הכנה למבחן — פונקציות מרוכבות, 80519

5 בפברואר 2026

תוכן עניינים

1 אריתמטיקות בסיסיות שאת תמיד שוכחת

בהינתן $z = x + iy, w = a + ib$

1. ערך מוחלט

$$|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{(x+iy)\cdot(x-iy)} = \sqrt{x^2+y^2}$$

2. חילוק

$$\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \overline{w}}{w \cdot \overline{w}} = \frac{z \cdot \overline{w}}{|w|^2}$$

3. זהות אוילר

$$e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z)$$

.4
$$e^{\pi i} = (-1) \qquad e^{2\pi i} = 1, \qquad e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$

.5
$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

.6
$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

.7
$$\sinh(z) = -i\sin(iz) = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$$

.8
$$\cosh(z) = \cos(iz) = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

2 הגדרות מפה לשם משם לפה

2.1 גזירות מרוכבת

הגדרה 2.1.1: פונקציה הולומורפית

הגדרה 2.1.2: משוואות קושי־רימן

הגדרה 2.1.3: פונקציה הרמונית

הגדרה 2.1.4: העתקה קונפורמית

הגדרה 2.1.5 (נגזרת לוגריתמית): אם $f : G \to \mathbb{C}$ לא מתאפסת, הנגזרת הלגוריתמית מוגדרת להיות $\frac{f'}{f}$.

2.2 אינטגרלים קווים

הגדרה 2.2.1 (תחום כוכב): תחום G נקרא תחום כוכב אם קיים z_0 כך שלכל $z \in G$ מתקיים $[z_0, z] \in G$.

3 משפטים ושאר הירקות

3.1 אינטגרלים קווים

הקדמה

הגדרה 3.1.1 (אינטגרל קווי): יהיו $G \subseteq \mathbb{C}$ תחום, $f : G \to \mathbb{C}$ רציפה ו־γ מסילה C^1 שתמונתה מוכלת ב־G. האינטגרל המסילתי של f לאורך γ הוא

$$\int_\gamma f \,\mathrm{d}\gamma := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t$$

משפט 3.1.1 (האי־שיוויון האהוב עלינו ממרוכבות): לכל G $\gamma : I \to$, $f \in \operatorname{Hol}(G)$ מתקיים

$$\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \max_\gamma |f| \cdot L(\gamma) := \max_{t\in I} |f(\gamma(t))| \cdot L(\gamma)$$

משפט 3.1.2: אם $f_n \to f$ במידה שווה מקומית (במידה שווה בכל קבוצה קומפקטית $K \subset G$) ב־G אז לכל $\gamma : I \to G$ מתקיים

$$\lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$$

משפט 3.1.3: קירוב פוליגונלי

משפט קושי

משפט 3.1.4 (משפט קושי במשולש): יהי T משולש סגור ו־G סביבה פתוחה של T, אזי לכל $f \in \operatorname{Hol}(G)$ מתקיים

$$\int_{\partial T} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

משפט 3.1.5 (משפט קושי בקבוצה קמורה): תהיי K קבוצה קמורה חסומה ו־G סביבה פתוחה של K, אז לכל $f \in \operatorname{Hol}(G)$ מתקיים

$$\int_{\partial K} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

תזכורת (קבוצה קמורה): $K \subset \mathbb{R}^k$ נקראת קמורה אם לכל $x, y \in K$ מתקיים

$$[x, y] := \{\lambda x + (1-\lambda)y \mid \lambda \in [0,1]\} \subseteq K$$

משפט 3.1.6 (משפט קושי בתחום טוב): יהי G תחום טוב אז לכל $f \in \operatorname{Hol}\left(G \cap C\left(\overline{G}\right)\right)$ מתקיים

$$\int_{\partial G} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

מסקנות ממשפט קושי

משפט 3.1.7: נוסחת אינטגרל קושי

משפט 3.1.8: נוסחת אינטגרל קושי לנגזרת

משפט 3.1.9: משפט מוררה

משפט 3.1.10: משפט ויירטשטראס

משפט 3.1.11 (אי־שיוויון קושי): תהיי $f \in \operatorname{Hol}(B(z_0, R))$ אז לכל $n \in \mathbb{N}$

$$|f^n(z)| = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\{|w-z|=\rho\}} \frac{|f(w)|}{|w-z|^{n+1}}\,\mathrm{d}w \le \left|\frac{n!}{2\pi}\right| \frac{\max_{|w-z|=R}|f|}{R^{n+1}} \cdot L(\{|z-w|=R\}) = \frac{n!}{R^n}\max_{|w-z|}|f|$$

משפט 3.1.12 (משפט ליוביל): אם $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{C})$ ו־f חסומה, אז f קבועה.

