פתרון מטלה 07 — פונקציות מרוכבות, 80519

16 בדצמבר 2025

שאלה 1

נניח שאם G תחום כוכבי אז לכל $f \in \mathrm{Hol}(G)$ יש פונקציה קדומה.

נסיק את משפט קושי בתחום כוכבי: תהיי S תחום כוכבי חסום ו־G סביבה של S. אז לכל $f \in \mathrm{Hol}(G)$ מתקיים $\int_{\partial S} f \,\mathrm{d}\gamma = 0$.

תזכורת (קבוצה כוכבית): קבוצה $S \subseteq \mathbb{R}^n$ נקראת כוכבית אם קיים $x_0 \in S$ כך שלכל $x \in S$ מתקיים $[x_0, x] \subseteq S$.

הוכחה: TODOOOOOOOOOOOOOOOOOOO □

שאלה 2

תהיי $f\in \mathrm{Hol}(B(z_0,R))$ אז לכל $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ ולכל $r<R$ ראינו שמתקיים כמסקנה ממשפט קושי

$$|f^n(z_0)|\le \frac{n!}{r^n}M_{f,z_0}(r)$$

ונניח ש-f הולומורפית. *תזכורת*: בהינתן $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ רציפה, נגדיר $M_{f,z_0}(r)=\max_{z\in B(z_0,r)}|f(z)|$.

סעיף א'

נוכיח שאם f לא קבועה אז לכל z_0 קיים קבוע C כך שלכל r גדול מספיק $m_{f,z_0}\ge C(r+1)$.

הוכחה: TODOOOOOOOOOOOOOOOOOOO □

סעיף ב'

נוכיח שאם

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\log M_{f,z_0}(r)}{\log(r)}=N<\infty$$

אז $N\in\mathbb{N}\cup\{0\}$

הוכחה: TODOOOOOOOOOOOOOOOOOOO □

שאלה 3

יהיו G תחום כוכבי ו־$f \in \mathrm{Hol}(G)$ שלא מתאפסת.

נוכיח שיש ל־f לוגריתם, כלומר קיימת פונקציה $g \in \mathrm{Hol}(G)$ כך ש־$e^{g(z)} = f(z)$.

הוכחה: **TODOOOOOOOOOOOOOOOOOOOO** $\square$

שאלה 4

תהיי $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ שלמה, כלומר הולומורפית בכל המישור.

סעיף א'

נוכיח כי f קבועה תחת ההנחה שלכל $z\in\mathbb{C}$ מתקיים $Re(f(z))\le 0$.

הוכחה: ניקח $g(z)=e^z$, פונקציה הולומורפית שעומדת בתנאי הרמז.
מתקיים

$$|(g\circ f)(z)| = e^{Re(f(z))}\left|e^{i\,Im(f(z))}\right| = e^{Re(f(z))}\cdot 1 \underset{(\star)}{\le} e^0 = 1$$

כאשר $(\star)$ נובע מההנחה.
אז $g\circ f$ היא פונקציה הולומורפית (כהרכבה של פונקציות הולומורפיות) וחסומה, ולכן אנחנו עומדים בכל תנאי משפט ליוביל ונקבל ש־$g\circ f$ קבועה.
לא ייתכן כי g קבועה שכן g היא פונקציית האקספוננט, ולכן נקבל מכך ש־f חייבת להיות קבועה כדי ש־$g\circ f$ תהיה קבועה.
אז f קבועה, כנדרש. $\square$

סעיף ב'

נוכיח כי f קבועה תחת ההנחה שלכל $z\in\mathbb{C}$ מתקיים $|f(z)|\neq 1$.

הוכחה: f הולומורפית ולכן רציפה ומהנתון ניתן להסיק שמתקיים $|f(z)|>1$ או $|f(z)|<1$ לכל $z\in\mathbb{C}$.
אם $|f(z)|<1$ אז f חסומה ושלמה וממשפט ליוביל סיימנו.
אם $|f(z)|>1$ ולכן גם $\left|\frac{1}{f(z)}\right|<1$ לכל $z\in\mathbb{C}$ ושוב ממשפט ליוביל $\left|\frac{1}{f(z)}\right|$ חסומה ושלמה ולכן קבועה ולכן גם $f(z)$ קבועה. $\square$

סעיף ג'

לכל $z\in\mathbb{C}$ מתקיים $f(z)\notin(-\infty,0]$.

הוכחה: נעזר ברמז: ל־f יש לוגריתם ולכן שורש, אז ניקח $g(z)=z^i=e^{i\,Log(z)}$ ולכן

$$|(g\circ f)(z)| = \left|e^{i\log|z|-Arg(z)}\right| = \left|e^{i\log|z|}\right|\cdot\left|e^{-Arg(z)}\right| \le 1\cdot e^{\pi}$$

אז בדומה לסעיף א', $g\circ f$ הולומורפית, שלמה וחסומה ולכן ממשפט ליוביל קבועה ומשיקולים דומים לסעיף א', f קבועה. $\square$