פתרון מטלה 05 — פונקציות מרוכבות, 80519

26 בנובמבר 2025

שאלה 1

יהי $G \subseteq \mathbb{C}$ תחום ו־$f \in C^1(G,\mathbb{C})$. נראה ש־f הולומורפית אם ורק אם $\partial_{\overline{z}} f = 0$.

הוכחה:

$\Longleftarrow$ נניח כי f הולומורפית ונראה כי $\partial_{\overline{z}} f = 0$.

f הולומורפית ולכן היא מקיימת את משוואות קושי־רימן

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

כאשר $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ עבור $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

נציב באופרטור Wirtinger ונקבל

$$\partial_{\overline{z}} f = \frac{1}{2}(\partial_x f + i\partial_y f) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right) + i\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right) \underset{\text{C.R.E}}{=} 0$$

$\Longrightarrow$ נניח כי $\partial_{\overline{z}} f = 0$ ונראה כי f הולומורפית.

אם $\partial_{\overline{z}} f = 0$ אז גם החלק המדומה וגם החלק הממשי היינם 0, כלומר

$$\partial_{\overline{z}} f = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right)$$

כלומר

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

כלומר f מקיימת את משוואות קושי־רימן ולכן הולומורפית. $\square$

שאלה 2

תהיינה $f(z)=(z-1)^2$ ו־γ מסילה המתארת מעגל ברדיוס 1 סביב הראשית.

סעיף א'

נחשב את $L(f\circ\gamma)$.

פתרון: נכתוב פרמטריזציה של γ

$$\gamma(t)=\cos(t)+i\sin(t)=e^{it}$$

עבור $t\in[0,2\pi]$.

בהרצאה הגדרנו אורך של מסילה להיות

$$L(f\circ\gamma)=\int_a^b |f'(\gamma(t))||\dot{\gamma}(t)|dt$$

כאשר $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ ולכן

$$L(f\circ\gamma)=\int_a^b |f'(\gamma(t))||\dot{\gamma}(t)|dt=\int_0^{2\pi}|(-2(1-z))\circ(\cos(t)+i\sin(t))||i\cos(t)-\sin(t)|dt$$

$$=\int_0^{2\pi}|-2(1-\cos(t)-i\sin(t))||i\cos(t)-\sin(t)|dt=2\int_0^{2\pi}|1-\cos(t)-i\sin(t)||i\cos(t)-\sin(t)|dt$$

$$=2\int_0^{2\pi}\sqrt{(1-\cos(t)-i\sin(t))(1-\cos(t)+i\sin(t))}\sqrt{(i\cos(t)-\sin(t))(-i\cos(t)-\sin(t))}dt$$

$$=2\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos(t)}dt=2\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1-\cos(t))}dt=2\int_0^{2\pi}\sqrt{2\left(2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)}dt=4\int_0^{2\pi}\left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right|dt$$

מהיות $t\in[0,2\pi]$ אז $\frac{t}{2}\in[0,\pi]$ ובקטע זה $\sin(\frac{t}{2})\geq 0$ ולכן

$$2\int_0^{2\pi}2\left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right|dt=4\int_0^{2\pi}\sin\left(\frac{t}{2}\right)dt=\left[4\cdot\left(-2\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right)\right]_{t=0}^{t=2\pi}=-8\cos(\pi)+8\cos(0)=(-8)\cdot(-1)+8\cdot 1=16$$

נשים לב שיותר קצר לפתור את זה עם הביטוי בצורת אקספוננט:

$$L(f\circ\gamma)=\int_a^b|f'(\gamma(t))||\dot{\gamma}(t)|dt=\int_0^{2\pi}\left|(-2(1-z))\circ e^{it}\right|\left|ie^{it}\right|dt=2\int_0^{2\pi}\left|1-e^{it}\right|dt$$

$$=2\int_0^{2\pi}\sqrt{(1-\cos(t))^2+\sin^2(t)}dt=2\int_0^{2\pi}\sqrt{1-2\cos(t)+\cos^2(t)+\sin^2(t)}=2\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos(t)}dt$$

המשך החישוב זהה. $\square$

סעיף ב'

נראה שלא משנה באיזו פרמטריזציה של γ נשתמש עבור החישוב בסעיף א'.

פתרון: בסעיף א' בחרנו פרמטריזציה של γ המתקדמת נגד כיוון השעון, כאשר הפרמטריזציה עם כיוון השעון נתונה על־ידי $\gamma(t)=e^{-it}$.

במקרה שלנו זה לא משנה בגלל שהערך המוחלט במקרה זה נשאר 1:

$$L(f\circ\gamma^-)\int_0^{2\pi}\left|(-2(1-z))\circ e^{-it}\right|\left|-ie^{-it}\right|dt=2\int_0^{2\pi}\left|1-e^{-it}\right|dt=2\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(1-\cos^2(t)\right)^2+(-\sin(t))^2}$$

$$=2\int_0^{2\pi}\sqrt{1-2\cos(t)+\cos^2(t)+\sin^2(t)}=2\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos(t)}dt$$

$\square$

סעיף ג'

נחשב את השטח של $f(\{z \mid |z-1|<1\})$.

פתרון: נסמן $u=1-z$ ולכן $D=\{z \mid |z-1|<1\}=\{u \mid |u|<1\}$ ו־$f(z)=(1-z)^2 \implies w=u^2$ על דיסק היחידה.

כדי לפשט את האינטגרל, בדרך־כלל במשפט החלפת משתנה אנחנו עושים קורדינאטות פולאריות סביב הראשית אך הפעם נעשה קורדינאטות מוזזות ונניח ש־$z=1$ היא הראשית שלנו ולכן $z-1=re^{i\theta}$ וכן $0\le r<1$ (בגלל רדיוס הדיסק כמובן) וכן $r^2=|1-z|^2$ ו־$0\le\theta<2\pi$.

נשים לב ש־D קבוצה יפה מספיק (היא פתוחה ולכן מדידה) אז

$$\iint_D |f'(w)|^2 dD = \iint_D 4|z-1|^2 dD \underset{\text{משפט החלפת משתנה}}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^1 4r^2\cdot r dr d\theta = 4\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^3 dr = 4\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}d\theta = 2\pi$$

$\square$