מבנים אלגבריים 2, 80446 — פתרון מבחן מועד א' 2024

2 באוגוסט 2025

שאלה 1

תהיי E/F הרחבת שדות. נוכיח כי E/F הרחבה סופית אם ורק אם E/F הרחבה נוצרת סופית ואלגברית.

הוכחה: $\Longleftarrow$ נניח כי E/F הרחבת שדות סופית ונוכיח כי היא נוצרת סופית ואלגברית.

מהסופיות ברור שמתקיים (מהגדרה)

$$\alpha \text{ אלגברי מעל } F \Longleftrightarrow [F(\alpha) : F] < \infty$$

ולכן זו הרחבה אלגברית (בפרט לכל $\alpha \in E$ מתקיים $[F(\alpha) : F] \leq [E : F]$) ולכן $[E : F] = n$ אז $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ זה בסיס של E מעל F ולכן $E = F(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ ולכן E נוצרת סופית מעל F.

$\Longrightarrow$ נניח כי E/F הרחבה נוצרת סופית ואלגברית ונראה שהיא סופית.

אם E/F נוצרת סופית ואלגברית אז יש יש לה קבוצת יוצרים $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ והיות וההרחבה אלגברית בפרט $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ אלגבריים.

נסמן $n_1, \cdots, n_k$ הדרגות של $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ בהתאמה, עלינו להראות $[E : F] \leq n_1 n_2 \cdots n_k$.

לכל $1 \leq i \leq k$ נסמן $E_i = F(\alpha_1, \cdots, \alpha_i)$ וכן $E_0 = F$, נשים לב כי אם מתקיים $[E_i : E_{i-1}] \leq n_i$ אז מכפליות הדרגה נקבל

$$[E : F] = [E_k : E_{k-1}] \cdot [E_{k-1} : E_{k-2}] \cdot \cdots \cdot [E_2 : E_1] \cdot [E_1 : E_0] \leq n_k \cdot n_{k-1} \cdot \cdots \cdot n_2 \cdot n_1$$

נזכר ש־$[E_i : E_{i-1}]$ זו הדרגה של הפולינום המינימלי g_i של α_i מעל E_{i-1}, אבל $m_{\alpha_i}(x)$ הוא הפולינום המינימלי של α_i מעל F הוא בפרט פולינום מעל השדה E_{i-1} (שמכיל את F) ומתקיים $g_i \mid m_{\alpha_i}$ ובפרט $[E_i : E_{i-1}] = \deg(g_i) \leq \deg\left(m_{\alpha_i}\right) = n_i$ $\square$

שאלה 2

נקבע את נכונות הטענה שאם $F \subseteq K \subseteq E$ כך ש־E/K ו־K/F הן הרחבות גלואה סופיות אז גם E/F הרחבת גלואה.

הוכחה:

בהתחלה חשבתי: E/K היא הרחבת גלואה ולכן זו הרחבה נורמלית וספרבילית.

באותו אופן גם K/F היא הרחבת גלואה ולכן נורמלית וספרבילית.

אנחנו יודעים שספרביליות היא טרנזטיבית, ולכן אם K/F ו־E/K הן הרחבות ספרביליות אז E/F היא הרחבה ספרבילית.

היות ו־E/K היא גלואה, אז E הוא שדה פיצול של פולינום $f \in K[x]$.

היות וההרחבה K/F היא נורמלית, אז כל פולינום אי־פריק ב־$F[x]$ שיש לו שורש ב־K הוא מתפצל לחלוטין ב־K.

המקדמים של f הם מ־K שהיא הרחבה נורמלית מעל F ועל־כן כל הצמודים של השורשים של f מעל F הם ב־E ולכן E אבל זה בידיוק גורר ש־E/F היא נורמלית.

אז E/F היא הרחבה ספרבילית ונורמלית ולכן גלואה.

