הכנה למבחן — משפטים והוכחות נבחרים — תורת המידה, 80517

23 בפברואר 2026

תוכן עניינים

1 מידה

1.1 תנאי מספיק בשביל פונקציה מדידה

משפט 1.1.1 (תנאי מספיק בשביל פונקציה מדידה): $(X, \mathcal{A})$ מרחב מדיד ו־(Y, τ) מרחב טופולוגי. אם $\mathbb{B}_Y := \sigma(\tau)$ היא σ־אלגברת בורל על Y אז הפונקציה $f : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathbb{B}_Y)$ מדידה אם ורק אם המקור של כל קבוצה פתוחה ב־τ הוא מדיד, כלומר אם ורק אם לכל $U \in \tau$, $f^{-1}(U) \in \mathcal{A}$.

הוכחה: הכיוון הראשון נובע ישירות מהגדרת הפונקציה המדידה (כי מהגדרה בשביל שהפונקציה תהיה מדידה צריך שהמקור של כל קבוצה מדידה תחת f יהיה מדיד).

בכיוון השני, נסמן $\Omega := \{E \subseteq Y \mid f^{-1}(E) \in \mathcal{A}\}$.

מההנחה, כל $U \in \tau$ מקיימת $f^{-1}(U) \in \mathcal{A}$ ולכן $\tau \subseteq \Omega$ ומטענה שראינו נובע ש־Ω היא σ־אןלגברה.

מצד שני, σ־אלגברת בורל $\mathbb{B}_Y$ היא ה־σ־אלגברה הקטנה ביותר על Y שמכילה את τ ולכן $\sigma(\tau) = \mathbb{B}_Y \subseteq \Omega$ ולכן לכל $E \in \mathbb{B}_Y$ מתקיים $E \in \Omega$ כלומר $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$ ולכן f מדידה לפי $\mathbb{B}_Y$. $\square$

1.2 תנאי שקול לפונקציה מדידה

משפט 1.2.1 (תנאי שקול לפונקציה מדידה): יהי $(X,\mathcal{A})$ מרחב מדיד. אם $f:X\to[-\infty,\infty]$ פונקציה אזי f מדידה אם ורק אם $f^{-1}((\alpha,\infty])$ לכל $\alpha\in\mathbb{R}$.

הוכחה:

$\Leftarrow$ מיידי מהגדרה כי אם f מדידה לכל $E\in\mathbb{B}([-\infty,\infty])$ מתקיים $f^{-1}(E)\in\mathcal{A}$ ולכן בהינתן $\alpha\in\mathbb{R}$ כלשהו, מתקיים $(\alpha,\infty]\in\mathbb{B}([\infty,\infty])$ ובפרט $f^{-1}((\alpha,\infty])\in\mathcal{A}$.

$\Longrightarrow$ מספיק להראות שהמקור של כל אחת מהקבוצות

$$(\star)\qquad(\alpha,\beta),\qquad(\alpha,\infty],\qquad[-\infty,\beta)$$

הוא מדיד, ואכן:

1. בהינתן $\beta\in\mathbb{R}$ מתקיים

$$f^{-1}([-\infty,\beta))=\bigcup_{n=1}^{\infty}f^{-1}\left(\left[-\infty,\beta-\frac{1}{n}\right)\right)=\bigcup_{n=1}^{\infty}f^{-1}\left(\left(\beta-\frac{1}{n},\infty\right]^c\right)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(f^{-1}\left(\left(\beta-\frac{1}{n},\infty\right]\right)\right)^c\in\mathcal{A}$$

כאשר המעבר האחרון נובע מההנחה שלכל $\alpha\in\mathbb{R}$ מתקיים $f^{-1}((\alpha,\infty])$ ולכן לכל $n\in\mathbb{N}$ בפרט עבור $\alpha=\beta-\frac{1}{n}\in\mathbb{R}$ נקבל $f^{-1}\big(\big(\beta-\frac{1}{n},\infty\big]\big)\in\mathcal{A}$.

אבל $\mathcal{A}$ היא σ־אלגברה ולכן מצד אחד נקבל $\big(f^{-1}\big(\big(\beta-\frac{1}{n},\infty\big]\big)\big)^c$ לכל $n\in\mathbb{N}$ ומצד שני $\bigcup_{n=1}^{\infty}\big(f^{-1}\big(\big(\beta-\frac{1}{n},\infty\big]\big)\big)^c\in\mathcal{A}$ לכל $\beta\in\mathbb{R}$, וזה סוגר את שני המקרים הימניים.

2. בהינתן $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

$$f^{-1}((\alpha,\beta))=f^{-1}([-\infty,\beta)\cap(\alpha,\infty])=f^{-1}([-\infty,\beta))\cap f^{-1}((\alpha,\infty])\in\mathcal{A}$$

כאשר המעבר האחרון נובע מכך ש־σ־אלגברה סגורה לחיתוכים סופיים.

כעת, אם $U\subseteq[-\infty,\infty]$ היא איחוד בן־מנייה של קבוצות מהצורה $(\star)$ ונקבל — אזי $U=\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n$ כאשר לכל $n\in\mathbb{N}$, I_n הוא מהצורה של $(\star)$ וכי קבוצה פתוחה ב־$[-\infty,\infty]$ היא איחוד בן־מנייה של קבוצות מהצורה $(\star)$ ונקבל

$$f^{-1}(U)=f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n\right)=\bigcup_{n=1}^{\infty}f^{-1}(I_n)\in\mathcal{A}$$

כלומר המקור של כל קבוצה פתוחה הוא מדיד ולכן f מדידה. $\square$

1.3 מדידות נשמרת תחת הפעלת sup/inf/limsup/liminf

משפט 1.3.1 (מדידות נשמרת תחת הפעלת sup/inf/limsup/liminf): יהי $(X, \mathcal{A})$ מרחב מדידה. אם $\{f_n : X \to [-\infty, \infty]\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות מדידות, אז הפונקציות

$$(1)\ \sup_{n\in\mathbb{N}}\{f_n\} \qquad (2)\ \inf_{n\in\mathbb{N}}\{f_n\} \qquad (3)\ \limsup_{n\to\infty} f_n \qquad (4)\ \liminf_{n\to\infty} f_n$$

כולן מדידות.

הוכחה: (1) נסמן $g := \sup_{n\in\mathbb{N}}\{f_n\}$, ומספיק להראות שהקבוצה $g^{-1}((a,\infty])$ היא מדידה לכל $\alpha \in \mathbb{R}$, אז נרצה להראות

$$(\star)\ g^{-1}((\alpha,\infty)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}((a,\infty])$$

$\subseteq$: אם $x \in g^{-1}((\alpha,\infty])$ אז

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\{f_n(x)\} = g(x) \in (\alpha,\infty] > \alpha$$

כלומר קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש־$f_{n_0}(x) > \alpha$ (אחרת לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $f_n(x) \leq \alpha$ וזו סתירה) אז

$$x \in f_{n_0}^{-1}((\alpha,\infty]) \Longrightarrow x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}((\alpha,\infty]) \Longrightarrow g^{-1}((\alpha,\infty]) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}((\alpha,\infty])$$

$\supseteq$: אם $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}((\alpha,\infty])$ אז קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש־$x \in f_n^{-1}((\alpha,\infty])$ ולכן $f_{n_0}(x) \in (\alpha,\infty]$ כלומר $f_{n_0}(x) > \alpha$ ומתקיים

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\{f_n(x)\} \geq f(n_0)(x) > \alpha \Longrightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}}\{f_n(x)\} > \alpha \Longrightarrow g(x) \in (\alpha,\infty] \Longrightarrow x \in g^{-1}((\alpha,\infty])$$

אז $(\star)$ נכון ולכן f_n מדידה לכל $n \in \mathbb{N}$ ולכן $f_n^{-1}((\alpha,\infty])$ מדידה לכל $n \in \mathbb{N}$, כלומר הקבוצה $g^{-1}((\alpha,\infty])$ היא איחוד בן־מנייה של קבוצות מדידות ולכן מדידה בעצמה וקיבלנו שהפונקציה g מדידה.
(2) זהה עבור קטעים מהצורה $[-\infty,\beta]$.
(3)

$$\limsup_{n\to\infty} f_n = \inf_{k\in\mathbb{N}}\left\{\sup_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\geq k}}\{f_n\}\right\}$$

ולכן עבור סדרת הפונקציות $\{h_k : X \to [-\infty,\infty]\}_{k=1}^{\infty}$ המוגדרת על־ידי

$$\forall k \in \mathbb{N},\ h_k := \sup_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\geq k}}\{f_n\}$$

מתקיים מ־(1) ש־$\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות מדידות ונקבל מ־(2) ש־$\inf_{k\in\mathbb{N}}\{h_k\}$ מדידה ולכן $\limsup_{n\to\infty} f_n$ מדידה.
(4) באותו אופן למקרה הקודם רק עבור

$$\liminf_{n\to\infty} f_n = \sup_{k\in\mathbb{N}}\left\{\inf_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\geq k}}\{f_n\}\right\}$$

$\square$

1.4 תכונות בסיסיות של מידה

משפט 1.4.1 (תכונות בסיסיות של מידה): אם $\mu : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ היא מידה על מרחב מדיד $(X,\mathcal{A})$ אזי

1. $\mu(\emptyset) = 0 \iff \mu \not\equiv \infty$
2. **אדטיביות סופית:** לכל אוסף סופי זר בזוגות $(E_i)_{i=1}^n \subseteq \mathcal{A}$ מתקיים $\mu\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu(E_i)$
3. **מונוטוניות ביחס להכלה:** אם $A \subseteq B \in \mathcal{A}$ מדידות אזי $\mu(A) \le \mu(B)$
4. **רציפות לסדרות עולות:** תהיי $(A_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{A}$ סדרה עולה של קבוצות מדידות אזי $\mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$
5. **רציפות לסדרות יורדות:** תהיי $(C_n)_{n=1}^\infty$ סדרה יורדת של סדרות מדידות. אם $\mu(C_1) < \infty$ אזי $\mu\left(\bigcap_{n=1}^\infty C_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(C_n)$
6. **σ־תת אדטיביות:** אם $(A_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{A}$ אוסף כלשהו של קבוצות מדידות אזי $\mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) \le \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n)$

הוכחה:

1. כיוון אחד נובע מהגדרת המידה, מהכיוון השני נובע שיש $A \in \mathcal{A}$ עם $\mu(A) < \infty$ ולכן ניתן להחסיר זאת, כלומר

$$\cancel{\mu(A)} = \mu\left(A \dot{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}} \emptyset\right) \underset{\text{הקבוצה הריקה זרה לעצמה}}{\overset{}{\underset{\sigma\text{־אדטיביות}}{=}}} \cancel{\mu(A)} + \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(\emptyset) = 0$$

2. באופן דומה לסעיף הקודם נשרשר $\emptyset$ עם σ־אדטיביות וסיימנו
3. $$\mu(B) = \mu((B\setminus A) \mathbin{\dot\cup} A) = \mu(B\setminus A) + \mu(A) \ge \mu(A)$$
4. נסמן $B_1 = E_1$ ולכל $n \in \mathbb{N}$ נגדיר $B_{n+1} = A_{n+1} \setminus A_n$ אזי $(B_n)_{n=1}^\infty$ סדרה של קבוצות מדידות וזרות בזוגות ולכל N מתקיים $\bigcup_{n=1}^N A_n = A_N = \dot\bigcup_{n=1}^N B_n$ ו־$\dot\bigcup_{n=1}^\infty B_n = \bigcup_{n=1}^\infty$ ולכן

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) = \mu\left(\dot{\bigcup_{n=1}^\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^\infty \mu(B_n) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^N \mu(B_n) = \lim_{N\to\infty} \mu\left(\bigcup_{n=1}^N A_n\right)$$

5. נסמן $D_n = C_n \setminus C_{n+1}$ ולכן $C_1 = \dot\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$ ומהאדטיביות סופית והעברת אגפים (שאפשר מהסופיות) נקבל

$$\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n\right) = \mu(C_1) - \mu\left(\dot{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}} D_n\right) = \mu(C_1) - \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(D_n) = \lim_{N\to\infty} \mu(C_1) - \mu\left(\dot{\bigcup_{n=1}^N} D_n\right) = \lim_{N\to\infty} \mu(C_{N+1})$$

שכן $C_1 \setminus \dot\bigcup_{n=1}^N D_n = C_{N+1}$

6. זה בעצם אי־שיוויון בול מהסתברות רק על מרחבי מידה כלליים: נגדיר $B_1 = A_1, B_{n+1} = B_{n+1} \setminus \bigcup_{m=1}^n A_n$.
אז B_n זרים בזוגות, $B_n \subseteq A_n$ ו־$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \dot\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ ומתקיים

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \mu\left(\dot{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}} B_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

$\square$

2 אינטגרציה

2.1 לכל פונקציה מדידה יש סדרת פונקציות פשוטות שמתכנסת אליה

משפט 2.1.1 (לכל פונקציה מדידה יש סדרת פונקציות פשוטות שמתכנסת אליה): אם $f : X \to [0, \infty]$ פונקציה מדידה כלשהי, אז קיימת סדרת פונקציות פשוטות $\{s_n\} \mid X \to [0, \infty)_{n=1}^{\infty}$ כך שמתקיים

1. $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית עולה וחסומה על־ידי f, כלומר

$$\forall n, m \in \mathbb{N},\ m \le n \Longrightarrow 0 \le s_m \le s_n \le f$$

2. הסדרה $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת נקודתית ל־f, כלומר

$$\forall x \in X,\ s_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$$

הוכחה: נגדיר $\varphi_n : [0, \infty) \to [0, \infty)$ על־ידי

$$\forall x \in [0, \infty),\ \varphi_n(x) := \begin{cases} 2^{-n} \cdot \lfloor 2^n \cdot x \rfloor & 0 \le x < n \\ n & x \ge n \end{cases}$$

אז לכל $n \in \mathbb{N}$, φ_n היא צירוף לינארי של פונקציות מהצורה $\mathbb{1}_{\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}}$ לכל $0 \le k \le n \cdot 2^n - 1$ ולכן היא מדידה בורל ביחס ל־$[0, \infty)$ ולכן תמונתה סופית ו־φ_n היא פונקציה פשוטה.
לכל $x \in [0, n]$ ולכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$\lfloor 2^n x \rfloor \le 2^n x < \lfloor 2^n x \rfloor + 1 \Longleftrightarrow 2^{-n} \lfloor 2^n x \rfloor \le x < 2^{-n} (\lfloor 2^n x \rfloor + 1)$$

כלומר

$$\varphi_n(x) \le x < \varphi_n(x) + 2^{-n} \Longleftrightarrow \varphi_n(x) \le x \wedge x < \varphi_n(x) + 2^{-n} \Longleftrightarrow x \ge \varphi_n(x) \wedge \varphi_n(x) > x - 2^{-n} \Longleftrightarrow x - 2^{-n} < \varphi_n(x) \le x$$

ולכן $x - 2^{-n} < \varphi_n(x) \le x$ לכל $n \in \mathbb{N}, x \in [0, n]$ ומכאן הרי ש־$\varphi_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ לכל $x \in [0, n]$ וכן לכל $x \in [0, \infty)$ מתקיים

$$\forall n, m \in \mathbb{N},\ n \le m \Longrightarrow \varphi_n \le \varphi_m \le x$$

ולכן $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית עולה ואם לכל $n \in \mathbb{N}$ נגדיר $s_n := \varphi_n \circ f$ נקבל את הטענה שכן הרכבת פונקציות מדידות היא פונקציה מדידה, אז $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ מקיימת את הנדרש. $\square$

2.2 תכונות האינטגרל

משפט 2.2.1 (תכונות האינטגרל): תהיינה $f, g : X \to [0,\infty]$ פונקציות מדידות ותהיינה $A, B, E \in \mathcal{E}$ מדידות.
האינטגרל של f, g ביחס ל־μ מקיים את התכונות הבאות

1. מונטוניות של f, g: אם $0 \le f \le g$ אזי $0 \le \int_A f\,\mathrm{d}\mu \le \int_A g\,\mathrm{d}\mu$
2. מונטוניות ביחס להכלה: אם $0 \le f$ ו־$A \subseteq B$ אזי $\int_A f\,\mathrm{d}\mu \le \int_B f\,\mathrm{d}\mu$
3. הומוגניות: אם $0 \le f$ ו־$c \in [0,\infty)$ אזי $\int_A c \cdot f\,\mathrm{d}\mu = c \cdot \int_A f\,\mathrm{d}\mu$
4. אם $f|_E \equiv 0$ אזי $\int_E f\,\mathrm{d}\mu = 0$ (גם אם $\mu(E) = \infty$)
5. אינטגרציה על קבוצות ממידה אפס: אם $\mu(E) = 0$ אזי $\int_E f\,\mathrm{d}\mu = 0$ (גם אם $f|_E \equiv \infty$)
6. אינטגרציה על קבוצה בניסוח עם הפונקציה המציינת: אם $0 \le f$ אזי $\int_E f\,\mathrm{d}\mu = \int_X f \cdot \mathbb{1}_E\,\mathrm{d}\mu$
7. אינטגרציה על איחוד זר: אם $A \cap B = \emptyset$ אזי $\int_{A \cup B} f\,\mathrm{d}\mu = \int_A f\,\mathrm{d}\mu + \int_B \mathrm{d}\mu$

הוכחה:

1. בלי הגבלת הכלליות, $X = E$ אחרת ניקח לכל $E \in \mathcal{A}$, $f \cdot \mathbb{1}_E, g \cdot \mathbb{1}_E$ ועדיין נחשב אינטגרציה על כל X ונקבל מהגדרה

$$\int f d\mu = \sup\left\{ \int_E s d\mu \mid 0 \le s \le f,\ \text{פשוטה } s \right\}$$

מהיות $0 \le f \le g$ נובע גם שלכל s כזאת מתקיים $0 \le s \le g$ ולכן מתקיים

$$\left\{ \int_E s d\mu \mid 0 \le s \le f,\ \text{פשוטה } s \right\} \subseteq \left\{ \int_E s d\mu \mid 0 \le s \le g,\ \text{פשוטה } s \right\}$$

ובפרט בלקיחת סופרמום

$$\int f d\mu = \sup\left\{ \int_E s d\mu \mid 0 \le s \le f,\ \text{פשוטה } s \right\} \le \sup\left\{ \int_E s d\mu \mid 0 \le s \le g,\ \text{פשוטה } s \right\} = \int g d\mu$$

2. יהי $x \in X$.
אם $x \in A$ אז $\mathbb{1}_A(x) = 1$ ומהנתון $A \subseteq B$ מתקיים $\mathbb{1}_B(x) = 1$.
אם $x \notin A$ אזי $\mathbb{1}_A(x) = 0$ ויש שתי אפשרויות: או ש־$x \in B$ או ש־$x \notin B$, כלומר או ש־$\mathbb{1}_B(x) = 1$ או ש־$\mathbb{1}_B(x) = 0$.
בין כה וכה, מכך ש-$A \subseteq B$ נובע כי בהתאמה מתקיים $\mathbb{1}_A(x) \le \mathbb{1}_B(x)$ לכל $x \in X$.
בפרט נובע מכך שלכל $x \in X$ מתקיים $f \cdot \mathbb{1}_A(x) \le f \cdot \mathbb{1}_B(x)$ והם בהתאמה מתאימים מהגדרה ל־$\int_A f d\mu, \int_B f d\mu$.
מהסעיף הקודם נובע אם כך ש־$\int_A f d\mu \le \int_B f d\mu$ (הסעיף הקודם הוא מונוטוניות האינטגרל) עבור $E = X$.
3. תהיי $E \in \mathcal{A}$, ותהיי $s \le f$ פונקציה פשוטה כך שמתקיים $s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{E_i}$ עם $\alpha_i \ge 0$ ו־$\{E_i\}$ קבוצות זרות בזוגות ומדידות ב־E.
ראינו שמתקיים $\int_E s d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(E_i)$.
נבחין שגם cs היא פונקציה פשוטה שכן

$$cs(x) = \sum_{i=1}^n (c\alpha_i)\mathbb{1}_{E_i}(x) \Longrightarrow \int_E cs(x) d\mu = \sum_{i=1}^n (c\alpha_i)\mu(E_i) = c\sum_{i=1}^n \alpha i \mu(E_i) = c\int_E s d\mu$$

נסמן מהגדרה

$$\int_E f d\mu = \sup\left\{ \int_E s d\mu \mid 0 \le s \le f,\ \text{פשוטה } s \right\} = S_f$$

$$\int_E cf d\mu = \sup\left\{ \int_E p d\mu \mid 0 \le p \le cf,\ \text{פשוטה } p \right\} = S_{cf}$$

נשים לב שלכל $0 \le p \le cf$, אם $c > 0$ אז אם נגדיר פונקציה פשוטה $0 \le s' = \frac{p}{c} \le f$ ומתקיים ממה שראינו לעיל,

$$\int_E p d\mu = \int_E cs d\mu = c\int_E d\mu$$

זה נכון לכל p פשוטה כזאת ולכן

$$S_{cf}=\sup\left\{c\int_E sd\mu \mid 0\le s\le f,\ \text{פשוטה } s\right\}\underset{\text{מכפלה עם סופרמה אי-שלילית}}{=}c\cdot\sup\left\{\int_E sd\mu \mid 0\le s\le f,\ \text{פשוטה } s\right\}=c\cdot S_f$$

אם $c=0$, אנחנו רוצים להראות

$$\int_E 0\cdot f\mu=0\cdot\int_E fd\mu$$

בצד שמאל יש לנו פשוט את הפונקציה $g\equiv 0$ וזאת כמובן פונקציה פשוטה ולכן

$$\int_E 0d\mu=\sum_{i=1}^n\alpha_i\mu(E_i)=\sum_{i=1}^n 0\mu(E_i)=0$$

מצד שני, יש לנו $0\cdot\int_E fd\mu$ שתמיד כמובן שווה לאפס בזכות הקונבנציה $0\cdot\infty=0$.

