\}) \cap (X' \times \{1\}) \neq \emptyset$ ולכן קיים $(a, b) \in (X \times \{0\}) \cap (X' \times \{1\})$.
מהגדרת החיתוך נובע כי $(a, b) \in X \times \{0\}$ ולכן $b = 0$. מצד שני, מהגדרת החיתוך נובע כי גם $(a, b) \in X' \times \{1\}$ ולכן $b = 1$ וזו סתירה. $\square$

סעיף ב'

נגדיר $X \uplus X' = (X \times \{0\}) \cup (X' \times \{1\})$ ונגדיר פונקציה $f : X \uplus X' \to X \cup X'$ על־ידי $f(a, i) = a$.
נוכיח ש־f היא על.

הוכחה: נניח בשלילה כי f איננה על, ולכן קיים $x_0 \in X \cup X'$ כך שלא קיים $(x, i) \in X \uplus X'$ המקיים $f(x, i) = x_0$.
אבל $x_0 \in X \cup X'$ ולכן מתקיימים אחד מהבאים:
$x_0 \in X$ ולכן $f(x_0, 0) = x_0$ או $x_0 \in X'$ ולכן $f(x_0, 1) = x_0$ או $x_0 \in X \wedge x_0 \in X'$ ואז $f(x_0, 0) = f(x_0, 1) = x_0$.
בכל מקרה הגענו לסתירה ולכן f על. $\square$

סעיף ג'

נוכיח שהפונקציה מהסעיף הקודם היא חד־חד ערכית אם ורק אם $X \cap X' = \emptyset$.

הוכחה:
$\Longleftarrow$ נניח כי f חד־חד ערכית ונראה כי $X \cap X' = \emptyset$.
נניח בשלילה כי $X \cap X' \neq \emptyset$ ולכן קיים $x_0 \in X \cap X'$, ולכן $x_0 \in X$ מקיים $f(x_0, 0) = x_0$ אבל מהגדרת החיתוך $x_0 \in X'$ ולכן מתקיים $f(x_0, 1) = x_0$ וזו סתירה לחד־חד ערכיות של f ולכן $X \cap X' = \emptyset$.
$\Longrightarrow$ נניח $X \cap X' = \emptyset$ ונראה כי f חד־חד ערכית.
נניח כי f לא חד־חד ערכית, ולכן קיימים $(x_1, i_1), (x_2, i_2) \in X \uplus X'$ כך ש־$(x_2, i_2) \neq (x_1, i_1)$ אבל $f((x_1, i_1)) = f((x_2, i_2))$, אבל אז מהגדרת f נובע $x_1 = x_2$, אבל $X \cap X' = \emptyset$ ולכן נקבל $i_1 = i_2 = 0$ או $i_1 = i_2 = 1$ ולכן f חד־חד ערכית. $\square$

סעיף ד'

נגדיר $i : X \to X \uplus X'$ על־ידי $i(x) = (x, 0)$ ונגדיר $i' : X' \to X \uplus X'$ על־ידי $i'(x) = (x, 1)$.
נוכיח שאם יש קבוצה Y ופונקציות $f : X \to Y$ ו־$g : X' \to Y$ אז יש פונקציה יחידה $f \oplus g : X \uplus X' \to Y$ המקיימת $(f \oplus g) \circ i = f$ וגם $(f \oplus g) \circ i' = g$

הוכחה: TBD $\square$

שאלה 3

תהיינה X, X', Y, Y' קבוצות כך שמתקיים $|X| \leq |Y|$ ו־$|X'| \leq |Y'|$.

סעיף א'

נניח $X \cap X' = \emptyset$ אבל $Y \cap Y' \neq \emptyset$. נפריך את הטענה $|X \cup X'| \leq |Y \cup Y'|$.

הוכחה: נגדיר

$$X = \{1,2,3\}, X' = \{4,5\}, Y = \{1,2,3\}, Y' = \{3,4\}$$

אכן מתקיים $|X| \leq |Y|, |X'| \leq |Y'|$ ו־$X \cap X' = \emptyset$.
אבל $X \cup X' = \{1,2,3,4,5\} \Rightarrow |X \cup X'| = 5$ ומנגד $Y \cup Y' = \{1,2,3,4\} \Rightarrow |Y \cup Y'| = 4$.
ניתן דוגמה גם לקטן ממש: נגדיר

$$X = \{1,2\}, X' = \{4,5\}, Y = \{1,2,3\} = Y'$$

אכן מתקיים $|X| \leq |Y|, |X'| \leq |Y'|$ ו־$X \cap X' = \emptyset$.
אבל $X \cup X' = \{1,2,4,5\}$ אז $|X \cup X'| = 4$ ומנגד $Y \cup Y' = \{1,2,3\}$ וכן $|Y \cup Y'| = 3$.
נשים לב שבשני המקרים לא יכולה להיות פונקציה חד־חד ערכית מעקרון שובך היונים – יש לנו יותר יונים (איברים ב־$X \cup X'$) מאשר שובכים (איברים ב־$Y \cup Y'$) ולכן בהכרח יהיה לנו שובך עם שתי יונים, דהיינו פונקציה לא חד־חד ערכית. $\square$

סעיף ב'

נניח $X \cap X' = \emptyset$ וגם $Y \cap Y' = \emptyset$. נוכיח שמתקיים $|X \cup X'| \leq |Y \cup Y'|$.

