

**פתרון מטלה 02 – פונקציות מרוכבות, 90519**

7 בנובמבר 2025



# שאלה 1

לכל פונקציה נמצא איפה היא  $\mathbb{C}$ -דיפרנציאbilית ואייפה היא אנגליטית.

תזכורת: נגד שפונקציה  $f : U_{z_0} \rightarrow \mathbb{C}$  היא  $\mathbb{C}$ -דיפרנציאbilית ב- $z_0$  אם הגבול  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$  קיים.  $f$  היא אנגליטית ב- $z_0$  אם קיים  $r > 0$  כך ש- $f$  היא  $\mathbb{C}$ -דיפרנציאbilית לכל  $z \in B_{r_{z_0}}(z_0)$ .

## סעיף א'

$$z \mapsto |z|^2$$

הוכחה: יהיו  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ , מתקיים

$$|z|^2 = |x + iy|^2 = \sqrt{x^2 + y^2}^2 = x^2 + y^2 = z\bar{z}$$

נבחרת את הגדרת  $\mathbb{C}$ -דיפרנציאbilית

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|z|^2 - |z_0|^2}{z - z_0} &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z\bar{z} - z_0\bar{z}_0}{z - z_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(z_0 + h)(\bar{z}_0 + h) - z_0\bar{z}_0}{z_0 + h - z_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{z_0\bar{z}_0 + z_0\bar{h} + h\bar{z}_0 + h\bar{h} - z_0\bar{z}_0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h\bar{h} + h\bar{z}_0 + z_0\bar{h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \bar{h} + \frac{\bar{z}_0}{h} + z_0 \end{aligned}$$

נבהיר שכאשר  $h \rightarrow 0$ , גם  $\bar{h} \rightarrow 0$  וכן הגורם הראשון מתבטל ונשארנו עם  $\bar{z}_0 + z_0 \frac{\bar{h}}{h}$  אבל הביטוי האחרון תלוי בכיוון השאייפה האם אנחנו שואפים מכיוון  $+$  או מכיוון  $-$  שכן מתקיים

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \bar{h} + \bar{z}_0 + z_0 \frac{\bar{h}}{h} = \bar{z}_0 + z_0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \bar{h} + \bar{z}_0 + z_0 \frac{\bar{h}}{h} = \bar{z}_0 - z_0$$

כלומר, הגבול קיים אם ורק אם  $z_0 = 0$  והוא גם ערך הנגזרת בנקודה יהיה אפס.

□ נובע לכך ש- $f$  לא אנגליטית בכלל שכן גם סביב הראשית אין סביבה קטנה דיו בה הפונקציה היא  $\mathbb{C}$ -דיפרנציאbilית.

## סעיף ב'

$$z \mapsto e^z$$

הוכחה: ניעזר ברמזו ונרצה להראות  $|e^z - 1 - z| \leq e^{|z|} - 1 - |z|$ . ראשית נזכיר שההרכאה ראיינו שטור טילור של  $e^z$  הוא

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

באגף שמאל יש לנו

$$|e^z - 1 - z| = \left| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|z^n|}{n!}$$

מצד ימין

$$e^{|z|} - 1 - |z| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} - 1 - |z| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!}$$

ומאי-השוון המשולש מתקיים  $|\sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{n!}| \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!}$ . יהי  $z \in \mathbb{C}$ , נבחן את הגדרת ה- $\mathbb{C}$ -דיפרנציאbilיות

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{e^z - e^{z_0}}{z - z_0} = \lim_{w=z-z_0} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{e^{z_0} e^{z-z_0} - e^{z_0}}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} e^{z_0} \cdot \frac{e^{z-z_0} - 1}{z - z_0}$$

נגדיר  $w = z - z_0$  אפשר כי זו החלפת משתנה רציפה כפי שראיינו בתרגול) ומספיק שנראה  $\lim_{w \rightarrow 0} \frac{e^w - 1}{w} = 1$ , מאיה-השוון שהראיינו מתקיים

$$\left| \frac{e^w - 1}{w} - 1 \right| = \left| \frac{e^w - 1 - w}{w} \right| = \frac{|e^w - 1 - w|}{|w|} \leq \frac{e^{|w|} - 1 - |w|}{|w|}$$

