פתרון מטלה 10 — תורת הקבוצות, 80200

20 ביוני 2025

שאלה 1

תהיי X קבוצה.

סעיף א'

נוכיח ש־X טרנזיטיבית אם ורק אם $X \subseteq \mathcal{P}(X)$.

הוכחה: $\Leftarrow$ נניח כי X טרנזטיבית ונרצה להראות ש־$X \subseteq \mathcal{P}(X)$.

יהי $x \in X$. מהגדרת הטרנזטיביות, מתקיים $x \subseteq X$ ולכן מהגדרת קבוצת החזקה $x \in \mathcal{P}(X)$ ובפרט מהגדרת תת־קבוצה מתקיים $x \subseteq \mathcal{P}(X)$.

$\Rightarrow$ נניח שמתקיים $X \subseteq \mathcal{P}(X)$ ונראה ש־X טרנזטיבית.

יהי $X \subseteq \mathcal{P}(A)$ ויהי $x \in X$. מהגדרת תת־הקבוצה מתקיים $x \in \mathcal{P}(X)$ ומהגדרת קבוצת החזקה מתקיים $x \subseteq X$ וזה נכון לכל $x \in X$, וזו בידיוק ההגדרה של טרנזטיביות (קבוצה x תקרא טרנזטיבית אם לכל $y \in x$ ולכן $z \in y$ מתקיים $z \in x$). $\square$

סעיף ב'

נוכיח שאם X טרנזטיבית אז $\mathcal{P}(X)$ טרנזטיבית.

הוכחה: יהי $Y \in \mathcal{P}(X)$ ולכן $Y \subseteq X$.

אז לכל $x \in Y$ מתקיים $x \in X$ ולכן $x \subseteq X$ – משמע $x \in \mathcal{P}(X)$ כי X טרנזטיבית.

זה נכון לכל $x \in Y$ ולכן $Y \subseteq \mathcal{P}(X)$, וזו בידיוק הגדרת הטרנזטיביות ולכן $\mathcal{P}(X)$ טרנזטיבית. $\square$

סעיף ג'

נמצא את כל הקבוצות X כך ש־$\mathcal{P}(X)$ סודר.

הוכחה: ראשית, ברור כי עבור $X = \emptyset, \mathcal{P}(X) = \{\emptyset\}$ וראינו בהרצאה שהקבוצה הריקה היא סודר, וראינו גם כי כל $n \in \omega$ הוא סודר (כי ω הוא סודר וכל איבריו הם סודרים).

כעת, ניזכר שקבוצה X תיקרא סודר אם

1. הקבוצה טרנזטיבית
2. $\langle X, \in \rangle$ הוא סדר טוב

נבחן את המקרה של $X = \{\emptyset\}$ ובמקרה זה מתקיים $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, היות ו־$X$ טרנזטיבית אז במקרה זה גם $\mathcal{P}(X)$ טרנזטיבית וברור שהיא סדורה היטב.

נבחן מה קורה עבור $X = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$: במקרה זה מתקיים $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ ונראה שזה איננו סודר.

נבחן את $A = \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ ואת $B = \{\{\emptyset\}\}$, מתקיים $A \notin B$ אבל גם מתקיים $B \neq A$ וגם $B \notin A$ ולכן זה איננו סדר קווי ובפרט לא סדר טוב.

נטען אם כך שלכל קבוצה X כך שמתקיים $|X| > 2$, אז $\mathcal{P}(X)$ הוא לא סדר טוב, ולכן לא סודר.

מכך ש־$|X| > 2$, קיימים $X_1, X_2 \in X$ כך ש־$X_1 \neq X_2$ וכמובן $\{X_1\}, \{X_2\} \in \mathcal{P}(X)$ אבל גם מתקיים

$$\{X_1\} \neq \{X_2\} \wedge \{X_1\} \notin \{X_2\} \wedge \{X_1\} \not\ni \{X_2\}$$

משמע זה לא סדר קווי ובפרט לא טוב ולא סודר.

ולכן רק $X = \emptyset, X = \{\emptyset\}$ עבורם $\mathcal{P}(X)$ סודר. $\square$

שאלה 2

תהיי X קבוצה שאיבריה הם קבוצות טרנזטיביות.

סעיף א'

נוכיח ש־$\bigcup X$ קבוצה טרנזטיבית.

הוכחה: נניח כי $X \neq \emptyset$.

נתחיל מלהוכיח טענה: תהיי $A \in X$, זוהי קבוצה טרנזטיבית מהנתון ונראה כי $\bigcup A \subseteq A$.

בשאלה הקודמת ראינו ש־$x \in \mathcal{P}(A) \iff x \subseteq A$ ולכן $\forall x \in A \Rightarrow x \in \mathcal{P}(A)$ ולכן $\forall x \in A \Rightarrow x \subseteq A$.

זה אומר שמתקיים $A = \bigcup_{x \in A} x$ מהגדרה ולכן $\bigcup A \subseteq A$.

נשים לב שזה גורר גם ש־A טרנזטיבית (זה בעצם אם ורק אם): יהי $x \in A$ אז $x \subseteq \bigcup A \subseteq A$ ומהגדרת האיחוד קיבלנו ש־$\forall x, x \in A \Rightarrow x \subseteq A$ וזו הגדרת הטרנזטיביות.

