פתרון מטלה – 05 מטלה פתרון

2025 במאי 9



שאלה 1

נוכיח מאקסיומות פאנו את הטענה הבאה

$$\forall x \ \forall y \ (x \cdot y = y \cdot x)$$

הוכחה: נשתמש באקסיומות פאנו מסדר שני הבאות

$$(1)\ \forall x(x\cdot 0=0)$$

$$(2)\ \forall x\forall y(x\cdot S(y)=x\cdot y+x)$$

$$(3)\ \forall A\subseteq N((0\in A\land (\forall x(x\in A\rightarrow S(x)\in A)\rightarrow A=N)))$$

$$(4)\ \forall x(x+0=x)$$

$$(5)\ \forall x\forall y\ x+y=y+x\ (\forall x\in A)$$

 $A=\mathbb{N}$ ונרצה להראות שמתקיים $A=\{x\in\mathbb{N}\mid A_X=\mathbb{N}\}$ ונסמן גם $A_x=\{y\in\mathbb{N}\mid x\cdot y=y\cdot x\}$ ונרצה לכל אכל לכל $S(x)\in A$ גם ביז להראות ש"ל להראות ש"ל להראות האינדוקציה (3) מספיק להראות ש"ל הראות ש"ל להראות האינדוקציה (10) מספיק להראות ש"ל הראות ש"ל לכל אום $x\in A$ גם לכל $x\in A$ בראה שמתקיים $x\in A$ לכל $x\in A$

מתקיים (2) אז מאקסיומה (2) אז ס $\cdot m=0$ רמה אז האקסיומה מתקיים עניה שמתקיים מאקסיומה (2) נובע ש $A_0=\mathbb{N}$

$$0 \cdot S(m) = 0 \cdot m + 0 \underset{(\star)}{=} 0 \cdot m \underset{(\star\star)}{=} 0$$

נראה ש־ $S(x)\cdot 0=0\cdot S(x)$ נשים לב ש־ $S(m)\in A_{S(x)}$ מתקיים מתקיים שבראינו עבור ביש מה שהראינו עבור $M\in A_{S(x)}$ לפי מה שהראינו עבור $M\in A_{S(x)}$ נעים $M\in A_{S(x)}$ לפי מה שהראינו עבור $S(x)\cdot m=m\cdot S(x)$ בראה ש־ $S(x)\cdot m=m\cdot S(x)$

כמו כן, נשים לב שמתקיים

$$S(m) \cdot S(x) = S(m) \cdot x + S(m)$$

וכן עם אקסיומה (3) נקבל

$$S(x) \cdot S(m) \underset{(2)}{=} S(x) \cdot m + S(x) \underset{m \in A_{S(x)}}{=} m \cdot S(x) + S(x) \underset{(2)}{=} m \cdot x + m + S(x) \underset{(5)}{=} m \cdot x + x + S(m)$$

כאשר המיספורים הם בהתאם למיספור האקסיומות לעיל וקיבלנו את הנדרש.

שאלה 2

 $X \uplus X' = (X \times \{0\}) \cup (X' \times \{1\})$ תהיינה X, Y, Z תהיינה

'סעיף א

$$|X imes(Y\uplus Z)|=|(X imes Y)\uplus (X imes Z)$$
נוכיה שמתקיים וו

על־ידי
$$f: X imes (Y \uplus Z) o (X imes Y) \uplus (X imes Z)$$
 על־ידי

$$f(x, (l, i)) = ((x, l), i)$$

יות: אפשריות: צורות משתי אדרת היטב: אורות אפשריות: איברי אפשריות: בשים לב איברי מוגדרת מוגדרת איברי לב איברי

- ((x,y),0) אל ביחידות $x \in X, y \in Y$ עבור (x,(y,0)) .1
- ((x,z),1) אל ביחידות שימופה $x\in X,z\in Z$ עבור עבור (x,(z,1)) .2

. ועל. ערכית ערכית היטב. נראה כי היא חד־חד ערכית ועל. f

על. f(a)=b נקבל $a=(x,(l,i))\in X imes (Y\uplus Z)$ על: יהי $b=((x,l),i)\in (X imes Y)$ נשים לב שבבחירה על $b=((x,l),i)\in (X imes Y)$ ממתקיים לב שמתקיים , $a=(x_1,(l_1,i_1)),c=(x_2,(l_2,i_2))\in X imes (Y\uplus Z)$ נשים לב הדיחד ערכיות: יהיו

$$f(a) = f(c) \Longleftrightarrow ((x_1, l_1), i_1) = ((x_2, l_2), i_2) \Longleftrightarrow x_1 = x_2 \land l_1 = l_2 \land i_1 = i_2 \Longleftrightarrow a = c$$

ולכן f חד־חד ערכית.

