

הכנה ל מבחן – תורה ההסתברות 1, 80420

בפברואר 2026 2



חוכן עניינים

1	משפטים והוכיחות
4	4. שיטות בסיסיות
4	4.1. רציפות פונקציית ההסתברות (2.15)
5	4.1.2. אִידְשַׁיוֹוּן בָּול (2.18)
6	4.1.3. עיקרון הכלכלה והפרדה (2.19+2.21)
7	4.1.4. הסתברות מותנית
7	4.1.3.1. נוסחת ההסתברות השלמה במונחי הסתברות מותנית (3.18)
8	4.1.3.2. כלל ביחס (3.20)
9	4.1.4. יחסים בין משתנים מקרים
9	4.1.4.1. אִירְתּוֹלוֹת נשמרת תחת הפעלה פונקציית (4.89)
10	4.1.4.2. שיווין כמעט-תמיד גורר שיווין התפלגויות (4.29)
11	4.1.4.3. שיווין התפלגויות נשמר תחת הפעלה פונקציה (4.31)
12	4.1.4.4. שיווין כמעט-תמיד נשמר תחת הפעלה פונקציה
13	4.1.5. משתנים מקרים בדים
13	4.1.5.1. הצלחה ראשונה בסדרת ניסויי ברנולי בלתי-תלויים מתפלג גיאומטרי (4.101)
14	4.1.5.2. תיאור משתנה גיאומטרי במונחים של התפלגות שירוטית (4.105)
15	4.1.5.3. חוסר זיכרון של התפלגות גיאומטרית (4.107)
16	4.1.5.4. סכום משתנים מקרים ברגנולי בלתי-תלויים מתפלגBINOMIAL (4.115)
17	4.1.5.5. חיבור משתנים מקרים BINOMIALS בלתי-תלויים (4.116)
18	4.1.5.6. פואסון כגבול שלBINOMIAL מוקודתי (4.126)
19	4.1.5.7. סכום של משתנים מקרים פואסוניים בלתי-תלויים (4.127)
20	4.1.6. תוחלת
20	4.1.6.1. תוחלת של פונקציה על וקטור מקרי (5.3)
21	4.1.6.2. נוסחת הזנב לחישוב תוחלת משתנה מקרי על הטבעיים (5.19)
22	4.1.6.3. כפליות התוחלת למשתנים בלתי-תלויים (5.15)
23	4.1.6.4. נוסחת התוחלת שלמה (5.26)
24	4.1.6.5. נוסחת התוחלת שלמה במונחי תוחלת מותנית (5.29)
25	4.1.7. שונות
25	4.1.7.1. היבירות השונות למשתנים מקרים בלתי-תלויים (6.5)
26	4.1.7.2. נוסחת סכום לשונות (6.35)
27	4.1.8. אִידְשַׁיוֹוּן הסתברותיים
27	4.1.8.1. אִידְשַׁיוֹוּן מركוב (5.38)
28	4.1.8.2. אִידְשַׁיוֹוּן צ'בישב (6.9)
29	4.1.8.3. אִידְשַׁיוֹוּן צ'רנוף (7.9)
30	4.1.8.4. אִידְשַׁיוֹוּן הופдинג (7.17)
31	4.1.9. סדרות והתכניות
31	4.1.9.1. תנאי תוחלת ושונות להתכניות לקבוע (6.19)
32	4.1.9.2. הלמה של פאטו (10.4)
33	4.1.9.3. הלמה הראשונה של בורלי-קנטלי (10.5)
34	4.1.9.4. הלמה השנייה של בורלי-קנטלי (10.6)
35	4.1.9.5. החוק החלש של המספרים גדולים (6.21)
36	4.1.9.6. החוק חזק של המספרים גדולים (10.20)
37	4.2. מיפוי התכניות
37	4.2.1. הגדרות
37	4.2.2. גדרות
38	4.2.3. כלים שימושים

39	3
40	4
40	4.1
40	4.2
41	5

1 משפטים והוכחות

1.1 שיטות בסיסיות

ריציפות פונקציית ההסתברות (2.15)

משפט 1.1.1 (ריציפות פונקציית ההסתברות): יהיו $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות ותהי סדרה עולה של מאורעות או מתקיים

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n)$$

הוכחה: נקבע n וtout $n > n$ נגיד $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$ ואלו בהכרח מאורעות זרים:
כי אם $n < m$ אז $\omega \in B_m \subset B_n$ $\omega \notin A_{n-1}$ וכאן מתקיים $\omega \notin A_{n-1}$ מצד שני, באינדוקציה

$$(*) \quad \bigcup_{k \in [n]} B_k = \bigcup_{k \in [n]} A_k = A_n$$

עבור $A_1 = B_1$ הטענה מיידית, נניח כי היא מתקיימת עבור $n \geq 1$ ונקבל

$$\bigcup_{k \in [n+1]} B_k = \left(\bigcup_{k \in [n]} B_k \right) \bigcup B_{n+1} \stackrel{\text{הנחה האינדוקציה}}{=} A_n \bigcup (A_{n+1} \setminus A_n) \stackrel{A_n \subseteq A_{n+1}}{=} A_{n+1}$$

ולכן

$$(\star \star) \quad \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$$

אם כך מסכימות נקבל

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) \stackrel{(\star \star)}{=} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k\right) \stackrel{\text{סכום}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_k) \stackrel{\text{הגדרת השו}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \in [n]} \mathbb{P}(B_k) \stackrel{\text{סכום}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k \in [n]} B_k\right) \stackrel{(*)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n)$$

מפתח להוכחה:

1. מוכחים הזרת מאורעות באינדוקציה

$$B_1 = A_1, \quad B_n = A_n \setminus A_{n-1}$$

2. סכימות בת-מניה של מאורעות זרים

3. הגדרת הגבול

□

אי-שוויון בול (2.18)

משפט 1.1.2 (אי-שוויון בול למספר מאורעות): לכל $\mathbb{N} \in m$ ולכל סדרה של m מאורעות $\{A_n\}_{n \in [m]}$ במרחב הסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מתקיים

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in [m]} A_n\right) \leq \sum_{n \in [m]} \mathbb{P}(A_n)$$

הוכחה: באינדוקציה על m , עבור $m = 2$ בסיס האינדוקציה: יהיו A, B מאורעות כנ"ל או $A \cup B = A = (B \setminus A)$ ולכן

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) \stackrel{\substack{\text{סכום פונקציית ההסתברות} \\ \text{מונוטונית פונקציית ההסתברות}}}{\leq} \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

כעת נניח את נכונות הטענה עבור m ונווכיח את הטענה עבור $m+1$: יהיו A_1, \dots, A_{m+1} מאורעות ויקראנו A_i מאורעויות זרים ונקבל

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{m+1} A_i\right) \leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^m A_i\right) + \mathbb{P}(A_{m+1}) \stackrel{\substack{\text{הנחה האינדוקציה} \\ \text{למאורעויות זרים}}}{\leq} \sum_{i=1}^{m+1} \mathbb{P}(A_i)$$

עבור מאורעות יורדים, משתמש בהיות המושלים שלהם מאורעות בעליים.

מפתח להוכחה: אינדוקציה שבבסיס משתמשים בהזורה ותוכנות פונקציית ההסתברות.

□

משפט 1.1.3 (אי-שוויון בול לסדרת מאורעות): לכל סדרת מאורעות $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ במרחב הסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מתקיים

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$$

הוכחה: נגידיר $B_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ והוא סדרת מאורעות עולה המקיים $B_n = \bigcup_{k \in [n]} A_k$

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) \stackrel{\substack{\text{ריצוף פונקציית ההסתברות} \\ \text{n} \rightarrow \infty}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k \in [n]} A_k\right) \stackrel{\substack{\text{אי-שוויון בול} \\ \text{n} \rightarrow \infty}}{\leq} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k)$$

מפתח להוכחה: הגדרת $B_k = \bigcup_{k \in [n]} A_k$, שימוש בריצוף פונקציית ההסתברות ובאי-שוויון בול.

