

הכנה לבחן – משפטים והוכחות נבחרים – תורת המידה, 80517

24 בפברואר 2026



תוכן עניינים

4	מידה	1
4	1.1 תנאי מספיק בשבייל פונקציה מדידה	1.1
5	1.2 תנאי שקול לפונקציה מדידה	1.2
6	1.3 מדידות נשמרת תחת הפעלת sup/inf/limsup/liminf	1.3
7	1.4 תוכנות בסיסיות של מידה	1.4
8	2 אינטגרציה	2
8	2.1 לכל פונקציה מדידה יש סדרת פונקציות פשוטות שמתכנסת אליה	2.1
9	2.2 תוכנות האינטגרל	2.2
12	2.3 משפט ההתקינות המונוטונית	2.3
13	2.4 החלפת סדר אינטגרציה וסכום	2.4
14	2.5 קיום מידה אינטגרל	2.5
15	2.6 הלמה של פאטו	2.6
16	2.7 הלמה של בורל-קנטלי	2.7
18	2.8 משפט ההתקינות הנשלטה	2.8
19	2.9 אירישויון מרקוב	2.9
20	3 קבוצות מדידה אפס	3
20	3.1 סדרת פונקציות כמעיטה-תמייד	3.1
21	3.2 תנאים שקולים לשלוות	3.2
22	3.3 תנאים שקולים לפונקציה אפסה כמעיטה-תמייד	3.3
23	3.4 טענה על ממוצעי פונקציה	3.4
24	4 משפט ההצגה של ריס	4
24	4.1 משפט ההצגה של ריס – ייחודה	4.1
25	5 רגולריות ומידות רדון	5
25	5.1 תוכנות מדידה רדון על מרחב ס-קומפקטי	5.1
27	5.2 תנאים שגוררים שמידה היא מידה רדון	5.2
28	5.3 טענה מבוחן לדוגמה	5.3
29	6 התכנסות חלשא-*	6
29	6.1 טענה מהבחן	6.1
30	6.2 מידות הסתרבות	6.2
31	7 דינמיקה	7
31	7.1 משפט העקרונות של Krylov–Bogolyubov	7.1
32	8 שלושת העקרונות של Littlewood	8
32	8.1 משפט לוזין	8.1
33	8.2 משפט אגרוב/אגרוב	8.2
34	9 מרחבי L^p	9
34	9.1 אירישויון יאנسن	9.1
35	9.2 אירישויון הולדר ואירישויון מניקובסקי	9.2
36	9.3 C הוא מרחב פסודו-נורמי מעל (μ)	9.3
37	9.4 טענות חשובות מתרגילי הבית	9.4
38	9.5 לכל $\in [1, \infty, p]$, המרחב הנורמי $(L^p(\mu), \ \cdot\ _p)$ הוא מרחב בנק	9.5
39	9.6 (μ) צפופה ב- \mathcal{G}	9.6
40	9.7 קירוב על-ידי פונקציות רציפות	9.7
41	10 יהסים בין מידות	10
41	10.1 טענה שקולה לרציפות בהחלט במרחב סופי	10.1
41	10.2 טענה שקולה לרציפות בהחלט במרחב ס-סופי	10.2
41	10.3 תנאי שקול למידת האפס	10.3

41	10.4 תנאי שקול לסינגולריות על מידות חיוביות
41	10.5 מסקנה מתרגילי הבית
42	11 מרחבי הילברט
42	11.1 משפט ההצגה של Riesz-Fréchet
43	11.2 אם μ איננה מידת האפס או יש מידת סופית ששකולה לה
44	12 גזורת רדון-ניקודים
44	12.1 משפט גזורת רדון-ניקודים-לבג
46	12.2 איך מחשבים גזורת רדון-ניקודים
47	13 גזירה של מידות רדון-ב- \mathbb{R}^d
47	13.1 מסקנות משפט הcisio של בסיקוביץ'
48	13.2 משפט לב הגזירה
49	13.3 משפט הגזירה של לב-בסיסיוקוביץ'
51	13.4 משפט הגזירה של לבג לפונקציה אינטגרבילית מקומית
52	13.5 משפט הגזירה של לבג (מהתרגול)
53	14 מרחבי מכפלה
53	14.1 משפט פוביינו
54	14.2 תנאי שקול לפונקציה מדידה על מרחב מכפלה

1 מידה

1.1 תנאי מספיק לשכיל פונקציה מדידה

משפט 1.1.1 (תנאי מספיק לשכיל פונקציה מדידה): (X, \mathcal{A}) מרחב מדיד ו- (Y, τ) מרחב טופולוגי. אם $\sigma(\tau) := \mathbb{B}_Y$ היא σ -אלגברת בורל על Y או הפונקציה $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathbb{B}_Y)$ מדידה אם ורק אם המקור של כל קבוצה פתוחה ב- τ הוא מדיד, כלומר אם ורק אם לכל $\tau \in U \in \mathcal{A}$, $f^{-1}(U) \in \mathcal{A}$.

הוכחה: הכוון הראשון נובע ישירות מהגדרת הפונקציה המדידה (כי מהדרה לשכיל שהפונקציה תהיה מדידה צריך שהמקור של כל קבוצה מדידה תחת f יהיה מדיד).

בכיוון השני, נסמן $\Omega := \{E \subseteq Y \mid f^{-1}(E) \in \mathcal{A}\}$.

מההנחה, כל $\tau \in U \in \mathcal{A}$ מקיים $f^{-1}(U) \subseteq \Omega$ ולכן $\Omega \subseteq \tau$ ומטענה שראינו נובע Ω היא σ -אלגברת.

מצד שני, σ -אלגברת בורל \mathbb{B}_Y היא σ -אלגברת הקטנה ביותר על Y שמכילה את τ ולכן $\Omega \subseteq \mathbb{B}_Y$ מתקיים $\Omega \subseteq f^{-1}(E)$ לכל $E \in \mathbb{B}_Y$ ולכן f מדידה לפי \mathbb{B}_Y . \square

1.2 תנאי שקול לפונקציה מדידה

משפט 1.2.1 (תנאי שקול לפונקציה מדידה): יהיו (X, \mathcal{A}) מרחב מדיד. אם $f : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ פונקציה אזי f מדידה אם ורק אם $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

הוכחה:

\Leftrightarrow מיידי מהגדרה כי אם f מדידה לכל $E \in \mathcal{A}$ מתקיים $E \in \mathbb{B}([-\infty, \infty])$ ולכן בהינתן $\alpha \in \mathbb{R}$, מתקיים $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$ כleshgo, מתקיים $f^{-1}((\alpha, \infty)) \in \mathcal{A}$.

ובפרט $f^{-1}((\alpha, \infty)) \in \mathcal{A}$ מספיק להראות שהמקור של כל אחת מהקבוצות

$$(\star) \quad (\alpha, \beta), \quad (\alpha, \infty], \quad [-\infty, \beta)$$

הוא מדיד, ואכן:

1. בהינתן $\beta \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$f^{-1}([\alpha, \beta)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}\left([\alpha, \beta - \frac{1}{n})\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}\left(\left(\beta - \frac{1}{n}, \infty\right]^c\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(f^{-1}\left(\left(\beta - \frac{1}{n}, \infty\right]\right)\right)^c \in \mathcal{A}$$

כאשר המעבר האחרון נובע מההנחה שלכל $\alpha \in \mathcal{A}$ מתקיים $f^{-1}((\alpha, \infty])$ ולכן לכל $n \in \mathbb{N}$ בפרט עבור $\alpha = \beta - \frac{1}{n} \in \mathbb{R}$ נקבל $f^{-1}((\beta - \frac{1}{n}, \infty]) \in \mathcal{A}$

אבל \mathcal{A} היא ס-אלגברה ולכן מצד אחד נקבל $\bigcup_{n=1}^{\infty} (f^{-1}((\beta - \frac{1}{n}, \infty]))^c \in \mathcal{A}$ ומצד שני $(f^{-1}((\beta - \frac{1}{n}, \infty]))^c$ לכל $n \in \mathbb{N}$ והוא סוגר את שני המקרים הימניים.

2. בהינתן $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$f^{-1}((\alpha, \beta)) = f^{-1}([\alpha, \beta) \cap (\alpha, \infty]) = f^{-1}([\alpha, \beta)) \cap f^{-1}((\alpha, \infty]) \in \mathcal{A}$$

כאשר המעבר האחרון נובע מכך ש-ס-אלגברה סגורה ליחסותיים סופיים.

כעת, אם $U \subseteq [-\infty, \infty]$ הוא מהצורה של (\star) וכי קבוצה פתוחה ב- $[-\infty, \infty]$ היא איחוד בן-מניה של קבוצות מהצורה (\star) ונקבל

$$f^{-1}(U) = f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(I_n) \in \mathcal{A}$$

כלומר המקור של כל קבוצה פתוחה הוא מדיד ולכן f מדידה.

□

1.3 מדיניות נשמרת תחת הפעלה

משפט 1.3.1 (מדיניות נשמרת תחת הפעלה) $\{f_n : X \rightarrow [-\infty, \infty]\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מרחב מדינה. אם (X, \mathcal{A}) ממרחב מדינה, אז $(\sup/\inf/\limsup/\liminf)$ פונקציות מדינות, או הפונקציות

$$(1) \sup_{n \in \mathbb{N}} \{f_n\} \quad (2) \inf_{n \in \mathbb{N}} \{f_n\} \quad (3) \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n \quad (4) \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$$

כולן מדינות.

הוכחה: (1) נסמן $g := \sup_{n \in \mathbb{N}} \{f_n\}$, ומספיק להראות שהקבוצה $(\alpha, \infty]$ או נרצה להראות

$$(\star) g^{-1}((\alpha, \infty)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}((\alpha, \infty])$$

אם $x \in g^{-1}((\alpha, \infty])$ אז

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \{f_n(x)\} = g(x) \in (\alpha, \infty] > \alpha$$

כלומר קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש- $f_n(x) \leq \alpha$ וו סתירה ($f_{n_0}(x) > \alpha$) או

$$x \in f_{n_0}^{-1}((\alpha, \infty]) \implies x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}((\alpha, \infty]) \implies g^{-1}((\alpha, \infty]) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}((\alpha, \infty])$$

אם $f_{n_0}(x) > \alpha$ ומתקיים $f_{n_0}(x) \in (\alpha, \infty]$ ולבן $x \in f_n^{-1}((\alpha, \infty])$ כך ש- $n_0 \in \mathbb{N}$ או קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש- $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}((\alpha, \infty])$

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \{f_n(x)\} \geq f(n_0)(x) > \alpha \implies \sup_{n \in \mathbb{N}} \{f_n(x)\} > \alpha \implies g(x) \in (\alpha, \infty] \implies x \in g^{-1}((\alpha, \infty])$$

או (*) נכון ולבן f_n מדינה לכל $n \in \mathbb{N}$ ולבן $f_n^{-1}((\alpha, \infty])$ מדינה כל $n \in \mathbb{N}$, כלומר הקבוצה $(\alpha, \infty]$ היא איחוד בן-מניה של קבוצות מדינות ולבן מדינה עצמה וקיים g פונקציה מדינה.

(2) זהה עבור קטעים מהצורה $[-\infty, \beta]$.
(3)

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n = \inf_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \sup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \geq k}} \{f_n\} \right\}$$

ולכן עבור סדרת הפונקציות $\{h_k : X \rightarrow [-\infty, \infty]\}_{k=1}^{\infty}$ המוגדרת על-ידי

$$\forall k \in \mathbb{N}, h_k := \sup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \geq k}} \{f_n\}$$

מתקיים מ- (1) ש- $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות מדינות ונקבל מ- (2) $\inf_{k \in \mathbb{N}} \{h_k\}$ מדינה ולבן $\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n$ מדינה.
באותו אופן למקרה הקודם רק עבור (4)

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n = \sup_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \inf_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \geq k}} \{f_n\} \right\}$$

□

1.4 תכונות בסיסיות של מידה

משפט 1.4.1 (תכונות בסיסיות של מידה): אם $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ היא מידה על מרחב מדיד אז $\mu(\emptyset) = 0 \Leftrightarrow \mu(\emptyset) \neq \infty$.

2. אדרטיביות סופית: לכל אוסף סופי ור בזוגות \mathcal{A} מתקיים $(E_i)_{i=1}^n \subseteq \mathcal{A}$ אז $\mu(\bigcup_{i=1}^n E_i) = \sum_{i=1}^n \mu(E_i)$
3. מונוטוניות ביחס להכללה: אם $A \subseteq B \in \mathcal{A}$ אז $\mu(A) \leq \mu(B)$
4. רציפות לסדרות עולות: תהיי $(A_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{A}$ סדרה עולה של קבוצות מדידות איזי $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^\infty A_n)$
5. רציפות לסדרות יורדות: תהיי $(C_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{A}$ סדרה יורדת של סדרות מדידות. אם $\mu(C_1) < \infty$ אז $\mu(\bigcap_{n=1}^\infty C_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(C_n)$
6. ס-תחת אדרטיביות: אם $(A_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{A}$ אוסף כלשהו של קבוצות מדידות איזי אז $\mu(\bigcup_{n=1}^\infty A_n) \leq \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n)$

הוכחה:

1. כיוון אחד נובע מהגדרת המידה, מהכוון השני נובע שיש $A \in \mathcal{A}$ עם $\mu(A) < \infty$ ולכן ניתן לה חסיר זאת, ככלומר

$$\mu(A) = \mu\left(A \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \emptyset\right) \stackrel{\text{הקבוצה הריקה זהה לא-אדרטיבית}}{=} \mu(A) + \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(\emptyset) = 0$$

2. באופן דומה לסעיף הקודם נשרשר \emptyset עם ס-אדרטיביות וסימנו

$$\mu(B) = \mu((B \setminus A) \cup A) = \mu(B \setminus A) + \mu(A) \geq \mu(A) \quad .3$$

4. נסמן $B_1 = E_1$ ולכל $n \in \mathbb{N}$ גדר $B_{n+1} = A_{n+1} \setminus A_n$ סדרה של קבוצות מדידות וזרות בזוגות ולכל N מתקיים $\bigcup_{n=1}^\infty B_n = \bigcup_{n=1}^\infty B_n \cup \bigcup_{n=1}^N B_n = A_N = \bigcup_{n=1}^N A_n$

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty B_n\right) = \sum_{n=1}^\infty \mu(B_n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \mu(B_n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{n=1}^N A_n\right)$$

5. נסמן $C_1 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n \cup \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$ ולכן $D_n = C_n \setminus C_{n+1}$ ומהאדרטיביות סופית וההעברה אגפים (שאפשר מהסופיות) נקבל

$$\mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n\right) = \mu(C_1) - \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n\right) = \mu(C_1) - \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(D_n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mu(C_1) - \mu\left(\bigcup_{n=1}^N D_n\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mu(C_{N+1})$$

$$C_1 \setminus \bigcup_{n=1}^N D_n = C_{N+1}$$

6. זה בעצם אר-שוויון בול מהסתברות רק על מרחבי מידה כללים: גדר $B_1 = A_1, B_{n+1} = B_{n+1} \setminus \bigcup_{m=1}^n A_m$ ומתקיים $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ ו- $B_n \subseteq A_n$ או זרים בזוגות,

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(B_n) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$$

□

2 אינטגרציה

2.1 לכל פונקציה מדידה יש סדרת פונקציות פשוטות שמתכנסת אליה

משפט 2.1.1 (לכל פונקציה מדידה יש סדרת פונקציות פשוטות שמתכנסת אליה): אם $f : X \rightarrow [0, \infty]$ פונקציה מדידה כלשהי, אז קיימת סדרה פונקציות פשוטות $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ | $X \rightarrow [0, \infty]$ כך שמתקיים סדרה מונוטונית עולה וחסומה על-ידי f , כלומר $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית עולה וחסומה על-ידי f .

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, m \leq n \implies 0 \leq s_m \leq s_n \leq f$$

.2. הסדרה $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת נקודתית ל- f , כלומר

$$\forall x \in X, s_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$$

הוכחה: נגידר $\varphi_n : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$

$$\forall x \in [0, \infty), \varphi_n(x) := \begin{cases} 2^{-n} \cdot \lfloor 2^n \cdot x \rfloor & 0 \leq x < n \\ n & x \geq n \end{cases}$$

או לכל $n \in \mathbb{N}$, φ_n היא צירוף לנארו של פונקציות מהצורה $\mathbb{1}_{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})}$ לכל $0 \leq k \leq n \cdot 2^n - 1$ ולכן φ_n היא מדידה בורל ביחס ל- λ ותמונה סופית ו- φ_n היא פונקציה פשוטה.

לכל $x \in [0, n]$ וכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$\lfloor 2^n x \rfloor \leq 2^n x < \lfloor 2^n x \rfloor + 1 \iff 2^{-n} \lfloor 2^n x \rfloor \leq x < 2^{-n} (\lfloor 2^n x \rfloor + 1)$$

כלומר

$\varphi_n(x) \leq x < \varphi_n(x) + 2^{-n} \iff \varphi_n(x) \leq x \wedge x < \varphi_n(x) + 2^{-n} \iff x \geq \varphi_n(x) \wedge \varphi_n(x) > x - 2^{-n} \iff x - 2^{-n} < \varphi_n(x) \leq x$

ולכן $\varphi_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ לכל $x \in [0, n]$ ומכאן הרי ש- φ_n מתקיים $\forall n, m \in \mathbb{N}, n \leq m \implies \varphi_n \leq \varphi_m \leq x$

ולכן $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית עולה ואם לכל $n \in \mathbb{N}$ נגידר $s_n := \varphi_n \circ f$ נקבל את הטענה שכן הרכבת פונקציות מדידות היא פונקציה מדידה, אז $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ מקיימת את הנדרש.

