פתרון מטלה 07 — אנליזה פונקציונלית, 80417

5 ביוני 2025

שאלה 1

ניזכר כי עבורה מטריצה מרוכבת $A \in M_n(\mathbb{C})$, $A^* = \overline{A^t}$. נגדיר על המרחב $M_n(\mathbb{C})$ את הפונקציה הבינארית $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(A^*B)$.

סעיף א'

נראה כי $(M_n(\mathbb{C}), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ הוא מרחב מכפלה פנימית.

הוכחה: נראה שמתקיימות ארבע התכונות של מכפלה פנימית:

1. אדיטיביות ברכיב הראשון

$$\forall A, B, C \in M_n(\mathbb{C}) : \langle A + B, C\rangle = \operatorname{tr}((A + B)^*C) = \operatorname{tr}(A^*C + B^*C) \underset{\text{עקבה היא העתקה לינארית}}{=} \operatorname{tr}(A^*C) + \operatorname{tr}(B^*C) = \langle A, C\rangle + \langle B, C\rangle$$

2. הומוגניות ברכיב הראשון

$$\forall A, B \in M_n(\mathbb{C}), \forall\lambda \in \mathbb{R} : \langle\lambda A, B\rangle = \operatorname{tr}(\lambda A^*B) \underset{\operatorname{tr}(\alpha A)=\alpha\operatorname{tr}(A)}{=} \lambda\operatorname{tr}(A^*B) = \lambda\langle A, B\rangle$$

3. הרמיטיות

$$\forall A, B \in M_n(\mathbb{C}) : \langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(A^*B) = \operatorname{tr}\left(\overline{A^t}B\right) = \operatorname{tr}\left(\overline{A}B^t\right) = \operatorname{tr}\left(B^t\overline{A}\right) = \overline{\operatorname{tr}\left(\overline{B^t\overline{A}}\right)} = \overline{\langle B,A\rangle}$$

4. חיוביות לחלוטין

$$\forall M \in M_n(\mathbb{C}), \langle M, M\rangle = \operatorname{tr}(M^*M) = \operatorname{tr}\left(\overline{M^t}M\right) = \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\overline{m_{l,k}}m_{l,k} = \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left\|m_{l,k}\right\|^2 \geq 0$$

$$\langle M, M\rangle = 0 \iff \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left\|m_{l,k}\right\|^2 = 0 \iff \left\|m_{l,k}\right\| = 0 \iff M = 0$$

קיימנו את כל התנאים למכפלה פנימית ולכן $(M_n(\mathbb{C}), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ הוא מרחב מכפלה פנימית. $\square$

סעיף ב'

נסיק כי אם A, B מטריצות מרוכבות מאותו סדר אזי $|\operatorname{tr}(A^*B)|^2 \leq \operatorname{tr}(A^*A)\cdot\operatorname{tr}(B^*B)$.

הוכחה: נגדיר $\|A\| = \sqrt{\langle A,A\rangle}$ ומאי־שיוויון קושי־שוורץ נקבל

$$|\langle A,B\rangle| \leq \|A\|\cdot\|B\| \Rightarrow |\operatorname{tr}(A^*B)| \leq \sqrt{\operatorname{tr}(A^*A)\cdot\operatorname{tr}(B^*B)}$$

זאת־אומרת, $|\operatorname{tr}(A^*B)|^2 \leq \operatorname{tr}(A^*A)\cdot\operatorname{tr}(B^*B)$, כנדרש. $\square$

שאלה 2

יהי H מרחב מכפלה פנימית ותהיי $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ מערכת אורתונורמלית ב־H. נסמן $M = \mathrm{Span}\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$.
נראה כי $x \in \overline{M}$ אם ורק אם $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n, x\rangle e_n$.
הוכחה: במילים אחרות אנחנו מראים שזו מערכת שלמה (לפי התנאים השקולים למערכת שלמה שראינו בהרצאה).
$\Longleftarrow$ נניח כי $x \in \overline{M}$ ונרצה להראות שמתקיים $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n, x\rangle e_n$.
מכך ש־$x \in \overline{M}$ נובע כי קיימת $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq M$ כך ש־$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$.
לכל $n \in \mathbb{N}$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $1 \le i \le N$ קיים α_i^n כך שמתקיים $x_n = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^n e_i$ ובפרט $\alpha_i^n = \langle e_n, x_i\rangle$.
עכשיו, מתקיים גם

$$\langle e_n, x\rangle = \lim_{k\to\infty} \langle e_n, x_k\rangle$$

(כי $x_n \to x$), ולכן נקבל בסך־הכל

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n, x\rangle e_n$$

$\Longrightarrow$ נניח כי $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n, x\rangle e_n$ ונרצה להראות ש־$x \in \overline{M}$.
נגדיר לכל $N \in \mathbb{N}$

$$x_N = \sum_{n=1}^{N} \langle e_n, x\rangle e_n$$

ברור כי כל $x_N \in M$ כצירוף לינארי סופי של איברי M, עלינו להראות שמתקיים

$$x_N \xrightarrow[N\to\infty]{} : \|x - x_N\|^2 = \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} \langle e_n, x\rangle e_n \right\|^2$$