1.2 עיקרון ההכללה והפרדה (2.19+2.21)

משפט 1.2.1 (עיקרון ההכללה לשניים ושלושה מאורעות): יהיו $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות.

$$1. \text{ יהיו } A, B \text{ מאורעות, אזי } \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

$$2. \text{ יהיו } A, B, C \text{ מאורעות, אזי } \mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$

הוכחה:

1. לפי טרייה הזרה הקבועה

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B), \quad A = (A \setminus B) \cup (A \cap B), \quad B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$$

ולכן מסכימות

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(B \setminus A) + \mathbb{P}(A \cap B), \quad \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(A \cap B), \quad \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \setminus A) + \mathbb{P}(A \cap B)$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

2. מההסעיף הקודם נובע

$$\mathbb{P}((A \cup B) \cup C) = \mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}((A \cup B) \cap C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}((A \cup B) \cap C)$$

ונג

$$\mathbb{P}((A \cup B) \cap C) = \mathbb{P}((A \cap C) \cup (B \cap C)) = \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}((A \cap C) \cap (B \cap C))$$

אבל $(A \cap C) \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$ ולכן $(A \cap C) \cup (B \cap C) = A \cap B \cup C$

□

הערה: את הטענה הכללית (2.21) מוכיחים באמצעות אינדוקציה וכabei ראש של סימנים.

1.3 הסתברות מותנית

נוסחת ההסתברות השלמה במנחיי הסתברות מותנית (3.18)

משפט 1.3.1 (נוסחת ההסתברות השלמה במנחיי הסתברות מותנית): תהי \mathcal{A} חלוקה בת-מניה של מרחב הסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. או לכל מאורע B מתקיים

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{\substack{A \in \mathcal{A} \\ \mathbb{P}(A) > 0}} \mathbb{P}(B | A) \mathbb{P}(A)$$

הוכחה: נזכיר את כלל השרשרת: יהיו A, B מאורעות במרחב ההסתברות כך שמתקיים $0, \mathbb{P}(B) > 0$, אז

$$\mathbb{P}(A | B) \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B)$$

נשתמש בנוסחת ההסתברות השלמה ונקבל

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B) &= \sum_{A \in \mathcal{A}} \mathbb{P}(A \cap B) \\ &= \sum_{\substack{A \in \mathcal{A} \\ \mathbb{P}(A) > 0}} \mathbb{P}(A \cap B) + \sum_{\substack{A \in \mathcal{A} \\ \mathbb{P}(A) = 0}} \mathbb{P}(A \cap B) \\ &\stackrel{(*)}{=} \sum_{\substack{A \in \mathcal{A} \\ \mathbb{P}(A) > 0}} \mathbb{P}(B | A) \mathbb{P}(A) + \sum_{\substack{A \in \mathcal{A} \\ \mathbb{P}(A) = 0}} 0 \\ &= \sum_{\substack{A \in \mathcal{A} \\ \mathbb{P}(A) > 0}} \mathbb{P}(B | A) \mathbb{P}(A) \end{aligned}$$

כאשר $(*)$ נובע מכלל השרשרת.

מפתח להוכחה: נוסחת ההסתברות השלמה וכלל השרשרת.

□

ככל ביחס (3.20)

משפט 1.3.2 (ככל ביחס): יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות ויהיו A, B שני מאורעות בעלי הסתברות חיובית, אז

$$\mathbb{P}(A | B)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B | A)\mathbb{P}(A)$$

או בניסוח אחר

$$\mathbb{P}(A | B) = \mathbb{P}(B | A) \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

הוכחה:

$$\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A | B) = \frac{\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \mathbb{P}(B | A)\mathbb{P}(A)$$

מפתח להוכחה: לחשב כל פעם לבד לפי הגדרת ההסתברות המותנית.

□

1.4 יחסים בין משתנים מקרים

אי-תלות נשמרת תחת הפעלת פונקציות (4.89)

משפט 1.4.1 אי-תלות נשמרת תחת הפעלת פונקציה: יהיו X_1, \dots, X_n וקטורים מקרים בלתי-תלויים כאשר X_i הוא וקטור d_i -ממדי ותהינהו $f_1(X_1), \dots, f_n(X_n)$ בלתי-תלויים עבור s_i כלשהם. או $f_1 \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}^{d_1} \rightarrow \mathbb{R}^{s_1}}$

הוכחה: תהינה $A_i \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}^{s_i}}$ עבור $i \in [n]$, אז

$$\mathbb{P}(\forall i \in [n], f_i(X_i) \in A_i) = \mathbb{P}(\forall i \in [n], X_i \in f_i^{-1}(A_i)) \stackrel{\text{אי-תלות}}{=} \prod_{i \in [n]} \mathbb{P}(X_i \in f_i^{-1}(A_i)) = \prod_{i \in [n]} \mathbb{P}(f_i(X_i) \in A_i)$$

מפתח להוכחה: עדיף להסתכל על המקורות תחת הפונקציה ואו אפשר להשתמש באיז-תלות.

□

שיווין כמעט-תמיד גורר שיווין התפלגיות (4.29)

משפט 1.4.2 (שיווין כמעט-תמיד גורר שיווין התפלגיות): יהיו X, Y משתנים מקריים על מרחב הסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. אם $X \stackrel{d}{=} Y$ אז $X \stackrel{a.s.}{=} Y$ אם ורק אם $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$.

$$\mathbb{P}(X = Y) = \mathbb{P}(\{\omega \mid X(\omega) = Y(\omega)\}) = 1 \implies X \stackrel{a.s.}{=} Y$$

$$\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y \implies X \stackrel{d}{=} Y$$

הוכחה: אם $\mathbb{P}(X \notin S, Y \in S) = 0$ אז לכל $S \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ מתקיים לפי מונוטוניות ובדומה $\mathbb{P}(X \in S, Y \notin S) \leq \mathbb{P}(X \neq Y) = 0$

$$\mathbb{P}_X(s) = \mathbb{P}(X \in S) = \mathbb{P}(X \in S, Y \in S) + \mathbb{P}(X \in S, Y \notin S) = \mathbb{P}(X \in S, Y \in S) + \mathbb{P}(X \notin S, Y \in S) = \mathbb{P}(Y \in S) = \mathbb{P}_Y(S)$$

מפתחה להוכחה: משתמשים בהכללת מאורעות מההנחה.

□

שיויון התפלגיות נשמר תחת הפעלה פונקציה (4.31)

משפט 1.4.3 (שיויון התפלגיות נשמר תחת הפעלה פונקציה): יהיו X, Y משתנים מקריים בדידים ושווי התפלגות (לאו דווקא על אותו מרחב הסתברות) ותהיי $f \in \mathcal{F}_{\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}}$ אזי $f(X) \stackrel{d}{=} f(Y)$ אם $S \subset \mathbb{R}$ אז

$$\mathbb{P}_{f(X)}(S) = \mathbb{P}(f(X) = S) = \mathbb{P}(X \in f^{-1}(S)) \stackrel{X \stackrel{d}{=} Y}{=} \mathbb{P}(Y \in f^{-1}(S)) = \mathbb{P}(f(Y) \in S) = \mathbb{P}_{f(Y)}(S)$$

מפתח להוכחה: עדיף להסתכל על המקורות תחת הפונקציה ואו אפשר להשתמש בשוויון התפלגיות.

□

שוויון כמעט-תמיד נשמר תחת הפעלת פונקציה

משפט 1.4.4 (שוויון כמעט-תמיד נשמר תחת הפעלת פונקציה): יהיו X, Y משתנים מקרים בדידים המקיימים $Y \stackrel{a.s.}{=} f(X)$ ותהי $f \in \mathcal{F}_{\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}}$.

$$f(Y) \stackrel{a.s.}{=} f(f(X))$$

לונטן:

מכך שמתקיים $X \stackrel{a.s.}{=} Y$ נובע שמתקיים $\mathbb{P}(X = Y) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega | X(\omega) = Y(\omega)\}) = 1$ מהגדרת המשלים. נסמן

$$N := \{\omega \in \Omega | X(\omega) \neq Y(\omega)\}$$

נרצה להראות ש- $\mathbb{P}(f(X) \neq f(Y)) = 0$, או נגדיר

$$N_f := \{\omega \in \Omega | f(X(\omega)) \neq f(Y(\omega))\}$$

אם $\omega \in N$, מתקיים $X(\omega) \neq Y(\omega)$ ויכול להיות $f(X(\omega)) \neq f(Y(\omega))$ ויכול להיות $f(X(\omega)) = f(Y(\omega))$

אם $\omega \notin N$ מתקיים $X(\omega) = Y(\omega)$ כמספרים ממשיים ולכן הפעלת הפונקציה נובע שמתקיים בהכרח $f(X(\omega)) = f(Y(\omega))$, כלומר אם $\omega \notin N$ או ω בהכרח $\omega \notin N_f$.

