פתרון מטלה 04 — תורת המידה, 80517

15 בנובמבר 2025

שאלה 1

יהי $(X, \mathcal{A}, \mu)$ מרחב מידה.

סעיף א'

נוכיח כי אם לכל $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות מדידות המתכנסת במידה לפונקציה מדידה f אזי קיימת לה תת־סדרה המתכנסת ל־f כמעט־תמיד.

הוכחה: נאמר ש־$f_n \to f$ במידה אם לכל $\varepsilon > 0$ מתקיים $\mu(\{x \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) \to 0$.

נעבוד לפי ההדרכה, ניקח $\varepsilon_k = \frac{1}{k}$ ומההתכנסות במידה קיים n_k אינדקס כך שלכל $m \geq n_k$ מתקיים

$$\mu(\{x \in X \mid |f_m(x) - f(x)| \geq \varepsilon_k\}) > \frac{1}{2^k}$$

ניקח אינדקסים כך ש־$n_k < n_{k+1}$ בצורה הבאה: עבור $k = 1$ ניקח את n_1 ועבור $n_{k+1} > \max(n_k, N_{k+1})$ כאשר N_{k+1} הוא האינדקס שנקבל מההתכנסות עבור ε_{k+1}.

כלומר, $\left(f_{n_k}\right)_{k=1}^{\infty}$ כך שלכל $1 \leq k$ מתקיים $\mu(E_k) < \frac{1}{2^k}$ כאשר $E_k := \left\{x \in X \mid \left|f_{n_k}(x) - f(x)\right| \geq \frac{1}{k}\right\}$.

מתקיים

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$

כאשר זה האחרון הוא טור מתכנס ולכן מהלמה של בורל־קנטלי נקבל $\mu(\lim_{n\to\infty} \sup E_k) = 0$.

אם $x_0 \notin \lim_{n\to\infty} \sup E_k$ אז x_0 שייכת למספר סופי של איברים ב־E_k, ולכן קיים K_0 אינדקס מקסימלי שמכיל אותה ולכל $k \geq K_0$ מתקיים $x_0 \notin E_k$, כלומר

$$\left|f_{n_k}(x) - f(x)\right| < \frac{1}{k}$$

כלומר $f_{n_k}(x) \to f(x)$ לכל x מחוץ לקבוצה ממידה אפס, כלומר $\left(f_{n_k}\right)_{k=1}^{\infty}$ כמעט בכל מקום. $\square$

סעיף ב'

נסיק כי אם סדרת פונקציות f_n מתכנסת כמעט תמיד ל־g_1 וב־L^1 ל־g_2 אזי $g_1 = g_2$ כמעט תמיד.

הוכחה: מהסעיף הקודם נובע של־f_n יש תת־סדרה המתכנסת ל־g_1 כמעט תמיד, כלומר $f_n \to g_1$.

נרצה להראות שהתכנסות ב־L^1 גוררת התכנסות במידה: יהי $\varepsilon > 0$, מההתכנסות ב־L^1 נובע

$$\mu(\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) \underset{\text{אי־שיוויון מרקוב}}{\leq} \frac{1}{\varepsilon} \int |f_n - f| d\mu \to 0$$

אז התכנסות ב־L^1 גוררת התכנסות במידה ובסעיף הקודם ראינו שזה גורר שיש לה תת־סדרה המתכנסת ל־g_2 כמעט תמיד, כלומר $f_{n_k} \to g_2$ כמעט תמיד.

מכיוון ש־$f_n \to g_1$ לפי הנתון, בפרט מתקיים $f_{n_k} \to g_1$ ממשפט הירושה.

מהיות $f_{n_k} \to g_1$ נובע כי קיים $N_1 \in X$ שזו קבוצה ממידה אפס כך שמתקיים $\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = g_1(x)$ לכל $x \in X \setminus N_1$.

באופן דומה, יש $N_2 \in X$ קבוצה ממידה אפס כך שמתקיים $\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = g_2(x)$ לכל $x \in X \setminus N_2$.

ניקח $N = N_1 \cup N_2$אז איחודם הוא גם קבוצה ממידה אפס (מלינאריות) ולכן לכל $x \in X \setminus N$ מתקיים $x \in X \setminus N_1$ או $x \in X \setminus N_2$, כלומר

$$g_1(x) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = g_2(x)$$

כלומר $g_1 = g_2$ עד כדי קבוצה ממידה אפס, כלומר כמעט תמיד. $\square$

סעיף ג'

נניח ש־X מרחב מידה סופי ונוכיח כי אם $f_n \to f$ כמעט תמיד אז $f_n \to f$ במידה.