4. תהיי $s=\sum_{i=1}^n\alpha_i\mathbb{1}_{A_i}$ פונקציה פשוטה ואם נסתכל על E אזי $0\le s\le f$ וכן $f|_E\equiv 0$ ולכן על E, $s(x)=0$ לכל $x\in E$ ומהגדרה

$$\int_E s\,\mathrm{d}\mu=\sum\alpha_i\mu(A_i\cap E)$$

ולכן אם $A_i\cap E$ לא ריקה אז המקדמים α_i חייבים להיות אפסים ולכן הסכום הוא בידיוק 0; מהגדרת אינטגרל לבג

$$\int_E f\,\mathrm{d}\mu=\sup\left\{\int_E s\,\mathrm{d}\mu \mid 0\le s\le f,\text{פשוטה } s\right\}$$

אבל לכל פשוטה הנימוק לעיל תקף כלומר האינטגרל על כל הקבוצה הוא 0 ולכן $\int_E f\,\mathrm{d}\mu=0$ (ניזכר כי $0\cdot\infty=0$ ולכן גם הסוגריים נכונים).

5. תהיי $0\le s\le f$ פונקציה פשוטה $s=\sum_{i=1}^n\alpha_i\mathbb{1}_{A_i}$ ומהגדרת האינטגרל

$$\int_E s\,\mathrm{d}\mu=\sum_{i=1}^n\alpha_i\cdot\mu(A_i\cap E)$$

אבל $\mu(E)=0$ ו-$A_i\cap E\subseteq E$ ולכן ממונטוניות, $\mu(A_i\cap E)=0$ כלומר $\int_E s\,\mathrm{d}\mu=0$; זה נכון לכל פונקציה פשוטה ולכן מהגדרת האינטגרל מתקיים $\int_E f\,\mathrm{d}\mu=0$ (אפשר וצריך לסיים עם משפט ההתכנסות המונוטונית ועם $\{s_n\}_{n=1}^\infty$ פשוטות כך ש-$s_n\nearrow f$)

6. מתקיים

$$\int_E\mathbb{1}_A\,\mathrm{d}\mu=\mu(A\cap E)$$

אבל $\mathbb{1}_{A\cap E}=\mathbb{1}_A\cdot\mathbb{1}_E$ ולכן

$$\int_X\mathbb{1}_A\cdot\mathbb{1}_E\,\mathrm{d}\mu=\int_X\mathbb{1}_{A\cap E}\,\mathrm{d}\mu=\mu(A\cap E)$$

אז הטענה נכונה לאינדיקטורים; תהיי $s=\sum_{i=1}^n\alpha_i\mathbb{1}_{A_i}$ פונקציה פשוטה, אז

$$\int_E s\,\mathrm{d}\mu=\sum_{i=1}^n\alpha_i\int_E\mathbb{1}_{A_i}\,\mathrm{d}\mu=\sum_{i=1}^n\alpha_i\int_X\mathbb{1}_{A_i}\cdot\mathbb{1}_E\,\mathrm{d}\mu=\int_X\left(\sum_{i=1}^n\alpha_i\mathbb{1}_{A_i}\right)\cdot\mathbb{1}_E\,\mathrm{d}\mu=\int_X s\cdot\mathbb{1}_E\,\mathrm{d}\mu$$

והטענה נכונה לפונקציות פשוטות; לבסוף, נשתמש במשפט ההתכנסות המונוטונית שכן יש $\{s_n\}_{n=1}^\infty$ פשוטות כך ש-$s_n\nearrow f$ נקודתית ונקבל

$$\int_E f\,\mathrm{d}\mu=\int_E\left(\lim_{n\to\infty}s_n\right)\mathrm{d}\mu=\lim_{n\to\infty}\int_E s_n\,\mathrm{d}\mu=\lim_{n\to\infty}\int_X s_n\cdot\mathbb{1}_E\,\mathrm{d}\mu=\int_X\left(\lim_{n\to\infty}s_n\cdot\mathbb{1}_E\right)\mathrm{d}\mu=\int_X f\cdot\mathbb{1}_E\,\mathrm{d}\mu$$

7. מתקיים $\mathbb{1}_{A\uplus B}(x)=\mathbb{1}_A(x)+\mathbb{1}_B(x)$ ולכן מהפעלת הסעיף הקודם פעמיים בקצוות

$$\int_{A\uplus B}f\,\mathrm{d}\mu=\int_X f\cdot\mathbb{1}_{A\uplus B}\,\mathrm{d}\mu=\int_X f\cdot(\mathbb{1}_A+\mathbb{1}_B)\,\mathrm{d}\mu\underset{\text{לינאריות}}{=}\int_X f\cdot\mathbb{1}_A\,\mathrm{d}\mu+\int_X f\cdot\mathbb{1}_B\,\mathrm{d}\mu=\int_A f\,\mathrm{d}\mu+\int_B f\,\mathrm{d}\mu$$

$\square$

2.3 משפט ההתכנסות המונוטונית

משפט 2.3.1 (משפט ההתכנסות המונוטונית): יהי $(X,\mathcal{A},\mu)$ מרחב מידה ותהיי $\{f_n \mid X\to[0,\infty]\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות מדידות.
אם $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית עולה, אזי הפונקציה

$$f\coloneqq\lim_{n\to\infty}f_n=\sup_{n\in\mathbb{N}}\{f_n\}$$

מקיימת

$$\forall A\in\mathcal{A}\qquad \int_A \lim_{n\to\infty} f_n\,\mathrm{d}\mu=\lim_{n\to\infty}\int_A f_n\,\mathrm{d}\mu \Longrightarrow \forall A\in\mathcal{A}\qquad \int_A f\,\mathrm{d}\mu=\lim_{n\to\infty}\int_A f_n\,\mathrm{d}\mu$$

הוכחה: נוכיח עבור $A=X$ ואז להתבונן ב-$g_n=f_n\mathbb{1}_A$ ולהסיק את המקרה הכללי.
ממונוטוניות האינטגרל $\int f_1\,\mathrm{d}\mu\le\int f_2\,\mathrm{d}\mu\le\cdots\le\int f\,\mathrm{d}\mu \geq 0$ ולכן $\alpha=\sup_n\int f_n\,\mathrm{d}\mu$ יקיים $\alpha\le\int f\,\mathrm{d}\mu$ ונרצה להראות $\alpha\ge\int f\,\mathrm{d}\mu$.
נראה שלכל $0\le s\le f$ פשוטה מתקיים $\int s\,\mathrm{d}\mu\le\alpha$: תהיי $0\le s\le f$ פשוטה ונקבע $0<c<1$, נסמן $E_n\coloneqq\{x\in X \mid f_n(x)\ge cs(x)\}$ ו-$E_n\nearrow X$ כלומר זוהי סדרה עולה של קבוצות מדידות שאיחודן הוא כל X.
מרציפות המידה לסדרות עולות נסיק כי לכל $A\in\mathcal{A}$

$$\mu(A\cap E_n)\underset{(\star)}{\to}\mu(A\cap(\cup E_n))=\mu(A)$$

s פשוטה ולכן $s=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\mathbb{1}_{A_i}$ ולכל n מתקיים

$$\alpha\ge\int f_n\,\mathrm{d}\mu\ge\int_{E_n}f_n\,\mathrm{d}\mu\ge c\cdot\int_{E_n}s\,\mathrm{d}\mu=c\cdot\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\mu(A_i\cap E_n)\underset{(\star)}{\to}c\cdot\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\mu(A_i)=c\cdot\int s\,\mathrm{d}\mu$$

$\square$

2.4 החלפת סדר אינטגרציה וסכום

משפט 2.4.1 (החלפת סדר אינטגרציה וסכום): יהי $(X,\mathcal{A},\mu)$ מרחב מידה. אם $\{f_n \mid X\to[0,\infty]\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות מדידות, אזי

$$\int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\int_X f_n\,\mathrm{d}\mu$$

הוכחה: באינדוקציה על $N\in\mathbb{N}$.

מקרה בסיס הוא אדטיביות האינטגרל עבור $N=2$ (עבור $N=1$ הטענה טריוויאלית): תהיינה $s,t:X\to[0,\infty]$ פונקציות פשוטות כלשהן כאשר

$$s=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mathbb{1}_{A_i}\qquad t=\sum_{j=1}^{m}\beta_j\mathbb{1}_{B_j}$$

עבור $\{A_i\}_{i=1}^{n},\{B_j\}_{j=1}^{m}$ הן חלוקות של X ומתקיים

1. $\{A_i\cap B_j\}_{(i,j)\in[n\times m]}$ חלוקה של X
2. לכל $j\in[m]$ מתקיים $\bigcup_{i=1}^{n}A_i\cap B_j=B_j$ כי $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ חלוקה של X
3. לכל $i\in[n]$ מתקיים $\bigcup_{j=1}^{m}A_i\cap B_j=A_i$ כי $\{B_j\}_{j=1}^{m}$ חלוקה של X

מאדטיביות סופית של מידה נקבל

$$\sum_{j=1}^{m}\mu(A_i\cap B_j)\overset{(\star)}{=}\mu(A_i)\qquad \sum_{i=1}^{n}\mu(A_i\cap B_j)\overset{(\star\star)}{=}\mu(B_j)$$

אבל גם $s+t$ היא פונקציה פשוטה שכן

$$s+t=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(\alpha_i+\beta_j)\mathbb{1}_{A_i\cap B_j}$$

ולכן

$$\begin{aligned}\int_X(s+t)\,\mathrm{d}\mu&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(\alpha_i+\beta_j)\cdot\mu(A_i\cap B_j)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\cdot\sum_{j=1}^{m}\mu(A_j\cap B_j)+\sum_{j=1}^{m}\beta_j\cdot\sum_{i=1}^{n}\mu(A_i\cap B_j)\\&\underset{(\star),(\star\star)}{=}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\cdot\mu(A_i)+\sum_{j=1}^{m}B_j\cdot\mu(B_j)=\int_X s\,\mathrm{d}\mu+\int_X t\,\mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

אז הטענה נכונה עבור פונקציות פשוטות.

תהיינה $f_1,f_2\in\{f_n\mid X\to[0,\infty]\}_{n=1}^{\infty}$ מדידות ותהיינה $\{s_n\}_{n=1}^{\infty},\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרות עולות של פונקציות פשוטות כך שמתקיים

$$s_n\xrightarrow[n\to\infty]{}f_1\qquad t_n\xrightarrow[n\to\infty]{}f_2$$

נקודתית ומאריתמטיקה של גבולות נקבל $s_n+t_n\xrightarrow[n\to\infty]{}f_1+f_2$ כאשר זו התכנסות עולה לכן לפי משפט ההתכנסות המונוטונית

$$\begin{aligned}\int_X(f_1+g_2)\,\mathrm{d}\mu&=\lim_{n\to\infty}\int_X(s_n+t_n)\,\mathrm{d}\mu=\lim_{n\to\infty}\left(\int_X s_n\,\mathrm{d}\mu+\int_X t_n\,\mathrm{d}\mu\right)=\lim_{n\to\infty}\int_X s_n\,\mathrm{d}\mu+\lim_{n\to\infty}\int_X t_n\,\mathrm{d}\mu\\&=\int_X f_1\,\mathrm{d}\mu+\int_X f_2\,\mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

וזה מראה את בסיס האינדוקציה.

בשביל לסיים את האינדוקציה נשים לב $\sum_{n=1}^{N}f_n\xrightarrow[N\to\infty]{}\sum_{n=1}^{\infty}f_n$ נקודתית כאשר הסדרה $\left\{\sum_{n=1}^{N}f_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה מונוטונית עולה ולכן ממשפט ההתכנסות המונוטוניות נקבל את הטענה, כנדרש. $\square$

2.5 קיום מידת אינטגרל

משפט 2.5.1 (קיום מידת אינטגרל): יהי $(X,\mathcal{A},\mu)$ מרחב מידה. אם $h:X\to[0,\infty]$ מדידה אזי הפונקציה $\nu:A\to[0,\infty]$ המוגדרת על־ידי

$$\forall E\in\mathcal{A},\ \nu(E)=\int_E h\,\mathrm{d}\mu$$

היא מידה על $(X,\mathcal{A})$ ובמקרה זה נסמן $\mathrm{d}\nu:=h\,\mathrm{d}\mu$ ויתר על־כן מתקיים

$$\int_X g\,\mathrm{d}\nu=\int_X g\cdot h\,\mathrm{d}\mu$$

לכל $g:X\to[0,\infty]$ מדידה.

הוכחה: בשביל להראות מידה עלינו להראות ש־ν אינה קבועה אינסוף ושהיא σ אדטיבית: ואכן, $\nu(\emptyset)=0$ ושנית תהיי $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת כלשהי של קבוצות מדידות זרות בזוגות ונסמן $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$ ואז

$$(\star)\ \mathbb{1}_E=\mathbb{1}_{\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{1}_{E_n}$$

ולכן

$$\begin{aligned}\nu\left(\dot{\bigcup_{n=1}^{\infty}}E_n\right)&=\nu(E)\underset{\text{הגדרה}}{=}\int_E h\,\mathrm{d}\mu=\int_X h\mathbb{1}_E\,\mathrm{d}\mu\underset{(\star)}{=}\int_X h\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{1}_{E_n}\,\mathrm{d}\mu\\&=\int_X\sum_{n=1}^{\infty}h\cdot\mathbb{1}_{E_n}\,\mathrm{d}\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\int_X h\cdot\mathbb{1}_{E_n}\,\mathrm{d}\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n}h\,\mathrm{d}\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\nu(E_n)\end{aligned}$$

ולכן ν מידה על $(X,\mathcal{A})$.

עבור החלק השני, תהיי $s=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\mathbb{1}_{E_i}$ פונקציה פשוטה, אז

$$\begin{aligned}\int_X s\,\mathrm{d}\nu&=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\nu(E_i)=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\int_{E_i}h\,\mathrm{d}\mu=\sum_{i=1}^{k}\int_{E_i}\alpha_i h\,\mathrm{d}\mu=\sum_{i=1}^{k}\int_X\alpha_i\mathbb{1}_{E_i}h\,\mathrm{d}\mu\\&=\int_X\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\mathbb{1}_{E_i}h\,\mathrm{d}\mu=\int_X h\cdot\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\mathbb{1}_{E_i}\,\mathrm{d}\mu=\int_X h\cdot s\,\mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

אז עבור g מדידה כלשהי ניקח $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה עולה של פונקציות פשוטות כך ש־$s_n\xrightarrow[n\to\infty]{}g$ ונקבל ממשפט ההתכנסות המונוטוניות על מרחב המידה $(X,\mathcal{A},\nu)$ שמתקיים

$$\int_X g\,\mathrm{d}\nu=\lim_{n\to\infty}\int_X s_n\cdot h\,\mathrm{d}\mu=\int_X g\cdot h\,\mathrm{d}\mu$$

כי $\{s_n\cdot h\}_{n=1}^{\infty}$ היא עולה ו־$s_n\cdot h\xrightarrow[n\to\infty]{}g\cdot h$. $\square$

2.6 הלמה של פאטו

משפט 2.6.1 (הלמה של פאטו): יהי $(X, \mathcal{A}, \mu)$ מרחב מידה. אם $\{f_n : X \to [0,\infty]\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות מדידות כלשהי, אזי

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu$$

הוכחה: לכל $k \in \mathbb{N}$ נסמן $g_k := \inf_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ n\geq k}} \{f_n\}$ אזי הסדרה $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית עולה ואי־שלילית.
ממשפט ההתכנסות המונוטונית נקבל

$$\int_X \lim_{k\to\infty} g_k \,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int_X g_k \,\mathrm{d}\mu$$

ומתקיים מהגדרה

$$\lim_{k\to\infty} g_k = \lim_{k\to\infty} \inf_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ n\geq k}} \{f_n\} = \liminf_{n\to\infty} f_n$$

וביחד

$$(\star) \quad \int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int_X g_k \,\mathrm{d}\mu$$

מצד שני

$$\forall k \in \mathbb{N},\ g_k = \inf_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ n\geq k}} \{f_n\} \leq f_k \Longrightarrow g_k \leq f_k$$

ממונוטוניות האינטגרל נקבל

$$\forall k \in \mathbb{N},\ a_k := \int_X g_k \,\mathrm{d}\mu \leq \int_X f_k \,\mathrm{d}\mu =: b_k$$

אז לכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_k \leq b_k$ וכן מ־$(\star)$ נובע כי $\lim_{k\to\infty} a_k$ קיים ונקבל

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu \underset{(\star)}{=} \lim_{k\to\infty} \int_X g_k \,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} a_k \leq \liminf_{k\to\infty} b_k = \liminf_{k\to\infty} \int_X f_k \,\mathrm{d}\mu \Longrightarrow \int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{k\to\infty} \int_X f_k \,\mathrm{d}\mu$$

$\square$

2.7 הלמה של בורל־קנטלי

משפט 2.7.1 (הלמה של בורל־קנטלי): יהי $(X, \mathcal{A}, \mu)$ מרחב מידה ותהיי $(E_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A}$ סדרה של קבוצות מדידות כך שמתקיים

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty$$

אז

$$\mu\left(\limsup_{n\to\infty} E_n\right) = 0$$

הוכחה: ממונוטוניות המידה והגדרת החיתוך

$$\limsup_{n\to\infty} E_n = \bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=i}^{\infty} E_j \Longrightarrow \mu\left(\limsup_{n\to\infty} E_n\right) = \mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) \underset{\forall i\in\mathbb{N}}{\leq} \mu\left(\bigcup_{j=i}^{\infty} E_j\right) \underset{\text{תת-אדטיביות המידה}}{\leq} \sum_{j=i}^{\infty} \mu\left(E_j\right) < \infty$$

כאשר המעבר האחרון נובע מההנחה ומטור זנב ולכן $\lim_{i\to\infty} \sum_{n=i}^{\infty} \mu(E_n) = 0$, כלומר $\mu(\limsup_{n\to\infty} E_n) \leq 0$.
אבל μ מידה ולכן $0 \leq \mu(\limsup_{n\to\infty} E_n)$ כלומר $\mu(\limsup_{n\to\infty} E_n) = 0$. □

משפט 2.7.2 (אי־שיוויון המשולש האינטגרלי): אם $f \in L^1(\mu)$ אזי $\left|\int_X f \,\mathrm{d}\mu\right| \le \int_X |f| \,\mathrm{d}\mu$.