כלומר בהכרח מתקיים $N_f \subseteq N$ ומונוטוניות פונקציית ההסתברות מתקיים $\mathbb{P}(N_f) \leq \mathbb{P}(N) = 0$.

מפתח להוכחה: מראים שקבוצת הנקודות המשותפות המקרים לאחר הפעלת הפונקציה לא זהה מוכלת בקבוצת האיברים שבהם המשתנים המקרים לא זהים או מונוטוניות (מגדירים קבוצה מידה אפס וביניהם מה נמצא בה אחרי הפעלת הפונקציה).

□

1.5 משתנים מקרים בדידים

הצלחה ראשונה בסדרת ניסויי ברנולי בלתי-תלויים מתפלג גיאומטרי (4.101)

משפט 1.5.1 (הצלחה ראשונה בסדרת ניסויי ברנולי בלתי-תלויים מתפלג גיאומטרי): תה"י $\{X_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ סדרה אינסופית של משתנים מקרים בלתי-תלויים כאשר $X_k \sim Ber(p)$, $k \in \mathbb{N}$

$$X = \min(\{k \mid X_k = 1\})$$

או $X \sim Geo(p)$

הוכחה: (ω) הוא האינדקס של המיקום הראשון בסדרה $X_1(\omega), X_2(\omega), \dots$ בו מופיע הערך 1 ואם כל איברי הסדרה מתאפסים נסמן

$$X(\omega) = \infty$$

נשים לב

$$\{X = k\} = \{X_1 = 0, \dots, X_{k-1} = 0, X_k = 1\}$$

ולפי האינטלוות נקבל

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X_1 = 0, \dots, X_{k-1} = 0, X_k = 1) = (1-p)^{k-1}p$$

כלומר $X \sim Geo(p)$

$$\mathbb{P}(X = \infty) = \prod_{k=1}^{\infty} (1-p) = \lim_{k \rightarrow \infty} (1-p)^k = 0$$

מפתח להוכחה: כותבים $\{X = k\} = \{X_1 = 0, \dots, X_{k-1} = 0, X_k = 1\}$ ומהאי-תלות ההוכחה כותבת את עצמה.

□

תיאור משתנה גיאומטרי במנחים של התפלגות שיורית (4.105)

משפט 1.5.2 (תיאור משתנה גיאומטרי במנחים של התפלגות שיורית): משתנה מקרי שנתמך על הטעיים מתפלג $Geo(p)$ אם ורק אם לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$\mathbb{P}(X > n) = (1 - p)^n$$

הוכחה: $X \sim Geo(p) \iff$

$$\mathbb{P}(X > n) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=n+1}^{\infty} (1 - p)^{k-1} p = (1 - p)^n p \sum_{\ell=0}^{\infty} (1 - p)^\ell \stackrel{\text{טור הנזיף}}{=} (1 - p)^n$$

$$n \in \mathbb{N} \implies$$

$$\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(\{X > n-1\} \setminus \{X > n\}) \stackrel{\text{התבניות}}{=} (1 - p)^{n-1} - (1 - p)^n = (1 - p)^{n-1} p$$

מפתח להוכחה: בכוון הראשון לסדר אינדקס סכימה לטור הנדי, בכיוון השני להשתמש בהכלת מאורעות כי זה על הטעיים.

□

חומר זיכרון של התפלגות גיאומטרית (4.107)

משפט 1.5.3 (חומר זיכרון של התפלגות גיאומטרית):

הגדעה 1.5.1 (חומר זיכרון לכישלון): משתנה מקרי X בדיעו שנתמקד על \mathbb{N} נקרא חסר זיכרון לכישלון אם $X > 1 \mid X - 1 \in S$ שווי התפלגות. כלומר, אם לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$\mathbb{P}(X \in S) = \mathbb{P}(X - 1 \in S \mid X > 1)$$

לכל $S \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}$

יהי X משתנה מקרי הנתמקד על \mathbb{N} המקיימים $p \in (0, 1)$, אז X חסר זיכרון לכישלונות אם ורק אם קיים נספח כי $\mathbb{P}(X = 1) < 1$ ווכחה: \implies נספח כי $X \sim Geo(p)$ ולכן לכל $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}(X - 1 = n \mid X > 1) \stackrel{\text{הסתברות מתניתית}}{=} \frac{\mathbb{P}(X = n + 1)}{\mathbb{P}(X > 1)} = \frac{(1-p)^n p}{1-p} = (1-p)^{n-1} p = \mathbb{P}(X = n)$$

$k \geq 1, 1 - p = \mathbb{P}(X > 1) := \mathbb{P}(X = 1)$ ולכן $\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(X - 1 = n \mid X > 1) \iff$

$$\mathbb{P}(X > k + 1) \stackrel{\text{כלל השרשרת}}{=} \mathbb{P}(X > k + 1 \mid X > 1) \mathbb{P}(X > 1) = \mathbb{P}(X - 1 > k \mid X > 1) \mathbb{P}(X > 1) \stackrel{\text{הנחה}}{=} \mathbb{P}(X > k)(1 - p)$$

והכלת מאורעות

נמשיך באינדוקציה ונקבל

$$\mathbb{P}(X > k) = \mathbb{P}(X > k - 1)(1 - p) = \dots = \mathbb{P}(X > 1)(1 - p)^{k-1} = (1 - p)^k$$

שזו בידוק ההגדעה של משתנה גיאומטרי במונחים של התפלגות שיורית. מפתח להוכחה:

1. בכיוון הראשון, הסתברות מותנית והכלת מאורעות כותב את ההוכחה
2. בכיוון השני

1. מפתחים עם כלל השרשרת והכלת מאורעות עם ההנחה

2. ממשיכים באינדוקציה

3. הגדרת משתנה גיאומטרי לפי התפלגות שיורית

□

סכום משתנים ברנולי בלתי-תלויים מתפלג בינומית (4.115)

משפט 1.5.4 (סכום משתנים ברנולי בלתי-תלויים מתפלג בינומית): יהיו $\{X_i\}_{i \in [n]}$ וקטור של משתני ברנולי עם הסתברות הצלחה p בלתי-תלויים, אז

$$\sum_{i \in [n]} X_i \sim Bin(n, p)$$

הוכחה: יהיו $k \in \{0, \dots, n\}$ ונסמן $.Y = \sum_{i \in [n]} X_i$ נסמן ב- A_k את אוסף הוקטורים ב- $\{0, 1\}^n$ שבהם בידוק k אחדות ו- $(n - k)$ אפסים, כלומר

$$A_k := \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^n \mid \sum_{i \in [n]} x_i = k \right\}$$

כך שמתקיים $|A_k| = \binom{n}{k}$ ונחשב

$$\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{x \in A_k} \mathbb{P}(X = x) \stackrel{\text{אי-תלו.}}{=} \sum_{x \in A_k} \left(\prod_{i \in [n]} \mathbb{P}(X_i = x_i) \right) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n - k}$$

מפתח להוכחה:

1. מגדירים

$$A_k := \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^n \mid \sum_{i \in [n]} x_i = k \right\}$$

2. נוסחת ההסתברות השלמה על A_k כחלוקת של המרחב

3. אי-תלו.

□

חיבור משתנים מקריים ביניים בלתי-תלויים (4.116)

משפט 1.5.5 (חיבור משתנים מקריים ביניים בלתי-תלויים): אם $X \sim Bin(n, p)$ ו- $Y \sim Bin(m, p)$ בלתי-תלויים אז

$$X + Y \sim Bin(m + n, p)$$

הוכחה: יהיו B_1, \dots, B_{m+n} משתנים מקריים בלתי-תלויים המתפלגים ברנולי עם הסתברות הצלחה p , נסמן

$$X' = \sum_{k=1}^m B_k \quad Y' = \sum_{k=m+1}^{m+n} B_k$$

או לפי הטענה על סכום משתנים מקריים בלתי-תלויים שמתפלגים ברנולי p נקבל

$$X' \sim Bin(m, p), \quad Y' \sim Bin(n, p), \quad X' + Y' \sim Bin(m + n, p)$$

כך שמתקיים

$$X' \stackrel{d}{=} X \quad Y' \stackrel{d}{=} Y$$

אלו פונקציות של קבוצות משתנים שונות באוסף של משתנים בלתי-תלויים ולכן X', Y' הם גם בלתי-תלויים ככל $a, b \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$\mathbb{P}(X' = a, Y' = b) = \mathbb{P}(X' = a)\mathbb{P}(Y' = b) = \mathbb{P}(X = a)\mathbb{P}(Y = b) = \mathbb{P}(X = a, Y = b)$$

