פתרון מטלה 03 — פונקציות מרוכבות, 80519

14 בנובמבר 2025

שאלה 1

נראה כי ההעתקה $z\mapsto\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2$ ו־$z\mapsto i\frac{1-z^2}{1+z^2}$ ממפות את החצי העליון של הדיסק לחצי מישור העליון.

הוכחה: קודם כל נכתוב מפורשות את התחומים הנדרשים

$$\mathbb{D}^+=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|\le 1 \text{ and } Im(z)\ge 0\},\ \ H^+=\{w\in\mathbb{C}\mid Im(w)>0\}$$

השפה של $\mathbb{D}^+$ הם כל ה־$z\in\mathbb{C}$ המקיימים $|z|=1$ או $Im(z)=0$, נצטרך לכתוב את $\partial\mathbb{D}^+$ מפורשות ולכן ננתח את התנאים האלו, כלומר נרצה לכתוב פרמטריזציה של $z=e^{i\theta}$ ולמצוא תנאים מגבילים על θ.

התנאי $|z|=1$ עם $Im(z)\ge 0$ אומר כי $\left|e^{i\theta}\right|=1$ ולכן $e^{i\theta}=1$ או $e^{i\theta}=-1$ ואנחנו יודעים שתנאים אלו מתקיימים אם $0<\theta<\pi$.

כמו־כן, עם נוסחת אויילר ניתן לראות כי מתקיים $Im(z)\ge 0$:

$$z=e^{i0}=\cos(0)+i\sin(0)=1\Longrightarrow Im(z)=0,$$
$$z=e^{i\pi}=\cos(\pi)+i\sin(\pi)=-1+0=-1\Longrightarrow Im(z)=0,$$
$$z=e^{i\frac{\pi}{2}}=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=0+i\Longrightarrow Im(z)=1$$

התנאי $|z|\le 1$ עם $Im(z)=0$ זו בעצם פונקציה לינארית ממשית עם $z=x$ עבור $-1\le x\le 1$.

נסמן את התנאי $Im(z)\ge 0\wedge |z|=1$ ב־A ואת התנאי $Im(z)=0\wedge |z|\le 1$ ב־B.

נסמן את ההעתקה $z\mapsto\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2$ על־ידי $f(z)$ ונבחין שזו הרכבה של העתקת מוביוס עם הפונקציה של ההעלאה בריבוע.

נכתוב $w_1=\frac{1+z}{1-z}$ עבור $z=e^{i\theta}$ ונחשב בהתאם לשני המקרים שהגדרנו מקודם

$$w_1=\frac{1+z}{1-z}=\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}=\frac{e^{\frac{i\theta}{2}}\left(e^{-\frac{i\theta}{2}}+e^{\frac{i\theta}{2}}\right)}{e^{\frac{i\theta}{2}}\left(e^{-\frac{i\theta}{2}}-e^{\frac{i\theta}{2}}\right)}=\frac{e^{-\frac{i\theta}{2}}\left(e^{\frac{i\theta}{2}}+e^{-\frac{i\theta}{2}}\right)}{e^{-\frac{i\theta}{2}}\left(e^{\frac{i\theta}{2}}-e^{-\frac{i\theta}{2}}\right)}$$

נעדיף את הנוסחה השנייה שכן בתרגול שראינו שמתקיים

$$\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=\sin(z),\ \ \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2i}=\cos(z)\Longrightarrow w_1=\frac{2\cos\left(\frac{z}{2}\right)}{2i\sin\left(\frac{z}{2}\right)}=\frac{\cos\left(\frac{z}{2}\right)}{i\sin\left(\frac{z}{2}\right)}$$

תחת מקרה A, כמובן שהביטוי מוגדר היטב (אין חלוקה ב־0) וגם מתקיים ש־$Re(w_1)=0$ כלומר w_1 הוא מהצורה ib עבור $b\in\mathbb{R}$.

כלומר, $w_1^2=f(z)=-b^2$, כלומר כל הציר המדומה ממופה אל הציר הממשי השלילי.

