פתרון מטלה 09 — תורת ההסתברות 1, 80420

2 בינואר 2026

שאלה 1

תזכורת (חסם האיחוד): יהיו $\{A_i\}_{i\in I}\subseteq\mathcal{F}$ אוסף סופי או בן־מנייה של מאורעות, אזי

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)\leq\sum_{i\in I}\mathbb{P}(A_i)$$

סעיף א'

נוכיח שבמרחב הסתברות בדיד טענה דומה עובדת גם עבור אוסף אינסופי לא בן־מנייה של מאורעות.

הוכחה: יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות בדיד ו־Ω בת־מנייה.

במרחב זה מתקיים עבור $A\in\Omega$

$$\mathbb{P}(A)=\sum_{\omega\in A}\mathbb{P}(\{\omega\}),\ \ p_\omega:=\mathbb{P}(\{\omega\})$$

ראשית נוכיח כי $\mathbb{P}(\{w\}>0)$ עבור כמות לכל היותר בת־מנייה של $\omega\in\Omega$: לכל $n\in\mathbb{N}$ נגדיר

$$S_n:=\left\{\omega\in\Omega\mid p_\omega\geq\frac{1}{n}\right\}$$

ונטען כי S_n היא סופית, כי אחרת

$$\sum_{\omega\in S_n}p_\omega\geq\sum_{\omega\in S_n}\frac{1}{n}=\infty$$

אבל זו סתירה להיות $\mathbb{P}(\Omega)=1$ ולכן S_n סופית.

אז אם $p_\omega>0$, קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש־$\frac{1}{n}\geq p_\omega$ ולכן

$$\Omega^+:=\{\omega\mid p_\omega>0\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}S_n$$

זה איחוד בן־מנייה של קבוצות סופיות ולכן בן־מנייה.

נשים לב שלכל i מתקיים $A_i\cap\Omega^+$ היא לכל היותר קבוצה בת־מנייה ולכן גם $\bigcup_{i\in I}(A_i\cap\Omega^+)$ היא קבוצה לכל היותר בת־מנייה, אז אם נגדיר

$$I_0:=\{i\in I\mid A_i\cap\Omega^+\neq\emptyset\}$$

אז I_0 היא תת־קבוצה של קבוצה שלכל היותר בת־מנייה ולכן I_0 היא לכל היותר בת־מנייה ולכל $i\notin I_0$ מתקיים $\mathbb{P}(A_i)=0$, אז

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)=\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in I_0}A_i\right)$$

כי הוצאנו מאורעות עם הסתברות אפס.

אבל I_0 היא לכל היותר בת־מנייה ולכן חסם האיחוד תקף עליה, כלומר

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in I_0}A_i\right)\leq\sum_{i\in I_0}\mathbb{P}(A_i)$$

ושוב בגלל שלכל $i\in I_0$ מתקיים $\mathbb{P}(A_i)=0$

$$\sum_{i\in I_0}\mathbb{P}(A_i)=\sum_{i\in I}\mathbb{P}(A_i)$$

כלומר

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)\leq\sum_{i\in I}\mathbb{P}(A_i)$$

$\square$

סעיף ב'

נביא דוגמה למרחב הסתברות לא בדיד בו טענה דומה לא עובדת עבור אוסף אינסופי לא בן־מנייה של מאורעות.

הוכחה: (אני עושה במקביל תורת המידה אז ממש נדרשת דוגמה כזאת, סליחה).

ניקח $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ כאשר λ היא מידת לבג.

זה מרחב הסתברות כי מידת לבג היא אי־שלילית כאורך של קטע,

$$\mathbb{P}([0,1]) = \mathbb{P}(\Omega) = \lambda([0,1]) = 1$$

ואנחנו צריכים סכימות בת־מנייה לסדרת מאורעות זרים וזה מתקיים (בלי שנשתמש בכלים של מידה) כי האורך של סכום של קטעים זרים זה לזה ברמה הגיאומטרית תהיה פשוט סכום כל הקטעים.

