פתרון מטלה 05 — תורת המידה, 80517

26 בנובמבר 2025

שאלה 1

בעזרת משפט ההצגה של ריס ניתן להגדיר את מידת לבג על $(\mathbb{R},\mathcal{B}_\mathbb{R})$ בתור המידה המתאימה לפונקציונל הניתן על־ידי אינטגרל רימן, ונסמנה לרוב באות λ.

סעיף א'

נראה כי λ אינווריאנטית להזזות, כלומר לכל $E\in\mathcal{B}_\mathbb{R}$ ולכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $\lambda(E)=\lambda(E+x)$ וכן נראה $\lambda([0,1])=1$.
הוכחה: ממשפט ההצגה של ריס נקבל שלכל קטע $I=[a,b]\subseteq\mathbb{R}$ מידת לבג מניבה לנו $\lambda([a,b])=b-a$ אבל אם נסתכל על ההזזה שלו ב־$x\in\mathbb{R}$ נקבל

$$\lambda(I+x)=\lambda([a+x,b+x])=(b+x)-(a+x)=b-a$$

כלומר לקטעים סגורים מתקיים

$$\lambda(I+x)=\lambda(I)$$

באותו אופן בגלל שמידת לבג היא מידת רדון, מהרגולריות הפנימית והחיצונית זה נובע גם עבור קטע פתוח.
נרצה לראות שזה מתאים גם לקבוצות פתוחות.
באינפי 3 ראינו שכל $U\subseteq\mathbb{R}$ פתוחה ניתנת לכתיבה על־ידי אחיד בן־מנייה של קטעים זרים, כלומר $U=\bigcup_{n=1}^\infty I_n$, אבל ראינו שקטע פתוח הוא אינווריאנטי להזזה, כלומר לכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים

$$U+x=\bigcup_{n=1}^\infty (I_n+x)$$

מ־σ־אדטיביות של המידה נקבל

$$\lambda(U+x)=\lambda\left(\bigcup_{n=1}^\infty (I_n+x)\right)+\sum_{n=1}^\infty\lambda(I_n+x)=\sum_{n=1}^\infty\lambda(I_n)=\lambda(U)$$

נגדיר

$$C=\{E\subseteq\mathbb{R}\mid \forall x\in\mathbb{R},\ \lambda(E+x)=\lambda(E)\}\subseteq\mathcal{B}_\mathbb{R}$$

ממה שראינו לעיל נובע שכל הקבוצות הפתוחות ב־$\mathbb{R}$ נמצאות ב־C ונשאר להראות ש־$C=\mathcal{B}_\mathbb{R}$ כדי לסיים, בעצם נראה ש־C אכן σ־אלגברה.
אז $\mathbb{R}\in C$ ברור כי $\lambda(\mathbb{R})=\infty$ ולכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $\mathbb{R}+x=\mathbb{R}$ ולכן $\mathbb{R}\in C$.
עבור סגירות תחת משלים, יהי $E\in C$ ונרצה להראות ש־$E^c\in C$: כלומר, נרצה להראות ש־$E^c+x=(E+x)^c\in C$.
$E\in\mathcal{B}_\mathbb{R}$ ולכן $E^c\in\mathcal{B}_\mathbb{R}$ ולכן

$$\lambda(E^c+x)=\lambda((E+x)^c)=\lambda(\mathbb{R})-\lambda(E+x)\underset{E\in C}{=}\lambda(\mathbb{R})-\lambda(E)=\lambda(E^c)\Longrightarrow E^c\in C$$

נשאר להראות סגירות תחת איחוד בן־מנייה: יהיו $\{E_n\}_{n=1}^\infty\subseteq C$ זרות. מתקיים

$$\left(\bigcup_{n=1}^\infty E_n\right)+x-\bigcup_{n=1}^\infty (E_n+x)$$

אבל גם $\{E_n+x\}$ זרות, לכן ממה שראינו לעיל מתקיים

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^\infty E_n+x\right)=\sum_{n=1}^\infty\lambda(E_n+x)\underset{E_n\in C}{=}\sum_{n=1}^\infty\lambda(E_n)=\lambda\left(\bigcup_{n=1}^\infty E_n\right)\Longrightarrow\bigcup_{n=1}^\infty E_n\in C$$