הוכחה: מכך שמתקיים $|X| \leq |Y|$ נובע כי קיימת פונקציה חד־חד ערכית $f : X \to Y$ ומכך שמתקיים $|X'| \leq |Y'|$ נובע כי קיימת פונקציה חד־חד ערכית $g : X' \to Y'$.
נגדיר $h : X \cup X' \to Y \cup Y'$ על־ידי

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in X \\ g(x) & x \in X' \end{cases}$$

הפונקציה מוגדרת היטב שכן $X \cap X' = \emptyset$ שכן כל $x_0 \in X \cup X'$ נשלח לערך יחיד תחת h.
h חד־חד ערכית, שכן f ו־g חד־חד ערכיות ומכך ש־$Y \cap Y' = \emptyset$ נובע שלכל $x \in X$ ולכל $x' \in X'$ מתקיים $f(x) \neq g(x')$.
מצאנו פונקציה חד־חד ערכית בין $X \cup X'$ לבין $Y \cup Y'$ ולכן מתקיים $|X \cup X'| \leq |Y \cup Y'|$. $\square$

סעיף ג'

נניח $X = X' = \emptyset$. נפריך את הטענה $\left|X^{X'}\right| \leq \left|Y^{Y'}\right|$.

הוכחה: בהרצאה ראינו שאם $X = X' = \emptyset$ אז $\emptyset : X \to X'$ היא חד־חד ערכית, על ויחידה.
נבחר $Y = \emptyset, Y' \neq \emptyset$ ונשים לב שבמקרה זה מתקיים $\left|Y^{Y'}\right| = 0$:
נשים לב שבמקרה זה אנחנו לא מקיימים את הגדרת הפונקציה: אמרנו כי יחס F בין Y' ל־Y נקרא פונקציה אם לכל $y' \in Y'$ קיים $y \in Y$ כך ש־$\langle y', y \rangle \in F$ אבל $Y = \emptyset$ וקיבלנו סתירה להגדרת הפונקציה.
לכן נקבל במקרה זה שמתקיים $\left|Y^{Y'}\right| = 0 \leq 1 = \left|X^{X'}\right|$ וזו סתירה. $\square$

סעיף ד'

נניח $X' = \emptyset$ אבל $X \neq \emptyset$. נוכיח שמתקיים $\left|X^{X'}\right| \leq \left|Y^{Y'}\right|$.

הוכחה: ראשית נשים לב שמהיות $X \neq \emptyset$ נובע כי $Y \neq \emptyset$ שכן $1 \leq |X| \leq |Y|$.
נשים לב שמהיות $X' = \emptyset$ נובע כי $\left|X^{X'}\right| = 1$: ניזכר כי היחס F יקרא פונקציה אם לכל $x' \in X$ קיים $x \in X$ כך ש־$\langle x', x \rangle \in F$.
מכך ש־$X' = \emptyset$, המכפלה הקרטזית $\emptyset \times X$ ריקה, ולכן היחס היחידי שיתאים הוא היחס הריק: לכל $x' \in \emptyset$ קיים $x \in X$ יחד כך שמתקיים $(x', x) \in \emptyset \times X = \emptyset$. נקבל אם כך $\left|X^{X'}\right| = 1$.
כעת, אם נבחר $Y' = \emptyset$ נקבל $\left|Y^{Y'}\right| = 1$ וזו התוצאה המינימלית מהנימוק לעיל ומכך ש־$Y \neq \emptyset$.
נקבל בסך־הכל שמתקיים $\left|Y^{Y'}\right| = 1 \leq 1 = \left|X^{X'}\right|$. $\square$

שאלה 4

תהיינה X', Y' קבוצות ונניח שמתקיים $X' \neq \emptyset$ וגם $|X'| \leq |Y'|$. נוכיח שיש פונקציה על $g : Y' \to X'$.

הוכחה: מכך שמתקיים $|X'| \leq |Y'|$ נובע כי קיימת $f : X' \to Y'$ חד־חד ערכית ומתקיים $Y' = f(X') \uplus (Y' \setminus f(X'))$.

יהי $x'_0 \in X' \setminus f^{-1}(X')$ (אם $X' \setminus f^{-1}(X') = \emptyset$ הטענה טריוויאלית כי f חד־חד ערכית ועל ולכן הפיכה ו־f^{-1} הפיכה של חד־חד ערכית ועל ולכן על).

מהיות f חד־חד ערכית נובע שלכל $y' \in f(X')$ קיים $x'_{y'} \in X'$ יחיד כך שמתקיים $f\left(x'_{y'}\right) = y'$. נגדיר $g : Y' \to X'$ על־ידי:

$$g(y') = \begin{cases} f^{-1}(y') & y' \in f(X') \\ x'_0 & y' \notin f(X') \end{cases}$$

g מוגדרת היטב שכן לכל $f(X') \cap (Y' \setminus f(X')) = \emptyset$ ולכן כל $y' \in Y'$ נשלח לערך יחיד תחת g.

היות ו־f חד־חד ערכית נובע $|X'| = |f(X')| \leq |Y|$ וקיבלנו ש־g על (שכן לכל $x' \in X'$ קיים $y' \in Y$ כך שמתקיים $g(y') = x'$) $\square$