משפט 3.1.13 (המשפט היסודי של האלגברה): יהי p פולינום מרוכב מדרגה של לפחות 1, אז יש לו שורש.

מסקנה 3.1.1: כל פולינום מדרגה d ניתן לכתיבה כמכפלה $p(z) = a_0 \prod_{j=1}^{d} (z - z_k)$ עבור $z_k \in \mathbb{C}$.

משפט 3.1.14 (משפט ערך הממוצע): אם $f \in \mathrm{Hol}(G)$, $z \in G$ ו־$\rho < \mathrm{dist}(z, \partial G)$ אז

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(z + \rho e^{it}) \, \mathrm{d}t$$

כלומר, $f(a)$ הוא הממוצע של הערכים ב־$\partial B(z, \rho)$.

משפט 3.1.15 (עיקרון המקסימום): אם $f \in \mathrm{Hol}(G) \cap C\left(\overline{G}\right)$ ולא קבועה אז $|f|$ מקבלת מינימום ומקסימום גלובאליים על השפה של G.

משפט 3.1.16 (עיקרון פרגמן-לינדלוף): יהי $G = \{z, Re(z) > 0\}$ ו־$f \in \mathrm{Hol}(G)$ פונקציה חסומה המקיימת $|f(z)| \leq M$ לכל $z \in \partial G$. אז $|f| \leq M$ על G, כלומר $|f|$ חסומה על G.

משפט 3.1.17: משפט היחידות 1

משפט 3.1.18: טענה שלפני משפט היחידות 2

משפט 3.1.19: משפט היחידות 2

4 איך פותרים תרגילים

4.1 סינגולריות ומה שביניהם

מיפוי נקודות סינגולריות

הגדרה 4.1.1 (נקודה סינגולרית אינטגרבילית): x_0 נקראת סינגולרית אינטגרבילית של $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^d$ אם f רציפה על $\mathbb{R}\setminus\{x_0\}$ ומתקיים

$$\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon}|f(t)|\,\mathrm{d}t<\infty$$

הערה: נקודה סינגולרית סליקה היא סינגולרית אינטגרבילית.

הגדרה 4.1.2: עבור $a\in\mathbb{C}$ נסמן ב־U_a סביבה פתוחה של z וב־U_a^* את הסביבה המנוקבת $U_a\setminus\{a\}$.

הגדרה 4.1.3 (נקודות סינגולריות): תהיי $f\in\mathrm{Hol}(U_a^*)$. נסווג את הנקודות הסינגולריות של f ב־$z=a$ באופן הבא

1. סליקה – ניתן להמשיך את f לנקודה a כך שתהיה הולומורפית (כלומר, אם $f|_{U_a^*}$ חסומה)
2. קוטב – הנקודה a איננה סינגולריות סליקה וקיים $m\geq 1$ כך שלפונקציה $(z-a)^m f(z)$ יש סינגולריות סליקה ב־a.

   נגדיר את סדר הקוטב של f ב־a להיות ה־m המינימלי המקיים זאת.
3. עיקרית – הגבול $\lim_{z\to a}f(z)$ איננו קיים במובן הרחב

משפט 4.1.1: a קוטב של f אם ורק אם $\lim_{z\to f(z)}=\infty$ (כלומר $\lim_{z\to a}|f(z)|=\infty$).

משפט 4.1.2 (הקשר בין טור לורן לבין נקודות סינגולריות): נניח $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n$, אז

1. a קוטב אם ורק אם קיים $m\geq 1$ כך שלכל $m\leftarrow n$ מתקיים $c_n=0$ (כלומר , טור הלורן מכיל רק מספר סופי של חזקות שליליות)
2. a סינגולרית עיקרית אם ורק אם טור הלורן מכיל אינסוף חזקות שליליות

משפט 4.1.3 (משפט קורטוזי־ויירשטראס): אם a סינגולרית עיקרית של הפונקציה f, אז V, סביבה פתוחה של a, הקבוצה $f(V\setminus\{a\})$ צפופה ב־$\mathbb{C}$ (כלומר $\overline{f(V\setminus\{a\})}=\mathbb{C}$).

