

הכנה לבחן – משפטים והוכחות נבחרים – תורת המידה, 80517

25 בפברואר 2026



תוכן עניינים

4	מידה	1
4	תנאי מספיק בשבייל פונקציה מדידה	1.1
5	תנאי שקול לפונקציה מדידה	1.2
6	מדידות נשמרות תחת הפעלת sup/inf/limsup/liminf	1.3
7	תכונות בסיסיות של מידה	1.4
8	אנטגרציה	2
8	כל פונקציה מדידה יש סדרת פונקציות פשוטות שמתכנסת אליה	2.1
9	תכונות האינטגרל	2.2
11	משפט ההתקנסות המונוטונית	2.3
12	החלפת סדר אינטגרציה וסכום	2.4
13	קיים מידת אינטגרל	2.5
14	הлемה של פאטו	2.6
15	הлемה של בורל-קנטלי	2.7
17	משפט ההתקנסות הנשלטה	2.8
18	אי-שוויון מרקוב	2.9
19	קבוצות מדידה אפס	3
19	סדרת פונקציות כמעיטה-תמיד	3.1
20	תנאים שקולים לשלוות	3.2
21	תנאי שקול לפונקציה אפסה כמעיטה-תמיד	3.3
22	טענה על ממוצעי פונקציה	3.4
23	משפט ההצגה של ריס	4
23	משפט ההצגה של ריס – ייחודה	4.1
24	רגולריות ומידות רדון	5
24	תכונות מידת רדון על מרחב ס-קומפקטי	5.1
26	תנאים שגוררים שמידה היא מידת רדון	5.2
27	התכנסות הולשא- [*]	6
27	טענה מהבחן	6.1
28	מידות הסתברות	6.2
29	דינמיקה	7
29	משפט Krylov–Bogolyubov	7.1
30	שלושת העקרונות של Littlewood	8
30	משפט לוזין	8.1
31	משפט אגרוב/אגורוף	8.2
32	מרחבי L^p	9
32	אי-שוויון יאנגן	9.1
33	אי-שוויון הולדר ואי-שוויון מניקובסקי	9.2
34	C הוא מרחב פסודו-נורמי מעל (μ)	9.3
35	טענות חשובות מתרגילי הבית	9.4
36	לכל $[1, \infty] \ni p$, המרחב הנורמי $(L^p(\mu))_p$ הוא מרחב בند	9.5
37	(μ) צפופה ב- \mathcal{G}	9.6
38	קירוב על-ידי פונקציות רציפות	9.7
39	יחסים בין מידות	10
39	טענה שקולה לרציפות בהחלה במרחב סופי	10.1
39	טענה שקולה לרציפות בהחלה במרחב ס-סوفي	10.2
39	תנאי שקול למידת האפס	10.3
39	תנאי שקול לSigma-SIGNIFICANCY על מידות הוויזואיות	10.4

39	10.5 מסקנה מתרגילי הבית
40	11 מרחבי הילברט
40	11.1 משפט ההצגה של Riesz-Fréchet
41	11.2 אם μ אינה מידת האפס או יש מידה סופית ששකולה לה
42	12 נגורת רדון-ניקודים
42	12.1 משפט נגורת רדון-ניקודים-לבג
44	12.2 איך מחשבים נגורת רדון-ניקודים
45	13 גזירה של מידות רדון ב- \mathbb{R}^d
45	13.1 מסknות משפט הcisוי של בסיקוביץ'
46	13.2 משפט לב הגזירה
47	13.3 משפט הגזירה של לבג-בסטיקוביץ'
49	13.4 משפט הגזירה של לבג לפונקציה אינטגרבילית מקומית
50	13.5 משפט הגזירה של לבג (מהתרגול)
51	14 מרחבי מכפלה
51	14.1 משפט פוביי
52	14.2 תנאי שקול לפונקציה מדידה על מרחב מכפלה

1 מידה

1.1 תנאי מספיק לשכיל פונקציה מדידה

משפט 1.1.1 (תנאי מספיק לשכיל פונקציה מדידה): (X, \mathcal{A}) מרחב מדיד ו- (Y, τ) מרחב טופולוגי. אם $\sigma(\tau) := \mathbb{B}_Y$ היא σ -אלגברת בורל על Y או הפונקציה $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathbb{B}_Y)$ מדידה אם ורק אם המקור של כל קבוצה פתוחה ב- τ הוא מדיד, כלומר אם ורק אם לכל $\tau \in U \in \mathcal{A}$, $f^{-1}(U) \in \mathcal{A}$.

הוכחה: הכוון הראשון נובע ישירות מהגדרת הפונקציה המדידה (כי מהדרה לשכיל שהפונקציה תהיה מדידה נדרש שהמקור של כל קבוצה מדידה תחת f יהיה מדיד).

בכיוון השני, נסמן $\Omega := \{E \subseteq Y \mid f^{-1}(E) \in \mathcal{A}\}$.

מההנחה, כל $\tau \in U \in \mathcal{A}$ מקיים $f^{-1}(U) \subseteq \Omega$ ולכן $\Omega \subseteq \tau$ ומטענה שראינו נובע Ω היא σ -אלגברת.

מצד שני, σ -אלגברת בורל \mathbb{B}_Y היא σ -אלגברת הקטנה ביותר על Y שמכילה את τ ולכן $\Omega \subseteq \mathbb{B}_Y$ מתקיים $\Omega \subseteq f^{-1}(E)$ לכל $E \in \mathbb{B}_Y$ ולכן f מדידה לפי \mathbb{B}_Y . \square

1.2 תנאי שקול לפונקציה מדידה

משפט 1.2.1 (תנאי שקול לפונקציה מדידה): יהיו (X, \mathcal{A}) מרחב מדידה. אם f פונקציה אוזי מדידה אם ורק אם $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ לכל $\alpha \in \mathbb{R}$

הוכחה: \iff מיפוי המגדירה כי אם f מדידה לכל $E \in \mathcal{B}([-\infty, \infty])$ מתקיים $E \in \mathcal{A}$ כלומר, מתקיים $\alpha \in \mathbb{R}$ ביחסו, מתקיים $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$ ולכן בהינתן $\alpha \in \mathbb{R}$ מתקיים $f^{-1}((\alpha, \infty]) \in \mathcal{A}$.
 $f^{-1}((\alpha, \infty]) \in \mathcal{A} \iff \exists n \in \mathbb{N} \text{ כך ש } f^{-1}\left((\beta - \frac{1}{n}, \infty]\right) \subseteq (\alpha, \infty]$ \Rightarrow מספיק להראות שהמקור של כל אחת מהקבוצות

$$(\star) \quad (\alpha, \beta), \quad (\alpha, \infty], \quad [-\infty, \beta)$$

הוא מדיד, ואכן:
 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ מתקיים $\beta < \alpha$.

$$f^{-1}([\alpha, \beta)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}\left([\alpha, \beta - \frac{1}{n})\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}\left(\left(\beta - \frac{1}{n}, \infty\right]^c\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(f^{-1}\left(\left(\beta - \frac{1}{n}, \infty\right]\right)\right)^c \in \mathcal{A}$$

כאשר המעבר האחרון נובע מההנחה שלכל $\alpha \in \mathcal{A}$ מתקיים $f^{-1}((\alpha, \infty]) \in \mathcal{A}$ ולכן לכל $n \in \mathbb{N}$ בפרט עבור $\alpha = \beta - \frac{1}{n} \in \mathcal{A}$ נקבל $f^{-1}((\beta - \frac{1}{n}, \infty]) \in \mathcal{A}$.

אבל \mathcal{A} היא σ -אלגברה ולכן מצד אחד נקבל $(f^{-1}((\beta - \frac{1}{n}, \infty]))^c \in \mathcal{A}$ ולכל $n \in \mathbb{N}$ מצד שני $(f^{-1}((\beta - \frac{1}{n}, \infty]))^c \in \mathcal{A}$. זה סגור את שני המקורים הימניים.
 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ביחסן $\alpha < \beta$.

$$f^{-1}((\alpha, \beta)) = f^{-1}([\alpha, \beta) \cap (\alpha, \infty]) = f^{-1}([\alpha, \beta)) \cap f^{-1}((\alpha, \infty]) \in \mathcal{A}$$

כאשר המעבר האחרון נובע מכך ש- σ -אלgebra סגורה ליחסותיים סופיים.

כעת, אם $U \subseteq [-\infty, \infty]$ אז $I_n \in \mathcal{A}$ כאשר לכל $n \in \mathbb{N}$ הוא מהצורה של (\star) וכי קבוצה פתוחה ב- $[-\infty, \infty]$ היא איחוד בן-מניה של קבוצות מהצורה (\star) ונקבל

$$f^{-1}(U) = f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(I_n) \in \mathcal{A}$$

□

כלומר המקור של כל קבוצה פתוחה הוא מדיד ולכן f מדידה.

1.3 מדידות נשמרות תחת הפעלה

משפט 1.3.1 (מדידות נשמרות תחת הפעלה) $\{f_n : X \rightarrow [-\infty, \infty]\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת מדידות (X, \mathcal{A}) מרחב מדידה. אם $\sup/\inf/\limsup/\liminf$ פונקציות מדידות, אז הפונקציות

$$(1) \sup_{n \in \mathbb{N}} \{f_n\} \quad (2) \inf_{n \in \mathbb{N}} \{f_n\} \quad (3) \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n \quad (4) \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$$

כולן מדידות.