אבל:

$$E = \mathbb{Q}\left(\sqrt[4]{2}\right), K = \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right), F = \mathbb{Q}$$

ואכן E/K גלואה כי זה שדה פיצול של הפולינום $x^2 - \sqrt{2}$ וגם K/F גלואה כי זה שדה פיצול של $x^2 - 2$ אבל E/F לא גלואה כי $i\sqrt[4]{2}$ הוא צמוד של $\sqrt[4]{2}$ שאיננו. $\square$

שאלה 3

יהי E שדה הפיצול של $x^4+3\in\mathbb{Q}[x]$ ונמצא באופן מפורש את כל התתי–שדות של E.

הוכחה: ראשית נשים לב

$$x^4+3=\left(x^2+\sqrt{3}i\right)\left(x^2-\sqrt{3}i\right)$$

ובגלל שאני אמורה לדעת מורכבים אני אמורה לדעת $-3=3e^{i\pi}$ ולכן מהנוסחה למציאת שורש של מספר מורכב

$$z_k=r^{\frac{1}{n}}e^{\frac{i(\theta+2k\pi)}{n}}$$

ובמקרה שלנו $r=3,\theta=\pi,n=4$ ולכן השורשים שלנו הם

$$\sqrt[4]{3}e^{\frac{i\pi}{4}},\sqrt[4]{3}e^{\frac{3i\pi}{4}},\sqrt[4]{3}e^{\frac{5i\pi}{4}},\sqrt[4]{3}e^{\frac{7i\pi}{4}}$$

שדה הפיצול הוא שדה ההרחבה המינימלי ביחס להכלה שיכיל את השורשים, ולכן מהאי־תלות זה יהיה $E=\mathbb{Q}\left(\sqrt[4]{3},i\right)$.

נבחן את דרגת ההרחבה, אנחנו כבר יודעים ממגדל הרחבות וכד' שמתקיים

$$\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt[4]{3},i\right):\mathbb{Q}\right]=\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt[4]{3},i\right):\mathbb{Q}\left(\sqrt[4]{3}\right)\right]\cdot\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt[4]{3}:\mathbb{Q}\right)\right]=4\cdot 2=8$$

כמובן שההרחבה הזו היא ספרבילית ונורמלית ולכן הרחבת גלואה מדרגה 8 ומהתאמת גלואה יש התאמה חד־חד ערכית ועל בין תתי־קבוצות של $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ לבין שדות ביניים $Q\subseteq F\subseteq E$.

אנחנו יודעים שמהתאמת גלואה, כל אוטומורפיזם חייב לשלוח את $\sqrt[4]{3}$ אל אחד מהבאים $\left\{\pm\sqrt[4]{3},\pm i\sqrt[4]{3}\right\}$ ואת $i\mapsto\pm i$ ויש לכך 8 אפשרויות.

אז היא ההתאמת גלואה איזומורפית כנראה ל־D_4 (זה פשוט מתאמי מבנה).

אנחנו "יודעים" שיש ל־D_4 בידיוק 8 תתי־חבורות לא טריוויאליות ולכן מהתאמת גלואה יש 8 שדות ביניים.

$$D_4=\langle a,b\mid a^4=b^2=e,ab=ba^{-1}\rangle$$

ולכן התתי־חבורות הן $\{e,a,a^2,a^3\},\{e,a^2\},\{e,b\},\{e,ba\},\{e,ba^2\},\{e,ba^3\},\{e,a^2,b,ba^2\},\{e,a^2,ba,ba^3\}$ (תודה לגוגל).

בהתאמה, $a=\sqrt[4]{3}$ ו־$b=i$ ולכן

$$\mathbb{Q}(i),\mathbb{Q}\left(\sqrt[4]{3}\right),\mathbb{Q}\left(\sqrt{3}\right)=\mathbb{Q}\left(\left(\sqrt[4]{3}\right)^2\right),\mathbb{Q}\left(i\sqrt[4]{3}\right),\mathbb{Q}\left(i,\sqrt{3}\right),\mathbb{Q}\left(\sqrt{3},\sqrt[4]{3}\right)$$

□