□

2.2 תכונות האינטגרל

- משפט 2.2.1** (תכונות האינטגרל): ההיינה $f, g : X \rightarrow [0, \infty]$ פונקציות מדידות ותהיינה E מדידה.
- האינטגרל של f, g ביחס ל- μ מקיים את התכונות הבאות
1. מונוטוניות של f, g : אם $0 \leq \int_A f d\mu \leq \int_A g d\mu \leq 0 \leq f \leq g \leq 0$
 2. מונוטוניות ביחס להכללה: אם $A \subseteq B$ אז $0 \leq \int_A f d\mu \leq \int_B f d\mu \leq 0$
 3. הומוגניות: אם $0 \leq f \leq c \cdot f$ אז $\int_A f d\mu = c \cdot \int_A f d\mu$ ו- $c \in [0, \infty)$
 4. אינטגרציה על קבוצות מדידה אפס: אם $\mu(E) = \infty$ אז $\int_E f d\mu = 0$ (גם אם $\int_E f d\mu = \infty$)
 5. אינטגרציה על קבוצה מדידה אפס: אם $\mu(E) = 0$ אז $\int_E f d\mu = 0$
 6. אינטגרציה על קבוצה בתוסה עם הפונקציה המציינת: אם $0 \leq f \leq \int_X f \cdot \mathbb{1}_E d\mu$ אז $\int_E f d\mu = \int_X f \cdot \mathbb{1}_E d\mu$
 7. אינטגרציה על איחוד זר: אם $A \cap B = \emptyset$ אז $\int_{A \cup B} f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu$

מוסכמה:

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha + \infty = \infty, \infty - \infty = \infty$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}^+, \alpha \cdot \infty = \infty, 0 \cdot \infty = 0$$

הוכחה:

1. בלי הגבלת הכלליות, $X = E$ אחרת ניקח לכל $f \cdot \mathbb{1}_E, g \cdot \mathbb{1}_E, E \in \mathcal{A}$ ונקבל מהגדירה

$$\int f d\mu = \sup \left\{ \int_E s d\mu \mid 0 \leq s \leq f, s \text{ פשוטה} \right\}$$

מהיות $g \leq f \leq 0$ נובע גם שלכל s כזאת מתקיים $0 \leq s \leq g$ ולכן מתקיים

$$\left\{ \int_E s d\mu \mid 0 \leq s \leq f, s \text{ פשוטה} \right\} \subseteq \left\{ \int_E s d\mu \mid 0 \leq s \leq g, s \text{ פשוטה} \right\}$$

ובפרט בלקיחת סופרמום

$$\int f d\mu = \sup \left\{ \int_E s d\mu \mid 0 \leq s \leq f, s \text{ פשוטה} \right\} \leq \sup \left\{ \int_E s d\mu \mid 0 \leq s \leq g, s \text{ פשוטה} \right\} = \int g d\mu$$

2. יהי $x \in X$.

אם $x \in A$ אז $\mathbb{1}_A(x) = 1$ ומנתנו $\mathbb{1}_B(x) = 1 \subseteq B$ מתקיים $\mathbb{1}_B(x) \leq \mathbb{1}_A(x)$.

אם $x \notin A$ אז $\mathbb{1}_A(x) = 0$ ויש שתי אפשרויות: או $x \in B$ או $x \notin B$. במקרה הראשון $\mathbb{1}_B(x) = 1$ או במקרה השני $\mathbb{1}_B(x) = 0$.

בין זה וככה, מכך ש- $\mathbb{1}_A \subseteq B$ נובע כי בהתאם למתקיים $\mathbb{1}_A(x) \leq \mathbb{1}_B(x) \leq \mathbb{1}_B(x)$ לכל $x \in X$.

בפרט נובע מכך שלכל $x \in X$ מתקיים $\mathbb{1}_A(x) \leq f \cdot \mathbb{1}_B(x) \leq f$ והם בהתאם מותאמים מהגדירה ל-

$E = X$ (הסעיף הקודם הוא מונוטוניות האינטגרל) עבור

3. תהיי $s \leq f$ ותהיי $E \in \mathcal{A}$, $\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{E_i} \geq 0$ עם $\alpha_i \geq 0$ ו- $\{E_i\}$ קבוצות זרות בזוגות ומדידות ב-

$$\int_E s d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(E_i)$$

נבחן שגם cs היא פונקציה פשוטה שכן

$$cs(x) = \sum_{i=1}^n (c\alpha_i) \mathbb{1}_{E_i}(x) \Rightarrow \int_E cs(x) d\mu = \sum_{i=1}^n (c\alpha_i) \mu(E_i) = c \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(E_i) = c \int_E s d\mu$$

נסמן מהגדירה

$$\int_E f d\mu = \sup \left\{ \int_E s d\mu \mid 0 \leq s \leq f, s \text{ פשוטה} \right\} = S_f$$

$$\int_E cf d\mu = \sup \left\{ \int_E p d\mu \mid 0 \leq p \leq cf, p \text{ פשוטה} \right\} = S_{cf}$$

נשים לב שלכל f או אם גדריר פונקציה פשוטה שראינו לעיל, $s' = \frac{p}{c} \leq f$ ומתקיים ממנה שראינו לעיל,

$$\int_E p d\mu = \int_E c s d\mu = c \int_E d\mu$$

זה נכון לכל p פשוטה כזאת ולכן

$$S_{cf} = \sup \left\{ c \int_E s d\mu \mid 0 \leq s \leq f, \text{ פשוטה } s \right\} \stackrel{\text{מכפלה עם סדרמה א-שלילית}}{=} c \cdot \sup \left\{ \int_E s d\mu \mid 0 \leq s \leq f, \text{ פשוטה } s \right\} = c \cdot S_f$$

אם $0, \text{ אנחנו רוצים להראות}$

$$\int_E 0 \cdot f d\mu = 0 \cdot \int_E f d\mu$$

בצד שמאל יש לנו פשוט את הפונקציה $0 \equiv g$ וזו שהיא פשוטה ולכן

$$\int_E 0 d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(E_i) = \sum_{i=1}^n 0 \mu(E_i) = 0$$

מצד שני, יש לנו $0 \cdot \int_E f d\mu$ ממשית כמו בזוכת הקונבנצייה $0 = 0 \cdot \infty$. תהי $s \in E$ פשוטה ואמנם נתקל על E איזי $f|_E \equiv 0$ וכן $0 \leq s \leq f$ לכל $x \in E$ ומהגרה

$$\int_E s d\mu = \sum \alpha_i \mu(A_i \cap E)$$

ולכן אם $\cap A_i \neq \emptyset$ אז המקדמים α_i חייבים להיות אפסים ולכן הסכום הוא בידוק; מהגרה אינטגרל לבג

$$\int_E f d\mu = \sup \left\{ \int_E s d\mu \mid 0 \leq s \leq f, \text{ פשוטה } s \right\}$$

אבל לכל פשוטה הניתן לעיל תקף כלומר האינטגרל על כל הקבוצה הוא 0 ולכן $\int_E f d\mu = 0$ (נזכור כי $0 = \infty \cdot 0$ ולכן גם הסוגרים נכונים). תהי $s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ פשוטה $0 \leq s \leq f$. מהגרה אינטגרל

$$\int_E s d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \mu(A_i \cap E)$$

אבל $\mu(E) = 0$ ו- $A_i \cap E \subseteq E$ ולכן $\mu(A_i \cap E) = 0$; זה נכון לכל פונקציה פשוטה ולכן מהגרה האינטגרל מתקיים $\int_E f d\mu = 0$ (f אפשר וצריך לסייע עם משפט ההतכנסות המונוטונית ועם $\{s_n\}_{n=1}^\infty$ פשוטות כך ש- \nearrow). מתקיים 6.

$$\int_E \mathbb{1}_A d\mu = \mu(A \cap E)$$

אבל $\mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_E = \mathbb{1}_{A \cap E}$ ולכן

$$\int_X \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_E d\mu = \int_X \mathbb{1}_{A \cap E} d\mu = \mu(A \cap E)$$

או הטענה נכון לאינדיקטוריים; תהי $s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ פשוטה פונקציה פשוטה, אז

$$\int_E s d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_E \mathbb{1}_{A_i} d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_X \mathbb{1}_{A_i} \cdot \mathbb{1}_E d\mu = \int_X \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{A_i} \right) \cdot \mathbb{1}_E d\mu = \int_X s \cdot \mathbb{1}_E d\mu$$

וhteטענה נכון לפונקציות פשוטות; לבסוף, נשתמש במשפט ההतכנסות המונוטונית שכן יש $\{s_n\}_{n=1}^\infty$ פשוטות כך ש- \nearrow נקודתיות ונקבל

$$\int_E f d\mu = \int_E \left(\lim_{n \rightarrow \infty} s_n \right) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E s_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X s_n \cdot \mathbb{1}_E d\mu = \int_X \left(\lim_{n \rightarrow \infty} s_n \cdot \mathbb{1}_E \right) d\mu = \int_X f \cdot \mathbb{1}_E d\mu$$

מתקיים $\mathbb{1}_{A \cup B}(x) = \mathbb{1}_A(x) + \mathbb{1}_B(x)$. 7.

$$\int_{A \cup B} f d\mu = \int_X f \cdot \mathbb{1}_{A \cup B} d\mu = \int_X f \cdot (\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B) d\mu \stackrel{\text{לינאריות}}{=} \int_X f \cdot \mathbb{1}_A d\mu + \int_X f \cdot \mathbb{1}_B d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu$$

□

2.3 משפט ההתקנות המונוטונית

משפט 2.3.1 (משפט ההתקנות המונוטונית): יהיו (X, \mathcal{A}, μ) מרחב מידה ותהי $\{f_n \mid X \rightarrow [0, \infty]\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה פונקציות מדידות. אם סדרה מונוטונית עולה, אז הƒונקציה $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$f := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \{f_n\}$$

מקיימת

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad \int_A f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\mu \implies \forall A \in \mathcal{A} \quad \int_A \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\mu$$

הוכחה: נוכחה עבור $A = X$ וזו להוכיח ב- $g_n = f_n \mathbf{1}_A$ ולהסיק את המקרה הכללי.

מונוטוניות האינטגרל $\alpha \geq \int f d\mu \geq \int f_1 d\mu \leq \int f_2 d\mu \leq \cdots \leq \int f d\mu$ יקיים $\alpha \leq \int f d\mu$ ולכן $0 \leq \int f_1 d\mu \leq \int f_2 d\mu \leq \cdots \leq \int f d\mu$ ונרצה להראות $\alpha \leq \int f d\mu$. נראה שכל $E_n := \{x \in X \mid f_n(x) \geq cs(x)\}$ מתקיים $0 \leq s \leq f$ פשוטה ונקבע $0 < c < 1$. נסמן $\int s d\mu \leq \alpha$ ו- $X \setminus E_n$ כלומר זהו סדרה עולה של קבוצות מדידות שאיחדן הוא כל X .

מטריציות המידה לשדרות עולות נסיק כי לכל $A \in \mathcal{A}$

$$\mu(A \cap E_n) \xrightarrow{(*)} \mu(A \cap (\cup E_n)) = \mu(A)$$

s פשוטה ולכן $s = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$

$$\alpha \geq \int f_n d\mu \geq \int_{E_n} f_n d\mu \geq c \cdot \int_{E_n} s d\mu = c \cdot \sum_{i=1}^m \alpha_i \mu(A_i \cap E_n) \xrightarrow{(*)} c \cdot \sum_{i=1}^m \alpha_i \mu(A_i) = c \cdot \int s d\mu$$

□

2.4 החלפת סדר אינטגרציה וסכום

משפט 2.4.1 (החלפת סדר אינטגרציה וסכום): יהיו סדרת פונקציות מדידות, אזי

$$\int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \, d\mu$$

הוכחה: באינדוקציה על $N \in \mathbb{N}$

מקרה בסיס הוא אדרטיביות האינטגרל עבור $N = 2$ ($s, t : X \rightarrow [0, \infty]$): והיינה $N = 1$ ($\text{עבור } N = 1 \text{ הטענה טריוויאלית}$)

$$s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{A_i} \quad t = \sum_{j=1}^m \beta_j \mathbb{1}_{B_j}$$

עבור $\{A_i\}_{i=1}^n, \{B_j\}_{j=1}^m$ חלוקות של X ומתקיים

1. X חלוקה של $\{A_i \cap B_j\}_{(i,j) \in [n \times m]}$

2. לכל $j \in [m]$ מתקיים $\bigcup_{i=1}^n A_i \cap B_j = B_j$ חלוקה של X

3. לכל $i \in [n]$ מתקיים $\bigcup_{j=1}^m A_i \cap B_j = A_i$ חלוקה של X

אדטיביות סופית של מידה נקבע

$$\sum_{j=1}^m \mu(A_i \cap B_j) \stackrel{(*)}{=} \mu(A_i) \quad \sum_{i=1}^n \mu(A_i \cap B_j) \stackrel{(**)}{=} \mu(B_j)$$

אבל גם $s + t$ היא פונקציה פשוטה שכן

$$s + t = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\alpha_i + \beta_j) \mathbb{1}_{A_i \cap B_j}$$

ולכן

$$\begin{aligned} \int_X (s + t) \, d\mu &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\alpha_i + \beta_j) \cdot \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \sum_{j=1}^m \mu(A_i \cap B_j) + \sum_{j=1}^m \beta_j \cdot \sum_{i=1}^n \mu(A_i \cap B_j) \\ &\stackrel{(*), (**)}{=} \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \mu(A_i) + \sum_{j=1}^m \beta_j \cdot \mu(B_j) = \int_X s \, d\mu + \int_X t \, d\mu \end{aligned}$$

או הטענה נכונה עבור פונקציות פשוטות.

תהיינה $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}, \{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרות עלות של פונקציות פשוטות כך שמתקיים

$$s_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f_1 \quad t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f_2$$

נקודותית ואריתמטיקה של גבולות נקבע $f_1 + f_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n + t_n)$

$$\begin{aligned} \int_X (f_1 + f_2) \, d\mu &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X (s_n + t_n) \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_X s_n \, d\mu + \int_X t_n \, d\mu \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X s_n \, d\mu + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X t_n \, d\mu \\ &= \int_X f_1 \, d\mu + \int_X f_2 \, d\mu \end{aligned}$$

זה מראה את בסיס האינדוקציה.

בשביל לסיים את האינדוקציה נשים לב $\sum_{n=1}^N f_n$ נקודתיות כאשר הסדרה $\sum_{n=1}^N f_n \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ מושגת מונוטוניות עולה ולכון משפט ההכנסות המונוטוניות

□

2.5 קיום מידת אינטגרל

משפט 2.5.1 (קיום מידת אינטגרל): יהי (X, \mathcal{A}, μ) מרחב מידה. אם $\nu : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$ המוגדרת על-ידי

$$\forall E \in \mathcal{A}, \nu(E) = \int_E h d\mu$$

היא מידת על (X, \mathcal{A}) ובמקרה זה נסמן $d\nu := h d\mu$ ויתר על-כן מתקיים

$$\int_X g d\nu = \int_X g \cdot h d\mu$$

לכל $g : X \rightarrow [0, \infty]$ מידה.

הוכחה: בשביל להראות מידת עלינו להראת ש- ν אינה קבועה ושהיא σ -אדיטיבית: ואכן, $0 = \nu(\emptyset) = \nu(\text{וננית תהי } \{E_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ סדרת כלשהו של קבוצות מידות זרות בזוגות ונסמן } E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \text{ ואו}$

$$(\star) \quad \mathbb{1}_E = \mathbb{1}_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{E_n}$$

ולכן

$$\begin{aligned} \nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) &= \nu(E) \stackrel{\text{נראה}}{=} \int_E h d\mu = \int_X h \mathbb{1}_E d\mu \stackrel{(\star)}{=} \int_X h \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{E_n} d\mu \\ &= \int_X \sum_{n=1}^{\infty} h \cdot \mathbb{1}_{E_n} d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X h \cdot \mathbb{1}_{E_n} d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} h d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n) \end{aligned}$$

ולכן ν מידת על (X, \mathcal{A}) . עבור החלק השני, תהי $s = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbb{1}_{E_i}$ פונקציה פשוטה, אז

$$\begin{aligned} \int_X s d\nu &= \sum_{i=1}^k \alpha_i \nu(E_i) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \int_{E_i} h d\mu = \sum_{i=1}^k \int_{E_i} \alpha_i h d\mu = \sum_{i=1}^k \int_X \alpha_i \mathbb{1}_{E_i} h d\mu \\ &= \int_X \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbb{1}_{E_i} h d\mu = \int_X h \cdot \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbb{1}_{E_i} d\mu = \int_X h \cdot s d\mu \end{aligned}$$

או עבור g מידת כלשהו ניקח $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה עולה של פונקציות פשוטות כך ש- $s_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g$ ונקבל ממשפט ההחכשנות המונוטונית על מרחב המידה (X, \mathcal{A}, ν) .

$$\int_X g d\nu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X s_n \cdot h d\mu = \int_X g \cdot h d\mu$$

כ- $s_n \cdot h \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g \cdot h$ ו- $\{s_n \cdot h\}_{n=1}^{\infty}$ שמתקיים

□

2.6 הלמה של פאטו

משפט 2.6.1 (הלמה של פאטו): יהיו (X, \mathcal{A}, μ) מרחב מידה. אם סדרת פונקציות מדידות כלשהי, אזי

$$\int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \, d\mu$$

הוכחה: לכל $N \in \mathbb{N}$ נסמן $k \in \mathbb{N}$ אזי הסדרה $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית עולה ואי-שלילית. ממשפט ההתכנסות המונוטונית נקבל

$$\int_X \lim_{k \rightarrow \infty} g_k \, d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X g_k \, d\mu$$

ומתקיים מהגדרה

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \inf_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \geq k}} \{f_n\} = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$$

ובירוח

$$(\star) \quad \int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \, d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X g_k \, d\mu$$

מצד שני

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad g_k = \inf_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \geq k}} \{f_n\} \leq f_k \implies g_k \leq f_k$$

מונוטוניות האינטגרל נקבע

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad a_k := \int_X g_k \, d\mu \leq \int_X f_k \, d\mu =: b_k$$

או לכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_k \leq b_k$ וכן מ- (\star) נובע כי $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k$ קיים ונקבל

$$\int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \, d\mu \stackrel{(\star)}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X g_k \, d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} b_k = \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k \, d\mu \implies \int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k \, d\mu$$

□

2.7 הлемה של בורל-קנטלי

משפט 2.7.1 (הлемה של בורל-קנטלי): **יהי** (X, \mathcal{A}, μ) מרחב מידה ותהי \mathcal{A} קבוצות מדידות כך שמתקיים

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty$$

אז

$$\mu\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} E_n\right) = 0$$

הוכחה: מונוטוניות המידה והגדרת החיתוך

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} E_n = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=i}^{\infty} E_j \implies \mu\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} E_n\right) = \mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) \stackrel{\forall i \in \mathbb{N}}{\leq} \mu\left(\bigcup_{j=i}^{\infty} E_j\right) \stackrel{\text{תת-אדישיות המידה}}{\leq} \sum_{j=i}^{\infty} \mu(E_j) < \infty$$

. $\mu(\limsup_{n \rightarrow \infty} E_n) \leq 0$, **כלומר** $\sum_{n=i}^{\infty} \mu(E_n) = 0$ וnb ולכן $\mu(\limsup_{n \rightarrow \infty} E_n) = 0$ **כלומר** $0 \leq \mu(\limsup_{n \rightarrow \infty} E_n) \leq \mu(\limsup_{n \rightarrow \infty} E_n)$

□

משפט 2.7.2 (אי-שוויון המשולש האינטגרלי): אם $f \in L^1(\mu)$ אז $\int_X f d\mu \leq \int_X |f| d\mu$.
 .(•) $\alpha \int_X f d\mu = \left| \int_X f d\mu \right| \in \mathbb{R}$ עבורו מתקיים $|\alpha| = 1$ עם $\alpha \in \mathbb{C}$ ולכן $\int_X f d\mu \in \mathbb{C}$ וכן קיימים $Re(\alpha) = \overbrace{\int_X \alpha f d\mu}^{\in \mathbb{R}}$ ו $Im(\alpha) = \overbrace{i \int_X Im(\alpha f) d\mu}^{\in \mathbb{R}}$ נקבל אם-כן

$$\begin{aligned} \left| \int_X f d\mu \right| &= \alpha \int_X f d\mu \\ &= \underbrace{\int_X \alpha f d\mu}_{\in \mathbb{R}} \\ &= \int_X Re(\alpha f) d\mu + i \int_X Im(\alpha f) d\mu \\ &= \int_X Re(\alpha f) d\mu \\ &\leq \int_X |Re(\alpha f)| d\mu \\ &\leq \int_X |\alpha f| d\mu = \int_X |f| d\mu \end{aligned}$$

הערה: שכן אם נסמן μ על $|z| = 0$ אז $\alpha z = |z| \alpha$ לכל $\alpha \in \mathbb{C}$ או $z = 0$ אם $|\alpha| = 1$ אז $\alpha z = |z| \alpha$ כי נקבע ש-
 אחרת, אם $z \neq 0$ אז קיימים $\theta \in \mathbb{R}$ כך ש- $z = |z| e^{i\theta}$ ונקבע $\alpha = e^{-i\theta}$ אז $\alpha z = |z| (e^{-i\theta} \cdot e^{i\theta}) = |z| \in \mathbb{R}$

ולכן יש $\alpha \in \mathbb{C}$ המקיימים זאת.