הוכחה: (1) נסמן $g := \sup_{n \in \mathbb{N}} \{f_n\}$, ומספיק להראות שהקבוצה $g^{-1}((a, \infty])$ היא מדידה לכל $a \in \mathbb{R}$, או נרצה להראות

$$(\star) g^{-1}((a, \infty)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}((a, \infty])$$

$$\text{אם } x \in g^{-1}((a, \infty]) \text{ אז } x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}((a, \infty])$$

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \{f_n(x)\} = g(x) \in (a, \infty] > a$$

כלומר קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש- $f_{n_0}(x) > a$ ואו $f_{n_0}(x) \leq a$ אחרית לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a < f_n(x) \leq a$

$$x \in f_{n_0}^{-1}((a, \infty]) \Rightarrow x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}((a, \infty]) \Rightarrow g^{-1}((a, \infty]) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}((a, \infty])$$

אם $f_{n_0}(x) > a$ ומתקיים $f_{n_0}(x) \in (a, \infty]$ ולבן $x \in f_{n_0}^{-1}((a, \infty])$ כך ש- $n_0 \in \mathbb{N}$ מתקיים $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}((a, \infty])$

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \{f_n(x)\} \geq f_{n_0}(x) > a \Rightarrow \sup_{n \in \mathbb{N}} \{f_n(x)\} > a \Rightarrow g(x) \in (a, \infty] \Rightarrow x \in g^{-1}((a, \infty])$$

או (*) נכון ולבן f_n מדידה לכל $n \in \mathbb{N}$ ולבן $f_n^{-1}((a, \infty])$ מדידה לכל $n \in \mathbb{N}$, כלומר הקבוצה $g^{-1}((a, \infty])$ היא איחוד בן-מניה של קבוצות מדידות ולבן מדידה עצמה וקיים שפהונקציה g מדידה.

(2) זהה עבור קטעים מהצורה $[-\infty, \beta]$.
(3)

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n = \inf_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \sup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \geq k}} \{f_n\} \right\}$$

ולכן עבור סדרת הפונקציות $\{h_k : X \rightarrow [-\infty, \infty]\}_{k=1}^{\infty}$ המוגדרת על-ידי

$$\forall k \in \mathbb{N}, h_k := \sup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \geq k}} \{f_n\}$$

מתקיים מ- (1) ש- $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות מדידות ונקבל מ- (2) $\inf_{k \in \mathbb{N}} \{h_k\}$ מדידה ולבן $\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n$ מדידה.
באותו אופן למקרה הקודם רק עבור (4)

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n = \sup_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \inf_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \geq k}} \{f_n\} \right\}$$

□

1.4 תכונות בסיסיות של מידה

משפט 1.4.1 (תכונות בסיסיות של מידה): אם $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ היא מידה על מרחב מדיד (X, \mathcal{A}) אז $\mu(\emptyset) = 0 \Leftrightarrow \mu(\emptyset) \neq \infty$.

2. אדרטיביות סופית: לכל אוסף סופי ור בזוגות \mathcal{A} מתקיים $(E_i)_{i=1}^n \subseteq \mathcal{A}$ מדיות איזי $\mu(A) \leq \mu(B)$ אם $A \subseteq B \in \mathcal{A}$.
3. מונוטוניות ביחס להכללה: אם $A \subseteq B \in \mathcal{A}$ אז $\mu(A) \leq \mu(B)$.
4. רציפות לסדרות עולות: תהיי $(A_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{A}$ סדרה עולה של קבוצות מדידות איזי $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^\infty A_n)$.
5. רציפות לסדרות יורדות: תהיי $(C_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{A}$ סדרה יורדת של סדרות מדידות. אם $\mu(C_1) < \infty$ אז $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(C_n) = \mu(\bigcap_{n=1}^\infty C_n)$.
6. ס-תחת אדרטיביות: אם $(A_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{A}$ אוסף כלשהו של קבוצות מדידות איזי אז $\mu(\bigcup_{n=1}^\infty A_n) \leq \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n)$.

הוכחה:

1. כיוון אחד נובע מהגדרת המידה, מהכוון השני נובע שיש $A \in \mathcal{A}$ עם $\mu(A) < \infty$ ולכן ניתן לה חסיר זאת, ככלומר

$$\mu(A) = \mu\left(A \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \emptyset\right) \stackrel{\text{הקבוצה הריקה זהה לא-אדרטיבית}}{=} \mu(A) + \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(\emptyset) = 0$$

2. באופן דומה לסעיף הקודם נשרשר \emptyset עם ס-אדרטיביות וסימנו

$$\mu(B) = \mu((B \setminus A) \cup A) = \mu(B \setminus A) + \mu(A) \geq \mu(A) \quad .3$$

4. נסמן $B_1 = E_1$ ולכל $n \in \mathbb{N}$ גדר $B_{n+1} = A_{n+1} \setminus A_n$ סדרה של קבוצות מדידות וזרות בזוגות ולכל N מתקיים $\bigcup_{n=1}^\infty B_n = \bigcup_{n=1}^\infty B_n \cup \bigcup_{n=1}^N B_n = A_N = \bigcup_{n=1}^N A_n$

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty B_n\right) = \sum_{n=1}^\infty \mu(B_n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \mu(B_n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{n=1}^N A_n\right)$$

5. נסמן $C_1 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n \cup \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$ ולכן $D_n = C_n \setminus C_{n+1}$ ומהאדרטיביות סופית וההעברה אגפים (שאפשר מהסופיות) נקבל

$$\mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n\right) = \mu(C_1) - \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n\right) = \mu(C_1) - \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(D_n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mu(C_1) - \mu\left(\bigcup_{n=1}^N D_n\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mu(C_{N+1})$$

$$C_1 \setminus \bigcup_{n=1}^N D_n = C_{N+1}$$

6. זה בעצם אר-שוויון בול מהסתברות רק על מרחבי מידה כללים: גדר $B_1 = A_1, B_{n+1} = B_{n+1} \setminus \bigcup_{m=1}^n A_m$ ומתקיים $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ ו- $B_n \subseteq A_n$ או זרים בזוגות,

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(B_n) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$$

□

2 אינטגרציה

2.1 לכל פונקציה מדידה יש סדרת פונקציות פשוטות שמתכנסת אליה

משפט 2.1.1 (לכל פונקציה מדידה יש סדרת פונקציות פשוטות שמתכנסת אליה): אם $f : X \rightarrow [0, \infty]$ היא פונקציה מדידה כלשהי, אז קיימת סדרת פונקציות פשוטות $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך שמתקיים $s_n \rightarrow f$, כלומר $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית עולה וחסומה על-ידי f .

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, m \leq n \implies 0 \leq s_m \leq s_n \leq f$$

2. הסדרה $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת נקודתית ל- f , כלומר

$$\forall x \in X, s_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$$

הוכחה: נגידר $\varphi_n : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$

$$\forall x \in [0, \infty), \varphi_n(x) := \begin{cases} 2^{-n} \cdot \lfloor 2^n \cdot x \rfloor & 0 \leq x < n \\ n & x \geq n \end{cases}$$

או לכל $n \in \mathbb{N}$, φ_n היא צירוף לנארו של פונקציות מהצורה $\mathbb{1}_{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})}$ לכל $0 \leq k \leq n \cdot 2^n - 1$ ולכן היא מדידה בורל ביחס ל- λ . וכאן תמונהה סופית ו- φ_n היא פונקציה פשוטה. כלומר φ_n מתקיים $\forall x \in [0, n] \text{ ו } \varphi_n(x) \leq x \leq \varphi_n(x) + 2^{-n}$.

$$[2^n x] \leq 2^n x < [2^n x] + 1 \iff 2^{-n} [2^n x] \leq x < 2^{-n} ([2^n x] + 1)$$

כלומר

$$\varphi_n(x) \leq x < \varphi_n(x) + 2^{-n} \iff \varphi_n(x) \leq x \wedge x < \varphi_n(x) + 2^{-n} \iff x \geq \varphi_n(x) \wedge \varphi_n(x) > x - 2^{-n} \iff x - 2^{-n} < \varphi_n(x) \leq x$$

ולכן $\forall x \in [0, n] \text{ ו } \forall n \in \mathbb{N}, x \in [0, n] \text{ ו } \varphi_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ כלומר $x - 2^{-n} < \varphi_n(x) \leq x$

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, n \leq m \implies \varphi_n \leq \varphi_m \leq x$$

ולכן $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית עולה ואם לכל $n \in \mathbb{N}$ נגידר $s_n := \varphi_n \circ f$ נקבל את הטענה שכן הרכבת פונקציות מדידות היא פונקציה מדידה, אז $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ מקיימת את הנדרש.

□

2.2 תכונות האינטגרל

משפט 2.2.1 (תכונות האינטגרל): תהינה $f, g : X \rightarrow [0, \infty]$ פונקציות מדידות ותהינה \mathcal{E} מדידות. האינטגרל של f, g ביחס ל- μ מקיים את התכונות הבאות

1. מונוטוניות של f, g : אם $0 \leq f_A f d\mu \leq f_B g d\mu \leq 0 \leq f \leq g \leq f$
2. מונוטוניות ביחס להכללה: אם $A \subseteq B$ אז $0 \leq f_A d\mu \leq f_B d\mu$
3. הומוגניות: אם $0 \leq f$ אז $c \cdot f d\mu = c \cdot \int_A f d\mu$ עבור $c \in [0, \infty)$
4. אינטגרציה על קבוצות מדידה אפס: אם $\mu(E) = \infty$ אז $\int_E f d\mu = 0$
5. אינטגרציה על קבוצה E נס饱ה: אם $\mu(E) = \infty$ אז $\int_E f d\mu = 0$
6. אינטגרציה על קבוצה E עם הפונקציה המציינת: אם $0 \leq f$ אז $\int_E f \cdot \mathbb{1}_E d\mu = \int_X f \cdot \mathbb{1}_E d\mu$
7. אינטגרציה על איחוד זר: אם $A \cap B = \emptyset$ אז $\int_{A \cup B} f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu$

מוסכמה:

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha + \infty = \infty, \infty - \infty = \infty$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}^+, \alpha \cdot \infty = \infty, 0 \cdot \infty = 0$$

הוכחה:

1. בלי הגבלת הכלליות, $X = E$ אחרת ניקח לכל $f \cdot \mathbb{1}_E, g \cdot \mathbb{1}_E, E \in \mathcal{A}$ ונקבל מהגדירה

$$\int f d\mu = \sup \left\{ \int_E s d\mu \mid 0 \leq s \leq f, s \text{ פשוטה} \right\}$$