הוכחה: נניח ש־X מרחב ממידה סופית.

מההנחה ש־$f_n \to f$ נגדיר $A = \{x \in X \mid f_n(x) \to f(x)\}$ אז נובע ש־$\mu(X \setminus A) = 0$.

יהי $\varepsilon > 0$, נרצה להראות ש־$\mu(\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) \to 0$.

לכל $n \in \mathbb{N}$ נגדיר $B_n = \{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$.

מהיות $f_n \to f$ כמעט תמיד, נובע שלכל $x \in A$ מתקיים $f_n(x) \to f(x)$, כלומר יש N כך ש־$n \geq N$ $x \notin B_n$ כמעט לכל $x \in A$.

$$\mu(B_n) = \mu(B_n \cap A) + \mu(B_n \cap (X \setminus A)) = \mu(B_n \cap A) + 0$$

נבחן את $\mu(B_n \cap A)$ כאשר $n \to \infty$.

עבור n גדול מספיק, כמעט לכל $x \in A$ מתקיים $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ **TODOOOOOOOOOOOOOOOOOOO** $\square$

שאלה 2

יהי $(X, \mathcal{A}, \mu)$ מרחב מידה. ונניח כי f, f_n פונקציות אי־שליליות כך ש־$f_n \to f$ במידה.
נראה כי $\int f d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu$

הוכחה: ראשית ניזכר שמהגדרת האינפימה, יש סדרת אינדקסים $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ כך שמתקיים

$$\lim_{k\to\infty}\int_X f_{n_k} d\mu = \liminf_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu$$

וכמובן שכאשר הגבול קיים, $\liminf = \lim = \limsup$.
כעת, $f_n \to f$ במידה משמע לכל $\varepsilon > 0$ מתקיים $\mu(\{x \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) \to 0$ ובפרט בשאלה הקודמת ראינו שהתכנסות במידה גוררת קיום של תת־סדרה המתכנסת כמעט תמיד, כלומר לסדרה $\left(f_{n_k}\right)$ יש תת־סדרה $\left(f_{n_{k_\ell}}\right)_{\ell=1}^{\infty}$ כך שמתקיים $f_{n_{k_\ell}}(x) \to f(x)$ כמעט תמיד.
כעת נשתמש בלמה של פאטו ונקבל

$$\int_X f d\mu \leq \liminf_{\ell\to\infty}\int_X f_{n_{k_\ell}} d\mu = \lim_{k\to\infty}\int_X f_{n_k} d\mu = \liminf_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu$$

$\square$

שאלה 3

יהי $(X,\mathcal{A},\mu)$ מרחב מידה.

נוכיח כי לכל $f:X\to[0,\infty]$ מדידה ואינטגרבילית ולכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $E\in\mathcal{A}$ עם $\mu(E)<\delta$ מתקיים $\int_E|f|d\mu<\varepsilon$.

הוכחה: יהי $\varepsilon>0$, נשים לב שמתקיים

$$\lim_{M\to\infty}\int_{\{x\in X\ \mid\ f(x)>M\}} fd\mu=0$$

שכן מהיות האינטגרל סופי נובע כי קבוצת הנקודות שבהן f שואפת/הינה אינסוף היא קבוצה ממידה אפס.

בפרט ניתן לבחור M כזה כך שיתקיים

$$\int_{\{x\in X\ \mid\ f(x)>M\}} fd\mu<\frac{\varepsilon}{2}$$

יהי $E\in\mathcal{A}$ מדידה, מלינאריות האינטגרל מתקיים

$$\begin{aligned}\int_E fd\mu&=\int_{E\cap\{x\in X\ \mid\ f(x)\le M\}} fd\mu+\int_{E\cap\{x\in X\ \mid\ f(x)>M\}} fd\mu\le\int_{E\cap\{x\in X\ \mid\ f(x)\le M\}} fd\mu+\frac{\varepsilon}{2}\\&\underset{\text{מונוטוניות האינטגרל}}{\le}\int_{E\cap\{x\in X\ \mid\ f(x)\le M\}} Md\mu+\frac{\varepsilon}{2}\underset{\text{מונוטוניות האינטגרל והמידה}}{\le}M\cdot\mu(E)+\frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

אז נבחר $\delta=\frac{\varepsilon}{2M}$ ותהיי $E\in\mathcal{A}$ כך שמתקיים $\mu(E)<\delta$, אז עם מה שמצאנו מתקיים

$$\int_E fd\mu\le M\cdot\mu(E)+\frac{\varepsilon}{2}<M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

$\square$

שאלה 4

יהי X מרחב מטרי קומפקטי מקומית. בהינתן $E \neq \emptyset$ נגדיר

$$d_E(x) := \inf\{d(x,y) \mid Y \in E\}$$

סעיף א'

נראה כי לכל E כזו, $d_E : X \to [0,\infty)$ היא רציפה.