מאי־שיוויון בסל נובע (כי $\{e_n\}$ ממערכת אורתונורמלית)

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k\rangle|^2 \le \|x\|^2$$

ולכן כאשר $N \to \infty$ מתקיים $\sum_{n=N+1}^{\infty} |\langle e_n, x\rangle|^2 \to 0$, ולכן $\|x - x_N\|^2 \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$ משמע $x_n \to x$ ולכן $x \in \overline{M}$. $\square$

שאלה 3

יהי $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, נוכיח שלא קיימת מערכת אורתוגונלית של פונקציות רציפות חיוביות למרחב $C[a,b]$ עם המכפלה הפנימית

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

במילים אחרות, אם $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ מערכת אורתוגונלית ב־$C[a,b]$ אז קיים $n \in \mathbb{N}$ וקיים $x \in [a,b]$ כך שמתקיים $f_n(x) = 0$.

הוכחה: ראשית, מהיות f,g פונקציות רציפות וחיוביות נובע כי קיים $M \in \mathbb{R}$ כך שמתקיים $f(x), g(x) \leq M$ לכל $x \in [a,b]$, אז ממונוטוניות האינטגרל

$$0 \leq \langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx \leq \int_a^b f(M)g(M)dx = \underbrace{f(M)}_{>0}\underbrace{g(M)}_{>0}\underbrace{(b-a)}_{>0} \underset{\text{מכפלה של ערכים חיוביים}}{>} 0$$

אבל $\langle f,g\rangle \neq 0$ (גם עבור $f = g$) אז לא יכולה להיות סדרת פונקציות אורתוגונליות כאלה. $\square$

שאלה 4

יהי $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$ קטע. ניזכר במערכת $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ של פולינומים אורתוגונליים מהתרגול. כבר הראינו שהשורשים של כל p_n הם ממשיים.

סעיף א'

נוכיח שלכל $n\in\mathbb{N}$ לפולינום p_n יש n שורשים פשוטים (ריבוי אחד). כלומר, שהפולינום p_n לא מתחלק בפולינומים מהצורה $(x-\alpha)^2$.

הוכחה: נעזר ברמז ונכתוב $p_n=\prod(x-\alpha_k)_k^{\beta}$ כאשר α_k ממשיים שונים.

נניח כי לא כל השורשים פשוטים, ולכן קיים $l\leq k$ כך ש־$B_l>1$, אז נגדיר

$$q_n(x)=(x-\alpha_l)^{\beta_l-2}\prod_{k=1,k\neq l}^{n}(x-\alpha_k)$$

זה פולינום לאחר חילוק ב־$(x-\alpha_l)^2$, היות ו־$\beta_l\geq 2$ זה עדיין פולינום וכמובן מתקיים $\deg(q_n)<\deg(p_n)$, לכן בפרט מתקיים $\langle p_n,q_n\rangle=0$, אבל מנגד

$$q_n(x)p_n(x)=(x-\alpha_l)^{2\beta_l-2}\prod_{k=1,k\neq l}^{n}(x-\alpha_k)$$

כל הפולינום הם לא פשוטים במכפלה ובפרט ריבועיים, ולכן

$$\langle p_n,q_n\rangle=\int_a^b p_n(x)q_n(x)dx>0$$

אבל $\langle p_n,q_n\rangle=0$ וזאת סתירה. $\square$

סעיף ב'

נוכיח שלכל $n\in\mathbb{N}$ כל השורשים של p_n שייכים לקטע (a,b).

הוכחה: נניח ש־α_k השורשים של p_n עבור $1\leq k\leq n$, באינדוקציה על n:

עבור $n=0$ הטענה נכונה באופן טריוויאלי, נניח כי הטענה נכונה עבור $n\in\mathbb{N}$, משמע $\alpha_k\in(a,b)$ לכל $1\leq k<n$.

נניח בשלילה כי $\alpha_n\notin(a,b)$ וללא הגבלת הכלליות $\alpha_n>b$ ולכן $x-\alpha_n$ חיובי לחלוטין (אפשר להניח כי אם $\alpha_j\notin(a,b)$ אז הפונקציה $x-\alpha_j$ לא מחליפה סימן בקטע (a,b)). אז נגדיר

$$q_n(x)=\prod_{k=1}^{n-1}(x-\alpha_k)$$

ולכן

$$\langle p_n,q_n\rangle=\int_a^b p_n(x)q_n(x)dx=\int_a^b(x-\alpha_n)\prod_{k=1}^{n-1}(x-\alpha_k)^2>0$$

שכן הפונקציה רציפה ואי־שלילית ולכן חיובית, אבל $\deg(q_n)<\deg(p_n)$ ולכן בהכרח $\langle p_n,q_n\rangle=0$ וזאת סתירה. $\square$