תחת המקרה B, $-1<z<1$ ולכן $w_1=\frac{1+z}{1-z}\in\mathbb{R}^+$ ולכן גם $w_1^2=f(z)\in\mathbb{R}^+$ כלומר שוב מופנו לחלק הממשי רק שהפעם לחלק החיובי.

כלומר $\partial\mathbb{D}$ ממופה על־ידי f אל כל הישר הממשי.

נרצה לראות מה קורה בנקודות הפנימיות כדי לנתח לאן כל $\mathbb{D}$ נשלח. ניקח $z_0=\frac{i}{2}$ ולכן

$$f(z_0)=\left(\frac{1+\frac{i}{2}}{1-\frac{i}{2}}\right)^2=\left(\frac{2+i}{2-i}\right)^2=\frac{(2+i)^2}{(2-i)^2}=\frac{3+4i}{3-4i}$$

לא עוזר לנו כל־כך, נחשב בדרך אחרת

$$\frac{2+i}{2-i}=\frac{(2+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{3+4i}{5}=\frac{3}{5}+\frac{4i}{5}\Longrightarrow\left(\frac{2+i}{2-i}\right)^2=\left(\frac{3+4i}{5}\right)^2=\frac{-7+24i}{25}$$

אז $Im(z)=\frac{24}{25}\ge 0$, ולכן ראינו שנקודה פנימית נשלחת ל־H^+ ונטען שזה מספיק כדי להראות ש־f ממפה את החצי העליון של הדיסק לחצי מישור העליון: f רציפה כהרכבה של פונקציות רציפות. ניקח z_0 נקודה בחצי הדיסק העליון ונבנה מסילה אל z_1 בחצי הדיסק העליון ונניח $w_0=f(z_0)$ ממפה לחצי המישור העליון ונניח בשלילה ש־$w_1=f(z_1)$ נשלחת לחצי המישור התחתון אז מרציפות f עם המסילה הרציפה שיצרנו נקבל מסילה בין w_0 לבין w_1, אבל אז המסילה הזאת בהכרח עוברת בשפה כלומר יש z_2 כך ש־$f(z_2)$ היא נקודה על הציר הממשי והמקור שלה הוא נקודה פנימית בחצי הדיסק העליון אבל אמרנו שרק נקודות על השפה של החצי דיסק העליון יכולות לשלוח לציר הממשי, ו־z_2 היא פנימית אז זאת כמובן סתירה.

נשאר לעשות את אותו התהליך עבור ההעתקה $z\mapsto i\frac{1-z^2}{1+z^2}$, נפרק אותה לשלוש העתקות שונות

$$z\underset{T_1}{\mapsto}z^2=u\underset{T_2}{\mapsto}\frac{1-u}{1+u}=w\underset{T_3}{\mapsto}iw$$

כלומר שרשור העתקות החזקה, העתקת מוביוס ומכפלה ב־i. ננתח כל העתקה בנפרד:

ההעתקה $T_1(z)=z^2=u$ לוקחת $z\in\mathbb{D}^+$ ושולחת אותו אל $\mathbb{D}$ דיסק היחידה המלא שכן אם $|z|<1$ אז $\left|z^2\right|<1$, כלומר נקודות פנימיות בחצי הדיסק העליון נשלחות לנקודות פנימיות בדיסק היחידה המלא ואם z בשפה אז $u=e^{i2\theta}$ מזהות דה־מואבר ולכן עבור $0<\theta<\pi$ אנחנו נשלחים למעגל היחידה ואם $-1<x<1$ אז אנחנו נשלחים לקטע $[0,1)$.

כלומר, ההעתקה T_1 שולחת את חצי הדיסק העליון אל דיסק היחידה.

נסתכל כעת על $T_2(u)=\frac{1-u}{1+u}=w'$ זו בעצם שוב העתקת מוביוס.

