פתרון מטלה 02 — מבנים אלגבריים 2, 80446

8 באפריל 2025

שאלה 1

יהי $K \subseteq \mathbb{C}$ שדה שאינו מוכל ב־$\mathbb{R}$. נראה שלא בהכרח שמתקיים $[K : K \cap \mathbb{R}] = 2$.

הוכחה: נבחן את $K = \mathbb{Q}\left(i, \sqrt[4]{2}\right)$ ובבירור $K \not\subseteq \mathbb{R}$, אבל $\sqrt[4]{2} \in K \implies \sqrt{2} = \left(\sqrt[4]{2}\right)^2 \in \mathbb{R}$, ולכן $K \cap \mathbb{R} = Q\left(\sqrt{2}\right)$. נשאר לחשב את $[K : K \cap \mathbb{R}] = \left[K : \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)\right]$.

היות ו־$i \in \mathbb{Q}$ נובע שנצטרך להוסיף ל־$\left[K : \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)\right]$ 2. נראה כי $\sqrt[4]{2} \notin \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$ ונמצא את הפולינום המינימלי של $\sqrt[4]{2}$ מעל $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$:

נראה כי $\sqrt[4]{2} \notin \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$: נניח שכן, ולכן $\sqrt[4]{2} = \left\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\right\}$, אז מתקיים

$$\sqrt[4]{2} = a + b\sqrt{2} \iff \sqrt{2} = \left(a + b\sqrt{2}\right)^2 = a^2 + 2ab\sqrt{2} + 2b^2$$

ולכן

$$a^2 + 2b^2 = 0 \iff a = 0 \wedge b = 0$$
$$2ab = 1 \iff ab = \frac{1}{2}$$

וקיבלנו כמובן סתירה ולכן $\sqrt[4]{2} \notin \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$.

אנחנו כבר יודעים כי הפולינום המינימלי ב־$\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$ הוא $x^2 - \sqrt{2}$ והוא כמובן מדרגה 2.

מכפליות הדרגה קיבלנו בסה"כ ש־$\left[K : \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)\right] = 4$ ולכן תחת תנאי השאלה לא בהכרח שמתקיים $[K : K \cap \mathbb{R}] = 2$. $\square$

שאלה 2

סעיף א'

עבור $\alpha=\sqrt{3}+\sqrt{7}i\in\mathbb{C}$, נמצא את $f_{\alpha/\mathbb{Q}}(x)$, הפולינום המינימלי של α מעל $\mathbb{Q}$.

פתרון:

$$\alpha=\sqrt{3}+\sqrt{7}i\iff\alpha-\sqrt{3}=\sqrt{7}i\iff\left(\alpha-\sqrt{3}\right)^2=-7\iff\left(\alpha-\sqrt{3}\right)^2+7=0\iff\alpha^2-2\sqrt{3}\alpha+10=0$$

$$\iff a^2+10=2\sqrt{3}\alpha\iff\left(a^2+10\right)^2=\left(2\sqrt{3}\alpha\right)^2\iff\alpha^4+20\alpha^2+100=12\alpha^2\iff\alpha^4+8\alpha^2+100=0$$

ולכן נסמן $f_{\alpha/\mathbb{Q}}(x)=x^4+8x^2+100$ ונראה כי הוא אכן הפולינום המינימלי של α מעל $\mathbb{Q}$.

על־מנת שנגיד כי $f_{\alpha/\mathbb{Q}}(x)$ הוא הפולינום המינימלי, עלינו להראות כי מתקיימים שלושת התנאים הבאים:

1. צריך להתקיים $f_{\alpha/\mathbb{Q}}(\alpha)=0$, ואכן:

$$\alpha^4+8\alpha^2+100=0\implies\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}i\right)^4+8\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}i\right)^2+100=16-\cancel{16\sqrt{3}\sqrt{7}i}-84-32+\cancel{16\sqrt{3}\sqrt{7}i}+100=0$$

2. הוא אכן פולינום מתוקן – המקדם של x^4 הוא 1
3. נשאר להראות שהוא אי־פריק: בשביל זה נחשב את $\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt{3},\sqrt{7}i\right):\mathbb{Q}\right]$:

$$\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt{3},\sqrt{7}i\right):\mathbb{Q}\right]=\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt{3},\sqrt{7}i\right):\mathbb{Q}\left(\sqrt{3}\right)\right]\cdot\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt{3}\right):\mathbb{Q}\right]$$

