# פתרון מטלה 09 — פונקציות מרוכבות, 80519

7 בינואר 2026

## שאלה 1

בכל אחד מהסעיפים נקבע האם קיימת פונקציה שלמה (הולומורפית ב־$\mathbb{C}$) המקיימת את התנאי הנתון. אם כן, נמצא אותה ואם לא נפריך.
נשתמש במשפט היחידות השני: אם $G$ תחום ו־$f \in \mathrm{Hol}(G)$ ונניח שקיים $z_0 \in G$ כך שיש סדרה $(z_n)_{n=1}^{\infty} \subset G$ כך ש־$z_0 \to z_n$.
אם לכל $n$, $f(z_n) = 0$ אז $f \equiv 0$.

### סעיף א'

$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{(-1)^n}{n}$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

*הוכחה:* נטען שלא קיימת פונקציה כזאת כי עבור כל $n \in \mathbb{N}$ זוגי מתקיים

$$f\left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2n}$$

כלומר זאת העתקת הזהות, אז נגדיר

$$g(z) := f(z) - z$$

ונסתכל על הסדרה $z_n = \frac{1}{2n}$, נקבל

$$g\left(\frac{1}{2n}\right) = f\left(\frac{1}{2n}\right) - \frac{1}{2n} = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

נפעיל את משפט היחידות השני על $g$ ונקבל $g \equiv 0$, כלומר $f(z) = z$, אבל עבור $n = 1$ נקבל

$$f\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{(-1)^1}{1} = -1 \neq 1$$

וזאת סתירה. $\square$

### סעיף ב'

$f(n) = (-1)^n n$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

*הוכחה:* כידוע, $e^{i\pi} = -1$ ולכן עם עיקרון דה־מואבר מההרצאה ראשונה

$$f(n) = (-1)^n n = \left(e^{i\pi}\right)^n n = e^{i\pi n} n$$

כלומר $f$ היא שלמה כהרכבה ומכפלה של פונקציות שלמות. $\square$

### סעיף ג'

$f\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n}$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

*הוכחה:* ראשית נשים לב שמתקיים

$$f(0) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n^2}\right) = 0$$

אם נניח בשלילה שקיימת $f$ כזאת אז היא צריכה להיות גזירה בראשית, כלומר

$$f'(0) = \lim_{n\to\infty} \frac{f\left(\frac{1}{n^2}\right) - f(0)}{\frac{1}{n^2} - 0} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} n = \infty$$

וזאת סתירה, אז אין אחת כזאת. $\square$

### סעיף ד'

$f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{n}{n+1}$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

*הוכחה:* מתקיים

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{n}{n+1}=\frac{1}{\frac{1}{n}+1}$$

ולכן אם נגדיר

$$g(z):=\frac{1}{z+1}$$

$f,g$ אנליטיות ב־$\mathbb{C}\setminus\{-1\}$ ואם נבחר $z_n=\frac{1}{n}$ לכל $n\in\mathbb{N}$ ממשפט היחידות השני נקבל $f(z)=g(z)$.

כלומר

$$f(z)=\frac{1}{z+1}$$

אבל

$$\lim_{z\to-1}\frac{1}{z+1}=\infty$$

אז $g(z)$ לא הולומורפית ב־$\mathbb{C}$ ולכן בוודאי לא שלמה ולא ייתכן שיש $f$ שלמה כזאת $\square$

## שאלה 2

בכל סעיף נמצא את התחום בו ניתן לפתח את הפונקציה לטור לורן סביב הנקודה הנתונה ונמצא את הפיתוח.

טור לורן $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$ מתכנס בטבעת מהצורה

$$A_{r_-}^{r_+}(a) := \{z \in \mathbb{C} \mid r_- < |z-a| < r_+\}$$

עבור $0 \le r_- < r_+ \le \infty$.

### סעיף א'

$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2}$ סביב $z_0 = i$.