מהיות $g \leq f \leq 0$ נובע גם שלכל s כזאת מתקיים $0 \leq s \leq g$ ולכן מתקיים

$$\left\{ \int_E s d\mu \mid 0 \leq s \leq f, s \text{ פשוטה} \right\} \subseteq \left\{ \int_E s d\mu \mid 0 \leq s \leq g, s \text{ פשוטה} \right\}$$

ובפרט בלקיחת סופרמום

$$\int f d\mu = \sup \left\{ \int_E s d\mu \mid 0 \leq s \leq f, s \text{ פשוטה} \right\} \leq \sup \left\{ \int_E s d\mu \mid 0 \leq s \leq g, s \text{ פשוטה} \right\} = \int g d\mu$$

2. $x \in X$ אם $\mathbb{1}_A(x) = 1$ $\mathbb{1}_B(x) = 1$ $x \in A \subseteq B$ מתקיים $\mathbb{1}_B(x) = 0$ $x \notin A$ או $\mathbb{1}_A(x) = 0$ $x \in B \setminus A$ או ש- $x \in B$ או ש- $x \in A$ כלומר או ש- $x \in A \cup B$ בז"ה, מכך ש- $\mathbb{1}_A(x) \leq \mathbb{1}_B(x)$ ביחס להכללה $\int_A f d\mu, \int_B f d\mu \leq \int_X f \cdot \mathbb{1}_B(x) d\mu$ והם בהתאם מותאמים מהגדירה ל- $E = X$ מה壽יף הקודם נובע מכך ש- $\int_A f d\mu \leq \int_B f d\mu \leq \int_X f d\mu$ והם בהתאם מותאמים מהגדירה ל- $E = X$.

3. תהיו $s \leq f$, ותהיו $E \in \mathcal{A}$ ותהיו $\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{E_i} = s$ עם $\alpha_i \geq 0$ $\forall i$. קבוצות E_i זרות בזוגות ומדידות ב- E . לאינו שמתקיים $\int_E s d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(E_i)$

$$cs(x) = \sum_{i=1}^n (c\alpha_i) \mathbb{1}_{E_i}(x) \Rightarrow \int_E cs(x) d\mu = \sum_{i=1}^n (c\alpha_i) \mu(E_i) = c \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(E_i) = c \int_E s d\mu$$

נסמן מהגדירה

$$\int_E f d\mu = \sup \left\{ \int_E s d\mu \mid 0 \leq s \leq f, s \text{ פשוטה} \right\} =: S_f \quad \int_E cf d\mu = \sup \left\{ \int_E p d\mu \mid 0 \leq p \leq cf, p \text{ פשוטה} \right\} =: S_{cf}$$

נשים לב שלכל $f \leq c$ או $c > 0$ אם גדריר פונקציה פשוטה שראינו לעיל,

$$\int_E pd\mu = \int_E csd\mu = c \int_E s d\mu$$

זה נכון לכל p פשוטה כזאת ולכן

$$S_{cf} = \sup \left\{ c \int_E s d\mu \mid 0 \leq s \leq f, \text{ ה-} s \text{ פשוטה} \right\} = c \cdot \sup \left\{ \int_E s d\mu \mid 0 \leq s \leq f, \text{ ה-} s \text{ פשוטה} \right\} = c \cdot S_f$$

אם $c = 0$, אנחנו רוצים להראות

$$\int_E 0 \cdot f d\mu = 0 \cdot \int_E f d\mu$$

בצד שמאל יש לנו פשוט את הפונקציה $0 \equiv g$ וזו שהיא פשוטה ולכן

$$\int_E 0 d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(E_i) = \sum_{i=1}^n 0 \mu(E_i) = 0$$

מצד שני, יש לנו $\int_E f d\mu = 0 \cdot \infty = 0$ שתמיד כMOVED שווה לאפס בזכות הקובנציה $0 \cdot \infty = 0$. תהי $s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ ומן הגדלה $s(x) = 0$ לכל $x \in E$ ומן הדרה $f|_E \equiv 0$ וכנן $0 \leq s \leq f$ על E .

$$\int_E s d\mu = \sum \alpha_i \mu(A_i \cap E)$$

ולכן אם $\cap A_i$ לא ריקה אז המקרים α_i חייבים להיות אפסים ולכן הסכום הוא בידוק; מהגדלת אינטגרל לבג

$$\int_E f d\mu = \sup \left\{ \int_E s d\mu \mid 0 \leq s \leq f, \text{ ה-} s \text{ פשוטה} \right\}$$

אבל לכל פשוטה הנימוק לעיל תקף ככלומר האינטגרל על כל הקבוצה הוא 0 ולכן $0 = \int_E f d\mu = 0 \cdot \infty = 0$ ונזכר כי $0 \leq s \leq f$ פשוטה $s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ ומהגדלת האינטגרל

$$\int_E s d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \mu(A_i \cap E)$$

אבל $\mu(A_i \cap E) = 0$ ו- $\mu(E) = 0$; זה נכון $\forall i$ ולכן $\int_E s d\mu = 0$ ממשפט ההתקנות המונוטונית ועם $(s_n)_{n=1}^\infty$ פשוטות כך $\int_E f d\mu = 0$ מתקיים.

$$\int_E \mathbb{1}_A d\mu = \mu(A \cap E)$$

אבל $\mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_E = \mathbb{1}_{A \cap E}$ ולכן

$$\int_X \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_E d\mu = \int_X \mathbb{1}_{A \cap E} d\mu = \mu(A \cap E)$$

או הטענה נכונה לאינדיktורים; תהי $s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$

$$\int_E s d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_E \mathbb{1}_{A_i} d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_X \mathbb{1}_{A_i} \cdot \mathbb{1}_E d\mu = \int_X \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{A_i} \right) \cdot \mathbb{1}_E d\mu = \int_X s \cdot \mathbb{1}_E d\mu$$

והטענה נכונה לפונקציות פשוטות; לבסוף, נשתמש במשפט ההתקנות המונוטונית שכן $\int_E s_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E s_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X s_n \cdot \mathbb{1}_E d\mu = \int_X \left(\lim_{n \rightarrow \infty} s_n \cdot \mathbb{1}_E \right) d\mu = \int_X f \cdot \mathbb{1}_E d\mu$

$\mathbb{1}_{A \cup B}(x) = \mathbb{1}_A(x) + \mathbb{1}_B(x)$ מתקיים. ומן מהפעלת הסעיף הקודם פעמיים בקצווה

$$\int_{A \cup B} f d\mu = \int_X f \cdot \mathbb{1}_{A \cup B} d\mu = \int_X f \cdot (\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B) d\mu = \int_X f \cdot \mathbb{1}_A d\mu + \int_X f \cdot \mathbb{1}_B d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu$$

□

2.3 משפט ההתקנות המונוטונית

משפט 2.3.1 (משפט ההתקנות המונוטונית): יהיו (X, \mathcal{A}, μ) מרחב מידה ותהי $\{f_n \mid X \rightarrow [0, \infty]\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה פונקציות מדידות. אם סדרה מונוטונית עולה, אז הƒונקציה

$$f := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \{f_n\}$$

מקיימת

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad \int_A f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\mu \implies \forall A \in \mathcal{A} \quad \int_A \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\mu$$

הוכחה: נוכחה עבור $A = X$ וזו להוכיח ב- $g_n = f_n \mathbf{1}_A$ ולהסיק את המקרה הכללי.

מונוטוניות האינטגרל $\alpha \geq \int f d\mu \geq \int f_1 d\mu \leq \int f_2 d\mu \leq \cdots \leq \int f d\mu$ יקיים $\alpha \leq \int f d\mu$ ולכן $0 \leq \int f_1 d\mu \leq \int f_2 d\mu \leq \cdots \leq \int f d\mu$ ונרצה להראות $\alpha \leq \int f d\mu$. נראה שכל $E_n := \{x \in X \mid f_n(x) \geq cs(x)\}$ מתקיים $0 \leq s \leq f$ פשוטה ונקבע $0 < c < 1$. נסמן $\int s d\mu \leq \alpha$ ו- $X \setminus E_n$ כלומר זהו סדרה עולה של קבוצות מדידות שאיחדן הוא כל X .

מטריציות המידה לסדרות עולות נסיק כי לכל $A \in \mathcal{A}$

$$\mu(A \cap E_n) \xrightarrow{(*)} \mu(A \cap (\cup E_n)) = \mu(A)$$

s פשוטה ולכן $s = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$

$$\alpha \geq \int f_n d\mu \geq \int_{E_n} f_n d\mu \geq c \cdot \int_{E_n} s d\mu = c \cdot \sum_{i=1}^m \alpha_i \mu(A_i \cap E_n) \xrightarrow{(*)} c \cdot \sum_{i=1}^m \alpha_i \mu(A_i) = c \cdot \int s d\mu$$

□

2.4 החלפת סדר אינטגרציה וסכום

משפט 2.4.1 (החלפת סדר אינטגרציה וסכום): יהיו סדרת פונקציות מדידות, אזי

$$\int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \, d\mu$$

הוכחה: באינדוקציה על $N \in \mathbb{N}$.

מקרה בסיס הוא אדרטיביות האינטגרל עבור $N = 2$ ($s, t : X \rightarrow [0, \infty]$): תהיינה $N = 1$ ($s, t : X \rightarrow [0, \infty]$ הטענה טריוויאלית):

$$s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{A_i} \quad t = \sum_{j=1}^m \beta_j \mathbb{1}_{B_j}$$

עבור $\{A_i\}_{i=1}^n, \{B_j\}_{j=1}^m$ חלוקות של X ומתקיים

1. X חלוקה של $\{A_i \cap B_j\}_{(i,j) \in [n \times m]}$

2. לכל $j \in [m]$ מתקיים $\bigcup_{i=1}^n A_i \cap B_j = B_j$ חלוקה של X

3. לכל $i \in [n]$ מתקיים $\bigcup_{j=1}^m A_i \cap B_j = A_i$ חלוקה של X

אדטיביות סופית של מידה נקבע

$$\sum_{j=1}^m \mu(A_i \cap B_j) \stackrel{(*)}{=} \mu(A_i) \quad \sum_{i=1}^n \mu(A_i \cap B_j) \stackrel{(**)}{=} \mu(B_j)$$

אבל גם $s + t$ היא פונקציה פשוטה שכן

$$s + t = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\alpha_i + \beta_j) \mathbb{1}_{A_i \cap B_j}$$

ולכן

$$\begin{aligned} \int_X (s + t) \, d\mu &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\alpha_i + \beta_j) \cdot \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \sum_{j=1}^m \mu(A_i \cap B_j) + \sum_{j=1}^m \beta_j \cdot \sum_{i=1}^n \mu(A_i \cap B_j) \\ &\stackrel{(*), (**)}{=} \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \mu(A_i) + \sum_{j=1}^m \beta_j \cdot \mu(B_j) = \int_X s \, d\mu + \int_X t \, d\mu \end{aligned}$$

או הטענה נכונה עבור פונקציות פשוטות.