אז זה אכן מרחב הסתברות והוא לא בדיד (אנחנו לא עומדים באיפיון מרחב הסתברות בדידה – לא קיימת קבוצה בת־מנייה כך שההסתברות נתמכת עליה).

לכל $x \in [0,1]$ נגדיר $A_x := \{x\}$ ולכן $\{A_x\}_{x\in[0,1]}$ היא משפחה לא בת־מנייה וידוע כי

$$\mathbb{P}(A_x) = \lambda(\{x\}) = 0$$

אז

$$\sum_{x\in[0,1]} \mathbb{P}(A_x) = 0$$

כסכום של אפסים.

מצד שני,

$$\bigcup_{x\in[0,1]} A_x = \bigcup_{x\in[0,1]} \{x\} = [0,1]$$

אבל

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{x\in[0,1]} A_x\right) = \lambda([0,1]) = 1 \neq 0 = \sum_{x\in[0,1]} \mathbb{P}(A_x)$$

אז בפרט

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{x\in[0,1]} A_x\right) \not\leq \sum_{x\in[0,1]} \mathbb{P}(A_x)$$

$\square$

שאלה 2

יהי $X \sim Unif([4,7])$ ונחשב את פונקציות ההתפלגות המצטברת ופונקציית הצפיפות של המשתנה המקרי $Y = X^2$.

פתרון: ראינו בהרצאה שמתקיים עבור משתנה מקרי אחיד $Z \sim Unif([a,b])$ מתקיים

$$f_Z(x) = \frac{\mathbb{1}_{[a,b]}(x)}{b-a}, \qquad F_Z(t) = \begin{cases} 0 & t < a \\ \frac{t-a}{b-a} & a \le t \le b \\ 1 & t > b \end{cases}$$

ולכן במקרה שלנו עבור $4 \le x \le 7$

$$f_X(x) = \frac{1}{7-4} = \frac{1}{3}, \qquad F_X(t) = \frac{t-4}{3}$$

מהיות $Y = X^2$ אז המינימום מתקבל ב־$Y = 4^2 = 16$ והמקסימום מתקבל כאשר $Y = 7^2 = 49$ ולכן $\mathrm{supp}(Y) = [16, 49]$.

בשביל פונקציית ההתפלגות המצטברת

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \le y) = \mathbb{P}(X^2 \le y)$$

מהיות $X \sim Unif([4,7])$ אז כל הערכים חיוביים ולכן ניתן לקחת מהם שורש, כלומר

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(X \le \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) = \frac{\sqrt{y}-4}{3}$$

כלומר

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 16 \\ \frac{\sqrt{y}-4}{3} & 16 \le y \le 49 \\ 1 & y > 49 \end{cases}$$

ופונקציית הצפיפות היא לפי אבחנה 8.14

$$f(y) = \begin{cases} F_Y'(y) & \text{גזירה ב-} y \ F_Y \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} & \text{גזירה ב-} y \ F_Y \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{6\sqrt{y}} & \text{גזירה ב-} y \ F_Y \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

$\square$

שאלה 3

יהי X משתנה מקרי רציף בהחלט ותהיי $\alpha > 1$, נתון כי

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ (1+x)^\alpha - 1 & 0 \le x \le \beta \\ 1 & \beta < x \end{cases}$$

נמצא את β ונחשב את פונקציית הצפיפות של X.

