# מטלה הקבוצות, -05

2025 באפריל 25



## שאלה 1

נוכיח מאקסיומות פאנו את הטענה הבאה

 $\forall x \ \forall y \ (x \cdot y = y \cdot x)$ 

הוכחה:

### שאלה 2

 $X \uplus X' = (X \times \{0\}) \cup (X' \times \{1\})$  תהיינה X, Y, Z תהיינה תהיינה

#### 'סעיף א

$$|X \times (Y \uplus Z)| = |(X \times Y) \uplus (X \times Z)|$$
נוכיה שמתקיים

על־ידי 
$$f: X imes (Y \uplus Z) o (X imes Y) \uplus (X imes Z)$$
 על־ידי

$$f(x,(l,i)) = ((x,l),i)$$

יות: אפשריות: משתי צורות אפשריות:  $X imes (Y \uplus Z) X imes (Y \uplus Z)$  הם משתי צורות אפשריות: f

- ((x,y),0) אל ביחידות  $x \in X, y \in Y$  עבור (x,(y,0)) .1
- ((x,z),1) אל ביחידות שימופה  $x\in X,z\in Z$  עבור ((x,(z,1)). 2

. ולכן מוגדרת היטב. נראה כי היא חד־חד ערכית ועל

על. f(a)=b נקבל  $a=(x,(l,i))\in X imes (Y\uplus Z)$  של בשבחירה של  $b=((x,l),i)\in (X imes Y)\uplus (X imes Z)$  על: יהי  $b=((x,l),i)\in (X imes Y)$  נשים לב שמתקיים חד־חד ערכיות: יהיו  $a=(x_1,(l_1,i_1)),c=(x_2,(l_2,i_2))\in X imes (Y\uplus Z)$  הדיחד ערכיות: יהיו

$$f(a) = f(c) \Longleftrightarrow ((x_1, l_1), i_1) = ((x_2, l_2), i_2) \Longleftrightarrow x_1 = x_2 \land l_1 = l_2 \land i_1 = i_2 \Longleftrightarrow a = c$$

.חד־חד ערכית f

 $|X imes (Y \uplus Z)| = |(X imes Y) \uplus (X imes Z)|$  מצאנו פונקציה חד־חד ערכית ועל f ולכן לפי הגדרת שיוויון עוצמות מתקיים

#### 'סעיף ב

$$|(X \times Y)^Z| = |X^Z \times Y^Z|$$
 נוכיח שמתקיים

$$f(z) \coloneqq \langle x,y \rangle$$
 נסמן  $z \in Z$  ולכל ולכל  $f \in (X \times Y)^Z$  : הוכחה:

$$(f^{-1})$$
 בהתאם ב $z\in Z$  לכל)  $g(z)=x,\;h(z)=y$  על־ידי בהתאם ב $g:Z o X,h:Z o Y$  נגדיר גם

$$.arphi(f) \coloneqq \langle g,h \rangle$$
 על־ידי  $arphi: (X imes Y)^Z o (X^Z imes Y^Z)$  את נגדיר את בהתאמה, נגדיר את

:נראה כי  $\varphi$  חד־חד ערכית ועל

$$(arphi(\psi)=\langle g,h
angle$$
 מקיימת  $\psi:Z o X imes Y$  נואכן  $\psi(z)=\langle g(z),h(z)
angle$  ולכן  $(g,h)\in (X^Z imes Y^Z)$  על: יהיו

חד־חד ערכית: יהיו  $f_1,f_2\in (X imes Y)^Z$  יהיו ערכית: חד־חד ערכית: יהיו

$$\varphi(f_1) = \varphi(f_2) \Longleftrightarrow \langle g_1, h_1 \rangle = \langle g_2, h_2 \rangle \Longleftrightarrow \forall z \in Z, g_1(z) = g_2(z) \land h_1(z) = h_2(z) \Longleftrightarrow f_1 = f_2$$

ולכו 🛭 חד־חד ערכית

 $|(X \times Y)^Z| = |X^Z \times Y^Z|$  מצאנו פונקציה מתקיים לפי הגדרת ועל ולכן אינו ערכית ועל ולכן פונקציה מד-חד מצאנו וויון עוצמות מתקיים אינו וולכן פונקציה וולכן אינו וולכן

#### 'סעיף ג

$$|X^{Y\uplus Z}| = |X^Y imes X^Z|$$
 נוכיח שמתקיים

הוכחה: נשים לב שמתקיים

$$\left|X^{Y\uplus Z}\right| = \left|X^{(Y\times\{0\}\cup(Z\times\{1\}))}\right| \underset{(1)}{=} \left|\left(X^{(Y\times\{0\})^{Z\times\{1\}}}\right)\right| =$$