תהיינה $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}, \{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרות עלות של פונקציות פשוטות כך שמתקיים

$$s_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f_1 \quad t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f_2$$

נקודותית ואריתמטיקה של גבולות נקבע $f_1 + f_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n + t_n)$

$$\begin{aligned} \int_X (f_1 + f_2) \, d\mu &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X (s_n + t_n) \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_X s_n \, d\mu + \int_X t_n \, d\mu \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X s_n \, d\mu + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X t_n \, d\mu \\ &= \int_X f_1 \, d\mu + \int_X f_2 \, d\mu \end{aligned}$$

זה מראה את בסיס האינדוקציה.

בשביל לסיים את האינדוקציה נשים לב $\sum_{n=1}^N f_n$ נקודתיות כאשר הסדרה $\sum_{n=1}^N f_n \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ מושגתה מונוטונית עולה ולכן מושגתה המונוטונית נקבע את הטענה, כנדרש.

□

2.5 קיום מידת אינטגרל

משפט 2.5.1 (קיום מידת אינטגרל): יהי (X, \mathcal{A}, μ) מרחב מידה. אם $\nu : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$ המוגדרת על-ידי

$$\forall E \in \mathcal{A}, \nu(E) = \int_E h d\mu$$

היא מידת על (X, \mathcal{A}) ובמקרה זה נסמן $d\nu := h d\mu$ ויתר על-כן מתקיים

$$\int_X g d\nu = \int_X g \cdot h d\mu$$

לכל $g : X \rightarrow [0, \infty]$ מידה.

הוכחה: בשביל להראות מידת עלינו להראת ש- ν אינה קבועה ושהיא σ -אדיטיבית: ואכן, $0 = \nu(\emptyset) = \nu(\text{וננית תהי } \{E_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ סדרת כלשהו של קבוצות מידות זרות בזוגות ונסמן } E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \text{ ואו}$

$$(\star) \quad \mathbb{1}_E = \mathbb{1}_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{E_n}$$

ולכן

$$\begin{aligned} \nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) &= \nu(E) \stackrel{\text{מזהה}}{=} \int_E h d\mu = \int_X h \mathbb{1}_E d\mu \stackrel{(\star)}{=} \int_X h \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{E_n} d\mu \\ &= \int_X \sum_{n=1}^{\infty} h \cdot \mathbb{1}_{E_n} d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X h \cdot \mathbb{1}_{E_n} d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} h d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n) \end{aligned}$$

ולכן ν מידת על (X, \mathcal{A}) . עבור החלק השני, תהי $s = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbb{1}_{E_i}$ פונקציה פשוטה, אז

$$\begin{aligned} \int_X s d\nu &= \sum_{i=1}^k \alpha_i \nu(E_i) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \int_{E_i} h d\mu = \sum_{i=1}^k \int_{E_i} \alpha_i h d\mu = \sum_{i=1}^k \int_X \alpha_i \mathbb{1}_{E_i} h d\mu \\ &= \int_X \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbb{1}_{E_i} h d\mu = \int_X h \cdot \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbb{1}_{E_i} d\mu = \int_X h \cdot s d\mu \end{aligned}$$

או עבור g מידת כלשהו ניקח $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה עולה של פונקציות פשוטות כך ש- $s_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g$ ונקבל ממשפט ההחכשנות המונוטונית על מרחב המידה (X, \mathcal{A}, ν) .

$$\int_X g d\nu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X s_n \cdot h d\mu = \int_X g \cdot h d\mu$$

כ- $s_n \cdot h \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g \cdot h$ ו- $\{s_n \cdot h\}_{n=1}^{\infty}$ שמתקיים

□

2.6 הלמה של פאטו

משפט 2.6.1 (הלמה של פאטו): יהיו (X, \mathcal{A}, μ) מרחב מידה. אם סדרת פונקציות מדידות כלשהי, אזי

$$\int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu$$

הוכחה: לכל $N \in \mathbb{N}$ נסמן $k \in \mathbb{N}$ אזי הסדרה $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית עולה ואי-שלילית. ממשפט ההתכנסות המונוטונית נקבל

$$\int_X \lim_{k \rightarrow \infty} g_k d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X g_k d\mu$$

ומתקיים מהגדרה

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \inf_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \geq k}} \{f_n\} = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$$

ובירוח

$$(\star) \quad \int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X g_k d\mu$$

מצד שני

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad g_k = \inf_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \geq k}} \{f_n\} \leq f_k \implies g_k \leq f_k$$

מונוטוניות האינטגרל נקבע

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad a_k := \int_X g_k d\mu \leq \int_X f_k d\mu =: b_k$$

או לכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_k \leq b_k$ וכן מ- (\star) נובע כי $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k$ קיים ונקבל

$$\int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \stackrel{(\star)}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X g_k d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} b_k = \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k d\mu \implies \int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k d\mu$$

□

2.7 הлемה של בורל-קנטלי

משפט 2.7.1 (הлемה של בורל-קנטלי): **יהי** (X, \mathcal{A}, μ) מרחב מידה ותהי \mathcal{A} קבוצות מדידות כך שמתקיים

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty$$

אז

$$\mu\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} E_n\right) = 0$$

הוכחה: מונוטוניות המידה והגדרת החיתוך

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} E_n = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=i}^{\infty} E_j \implies \mu\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} E_n\right) = \mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) \stackrel{\forall i \in \mathbb{N}}{\leq} \mu\left(\bigcup_{j=i}^{\infty} E_j\right) \stackrel{\text{תת-אדטיביות המידה}}{\leq} \sum_{j=i}^{\infty} \mu(E_j) < \infty$$

. $\mu(\limsup_{n \rightarrow \infty} E_n) \leq 0$, **כלומר** $\sum_{n=i}^{\infty} \mu(E_n) = 0$ וnb ולכן $\mu(\limsup_{n \rightarrow \infty} E_n) = 0$ **כלומר** $0 \leq \mu(\limsup_{n \rightarrow \infty} E_n) \leq \mu(\limsup_{n \rightarrow \infty} E_n)$

□

משפט 2.7.2 (אי-שוויון המשולש האינטגרלי): אם $f \in L^1(\mu)$ אז $\int_X f d\mu \leq \int_X |f| d\mu$.
 .(•) $\alpha \int_X f d\mu = \left| \int_X f d\mu \right| \in \mathbb{R}$ עבורו מתקיים $|\alpha| = 1$ עם $\alpha \in \mathbb{C}$ ולכן $\int_X f d\mu \in \mathbb{C}$ וכן קיימים $Re(\alpha) = \overbrace{\int_X \alpha f d\mu}^{\in \mathbb{R}}$ ו $Im(\alpha) = \overbrace{i \int_X Im(\alpha f) d\mu}^{\in \mathbb{R}}$ נקבל אם-כן

$$\begin{aligned} \left| \int_X f d\mu \right| &= \alpha \int_X f d\mu \\ &= \underbrace{\int_X \alpha f d\mu}_{\in \mathbb{R}} \\ &= \int_X Re(\alpha f) d\mu + i \int_X Im(\alpha f) d\mu \\ &= \int_X Re(\alpha f) d\mu \\ &\leq \int_X |Re(\alpha f)| d\mu \\ &\leq \int_X |\alpha f| d\mu = \int_X |f| d\mu \end{aligned}$$

הערה: שכן אם נסמן μ על $|z| = \int_X f d\mu$ אז $\alpha z = |z| \alpha$ לכל $\alpha \in \mathbb{C}$ או $z = 0$ אם $|\alpha| = 1$ או $z = 0$ אם $\alpha = 0$.
 אחרת, אם $z \neq 0$ אז קיימים $\theta \in \mathbb{R}$ כך ש $z = |z| e^{i\theta}$ ונקבל $\alpha z = |z| e^{-i\theta} \cdot |z| e^{i\theta} = |z| (e^{-i\theta} \cdot e^{i\theta}) = |z| \in \mathbb{R}$

ולכן יש $\alpha \in \mathbb{C}$ המקיימים זאת.

□

2.8 משפט ההתכונות הנשלטת

הגדעה 2.8.1 (סדרת פונקציות נשלטת): תהי X קבוצה ותהי $\{f_n : X \rightarrow \mathbb{R}\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות כלשהי ותהי $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה. נאמר שהסדרה $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ נשלטה על-ידי הפונקציה g אם ורק אם לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $|f_n| \leq g$.