כאשר עליינו לבחון  $0 \rightarrow w$  ולכן  $0 \rightarrow |w|$  וכך מופיע שנראה במקרה השני (כי  $0 \rightarrow w$  אם  $0 \rightarrow |w|$ ) והגבול לעיל הוא גבול ממשי ולכן אפשר להשתמש בכלל לופיטל ולקבל שהגבול הוא אכן 1. לכן

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{e^z - e^{z_0}}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} e^{z_0} \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{e^{z-z_0} - 1}{z - z_0} = e^{z_0}$$

כלומר, לכל  $z \in \mathbb{C}$  הפונקציה היא  $\mathbb{C}$ -דיפרנציאבילית ולכן בפרט אנליטית לכל  $z \in \mathbb{C}$ .

### סעיף ג'

$$f(x + iy) = (x^2 + y^2) + i(-x^2 + y^2)$$

הוכחה: נחשב נגזרת הילקוט לפי  $x$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + iy_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x + iy_0) - f(x_0 + iy_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 + y_0^2 + i(-x^2 + y_0^2) - x_0^2 - y_0^2 - i(-x_0^2 + y_0^2)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x_0^2 - ix^2 + ix_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0) - i((x - x_0)(x + x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)(1 - i)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0)(1 - i) = 2x_0 - 2ix_0 \end{aligned}$$

נחשב נגזרת הילקוט לפי  $y$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + iy_0) &= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0 + iy) - f(x_0 + iy_0)}{y - y_0} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{x_0^2 + y^2 + i(-x_0^2 + y^2) - x_0^2 - y_0^2 - i(-x_0^2 + y_0^2)}{y - y_0} \\ &= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{(y + y_0)(y - y_0)(1 + i)}{y - y_0} = \lim_{y \rightarrow y_0} (y + y_0)(1 + i) = 2y_0 + 2iy_0 \end{aligned}$$

ב>Show that  $\frac{\partial f}{\partial x}$  ממשי ומדומה צריך להתקיים

$$\begin{cases} 2x_0 = 2y_0 \implies x_0 = y_0 \\ -2ix_0 = 2iy_0 \implies -x_0 = y_0 \end{cases}$$

□

### סעיף ד'

$$f(x + iy) = x^3 + 3iy$$

הוכחה: **TODoooooooooooooo**

## שאלה 2

תהיינה  $G \subset \mathbb{C}$  עבור חום  $f, g \in \text{Hol}(G)$ .  
הזכורות: בהינתן  $G$  חום, נסמן ב- $\text{Hol}(G)$  את קבוצת כל הפונקציות שאנלייטיות על  $G$ .

### סעיף א'

נראה כי  $(f \pm g)'$  אנלייטית ומשמעותם מתקיים  
הוכחה: מהגדרת ה- $\mathbb{C}$ -דיפרנציאביליות מתקיים

$$\begin{aligned} (f \pm g)'(z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(f \pm g)(z) - (f \pm g)(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \pm \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \pm \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} \end{aligned}$$

אבל  $f, g \in \text{Hol}(G)$  ולכן הגבולות לעיל מוגדרים היטב וקיימים.  
בפרט, לכל  $z \in G$ , הן  $f$  ו- $g$  אנלייטיות ב- $z$ , כלומר קיימת סביבה  $U_z$  כך ש- $f$  ו- $g$  הן  $\mathbb{C}$ -דיפרנציאביליות בכל  $z' \in U_z$  מאריתמטיקה של גבולות מתקיים

$$(f \pm g)'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \pm \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) \pm g'(z_0)$$

□  $(f \pm g)' = f' \pm g'$  ומשמעותם מתקיים  $f \pm g \in \text{Hol}(G)$   
סעיף ב'

נראה כי  $f \cdot g$  אנלייטית ומשמעותם מתקיים  $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ .  
הוכחה: בדומה לסעיף הקודם, מהגדרת  $\mathbb{C}$ -דיפרנציאביליות ומזהות  $f, g \in \text{Hol}(G)$  מתקיים

$$\begin{aligned} (f \cdot g)'(z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(f \cdot g)(z) - (f \cdot g)(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) \cdot g(z) - f(z_0) \cdot g(z_0)}{z - z_0} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(f(z) - f(z_0)) \cdot g(z) + f(z_0) \cdot g(z) - f(z_0) \cdot g(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \cdot g(z) + \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z_0) \cdot g(z) - f(z_0) \cdot g(z_0)}{z - z_0} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \cdot g(z) + \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z_0) \cdot g(z) - f(z_0) \cdot g(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0) \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} \\ &= f'(z_0) \cdot g(z_0) + f(z_0) \cdot g'(z_0) \end{aligned}$$