אז זו σ־אלגברה שמכילה את σ־אלגברת בורל שהיא מינימלית ולכן $C=\mathcal{B}_\mathbb{R}$, כלומר לכל $E\in\mathcal{B}_\mathbb{R}$, $\lambda(E)=\lambda(E+x)$.
נסיק אם כך $\lambda([0,1])=1-0=1$. $\square$

סעיף ב'

תהיי $f:[0,1]\to[0,\infty)$ פונקציה חסומה אינטגרבילית רימן.

נסיק מהסעיף הקודם שהאינטגרל שלה לפי λ זהה לאינטגרל רימן שלה.

הוכחה: נראה תחילה עבור פונקציות מדרגה: תהיי $\psi:[0,1]\to\mathbb{R}$ ותהיי $P=\{x_0,x_1,...,x_n\}$ חלוקה של הקטע $[0,1]$ כך שמתקיים

$$0=x_0<x_1<\dots<x_n=1$$

והגדרנו את האינטגרל רימן של פונקצייה מדרגה להיות

$$\int_0^1\psi(x)dx=\sum_{k=1}^{n}c_k(x_k-x_{k-1})$$

אבל זאת פונקציה פשוטה! היות ונקודות הקצה הן נקודות ממידה אפס הן לא משפיעות על ערך האינטגרל לבג שלה ולכן לפי אינטגרל לבג מתקיים

$$\int_0^1\psi d\lambda=\sum_{k=1}^{n}c_k\lambda((x_{k-1},x_k))=\sum_{k=1}^{n}c_k(x_k-x_{k-1})$$

אבל זה בידיוק האינטגרל רימן שלה.

משפט דרבו אומר לנו שאם f אינטגרבילית רימן אז עבור חלוקה P של הקטע מתקיים

$$\int_0^1 f(x)dx=\sup_p L(P,f)=\inf_P U(P,f)$$

כאשר $L(P,f),U(P,f)$ הם סכומי דרבו התחתונים והעליונים שמתאימים לחלוקה P, כלומר במילים אחרות קיימות שתי סדרות של פונקציות מדרגות (כאשר האינטגרלים המדוברים הם אינטגרלי רימן) $\{\psi_n\},\{\gamma_n\}$ כך שמתקיימים

$$\forall x\in[0,1],\ \psi_n(x)\le f(x)\le\gamma_n(x)$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\psi_n(x)dx=\int_0^1 f(x)dx$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\gamma_n(x)dx=\int_0^1 f(x)dx$$

בלי הגבלת הכלליות נבחר $\{\psi_n\}$ כך שלכל n מתקיים

$$\psi_1\le\psi_2\le\dots\le f$$

(תמיד נוכל להגדיר סדרה שמבוססת על בחירת מקסימום בהתאם בצורה רקורסיבית) ובאותו אופן נבחר $\{\gamma_n\}$ כך שמתקיים $f\le\dots\le\gamma_2\le\gamma_1$ ונשים לב ש־

$$\lim_{n\to\infty}\psi_n\overset{a.e.}{\to}f,\quad \lim_{n\to\infty}\gamma_n\overset{a.e.}{\to}f$$

אלו פונקציות פשוטות ולכן $\int\psi dx=\int\psi d\lambda$ (dx עבור האינטגרל רימן ו־$d\lambda$ עבור האינטגרל לבג), אז ממשפט ההתכנסות המונוטונית

$$\int_{[0,1]}fd\lambda=\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]}\psi_n d\lambda=\lim_{n\to\infty}\int_0^1\psi_n(x)dx=\int_0^1 f(x)dx$$

$\square$

סעיף ג'

נניח כי μ היא מידת רדון אינווריאנטית להזזה על $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$.
נסיק מדרך ההוכחה של הסעיף הקודם כי היא בהכרח כפולה חיובית של מידת לבג.

