פתרון מטלה 03 — חשבון אינפיניטסימלי 3, 80415

10 באפריל 2025

שאלה 1

סעיף א'

תהיי $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ הנתונה על־ידי

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^4+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

נוכיח כי לכל $v\in\mathbb{R}^2$ הפונקציה $f_v:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת על־ידי $f_v(t)=f(tv)$ היא פונקציה רציפה אבל f אינה רציפה.

הוכחה: נתחיל מלהראות ש־f לא רציפה.

f רציפה בכל $(x,y)\neq(0,0)$ מאריתמטיקה של פונקציות רציפות ונראה שהיא לא רציפה בראשית:

נניח בשלילה שהיא רציפה בראשית, ולכן לפי קריטריון הנייה לרציפות מספיק שנמצא סדרה (x_n,y_n) כך ש־$(x_n,y_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ אבל $\neq 0 \xrightarrow[n\to\infty]{}$ (x_n,y_n) ובבחירה של הסדרות $(x_n)=\frac{1}{n},(y_n)=\frac{1}{n^2}$ נקבל:

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n,y_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2y_n}{x_n^4+y_n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^4}}==\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{2}{n^4}}=\frac{1}{2}\neq 0=f(0,0)$$

ולכן f לא רציפה בראשית.

נראה כעת כי לכל $v\in\mathbb{R}^2$ הפונקציה f_v רציפה: אם $v=(0,0)\in\mathbb{R}^2$ אז לכל $t\in\mathbb{R}$ מתקיים

$$f_v(t)=f(tv)=f(0,0)=0$$

וזו פונקציה רציפה לכל $t\in\mathbb{R}$.

אם $v=(x,y)\neq(0,0)\in\mathbb{R}^2$ אז לכל $t\in\mathbb{R}$ מתקיים

$$f_v(t)=f(tv)=f(xt,yt)=\frac{(xt)^2(yt)}{(xt)^4+(yt)^2}=\frac{x^2yt^3}{x^4t^4+y^2t^2}=\frac{x^2yt^3}{t^2(x^4t^2+y^2)}=\frac{x^2yt}{x^4t^2+y^2}$$

וזוהי פונקציה רציפה לכל $t\in\mathbb{R}$ מאריתמטיקה של פונקציות רציפות (המכנה לא מתאפס לאף $t\in\mathbb{R}$). $\square$

סעיף ב'

נראה כי הפונקציה $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ הנתונה על־ידי

$$g(x)=\begin{cases}\frac{x\sin(y)}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

היא רציפה.

פתרון: ראשית, $g(x)$ רציפה בכל $(x,y)\neq(0,0)\in\mathbb{R}^2$ מאריתמטיקה של פונקציות רציפות ולכן נשאר להראות שהיא רציפה גם בראשית.

נעבוד כמו בתרגול ונעבור לקורדינאטות קוטביות, נגדיר $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$ כאשר $r\geq 0,\theta\in[0,2\pi]$. ואכן מתקיים:

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x\sin(y)}{\sqrt{x^2+y^2}}&=\lim_{r\to0}\frac{r\cos\theta\cdot\sin(r\sin\theta)}{\sqrt{r^2\cos\theta^2+r^2\sin\theta^2}}\\&=\lim_{r\to0}\frac{r\cos\theta\cdot\sin(r\sin\theta)}{\sqrt{r^2(\cos\theta^2+\sin\theta^2)}}\\&\underset{(1)}{=}\lim_{r\to0}\frac{r\cos\theta\cdot\sin(r\sin\theta)}{\sqrt{r^2}}\\&\underset{(2)}{=}\lim_{r\to0}\frac{r\cos\theta\cdot\sin(r\sin\theta)}{r}\\&=\lim_{r\to0}\cos\theta\cdot\sin(r\sin\theta)\underset{(3)}{=}0\end{aligned}$$

כאשר (1) נובע מהזהות הטריגונומטרית $\cos\theta^2+\sin\theta^2=1$, (2) נובע מהיות $r\geq0$ ו־(3) נובע מחסומה כפול אפסה ולכן g רציפה ב־$\mathbb{R}^2$. $\square$

שאלה 2

נוכיח כי כל מרחב מטרי (X,d) הומיאומורפי למרחב מטרי חסום.

הוכחה: ניזכר כי מרחב מטרי יקרא חסום אם קיימים $x \in X$ ו־$r > 0$ כך שמתקיים $X \subseteq B_r(x)$.
נגדיר מטריקה d' על X על־ידי $d'(x,y) := \min\{1, d(x,y,)\}$ ונשים לב שמתקיים $d'(x,y) \leq 1$ לכל $x, y \in X$.
נראה ש־d' אכן מטריקה:

1. אי־שליליות נובע מהיות d מטריקה ואכן $d'(x,y) = 0 \iff d(x,y) = 0 \iff x = y$
2. סימטריה – נובע מהיות d מטריקה
3. אי שיוויון המשולש – יהיו $x, y, z \in X$, מתקיים מהיות d מטריקה

$$d'(x,z) = \min\{1, d(x,z)\} \leq \min\{1, d(x,y) + d(y,z)\} \leq \min\{1, d(x,y)\} + \min\{1, d(y,z)\} = d'(x,y) + d'(y,z)$$