כלומר ההסתפקה המשותפת של X', Y' זהה לו של X, Y , אבל שיוויון נשמר תחת הפעלת פונקציות ולכן

$$X' + Y' \stackrel{d}{=} X + Y$$

מפתח להוכחה:

1. סכום משתנים מקריים ברנולי מתפלג ביניים
2. שיוויון התפלגוויות

□

פואסון כגבול של בינומי מובן הנקודתי (4.126)

משפט 1.5.6 (פואסון כגבול של בינומי מובן הנקודתי): יהיו $\lambda \geq 0$ ויהיו $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ משתנים מקרים כך שכל $\lambda > n$ מתקיים $X_n \sim Bin(n, \frac{\lambda}{n})$ אז לכל $k \in \mathbb{N}_0$ מתקיים

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(Y = k)$$

הוכחה: עבור k קבוע ו- n שואף לאינסוף מתקיים

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k)}{k!} = \frac{n^k(1+o(1))}{k!}$$

וכן

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = e^{-\lambda} \cdot 1$$

ונובע אם כך

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k(1+o(1))}{k!} \cdot \frac{\lambda^k}{n^k} \cdot e^{-\lambda} = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k(1+o(1))}{n^k} = \mathbb{P}(Y = k)$$

מפתחה להוכחה:

1. חישוב גבול ההצלונות של X_n
2. הצבה בגבול המלא של ההסתברות
3. סידור טור יפה

□

סכום של משתנים מקריים פואסוניים בלתי-תלויים (4.127)

משפט 1.5.7 (סכום של משתנים מקריים פואסוניים בלתי-תלויים): יהי (η) אזי $X \sim Poi(\lambda)$, $Y \sim Poi(\eta)$ בלתי-תלויים, אז $X + Y \sim Poi(\lambda + \eta)$ (סכום של מושגים מקריים פואסוניים בלתי-תלויים). מנוסחת ההסתברות הכללית:

$$\mathbb{P}(X + Y = n) \stackrel{\text{קונבנצייה}}{=} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \mathbb{P}(X = i) \mathbb{P}(Y = n - i) \stackrel{(*)}{=} \sum_{i=0}^n \frac{e^{-\lambda}}{i!} \frac{e^{-\eta} \eta^{n-i}}{(n-i)!} = \frac{e^{-\lambda-\eta}}{n!} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \lambda^i \eta^{n-i} \stackrel{(**)}{=} \frac{(\lambda + \eta)^n e^{-\lambda-\eta}}{n!}$$

כאשר $(*)$ נובע מכך ששאר המהוירם מהאפסים ו- $(**)$ זה נוסחת הבינום מה שמופיע בסכום.

מפתח להוכחה:

1. קונבנצייה
2. שינוי טור
3. בינום

□

1.6 תוחלת

תוחלת של פונקציה על וקטור מקרי (5.3)

משפט 1.6.1 (תוחלת של פונקציה על וקטור מקרי): יהיו $X = (X_1, \dots, X_d) \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}}$ וקטור מקרי ביד ותהיה $f \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}}$ פונקציה. אז המשטנה המקרי $Y = f(X)$ מקיים

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) \mathbb{P}(X = x)$$

אם טור זה מתכנס בהחלה ואחרת ל- Y אין תוחלת סופית.

הוכחה: ראיינו כי התפלגתו של X היא פונקציית הסתברות בדידה על \mathbb{R}^d . נגידר $(x) Z(x) = f(x)$ משטנה מקרי חדש ומתקיים $Z \stackrel{d}{=} Y$ ונוכל להפעיל את תוחלת של משטנה מקרי על מרחב הסתברות בדידה על המרחב $(\mathbb{R}^d, \mathcal{F}_{\mathbb{R}}, \mathbb{P}_X)$

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{x \in \mathbb{R}^d} Z(x) \mathbb{P}_X(\{x\}) = \sum_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) \mathbb{P}(X = x)$$

בגלל שהתוחלת נקבעת לפי ההתפלגות, או מכך ש- Z נובע כי $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(Z) \stackrel{d}{=} Y$ מפתח להוכחה:

$$Z \stackrel{d}{=} Y \text{ ו-} Z(x) = f(x) \quad .1$$

2. תוחלת של משטנה מקרי על מרחב הסתברות בדידה

3. שימוש בשיוויון ההתפלגות

□

נוסחת הזנב לחישוב תוחלת משתנה מקרי על הבלתיים (5.19)

משפט 1.6.2 (נוסחת הזנב לחישוב תוחלת משתנה מקרי על הבלתיים): יהיו X משתנה מקרי הנתמך על $\{0\} \cup \mathbb{N}$, אז

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq n)$$

הוכחה: נשים לב שככל המחווררים בסכום הבא הם אי-שליליים ולאחר מכן ניתן להפעיל עליהם את משפט פובייני, או מהגדרת התוחלת

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X = n) = \sum_{\substack{k, n \in \mathbb{N} \\ k \leq n}} \mathbb{P}(X = n) \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq n)$$

מפתח להוכחה: להשתמש בהגדרת התוחלת ולהגיע לטור כפול כדי להשתמש במשפט פובייני.

□

כפליות התוחלת למשתנים בלתי-תלויים (5.15)

משפט 1.6.3 (כפליות התוחלת למשתנים בלתי-תלויים): יהיו X, Y משתנים מקרים בלתי-תלויים ובעלי תוחלת סופית, אז

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

הוכחה: נבעא את התוחלת של XY לפי הנוסחה לתוחלת של וקטור מקורי על הווקטור (X, Y)

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_{x \in \mathbb{R}} \sum_{y \in \mathbb{R}} xy p_{x,y}(x, y) \stackrel{\text{א-תלו}}{=} \sum_{x \in \mathbb{R}} \sum_{y \in \mathbb{R}} xy p_X(x)p_Y(y) = \sum_{x \in \mathbb{R}} xp_X(x) \sum_{y \in \mathbb{R}} yp_Y(y) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

□

נוסחת התוחלת השלמה (5.26)

משפט 1.6.4 (נוסחת התוחלת השלמה): תהי \mathcal{A} חלוקה בת-מנייה של מרחב הסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ויהי X משתנה מקרי בעל תוחלת סופית על מרחב זה. אז

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{A \in \mathcal{A}} \mathbb{E}(X \mathbf{1}_A)$$

הוכחה: נוכיח עבור X ביד: \mathcal{A} חלוקה ולכן $1 = \sum_{A \in \mathcal{A}} \mathbf{1}_A = \mathbf{1}_\Omega$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \mathbb{E}\left(\sum_{A \in \mathcal{A}} X \mathbf{1}_A\right) \stackrel{\text{הגדרת התוחלת}}{=} \sum_{x \in \mathbb{R}} x \mathbb{P}\left(\sum_{A \in \mathcal{A}} X \mathbf{1}_A = x\right) \stackrel{\text{הסתברות שלמה}}{=} \sum_{x \in \mathbb{R}} x \sum_{A \in \mathcal{A}} \mathbb{P}(X \mathbf{1}_A = x) \\ &\stackrel{\substack{\text{שינוי סדר סכימה} \\ \text{בטרו מתכנס בה诂ל}}}{=} \sum_{A \in \mathcal{A}} \sum_{x \in \mathbb{R}} x \mathbb{P}(X \mathbf{1}_A = x) \stackrel{\text{הגדרת התוחלת}}{=} \sum_{A \in \mathcal{A}} \mathbb{E}(X \mathbf{1}_A) \end{aligned}$$

כאשר השיוויון של הסתברות שלמה נובע מכך שלכל $x \neq 0$

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} \{X \mathbf{1}_A = x\} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} (\{X = x\} \cap A) = \{X = x\}$$

מפתח להוכחה:

1. בגלל שזוויות חלוקה, $X = \sum_{A \in \mathcal{A}} X \mathbf{1}_A$
2. לשחק עם השיוויונות לפי הגדרת התוחלת והסתברות שלמה

□

נוסחת התוחלת השלמה במונחי תוחלת מותנית (5.29)

משפט 1.6.5 (נוסחת התוחלת השלמה במונחי תוחלת מותנית): תהי \mathcal{A} חלוקה בת-מנייה של מרחב הסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ויהי X משתנה מקרי בעל תוחלת סופית על מרחב זה. אז

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\substack{A \in \mathcal{A} \\ \mathbb{P}(A) > 0}} \mathbb{E}(X | A) \mathbb{P}(A)$$

הוכחה: נוכחה עבור X בדיק: עבור \mathcal{A} אם $\mathbb{E}(X \mathbf{1}_A) = 0$ או $\mathbb{P}(A) = 0$, $A \in \mathcal{A}$ מנוסחת התוחלת השלמה

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{A \in \mathcal{A}} \mathbb{E}(X \mathbf{1}_A) = \sum_{\substack{A \in \mathcal{A} \\ \mathbb{P}(A) > 0}} \mathbb{E}(X | A) \mathbb{P}(A)$$

□

1.7 שונות

חבוריות השונות למשתנים מקרים בלתי-תלויים (6.5)

משפט 1.7.1 (חבוריות השונות למשתנים מקרים בלתי-תלויים): **יהיו** $\{X_i\}_{i \in [n]}$ **משתנים מקרים בלתי-תלויים בעלי' שונות סופית.** **או** $Y = \sum_{i=1}^n X_i$ **בעל' שונות סופית ומתקיים**

$$\text{Var}(Y) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i)$$

הוכחה: באינדוקציה על n .

