פתרון מבחן 2023 א' — תורת המידה, 80517

27 בינואר 2026

שאלה 1

תהיי μ מידת בורל על $\mathbb{R}$ ונניח שקיימת $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ כך שלכל $a<b\in\mathbb{R}$ מתקיים $\mu((a,b])=F(b)-F(a)$.

סעיף א'

נוכיח כי F רציפה מימין.

הוכחה: עלינו להראות שלכל $x_0\in\mathbb{R}$ מתקיים

$$\lim_{x\to x_0^+}F(x)=F(x_0)$$

ובאופן שקול

$$\lim_{x\to x_0^+}F(x)-F(x_0)=0$$

תהיי $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך ש־$x_n>x_0$ ו־$x_n\downarrow x_0$ ולכן מתקיים

$$\mu((x_0,x_n])=F(x_n)-F(x_0)$$

אז נגדיר $E_n:=(x_0,x_n]$ ונקבל $E_1\supseteq E_2\supseteq\ldots$ ומתקיים $\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}(x_0,x_n]=\emptyset$.
μ היא מידת בורל על $\mathbb{R}$ וסופית על קטעים חסומים (כי קטע חסום וסגור ב־$\mathbb{R}$ הוא קומפקטי) ולכן $\mu(E_1)<\infty$ וממונוטוניות המידה לחיתוכים

$$\lim_{n\to\infty}\mu(E_n)=\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\mu(\emptyset)=0$$

כלומר

$$\lim_{n\to\infty}(F(x_n)-F(x_0))=0$$

□

סעיף ב'

יהי $x_0\in\mathbb{R}$ ונניח כי $\lim_{x\to x_0^+}-\lim_{x\to x_0^-}=a>0$ ובפרט ששני הגבולות קיימים.
נבחן מה זה אומר על μ.
הוכחה: זה אומר ש־$\mu(\{x_0\})=a$.
מסעיף א' נובע כי F רציפה מימין ולכן הביטוי הוא $F(x_0)-F(x_0^-)=a$.
ניקח $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך ש־$x_n<x_0$ וכן $x_n\uparrow x_0$ ואם נסתכל על $(x_n,x_0]$ נקבל

$$\mu((x_n,x_0])=F(x_0)-F(x_n)$$

אבל כאשר $n\to\infty$ מתקיים $\cdots\supseteq(x_2,x_0]\supseteq(x_1,x_0]$ כלומר $\bigcap_{n=1}^{\infty}(x_n,x_0]=\{x_0\}$.
הפעם ממונוטוניות המידה כלפי מעלה

$$\mu(\{x_n\})=\lim_{n\to\infty}\mu((x_n,x_0])$$
$$\mu(\{x_n\})=\lim_{n\to\infty}(F(x_0)-F(x_n))$$
$$\mu(\{x_0\})=F(x_0)-\lim_{n\to\infty}F(x_n)=F(x_0)-F(x_0^-)=a$$

□

סעיף ג'

נניח ש־μ רציפה בהחלט ביחס למידת לבג ונראה ש־F גזירה כמעט בכל מקום ולכן $a<b\in\mathbb{R}$ מתקיים

$$F(b)-F(a)=\int_a^b F'(t)\,\mathrm{d}t$$

הוכחה: נסמן ב־λ את מידת לבג, אז מהנתון $\mu\ll\lambda$.
μ מידת בורל על $\mathbb{R}$ ולכן היא σ־סופית ולכן קיימת לפי משפט רדון־ניקודים־לבג $f=\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\lambda}$ כך שלכל קבוצה מדידה E מתקיים

$$\mu(E) = \int_E f(t)\,\mathrm{d}\lambda(t)$$

כלומר

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(x) - F(a) = \mu((a,x])$$

ו-$f \in L^1$ ולכן לפי משפט הגזירה של לבג מתקיים כמעט לכל x

$$F'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(x)$$

כלומר

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t$$

$\square$

שאלה 2

יהי $(X,\mathcal{A},\mu)$ מרחב מידה ותהיי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות מדידות.

