פתרון מטלה 07 — חשבון אינפיניטסימלי 3, 80415

22 במאי 2025

שאלה 1

תהיי $f : A \subseteq \to \mathbb{R}^m$ פונקציה הגזירה פעמיים ברציפות ב־$a \in A$. נסמן ב־$P : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ את פולינום טיילור מסדר 2 של f סביב a:

$$P(x) = f(a) + Df_a(x-a) + \frac{1}{2}D^2 f_a(x-a, x-a)$$

סעיף א'

נוכיח שמתקיים $DP_a = Df_a, D^2P_a = D^2 f_a$.

הוכחה:

$\square$

סעיף ב'

נוכיח כי $f(x) = P(x) + o(\|x-a\|^2)$, משמע שמתקיים $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-P(x)}{\|x-a\|^2} = 0$.

הוכחה:

$\square$

שאלה 2

נחשב את פולינום טיילור מסדר 2 של הפונקציה $f(x,y)=e^{x\sin(y)}$ סביב הנקודות $(1,0),(2,\pi)$.

הוכחה:

$\square$

שאלה 3

בכל סעיף נמצא את הנקודות הקריטיות ונסווגן.

הערה: יונתן אמר אפשר להניח שהפונקציות גזירות פעמיים ברציפות.

סעיף א'

$f(x,y)=x^3-2xy^2$

הוכחה: נחשב נגזרות חלקיות

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2-2y^2,\ \frac{\partial f}{\partial y}=-4xy$$

נשים לב שכל הנגזרות החלקיות רציפות מאריתמטיקה של פונקציות רציפות ולכן $f(x,y)$ דיפרנציאבילית בכל נקודה ומתקיים

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}3x^2-2y^2\\-4xy\end{pmatrix}$$

נשים לב ש־$x=y=0 \iff \nabla f(x,y)=0$ ולכן $(0,0)$ נקודה קריטית. נחשב את מטריצת ההסיאן של f

$$Hf_{(x,y)}=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6x & -4y\\-4y & -4x\end{pmatrix}$$

ונשים לב שמתקיים $Hf_{(0,0)}=\det\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}=0$ ולא ניתן להשתמש במבחן ההסיאן לסיווג נקודות קיצון, ולכן עלינו לעבוד כמו בתרגול ולראות איך מתנהגת f בסביבת הנקודה $(0,0)$: יהי $\varepsilon>0$ ונבחן עבור $y=x$ ו־$x\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ את התנהגות $f(x)=x^3-2x^3$.

בתחום $x\in(0,\varepsilon)$ אנחנו מקבלים ש־$x^3\le 2x^3$, אבל עבור $x\in(-\varepsilon,0)$ אנחנו מקבלים ש־$2x^3\le x^3$, ולכן נסיק אם כך ש־$(0,0)$ היא נקודת קיצון מסוג אוכף. $\square$

סעיף ב'

$g(x,y)=x^3+y^3-3xy+4$

הוכחה: נחשב נגזרות חלקיות

$$\frac{\partial g}{\partial x}=3x^2-3y,\ \frac{\partial g}{\partial y}=3y^2-3x$$

נשים לב שכל הנגזרות החלקיות רציפות מאריתמטיקה של פונקציות רציפות ולכן $g(x,y)$ דיפרנציאבילית בכל נקודה ומתקיים

$$\nabla g(x,y)=\begin{pmatrix}3x^2-3y\\3y^2-3x\end{pmatrix}$$

נשים לב ש־

$$\nabla g(x,y)=0\iff\begin{pmatrix}3x^2-3y\\3y^2-3x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

מהקורדינאטה הראשונה נקבל $x^2=y \iff 3x^2-3y=0$ ובהצבה בקורדינאטה השנייה נקבל

$$3y^2-3x=0\iff 3\left(x^2\right)^2-3x=0\iff x^4-x=0\iff x\left(x^3-1\right)=0\iff x=0\vee x=1$$

אם $x=0$ אז $y=0$ ואם $x=1$ אז $y=1$ ולכן הנקודות הקריטיות שלנו הן $(0,0)$ ו־$(1,1)$. נחשב את מטריצת ההסיאן של g

$$Hg_{(x,y)}=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial^2 g}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6x & -3\\-3 & 6y\end{pmatrix}$$

נציב את הנקודות הקריטיות שלנו ונשים לב שמתקיים

$$Hg_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = -9$$

$$Hg_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \det \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} = 36 - 9 = 27$$

אז $\det\left(Hg_{0,0}\right) < 0$ ולכן $(0,0)$ נקודת אוכף לפי האלגוריתם שראינו בתרגול, ומכך ש-$\det\left(Hg_{(1,1)}\right) > 0$ ו-$\operatorname{tr}\left(Hg_{(1,1)}\right) = 12 > 0$ נקבל מהאלגוריתם מהתרגול ש-$(1,1)$ היא נקודת קיצון מסוג מינימום. $\square$