משפט 2.8.1 (משפט ההתכונות הנשלטת): תהי $\{f_n : X \rightarrow \mathbb{C}\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות מדידות המקיימת נקודתיות לפונקציה $f : X \rightarrow \mathbb{C}$. נשלטה על-ידי הפונקציה g אם ורק אם $f \in L^1(\mu)$ וקיימים $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ נשלטה על-ידי g אזי $f \in L^1(\mu)$ ואם קיימת $g \in L^1(\mu)$ כך שהסדרה $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ נשלטה על-ידי g וקיימים

$$\int_X |f_n - f| d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

ובפרט

$$\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu$$

הוכחה: ראשית מכך ש- g נובע כי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq L^1(\mu)$ ו גם מתקיים $|f_n| \leq g$ לכל $n \in \mathbb{N}$ או $|f| \leq g$ ומלהמת של פאטו עבור סדרת הפונקציות $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ נקבל בפרט מתקיים לכל $n \in \mathbb{N}$ ש- $h_n := 2g - |f - f_n| \leq 2g$.

$$(*) \quad \int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} h_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X h_n d\mu$$

וכן $\liminf_{n \rightarrow \infty} h_n(x) = 2g(x)$ לכל $x \in X$, אז ייבעת מכך

$$\int_X 2g d\mu = \int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} h_n d\mu \stackrel{(*)}{\leq} \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X h_n d\mu = \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X (2g - |f - f_n|) d\mu$$

מכאן מתקיים

$$\begin{aligned} \int_X 2g d\mu &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X (2g - |f - f_n|) d\mu \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X 2g d\mu + \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(- \int_X |f - f_n| d\mu \right) \stackrel{\liminf_{n \rightarrow \infty} (-a_n) = -\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n}{=} \int_X 2g d\mu - \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_X |f - f_n| d\mu \end{aligned}$$

כלומר

$$\int_X 2g d\mu \leq \int_X 2g d\mu - \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_X |f - f_n| d\mu$$

אבל (μ -אילילית ולכן $\int_X |f - f_n| d\mu = 0$) ולכן $\int_X 2g d\mu < \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_X |f - f_n| d\mu$ ובפרט מאיר-שיזוון המשולש האינטגרלי

$$\left| \int_X f d\mu - \int_X f_n d\mu \right| = \left| \int_X (f - f_n) d\mu \right| \leq \int_X |f - f_n| d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

□

2.9 אַיִלְשְׁיוֹן מְרֻקּוֹב

משפט 2.9.1 (אַיִלְשְׁיוֹן מְרֻקּוֹב):

1. תהי f מדידה ואי-שלילית, או לכל $a < 0$ מתקיים

$$\mu(f^{-1}[\alpha, \infty]) \leq \frac{\int f d\mu}{a}$$

2. תהי $[0, \infty]$ אינטגרבילית. אז $\mu(f^{-1}((0, \infty))) = 0$ והקבוצה $f^{-1}(\{\infty\})$ היא σ -סופית.

הוכחה:

1. נגדיר

$$E_a := f^{-1}([a, \infty]) = \{x \in X \mid f(x) \geq a\}$$

$$g(x) = a \cdot \mathbb{1}_{E_a}(x)$$

$f(x) \geq g(x) = a \cdot 1 = a$ או $x \in E_a$ וכאן $g(x) = a \cdot 1 = a \cdot f(x) \geq a$.

אם $g(x) \leq f(x)$ או $x \notin E_a$ וכאן $g(x) = a \cdot 0 = 0 \leq f(x) \geq g(x)$ לכל $x \in X$ מתקיים מונוטוניות אינטגרל לבג נקבל

$$\int_X g d\mu \leq \int_X f d\mu$$

אבל

$$\int_X g d\mu = \int_X a \cdot \mathbb{1}_{E_a} d\mu = a \cdot \int_X \mathbb{1}_{E_a} d\mu = a \cdot \mu(E_a)$$

כלומר

$$a \cdot \mu(E_a) \leq \int_X f d\mu$$

מהיות $\infty < a$ ניתן לחלק בלי לשנות את כיוון אַיִלְשְׁיוֹן ונקבל

$$\mu(E_a) \leq \frac{1}{a} \int_X f d\mu$$

2. מהמקרה הקודם אנחנו מקבלים שאם $\int f d\mu < \infty$ אז אגף ימין שואף לאינסוף כאשר $\infty \rightarrow a$ ולכן מרציפות המידה מלמעלה (חיתוכים יורדים) נסיק כי

$$\mu(f^{-1}(\{\infty\})) = 0$$

מתקיים

$$\mu\left(f^{-1}\left[\frac{1}{n}, \infty\right]\right) < \infty$$

ולכן

$$f^{-1}((0, \infty)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}\left(\left[\frac{1}{n}, \infty\right]\right)$$

היא σ -סופית.

□

3 קבוצות ממידה אפס

3.1 סדרת פונקציות כמעט-תמיד

משפט 3.1.1 (סדרת פונקציות כמעט-תמיד) : תהי $\{f_n : X \rightarrow \mathbb{C}\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות מדידות המוגדרות μ -כמעט תמיד.

אם $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n| d\mu < \infty$ או

1. הפונקציה הנottonה על-ידי $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ מוגדרת μ -כמעט תמיד

$$f \in L^1(\mu) .2$$

$$\int_X f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f_X f_n d\mu .3$$

הוכחה :

1. נניח ש- f_n מוגדרת על קבוצה S כ- $\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$, וא $\mu(S_n^c) = 0$ ומתיים

$$\mu(S^c) = \mu\left(\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n\right)^c\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n^c\right) = 0 \Rightarrow \mu(S^c) = 0$$

ולכן φ מוגדרת μ -כמעט תמיד ומהטינה אודות הchèפת סדר של גבול וaintegral עבור טורים של פונקציות אר-שליליות מתקיים

$$\int_X \varphi d\mu = \int_X \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n| d\mu < \infty \Rightarrow \int_X \varphi d\mu < \infty$$

בפרט $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) < \infty$ μ -כמעט תמיד לכל $x \in X$ $\varphi \in L^1(\mu)$ ולכן עבור μ -כמעט תמיד לכל $x \in X$ הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתקנס בהחלה μ -כמעט תמיד ולכן הוא מתקנס ב- \mathbb{C} . $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ מוגדרת μ -כמעט תמיד .2. לכל $k \in \mathbb{N}$ נסמן $g_k := \sum_{n=1}^k f_n$ ומתיים

$$\forall k \in \mathbb{N}, |g_k| = \left| \sum_{n=1}^k f_n \right| \leq \sum_{n=1}^k |f_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| = \varphi \Rightarrow |g_k| \leq \infty$$

כלומר סדרת הפונקציות $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ נשלטה על-ידי φ ומcause המשפט ההתכניות הנשלטה עבור $f \in L^1(\mu)$ נובע כי $\lim_{k \rightarrow \infty} g_k = f$ ומהטינה על הchèפת סדר סכום וaintegral.

$$\int_X f d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X g_k d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \int_X f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu \Rightarrow \int_X f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu$$

זה מוכיח גם את .3

□

3.2 תנאים שקולים לשילמות

המכorbitה: יהיו (X, \mathcal{A}, μ) מרחב מידה. נאמר שהמרחב **שלם** אם $E \in \mathcal{A}$ מקיימת לכל $N \subseteq E$ מתקיים $\mu(N) = 0$ מדידה ו- $\mu(E) = \mu(N)$.
ההשלמה של (X, \mathcal{A}, μ) ניתנת על ידי ה- σ -אלגברה

$$\overline{\mathcal{A}} := \{A \cup E \mid A \in \mathcal{A}, E \subseteq N, \mu(N) = 0\}$$

omedida

$$\overline{\mu}(A \cup E) = \mu(A)$$

- משפט 3.2.1** (תנאים שקולים לשילמות): יהיו (X, \mathcal{A}, μ) מרחב מידה, או הגרירות הבאות נכונות אם ורק אם μ שלמה:
1. אם $f = g$ מדידה אז f מדידה תמיד, או g היא מדידה
 2. אם $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות מדידות ובנוסף $f_n \rightarrow f$ מדיעט תמיד, אז f היא מדידה

הוכחה: בשבייל ההוכחה השתמש בטענה מהסוג הבא שנכונה במרחבי מידה שלמים: נניח כי E, G מדידות ו- $G \setminus E = 0$ אם $E \subseteq F \subseteq G \setminus E$ מדידה וגם $F \setminus E = 0$ אם $E \subseteq F \subseteq G$ מדידה ו- $\mu(G \setminus E) = 0$ מושג $\mu(F \setminus E) = 0$ ותלכדות המידות גוררת ש- $\mu(G \setminus E) = 0$ מדידה וגם $\mu(F \setminus E) = 0$ מדידה ו- $\mu(F) = \mu(G)$

שלמות \Leftarrow : אם f מדידה ו- $\mu(f) = 0$ מדיעט תמיד, נרשום

$$N := \{x \mid f(x) \neq g(x)\}$$

מהיות N מוכלת בקבוצה מדידה אפס ו- μ שלמה אז N מדידה.
מתקיים לכל A מדידה בורל

$$g^{-1}(A) = (g^{-1}(A) \cap f^{-1}(A)) \cup (g^{-1}(A) \setminus f^{-1}(A))$$

מהיות N^c היא בידוק הקבוצה בה הפונקציות מתלכדות, נוכל לכתוב

$$f^{-1}(A) \cap N^c \subseteq f^{-1}(A) \cap g^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(A)$$

ומהיות

$$f^{-1}(A) \setminus (f^{-1}(A) \cap N^c) \subseteq N$$

נדע שרשרת ההכלות היא כפי שופיע בטענה שנוסחה בתחלת ההוכחה ולכן הקבוצה $f^{-1}(A) \cap g^{-1}(A)$ היא מדידה ובאופן דומה נשים לב

$$g^{-1}(A) \setminus f^{-1}(A) \subseteq N$$

ולכן קבוצה המוכלת בקבוצה מדידה אפס היא מדידה.

שלמות: תהiji E קבוצה המוכלת בקבוצה מדידה אפס אז $0 = \mathbb{1}_E$ מדיעט-תמיד ולכן $\mathbb{1}_E$ מדידה, אבל אינדיקטור מדיד אם ורק אם הקבוצה שהוא מציין מדידה, כלומר E מדידה.

2 \Leftarrow : מאחר והוכחנו ש- $\mathbb{1}$ שקול לשילמות, אז μ שלמה. נניח ש- $f_n \rightarrow f$ מדיעט תמיד.
לכן קיימת קבוצה N כך ש- $\mu(N) = 0$ וبنוסף $f_n(x) \rightarrow f(x)$ לכל $x \in N^c$ ונגידו

$$\tilde{f}_n(x) = \begin{cases} f_n(x) & x \in N^c \\ 0 & x \in N \end{cases}$$

או מהסעיף הקודם לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים ש- \tilde{f}_n מדידה כי $\tilde{f}_n = f_n$ מדיעט תמיד ו- \tilde{f}_n מתקבלת נקודתית לפונקציה

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in N^c \\ 0 & x \in N \end{cases}$$

ולכן \tilde{f} מדידה ול- \tilde{f} מדיעט תמיד ולכן f מדידה.

