פתרון מטלה 06 — תורת המידה, 80517

3 בדצמבר 2025

שאלה 1

בתרגול 5 דיברנו על קבוצת השליש האמצעי של קנטור $C \subset \mathbb{R}$ המוגדרת על־ידי $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ כאשר

$$C_0 = [0,1], \qquad C_{n+1} = \frac{C_n}{3} \bigcup \left(\frac{2}{3} + \frac{C_n}{3} \right)$$

מכאן נובע שלכל n נוכל לרשום את C_n כאיחוד זר של קטעים סגורים מאורך $\frac{1}{3^n}$ ונקרא לקבוצת קטעים זו $\mathcal{T}_n$.
נזכור גם שהפיתוח הטרינרי (פיתוח בבסיס 3) של כל מספר $x \in C$ הוא מהצורה

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}, \ \forall k, \ a_k \in \{0,2\}$$

סעיף א'

נגדיר

$$E_0 = \{0\}, \qquad E_n = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^k} \mid a_k \in \{0,2\} \right\}$$

ונוכיח כי לכל n

$$E_{n+1} = \frac{E_n}{3} \bigcup \left(\frac{2}{3} + \frac{E_n}{3} \right)$$

עוד נסיק כי אם לכל n, E_n היא קבוצת הקצוות השמאליים של הקטעים ב־$\mathcal{T}_n$ שאיחודים הוא C_n.
הוכחה:

$\square$

שאלה 2

יהי X מרחב האוסדרוף קומפקטי מקומית ו־σ־קומפקטי ונניח כי $\varphi : C_C(X) \to \mathbb{C}$ פונקציונל לינארי חיובי.
נסמן M ו־μ ה־σ־אלגברה ומידה שקיומם נובע ממשפט ההצגה של ריז.

סעיף א'

נראה כי אם $E \in \mathcal{M}$ ו־$\varepsilon > 0$, אז קיימת F סגורה ו־V פתוחה כך שמתקיים

$$F \subseteq E \subseteq V, \qquad \mu(v \setminus F) < \varepsilon$$

הוכחה: תהיי $E \in \mathcal{M}$ ויהי $\varepsilon > 0$.
μ מידת רדון ולכן מקיימת רגולריות חיצונית, כלומר קיימת V פתוחה עם $E \subseteq V$ כך שמתקיים

$$\mu(V) < \mu(E) + \frac{\varepsilon}{3}$$

X הוא σ־קומפקטי, כלומר הוא איחוד בן־מנייה של קבוצות קומפקטיות, בפרט נקבל

$$K_1 \subseteq K_2 \subseteq \cdots$$

כך שכל K_n קומפקטי ומתקיים $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ ולכן בפרט ניתן לכתוב $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E \cap K_n)$ וזה כמובן איחוד עולה ולכן מרציפות המידה

$$\mu(E) = \lim_{n\to\infty} \mu(E \cap K_n)$$

נקבע N כך שמתקיים

$$\mu(E) - \mu(E \cap K_N) < \frac{\varepsilon}{3}$$

מכך ש־$E \cap K_N \subseteq K_N$ ו־$\mu(K_N) < \infty$ מהקומפקטיות, אז מהרגולריות פנימית של קבוצות ממידה סופית יש $F \subseteq E \cap K_N$ כאשר F קומפקטית ומתקיים

$$\mu((E \cap K_N) \setminus F) < \frac{\varepsilon}{3}$$

F קומפקטית ולכן סגורה ומצאנו $F \subseteq E \subseteq V$, נשאר לחשב את $\mu(V \setminus F)$:

$$\mu(V \setminus F) = \mu((V \setminus E) \cup (E \setminus F)) \le \mu(V \setminus E) + \mu(E \setminus F)$$

נחשב כל מידה בנפרד

$$V = E \uplus (V \setminus E) \Longrightarrow \mu(V) = \mu(E) + \mu(V \setminus E) \Longrightarrow \mu(V \setminus E) = \mu(V) - \mu(E) < \frac{\varepsilon}{3}$$

באופן דומה

$$E \setminus F = E \setminus (E \cap K_N) \cup (E \cap K_N) \setminus F$$

$$\Longrightarrow \mu(E \setminus F) \le \mu(E \setminus (E \cap K_N)) + \mu((E \cap K_N) \setminus F) = \mu(E) - \mu(E \cap K_N) + \mu((E \cap K_N) \setminus F) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3}$$

כלומר

$$\mu(V \setminus F) \le \mu(V \setminus E) + \mu(E \setminus F) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

$\square$

סעיף ב'

נראה כי אם $E \in \mathcal{M}$ אז יש $A, B \subseteq X$ כך ש־A היא F_σ ו־B היא G_σ (F_σ איחוד של אוסף בן־מנייה של קבוצות סגורות; G_σ חיתוך בן־מנייה של קבוצות פתוחות) המקיימות

$$A \subset E \subset B, \qquad \mu(B \setminus A) = 0$$

הוכחה: לכל $n \in \mathbb{N}$ נגדיר $A_n \subset E \subset B_n$ כבסעיף הקודם המקיימות

$$\mu(B_n \setminus A_n) \leq \frac{1}{n}$$

ונגדיר

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \qquad B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$$