הוכחה: $\int_X f \,\mathrm{d}\mu \in \mathbb{C}$ ולכן קיים $\alpha \in \mathbb{C}$ עם $|\alpha| = 1$ עבורו מתקיים $\left|\int_X f \,\mathrm{d}\mu\right| \in \mathbb{R}$ $\alpha \int_X f \,\mathrm{d}\mu = \left|\int_X f \,\mathrm{d}\mu\right|$ $(\star)$.
נקבל אם־כך

$$\begin{aligned}\left|\int_X f \,\mathrm{d}\mu\right| &= \alpha \int_X f \,\mathrm{d}\mu \\ &= \underbrace{\int_X \alpha f \,\mathrm{d}\mu}_{\in\mathbb{R}} \\ &= \int_X Re(\alpha f) \,\mathrm{d}\mu + i \cancel{\int_X Im(\alpha f) \,\mathrm{d}\mu} \\ &= \int_X Re(\alpha f) \,\mathrm{d}\mu \\ &\le \int_X |Re(\alpha f)| \,\mathrm{d}\mu \\ &\le \int_X |\alpha f| \,\mathrm{d}\mu = \int_X |f| \,\mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

הערה: שכן אם נסמן $z = \int_X f \,\mathrm{d}\mu$ אז אם $z = 0$ אז $\alpha z = |z| \in \mathbb{R}$ לכל $\alpha \in \mathbb{C}$ עם $|\alpha| = 1$ כי נקבל ש־$0 = 0$.
אחרת, אם $z \neq 0$ אז קיים $\theta \in \mathbb{R}$ כך ש־$z = |z| \cdot e^{i\theta}$ וניקח $\alpha = e^{-i\theta}$ ונקבל

$$\alpha z = e^{-i\theta} \cdot \left(|z| e^{i\theta}\right) = |z|\left(e^{-i\theta} \cdot e^{i\theta}\right)) = |z| \in \mathbb{R}$$

ולכן יש $\alpha \in \mathbb{C}$ המקיים זאת.

□

2.8 משפט ההתכנסות הנשלטת

משפט 2.8.1 (*משפט ההתכנסות הנשלטת*):

הגדרה 2.8.1 (סדרת פונקציות נשלטת): תהיי X קבוצה ותהיי $\{f_n \mid X \to \mathbb{R}\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות כלשהי ותהיי $g : X \to \mathbb{R}$ פונקציה.
נאמר שהסדרה $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ נשלטת על־ידי הפונקציה g אם ורק אם לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $|f_n| \le g$.

תהיי $\{f_n \mid X \to \mathbb{C}\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות מדידות המתכנסת נקודתית לפונקציה $f : X \to \mathbb{C}$.
אם קיימת $g \in L^1(\mu)$ כך שהסדרה $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ נשלטת על־ידי g אזי $f \in L^1(\mu)$ ומתקיים

$$\int_X |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ובפרט

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu$$

הוכחה: ראשית מכך ש־$|f_n| \le g$ לכל $n \in \mathbb{N}$ נובע כי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq L^1(\mu)$ וגם מתקיים $|f| \le g$ אז $f \in L^1(\mu)$.
בפרט מתקיים לכל $n \in \mathbb{N}$ ש־$|f - f_n| \le 2g$ אז נגדיר $h_n := 2g - |f - f_n|$ ומהלמה של פאטו עבור סדרת הפונקציות $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ נקבל

$$(\star) \quad \int_X \liminf_{n\to\infty} h_n \,\mathrm{d}\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_X h_n \,\mathrm{d}\mu$$

וכן $h_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 2g$ נקודתית, אז בפרט $2g(x) = \liminf_{n\to\infty} h_n(x)$ לכל $x \in X$, אז ייבנע מכך

$$\int_X 2g \,\mathrm{d}\mu = \int_X \liminf_{n\to\infty} h_n \,\mathrm{d}\mu \underset{(\star)}{\le} \liminf_{n\to\infty} \int_X h_n \,\mathrm{d}\mu = \liminf_{n\to\infty} \int_X (2g - |f - f_n|) \,\mathrm{d}\mu$$

מכאן מתקיים

$$\int_X 2g \,\mathrm{d}\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_X (2g - |f - f_n|) \,\mathrm{d}\mu \underset{\text{לינאריות האינטגרל}}{=} \liminf_{n\to\infty} \left(\int_X 2g \,\mathrm{d}\mu - \int_X |f - f_n| \,\mathrm{d}\mu \right)$$

$$= \liminf_{n\to\infty} \int_X 2g \,\mathrm{d}\mu + \liminf_{n\to\infty} \left(- \int_X |f - f_n| \,\mathrm{d}\mu \right) \underset{\liminf_{n\to\infty}(-a_n) = -\limsup_{n\to\infty} a_n}{=} \int_X 2g \,\mathrm{d}\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_X |f - f_n| \,\mathrm{d}\mu$$

כלומר

$$\int_X 2g \,\mathrm{d}\mu \le \int_X 2g \,\mathrm{d}\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_X |f - f_n| \,\mathrm{d}\mu$$

אבל $g \in L^1(\mu)$ אי־שלילית ולכן $\int_X 2g \,\mathrm{d}\mu < \infty$ ולכן ניתן להחסיר ולקבל $\limsup_{n\to\infty} \int_X |f - f_n| \,\mathrm{d}\mu = 0$ ובפרט מאי־שיוויון המשולש האינטגרלי

$$\left| \int_X f \,\mathrm{d}\mu - \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu \right| = \left| \int_X (f - f_n) \,\mathrm{d}\mu \right| \le \int_X |f - f_n| \,\mathrm{d}\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

□

2.9 אי־שיוויון מרקוב

משפט 2.9.1 (אי־שיוויון מרקוב):

1. תהיי f מדידה ואי־שלילית, אז לכל $0 < a < \infty$ מתקיים

$$\mu(f^{-1}[\alpha,\infty]) \le \frac{\int f\,\mathrm{d}\mu}{a}$$

2. תהיי $f : X \to [0,\infty]$ אינטגרבילית. אז $\mu(f^{-1}(\{\infty\})) = 0$ והקבוצה $f^{-1}((0,\infty))$ היא σ־סופית.

הוכחה:

1. נגדיר

$$E_a \coloneqq f^{-1}([a,\infty]) = \{x \in X \mid f(x) \ge a\}$$
$$g(x) = a \cdot \mathbb{1}_{E_a}(x)$$

אם $x \in E_a$ אזי $f(x) \ge a$ ו־$g(x) = a \cdot 1 = a$ ולכן $f(x) \ge g(x)$.
אם $x \notin E_a$ אז $f(x) \ge 0$ ו־$g(x) = a \cdot 0 = 0$ ולכן $f(x) \ge g(x)$ כלומר לכל $x \in X$ מתקיים $g(x) \le f(x)$.
ממונוטוניות אינטגרל לבג נקבל

$$\int_X g\,\mathrm{d}\mu \le \int_X f\,\mathrm{d}\mu$$

אבל

$$\int_X g\,\mathrm{d}\mu = \int_X a \cdot \mathbb{1}_{E_a}\,\mathrm{d}\mu = a \cdot \int_X \mathbb{1}_{E_a}\,\mathrm{d}\mu = a \cdot \mu(E_a)$$

כלומר

$$a \cdot \mu(E_a) \le \int_X f\,\mathrm{d}\mu$$

היות ו־$0 < a < \infty$ ניתן לחלק בלי לשנות את כיוון אי־השיוויון ונקבל

$$\mu(E_a) \le \frac{1}{a}\int_X f\,\mathrm{d}\mu$$

2. מהמקרה הקודם אנחנו מקבלים שאם $\int f\,\mathrm{d}\mu < \infty$ אזי אגף ימין שואף לאינסוף כאשר $a \to \infty$ ולכן מרציפות המידה מלמעלה (חיתוכים יורדים) נסיק כי

$$\mu(f^{-1}(\{\infty\})) = 0$$

מתקיים

$$\mu\left(f^{-1}\left[\frac{1}{n},\infty\right]\right) < \infty$$

ולכן

$$f^{-1}((0,\infty)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}\left(\left[\frac{1}{n},\infty\right]\right)$$

היא σ־סופית.

□

3 קבוצות ממידה אפס

3.1 סדרת פונקציות כמעט־תמיד

משפט 3.1.1 (סדרות פונקציות וכמעט־תמיד): תהיי $\{f_n \mid X \to \mathbb{C}\}_{i=1}^{n}$ סדרת פונקציות מדידות המוגדרות μ־כמעט תמיד.
אם $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n|\,\mathrm{d}\mu < \infty$ אז

1. הפונקציה $f : X \to \mathbb{C}$ הנתונה על־ידי $x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מוגדרת μ־כמעט תמיד
2. $f \in L^1(\mu)$
3. $\int_X f\,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f_X f_n\,\mathrm{d}\mu$

הוכחה:

1. נניח ש־f_n מוגדרת על קבוצה $S_n \subseteq X$ כך ש־$\mu(S_n^c) = 0$, אז $\varphi = \sum_{n=1}^{\infty}|f_n|$ מוגדרת על $S := \cap_{n=1}^{\infty} S_n$ ומתקיים

$$\mu(S^c) = \mu\left(\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n\right)^c\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n^c\right) = 0 \Longrightarrow \mu(S^c) = 0$$

ולכן φ מוגדרת μ־כמעט תמיד ומהטענה אודות החלפת סדר של גבול ואינטגרל עבור טורים של פונקציות אי־שליליות מתקיים

$$\int_X \varphi\,\mathrm{d}\mu = \int_X \sum_{n=1}^{\infty}|f_n|\,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\int_X |f_n|\,\mathrm{d}\mu < \infty \Longrightarrow \int_X \varphi\,\mathrm{d}\mu < \infty$$

בפרט $\mu(|\varphi(x)|) < \infty$ μ־כמעט לכל $x \in X$ ולכן $\varphi \in L^1(\mu)$ ולכן עבור μ־כמעט לכל $x \in X$ הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס בהחלט μ־כמעט תמיד ולכן הוא מתכנס ב־$\mathbb{C}$ μ־כמעט תמיד ולכן $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ מוגדרת μ־כמעט תמיד
2. לכל $k \in \mathbb{N}$ נסמן $g_k := \sum_{n=1}^{k} f_n$ ומתקיים

$$\forall k \in \mathbb{N},\ |g_k| = \left|\sum_{n=1}^{k} f_n\right| \le \sum_{n=1}^{k}|f_n| \le \sum_{n=1}^{\infty}|f_n| = \varphi \Longrightarrow |g_k| \le \infty$$

כלומר סדרת הפונקציות $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ נשלטת על־ידי $\varphi \in L^1(\mu)$ ומכאן ממשפט ההתכנסות הנשלטת עבור f $g_k \xrightarrow[k\to\infty]{} f$ נובע כי $f \in L^1(\mu)$ וכן מהטענה על החלפת סדר סכום ואינטגרל

$$\int_X f\,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty}\int_X g_k\,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\int_X f_n\,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\int_X f_n\,\mathrm{d}\mu \Longrightarrow \int_X f\,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\int_X f_n\,\mathrm{d}\mu$$

וזה מוכיח גם את 3.

□

3.2 תנאים שקולים לשלמות

משפט 3.2.1 (תנאים שקולים לשלמות): *תזכורת:* יהי $(X,\mathcal{A},\mu)$ מרחב מידה. נאמר שהם **שלם** אם כל קבוצה $E\subseteq X$ המוכלת בקבוצה ממידה אפס היא מדידה בעצמה. ההשלמה של $(X,\mathcal{A},\mu)$ ניתנת על־ידי ה־σ־אלגברה

$$\overline{\mathcal{A}}:=\{A\cup E\mid A\in\mathcal{A},E\subseteq N,\mu(N)=0\}$$

והמידה

$$\overline{\mu}(A\cup E)=\mu(A)$$

יהי $(X,\mathcal{A},\mu)$ מרחב מידה, אזי הגרירות הבאות נכונות אם ורק אם μ שלמה:

1. אם f מדידה ו־$f=g$ μ־כמעט תמיד, אז g היא מדידה
2. אם $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות מדידות ובנוסף $f_n\to f$ μ־כמעט תמיד, אזי f היא מדידה

הוכחה: בשביל ההוכחה נשתמש בטענה מהסוג הבא שנכונה במרחבי מידה שלמים: נניח כי E,G מדידות ו־$E\subseteq F\subseteq G$ עם $\mu(G\setminus E)=0$.
אז F מדידה: זה נכון כי $F\setminus E\subseteq G\setminus E$ והתלכדות המידות גוררת ש־$\mu(G\setminus E)=0$ ולכן $F\setminus E$ מדידה וגם F.
שלמות $\Leftarrow$ 1: אם f מדידה ו־$f=g$ μ־כמעט תמיד, נרשום

$$N:=\{x\mid f(x)\neq g(x)\}$$

מאחר ו־N מוכלת בקבוצה ממידה אפס ו־μ שלמה אזי N מדידה.
מתקיים

$$g^{-1}(A)=(g^{-1}(A)\cap f^{-1}(A))\cup(g^{-1}(A)\setminus f^{-1}(A))$$

מאחר ו־N^c היא בידיוק הקבוצה בה הפונקציות מתלכדות, נוכל לכתוב

$$f^{-1}(A)\cap N^c\subseteq f^{-1}(A)\cap g^{-1}(A)\subseteq f^{-1}(A)$$

ומהיות

$$f^{-1}(A)\setminus(f^{-1}(A)\cap N^c)\subseteq N$$

נדע ששרשרת ההכלות היא כפי שמופיע בטענה שנוסחה בתחילת ההוכחה ולכן הקבוצה $f^{-1}(A)\cap g^{-1}(A)$ היא מדידה ובאופן דומה נשים לב

$$g^{-1}(A)\setminus f^{-1}(A)\subseteq N$$

ולכן כקבוצה המוכלת בקבוצה ממידה אפס היא מדידה.
1 $\Leftarrow$ שלמות: תהיי E קבוצה המוכלת בקבוצה ממידה אפס אזי $\mathbb{1}_E=0$ כמעט־תמיד ולכן $\mathbb{1}_E$ מדידה, אבל אינדיקטור מדיד אם ורק אם הקבוצה שהוא מציין מדידה, כלומר E מדידה.
1 $\Leftarrow$ 2: מאחר והוכחנו ש־1 שקול לשלמות, אז μ שלמה. נניח ש־$f_n\to f$ μ־כמעט תמיד.
לכן קיימת קבוצה N כך ש־$\mu(N)=0$ ובנוסף $f_n(x)\to f(x)$ לכל $x\in N^c$ ונגדיר

$$\tilde{f}_n(x)=\begin{cases}f_n(x) & x\in N^c\\ 0 & x\in N\end{cases}$$

אזי מהסעיף הקודם לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים ש־$\tilde{f}$ מדידה כי $\tilde{f}_n=f_n$ μ־כמעט תמיד ו־$\tilde{f}$ מתכנסת נקודתית לפונקציה

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases}f(x) & x\in N^c\\ 0 & x\in N\end{cases}$$

ולכן $\tilde{f}$ מדידה ול־$f=\tilde{f}$ μ־כמעט תמיד ולכן f מדידה.
2 $\Leftarrow$ 1: נניח ש־$f=g$ μ־כמעט תמיד ו־f מדידה, אז נגדיר את f_n להיות הסדרה הקבועה $f_n=f$ ומתקיים $f_n\to g$ כמעט־תמיד ולכן g מדידה מההנחה של 2, כנדרש. $\square$

3.3 תנאים שקולים לפונקציה אפסה כמעט־תמיד

משפט 3.3.1 (תנאים שקולים לפונקציה אפסה כמעט־תמיד):

1. אם $f : X \to [0,\infty]$ מדידה עם $\int_X f \,\mathrm{d}\mu = 0$ אם ורק אם $f \underset{\mu}{=} 0$
2. אם $f : X \to \mathbb{C}$ מדידה ולכל $E \in \mathcal{A}$ מתקיים $\int_E f \,\mathrm{d}\mu = 0$ אזי $f \underset{\mu}{=} 0$

הוכחה:

1. ההנחה ש־$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = 0$ גוררת ש־$\mu\left(\left\{x \in X \mid f(x) \geq \frac{1}{n}\right\}\right) = 0$ הכח $n \in \mathbb{N}$ ולכן $f = 0$, μ־כמעט תמיד
2. נסמן $f = u + iv$ ותהיי $E = \{x \in X \mid u(x) \geq 0\}$. אז מהגדרת E ומההנחה שלכל $E \in \mathcal{A}$ מתקיים $\int_E f \,\mathrm{d}\mu = 0$ נובע $\int_E Re(f) \,\mathrm{d}\mu =$ 0 ולכן לכל $h \in \{u, v\}$ מתקיים

$$0 = \int_E Re(f) \,\mathrm{d}\mu = \int_E h \,\mathrm{d}\mu = \int_X h^{\pm} \,\mathrm{d}\mu \Longrightarrow h^{\pm} \underset{\mu}{=} 0$$
$$\Longrightarrow h^{\pm} \underset{\mu}{=} 0 \Longrightarrow u^{\pm}, v^{\pm} \underset{\mu}{=} 0 \Longrightarrow u, v \underset{\mu}{=} 0 \Longrightarrow f \underset{\mu}{=} 0$$

□

3.4 טענה על ממוצעי פונקציה

משפט 3.4.1 (טענה על ממוצעי פונקציה):

תזכורת (ממוצע של פונקציה): יהי $(X,\mathcal{A},\mu)$ מרחב מידה סופי, תהיי $f\in L^1(\mu)$ ותהיי $E\in\mathcal{A}$ קבוצה מדידה עם $\mu(E)>0$.
הממוצע של f על E ביחס ל־μ הוא

$$A_E(f):=\frac{1}{\mu(E)}\int_E f\,\mathrm{d}\mu$$

ועכשיו למשפט:

יהי $(X,\mathcal{A},\mu)$ מרחב מידה סופי ותהיי $f\in L^1(\mu)$. אם $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ קבוצה סגורה כך שלכל קבוצה מדידה $E\in\mathcal{A}$ עם $\mu(E)>0$ מתקיים $A_E(f)\in\Omega$ אז $f(x)\in\Omega$ μ־כמעט לכל $x\in X$.