2 \Leftarrow : נניח ש- $f = g$ מדיעט תמיד ו- f מדידה, או נגידו את $f_n = f$ להיות הסדרה הקבועה ומתקיים $f_n \rightarrow f$ מדיעט-תמיד ולכן g מדידה
מההנחה של 2, כנדרש. \square

3.3 תנאי שקול לפונקציה אפסה כמעט-המייד

משפט 3.3.1 (תנאי שקול לפונקציה אפסה כמעט-המייד): אם $f : X \rightarrow [0, \infty]$ מדידה עם $\int_X f d\mu = 0$ ורק אם $\int_X f d\mu = 0$ גוררת ש- μ -כמעט תמיד $f = 0$.

□

3.4 טענה על ממוצעי פונקציה

הוכורת (ממוצע של פונקציה): יהי (X, \mathcal{A}, μ) מרחב מידת סופי, תהי $E \in L^1(\mu)$ קבוצה מדידה עם $\mu(E) > 0$. ותהי $f \in L^1(\mu)$ קבוצה מדידה עם $\int_E f d\mu > 0$.

$$A_E(f) := \frac{1}{\mu(E)} \int_E f d\mu$$

משפט 3.4.1 (טענה על ממוצעי פונקציה): יהי (X, \mathcal{A}, μ) מרחב מידת סופי ותהי $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ אם $f \in L^1(\mu)$ קבוצה סגורה כך שלכל קבוצה מדידה $E \in \mathcal{A}$ עם $\mu(E) > 0$ מתקיים $A_E(f) \in \Omega$.

הוכחה: לכל $0 < r$ ולכל $\alpha \in \mathbb{C}$ נסמן ב- $\bar{B}_r(\alpha)$, הכדור הסגור ברדיוס r סביב α .

מוך ש- Ω סגורה נובע כי Ω^c פתוחה ולכן יש איחוד בן-מניה של כדורים פתוחים שעלי-ידו ניתן לייצג את Ω^c .

אבל ב- \mathbb{C} , כל כדור פתוח ניתן להציג כאיחוד בן-מניה של כדורים סגורים, ולכן Ω^c הוא איחוד בן-מניה של כדורים סגורים.

לכן, מספיק להראות שüber כל Ω^c מתקיים $\bar{B}_r(\alpha) = 0$, כאשר $\bar{B}_r(\alpha) = f^{-1}(\bar{B}_r(\alpha))$

$$f^{-1}(\bar{B}_r(\alpha)) = \{x \in X \mid f(x) \in \bar{B}_r(\alpha)\}$$

נניח בשילוליה שהקיים כדור סגור Ω^c מתקיים $\bar{B}_r(\alpha) > 0$ ונסמן $E := f^{-1}(\bar{B}_r(\alpha))$ כך ש- $\bar{B}_r(\alpha)$ על E מתקיים $|f - \alpha| \leq r$ ולכן

$$\begin{aligned} |A_E(f) - \alpha| &= \left| \frac{1}{\mu(E)} \int_E f d\mu - \frac{1}{\mu(E)} \cdot \mu(E) \cdot \alpha \right| = \left| \frac{1}{\mu(E)} \int_E f d\mu - \frac{1}{\mu(E)} \int_E \alpha d\mu \right| \\ &= \left| \frac{1}{\mu(E)} \left(\int_E f d\mu - \int_E \alpha d\mu \right) \right| \stackrel{\substack{\text{לינאריות האינטגרל} \\ \mu(E) > 0}}{=} \frac{1}{\mu(E)} \left| \int_E (f - \alpha) d\mu \right| \stackrel{\substack{\text{א-שוויון המשולש}}}{\leq} \frac{1}{\mu(E)} \int_E |f - \alpha| d\mu \leq \frac{1}{\mu(E)} \int_E r d\mu \\ &= \frac{1}{\mu(E)} \cdot r \cdot \mu(E) = r \end{aligned}$$

כלומר $r \leq |A_E(f) - \alpha|$ ולכן $A_E(f) \in \bar{B}_r(\alpha)$ ו- $\bar{B}_r(\alpha) \subseteq \Omega^c$.

אבל זו סתיויה להנחה ש- $A_E(f) \in \Omega^c$.

□

4 משפט ההצגה של ריס

4.1 משפט ההצגה של ריס – יחידות

משפט 4.1.1 (יחידות במשפט ההצגה של ריס): יהיו $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ פונקציונל לינארי חיובי ונניח כי μ_1, μ_2 הן מדות על $(\mathbb{R}, \text{Borel}_{\mathbb{R}})$ המקיימות

1. $f \in C_C(\mathbb{R})$ לכל $\int_X f d\mu_i = \Lambda f$
2. $K \subseteq \mathbb{R}$ קומפקטיבי $\mu_i(K) < \infty$ לכל μ_i
3. כל קבוצות בורל ב- \mathbb{R} הן רגולריות פנימית והיצנית ביחס ל- μ_i

הוכחה: נזכיר ש- \mathbb{R} הוא מרחב האוסדרוף קומפקטי-מקומי.

נבחן תחילה ש- μ_1, μ_2 מוגדרות ביחידות על-ידי הערכיהם שלן על קבוצות קומפקטיות.

ראשית מ- (2) נובע כי עבור $\mathbb{R} \subseteq K$ קומפקטיבית מתקיים $\infty < \mu_i(K)$.

יהי $\varepsilon > 0$ ומחרgesיות החיצונית נובע כי קיימת $V \subseteq K$ כאשר V פתוחה כך שקיימים $\varepsilon < \mu_2(V) < \mu_2(K) + \varepsilon$. מהלמה של אורים נובע כי קיימת $f \in C_C(\mathbb{R})$ כך ש- $f(X) \subseteq [0, 1]$ ו עוד מתקיים ש- $V \prec f \prec K$, כלומר $f \leq \mathbf{1}_K \leq f$ וילך $f(X) \subseteq [0, 1]$ אבל $f \leq \mathbf{1}_V$ ולכן $f \in \text{supp}(f) \subseteq V$

$$\mu_1(k) = \int_X \mathbf{1}_K d\mu_1 \leq \int_X f d\mu_1 \stackrel{(1)}{=} \Lambda f \stackrel{(1)}{=} \int_X f d\mu_2 \leq \int_X \mathbf{1}_V d\mu_2 = \mu_2(V) < \mu_2(K) + \varepsilon$$

כלומר $\mu_1(K) \leq \mu_2(K)$ לכל K קומפקטיבי ומהסימטריה נקבע $\mu_2 \leq \mu_1$, כלומר $\mu_1 = \mu_2$.

□

5 רגולריות ומידות רדון

5.1 תכונות מידת רדון על מרחב ס-קומפקטי

5.1.1 תכונות מידת רדון על מרחב ס-קומפקטי: יהיו (X, μ) מרחב מידה המכיל את ס-אלגברה בורל על X . אם X הוא ס-קומפקטי ו- μ מידת רדון או מתקיים

1. לכל $\epsilon > 0$ ולכל $E \in \mathcal{E}$ קיימת קבוצה פתחה $V \subseteq E \subseteq F \subseteq X$ עם $\mu(V \setminus F) < \epsilon$ וקבוצה סגורה $F \subseteq X$.

2. כל קבוצה m היא רגולרית פנימית וחיצונית.

3. לכל m קיימת $E \in \mathcal{E}$ כאשר $A, B \in \mathcal{A}$ והוא G_σ ו- B היא F_σ כך ש- ϵ ו- $\mu(A \setminus E) = 0$ וגם $\mu(B \setminus E) < \epsilon$.

הוכחה: ראשית מהות X ס-קומפקטי נובע שקיים אוסף בן-מניה של קבוצות קומפקטיות $\{K_n\}_{n=1}^\infty$ כך ש-

1. תהיו $E \in \mathcal{E}$ מידה

$$. E = \bigcup_{n=1}^\infty E \cap K_n \text{ מתקיים ש-} \{K_n\}_{n=1}^\infty \text{ כיסוי של } X$$

2. מהות μ מידת רדון ו- K_n קומפקטיב נובע $\mu(K_n) < \infty$ ולכן בפרט ממונטוניות μ לכל $n \in \mathbb{N}$.

3. מהרגולריות החיצונית של μ נובע שלכל $0 < \epsilon < \mu(V_n) - \mu(E \cap K_n)$ קיימת $E \cap K_n \subseteq V_n$ פתחה עם $\mu(V_n \setminus E \cap K_n) < \epsilon$.

$$\text{נסמן } E \cap K_n \subseteq K_n \text{ ומתקיים מכך ש-} V := \bigcup_{n=1}^\infty V_n$$

$$V \setminus E = \left(\bigcup_{n=1}^\infty V_n \right) \setminus \left(\bigcup_{n=1}^\infty E \cap K_n \right) \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty V_n \setminus (E \cap K_n)$$

ולכן

$$\mu(V \setminus E) \leq \mu \left(\bigcup_{n=1}^\infty V_n \setminus (E \cap K_n) \right) \stackrel{\text{מונטוניות}}{\leq} \sum_{n=1}^\infty \mu(V_n \setminus (E \cap K_n)) = \sum_{n=1}^\infty (\mu(V_n) - \mu(E \cap K_n)) \stackrel{(*)}{<} \sum_{n=1}^\infty \frac{\epsilon}{2^{n+1}} = \frac{\epsilon}{2}$$