אם נסתכל על הנקודות שעל מעגל היחידה (השפה של דיסק היחידה) אז $|u|=1$ ולכן $|u|=1=u\overline{u}$, ונשים לב שמתקיים

$$\overline{\frac{1-u}{1+u}}=\frac{1-\overline{u}}{1+\overline{u}}=\frac{1-\frac{1}{u}}{1+\frac{1}{u}}=\frac{u-1}{u+1}\Longrightarrow\frac{u-1}{u+1}=\frac{-(1-u)}{1+u}$$

אז אם נסמן $w'=\frac{1-u}{1+u}$ קיבלנו שמתקיים $\overline{w'}=-w'$, וזה בהכרח אומר ש־w' הוא מהצורה $w'=ib$ עבור $b\in\mathbb{R}$, כלומר מעגל היחידה נשלח בידיוק אל הציר המדומה ובגלל ש־$Re(w')=0$ זה נשלח לרביע הימני של חצי המישור העליון.

שוב מאותם טיעוני רציפות אם נסתכל על $u=0$ נשים לב שמ־$w'=1$ ינבע שנקודות פנימיות נשלחות לחצי המישור העליון כי $Re(u)>0$, כלומר נשלח לרביע הימני בחצי המישור העליון.

נשארה ההעתקה האחרונה, $T_3(w')=iw'=w$.

ניזכר שאם כופלים ב־i מספר מרוכב אנחנו מסתובבים בפועל על הציר 90 מעלות **נגד** כיוון השעון ולכן זה לוקח ערכים מהרבע הימני של החצי מישור העליון בו $Re(w')>0$ אל החצי מישור העליון בו $Im(w)>0$ ובנקודות קצה בהן $Re(w')=0$ אנחנו נשלחים בידיוק לציר הממשי בו $Im(w)=0$.

זה בידיוק אומר ש־g גם שולחת את חצי הדיסק העליון לחצי המישור העליון. $\square$

שאלה 2

סעיף א'

תזכורת (זהות אויילר): לכל $z \in \mathbb{C}$ מתקיים

$$e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z)$$

נוכיח שלכל $z = a + ib \in \mathbb{C}$ מתקיים $e^z = e^a(\cos b + i\sin(b))$ ובפרט $e^z \neq 0$ לכל $z \in \mathbb{C}$.

הוכחה:

$$e^z = e^{a+ib} \underset{\text{סעיף ב'}}{=} e^a \cdot e^{ib} \underset{\text{זהות אויילר}}{=} e^a \cdot (\cos(b) + ib)$$

מהיות $e^a > 0$ לכל $a \in \mathbb{R}$ כפונקציה ממשית וחיובית, מתקיים גם

$$|e^z| = \left|e^a \cdot e^{ib}\right| \underset{(\star)}{=} |e^a| \cdot \left|e^ib\right| \underset{(\star\star)}{=} |e^a| \cdot 1 > 0$$

כאשר $(\star)$ זה תרגיל בסיכום של עדי: לכל $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ מתקיים $|w_1 \cdot w_2| = |w_1| \cdot |w_2|$.
וזה נכון בגלל שאם נכתוב $w_1 = x_1 + iy_1, w_2 = x_2 + iy_2$ אז

$$w_1 \cdot w_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2) \Longrightarrow |w_1 \cdot w_2| = \sqrt{(x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (x_1y_2 + y_1x_2)^2}$$
$$= \sqrt{x_1^2x_2^2 - 2x_1x_2y_1y_2 + y_1^2y_2^2 + x_1^2y_2^2 + 2x_1y_2y_1x_2 + y_1^2x_2^2} = \sqrt{x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 + x_1^2y_2^2 + y_1^2x_2^2}$$

מצד שני

$$|w_1| \cdot |w_2| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2} = \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)} = \sqrt{x_1^2x_2^2 + x_1^2y_2^2 + y_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2}$$

וזה מסיים ו־ $(\star\star)$ נובע מהחישוב

$$\left|e^{ib}\right| = |\cos(b) + i\sin(b)| = \sqrt{(\cos(b) + i\sin(b)) \cdot \overline{\cos(b) + i\sin(b)}} = \sqrt{(\cos(b) + i\sin(b))((\cos(b) - i\sin(b)))}$$
$$= \sqrt{\cos^2(b) + \sin^2(b)} = \sqrt{1} = 1$$

