מבנים אלגבריים 2, 80446 — פתרון מבחן מועד א' 2025

23 ביולי 2025

שאלה 1

נניח כי L/K הרחבה סופית ונניח בנוסף שההרחבה פרידה (ספרבילית). אז היא פרימיטיבית (קיים $\alpha \in L$ כך ש־$L = K(\alpha)$ ו־α נקרא **איבר פרימיטיבי**).

הוכחה:

$\square$

שאלה 2

תהיי L/K הרחבת גלואה סופית ונסמן $G = \mathrm{Gal}(L/K)$.
אזי ההעתקות $\mathscr{G}(F) = \mathrm{Gal}(L/F), \mathscr{F}(H) = L^H$ הפוכות אחת לשנייה ומשרות התאמה חד־חד ערכית ועל בין שדות ביניים $L/F/K$ לתתי־חבורות $1 \leq H \leq G$.
הוכחה:

$\square$

שאלה 3

בכל סעיף נקבע האם הטענה נכונה או לא נכונה וננמק לספורט.

סעיף א'

הוכחה: ☐

סעיף ב'

הוכחה: ☐

סעיף ג'

הוכחה: ☐

סעיף ד'

הוכחה: ☐

סעיף ה'

הוכחה: ☐

שאלה 4

נמצא את כל תתי־ההרחבות הריבועיות של $\mathbb{Q}(\xi_{12})/\mathbb{Q}$ ונציגן בצורה של $\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)/\mathbb{Q}$.

פתרון: צריך לעשות את האלגוריתם מתרגול 7. **TODOOOOOOOOOOOOOOOOOOO**. $\square$

שאלה 5

נחשב את סכום החזקות השלישיות של הפולינום $x^3 - x + 1$.

פתרון: נסמן ב־r_1, r_2, r_3 את השורשים של הפולינום ואנחנו רוצים לחשב את $r_1^3 + r_2^3 + r_3^3$.
באופן כללי, לכל $i \in \{1,2,3\}$ מתקיים $r_i^3 = r_i - 1$, אז $r_1^3 + r_2^3 + r_3^3 = r_1 + r_2 + r_3 - 3$ ונטען שהתשובה היא -3:
נחשב

$$\begin{aligned}(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3) &= x^3 - x^2 r_3 - x^2 r_1 + x r_1 r_3 - x^2 r_2 + x r_2 r_3 + r_1 r_2 r_3 x - r_1 r_2 r_3 \\ &= x^3 - x^2(r_1 + r_2 + r_3) + x r_1 r_2 r_3 - r_1 r_2 r_3\end{aligned}$$

נסמן ב־a, b, c, d את המקדמים של הפולינום שלנו $ax^3 + bx^2 + cx + d$ ובמקרה שלנו $a = 1, b = 0, c = -1, d = 1$, ולכן עם השורשים לעיל זה אמור להתאים למקדמים של הפולינום כמובן, אז

$$a = 1, b = (r_1 + r_2 + r_3) = 0, c = r_1 r_2 r_3 = 1, c = -r_1 r_2 r_3 = -1$$

ולכן

$$r_1^3 + r_2^3 + r_3^3 = r_1 + r_2 + r_3 - 3 = -3$$

$\square$

שאלה 6

יהי f פולינום אי־פריק מעל שדה K ויהי L שדה הפיצול שלו. נניח ש־$G = \mathrm{Gal}(L/K)$ היא אבלית ונוכיח שכל שורש של f יוצר L.

הוכחה: נניח שלא ככה, ולכן עבור α שורש של f מתקיים $E = K(\alpha)$ ו־$E \subsetneq L$ ונשים לב ש־$[K(\alpha) : K] = \deg(f)$.
מהתאמת גלואה, יש התאמה חד־חד ערכית ועל בין $H \leq \mathrm{Gal}(L/K)$ לבין שדות ביניים $K \subseteq E \subseteq L$.
היות ו־G אבלית, נובע כי כל תת־חבורה שלה היא נורמלית ולכן בפרט $H = \mathrm{Gal}(L/K(\alpha)) = \{\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K) \mid \sigma(\alpha) = \alpha\}$ זאת־אומרת, $K(\alpha) = L^H$ ובגלל שכל תת־חבורה אבלית היא נורמלית

$$K(\sigma(\alpha)) = L^H = L^{\mathrm{Gal}(L/K(\sigma(\alpha)))} = L^{\sigma H \sigma^{-1}} = L^H = K(\alpha)$$

