פתרון תרגיל בונוס לפסח — תורת הקבוצות, 80200

19 באפריל 2025

שאלה 1

נוכיח שלא קיימת קבוצה A המקיימת $|\mathcal{P}(A)| = \aleph_0$.

הוכחה: נניח בשלילה שקיימת קבוצה A כך ש־$|\mathcal{P}(A)| = \aleph_0$.
במקרה הראשון, אם קיים $n \in \mathbb{N}$ כך שמתקיים $|A| = n$, לפי מטלה 3 אנחנו יודעים שמתקיים $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|} = 2^n$ ולכן בפרט לא ייתכן כי מספר סופי יסמן שהקבוצה היא בת־מנייה ולכן קיבלנו סתירה.
במקרה השני, אם A קבוצה אינסופית ובת־מנייה, ממשפט קנטור על קבוצת החזקה שראינו בתרגול נובע כי $|A| = \aleph_0 < |\mathcal{P}(A)|$ וזאת סתירה.
המקרה האחרון הוא ש־A אינסופית אך אינה בת־מנייה ושוב ממשפט קנטור נקבל כי $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.
לכן לא קיימת קבוצה A המקיימת $|\mathcal{P}(A)| = \aleph_0$.
הערה: בתרגול הגדרנו $|X| < |Y|$ אם $|X| \le |Y|$ וגם $|X| \neq |Y|$. $\square$

שאלה 2

נסמן ב־S את קבוצת כל הפלוסים שלאו דווקא מקבילים לצירים באורך קבוע של 1 ונראה כי לא קיימת פונקציה חד־חד ערכית $f : S \to \mathbb{R}^2$.

הוכחה: נסמן ב־A את קבוצת האפיקומנים שאינה בת־מנייה.

ראשית נטען שהמרחק המינימלי בין נקודת האמצע של כל שני אפיקומנים הוא לכל היותר $\sqrt{2}$:

יהיו $a, b \in A$ שני אפיקומנים שונים ונסמן את מרכזם ב־$f(a), f(b)$. נסתכל על הריבוע שמכיל את האפיקומן, זה ריבוע שאורך כל צלע שלו היא 1 ולכן $d(f(a), f(b)) < \sqrt{2}$ ובפרט מהגדרת האלכסון בריבוע נסיק שאורכו הוא $\sqrt{2}$ בידיוק.

לכן, נסתכל על החלוקה הבאה של $\mathbb{R}^2$:

$$S = [n, n+1] \times [m, m+1],\ \ n, m \in \mathbb{Z}$$

בחלוקה כזאת בכל ריבוע יש לנו בידיוק אפיקומן אחד.

אנחנו יודעים ממטלה 1 ש־$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ היא בת־מנייה, ו־$S \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ היא תת־קבוצה אינסופית של קבוצה בת־מנייה ולכן S לכל היותר בת־מנייה.

נניח בשלילה שניתן להתאים כל אפיקומן לריבוע באופן חד־חד ערכי ולכן היינו מקבלים שקיימת $f : A \to S$ חד־חד ערכית משמע

$$\aleph_0 < |A| \leq |S| \leq |\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}| = \aleph_0$$

וזו כמובן סתירה. $\square$

שאלה 3

נשתמש בטיעון האלכסון של קנטור כדי להראות שקבוצת הפונקציות $A = \{\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid$ חד־חד ערכית ועל $\sigma\}$ אינה בת־מנייה.

הוכחה: נניח בשלילה כי היא A כן בת־מנייה ולכן קיימת פונקציה $f : \mathbb{N} \to A$ חד־חד ערכית ועל.

לכן נוכל למנות את כל האיברים ב־A כ־$f_1, f_2, f_3, ...$ ולסדר אותם בשורות בתור טבלה אינסופית ונשים לב ש־f_n זו תמורה

$$\begin{matrix} f_0(0) & f_0(1) & f_0(2) & \cdots \\ f_1(0) & f_1(1) & f_1(2) & \cdots \\ f_2(0) & f_2(1) & f_1(2) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{matrix}$$

נגדיר לכל $n \in \mathbb{N}$ את $f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ בצורה הבאה

$$f_n(m) = \begin{cases} n & m = 0 \\ 0 & m = n \\ m & \text{אחרת} \end{cases}$$

וכן f_n היא חד־חד ערכית ועל ולכן $f_n \in A$.

נסמן ב־X את אוסף המספרים הזוגיים ונגדיר תמורה חדשה $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ באינדוקציה על $n \in \mathbb{N}$:

$$f(2n) \in X \setminus \{f_0(0), f_1(2), ..., f_n(2n)\}$$

זוהי פונקציה חד־חד ערכית מהמספרים הזוגיים למספרים הזוגיים. נסמן

$$B = \{g(0), g(2), ...\}$$

ונסמן $Y = \mathbb{N} \setminus B \subseteq \mathbb{N}$ המכילה לכל הפחות את המספרים האי־זוגיים.

במטלה 1 הוכחנו ש־Y בת־מנייה כתת־קבוצה אינסופית של קבוצה בת־מנייה ולכן קיימת $h : \mathbb{N} \to Y$ חד־חד ערכית ועל.

נסיים להגדיר את g בכך שנגדיר $g(2n+1) = h(n)$.

g היא חד־חד ערכית שכן בהתחלה שלחנו בצורה חד־חד ערכית מספרים זוגיים למספרים זוגיים ואת המספרים האי־זוגיים שלחנו באמצעות פונקציה חד־חד ערכית, ולכן g היא חד־חד ערכית ובאותו אופן נקבל כי g על.

היות ולכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים ש־$g(2n) \neq f_n(2n)$ נובע $g \neq f_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$ משמע $g \notin A$ אבל הנחנו ש־A בת־מנייה וזו סתירה. $\square$