שאריות

הגדרה 4.1.4 (שארית בנקודה): יהיו $a\in\mathbb{C}$ ו־$f\in\mathrm{Hol}(U_a^*)$. נקבע $\varepsilon>0$ כך ש־$\{0<|z-a|<\varepsilon\}\subset U_a^*$ ונגדיר את השארית ב־a להיות

$$\mathrm{res}_f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\varepsilon}f(z)\,\mathrm{d}z$$

משפט 4.1.4 (משפט השארית של קושי): יהי $G\subset\mathbb{C}$ תחום טוב, $f\in\mathrm{Hol}\Big((G\setminus\{a_1,a_2,...,a_N\})\cap\left(\overline{G}\setminus\{a_1,a_2,...,a_N\}\right)\Big)$. אזי

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G}f(z)\,\mathrm{d}z=\sum_{j=1}^{N}\mathrm{res}_f(a_j)$$

טענה 4.1.1: אם $f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ מקיימת $\psi(a)=0,\varphi(a)\neq 0,\psi'(a)\neq 0$ אזי $\mathrm{res}_f(a)=\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$.

טענה 4.1.2: אם $f\in\mathrm{Hol}(G\setminus\{a\})$ ו־a קוטב מסדר n, אזי

$$\mathrm{res}_f(a)=\frac{((z-a)^n f(z))^{n-1}(a)}{(n-1)!}$$

הגדרה 4.1.5 (שארית באינסוף): תהיי f הולומורפית בסביבה של ∞ (כלומר $f\in\mathrm{Hol}(\{z\in\mathbb{C}\mid |z|>R_0\})$ ונגדיר

$$\mathrm{res}_f(\infty)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R}f(z)\,\mathrm{d}z\ (R>R_0)$$

טענה 4.1.3: השארית של נגזרת לוגריתמית היא הסדר של האפס.

4.2 למצוא כמה פתרונות (כולל ריבויים)

משפט 4.2.1 (משפט רושה): תהיינה $f,g\in \mathrm{Hol}(G)$ ותהיי $H\subseteq G$ כך ש־$\overline{H}\subseteq G$ ו־H תחום טוב.
נניח שלכל $z\in\partial H$ מתקיים $|g(z)|\le|f(z)|$, אזי

$$\#\big(Z_{f+g}\cap H\big)=\#\big(Z_f\cap H\big)$$

מסקנה 4.2.1 (משפט גאוס): תהיי $g(z)=\sum_{k=0}^{n-1}a_kz^k$ וניקח $f(z)=a_nz^n$ כאשר $a_n\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$. אז ל־$f+g$ יש n אפסים (כולל ריבוי).

מסקנה 4.2.2 (ריבויים בטבעת): בהתאם לתנאי משפט רושה, ובהינתן $A=\{z\in\mathbb{C}\mid a<|z|<b\}$ טבעת, אזי

$$\#\{\text{zeroes in } a<|z|<b\}=\#\{\text{zeroes in } |z|<b\}-\#\{\text{zeroes in } a<|z|\}$$

דוגמה 4.2.1: נמצא כמה פתרונות (כולל ריבועיים) יש למשוואות בתחומים הנתונים.
1. $z^7-5z^4+z^2-2=0$ בדיסק היחידה $\mathbb{D}$
2. $z^4+3z=1$ בטבעת $\{z\mid 1<|z|<2\}$
3. $e^z=3z^n$ בחצי מישור $\{z\in\mathbb{C}\mid Re(z)<1\}$ ו־$n\in\mathbb{N}$

פתרון:
1. נגדיר $p(z)=z^7-5z^4+z^2-2$ כאשר $g(z)=-5z^4$ ו־$f(z)=z^4+z^2-2$, על $|z|=1$ מתקיים

$$|g(z)|=\left|-5z^4\right|=5\qquad |f(z)|=\left|z^4+z^2-2\right|=0$$

אז מתקיים $|f(z)|\le|g(z)|$ ול־g יש אפס אחד בראשית בריבוי 4 ולכן ממשפט רושה נקבל שיש למשוואה 4 פתרונות.