יהיו X, Y **משתנים מקרים בלתי-תלויים בעלי' שונות סופית ונסתכל על המשנה המקרי $X + Y$.** **ראשית,** מלינאריות התוחלת $\infty < \mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$ ולכן יש לו תוחלת סופית ונוכל לחשב לו שונות. **נגידר**

$$\bar{X} := X - \mathbb{E}(X), \quad \bar{Y} := Y - \mathbb{E}(Y)$$

ומילינאריות התוחלת מתקיים $\mathbb{E}(\bar{X}) = 0 = \mathbb{E}(\bar{Y})$ **היות ואיתלות נשמרת תחת הפעלת פונקציות נובע כי** \bar{X}, \bar{Y} **בלתי-תלויים, אז**

$$\text{Var}(\bar{X} + \bar{Y}) = \mathbb{E}((\bar{X} + \bar{Y})^2) - \underbrace{\mathbb{E}(\bar{X} + \bar{Y})^2}_{=0} = \mathbb{E}(\bar{X}^2 + 2\bar{X}\bar{Y} + \bar{Y}^2)$$

$$= \mathbb{E}(\bar{X}^2) + 2\mathbb{E}(\bar{X})\mathbb{E}(\bar{Y}) + \mathbb{E}(\bar{Y})^2 = \mathbb{E}(\bar{X}^2) + \mathbb{E}(\bar{Y}^2) = \text{Var}(\bar{X}) + \text{Var}(\bar{Y})$$

לינאריות התוחלת
כפליות התוחלת לא-תלוות

המשך הטענה זה פשוט הנחת האינדוקציה ולעשות את בסיס האינדוקציה שוב בשבייל צעד האינדוקציה.

□

נוסחת סכום לשונות (6.35)

משפט 1.7.2 (נוסחת סכום לשונות): לכל אוסף $(X_k)_{k \in [n]}$ של משתנים מקרים מתקיים

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_k\right) = \sum_{\ell, k \leq n} \text{Cov}(X_k, X_\ell) = \sum_{k \leq n} \text{Var}(X_k) + 2 \sum_{k < \ell \leq n} \text{Cov}(X_k, X_\ell)$$

בכל מקרה בו אגף ימין מוגדר היטב.
הוכחה:

$$\text{Var}(X) := \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

$$\text{Cov}(X, Y) := \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

הוכיחו: נמכו את המשתנים המקרים $\{X_k\}$ על-ידי $\overline{X}_k = X_k - \mathbb{E}(X_k)$ וכן

$$\mathbb{E}(\overline{X}_k) = 0$$

$$\text{Var}(\overline{X}_k) = \mathbb{E}(\overline{X}_k^2)$$

$$\text{Cov}(\overline{X}_k, \overline{X}_\ell) = \mathbb{E}(\overline{X}_k \overline{X}_\ell)$$

מתקיים

$$\text{Var}\left(\sum_{k=1}^n \overline{X}_k\right) \stackrel{\text{אינטואיטיבית}}{=} \text{Var}\left(\sum_{k=1}^n \overline{X}_k - \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k)\right) = \text{Var}\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)$$

ולכן

$$\begin{aligned} \text{Var}\left(\sum_{k=1}^n \overline{X}_k\right) &= \mathbb{E}\left(\left(\sum_{k=1}^n \overline{X}_k\right)^2\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n \overline{X}_k \overline{X}_\ell\right) \stackrel{\text{כפי שראינו}}{=} \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n \mathbb{E}(\overline{X}_k \overline{X}_\ell) = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n \text{Cov}(X_k, X_\ell) \\ &= \sum_{k, \ell \leq n} \text{Cov}(X_k, X_\ell) \end{aligned}$$

והשווינו הימני נובע מהיות $\text{Cov}(X, X) = \text{Var}(X)$ והכנסה של ערכים אלו בסכום.
מפתח להוכחה:

1. מרכזו על-ידי התוחלת

2. לרשום את כל מה שנובע מהמרכזו בהקשרי תוחלת ושותות

3. אדישות להזות של השונות כדי להראות שהמשתנה המנורמל מספק אותן

4. הגדרת השונות על המשתנה הממורכז עם הממצאים שלנו

□

1.8 אַיִלְיוֹנוֹת הַסְּתֶבָרוֹתִים

אַיִלְיוֹן מְרֻקּוֹב (5.38)

משפט 1.8.1 (אַיִלְיוֹן מְרֻקּוֹב): יהיו X משתנה מקרי אַיִלְיוֹני (כלומר $0 \leq X \stackrel{a.s.}{\leq}$) בעל תוחלת סופית. אז לכל $a > 0$ מתקיים

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$$

הוכחה: נפעיל את נוסחת התוחלת השלמה על החלוקה ונקבל

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X \mathbf{1}_{X<0}) + \mathbb{E}(X \mathbf{1}_{X \in [0,a)}) + \mathbb{E}(X \mathbf{1}_{X \geq a})$$

הוא אַיִלְיוֹני ולכל $b \in \mathbb{R}$ מתקיים $\mathbb{E}(X \mathbf{1}_{X \geq b}) \stackrel{a.s.}{\geq} b \mathbf{1}_{X \geq b}$ והרי

$$X \mathbf{1}_{X<0} \stackrel{a.s.}{=} 0 \quad X \mathbf{1}_{X \in [0,a)} \stackrel{a.s.}{\geq} 0 \quad X \mathbf{1}_{X \geq a} \stackrel{a.s.}{\geq} a \mathbf{1}_{X \geq a}$$

ומונוטוניות התוחלת נקבל

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X \mathbf{1}_{X<0}) + \mathbb{E}(X \mathbf{1}_{X \in [0,a)}) + \mathbb{E}(X \mathbf{1}_{X \geq a}) \geq 0 + 0 + a \mathbb{E}(\mathbf{1}_{X \geq a}) = a \mathbb{P}(X \geq a)$$

$$\implies \mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$$

מפתח להוכחה:

1. מסתכלים על החלוקה $\{\{a \leq X\}, \{X < 0\}, \{X \in [0, a)\}\}$
2. נוסחת התוחלת השלמה
3. הסימה איבר איבר
4. מונוטוניות התוחלת

□

אי-שוויון צ'בישב (6.9)

משפט 1.8.2 (אי-שוויון צ'בישב): יהיו X משתנה מקרי בעל שונות סופית. אז לכל $a > 0$ מתקיים

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \frac{\text{Var}(X)}{a^2}$$

הוכחה: נגידו משתנה חדש $Y = (X - \mathbb{E}(X))^2$ וזה משתנה מקרי אי-שלילי המקיים $\mathbb{E}(Y) = \text{Var}(X)$ ולכן $\mathbb{E}(Y) \geq 0$. לכן לפि אי-שוויון מרקוב לכל $b > 0$ מתקיים

$$\mathbb{P}(Y \geq b) \leq \frac{\mathbb{E}(Y)}{b} = \frac{\text{Var}(X)}{b}$$

נשים לב $b = a^2$ ולבן בבחירה נקבל

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) = \mathbb{P}((X - \mathbb{E}(X))^2 \geq a^2) = \mathbb{P}(Y \geq a^2) \leq \frac{\text{Var}(X)}{a^2}$$

מפתח להוכחה:

1. הגדרת משתנה מקרי חדש $Y = (X - \mathbb{E}(X))^2$
2. אי-שוויון מרקוב
3. הכלת מאורעות $\{|X - \mathbb{E}(X)| \geq a\} = \{(X - \mathbb{E}(X))^2 \geq a^2\}$
4. שוב אי-שוויון מרקוב

□

אי-שוויון צ'רנוフ (7.9)

משפט 1.8.3 (אי-שוויון צ'רנוフ): יהיו X משתנה מקרי בעל מומנט מעירכי. אזי לכל $t > 0$ עבورو ($M_X(t)$ מוגדרת ולכל $a \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq M_X(t)e^{-ta}$$

הזכורה: יהיו X משתנה מקרי. הפונקציה המשנית ($M_X(t)$ הנתונה עלי-ידי

$$M_X(t) := \mathbb{E}(e^{tX})$$

לכל t עבورو התחולת מוגדרת נקרא הפונקציה היוצרת מומנטים של X .