□

סעיף ב'

נוכיח שלכל $z, w \in \mathbb{C}$ מתקיים $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$.
הוכחה: יהיו $z, w \in \mathbb{C}$. ראינו

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

ולכן מצד אחד

$$e^z \cdot e^w = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{w^j}{j!}\right) \underset{\text{מכפלת קושי לטורים אינסופיים}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} c_k$$

כאשר

$$c_k = \sum_{l=0}^{k} \frac{z^l}{l!} \cdot \frac{w^{k-l}}{(k-l)!} = \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{k!} \cdot \frac{k!}{l!(k-l)!} z^l \cdot w^{k-l} \underset{\text{הבינום של ניוטון}}{=} \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} z^l \cdot w^{k-l} = \frac{(z+w)^k}{k!}$$

כלומר

$$e^z \cdot e^w = \sum_{k=0}^{\infty} c_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z+w)^k}{k!} \underset{\text{הגדרה}}{=} e^{z+w}$$

□

סעיף ג'

נוכיח שמתקיים $\sin(z) = 0 \iff z \in \{k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

הוכחה: ראינו שעבור $z \in \mathbb{C}$ מתקיים

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

אז

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 0 \iff e^{iz} - e^{-iz} = 0 \iff e^{iz} = e^{-iz} \underset{w = e^{iz}}{\iff} w = w^{-1} = \frac{1}{w} \iff w^2 = 1$$

כלומר $w = \pm 1$.

בהרצאה ראינו שמתקיים $e^iz = 1 \iff iz = 2\pi i\mathbb{Z}$ כלומר $z = 2\pi\mathbb{Z}$ וכן ראינו $e^{iz} = -1 \iff iz = i\pi + 2\pi i\mathbb{Z}$ כלומר $z = \pi + 2\pi\mathbb{Z}$.

במקרה אחד קיבלנו לכל כפולה זוגית של π עם $\mathbb{Z}$ ובמקרה השני קיבלנו לכל כפולה אי־זוגית של π עם $\mathbb{Z}$, במילים אחרות

$$\sin(z) = 0 \iff z \in \{2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{(2k+1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

$\square$

סעיף ד'

יהיו $z, w \in \mathbb{C}$ ונוכיח שמתקיים $\cos(z + w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$.

הוכחה: ראינו

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \;\; \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

ולכן

$$\cos(z + w) = \frac{e^{i(z+w)} + e^{-i(z+w)}}{2} = \frac{e^{iz+iw} + e^{-iz-iw}}{2} \underset{\text{סעיף ב'}}{=} \frac{e^{iz}e^{iw} + e^{-iz}e^{-iw}}{2}$$

מצד שני יש לנו

$$\cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} - \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} =$$

$$\frac{e^{iz}e^{iw} + e^{iz}e^{-iw} + e^{-iz}e^{iw} + e^{-iz}e^{-iw}}{4} + \frac{e^{iz}e^{iw} - e^{iz}e^{-iw} - e^{-iz}e^{iw} + e^{-iz}e^{-iw}}{4}$$

$$= \frac{e^{iz}e^{iw} + \cancel{e^{iz}e^{-iw}} + \cancel{e^{-iz}e^{iw}} + e^{-iz}e^{-iw} + e^{iz}e^{iw} - \cancel{e^{iz}e^{-iw}} - \cancel{e^{-iz}e^{iw}} + e^{-iz}e^{-iw}}{4}$$

$$= \frac{2e^{iz}e^{iw} + 2e^{-iz}e^{-iw}}{4} = \frac{e^{iz}e^{iw} + e^{-iz}e^{-iw}}{2}$$

כאשר האחרון שווה ל־$\cos(z + w)$ לפי מה שמצאנו. $\square$

סעיף ה'

יהיו $z, w \in \mathbb{C}$ ונוכיח שמתקיים $\sin(z + w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$.