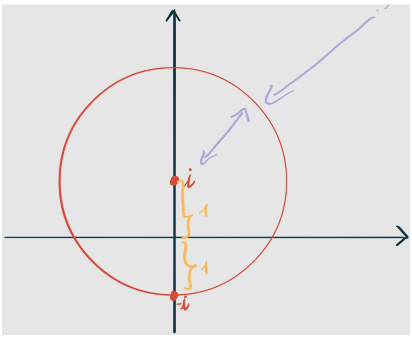
*פתרון:* ראשית $f$ לא מוגדרת ב־$\pm i$ שכן

$$\left(z^2+1\right)^2 = ((z-i)(z+i))^2 = (z-i)^2(z+i)^2$$

וזו נקודה סינגולרית מסוג קוטב שכן

$$\lim_{z\to i}\left|\frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2}\right| = \left|\frac{1}{0\cdot(2i)^2}\right| = \infty$$

ולכן יש לנו שני תחומים שבהם הטור מתכנס $A_0^2$ שבו הטור לורן מתלכד עם הטור טיילור ו־$A_2^\infty$.




איור 1: המחשה לתחום התכנסות

ראשית ניזכר בפיתוח טיילור הידוע

$$(\star)\ \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

אז אם נכתוב

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2} = \frac{1}{((z+i)(z-i))^2} = (z-i)^{-2}\cdot\frac{1}{(z+i)^2} = (z-z_0)^{-2}\cdot\frac{1}{(z+i)^2}$$

זה מבנה של טור טיילור

$$(x-x_0)^k\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^{n-k}$$

אז נפתח את טור טיילור של $\frac{1}{(z+i)^2}$ ונרצה להשתמש ב־$(\star)$ ובאריתמטיקה של טורי טיילור עם הרכבה.

נשים לב שניתן לכתוב

$$\frac{1}{(z+i)^2} = \frac{1}{(2i+(z-i))^2} = \frac{1}{\left(2i\cdot\frac{1}{2i}(2i+(z-i))\right)^2} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2i}(z-i)\right)^2}$$

נתעלם כרגע מה־$-\frac{1}{4}$ ונחזיר אותו בסוף התהליך כסקלר.

כמו־כן

$$\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2i}(z-i)\right)^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{-2i}{1+\frac{1}{2i}(z-i)}\right)$$

ולכן עם $(\star)$ ומהרכבה של פולינומי טיילור

$$\begin{aligned}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2i}(z-i)\right)^2}&=\sum_{m=1}^{\infty}(-2i)\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{2i}(z-i)}\right)\cdot(-1)^m\\&=(-2i)\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\cdot(2i)^{-m}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z-i)^m\\&=\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\cdot(2i)^{-(m+1)}\cdot m\cdot(z-i)^{m-1}\\&=\sum_{m=0}^{\infty}(-2i)^{-m}\cdot(m+1)\cdot(z-i)^m\end{aligned}$$

כלומר מכך ש־$z_0=i$ ועם ההחזרה של $-\frac{1}{4}$

$$f(z)=(z-z_0)^{-2}\cdot\frac{1}{(z+i)^2}=(z-z_0)^{-2}\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot(-2i)^{-m}\cdot(m+1)\cdot(z-z_0)^m$$

$$=-\frac{1}{4}\sum_{m=0}^{\infty}(-2i)^{-m}\cdot(m+1)\cdot(z-z_0)^{m-2}\underset{n=m+2}{=}-\frac{1}{4}\sum_{n=-2}^{\infty}(-2i)^{-n+2}\cdot(n+3)\cdot(z-z_0)^n$$

היה יכול להיות יותר קצר אם היינו משתמשים בפיתוח טיילור של סדרה בינומיאלית (היה מקצר מ־"כמו־כן").
עבור $A_2^{\infty}$ התהליך דומה אך שונה כי $(\star)$ נכון רק עבור $x\in(-1,1)$.
אז

$$\frac{1}{(z+i)^2}=\frac{1}{(z-i+2i)^2}=\frac{1}{(z-i)^2\left(1+\frac{2i}{z-i}\right)^2}$$

$$f(z)=\frac{1}{(z-i)^4}\left(1+\frac{2i}{z-i}\right)^{-2}$$

ונשתמש בפיתוח טיילור של סדרה בינומיאלית שלילית כי בתחום זה הפרמטר קטן מ־1 בערך מוחלט.
אז

$$\binom{-2}{k}=(-1)^k(k+1)$$

ולכן

$$(1+x)^{-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^n$$

ובמקרה שלנו

$$\left(1+\frac{2i}{z-i}\right)^{-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)\left(\frac{2i}{z-i}\right)^n$$

