

# פתרון מטלה 05 – פונקציות מרוכבות, 80519

27 בנובמבר 2025



# שאלה 1

יהי  $G \subseteq \mathbb{C}$  תחום ו- $f \in C^1(G, \mathbb{C})$ . נראה ש- $f$  הולומורפית אם ורק אם  $\partial_{\bar{z}} f = 0$ .

הוכחה:

$\Leftarrow$  נניח כי  $f$  הולומורפית ונראה כי  $\partial_{\bar{z}} f = 0$ .

$f$  הולומורפית ולכן היא מקיימת את משוואות קושי-רימן

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

כאשר  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  עבור  $u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

נציב באופרטור Wirtinger ונקבל

$$\partial_{\bar{z}} f = \frac{1}{2}(\partial_x f + i\partial_y f) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right) + i\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right) \stackrel{\text{C.R.E}}{=} 0$$

$\Rightarrow$  נניח כי  $\partial_{\bar{z}} f = 0$  ונראה כי  $f$  הולומורפית.

אם  $\partial_{\bar{z}} f = 0$  אז גם החלק המדומה וגם החלק הממשי היינם 0, כלומר

$$\partial_{\bar{z}} f = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right)$$

כלומר

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

□

כלומר  $f$  מקיימת את משוואות קושי-רימן ולכן הולומורפית.

## שאלה 2

תהינה  $f(z) = (z-1)^2$  ו- $\gamma$  מסילה המתארת מעגל ברדיוס 1 סביב הראשית.

### סעיף א'

נחשב את  $L(f \circ \gamma)$ .

פתרון: נכתוב פרמטריזציה של  $\gamma$

$$\gamma(t) = \cos(t) + i \sin(t) = e^{it}$$

עבור  $t \in [0, 2\pi]$

בהרצאה הגדרנו אורך של מסילה להיות

$$L(f \circ \gamma) = \int_a^b |f'(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt$$

כאשר  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  ולכן

$$\begin{aligned} L(f \circ \gamma) &= \int_a^b |f'(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt = \int_0^{2\pi} |(-2(1-z)) \circ (\cos(t) + i \sin(t))| |i \cos(t) - \sin(t)| dt \\ &= \int_0^{2\pi} |-2(1 - \cos(t) - i \sin(t))| |i \cos(t) - \sin(t)| dt = 2 \int_0^{2\pi} |1 - \cos(t) - i \sin(t)| |i \cos(t) - \sin(t)| dt \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos(t) - i \sin(t))(1 - \cos(t) + i \sin(t))} \sqrt{(i \cos(t) - \sin(t))(-i \cos(t) - \sin(t))} dt \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2 \cos(t)} dt = 2 \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos(t))} dt = 2 \int_0^{2\pi} \sqrt{2 \left(2 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)} dt = 4 \int_0^{2\pi} \left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right| dt \end{aligned}$$

מהיות  $t \in [0, 2\pi]$  אז  $\frac{t}{2} \in [0, \pi]$  ובקטע זה  $\sin\left(\frac{t}{2}\right) \geq 0$  ולכן

$$2 \int_0^{2\pi} \left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right| dt = 4 \int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt = \left[4 \cdot \left(-2 \cos\left(\frac{t}{2}\right)\right)\right]_{t=0}^{t=2\pi} = -8 \cos(\pi) + 8 \cos(0) = (-8) \cdot (-1) + 8 \cdot 1 = 16$$

נשים לב שיותר קצר לפתור את זה עם הביטוי בצורת אקספוננט:

$$\begin{aligned} L(f \circ \gamma) &= \int_a^b |f'(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt = \int_0^{2\pi} |(-2(1-z)) \circ e^{it}| |ie^{it}| dt = 2 \int_0^{2\pi} |1 - e^{it}| dt \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos(t))^2 + \sin^2(t)} dt = 2 \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2 \cos(t) + \cos^2(t) + \sin^2(t)} dt = 2 \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2 \cos(t)} dt \end{aligned}$$

□

המשך החישוב זהה.

### סעיף ב'

נראה שלא משנה באיזו פרמטריזציה של  $\gamma$  נשתמש עבור החישוב בסעיף א'.

פתרון: בסעיף א' בחרנו פרמטריזציה של  $\gamma$  המתקדמת נגד כיוון השעון, כאשר הפרמטריזציה עם כיוון השעון נתונה על-ידי  $\gamma(t) = e^{-it}$ .

במקרה שלנו זה לא משנה בגלל שהערך המוחלט במקרה זה נשאר 1:

$$\begin{aligned} L(f \circ \gamma^-) &= \int_0^{2\pi} |(-2(1-z)) \circ e^{-it}| |-ie^{-it}| dt = 2 \int_0^{2\pi} |1 - e^{-it}| dt = 2 \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos^2(t))^2 + (-\sin(t))^2} \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2 \cos(t) + \cos^2(t) + \sin^2(t)} dt = 2 \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2 \cos(t)} dt \end{aligned}$$

□

## סעיף ג'

נחשב את השטח של  $f(\{z \mid |z-1| < 1\})$ .

פתרון: נסמן  $u = 1 - z$  ולכן  $D = \{z \mid |z-1| < 1\} = \{u \mid |u| < 1\}$  ו- $w = u^2 \implies f(z) = (1-z)^2$  על דיסק היחידה.

