פתרון מטלה 11 — תורת ההסתברות 1, 80420

15 בינואר 2026

שאלה 1

תהיי $\lambda > 0$ ויהיו $X_n \sim Bin(\frac{\lambda}{n}, n)$. נוכיח כי $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} Poi(\lambda)$.

הוכחה: ראשית ניזכר שעבור $k \in \{0, ..., n\}$ מתקיים

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\dots\cdot(n-k+1)}{k!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!}\frac{n\cdot(n-1)\cdot\dots\cdot(n-k+1)}{n^k}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$$

נבחן מה קורה כאשר $n \to \infty$ לכל איבר במכפלה, כאשר $\frac{\lambda^k}{k!}$ נשאר קבוע:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot(n-1)\cdot\dots\cdot(n-k+1)}{n^k} = \lim_{n\to\infty}\prod_{j=0}^{k-1}\frac{n-j}{n} = \lim_{n\to\infty}\prod_{j=0}^{k-1}\left(1-\frac{j}{n}\right) = 1$$

כלומר

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(X_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

אבל ראינו שאם $X \sim Poi(\lambda)$ מתקיים

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

וזו בידיוק ההגדרה של התכנסות בהתפלגות. $\square$

שאלה 2

סעיף א'

הוכחה: $\square$

סעיף ב'

הוכחה: $\square$

שאלה 3

יהיו $X \sim Exp(2), Y \sim Unif([1,2])$ משתנים מקריים בלתי־תלויים. נחשב את $\mathbb{E}\left(\frac{X}{Y}\right)$.

פתרון: נבחין ראשית כי $Y > 0$ כמעט־תמיד ומהיות X ו־Y בלתי־תלויים נובע כי X ו־$\frac{1}{Y}$ בלתי־תלויים (אי־תלות נשמרת תחת הפעלת פונקציות).
אז מהגדרת התוחלת למשתנים מקרים בלתי־תלויים

$$\mathbb{E}\left(\frac{X}{Y}\right) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}\left(\frac{1}{Y}\right)$$

מהיות $X \sim Exp(2)$ נובע כי

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2}$$

מהיות $Y \sim Unif([1,2])$ נובע כי

$$\forall 1 \leq y \leq 2, \ f_Y(y) = 1$$

שכן

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ \frac{t-1}{2-1} = (t-1) & 1 \leq t \leq 2 \\ 1 & t > 2 \end{cases}$$

ואז עם האבחנה שנגזרת פונקציית ההסתברות המצטברת היא פונקציית צפיפות ואם־כך לפי הגדרת התוחלת של פונקציה של משתנה מקרי

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{Y}\right) = \int_1^2 \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = [\ln(y)]_{y=1}^{y=2} = \ln(2)$$

אז

$$\mathbb{E}\left(\frac{X}{Y}\right) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}\left(\frac{1}{Y}\right) = \ln(2) \cdot \frac{1}{2}$$

□

שאלה 4

יהי $X \sim Unif([0,1])$ ו־$Z \sim Exp(2)$ בלתי־תלויים ויהי $Y = X + Z$. נחשב את הצפיפות של Y.

פתרון: כידוע

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \qquad f_Z(z) = \begin{cases} 2e^{-2z} & z \ge 0 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

לפי טענה 8.55 על צפיפות משותפת של סכום ועם נוסחת הקונבולוציה נקבל

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Z(y-x)\,\mathrm{d}x$$

נבחן את תחומי האינטגרציה: מהיות $0 \le x \le 1$ ומכך שצריך להתקיים $y - x \ge 0$ נקבל $x \le y$ וביחד $x \in [0, \min(y,1)]$ ולכן

$$f_Y(y) = \int_0^{\min(y,1)} 2e^{-2(y-x)}\,\mathrm{d}x = 2e^{-2y}\int_0^{\min(y,1)} e^{2x}\,\mathrm{d}x = 2e^{-2y}\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_{x=0}^{x=\min(y,1)} = e^{-2y}\big(e^{2\min(1,y)} - 1\big)$$

