פתרון מטלה 06 — פונקציות מרוכבות, 80519

9 בדצמבר 2025

שאלה 1

שאלה 2

תהיי Γ_R מסילה המתקבלת משרשור (חיבור) הקו הישר המחבר בין הנקודות R ו־$-R$ עם חצי מעגל ברדיוס R ממורכב סביב הראשית, העובר בין הנקודות R ו־$-R$.

נמצא באיזה חצי מישור צריך לעבור חצי המעגל כדי שיתקיים

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(ax)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R} \frac{e^{aiz}}{z^2+1}\,\mathrm{d}\gamma$$

פתרון: יהי $a \in \mathbb{R}$ ונגדיר

$$f(z) = \frac{e^{iaz}}{z^2+1}$$

ניקח $\Gamma_R = [-R,R] \cup \gamma_R$ כאשר γ_R זו המסילה של חצי המעגל ברדיוס R הממורכז סביב הראשית ועובר בין הנקודות $R, -R$.

אם $a > 0$ נבחר את חצי המעגל העליון ואם $a < 0$ נבחר את החצי מעגל התחתון.

מלינאריות האינטגרל נקבל

$$\int_{\Gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z$$

נשים לב שמתקיים עבור $a \in \mathbb{R}$

$$|f(x)| = \frac{\left|e^{iax}\right|}{x^2+1} = \frac{1}{x^2+1}$$

אבל אנחנו יודעים

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \pi$$

כלומר שהאינטגרל הזה מתכנס בהחלט, אז

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

נכתוב פרמטריזציה לחצי המעגל על־ידי $z = Re^{i\theta}$ עבור $\theta \in [0,\pi]$, אז

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_0^{\pi} \frac{\left|e^{iaRe^{i\theta}}\right|}{|R^2e^{2i\theta}+1|} R\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi} \frac{e^{-aR\sin(\theta)}}{|R^2e^{2i\theta}+1|} R\,\mathrm{d}\theta$$

נשים לב שמאי־שיוויון המשולש ההפוך, עבור $R > 1$

$$\left|R^2e^{2i\theta}+1\right| \ge \left|\left|R^2e^{2i\theta}\right|-1\right| = \left|R^2-1\right| = R^2-1$$

אז

$$\int_0^{\pi} \frac{e^{-aR\sin(\theta)}}{|R^2e^{2i\theta}+1|} R\,\mathrm{d}\theta \le \int_0^{\pi} \frac{Re^{-aR\sin(\theta)}}{R^2-1}\,\mathrm{d}\theta = \frac{R}{R^2-1}\int_0^{\pi} e^{-aR\sin(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$

נזכר כי $\sin(\theta)$ היא סימטרית עבור $\theta = \frac{\pi}{2}$, כלומר $\sin(\theta) = \sin(\pi-\theta)$ ולכן

$$\int_0^{\pi} e^{-aR\sin(\theta)}\,\mathrm{d}\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR\sin(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$

אבל בקטע זה גם מתקיים $\sin(\theta) \ge \frac{2\theta}{\pi}$ ולכן

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR\sin(\theta)}\,\mathrm{d}\theta \le 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR\frac{2\theta}{\pi}}\,\mathrm{d}\theta \underset{u=\frac{2aR\theta}{\pi},\,\mathrm{d}\pi=\frac{\pi}{2aR}}{=} \frac{\pi}{2aR}\int_0^{aR} e^{-u}du = \left[\frac{-\pi e^{-u}}{2aR}\right]_{u=0}^{u=aR} = \frac{\pi}{2aR}(1-e^{-aR}) \le \frac{\pi}{2aR}$$

כלומר

$$\int_0^\pi e^{-aR\sin(\theta)}\,\mathrm{d}\theta \le 2\cdot\frac{\pi}{2aR} = \frac{\pi}{aR}$$

אז בסך־הכל קיבלנו

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \frac{R}{R^2-1}\cdot\frac{\pi}{aR} = \frac{\pi}{a(R^2-1)} \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$$

ולבסוף מאריתמטיקה של גבולות

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

ואם ניקח את החלק הממשי נקבל בידיוק

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(ax)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R}\frac{e^{aiz}}{z^2+1}\,\mathrm{d}\gamma$$

כלומר, אם $a>0$ לוקחים את החצי מעגל העליון ואם $a<0$ לוקחים את חצי המעגל התחתון (ומחשבים עם $|a|$ את אותו תהליך לעיל). $\square$

שאלה 3

סעיף א'

נמצא ענף של הלוגריתם בתחום $W=\mathbb{C}\setminus\left\{re^{-\frac{\pi i}{2}}\mid r\geq 0\right\}$ ונוכיח שהוא אכן ענף של הלגוריתם.

פתרון: מהיות

$$re^{\frac{-\pi i}{2}}=r\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=r(0-i)=-ri$$

ומהיות $r\geq 0$ $\square$