הוכחה: ראינו

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

ולכן

$$\sin(z + w) = \frac{e^{i(z+w)} - e^{-i(z+w)}}{2i} = \frac{e^{iz+iw} - e^{-iz-iw}}{2i} \underset{\text{סעיף ב'}}{=} \frac{e^{iz}e^{iw} - e^{-iz}e^{-iw}}{2i}$$

מצד שני יש לנו

$$\sin(z)\cos(w)+\cos(z)\sin(w)=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\frac{e^{iw}+e^{-iw}}{2}+\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i}$$

$$=\frac{e^{iz}e^{iw}+\cancel{e^{iz}e^{-iw}}-\cancel{e^{-iz}e^{iw}}-e^{-iz}e^{-iw}+e^{iz}e^{iw}-\cancel{e^{iz}e^{-iw}}+\cancel{e^{-iz}e^{iw}}-e^{-iz}e^{-iw}}{4i}$$

$$=\frac{2e^{iz}e^{iw}-2e^{-iz}e^{-iw}}{4i}=\frac{e^{iz}e^{iw}-e^{-iz}e^{-iw}}{2i}$$

כאשר האחרון שווה ל־$\sin(z+w)$ לפי מה שמצאנו. $\square$

שאלה 3

תזכורת: ראינו בהרצאה שהבאים מתקיימים

$$\cos(z)=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},\ \ \sin(z)=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},\ \ \cosh(z)=\cos(iz)=\frac{e^{z}+e^{-z}}{2},\ \ \sinh(z)=-i\sin(iz)=\frac{e^{z}-e^{-z}}{2}$$

סעיף א'

נניח $z=a+ib$ ונוכיח שמתקיים $\cos(z)=\cos(a)\cosh(b)-i\sin(a)\sinh(b)$

הוכחה: ראינו בהרצאה שהבאים מתקיימים

$$\cos(z)=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},\ \ \sin(z)=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},\ \ \cosh(z)=\cos(iz)=\frac{e^{z}+e^{-z}}{2},\ \ \sinh(z)=-i\sin(iz)=\frac{e^{z}-e^{-z}}{2}$$

מתקיים

$$\cos(z)=\cos(a+ib)\underset{\text{שאלה 2 סעיף ד'}}{=}\cos(a)\cos(ib)-\sin(a)\sin(ib)$$

אבל מהגדרת הפונקציות ההיפרבוליות מתקיים

$$\cos(ib)=\cosh(b),\ \ \sin(ib)=i\sinh(b)$$

ולכן

$$\cos(z)=\cos(a)\cos(ib)-\sin(a)\sin(ib)=\cos(a)\cosh(b)-i\sin(a)\sinh(b)$$

$\square$

סעיף ב'

נניח $z=a+ib$ ונוכיח שמתקיים $\sin(z)=\sin(a)\cosh(b)+i\cos(a)\sinh(b)$.

הוכחה: באופן דומה לסעיף הקודם

$$\sin(z)=\sin(a+ib)\underset{\text{שאלה 2 סעיף ה'}}{=}\sin(a)\cos(ib)+\cos(a)\sin(ib)\underset{\substack{\cos(ib)=\cosh(b)\\ \sin(iz)=\frac{\sinh(z)}{-i}}}{=}\sin(a)\cosh(b)+\cos(a)\frac{\sinh(b)}{-i}$$

נשים לב שמתקיים

$$\frac{1}{-i}=\frac{1}{-i}\cdot\frac{i}{i}=\frac{i}{(-i)\cdot i}=\frac{i}{1}=i$$

ולכן

$$\sin(z)=\sin(a+ib)=\sin(a)\cosh(b)+\cos(a)\frac{\sinh(b)}{-i}=\sin(a)\cosh(b)+i\cos(a)\sinh(b)$$

$\square$

סעיף ג'

לכל $z\in\mathbb{C}$ נוכיח שמתקיים $\cosh^2(z)-\sinh^2(z)=1$.

