פתרון מטלה 03 — תורת המידה, 80517

13 בנובמבבר 2025

שאלה 1

יהי $(X,\mathcal{A},\mu)$ מרחב מידה.

סעיף א'

נוכיח שאם $0\le f\le g$ אזי $\int_E fd\mu\le\int_E gd\mu$ לכל $E\in\mathcal{A}$.

הוכחה: בלי הגבלת הכלליות, $X=E$ אחרת ניקח לכל $E\in\mathcal{A}$, $f\cdot\mathbb{1}_E, g\cdot\mathbb{1}_E$ ועדיין נחשב אינטגרציה על כל X.

מההגדרה מתקיים

$$\int fd\mu=\sup\left\{\int_E sd\mu\mid 0\le s\le f,\ \text{פשוטה } s\right\}$$

מהיות $0\le f\le g$ נובע גם שלכל s כזאת מתקיים $0\le s\le g$ ולכן מתקיים

$$\left\{\int_E sd\mu\mid 0\le s\le f,\ \text{פשוטה } s\right\}\subseteq\left\{\int_E sd\mu\mid 0\le s\le g,\ \text{פשוטה } s\right\}$$

ובפרט בלקיחת סופרמום

$$\int fd\mu=\sup\left\{\int_E sd\mu\mid 0\le s\le f,\ \text{פשוטה } s\right\}\subseteq\sup\left\{\int_E sd\mu\mid 0\le s\le g,\ \text{פשוטה } s\right\}=\int gd\mu$$

□

סעיף ב'

נוכיח שאם $A\subseteq B$ ו־$f\ge 0$ אזי $\int_A fd\mu\le\int_B fd\mu$.

הוכחה: יהי $x\in X$.

אם $x\in A$ אז $\mathbb{1}_A(x)=1$ ומהנתון $A\subseteq B$ מתקיים $\mathbb{1}_B(x)=1$.

אם $x\notin A$ אזי $\mathbb{1}_A(x)=0$ ויש שתי אפשרויות: או ש־$x\in B$ או ש־$x\notin B$, כלומר או ש־$\mathbb{1}_B(x)=1$ או ש־$\mathbb{1}_B(x)=0$.

בין כה וכה, מכך ש־$A\subseteq B$ נובע כי בהתאמה מתקיים $\mathbb{1}_A(x)\le\mathbb{1}_B(x)$ לכל $x\in X$.

בפרט נובע מכך שלכל $x\in X$ מתקיים $f\cdot\mathbb{1}_A(x)\le f\cdot\mathbb{1}_B(x)$ והם בהתאמה מתאימים מהגדרה ל־$\int_A fd\mu,\int_B fd\mu$.

מהסעיף הקודם נובע אם כך ש־$\int_A fd\mu\le\int_B fd\mu$ (הסעיף הקודם הוא מונוטוניות האינטגרל) עבור $E=X$. □

סעיף ג'

אם $f\ge 0$ ו־$0\le c\le\infty$ אז $\int_E cfd\mu=c\int_E fd\mu$.

הוכחה: תהיי $E\in\mathcal{A}$, ותהיי $s\le f$ פונקציה פשוטה כך שמתקיים $s=\sum_{i=1}^n\alpha_i\mathbb{1}_{E_i}$ עם $\alpha_i\ge 0$ ו־$\{E_i\}$ קבוצות זרות בזוגות ומדידות ב־E.

ראינו שמתקיים $\int_E sd\mu=\sum_{i=1}^n\alpha_i\mu(E_i)$.

נבחין שגם cs היא פונקציה פשוטה שכן

$$cs(x)=\sum_{i=1}^n(c\alpha_i)\mathbb{1}_{E_i}(x)\Longrightarrow\int_E cs(x)d\mu=\sum_{i=1}^n(c\alpha_i)\mu(E_i)=c\sum_{i=1}^n\alpha i\mu(E_i)=c\int_E sd\mu$$

נסמן מהגדרה

$$\int_E fd\mu=\sup\left\{\int_E sd\mu\mid 0\le s\le f,\ \text{פשוטה } s\right\}=S_f$$

$$\int_E cfd\mu=\sup\left\{\int_E pd\mu\mid 0\le p\le cf,\ \text{פשוטה } p\right\}=S_{cf}$$