כעת, בתרגול ראינו שקבוצות פתוחות נשמרות תחת הומיאומורפיזם (זאת אומרת $U \subseteq (X,d)$ פתוחה אם ורק אם $U \subseteq (X,d')$ פתוחה).
נגדיר את הכדורים שלנו:

$$B_d(x,r) = \{y \in X \mid d(x,y) < r\}$$

$$B_{d'}(x,r) = \{y \in X \mid d'(x,y) < r\}$$

תהיי $U \subseteq X$ פתוחה תחת המטריקה d. ניזכר כי U פתוחה ב־d אם ורק אם לכל $x \in U$ קיים $\varepsilon_x > 0$ כך שמתקיים $B_d(x, \varepsilon_x) \subseteq U$.
אם $\varepsilon_x < 1$ אזי מהגדרת d' נקבל שמתקיים $B_{d'}(x, \varepsilon_x) \subseteq U$ ולכן U פתוחה ב־d'.
בכיוון השני, תהיי $V \subseteq X$ פתוחה תחת המטריקה d' ולכן עבור $\varepsilon_y < 1$ מתקיים $B_{d'}(y, \varepsilon_y) \subseteq V$ ואז מהגדרת d' נובע כי $B_d(y, \varepsilon_y) \subseteq V$.
הראינו כי קבוצה פתוחה ב־(X,d) אם ורק אם היא פתוחה ב־(X,d') משמע (X,d) ו־(X,d') הם הומיאומורפים ו־(X,d') חסום, כנדרש.

$\square$

שאלה 3

יהי $(X, \|\cdot\|)$ מרחב נורמי ממימד $n \in \mathbb{N}$ מעל $\mathbb{R}$.

סעיף א'

נוכיח כי X איזומטרי ל-$\mathbb{R}^n$ עם נורמה כלשהי ונסיק כי $A \subseteq X$ היא קומפקטית סדרתית אם ורק אם היא סגורה וחסומה.

הוכחה: נראה כי X איזומטרי ל-$\mathbb{R}^n$ עם נורמה כלשהי.

נסיק כעת כי $A \subseteq X$ היא קומפקטית סדרתית אם ורק אם היא סגורה וחסומה:

$\Longleftarrow$ נניח כי A קומפקטית סדרתית ולכן מטענה שראינו בכיתה היא סגורה וחסומה בכל מרחב מטרי (מרחב נורמי הוא בפרט מרחב מטרי).

$\Longrightarrow$ נניח כי A סגורה וחסומה ונרצה להראות שהיא קומפקטית.

תהיי (x_n) in A סדרה, ונרצה להראות שיש לה תת־סדרה מתכנסת אל $x \in A$.

$\square$

סעיף ב'

הוכחה: $\square$

שאלה 4

יהי (X, d) מרחב מטרי ו־$i : X \to \hat{X}$ השיכון של X בהשלמה.

סעיף א'

הוכחה: $\square$

סעיף ב'

הוכחה: $\square$

שאלה 5

יהי $p \in \mathbb{N}$ מספר ראשוני.

סעיף א'

נוכיח כי ההשלמה $\left(\mathbb{Q}_p, \hat{d}_p\right)$ של $\left(\mathbb{Q}, d_p\right)$ היא שדה והמטריקה $\hat{d}_p$ מקיימת את־שיוויון המשולש האולטרה־מטרי.

הוכחה: $\square$

סעיף ב'

הוכחה: $\square$

שאלה 6

יהי (X, d) מרחב מטרי קומפקטי סדרתית ו־$f : X \to X$ פונקציה כמעט מכווצת, כלומר לכל $x, y \in X$ מתקיים $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$
נוכיח כי קיימת ל־f נקודת שבת יחידה.

הוכחה: נגדיר $g : X \to \mathbb{R}$ על־ידי $g(x) = d(x, f(x))$.
g רציפה כהרכבת פונקציות רציפות – כן הרכבת רציפות היא רציפה ו־f כמעט מכווצת ולכן ליפשיצית והמטריקה רציפה.
X מרחב קומפקטי סדרתית ו־g רציפה ולכן g מקבלת עליו מינימום ולכן קיים $x_0 \in X$ כך ש־$g(x_0) = m \in \mathbb{R}$ הוא מינימום של g.
נראה כי $g(x_0) = m = 0$: נניח בשלילה ש־$m \neq 0$ ולכן מתקיים:

$$g(f(x_0)) = d(f(x_0), f(f(x_0))) \underset{(1)}{<} d(x_0, f(x_0)) = g(x_0) = m$$

כאשר (1) נובע מהיות f מכווצת, אבל זו סתירה שכן הנחנו ש־m הוא המינימום של $g(x)$ ולכן בהכרח מתקיים $g(x) = d(x_0, f(x_0)) = 0$ ולכן $x_0 = f(x_0)$ ומצאנו נקודת שבת.
נראה כי היא יחידה: נניח שקיימות $x_1, x_2 \in X$ כך ש־$x_1 \neq x_2$ וגם $f(x_1) = x_1, f(x_2) = x_2$, ולכן:

$$d(x_1, x_2) = d(f(x_1), f(x_2)) \underset{(1)}{<} d(x_1, x_2)$$

כאשר (1) נובע מהיות f מכווצת וזו כמובן סתירה. $\square$