הוכחה: לכל $r>0$ ולכל $\alpha\in\mathbb{C}$ נסמן ב־$\overline{B}_r(\alpha)$, הכדור הסגור ברדיוס r סביב α.
מכך ש־Ω סגורה נובע כי Ω^c פתוחה ולכן יש איחוד בן־מנייה של כדורים פתוחים שעל־ידו ניתן לייצג את Ω^c.
אבל ב־$\mathbb{C}$, כל כדור פתוח ניתן להצגה כאיחוד בן־מנייה של כדורים סגורים, ולכן Ω^c היא איחוד בן־מנייה של כדורים סגורים.
לכן, מספיק להראות שעבור כל $\overline{B}_r(\alpha)\subseteq\Omega^c$ מתקיים $\mu\Big(f^{-1}\Big(\overline{B}_r(\alpha)\Big)\Big)=0$, כאשר

$$f^{-1}\Big(\overline{B}_r(\alpha)\Big)=\Big\{x\in X\mid f(x)\in\overline{B}_r(\alpha)\Big\}$$

נניח בשלילה שקיים כדור סגור $\overline{B}_r(\alpha)\subseteq\Omega^c$ כך ש־$\mu\Big(f^{-1}\Big(\overline{B}_r(\alpha)\Big)\Big)>0$ ונסמן $E:=f^{-1}\Big(\overline{B}_r(\alpha)\Big)$.
על E מתקיים $|f-\alpha|\le r$ ולכן

$$|A_E(f)-\alpha|=\left|\frac{1}{\mu(E)}\int_E f\,\mathrm{d}\mu-\frac{1}{\mu(E)}\cdot\mu(E)\cdot\alpha\right|=\left|\frac{1}{\mu(E)}\int_E f\,\mathrm{d}\mu-\frac{1}{\mu(E)}\int_E \alpha\,\mathrm{d}\mu\right|$$

$$=\left|\frac{1}{\mu(E)}\left(\int_E f\,\mathrm{d}\mu-\int_E\alpha\,\mathrm{d}\mu\right)\right|\underset{\substack{\text{לינאריות האינטגרל}\\ \mu(E)>0}}{=}\frac{1}{\mu(E)}\left|\int_E(f-\alpha)\,\mathrm{d}\mu\right|\underset{\text{אי־שיוויון המשולש}}{\le}\frac{1}{\mu(E)}\int_E|f-\alpha|\,\mathrm{d}\mu\le\frac{1}{\mu(E)}\int_E r\,\mathrm{d}\mu$$

$$=\frac{1}{\mu(E)}\cdot r\cdot\mu(E)=r$$

כלומר $|A_E(f)-\alpha|\le r$ ולכן $A_E(f)\in\overline{B}_r(\alpha)\subseteq\Omega^c$ ולכן $A_E(f)\in\Omega^c$.
אבל זו סתירה להנחה ש־$A_E(f)\in\Omega$. $\square$

4 משפט ההצגה של ריס

4.1 משפט ההצגה של ריס – יחידות

משפט 4.1.1 (יחידות במשפט ההצגה של ריס): יהי $\Lambda:\mathbb{C}_C(\mathbb{R})\to\mathbb{C}$ פונקציונל לינארי חיובי ונניח כי μ_1,μ_2 הן מידות על $(\mathbb{R},\mathrm{Borel}_{\mathbb{R}})$ המקיימות

1. $\int_X f\,\mathrm{d}\mu_i=\Lambda f$ לכל $f\in C_C(\mathbb{R})$
2. $\mu_i(K)<\infty$ לכל $K\subseteq\mathbb{R}$ קומפקטית
3. כל קבוצות בורל ב־$\mathbb{R}$ הן רגולריות פנימית וחיצונית ביחס ל־μ_i

הוכחה: נבחין תחילה ש־μ_1,μ_2 מוגדרות ביחידות על־ידי הערכים שלהן על קבוצות קומפקטיות.

ראשית מ־(2) נובע כי עבור $K\subseteq\mathbb{R}$ קומפקטית מתקיים $\mu_i(K)<\infty$.

יהי $\varepsilon>0$ ומהרגולריות החיצונית נובע כי קיימת $K\subseteq V$ כאשר V פתוחה כך שמתקיים $\mu_2(V)<\mu_2(K)+\varepsilon$.

מהלמה של אוריסון נובע כי קיימת $f\in C_C(\mathbb{R})$ כך שמתקיים $f(X)\subseteq[0,1]$ ומהלמה של אוריסון מתקיים ש־$K\prec f\prec V$, כלומר $\mathbb{1}_K\le f$ וכן $\operatorname{supp}(f)\subseteq V$ ולכן $\mathbb{1}_{\operatorname{supp}(f)}\subseteq\mathbb{1}_V$ אבל $f(X)\subseteq[0,1]$ ולכן $f\le\mathbb{1}_V$, אזי

$$\mu_1(k)=\int_X\mathbb{1}_K\,\mathrm{d}\mu_1\le\int_X f\,\mathrm{d}\mu_1\underset{(1)}{=}\Lambda f\underset{(1)}{=}\int_X f\,\mathrm{d}\mu_2\le\int_X\mathbb{1}_V\,\mathrm{d}\mu_2=\mu_2(V)<\mu_2(K)+\varepsilon$$

כלומר $\mu_1(K)\le\mu_2(K)$ לכל K קומפקטית ומהסימטרייה נקבל $\mu_2\le\mu_1$, כלומר $\mu_1=\mu_2$. $\square$

5 רגולריות ומידות רדון

5.1 תכונות מידת רדון על מרחב σ־קומפקטי

משפט 5.1.1 (תכונות מידת רדון על מרחב σ־קומפקטי): יהי $(X, \mathfrak{m}, \mu)$ מרחב מידה המכיל את σ־אלגברת בורל על X.
אם X הוא σ־קומפקטי ו־μ מידת רדון אז מתקיימים

1. לכל $\varepsilon > 0$ ולכל $E \in \mathfrak{m}$ קיימת קבוצה פתוחה $V \subseteq X$ וקבוצה סגורה $F \subseteq X$ עם $F \subseteq E \subseteq V$ כך ש־$\mu(V \setminus F) < \varepsilon$
2. כל קבוצה $E \in \mathfrak{m}$ היא רגולרית פנימית וחיצונית
3. לכל $E \in \mathfrak{m}$ קיימות $A, B \in \mathfrak{m}$ כאשר A היא F_σ ו־B היא G_σ כך ש־$A \subseteq E \subseteq B$ וגם $\mu(B \setminus A) = 0$

הוכחה: ראשית מהיות X σ־קומפקטי נובע שקיים אוסף בן־מנייה של קבוצות קומפקטיות $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך ש־$X = \cup_{n=1}^{\infty} K_n$.

1. תהיי $E \in \mathfrak{m}$ מדידה
   1. מהיות $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ כיסוי של X מתקיים ש־$E = \cup_{n=1}^{\infty} E \cap K_n$.
   מהיות μ מידת רדון ו־K_n קומפקטית נובע ש־$\mu(K_n) < \infty$ לכל $n \in \mathbb{N}$ ולכן בפרט ממונטוניות $\mu(E \cap K_n) < \infty$.
   מהרגולריות החיצונית של μ נובע שלכל $\varepsilon > 0$ קיימת $V_n \in \mathfrak{m}$ פתוחה עם $E \cap K_n \subseteq V_n$ כך ש־$\mu(V_n) \underset{(\star)}{<} \mu(E \cap K_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$.
   נסמן $V := \cup_{n=1}^{\infty} V_n$ ומתקיים מכך ש־$E \cap K_n \subseteq K_n$

$$V \setminus E = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n\right) \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E \cap K_n\right) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n \setminus (E \cap K_n)$$

ולכן

$$\mu(V \setminus E) \underset{\text{מונוטוניות}}{\leq} \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n \setminus (E \cap K_n)\right) \underset{\text{תת־אדטיביות}}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(V_n \setminus (E \cap K_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} (\mu(V_n) - \mu(E \cap K_n)) \underset{(\star)}{<} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \frac{\varepsilon}{2}$$

   2. עבור $E^c \in \mathfrak{m}$ מתקיים גם ש־$E^c = \cup_{n=1}^{\infty} E^c \cap K_n$ אפשר לעשות את אותו תהליך שוב: מהיות μ מידת רדון נובע כי $E^c \cap K_n$ רגולרית חיצונית ולכן קיימת פתוחה $U_n \in \mathfrak{m}$ עם $E^c \cap K_n \subseteq U_n$ כך ש־$\mu(U_n) \underset{(\diamondsuit)}{<} \mu(E^c \cap K_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$.
   נסמן $U := \cup_{n=1}^{\infty} U_n$ ואז U פתוחה כאיחוד של פתוחות ו־$E^c \subseteq U$ (כי $E^c = \cup_{n=1}^{\infty} E^c \cap K_n \subseteq \cup_{n=1}^{\infty} U_n = U$) ונקבל

$$U \setminus E^c = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n\right) \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E^c \cap K_n\right) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \setminus (E^c \cap K_n)$$

ובהתאם

$$\mu(U \setminus E^c) \leq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \setminus (E^c \cap K_n)\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(U_n \setminus E^c \cap K_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(U_n) - \mu(E^c \cap K_n) \underset{(\diamondsuit)}{<} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \frac{\varepsilon}{2}$$

   אז אם נסמן $F := U^c$ נקבל
   1. U פתוחה $\Longleftarrow$ F סגורה
   2. $E^c \subseteq U \Longleftarrow U^c \subseteq E \Longleftarrow F \subseteq E$
   3. מתקיים

$$E \setminus F = E \cap F^c = F^c \cap E = F^c \setminus E^c \Longrightarrow \mu(E \setminus F) = \mu(F^c \setminus E^c) = \mu(U \setminus E^c) < \frac{\varepsilon}{2}$$

אם כך קיבלנו בסך־הכל קבוצה פתוחה $E \subseteq V$ ו־$F \subseteq E$ סגורה המקיימות

$$(1)\ \mu(V \setminus E) = \mu(V) - \mu(E) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (2)\ \mu(E \setminus F) = \mu(E) - \mu(F) < \frac{\varepsilon}{2}$$

ולכן

$$\mu(V \setminus F) = \underbrace{\mu(V) - \mu(E)}_{\mu(V \setminus E)} + \underbrace{\mu(E) - \mu(F)}_{\mu(E \setminus F)} \underset{(1),(2)}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Longrightarrow \mu(V \setminus F) < \varepsilon$$

2. מהסעיף הקודם, לכל $E \in \mathcal{m}$ קיימת קיימת קבוצה סגורה $F \in \mathcal{m}$ עם $F \subseteq$ ו־$\mu(E \setminus F) < \frac{\varepsilon}{2}$ ושוב מה־σ־קומפקטיות, $F = \cup_{n=1}^{\infty} F \cap$ K_n, אבל לכל n, $F \cap K_n$ היא קבוצה קומפקטית (כי חיתוך של קבוצה קומפקטית עם קבוצה סגורה הוא קומפקטי) ולכן לכל $N \in \mathbb{N}$ נובע כי $\cup_{n=1}^{N} (F \cap K_n)$ היא קבוצה קומפקטית כאיחוד סופי של קומפקטיות, אז מרציפות המידה לאיחודים עולים נקבל

$$\lim_{N\to\infty} \mu\left(\bigcup_{n=1}^{N} F \cap K_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F \cap K_n\right) = \mu(F) \Longrightarrow \mu(F) = \lim_{N\to\infty} \mu\left(\bigcup_{n=1}^{N} F \cap K_n\right)$$

כלומר לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $k \geq N$ מתקיים

$$\mu\left(F \setminus \bigcup_{n=1}^{k} F \cap K_n\right) = \mu(F) - \mu\left(\bigcup_{n=1}^{k} F \cap K_n\right) < \frac{\varepsilon}{2}$$

נסמן $K := \cup_{n=1}^{N} F \cap K_n$ ואז $K \subseteq F \subseteq E$ כאשר K קומפקטית ומאי־השיוויון לעיל נקבל שלכל $\varepsilon > 0$ קיימת $K \subseteq X$ קומפקטית עם $K \subseteq E$ כך שמתקיים

$$\mu(E) - \mu(K) = \mu(E) - \mu(F) + \mu(F) - \mu(K) = \mu(E \setminus F) + \mu(F \setminus K) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\Longrightarrow \mu(E) - \mu(K) < \varepsilon \Longleftrightarrow \mu(K) > \mu(E) - \varepsilon \Longrightarrow \mu(E) = \sup\{\mu(C) \mid C \subseteq E \ \text{ קומפקטית } C\}$$

כלומר $E \in \mathcal{m}$ רגולרית פנימית ומהיות μ מידת רדון ולכן רגולרית חיצונית ביחס לכל קבוצה מדידה, מהיות $E \in \mathcal{m}$ שרירותי נובע כי סעיף 2 נכון.

3. תהיי $E \in \mathcal{m}$. מסעיף 1 נובע קיום של $V_n \in \mathcal{m}$ פתוחה ו־$F_n \in \mathcal{m}$ סגורה עם $F_n \subseteq E \subseteq V_n$ כך ש־$\mu(V_n \setminus F_n) < \frac{1}{n}$.
נגדיר $A := \cup_{n=1}^{\infty} F_n, B := \cup_{n=1}^{\infty} V_n$ אז A היא F_σ ו־B היא G_σ ומתקיים

$$B \setminus A = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right)^c = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n\right) \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n^c\right) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} (V_n \cap F_n^c) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (V_n \setminus F_n)$$

אבל $\mu(V_n \setminus F_n) < \frac{1}{n}$ ולכן

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq \mu(B \setminus A) \leq \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \setminus F_n\right) \underset{\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \setminus F_n \subseteq V_n \setminus F_n}{\leq} \mu(V_n \setminus F_n) < \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$\square$

5.2 תנאים שגוררים שמידה היא מידת רדון

משפט 5.2.1 (תנאים שגוררים שמידה היא מידת רדון)**:** יהי X מרחב האוסדרוף קומפקטי־מקומית המקיים שכל קבוצה פתוחה בו היא σ־קומפקטית. אם μ מידה על $\mathbb{B}(X)$ המקיימת $\mu(K) < \infty$ לכל $K \subseteq X$ קומפקטית, אזי μ היא מידת רדון על $\mathcal{m}$ וכל קבוצה מדידה $E \in \mathcal{m}$ היא רגולרית פנימית וחיצונית.

הוכחה: נחלק את ההוכחה לשלבים כדי לבנות מפתח:

1. **סופית על קומפקטיות:** מהיות μ סופית על קומפקטיות, נקבל ש־$\Lambda f = \int_X f\,\mathrm{d}\mu$ היינו פונקציונל לינארי חיובי על $C_c(X)$.
2. **משפט ההצגה של ריס:** *ממשפט ההצגה של ריס נובע שקיימת מידת רדון λ על X המקיימת* $\int_X f\,\mathrm{d}\mu \underset{(\star)}{=} \int_X f\,\mathrm{d}\lambda$, לכל $f \in C_C(X)$.
3. **שימוש ב־σ־קומפקטיות:** תהיי $V \in \mathcal{m}$ פתוחה, מהנתון נובע שהיא σ־קומפקטית ולכן קיים אוסף $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ של קבוצות קומפקטיות כך שמתקיים
$$V = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$$
4. **שימוש בלמה של אוריסון:** *מהלמה,* נובע שלכל $n \in \mathbb{N}$ קיימת $g_n \in C_C(X)$ עם $K_n \prec g_n \prec V$.
תזכורת (הלמה של אוריסון): כי מהלמה של אוריסון, במרחב האוסדרוף קומפקטי־מקומית, לכל $K, V \subseteq X$ עם $K \subseteq V$ כאשר K קומפקטית ו־V פתוחה, קיימת $f \in C_C(X)$ המקיימת $K \prec f \prec V \iff \mathbb{1}_K \leq f, \operatorname{supp}(f) \subseteq V$
5. **משפט ההתכנסות המונוטונית:** תהיי $\{f_N\}_{N=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות המוגדרת על־ידי
$$\forall N \in \mathbb{N},\ \ f_N \coloneqq \max_{i \in [N]}\{g_i\}$$
נשים לב שמתקיים
   1. $\{f_N\}_{N=1}^{\infty} \subseteq C_C(X)$
   2. $\{f_N\}_{N=1}^{\infty}$ מונוטונית עולה
   3. $f_N \xrightarrow[N\to\infty]{} \mathbb{1}_V$ נקודתית כי $V = \cup_{n=1}^{\infty} K_n$ ו־$K_n \prec g_n \prec V$

   אם־כך, אנחנו מקיימים את תנאי משפט ההתכנסות המונוטונית ולכן נקבל
$$\mu(V) = \int_X \mathbb{1}_V\,\mathrm{d}\mu = \int_X \lim_{N\to\infty} f_N\,\mathrm{d}\mu = \lim_{N\to\infty}\int_X f_N\,\mathrm{d}\mu = \lim_{N\to\infty}\int_X f_N\,\mathrm{d}\lambda = \int_X \lim_{N\to\infty} f_N\,\mathrm{d}\lambda = \int_X \mathbb{1}_V\,\mathrm{d}\lambda$$
   כלומר לכל $V \in \mathcal{m}$ פתוחה מתקיים $\mu(V) = \lambda(V)$
6. **שימוש בתכונות מידת רדון:** יהי $\varepsilon > 0$, מהיות λ מידת רדון נובע שלכל $E \in \mathcal{m}$ קיימת קבוצה פתוחה $U \subseteq X$ וקבוצה סגורה $F \subseteq X$ עם $F \subseteq E \subseteq U$ כך ש־$\lambda(U \setminus F) < \varepsilon$.
בפרט, נובע מהיות $F \subseteq E$ כי $U \setminus E \subseteq U \setminus F$ ולכן ממונוטוניות $\lambda(U \setminus E) \underset{(\star)}{<} \varepsilon$.
אבל $U \setminus F$ היא פתוחה (כי הפרש של פתוחה וסגורה היא פתוחה) ו־$\mu(V) = \lambda(V)$ לכל פתוחה ומדידה, ולכן $\mu(U \setminus F) = \lambda(U \setminus F) < \varepsilon$, כלומר
$$\mu(U) - \mu(E) \underset{\text{מונוטוניות}}{\leq} \mu(U) - \mu(F) = \mu(U \setminus F) < \varepsilon \Longrightarrow \mu(U) - \varepsilon < \mu(E)$$
ולכן מתקיים
$$\lambda(E) - \varepsilon \underset{\text{מונוטוניות}}{\leq} \lambda(U) - \varepsilon \underset{\substack{\lambda(U)=\mu(U) \\ \text{עבור } U \text{ פתוחה}}}{=} \mu(E) \underset{\text{מונוטוניות}}{<} \mu(U) \underset{\substack{\lambda(U)=\mu(U) \\ \text{עבור } U \text{ פתוחה}}}{=} \lambda(U) \underset{\star}{<} \lambda(E) + \varepsilon$$
$$\Longrightarrow \lambda(E) - \varepsilon < \mu(E) < \lambda(E) + \varepsilon \iff -\varepsilon < \mu(E) - \lambda(E) < \varepsilon \iff |\mu(E) - \lambda(E)| < \varepsilon$$
מהיות ε שרירותי נובע כי $\mu(E) = \lambda(E)$ לכל $E \in \mathcal{m}$ כלומר $\lambda = \mu$ ולכן μ מידת רדון, ומתכונות מידת רדון נובע כי כל קבוצה מדידה $E \in \mathcal{m}$ היא רגולרית פנימית וחיצונית.

$\square$

6 התכנסות חלשה-*

6.1 טענה מהמבחן

משפט 6.1.1 (טענה מהמבחן): יהי X מרחב מטרי קומפקטי ו־$(f_k)_{k=1}^{\infty}$ סדרה של פונקציות רציפות שהיינה צפופה ב־$C(X)$ ביחס למטריקת sup.
תהיי μ_n סדרת מידות הסתברות על X ונוכיח כי אם קיים הגבול $\lim_{n\to\infty}\int f_k\,\mathrm{d}\mu_n$ לכל k אזי קיימת מידת הסתברות μ עבורה $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$.