□  $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$  ומשמעותם מתקיים  $f \cdot g \in \text{Hol}(G)$   
סעיף ג'

נראה כי  $f \circ g$  אנלייטית ומשמעותם מתקיים  $(f \circ g)'(z) = f'(g(z)) \cdot g'(z)$ .  
הוכחה: מהגדרת ה- $\mathbb{C}$ -דיפרנציאביליות מתקיים  $f, g \in \text{Hol}(G)$

$$(f \circ g)'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(f \circ g)(z) - (f \circ g)(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(g(z)) - f(g(z_0))}{g(z) - g(z_0)} \cdot \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = f'(g(z_0)) \cdot g'(z_0)$$

□ או אם  $g$  אנלייטית ב- $z$  ו- $f$  אנלייטית ב- $g(z)$ , לכל  $z \in G$   $f \circ g(z)$  שכן  $f, g \in \text{Hol}(G)$

## סעיף 7'

נניח כי  $0 \neq g(z) \in G$  לכל  $z \in G$  ונראה  $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$ . מהסעיף שנראה שמתקיים  $\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}$  ומהסעיף אודות מכפלה של פונקציות אנליטיות נקבל את הנדרש. מהגדרת ה- $\mathbb{C}$ -זיפרנציאליות מתקיים

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\frac{1}{g(z)} - \frac{1}{g(z_0)}}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\frac{g(z_0) - g(z)}{g(z)(g(z_0))}}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z_0) - g(z)}{z - z_0} \cdot \frac{1}{g(z)g(z_0)} = \frac{-g'(z)}{g^2(z)}$$

כמוכן שהכל תחת ההנחה שלכל  $z \in G$  מתקיים  $0 \neq g(z)$  והיות וזה נכון לכל  $z \in G$  אז  $\frac{1}{g}$  היא אנליטית מכיוון שהיא לא נסועה. מהסעיף אודות נגזרת המכפלה של פונקציות אנליטיות מתקיים

$$\left(f \cdot \frac{1}{g}\right)' = f' \cdot \frac{1}{g} + f \cdot g' = \frac{f'}{g} + f \cdot \frac{-g'}{g^2} = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

□ מהסעיף הקודם והטענה לעיל אנחנו מקבלים את הנדרש.

## סעיף 8'

נוכחה שאם לכל  $z \in G$  מתקיים  $f'(z) = 0$  או  $f(z)$  קבועה.

□ הוכחה: **TODoooooooooooooo**

## סעיף 9'

נוכחה כי  $f(\bar{z})$  היא לא פונקציה אנליטית.

□ הוכחה: **TODoooooooooooooo**

### שאלה 3

נזכיר שהעתקה לינארית  $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  יכולה להיות מתוארת על-ידי כפל מטריצות

$$L(x, y) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y)$$

#### סעיף א'

נראה כי העתקה לעיל יכולה להופיע בצורה

$$z \mapsto z \cdot \left( \frac{\alpha + \delta}{2} + i \frac{\gamma - \beta}{2} \right) + \bar{z} \cdot \left( \frac{\alpha - \delta}{2} + i \frac{\gamma + \beta}{2} \right)$$

פתרון: נכתב  $\omega = (\alpha x + \beta y) + i(\gamma x + \delta y)$

יהי  $\omega \in \mathbb{C}$ , נשים לב לזהות הבאה

$$z = a + ib \implies a = \frac{z + \bar{z}}{2} = \frac{a + ib + a - ib}{2} = \frac{2a}{2} = a$$

$$z = a + ib \implies b = \frac{z - \bar{z}}{2i} = \frac{a + ib - a + ib}{2i} = \frac{2ib}{2i} = b$$