2. עבור m מתקיים גם $E^c = \bigcup_{n=1}^\infty E^c \cap K_n$ מידת רדון נובע כי $E^c \cap K_n$ רגולרית

$$\mu(U_n) \stackrel{(*)}{<} \mu(E^c \cap K_n) + \frac{\epsilon}{2^{n+1}}$$

חיצונית ולכן קיימת פתחה $U_n \subseteq U_n \in \mathcal{U}$ (כי $E^c = \bigcup_{n=1}^\infty E^c \cap K_n \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty U_n$ ונקבל $U = U^c \subseteq U$)

$$U \setminus E^c = \left(\bigcup_{n=1}^\infty U_n \right) \setminus \left(\bigcup_{n=1}^\infty E^c \cap K_n \right) \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty U_n \setminus (E^c \cap K_n)$$

ובהתאם

$$\mu(U \setminus E^c) \leq \mu \left(\bigcup_{n=1}^\infty U_n \setminus (E^c \cap K_n) \right) \leq \sum_{n=1}^\infty \mu(U_n \setminus E^c \cap K_n) = \sum_{n=1}^\infty \mu(U_n) - \mu(E^c \cap K_n) \stackrel{(*)}{<} \sum_{n=1}^\infty \frac{\epsilon}{2^{n+1}} = \frac{\epsilon}{2}$$

או אם נסמן $F := U^c$ נקבל

1. U פתחה $F \subseteq$ סגורה

2. $F \subseteq E \iff U^c \subseteq E \iff E^c \subseteq U$

3. מתקיים

$$E \setminus F = E \cap F^c = F^c \cap E = F^c \setminus E^c \implies \mu(E \setminus F) = \mu(F^c \setminus E^c) = \mu(U \setminus E^c) < \frac{\epsilon}{2}$$

אם כך קיבלנו בסך-הכל קבוצה פתחה $F \subseteq E \subseteq V$ ו- E סגורה המקיימת

$$(1) \mu(V \setminus E) = \mu(V) - \mu(E) < \frac{\epsilon}{2} \quad (2) \mu(E \setminus F) = \mu(E) - \mu(F) < \frac{\epsilon}{2}$$

ולכן

$$\mu(V \setminus F) = \underbrace{\mu(V) - \mu(E)}_{\mu(V \setminus E)} + \underbrace{\mu(E) - \mu(F)}_{\mu(E \setminus F)} \stackrel{(1),(2)}{<} \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \implies \mu(V \setminus F) < \epsilon$$

2. מההעיף הקודם, לכל $m \in E$ קיימת קבוצה סגורה m ושוב מה- σ -קומפקטיות, $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ עם $\mu(E \setminus F) < \frac{\varepsilon}{2}$ ($F \subseteq E$ כי E קבוצה קומפקטית). אבל לכל $n, K_n \cap F \subseteq K_n$, אז K_n קבוצה קומפקטית (כי חיתוך של קבוצה קומפקטית עם קבוצה סגורה הוא קומפקט) ולכן לכל $N \in \mathbb{N}$ נובע כי $\bigcup_{n=1}^N (F \cap K_n)$ קבוצה קומפקטית כאיחוד סופי של קומפקטיות, או מרציפות המידה לאיחודים עולמים נקבל

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{n=1}^N F \cap K_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F \cap K_n\right) = \mu(F) \implies \mu(F) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{n=1}^N F \cap K_n\right)$$

כלומר לכל $0 < \varepsilon \leq N$ קיים $k \in \mathbb{N}$ כך שלכל $m \geq k$ מתקיים

$$\mu\left(F \setminus \bigcup_{n=1}^k F \cap K_n\right) = \mu(F) - \mu\left(\bigcup_{n=1}^k F \cap K_n\right) < \frac{\varepsilon}{2}$$

נסמן $X := \bigcup_{n=1}^N F \cap K_n$ כאשר $K \subseteq F \subseteq E$ קיימת $K \subseteq X$ קומפקטיבית עם $\mu(X) > \varepsilon$ ו- $\mu(K) < \varepsilon$. מאידך X קומפקטיבית ומאי-השווין לעיל נקבל שלכל $0 < \varepsilon < \mu(X) - \mu(K)$ קבוצה $K \subseteq X$ שמתקיים

$$\begin{aligned} \mu(E) - \mu(K) &= \mu(E) - \mu(F) + \mu(F) - \mu(K) = \mu(E \setminus F) + \mu(F \setminus K) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \\ \implies \mu(E) - \mu(K) < \varepsilon &\iff \mu(K) > \mu(E) - \varepsilon \implies \mu(E) = \sup\{\mu(C) \mid C \subseteq E\} \end{aligned}$$

כלומר $m \in E$ רגולרית פנימית ומהיות μ מידת רדון ולכן רגולריות היצוגית ביחס לכל קבוצה מדידה, מהיות m שירוטי נובע כי סעיף 2 נכון.

3. תהיו $E \in m$ מסעיף 1 נובע קיום של $F_n \subseteq E \subseteq V_n$ סגורה עם $V_n \in m$ פתוחה ו- $F_n \in m$ ו- $\mu(V_n \setminus F_n) < \frac{1}{n}$. אוסף $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, $B := \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$ נגידר והוא G_{σ} ו- $B = A$ או $A = G_{\sigma}$ ו- $B = B$.

$$B \setminus A = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right)^c = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n\right) \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n^c\right) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} (V_n \cap F_n^c) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (V_n \setminus F_n)$$

אבל $\mu(V_n \setminus F_n) < \frac{1}{n}$ ו- $\mu(V_n \setminus F_n) \leq \mu(V_n)$

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \mu(B \setminus A) \leq \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \setminus F_n\right) \leq \mu(V_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

□

5.2 תנאים שגוררים שמידה היא מידה רדון

משפט 5.2.1 (תנאים שגוררים שמידה היא מידה רדון): יהי X מרחב האוסדרוף קומפקטי-מקומית המקיים שכל קבוצה פתוחה בו היא σ -קומפקטיבית. אם μ מידה על $\mathbb{B}(X)$ המקיימת $\infty < \mu(K) \leq \mu(X) \subseteq K$ קומפקטיבית, אז μ היא מידה רדון על m וכל קבוצה מדידה $m \in E$ היא רגולרית פנימית וחיצונית.

הוכחה: מהיות μ סופית על קומפקטיות, נקבל $\int_X f d\mu = \int_X f d\lambda$ הינו פונקציונל לינארי חיזובי על $C_c(X)$ וממשפט ההצגה של ריס נובע שקיימת מידת רדון λ על X המקיימת $\int_X f d\lambda = \int_X f d\mu$, כלומר $f \in C_c(X) \subseteq C_C(X)$.
 תהיי $V \in \mathbb{N}$ פתוחה, מהנתון נובע שהיא σ -קומפקטיבית ולכן קיים אוסף $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ של קבוצות קומפקטיביות כך שמתקיים $K_n \prec g_n \prec V$ עם $g_n \in C_C(X)$ מהלמה אורייסון, נובע שלכל $N \in \mathbb{N}$ קיימת $\{f_N\}_{N=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות עלידי גדר f_N

$$\forall N \in \mathbb{N}, f_N := \max_{i \in [N]} \{g_i\}$$

ומתקיים ש- $\{f_N\}_{N=1}^{\infty} \subseteq C_C(X)$.
 אם-כך, אנחנו מקיימים את תנאי משפט התכנסות המונוטוניות ומשימוש כפול בו נקבל

$$\mu(V) = \int_X \mathbb{1}_V d\mu = \int_X \lim_{N \rightarrow \infty} f_N d\mu = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_X f_N d\mu = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_X f_N d\lambda = \int_X \lim_{N \rightarrow \infty} f_N d\lambda = \int_X \mathbb{1}_V d\lambda$$

כלומר μ, λ מסכימות על קבוצות פתוחות מדידות.

יהי $0 > \varepsilon, \lambda$ מידה רדון ולכן לכל $E \in \mathbb{B}(X)$ קיימת קבוצה פתוחה $U \subseteq X$ וקבוצה סגורה $F \subseteq U$ כך ש- $\lambda(U \setminus F) < \varepsilon$.
 במקרה נובע מהיות $E \subseteq U \setminus F$ ולכן $\mu(E) < \varepsilon$.
 אבל $\mu(U \setminus F) = \lambda(U \setminus F)$ כי הפרש של פתוחה וסגורה היא פתוחה, ולכן $\varepsilon < \lambda(U \setminus F) = \lambda(U) - \lambda(F) = \lambda(U) - \mu(U)$.

כלומר

$$\mu(U) - \mu(E) \leq \mu(U) - \mu(F) = \mu(U \setminus F) < \varepsilon \Rightarrow \mu(U) - \varepsilon < \mu(E)$$

ולכן מתקיים

$$\begin{aligned} \lambda(E) - \varepsilon &\stackrel{\text{מונוטוניות}}{\leq} \lambda(U) - \varepsilon \stackrel{\lambda(U) = \mu(U)}{=} \mu(E) \stackrel{\text{מונוטוניות}}{\leq} \mu(U) \stackrel{\mu(U) = \lambda(U)}{=} \lambda(U) \stackrel{*}{<} \lambda(E) + \varepsilon \\ &\Rightarrow \lambda(E) - \varepsilon < \mu(E) < \lambda(E) + \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < \mu(E) - \lambda(E) < \varepsilon \Leftrightarrow |\mu(E) - \lambda(E)| < \varepsilon \end{aligned}$$

זהו שוויון נובע כי $\mu(E) = \lambda(E)$ לכל $E \in \mathbb{B}(X)$ ולכן μ מידה רדון, ומחכו מידה רדון נובע כי כל קבוצה מדידה $m \in E$ היא רגולרית פנימית וחיצונית.

□

* 6 התכנסות חלשה-

6.1 טענה מהבחן

טענה מהבחן 6.1.1: יהי X מרחב מטרי קומפקטי ו- \sup_{μ_n} סדרה של פונקציות רציפות שהינה צפופה ב- $C(X)$ ביחס למטריקת $\|f_k\|_\infty$ (טענה מהבחן): אם קיים הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_k d\mu_n$ לכל k אז קיימת מידת הסתברות μ עבורה $\mu \xrightarrow{*}$.