הוכחה: נרשום $\mu = c \cdot \lambda$ כאשר $c = \mu([0,1])$.
אם $c = 0$ אז זו מידת האפס וסיימנו ולכן נניח $c > 0$ אז נגדיר מידה חדשה, $\nu = \frac{1}{c}\mu$ ומהיות μ אינווריאנטית להזזה גם ν אינווריאנטית להזזה ונרמלנו ולכן מתקיים $\nu([0,1]) = 1$, נרצה להראות ש־$\nu = \lambda$.
נסתכל על הקטע $[0,1]$, ניתן להציגו גם בצורה הבאה

$$[0,1] = \bigcup_{k=0}^{n-1} \left(\left[0, \frac{1}{n}\right] + \frac{k}{n} \right)$$

לכל $n \in \mathbb{N}$ ולכן מ־σ־אדטיביות ואינווריאנטיות להזזה

$$\nu([0,1]) = \sum_{k=0}^{n-1} \nu\left(\left[0, \frac{1}{n}\right] + \frac{k}{n} \right) = \sum_{k=0}^{n-1} \nu\left(\left[0, \frac{1}{n}\right] \right) = n \cdot \nu\left(\left[0, \frac{1}{n}\right] \right)$$

נשים לב

$$\nu([0,1]) = \frac{1}{c}\mu([0,1]) = \frac{1}{c} c\lambda([0,1]) = 1$$

אז

$$\nu\left(\left[0, \frac{1}{n}\right] \right) = \frac{1}{n} = \lambda\left(\left[0, \frac{1}{n}\right] \right)$$

נשים לב שגם לכל $a, b \in \mathbb{Q}$ ניתן לעשות את אותה חלוקה למקטעים באורך $\frac{1}{n}$ ולכן

$$\nu([a,b]) = m \cdot \nu\left(\left[0, \frac{1}{n}\right] \right) = \frac{m}{n} = b - a = \lambda([a,b])$$

יהי $\varepsilon > 0$, אז לכל $[a,b]$ יש $[a', b']$ כך שמתקיים

$$[a,b] \subseteq [a', b'], \;\; b' - a' < (b-a) + \varepsilon$$

בגלל שמדובר במידות רדון יש לנו רגולריות פנימית וחיצונית אז נגדיר $\{I_n\}$ סדרת קטעים סגורים רציונליים כך ש־$I_n \downarrow [a,b]$ ובאותו אופן גם $\{J_n\}$ סדרת קטעים רציונליים סגורים כך שמתקיים $J_n \uparrow [a,b]$ ומרציפות המידה

$$\nu([a,b]) = \lim_{n\to\infty} \nu(I_n) = \lim_{n\to\infty} \nu(J_n) = \lambda([a,b])$$

שכן λ, ν מסכימות על קטעים רציונליים ולכן $\nu(I) = \lambda(I)$ עבור כל הקטעים הסגורים והחסומים.
שתיהן מידות רדון ולכן בורל שמסכימות אחת עם השנייה לכל $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ ולכן

$$\nu(E) = \lambda(E) \iff \frac{1}{c}\mu(E) = \lambda(E) \iff \mu(E) = c \cdot \lambda(E)$$

(לא ראיתי איך אפשר לעשות את זה מדרך ההוכחה של הסעיף הקודם אז הוכחתי ישירות) $\square$

סעיף ד'

יהי $x_0 \in \mathbb{R}$ ונסתכל על הפונקציונל הלינארי $\mathrm{ev}_{x_0} : C_C(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ המוגדר על־ידי

$$\mathrm{ev}_{x_0}(f) = f(x_0)$$

נראה כי ניתן להשתמש עליו במשפט ההצגה של ריס ונמצא את המידה על $\mathbb{R}$ המייצגת אותו.

