פתרון מטלה 03 — מבנים אלגבריים 2, 80446

30 באפריל 2025

שאלה 1

יהי $p \in \mathbb{N}$ ראשוני ו־$n \in \mathbb{N}$. הפולינומים הציקלוטומי מסדר p^n הוא $\frac{x^{p^n}-1}{x^{p^{n-1}}-1} \in \mathbb{Q}[x]$.

סעיף א'

נראה שזה אכן פולינום, כלומר $x^{p^{n-1}} - 1 \mid x^{p^n} - 1$.

הוכחה: □

סעיף ב'

נוכיח שהפולינום לעיל הוא אי־פריק בעזרת קריטריון אייזנשטיין.

הוכחה: □

שאלה 2

נפרק את $f(x) = x^4 + 4 \in \mathbb{Q}[x]$ לפולינומים אי־פריקים מעל $\mathbb{Q}$.

פתרון: נשים לב שעבור $f \in \mathbb{C}$ מתקיים

$$
\begin{aligned}
x^4 + 4 &= (x^2 + 2i)(x^2 - 2i) = (x - (1 - i)) \cdot (x + (1 - i)) \cdot (x - (1 + i))x + (\dot{1} + i) \\
&= ((x - 1) + i) \cdot ((x + 1) - i) \cdot ((x - 1) - i) \cdot ((x + 1) + i) = ((x - 1)^2 + 1) \cdot ((x + 1)^2 + 1)
\end{aligned}
$$

נשים לב

$$
\begin{aligned}
(x - 1)^2 + 1 &= x^2 - 2x + 2 \\
(x + 1)^2 + 1 &= x^2 + 2x + 2
\end{aligned}
$$

אלו שני פולינומים ממעלה 2, ולכן לפי מטלה 2 מספיק שנשים לב שאין להם שורשים ב־$\mathbb{Q}$ (ואכן אין להם, שכן כל הפיתרונות של הפולינומים הללו הם ב־$\mathbb{C}$) ולכן אין להם שורש ב־$\mathbb{Q}$ ועל־כן הם אי־פריקים. $\square$

שאלה 3

יהיו $p_1, ..., p_n \in \mathbb{N}$ ראשוניים שונים זה מזה. נראה ש־$\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt{p_1}, ..., \sqrt{p_n}\right) : \mathbb{Q}\right] = 2^n$ ושבסיס ל־$\mathbb{Q}\left(\sqrt{p_1}, ..., \sqrt{p_n}\right)$ מעל $\mathbb{Q}$ נתון על־ידי

$$\mathcal{B} = \left\{ \sqrt{\prod_{i \in S} p_i} \mid S \subseteq \{1, ..., n\} \right\}$$

הוכחה: $\square$

שאלה 4

סעיף א'

נתון $\alpha = \sqrt{13 + 6\sqrt{2}}$ ונחשב את $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$.

פתרון: $\square$

סעיף ב'

נתון $\alpha = \sqrt{11 + 6\sqrt{2}}$ ונחשב את $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$.

פתרון: $\square$

שאלה 5

נוכיח ש־$f(x) = x^2 + 4 \in \mathbb{Q}[x]$ הוא אי־פריק אבל ש־$f(x + a)$ לא מקיים את קריטריון אייזנשטיין לאף $a \in \mathbb{Z}$ ולאף $p \in \mathbb{N}$ ראשוני.

הוכחה: $\square$