□

2.8 משפט ההתקנות הנשלטת

משפט 2.8.1 (משפט ההתקנות הנשלטת):

הגדעה 2.8.1 (סדרת פונקציות נשלטת): תהיי X קבוצה ותהיי $\{f_n \mid X \rightarrow \mathbb{R}\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות כלשהי ותהיי $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה. נאמר שהסדרה $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ נשלטת על-ידי הפונקציה g אם ורק אם לכל $n \in \mathbb{N}$ מקיימים $|f_n| \leq g$.

תהיי $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ סדרת פונקציות מדידות המתקנשות נקודתית לפונקציה f אם קיימת $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ נשלטת על-ידי f וקיימת $f \in L^1(\mu)$ ומקיימים $f_n \in L^1(\mu)$ כך שהסדרה $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ נשלטת על-ידי f וקיימים

$$\int_X |f_n - f| d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

ובפרט

$$\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu$$

הוכחה: ראשית מכך ש- $g \in L^1(\mu)$ נובע כי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq L^1(\mu)$ וגם מקיימים $|f_n| \leq g$ לכל $n \in \mathbb{N}$. או $|f| \leq g$ (או $|f_n| \leq g$ ו- $f \in L^1(\mu)$ נובע כי $|f| \leq g$).

בפרט מקיימים לכל $n \in \mathbb{N}$ ש- $h_n := 2g - |f - f_n| \leq 2g$ ו- $|f - f_n| \leq 2g - h_n$.

$$(\star) \quad \int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} h_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X h_n d\mu$$

ובכן h_n נקיות, או בפרט $h_n(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} h_n(x)$ לכל $x \in X$, או ייבעת מכך

$$\int_X 2g d\mu = \int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} h_n d\mu \stackrel{(\star)}{\leq} \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X h_n d\mu = \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X (2g - |f - f_n|) d\mu$$

מכאן מקיימים

$$\begin{aligned} \int_X 2g d\mu &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X (2g - |f - f_n|) d\mu \stackrel{\text{לינאריות האינטגרל}}{=} \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\int_X 2g d\mu - \int_X |f - f_n| d\mu \right) \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X 2g d\mu + \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(- \int_X |f - f_n| d\mu \right) \stackrel{\liminf_{n \rightarrow \infty} (-a_n) = -\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n}{=} \int_X 2g d\mu - \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_X |f - f_n| d\mu \end{aligned}$$

כלומר

$$\int_X 2g d\mu \leq \int_X 2g d\mu - \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_X |f - f_n| d\mu$$

אבל $g \in L^1(\mu)$ א-שלילית ולכון $\int_X |f - f_n| d\mu < \infty$ ו- $\int_X 2g d\mu < \infty$ ובפרט מא-שווין המשולש האינטגרלי.

$$\left| \int_X f d\mu - \int_X f_n d\mu \right| = \left| \int_X (f - f_n) d\mu \right| \leq \int_X |f - f_n| d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

□

2.9 אַיִלְוּזָן מְרֻקָּב

משפט 2.9.1 (אַיִלְוּזָן מְרֻקָּב):

1. תהי f מדידה ואי-שלילית, או לכל $a < 0$ מתקיים

$$\mu(f^{-1}[\alpha, \infty]) \leq \frac{\int f d\mu}{a}$$

2. תהי $[0, \infty]$ אינטגרבילית. אז $\mu(f^{-1}((0, \infty))) = 0$ והקבוצה $f^{-1}(\{\infty\})$ היא σ -סופית.

הוכחה:

1. נגדיר

$$E_a := f^{-1}([a, \infty]) = \{x \in X \mid f(x) \geq a\}$$

$$g(x) = a \cdot \mathbb{1}_{E_a}(x)$$

$f(x) \geq g(x) = a \cdot 1 = a$ או $f(x) \geq a$ $x \in E_a$ וכאן $g(x) = a \cdot 1 = a$.

אם $g(x) \leq f(x)$ אז $f(x) \geq g(x) = a \cdot 0 = 0$ וכאן $g(x) = a \cdot 0 = 0$. כלומר לכל $x \in X$ מקיימים $f(x) \geq g(x) = a \cdot 1 = a$ או $f(x) \geq g(x) = a \cdot 0 = 0$. מונוטוניות אינטגרל לבג נקבע

$$\int_X g d\mu \leq \int_X f d\mu$$

אבל

$$\int_X g d\mu = \int_X a \cdot \mathbb{1}_{E_a} d\mu = a \cdot \int_X \mathbb{1}_{E_a} d\mu = a \cdot \mu(E_a)$$

כלומר

$$a \cdot \mu(E_a) \leq \int_X f d\mu$$

היות $\omega \in]a, \infty[$ ניתן לחלק בלי לשנות את כיוון אַיִלְוּזָן ונקבל

$$\mu(E_a) \leq \frac{1}{a} \int_X f d\mu$$

2. מהקרה הקודם אנחנו מקבלים שאם $\int f d\mu < \infty$ אז אגף ימין שואף לאינסוף כאשר $\omega \rightarrow a$ ולכן מרציפות המידה מלמעלה (חיתוכים יורדים) נסיק כי

$$\mu(f^{-1}(\{\infty\})) = 0$$

מתקיים

$$\mu\left(f^{-1}\left[\frac{1}{n}, \infty\right]\right) < \infty$$

ולכן

$$f^{-1}((0, \infty)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}\left(\left[\frac{1}{n}, \infty\right]\right)$$

היא σ -סופית.

□

3 קבוצות ממידה אפס

3.1 סדרת פונקציות כמעט-תמיד

משפט 3.1.1 (סדרת פונקציות כמעט-תמיד) : תהי $\{f_n \mid X \rightarrow \mathbb{C}\}_{i=1}^n$ סדרת פונקציות מדידות המוגדרות μ -כמעט תמיד.

אם $\infty < \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| d\mu$ או

1. הפונקציה הנottonה על-ידי $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ מוגדרת μ -כמעט תמיד

.2. $f \in L^1(\mu)$

.3. $\int_X f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f_X f_n d\mu$

הוכחה :

1. נניח ש- f_n מוגדרת על קבוצה S כ- $\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$, וא $\mu(S_n^c) = 0$ ומתקיים

$$\mu(S^c) = \mu\left(\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n\right)^c\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n^c\right) = 0 \Rightarrow \mu(S^c) = 0$$

ולכן φ מוגדרת μ -כמעט תמיד ומהטינה אודות הchèפת סדר של גבול וaintegral עבור טורים של פונקציות א-שליליות מתקיים

$$\int_X \varphi d\mu = \int_X \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n| d\mu < \infty \Rightarrow \int_X \varphi d\mu < \infty$$

בפרט $\infty < \mu(\varphi(x))$ μ -כמעט לכל $x \in X$ והטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתקנן בהחלה μ -כמעט תמיד ולכן הוא מתקנן ב- \mathbb{C} μ -כמעט תמיד ולכן $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ מוגדרת μ -כמעט תמיד .2. לכל $\mathbb{N} k \in$ נסמן $g_k := \sum_{n=1}^k f_n$ ומתקיים

$$\forall k \in \mathbb{N}, |g_k| = \left| \sum_{n=1}^k f_n \right| \leq \sum_{n=1}^k |f_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| = \varphi \Rightarrow |g_k| \leq \infty$$

כלומר סדרת הפונקציות $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ נשלהת על-ידי $f \in L^1(\mu)$ ומcause ממשפט ההתכננות הנשלהת עברו $g_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty}$ נובע כי מהטינה על הchèפת סדר סכום וaintegral

$$\int_X f d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X g_k d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \int_X f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu \Rightarrow \int_X f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu$$

זה מוכיח גם את .3

□

3.2 תנאים שקולים לשילמות

משפט 3.2.1 (תנאים שקולים לשילמות): *הוכיחו: ידי (X, \mathcal{A}, μ) מרחב מידת. נאמר שהם שלם אם כל קבוצה $X \subseteq E$ המוכלת בקבוצה ממידה אפס היא מדידה עצמה. ההשלמה של (X, \mathcal{A}, μ) ניתנת על ידי ה- σ -אלגברה*

$$\overline{\mathcal{A}} := \{A \cup E \mid A \in \mathcal{A}, E \subseteq N, \mu(N) = 0\}$$

ומידה

$$\overline{\mu}(A \cup E) = \mu(A)$$

ידי (X, \mathcal{A}, μ) מרחב מידת, אזי הגרירות הבאות נכוןות אם ורק אם μ שלמה:

1. אם $f = g$ μ -כמעט תמיד, או g היא מדידה

2. אם $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות מדידות ובנוסף $f_n \rightarrow f$ μ -כמעט תמיד, אזי f היא מדידה

הוכחה: בשבייל הוכחתה השתמש בטענה מהסוג הבא שנכונה במרחבי מידת שלמים: נניח כי E, G מדידות ו- $G \setminus E = 0$. אם $E \subseteq F \subseteq G \setminus E$ אז $F \setminus E = 0$ ותלכדות המדידות גוררת ש- F מדידה וגם $f = g$ μ -כמעט תמיד, נרשם

$$N := \{x \mid f(x) \neq g(x)\}$$

마הר ו- N מוכלת בקבוצה ממידה אפס ו- μ שלמה אזי N מדידה.

מתקיים

$$g^{-1}(A) = (g^{-1}(A) \cap f^{-1}(A)) \cup (g^{-1}(A) \setminus f^{-1}(A))$$

마הר ו- N^c היא בידוק הקבוצה בה הפונקציות מתלכדות, נוכל לכתוב

$$f^{-1}(A) \cap N^c \subseteq f^{-1}(A) \cap g^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(A)$$

ומהיות

$$f^{-1}(A) \setminus (f^{-1}(A) \cap N^c) \subseteq N$$

נדע שרשרת ההכלות היא כפי שופיע בטענה שנותה בתחלת הוכחה ולכן הקבוצה $f^{-1}(A) \cap g^{-1}(A)$ היא מדידה ובאופן דומה נשים לב

$$g^{-1}(A) \setminus f^{-1}(A) \subseteq N$$

ולכן קבוצה המוכלת בקבוצה ממידה אפס היא מדידה.

שלמות: תהיו E קבוצה המוכלת בקבוצה ממידה אפס אזי $0 = \mathbb{1}_E$ μ -כמעט-תמיד ולכן $\mathbb{1}_E$ מדידה, אבל אינדיקטור מדיד אם ורק אם הקבוצה שהוא מציין מדידה, כלומר E מדידה.

2: מהר והוכחנו ש- $\mathbb{1}$ שקול לשילמות, או μ שלמה. נניח ש- $f_n \rightarrow f$ μ -כמעט תמיד.

לכן קיימת קבוצה N כך $\mu(N) = 0$ וبنוסף $f_n(x) \rightarrow f(x)$ לכל $x \in N^c$ ונגיד

$$\tilde{f}_n(x) = \begin{cases} f_n(x) & x \in N^c \\ 0 & x \in N \end{cases}$$

אזי מהסעיף הקודם הקודם לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים ש- \tilde{f}_n מדידה כי $\tilde{f}_n = f_n$ μ -כמעט תמיד ו- \tilde{f} מתכנסת נקודתית לפונקציה

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in N^c \\ 0 & x \in N \end{cases}$$

ולכן \tilde{f} מדידה ול- $f = \tilde{f}$ μ -כמעט תמיד ולכן f מדידה.

2: נניח ש- $f = g$ μ -כמעט תמיד ו- f מדידה, או נגיד ראת $f_n = f$ להיות הסדרה הקבועה ומתקיים $g \rightarrow f$ μ -כמעט-תמיד ולכן g מדידה מההנחה של 2, כנדרש. □

3.3 תנאים שקולים לפונקציה אפסה כמעט-תמיד

משפט 3.3.1 (תנאים שקולים לפונקציה אפסה כמעט-תמיד):

1. אם מדידה עם $f : X \rightarrow [0, \infty]$ ורק אם $\int_X f d\mu = 0$
2. אם $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ מדידה ולכל $E \in \mathcal{A}$ מתקיים $\int_E f d\mu = 0$

הוכחה:

1. ההנחה ש- 0 -גוררת $\mu(\{x \in X \mid f(x) \geq \frac{1}{n}\}) = 0$ וכאן $\int_X f d\mu = 0$.
2. נסמן $E = \{x \in X \mid u(x) \geq 0\}$. או מהגדירה E ומההנחה שלכל $E \in \mathcal{A}$ מתקיים $\int_E f d\mu = 0$ ותהי $f = u + iv$ ותהי $h \in \{u, v\}$ ולכן לכל $E \in \mathcal{A}$ מתקיים $\int_E h d\mu = 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= \int_E Re(f) d\mu = \int_E h d\mu = \int_X h^\pm d\mu \implies h^\pm \underset{\mu}{=} 0 \\ \implies h^\pm &\underset{\mu}{=} 0 \implies u^\pm, v^\pm \underset{\mu}{=} 0 \implies u, v \underset{\mu}{=} 0 \implies f \underset{\mu}{=} 0 \end{aligned}$$

□

3.4 טענה על ממוצעי פונקציה

משפט 3.4.1 (טענה על ממוצעי פונקציה):

הוכיחות (מוכיח של פונקציה): יהיו (X, \mathcal{A}, μ) מרחב מידה סופי, ותהי $f \in L^1(\mu)$ קבוצה מידה עם $\mu(E) > 0$. הממוצע של f על E ביחס ל- μ הוא

$$A_E(f) := \frac{1}{\mu(E)} \int_E f d\mu$$

ועכשו למשפט:

יהי (X, \mathcal{A}, μ) מרחב מידה סופי ותהי $f \in L^1(\mu)$. אם $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ קבוצה סגורה כך שלכל קבוצה מידה עם $\mu(E) > 0$ מתקיים $x \in \Omega$ או $A_E(f) \in \Omega$.

הוכחה: לכל $r > 0$ ולכל $\alpha \in \mathbb{C}$ נסמן ב- $\bar{B}_r(\alpha)$, הכדור הסגור ברדיוס r סביב α .

מכך ש- Ω סגורה נובע כי Ω^c פתוחה וכן יש איחוד בן-מניה של כדורים פתוחים שעלי-ידיו ניתן לייצג את Ω^c .

אבל ב- \mathbb{C} , כל כדור פתוח ניתן להציג כאיחוד בן-מניה של כדורים סגורים, וכך Ω^c היא איחוד בן-מניה של כדורים סגורים.

לכן, מספיק להראות שמעבר כל Ω^c מתקיים $\bar{B}_r(\alpha) = 0$, כאשר

$$f^{-1}(\bar{B}_r(\alpha)) = \{x \in X \mid f(x) \in \bar{B}_r(\alpha)\}$$

$.E := f^{-1}(\bar{B}_r(\alpha)) \subseteq \Omega^c$ מתקיים $\bar{B}_r(\alpha) > 0$ ונסמן $\mu(f^{-1}(\bar{B}_r(\alpha)))$

על E מתקיים $|f - \alpha| \leq r$ ולכן

$$\begin{aligned} |A_E(f) - \alpha| &= \left| \frac{1}{\mu(E)} \int_E f d\mu - \frac{1}{\mu(E)} \cdot \mu(E) \cdot \alpha \right| = \left| \frac{1}{\mu(E)} \int_E f d\mu - \frac{1}{\mu(E)} \int_E \alpha d\mu \right| \\ &= \left| \frac{1}{\mu(E)} \left(\int_E f d\mu - \int_E \alpha d\mu \right) \right| \stackrel{\substack{\text{לינאריות האנטגרל} \\ \mu(E) > 0}}{=} \frac{1}{\mu(E)} \left| \int_E (f - \alpha) d\mu \right| \stackrel{\substack{\text{א-שווין המשולש} \\ \text{א-שווין המשולש}}}{\leq} \frac{1}{\mu(E)} \int_E |f - \alpha| d\mu \leq \frac{1}{\mu(E)} \int_E r d\mu \\ &= \frac{1}{\mu(E)} \cdot r \cdot \mu(E) = r \end{aligned}$$

כלומר r וילכן $A_E(f) \in \bar{B}_r(\alpha) \subseteq \Omega^c$ ו- $|A_E(f) - \alpha| \leq r$

אבל זו סתירה להנחה ש- $A_E(f) \in \Omega$.