ולכן במקרה שלנו מתקיים עבור  $iy$

$$\omega = \alpha \left( \frac{z + \bar{z}}{2} \right) + \beta \left( \frac{z - \bar{z}}{2} \right) + i\gamma \left( \frac{z + \bar{z}}{2} \right) + i\delta \left( \frac{z - \bar{z}}{2} \right)$$

נזכיר שמתקיים

$$\frac{1}{i} = -i$$

שכן מתקיים  $i \cdot \frac{1}{i} = \frac{-i}{-i} = -\frac{i}{(-i)^2} = -\frac{i}{1} = -i$  ולכן נסתכל על המקדים לעיל של  $z$  נקבל

$$\frac{\alpha}{2} - \frac{i\beta}{2} + \frac{i\gamma}{2} + \frac{\delta}{2} = \frac{1}{2}(\alpha + \delta) + \frac{i}{2}(\gamma - \beta) = \frac{\alpha + \delta}{2} + i\frac{\gamma - \beta}{2}$$

באותו אופן עבור  $\bar{z}$  מתקיים

$$\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2i} + \frac{i\gamma}{2} - \frac{i\delta}{2i} = \frac{\alpha}{2} - \frac{-i\beta}{2} + \frac{i\gamma}{2} - \frac{\delta}{2} = \frac{1}{2}(\alpha - \delta) + \frac{i}{2}\frac{\beta + \gamma}{2} = \frac{\alpha - \delta}{2} + i\frac{\beta + \gamma}{2}$$

כלומר

$$\omega = z \cdot \left( \frac{\alpha + \delta}{2} + i \frac{\gamma - \beta}{2} \right) + \bar{z} \cdot \left( \frac{\alpha - \delta}{2} + i \frac{\beta + \gamma}{2} \right)$$

□

#### סעיף ב'

נראה כי העתקה לינארית  $\bar{z} \cdot b = a \cdot z + b \cdot z$  היא הולומורפית אם ורק אם  $b = 0$ . תזכורת: נגד שמדובר הולומורפטי אם הוא אנליטית בכל  $\mathbb{C}$  (כלומר, לכל  $z \in \mathbb{C}$ , ההעתקה אנליטית ב- $z$ ).

הוכחה:  $\implies$  נניח כי  $b = 0$  ונראה כי  $f(z) = a \cdot z$  הולומורפטי. או  $f(z) = a \cdot z$ , ומהגדלתה ה- $\mathbb{C}$ -difרנציאבילות מתקיים

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{a(z - z_0)}{z - z_0} = a$$

מהיות  $z_0 \in \mathbb{C}$  שדרוי וובע כי הטענה נכונה לכל  $z \in \mathbb{C}$  ולכן  $f$  הולומורפיה, כי היא אנליטית בכל  $\mathbb{C}$ .

$\iff$  נניח כי  $f$  הולומורפית ונראה כי  $0 = b$ .

$f$  הולומורפית ולכן לכל  $z \in \mathbb{C}$ , אנגוליטית ב- $z_0$ , כלומר יש סביבה  $U_{z_0} \subset \mathbb{C}$ -דיפרנציאבילית בכל  $z \in U_{z_0}$ , מתקיים מהגדרת ה- $\mathbb{C}$ -דיפרנציאביליות

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(a \cdot z + b \cdot \bar{z}) - (a \cdot z_0 + b \cdot \bar{z}_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{a(z - z_0) + b(\bar{z} - \bar{z}_0)}{z - z_0} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} a \cdot \frac{z - z_0}{z - z_0} - b \cdot \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} a + b \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} = a \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} b \cdot \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} \end{aligned}$$

מהיות  $f$  הולומורפית, נובע כי הגבול לעיל צריך להיות קיים ומוגדר היטב.  
אם כך, אם אנחנו נעים על הציר המשני, הביטוי לעיל ישאף ל- $-1$ . אם אנחנו נעים על הציר המודומה, הביטוי לעיל ישאף ל- $1$ , כלומר הגבול הזה לא קיים אלא אם  $0 = b$  וואז כל הביטוי הזה לא חילק מהגבול, ולכן  $0 = b$  בהכרח.

□

## סעיף ג'

נסיק שכדי שהעתקה לינארית תהיה הולומורפית חייב להתקיים  $\gamma = -\beta$ ,  $\alpha = \delta$ .