הוכחה: השתמש באיסויון מركוב בשביל המשנתה המקרי החובי e^{tX} ונקבל

$$\mathbb{P}(X \geq a) = \mathbb{P}(e^{tX} \geq e^{ta}) \stackrel{\text{איסויון מركוב}}{\leq} \frac{\mathbb{E}(e^{tX})}{e^{ta}} = M_X(t)e^{-ta}$$

מפתח להוכחה: איסויון מركוב (לציין שהמשנתה אי-שלילי ולכן הכוון של איסויון נשמר).

□

אי-שוויון הופдинג (7.17)

משפט 1.8.4 (אי-שוויון הופдинג): יהיו $\{X_k\}_{k \in [n]}$ $a.s.$ משתנים מקריים בלתי-תלויים ובעליהם תוחלת אפס אשר מקיימים $\forall k \in [n] \text{ או } |X_k| \leq 1 \text{ לכל } k \in [n]$

$$\forall d > 0, \left(\sum_{k \in [n]} X_k \geq d \right) \leq \exp\left(-\frac{d^2}{2n}\right)$$

משפט 1.8.5 (כפליות פונקציה יוצרת מומנטים עבור סכום משתנים מקריים בלתי-תלויים): יהיו X ו- Y משתנים מקריים בלתי-תלויים, אז

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t) \quad (\text{לכל } t \text{ עבورو שתיהן מוגדרות})$$

הוכחה: נובע מכך שאירועות נשמרת תחת הפעלת פונקציה וככפליות התוחלת למשתנים בלתי-תלויים. \square

משפט 1.8.6 (הлемה של הופдинג): יהיו X משתנה מקרי המקיימים $1 \leq |X| \leq a.s. \mathbb{E}(X) = 0$ וכנ"ל $t \in \mathbb{R}$. אז לכל $t \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$\mathbb{E}(e^{tX}) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$$

הוכחה: נקבע את t ונסמן ב- $L(x)$ את הפונקציה

$$L(x) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} + x \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

הפונקציה e^{tx} היא בעלת נגרות שנייה חיובית ולכן קמורה, או לכל $x \in [-1, 1]$, מוגדרת $L(x) \leq L(0)$.

$$\mathbb{E}(e^{tX}) \leq \mathbb{E}(L(X)) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} + \mathbb{E}(X) \frac{e^t - e^{-t}}{2} \underset{\mathbb{E}(X)=0}{=} \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

ולכל $t \in \mathbb{R}$ מתקיים $\frac{e^t + e^{-t}}{2} \leq e^{\frac{t^2}{2}}$ וזה נובע מטור טיילור

$$\frac{e^t + e(-t)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n + (-t)^n}{n!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^{2m}}{(2m)!} \leq \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^{2m}}{(2^m m)!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t^2}{2}\right)^m}{m!} = e^{\frac{t^2}{2}}$$

\square

הוכחה: אם כך, נסמן $X = \sum_{k \in [n]} X_k$ ומתקיים מהטענות לעיל

$$M_X(t) = \prod_{k \in [n]} M_{X_k}(t) \leq \prod_{k \in [n]} \exp\left(\frac{t^2}{2}\right) = \exp\left(\frac{nt^2}{2}\right)$$

מアイ-שוויון צ'רנוף לכל $d > 0$

$$\mathbb{P}(X \geq d) \leq \exp\left(\frac{nt^2}{2} - td\right)$$

כדי למצוא t שימזר את החסם נזoor את המעריך ונשווה לאפס

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{nt^2}{2} - td \right) = nt - d = 0 \implies t = \frac{d}{n}$$

נקבל

$$\mathbb{P}(X \geq d) \leq \exp\left(\frac{n\left(\frac{d}{n}\right)^2}{2} - \left(\frac{d}{n}\right)d\right) = \exp\left(-\frac{d^2}{2n}\right)$$

מפתח להוכחה:

1. כפליות הפונקציה יוצרת מומנטים למשתנים מקריים בלתי-תלויים
2. הлемה של הופдинג
3. אי-שוויון צ'רנוף + גזירה למזעור של המעריך

\square

1.9 סדרות והתכונויות

תנאי תוחלת ושונות להתכונות קבוע (6.19)

משפט 1.9.1 (תנאי תוחלת ושונות להתכונות קבוע): תהי $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת משתנים מקריים המקיימת עבור $\mu \in \mathbb{R}$ כי μ וכן $\mathbb{E}(X_n) \rightarrow \mu$

$$X_n \xrightarrow{d} \mu$$

הוכחה: יהיו $\varepsilon > 0$, נראה כי $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|X_n - \mu| \geq \varepsilon) = 0$ או באופן שקול $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|X_n - \mu| < \varepsilon) = 1$ או $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|X_n - \mu| \leq \varepsilon) = 1$. ואכן מאידך מושולש מתקיים $|X_n - \mu| \leq |X_n - \mathbb{E}(X_n)| + |\mathbb{E}(X_n) - \mu| \leq |X_n - \mathbb{E}(X_n)| + \frac{\varepsilon}{2}$.

$$|X_n - \mu| \leq |X_n - \mathbb{E}(X_n)| + |\mathbb{E}(X_n) - \mu| \leq |X_n - \mathbb{E}(X_n)| + \frac{\varepsilon}{2}$$

ולכן

$$\{|X_n - \mu| \geq \varepsilon\} \subset \left\{ |X_n - \mathbb{E}(X_n)| + \frac{\varepsilon}{2} \geq \varepsilon \right\} = \left\{ |X_n - \mathbb{E}(X_n)| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\}$$

ומאידך מושולש צ'בישוב נקבל

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|X_n - \mu| \geq \varepsilon) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(|X_n - \mathbb{E}(X_n)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) \stackrel{\text{צ'בישוב}}{\leq} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \operatorname{Var}(X_n)}{\varepsilon^2} = 0$$

מפתח להוכחה:

1. משתמשים בהתכונות התוחלה
2. אידך מושולש והכלה מאורעות
3. אידך מושולש צ'בישוב

□

הлемה של פאטו (10.4)

משפט 1.9.2 (הлемה של פאטו): תהי סדרת מאורעות. אז

$$\mathbb{P}(\{A_i, a.e.\}) = \mathbb{P}\left(\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n\right) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n)$$

$$\mathbb{P}(\{A_i, i.o.\}) = \mathbb{P}\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n\right) \geq \limsup_{n \rightarrow r\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

הוכחה: ראשית נראה כי הטעינה השנייה נובעת מטענה הטענה הראשונה:

$$\mathbb{P}(\{A_i, i.o.\}) \underset{\{A_i, i.o.\}^c = \{A_i^c, a.e.\}}{=} 1 - \mathbb{P}(\{A_i^c, a.e.\}) \geq 1 - \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n^c) = 1 - \liminf_{n \rightarrow \infty} (1 - \mathbb{P}(A_n)) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n)$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \inf_{i > n} \mathbb{P}(A_i) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i > n} A_i\right)$$

ריצוף פונקציית ההסתברות
למאורעות עליים

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{i > n} A_i\right) = \mathbb{P}(\{A_i, a.e.\})$$

מפתח להוכחה: ריצוף פונקציית ההסתברות למאורעות עליים.

□

הлемה הראשונה של בורל-קנטלי (10.5)

משפט 1.9.3 (הлемה הראשונה של בורל-קנטלי): תהיי A_i סדרת מאורעות. אם $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) < \infty$ אז $\mathbb{P}(A_i, i.o.) = 0$.
הוכחה:

$$\mathbb{P}(A_i, i.o.) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i\right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=n}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) = 0$$

ריציפות פונקציית ההסתברות
אי-שוויון ביל
למאורעות עליים

כאשר השיוויון האחרון נובע מכך ש- ∞ אם ורק אם $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) < \infty$.

