מבנים אלגבריים 2, 80446 — פתרון מבחן לדוגמה

23 ביולי 2025

שאלה 1

יהי $K \supset \mu_n , n \in K^\times$ ו־L/K הרחבה ציקלית, אז קיים $\alpha \in L$ כך שמתקיים $L = K(\alpha)$ ו־$\alpha^n \in K$.

הוכחה: ניזכר בהגדרה

הגדרה 0.1 (חבורת μ_n, חבורת שורשי היחידה מסדר n): עבור K שדה ו־$1 \le n \in \mathbb{N}$ נגדיר

$$\mu_n(K) = \{\xi \in K \mid \xi^n = 1\}$$

$$\mu_\infty(K) = \bigcup_n \mu_n(K)$$

נשים לב ש־$\mu_n(K)$ היא תת־חבורה של $K^\times$ מסדר המחלק את n (זוהי כמובן חבורה אבלית עם כפל).
עבור K שדה ו־$1 \le n \in \mathbb{N}$, אם $x^n - 1$ מתפצל לחלוטין ב־K נסמן $\mu_n(K) = \mu_n$ (שכן היא לא תשתנה תחת הרחבה של K) ונגיד במקרה זה ש־μ_n מתפצל ב־K.

נעבור להוכחה:
מכך שההרחבה ציקלית אנחנו יודעים שההרחבה וסופית ושמתקיים $G = \mathrm{Gal}(L/K) \simeq (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ ולכן יש σ שיוצרת את ההרחבה.
נזכר שמהגדרה

$$G = \mathrm{Gal}(L/K) = \mathrm{Aut}(L/K) = \{\sigma \in \mathrm{Aut}(L) \mid \forall x \in K \ \sigma(x) = x\}$$

נסתכל על ה־$\sigma : L \to L$ הזאת כאופרטור K־לינארי (כלומר, מכבד את המבנה של K, משמע לכל $a, b \in K$ ולכל $x, y \in L$ מתקיים $(\sigma(ax + by) = a\sigma(x) + b\sigma(y)$).
ניקח את $f_\sigma(t)$ הפולינום המינימלי של σ. היות וההרחבה סופית מדרגה n אז אנחנו יודעים מטעמי סדר שיתקיים $\sigma^n = 1$ ומכך ש־$\mu_n \subset K$, אנחנו מקבלים שהפולינום $t^n - 1$ מתפצל לחלוטין ב־K.
מכך ש־σ הוא אופרטור K־לינארי, מתקיים $\sigma^n - 1 = 0$ ולכן לפולינום $t^n - 1$ יש שורש שהוא σ.
מהגדרת הפולינום המינימלי הוא מחלק גם את $t^n - 1$ (כי σ שורש שלו).
מכך ש־$t^n - 1$ מתפצל לחלוטין ב־K אז הוא מהצורה

$$t^n - 1 = (t - \xi_0)(t - \xi_1) \cdot \dots \cdot (t - \xi_{n-1})$$

ובהכרח השורשים שלו (שורשי היחידה) הם שונים זה מזה, כי $(t^n - 1)' = nt^{n-1}$, אבל השורש היחידי של nt^{n-1} הוא רק עבור $(n \neq 0)$ $t = 0$, אז לפי טענה שראינו נובע שאין לו שורשים מרובים ולכן כל השורשים שלו שונים זה מזה, אז כל השורשים שונים זה מזה והפיצול שראינו לעיל הוא פיצול לינארי.
ניזכר שבלינארית ראינו שאופרטור הוא אלכסוני מעל שדה אם קיים בסיס של המרחב הוקטורי שמכיל את כל הוקטורים העצמיים של האופרטור, ובמקרה שלנו זה שקול לגהיד שהפולינום המינימלי של האופרטור מתפצל לחלוטין מעל השדה – כפי שמצאנו.
לכן יש לנו בסיס של וקטורים עצמיים $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ עבור הערכים העצמיים $\xi_1, \cdots, \xi_n \in \mu_n$ בהתאמה כך שמתקיים $\sigma(\alpha_i) = \xi_i \alpha_i$.
נראה כי ה־ξ_i יוצרים את μ_n: μ_n ציקלית, ולכן גם כל תת־חבורה שלה ציקלית אז $\langle \xi_i, \cdots, \xi_n \rangle = \mu_m$ עבור $m \le n$ ואז $\xi_i^m = 1$ אבל נשים לב שמתקיים אם כך לכל i

$$\sigma^m(\alpha_i) = \xi_i^m \alpha_i = 1 \cdot \alpha_i = \alpha_i$$

ולכן בהכרח $m = n$ ובעצם $\langle \xi_1, \cdots \xi_n \rangle = \mu_n$.
מכך ש־$\xi_1, \cdots, \xi_n$ יוצרים את μ_n והיא חבורה ציקלית לכן נוצרת על־ידי איבר אחד, ξ, נובע שהוא צריך להיות צירוף לינארי שלהם, אז לכל i נתאים את ℓ_i כך שיתקיים $\xi = \prod_{i=1}^n \xi_i^{\ell_i}$, נגדיר $\alpha = \prod_{i=1}^n \alpha_i^{\ell_i}$ ונקבל

$$\sigma(\alpha) = \sigma\left(\prod_{i=1}^n \alpha_i^{\ell_i}\right) = \prod_{i=1}^n \sigma\left(\alpha_i^{\ell_i}\right) \underset{\sigma(\alpha_i) = \xi_i \alpha_i}{=} \prod_{i=1}^n \xi_i^{\lambda_i} \alpha_i^{\ell_i} = \prod_{i=1}^n \xi_i^{\ell_i} \prod_{i=1}^n \alpha_i^{\ell_i} = \xi\alpha$$