□

4 משפט ההצגה של ריס

4.1 משפט ההצגה של ריס – יחידות

משפט 4.1.1 (היחידות במשפט ההצגה של ריס): יהיו $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ פונקציונל לינארי חיובי ונניח כי μ_1, μ_2 הן מדאות על $(\mathbb{R}, \text{Borel}_{\mathbb{R}})$ המקיימות

1. $f \in C_C(\mathbb{R})$ לכל $\int_X f d\mu_i = \Lambda f$
2. $\infty < \mu_i(K) \leq \int_X f d\mu_i < \infty$ קומפקטיבית
3. כל קבוצות בורל ב- \mathbb{R} רגולריות פנימית והיצונית ביחס ל- μ_i

ובנها: נבחין תחילת ש- μ_2 מוגדרות ביחידות על-ידי הערכים שלhn על קבוצות קומפקטיביות. ראיות מס' (2) נובע כי עבור $K \subseteq \mathbb{R}$ קומפקטיבית מתקיים $\infty < \mu_2(K) < \mu_2(V) + \varepsilon$.

יהי $0 > \varepsilon$ ומחריגרויות החיצונית נובע כי קיימת $V \subseteq K$ כאשר V פתוחה כך שמתקיים $\varepsilon < \mu_2(V) < \mu_2(K)$. מהלמה של אורייסון נובע כי קיימת $f \in C_C(\mathbb{R})$ כך שמתקיים $f(X) \subseteq [0, 1]$ ומהלמה של אורייסון מתקיים ש- $f(X) \prec V$, כלומר $f \leq \mathbf{1}_V$ וילכן $f(X) \subseteq [0, 1]$ אבל $\mathbf{1}_{\text{supp}(f)} \subseteq \mathbf{1}_V \subseteq \text{supp}(f) \subseteq V$ וכך $\mu_1(K) = \int_X \mathbf{1}_K d\mu_1 \leq \int_X f d\mu_1 = \Lambda f = \int_X f d\mu_2 \leq \int_X \mathbf{1}_V d\mu_2 = \mu_2(V) < \mu_2(K) + \varepsilon$.

כלומר $\mu_1(K) \leq \mu_2(K)$ לכל K קומפקטיבית ומהסימטריה נקבע $\mu_2(K) \leq \mu_1(K)$.

□

5 רגולריות ומידות רדון

5.1 תכונות מידת רדון על מרחב ס-קומפקטי

5.1.1 תכונות מידת רדון על מרחב ס-קומפקטי: יהיו (X, μ) מרחב מידה המכיל את ס-אלגברה בורל על X . אם X הוא ס-קומפקטי ו- μ מידת רדון אז מתקיימים

1. לכל $\epsilon > 0$ ולכל $E \in \mathcal{E}$ קיימת קבוצה פתחה $V \subseteq E \subseteq F \subseteq X$ עם $\mu(V \setminus F) < \epsilon$ וקבוצה סגורה $F \subseteq X$.

2. כל קבוצה m היא רגולרית פנימית וחיצונית.

3. לכל m קיימת $E \in \mathcal{E}$ כאשר $A, B \in \mathcal{A}$ והוא G_σ ו- B היא F_σ כך ש- $\mu(A \setminus E) = 0$ וגם $\mu(B \setminus E) < \epsilon$.

הוכחה: ראשית מהות X ס-קומפקטי נובע שקיים אוסף בן-מניה של קבוצות קומפקטיות $\{K_n\}_{n=1}^\infty$ כך ש-

1. תהי $E \in \mathcal{E}$ מידה

1. מהות $\{K_n\}_{n=1}^\infty$ כיסוי של X מתקיים ש-

מזהות μ מידת רדון ו- K_n קומפקטיבית נובע ש- $\mu(K_n) < \infty$ ולכן בפרט ממונטוניות $\mu(K_n) < \infty$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

2. מהרגולריות החיצונית של μ נובע שלכל $0 < \epsilon < \mu(V_n) - \mu(E \cap K_n)$ קיימת $E \cap K_n \subseteq V_n$ פתחה עם $\mu(E \cap K_n) < \epsilon$.

נסמן $V := \bigcup_{n=1}^\infty V_n$ ומתקיים מכך ש- $V \subseteq K_n$

$$V \setminus E = \left(\bigcup_{n=1}^\infty V_n \right) \setminus \left(\bigcup_{n=1}^\infty E \cap K_n \right) \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty V_n \setminus (E \cap K_n)$$

ולכן

$$\mu(V \setminus E) \leq \mu \left(\bigcup_{n=1}^\infty V_n \setminus (E \cap K_n) \right) \stackrel{\text{מונטוניות}}{\leq} \sum_{n=1}^\infty \mu(V_n \setminus (E \cap K_n)) = \sum_{n=1}^\infty (\mu(V_n) - \mu(E \cap K_n)) \stackrel{(*)}{<} \sum_{n=1}^\infty \frac{\epsilon}{2^{n+1}} = \frac{\epsilon}{2}$$

3. עבור m מתקיים גם $E^c = \bigcup_{n=1}^\infty E^c \cap K_n$ מידת רדון נובע כי $E^c \cap K_n$ רגולרית

חיצונית ולכן קיימת פתחה $U_n \subseteq E^c \cap K_n$ עם $U_n \in \mathcal{U}$ (כפי $\mu(U_n) < \mu(E^c \cap K_n) + \frac{\epsilon}{2^{n+1}}$)

נסמן $U = U \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty U_n$ ואז U פתחה כאיחוד של פתחות ו- $U \subseteq E^c$ (ונקבל $E^c = \bigcup_{n=1}^\infty E^c \cap K_n \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty U_n = U$)

$$U \setminus E^c = \left(\bigcup_{n=1}^\infty U_n \right) \setminus \left(\bigcup_{n=1}^\infty E^c \cap K_n \right) \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty U_n \setminus (E^c \cap K_n)$$

ובהתאם

$$\mu(U \setminus E^c) \leq \mu \left(\bigcup_{n=1}^\infty U_n \setminus (E^c \cap K_n) \right) \leq \sum_{n=1}^\infty \mu(U_n \setminus E^c \cap K_n) = \sum_{n=1}^\infty \mu(U_n) - \mu(E^c \cap K_n) \stackrel{(\diamond)}{<} \sum_{n=1}^\infty \frac{\epsilon}{2^{n+1}} = \frac{\epsilon}{2}$$

או אם נסמן $F := U^c$ נקבל

1. U פתחה $F \subseteq$ סגורה

2. $F \subseteq E \iff U^c \subseteq E \iff E^c \subseteq U$

3. מתקיים

$$E \setminus F = E \cap F^c = F^c \cap E = F^c \setminus E^c \implies \mu(E \setminus F) = \mu(F^c \setminus E^c) = \mu(U \setminus E^c) < \frac{\epsilon}{2}$$

אם כך קיילנו בסך-הכל קבוצה פתחה $F \subseteq E \subseteq V$ ו- F סגורה המקיימת

$$(1) \mu(V \setminus E) = \mu(V) - \mu(E) < \frac{\epsilon}{2} \quad (2) \mu(E \setminus F) = \mu(E) - \mu(F) < \frac{\epsilon}{2}$$

ולכן

$$\mu(V \setminus F) = \underbrace{\mu(V) - \mu(E)}_{\mu(V \setminus E)} + \underbrace{\mu(E) - \mu(F)}_{\mu(E \setminus F)} \stackrel{(1),(2)}{<} \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \implies \mu(V \setminus F) < \epsilon$$

2. מההעיף הקודם, לכל $m \in E$ קיימת קבוצה סגורה m ושוב מה- σ -קומפקטיות, $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ עם $\mu(E \setminus F) < \frac{\varepsilon}{2}$ ($F \subseteq E$ כי E קבוצה קומפקטית). אבל לכל n , $F \cap K_n$ היא קבוצה קומפקטית (כי חיתוך של קבוצה קומפקטית עם קבוצה סגורה הוא קומפקט) ולכן לכל $N \in \mathbb{N}$ נובע כי $\bigcup_{n=1}^N (F \cap K_n)$ היא קבוצה קומפקטית כאיחוד סופי של קומפקטיות, או מרציפות המידה לאיחודים עלולים לקבל

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{n=1}^N F \cap K_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F \cap K_n\right) = \mu(F) \implies \mu(F) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{n=1}^N F \cap K_n\right)$$

כלומר לכל $0 < \varepsilon \leq N$ קיים $k \in \mathbb{N}$ כך שלכל $m \geq k$ מתקיים

$$\mu\left(F \setminus \bigcup_{n=1}^k F \cap K_n\right) = \mu(F) - \mu\left(\bigcup_{n=1}^k F \cap K_n\right) < \frac{\varepsilon}{2}$$

נסמן $K := \bigcup_{n=1}^N F \cap K_n$ כאשר $K \subseteq F \subseteq E$ קיימת $X \subseteq K \subseteq F \subseteq E$ קומפקטיבית עם $\mu(X \setminus K) < \varepsilon$ ומאי-השווין לעיל נקבל שלכל $0 < \varepsilon < \mu(E) - \mu(K)$ קיימים $C \subseteq E$ ו- $\mu(C) = \mu(E) - \varepsilon$.

$$\begin{aligned} \mu(E) - \mu(K) &= \mu(E) - \mu(F) + \mu(F) - \mu(K) = \mu(E \setminus F) + \mu(F \setminus K) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \\ \implies \mu(E) - \mu(K) < \varepsilon &\iff \mu(K) > \mu(E) - \varepsilon \implies \mu(E) = \sup\{\mu(C) \mid C \subseteq E\} \end{aligned}$$

כלומר $m \in E$ רגולרית פנימית ומהיות μ מידת רדון ולכן רגולריות היצוגית ביחס לכל קבוצה מדידה, מהיות m שירוטי נובע כי סעיף 2 נכון.

3. תהיו $E \in m$ מסעיף 1 נובע קיום של $F_n \subseteq E \subseteq V_n$ סגורה עם $V_n \in m$ פתוחה ו- $F_n \in m$ ו- σ -ומתקים G_σ ו- B היא $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, $B := \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$. נגידר

$$B \setminus A = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right)^c = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n\right) \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n^c\right) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} (V_n \cap F_n^c) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (V_n \setminus F_n)$$

אבל $\mu(V_n \setminus F_n) < \frac{1}{n}$ וולכן

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \mu(B \setminus A) \leq \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \setminus F_n\right) \underset{V_n \setminus F_n \subseteq V_n \setminus F_n}{\leq} \mu(V_n \setminus F_n) < \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

□

5.2 תנאים שגוררים שמידה היא מידה רדון

משפט 5.2.1 (תנאים שגוררים שמידה היא מידה רדון): יהי X מרחב האוסדרוף קומפקטי-מקומית המקיים שכל קבוצה פתוחה בו היא ס-קומפקטיבית. אם μ מידה על $\mathbb{B}(X)$ המקיימת $\infty < \mu(K) \leq \mu(X)$ אז μ היא מידה רדון על m וכל קבוצה מדידה $m \in E$ היא רגולרית פנימית וחיצונית.

הוכחה: נחלק את הוכחה לשלבים כדי לבנות מפהה:

1. סופית על קומפקטיות: מהיות μ סופית על קומפקטיות, נקבל ש- μ סופית על $C_c(X)$.
 $\int_X f d\mu = \int_X f d\lambda$ הינו פונקציונל לינארי חיובי על $C_c(X)$.
2. משפט ההצגה של ריס: ממשפט ההצגה של ריס נובע שקיים מידה רדון λ על X המקיימת $\int_X f d\lambda = \int_X f d\mu$, לכל $f \in C_c(X)$.
3. שימוש ב-ס-קומפקטיות: תהי $m \in V \in \mathcal{V}$ פתוחה, מהנתון נובע שהיא ס-קומפקטיבית ולכן קיים אוסף $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ של קבוצות קומפקטיות כך שמתקיים

$$V = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$$

4. שימוש בלהה של אוריסון: מהלמה, נובע לכל $n \in \mathbb{N}$ קיימת $g_n \in C_c(X)$ עם $g_n \prec V$ ו- $\int_X g_n d\mu = \int_X g_n d\lambda$.
5. משפט הה收敛ות המונוטונית: כי מהלמה של אוריסון, במרחב האוסדרוף קומפקטי-מקומית, לכל $K \subseteq V$ עם $K \subseteq V$ כאשר K קומפקטיבית ו- V פתוחה, קיימת $f \in C_c(X)$ המקיימת $\int_X f d\mu = \int_X f d\lambda$.

$$\forall N \in \mathbb{N}, f_N := \max_{i \in [N]} \{g_i\}$$

נשים לב שמתקיים

$$\{f_N\}_{N=1}^{\infty} \subseteq C_c(X).$$

$$\{f_N\}_{N=1}^{\infty} \text{ מונוטונית עולה}.$$

$$K_n \prec g_n \prec V \Rightarrow f_N \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} \mathbf{1}_V.$$

אם כך, אנחנו מקיימים את תנאי משפט הה收敛ות המונוטונית ולכן נקבל

$$\mu(V) = \int_X \mathbf{1}_V d\mu = \int_X \lim_{N \rightarrow \infty} f_N d\mu = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_X f_N d\mu = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_X f_N d\lambda = \int_X \lim_{N \rightarrow \infty} f_N d\lambda = \int_X \mathbf{1}_V d\lambda$$

כלומר לכל $V \in \mathcal{V}$ פתוחה מתקיים $\mu(V) = \lambda(V)$

6. שימוש בתכונות מידת רדון: יהי $\varepsilon > 0$, מהיות λ מידה רדון נובע לכל $E \in \mathcal{E}$ קיימת קבוצה פתוחה $X \subseteq U$ וקבוצה סגורה $F \subseteq X$ עם $\lambda(U \setminus F) < \varepsilon$.

בפרט, נובע מהיות $E \subseteq F \subseteq U \setminus E \subseteq U \setminus U \setminus F$ ולכן מונוטוניות λ .

אבל $U \setminus F$ היא פתוחה (כי הפרש של פתוחה וסגורה היא פתוחה) ו- $\lambda(U \setminus F) = \lambda(U) - \lambda(F) < \varepsilon$ לכל פתוחה ומידה, ולכן $\varepsilon < \mu(U) - \mu(F) = \lambda(U) - \lambda(F) < \varepsilon$.

כלומר

$$\mu(U) - \mu(E) \stackrel{\text{מונוטוניות}}{\leq} \mu(U) - \mu(F) = \mu(U \setminus F) < \varepsilon \Rightarrow \mu(U) - \varepsilon < \mu(E)$$

ולכן מתקיים

$$\lambda(E) - \varepsilon \stackrel{\text{מונוטוניות}}{\leq} \lambda(U) - \varepsilon \stackrel{\substack{\lambda(U) = \mu(U) \\ \text{עבור } U \text{ פתוחה}}}{=} \mu(E) \stackrel{\text{מונוטוניות}}{\leq} \mu(U) \stackrel{\substack{\lambda(U) = \mu(U) \\ \text{עבור } U \text{ פתוחה}}}{=} \lambda(U) < \lambda(E) + \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lambda(E) - \varepsilon < \mu(E) < \lambda(E) + \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < \mu(E) - \lambda(E) < \varepsilon \Leftrightarrow |\mu(E) - \lambda(E)| < \varepsilon$$

מהיות ε שרירותי נובע כי $\mu(E) = \lambda(E)$ לכל $E \in \mathcal{E}$ ולכן μ מידה רדון, ומתכונות מידת רדון נובע כי כל קבוצה מדידה $m \in E$ היא רגולרית פנימית וחיצונית.

□

5.3 טענה ממבחן לדוגמה

משפט 5.3.1 (טענה ממבחן לדוגמה): μ מידת רדון על $\text{Borel}_{\mathbb{R}}$ (\mathbb{R} קומפקטיות, $\infty < \mu(K) < \mu$). נוכחה כי μ רגולרית פנימית וחיצונית.

הוכחה: מכך ש- μ סופית על קומפקטיות נקבל ש- μ סופית על $C_C(\mathbb{R})$ פונקציונל לינארי חיובי על $C_C(\mathbb{R})$ וממשפט ההצגה של ריס נובע שקיים

$$\text{ויחידה } \lambda \text{ מידת רדון על } X \text{ המקיים } \int_X f d\lambda = \int_X f d\mu \text{ לכל } f \in C_C(\mathbb{R}).$$

מכך ש- λ הוא ס-קומפקטי נובע שלכל $V \subseteq \mathbb{R}$ פתוחה יש $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n = V$

מהלמה של אוריסון נובע שלכל $N \in \mathbb{N}$ יש $g_n \in C_C(\mathbb{R})$ כך שמתקיים $g_n \prec K_n \prec g_n$ ואם נגיד $f_N := \max_{i \in [N]} \{g_i\}$ על-ידי $\{f_N\}_{N=1}^{\infty}$ מוגדר f_N נובע ש- μ ס-קומפקטי נובע במשפט התחכשות המונוטוניות נקבל

$$\mu(V) = \int_X \mathbb{1}_V d\mu = \int_X \lim_{N \rightarrow \infty} f_N d\mu = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_X f_N d\mu = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_X f_N d\lambda = \int_X \lim_{N \rightarrow \infty} f_N d\lambda = \int_X \mathbb{1}_V d\lambda = \lambda(V)$$

ולכן λ ו- μ מזדחות על קבוצות פתוחות.

יהי $0 < \varepsilon$, מכך ש- λ היא מידת רדון נובע שלכל $U \subseteq \mathbb{R}$ סגורה כך ש- $\lambda(U \setminus F) < \varepsilon$ ו- $\lambda(F) < \varepsilon$.

$$\text{ומונוטוניות } \varepsilon < \lambda(U \setminus E) < \mu(U \setminus F) \text{ ולכן } \lambda(U \setminus F) = \mu(U \setminus F) \text{ ונקבל}$$

$$\mu(U) - \mu(E) \stackrel{\text{מינוטוניות}}{\leq} \mu(U) - \mu(F) = \mu(U \setminus F) < \varepsilon \implies \mu(U) - \varepsilon < \mu(E)$$

$$\lambda(E) - \varepsilon \stackrel{\text{מינוטוניות}}{\leq} \lambda(U) - \varepsilon = \mu(U) - \varepsilon < \mu(E) \leq \mu(U) = \lambda(U) < \lambda(E) + \varepsilon$$

$$\implies \lambda(E) - \varepsilon < \mu(E) < \lambda(E) + \varepsilon \iff -\varepsilon < \mu(E) - \lambda(E) < \varepsilon \iff |\mu(E) - \lambda(E)| < \varepsilon$$

לכל משרירות ε נקבל ש- $\lambda(E) = \mu(E)$ לכל $E \subseteq \mathbb{R}$ או $\lambda = \mu$ מידת רדון ומחכונות מידת רדון נובע של כל קבוצה מדידה היא רגולרית

□

* 6 התכנסות חלשה-

6.1 טענה מהבחן

טענה מהבחן 6.1.1: יהי X מרחב מטרי קומפקטי ו- \sup_{μ_n} סדרה של פונקציות רציפות שהינה צפופה ב- $C(X)$ ביחס למטריקת $\|f_k\|_\infty$ (טענה מהבחן): אם קיים הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_k d\mu_n$ לכל k אז קיימת מידת הסתברות μ עבורה $\mu \xrightarrow{*}$.