הוכחה: כדי ש־d_E תהיה רציפה ב־$x_0 \in X$ עלינו להראות שלכל $\varepsilon > 0$ יש $\delta > 0$ כך שמתקיים

$$d(x,x_0) < \delta \Longrightarrow |d_E(x) - d_E(x_0)| < \varepsilon$$

יהיו $x_0, x \in X$, אז לכל $y \in E$ מתקיים $d_E(x_0) \leq d(x_0,y)$ ומאי־שיוויון המשולש

$$d(x,y) \leq d(x,x_0) + d(x_0,y) \Longleftrightarrow \inf_{y\in E}\{d(x,y)\} \leq d(x,x_0) + \inf_{y\in E}\{d(x_0,y)\}$$

$$\Longleftrightarrow d_E(x) \leq d(x,x_0) + d_E(x_0) \Longleftrightarrow d_E(x) - d_E(x_0) \leq d(x,x_0)$$

מהסימטריות של המטריקה נחליף תפקידים בין x, x_0 ונקבל

$$d_E(x_0) - d_E(x) \leq d(x,x_0)$$

כלומר

$$|d_E(x) - d_E(x_0)| \leq d(x,x_0)$$

זה נכון לכל $x, x_0 \in X$ וזה בידיוק אומר ש־d_E היא ליפשיצית עם קבוע ליפשיציות 1 ופונקציה ליפשיצית היא רציפה עבור $\delta = \varepsilon > 0$. $\square$

סעיף ב'

תהיי $K \subset X$ תת־קבוצה קומפקטית ו־U קבוצה פתוחה המכילה אותה.

נביע באמצעות פונקציות מהצורה d_E פונקציה רציפה f המקיימת $f\mid_K = 1$ ו־$f\mid_{U^c} = 0$.

פתרון: אנחנו במרחב מטרי ולכן מהיות K קומפקטית נובע כי היא סגורה, ולכן K^c פתוחה.

באופן זהה, מהיות U פתוחה אז U^c סגורה.

ניזכר שבמרחב מטרי המרחק תמיד מתקבל מהסגירות והחסימות ולכן

$$\delta_0 = d(K,U^c) = \{\inf(d(x,y)) \mid x \in K, y \in U^c\} > 0$$

עבור $x \in U^c$ מתקיים $d_{U^c}(x) = 0$ ואם $x \in U$ מתקיים $d_{U^c}(x) > 0$.

עבור $x \in K$, מהקומפקטיות מתקיים $d_K(x) = 0$ ולכל $x \in X \setminus K$ מתקיים $d_K(x) > 0$.

אנחנו רוצים שלכל $x \in K$ יתקיים $f(x) = 1$ ולכל $x \in U$ יתקיים $f(x) = 0$.

מיותר לציין שאם $x \in K$ אז $x \notin U^c$ כי $x \in K \subset U$, ונחלק למקרים:

$$\begin{cases} x \in K \Longrightarrow d_K(x) = 0,\ d_{U^c}(x) < 0 \\ x \in U^c \Longrightarrow d_K(x) > 0,\ d_{U^c}(x) = 0 \\ x \notin K \cup U^c \Longrightarrow d_K(x) > 0,\ d_{U^c}(x) > 0 \end{cases}$$

כדי שיתקיימו התנאים שלנו, נגדיר

$$f(x) = \frac{d_{U^c}(x)}{d_{U^c}(x) + d_K(x)}$$

ראשית זו הרכבה של פונקציות רציפות ולכן רציף ובפרט מהפיצול למקרים שראינו לעיל נובע כי המכנה לעולם לא מתאפס ולכן רציפה ומוגדרת היטב.

נשאר להראות ש־$f\mid_K = 1, f\mid_{U^c} = 0$.

ואכן, אם $x \in K$ מתקיים $f(x) = \frac{d_{U^c}(x)}{d_{U^c}(x)+0} = 1$ ואם $x \in U^c$ מתקיים $f(x) = \frac{0}{0+d_K(x)} = 0$. $\square$