סעיף א'

נוכיח שלא בהכרח שמתקיים $\int_X \limsup_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu \geq \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu$.

הוכחה: הלמה של פאטו אומרת שמתקיים

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu$$

שכן אם נגדיר לכל $k\in\mathbb{N}$, $g_k := \inf_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\geq k}}\{f_n\}$ אז נקבל $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית עולה ואי־שלילית. ממשפט ההתכנסות המונוטונית

$$\int_X \lim_{k\to\infty} g_k \,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty}\int_X g_k \,\mathrm{d}\mu$$

ומהגדרה

$$\lim_{k\to\infty} g_k = \lim_{k\to\infty} \inf_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\geq k}}\{f_n\} = \liminf_{n\to\infty} f_n$$

וביחד

$$(\star)\quad \int_X \lim_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty}\int_X g_k \,\mathrm{d}\mu$$

מצד שני

$$\forall k\in\mathbb{N}, g_k \leq f_k \underset{\text{מונוטוניות האינטגרל}}{\Longrightarrow} a_k := \int_X g_k \,\mathrm{d}\mu \leq \int_X f_k \,\mathrm{d}\mu =: b_k$$

ומ־$(\star)$ נובע כי $\lim_{k\to\infty} a_k$ קיים ונקבל

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu \underset{(\star)}{=} \lim_{k\to\infty}\int_X g_k \,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} a_k \leq \liminf_{k\to\infty} b_k = \liminf_{k\to\infty}\int_X f_k \,\mathrm{d}\mu$$

למה הטענה לא נכונה עם $\sup$: נסתכל על $\mathbb{R}$ עם מידת לבג ונגדיר $f_n(x) = \mathbb{1}_{[n,n+1]}(x)$.
אז עבור כל $x\in X$ קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש־$x<n$ ובפרט נובע מכך $f_n(x)=0$ ועל־כן

$$\limsup_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$

אבל

$$\int f_n \,\mathrm{d}x = (n+1)-n = 1 \Longrightarrow \limsup \int f_n \,\mathrm{d}\mu = 1$$

אבל

$$1 \not\leq 0$$

$\square$

סעיף ב'

נניח ש־$f_\in \in L^1(\mu)$ לכל $n\in\mathbb{N}$ ובנוסף $f_n \to f$ במידה שווה.

תת־סעיף א'

נוכיח כי אם $\mu(X)<\infty$ אזי $f\in L^1(\mu)$ ומתקיים $f_n \overset{L^1(\mu)}{\to} f$.

הוכחה: מההתכנסות במידה שווה נובע שלכל $\varepsilon>0$ יש $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n>N$ ולכל x מתקיים

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

בפרט זה נכון עבור $\varepsilon = 1$ ומתקיים

$$|f(x)| = |f(x) - f_N(x) + f_N(x)| \underset{\text{אי־שיוויון המשולש}}{=} |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x)| < 1 + |f_N(x)|$$

וממונטוניות האינטגרל

$$\int_X |f| \,\mathrm{d}\mu < \int_X 1 \,\mathrm{d}\mu + \int_X |f_N| \,\mathrm{d}\mu = \mu(X) + \int_X |f_N| \,\mathrm{d}\mu < \infty$$

שכן $\mu(X) < \infty$ מההנחה ו־$f_N \in L^1(\mu)$ מהנתון ולכן יש לנו סכום סופי ועל־כן $f \in L^1(\mu)$.