כדי לפשט את האינטגרל, בדרך-כלל במשפט החלפת משתנה אנחנו עושים קורדינאטות פולאריות סביב הראשית אך הפעם נעשה קורדינאטות מוזוות

ונניח ש- $z = 1$  היא הראשית שלנו ולכן  $z - 1 = re^{i\theta}$  וכן  $0 \leq r < 1$  (בגלל רדיוס הדיסק כמובן) וכן  $r^2 = |1 - z|^2$  ו- $0 \leq \theta < 2\pi$ .

נשים לב ש- $D$  קבוצה יפה מספיק (היא פתוחה ולכן מדידה) אז

$$\text{Area}(D) = \iint_D |f'(w)|^2 dD = \iint_D 4|z-1|^2 dD \stackrel{\text{משפט החלפת משתנה}}{=} \int_0^{2\pi} \int_0^1 4r^2 \cdot r dr d\theta = 4 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^3 dr = 4 \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} d\theta = 2\pi$$

□

### שאלה 3

יהיו  $G \subseteq \mathbb{C}$  תחום ותהיינה  $f, g : G \rightarrow \mathbb{C}$  פונקציות רציפות ו- $\gamma \in C^1([a, b], G)$  מסילה.

#### סעיף א'

נוכיח

$$\int_{\gamma} (f + g) d\gamma = \int_{\gamma} f d\gamma + \int_{\gamma} g d\gamma$$

הוכחה:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} (f + g) d\gamma &= \int_a^b (f + g)(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_a^b (f(\gamma(t)) + g(\gamma(t))) \gamma'(t) dt = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) + g(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \\ &\stackrel{(*)}{=} \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt + \int_a^b g(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_{\gamma} f d\gamma + \int_{\gamma} g d\gamma \end{aligned}$$

□

כאשר האדטיביביות שהשתמשנו בה ב- $(*)$  זה אדטיביביות האינטגרל מאינפיניט.

#### סעיף ב'

נוכיח שאם  $\lambda \in \mathbb{C}$  אז

$$\int_{\gamma} \lambda f d\gamma = \lambda \int_{\gamma} f d\gamma$$

הוכחה:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \lambda f d\gamma &= \int_a^b (\lambda f)(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_a^b (\lambda f(\gamma(t))) \gamma'(t) dt = \int_a^b \lambda (f(\gamma(t)) \gamma'(t)) dt \stackrel{(*)}{=} \lambda \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \\ &= \lambda \int_{\gamma} f d\gamma \end{aligned}$$

□

כאשר האדטיביביות שהשתמשנו בה ב- $(*)$  זה לינאריות האינטגרל מאינפיניט.

#### סעיף ג'

נוכיח שאם  $\beta$  היא המסילה שמתקדמת בכיוון ההפוך מ- $\gamma$  (כלומר,  $\beta(t) = \gamma(a + b - t)$ ) אז

$$\int_{\beta} f d\beta = - \int_{\gamma} f d\gamma$$

הוכחה: נשים לב

$$\beta(a) = \gamma(a + b - a) = \gamma(b), \quad \beta(b) = \gamma(a + b - b) = \gamma(a)$$

אז

$$\int_{\beta} f d\beta = \int_a^b f(\beta(t)) \beta'(t) dt$$

אבל  $\beta(t) = \gamma(a + b - t)$  ולכן מכלל שרשרת

$$\beta'(t) = \frac{d}{dt}(\gamma(a + b - t)) \stackrel{u=a+b}{=} \gamma'(u) \cdot \frac{du}{dt} = \gamma'(a + b - t) \cdot (-1) = -\gamma'(t)(a + b - t)$$

ולכן

$$\begin{aligned}
\int_{\beta} f d\beta &= \int_a^b f(\beta(t))\beta'(t)dt = \int_a^b f(\gamma(a+b-t)) \cdot (-\gamma'(t)(a+b-t))dt \\
&\stackrel{\text{סעיף ב'}}{=} - \int_a^b f(\gamma(a+b-t)) \cdot (\gamma'(t)(a+b-t))dt \\
&\stackrel{\substack{u=a+b-t \\ \frac{du}{dt}=-1}}{=} - \int_b^a f(\gamma(u))\gamma'(u)(-du) \stackrel{\text{סעיף ב'}}{=} \int_b^a f(\gamma(u))\gamma'(u)du \\
&\stackrel{\text{היפוך תחום אינטגרציה}}{=} - \int_a^b f(\gamma(u))\gamma'(u)du = - \int_{\gamma} f d\gamma
\end{aligned}$$

□

## שאלה 4

נחשב את  $\int_{\gamma} f d\gamma$  כאשר  $f(z) = \log(|z|) + i \operatorname{Arg}(z)$  ו- $\gamma$  מציירת מעגל ברדיוס 2 סביב הראשית, נגד כיוון השעון וכאשר  $\operatorname{Arg}$  הוא הענף הראשי של הארגומנט.

מהיות  $\operatorname{Arg}$  לא רציפה בקרן  $(-\infty, 0]$  נגדיר בשביל תרגיל זה  $\forall x < 0, \operatorname{Arg}(x) = \pi$ .

פתרון:

□

## שאלה 5

נמצא בשיטה שראינו בהרצאה צמודה הרמונית לפונקציה  $f(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$  בדיסק  $B_1(0)$ .  
פתרון:

□