פתרון: מהיות X משתנה מקרי רציף בהחלט ומתכונות פונקציית ההתפלגות המצטברת כמונוטונית עולה חלש ועולה מאפס לאחת מתקיים

$$\lim_{x \to \beta^-} F_X(x) = F_X(\beta) = 1$$

(כי מהרציפות בהחלט היא רציפה גם מימין מהגדרת פונקציית ההתפלגות המצטברת ורציפה משמאל בזכות הרציפות בהחלט).
וכן

$$F_X(\beta) = (1+\beta)^\alpha - 1 = 1 \iff (1+\beta)^\alpha = 2 \iff 1 + \beta = 2^{\frac{1}{\alpha}} \iff \beta = 2^{\frac{1}{\alpha}} - 1$$

ואכן מהיות $\alpha > 1$ נובע כי $0 < \frac{1}{\alpha} < 1$ ולכן בפרט $2^{\frac{1}{\alpha}} > 1$ ולכן $x \ge 0$ וגם הרציפות נשמרת כי

$$F_X(0) = (1+0)^\alpha - 1 = 1 - 1 = 0$$

שתקין עבור $x < 0$ ומשמר רציפות.
עבור פונקציית הצפיפות, שוב נשתמש באבחנה 8.14 שנגזרת של פונקציית ההסתברות המצטברת היא פונקציית צפיפות:

$$f(x) = \begin{cases} F_X'(x) & \text{גזירה ב-} x \text{ } F_X \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} = \begin{cases} \alpha(1+x)^{\alpha-1} & 0 \le x \le 2^{\frac{1}{\alpha}} - 1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

□

שאלה 4

יהי $\lambda > 0$ ויהי $X \sim Exp(\lambda)$

סעיף א'

נחשב את הפונקציה יוצרת מומנטים של X.

פתרון: פונקציית הצפיפות של X היינה

$$f_X(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

ונחשב

$$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ts}\lambda e^{-\lambda s}\,\mathrm{d}s \underset{(\star)}{=} \lambda \int_{0}^{\infty} e^{s(t-\lambda)}\,\mathrm{d}s = \lim_{S\to\infty}\left[\lambda \frac{e^{s(t-\lambda)}}{t-\lambda}\right]_{s=0}^{s=S}$$

כאשר $(\star)$ נובע מהיות $f_X(t)$ אפסה לכל t שלילי.

נשים לב שכאשר $S \to \infty$ אם $t-\lambda > 0$ אז יש לנו חזקה חיובית כלומר $e^S \xrightarrow[S\to\infty]{} \infty$ והאינטגרל יתבדר.

אם $t - \lambda \leq 0$ אז נקבל בחזקת אפס או בחזקה שקטנה מאחד לכן כאשר $S \to \infty$ האינטגרל ייתכנס.

כלומר עבור $t < \lambda$ נקבל

$$M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

$\square$

סעיף ב'

נוכיח כי X חסר זיכרון, כלומר לכל $s, t > 0$ מתקיים $\mathbb{P}(X > s+t \mid X > t) = \mathbb{P}(X > s)$.

הוכחה: בתרגול ראינו שמתקיים

$$(\star)\ F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(s)\,\mathrm{d}s = \int_{0}^{t} \lambda e^{-\lambda s}\,\mathrm{d}s = \left[-e^{-\lambda s}\right]_{s=0}^{s=t} = 1 - e^{-\lambda t}$$

ניזכר כי

$$(\star\star)\ F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$$

ולכן מהגדרת ההסתברות המותנית

$$\mathbb{P}(X > s+t \mid X > t) = \frac{\mathbb{P}(X > s+t, X > t)}{\mathbb{P}(X > t)} \underset{\text{הכלת מאורעות}}{=} \frac{\mathbb{P}(X > s+t)}{\mathbb{P}(X > t)} \underset{\text{עם משלים } (\star\star)}{=} \frac{1 - F_X(s+t)}{1 - F_X(t)} \underset{(\star)}{=} \frac{1 - \left(1 - e^{-\lambda(s+t)}\right)}{1 - (1 - e^{-\lambda t})}$$

$$= \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = 1 - \left(1 - e^{-\lambda s}\right) \underset{(\star)}{=} 1 - \mathbb{P}(X \leq s) \underset{(\star\star)}{=} \mathbb{P}(X > s)$$

$\square$

שאלה 5

יהי X משתנה מקרי בעל פונקציית התפלגות מצטברת

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t^2 & 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & t > 1 \end{cases}$$

נחשב את התוחלת והשונות של X.