את $\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt{3}\right):\mathbb{Q}\right]$ אנחנו יודעים לחשב שכן הפולינום המינימלי במקרה זה הוא x^2-3 ולכן $\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt{3}\right):\mathbb{Q}\right]=2$.
גם את $\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt{3},\sqrt{7}i\right):\mathbb{Q}\left(\sqrt{3}\right)\right]$ אנחנו יודעים לחשב: ראינו שהפולינום x^2+7 ללא שורש וללא פירוק ב־$\mathbb{Q}\left(\sqrt{3}\right)$ ולכן זהו הפולינום המינימלי של $\sqrt{7}i$ מעל $\mathbb{Q}\left(\sqrt{3}\right)$ והוא $\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt{3},\sqrt{7}i\right):\mathbb{Q}\left(\sqrt{3}\right)\right]=2$.
ולכן

$$\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt{3},\sqrt{7}i\right):\mathbb{Q}\right]=\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt{3},\sqrt{7}i\right):\mathbb{Q}\left(\sqrt{3}\right)\right]\cdot\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt{3}\right):\mathbb{Q}\right]=4$$

ומכיוון שהפולינום שמצאנו הוא ממעלה 4 ומקיים את התנאים לעיל, מיחידות הפולינום המינימלי נוכל להסיק כי בהכרח הפולינום שמצאנו הוא אי-פריק.

ולכן $f_{\alpha/\mathbb{Q}}(x)=x^4+8x^2+100$ הוא הפולינום המינימלי הנדרש. $\square$

סעיף ב'

יהי $d \in \mathbb{N}$ מספר טבעי שאינו חזקה שלילית של מספר רציונלי ויהיו $0 \neq s, t \in \mathbb{Q}$.
נסמן ב-$\alpha = \sqrt[3]{d} \in \mathbb{C}$ את אחד השורשים השלישיים של d.
עבור $\beta = s\alpha + t\alpha^2$ נביע את הפולינום המינימלי של $f_{\beta/\mathbb{Q}}$ של β מעל $\mathbb{Q}$ באמצעות d, s, t.

פתרון: $\square$

שאלה 3

סעיף א'

יהי $f \in \mathbb{Q}[x]$ ונסמן $f(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$.
נראה שאם $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ שורש של f אז $s \mid a_n$ וגם $r \mid a_0$.

הוכחה: $\square$

סעיף ב'

נסביר כיצד להשתמש בסעיף הקודם ובשאלה 4 מהתרגיל הקודם כדי לבדוק ש־$f \in \mathbb{Q}[x]$ נתון מדרגה 2 או 3 הוא אי־פריק.
נבצע בדיקה זו לפולינומים הבאים:
1. $f(x) = x^3 - dx + 2$
2. $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 3$

פתרון: $\square$

שאלה 4

תהיי E/F הרחבת שדות ויהי $f \in F[x]$ אי־פריק כך ש־$L = F[x]/(f)$ הוא שדה.
נסמן ב־α את התמונה של x ב־L, משמע $a = x + (f) \in L$.
נניח שנתון F־הומומורפיזם $\varphi : L \to E$ משמע הומומורפיזם המקיים $\varphi \restriction_F = \mathrm{id}_F$.

סעיף א'

נוכיח ש־$\varphi(\alpha) \in E$ הוא שורש של $f \in F[x] \subseteq E[x]$.

הוכחה: $\square$

סעיף ב'

נוכיח שאם $\psi : L \to E$ הוא F־הומומורפיזם נוסף כך ש־$\psi(\alpha) = \varphi(\alpha)$ אזי $\psi = \varphi$.

הוכחה: $\square$

שאלה 5

בשאלה זו נבנה הרחבת שדות $E/\mathbb{Q}$ כך ש־$[E:\mathbb{Q}]=3$ אבל אין $d\in\mathbb{Q}$ כך ש־$E\backsimeq\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{d}\right)$.

סעיף א'

יהי $d\in\mathbb{Q}$ שאינו חזקה שלישית של מספר רציונלי. נוכיח שקיים הומומורפיזם $\varphi:\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{d}\right)\to\mathbb{C}$ כך ש־$\operatorname{Im}(\varphi)\nsubseteq\mathbb{R}$.

הוכחה: $\square$

סעיף ב'

יהי $f\in\mathbb{Q}[x]$ אי־פריק מדרגה 3 כך ששלושת השורשים של f הם ממשיים ואי־רציונליים.
נראה ש־$L=\mathbb{Q}[x]/(f)$ שדה כך ש־$[L:\mathbb{Q}]=3$ ושאם $\varphi:L\to\mathbb{C}$ הומומורפיזם אזי $\operatorname{Im}(\varphi)\subseteq\mathbb{R}$.

הוכחה: $\square$

סעיף ג'

נוכיח ש־$f(x)=x^3-4x+2$ פולינום המקיים את התנאים של הסעיף הקודם ונסיק ש־$E=\mathbb{Q}[x]/(f)$ הרחבה מדרגה 3 של $\mathbb{Q}$ שאינה איזומורפית לשדה מהצורה $\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{d}\right)$.

הוכחה: $\square$