סעיף ג'

$h(x,y) = 3x^2y + y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 2$

הוכחה: נחשב נגזרות חלקיות

$$\frac{\partial h}{\partial x} = 6xy - 6x, \ \frac{\partial h}{\partial y} = 3x^2 + 3y^2 - 6y$$

נשים לב שכל הנגזרות החלקיות רציפות מאריתמטיקה של פונקציות רציפות ולכן $h(x,y)$ דיפרנציאבילית בכל נקודה ומתקיים

$$\nabla h(x,y) = \begin{pmatrix} 6xy - 6x \\ 3x^2 + 3y^2 - 6y \end{pmatrix}$$

ונשים לב שמתקיים

$$\nabla h(x,y) = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 6xy - 6x \\ 3x^2 + 3y^2 - 6y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

עבור הקורדינאטה הראשונה מתקיים

$$6xy - 6x = 0 \Longleftrightarrow x(y - x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \vee x = y$$

נציב בקורדינאטה השנייה

$$3x^2 + 3y^2 - 6y = 0 \underset{x=0}{\Longleftrightarrow} 3y^2 - 6y = 0 \Longleftrightarrow y(y-2) = 0 \Longleftrightarrow y = 0 \vee y = 2$$

$$3x^2 + 3y^2 - 6y = 0 \underset{x=y}{\Longleftrightarrow} 6y^2 - 6y = 0 \Longleftrightarrow y(y-1) = 0 \Longleftrightarrow y = 1, y = 0$$

ולכן הנקודות הקריטיות שלנו הן $(0,0), (0,2), (1,1), (-1,1)$, נחשב את מטריצת ההסיאן של h

$$Hh_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6y - 6 & 6x \\ 6x & 6y - 6 \end{pmatrix}$$

נציב את הנקודות הקריטיות שלנו ונשים לב שמתקיים

$$Hh_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow \det \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} = 36$$

$$Hh_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} = -36$$

$$Hh_{(-1,1)} = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} = -36$$

$$Hh_{(0,2)} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \det \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = 36$$

אז לפי האלגוריתם שראינו בתרגול, בנקודה $(0,0)$ נקבל מקסימום (דטרמיננטה חיובית אבל עקבה שלילית), בנקודה $(0,2)$ נקבל מינימום (דטרמיננטה חיובית ועקבה חיובית), בנקודות $(-1,1), (1,1)$ נקבל נקודות אוכף (דטרמיננטה שלילית). $\square$

שאלה 4

תהיי $f LA \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ פונקציה הגזירה שלוש פעמים ברציפות ב־$a \in A$. נניח כי $Df_a = 0 = D^2 f_a$ אבל $D^3 f_a \neq 0$. נגדיר $\varphi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ על־ידי $\varphi(v) = D^3 f_a(v, v, v)$.

סעיף א'

נוכיח כי לכל $u, v, w \in \mathbb{R}^k$ מתקיים

$$D^3 f_a(u, v, w) = \frac{1}{6}(\varphi(u + v + w) - \varphi(u + v) - \varphi(u + w) - \varphi(v + w) + \varphi(u) + \varphi(v) + \varphi(w))$$

הוכחה:

□

סעיף ב'

נסיק שקיים $v \in \mathbb{R}^k$ כך שמתקיים $\varphi(v) \neq 0$.

הוכחה:

□

סעיף ג'

נוכיח כי a היא נקודת אוכף של f.

הוכחה:

□

שאלה 5

תהיי $A \subseteq \mathbb{R}^k$ פתוחה, $f : A \to \mathbb{R}^k$ גזירה ברציפות ותהיי $a \in A$ כך ש־Df_a הפיכה.
נסמן $b = f(a), T = Df)_a$ ונגדיר $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ ו־$\tilde{f} : \tilde{A} = g^{-1}(A) \to \mathbb{R}^K$ על־ידי

$$g(x) = T^{-1}(x) + a, \tilde{f}(x) = f(g(x)) - b$$

סעיף א'

נוכיח כי g היא העתקה פתוחה, כלומר לכל קבוצה פתוחה $W \subseteq \mathbb{R}^k$ מתקיים ש־$g(W)$ פתוחה.
הוכחה:

□

סעיף ב'

נגיד שקבוצה פתוחה $U \subseteq A$ היא סביבה טובה של $a \in U$ אם $f\ |_U$ היא חד־חד ערכית, $V = f(U)$ פתוחה ו־$(f\ |_U)^{-1} : V \to U$ היא גזירה ברציפות. באותו אופן נגדיר סביבה טובה של $\tilde{A}$ של $0 \in$.
נוכיח שאם $\tilde{U} \subseteq \tilde{A}$ היא סביבה טובה של $0 \in \tilde{U}$ אז $U = g(\tilde{U})$ היא סביבה טובה של $a \in U$.
הוכחה:

□