ובסך־הכל

$$f(z)=\frac{1}{(z-i)^4}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)\left(\frac{2i}{z-i}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(2i)^n(z-i)^{n-4}$$

$\square$

## סעיף ב'

$f(z)=\frac{z^2-6z+10}{z^2-7z+12}$ סביב $z_0=2$.

*פתרון:* ניתן לכתוב

$$z^2-7z+12=(z-3)(z-4)$$

וכן

$$f(z)=\frac{z^2-6z+10}{z^2-7z+12}=\frac{z^2-7z+12+z-2}{z^2-7z+12}=1+\frac{z-2}{(z-3)(z-4)}=1+\frac{1}{z-3}-\frac{1}{z-4}$$

ולכן הנקודות הסינגולריות הן $z=3, z=4$ והמרחק מ-$z_0$ הוא

$$|3-2|=1,\ \ |4-2|=2$$

אז יש לנו שלושה תחומים בהם אנחנו יכולים לפתח

$$|z-2|<1,\ \ 1\leq|z-2|\leq 2,\ \ |z-2|>2$$

ונכתוב כביטוי של $z-2$ את $f$

$$\frac{1}{z-3}=\frac{1}{(z-2)-1},\ \ \frac{1}{z-4}=\frac{1}{(z-2)-2}$$

נבחן את התחום $|z-2|<1$: אם $w=z-2$ נקבל

$$f(z)=1+\frac{1}{w-1}-\frac{1}{w-2}$$

וניתן לכתוב

$$\frac{1}{w-1}=-\frac{1}{1-w}$$

ולהשתמש בנוסחה לטור גיאומטרי עבור $|x|<1$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

ומהתחום $|w|=|z-2|<1$ ונקבל

$$\frac{1}{1-w}=\sum_{n=0}^{\infty}w^n\Longrightarrow\frac{1}{w-1}=-\sum_{n=0}^{\infty}w^n$$

ובאופן דומה

$$\frac{1}{w-2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{w}{2}}$$

ומתקיים

$$|w|<1\Longrightarrow\left|\frac{w}{2}\right|<\frac{1}{2}<1$$

ולכן

$$\frac{1}{1-\frac{w}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{w}{2}\right)^n\Longrightarrow\frac{1}{w-2}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{w}{2}\right)^n$$

כלומר

$$f(z)=1-\sum_{n=0}^{\infty}w^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{w}{2}\right)^n=1-\sum_{n=0}^{\infty}(z-2)^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-2}{2}\right)^n$$

נעבור לתחום הבא בו $1 < |z-2| < 2$: כדי שנמשיך עם הטור הגיאומטרי צריך $|q| < 1$, אז ממה שראינו מקודם (צריך לתקף רק את המקרה הראשון)

$$\frac{1}{1-w} = \frac{1}{-w(1-\frac{1}{w})} = -\frac{1}{w}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{w}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{w^{n+1}} = -\sum_{n=1}^{\infty}w^{-n}$$

ולכן במקרה זה

$$f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}w^{-n} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{w}{2}\right)^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(z-2)^{-n} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-2}{2}\right)^n$$

וזה בעצם פיתוח לורן ולא פיתוח טיילור.