נשים לב שלכל $0\le p\le cf$, אם $c>0$ אז אם נגדיר פונקציה פשוטה $0\le s'=\frac{p}{c}\le f$ ומתקיים ממה שראינו לעיל,

$$\int_E pd\mu=\int_E csd\mu=c\int_E d\mu$$

זה נכון לכל p פשוטה כזאת ולכן

$$S_{cf} = \sup\left\{ c\int_E s d\mu \mid 0 \le s \le f,\ \text{פשוטה } s \right\} \underset{\text{מכפלה עם סופרמה אי־שלילית}}{=} c \cdot \sup\left\{ \int_E s d\mu \mid 0 \le s \le f,\ \text{פשוטה } s \right\} = c \cdot S_f$$

אם $c = 0$, אנחנו רוצים להראות

$$\int_E 0 \cdot f \mu = 0 \cdot \int_E f d\mu$$

בצד שמאל יש לנו פשוט את הפונקציה $g \equiv 0$ וזאת כמובן פונקציה פשוטה ולכן

$$\int_E 0 d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E_i) = \sum_{i=1}^{n} 0 \mu(E_i) = 0$$

מצד שני, יש לנו $0 \cdot \int_E f d\mu$ שתמיד כמובן שווה לאפס בזכות הקונבנציה $0 \cdot \infty = 0$.

עבור המקרה של $c = \infty$ התהליך זהה. $\square$

שאלה 2

יהי $(X,\mathcal{A},\mu)$ מרחב מידה.
נניח כי $N\subseteq X$ מוכלת בקבוצה ממידה אפס ו־ש־$f:N^c\to\mathbb{C}$ ונניח כי $f_1,f_2:X\to\mathbb{C}$ הרחבות מדידות של f לכל X
(כלומר $f_1\restriction(N^c)=f_2\underset{N^c}{\restriction}=f$).
נראה כי

$$\int_X f_1 d\mu=\int_X f_2 d\mu$$

הוכחה: נראה שמתקיים

$$\int_X f_1 d\mu=\int_{N^c} f_1 d\mu$$

תהיי $f\le s$ פונקציה פשוטה ונוכיח ש־$\int_X sd\mu=\int_{N^c} sd\mu$ אבל לפי תכונות האינטגרל שראינו בשאלה 1, זה נכון אם ורק אם

$$\int_X sd\mu=\int_{N^c} sd\mu \iff \int_X sd\mu-\int_{N^c} sd\mu=0 \iff \int_N sd\mu=0$$

s פשוטה, כלומר $s=\sum_{i=1}^n \alpha_i\mathbb{1}_{E_i}$ עבור $\alpha_i\in\mathbb{R}^+$ ו־E_i קבוצות מדידות זרות בזוגות.
מהגדרת האינטגרל

$$\int_N sd\mu=\sum_{i=1}^n \alpha_i\mu(E_i\cap N)$$

אבל N היא ממידה אפס ולכן גם $E_i\cap N\subseteq N$ היא קבוצה ממידה אפס ולכן

$$\int_N sd\mu=\sum_{i=1}^n \alpha_i\mu(E_i\cap N)=\sum_{i=1}^n \alpha_i 0=0$$

כלומר

$$\int_X sd\mu=\int_{N^c} sd\mu$$

בפרט, מהגדרת האינטגרל זה יהיה נכון לכל s פשוטה ולכן

$$\int_X f_1 d\mu=\int_{N^c} f_1 d\mu=\int_{N^c} fd\mu$$

כאשר השיוויון הימני נובע מההזדהות של הפונקציות על N^c.
נשים לב שמטיעון זהה נקבל

$$\int_X f_2 d\mu=\int_{N^c} fd\mu$$

ומטריכוטומיה

$$\int_X f_1 d\mu=\int_X f_2 d\mu$$

$\square$

שאלה 3

יהי $(X,\mathcal{A},\mu)$ מרחב מידה ו־$(Y,\mathcal{B})$ מרחב מדיד. תהיי $\rho : X \to Y$ העתקה מדידה בין שני המרחבים.
נגדיר את הדחיפה קדימה של μ על ρ לכל $E \in \mathcal{B}$ להיות

$$\rho_*\mu(E) \coloneqq \mu(\rho^{-1}(E))$$

סעיף א'

נראה כי $\rho_*\mu$ היא אכן מידה.