זה בידיוק אומר שכל השורשים של f יוצרים את אותו שדה ביניים $K(\alpha)$, אבל זה בידיוק ההגדרה של שדה פיצול ושדה פיצול יחיד עד־כדי איזומורפיזם ולכן $L \subseteq K(\alpha)$ זאת־אומרת $L = K(\alpha)$ בסתירה להנחה. $\square$

שאלה 7

נמצא את הפולינום המינימלי של $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ מעל $\mathbb{Q}$, נראה שהוא אי־פריק מעל $\mathbb{Q}$, אי־פריק מעל $\mathbb{Z}[t]$ שנהיה פריק מודלו p לכל p ראשוני.

הוכחה: נסמן $\alpha=\sqrt{3}+\sqrt{5}$, אז

$$\alpha=\sqrt{3}+\sqrt{5}\iff\alpha^2=3+2\sqrt{3}\sqrt{5}+5\iff\alpha^2-8=2\sqrt{3}\sqrt{5}\iff\alpha^4-16\alpha^2+64=60\iff\alpha^4-16\alpha^2+4$$

נשתמש בשיטה של "Rational root theorem" ממטלה 2:

הערה (תזכורת – Rational root theorem): $f\in\mathbb{Q}[x]$ עם מקדמים שלמים ונסמן $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$.
אם $\frac{r}{s}\in\mathbb{Q}$ שורש של f אז $s\mid a_n, r\mid a_0$

במקרה שלנו $s=1$ ו־$r=\pm1,\pm2,\pm4$, הצבה קצרה מביאה לנו שכל תוצאה לא מניבה 0 ולכן אין שורש מעל $\mathbb{Q}$ וזה אומר שאין גורם לינארי (זה בעצם אומר שאין פיצול למכפלה של $f=gh$ כאשר $\deg(g)=1,\deg(h)=3$ או ההפך).
נשאר לבחון האם יש פיצול למכפלה של $f=gh$ עם $\deg(g)=\deg(h)=2$, אז נניח בשלילה שהוא פריק, ולכן

$$\alpha^4-16\alpha^2+4=(\alpha^2+a\alpha+b)(\alpha^2+c\alpha+d)=\alpha^4+c\alpha^3+d\alpha^2+a\alpha^3+ac\alpha^2+ad\alpha+b\alpha^2+bc\alpha+bd=$$
$$\alpha^4+\alpha^3(c+a)+\alpha^2(d+ac+b)+\alpha(ad+bc)+bd$$

אז $c+a=0\Rightarrow a=-c$ וכן $bd=4$ ולכן

$$ad+bc=0\iff -cd+bc=0\iff bc=cd\ (2)$$

וכן

$$d+ac+b=-16\iff d-c^2+b=-16$$

מ־(2) יש 2 אופציות, או ש־$c=0$ או ש־$c\neq0$.
אם $c\neq0$ אז נחלק את (2) בו ונקבל $b=d$ ולכן מכך ש־$bd=4$ אז $b=\pm2$ אבל אז למשוואה $d+ac+b=-16$ אין פיתרון כי או ש־$-4=-16$ או ש־$4=-16$ וכמובן שניהם לא נכונים.
אז $c=0$, ולכן $d+b=-16$ וגם $bd=4$, אבל גם פה נובע ש־$b=d=\pm2$ ושוב אין פיתרון ולכן ההנחה בשלילה לא נכונה והפולינום אי־פריק מעל $\mathbb{Q}$.
עכשיו, נזכר בלמה השנייה של גאוס: f פולינום אי־פריק ב־$\mathbb{Z}[\alpha]$ אם ורק אם f פרימיטיבי ואי־פריק ב־$\mathbb{Q}[\alpha]$, ונשים לב שאכן הפולינום שלנו הוא פרימטיבי כי

$$\text{cont}(\alpha^4-16\alpha^2+4)=\text{cont}(1,-16,4)=\gcd(1,-16,4)=1$$

ולכן הפולינום הוא פרימיטיבי ועל־כן אי־פריק מעל $\mathbb{Z}[\alpha]$ מהלמה השנייה של גאוס.
נשאר רק להראות שהוא פריק מודלו p לכל מודולו p: נסמן $y=\alpha^2$ אז $\alpha^4-16\alpha^2+4\mapsto y^2-16y+7$ ומתקיים

$$\Delta=((-16)^2-4(1))4=256-16=240$$

TODOOOOOOOOOOOOOOOOOOO? ☐