פתרון: ראשית נשים לב ש־$F_X(t)$ רציפה כי בנקודות האי־רציפות שלה, שהן $\{0, 1\}$ הפונקציות מתלכדות בהגדרת הגבול.
אם־כך, אנחנו עומדים בתנאי אבחנה 8.14 – נגזרת פונקציית ההסתברות המצטברת היא פונקציית צפיפות ולכן

$$f_X(t) = \begin{cases} F_X'(t) & \text{גזירה ב־} t \text{ } F_X \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 2t & 0 < t < 1 \\ 0 & t \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} 2t & 0 < t < 1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

נשים לב שב־$t = 1$ שהיא נקודה חשודה לנקודת אי־רציפות הפונקציה לא גזירה כי הגבול של הנגזרת מצד אחד הוא 2 ומצד שני הוא 1 ולכן לא גזירה.
באינטגרל כמובן ניקח עם הקצוות מאי־רגישות האינטגרל לשינוי מספר סופי של נקודות ונקבל:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t f_X(t) \, \mathrm{d}t \underset{(\star)}{=} \int_0^1 2t^2 \, \mathrm{d}t = \left[\frac{2t^3}{3} \right]_{t=0}^{t=1} = \frac{2}{3}$$

כאשר $(\star)$ נובע מהתחום של $f_X(t)$ שמצאנו לעיל.
עבור חישוב התוחלת עלינו לחשב $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2)$ ולכן נשתמש בטענה 8.31 – תוחלת פונקציה של משתנה מקרי: ניקח את X המשתנה המקרי שלנו ואת $g(x) = x^2$, אז $Y = g(X)$ הוא משתנה מקרי המקיים

$$\mathbb{E}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) f_X(t) \, \mathrm{d}t$$

והוא קיים אם ורק אם האינטגרל מתכנס בהחלט.
במקרה שלנו

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 f_X(t) \, \mathrm{d}t = \int_0^1 2t^3 \, \mathrm{d}t = \left[\frac{2t^4}{4} \right]_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{2}$$

□

שאלה 6

יהי $X \sim Unif([0,1])$ ונוכיח כי לכל $\lambda > 0$ מתקיים $-\frac{1}{\lambda}\log(X) \sim Exp(\lambda)$.

הוכחה: ראשית

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & 0 \leq t < 1, \\ 1 & t > 1 \end{cases} \quad f_X(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

תהיי $\lambda > 0$ ונגדיר $Y = -\frac{1}{\lambda}\log(X)$.

כאשר $x \to 1$ נקבל $Y = -\frac{1}{\lambda}\log(1) = 0$ וכאשר $x \to 0^+$ נקבל $Y = -\frac{1}{\lambda}\log(0^+) \to \infty$ ולכן $\operatorname{supp}(Y) = [0, \infty)$.

אנחנו רוצים למצוא את הפונקציית ההתפלגות המצטברת של Y כאשר $y \in \operatorname{supp}(Y)$

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}\left(-\frac{1}{\lambda}\log(X) \leq y\right) \underset{\substack{\lambda>0 \\ -\lambda<0}}{=} \mathbb{P}(\log(X) \geq -\lambda y) \underset{(\star)}{=} \mathbb{P}\left(X \geq e^{-\lambda y}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(X < e^{-\lambda y}\right) = 1 - F_X\left(e^{-\lambda y}\right)$$

כאשר $(\star)$ נובע מלהעלות ב־e^x שהיא מונוטונית ולכן משמרת את הכיוון של האי־שיוויון.