במילים אחרות, α הוא וקטור עצמי של הערך עצמי ξ, אבל ξ הוא שורש פרימיטיבי מסדר n, אז הקבוצה $\{\alpha, \xi\alpha, \xi^2\alpha, \cdots, \xi^{n-1}\alpha\}$ היא בעלת n איברים שונים – זאת אומרת ל־α יש n צמודים מעל K ונטען שזה מסיים: נסמן $L = K(\alpha)$, ואם נבחר $a = \alpha^n$ אז עבור כל $\sigma_i \in G$ נקבל

$$\sigma_i(a) = \sigma_i(\alpha^n) = (\sigma_i(\alpha))^n = (\xi_i\alpha)^n = \alpha^n = a$$

וזה בידיוק אומר ש־$a \in L^G = \{x \in L \mid \forall \sigma \in G, \ \sigma(x) = x\}$, אבל זה בידיוק אומר ש־$a \in K$, כי כל איבר ב־$K$ נשמר תחת כל האוטומורפיזמים של G כי G מהגדרתה מכילה את כל האוטומורפיזמים שמשאירים את K במקום. $\square$

שאלה 2

נוכיח שאם L שדה ו־$G \subseteq \mathrm{Aut}(L)$ היא תת־חבורה סופית אז L היא הרחבת גלואה סופית של $K = L^G$ ו־$G = G_{L/K}$.

הוכחה: אין לי כח. $\square$

שאלה 3

נקבע לכל סעיף אם הוא נכון או לא נכון וננמק לספורט.

סעיף א'

אם L/K הרחבה ספרבילית סופית אז יש כמות שדות ביניים סופית בין K ובין L.

הוכחה: הטענה **נכונה**.

מכך שההרחבה ספרבילית נובע שכל $\alpha \in L$ ספרבילי מעל K, כלומר לפולינום המינימלי מעל K אין שורשים מרובים בשדה ההרחבה בו הוא מתפצל.

נזכר במשפט האיבר הפרימיטיבי: נניח כי L/K הרחבה סופית, אז

1. L/K פרימיטיבית אם ורק אם קבוצת שדות ביניים היא קבוצה סופית
2. אם בנוסף L/K פרידה (ספרבילית) אז היא פרימיטיבית (זאת אומרת, כל הרחבה סופית פרידה היא פרימיטיבית)

1 לא מעניין במקרה שלנו, אז נוכיח רק את 2: ניקח $E = L^{nor}/K$ הסגור הנורמלי מעל K, שפרידה ונורמלית ולכן גלואה ועל־כן $L^{nor}/K = L^{\mathrm{gal}}$ סגור גלואה.

נראה של־E/K יש כמות סופית של שדות ביניים: כל שדה ביניים $K \subseteq F \subseteq E$ מקיים $F = E^{\mathrm{Gal}(E/F)}$ זאת־אומרת הוא נקבע על־ידי תת־החבורה $H = \mathrm{Gal}(E/F)$ בחבורה סופית $G = \mathrm{Gal}(E/K)$ □

סעיף ב'

אם L, F הן הרחבות סופיות של שדה K אז $[LF : F] \mid [L : K]$

הוכחה: הטענה **לא נכונה**.

ניזכר ש־LF זה **הקומפוזיטום** של L ו־F ומוגדר כתת־השדה הקטן ביותר של K שמכיל את L ואת F.

אינטואיציה: האיברים של L ושל F יכולים להיות תלויים מעל K או אם יש הכלה בין האיברים ואז הדרגה של הקומפוזיטום יכולה להיות פחות ממכפלת הדרגות של כל הרחבה בפני עצמה.

נסמן $\alpha = \sqrt[3]{2}$, $\omega = \xi_3$ וניקח $K = \mathbb{Q}, L = \mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{2}\right), F = \mathbb{Q}\left(\omega\sqrt[3]{2}\right)$.

כמובן $[L : K] = 3$ כי הפולינום $x^3 - 2$ הוא הפולינום המינימלי.

אנחנו גם יודעים ש־LF הוא השדה המינימלי שמכיל גם את α וגם את $\alpha\omega$ מעל $\mathbb{Q}$, ואנחנו רוצים למצוא פולינום מינימלי של $\alpha\omega$ מעל $\mathbb{Q}$: נסמן $x = \alpha\omega$ ואז $x^3 = \alpha^3\omega^3 = 2 \cdot 1 = 2$ אז $x^3 - 2 = 0$ וזה אותו פולינום מינימלי כמקודם, והוא גם אי־פריק (קריטריון אייזנשטיין עם $p = 2$) אז $[F : \mathbb{Q}] = 3$.

אנחנו רוצים לחשב את $[LF : K]$, מהגדרה מתקיים $LF \supseteq \mathbb{Q}(\alpha, \omega)$ אבל $\omega = \frac{\alpha\omega}{\alpha} \Rightarrow \alpha \in LF \Rightarrow \mathbb{Q}(\alpha, \omega) \subseteq LF$ אז $LF = \mathbb{Q}(\alpha, \omega)$.

נשים לב ש־LF זה בעצם שדה הפיצול של הפולינום $x^3 - 2$ כי כל שלושת השורשים נמצאים בו – גם $\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}\omega, \sqrt[3]{2}\omega^2$ אז הדרגה שלו לפי מגדל הרחבות זה $[LF : \mathbb{Q}] = 2 \cdot 3 = 6$. אז

$$[LF : F] = \frac{[LF : \mathbb{Q}]}{[F : \mathbb{Q}]} = \frac{6}{3} = 2 \nmid 3 = [L : K]$$

□