הוכחה: תהיי $f\in C(X)$ ו־$\varepsilon>0$. מהצפיפות נובע שקיימת f_{k_0} כך שמתקיים $\left\|f-f_{k_0}\right\|_\infty<\varepsilon$ אז לכל n

$$\left|\int f\,\mathrm{d}\mu_n-\int f_{k_0}\,\mathrm{d}\mu_n\right|\le\left\|f-f_{k_0}\right\|_\infty<\varepsilon$$

וגם עבור $m\in\mathbb{N}$

$$\left|\int f\,\mathrm{d}\mu_m-\int f_{k_0}\,\mathrm{d}\mu_m\right|<\varepsilon$$

ונרצה להראות שזאת סדרת קושי, כלומר

$$\left|\int f\,\mathrm{d}\mu_n-\int f\,\mathrm{d}\mu_m\right|\le\left|\int f-f_{k_0}\,\mathrm{d}\mu_n\right|+\left|\int f_{k_0}\,\mathrm{d}\mu_n-\int f_{k_0}\,\mathrm{d}\mu_m\right|+\left|\int f_{k_0}-f\,\mathrm{d}\mu_m\right|\le\varepsilon+\left|\int f_{k_0}\,\mathrm{d}\mu_n-\int f_{k_0}\,\mathrm{d}\mu_m\right|$$

אבל מההנחה $\int f_{k_0}\,\mathrm{d}\mu_n$ מתכנסת וזאת סדרת קושי ולכן עבור n,m גדולים דיו

$$\left|\int f_{k_0}\,\mathrm{d}\mu_n-\int f_{k_0}\,\mathrm{d}\mu_m\right|<\varepsilon\Longrightarrow\left|\int f\,\mathrm{d}\mu_n-\int f\,\mathrm{d}\mu_m\right|<3\varepsilon$$

ולכן $\left\{\int f\,\mathrm{d}\mu_n\right\}$ זאת סדרת קושי ב־$\mathbb{R}$.
נגדיר $L(f):=\lim_{n\to\infty}\int f\,\mathrm{d}\mu_n$ והגבול הזה קיים לכל $f\in C(X)$.
אבל μ_n הן מידות הסתברות ולכן אם $f\ge 0$ אזי $L(f)\ge 0$ ו־$L(1)=1$ ולכן $|L(f)|\le\|f\|_\infty$.
ממשפט הצגה של ריז נובע ש־$L(f)=\int f\,\mathrm{d}\mu$ (כי קיימת ויחידה μ מידת הסתברות כזאת) ולכן $\int f\,\mathrm{d}\mu \xleftarrow[n\to\infty]{} \int f\,\mathrm{d}\mu_n$ לכל $f\in C(X)$ וזו בידיוק ההגדרה $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$.

□

6.2 מידות הסתברות

הגדרה 6.2.1:

$$\mathcal{P}(X) := \{\mu : \mathbb{B}(X) \to [0,\infty] \mu(X) = 1 (\text{probability measure})\}$$

הגדרה 6.2.2 (מרחק בין מידות הסתברות): תהיינה $\mu, \nu \in \mathcal{P}(X)$ שתי מידות הסתברות על $\mathbb{B}(X)$ ותהיי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C(X)$ קבוצה צפופה ב־$C(X)$ כך ש־$0_{C(X)} \notin \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$.

$$d(\mu,\nu) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \|f_n\|_\infty} \left| \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu - \int_X f_n \, \mathrm{d}\nu \right|$$

למה 6.2.1: המרחק בין מידות הסתברות היא מטריקה על $\mathcal{P}(X)$ ולכן $(\mathcal{P}(X), d)$ הוא מרחב מטרי

הוכחה: ברור כי d אי־שלילית וסימטרית ונניח ש־d ומקיימת את אי־שיוויון המשולש ולכן נשאר להוכיח שאם $d(\mu,\nu) = 0 \Longrightarrow \mu = \nu$:

$$0 = d(\mu,\nu) == \forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu = \int_X f_n \, \mathrm{d}\nu$$

אז לכל $g \in C(X)$ קיימת תת־סדרה $f_{n_k} \to g$ במידה שווה (בנורמת sup) ומהיות g חסומה הרי שהחל ממקום מסוים איברי הסדרה מקיימים $\left\|f_{n_k}\right\|_\infty \leq \|g\|_\infty + 1$.
הפונקציה הקבועה $\|g\|_\infty + 1$ אינטגרבילית ביחס ל־μ, ν (מידות הסתברות) אז ממשפט ההתכנסות הנשלטת

$$\int g \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_{n_k} \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_{n_k} \, \mathrm{d}\nu = \int g \, \mathrm{d}\nu$$

כלומר μ, ν מגדירות את אותו פונקציונל על $C_C(X)$ ולכן מהיחידות במשפט ההצגה של ריז נסיק $\mu = \nu$. □

משפט 6.2.1: אם X מרחב מטרי קומפקטי אזי $(\mathcal{P}(X), d)$ מרחב מטרי קופקטי.

הוכחה: תהיי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C(X)$ צפופה ב־$C(X)$ ותהיי $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ונראה שיש לה תת־סדרה מתכנסת.
מאחר ו־$\left\{\int_X f_1 \, \mathrm{d}\mu_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה ב־$\mathbb{C}$, מבולציאנו־ויירשטראס נקבל $\left\{\mu_{n,1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ו־$\alpha_1 \in \mathbb{C}$ כך ש־$\int_X f_1 \, \mathrm{d}\mu_{n,1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha_1$.
נמשיך בטיעון דומה לכל f_k ונקבל מטיעון אלכסון כי תת־הסדרה $\left\{\mu_{n,n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ מקיימת $\int_X f_k \, \mathrm{d}\mu_{n,n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha_k$ לכל $k \in \mathbb{N}$.
בהינתן $g \in C(X)$ ו־$\varepsilon > 0$, קיים $i \in \mathbb{N}$ כך ש־$\|f_i - g\| < \frac{\varepsilon}{3}$ ובנוסף קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N < n, m \in \mathbb{N}$ מתקיים $\left|\int_X f_i \, \mathrm{d}\mu_{n,n} - \int_X f_i \, \mathrm{d}\mu_{m,m}\right| < \frac{\varepsilon}{3}$ כי זאת סדרת קושי, אז

$$\begin{aligned}
\left|\int_X g \, \mathrm{d}\mu_{n,n} - \int_X g \, \mathrm{d}\mu_{m,m}\right| &\leq \left|\int_X g \, \mathrm{d}\mu_{n,n} - \int_X f_i \, \mathrm{d}\mu_{n,n}\right| + \left|\int_X f_i \, \mathrm{d}\mu_{n,n} - \int_X f_i \, \mathrm{d}\mu_{m,m}\right| + \left|\int_X f_i \, \mathrm{d}\mu_{m,m} - \int_X g \, \mathrm{d}\mu_{m,m}\right| \\
&\leq \int_X |g - f_i| \, \mathrm{d}\mu_{n,n}) + \left|\int_X f_i \, \mathrm{d}\mu_{n,n} - \int_X f_i \, \mathrm{d}\mu_{m,m}\right| + \int_X |f_i - g| d \, \mathrm{d}\mu_{m,m} \\
&\leq \|g - f_i\|_\infty \mu_{n,n}(X) + \left|\int_X f_i \, \mathrm{d}\mu_{n,n} - \int_X f_i \, \mathrm{d}\mu_{m,m}\right| + \|g - f_i\|_\infty \mu_{m,m}(X) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon
\end{aligned}$$

כלומר $\left\{\int_X g \, \mathrm{d}\mu_{n,n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי ב־$\mathbb{C}$ ולכן מתכנסת ב־$\mathbb{C}$.
נגדיר $\Lambda : C(X) \to \mathbb{C}$ על־ידי $\Lambda g := \lim_{n\to\infty} \int_X g \, \mathrm{d}\mu_{n,n}$ ולכן ממשפט ההצגה של ריז קיימת מידה μ המתאימה ל־Λ.
נבחין כי $\mu \in \mathcal{P}(X)$ כי $\mathbb{1}_X \in C(X)$ שכן $\mu(X) = \lim_{n\to\infty} \int_X \mathbb{1}_X \, \mathrm{d}\mu_{n,n} = 1$. □

7 דינמיקה

7.1 משפט Krylov–Bogolyubov

משפט 7.1.1 (Krylov–Bogolyubov): אם X מרחב מטרי קומפקטי, $T : X \to X$ רציפה אזי קיימת μ מידת הסתברות T-אינווריאנטית (כלומר $T_* \mu = \mu$) על X.

הוכחה: נבחר $x_0 \in X$ ונתבונן על

$$\mu_n := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{T^k(x_0)} \in \mathcal{P}(X)$$

מהקומפקטיות של $\mathcal{P}(X)$ נובע שקיימת μ מידת הסתברות עבורה $\mu_{n_k} \xrightarrow{*} \mu$ ונראה שהיא T-אינווריאנטית: תהיי $f \in C_C(X)$, אזי

$$\begin{aligned}
\left| \int f \,\mathrm{d}\mu - \int f \circ T \,\mathrm{d}\mu \right| &= \lim_{k\to\infty} \left| \int f \,\mathrm{d}\mu_{n_k} - \int f \circ T \,\mathrm{d}\mu_{n_k} \right| \\
&\le \lim_{k\to\infty} \left| \frac{1}{n_k} \sum_{i=0}^{n_k-1} (f - f \circ T)(T^i(x_0)) \right| \\
&= \lim_{k\to\infty} \left| \frac{1}{n_k} \sum_{i=0}^{n_k-1} f(T^i(x_0)) - f(T^{i+1}(x_0)) \right| \\
&\underset{(\star)}{=} \lim_{k\to\infty} \frac{1}{n_k} |f(x_0) - f(T^{n_k}(x_0))| \\
&\le \lim_{k\to\infty} \frac{2\|f\|_\infty}{n_k} = 0
\end{aligned}$$

כאשר $(\star)$ נובע מכך שזה טור טלסקופי.

מיחידות משפט ההצגה של ריס נסיק $T_* \mu = \mu$. $\square$

8 שלושת העקרונות של Littlewood

8.1 משפט לוזין

משפט 8.1.1 (משפט לוזין): יהי X מרחב האוסדרוף קומפקטי מקומית ותהיי μ מידת רדון על X.
תהיי $f : X \to \mathbb{C}$ מדידה המקיימת $A \supseteq \{x \mid f(x) \neq 0\}$ כאשר $\mu(A) < \infty$.
אזי לכל $\varepsilon > 0$ קיימת $g \in C_C(X)$ עבורה $\mu(\{x \mid f(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon$.

הוכחה הוכחה במרחב מידה סופי: נוכיח את משפט לוזין במקרה של מרחב מידה X ממידה סופית ונשתמש במשפט אגרוב/אגורוף.
יהי $\varepsilon > 0$, אם $f = \mathbb{1}_E$ עבור E מדידה, מרגולריות נוכל למצוא $F \subseteq E \subseteq U$ כך ש־F קומפקטית ו־U פתוחה ו־$\mu(U \setminus F) < \varepsilon$.
מהלמה של אוריסון נוכל בחור $\mathbb{1}_K \leq g \leq \mathbb{1}_U$ רציפה וזה מסיים עבור פונקציות מציין.
עבור פונקציות פשוטות שהן הסכום של k פונקציות מציינות נשתמש בלוזין עבור פונקצייה מציינת לכל אחת מהן כשנזרוק כל פעם $\frac{\varepsilon}{k}$ ושוב נסיים.
אם f מדידה ניקח סדרה של פשוטות המתכנסות אליה $f \to s_n$. ממשפט לוזין לפונקציות פשוטות נוכל לכל n לבחור g_n המתלכדת עם s_n מחוץ לקבוצה ממידה $\frac{\varepsilon}{2} \cdot 2^{-n}$.
אז מחוץ לאיחוד כל הקבוצות האלו שמתת־אדטיביות תהיה לו מידה $\frac{\varepsilon}{2}$ לכל היותר מתקיים $f \to g_n$. בעזרת משפט אגרוב/אגורוף נוכל לזרוק עוד קבוצה ממידה $\frac{\varepsilon}{2}$ שמחוץ אליה $f \to g_n$ במידה שווה ואז קיבלנו שמחוץ לקבוצה ממידה ε יש סדרת פונקציות המתכנסת ל־f במידה שווה, כלומר f רציפה בקבוצה זו. $\square$

8.2 משפט אגרוב/אגורוף

משפט 8.2.1 (משפט אגרוב/אגורוף): יהי $(X, \mathcal{A}, \mu)$ מרחב מידה סופי ונניח כי $f_n : X \to \mathbb{R}$ מתכנסת כמעט־תמיד ל־$f : X \to \mathbb{R}$ מדידה. אז לכל $\varepsilon > 0$ קיימת $E \in \mathcal{A}$ עם $\mu(E) < \varepsilon$ כך ש־$f_n \to f$ במידה שווה ב־E^c.

הוכחה: יהי $\varepsilon > 0$ ונסמן

$$n_k(x) := \min\left\{n \mid \forall N > n,\ |f_N(x) - f(x)| < \frac{1}{k}\right\} \qquad (\min(\emptyset) = \infty)$$

עבור $x \in X$, $f_n(x) \to f(x)$ מתקיים $n_k(x) < \infty$ לכל $k \in \mathbb{N}$ ולכן מהנתון על התכנסות כמעט־תמיד נובע ש־$n_k^{-1}(\{\infty\})$ היא ממידה אפס לכל $k \in \mathbb{N}$.

נסתכל על הקרנות $(0, m)$ עבור $m \in \mathbb{N}$ ונקבל ש־n_k מדידה:

$$x \in n_k^{-1}((0, m)) \iff n_k(x) \geq m \iff x \in \bigcup_{N \geq m} \left\{x \mid |f_N(x) - f(x)| < \frac{1}{k}\right\}$$

והימנית מדידה, אז

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} n_k^{-1}((m, \infty]) = n_k^{-1}(\{\infty\})$$

מרציפות מלמעלה (ניתן להשתמש כי הנחנו שהמרחב מידה סופי).

אז לכל $k \in \mathbb{N}$ הסדרה $\mu(n_k^{-1}((m, \infty]))$ מתכנסת ל־0.

לכל $k \in \mathbb{N}$ נבחר m_k כך שלכל $m > m_k$ מתקיים

$$\mu(n_k^{-1}((m, \infty])) < \varepsilon \cdot 2^{-k} \Longrightarrow \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} n_k^{-1}((m_k, \infty])\right) < \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon \cdot 2^{-k} = \varepsilon$$

אז $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} n_k^{-1}((m_k, \infty])$ ולכן לכל $x \in E^c$ ולכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים $x \notin n_k^{-1}((m_k, \infty])$ כלומר $n_k(x) \leq m_k(x)$ כלומר לכל $N \geq m_k$ מתקיים $|f_N(x) - f(x)| < \frac{1}{k}$ ולכן $f_n \to f$ במידה שווה ב־E^c. $\square$

9 מרחבי L^p

9.1 אי־שוויון יאנסן

משפט 9.1.1 (אי־שוויון יאנסן)**:** יהי $(X,\mathcal{A},\mu)$ מרחב הסתברות ותהי $\varphi:(a,b)\to\mathbb{R}$ קמורה. אם $f:X\to(a,b)$ פונקציה מדידה, אזי

$$\varphi\left(\int_X f\,\mathrm{d}\mu\right)\le\int_X\varphi\circ f\,\mathrm{d}\mu$$

הוכחה: נסמן $T:=\int_X f\,\mathrm{d}\mu$.
מהיות $Im(f)\subseteq(a,b)$ ומהיות X מרחב הסתברות, נובע ש־$T\in(a,b)$ ונסמן

$$\beta:=\sup_{s\in(a,T)}\left\{\frac{\varphi(T)-\varphi(s)}{T-s}\right\}$$

אזי לכל $s\in(a,b)$ עם $s<T$ מתקיים

$$\frac{\varphi(T)-\varphi(s)}{T-s}\le\beta\iff\varphi(T)-\varphi(s)\le\beta(T-s)\iff\varphi(s)\ge\varphi(T)+\beta(s-T)$$

φ קמורה ולכן מהאיפיון השקול לקמירות עבור $s\in(a,b)$ עם $s>T$ מתקיים

$$\frac{\varphi(T)-\varphi(s)}{s-T}\ge\beta\iff\varphi(s)-\varphi(T)\ge\beta(s-T)\iff\varphi(s)\ge\varphi(T)+\beta(s-T)$$

ולכן לכל $s\in(a,b)$ מתקיים $\varphi(s)\ge\varphi(T)+\beta(s-T)$.
בפרט זה נכון לכל $x\in X$ (כי $s=f(x)$) ולכן $\varphi\circ f\ge\varphi(T)+\beta(f-T)$ ונקבל

$$\int_X\varphi\circ f\,\mathrm{d}\mu\underset{\text{מונוטוניות האינטגרל}}{\ge}\int_X(\varphi(T)+\beta(f-T)\,\mathrm{d}\mu)\underset{\text{לינארית האינטגרל}}{=}\int_X\varphi(T)\,\mathrm{d}\mu+\beta\left(\int_X f\,\mathrm{d}\mu-\int_X T\,\mathrm{d}\mu\right)$$

$$=\varphi(T)\varphi(X)+\beta(T-T\mu(X))\underset{\mu(X)=1}{=}\varphi(T)+\beta(T-T)=\varphi\left(\int_X f\,\mathrm{d}\mu\right)$$

□

9.2 אי־שיוויון הולדר ואי־שיוויון מניקובסקי

משפט 9.2.1 (אי־שיוויון הולדר ואי־שיוויון מניקובסקי): יהי $(X,\mathcal{A},\mu)$ מרחב מידה ונניח כי $1\le p,q\le\infty$ ומקיימים

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

אז לכל f,g מדידות אי־שליליות מתקיימים

$$(1)\ \int_X fg\,\mathrm{d}\mu\le\left(\int_X f^p\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_X g^p\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$(2)\ \left(\int_X (f+g)^p\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}\le\left(\int_X f^p\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_X g^p\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

כאשר הראשון זה אי־שיוויון הולדר והשני הוא אי־שיוויון מניקובסקי ואם $p=q=2$ זה אי־שיוויון קושי־שוורץ.

הוכחה: נוכיח את (1) בהנחה ש־$\|f\|_p=\|g\|_q=1$ ונראה כי $\|fg\|_1\le 1$: $\log$ היא פונקציה קעורה ולכן אם נניח ש־$fg\neq 0$ נקבל

$$\log(fg)=\log f+\log g=\frac{\log f^p}{p}+\frac{\log g^q}{q}\le\log\left(\frac{f^p}{p}+\frac{g^q}{q}\right)$$

ואם נעלה את e בחזקת אלו נקבל

$$(\star)\ fg\le\frac{f^p}{p}+\frac{g^q}{q}$$

אי־שיוויון זה טריוויאלי במקרה שבו $fg=0$ ולכן נוכל להתעלם מההנחה הזאת ומלינאריות, מונוטוניות ומההנחה ש־$\|f\|_p=\|g\|_q=1$ נקבל

$$\int_X\frac{f^p}{p}+\frac{g^q}{q}\,\mathrm{d}\mu=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

ואם ניקח אינטגרל על שני האגפים, $(\star)$ יביא לנו $\|fg\|_1\le 1$.
כדי להוכיח את (2) נניח ש־$\|f\|_p=\|g\|_p=1$ ונשתמש בקמירות x^p ונקבל שלכל $t\in(0,1)$

$$((1-t)f+tg)^p\le(1-t)f^p+tg^p$$

ושוב מלינאריות וממונוטוניות

$$\int_X((1-t)f+tg)^p\,\mathrm{d}\mu=(1-t)+t=1$$

ולכן

$$\|(1-t)f+tg\|_p^p\le 1$$

כלומר $\|(1-t)f+tg\|\le 1$.
ללא ההנחה, נכתוב את $f+g$ כממוצע משוקלל של פונקציות מנורמה 1, כלומר $g=\|g\|_p\overline{g},f=\|f\|_p\overline{p}$ ונקבל

$$\|f+g\|_p=\left\|\overline{f}\cdot\|f\|_p+\overline{g}\|g\|_p\right\|_p=\left(\|f\|_p+\|g\|_p\right)\cdot\left\|\overline{f}\frac{\|g\|_p}{\|f\|_p+\|g\|_p}+\overline{g}\frac{\|f\|_p}{\|f\|_p+\|g\|_p}\right\|_p$$

נבחין שאת גורם המכפלה מימין הוא בידיוק ביטוי של נורמה של ממוצע משוקלל של פונקציות מנורמה 1 ולכן נוכל לחסום אותו מלעיל על־ידי 1 ולקבל

$$\|f+g\|_p\le\|f\|_p+\|g\|_p$$

$\square$

9.3 $\mathcal{L}^p(\mu)$ הוא מרחב פסודו-נורמי מעל $\mathbb{C}$

משפט 9.3.1 ($\mathcal{L}^p(\mu)$ הוא מרחב פסודו-נורמי מעל $\mathbb{C}$): $\mathcal{L}^p(\mu)$ הוא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$.