אחרון חביב נשאר לחשב את הפיתוח באינסוף כלומר $2 < |w|$, כלומר

$$|w| > 1 \Longrightarrow \left|\frac{1}{w}\right| < 1,\ \ |w| > 2 \Longrightarrow \left|\frac{2}{w}\right| < 1$$

בשביל המחובר הראשון נשתמש במקרה הקודם וצריך לפקטר את $-\frac{w}{2}$ כי $\left|\frac{w}{2}\right|>1$: ניקח את המינוס מהמקדם של כפול מינוס חצי ונקבל

$$-\frac{1}{1-\frac{w}{2}} = -\frac{1}{\frac{w}{2}\left(\frac{2}{w}-1\right)} = \left(\frac{w}{2}\left(1-\frac{2}{w}\right)\right)$$

ולכן

$$\frac{2}{w}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{w}} = \frac{2}{w}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{w}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{w^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{w}\right)^n$$

ובסך־הכל

$$f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}w^{-n} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{w}\right)^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(z-2)^{-n} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{z-2}\right)^n$$

□

## שאלה 3

תהיי $f$ שלמה ולא קבועה.

### סעיף א'

נוכיח ש־$f(\mathbb{C})$ צפופה ב־$\mathbb{C}$.

*הוכחה:* ראשית בגלל ש־$f$ שלמה ואיננה קבועה נובע ממשפט ליוביל שהיא לא חסומה (כי אם בשלילה $f$ הייתה חסומה היינו עומדים בכל תנאי משפט ליוביל והיינו מקבלים ש־$f$ קבועה, בסתירה לכך שהיא לא).

בשביל צפיפות עלינו להוכיח שלכל $w \in \mathbb{C}$ ו־$\varepsilon > 0$ יש $z \in \mathbb{C}$ כך ש־$|f(z) - w| < \varepsilon$.

נניח בשלילה ש־$f(\mathbb{C})$ איננה צפופה ב־$\mathbb{C}$ ולכן קיימים $w_0 \in \mathbb{C}$ ו־$\varepsilon > 0$ כך שלכל $z \in \mathbb{C}$ מתקיים $|f(z) - w_0| \geq \varepsilon$.

נגדיר

$$h(z) := f(z) - w_0, \ g(z) := \frac{1}{h(z)} = \frac{1}{f(z) - w_0}$$

ומכך ש־$h(z)$ אף־פעם לא מתאפסת מההנחה אז $g(z)$ מוגדרת היטב.

בנוסף, מכך ש־$f$ שלמה והמכנה אינו מתאפס נובע כי גם $g(z)$ שלמה כהרכבה של פונקציות שלמות ומתקיים

$$|g(z)| = \left| \frac{1}{f(z) - w_0} \right| \leq \frac{1}{\varepsilon}$$

כלומר, $g(z)$ היא פונקציה קבועה ולכן אנחנו עומדים בתנאי משפט ליוביל ולכן קיים $c \in \mathbb{C}$ כך שמתקיים

$$\forall z \in \mathbb{C}, g(z) = c$$

ונובע מכך

$$g(z) = c \iff \frac{1}{f(z) - w_0} = c \iff f(z) = \frac{1}{c} + w_0$$

אבל זה בידיוק אומר ש־$f(z)$ היא פונקציה קבועה וזאת סתירה ולכן $f(\mathbb{C})$ צפופה ב־$\mathbb{C}$. $\square$

### סעיף ב'

נוכיח כי אם $g \in \mathrm{Hol}(U_a^*)$ בעלת סינגולריות עיקרית ב־$a \in \mathbb{C}$ אז ל־$f \circ g$ יש סינגולריות עיקרית ב־$a$.

*הוכחה:* מהנתון של־$g$ יש סינגולריות עיקרית ב־$a \in \mathbb{C}$, ממשפט קזוראטי-ויירשטראס נובע כי $g(U_a^*)$ היא צפופה ב־$\mathbb{C}$.

$f$ היא שלמה ולא קבועה וצפופה ב־$\mathbb{C}$ ולכן $f(g(U_a^*))$ צפופה ב־$\mathbb{C}$ (כי פונקציה רציפה על קבוצה צפופה משמרת צפיפות).

