פתרון מטלה 09 — אנליזה פונקציונלית, 80417

16 ביוני 2025

שאלה 1

יהי $x_0 \in [-\pi,\pi]$ ותהיינה $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציות אינטגרביליות רימן בקטע $[-\pi,\pi]$, מחזוריות עם מחזור 2π כך ש־$f \equiv g$ בסביבה של x_0.
נסמן ב־S_N^f, S_N^g את סכום פוריה ה־N של f,g בהתאמה.
נוכיח ש־$\lim_N S_N^f(x_0)$ קיים אם ורק אם $\lim_N S_N^g(x_0)$ קיים ושאם הם קיימים אז הם שווים.
הוכחה: בלי הגבלת הכלליות נניח ש־$\lim_{N\to\infty} S_N^f = L_f$ (נשים לב כי המקרים סימטריים ולכן מספיק להסתכל על המקרה הזה).
נגדיר $h = f - g$ ונשים לב ש־$h \equiv 0$ בסביבת x_0 מהנתון וכן $\lim_{x\to x_0} = 0$.
נשים לב שגם עבור $u \in (0,\delta)$ עבור $\delta > 0$

$$|h(x_0+u) - h(x_0)| = 0 \leq u$$

ולכן תנאי ליפשיץ מתקיים וממשפט התכנסות נקודתית של טורי פורייה מתקיים

$$\lim_{N\to\infty} S_N^f(x_0) = \frac{1}{2}(f(x_0+0) + f(x_0-0)) = h(x_0) = 0$$

ממה שראינו בהרצאה מתקיים גם $S_N^h = S_N^{f-g} = S_N^f - S_N^g$ ולכן מתקיים

$$\lim_{N\to\infty} S_N^{f-g}(x_0) = \lim_{N\to\infty} S_N^f(x_0) - S_N^g(x_0) = 0$$

ומההנחה $\lim_{N\to\infty} S_N^f = L_f$ נובע שמתקיים $\lim_{N\to\infty} S_N^g = L_f$. □

שאלה 2

נגדיר את גרעין דירכלה $D_N(u) = \frac{\sin((N+\frac{1}{2})u)}{2\sin(\frac{u}{2})}$ ונוכיח שקיים קבוע $C > 0$ כך שלכל $N > 1$ מתקיים

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(u)| du \geq C \ln(N-1)$$

הוכחה: ראשית, בהרצאה ראינו שמתקיים $D_N(-x) = D_N(x)$ ולכן אינטגרל על קטע סימטרי של פונקציה זוגית מקיים

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(u)| du = 2\int_{0}^{\pi} |D_N(u)| du = 2\int_{0}^{\pi} \left|\frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)u\right)}{2\sin(\frac{u}{2})}\right| du = \int_{0}^{\pi} \left|\frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)u\right)}{\sin(\frac{u}{2})}\right| du$$

$$\underset{\forall x\geq 0,\, \sin(x)\leq x}{\geq} \int_{0}^{\pi} \frac{\left|\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)u\right)\right|}{\frac{u}{2}} du = 2\int_{0}^{\pi} \frac{\left|\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)u\right)\right|}{u} du$$

$$\underset{u\to s=(N+\frac{1}{2})u}{=} 2\int_{0}^{(N+\frac{1}{2})\pi} \frac{|\sin(s)|}{s} ds \geq 2\int_{0}^{N\pi} \frac{|\sin(s)|}{s} ds = 2\sum_{j=0}^{N-1} \int_{j\pi}^{(j+1)\pi} \frac{|\sin(s)|}{s} ds$$

$$\geq \frac{2}{\pi}\sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{j+1} \int_{j\pi}^{(j+1)\pi} |\sin(s)| ds \geq \frac{2}{\pi}\sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{j+1} \left|\int_{j\pi}^{(j+1)\pi} \sin(s) ds\right| = \frac{4}{\pi}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \geq \frac{4}{\pi}\ln(n)$$

כאשר המעברים נובעים מהרמז, אינטגרציה בחלקים וחסימה של האינטגרל $\frac{|\sin(x)|}{x}$. $\square$

שאלה 3

עבור $x \in \mathbb{R}$ נסמן $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ כאשר $i = \sqrt{-1}$.

סעיף א'

נוכיח ש־$\mathcal{A} = \operatorname{Span}\left\{e^{inx}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ היא אלגברה ב־$C([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ שלא מתאפסת, מפרידה נקודות (פרט ל־$\pm\pi$) וסגורה להצמדה.
נסיק בעזרת הגרסה המרוכבת של משפט סטון־ויירשטראס ש־$\mathcal{A}$ צפופה ב־$\tilde{C}([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ בנורמה $\|\cdot\|_\infty$.