הוכחה:

משפט 9.3.2: אם $p,q \in [1,\infty]$ חזקות צמודות ו־$f \in \mathcal{L}^p(\mu), g \in \mathcal{L}^q(\mu)$ אזי $f \cdot g \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

הוכחה: עבור $p,q \in (1,\infty)$ הטענה נובעת מאי־שיוויון הולדר. אם $p=1$ ו־$q=\infty$ מתקיים $g \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$ וגם $|g(x)| \le \|g\|_\infty (\star)$ μ־כמעט תמיד ולכן

$$\|f\cdot g\|_1 = \int_X |f\cdot g| \,\mathrm{d}\mu = \int_X |f|\cdot|g| \,\mathrm{d}\mu \underset{(\star)}{\le} \int_X |f|\cdot\|g\|_\infty \,\mathrm{d}\mu = \|g\|_\infty \cdot \int_X |f| \,\mathrm{d}\mu < \infty$$

כלומר $\|f\cdot g\|_1 < \infty$ ולכן $f\cdot g \in \mathcal{L}^1(\mu)$. □

משפט 9.3.3 (אי־שיוויון המשולש של נורמת p): אם $p \in [1,\infty]$ אזי לכל $f,g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ מתקיים $\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$.

הוכחה: אם $p \in (1,\infty)$ אז הטענה נובעת מאי־שיוויון מניקובסקי.
אם $p \in \{1,\infty\}$ אז הטענה נובעת מאי־שיוויון המשולש של הערך המוחלט ב־$\mathbb{R}$. □

הוכחה: נשאר להראות הומגניות – אם $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ ו־$\lambda \in \mathbb{C}$ אזי $\lambda \cdot f \in \mathcal{L}^p(\mu)$:

$$\int_X |f\lambda f|^p \,\mathrm{d}\mu = \int_X (|\lambda|\cdot|f|)^p \,\mathrm{d}\mu = \int_X |\lambda|^p \cdot |f|^\lambda \,\mathrm{d}\mu = |\lambda|^p \int_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu < \infty$$

כאשר השתמשנו בתכונות ערך המוחלט ומהומוגניות האינטגרל למכפלה בקבוע.
אי־השיוויון האחרון נובע מהיות $|\lambda|^p < \infty$ ומהיות $\int |f|^p \,\mathrm{d}\mu < \infty$ כי $f \in \mathcal{L}^p$ ולכן המכפלה היא סופית. □

הערה: זה מרחב פסודו-נורמי כי זו לא באמת נורמה $f \equiv 0 \not\Longleftarrow \|f\|_p = 0$ אבל $\|f\|_p = 0$ אכן גורר $f \underset{\mu}{=} 0$

9.4 טענות חשובות מתרגילי הבית

משפט 9.4.1 (טענות חשובות מתרגילי הבית):

משפט 9.4.2 (הכלת מרחבי L^p): יהי $(X, \mathcal{A}, \mu)$ מרחבי מידה σסופי ויהיו $q \leq p \in [1, \infty]$

1. $L^p(\mu) \subseteq L^q(\mu) \iff \mu(X) < \infty$
2. $L^q(\mu) \subseteq L^p(\mu) \iff \exists \varepsilon > 0,\ \forall A \in \mathcal{A},\ \mu(A) < \varepsilon \implies \mu(A) = 0$

משפט 9.4.3 (תכונות L^∞): נניח ש־$(X, \mathcal{A}, \mu)$ מרחב מידה סופי ותהיי $f \in L^\infty(\mu)$

1. אם $\|f\|_\infty = 1$ אז הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ המוגדרת על־ידי $a_n = \int_X |f|^n \,\mathrm{d}\mu$ מתכנסת
2. אם $\|f\|_\infty > 0$ אזי

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|f\|_{n+1}^{n+1}}{\|f\|_n^n} = \|f\|_\infty$$

9.5 לכל $p\in[1,\infty]$, המרחב הנורמי $\left(L^p(\mu),\|\cdot\|_p\right)$ הוא מרחב בנך

משפט 9.5.1 (לכל $p\in[1,\infty]$ המרחב הנורמי $\left(L^p(\mu),\|\cdot\|_p\right)$ הוא מרחב בנך)**:** לכל $p\in[1,\infty]$, המרחב הנורמי $\left(L^p(\mu),\|\cdot\|_p\right)$ הוא מרחב בנך (אם ורק אם הוא שלם במטריקה המושרית מהנורמה, כלומר כל סדרת קושי היא מתכנסת).

הוכחה:

1. נניח ש־$p\in[1,\infty)$ ותהיי $\{f_n\}$ סדרת קושי, אז קיימת תת־סדרה המקיימת

$$\left\|f_{(n_i)+1}-f_{n_i}\right\|_p<2^{-i}$$

נגדיר

$$g_k:=\sum_{i=1}^{k-1}\left|f_{(n_i)+1}-f_{n_i}\right|$$

מאי־שיוויון מניקובסקי נקבל

$$\|g_k\|_p\le\sum_{i=1}^{k-1}\left\|f_{(n_i)+1}-f_{n_i}\right\|_p\le 1$$

ולכן $g_k\in L^p(\mu)$ לכל k וכן $g_1^p\le g_2^p\le\cdots$ וממשפט ההתכנסות המונוטונית מתקיים עבור $g=\sum_{i=1}^{\infty}\left|f_{(n_i)+1}-f_{n_i}\right|=\lim_{k\to\infty}g_k$

$$\int g^p\,\mathrm{d}\mu=\lim_{k\to\infty}\int g_k^p\,\mathrm{d}\mu\le\lim_{k\to\infty}\|g_k\|_p^p\le 1$$

ולכן $g\in L^p(\mu)$ ובפרט $g<\infty$ μ־כמעט תמיד ולכן

$$f=f_{n_1}+\sum_{i=1}^{\infty}\left(f_{(n_i)+1}-f_{n_i}\right)$$

מתכנסת בהחלט μ־כמעט תמיד ונגדיר $f=0$ היכן שהטור מתבדר ומכך שהטור טלסקופי נובע $f=\lim_{i\to\infty}f_{n_i}$ ויתר על־כן

$$\|f\|_p\le\left\|f_{n_1}\right\|_p+\|g\|_p<\infty\implies f\in L^p(\mu)$$

מכך שהסדרה $\{f_n\}$ קושי נובע שלכל $\varepsilon>0$ יש N כך שלכל $n,m>N$ מתקיים $\|f_n-f_m\|_p<\varepsilon$ ולכן עבור $m>N$

$$\|f-f_m\|_p^p=\int\lim_{i\to\infty}\left|f_m-f_{n_i}\right|^p\mathrm{d}\mu\underset{\text{פאטו}}{\le}\liminf_{i\to\infty}\int\left|f_m-f_{n_i}\right|^p\mathrm{d}\mu=\liminf_{i\to\infty}\left\|f_m-f_{n_i}\right\|_p^p<\varepsilon^p\implies\|f-f_n\|_p\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

2. נניח ש־$p=\infty$ ונסמן

$$A_n:=\left\{x\in X\mid |f_n|.\|f_n\|_\infty\right\}\qquad B_{n,m}:=\left\{x\in X\mid |f_n-f_m|>\|f_n-f_m\|_\infty\right\}$$

אז $E=\bigcup_{n,m}B_{n,m}\cup\bigcup_n A_n$ היא קבוצה מ־μ־מידה אפס (מהגדרת ess sup) ועל E^c מתקיים ש־$f_n\to f=\lim_{n\to\infty}f_n$ במידה שווה ולכן $\|f-f_n\|_\infty\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.

□

9.6 $L^p(\mu)$ צפופה ב־$\mathcal{S}$

משפט 9.6.1 ($\mathcal{S}$ צפופה ב־$L^p(\mu)$): נסמן ב־$\mathcal{S}_f$ את אוסף הפונקציות הפשוטות $s : X \to \mathbb{C}$ המקיימות $\mu(\{x \in X \mid s(x) \neq 0\}) < \infty$.
אזי לכל $p \in [1, \infty)$, $\mathcal{S}_f$ צפופה ב־$L^p(\mu)$.

הוכחה: תהיי $9 \le f \in L^p(\mu)$ ותהיי $0 \le s_n \le f$ סדרת הפונקציות הפשוטות שמתכנסת אליה ונבחין $\mu(\{s_n \neq 0\}) < \infty$.
לכן $s_n \in \mathcal{S}_f$ וכן $|s_n - f| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ נקודתית ומתקיים

$$0 \le |f - s_n|^p \le f^p$$

לכן ממשפט ההתכנסות הנשלטת

$$\|f - s_n\|_p^p = \int |f - s_n|^p \,\mathrm{d}\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

כל $f \in L^p(\mu)$ היא צירוף לינארי של פונקציות אי־שליליות ב־$L^p(\mu)$ ומכאן הטענה. □

הערה (אי־נכונות הטענה ב־L^∞): $\mathcal{S}$ איננה צפופה ב־$L^\infty(\mathrm{Leb}_\mathbb{R})$: ניקח $f(x) = 1$ לכל $x \in \mathbb{R}$ ו־$f \in L^\infty(\mathbb{R})$ כי $\|f\|_\infty = 1$.
תהיי $s \in \mathcal{S}$ ולכן קיימת E כך ש־$\mu(E) < \infty$ ו־s נתמכת על E ולכן

$$s(x) = 0 \;\forall x \in E^c$$

אזי

$$\|f - s\|_\infty = \text{ess sup}_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - s(x)|$$

אבל $\mu(\mathbb{R}) = \infty$ ו־$\mu(E) < \infty$ ולכן $\mu(E^c) = \infty$ וכמובן איננה ממידה אפס ועל E^c מתקיים

$$|f(x) - s(x)| = |1 - 0| = 1 \Longrightarrow \|f - s\|_\infty \ge 1$$

אז אי אפשר לבנות סדרה שמתכנסת ל־0 ולכן $\mathcal{S}$ לא צפופה ב־$L^\infty(\mathrm{Leb}_\mathbb{R})$.

9.7 קירוב על־ידי פונקציות רציפות

משפט 9.7.1 (קירוב על־ידי פונקציות רציפות): יהי X מרחב האוסדרוף קומפקטי־מקומית ותהיי μ ממידת רדון על X.
לכל $p \in [1, \infty)$ הקבוצה $C_C(X)$ צפופה ב־$L^p(\mu)$.

הוכחה: מטענה שראינו מספיק להוכיח ש־$\mathcal{S}_f \subseteq \overline{C_C(X)}$.
תהיי $s \in \mathcal{S}_f$ אז s עומדת בתנאי משפט לוזין ולכן לכל $\varepsilon > 0$ קיימת פונקציה $g \in C_C(X)$ עבורה $\mu(\{s \neq g\}) < \varepsilon$.
יתר על־כן, ניתן לבחור g כך ש־$\sup g \leq \sup s$ ולכן

$$\|g-s\|_p^p = \int |g-s|^p \,\mathrm{d}\mu = \underbrace{\int_{\{s=g\}} |g-s|^p \,\mathrm{d}\mu}_{=0} + \underbrace{\int_{\{s\neq g\}} |g-s|^p \,\mathrm{d}\mu}_{\mu(\{s\neq g\}<\varepsilon)} \leq 0 + \varepsilon(2\|s\|_\infty)^p$$

$\square$

הערה (אי־נכונות הטענה ב־L^∞): הדוגמה מהטענה הקודמת מראה את אי־נכונות הטענה גם כאן.

10 יחסים בין מידות

תהיינה μ,ν מידות על מרחב מדיד $(X,\mathcal{A})$.

הגדרה 10.0.1 (מידה רציפה בהחלט, מידות שקולות): נאמר ש־ν **רציפה בהחלט** ביחס ל־μ ונסמן $\nu \ll \mu$ אם ורק אם

$$\forall E\in\mathcal{A},\ \mu(E)=0\Longrightarrow \nu(E)=0$$

נגיד שהמידות הן **שקולות** ונסמן $\mu\sim\nu$ אם ורק אם $\nu\ll\mu$ וגם $\mu\ll\nu$, כלומר $\forall E\in\mathcal{A},\mu(E)=0\Longleftrightarrow\nu(E)=0$.

הגדרה 10.0.2 (מידות סינגולריות): נאמר ש־μ ו־ν **סינגולריות** ונסמן $\nu\perp\mu$ אם ורק אם קיימות $A,B\in\mathcal{A}$ מדידות וזרות כך שמתקיים $\mu(A^c)=\mu(B^c)=0$ (באופן שקול, אם $A\uplus B=X$ ו־$\nu(B)=\mu(A)=0$).

10.1 טענה שקולה לרציפות בהחלט במרחב סופי

משפט 10.1.1 (טענה שקולה לרציפות בהחלט במרחב סופי): אם μ סופית אז $\mu\ll\nu$ אם ורק אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שאם $\nu(A)<\delta$ אזי $\mu(A)<\varepsilon$.

הוכחה: $\Longleftarrow$ נניח כי $\mu\ll\nu$. יהי $\varepsilon>0$ ונניח בשלילה שלכל $n\in\mathbb{N}$ קיימת A_n עם $\nu(A_n)<2^{-n}$ כך ש־$\mu(A^n)>\varepsilon$.
לפי בורל־קנטלי $\nu(\cap\cup A_n)=0$ אבל מרציפות בהחלט ומסופיות μ

$$\mu\left(\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=m}^{\infty}A_n\right)=\mu(\limsup A_n)\geq\limsup\mu(A_n)\geq\varepsilon$$

$\Longrightarrow$ נניח כי $\nu(A)=0$ אז $\nu(A)<\delta$ לכל $\delta>0$ ולכן $\mu(A)<\varepsilon$ לכל $\varepsilon>0$ ולכן $\mu(A)=0$. $\square$

10.2 טענה שקולה לרציפות בהחלט במרחב σ־סופי

משפט 10.2.1 (טענה שקולה לרציפות בהחלט במרחב σ־סופי): אם μ מידה σ־סופית ו־ν מידה כלשהי אז $\nu\ll\mu$ אם ורק אם $\nu|_A\ll\mu|_A$ לכל A עם $\mu(A)<\infty$.

הוכחה: $\Longleftarrow$ כי אם $\nu\ll\mu$ זה נכון גם לצמצום.
$\Longrightarrow$ נכתוב $X=\bigcup_n A_n$ עם $\mu(A_n)<\infty$ ונניח כי $\mu(E)=0$ אז נראה כי $\nu(E)=0$: $E_n=A_n\cap E$ אז מהיות $\mu(E)=0$ נובע כי $\mu(E_n)=0$ ממונוטוניות המידה (כי חיתוך קבוצות מדידות הוא קבוצה מדידה) ולכן $\mu|_{A_n}(E)=0$ ולכן מההנחה

$$\nu|_{A_n}(E)=0=\nu(E\cap A_n)\Longrightarrow\nu(E)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\nu(E\cap E_n)=0$$

$\square$

10.3 תנאי שקול למידת האפס

משפט 10.3.1 (אם מידה רציפה בהחלט וסינגולרית ביחס למידה אחרת היא מידת האפס): אם $\mu\ll\nu$ וגם $\nu\perp\mu$ אז μ היא מידת האפס.

הוכחה: מהסינגולריות של המידות נובע כי μ נתמכת על הקבוצה A כך ש־$\nu(A)=0$ ומרציפות בהחלט נובע כי $\mu(A)=0$, כלומר $\mu\equiv0$. $\square$

10.4 תנאי שקול לסינגולריות על מידות חיוביות

משפט 10.4.1 (תנאי שקול לסינגולריות על מידות חיוביות): יהיו μ,ν מידות חיוביות על X. אז $\nu\perp\mu$ אם ורק אם לכל $\varepsilon>0$ קיימת קבוצה $A\subset X$ מדידה כך ש־$\mu(A)<\varepsilon,\nu(A^c)<\varepsilon$.

הוכחה: $\Longleftarrow$ אם $\nu\perp\mu$ אזי קיימת קבוצה A כך ש־$\mu(A)=0$ ו־$\nu(A^c)=0$, כנדרש.
$\Longrightarrow$ נבחר $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת קבוצות כך שמתקיים $\mu(A_n)<2^{-n},\nu(A_n^c)<2^{-n}$.
נגדיר $A=\limsup A_n$ ומבורל־קנטלי נקבל $\mu(A)=0$; מצד שני מהלמה של פאטו $\nu(A^c)=\nu(\liminf A_n^c)\leq\liminf_{n\to\infty}\nu(A_n^c)=0$. $\square$

10.5 מסקנה מתרגילי הבית

משפט 10.5.1 (מסקנה מתרגילי הבית): $\mu,\nu_1,\nu_2,\ldots$ מידות חיוביות על X ונגדיר $\nu=\sum_{i=1}^{\infty}\nu_i$ אזי

$$(1)\ \forall i\in\mathbb{N},\ \nu_i\perp\mu\Longrightarrow\nu\perp\mu\qquad(2)\ \forall i\in\mathbb{N},\ \nu_i\ll\mu\Longrightarrow\nu\ll\mu$$

11 מרחבי הילברט

11.1 משפט ההצגה של Riesz–Fréchet

משפט 11.1.1 (משפט ההצגה של Riesz–Fréchet): יהי $\mathcal{H}$ מרחב הילברט, ההעתקה ששולחת כל וקטור $h \in \mathcal{H}$ לפונקציונל $\phi_h(x) := \langle x, h \rangle$ הינה איזומורפיזם צמוד־לינארי בין $\mathcal{H}$ ל־$\mathcal{H}^*$ שהיינה גם איזומטריה. *תזכורת:*

$$\mathcal{H}^* := \left\{ \phi \in \operatorname{Hom}(\mathcal{H}, \mathbb{C}) \mid \|\phi\|_{\mathsf{op}} < \infty \right\}$$

הוכחה:

1. מהגדרת המכפלה הפנימית נסיק $h \mapsto \phi_h$ היא צמודה־לינארית
2. מאי־שיוויון קושי־שוורץ לכל $\|x\| = 1$ מתקיים

$$|\varphi_h(x)| = |\langle x,h \rangle| \leq \|x\| \cdot \|h\| = \|h\|$$

3. נובע אם כך $\|\phi_h\|_{\mathsf{op}} \leq \|h\|$ אבל $\frac{h}{\|h\|}$ הוא מנורמה 1 ומקיים $\phi_h\left(\frac{h}{\|h\|}\right) = \langle \frac{h}{\|h\|} \ , \ h \rangle = \|h\|$
4. אז $\|\phi_h\|_{\mathsf{op}} = \|h\|$ ולכן ההעתקה היא איזומטריה
5. יהי $\ell \in \mathcal{H}^*$ ונסמן $V = \ker \ell$, אז $V \subseteq \mathcal{H}$ תת־מרחב סגור כי ℓ פונקציונל חסום ולכן רציף ו־V היא המקור של קבוצה סגורה $\{0\}$.
6. אם $V = \mathcal{H}$ אז $\ell = \phi_0$
7. אחרת, $V \subset \mathcal{H}$ ולכן קיים $0 \neq z \in V^\perp$ אז נוכיח שהוקטור $w = \frac{\overline{\ell(z)}}{\|z\|^2} \cdot z$ מקיים $\ell = \phi_w$
8. אכן לכל $x \in \mathcal{H}$ מתקיים

$$\begin{aligned}
&\ell(\ell(z) \cdot x - \ell(x) \cdot z) = \ell(z) \cdot \ell(x) - \ell(x) \cdot \ell(z) = 0 \\
&\implies \ell(z) \cdot x - \ell(x) \cdot z \in \ker \ell = V \\
&\implies \langle \ell(z) \cdot x - \ell(x) \cdot z \ , \ z \rangle = 0 \\
&\implies \ell(x) = \langle x \ , \ \frac{\overline{\ell(z)}}{\|z\|^2} \cdot z \rangle \implies \ell = \phi_w
\end{aligned}$$

$\square$

11.2 אם μ איננה מידת האפס אז יש מידה סופית ששקולה לה

משפט 11.2.1: אם $\mu \neq 0$ מידה σ־סופית על מרחב מדיד $(X, \mathcal{A})$, אזי קיימת מידה סופית ν על $(X, \mathcal{A})$ כך ש־$\nu \sim \mu$.