לא יכולה להיות נקודה סינגולריות סליקה: סינגולריות סליקה קיימת אם ורק אם

$$\exists M > 0, \ \exists \delta > 0 \ |(f \circ g)(z)| \leq M \ \forall 0 < |z - a| < \delta$$

כלומר

$$(f \circ g)(U_a^*) \subset \{w \in \mathbb{C} \mid |w| \leq M\} := \overline{D(0, M)}$$

אבל $\overline{D(0, M)}$ הוא דיסק חסום וסגור ולכן קומפקטי ב־$\mathbb{C}$.

אבל $K \subset \mathbb{C}$ הוא צפוף ב־$\mathbb{C}$ אם ורק אם לכל $z \in \mathbb{C}$ היא נקודה גבולית ב־$K$, ואם $K$ הוא גם קומפקטי וגם צפוף אז הסגור שלו הוא עצמו מקומפקטיות אבל גם $\mathbb{C}$ מצפיפות, כלומר $K = \mathbb{C}$ שזו לא קבוצה קומפקטית ולכן סתירה, כלומר אף קבוצה קומפקטית איננה צפופה ב־$\mathbb{C}$ ו־$(f \circ g)(U_a^*)$ היא צפופה כפי שראינו ולכן נקבל סתירה וזו אינה נקודה סינגולרית עיקרית.

לא יכולה להיות נקודה סינגולרית מסוג קוטב: אם היה קוטב, היה מתקיים

$$\exists R > 0, \ \exists \delta > 0 \ |(f \circ g)(z)| > R \ \forall 0 < |z - a| < \delta$$

כלומר

$$(f \circ g)(U_a^*) \subset \{w \in \mathbb{C} \mid |w| > R\}$$

אבל $\{w \in \mathbb{C} \mid |w| > R\}$ איננה צפופה כי המשלים שלה הוא $\{w \in \mathbb{C} \mid |w| \leq R\}$ שהיא קבוצה פתוחה לא ריקה וזו סתירה לצפיפות.

אז $a$ היא נקודת סינגולריות של $f \circ g$ שאיננה סליקה או קוטב ולכן נקודת סינגולריות עיקרית. $\square$

## שאלה 4

תהיינה $f, g$ שלמות ונניח שקיים קבוע $C > 0$ כך שלכל $z$ מתקיים $|f(z)| \leq C|g(z)|$.
נוכיח כי קיים $\lambda \in \mathbb{C}$ עם $|\lambda| \leq C$ כך ש־$f(z) = \lambda g(z)$.

*הוכחה:* נגדיר

$$E = \{z \mid g(z) \neq 0\}$$

ונגדיר $h : E \to \mathbb{C}$ על־ידי

$$h(z) := \frac{f(z)}{g(z)}$$

מהנתון

$$|h(z)| = \frac{|f(z)|}{|g(z)|} \leq C$$

כלומר $h$ חסומה בכל תחום הגדרתה.
תהיי $z_0 \in \mathbb{C} \setminus E$, כלומר $g(z_0) = 0$, מהנתון

$$(\star)\ |f(z)| \leq C|g(z)|$$

נובע כי הגבול

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)}$$

קיים וסופי: שכן מהיות $g$ שלמה, נקודות ההתאפסות שלה הן מבודדות, כלומר אם $g(z_0) = 0$ אז קיימת סביבה של $z_0$ שלכל $z$ בה, $g(z) \neq 0$.
מטענה שראינו, קיימים $m, n \geq 0$ ופונקציות הולומורפיות $F, G$ כך שמתקיים

$$g(z) = (z - z_0)^m G(z),\ \ G(z_0) \neq 0$$
$$f(z) = (z - z_0)^n F(z),\ \ F(z_0) \neq 0 \quad \text{or} \quad f \equiv 0$$

כאשר $m, n$ הם הסדרים של 0 של $f, g$ ב־$z_0$, בהתאמה.
אז מההנחה $(\star)$ נקבל

$$\left|(z - z_0)^n F(z)\right| \leq C\left|(z - z_0)^m G(z)\right| \iff |z - z_0|^{n-m} \leq C\frac{|G(z)|}{|F(z)|}$$