הוכחה: עלינו להראות ש־$\rho_*\mu$ היא σ־אדיטיבית ואיננה קבועה אינסוף (שקול לדרישה ש־$\rho_*\mu(\emptyset) = 0$).
ראשית כמובן היא אי־שלילית כי μ מידה ולכן אי־שלילית. שנית, ρ היא העתקה מדידה ולכן $\rho^{-1}(\emptyset_Y) \in \mathcal{A}$ מהגדרה. בפרט,

$$\rho^{-1}(\emptyset) = \{x \in X \mid \rho(x) \in \emptyset_Y\} \Longrightarrow \rho^{-1}(\emptyset_Y) = \emptyset_X$$

כעת, μ מידה ולכן $\rho_*\mu(\emptyset_Y) = \mu(\rho^{-1}(\emptyset_Y)) = \mu(\emptyset_X) = 0$ וזה סוגר את הלא קבועה אינסוף.
נשאר להראות שהיא מקיימת σ־אדיטיביות: תהיי $(E_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{B}$ סדרת קבוצות מדידות זרות בזוגות. מתקיים

$$\rho_*\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \mu\left(\rho^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \rho^{-1}(E_n)\right)$$

מהיות כל $E_i \cap E_j = \emptyset$ לכל $i \neq j$ נובע כי $\rho^{-1}(E_i) \cap \rho^{-1}\big(E_j\big) = \emptyset_X$ מהגדרת ρ כפונקציה ולכן מוגדרת היטב, כלומר $\left(\rho^{-1}(E_n)\right)_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ זה אוסף של קבוצות מדידות (כי ρ מדידה) שזרות בזוגות, ולכן מהיות μ מידה היא מקיימת σ־אדיטיביות, כלומר

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \rho^{-1}(E_n)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\rho^{-1}(E_n))$$

כלומר קיבלנו שמתקיים

$$\rho_*\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\rho^{-1}(E_n))$$

ולכן $\rho_*\mu$ היא אכן מידה. $\square$

סעיף ב'

נראה כי לכל $f : Y \to [0,\infty]$ מדידה

$$\int_X (f\circ\rho)d\mu = \int_Y f d\rho_*\mu$$

הוכחה: יהי $E \in \mathcal{B}$, נראה קודם כל עבור $f = \mathbb{1}_E$:

$$(f\circ\rho)(x) = f(\rho(x)) = \mathbb{1}_E(\rho(x)) = \{1 \quad \rho(x) \in E$$

אבל $\rho(x) \in E$ שקול ללהגיד $x \in \rho^{-1}(E)$, אז $f\circ\rho$ זה בעצם הפונקציה המציינת של $\rho^{-1}(E)$, ואנחנו יודעים שמתקיים

$$\int_X (f\circ\rho) = \int_X \mathbb{1}_{\rho^{-1}(E)} d\mu = \mu(\rho^{-1}(E))$$

מצד שני מתקיים מהיות $\rho_*\mu$ מידה

$$\int_Y f d\rho_*\mu = \int_Y \mathbb{1}_E d\rho_*\mu = \rho_*\mu(E) = \mu(\rho^{-1}(E))$$

אז קיבלנו שיוויון במקרה הזה.
נעשה באותו האופן גם עבור פונקציות פשוטות: תהיי $s : Y \to [0,\infty]$ פונקציה פשוטה, כלומר $s(y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{E_i}(y)$ שכמובן $\alpha_i \geq 0$ וכן E_i קבוצות מדידות זרות בזוגות ב־Y.

$$(s\circ\rho)(x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_1\mathbb{1}_{E_i}(\rho(x))=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\Big(\mathbb{1}_{E_i}\circ\rho\Big)(x)$$

מלינאריות והומוגניות האינטגרל

$$\int_X(s\circ\rho)d\mu=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\int_X\Big(\mathbb{1}_{E_i}\circ\rho\Big)d\mu\underset{\text{המקרה הקודם}}{=}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\rho_*\mu(E_i)$$