תחريح: בעצם עליינו להראות שמתקיים  $i \frac{\alpha-\delta}{2} + i \frac{\gamma+\beta}{2} = 0$

נזכור שגם  $Im(z) = 0$  ו- $Re(z) = 0$  אם ורק אם  $z = a + ib \in \mathbb{C}$

במקרה שלנו מתקיים

$$\begin{cases} \frac{\alpha-\delta}{2} = 0 \iff \alpha - \delta = 0 \iff \alpha = \delta \\ \frac{\gamma+\beta}{2} = 0 \iff \gamma + \beta = 0 \iff \beta = -\gamma \end{cases}$$

או העתקה הלינארית יכולה להיות מוגדרת על ידי מטריצה מהצורה  $M = \begin{pmatrix} \alpha & -\gamma \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix}$

תחת מקרה זה מסעיף א' מתקיים

$$\frac{\alpha + \delta}{2} + i \frac{\gamma - \beta}{2} = \frac{\alpha + \alpha}{2} + i \frac{\gamma - (-\gamma)}{2} = \frac{2\alpha}{2} + i \frac{2\gamma}{2} = \alpha + i\gamma$$

כלומר  $L(z) = (\alpha + i\gamma)z$  שבסעיף הקודם רأינו שהיא הולומורפית.

□

## שאלה 4

בහינתן מטריצה  $A$  הגדרנו את העתקת מוביאס המתאימה להוות  $.h_A$   
הזכורה: אמרנו שהעתקה מהצורה

$$h(z) = \frac{a \cdot z + b}{c \cdot z + d}$$

כאשר  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  היא העתקת מוביאס ומטריצת המתאימה לייצוג העתקה הינה

$$A_h = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

### סעיף א'

תהיינה  $A, B$  מטריצות ונראה כי  
 $.A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$   
מצד אחד מתקיים

$$\begin{aligned} h_A \circ h_B(z) &= h_A\left(\frac{ez+f}{gz+h}\right) = \frac{a \frac{ez+f}{gz+h} + b}{c \frac{ez+f}{gz+h} + d} = \frac{\frac{a(ez+f)+b(gz+h)}{gz+h}}{\frac{c(ez+f)+d(gz+h)}{gz+h}} = \frac{a(ez+f) + b(gz+h)}{c(ez+f) + d(gz+h)} \\ &= \frac{aez + af + bgz + hb}{cez + cf + dgz + dh} = \frac{(ae + bg)z + (af + bh)}{(ce + dg)z + (cf + dh)} \end{aligned}$$

מצד שני מתקיים

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix} \\ \text{נסמן } AB &= \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \text{ ונחשב וילכון } a' = ae + bg, b' = af + bh, c' = ce + dg, d' = cf + dh \\ h_{AB}(z) &= \frac{a'z + b'}{c'z + d'} = \frac{(ae + bg)z + (af + bh)}{(ce + dg)z + (cf + dh)} \end{aligned}$$

□ וקיים שיוויון.

### סעיף ב'

נניח כי  $0 \neq \det(A)$  ונראה כי  $.h_A^{-1} = h_{A^{-1}}$   
פתרון: מהיית  $A^{-1} A = I$  קיימת מתקיים  $\det(A) \neq 0$  ומהטיעף הקודם מתקיים

$$h_{A^{-1}} \circ h_A = h_{A^{-1}A} = h_I$$

אבל

$$h_I(z) = \frac{z+0}{0z+1} = z$$

או  $\text{id} \circ h_A = h_A$  ובאותו אופן קיבל גם  $h_{A^{-1}} \circ h_A = \text{id}$ , כלומר  $h_{A^{-1}} = (h_A)^{-1}$   
□ סעיף ג'

נראה כי כל העתקת מוביאס יכולה להתקבל מהרכבה של העתקות מוביאס אלמנטריות.