הוכחה: יהי $z\in\mathbb{C}$, מתקיים

$$\cosh^2(z)-\sinh^2(z)=\left(\frac{e^z+e^{-z}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^z-e^{-z}}{2}\right)^2=\frac{e^ze^z+2e^ze^{-z}+e^{-z}e^{-z}-e^ze^z+2e^{-z}e^z-e^{-z}e^{-z}}{4}$$

$$=e^{-z}e^{z}\underset{\text{שאלה 2 סעיף ב'}}{=}e^{-z+z}=e^0=1$$

$\square$

סעיף ד'

יהי $z = a + ib$ ונוכיח שמתקיים $|\cos(z)|^2 = \cos^2(a) + \sinh^2(b)$.

הוכחה: יהי $z = a + ib \in \mathbb{C}$, בסעיף א' ראינו שמתקיים

$$\cos(z) = \cos(a)\cosh(b) - i\sin(a)\sinh(b)$$

נשתמש בזה

$$\begin{aligned}|\cos(z)|^2 = |\cos(a)\cosh(b) - i\sin(a)\sinh(b)|^2 &= (\cos(a)\cosh(b) - i\sin(a)\sinh(b)) \cdot \overline{\cos(a)\cosh(b) - i\sin(a)\sinh(b)} \\ &= (\cos(a)\cosh(b) - i\sin(a)\sinh(b)) \cdot (\cos(a)\cosh(b) + i\sin(a)\sinh(b)) \\ &= \cos^2(a)\cosh^2(b) + \sin^2(a)\sinh^2(b)\end{aligned}$$

בסעיף הקודם ראינו שמתקיים $\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$ ולכן

$$\begin{gathered}\cos^2(a)\cosh^2(b) + \sin^2(a)\sinh^2(b) = \cos^2(a)(1 + \sinh^2(b)) + \sin^2(a)\sinh^2(b) \\ = \cos^2(a) + \cos^2(a)\sinh^2(b) + \sin^2(a)\sinh^2(a) = \cos^2(a) + \sinh^2(b)(\cos^2(a) + \sin^2(a)) \\ = \cos^2(a) + \sinh^2(b)\end{gathered}$$

כאשר $\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$ זו זהות ידועה אבל נוכיח אותה כמו בסעיף הקודם:

$$\begin{gathered}\left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 = \frac{e^{iz}e^{iz} + 2e^{iz}e^{-iz} + e^{-iz}e^{-iz}}{4} - \frac{e^{iz}e^{iz} - 2e^{iz}e^{-iz} + e^{-iz}e^{-iz}}{4} \\ = \frac{4e^{iz}e^{-iz}}{4} = e^{iz}e^{-iz} \underset{\text{שאלה 2 סעיף ב'}}{=} e^{iz-iz} = e^0 = 1\end{gathered}$$

□

סעיף ה'

יהי $z = a + ib$ ונוכיח שמתקיים $|\sin(z)|^2 = \sin^2(a) + \sinh^2(b)$.

הוכחה: יהי $z = a + ib \in \mathbb{C}$, בסעיף ב' ראינו שמתקיים

$$\sin(z) = \sin(a)\cosh(b) + i\cos(a)\sinh(b)$$

נשתמש בזה ונפעל כמו בסעיף הקודם

$$\begin{gathered}|\sin(z)|^2 = |\sin(a)\cosh(b) + i\cos(a)\sinh(b)|^2 = (\sin(a)\cosh(b) + i\cos(a)\sinh(b)) \cdot \overline{(\sin(a)\cosh(b) + i\cos(a)\sinh(b))} \\ (\sin(a)\cosh(b) + i\cos(a)\sinh(b)) \cdot (\sin(a)\cosh(b) - i\cos(a)\sinh(b)) = \sin^2(a)\cosh^2(b) + \cos^2(a)\sinh^2(b) \\ = \sin^2(a)(1 + \sinh^2(b)) + \cos^2(a)\sinh^2(b) = \sin^2(a) + \sin^2(a)\sinh^2(b) + \cos^2(a)\sinh^2(b) \\ = \sin^2(a) + \sinh^2(b)(\sin^2(a) + \cos^2(a)) = \sin^2(a) + \sinh^2(b)\end{gathered}$$

□