הוכחה: עלינו להראות כמה דברים:

1. $\mathcal{A}$ היא אלגברה ב־$C([-\pi,\pi],\mathbb{C})$, עלינו להראות שלושה דברים: סגירות לחיבור, כפל וסקלר.
   1. עבור חיבור מתקיים (באופן די טריוויאלי)
   $$e^{inx} + e^{imx} \in \operatorname{Span}\left\{e^{inx}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$$
   2. עבור כפל מתקיים מחוקי חזקות
   $$e^{inx}\cdot e^{imx} = e^{i(n+m)x} \underset{\mathbb{Z}\ni k=n+m}{=} e^{ikx} \in \operatorname{Span}\left\{e^{inx}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$$
   3. עבור כפל בסקלר זה נובע ישירות מהגדרת Span, בדומה לחיבור
2. לא מתאפסת: נבחר $f(x) = 1$ עבור $n = 0$.
3. מפרידה נקודות: נסתכל על $f(x) = e^{ix}$ עבור $n = 1$ ונטען שהיא מפרידה נקודות: f היא על והיא גם חד־חד ערכית לכל $x \neq \pm\pi$ כי $f(\pi) = -1 = f(-\pi)$ ולכן עומדת בהגדרה.
4. סגירות להצמדה

$$\overline{e^{inx}} = \cos(nx) + \overline{i\sin(nx)} = \cos(nx) - i\sin(nx) \underset{\substack{\sin(-x)=-\sin(x)\\ \cos(-x)=\cos(x)}}{=} \cos(-nx) + i\sin(-nx) = e^{-inx} \in \operatorname{Span}\left\{e^{inx}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

נסמן $K = [-\pi,\pi]$ וכמובן ש־K קומפקטי כקטע חסום וסגור ב־$\mathbb{R}$ ולכן כל תנאי משפט סטון־ויירשטראס המרוכב שראינו בתרגול מתקיימים ולכן $\mathcal{A}$ צפופה ב־$\tilde{C}([-\pi,\pi],\mathbb{C})$. □

סעיף ב'

נסיק שהקבוצה $\left\{e^{inx}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ היא מערכת אורתוגונלית שלמה ב־$\tilde{C}([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ ביחס למכפלה הפנימית $\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f}(x)g(x)dx$.

הוכחה: נשים לב שלכל n, m מתקיים

$$\langle e^{inx}, e^{imx}\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{e^{inx}}e^{imx}dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}e^{imx}dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)x}dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \cos((m-n)x) + i\sin((m-n)x)dx = \int_{-\pi}^{\pi}\cos((m-n)x)dx + \int_{-\pi}^{\pi} i\sin((m-n)x)dx \underset{\substack{\cos(\pi)=\cos(-\pi)\\ \sin(\pi)=\sin(-\pi)}}{=} 0 + 0 = 0$$

לכן זו מערכת אורתוגונלית (ובפרט אורתונורמלית כי $\left|e^{(inx)^2}\right| = 1$ לכל $n \in \mathbb{N}$ כי $\left(\left|e^{i\theta}\right| = \sqrt{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)}\right)$, ונטען שהיא גם מערכת שלמה לפי התנאים השקולים לשלמות שראינו בהרצאה. □

סעיף ג'

עבור $f \in C([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ נגדיר לכל $n \in \mathbb{Z}$ את מקדם פוריה של f ביחס למערכת $\left\{e^{inx}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ על־ידי $c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx$ ונסיק שאם f ממשית אז מתקיים

$$\frac{a_0}{2} = c_0$$
$$\forall n > 0 : a_n = c_n + c_{-n}$$
$$\forall n > 0 : b_n = i(c_n - c_{-n})$$

כאשר $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ מקדמי טור פורייה הרגילים של f.

הוכחה: ראשית, מהנתון נבנה גם את c_{-n}

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-i(-n)x}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}dx$$

נחשב מהגדרה ועם היות הפונקציות $\sin(x), \cos(x)$ אי־זוגית וזוגית בהתאמה

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2f(x)\cos(nx)dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx) + if(x)\sin(nx) - if(x)\sin(nx) + f(x)\cos(nx)dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx) + if(x)\sin(nx) + if(x)\sin(-nx) + f(x)\cos(-nx)dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx) + if(x)\sin(nx)dx + \int_{-\pi}^{\pi} if(x)\sin(-nx) + f(x)\cos(-nx)dx\right) \\
&= c_{-n} + c_n = c_n + c_{-n}
\end{aligned}$$

ונשים לב

$$a_0 = c_0 + c_0 \Rightarrow \frac{a_0}{2} = c_0$$

באותו אופן נחשב גם

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2f(x)\sin(nx)dx \\
&= \frac{1}{2\pi}i\int_{-\pi}^{\pi} i2f(x)\sin(-nx) + f(x)\cos(nx) - f(x)\cos(nx)dx \\
&= \frac{1}{2}\pi i\int_{-\pi}^{\pi} if(x)\sin(nx) + f(x)\cos(nx) - if(x)\sin(-nx) - f(x)\cos(-nx)dx \\
&= i(c_n - c_{-n})
\end{aligned}$$

$\square$