פתרון מטלה 05 — תורת המידה, 80517

25 בנובמבר 2025

שאלה 1

בעזרת משפט ההצגה של ריס ניתן להגדיר את מידת לבג על $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$ בתור המידה המתאימה לפונקציונל הניתן על־ידי אינטגרל רימן, ונסמנה לרוב באות λ.

סעיף א'

נראה כי λ אינווריאנטית להזזות, כלומר לכל $E \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$ ולכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $\lambda(E) = \lambda(E + x)$ וכן נראה $\lambda([0, 1]) = 1$.

הוכחה: ממשפט ההצגה של ריס נקבל שלכל קטע $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ מידת לבג מניבה לנו $\lambda([a, b]) = b - a$ אבל אם נסתכל על ההזזה שלו ב־$x \in \mathbb{R}$ נקבל

$$\lambda(I + x) = \lambda([a + x, b + x]) = (b + x) - (a + x) = b - a$$

כלומר לקטעים סגורים מתקיים

$$\lambda(I + x) = \lambda(I)$$

באותו אופן בגלל שמידת לבג היא מידת רדון, מהרגולריות הפנימית והחיצונית זה נובע גם עבור קטע פתוח.

נרצה לראות שזה מתאים גם לקבוצות פתוחות.

באינפי 3 ראינו שכל $U \subseteq \mathbb{R}$ פתוחה ניתנת לכתיבה על־ידי אחיד בן־מנייה של קטעים זרים, כלומר $U = \bigcup_{n=1}^\infty I_n$, אבל ראינו שקטע פתוח הוא אינווריאנטי להזזה, כלומר לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$U + x = \bigcup_{n=1}^\infty (I_n + x)$$

מ־σ־אדטיביות של המידה נקבל

$$\lambda(U + x) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^\infty (I_n + x)\right) + \sum_{n=1}^\infty \lambda(I_n + x) = \sum_{n=1}^\infty \lambda(I_n) = \lambda(U)$$

נגדיר

$$C = \{E \subseteq \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda(E + x) = \lambda(E)\} \subseteq \mathcal{B}_\mathbb{R}$$

ממה שראינו לעיל נובע שכל הקבוצות הפתוחות ב־$\mathbb{R}$ נמצאות ב־C ונשאר להראות ש־$C = \mathcal{B}_\mathbb{R}$ כדי לסיים, בעצם נראה ש־C אכן σ־אלגברה.

אז $\mathbb{R} \in C$ ברור כי $\lambda(\mathbb{R}) = \infty$ ולכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $\mathbb{R} + x = \mathbb{R}$ ולכן $\mathbb{R} \in C$.

עבור סגירות תחת משלים, יהי $E \in C$ ונרצה להראות ש־$E^c \in C$: כלומר, נרצה להראות ש־$E^c + x = (E + x)^c \in C$.

$E \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$ ולכן $E^c \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$ ולכן

$$\lambda(E^c + x) = \lambda((E + x)^c) = \lambda(\mathbb{R}) - \lambda(E + x) \underset{E \in C}{=} \lambda(\mathbb{R}) - \lambda(E) = \lambda(E^c) \implies E^c \in C$$

נשאר להראות סגירות תחת איחוד בן־מנייה: יהיו $\{E_n\}_{n=1}^\infty \subseteq C$ זרות. מתקיים

$$\left(\bigcup_{n=1}^\infty E_n\right) + x - \bigcup_{n=1}^\infty (E_n + x)$$

אבל גם $\{E_n + x\}$ זרות, לכן ממה שראינו לעיל מתקיים

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^\infty E_n + x\right) = \sum_{n=1}^\infty \lambda(E_n + x) \underset{E_n \in C}{=} \sum_{n=1}^\infty \lambda(E_n) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^\infty E_n\right) \implies \bigcup_{n=1}^\infty E_n \in C$$

אז זו σ־אלגברה שמכילה את σ־אלגברת בורל שהיא מינימלית ולכן $C = \mathcal{B}_\mathbb{R}$, כלומר לכל $E \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$, $\lambda(E) = \lambda(E + x)$.

נסיק אם כך $\lambda([0, 1]) = 1 - 0 = 1$. $\square$

סעיף ב'

תהיי $f:[0,1]\to[0,\infty)$ פונקציה חסומה אינטגרבילית רימן.

נסיק מהסעיף הקודם שהאינטגרל שלה לפי λ זהה לאינטגרל רימן שלה.

הוכחה: נראה תחילה עבור פונקציות מדרגה: תהיי $\psi:[0,1]\to\mathbb{R}$ ותהיי $P=\{x_0,x_1,...,x_n\}$ חלוקה של הקטע $[0,1]$ כך שמתקיים

$$0=x_0<x_1<\cdots<x_n=1$$

והגדרנו את האינטגרל רימן של פונקצייה מדרגה להיות

$$\int_0^1\psi(x)dx=\sum_{k=1}^n c_k(x_k-x_{k-1})$$

אבל זאת פונקציה פשוטה! היות ונקודות הקצה הן נקודות ממידה אפס הן לא משפיעות על ערך האינטגרל לבג שלה ולכן לפי אינטגרל לבג מתקיים

$$\int_0^1\psi d\lambda=\sum_{k=1}^n c_k\lambda((x_{k-1},x_k))=\sum_{k=1}^n c_k(x_k-x_{k-1})$$

אבל זה בידיוק האינטגרל רימן שלה.