הוכחה: ראשית תנאי משפט ההצגה של ריס מתקיימים כי אם $f \geq 0$ אז $\mathrm{ev}_{x_0}(f) = f(x_0) \geq 0$.
משפט ההצגה של ריס מביא מידת רדון יחידה μ המקיימת

$$\forall f \in C_C(\mathbb{R}), \;\; f(x_0) = \mathrm{ev}_{x_0}(f) = \int f d\mu$$

נסמן $\mu = \delta_{x_0}$ מידת דיראק: לכל $A \subseteq \mathbb{R}$ נגדיר

$$\mu(A) = \begin{cases} 1 & x_0 \in A \\ 0 & x_0 \notin A \end{cases}$$

לכל $f \in C_C(\mathbb{R})$ מהגדרת מידת דיראק מתקיים

$$\int_{\mathbb{R}} f d\mu = f(x_0)$$

כלומר לפי משפט ההצגה של ריס נובע שהמידה המייצגת את הפונקציונל הלינארי הזה היא מידת דיראק (והיא מהמשפט יחידה). $\square$

שאלה 2

סעיף א'

נחשב את הגבול

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n\left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{\frac{x}{2}}dx$$

פתרון: נגדיר $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ על־ידי

$$f_n(x)=\begin{cases}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{\frac{x}{2}} & x\in[0,n]\\ 0 & x\notin[0,n]\end{cases}$$

ונרצה לחשב את

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n\left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{\frac{x}{2}}dx=\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}f_n(x)dx$$

ניזכר באריתמטיקה של גבולות

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n=e^a$$

אז עבור $x\in[0,\infty)$, בבחירת $a=-x$ מתקיים

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=e^{-x}e^{\frac{x}{2}}=e^{-\frac{x}{2}}$$

אז יש לנו התכנסות נקודתית $f_n\to f$ כאשר

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{x}{2}} & x\geq 0\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

נרצה להשתמש במשפט ההתכנסות הנשלטת ולכן עלינו לחסום את $|f_n(x)|$ עבור $x\in[0,n]$.
נשים לב ש־$\frac{x}{n}\in[0,1]$ ולכן $1-\frac{x}{n}\geq 0$, ונזכר באי־השיוויון הבא עבור $y\in[0,\infty)$,

$$1-y\leq e^{-y}$$

אז מהאי־שליליות ומהאי־שיוויון הזה נקבל

$$\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\leq e^{\left(-\frac{x}{n}\right)^n}=e^{-x}\Longrightarrow|f_n(x)|=\left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{\frac{x}{2}}\leq e^{-x}e^{\frac{x}{2}}=e^{-\frac{x}{2}}$$

ולכן נוכל להגדיר את הפונקציה השולטת

$$g(x)=\begin{cases}e^{-\frac{x}{2}} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

כדי להשתמש במשפט ההתכנסות הנשלטת עלינו להראות ש־$g(x)$ אינטגרבילית, ואכן

$$\int_{\mathbb{R}}g(x)dx=\int_0^\infty e^{-\frac{x}{2}}dx=\left[\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{-\frac{1}{2}}\right]_0^\infty=\left[-2e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^\infty=0-(-2)=2$$

ולכן g אינטגרבילית ומתקיים במקרה זה יחד עם משפט ההתכנסות הנשלטת

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}f_n(x)dx=\int_{\mathbb{R}}\lim_{n\to\infty}f_n(x)dx=\int_{\mathbb{R}}f(x)dx=\int_{\mathbb{R}}g(x)dx=2$$

$\square$

סעיף ב'

נחשב את הגבול

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-\frac{x}{2}}dx$$

.

פתרון: באופן זהה לסעיף הקודם

$$f_n(x)=\begin{cases}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-\frac{x}{2}} & x\in[0,n]\\ 0 & x\notin[0,n]\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}e^{\frac{x}{2}} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

נגדיר $g_n(x)=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ ולכל $n\in\mathbb{N}$, $g_n(x)$ מונוטונית עולה עבור $x\geq 0$ וכן גם עם המכפלה בקבועה $e^{-\frac{x}{2}}$ סדרת הפונקציות הללו מונוטונית עולה, כלומר $f_n(x)\leq f_{n+1}(x)$.