2. מהמסקנה אודות ריבויים בטבעת, נחלק לשתי בדיקות

$$\#\{\text{zeroes in } 1<|z|<2\}=\#\{\text{zeroes in } |z|<2\}-\#\{\text{zeroes in } 1<|z|\}$$

1. על $|z|=2$, נכתוב $p(z)=z^4+(3z-1)$ כאשר $g(z)=z^4$ ו־$f(z)=3z-1$ ומתקיים

$$|g(z)|=|z|^4=16\qquad |f(z)|=|3z-1|=5$$

כלומר $|g(z)|<|f(z)|$ ולכן תנאי משפט רושה מתקיימים ולכן ל־p יש את אותה כמות אפסים כמו ל־g ול־g יש אפס אחד בראשית, אבל עם הכפליות יש לו ארבע.

2. על $|z|=1$ נכתוב $p(z)=3z+(z^4-1)$ כאשר $g(z)=3z$ ו־$g(z)=z^4-1$ ומתקיים

$$|g(z)|=|3z|=3\qquad |f(z)|=\left|z^4-1\right|=0$$

כלומר $|g(z)|<|f(z)|$ ולכן תנאי משפט רושה מתקיימים ולכן ל־p יש את אותה כמות אפסים כמו ל־g ול־g יש אפס אחד בראשית עם ריבוי אחד.

בסך־הכל קיבלנו $4-1=3$ כלומר 3 פתרונות למשוואה הנתונה.

3. נגדיר $F(z)=3z^n-e^z$ ונסתכל קודם כל על דיסק היחידה, על $|z|=1$ מתקיים

$$|f(z)|=|e^z|=e<3\qquad |g(z)|=|3z^n|=3^n=3$$

ושוב מתנאי משפט רושה מתקיים $|g(z)|<|f(z)|$ ולכן יש להם את אותה כמות אפסים, ול־g יש ריבוי אחד בראשית עם ריבוי n.
נבחן מה קורה אם $|z|\ge 1$ ו־$Re(z)<1$, אז

$$|f(z)|=|3z^n|\ge 3\qquad |g(z)|=|e^z|=e^{Re(z)}<e<3$$

כלומר

$$|3z^n|>|e^z|\Longrightarrow 3z^n-e^z\neq 0$$

כלומר אין התאפסויות בתחום הזה בכלל.
לסיכום יש לנו n אפסים, קרי n פתרונות.

□

4.3 טורי לורן

פיתוחים שימושים

.1
$$|w| < 1,\ \frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n$$

.2
$$\frac{1}{1+w} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n w^n$$

.3
$$\frac{1}{(1-w)^k} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k-1} w^n$$

.4
$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

.5
$$|w| < 1,\ (1+w) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{w^n}{n}$$

.6
$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

.7
$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

.8
$$|w| < 1,\ (1+w)^k \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} w^n$$

How To Guide

נזכור שטור לורן הוא חמדן/זללן, ולכן מתכנס **בכל טבעת** שבו הוא רק יכול.
אז בגדול זה בכל תחום שבו הוא מוגדר היטב (כלומר, הנקודות הסינגולריות שלו הן הנקודות קפיצה).
לפעמים נרצה לעבור בשיטה של מרים ("שיטת מקדמים לא נקבעים") עם הפונקציות הרציונליות, לדוגמה

$$\frac{z^2}{(z-2)(z-4)} = \frac{z^2}{z^2-6z+8} = \frac{z^2-6z+8+6z-8}{z^2-6z+8} = 1 + \frac{-6z+8}{z^2-6z+8}$$

$$\implies \frac{-6z+8}{z^2-6z+8} = \frac{A}{z-2} + \frac{B}{z-4} = \frac{A(z-4)+B(z-2)}{z^2-6z+8} = \frac{z(A+B)-2(B+2A)}{z^2-6z+8}$$

$$\begin{cases} A+B=6 \\ -2B-4A=-8 \end{cases}$$

פותרים את המערך משוואות, מקבלים פונקציה ומפתחים בהתאם: משתמשים בהגבלות כדי לחסום ולהגיע לטורים ידועים.
תמיד נרצה להגיע לאחד מהטורים שרשום לעיל כי הם הכי קלים.

4.4 תוכיחי קיום/אי קיום