הוכחה: תהי $f \in C(X)$ ו- $\varepsilon > 0$. מהצפיפות נובע שקיים k_0 כך שמתקיים $\|f - f_{k_0}\|_\infty < \varepsilon$ אז לכל

$$\left| \int f d\mu_n - \int f_{k_0} d\mu_n \right| \leq \|f - f_{k_0}\|_\infty < \varepsilon$$

וגם עבור $m \in \mathbb{N}$

$$\left| \int f d\mu_m - \int f_{k_0} d\mu_m \right| < \varepsilon$$

ונרצה להראות שזאת סדרת קושי, כלומר

$$\left| \int f d\mu_n - \int f d\mu_m \right| \leq \left| \int f - f_{k_0} d\mu_n \right| + \left| \int f_{k_0} d\mu_n - \int f_{k_0} d\mu_m \right| + \left| \int f_{k_0} - f d\mu_m \right| \leq \varepsilon + \left| \int f_{k_0} d\mu_n - \int f_{k_0} d\mu_m \right|$$

אבל מההנחה זו זאת סדרת קושי ולכן עבור n, m גדולים דיו

$$\left| \int f_{k_0} d\mu_n - \int f_{k_0} d\mu_m \right| < \varepsilon \implies \left| \int f d\mu_n - \int f d\mu_m \right| < 3\varepsilon$$

ולכן $\{\int f d\mu_n\}$ זאת סדרת קושי ב- \mathbb{R} .

נגדיר $L(f) := \lim_{n \rightarrow \infty} \int f d\mu_n$ והגבול הזה קיים לכל $f \in C(X)$.

אבל μ הן מידות הסתברות ולכן אם $f \geq 0$ אז $L(f) \geq 0$ ו- $L(1) = 1$ ו- $\|f\|_\infty \leq \|f\|$ ו- $L(f) \leq \|f\|$.

משמעות הציגה של רעיון נובע ש- μ מידת הסתברות כזו (כי קיימת ויחידה μ מידת הסתברות כזו) ולכן $\int f d\mu_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int f d\mu$ לכל $f \in C(X)$ ו- $\mu \xrightarrow{*}$ בבדיקה ההגדירה μ .

□

6.2 מידות הסתברות

6.2.1 הגדרה

$$\mathcal{P}(X) := \{\mu : \mathbb{B}(X) \rightarrow [0, \infty] \mid \mu(X) = 1 \text{ (probability measure)}\}$$

הגדלה 6.2.2 (מרחק בין מידות הסתברות) : תהינה $\mu, \nu \in \mathcal{P}(X)$ ותהיה $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C(X)$ קבוצה צפופה ב- $C(X)$ כך ש- $0_{C(X)} \notin \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$d(\mu, \nu) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \|f_n\|_{\infty}} \left| \int_X f_n d\mu - \int_X f_n d\nu \right|$$

лемה 6.2.1 : המרחק בין מידות הסתברות היא מטריקה על $(\mathcal{P}(X), d)$ ולכן $(\mathcal{P}(X), d)$ הוא מרחב מטרי
הוכחה : ברור כי d א-ישילילית וסימטרית ונניח $d(\mu, \nu) = 0 \implies \mu = \nu$ וקיים את א-ישיותוון המשולש ולכן נשאר להוכיח שאם $\nu =$

$$0 = d(\mu, \nu) == \forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_X f_n d\mu = \int_X f_n d\nu$$

או לכל $g \in C(X)$ קיימת תח-סדרה $g \rightarrow f_{n_k}$ במידה שווה (בגזרת sup) ומהיות g חסומה הרי שהחל ממוקם מסוים איברי הסדרה מקיימים $\|f_{n_k}\|_{\infty} \leq \|g\|_{\infty} + 1$.

הפונקציה הקבועה $\|g\|_{\infty} + 1$ אינטגרבילית ביחס ל- μ, ν (מידות הסתברות) או משפט התחכשות הנשלטה

$$\int g d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_{n_k} d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_{n_k} d\nu = \int g d\nu$$

כלומר ν, μ מגדירות את אותו פונקציונל על $C_C(X)$ ולכן מהירות במשפט ההצגה של ריז נסיך $\nu = \mu$. \square

משפט 6.2.1 : אם X מרחב מטרי קומפקטי אז $(\mathcal{P}(X), d)$ מרחב מטרי קוופקטי.

הוכחה : תהיי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C(X)$ צפופה ב- $C(X)$ ונהא שיש לה תח-סדרה מתכנסת.

מהחר ו- \cdot $\int_X f_1 d\mu_{n,1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha_1$ ו- $\alpha_1 \in \mathbb{C}$, מבולציאנו-וירשטראס נקבע $\{\mu_{n,1}\}_{n=1}^{\infty}$

נמשך בטיעון דומה לכל f_k ונקבע מתיון אלכסון כי תח-סדרה $\{\mu_{n,n}\}_{n=1}^{\infty}$ מקיימת

בහינתו $|\int_X f_i d\mu_{n,n} - \int_X f_i d\mu_{m,m}| < N < n, m \in \mathbb{N} \in N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N > 0$ מקיימים $i \in \mathbb{N}$ ו- $\varepsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך ש- $\varepsilon < \frac{\varepsilon}{3}$ ובנוסף קיים $N \in \mathbb{N}$ כך ש- $\varepsilon < \frac{\varepsilon}{3}$ כי זאת סדרת קושי, או $\int_X f_i d\mu_{m,m} | < \frac{\varepsilon}{3}$

$$\begin{aligned} \left| \int_X g d\mu_{n,n} - \int_X g d\mu_{m,m} \right| &\leq \left| \int_X g d\mu_{n,n} - \int_X f_i d\mu_{n,n} \right| + \left| \int_X f_i d\mu_{n,n} - \int_X f_i d\mu_{m,m} \right| + \left| \int_X f_i d\mu_{m,m} - \int_X g d\mu_{m,m} \right| \\ &\leq \int_X |g - f_i| d\mu_{n,n} + \left| \int_X f_i d\mu_{n,n} - \int_X f_i d\mu_{m,m} \right| + \int_X |f_i - g| d\mu_{m,m} \\ &\leq \|g - f_i\|_{\infty} \mu_{n,n}(X) + \left| \int_X f_i d\mu_{n,n} - \int_X f_i d\mu_{m,m} \right| + \|g - f_i\|_{\infty} \mu_{m,m}(X) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

כלומר סדרת קושי ב- \mathbb{C} ולכן מתכנסה ב- \mathbb{C} .

נגדיר $\Lambda : C(X) \rightarrow \mathbb{C}$ עלי-ידי $\Lambda g := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X g d\mu_{n,n}$ ולכן משפט ההצגה של ריז קיימת מידת μ המתאימה ל- Λ .

נבחן כי $\mu \in \mathcal{P}(X)$ כי $\mu(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \mathbb{1}_X d\mu_{n,n} = 1$ שכן $\mathbb{1}_X \in C(X)$

\square

7 דינמיקה

7.1 משפט Krylov–Bogolyubov

משפט 7.1.1: אם X מרחב מטרי קומפקטי, $T : X \rightarrow X$ רציפה אזי קיימת μ מידת הסתברות T -איינוריאנטית (כלומר $.X \in T_*\mu = \mu$) הוכח: נבחר $x_0 \in X$ ונתבונן על

$$\mu_n := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{T^k(x_0)} \in \mathcal{P}(X)$$

מהקומפקטיות של $\mathcal{P}(X)$ נובע שקיימת μ מידת הסתברות עכורה $\mu \xrightarrow{*} \mu$ ונראה שהיא T -איינוריאנטית: תהי אזי,

$$\begin{aligned} \left| \int f d\mu - \int f \circ T d\mu \right| &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \int f d\mu_{n_k} - \int f \circ T d\mu_{n_k} \right| \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n_k} \sum_{i=0}^{n_k-1} (f - f \circ T)(T^i(x_0)) \right| \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n_k} \sum_{i=0}^{n_k-1} f(T^i(x_0)) - f(T^{i+1}(x_0)) \right| \\ &\stackrel{(*)}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{n_k} |f(x_0) - f(T^{n_k}(x_0))| \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2\|f\|_\infty}{n_k} = 0 \end{aligned}$$

כאשר $(*)$ נובע מכך שהוא טור טלסקופי.

מיהדות משפט ההציגה של ריס נסיך $T_*\mu = \mu$

□

8 שלושת העקרונות של Littlewood

8.1 משפט לוזין

משפט לוזין 8.1.1: (משפט לוזין): יהיו X מרחב האוסדרוף קומפקטי מקומי ותהיה μ מידת רדון על X .
תהי $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ מדידה המקיימת $\{x \mid f(x) \neq 0\} \subseteq \{x \mid \text{כארש } \infty < \mu(A)\}$.
אוילר $\epsilon > 0$ קיימת $\{x \mid f(x) \neq g(x)\} < \mu(\{x \mid f(x) \neq g(x)\})$.

הוכחה הוכחה במרחבי מידה סופיים: נוכחה את המשפט לוזין במקרה של מרחב מידה X סופית ונשתמש במשפט אגרוב/אגורוֹף.
יהי $U \setminus F$, אם $f = \mathbf{1}_E$ מדידה, מרגולריות נוכל למצוא $U \subseteq E \subseteq F$ כך ש- F -קומפקטיבית ו- U פתוחה ו- $\epsilon < \mu(U \setminus F)$.
מהלמה של אוריסון נוכל בחור U $\leq \mathbf{1}_K \leq g \leq \mathbf{1}_K$ רציפה וזה מסיים עבור פונקציות מצינן.

עבור פונקציות פשוטות שהן הסכום של k פונקציות מציניות נשתמש בלוזין עבור פונקציה מצינית לכל אחת מהן כשנורוק כל פעם $\frac{\epsilon}{k}$ ושוב נסימן.
אם f מדידה ניקח סדרה של פשוטות המתכנסות אליה $f \rightarrow s_n$. משפט לוזין לפונקציות פשוטות נוכל לכל n לבחור g_n המתלבדת עם s_n מהווים
לקבוצה מידה $2^{-n} \cdot \frac{\epsilon}{2}$.
או מהווים לאיחוד כל הקבוצות הללו שמתת-אדיטיביות תהיה לו מידה $\frac{\epsilon}{2}$ לכל היותר מתקיים $f \rightarrow g_n$. בעזרת משפט אגרוב/אגורוֹף נוכל לזרוק עוד
קבוצה מידה $\frac{\epsilon}{2}$ שמהווים אליה $f \rightarrow g_n$ במידה שווה ואו קיבלונו שמהווים לקבוצה מידה ϵ יש סדרת פונקציות המתכנסת ל- f במידה שווה, כלומר f
רציפה בקבוצה זו. □

8.2 משפט אגרוב/אנגوروּף

משפט 8.2.1 (משפט אגרוב/אנגوروּף): יהי (X, \mathcal{A}, μ) מרחב מידה סופי ונניח כי $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ מתכנסת כמעט-תמיד ל- \mathbb{R} מידה. אז לכל $\varepsilon > 0$ קיימת E^c כך ש- $f_n \rightarrow f$ במידה שווה ב- E^c אם $E \in \mathcal{A}$.

הוכחה: יהי $\varepsilon > 0$ ונסמן

$$n_k(x) := \min \left\{ n \mid \forall N > n, |f_N(x) - f(x)| < \frac{1}{k} \right\} \quad (\min(\emptyset) = \infty)$$

עבור $x \in X$, $n_k(x) < \infty$ מתקיים $|f_N(x) - f(x)| < \frac{1}{k}$ $\forall N \in \mathbb{N}$ ולכן $n_k(x) < \infty$ מתקיים $|f_N(x) - f(x)| < \frac{1}{k}$ $\forall N \in \mathbb{N}$. $n_k(x) \in \bigcap_{m=1}^{\infty} n_k^{-1}((m, \infty])$ נסתכל על הקבוצה $(0, m)$ ונקבל ש- $n_k(x) < \infty$ מדייה.

$$x \in n_k^{-1}((0, m)) \iff n_k(x) \geq m \iff x \in \bigcup_{N \geq m} \left\{ x \mid |f_N(x) - f(x)| < \frac{1}{k} \right\}$$

והרימינית מידה, אז

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} n_k^{-1}((m, \infty]) = n_k^{-1}(\{\infty\})$$

מרציפות מלמעלה (ניתן להשתמש כי הנקנו שהмерחב מידה סופי).
או לכל $N \in \mathbb{N}$ הסדרה $k \in \mathbb{N}$ מתקנת $n_k^{-1}((m, \infty])$ מתקיים $m < m_k < m$ וקטור m_k נבחר כך שלכל $x \in E^c$ מתקיים

$$\mu(n_k^{-1}((m, \infty])) < \varepsilon \cdot 2^{-k} \implies \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} n_k^{-1}((m_k, \infty))\right) < \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon \cdot 2^{-k} = \varepsilon$$

או $N \geq m_k$ וכאן $n_k(x) \leq m_k$ מתקיים $x \in E^c$ כלומר לכל $x \notin n_k^{-1}((m_k, \infty))$ מתקיים $|f_N(x) - f(x)| < \frac{1}{k}$ וכאן $f_n \rightarrow f$ במידה שווה ב- E^c .

9.1 אַ-שִׁיווֹין יָבֵן

משפט 9.1.1 (אי-שוויון יאנسن): יהיו (X, \mathcal{A}, μ) מרחב הסתברות ותהי $\varphi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה מדידה, אז

$$\varphi \left(\int_X f d\mu \right) \leq \int_X \varphi \circ f d\mu$$

הוכחה: נסמן $T := \int_X f d\mu$
מהיות $T \in (a, b)$ מרחב הסתברות, נובע ש- $Im(f) \subseteq (a, b)$ ונסמן

$$\beta := \sup_{s \in (a, T)} \left\{ \frac{\varphi(T) - \varphi(s)}{T - s} \right\}$$

או לכל $s < T$ עם $s \in (a, b)$ מתקיים

$$\frac{\varphi(T) - \varphi(s)}{T - s} \leq \beta \iff \varphi(T) - \varphi(s) \leq \beta(T - s) \iff \varphi(s) \geq \varphi(T) + \beta(s - T)$$

אם φ קמורה ולכון מהאיפין השקלן לקיים $s > T$ עם $s \in (a, b)$ מתקיים

$$\frac{\varphi(T) - \varphi(s)}{s - T} \geq \beta \iff \varphi(s) - \varphi(T) \geq \beta(s - T) \iff \varphi(s) \geq \varphi(T) + \beta(s - T)$$

ולכן לכל $s \in (a, b)$ מתקיים $\varphi(s) \geq \varphi(T) + \beta(s - T)$
בפרט זה נכון לכל $x \in X$ כי $(s = f(x))$ ונקבל

$$\begin{aligned} \int_X \varphi \circ f d\mu &\stackrel{\text{מונוטוניות האינטגרל}}{\geq} \int_X (\varphi(T) + \beta(f - T) d\mu) \\ &\stackrel{\text{ליינארית האינטגרל}}{=} \int_X \varphi(T) d\mu + \beta \left(\int_X f d\mu - \int_X T d\mu \right) \\ &= \varphi(T)\varphi(X) + \beta(T - T\mu(X)) \stackrel{\mu(\bar{X})=1}{=} \varphi(T) + \beta(T - T) = \varphi \left(\int_X f d\mu \right) \end{aligned}$$

□

9.2 אִ-שְׁיוֹוֹן הַולְדֵר וְאִ-שְׁיוֹוֹן מַנִּיקּוּבֶסְקִי

משפט 9.2.1 (אִ-שְׁיוֹוֹן הַולְדֵר וְאִ-שְׁיוֹוֹן מַנִּיקּוּבֶסְקִי): יהי (X, \mathcal{A}, μ) מרחב מידה ונניח כי $1 \leq p, q \leq \infty$ ומקיימים

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

או לכל f, g מדידות אִ-שְׁלִילִיות מתקיימים

$$(1) \int_X fg \, d\mu \leq \left(\int_X f^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X g^q \, d\mu \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$(2) \left(\int_X (f+g)^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_X f^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X g^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

כאשר הראשון זה אִ-שְׁיוֹוֹן הַולְדֵר והשני הוא אִ-שְׁיוֹוֹן מַנִּיקּוּבֶסְקִי ואמ $p = q = 2$ זה אִ-שְׁיוֹוֹן קָרוֹשִׁי-שָׂוּרִץ.

הוכחה: נוכחה את (1) בהנחה ש- $\|fg\|_1 \leq 1$ וגראה כי $\log \log(fg) \leq 1$ היא פונקציה קעורה ולכן אם נניח ש- $fg \neq 0$ נקבל

$$\log(fg) = \log f + \log g = \frac{\log f^p}{p} + \frac{\log g^q}{q} \leq \log \left(\frac{f^p}{p} + \frac{g^q}{q} \right)$$

ואם נעלם את e בחזקת אלו נקבל

$$(\star) \quad fg \leq \frac{f^p}{p} + \frac{g^q}{q}$$

אִ-שְׁיוֹוֹן זה טריוויאלי במקרה שבו $fg = 0$ ולכן נוכל להתעלם מההנחה ש- $\|fg\|_1 = 1$ נקבל

$$\int_X \frac{f^p}{p} + \frac{g^q}{q} \, d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

ואם ניקח אינטגרל על שני האגפים, (\star) יביא לנו $\|fg\|_1 \leq 1$.