ממשפט ההתכנסות המונוטונית מתקיים

$$L=\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}f_n(x)dx=\int_{\mathbb{R}}\lim_{n\to\infty}f_n(x)dx=\int_{\mathbb{R}}e^{\frac{x}{2}}dx=\infty$$

ולכן הגבול מתבדר. $\square$

שאלה 3

תהיי μ מידת בורל על מרחב טופולוגי X ונגדיר

$$\operatorname{supp}(\mu) = \{x \in X \mid \forall U \ni x \text{ open}, \mu(U) > 0\}$$

סעיף א'

נניח כי $X = \mathbb{R}^d$ עם הטופולוגיה הסטנדרטית עליו ונראה כי לכל μ מידת בורל, $\operatorname{supp}(\mu)$ תהיה הקבוצה הסגורה הקטנה ביותר C (מינימלית ביחס ההכלה) כך שמתקיים $\mu(C^c) = 0$.

הוכחה: כדי להראות סגירות נראה שהמשלים זו קבוצה פתוחה: אם $x \notin \operatorname{supp}(\mu)$, אז יש סביבה פתוחה $x \ni U_x$ כך ש־$\mu(U_x) = 0$ ולכן לכל $x \in C^c$ יש סביבה פתוחה שמוכלת ב־C^c, כלומר C^c היא קבוצה פתוחה ולכן $\operatorname{supp}(\mu)$ סגורה.

צריך להראות $\mu(C^c) = 0$: $\mathbb{R}^d$ הוא מרחב המקיים את אקסיומת המנייה השנייה ולכן יש לו בסיס בן־מנייה נסמנו $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \ldots\}$ אז לכל $x \in C^c$ ניתן לבחור $B_{n(x)} \in \mathcal{B}$ כך ש־$x \in B_{n(x)} \subset U_x$ כאשר $x \ni U_x$ פתוחה המקיימת $\mu(U_x) = 0$ וממונוטוניות המידה נקבל $\mu\left(B_{n(x)}\right) = 0$ אז כל $x \in C^c$ מוכל באחד מאיברי הבסיס האלו, כלומר

$$C^c = \bigcup_{n:\mu(B_n)=0} B_n$$

כלומר C^c היא איחוד קבוצות בן־מנייה ממידה אפס, ולכן בפרט $\mu(C^c) \le \sum_{n:\mu(B_n)=0} \mu(B_n) = 0$.

נשאר להראות מינימליות ביחס ההכלה: תהיי C סגורה כך ש־$\mu(C^c) = 0$.

אם $x \in C^c$ אז יש סביבה פתוחה של x ממידה אפס ולכן כמובן $x \notin \operatorname{supp}(\mu)$ ו־$C^c \subset \operatorname{supp}(\mu)^c$ ולכן $\operatorname{supp}(C) \subset C$ והיא הקבוצה המינימלית ביחס ההכלה, כנדרש. $\square$

סעיף ב'

תהיי $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ מסילה רציפה. נבחן איפה המידה $\varphi_* \lambda$ נתמכת (הדחיפה קדימה של מידת לבג).

הוכחה: הדחיפה קדימה מוגדרת על־ידי

$$\varphi_* \lambda(E) = \lambda(\varphi^{-1}(E))$$

נסמן $I = \varphi([0,1])$, φ רציפה ו־$[0,1]$ זה קטע סגור וחסום ולכן קומפקטי ב־$\mathbb{R}$ ממשפט היינה־בורל ולכן K היא קבוצה קומפקטית, כי פונקציה רציפה שולחת קבוצות קומפקטיות לקבוצות קומפקטיות (וכן גם K סגורה וחסומה).

נרצה להראות ש־$\lambda\left(\varphi^{-1}(\mathbb{R}^2 \setminus K)\right) = 0$.