ומהגדרת μ כמידת רדון ומרציפות המידה

$$\mu(B \setminus A) = \lim_{n \to \infty} \mu(B_n \setminus A_n) = 0$$

$\square$

שאלה 3

בהינתן X מרחב האוסדרוף קומפקטי, נסמן ב־$P(X)$ את קבוצת מידות ההסתברות על $(X, \mathcal{B}(X))$.
לכל $f \in C(X)$ נגדיר את $\|f\|_\infty = \max_{x\in X}|f(x)|$.
תהיי $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ סדרה צפופה של פונקציות ב־$C(X)$.
ראינו שהפונקציה $d : P(X) \times P(X) \to \mathbb{R}$ המוגדרת על־ידי

$$d(\mu, v) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n\|f_n\|_\infty}\left|\int f_n d\nu - \int f_n d\mu\right|$$

מהווה מטריקה.

סעיף א'

נזכיר כי נאמר $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$ ובמילים ש־μ_n מתכנסת בטופולוגיה החלשה־* ל־μ אם לכל $f \in C(X)$ מתקיים

$$\int f d\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int f d\mu$$

נראה כי התכנסות חלשה־* שקולה להתכנסות במטריקה d.
הוכחה: בכיוון הראשון, נניח $d(\mu_k, \mu) \to 0$ ונראה כי $\mu_k \xrightarrow{*} \mu$.
יהיו $\varepsilon > 0, f \in C(X)$. מהצפיפות של $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ ב־$C(X)$ נובע שיש f_m כך שמתקיים $\|f - f_m\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$.
כעת, לכל $\nu \in P(X)$ מתקיים $\int(f - f_m)d\mu \le \|f - f_m\|_\infty$: נבחין שמתקיים

$$(\star)\left|\int(f - f_m)d\mu\right| \le \int|f - f_m|d\mu, \qquad (\star\star)|(f - f_m)(x)| \le \|f - f_m\|_\infty$$

כאשר $(\star)$ הוא אי־שיוויון האינטגרלי ו־$(\star\star)$ מהגדרה, ומשילובם נקבל

$$\int|f - f_m|d\mu \le \int\|f - f_m\|_\infty d\mu = \|f - f_m\|_\infty \int 1 d\mu \underset{\text{מידת הסתברות}}{=} \|f - f_m\| \cdot \nu(X) = \|f - f_m\|_\infty \cdot 1 = \|f - f_m\|_\infty$$

$$\Longrightarrow \left|\int(f - f_m)d\mu\right| \le \|f - f_m\|_\infty$$

אז לכל k נקבל

$$\left|\int f d\mu_k - \int f d\mu\right| \le \left|\int(f - f_m)d\mu_k\right| + \left|\int f_m d\mu_k - \int f_m d\mu\right| + \left|\int(f_m - f)d\mu\right|$$

$$\le 2\|f - f_m\|_\infty + \left|\int f_m d\mu_k - \int f_m d\mu\right|$$

$$\underset{\text{מהמטריקה}}{\le} 2\|f - f_m\|_\infty + 2^m\|f_m\|_\infty d(\mu_k, \mu)$$

אבל מההנחה $d(\mu_k, \mu) \to 0$ ולכן יש K כך שלכל $k \ge K$ מתקיים

$$2^m\|f_m\|_\infty d(\mu_k, \mu) < \frac{\varepsilon}{3}$$

ולכן

$$\left|\int f d\mu_k - \int f d\mu\right| \le 2\|f - f_m\|_\infty + 2^m\|f_m\|_\infty d(\mu_k, \mu) < \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

ולכן $\int f d\mu_k \to f d\mu$ לכל $f \in C(X)$, כלומר $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$.
מהצד השני, אם נניח $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$, אז עבור n מקובע מתקיים

$$\left|\int f_n d\mu_k - \int f_n d\mu\right| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

נגדיר

$$t_{n,k} := \frac{1}{2^n \|f_n\|_\infty} \left| \int f_n d\mu_k - \int f_n d\mu \right|$$

אז לכל n מקובע, $t_{n,k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ ובפרט

$$t_{n,k} \leq \frac{2\|f_n\|_\infty}{2^n \|f_n\|_\infty} = \frac{2}{2^n}$$

אז בפרט הטור

$$d(\mu_k, \mu) = \sum_{n=1}^{\infty} t_{n,k} \xrightarrow[k\to\infty]{} \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$$

כלומר $d(\mu_k, \mu) \to 0$. $\square$

סעיף ב'

נשים לב שכל $x \in X$ משרה מידת הסתברות טבעית והיא λ_x.
נראה כי ההעתקה $X \to P(X)$ הנתונה על־ידי $x \mapsto \delta_x$ היא רציפה.
הוכחה: יהיו $x_0 \in X, \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ כך ש־$x_n \to x_0$ ונרצה להראות $\delta_{x_n} \to \delta_{x_0}$.
מהסעיף הקודם מספיק להראות ש־$\delta_{x_n} \xrightarrow{*} d_x$ תהיי $f \in C(X)$ ולכן

$$\int f d\delta_{x_n} = f(x_n)$$

f רציפה ולכן אם $x_n \to x_0$ אז $f(x_n) \to f(x_0)$ ולכן $\int f d\delta_{x_n} \to \int f d\delta_{x_0}$ ולכן היא מתכנסת גם ב־d וקיבלנו רציפות. $\square$

שאלה 4

נניח כי X מרחב האוסדרוף קומפקטי מקומית.