כדי להוכיח את (2) נניח ש- $\|f\|_p = \|g\|_p = 1$ ונשתמש בקמירות x^p ונקבל שלכל $t \in (0, 1)$

$$((1-t)f + tg)^p \leq (1-t)f^p + tg^p$$

ושוב מלינאריות ומונגוטוניות

$$\int_X ((1-t)f + tg)^p \, d\mu = (1-t) + t = 1$$

ולכן

$$\|(1-t)f + tg\|_p^p \leq 1$$

כלומר $\|(1-t)f + tg\|_p \leq 1$.

ללא ההנחה, כתוב את $f + g$ כממוצע משוקלל של פונקציות מנורמה 1, כלומר $\bar{f} = \|f\|_p \bar{f}$, $\bar{g} = \|g\|_p \bar{g}$, $f = \|f\|_p \bar{f}$, $g = \|g\|_p \bar{g}$ ונקבל

$$\|f+g\|_p = \left\| \bar{f} \cdot \|f\|_p + \bar{g} \|g\|_p \right\|_p = (\|f\|_p + \|g\|_p) \cdot \left\| \bar{f} \frac{\|g\|_p}{\|f\|_p + \|g\|_p} + \bar{g} \frac{\|f\|_p}{\|f\|_p + \|g\|_p} \right\|_p$$

נבחן שאת גורם המכפלה מימין הוא בידוק ביטוי של ממוצע משוקלל של פונקציות מנורמה 1 ולכן נוכל לחסום אותו מלעיל על-ידי 1 ולקבל

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

□

C 9.3 הוא מרחב פסודו-נורמי מעל $\mathcal{L}^p(\mu)$

משפט 9.3.1 $\mathcal{L}^p(\mu)$ הוא מרחב פסודו-נורמי מעל \mathbb{C} .

הוכחה:

משפט 9.3.2 אם $f \cdot g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ אז $g \in \mathcal{L}^q(\mu)$, $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$.
הוכחה: עבור $p, q \in [1, \infty]$ הוכיחות צמודות זו. אם $|g(x)| \leq \|g\|_\infty (\star)$ ו- $g \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$ ו- $p = 1$ ו- $q = \infty$ מתקיים $\int_X |f| \cdot \|g\|_\infty d\mu = \|g\|_\infty \cdot \int_X |f| d\mu < \infty$ תמיד ולכן $\|f \cdot g\|_1 = \int_X |f \cdot g| d\mu = \int_X |f| \cdot |g| d\mu \stackrel{(*)}{\leq} \int_X |f| \cdot \|g\|_\infty d\mu = \|g\|_\infty \cdot \int_X |f| d\mu < \infty$.

כלומר $\|f \cdot g\|_1 < \infty$ וכך $f \cdot g \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

משפט 9.3.3 איזיון המשולש של נורמת p : אם $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ מתקיים $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.
הוכחה: אם $p \in (1, \infty)$ או הטענה נובעת מאי-היוון מניקובסקי.

אם $\lambda \in \mathbb{C}$ או הטענה נובעת מאי-היוון המשולש של ערך המוחלט ב- \mathbb{R} .
הוכחה: נשאר להראות הומוגניות – אם $\lambda \in \mathbb{C}$ ו- $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ אז $\|\lambda \cdot f\|_p = |\lambda|^p \|f\|_p$.

$$\int_X |f \lambda f|^p d\mu = \int_X (|\lambda| \cdot |f|)^p d\mu = \int_X |\lambda|^p \cdot |f|^\lambda d\mu = |\lambda|^p \int_X |f|^p d\mu < \infty$$

כאשר השתמשנו בתכונות ערך המוחלט ומהומוגניות האינטגרל למכפלה בקבוע.

אי-היוון האחרון נובע מהיות $\int |f|^p d\mu < \infty$ כי $f \in \mathcal{L}^p$ ו- $\int |f|^p d\mu < \infty$ ו- $\int \lambda^p d\mu < \infty$ המכפלה היא סופית.
הערה: זה מרחב פסודו-נורמי כי זו לא אמתה נורמה $\|f\|_p = 0 \nRightarrow f \equiv 0$ אבל $\|f\|_p = 0$ אכן גורר $f = 0$.

9.4 טענות חשובות מתרגילי הבית

משפט 9.4.1 (טענות חשובות מתרגילי הבית):

משפט 9.4.2 (הכלת מרחב (L^p, μ)): יהי (X, \mathcal{A}, μ) מרחב מידה סופי ויהיו $q \leq p \in [1, \infty]$.

$$L^p(\mu) \subseteq L^q(\mu) \iff \mu(X) < \infty .1$$

$$L^q(\mu) \subseteq L^p(\mu) \iff \exists \varepsilon > 0, \forall A \in \mathcal{A}, \mu(A) < \varepsilon \implies \mu(A) = 0 .2$$

משפט 9.4.3 (תכונות L^∞): נניח ש- (X, \mathcal{A}, μ) מרחב מידה סופי ותהי

$f \in L^\infty(\mu)$. ואם $a_n = \int_X |f|^n d\mu$ המוגדרת על-ידי $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ מתקנת

.1. אם $\|f\|_\infty = 1$ או הסדרה $\|f\|_\infty = 1$ או $\|f\|_\infty > 0$.2.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|f\|_{n+1}^{n+1}}{\|f\|_n^n} = \|f\|_\infty$$

9.5.1 לכל $p \in [1, \infty]$, המרחב הנורמי $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ הוא מרחב בnx

משפט 9.5.1 (לכל $p \in [1, \infty]$ המרחב הנורמי $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ הוא מרחב בnx) **אם וرك אם הוא שלם** במשמעות המושנית מהנורמה, כלומר כל סדרת קושי היא מתכנסת).

הוכחה:

1. נניח ש- $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ סדרת קושי, אז קיימת תת-סדרה המקיים

$$\|f_{(n_i)+1} - f_{n_i}\|_p < 2^{-i}$$

ונגיד

$$g_k := \sum_{i=1}^{k-1} |f_{(n_i)+1} - f_{n_i}|$$

מאר-שווין מניקובסקי מקבל

$$\|g_k\|_p \leq \sum_{i=1}^{k-1} \|f_{(n_i)+1} - f_{n_i}\|_p \leq 1$$

ולכן $(g_k)_{k=1}^\infty$ לכל k וכן $g_1^p \leq g_2^p \leq \dots$ וממשפט ההतכנסות המונוטונית מתקיים עבור $g_k \in L^p(\mu)$

$$\int g^p d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int g_k^p d\mu \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|g_k\|_p^p \leq 1$$

ולכן $g \in L^p(\mu)$ ובפרט $\|g\|_p < \infty$

$$f = f_{n_1} + \sum_{i=1}^{\infty} (f_{(n_i)+1} - f_{n_i})$$

מתכנסה בהשלט μ -כמעט תמיד ולכן $f = \lim_{i \rightarrow \infty} f_{n_i}$ היכן שהטור טלסקופי נובע ויתר על-כך

$$\|f\|_p \leq \|f_{n_1}\|_p + \|g\|_p < \infty \implies f \in L^p(\mu)$$

מכך שהסדרה $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ קשיי נובע שלכל $\varepsilon > 0$ יש N כך שלכל $n, m > N$ מתקיים $\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$ ולכן עבור

$$\|f - f_m\|_p^p = \int \lim_{i \rightarrow \infty} |f_m - f_{n_i}|^p d\mu \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \int |f_m - f_{n_i}|^p d\mu = \liminf_{i \rightarrow \infty} \|f_m - f_{n_i}\|_p^p < \varepsilon^p \implies \|f - f_n\|_p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

. נניח ש- $\|f - f_n\|_\infty = p$ ונסמן 2.

$$A_n := \{x \in X \mid |f_n| \cdot \|f_n\|_\infty\} \quad B_{n,m} := \{x \in X \mid |f_n - f_m| > \|f_n - f_m\|_\infty\}$$

או $E = \bigcup_{n,m} B_{n,m} \cup \bigcup_n A_n$ והוא קבוצה מ- μ -מידה אפס (מהגדרת E^c (ess sup מתקיים ש- E^c במידה שווה ולכן $\|f - f_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$)

□

9.6 צפופה ב- $L^p(\mu)$

משפט 9.6.1 \mathcal{G} צפופה ב- $L^p(\mu)$: נסמן ב- \mathcal{S}_f את אוסף הפונקציות הפשוטות $s : X \rightarrow \mathbb{C}$ המקיימות $\int_X |s|^p d\mu < \infty$. אזי לכל $\mathcal{S}_f, p \in [1, \infty)$.

הוכחה: תהי $\mathcal{G} = \{s_n \neq 0\}$ סדרת הפונקציות הפשוטות שמתכנסת אליה ונבחן $\int_X |s_n|^p d\mu$. ניקודתיות ומתקיים $|s_n - f| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ שכן $s_n \in \mathcal{S}_f$ ו- $f \in L^p(\mu)$.

$$0 \leq |f - s_n|^p \leq f^p$$

לכן ממשפט ההחכניות הנשלטת

$$\|f - s_n\|_p^p = \int |f - s_n|^p d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

כל $f \in L^p(\mu)$ היא צירוף לינארי של פונקציות איזומורפיות ב- $L^p(\mu)$ ומכאן הטענה. \square

הערה (אי-נכונות הטענה ב- $L^\infty(\mathbb{R})$): \mathcal{G} איינה צפופה ב- $L^\infty(\text{Leb}_{\mathbb{R}})$: ניקח $f(x) = 1$ לכל $x \in \mathbb{R}$ ו- $s(x) = 1$ כי $\mu(E) < \infty$ ו- $\mu(s(E)) = 0$.

תהי \mathcal{G} קיימת E כך $\mu(E) < \infty$ ו- $\mu(s(E)) = 0$ ולכן

$$s(x) = 0 \quad \forall x \in E^c$$

אזי

$$\|f - s\|_\infty = \text{ess sup}_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - s(x)|$$

אבל $\|f - s\|_\infty = \infty$ ו- $\mu(E^c) = \infty$ ו- $\mu(E) < \infty$ מתקיים

$$|f(x) - s(x)| = |1 - 0| = 1 \implies \|f - s\|_\infty \geq 1$$

או אי אפשר לבנות סדרה שמתכנסת ל-0 ולכן \mathcal{G} לא צפופה ב- $L^\infty(\text{Leb}_{\mathbb{R}})$.

9.7 קירוב על-ידי פונקציות רציפות

משפט 9.7.1 (קירוב על-ידי פונקציות רציפות): יהיו X מרחב האוסדרוף kompaktijski-makomiyah ותהי μ ממידת רדון על X .
לכל $p \in [1, \infty)$ הקיום $C_C(X)$ צפופה ב- $L^p(\mu)$.

הוכחה: מטענה שראינו מספיק להוכיח ש- $\overline{C_C(X)} \supseteq \mathcal{S}_f$.
תהיי $s \in \mathcal{S}_f$ או s עומדת בתנאי משפט לוין ולכן לכל $\epsilon > 0$ קיימת פונקציה $g \in C_C(X)$ עבורה $\mu(\{s \neq g\}) < \epsilon$.
יתר על-כן, ניתן לבחור g כך ש- $\sup g \leq \sup s$ ולכן

$$\|g - s\|_p^p = \int |g - s|^p d\mu = \underbrace{\int_{\{s=g\}} |g - s|^p d\mu}_{=0} + \underbrace{\int_{\{s \neq g\}} |g - s|^p d\mu}_{\mu(\{s \neq g\}) < \epsilon} \leq 0 + \epsilon(2\|s\|_\infty)^p$$

□

הערה (אי-נכונות הטענה ב- L^∞): הדוגמה מהטענה הקודמת מראה את אי-נכונות הטענה גם כאן: מהגדה, אם $f \in C_C(\mathbb{R})$ או קיים $M \in \mathbb{R}^+$ כך שמהזין לקטע $[-M, M]$ מתקיים $f(x) = 0$. ניקח $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ כך $g(x) = 1$ עבור כל $x \in [-M, M]$ ו- $\|g\|_\infty = 1$. אם ננסה לקרב את g עם כל $f \in C_C(\mathbb{R})$ נקבל

$$\|g - f\|_\infty = \text{ess sup}_{x \in \mathbb{R}} |1 - f(x)|$$

או מהיות $f \in C_C(\mathbb{R})$ נובע שעבור $M > |x|$ כלשהו מתקיים

$$|g(x) - f(x)| = |1 - 0| = 1$$

כלומר $1 \geq \|g - f\|_\infty$ ולכן לא ניתן לקרב ו- $\|g - f\|_\infty \geq 1$.

10. יחסים בין מידות

תהיינה ν, μ מידות על מרחב מדיד (X, \mathcal{A}) .

הדרה 10.0.1 (מידה רציפה בהחלה, מידות שקולות): נאמר $\nu \ll \mu$ רציפה בהחלה ביחס ל- μ ונסמן $\mu \ll \nu$ אם ורק אם

$$\forall E \in \mathcal{A}, \mu(E) = 0 \implies \nu(E) = 0$$

נגדן שהמידות הן שקולות ונסמן $\mu \sim \nu$ אם ורק אם $\mu \ll \nu$ וגם $\nu \ll \mu$, כלומר $\nu(E) = 0 \iff \mu(E) = 0$.

הדרה 10.0.2 (מידות סינגולריות): נאמר $\nu \ll \mu$ ו- μ סינגולריות ונסמן $\nu \perp \mu$ אם ורק אם קיימות זורות כך שמתקיים $(\nu(B) = \mu(A^c) = 0 \text{ if } A \cap B = X \text{ or } A \cup B = X)$.

10.1 טענה שקולת לרציפות בהחלה במרחב סופי

משפט 10.1.1 (טענה שקולת לרציפות בהחלה במרחב סופי): אם μ סופית או $\nu \ll \mu$ אם ורק אם לכל $\delta > 0$ קיים $\varepsilon < \delta$ כך שאם $\delta < \varepsilon$ אז $\nu(A) < \delta$.

הוכחה: \iff נניח כי $\nu \ll \mu$. יהיו $\delta > 0$ ונניח בשלילה שלכל $n \in \mathbb{N}$ קיימת $\varepsilon > 0$ כך ש- $\varepsilon > \delta$ אבל מרציפות בהחלה ומוסיפות $\mu(A_n) = 0 \cup \cap n$ לפי בורל-קנטלי.

$$\mu\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n\right) = \mu(\limsup A_n) \geq \limsup \mu(A_n) \geq \varepsilon$$

□ $\mu(A) = 0 \iff \nu(A) < \delta$ ולכן $\varepsilon < \delta$ ולכן $\nu(A) < \varepsilon$.

10.2 טענה שקולת לרציפות בהחלה במרחב ס-סופי

משפט 10.2.1 (טענה שקולת לרציפות בהחלה במרחב ס-סופי): אם μ מידת ס-סופית ו- ν מידת כלשהי או $\mu \ll \nu$ אם ורק אם $\mu|_A \ll \nu|_A$ לכל A .

הוכחה: \iff כי אם $\mu \ll \nu$ זה נכון גם לצטום.

\Rightarrow נכתוב $X = \bigcup_n A_n$ שם $\nu(E) = 0$ או נראה כי $\nu(E) = 0$ או מזוהה $\mu(E) = 0$ מוגע כי $\mu(A_n) = 0$ ממונוטוניות המידה (כי חיתוך קבוצות מדידות הוא קבוצה מדידה) ולכן $\mu|_{A_n}(E) = 0$.

$$\nu|_{A_n}(E) = 0 = \nu(E \cap A_n) \implies \nu(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E \cap A_n) = 0$$

□

10.3 תנאי שקול למידת האפס

משפט 10.3.1 (אם מידה רציפה בהחלה וסינגולרית ביחס למידה אחרת היא מידת האפס): אם $\nu \ll \mu$ וגם $\nu \perp \mu$ אז μ היא מידת האפס.

הוכחה: מהסינגולריות של המדידות נובע כי μ נתמכת על הקבוצה A כך $\mu(A) = 0$ ומרציפות בהחלה נובע כי $\nu(A) = 0$.

10.4 תנאי שקול לסינגולריות על מדידות חיוביות

משפט 10.4.1 (תנאי שקול לסינגולריות על מדידות חיוביות): יהיו ν, μ מדידות חיוביות על X . אז $\nu \perp \mu$ אם ורק אם לכל $0 < \varepsilon$ קיימת קבוצה $A \subset X$ מדידה כך $\nu(A^c) < \varepsilon$.

הוכחה: \iff אם $\nu \perp \mu$ אז קיימת קבוצה A כך $\mu(A) = 0$ ו- $\nu(A^c) = 0$, כנדרש.

\Rightarrow נבחר $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת קבוצות כך שמתקיים $\mu(A_n^c) < 2^{-n}$, $\nu(A_n^c) < 2^{-n}$.

נגדיר $A = \limsup A_n$ ובורל-קנטלי נקבל $0 = \nu(A) = \nu(\liminf A_n^c) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \nu(A_n^c) = 0$; מצד שני מהלמה של פאטו $\mu(A) = 0$.

10.5 מסקנה מתרגילי הבית

משפט 10.5.1 (מסקנה מתרגילי הבית): $\nu, \mu, \nu_1, \nu_2, \dots$ מידות חיוביות על X ונגיד $\nu_i \ll \nu$ אזי

$$(1) \forall i \in \mathbb{N}, \nu_i \perp \mu \implies \nu \perp \mu \quad (2) \forall i \in \mathbb{N}, \nu_i \ll \mu \implies \nu \ll \mu$$

11 מרחבי הילברט

11.1 משפט ההצגה של Riesz–Fréchet

משפט 11.1.1 (משפט ההצגה של Riesz–Fréchet): \mathcal{H} מרחב הילברט, ההעתקה ששולחת כל וקטור $h \in \mathcal{H}$ לפונקציונל $\phi_h(x) := \langle x, h \rangle$. (\mathcal{H} היא צמודה–lienארית אם והיוון קושי–שורץ לכל $x \in \mathcal{H}$ מתקיים $\|\phi_h\|_{\text{op}} < \infty$).

$$\mathcal{H}^* := \{\phi \in \text{Hom}(\mathcal{H}, \mathbb{C}) \mid \|\phi\|_{\text{op}} < \infty\}$$

ובזהה:

1. מהגדרת המכפלת הפנימית נסיק $\phi_h \mapsto h$ היא צמודה–lienארית
2. מאיד–שוון קושי–שורץ לכל $1 = \|x\|$ מתקיים

$$|\varphi_h(x)| = |\langle x, h \rangle| \leq \|x\| \cdot \|h\| = \|h\|$$

$$\phi_h\left(\frac{h}{\|h\|}\right) = \left\langle \frac{h}{\|h\|}, h \right\rangle = \|h\| \text{ ומקיים } \|\phi_h\|_{\text{op}} \leq \|h\|$$

$$\text{או } \|\phi_h\|_{\text{op}} = \|h\| \text{ ולכן ההעתקה היא איזומטריה}$$

3. נובע אם כך $\|\phi_h\|_{\text{op}} = \|h\|$ הוא מנורמה 1 ומקיים $\ker \ell = V$ תחת–מרחב סגור כי ℓ פונקציונל חסום ולכן רציף ו– V היא המקור של קבוצה סגורה $\{0\}$.