אם $F$ זהותית אפס לא נחלק וסיימנו. אחרת, $F(z_0) \neq 0$ ו־$G(z_0) \neq 0$ ולכן $\frac{|G(z)|}{|F(z)|}$ חסומה בסביבה של $z_0$.
אם $n > m$ אז $|z - z_0|^{n-m} \xrightarrow[z \to z_0]{} \infty$ וזו סתירה, אז $n \geq m$.
אז

$$\frac{f(z)}{g(z)} = (z - z_0)^{n-m}\frac{F(z)}{G(z)}$$

כאשר המנה היא הולומורפית כמנת פונקציות הולומורפיות ו־$n - m \geq 0$ ולכן

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \begin{cases} 0 & n > m \\ \frac{F(z_0)}{G(z_0)} & n = m \end{cases}$$

בכל מקרה הגבול קיים וסופי ובפרט נובע כי $z_0$ היא נקודה סינגולרית סליקה ולכן יש המשכה הולומורפית ל־$h$ ואז $h$ היא פונקציה שלמה על $\mathbb{C}$.
פונקציה שלמה וחסומה מקיימת את משפט ליוביל ולכן היא קבועה, כלומר קיימת $\lambda \in \mathbb{C}$ כך שמתקיים

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \ h(z) = \lambda \Longrightarrow f(z) = \lambda g(z)$$

בפרט מ־$(\star)$ נובע $|h| \leq C \Longrightarrow |\lambda| \leq C$. $\square$

## שאלה 5

תהיי $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ שלמה וחד־חד ערכית ונגדיר $g:\mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C}$ על־ידי $g(z)=f\left(\frac{1}{z}\right)$.

### סעיף א'

נוכיח שהסינגולריות של $g$ בראשית אינה סליקה.

*הוכחה:* נניח בשלילה כי $z=0$ היא נקודה סינגולרית סליקה ולכן קיימת לה המשכה הולומורפית, כלומר קיימת

$$\forall z\neq 0,\ \tilde{g}(z)=f\left(\frac{1}{z}\right)$$

ובפרט הגבול הבא קיים וסופי

$$\lim_{z\to 0} f\left(\frac{1}{z}\right)=\tilde{g}(0)$$

כאשר $z\to 0$ מתקיים $\frac{1}{z}\to\infty$ כלומר הגבול שקיים וסופי היינו

$$\lim_{w\to\infty} f(w)$$

נניח שהוא שווה ל־$L$ ונגדיר

$$h(w):=f(w)-L$$

אז $h$ היא שלמה ומתקיים

$$(\star)\ h(w)\xrightarrow[w\to\infty]{}0$$

אז $h$ חסומה על $\mathbb{C}$ ולכן ממשפט ליוביל ומ־$(\star)$ נובע כי $h\equiv 0$, כלומר $f(w)\equiv L$ וזו סתירה לחד־חד ערכיות ולכן $z=0$ איננה סינגולריות סליקה. $\square$

### סעיף ב'

נוכיח שהסינגולריות של $g$ בראשית אינה עיקרית.

*הוכחה:* נניח בשלילה שהסינגולריות בראשית היא עיקרית ולכן ממשפט קזוראטי-ויירשטראס $g(U_0^*)=f\left(\frac{1}{U_0^*}\right)$ היא צפופה ב־$\mathbb{C}$.

נגדיר

$$h(z):=f(z)-f(0)$$

אז $h$ שלמה כי $f$ שלמה ו־$h(0)=0$ ומהיות $f$ חד־חד ערכית נובע כי $0$ הוא המקור היחידי לאפס של $h$.

יתר על־כן, נובע כי הסדר של $0$ הוא $m\geq 1$ וסופי, כלומר קיימת פונקציה שלמה $H$ המקיימת

$$H(0)\neq 0,\ h(z)=z^m H(z)$$

מהצפיפות קיימת סדרה $(w_n)_{n=1}^{\infty}$ כך שמתקיים $f(w_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}f(0)$ ובפרט $h(w_n)\to 0$.

