פתרון מטלה 03 — תורת הקבוצות, 80200

10 באפריל 2025

שאלה 1

תהיי A קבוצה. לכל $A_0 \subseteq A$ נתאים פונקציה $\chi_{A_0} : A \to \{0,1\}$, הנקראת הפונקציה המציינת של A_0, באופן הבא:

$$\chi_{A_0}(a) = \begin{cases} 1 & a \in A_0 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

נוכיח שהתאמה זו מגדירה פונקציה חד־חד ערכית ועל $\chi : \mathcal{P}(A) \to \{0,1\}^A$.

הוכחה: נגדיר $\varphi : \{0,1\}^A \to \mathcal{P}(A)$ על־ידי $f \mapsto f^{-1}(1) = \{a \in A \mid f(a) = 1\}$ כאשר $f \in \{0,1\}^A$.
נראה $\chi \circ \varphi = \mathrm{Id}_{\{0,1\}^A}$ וכן $\varphi \circ \chi = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}(A)}$ ואז פונקציות אלו הופכיות אחת של השנייה ולכן χ היא פונקציה חד־חד ערכית ועל.
בכיוון הראשון, תהיי $A \in \mathcal{P}(A)$ ונרצה להראות ש־$(\varphi \circ \chi)(A) = A$:

$$(\varphi \circ \chi)(A) = \varphi(\chi(A)) = \{a \in A \mid \chi_A(a) = 1\} \underset{(1)}{=} A$$

כאשר (1) נובע מכך שלכל $A \in \mathcal{P}(A)$ ולכל $x \in X$ מתקיים $\chi_A(x) = 1$ אם ורק אם $x \in A$.
בכיוון השני, תהיי $f \in \{0,1\}^A$ ונרצה להראות ש־$(\chi \circ \varphi)(f) = f$:

$$(\chi \circ \varphi)(f) = \chi(\{a \in A \mid f(x) = 1\}) \underset{(1)}{=} f$$

כאשר (1) נובע מכך שאם נסמן $S = \{a \in A \mid f(x) = 1\}$ אז $f(x) = 1 \iff \chi_S(x) = 1$ וגם $f(x) = 0 \iff \chi_S(x) = 0$ אבל זוהי בידיוק ההגדרה של f.
הראינו כי φ ו־χ הופכיות אחת של השנייה ולכן ההתאמה של הפונקציה המציינת מגדירה פונקציה חד־חד ערכית ועל על χ.
אפשר להוכיח זאת גם על־ידי זה שנראה ש־χ היא חד־חד ערכית ועל:
על: יהי $f \in \{0,1\}^A$ ונראה להראות שקיים $S \in \mathcal{P}(A)$ כך ש־$\chi_S(a) = f(a)$. לכל $a \in A$.
נגדיר $S = \{a \in A \mid f(a) = 1\}$ ואז לכל $a \in A$ יתקיים:

$$\chi_S(a) = \begin{cases} 1 & a \in S \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

ולפי איך שבנינו את S נקבל $\chi_S(a) = f(a)$ לכל $a \in A$, ולכן קיבלנו שהיא על.
חד־חד ערכיות: נניח כי קיימות $S_1, S_2 \in \mathcal{P}(A)$ כך שמתקיים $\chi_{S_1} = \chi_{S_2}$, משמע לכל $a \in A$ מתקיים:

$$\chi_{S_1}(a) = \chi_{S_2}(a) \iff \chi_{A_0}(a) = \begin{cases} 1 & a \in S_1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} = \begin{cases} 1 & a \in S_2 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} = \chi_{S_2}(a)$$

במילים אחרות S_1 ו־S_2 מזדהות איבר־איבר משמע $S_1 = S_2$ והראינו כי χ היא חד־חד ערכית. $\square$

שאלה 2

נוכיח שלכל $n, m \in \mathbb{N}_{>0}$, הקבוצה $[\mathbb{Q}^n]^m = \{A \subseteq \mathbb{Q}^n \mid |A| = |[m]|\}$ בת־מנייה.

הוכחה: יהיו $n, m \in \mathbb{N}_{>0}$ כאשר $[\mathbb{Q}^n]^m$ זה אוספים בגודל m של וקטורים מעל $\mathbb{Q}^n$.

ראשית, נוכיח באינדוקציה כי $\bigtimes_{i=1}^{n} \mathbb{Q} = \mathbb{Q}^n$ היא בת־מנייה:

עבור בסיס האינדוקציה, $\mathbb{Q}$ בת־מנייה ובהרצאה ראינו שמכפלה קרטזית של קבוצות בנות מנייה היא בת־מנייה ולכן $\mathbb{Q}^2$ היא בת־מנייה.