הוכחה:

1. **שימוש ב־σ סופיות:** מהיות $(X, \mathcal{A}, \mu)$ מרחב מידה σ־סופי נובע שקיים אוסף $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ עם $\mu(A_n)$ לכל $n \in \mathbb{N}$ כך ש־$X = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$
2. **הגדרת פונקציית עזר:** נגדיר $w : X \to [0,1]$ על־ידי
$$w(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n}}{1+\mu(A_n)} \cdot \mathbb{1}_{A_n}(x)$$
3. **w מדידה:** כגבול של סדרת פונקציות שהן צירופים לינאריים סופיים של פונקציות מציינות שהן כמובן מדידות
4. **$0 \leq w \leq 1$:** לכל $x \in X$ ברור שהביטוי אי־שלילי. כמו־כן, מה־σ־סופיות נובע שקיים לפחות $N \in \mathbb{N}$ אחד כך ש־$x \in A_n$ ולכן
$$w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n}}{1+\mu(A_n)} \cdot \mathbb{1}_{A_n}(x) \geq \frac{2^{-n}}{1+\mu(A_n)} \cdot \mathbb{1}_{A_n}(x) = \frac{2^{-n}}{1+\mu(A_n)} > 0$$
5. **חסימות:** מהיות $\mu(A_n) > 0$ נובע כי $1 + \mu(A_n) > 1$ נובע כי $\frac{1}{1+\mu(A_n)} \leq 1$, אז
$$0 < w \underset{\text{הורדנו אינדקטור}}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n}}{1+\mu(A_n)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1 \Longrightarrow w(x) \in (0,1]$$
6. **הגדרת מידה חדשה:** נגדיר $u : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ מידה המוגדרת על־ידי $\mathrm{d}\nu = w \, \mathrm{d}\mu$ ראינו שזאת מידה וש־$\nu \ll \mu$
7. **$\mu \ll \nu$:** תהיי $E \in \mathcal{A}$ כך ש־$0 = \nu(E) = \int_E w \, \mathrm{d}\mu$.
מהיות $w > 0$ נסיק כי $\mu(E) = 0$ כי אחרת אם $w > 0$ וגם $\mu(E) > 0$ נקבל כי $0 = \nu(E) = \int_E w \, \mathrm{d}\mu > 0$ בסתירה ולכן $\mu \ll \nu$
8. **הגדרה של מידות שקולות:** מצאנו כי $\nu \ll \mu$ וכן $\mu \ll \nu$ ולכן מהגדרה של מידות שקולות נובע כי $\nu \sim \mu$

$\square$

12 נגזרת רדון־ניקודים

12.1 משפט נגזרת רדון־ניקודים־לבג

משפט 12.1.1 (משפט נגזרת רדון־ניקודים־לבג): יהי $(X,\mathcal{A})$ מרחב מדיד ויהיו μ,ν שתי מידות σ־סופיות על X.
אזי קיימות ויחידות שתי מידות ν_a,ν_s המקיימות $\nu=\nu_a+\nu_s$ כאשר $\nu_a \ll \mu$ וגם $\nu_s \perp \mu$ (פירוק לבג).
כמו־כן, קיימת ויחידה $h:X\to[0,\infty)$ מדידה עבורה מתקיים $\mathrm{d}\nu_a=h\,\mathrm{d}\mu$ ונקרא ל־h נגזרת רדון־ניקודים של ν_a ביחס ל־μ ונסמנה $\frac{\mathrm{d}\nu_a}{\mathrm{d}\mu}$.
יתר על־כן אם ν סופית אזי $h\in L^1(\mu)$.

הוכחה:

1. הוכחת הטענה נכונה כאשר ν מידה סופית ו־μ מידה σ־סופית ונראה כי זה גורר נכונות עבור מידות μ,ν σ־סופיות:
מהיות המרחב σ־סופי ולכן קיים אוסף $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{A}$ של קבוצות מדידות ממידה סופית תחת ν ובלי הגבלת הכלליות נניח שהן זרות זו מזו (תמיד ניתן להזיר אותם) כך ש־$X\underset{(\star)}{=}\biguplus_{n=1}^{\infty}A_n$ ולכל $n\in\mathbb{N}$ נסמן את מרחב המידה המצומצם

$$v_n:=\nu|_{A_n}\qquad A_n:=\mathcal{A}|_{A_n}$$

אז ν_n מידה על מרחב מדיד מצומצם ומהסופיות של ν_n נובע שגם $(A_n,\mathcal{A}_n)$ מרחב מידה סופי.
מ־$(\star)$ נובע כי $\nu=\sum_{n=1}^{\infty}\nu_n$ ומההנחה ניתן ליישם את הטענה עבור המידות μ ו־ν_n על $(A_n,\mathcal{A}_n)$:
אז קיימות $\nu_{n,a},\nu_{n,s}$ על $(A_n,\mathcal{A}_n)$ עם $\nu_{n,a}\ll\mu$ וגם $\nu_{n,s}\perp\mu$ כך ש־$\nu_n=\nu_{n,a}+\nu_{n,s}$ אז נגדיר

$$\nu_s:=\sum_{n=1}^{\infty}\nu_{n,s}\qquad \nu_a:=\sum_{n=1}^{\infty}\nu_{n,a}$$

ונקבל אם כך

$$\nu=\sum_{n=1}^{\infty}\nu_n=\sum_{n=1}^{\infty}\nu_{n,a}+\nu_{s,n}=\sum_{n=1}^{\infty}\nu_{n,a}+\sum_{n=1}^{\infty}\nu_{s,n}=\nu_a+\nu_s$$

ולכל $n\in\mathbb{N}$:

1. אם $E\in\mathcal{A}_n$ עם $\mu(E)=0$ אזי $\nu_{n,a}\ll\mu$ ולכן $\nu_{n,a}(E)=0$, מכאן ש־$\nu_a(E)=\sum_{n=1}^{\infty}\nu_{n,a}=0$ ולכן $\nu_a\ll\mu$
2. מכך ש־$\nu_{n,s}\perp\mu$ ולכן קיימות $A,B\in\mathcal{A}$ מדידות וזרות כך ש־$\mu(A^c)=\nu_{n,s}(B^c)=0$ ולכן

$$\nu_s(B^c)=\sum_{n=1}^{\infty}\nu_{n,s}(B^c)=0=\mu(A^c)\Longrightarrow\nu_s\perp\mu$$

2. נניח ש־ν מידה סופית.
מטענה שראינו נובע שקיימת פונקציה מדידה וחיובית $w:X\to(0,1]$ שעבורה $w\,\mathrm{d}\mu$ היא ממידה סופית אז נגדיר את המדיה הסופית $\mathrm{d}\lambda=\mathrm{d}\nu+w\,\mathrm{d}\mu$ לכל $f\in L^2(\lambda)$ מתקיים

$$\left|\int f\,\mathrm{d}\nu\right|\le\int|f|\,\mathrm{d}\nu\le\int|f|(\mathrm{d}\nu+w\,\mathrm{d}\mu)=\int|f|\cdot1\,\mathrm{d}\lambda\underset{\text{קושי־שוורץ}}{\le}\sqrt{\int|f^2|\,\mathrm{d}\lambda}\sqrt{\int|1^2|\,\mathrm{d}\lambda}=\sqrt{\lambda(X)}\|f\|_{L^2(\lambda)}$$

אז הפונקציונל $\phi:L^2(\lambda)\to\mathbb{C}$ הנתון על־ידי $\phi(f)=\int f\,\mathrm{d}\nu$ הוא חסום ממשפט הצגה של פרשה־ריס, נסיק שקיימת $g\in L^2(\lambda)$ כך שלכל $f\in L^2(\lambda)$ מתקיים

$$(\triangle)\quad\int f\,\mathrm{d}\nu=\phi(f)=\int f\cdot g\,\mathrm{d}\lambda$$

1. לכל $E\in\mathcal{A}$ עם $\lambda(E)>0$ מתקיים $\mathbb{1}_E\in L^2(\lambda)$ ולכן $\nu(E)=\int_E g\,\mathrm{d}\lambda$, כלומר

$$0\le\frac{\nu(E)}{\lambda(E)}=\frac{1}{\lambda(E)}\int_E g\,\mathrm{d}\lambda\le1$$

מלמה שראינו על ממוצעים של פונקציות על קבוצות מדידות נסיק $0\le g\le1$ λ־כמעט תמיד על־ידי שינוי של g על קבוצה מ־λ־מידה אפס נוכל להסיק כי $0\le g\le1$ תמיד נגדיר

$$A:=\{x\in X\mid g(x)\in[0,1)\}\qquad B:=\{x\in X\mid g(x)=1\}$$
$$\nu_a:=\nu|_A\qquad\nu_s:=\nu|_B$$

מכך ש־$X = A \uplus B$ הרי ש־$\nu = \nu_a + \nu_s$ שכתוב של $\triangle$ מביא שלכל f

$$\int f \,\mathrm{d}\nu = \int fg \,\mathrm{d}\nu + \int fgw \,\mathrm{d}\mu \underset{(\star)}{\iff} \int f(1-g)\,\mathrm{d}\nu = \int fgw\,\mathrm{d}\mu$$

נראה ש־$\mu \perp \nu_s$: מהיות $(1-g)|_B \equiv 0$ אז $f = \mathbb{1}_B$ ומ־$(\star)$ נקבל

$$0 = \int_B (1-g)\,\mathrm{d}\nu = \int_B gw\,\mathrm{d}\mu$$

אבל $w > 0$ ולכן $\mu(B) = 0$ ולכן $\nu_s(B^c) = 0 = \mu(B)$ כלומר $\mu \perp \nu_s$ נראה ש־$\mu \ll \nu_a$: כי $f = (1 + g + g^2 + \dots + g^n)\mathbb{1}_E$ אז עבור $E \in \mathcal{A}$ מ־$(\star)$ נקבל

$$\int_E (1 - g^{n+1})\,\mathrm{d}\nu = \int_E (1 + g + g^2 + \dots + g^n) gw\,\mathrm{d}\mu$$

אבל $g|_A < 1$ והרי $(1-g^{n+1})\mathbb{1}_E \nearrow 1_{A\cap E}$ מונטונית ולכן באגף שמאל נקבל

$$\int_E (1-g^{n+1})\,\mathrm{d}\nu \underset{n\to\infty}{\to} \nu(A \cap E) = \nu_a(E)$$

מצד שני $h \nearrow (1 + g + g^2 + \dots + g^n)gw$ מתכנסת מונוטונית ל־h מדידה ב־$[0,\infty)$ ולכן באגף ימין

$$\int_E (1 + g + g^2 + \dots + g^n)gw\,\mathrm{d}\mu \underset{n\to\infty}{\to} \int_E h\,\mathrm{d}\mu$$

אז $\mathrm{d}\nu_a = h\,\mathrm{d}\mu$ ולכן $\nu_a \ll \mu$.

מכך ש־ν_a ממידה סופית נסיק כי $h \in L^1(\mu)$.

$\square$

12.2 איך מחשבים נגזרת רדון־ניקודים

נניח שיש לנו את המידות μ, ν ואנחנו רוצים לחשב את הנגזרת רדון־ניקודים $\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$.

1. קודם כל חייב להתקיים $\nu \ll \mu$ כלומר אם $\mu(E) = 0$ אזי $\nu(E) = 0$ אחרת תנאי המשפט לא מתקיימים
2. כמו־כן, חייב שהמרחב שעלינו אנחנו מחשבים הוא σ־סופי
3. חלוקה למקרים של "מסת" המידות

1. אם ν מוגדרת על־ידי חלוקה כלשהי – נניח $\nu(E) = \sum a_n \mu(E_n \cap E)$ כאשר $\{E_n\}$ חלוקה של המרחב, אז אם נכתוב

$$\nu(E) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{E\cap E_n} a_n \,\mathrm{d}\lambda = \int_E \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \mathbb{1}_{E_n}(x) \,\mathrm{d}\lambda(x) \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\lambda}(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \mathbb{1}_{E_n}(x)$$

כלומר הערך בתוך האינטגרל הוא הנגזרת רדון־ניקודים

2. אם לשתי המידות יש צפיפות – כלומר μ, ν מוגדרות על $\mathbb{R}$ עם צפיפויות $g(x), h(x)$ ביחס למידת לבג אז

$$\mathrm{d}\nu = h(x)\,\mathrm{d}x \qquad \mathrm{d}\mu = g(x)\,\mathrm{d}x$$

אזי

$$\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}(x) = \frac{h(x)}{g(x)}$$

כאשר זה מוגדר μ־כמעט בכל מקום כאשר $g(x) > 0$

3. המשפט היסודי של האלגברה – אם μ מידת לבג ו־$F(x) = \nu((-\infty, x])$ (כלומר F היא רציפה בהחלט) אזי

$$\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\lambda}(x) = F'(x)$$

4. החלפת משתנה ודחיפה קדימה של המידה – אם $\nu = f_*\mu$ ואנחנו רוצים את נגזרת רדון־ניקודים ביחס ל־μ זה פשוט היעקוביאן. אם $T : X \to X$ (במימד אחד לנוחות) גזירה ו־$\nu(E) = \mu(T^{-1}(E))$ אזי

$$\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}(x) = \frac{1}{|T'(T^{-1}(x))|}$$

13 גזירה של מידות רדון ב-$\mathbb{R}^d$

13.1 מסקנות ממשפט הכיסוי של בסיקוביץ'

מסקנה 13.1.1 (מסקנה 1): תהיי μ מידת בורל סופית על $\mathbb{R}^d$ (בפרט מידת רדון) ותהיי $A \subseteq \mathbb{R}^d$ חסומה. אז לכל כיסוי בסיקוביץ' $\mathcal{F}$ של A קיים תת־אוסף $\tilde{\mathcal{E}} \subseteq \mathcal{F}$ סופי של כדורים אוקלידיים סגורים וזרים בזוגות המקיימים $\mu\left(\bigcup_{B\in\tilde{\mathcal{E}}} B\right) \geq \frac{1}{2Q}\mu(A)$, כאשר Q הקבוע האוניברסלי ממשפט הכיסוי.

הוכחה: ממשפט הכיסוי קיימים תתי־אוספים $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_Q$ (אולי חלקם ריקים) שמהווים חלוקה של תת־הכיסוי $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$ המובטח ממשפט הכיסוי. אזי

$$\mu(A) = \mu\Big(\bigcup \mathcal{E} \cap A\Big) = \sum_{i=1}^{Q} \mu\Big(\Big(\bigcup \mathcal{E}_i\Big) \cap A\Big)$$

ולכן לא ייתכן שקיים $1 \leq i \leq Q$ שעבורו מתקיים $\mu(\bigcup \mathcal{E}_i \cap A) < \frac{1}{Q}\mu(A)$.
לכן קיים $i_0 \in [Q]$ המקיים $\mu(\bigcup \mathcal{E}_i \cap A) \geq \frac{1}{Q}\mu(A)$ ומאחר ש־$\mathcal{E}_i$ אוסף בן־מנייה של כדורים זרים בזוגות, ניתן לחלץ תת־אוסף סופי $\tilde{\mathcal{E}} \subseteq \mathcal{E}_i$ ממידה $\mu\left(\bigcup \tilde{\mathcal{E}} \cap A\right) \geq \frac{1}{2Q}\mu(A)$. □

מסקנה 13.1.2 (מסקנה 2): תהיי μ מידת רדון על $\mathbb{R}^d$ ותהיי $A \subseteq \mathbb{R}^d$ מדידה עם כיסוי בסיקוביץ' $\mathcal{F}$ המקיים שלכל $x \in A$ מתקיים $\inf\{r \mid B_r(x) \in \mathcal{F}\} = 0$.
אז קיים תת־אוסף בן־מנייה $\tilde{\mathcal{E}} \subseteq \mathcal{F}$ המורכב מכדורים זרים בזוגות המקיימים $\mu\left(A \setminus \bigcup \tilde{\mathcal{E}}\right)$.

הוכחה: נניח ש-$A \subseteq \mathbb{R}^d$ חסומה.
אז מהיות μ מידת רדון היא סופית על קומפקטיות ורגולרית חיצונית ולכן קיימת $A \subseteq U$ פתוחה המקיימת $\mu(U) < \left(1 + \frac{1}{4Q}\right)\mu(A)$.
נזרוק מ־$\mathcal{F}$ את כל הכדורים שלא מוכלים ב־U ומהמסקנה לעיל נובע שקיים תת־אוסף סופי $\tilde{\mathcal{E}}_1 \subseteq \mathcal{F}$ המקיים $\mu\left(\bigcup \tilde{\mathcal{E}}_1 \cap A\right) \geq \frac{1}{2Q}\mu(A)$.
נסמן $A_1 := A \setminus \bigcup \tilde{\mathcal{E}}_1$ ונקבל

$$\mu(A_1) \leq \mu\Big(U \setminus \bigcup \tilde{\mathcal{E}}_1\Big) \leq \mu(U) - \mu\Big(\bigcup \tilde{\mathcal{E}}_1\Big) \leq \left(1 + \frac{1}{4Q}\right)\mu(A) - \frac{1}{2Q}\mu(A) = \left(1 - \frac{1}{4Q}\right)\mu(A)$$

ניקח $A_1 \subseteq U_1$ פתוחה עם $\mu(U_1) < \left(1 + \frac{1}{4Q}\right)\mu(A_1)$ ונחזור על התהליך עד שנקבל $\mu(A_n) = 0$ או עד אינסוף.
נגדיר $\tilde{\mathcal{E}} := \bigcup_{i=1}^{\infty} \tilde{\mathcal{E}}_n$ ומהבנייה לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$\mu\Big(A \setminus \bigcup \tilde{\mathcal{E}}\Big) \leq \mu(A_n) \leq \left(1 - \frac{1}{4Q}\right)^n \mu(A) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

וכן $\tilde{\mathcal{E}} \subseteq \mathcal{F}$ מורכב מכדורים זרים בזוגות וסיימנו.
אם $A \subseteq \mathbb{R}^d$ אינה חסומה, נוכל לחלק את $\mathbb{R}^d$ לאוסף בן־מנייה של תתי־קבוצות פתוחות, זרות וחסומות ולקבוצה מ־μ־מידה אפס.
מאחר ש־μ סופית על קומפקטיות הרי שיש לכל היותר מספר בן־מנייה של ספירות סביב הראשית ממידה חיובית.
אילו היה אוסף לא בן־מניהי של ספירות ממידה חיובית ($\partial B_r(0)$) אז היו קיימות מספר אינסופי ולא בן־מניה של ספירות ממידה $0 < \delta$ המוכלות ב־$B_R(0)$ עבור $0 < R, \delta$ כלשהו וזו סתירה לכך ש־$\mu(B_R(0)) < \infty$.
לכן קיימים $r_n \nearrow \infty$ עם $r_{n+1} - r_n > 1$ עם ספירה ממידה אפס ואם נחלק את A לאיחוד בן־מנייה על רכיבי הקשירות הנותרים ונפעיל את הטיעון על קבוצות חסומות נקבל את הטענה. □

13.2 משפט לב הגזירה

משפט 13.2.1 (משפט לב הגזירה): תהיינה λ, μ מידות רדון על $\mathbb{R}^d$ ו־$A \subseteq \mathbb{R}^d$ קבוצה מדידה וחסומה ו־$0 < t < \infty$

1. אם $\underline{D}(\mu, \lambda, x) \leq t$ לכל $x \in A$ אזי $\mu(A) \leq t \cdot \lambda(A)$
2. אם $\overline{D}(\mu, \lambda, x) \geq t$ לכל $x \in A$ אזי $\mu(A) \geq t \cdot \lambda(A)$

הוכחה: נוכיח את (1) ו־(2) הוא אנלוגי.