מהגדרת K נקבל

$$\varphi^{-1}(\mathbb{R}^2 \setminus K) = \{t \in [0,1] \mid \varphi(t) \in \mathbb{R}^2 \setminus K\} = \emptyset \Longrightarrow \lambda(\varphi^{-1}(\mathbb{R}^2 \setminus K)) = 0$$

מסעיף א' אנחנו יודעים שהתומך הוא הקבוצה הסגורה הקטנה ביותר המקיימת $\mu(\mathbb{R}^2 \setminus C) = 0$, אבל K קומפקטית ולכן סגורה וחסומה ולכן התומך הוא לכל הפחות תת־קבוצה של K, נראה שזה כל K: יהי $y_0 \in K$ ולכן יש $t_0 \in [0,1]$ כך שמתקיים $\varphi(t_0) = y_0$ וכן

$$A_0 = \varphi^{-1}(\{y_0\}) = \{t \in [0,1] \mid \varphi(t) = y_0\}$$

φ רציפה ו־$\mathbb{R}^2$ זה מרחב האוסדרוף ולכן A_0 היא תת־קבוצה סגורה.

ניקח U סביבה פתוחה של y_0 ב־$\mathbb{R}^2$ נשים לב

$$\lambda(\varphi^{-1}(U)) > 0$$

שכן φ רציפה ו־U פתוחה ולכן $V = \varphi^{-1}(U)$ קבוצה פתוחה ו־$y_0 \in U$ ולכן $t_0 \in V$, אז V לא ריקה וקבוצה פתוחה ב־$[0,1]$ כלומר היא מכילה קטע לא מנוון ובפרט מהגדרת מידת לבג, מידתו גדולה מ־0 ולכן הטענה נובעת.

אז ראינו שלכל $y_0 \in K$, $\lambda(\varphi^{-1}(\{y_0\})) > 0$ ולכן $K \subseteq \operatorname{supp}(\varphi_* \lambda)$, ראינו הכלה דו־כיוונית ולכן קיבלנו שיוויון ו־$\operatorname{supp}(\varphi_* \lambda) = K$. $\square$

סעיף ג'

תהיי $\{q_n\}$ מנייה של $\mathbb{Q}$ ונגדיר את המידה

$$\mu = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \delta_{q_n}$$

כש־δ_x היא מידת דיראק סביב הנקודה $x \in \mathbb{R}$.

נמצא איפה μ נתמכת.

הוכחה: ראשית נבחין שמהגדרה ברור כי כל רציונלי בתומך מהגדרה, אבל נטען שגם כל ממשי בתומך, כלומר $\mathrm{supp}(\mu) = \mathbb{R}$: יהי $x \in \mathbb{R}$, מצפיפות הרציונליים בממשיים, כל U_x פתוחה סביב x מכילה רציונלי ולכן $\mu(U) \ge 2^{-n} > 0$ ולכן $x \in \mathrm{supp}(\mu)$, כלומר $\mathrm{supp}(\mu) = \mathbb{R}$. □

סעיף ד'

נראה כי לכל קבוצה קומפקטית $K \subset \mathbb{R}$ קיימת מידת הסתברות בורל הנתמכת עליה (כלומר, מידת בורל עם $\mu(\mathbb{R}) = 1$).

הוכחה: K היא קבוצה קומפקטית ב־$\mathbb{R}$ ולכן סגורה וחסומה אז $K = [a, b]$ עבור $a, b \in \mathbb{R}$.

נשתמש בשאלה 1 ונגדיר $\mu(E) = \frac{1}{b-a}\lambda(E \cap K)$.

נשים לב שהיא אכן נתמכת על־ידי K כי

$$\mu(\mathbb{R} \setminus K) = \frac{1}{b-a}\lambda((\mathbb{R} \setminus K) \cap K) = \frac{1}{b-a}\lambda(\emptyset) = 0$$

וכן

$$\mu(\mathbb{R}) = \frac{1}{b-a}\lambda(\mathbb{R} \cap K) = \frac{1}{b-a}\lambda([a, b]) = \frac{b-a}{b-a} = 1$$

□