מצד שני למקרה זה מתקיים

$$\int_Y sd\rho_*\mu=\int_Y\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(\mathbb{1}_{E_i}d\rho_*\mu=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\rho_*\mu(E_i)$$

כלומר שוב קיבלנו שיוויון ולכן הטענה נכונה גם עבור פונקציות פשוטות.
נשאר להראות עבור פונקציות אי־שליליות, אז תהיי $f:Y\to[0,\infty]$ כזאת.
בהרצאה ראינו שלכל f מדידה יש סדרת פונקציות פשוטות מונוטונית עולה $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ כך שמתקיים $f=\lim_{n\to\infty}s_n$ וכן $s_n\le f$ לכל $n\in\mathbb{N}$.
נשים לב שממשפט ההתכנסות המונוטונית על המרחב $(X,\mathcal{A},\mu)$ נקבל

$$f\circ\rho=\lim_{n\to\infty}(s_n\circ\rho)\implies\int_X(f\circ\rho)d\mu=\lim_{n\to\infty}\int_X(s_n\circ\rho)d\mu$$

מצד שני אם נפעיל את משפט ההתכנסות המונוטונית על המרחב $(Y,\mathcal{B},\rho_*\mu)$ נקבל

$$\int_Y fd\rho_*\mu=\lim_{n\to\infty}\int_Y s_nd\rho_*\mu$$

אבל ראינו שהטענה נכונה לפונקציות פשוטות, אז

$$\int_Y s_nd\rho_*\mu=\int_X(s_n\circ\rho)d\mu$$

וכמובן בפרט בלקיחת גבול

$$\lim_{n\to\infty}\int_Y s_nd\rho_*\mu=\lim_{n\to\infty}\int_X(s_n\circ\rho)d\mu$$

כלומר מטרכיטומיה

$$\int_X(f\circ\rho)d\mu=\int_Y fd\rho_*\mu$$

ואז הטענה נכונה לכל f כנ"ל. $\square$

סעיף ג'

נניח כי $X=[0,2\pi]$ ו־$Y=S^1$ שניהם עם σ־אלגבראות בורל עליהם וכי $\rho(x)=e^{ix}$.
כמו־כן, נניח כי מידת לבג על X, כלומר מידה המחזירה לכל קטע את אורכו, קיימת ונסמנה ב־λ.
נתאר במילים את מה המידה $\rho_*\lambda$ מודדת.

פתרון: זו בעצם המידה על מעגל היחידה שלוקח לכל קשת מדידה E את האורך שלה. $\square$

שאלה 4

יהי $(X,\mathcal{A},\mu)$ מרחב מידה סופי.

נוכיח כי לכל $f:X\to[0,\infty)$ מדידה וחסומה מתקיים

$$\int f d\mu = \inf\left\{\int \varphi d\mu \mid f\le\varphi,\ \text{פשוטה } \varphi\right\} =: \underline{I}$$

הוכחה: תהיי $f:X\to[0,\infty)$ מדידה וחסומה.

מהחסימות נובע שיש $0<M<\infty$ כך שלכל $x\in X$ מתקיים $f(x)\le M$.

מהגדרת אינטגרל לבג מתקיים

$$\int_X f d\mu = \sup\left\{\int_X \psi d\mu \mid 0\le\psi\le f,\ \text{פשוטה } \varphi\right\} =: \overline{I}$$

במילים אחרות אנחנו רוצים להראות $\underline{I}=\overline{I}$ ולכן נראה $\underline{I}\le\overline{I}$ וכן $\overline{I}\le\underline{I}$.

נבחין שהכיוון $\overline{I}\le\underline{I}$ הוא ישיר, שכן אם ψ היא פונקציה פשוטה המקיימת $\psi\le f$ ו־φ היא פונקציה פשוטה המקיימת $f\le\varphi$ אז בהכרח מתקיים $\psi\le\varphi$.

ממונוטוניות האינטגרל (שהוכחנו בשאלה 1 סעיף א') ומאריתמטיקה של אינפימום וסופרמום מתקיים

$$\overline{I}=\sup\left\{\int_X \psi d\mu\right\}\le\inf\left\{\int_X \varphi d\mu\right\}=\underline{I}$$

שכן אם לכל φ,ψ מתקיים $\psi\le\varphi$ אז גם הסופרמום של כל ה־ψ־ים בהכרח יהיה קטן שווה לאינפימום של כל ה־φ־ים.