4. $\ell = \phi_0$ אם $V = \mathcal{H}$

5. אחרת, $V \subset \mathcal{H}$ ונסמן $\ell \in \mathcal{H}^*$ מקיים $w = \frac{\overline{\ell(z)}}{\|z\|^2} \cdot z \in V^\perp$ או נובע שהוקטור

6. $\ell = \phi_w$ שכן לכל $x \in \mathcal{H}$ מתקיים

$$\ell(\ell(z) \cdot x - \ell(x) \cdot z) = \ell(z) \cdot \ell(x) - \ell(x) \cdot \ell(z) = 0$$

$$\implies \ell(z) \cdot x - \ell(x) \cdot z \in \ker \ell = V$$

$$\implies \langle \ell(z) \cdot x - \ell(x) \cdot z, z \rangle = 0$$

$$\implies \ell(x) = \langle x, \frac{\overline{\ell(z)}}{\|z\|^2} \cdot z \rangle \implies \ell = \phi_w$$

□

11.2 אם μ איננה מידת האפס אז יש מידת סופית ששהולה לה

משפט 11.2.1: אם $0 \neq \mu$ מידת σ -סופית על מרחב מדיד (X, \mathcal{A}) , אז קיימת מידת סופית ν על (X, \mathcal{A}) כך ש- $\nu \sim \mu$.

הוכחה:

1. **שימוש ב- σ -סופיות:** מהות (X, \mathcal{A}, μ) מרחב מידת σ -סופית נובע שקיים אוסף $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ עם $\mu(A_n) < \infty$ לכל $n \in \mathbb{N}$ כך ש- $A_n \sim \mu$
2. הגדרת פונקציית עזר: גדר $w : X \rightarrow [0, 1]$ על-ידי

$$w(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n}}{1 + \mu(A_n)} \cdot \mathbb{1}_{A_n}(x)$$

3. **מדייה:** כגבול של סדרת פונקציות שהן צירופים לינהרים סופיים של פונקציות מציניות שהן כמובן מדידות. **0 ≤ w ≤ 1:** לכל $x \in X$ ברור שהכטוטו או-שלילי. כמו כן, מה- σ -סופיות נובע שקיים לפחות $N \in \mathbb{N}$ אחד כך ש- $x \in A_n$ ולכן

$$w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n}}{1 + \mu(A_n)} \cdot \mathbb{1}_{A_n}(x) \geq \frac{2^{-n}}{1 + \mu(A_n)} \cdot \mathbb{1}_{A_n}(x) = \frac{2^{-n}}{1 + \mu(A_n)} > 0$$

4. **חסימות:** מהות $\mu(A_n) > 0$ נובע כי $1 + \mu(A_n) > 1$ וובע כי $\frac{1}{1 + \mu(A_n)} \leq 1$, אז

$$0 < w \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n}}{1 + \mu(A_n)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1 \implies w(x) \in (0, 1]$$

5. **הגדרת מידת הדשא:** גדר $\nu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ כך ש- $\mu(E) = \int_E w d\nu$ ראיינו שזאת מידת הדשא.

7. $\nu \ll \mu$: תהי $E \in \mathcal{A}$ כך ש- $\mu(E) = 0$. $\nu(E) = \int_E w d\nu = 0$

מהיות $0 > w$ נסיק כי $0 = \int_E w d\mu > 0$ וגם $0 > w$ נקבע כי $0 = \nu(E) = \int_E w d\nu > 0$ בסתייה ולכן $\nu \ll \mu$

8. **הגדרה של מידות שקולות:** מצאנו כי $\nu \ll \mu$ וכן $\mu \ll \nu$ ולכן שקולות נובע כי $\nu \sim \mu$

□

12 גזירת רדון-ניקודים

12.1 משפט גזירת רדון-ניקודים-לבג

12.1.1 משפט גזירת רדון-ניקודים-לבג: יהיו (X, \mathcal{A}) מרחב מדיד ויהיו ν, μ שתי מידות σ -סופיות על X . אזי קיימות ויחדות שתי מידות s, a , $\nu_a = \nu_s + \nu$ המקיימות $\nu_a \ll \nu$ וגם $\mu \perp_s \nu$ (פירוק לבג). כמו כן, קיימת ויחידה $h : X \rightarrow [0, \infty)$ מדידה עבורה מתקיים $h d\nu_a = h d\mu$ ונקרה לא- h גזירת רדון-ניקודים של ν_a ביחס ל- μ ונסמנה $\frac{d\nu_a}{d\mu} h \in L^1(\mu)$. יורר עיל-כן אם ν סופית אזי h סופית.

הוכחה:

1. הוכחת הטענה נכונה כאשר ν מדידה סופית ו- μ מדידה σ -סופית ונראה כי זה גורר נכונות עבור מידות ν, μ σ -סופיות: מהיות המרחב σ -סופי נובע שקיים אוסף $\{\mathcal{A}_n\}_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{A}$ של קבוצות מדידה סופית תחת ν ובלי הגבלת הכלליות נניח שהן זרות זו מזו (תמיד ניתן להזיר אותן) כך ש- $\bigcup_{n=1}^\infty \mathcal{A}_n = X$ ולכל $n \in \mathbb{N}$ נסמן את מרחב המידה המצוומצם

$$v_n := \nu|_{\mathcal{A}_n} \quad A_n := \mathcal{A}|_{\mathcal{A}_n}$$

או ν מדידה על מרחב מדיד מצומצם ומהסופיות של ν נובע שגם (A_n, \mathcal{A}_n) מרחב מדידה סופי.

$(*)$ (ν כ- ν_n ומההנחה ניתן לישם את הטענה עבור המידות μ ו- ν על ν_n או $\nu_n = \nu_{n,a} + \nu_{n,s}$ וגם $\mu \perp_s \nu_n$ ו- $\mu \ll \nu_{n,a}$ על (A_n, \mathcal{A}_n) נגידר

$$\nu_s := \sum_{n=1}^\infty \nu_{n,s} \quad \nu_a := \sum_{n=1}^\infty \nu_{n,a}$$

ונקבל אם כך

$$\nu = \sum_{n=1}^\infty \nu_n = \sum_{n=1}^\infty \nu_{n,a} + \nu_{s,n} = \sum_{n=1}^\infty \nu_{n,a} + \sum_{n=1}^\infty \nu_{s,n} = \nu_a + \nu_s$$

ולכל $n \in \mathbb{N}$

1. אם $\nu_a(E) = \sum_{n=1}^\infty \nu_{n,a} = 0$ אז $\mu(E) = 0$ $E \in \mathcal{A}_n$ ו- $\mu \ll \nu$ אבל $\nu_{n,a}(E) = 0$, מכיוון $\nu_{n,a} \ll \mu$ ו- $\nu_{n,a}(E) = 0$ ו- $\nu_{n,a} \ll \mu$ ולכן $\nu_a(E) = 0$.
2. מכיוון $\nu_s \perp \mu$ ו- $\nu_{n,s}$ קיימות מדידות זרות כך ש- $\nu_{n,s}(B^c) = 0$ $B \in \mathcal{A}$, נגידר

$$\nu_s(B^c) = \sum_{n=1}^\infty \nu_{n,s}(B^c) = 0 = \mu(A^c) \implies \nu_s \perp \mu$$

2. נניהם ש- ν מדידה סופית.

מטענה שראינו נובע שקיים פונקציה מדידה וחובבת $w : X \rightarrow (0, 1]$ שעבורה $d\mu = w d\nu$ היא מדידה סופית אז נגידר את המדידה הסופית $f \in L^2(\lambda)$ מכל $d\lambda = d\nu + w d\mu$

$$\left| \int f d\nu \right| \leq \int |f| d\nu \leq \int |f|(d\nu + w d\mu) = \int |f| \cdot 1 d\lambda \stackrel{\text{קושי-שורר}}{\leq} \sqrt{\int |f|^2 d\lambda} \sqrt{\int |1|^2 d\lambda} = \sqrt{\lambda(X)} \|f\|_{L^2(\lambda)}$$

או הפונקציונל $\phi : L^2(\lambda) \rightarrow \mathbb{C}$ הנתון על-ידי $\phi(f) = \int f d\nu$ הוא חסום ממשפט הצגה של פרשה-דריס, נסיק שקיים כך שלכל $g \in L^2(\lambda)$

$$(\triangle) \quad \int f d\nu = \phi(f) = \int f \cdot g d\lambda$$

1. לכל $\mathcal{A} \in L^2(\lambda)$ עם $\lambda(E) > 0$ $E \in \mathcal{A}$ מתקיים $\lambda(E) = \int_E g d\lambda \in L^2(\lambda)$ ו- $\nu(E) = \int_E 1 d\lambda \in L^2(\lambda)$, כאמור

$$0 \leq \frac{\nu(E)}{\lambda(E)} = \frac{1}{\lambda(E)} \int_E g d\lambda \leq 1$$

מלמה שראינו על ממווצעים של פונקציות על קבוצות מדידות על-ידי שינוי של g על קבוצה מ- λ -מדידה אף נוכל להסיק כי $0 \leq g \leq 1$

$$A := \{x \in X \mid g(x) \in [0, 1)\} \quad B := \{x \in X \mid g(x) = 1\}$$

$$\nu_a := \nu|_A \quad \nu_s := \nu|_B$$

מכך ש- ν ו- $X = A \cup B$ חרי ש- $\nu_s + \nu_a = \nu$ שכתוב של \triangle מביא שלכל

$$\int f d\nu = \int fg d\nu + \int fgw d\mu \stackrel{(*)}{\iff} \int f(1-g) d\nu = \int fgw d\mu$$

נראה ש- $\mu \perp \nu$: מהיota $f = \mathbb{1}_B$ נקבע $(1-g)|_B \equiv 0$

$$0 = \int_B (1-g) d\nu = \int_B gw d\mu$$

אבל $0 > w$ ולכן $\mu(B) = 0$ כי $\nu_s(B^c) = 0 = \mu(B)$ או עבור $f = (1+g+g^2+\dots+g^n)\mathbb{1}_E$ נראה ש- $\mu \perp \nu$ כי $\nu_s(B^c) = 0$

$$\int_E (1-g^{n+1}) d\nu = \int_E (1+g+g^2+\dots+g^n)gw d\mu$$

אבל 1 והרי $g|_A < 1$ מונוטונית ולכן באגף שמאל נקבע

$$\int_E (1-g^{n+1}) d\nu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \nu(A \cap E) = \nu_a(E)$$

מצד שני h מתחננת מונוטונית ל- h מדידה ב- $[0, \infty]$ ולכן באגף ימין

$$\int_E (1+g+g^2+\dots+g^n)gw d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_E h d\mu$$

וזו $d\nu_a \ll \mu$ ולכן $d\nu_a = h d\mu$.
 $h \in L^1(\mu)$ כי סופית נסיק כי ν_a ממשהו מדידה סופית.

□

12.2 איך מחשבים נגורת רדון-ניקודים

נניח שיש לנו את המידות ν, μ ואנחנו רוצים לחשב את הנגורת רדון-ניקודים $\frac{d\nu}{d\mu}$.

1. קודם כל חייב להתקיים $\mu \ll \nu$ כלומר $\mu(E) = 0 \Rightarrow \nu(E) = 0$ אזי μ אפסת תנאי המשפט לא מתקיים.
2. כמו כן, חייב שהמרחוב שעלינו אנחנו מחשבים הוא ס-טופי.
3. חלוקה למקרים של "מסת" המידות

1. אם ν מוגדרת על ידי חלוקה כלשהי – נניח $\nu(\{E_n\}) = \sum a_n \mu(E_n \cap E)$ כאשר a_n חלוקה של המרחב, אז אם נכתב

$$\nu(E) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{E \cap E_n} a_n d\lambda = \int_E \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \mathbf{1}_{E_n}(x) d\lambda(x) \Rightarrow \frac{d\nu}{d\lambda}(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \mathbf{1}_{E_n}(x)$$

כלומר הערך בתחום האינטגרל הוא הנגורת רדון-ניקודים

2. אם לשתי המידות יש צפיפות – כלומר ν, μ מוגדרות על \mathbb{R} עם צפיפות $g(x), h(x)$ ביחס למידת לבג אז

$$d\nu = h(x) dx \quad d\mu = g(x) dx$$

אז

$$\frac{d\nu}{d\mu}(x) = \frac{h(x)}{g(x)}$$

כאשר זה מוגדר μ -כמעט בכל מקום כאשר $0 > g(x)$

3. המשפט היסודי של האלגברה – אם μ מידת לבג ו- $F(x) = \nu((-\infty, x])$ (כלומר F היא רציפה בהחלט) אזי

$$\frac{d\nu}{d\lambda}(x) = F'(x)$$

4. החלפת משתנה ורציפה קדימה של המידה – אם $\mu_* = f_* \mu$ ונתנו רוצים את הנגורת רדון-ניקודים ביחס ל- μ זה פשוט היקוביאן.

אם $X \rightarrow T : X$ (במימד אחד לנוחות גוירה ו- $\nu(E) = \mu(T^{-1}(E))$ אזי

$$\frac{d\nu}{d\mu}(x) = \frac{1}{|T'(T^{-1}(x))|}$$

13 גזירה של מידות רצון ב- \mathbb{R}^d

13.1 מסקנות משפט הכיסוי של בסיקוביין'

מסקנה 13.1.1 (מסקנה 1): תהי μ מידת בורל סופית על \mathbb{R}^d (בפרט מידת רצון) והיה $A \subseteq \mathbb{R}^d$ חסומה. אז לכל כיסוי בסיקוביין' \mathcal{F} של A קיים תת-אוסף $\tilde{\mathcal{E}} \subseteq \mathcal{E}$ של כדורים אוקלידיים סגורים וזרים בזוגות המקיים $\mu(\bigcup_{B \in \tilde{\mathcal{E}}} B) \geq \frac{1}{2Q}\mu(A)$, כאשר Q הקבוע האוניברסלי משפט הכיסוי.

הוכחה: משפט הכיסוי קיימים תת-אוספים $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_Q$ (אולי חלקם ריקים) שמהווים חלוקה של תת-הכיסוי $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$ המובטח משפט הכיסוי. אז

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup \mathcal{E} \cap A\right) = \sum_{i=1}^Q \mu\left(\left(\bigcup \mathcal{E}_i\right) \cap A\right)$$

ולכן לא ניתן שקיימים $i \leq Q$ שעבורו מתקיים $\mu(\bigcup \mathcal{E}_i \cap A) < \frac{1}{Q}\mu(A)$.

לכן קיים $i_0 \in [Q]$ המקיים $\mu(\bigcup \mathcal{E}_{i_0} \cap A) \geq \frac{1}{Q}\mu(A)$ ומאחר ש- \mathcal{E}_{i_0} בן-מניה של כדורים זרים בזוגות, ניתן להציג תת-אוסף סופי ממידה $\mu(\bigcup \tilde{\mathcal{E}} \cap A) \geq \frac{1}{2Q}\mu(A)$. \square

מסקנה 13.1.2 (מסקנה 2): תהי μ מידת רצון על \mathbb{R}^d ותהי $A \subseteq \mathbb{R}^d$ מדידה עם כיסוי בסיקוביין' \mathcal{F} המקיים שלכל $x \in A$ מתקיים $\inf\{r \mid B_r(x) \in \mathcal{F}\} = 0$.

או קיים תת-אוסף בן-מניה $\mathcal{E} \subseteq \tilde{\mathcal{E}}$ המורכב מכדורים זרים בזוגות המקיים $\mu(A \setminus \bigcup \tilde{\mathcal{E}}) = 0$.

הוכחה: נניח שה- $A \subseteq \mathbb{R}^d$ חסומה.

או מהיות μ מידת רצון היא סופית על קומפקטיות ורגולריות היינונית ולכן קיימת $U \subseteq A$ פתוחה המקיימת $\mu(U) < \left(1 + \frac{1}{4Q}\right)\mu(A)$. נזרוק מ- \mathcal{F} את כל הcadורים שלא מוכלים ב- U ומהמסקנה לעיל נובע שקיים תת-אוסף סופי $\mathcal{E}_1 \subseteq \tilde{\mathcal{E}}$ המקיים $\mu(\bigcup \tilde{\mathcal{E}}_1 \cap A) \geq \frac{1}{2Q}\mu(A)$. נסמן $A_1 := A \setminus \bigcup \tilde{\mathcal{E}}_1$ ונקבל

$$\mu(A_1) \leq \mu(U \setminus \bigcup \tilde{\mathcal{E}}_1) \leq \mu(U) - \mu(\bigcup \tilde{\mathcal{E}}_1) \leq \left(1 + \frac{1}{4Q}\right)\mu(A) - \frac{1}{2Q}\mu(A) = \left(1 - \frac{1}{4Q}\right)\mu(A)$$

נוקהה עם $U_1 \subseteq U$ $\mu(A_1) < \left(1 + \frac{1}{4Q}\right)\mu(A_1)$ ונזהר על התהיליך עד שנקבל $\mu(A_n) = 0$ או עד אין-סוף. נגידיר $\bigcup_{i=1}^{\infty} \tilde{\mathcal{E}}_n := \tilde{\mathcal{E}}$ ומהבנניה לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$\mu(A \setminus \bigcup \tilde{\mathcal{E}}) \leq \mu(A_n) \leq \left(1 - \frac{1}{4Q}\right)^n \mu(A) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

וכן $\mathcal{F} \subseteq \tilde{\mathcal{E}}$ מורכב מכדורים זרים בזוגות וסימנו.

אם $A \subseteq \mathbb{R}^d$ אינה חסומה, נוכל לחלק את \mathbb{R}^d לאוסף בן-מניה של תת-קbowות פתוחות, זרות וחסומות ולקבוצה מ- μ -מידה אפס. מאחר ש- μ סופית על קומפקטיות הרוי שיש לכל היותר מספר בן-מניה של ספרות סביבה הראשית מידת חיובית.