בשביל $f_n \overset{L^1(\mu)}{\to} f$ נשים לב שמתקיים

$$\int_X |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu \underset{\text{התכנסות במידה שווה}}{\le} \int_X \frac{\varepsilon}{\mu(X)} \,\mathrm{d}\mu = \frac{\varepsilon}{\mu(X)} \int_X 1 \,\mathrm{d}\mu = \frac{\varepsilon}{\mu(X)} \mu(X) = \varepsilon \Longrightarrow f_n \overset{L^1(\mu)}{\to} f$$

$\square$

תת־סעיף ב'

נמצא דוגמה נגדית במקרה ש־$\mu(X) = \infty$.

הוכחה: ניקח את $X = \mathbb{R}$ עם מידת לבג ואז $\lambda(\mathbb{R}) = \infty$ ואם ניקח $f_n(x) = \frac{1}{n}\mathbb{1}_{[0,n]}(x)$ נקבל $f_n \to 0$ במידה שווה ומתקיים

$$\int_{\mathbb{R}} |f_n - 0| \,\mathrm{d}\lambda = \int_0^n \frac{1}{n} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{n} \cdot n = 1 \ne 0$$

$\square$

שאלה 3

סעיף א'

יהי $(X,\mathcal{A},\mu)$ מרחב מידה ותהיי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות מדידות המתכנסות במידה לפונקציה $f:X\to\mathbb{R}$.
נוכיח כי אם קיימת $g:X\to\mathbb{R}$ כך ש־$f_n\to g$ במידה, אזי $f=g$ כמעט־תמיד.
הוכחה: מכך ש־$f_n\to f$ במידה נובע כי לכל $\varepsilon_0>0$ מתקיים

$$\mu(\{x\in X \mid |f_n(x)-f(x)|\geq\varepsilon_0\})\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

ונניח כי קיימת $g:X\to\mathbb{R}$ כך שמתקיים $f_n\to g$ במידה גם־כן, כלומר לכל $\varepsilon_1>0$

$$\mu(\{x\in X \mid |f_n(x)-g(x)|\geq\varepsilon_1\})\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

נניח ש־$g\neq f$ על קבוצה ממידה חיובית, כלומר

$$N:=\{x\in X \mid g(x)\neq f(x)\},\qquad \mu(N)>0$$

בפרט, נוכל להגדיר

$$N=\bigcup_{k=1}^{\infty}\left\{x\in X \mid |f(x)-g(x)|>\frac{1}{k}\right\}$$

היות ו־$\mu(N)>0$ נובע כי לפחות אחד מאיברי האיחוד עם מידה חיובית.
נבחר $\varepsilon=\frac{1}{k}$ ולכן קיים $E\subseteq N$ כך ש־$\mu(E)>0$ ולכל $x\in E$ מתקיים

$$|f(x)-g(x)|>\varepsilon=\frac{1}{k}$$

מתקיים

$$|f(x)-g(x)|=|f(x)-f_n(x)+f_n(x)-g(x)|\underset{\text{אי־שיוויון המשולש}}{\leq}|f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-g(x)|$$

אבל $\varepsilon<|f(x)-g(x)|$ ולכן בפרט

$$\{|f-g|>\varepsilon\}\subseteq\left\{|f-f_n|>\frac{\varepsilon}{2}\right\}\cup\left\{|f_n-g|>\frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

ואם ניקח מידה על כל האגפים, ממונוטוניות המידה נקבל

$$0<\mu(\{|f-g|>\varepsilon\})=\alpha\leq\mu\left(\left\{|f-f_n|>\frac{\varepsilon}{2}\right\}\right)+\mu\left(\left\{|f_n-g|>\frac{\varepsilon}{2}\right\}\right)$$

אבל כאשר $n\to\infty$, שני הביטויים באגף ימין שואפים ל־0 שכן $f_n\to f, f_n\to g$ במידה ולכן

$$\alpha\leq 0+0=0$$

אבל הנחנו ש־$\alpha>0$ ולכן זאת סתירה ועל־כן $\mu(N)=0$, כלומר $f=g$ כמעט־תמיד. $\square$

שאלה 4

תהיי $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ העתקה לינארית ונגדיר מידה μ_T על $\mathbb{R}^n$ על־ידי

$$\mu(A)=\lambda(T^{-1}(A))$$

סעיף א'

נוכיח שלכל פונקציה מדידה $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ מתקיים $\int g\,\mathrm{d}\mu_T=\int g\circ T\,\mathrm{d}\lambda$.