 $|X \times (Y \uplus Z)| = |(X \times Y) \uplus (X \times Z)|$ מצאנו פונקציה הד־חד ערכית ועל f ולכן לפי הגדרת שיוויון עוצמות מתקיים

$$\left| (X imes Y)^Z
ight| = \left| X^Z imes Y^Z
ight|$$
 נוכיה שמתקיים

$$f(z) := \langle x, y \rangle$$
 נסמן $z \in Z$ ולכל ולכל $f \in (X \times Y)^Z$ הוכחה:

$$(f$$
בהתאם ב $z\in Z$ לכל (לכל לכל אידי $g:Z\to X, h:Z\to Y$ גדיר גם גבדיר על פול ידי $g:Z\to X, h:Z\to Y$

$$\varphi(f)\coloneqq \langle g,h\rangle$$
 על־ידי $\varphi:(X\times Y)^Z\to (X^Z\times Y^Z)$ את נגדיר את בהתאמה, נגדיר את

:נראה כי φ חד־חד ערכית ועל

$$\psi(z)=\langle g,h \rangle$$
 מקיימת $\psi:Z o X imes Y$ נאכן ($\psi(z)=\langle g(z),h(z) \rangle$ ולכן ($\psi(z)=\langle g,h \rangle$ מקיימת ($\psi(z)=\langle g,h \rangle$ ואכן יהיו ($\psi(z)=\langle g,h \rangle$ מקיימת ($\psi(z)=\langle g,h \rangle$ מינים ($\psi(z)=\langle g,h \rangle$ (

מתקיים לב שמת $f_1, f_2 \in (X \times Y)^Z$ יהיו לב שמתקיים מד־חד

$$\varphi(f_1) = \varphi(f_2) \Longleftrightarrow \langle g_1, h_1 \rangle = \langle g_2, h_2 \rangle \Longleftrightarrow \forall z \in Z, g_1(z) = g_2(z) \land h_1(z) = h_2(z) \Longleftrightarrow f_1 = f_2(z) \Leftrightarrow f_1 = f_2(z) \Leftrightarrow f_2($$

 $|X \times Y|^2| = |X^Z \times Y^Z|$ מצאנו פונקציה מתקיים לפי הגדרת לפי הגדרת ועל ולכן ערכית ערכית ועל פונקציה מצאנו פונקציה הד-חד ערכית ועל ולכן לפי הגדרת שיוויון אוויון צוצאנו פונקציה אוויון ערכית ועל וולכן לפי הגדרת שיוויון צוצאנו פונקציה אוויון ערכית וועל וולכן לפי הגדרת שיוויון צוצאנו פונקציה אוויון ערכית וועל וולכן לפי הגדרת שיוויון צוצאנו פונקציה אוויון צוצאנו פונקציה אווייים אווייים אווייים אווייים אווייים אווייים אווייים אווייים אוויים אוויים אווייים אווייים אווייים אווייים אוויים אוו

'סעיף ג

$$|X^{Y\uplus Z}|=|X^Y imes X^Z|$$
 נוכיה שמתקיים

על־ידי $\varphi: X^{Y\uplus Z} o X, \varphi_1: Y o X, \varphi_2 Z o X$ את גדיר את $f: Y \uplus Z o X$ את על-ידי

$$\varphi_1(y) = f(\langle y, 0 \rangle)$$

$$\varphi_2(z) = f(\langle z, 1 \rangle)$$

$$\varphi(f) = \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle$$

ועל: ערכית ערכית φ ים בי גירת איטב מהגדרת מהגדרת ניאה איז מהגדרת מהגדרת מהגדרת $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$

 $.\varphi(f)=\langle g,h\rangle$ כך שמתקיים כך $f\in Y\uplus Z\to X$ שקיימת להראות להראה , $(g,h)\in X^Y\times X^Z$ יהי על: על: יהי

נגדיר

$$f(\langle \alpha, i \rangle) = \begin{cases} g(\alpha) & i = 0 \\ h(\alpha) & i = 1 \end{cases}$$

. על. ש־ φ על. וקיבלנו ש $\varphi(f) = \langle g, h \rangle$ ואז

: שמתקיים לב שמת ערכית: יהיו $\varphi(f_1)=\varphi(f_2)$ בי שמתקיים כך ל $f_1,f_2\in X^{Y\uplus Z}$ יהיו ערכית: יהיו בראה כי φ

$$\begin{split} \varphi(f_1) &= \varphi(f_2) \Longleftrightarrow \langle \varphi_{1_{f_1}}, \varphi_{2_{f_1}} \rangle = \langle \varphi_{1_{f_2}}, \varphi_{2_{f_2}} \rangle \Longleftrightarrow \\ \forall y \in Y, \ f_1(\langle y, 0 \rangle) &= f_2(\langle y, 0 \rangle) \land \forall z \in Z, \ f_1(\langle z, 1 \rangle) = f_2(\langle z, 1 \rangle) \Longleftrightarrow f_1 = f_2 \end{split}$$

. וקיבלנו קר חד־חד קיבלנו לי $f_1=f_2$ חד־חד משמע

. $\left|X^{Y\uplus Z}\right| = \left|X^Y imes X^Z\right|$ מצאנו פונקציה חד־חד ערכית ועל ולכן לפי הגדרת שיוויון עוצמות מתקיים