עבור הכיוון השני, נגדיר $g(x)=M-f(x)$ ומהנתון על החסימות של הפונקציה והמידה מתקיים $0\le g(x)\le M$ ומוגדרת היטב (אין חיסור עם אינסוף).

מתקיים

$$\int_X g d\mu=\int_X (M-f)d\mu \underset{(\star)}{=} \int_X M\cdot\mathbb{1}_X d\mu-\int_X f d\mu \underset{(\star\star)}{=} M\mu(X)-\overline{I}$$

כאשר $(\star)$ נובע מלינאריות האינטגרל ומסעיף ב' בשאלה 1 וכן מאדיטיביות המידה ו־$(\star\star)$ נובע מכך ש־$M\cdot\mathbb{1}_X$ היא פונקציה פשוטה.

מצד שני, מתקיים מהגדרת האינטגרל עם סופרמה

$$\underline{I}=\int_X g d\mu=\sup\left\{\int_X \omega d\mu \mid 0\le\omega\le g,\ \text{פשוטה } \omega\right\}$$

כלומר

$$\underline{I}=\sup\left\{\int_X \omega d\mu \mid 0\le\omega\le g,\ \text{פשוטה } \omega\right\}=M\mu(X)-\overline{I}$$

אם $0\le\omega\le g=M-f$ אז $f\le M-\omega$ אבל $\nu=M-\omega$ היא גם־כן פונקציה פשוטה ומתקיים $f\le\nu$ ולכן ν היא אחת הפונקציות שהשתמשנו בהן בבניית $\underline{I}$, אז

$$M\mu(X)-\overline{I}=\sup\left\{\int_X \omega d\mu \mid f\le M-\omega\right\}$$

ומתקיים

$$\int_X \omega d\mu=\int_X (M-\nu)d\mu=\int_X M d\mu-\int_X \nu d\mu=M\mu(X)-\int_X \nu d\mu$$

אז

$$M\mu(X)-\overline{I}=\sup\left\{M\mu(X)-\int_X \nu d\mu \mid f\le\nu\right\}$$

נזכר שעבור C קבוע מתקיים $\sup(C-S)=C-\inf(S)$ ולכן

$$M\mu(X)-\overline{I}=M\mu(X)-\inf\left\{\int_X \nu d\mu \mid f\leq \nu\right\}$$

כלומר

$$M\mu(x)-\overline{I}=M\mu(X)-\underline{I}\Longrightarrow \overline{I}=\underline{I}$$

ולכן מטריכוטומיה מתקיים

$$\int f d\mu=\inf\left\{\int \varphi d\mu \mid f\leq\varphi,\ \text{פשוטה } \varphi\right\}$$

$\square$

שאלה 5

נראה כי התנאים במשפט ההתכנסות המונוטונית הכרחיים.
כלומר, נמצא דוגמה למרחב מידה $(X,\mathcal{A},\mu)$, לפונקציה מדידה $f:X\to[0,\infty]$ ולסדרת פונקציות אי־שליליות f_n (לאו דווקא מונוטונית ולאו דווקא $f_n\le f$), המתכנסת נקודתית ל־f כך שמתקיים

$$\int f_n d\mu \underset{n\to\infty}{\not\to} \int f d\mu$$

פתרון: ניקח $X=[0,1]$ עם מידת לבג שאנחנו מאמינים שקיימת שנותנת לכל קטע את האורך שלו ונגדיר

$$f_n(x)=\begin{cases} n & x\in\left(0,\frac{1}{n}\right] \end{cases}$$

$f_n(x)$ בבירור איננה מונוטונית ולכל $x\in[0,1]$ מתקיים

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0$$

אבל

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu=\lim_{n\to\infty}\int_{\left(0,\frac{1}{n}\right]} n d\mu=\lim_{n\to\infty} n\cdot\mu\left(\left(0,\frac{1}{n}\right]\right)=\lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{1}{n}=1$$

מצד שני

$$\int_X f d\mu=\int_X 0 d\mu=0$$

וכמובן $1\neq 0$. $\square$