הוכחה: תהיי $g=\mathbb{1}_E$ פונקציה מציינת לקבוצה מדידה E, אזי

$$\int g\,\mathrm{d}\mu_T=\int \mathbb{1}_E\,\mathrm{d}\mu_T=\mu_T(E)=\lambda(T^{-1}(E))$$

מצד שני, $(g\circ T)(x)=1$ אם $T(x)\in E$ כלומר $x\in T^{-1}(E)$, אז $g\circ T=\mathbb{1}_{T^{-1}(E)}$ ונקבל

$$\int g\circ T\,\mathrm{d}\lambda=\int \mathbb{1}_{T^{-1}(E)}\,\mathrm{d}\lambda=\lambda(T^{-1}(E))$$

אז הטענה נכונה לאינדיקטורים.

תהיי $g=\sum_{i=1}^k\alpha_i\mathbb{1}_{E_i}$ פונקציה פשוטה על סדרת קבוצות מדידות, אזי מלינאריות האינטגרל ומהמקרה הקודם

$$\int\sum_{i=1}^k\alpha_i\mathbb{1}_{E_i}\,\mathrm{d}\mu_T=\sum_{i=1}^k\alpha_i\int\mathbb{1}_{E_i}\,\mathrm{d}\mu_T=\sum_{i=1}^k\alpha_i\lambda(T^{-1}(E_i))=\int\sum_{i=1}^k\alpha_i\Big(\mathbb{1}_{E_i}\circ T\Big)\,\mathrm{d}\lambda=\int g\circ T\,\mathrm{d}\lambda$$

כעת נשאר להראות עבור פונקציות אי־שליליות ומדידות (כמובן אם לא אי־שלילי אפשר לחלק לחלק האי־שלילי ולחלק השלילי ולפעול בהתאם) אז תהיי $g\geq 0$ ולכן קיימת סדרת פונקציות פשוטות $\{s_n\}_{n=1}^\infty$ כך ש־g ↑ s_n ובפרט $g\circ T\uparrow s_n\circ T$, אז ממשפט ההתכנסות המונוטונית על שני האגפים

$$\int g\,\mathrm{d}\mu_T=\lim_{n\to\infty}s_n\,\mathrm{d}\mu_T=\lim_{n\to\infty}\int s_n\circ T\,\mathrm{d}\lambda=\int g\circ T\,\mathrm{d}\lambda$$

□

סעיף ב'

נמצא תנאי מספיק והכרחי לכך ש־$\lambda\ll\mu_T$ ונוכיח כי אם התנאי לא מתקיים אזי $\lambda\perp\mu_T$.

הוכחה: התנאי המדובר זה ש־$\det(T)\neq 0$, כי אז אפשר להשתמש כמו בהחלפת משתנה

$$\lambda(T^{-1}(A))=\left|\det(T^{-1})\right|\cdot\lambda(A)\implies\mu_T(A)=\frac{1}{|\det(T)|}\lambda(A)$$

ואז בגלל שהדטרמיננטה לא אפס, $\lambda(A)=0\iff\mu_T(A)=0$, כלומר יש רציפות בהחלט.

אבל אם התנאי הזה לא מתקיים, בגלל ש־T העתקה לינארית, אז זה תת־מרחב ממש של $\mathbb{R}^n$ ולכן $S=Im(T)$ אז $\lambda(S)=0$ ואז $\mu_T(S^c)=\lambda(\emptyset)=0$ וזה מביא לנו תנאי לסינגולריות.

היות ורק אחד מהם מתקיים כי המידה שלנו איננה מידת האפס זה מסיים. □