כעת, תהיי $x \in X$, היא טרנזטיבית ולכן מהטענה לעיל נקבל $\bigcup x \subseteq x$, נפעיל את פעולת האיחוד על שני־האגפים ונקבל $\bigcup\bigcup X \subseteq \bigcup X$ ומהטענה שראינו לעיל (מהכיוון השני) נקבל ש־$\bigcup X$ גם טרנזטיבית. $\square$

סעיף ב'

נוכיח ש־$\bigcap X$ קבוצה טרנזטיבית.

הוכחה: יהי $y \in \bigcap X$ משמע $\forall x \in X, y \in x$.

מתקיים גם $\forall x \in X, y \in x \Rightarrow y \subseteq x \Rightarrow y \subseteq \bigcap X$ משמע קיבלנו שהחיתוך הוא טרנזטיבי. $\square$

שאלה 3

תהיי X קבוצה ונניח ש-$R_1, R_2 \subseteq X \times X$ יחסים על X כך ש־R_2 יחס אנטי־רפלקסיבי וטרנזטיבי ו־R_1 מקיים שלכל $x, y \in X$ שונים מתקיים $(x, y) \in R_1$ או $(y, x) \in R_1$.

נוכיח שאם $R_1 \subseteq R_2$ אז מתקיים $R_1 = R_2$.

הוכחה: היות ו־R_2 הוא אנטי־רפלקסיבי זה גם אומר שכל $(x, y) \in R_2$ בהגדרה מתקיים $x \neq y$.

יהי $(x, y) \in R_2$ כך ש־$y \neq x$ ונרצה להראות ש־$(x, y) \in R_1$.

מהגדרת R_1 נובע כי אחד מהבאים מתקיים

1. $(x, y) \in R_1$ – אם זה המקרה, סיימנו
2. $(y, x) \in R_1$ – אם זה המקרה, נראה שנגיע לסתירה: נניח כי $(y, x) \in R_1$, מכך שמתקיים $R_1 \subseteq R_2$ נובע כי $(y, x) \in R_2$, ומהנתון R_2 טרנזטיבי ולכן $(x, x) \in R_2$ אבל R_2 הוא אנטי־רפלקסיבי ולכן $(x, x) \notin R_2$ וזאת סתירה.

   לכן האפשרות היחידה היא ש־$(x, y) \in R_1$.

הראינו שלכל $(x, y) \in R_2$ מתקיים $(x, y) \in R_1$ ולכן $R_2 \subseteq R_1$ ומהכלה דו־כיוונית נקבל $R_2 = R_1$. $\square$

שאלה 4

נניח $\left(Z, \underset{Z}{<}\right)$ סדר טוב ונניח F פונקציה שתחומה Z כך שלכל $z \in Z$ מתקיים ש־$F(z)$ סודר.

נגדיר $F(Z) = \bigcup_{z \in Z} F(z)$ ולכל $z \in F(z)$ נגדיר $T_z = \min_{\underset{Z}{<}} \{t \in Z \mid z \in F(t)\}$.

נגדיר סדר $\underset{F(Z)}{<}$ באופן הבא: עבור $x, y \in F(Z)$ מתקיים $y \underset{F(Z)}{<} x$ אם ורק אם $T_y < T_x$ או אם $T_y = T_x$ וגם $x \in y$.

נוכיח שהסדר $\underset{F(Z)}{<}$ מתלכד עם יחס השייכות על $F(Z)$.

הוכחה:

$\Longleftarrow$ נניח כי $y \underset{F(Z)}{<} x$ ונראה $x \in y$, נחלק למקרים

1. אם $T_y = T_x$ אז $y \underset{F(Z)}{<} x$ ולכן $x \in y$+
2. אם $T_y < T_x$ מהגדרה נקבל שמתקיים $x \in F(T_x)$ ו־$y \in F\left(T_y\right)$, ומהמינילמיות מתקיים $y \notin F(T_x)$ ומההנחה נקבל שמתקיים $x, y \in F\left(T_y\right)$ היות ו־$F(T_x)$ סודר, נובע כי $(F(T_x), \in)$ הוא סדר טוב ולכן סדר קווי וכל שני איברים ברי השוואה עם $\in$ ולכן $y = x$ או $x \in y$.
   כמובן שלא ייתכן ש־$y = x$ כי אז $T_y = T_x$ בסתירה לנתון ולא ייתכן ש־$x \in y$ כי $y \in F(T_x)$ בסתירה למינילמיות T_y ולכן בהכרח מתקיים $x \in y$.

$\Longrightarrow$ נניח כי $y \in x$ ונרצה להראות שמתקיים $y \underset{F(Z)}{<} x$ ושוב נחלק למקרים

1. אם $T_y = T_x$ יחד עם ההנחה נקבל ש־$y \underset{F(Z)}{<} X$ ויתקיים המקרה השני
2. אם $T_y < T_x$ מהגדרת $y \underset{F(Z)}{<} X$ נקבל את המקרה הראשון

הערה: סליחה, לא הצלחתי להבין איך ב־typst עושים ש־$\underset{F(Z)}{<}$ הוא מימין למטה מהצד ולא לגמרי למטה. $\square$