אם $0 \le y < 1$ אז $\min(1,y) = y$ ונקבל

$$f_Y(y) = e^{-2y}\big(e^{2y} - 1\big) = 1 - e^{-2y}$$

אם $y \ge 1$ אז $\min(1,y) = 1$ ונקבל

$$f_Y(y) = e^{-2y}\big(e^2 - 1\big)$$

כלומר

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1 - e^{-2y} & 0 \le y < 1 \\ e^{-2y}(e^2 - 1) & y \ge 1 \\ 0 & y < 0 \end{cases}$$

□

שאלה 5

סעיף א'

הוכחה: ☐

סעיף ב'

הוכחה: ☐

סעיף ג'

הוכחה: ☐

סעיף ד'

הוכחה: ☐

סעיף ה'

הוכחה: ☐

שאלה 6

תהיי $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה של משתנים מקריים כך ש־$X_n \sim Unif([n])$. נוכיח כי מתקיים

$$\frac{X_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{d} Unif([0,1])$$

הוכחה: נגדיר $Y_n = \frac{X_n}{n}$ אזי מהיות ערכי $X_n \in \{1,2,...,n\}$ נובע כי $Y_n \in \left\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., 1\right\}$ $(\star)$.
אז לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$\mathbb{P}\left(\frac{X_n}{n} \le x\right) = \mathbb{P}(X_n \le xn)$$

אבל $X_n \sim Unif([n])$ ומ־$(\star)$ נובע כי עבור $0 \le x \le 1$ מתקיים

$$\mathbb{P}(X_n \le nx) = \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$$

כלומר

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} & 0 \le x < 1 \\ 1 & x \ge 1 \end{cases}$$

אז אם נקבע $x \in (0,1)$ ונשאיף את n לאינסוף נקבל

$$\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \underset{n\to\infty}{\to} x$$

כלומר לכל $x \in (0,1)$

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = x$$

כלומר

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & 0 \le x < 1 \\ 1 & x \ge 1 \end{cases}$$

אבל ההתכנסות הזאת רציפה על כל ערכייה ולכן נסיק

$$\frac{X_n}{n} \xrightarrow{d} Unif([0,1])$$

$\square$

שאלה 7

לכל $i \in [n^2]$ נגדיר $X_i \sim Exp(i)$ כך ש־$X_1, ..., X_{n^2}$ בלתי־תלויים ונחשב את

$$\mathbb{P}\left(\det\begin{bmatrix} X_1 & X_{n+1} & \cdots & X_{n^2-n+1} \\ X_2 & X_{n+2} & \cdots & X_{n^2-n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_n & X_{2n} & \cdots & X_{n^2} \end{bmatrix} = 0\right)$$

פתרון: ראשית $X_i \sim Exp(i)$ ולכן לכל $c \in \mathbb{R}$ מתקיים $\mathbb{P}(X_i = c) = 0$ מהגדרת המשתנה המקרי הרציף.

באינדוקציה על n:

עבור $n = 1$ מתקיים $A = \left(X_1\right)$ וכן $\det[X_1] = X_1$ ו־$X_1 \sim Exp(1)$ אז

$$\mathbb{P}(X_1 = 0) = 0 = \int_0^0 e^{-x}\,\mathrm{d}x = 0$$

נסתכל על $v_1, v_2, ..., v_n$ העמודות של המטריצה A.

A תהיה **לא** הפיכה אם ורק אם העמודות שלה הן תלויות לינארית, כלומר קיימת עמודה אחת לפחות שיכולה להיכתב כצירוף לינארי של העמודות האחרות.

נסתכל על העמודה v_n ועל המרחב שנפרש על־ידי $n-1$ העמודות האחרות, כלומר $V_{n-1} = \operatorname{Span}(v_1, v_2, ..., v_{n-1})$, מנוסחת התוחלת השלמה

$$\mathbb{P}(\det(A) = 0) = \mathbb{E}(\mathbb{P}(v_n \in V_{n-1} \mid v_1, v_2, ..., v_{n-1}))$$

$\square$

ד