אילו היה אוסף לא בן-מניה של ספרות מידת חיובית ($\partial B_r(0)$) או היו קיימות מספר אינסופי ולא בן-מניה של ספרות מידת חיובית $\delta < 0$ המוכלות ב- $(B_r(0))$ עבור $r < R$, $\delta < 0$ כלשהו וזו סתירה לכך $\delta < \mu(B_R(0))$.

לכן קיימים $\infty \nearrow r_n - r_{n+1}$ עם ספירה מידת אפס ואם נחלק את A לאיחוד בן-מניה על רכיבי הקשות הנוגעים ונפעיל את הטיעון על קbowות חסומות נקבע את הטענה. \square

13.2 משפט לב הגזירה

משפט 13.2.1 (משפט לב הגזירה): תהינה λ . μ מידות רדון על \mathbb{R}^d ו- $A \subseteq \mathbb{R}^d$ קבוצה מדידה וחסומה ו- $\infty < t <$

1. אם $x \in A$ אז $\underline{D}(\mu, \lambda, x) \leq t \cdot \lambda(A)$
2. אם $x \in A$ אז $\overline{D}(\mu, \lambda, x) \geq t \cdot \lambda(A)$

הוכחה: נוכיח את (1) ו-(2) הוא אנלוגי.

1. **כיסוי בסיקובייז'**: יהיו $\varepsilon > 0$ קיים כיסוי בסיקובייז' \mathcal{F} של A המקיים

$$(1) \forall B \in \mathcal{F}, \frac{\mu(B)}{\lambda(B)} < t + \varepsilon \quad (2) \forall x \in A, \inf\{r \mid B_r(x) \in \mathcal{F}\} = 0$$

2. **שימוש ברגולריות פנימית**: נבחר $U \subseteq A$ פתוחה עבורה מתקיים $\lambda(U) < \lambda(A) + \varepsilon$

3. **צמצום הכיסוי**: נזרק מ- \mathcal{F} את כל הcodורים שלא מוכלים ב- U והכיסוי החדש עדין מקיים את (2), ובפרט זה עדין כיסוי בסיקובייז' (בגלל (2))

4. **שימוש בטענה שראינו**: המשפט שראינו נובע שקיים תת-אוסף בן-מניה $\tilde{\mathcal{E}} \subseteq \mathcal{F}$ של codורי זרים בזוגות עם 0

5. **שימוש במונוטוניות**:

$$\begin{aligned} \mu(A) &\leq \mu\left(\bigcup \tilde{\mathcal{E}}\right) + \mu\left(A \setminus \bigcup \tilde{\mathcal{E}}\right) \stackrel{\text{תת-אחסיביות}}{\leq} \sum_{B \in \tilde{\mathcal{E}}} \mu(B) \stackrel{(2)}{\leq} \sum_{B \in \tilde{\mathcal{E}}} (t + \varepsilon)\lambda(B) \stackrel{(**)}{=} (t + \varepsilon) \cdot \lambda\left(\bigcup \tilde{\mathcal{E}}\right) \\ &\stackrel{(*)}{\leq} (t + \varepsilon)\lambda(U) \stackrel{(*)}{\leq} (t + \varepsilon)(\lambda(A) + \varepsilon) = t \cdot \lambda(A) + \varepsilon(\lambda(A) + \varepsilon + t) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} t \cdot \lambda(A) \end{aligned}$$

כאשר $(*)$ נובע מכך שהוא אוסף זר של codורים זרים בזוגות ומ- σ -אדיטיביות.

□

13.3 משפט הגזירה של לבג-בטיקוביץ'

משפט 13.3.1 (משפט הגזירה של לבג-בטיקוביץ'): תהיינה λ, μ מידות רדון על \mathbb{R}^d

- .1. קיימים ו壽命 $D(\mu, \lambda, x)$ -כמעט תמיד
- .2. $\mu \ll \lambda$ אם ורק אם $D(\mu, \lambda, x) < \infty$
- .3. אם $\mu \ll \lambda$ אז $D(\mu, \lambda, x) = \frac{d\mu}{d\lambda}$

הוכחה:

$$1. \text{ לכל } \infty < r < \infty, 0 \leq s < t < \infty \text{ נגיד}$$

$$A_{t,r} := \{x \in B_r(0) \mid \bar{D}(\mu, \lambda, x) \geq t\} \quad A_{s,t,r} := \{x \in B_r(0) \mid \underline{D}(\mu, \lambda, x) \leq s < t \leq \bar{D}(\mu, \lambda, x)\}$$

ומתקיים מטענה על גזירהו שראינו

$$t \cdot \lambda(A_{s,t,r}) \underset{\bar{D} \geq t}{\leq} \mu(A_{s,t,r}) \underset{\underline{D} \leq s}{\leq} \cdot \lambda(A_{s,t,r})$$

ומהיות $t < r$ ו- $\lambda(A_{s,t,r}) = 0$ הרי ש- $s < t$, $r < \bar{D}(\mu, \lambda, x)$

$$t \cdot \lambda(A_{t,r}) \leq \mu(A_{t,r}) \leq \mu(B_r(0)) < \infty$$

נסמן

$$A_{\infty,r} := \{x \in B_r(0) \mid \bar{D}(\mu, \lambda, x) = \infty\}$$

ולכן, מטענו של סדרות יורדות נסיק

$$\lambda(A_{\infty,r}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(A_{n,r}) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mu(B_r(0)) = 0$$

או

$$\{x \in B_r(0) \mid \bar{D}(\mu, \lambda, x) = 0 \text{ או } D(\mu, \lambda, x) \neq 0\} = A_{\infty,r} \bigcup_{s < t \in \mathbb{Q}} A_{s,t,r}$$

זה איחוד בן-מניה של קבוצות מ- λ -מידה אפס ולכן זה נכון $\lambda(A_{\infty,r}) = 0$

- .1. אם $\lambda \ll \mu$ אז $\lambda(A_{\infty,r}) = 0$ \Rightarrow $\lambda(A) = 0$
- .2. אם $\lambda \ll \mu$ אז $\lambda(A) = 0$ \Rightarrow $\lambda(A_{\infty,r}) = 0$

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ k \in \mathbb{N}}} A_{n,k}\right)$$

כאשר

$$A_{n,k} := \{x \in A \cap B_k(0) \mid \underline{D}(\mu, \lambda, x) \leq n\}$$

ולכן מטענה שראינו נובע

$$\mu(A_{n,k}) \leq n \cdot \lambda(A_{n,k}) \leq n \cdot \lambda(A) = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0 \Rightarrow \mu \ll \lambda$$

תהי $B \subseteq \mathbb{R}^d$ מדידה והסומה כלשהו ונראה ש- $\int_B D(\mu, \lambda, x) d\lambda \leq \mu(B)$ כאשר $\mu \ll \lambda$.

$$B_p := \{x \in B \mid t^p \leq D(\mu, \lambda, x) \leq T^{p+1}\} \quad B_+ := \{x \in B \mid 0 < D(\mu, \lambda, x) < \infty\} = \bigcup_{p \in \mathbb{Z}} B_p$$

או

$$\int_B D(\mu, \lambda, x) d\lambda \stackrel{(1)}{=} \int_{B_+} D(\mu, \lambda, x) d\lambda = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \int_{B_p} D(\mu, \lambda, x) d\lambda \leq \sum_{p \in \mathbb{Z}} t^{p+1} \lambda(B_p) \stackrel{(*)}{\leq} \sum_{p \in \mathbb{Z}} t^{p+1} \left(\frac{1}{t^p} \mu(B_p) \right) = t \sum_{p \in \mathbb{Z}} \mu(B_p) \leq t \mu(B)$$

כאשר (1) נובע מסעיף (1) ומכך שזורקנו קבוצה עליה האינטגרנד הוא אפס ו- (\star) נובע מהטענה שראינו על גזירה. כאשר $1 \searrow t$ נקבל את הטענה עוזר.

אם $\lambda \ll \mu$ אז מ-(1) והחלפת תפקדים בין λ ו- μ נסיק $D(\lambda, \mu, x) < 0$ μ -כמעט תמיד ולבסוף $\mu(B) = \mu(B_+)$ ולבסוף $\mu(B) < \infty$ μ -כמעט תמיד ולבסוף $\mu(D(\mu, \lambda, x) < 0)$ ולבסוף $\lambda \ll \mu$ הרי ש-

נשאיף את $1 \searrow t$ ונקבל שוויון ואת (3).

□

13.4 משפט הגזירה של לבג לפונקציה אינטגרבילית מקומית

משפט 13.4.1 (משפט הגזירה של לבג עבור פונקציה אינטגרבילית מקומית): תהי λ מידת רצון ב- \mathbb{R}^d ו- \mathbb{C} : $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ אינטגרבילית מקומית (כלומר לכל קבוצה מדידה וחסומה $E \subseteq \mathbb{R}^d$ מתקיים $(f \cdot \mathbf{1}_E) \in L^1(\lambda)$). אז עבור λ -כמעט כל $x \in \mathbb{R}^d$ מתקיים

$$\frac{1}{\lambda(B_r(x))} \int_{B_r(x)} f d\lambda \xrightarrow[r \rightarrow 0]{} f(x)$$

בפרט לכל $A \subseteq \mathbb{R}^d$ מדידה מתקיים λ -כמעט תמיד

$$\frac{\lambda(B_r(x) \cap A)}{\lambda(B_r(x))} \xrightarrow[r \rightarrow 0]{} \mathbf{1}_A$$

הוכחה: מספיק להוכיח עבור פונקציות א-שליליות אינטגרביליות מקומית $f : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty]$. אז עבור המידה λ היא מידת רצון וכן $f = f d\lambda = \frac{d\mu}{d\lambda}$ וממשפט הגזירה של לבג-בטיקוביץ' קיבל $D(\mu, \lambda, x) = f(x)$.

$$\frac{\int_{B_r(x)} f d\lambda}{\lambda(B_r(x))} = \frac{\mu(B_r(x))}{\lambda(B_r(x))} \xrightarrow[r \rightarrow 0]{} D(\mu, \lambda, x) = f(x)$$

□

13.5 משפט הגזירה של לבג (מהתרגול)

משפט 13.5.1 (משפט הגזירה של לבג): תהי $f \in L^1([a, b])$. אזי הפונקציה $F(x) = \int_a^x f d\lambda$ גזירה כמעט בכל מקום ומקיימת עבור כמעט כל $x \in [a, b]$ (ביחס למידת לבג).

הוכחה: נראה שכאשר $x \in [a, b]$ מתקיים

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f d\lambda = f(x)$$

אם f רציפה אז זה המשפט היסודי ולכן נניח שה- f חסומה. לפי משפט לוין לכל $N \in \mathbb{N}$ יש קבוצה A_n כך ש- $\lambda(A_n) < \frac{1}{n}$ ופונקציה רציפה g_n כך שמחוץ ל- A_n , $f = g_n$ מתחכדות ונשען λ מידת לבג מצומצמת ל- A_n .

שימוש במשפט הגזירה של בסיקוביין: מהו $\lambda(A_n) = \frac{d\lambda_n}{d\lambda}$, ממשפט הגזירה של בסיקוביין?

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lambda_n((x-h, x+h))}{\lambda((x-h, x+h))} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lambda(A_n \cap (x-h, x+h))}{2h} = \mathbb{1}_{A_n}(x) = 0$$

אם $x \in A_n^c$

$$\left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f d\lambda - \frac{1}{h} \int_x^{x+h} g d\lambda \right| \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f-g| d\lambda = \frac{1}{h} \int_{A_n \cap (x, x+h)} |f-g| d\lambda$$

חסומה ב- $[a, b]$ כפונקציה רציפה ו- f חסומה מהגנזה ולכן קיימים $M > 0$ כך שמתקיים $|f-g| < M$, כלומר

$$\frac{1}{h} \int_{A_n \cap (x, x+h)} |f-g| d\lambda \leq M \cdot \frac{\lambda(A_n \cap (x-h, x+h))}{h}$$

אgap ימין שווה ל-0 כאשר $h \rightarrow 0$ ולכן אם ניקח גבול נקבל

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f d\lambda - \frac{1}{h} \int_x^{x+h} g d\lambda \right| = 0 \implies \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f d\lambda = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} g d\lambda = g(x) = f(x)$$

קיבלו את השוויון שרצינו לכל $x \in A_n^c$ ומאהר נוכל לקחת את A_n להיות עם מידת קטנה כרצונו, כמעט בכל $x \in [a, b]$ יהיה באחת מ-

והטענה נcona עבר f חסומה.

עבור f כללית: נסמן לכל $N \in \mathbb{N}$ את $f_n = \mathbb{1}_{|f| < n} \cdot f$ ומשפט הגזירה של בסיקוביין (על המדידות $d\lambda$) מתקיים כמעט בכל $[a, b]$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f-f_n| d\lambda \leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{2h} \int_x^{x+h} |f-f_n| d\lambda = |f(x)-f_n(x)|$$

אgap ימין הוא אפס כמעט בכל $x \in [a, b]$ או $|f|^{-1}(\{\infty\})$ ומאחר קבוצה קטנה אפס ולכן כמעט כמעט בכל $x \in [a, b]$ נמצא עבור n כלשהו ולכן

$$f(x) = f_n(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f_n(x) d\lambda = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(x) d\lambda$$

□

14 מרחבי מכפלה

14.1 משפט פובייני

משפט 14.1.1 (משפט פובייני): יהיו (X, \mathcal{A}, μ) ו- (Y, \mathcal{C}, ν) מרחבי מידה σ -סופיים. הינה $f : X \times Y \rightarrow [0, \infty]$ מדידה, איזי ו- ν - μ -מדידות (בהתאם) לכל x ו- y . תהי $\int f d(\mu \times \nu) < \infty$.

$$\int f d(\mu \times \nu) = \int \left(\int f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y) = \int \left(\int f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x)$$

2. אם מדידה ומקיימת $\int |f_x| d\nu < \infty$ אז $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$ מדידה ו- ν - μ -כמעט בכל $x \in X$ ו- $y \in Y$ ומתקיים $f^y \in L^1(\mu)$ איזי $f \in L^1(\mu \times \nu)$ וגם $f_x \in L^1(\nu)$ כמעט בכל $x \in X$ ו- $y \in Y$.

$$\int f d(\mu \times \nu) = \iint f d\mu d\nu = \iint f d\nu d\mu$$

הוכחה:

1. הוכחנו את הטענה עבור פונקציות מציניות $\varphi, \psi \in \mathcal{C}(Q)$ ולכן זה נכון עבור פונקציות פשוטות (סכום סופי של פונקציות מציניות).

תהי $f : X \times Y \rightarrow [0, \infty]$ מדידה ותהי $(s_n)_{n=1}^\infty$ סדרה של פונקציות פשוטות שמתכנסות ל- f . ממשפט ההתקנשות המונוטונית, הפונקציות

$$\varphi(x) = \int f_x d\nu \quad \psi(y) = \int f^y d\nu$$

הן גבולות עליים של

$$\varphi_n(x) = \int (s_n)_x d\nu \quad \psi_n(y) = \int (s_n)^y d\nu$$

ואילו צירופים לינאריים של פשוטות ולכל n φ_n, ψ_n מדידות ולכל גם φ, ψ .

נעשה שימוש נסוף במשפט ההתקנשות המונוטונית ייתן מ- ψ שמתקיים $\varphi_n \nearrow \varphi, \psi_n \nearrow \psi$ שמתקיים

$$\int \varphi d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \varphi_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \psi_n d\nu = \int \psi d\nu$$

ומתקיים השוויון

$$\int f d(\mu \times \nu) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n d(\mu \times \nu) = \int \varphi d\mu = \int \psi d\nu$$

2. נפעיל את (1) עם $|f|$

3. נפעיל את (1) עם הפירוק של פונקציות מרוכבות לסכום אי-שלילי.

$$f = u + iv = u_+ - u_- + i(v_+ - v_-)$$

ומכך שמתקיים $\int |f|^y d\mu d\nu < \infty$ גורר שמתקיים $\int |f| d\mu d\nu < \infty$ וכנ"ל ההפוך.

□

מסקנה 14.1.1: אם $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$ מדידה ומקיימת $\int \int |f(x, y)| d\mu(x) d\nu(y) < \infty$ אז $\int f d(\mu \times \nu) = \int \int f d\mu d\nu$.

הוכחה: נובע ישרות מ- $(2) + (3)$ במשפט פובייני.

14.2 תנאי שקול לפונקציה מדידה על מרחב מכפלה

משפט 14.2.1 (תנאי שקול לפונקציה מדידה על מרחב מכפלה): תהי $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y \times Z, \mathcal{B} \otimes \mathcal{C})$: העתקה ותהיינה

$$\pi_Y : Y \times Z \rightarrow Y \quad \pi_Z : Y \times Z \rightarrow Z$$

העתקות הקונוגיות. או f מדידה אם ורק אם ההרכבה שלה עם כל הטליה על מרחב המכפלה היא מדידה.

הוכחה: \Leftarrow נניח ש- f מדידה ונרצה להראות ש- $f \circ \pi_Y \circ f^{-1}$ מדידות אבל זה נכון כי ראיינו ש- $\pi_Z \circ \pi_Y \circ f$ פונקציות מדידות היא תמיד מדידה.

\Rightarrow נניח ש- $\pi_Z \circ f$, $\pi_Y \circ f$, $\pi_Y \circ f^{-1}$ מדידות ונראה ש- f מדידה.

עלינו להראות ש- $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$ לכל $E \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{C}$, או נגיד $R := \{B \times C \mid B \in \mathcal{B}, C \in \mathcal{C}\}$ ויהי $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$ לכל $E \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{C}$ ואמנם נסתכל על המקור תחת f נקבל

$$f^{-1}(B \times C) = f^{-1}(\pi_Y^{-1}(B) \cap \pi_Z^{-1}(C)) = f^{-1}(\pi_Y^{-1}(B)) \cap f^{-1}(\pi_Z^{-1}(C)) = (\pi_Y \circ f)^{-1}(B) \cap (\pi_Z \circ f)^{-1}(C)$$

אבל מההנחה, $f \circ \pi_Y$ מדידה ולכן $(\pi_Y \circ f)^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ ובאופן דומה $(\pi_Z \circ f)^{-1}(C) \in \mathcal{A}$

היות וחיתוך סופי של קבוצות מדידות הוא מדיד (מהגדרת ה- σ -אלגברה) נובע כי $(\pi_Y \circ f)^{-1}(B) \cap (\pi_Z \circ f)^{-1}(C) \in \mathcal{A}$, וזה נכון לכל $R \in \mathcal{R}$ ולכן f מדידה. \square