証明: בתרגול ראיינו שאrbעת העתקות מוביאס האלמנטריות הן סקלר, סיבוב, הזזה והופכי.  
נסמן

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, h_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

אם  $a = 0$  או  $c = 0$  אז  $h_A(z) = \frac{az+b}{d} = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$  שווה בידוק הרכבה של הזזה וכיוון בסקלר.  
בתרגול טענו את הטענה הנדרשת יהד עם ההנחה  $\det(A) \neq 0$  ולכן נמשיך תחת מקרה זה.  
נשים לב

$$az + b = \frac{a}{c}(cz) + b = \frac{a}{c}(cz + d - d) + b = \frac{a}{c}(cz + d) - \frac{ad}{c} + b$$

ולכן

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{\frac{a}{c}(cz + d) + (b - \frac{ad}{c})}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cz + d}$$

כעת נזכיר שי- $0$  ולכן

$$b - \frac{ad}{c} = \frac{bc - ad}{c} = -\frac{ad - bc}{c} = -\frac{\det(A)}{c}$$

ואז

$$\frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{-\frac{\det(A)}{c}}{cz + d} = \frac{a}{c} - \frac{\det(A)}{c} \cdot \frac{1}{cz + d} = \frac{a}{c} - \frac{\det(A)}{c^2} \cdot \frac{1}{z + \frac{d}{c}}$$

נסמן ב-  $T_1$  את הזזה, וב-  $T_2$  את  $z_3 = \frac{-\det(A)}{c^2} \cdot z_2 = -\frac{\det(A)}{c(cz+d)}$  וב-  $D$  את הסקלריות,  $I$  את הזזה,  $z_2 = \frac{1}{z_1} = \frac{1}{z + \frac{d}{c}}$ ,  $z_1 = z + \frac{d}{c}$  וב-  $I$  את ההפכי.  
ואכן מתקיים  $h(z) = \frac{a}{c} + z_3$

$$(T_2 \circ D \circ I \circ T_1)(z) = (T_2 \circ D \circ I)\left(z + \frac{d}{c}\right) = (T_2 \circ D)\left(\frac{c}{cz + d}\right) = T_2\left(-\frac{\det(A)}{c(cz + d)}\right) = \frac{a}{c} + -\frac{\det(A)}{c(cz + d)}$$

$$= \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c(cz + d)} = \frac{a(cz + d) - ad + bc}{c(cz + d)} = \frac{acz + ad - ad + bc}{c(cz + d)} = \frac{c(az + b)}{c(cz + d)} = \frac{az + b}{cz + d}$$

כלומר, כל העתקה מובאים יכולה להתקבל מהרכבה של העתקות מובאים אלמנטריות.

□

## שאלה 5

### סעיף א'

בכל סעיף נחשב את רדיוס ההתקנסות, נכתוב את תחום ההתקנסות ונקבע האם הוא מתכנס במידה שווה או לא.

#### חת-סעיף א'

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

פתרון: ראשית בהרצאה רأינו ש-  $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$  ולכן הטור שקיבלנו הוא בעצם הטור של  $1 - e^z$ .  
נשים לב שמתקיים

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{(n)!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n+1} \right| = \infty$$

או רדיוס ההתקנסות הוא  $\infty$ , ולכן הטור מתכנס לכל  $z \in \mathbb{C}$ .

כדי להראות שהטור לא מתכנס במידה שווה על  $\mathbb{C}$ , יהיו  $\epsilon > 0$  וקיים  $N$  כך שלכל  $n \geq N$  ולכל  $z \in \mathbb{C}$  מתקיים

$$\left| \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \right| < \epsilon$$

נסתכל על  $\frac{z}{(N+1)!}$ , אם נניח בשיילה שהטור מתכנס במידה שווה, היה מתקיים שכאשר  $\infty \rightarrow n$  אז הביטוי הזה שואף ל-0.

אבל לכל  $N$ , נשים לב שבבחירה של  $z$  גדול ממספר, למשל, כולם  $|z| = |z(N+1)| = |z| + 1$  הינה מתקיים שהביטוי לעיל הוא 1, כלומר לא ניתן לקבל את ההגדרה להתקנסות במידה שווה.  
□

#### חת-סעיף ב'

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n$$

פתרון: נשים לב ש-  $a_n = 1$  או נסתכל על מקרים שונים עבור  $z$ .

אם  $|z| < 1$  אז הטור גיאומטרי ומתקנס בהחלט, אם  $|z| > 1$  אז הטור מתבדר (כי אפילו  $0 \neq \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$  וזה תנאי הכרחי) אם  $|z| = 1$  זה אומר ש- $z$  על מעגל היחידה **TODoooooooooooooo**  
□

#### חת-סעיף ג'

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$$

פתרון:

□