נגדיר

$$F(z):=\frac{h(z)}{z^m}=H(z)$$

אז $F$ שלמה ונקבל מכך ש־$|w_n|^m\to\infty$

$$F(w_n)=\frac{h(w_n)}{w_n^n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

אז $F$ חסומה על סדרה לא חסומה כלומר חסומה על כל $\mathbb{C}$ ולכן ממשפט ליוביל נקבל $F\equiv C$ עבור $C$ קבוע כלשהו אבל מהיות $F(w_n)\to 0$ נובע כי $C=0$ ולכן $H\equiv 0$ כלומר $h\equiv 0$ וזה אומר $f(z)\equiv f(0)$ בסתירה לחד־חד ערכיות, אז הראשית היא לא נקודה סינגולרית עיקרית. $\square$

### סעיף ג'

נסיק שקיימים קבועים $a \neq 0$ ו־$b$ כך ש־$f(z) = az + b$

*הוכחה:* מהסעיפים הקודמים נובע כי בראשית $z = 0$ היא נקודה סינגולרית מסוג קוטב של $g$.

אם יש ל־$g$ קוטב מסדר $m$ בראשית נובע

$$g(z) = \frac{c_{-m}}{z^m} + \frac{c_{-(m-1)}}{z^{m-1}} + \cdots + c_0 + c_1 z + \cdots$$

נציב $z = \frac{1}{w}$ ונקבל

$$f(w) = c_{-m} w^m + c_{-(m-1)} w^{m-1} + \cdots + c_0 + c_1 w^{-1} + \cdots$$

אבל $f$ שלמה ולכן כל החזקות השליליות של $w$ נעלמות (כי מהשלמות נובע הולומורפיות על כל $\mathbb{C}$ והולומורפיות גוררת שניתן להציג בצורה לוקאלית לפי טור טיילור) אז

$$f(w) = c_{-m} w^m + c_{-(m-1)} w^{m-1} + \cdots + c_0$$

כלומר $f$ היא פולינום מדרגה $m$.

נניח ש־$m \geq 2$, אז

$$f'(z) = m c_{-m} z^{m-1} + \cdots$$

הוא פולינום לא קבוע ולכן יש לו לפחות אפס אחד ב־$\mathbb{C}$ מטענה שראינו על קיום שורש.

אז עבור $z_0$ כלשהי מתקיים $f'(z_0) = 0$ אבל זה אומר ש־$f$ לא חד־חד ערכית בסביבה של $z_0$ $(\star)$ אבל $f$ חד־חד ערכית בכל תחומה אז $m = 1$ כי $f$ לא קבועה אז החזקה לא יכולה להיות 0 ולהיות פולינום קבוע.

אז $f(z) = az + b$ עבור $a \neq 0$ (אחרת זה שקול ל־$m = 0$ שראינו שלא ייתכן).

הסבר קצר על $(\star)$ כי אני לא זוכרת שראינו: בגלל ש־$f'(z_0) = 0$ אז $a_1 = 0$ ובגלל ש־$f$ לא קבועה אז קיים $\mathbb{N} \ni k \geq 2$ כך ש־$a_k \neq 0$ ולכן

$$f(z) = f(z_0) + a_k (z - z_0)^k + a_{k+1} (z - z_0)^{k+1} + \cdots \Longrightarrow f(z) = f(z_0) + (z - z_0)^k h(z)$$

כאשר $h(z)$ הולומורפית ו־$h(z_0) = a_k \neq 0$.

אז אם ננסה לפתור את המשוואה $f(z) = f(z_0) + \varepsilon$ עבור $\varepsilon \neq 0$ עם הפקטור שראינו לעיל על־ידי

$$(z - z_0)^k = \frac{\varepsilon}{h(z)}$$

וכאשר $\varepsilon \to 0$ אגף ימין שואף לאפס ולמשוואה $w^k = c$ עבור $c \neq 0$ יש ב־$\mathbb{C}$ בידיוק $k \geq 2$ פתרונות שונים, וזו סתירה לחד־חד ערכיות של $f$.

$\square$