אבל לכל $x \in [0,1]$ מתקיים $F_X(x) = x$ ולכל השאר אפס ולכן

$$F_Y(y) = 1 - F_X\left(e^{-\lambda y}\right) = 1 - e^{-\lambda y}$$

אבל זו בידיוק פונקציית ההתפלגות המצטברת של משתנה מקרי מעריכי כפי שראינו בתרגול ולכן $Y \sim Exp(\lambda)$, כנדרש. $\square$

שאלה 7

יהיו $X,Y,Z\sim Unif([0,1])$ משתנים מקריים אחידים בלתי־תלויים. נוכיח כי $(XY)^Z\sim Unif([0,1])$.

הוכחה: נגדיר $W=(XY)^Z$ ונבחין כי $X,Y<Z\overset{a.s}{>}0$ ולכן ניתן לחשב

$$F_W(w)=\mathbb{P}((XY)^Z\leq w)=\mathbb{P}\Big(XY\leq w^{\frac{1}{Z}}\Big)\underset{(\star)}{=}\int_0^1\mathbb{P}\Big(XY\leq w^{\frac{1}{z}}\mid Z=z\Big)\cdot 1\,\mathrm{d}z=\int_0^1\mathbb{P}\Big(XY\leq w^{\frac{1}{z}}\Big)\,\mathrm{d}$$

כאשר $(\star)$ נובע מנוסחת ההסתברות השלמה (אנלוגיה מתאימה לרציף כאינטגרל) ועם צמצום התחום של האינטגרל לאזורים שהפונקציה איננה אפס.
נבחין כי מהיות $X,Y\in(0,1)$ נובע כי $w\in(0,1)$ גם כן.
נסמן $k=w^{\frac{1}{z}}$ ואנחנו מחפשים את ההסתברות שמכפלה של שני משתנים מקריים בלתי־תלויים אחידים קטנה מ־k ואם נסתכל על זה גיאומטרית זה בידיוק השטח מתחת לעקומה $y=\frac{k}{x}$ על ריבוע היחידה $[0,1]\times[0,1]$ ולכן

$$\mathbb{P}(XY\leq k)=\int_0^k 1\,\mathrm{d}x+\int_k^1\frac{k}{x}\,\mathrm{d}x$$

כאשר המחובר הראשון מכסה את הקטע בו $x<k$ ושם $y\in[0,1]$ והמחובר השני הוא עבור $x\geq k$ ששם $y\leq\frac{k}{x}$, אז

$$\mathbb{P}(XY\leq k)=\int_0^k 1\,\mathrm{d}x+\int_k^1\frac{k}{x}\,\mathrm{d}x=k+[k\ln(x)]_{x=k}^{x=1}=w^{\frac{1}{z}}-w^{\frac{1}{z}}\ln\Big(w^{\frac{1}{z}}\Big)=w^{\frac{1}{z}}-\frac{1}{z}w^{\frac{1}{z}}\ln(w)$$

ולכן

$$F_W(w)=\int_0^1 w^{\frac{1}{z}}-\frac{1}{z}w^{\frac{1}{z}}\ln(w)\,\mathrm{d}z\underset{(\star\star)}{=}\Big[zw^{\frac{1}{z}}\Big]_{z=0}^{z=1}\underset{(\star\star\star)}{=}w$$

עבור $(\star\star)$ ידוע

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\Big(zw^{\frac{1}{z}}\Big)\underset{\text{נגזרת מכפלה}}{=}1\cdot w^{\frac{1}{z}}+z\cdot-\frac{1}{z^2}w^{\frac{1}{z}}\ln(w)$$

ועבור $(\star\star\star)$ זה נובע מכך שכאשר $z=1\to 1\cdot w^1=w$ וכאשר $z\to 0^+$ מהיות $w\in(0,1)$, $\frac{1}{z}\to\infty$ ולכן $w^{\frac{1}{z}}\to 0$.
כלומר מצאנו שלכל $w\in(0,1)$ מתקיים $F_W(w)=w$ וזה בידיוק אומר ש־$W\sim Unif([0,1])$. □