משפט דרבו אומר לנו שאם f אינטגרבילית רימן אז עבור חלוקה P של הקטע מתקיים

$$\int_0^1 f(x)dx=\sup_p L(P,f)=\inf_P U(P,f)$$

כאשר $L(P,f),U(P,f)$ הם סכומי דרבו התחתונים והעליונים שמתאימים לחלוקה P, כלומר במילים אחרות קיימות שתי סדרות של פונקציות מדרגות (כאשר האינטגרלים המדוברים הם אינטגרלי רימן) $\{\psi_n\},\{\gamma_n\}$ כך שמתקיימים

$$\forall x\in[0,1],\ \psi_n(x)\le f(x)\le\gamma_n(x)$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\psi_n(x)dx=\int_0^1 f(x)dx$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\gamma_n(x)dx=\int_0^1 f(x)dx$$

בלי הגבלת הכלליות נבחר $\{\psi_n\}$ כך שלכל n מתקיים

$$\psi_1\le\psi_2\le\cdots\le f$$

(תמיד נוכל להגדיר סדרה שמבוססת על בחירת מקסימום בהתאם בצורה רקורסיבית) ובאותו אופן נבחר $\{\gamma_n\}$ כך שמתקיים $f\le\cdots\le\gamma_2\le\gamma_1$ ונשים לב ש־

$$\lim_{n\to\infty}\psi_n\overset{a.e.}{\to}f,\quad\lim_{n\to\infty}\gamma_n\overset{a.e.}{\to}f$$

אלו פונקציות פשוטות ולכן $\int\psi dx=\int\psi d\lambda$ (dx עבור האינטגרל רימן ו־$d\lambda$ עבור האינטגרל לבג), אז ממשפט ההתכנסות המונוטונית

$$\int_{[0,1]}fd\lambda=\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]}\psi_n d\lambda=\lim_{n\to\infty}\int_0^1\psi_n(x)dx=\int_0^1 f(x)dx$$

$\square$

שאלה 2

סעיף א'

נחשב את הגבול

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n\left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{\frac{x}{2}}dx$$

פתרון: נגדיר $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ על־ידי

$$f_n(x)=\begin{cases}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{\frac{x}{2}} & x\in[0,n]\\ 0 & x\notin[0,n]\end{cases}$$

ונרצה לחשב את

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n\left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{\frac{x}{2}}dx=\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}f_n(x)dx$$

ניזכר באריתמטיקה של גבולות

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n=e^a$$

אז עבור $x\in[0,\infty)$, בבחירת $a=-x$ מתקיים

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=e^{-x}e^{\frac{x}{2}}=e^{-\frac{x}{2}}$$

אז יש לנו התכנסות נקודתית $f_n\to f$ כאשר

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{x}{2}} & x\geq 0\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

נרצה להשתמש במשפט ההתכנסות הנשלטת ולכן עלינו לחסום את $|f_n(x)|$ עבור $x\in[0,n]$.
נשים לב ש־$\frac{x}{n}\in[0,1]$ ולכן $1-\frac{x}{n}\geq 0$, ונזכר באי־השיוויון הבא עבור $y\in[0,\infty)$,

$$1-y\leq e^{-y}$$

אז מהאי־שליליות ומהאי־שיוויון הזה נקבל

$$\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\leq e^{\left(-\frac{x}{n}\right)^n}=e^{-x}\implies|f_n(x)|=\left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{\frac{x}{2}}\leq e^{-x}e^{\frac{x}{2}}=e^{-\frac{x}{2}}$$

ולכן נוכל להגדיר את הפונקציה השולטת

$$g(x)=\begin{cases}e^{-\frac{x}{2}} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

כדי להשתמש במשפט ההתכנסות הנשלטת עלינו להראות ש־$g(x)$ אינטגרבילית, ואכן

$$\int_{\mathbb{R}}g(x)dx=\int_0^\infty e^{-\frac{x}{2}}dx=\left[\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{-\frac{1}{2}}\right]_0^\infty=\left[-2e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^\infty=0-(-2)=2$$

ולכן g אינטגרבילית ומתקיים במקרה זה יחד עם משפט ההתכנסות הנשלטת

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}f_n(x)dx=\int_{\mathbb{R}}\lim_{n\to\infty}f_n(x)dx=\int_{\mathbb{R}}f(x)dx=\int_{\mathbb{R}}g(x)dx=2$$

$\square$

סעיף ב'

נחשב את הגבול

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-\frac{x}{2}}dx$$

.

פתרון: נבחין כי f_n היא מונוטונית עולה $\square$