נניח כי הטענה נכונה עבור $k \in \mathbb{N}$ משמע $\mathbb{Q}^k$ היא בת־מנייה ונרצה להראות שגם $\mathbb{Q}^{k+1}$ היא בת־מנייה. מתקיים:

$$\bigtimes_{i=1}^{k+1} \mathbb{Q} = \underbrace{\bigtimes_{i=1}^{k+1} \mathbb{Q}}_{\text{בת־מנייה מהנחת האינדוקציה}} \times \mathbb{Q}$$

אבל מכפלה קרטזית של קבוצות בנות מנייה היא בת־מנייה, ולכן $\bigtimes_{i=1}^{k+1} \mathbb{Q}$ בת־מנייה (מכפלה קרטזית סופית) ולכן גם $(\mathbb{Q}^n)^m$ בת־מנייה.

כעת, נרצה לבנות פונקציה חד־חד ערכית $\psi : [\mathbb{Q}^n]^m \to (\mathbb{Q}^n)^m$.

$\mathbb{Q}^n$ בת־מנייה ולכן קיימת $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^n$ חד־חד ערכית ועל כך שלכל $q = (q_1, q_2, ..., q_n) \in \mathbb{Q}^n$ קיים ויחיד $k \in \mathbb{N}$ כך ש־$\psi(k) = q$.

יהי $A \in [\mathbb{Q}^n]^m$ משמע $|A| = m$ ולכן נוכל להגדיר: $I_A = \{i \in \mathbb{N} \mid \psi(i) \in A\} \subseteq \mathbb{N}$ ונשים לב כי $|I_A| = m$ וזו קבוצת אינדקסים שיש לה $m!$ תמורות שונות לסידור ונבחר את התמורה שתסדר את I_A בסדר עולה, נסמן תמורה זו ב־σ.

נסתכל על I_A שמתאים לכל $A \in [\mathbb{Q}^n]^m$ ונגדיר את $\psi(A) = \left(\varphi\left(i_{\sigma(1)}\right), ..., \varphi\left(i_{\sigma(m)}\right)\right)$.

ψ מוגדרת היטב כהרכבה של פונקציות והיא חד־חד ערכית שכן אם $A \neq B$ אז בוודאי ש־$I_A \neq I_B$ ולכן יש לפחות אינדקס אחד כך שיתקיים $\psi(A) \neq \psi(B)$.

במטלה 1 הראינו שאם קיימת פונקציה חד־חד ערכית מ־A קבוצה אינסופית אל B קבוצה בת־מנייה נובע כי A בת־מנייה ולכן$[\mathbb{Q}^n]^m$ היא בת־מנייה.

$\square$

שאלה 3

נשתמש בטיעון האלכסון של קנטור כדי להוכיח שהקבוצה $A = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid f \text{ חד־חד ערכית}\}$ אינה בת־מנייה.

הוכחה: נניח בשלילה כי היא A כן בת־מנייה ולכן קיימת פונקציה $f : \mathbb{N} \to A$ חד־חד ערכית ועל.

לכן נוכל למנות את כל האיברים ב־A כ־$f_1, f_2, f_3, \ldots$.

נגדיר $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ על־ידי $g(n) = f_{n(n)} + 1$ ונשים לב כי $\forall n \in \mathbb{N}, f_{n(n)} \neq g(n)$ כי הן שונות לכל הפחות באיבר ה־n.

כעת נראה ש־g היא חד־חד ערכית: יהיו $n, m \in \mathbb{N}$ ונניח כי $g(n) = g(m)$ משמע $f_n(n) = f_m(m)$ שאני לא רואה סיבה למה זה מוביל לסתירה

TODOOOOOOOOOOOOOOOOOOO

היות ו־g שונה מכל f_n בלפחות נקודה אחת נובע כי $\neg g \in A$ אבל g היא חד־חד ערכית והנחנו כי A בת־מנייה ולכן זו סתירה. $\square$

שאלה 4

קבוצה $a \subseteq \mathbb{R}^2$ נקראת צמד ריבועים אופקיים אם קיימים ריבועים (קווי מתאר ללא פנים) $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^2$ המקיימים את התכונות הבאות:

1. צלעות הריבועים a_1, a_2 מאונכות לצירים
2. $a_1 \cap a_2$ הוא צלע ב־a_1 וב־a_2
3. $a_i \cup a_2 = a$

סעיף א'

הוכיח שכל קבוצה $X \subseteq \mathbb{R}^2$ שאיבריה הם צמדי ריבועים אופקיים כך שלכל $a, b \in X$ מתקיים $a \cap b = \emptyset$ היא סופית או בת־מנייה.

הוכחה: □

סעיף ב'

נראה שיש אוסף לא בן־מנייה $X \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ של ריבועים זרים בזוגות.

הוכחה: □