□

מפתח להוכחה: ריציפות פונקציית ההסתברות וחסם האיחוד (הניסוח מהמילה יותר יפה/ברור).

הлемה השנייה של בורל-קנטלי (10.6)

משפט 1.9.4 (הлемה השנייה של בורל-קנטלי): תהי A_i סדרת מאורעות בלתי-תלויים. אם $\sum_{i=1}^{\infty} A_i = \infty$ אז $\mathbb{P}(A_i, i.o.) = 1$ ו- $\mathbb{P}(A_i, a.e.) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{i=m}^{\infty} A_i^c\right)$.

הוכחה:

$$\mathbb{P}(A_i, i.o.) = 1 - \mathbb{P}(A_i^c, a.e.) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{i=m}^{\infty} A_i^c\right)$$

ריצוף פונקציית ההסתברות
למאורעות עליים

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=m}^{\infty} A_i^c\right) = 0 \quad \text{ואכן מהאי-תלות}$$

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=m}^n A_i^c\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=m}^n A_i^c\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=m}^n (1 - \mathbb{P}(A_i)) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \exp\left(-\sum_{i=m}^n \mathbb{P}(A_i)\right) = 0$$

כאשר האיסויון נובע מכך ש- $e^x \leq 1 + x$ לכל x והשוויון נובע מכך ש- $e^{-x} \leq 1 + x$ לכל x .

מפתח להוכחה:

1. משלים
2. ריצוף פונקציית ההסתברות
3. לכל x מתקיים $1 + x \leq e^x$

□

החוק החלש של המספרים הגדולים (6.21)

משפט 1.9.5 (החוק החלש של המספרים הגדולים): תהיו X_1, X_2, \dots סדרת משתנים מקריים בלתי-תלויים, שווי התפלגות ובעלי תוחלת μ . אם $\varepsilon > 0$ אז לכל n

$$\mathbb{P}(|Y_n - \mu| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

הוכחה: הוכחה תחת הנחת קיום שונות:

$$\mathbb{E}(Y_n) = \frac{\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)}{n} \stackrel{\text{לינאריות התוחלת}}{=} \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i)}{n} = \frac{n \cdot \mu}{n} = \mu$$

ולכן

$$\mathbb{P}(|Y_n - \mu| \geq \varepsilon) \stackrel{\text{צ'בישב}}{\leq} \frac{\text{Var}(Y_n)}{\varepsilon^2} = \frac{\text{Var}\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\right)}{\varepsilon^2} \stackrel{\text{כイル ריבטי}}{=} \frac{\text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)}{n^2 \varepsilon^2} \stackrel{\text{סכום שונות בלתי-תלויה}}{=} \frac{n \text{Var}(X_1)}{n^2 \varepsilon^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

מפתח להוכחה:

1. חישוב תוחלת של Y_n
2. אידויוין צ'בישב

□

הערה: במליל אחרות, החוק החלש של המספרים הגדולים אומר $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} \mu$

החוק החזק של המספרים הגדולים (10.20)

משפט 1.9.6 (החוק החזק של המספרים הגדולים): תהי X_1, X_2, \dots סדרת משתנים מקרים בלתי-תלויים, שווי התפלגותם עם μ ו- $\text{אזי } |X_i| \stackrel{a.s.}{\leq} M$

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{a.s.} \mu$$

הוכחה: נגידיר משתנים מקרים חדשים

$$Y_n = \frac{X_n - \mu}{2M}$$

תנאי א'ישווין הופding מתקיימים וכך $\forall a > 0$ נקבל

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^n Y_i\right| \geq a\right) \leq 2 \exp\left(-\frac{a^2}{2n}\right)$$

עבור $\varepsilon > 0$ אם נציב $a = \varepsilon n$ נקבל

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i\right| \geq \varepsilon\right) \leq 2 \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2} n\right)$$

נסמן

$$A_n^k := \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \right| \geq \frac{1}{k} \right\}$$

ולכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n^k) < \infty$ ולכן הлемה הראשונה של בורל-קנטלי נקבע

$$\mathbb{P}(A_n^k \text{ i.o.}) = 1 - \mathbb{P}((A_n^k)^c \text{ a.e.}) = 0$$

וא

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_n^k \text{ i.o.}\right) = 0$$

ובאופן שקול

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} (A_n^k)^c \text{ a.e.}\right) = 1$$

זו ההגדרה של $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{a.s.} \mu$ אם ורק אם $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \xrightarrow{a.s.} 0$.
מפתח להוכחה:

1. מגדירים משתנה מקרי ממורכו
2. משתמשים בא'ישווין הופding
3. עבור $a = \varepsilon n$
4. $A_n^k := \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \right| \geq \frac{1}{k} \right\}$
5. הлемה הראשונה של בורל-קנטלי

□

2 מיפוי התחבויות

2.1 הגדרות

הגדירה 2.1.1 (התכנסות כמעט-תמיד) : תהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ סדרת משתנים מקרים במרחב הסתברות $(X_n)_{n=1}^{\infty}$. נאמר כי סדרה זו מתכנסת למשתנה המקרי X **כמעט-תמיד** ונסמן $X_n \xrightarrow{a.s.} X$ אם מתקיים

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right) = 1$$

באופן שקול

$$X_n \xrightarrow{a.s.} X \iff \forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} |X_n - X| > \varepsilon\right) = 0 \iff \forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}(|X_n - X| \leq \varepsilon \text{ a.e.}) = 1$$

הגדירה 2.1.2 (התכנסות בהסתברות) : תהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ סדרת משתנים מקרים במרחב הסתברות $(X_n)_{n=1}^{\infty}$. נאמר כי סדרה זו מתכנסת למשתנה המקרי X **בහסתברות** ונסמן $X_n \xrightarrow{p} X$ אם לכל $\varepsilon > 0$ מתקיים

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} |X_n(\omega) - X(\omega)| \leq \varepsilon\right) = 1$$

באופן שקול

$$X_n \xrightarrow{p} X \iff \forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} |X_n - X| > \varepsilon\right) = 0$$

הגדירה 2.1.3 (התכנסות בהתפלגות) : תהי $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת משתנים מקרים לא בהכרח על אותו מרחב הסתברות ויהי X משתנה מקרי. נאמר כי סדרה זו מתכנסת למשתנה המקרי X **בהתפלגות** ונסמן $X_n \xrightarrow{d} X$ אם לכל a נקודות רציפות של F_X מתקיים

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(a) = F_X(a)$$

הגדירה 2.1.4 (התכנסות בהתפלגות קבוע) : תהי $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת משתנים מקרים במרחב הסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. נאמר כי סדרה זו מתכנסת **לקבוע** ונסמן $X_n \xrightarrow{d} a$ אם לכל $\varepsilon > 0$ מתקיים

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|X_n - a| < \varepsilon) = 1$$

מסקנה 2.1.1 : אם נסמן

$$A_{n,\varepsilon} := \{\omega \mid |X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon\}$$

מההגדרות

$$X_n \xrightarrow{a.s.} X \iff \forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}\left(\liminf_{n \rightarrow \infty} A_{n,\varepsilon}\right) = 1$$

$$X_n \xrightarrow{p} X \iff \forall \varepsilon > 0, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_{n,\varepsilon}) = 1$$

מסקנה 2.1.2 : אם לכל $\varepsilon > 0$ מתקיים $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) < \infty$

2.2 גירירות

משפט 2.2.1 (גירירות) :

1. התכנסות כמעט-תמיד גוררת התכנסות בהסתברות
2. התכנסות בהסתברות גוררת התכנסות בהתפלגות
3. התכנסות בהתפלגות קבוע גוררת התכנסות בהסתברות (ואז נזהה עם המשפט 6.19)

הוכחה:

$$\text{נסמן } A_n^k = \left\{ \omega \mid |X_{n(\omega)} - X(\omega)| \leq \frac{1}{l} \right\}. \quad 1.$$

$$\{X_n(\omega) \rightarrow X(\omega)\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} A_n^k$$

כלומר

$$X_n \xrightarrow{a.s.} X \implies \mathbb{P}\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} A_n^k\right) = \mathbb{P}\left(\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n^k\right) = 1$$

אבל $X_n \xrightarrow{p} X$ אומר שלכל \mathbb{N}

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n^k) = 1$$

ומהלך מהלמה של פאטו

$$1 = \mathbb{P}\left(\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n^k\right) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n^k) = 1$$