סעיף א'

נראה כי $P(X)$ קמורה, כלומר שלכל $\mu,\nu \in P(X)$ ו־$t \in [0,1]$ המידה $t\mu + (1-t)\nu \in P(X)$.

הוכחה: תהיינה $\mu,\nu \in P(X)$ ויהי $t \in [0,1]$ ונסמן $\lambda = t\mu + (1-t)\nu$ ונראה ש־$\lambda \in P(X)$:

$$\lambda(X) = t\mu(X) + (1-t)\nu(X) = t \cdot 1 + (1-t) \cdot 1 = 1$$

כמובן ש־λ אי־שלילית כי אם A מדידה, מהיות $t, (1-t) \geq 0$ אז

$$\lambda(A) = \lambda \underbrace{\mu(A)}_{\geq 0} + (1-t)\underbrace{\nu(A)}_{\geq 0} \geq 0$$

אנחנו גם צריכים להראות ש־λ היא עדיין מידת רדון, אבל זה נובע מכך שאם נסמן $\mathcal{M}(X)$ כקבוצת כל מידות רדון על X נקבל שזה מרחב וקטורי: הרי שחיבור של מידות הוא עדיין מידה ומהגדרת אינפימה וסופרמה על סכום משמר רגולריות פנימית וחיצונית: נראה לחיצונית, לפנימית זה באופן דומה

$$(\mu+\nu)(A) = \inf_{U \supset A}(\mu(U) + \nu(U)) = \inf_{U \supset A}(\mu+\nu)(U)$$

נשאר רק להראות סגירות לכפל בסקלר $\alpha \in \mathbb{R}$: אם $0 \leq \alpha$ זה נובע מהחיבור, אם $\alpha < 0$ זה גם פשוט נובע מהגדרה של אינפימה וסופרמה

$$\inf \alpha\mu(U) = \alpha \sup \mu(U), \qquad \sup \alpha\mu(U) = \alpha \inf \mu(U)$$

אז $\mathcal{M}(X)$ זה מרחב וקטורי ולכן גם λ מידת רדון. $\square$

סעיף ב'

נניח כי $T : X \to X$ רציפה ונראה כי אם יש שתי מידות הסתברות T־אינווריאנטיות μ,ν שונות, אז יש אינסוף כאלו.

הוכחה: נניח שיש μ,ν שהן T־אינווריאנטיות, כלומר לכל $E \in \mathcal{B}(X)$ מתקיים

$$\mu(E) = \mu(T^{-1}(E)), \qquad \nu(E) = \nu(T^{-1}(E))$$

מהסעיף הקודם, עבור $t \in [0,1]$, אם נגדיר $\lambda := \mu t + (1-t)\nu \in P(X)$ ומתקיים

$$\lambda(T^{-1}(E)) = t\mu(T^{-1}(E)) + (1-t)\nu(T^{-1}(E)) = t\mu(E) + (1-t)\nu(E) = \lambda(E)$$

ולכן λ גם היא T־אינווריאנטיות, בפרט נקבל

$$|\{\lambda_t := \mu t + (1-t)\nu \mid t \in [0,1]\}| = 2^{\aleph_0}$$

כלומר, יש אינסוף מידות כאלו. $\square$

סעיף ג'

ניקח $X = [0,1]$ עם הטופולוגיה הסטנדרטית ואת $T(x) = x^2$.

נתאר את כל מידות ההסתברות ה־T־אינווריאנטיות.

הוכחה: יהי $\varepsilon \in (0,1]$ ונסמן $E = [0,\varepsilon]$ ותהיי μ מידת הסתברות שהיא T־אינווריאנטית.

באינדוקציה על n עבור $n = 1$ זה בסיס האינדוקציה ונניח כי הטענה נכונה עבור n ונראה עבור $n+1$

$$\mu\big(T^{-(n+1)}(E)\big) = \mu(T^{-1}(T^{-n}(E))) \underset{F:=T^{-n}(E)}{=} \mu(T^{-1}(F)) \underset{\text{בסיס האינדוקציה}}{=} \mu(F) = \mu(T^{-n}(E)) \underset{\text{הנחת האינדוקציה}}{=} \mu(E)$$

כעת, מהגדרת T נקבל

$$\mu(E) = \mu(T^{-1}(E)) = \mu(T^{-n}(E)) = \mu\Big(\Big[0, \varepsilon^{\frac{1}{2^n}}\Big]\Big) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu([0,1]) = 1$$

כלומר אלו בידיוק $\mu \in \{\delta_0, \delta_1\}$ (שכן לא קיים עוד $x \in X$ כך ש־$T(x) = x^2 = x$). $\square$