1. **כיסוי בסיקוביץ':** יהי $\varepsilon > 0$ אזי קיים כיסוי בסיקוביץ' $\mathcal{F}$ של A המקיים

$$(1)\ \forall B \in \mathcal{F}, \frac{\mu(B)}{\lambda(B)} < t + \varepsilon \qquad (2)\ \forall x \in A, \inf\{r \mid B_r(x) \in \mathcal{F}\} = 0$$

2. **שימוש ברגולריות פנימית:** נבחר $U \supseteq A$ פתוחה עבורה מתקיים $\lambda(U) < \lambda(A) + \varepsilon$ $(\star)$
3. **צמצום הכיסוי:** נזרוק מ־$\mathcal{F}$ את כל הכדורים שלא מוכלים ב־U והכיסוי החדש עדיין מקיים את $(1), (2)$ ובפרט זה עדיין כיסוי בסיקוביץ' (בגלל (2))
4. **שימוש בטענה שראינו:** ממשפט שראינו נובע שקיים תת־אוסף בן־מנייה $\tilde{E} \subseteq \mathcal{F}$ של כדורי זרים בזוגות עם $\mu\big(A \setminus \bigcup \tilde{E}\big) = 0$
5. **שימוש במונוטוניות:**

$$\mu(A) \leq \mu\Big(\bigcup \tilde{E}\Big) + \mu\Big(A \setminus \bigcup \tilde{E}\Big) \underset{\text{תת־אדטיביות}}{\leq} \sum_{B \in \tilde{E}} \mu(B) \underset{(2)}{\leq} \sum_{B \in \tilde{E}} (t+\varepsilon)\lambda(B) \underset{(\star\star)}{=} (t+\varepsilon) \cdot \lambda\Big(\bigcup \tilde{E}\Big)$$
$$\underset{(\star)}{\leq} (t+\varepsilon)\lambda(U) \underset{(\star)}{\leq} (t+\varepsilon)(\lambda(A)+\varepsilon) = t \cdot \lambda(A) + \varepsilon(\lambda(A) + \varepsilon + t) \underset{\varepsilon \to 0}{\to} t \cdot \lambda(A)$$

כאשר $(\star\star)$ נובע מכך שזה אוסף זר של כדורים זרים בזוגות ומ־σ־אדטיביות.

□

13.3 משפט הגזירה של לבג־בסיקוביץ'

משפט 13.3.1 (משפט הגזירה של לבג־בסיקוביץ'): תהיינה $\lambda.\mu$ מידות רדון על $\mathbb{R}^d$

1. $D(\mu,\lambda,x)$ קיים וסופי λ־כמעט תמיד
2. $\underline{D}(\mu,\lambda,x)<\infty$ μ־כמעט תמיד אם ורק אם $\mu\ll\lambda$
3. אם $\mu\ll\lambda$ אזי $D(\mu,\lambda,x)=\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\lambda}$

הוכחה:

1. לכל $0<r<\infty,0\le s<t<\infty$ נגדיר

$$A_{s,t,r}\coloneqq\left\{x\in B_r(0)\mid \underline{D}(\mu,\lambda,x)\le s<t\le\overline{D}(\mu,\lambda,x)\right\}\qquad A_{t,r}\coloneqq\left\{x\in B_r(0)\mid\overline{D}(\mu,\lambda,x)\ge t\right\}$$

ומתקיים $A_{s,t,r}\subseteq A_{t,r}$ מתקיים מטענה על גזירהה שראינו

$$t\cdot\lambda\left(A_{s,t,r}\right)\underset{\overline{D}\ge t}{\le}\mu\left(A_{s,t,r}\right)\underset{\underline{D}\le s}{\le}\cdot\lambda\left(A_{s,t,r}\right)$$

ומהיות $s<t$ ו־$\lambda\left(A_{s,t,r}\right)<\infty$ הרי ש־$\lambda\left(A_{s,t,r}\right)=0$ לכל $s<t,r$. עבור $A_{t,r}$ מתקיים

$$t\cdot\lambda\left(A_{t,r}\right)\le\mu\left(A_{t,r}\right)\le\mu(B_r(0))<\infty$$

נסמן

$$A_{\infty,r}\coloneqq\left\{x\in B_r(0)\mid\overline{D}(\mu,\lambda,x)=\infty\right\}$$

ולכן $A_{\infty,r}=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}A_{n,r}$ מהיות $\lambda(A_1,r)<\infty$, ממונוטוניות לסדרות יורדות נסיק

$$\lambda\left(A_{\infty,r}\right)=\lim_{n\to\infty}\lambda\left(A_{n,r}\right)\le\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\mu(B_r(0))=0$$

אזי

$$\left\{x\in B_r(0)\mid\overline{D}(\mu,\lambda,x)=0\text{ או }D(\mu,\lambda,x)\text{ לא קיים}\right\}=A_{\infty,r}\bigcup_{s<t\in\mathbb{Q}}A_{s,t,r}$$

זה איחוד בן־מנייה של קבוצות מ־λ־מידה אפס ולכן זה נכון לכל $r>0$ וזה גורר את 1

2. $\Longrightarrow$ אם $\lambda\ll\mu$ אז מ־(1) נובע ש־$D<\infty$ קיים μ־כמעט תמיד.
$\Longleftarrow$ אם A עם $\lambda(A)=0$, אז אם $\underline{D}(\mu,\lambda,x)<\infty$ μ־כמעט תמיד אז

$$\mu(A)=\mu\left(\bigcup_{\substack{n\in\mathbb{N}\\k\in\mathbb{N}}}A_{n,k}\right)$$

כאשר

$$A_{n,k}\coloneqq\{x\in A\cap B_k(0)\mid\underline{D}(\mu,\lambda,x)\le n\}$$

ולכן מטענה שראינו נובע

$$\mu\left(A_{n,k}\right)\le n\cdot\lambda\left(A_{n,k}\right)\le n\cdot\lambda(A)=0\Longrightarrow\mu(A)=0\Longrightarrow\mu\ll\lambda$$

3. תהיי $B\subseteq\mathbb{R}^d$ מדידה וחסומה כלשהי ונראה ש־$\int_B D(\mu,\lambda,x)\,\mathrm{d}\lambda\le\mu(B)$ ויתקיים שיוויון כאשר $\lambda\ll\mu$.
נבחר $1<t<\infty$ כלשהו ונסמן עבור $p\in\mathbb{Z}$

$$B_+\coloneqq\{x\in B\mid 0<D(\mu,\lambda,x)<\infty\}=\dot{\bigcup_{p\in\mathbb{Z}}}B_p\qquad B_p\coloneqq\{x\in B\mid t^p\le D(\mu,\lambda,x)\le T^{p+1}\}$$

אז

$$\int_B D(\mu,\lambda,x)\,\mathrm{d}\lambda\underset{(1)}{=}\int_{B_+}D(\mu,\lambda,x)\,\mathrm{d}\lambda=\sum_{p\in\mathbb{Z}}\int_{B_p}D(\mu,\lambda,x)\,\mathrm{d}\lambda\le\sum_{p\in\mathbb{Z}}t^{p+1}\lambda\left(B_p\right)\underset{(\star)}{\le}\sum_{p\in\mathbb{Z}}t^{p+1}\left(\frac{1}{t^p}\mu\left(B_p\right)\right)=t\sum_{p\in\mathbb{Z}}\mu\left(B_p\right)\le t\mu(B)$$

כאשר (1) נובע מסעיף (1) ומכך שזרקנו קבוצה עליה האינטגרנד הוא אפס ו־($\star$) נובע מהטענה שראינו על גזירה. כאשר $t \searrow 1$ נקבל את הטענת עזר.

אם $\lambda \ll \mu$ אז מ־(1) וההחלפת תפקידים בין λ, μ נסיק $D(\lambda, \mu, x) < \infty$ μ-כמעט תמיד ולכן $D(\mu, \lambda, x) > 0$ μ-כמעט תמיד

ומאחר ש־$\lambda \ll \mu$ הרי ש־$D(\mu, \lambda, x) < \infty$ μ-כמעט תמיד ולכן $\mu(B) = \mu(B_+)$ ולכן

$$\int_B D(\mu,\lambda,x)\,\mathrm{d}\lambda = \int_{B_+} D(\mu,\lambda,x)\,\mathrm{d}\lambda = \sum_{p\in\mathbb{Z}} \int_{B_p} D(\mu,\lambda,x)\,\mathrm{d}\lambda \geq \sum_{p\in\mathbb{Z}} t^p \lambda(B_p) \geq \sum_{p\in\mathbb{Z}} \frac{t^p}{t^{p+1}} \mu(B_p) = t^{-1} \sum_{p\in\mathbb{Z}} \mu(B_p) = t^{-1}\mu(B_+) = t^{-1}\mu(B)$$

נשאיף את $t \searrow 1$ ונקבל שיוויון ואת (3).

$\square$

13.4 משפט הגזירה של לבג לפונקציה אינטגרבילית מקומית

משפט 13.4.1 (משפט הגזירה של לבג עבורה פונקציה אינטגרבילית מקומית): תהיי λ מידת רדון ב־$\mathbb{R}^d$ ו־$f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ אינטגרבילית מקומית (כלומר לכל קבוצה מדידה וחסומה $E \subseteq \mathbb{R}^d$ מתקיים $f \cdot \mathbb{1}_E \in L^1(\lambda)$).
אז עבור λ־כמעט כל $x \in \mathbb{R}^d$ מתקיים

$$\frac{1}{\lambda(B_r(x))} \int_{B_r(x)} f \, \mathrm{d}\lambda \xrightarrow[r \to 0]{} f(x)$$

בפרט לכל $A \subseteq \mathbb{R}^d$ מדידה מתקיים λ־כמעט תמיד

$$\frac{\lambda(B_r(x) \cap A)}{\lambda(B_r(x))} \xrightarrow[r \to 0]{} \mathbb{1}_A$$

הוכחה: מספיק להוכיח עבור פונקציות אי־שליליות אינטגרבליות מקומית $f : \mathbb{R}^d \to [0, \infty]$.
אז עבור המידה $\mathrm{d}\mu = f \, \mathrm{d}\lambda$ היא מידת רדון וכן $\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\lambda} = f$ וממשפט הגזירה של לבג־בסיקוביץ' נקבל $D(\mu, \lambda, x) = f(x)$ λ־כמעט תמיד שהרי

$$\frac{\int_{B_r(x)} f \, \mathrm{d}\lambda}{\lambda(B_r(x))} = \frac{\mu(B_r(x))}{\lambda(B_r(x))} \xrightarrow[r \to 0]{} D(\mu, \lambda, x) = f(x)$$

$\square$

13.5 משפט הגזירה של לבג (מהתרגול)

משפט 13.5.1 (משפט הגזירה של לבג): תהיי $f \in L^1([a,b])$. אזי הפונקציה $F(x) = \int_a^x f \,\mathrm{d}\lambda$ גזירה כמעט בכל מקום ומקיימת $F'(x) = f(x)$ עבור כמעט כל $x \in [a,b]$ (ביחס למידת לבג).

הוכחה: נראה שכמעט לכל $x \in [a,b]$ מתקיים

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f \,\mathrm{d}\lambda = f(x)$$

אם f רציפה אז זה המשפט היסודי ולכן נניח ש־f חסומה. לפי משפט לוזין לכל $n \in \mathbb{N}$ יש קבוצה A_n כך ש־$\lambda(A_n) < \frac{1}{n}$ ופונקציה רציפה g_n כך שמחוץ ל־A_n, f ו־g_n מתלכדות ונסמן λ_n מידת לבג מצומצמת ל־A_n.

שימוש במשפט הגזירה של בסיקוביץ': מהיות $\frac{\mathrm{d}\lambda_n}{\mathrm{d}\lambda} = \mathbb{1}_{A_n}$, ממשפט הגזירה של בסיקוביץ' כמעט לכל $x \in A_n^c$ מתקיים

$$\lim_{h\to 0} \frac{\lambda_n((x-h,x+h))}{\lambda((x-h,x+h))} = \lim_{h\to 0} \frac{\lambda(A_n \cap (x-h,x+h))}{2h} = \mathbb{1}_{A_n}(x) = 0$$

אם $x \in A_n^c$ מתקיים

$$\left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f \,\mathrm{d}\lambda - \frac{1}{h} \int_x^{x+h} g \,\mathrm{d}\lambda \right| \le \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f-g| \,\mathrm{d}\lambda) = \frac{1}{h} \int_{A_n \cap (x,x+h)} |f-g| \,\mathrm{d}\lambda$$

g חסומה ב־$[a,b]$ כפונקציה רציפה ו־f חסומה מההנחה ולכן קיים $M > 0$ כך שמתקיים $|f-g| < M$, כלומר

$$\frac{1}{h} \int_{A_n \cap (x,x+h)} |f-g| \,\mathrm{d}\lambda \le M \cdot \frac{\lambda(A_n \cap (x-h,x+h))}{h}$$

אגף ימין שואף ל־0 כאשר $h \to 0$ ולכן אם ניקח גבול נקבל

$$\lim_{h\to 0} \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f \,\mathrm{d}\lambda - \frac{1}{h} \int_x^{x+h} g \,\mathrm{d}\lambda \right| = 0 \Longrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f \,\mathrm{d}\lambda = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} g \,\mathrm{d}\lambda = g(x) = f(x)$$

קיבלנו את השוויון שרצינו לכל $x \in A_n^c$ ומאחר ונוכל לקחת את A_n להיות עם מידה קטנה כרצוננו, כמעט כל $x \in [a,b]$ יהיה באחת מ־A_n^c והטענה נכונה עבור f חסומה.

עבור f כללית: נסמן לכל $n \in \mathbb{N}$ את $f_n = \mathbb{1}_{|f|<n} \cdot f$ וממשפט הגזירה של בסיקוביץ' (על המידות $|f-f_n| \,\mathrm{d}\lambda, \mathrm{d}\lambda$) מתקיים כמעט לכל $x \in [a,b]$

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f-f_n| \,\mathrm{d}\lambda \le \lim_{h\to 0} \frac{2}{2h} \int_x^{x+h} |f-f_n| \,\mathrm{d}\lambda = |f(x) - f_n(x)|$$

אגף ימין הוא אפס כמעט לכל $x \in \mathbb{1}_{|f|<n}$ ומאחר $f \in L^1$ אז $|f|^{-1}(\{\infty\})$ קבוצה ממידה אפס ולכן כמעט כל $x \in [a,b]$ נמצא ב־$\mathbb{1}_{|f|<n}$ עבור n כלשהו ולכן

$$f(x) = f_n(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f_n(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(x)$$

$\square$

14 מרחבי מכפלה

14.1 משפט פוביני

משפט 14.1.1 (משפט פוביני): יהיו $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ו־$(Y, \mathcal{C}, \nu))$ מרחבי מידה σ־סופיים.

1. תהיי $f : X \times Y \to [0, \infty]$ מדידה, אזי f_x ו־f^y הן $\mathcal{A}, \mathcal{C}$־מדידות (בהתאמה) לכל x, y וכן

$$\int f \, \mathrm{d}(\mu \times \nu) = \int \left(\int f(x, y) \, \mathrm{d}\mu(x) \right) \mathrm{d}\nu(y) = \int \left(\int f(x, y) \, \mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x)$$

2. אם $f : X \times Y \to \mathbb{C}$ מדידה ומקיימת $\int |f_x| \, \mathrm{d}\nu < \infty$ אזי $f \in L^1(\mu \times \nu)$
3. אם $f \in L^1(\mu \times \nu)$ אזי $f_x \in L^1(\nu)$ μ־כמעט לכל $x \in X$ וגם $f^y \in L^1(\mu)$ ν־כמעט לכל $y \in Y$ ומתקיים

$$\int f \, \mathrm{d}(\mu \times \nu) = \iint f \, \mathrm{d}\mu \, \mathrm{d}\nu = \iint f \, \mathrm{d}\nu \, \mathrm{d}\mu$$

הוכחה:

1. הוכחנו את הטענה עבור פונקציות מציינות $\mathbb{1}_Q$ כש־$Q \in \mathcal{A} \times \mathcal{C}$ ולכן זה נכון עבור פונקציות פשוטות (כסכום סופי של פונקציות מציינות).
תהיי $f : X \times Y \to [0, \infty]$ מדידה ותהיי $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה של פונקציות פשוטות שמתכנסות ל־f.
ממשפט ההתכנסות המונוטונית, הפונקציות

$$\varphi(x) = \int f_x \, \mathrm{d}\nu \qquad \psi(y) = \int f^y \, \mathrm{d}\nu$$

הן גבולות עולים של

$$\varphi_n(x) = \int (s_n)_x \, \mathrm{d}\nu \qquad \psi_n(y) = \int (s_n)^y \, \mathrm{d}\nu$$

ואילו צירופים לינאריים של פשוטות ולכן φ_n, ψ_n מדידות ולכן גם φ_ψ.
נעשה שימוש נוסף במשפט ההתכנסות המונוטונית ייתן מ־ψ $\varphi_n \nearrow \varphi, \psi_n \nearrow$ שמתקיים

$$\int \varphi \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n \to \infty} \int \varphi_n \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n \to \infty} \int \psi_n \, \mathrm{d}\nu = \int \psi \, \mathrm{d}\nu$$

ומתקיים השיוויון

$$\int f \, \mathrm{d}(\mu \times \nu) = \lim_{n \to \infty} s_n \, \mathrm{d}(\mu \times \nu) = \int \varphi \, \mathrm{d}\mu = \int \psi \, \mathrm{d}\nu$$

2. נפעיל את (1) עם $|f|$
3. נפעיל את (1) עם הפירוק של פונקציות מרוכבות לסכום אי־שלילי

$$f = u + iv = u_+ - u_- + i(v_+ - v_-)$$

ומכך שמתקיים $\iint |f| \, \mathrm{d}\mu \, \mathrm{d}\nu < \infty$ גורר שמתקיים ל־ν־כמעט כל $y \in Y$ ש־$\int |f^y| \, \mathrm{d}\mu < \infty$ וכנ"ל הפוך.

$\square$

מסקנה 14.1.1: אם $f : X \times Y \to \mathbb{C}$ מדידה ומקיימת $\iint |f(x, y)| \, \mathrm{d}\mu(x) \, \mathrm{d}\nu(y) < \infty$ אזי $\int f \, \mathrm{d}(\mu \times \nu) = \iint f \, \mathrm{d}\mu \, \mathrm{d}\nu = \iint f \, \mathrm{d}\nu \, \mathrm{d}\mu$

הוכחה: נובע ישירות מ־(2) + (3) במשפט פוביני. $\square$