. תהיו a נקודת רציפות של F_X ויהי $\varepsilon > 0$.

$$\mathbb{P}(X_n \leq a) = \mathbb{P}(X_n \leq a, X \leq a + \varepsilon) + \mathbb{P}(X_n \leq a, X > a + \varepsilon) \leq \mathbb{P}(X \leq a + \varepsilon) + \mathbb{P}(|X - X_n| > \varepsilon)$$

כלומר (ε) $F_{X_n}(a) \leq F_X(a + \varepsilon) + \mathbb{P}(|X - X_n| > \varepsilon)$ דומה מקרים גם

$$\mathbb{P}(X \leq a - \varepsilon) \leq \mathbb{P}(X_n \leq a) + \mathbb{P}(|X - X_n| > \varepsilon)$$

כלומר (ε) $F_X(a - \varepsilon) \leq F_{X_n}(a) + \mathbb{P}(|X - X_n| > \varepsilon)$

$$F_X(a - \varepsilon) - \mathbb{P}(|X - X_n| > \varepsilon) \leq F_{X_n}(a) \leq F_X(a + \varepsilon) + \mathbb{P}(|X - X_n| > \varepsilon)$$

וכאשר $\rightarrow \infty$ נקבל מהתכונות בהסתברות שלכל $\varepsilon > 0$

$$F_X(a - \varepsilon) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(a) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(a + \varepsilon) \leq F_X(a + \varepsilon)$$

אבל a נקודת רציפות ולכן $F_X(a) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(a) \leq F_X(a)$

.3. תהיו F_c פונקציית ההסתגלות המCTR של המשטגה המקורי הקבוע.

לכל $0 < \varepsilon < \varepsilon$ מתקיים $F_c(c - \varepsilon) = 0, F_c(c + \varepsilon) = 1$ אזי $F_{X_n}(c - \varepsilon) \xrightarrow{d} 0, F_{X_n}(c + \varepsilon) \xrightarrow{d} 1$ כולם

$$\mathbb{P}(|X_n - c| \leq \varepsilon) \geq F_{X_n}(c + \varepsilon) - F_{X_n}(c - \varepsilon) \rightarrow 1$$

□

2.3 כלים שימושים

1. הלמה השניה של בורלי-קנטלי טוביה להפרצת התכונות כמעט-תמייד
2. הלמה הראשונה של בורלי-קנטלי טוביה להוכחת התכונות כמעט-תמייד

3 משפט הגבול המרכזי

משפט 3.0.1 (משפט הגבול המרכזי): תהי סדרת משתנים מקרים בלתי-תלויים ושווי התפלגות בעלי תוחלת 0 ושונות 1. אז

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{d} Z$$

כאשר $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$
באופן שקול, לכל $a \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i \leq a\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^a e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

הערה: את לא מזהה את המשפט הזה אף-פעם, אבל הוא מופיע הרבה פעמים במקרה של "האם הגבול הזה קיים" ושאי-אפשר להשתמש באידויונות המוכרים כי לא בטוח שהכיוון של איזה-השוויון נשמר / אין איז-שליליות / לא חסם הבדיקה מספיק וכו'.

4 סיכום חוצאות

4.1 התפלגויות בדידות

$X \sim$	Parameters	$\text{supp}(X)$	$\mathbb{P}(X = k)$	$\mathbb{E}(X)$	$\text{Var}(X)$	$M_X(t)$
$Unif([n])$	$n \in \mathbb{N}$	$[n]$	$\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	$\frac{e^{nt} - e^{2t}}{n(1-e^t)}$
$Ber(p)$	$0 \leq p \leq 1$	$\{0, 1\}$	$\begin{cases} p & k=1 \\ 1-p & k=0 \end{cases}$	p	$p(1-p)$	$pe^t + (1-p)$
$Bin(n, p)$	$n \in \mathbb{N}, 0 \leq p \leq 1$	$\mathbb{N} \cup \{0\}$	$\binom{n}{k} (1-p)^{n-k} p^k$	np	$np(1-p)$	$(pe^t + (1-p))^n$
$Geo(p)$	$0 \leq p \leq 1$	\mathbb{N}	$(1-p)^{k-1} p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	$\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$
$Poi(\lambda)$	$0 < \lambda$	$\mathbb{N} \cup \{0\}$	$e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ	$\exp(\lambda(e^t - 1))$

4.2 התפלגויות רציפות

$X \sim$	Parameters	$\text{supp}(X)$	$f_X(t)$	$F_X(t)$	$\mathbb{E}(X)$	$\text{Var}(X)$	$M_X(t)$
$Unif([a, b])$	$a \leq b$	$t \in [a, b]$	$\begin{cases} \frac{1}{b-a} & t \in [a, b] \\ 0 & \text{else} \end{cases}$	$\begin{cases} 0 & t < a \\ \frac{t-a}{b-a} & a \leq t < b \\ 1 & t > b \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\begin{cases} \frac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)} & t \neq 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$
$Exp(\lambda)$	$\lambda > 0$	$0 \leq t$	$\lambda e^{\lambda t}$	$1 - e^{-\lambda t}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{\lambda}{\lambda-t}$
$\mathcal{N}(0, 1)$	—	\mathbb{R}	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$	$\Phi(t)$	0	1	—
$\mathcal{N}(\mu, \sigma)$	$\sigma^2 \geq 0$	\mathbb{R}	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$	$\Phi\left(\frac{s-\mu}{\sigma}\right)$	μ	σ^2	—

5 הוכחות ממבחן עבר של אודה

מבחן	משפט
הסתברות למתמטיקאים 2019 סמסטר א' מועד א'	1. שאלת 1. 1. איזיויון מركוב 2. איזיויון צ'רנוף
הסתברות למתמטיקאים 2019 סמסטר א' מועד ב'	2. שאלת 2. 1. הלמה הראשונה של בורל-קנטלי 2. הלמה השנייה של בורל-קנטלי
הסתברות למתמטיקאים 2018 סמסטר א' מועד ב'	1. שאלת 1. 1. איזיויון בול 2. הכללה והדחה לשלושה מאורעות 2. שאלת 2. 1. להגדר מרחב מדם, פונקציית הסתברות בדידה, משתנה מקרי ותוחלת 2. חסימות השונות
הסתברות למתמטיקאים 2018 סמסטר א' מועד א'	1. איזיויון בול 2. משחו מזר
הסתברות למתמטיקאים 2018 סמסטר א' מועד ב'	1. להגדר שונות משותפת ולהוכיח סכום שנויות 1. הגדרת שיוויון התפליגויות 2. הגדרת שיוויון כמעט-תמיד 3. שיוויון כמעט-תמיד גורר שיוויון התפליגויות 4. שיוויון בתפליגויות נשמר תחת הפעלת פונקציה
הסתברות לממד"ח 2025 סמסטר א' מועד ב'	1. חכונות של נוסחת התוחלת השלמה עם הסתברות מותנית 1. נוסחת התוחלת השלמה עם הסתברות מותנית 2. נוסחת השונות לסכום
הסתברות לממד"ח 2024 סמסטר א' מועד א'	1. סכום משתני ברנולי בלתי-תלויים מתפלג ביןומית 2. תנאי תוחלת ושונות להתקנסות לקבוע 3. הגדרת התקנסות לקבוע 4. הוכחת החוק החלש של המספרים הזוגיים
הסתברות לממד"ח 2024 סמסטר א' מועד ב'	1. ניסוח והוכחה של איזיויון מركוב 2. ניסוח והוכחה של איזיויון הופding ללא הלמה
הסתברות לממד"ח 2023 סמסטר א' מועד א'	1. תוחלת של משתנה מקרי שנתרמן על הטבעיים (עם פוביני)
הסתברות לממד"ח 2023 סמסטר א' מועד ב'	1. איזיויון מركוב (בניסוח מוחר) 2. איזיויון צ'ביש 3. איזיויון צ'רנוף
הסתברות לממד"ח 2022 סמסטר א' מועד א'	1. לינאריות התוחלת 2. חסימות השונות?
הסתברות לממד"ח 2022 סמסטר א' מועד ב'	1. איזיויון צ'ביש 2. איזיויון צ'רנוף
הסתברות לממד"ח 2022 סמסטר א' מועד ג'	1. איזיויון בול עבור מספר סופי של מאורעות
הסתברות לממד"ח 2018 סמסטר א' מועד א'	1. להגדר שונות משותפת 2. נוסחת סכום שנויות לשני משתנים מקרים