הוכחה: תהי $f \in C(X)$ ו- $\varepsilon > 0$. מהצפיפות נובע שקיים k_0 כך שמתקיים $\|f - f_{k_0}\|_\infty < \varepsilon$ אז לכל

$$\left| \int f d\mu_n - \int f_{k_0} d\mu_n \right| \leq \|f - f_{k_0}\|_\infty < \varepsilon$$

וגם עבור $m \in \mathbb{N}$

$$\left| \int f d\mu_m - \int f_{k_0} d\mu_m \right| < \varepsilon$$

ונרצה להראות שזאת סדרת קושי, כלומר

$$\left| \int f d\mu_n - \int f d\mu_m \right| \leq \left| \int f - f_{k_0} d\mu_n \right| + \left| \int f_{k_0} d\mu_n - \int f_{k_0} d\mu_m \right| + \left| \int f_{k_0} - f d\mu_m \right| \leq \varepsilon + \left| \int f_{k_0} d\mu_n - \int f_{k_0} d\mu_m \right|$$

אבל מההנחה זו זאת סדרת קושי ולכן עבור n, m גדולים דיו

$$\left| \int f_{k_0} d\mu_n - \int f_{k_0} d\mu_m \right| < \varepsilon \implies \left| \int f d\mu_n - \int f d\mu_m \right| < 3\varepsilon$$

ולכן $\{\int f d\mu_n\}$ זאת סדרת קושי ב- \mathbb{R} .

נגדיר $L(f) := \lim_{n \rightarrow \infty} \int f d\mu_n$ והגבול הזה קיים לכל $f \in C(X)$.

אבל μ הן מידות הסתברות ולכן אם $f \geq 0$ אז $L(f) \geq 0$ ו- $L(1) = 1$ ו- $\|f\|_\infty \leq \|f\|$ ו- $L(f) \leq \|f\|$.

משמעות הציגה של רעיון נובע ש- μ מידת הסתברות כזו (כי קיימת ויחידה μ מידת הסתברות כזו) ולכן $\int f d\mu_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int f d\mu$ לכל $f \in C(X)$ ו- $\mu \xrightarrow{*}$ בבדיקה ההגדירה μ .

□

6.2.1 הגדרה

$$\mathcal{P}(X) := \{\mu : \mathbb{B}(X) \rightarrow [0, \infty] \mid \mu(X) = 1 \text{ } (\mu \text{ is a probability measure)}\}$$

הדרה 6.2.2 (מרחב בין מידות הסתברות) : תהינה $\mathcal{P}(X)$ ותהיה $\mathbb{B}(X)$ קבוצה צפופה ב- $C(X)$ כך ש- $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C(X)$ ושתי מידות הסתברות על $\mathbb{B}(X)$ מוגדרות על ידי $\mu(A) = \int_A f_n d\nu$ ו- $\nu(A) = \int_A g_n d\mu$.

$$d(\mu, \nu) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \|f_n\|_{\infty}} \left| \int_X f_n \, d\mu - \int_X f_n \, d\nu \right|$$

למה 6.2.1: המרחק בין מידות הסתברות היא מטריקה על $(\mathcal{P}(X), d)$ ולכן $(\mathcal{P}(X), d)$ הוא מרחב מטרי.
 הוכחה: ברור כי d איזולית וסימטרית ומקיים את אידויוון המשולש. נשאר להוכיח שם $\mu = \nu \implies d(\mu, \nu) = 0$.
 מתקיים

$$0 = d(\mu, \nu) \implies \forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_X f_n \, d\mu = \int_X f_n \, d\nu$$

שכן זו הדרך היחידה שנחבר מספרים חוביים ושהיה אפס.
 או לכל $g \in C(X)$ קיימת תחת-סדרה $g = f_{n_k} \rightarrow$ במידה שווה (בנורמת sup) ומהוות g חסומה הרו שהחל ממוקם מסוים איברי הסדרה מקיימים
 $\|f_{n_k}\|_\infty \leq \|g\|_\infty + 1$
 הפונקציה הקבועה $1 + \|g\|_\infty$ אינטגרבילית ביחס ל- μ, ν (מידות הסתברות) או משפט ההתקנסות הנשלטה

$$\int g \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_{n_k} \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_{n_k} \, d\nu = \int g \, d\nu$$

משפט 6.2.1: אם X מרחב מטרי קומפקטי אז $(\mathcal{P}(X), d)$ מרחב מטרי קומפקטי.

הוכחה: תהי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C(X)$ ותהי $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ונראה שיש לה תורת-סדרה מתכנסת.
 מיהו $\int_X f_1 d\mu_{n,1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{}$ α_1 ב- \mathbb{C} , מבולציאנו-וירשטראס נקבל $\{\int_X f_1 d\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה ב- \mathbb{C} .
 נמשיך בטיעון דומה לכל f_k ונקבל מטעון אלכסון כי תת-הסדרה $\{\mu_{n,n}\}_{n=1}^{\infty}$ מקיימת α_k לכל $k \in \mathbb{N}$.
 בהינתן $N < n, m \in \mathbb{N}$ $\int_X f_i d\mu_{n,n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha_k$ $\|f_i - g\| < \varepsilon$ ובנוסף קיימים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $i \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$\left| \int_X f_i \, d\mu_{n,n} - \int_X f_i \, d\mu_{m,m} \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

שכן זאת סדרת קושי, אז

$$\begin{aligned}
\left| \int_X g \, d\mu_{n,n} - \int_X g \, d\mu_{m,m} \right| &\leq \left| \int_X g \, d\mu_{n,n} - \int_X f_i \, d\mu_{n,n} \right| + \left| \int_X f_i \, d\mu_{n,n} - \int_X f_i \, d\mu_{m,m} \right| + \left| \int_X f_i \, d\mu_{m,m} - \int_X g \, d\mu_{m,m} \right| \\
&\leq \int_X |g - f_i| \, d\mu_{n,n} + \left| \int_X f_i \, d\mu_{n,n} - \int_X f_i \, d\mu_{m,m} \right| + \int_X |f_i - g| \, d\mu_{m,m} \\
&\leq \|g - f_i\|_\infty \mu_{n,n}(X) + \left| \int_X f_i \, d\mu_{n,n} - \int_X f_i \, d\mu_{m,m} \right| + \|g - f_i\|_\infty \mu_{m,m}(X) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon
\end{aligned}$$

כלומר $\left\{ \int_X g \, d\mu_{n,n} \right\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי ב- \mathbb{C} ולכן מתחננת ב- \mathbb{C} .

נגיד $\Lambda : C(X) \rightarrow \mathbb{C}$ על-ידי $\Lambda g := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X g \, d\mu_{n,n}$ ולכן מושפט הציגה של ריז קיימת מדיה μ המתאימה ל- Λ . נבחן כי (X, μ) ב- $\mathcal{P}(X)$.

נניח כי $\mu \in \mathcal{P}(X)$ מכך $\int_X \mathbb{1}_X d\mu = 1$

7.1 משפט Krylov–Bogolyubov

7.1.1 אם X מרחב מטרי קומפקטי ו- $X \rightarrow X$ רציפה אוזי קיימת μ מידת הסתברות T -איינוריאנטית (כלומר X על $T_*\mu = \mu$) הוכחה: נבחר $x_0 \in X$ ונתבונן על

$$\mu_n := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{T^k(x_0)} \in \mathcal{P}(X)$$

מהקומפקטיות של $\mathcal{P}(X)$ נובע שקיים μ מידת הסתברות עכורה $\mu \xrightarrow{*} \mu$ ונראה שהיא T -איינוריאנטית: תהי אוזי,

$$\begin{aligned} \left| \int f d\mu - \int f \circ T d\mu \right| &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \int f d\mu_{n_k} - \int f \circ T d\mu_{n_k} \right| \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n_k} \sum_{i=0}^{n_k-1} (f - f \circ T)(T^i(x_0)) \right| \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n_k} \sum_{i=0}^{n_k-1} f(T^i(x_0)) - f(T^{i+1}(x_0)) \right| \\ &\stackrel{(*)}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{n_k} |f(x_0) - f(T^{n_k}(x_0))| \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2\|f\|_\infty}{n_k} = 0 \end{aligned}$$

כאשר $(*)$ נובע מכך שהוא טור טלסקופי.

מיהידות במשפט ההציגה של ריס נסיק $T_*\mu = \mu$

□

8 שלושת העקרונות של Littlewood

8.1 משפט לוין

משפט לוין 8.1.1 (משפט לוין): יהיו X מרחב האוסדרוף קומפקטי מקומי, תהיה μ מידת רדון על X ותהיה $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ מדידה. אם קיימת A כך ש- $\infty < \mu(\{x \mid f(x) \neq g(x)\}) < C_C(X)$ אז לכל $0 < \varepsilon <$ קיימת $g \in C_C(X)$ עבורה ε מתקיימת $\mu(\{x \mid f(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon$.

הוכחה עבורי מרחב מידה סופי: נוכיחה את משפט לוין במקרה של מרחב מידה סופי ונשתמש במשפט אגרוב/אגורוף.

יהו $0 > \varepsilon$, אם $f = \mathbf{1}_E$ עבור E מדידה, מוגדרות נוכחים למצוא $F \subseteq E \subseteq U$ כך ש- F קומפקטיבית ו- U פתוחה ו- $\varepsilon < \mu(U \setminus F)$. מהלמה של אוריסון נוכחים בחור U $\leq g \leq \mathbf{1}_K$ רציפה וזה מסיים עבור פונקציות מציינן.

עבור פונקציות פשוטות שהן הסכום של k פונקציות מצייניות השתמש בלוזין עבור פונקציה מציינית לכל אחת מהן כשנורוק כל פעם $\frac{\varepsilon}{k}$ ושוב נסימן. אם f מדידה ניקח סדרה של פשוטות המתכנסות אליה $f \rightarrow s$. משפט לוין לפונקציות פשוטות נוכחים לכל n בחור g_n המתלבדת עם s_n מחוץ לקובוצה מידה $2^{-n} \cdot \frac{\varepsilon}{2}$.

או מחוץ לאיחוד כל הקבוצות האלו שמתה-אדטיביות תהיה לו מידה $\frac{\varepsilon}{2}$ לכל היותר מתקיים $f \rightarrow g$. בעזרה משפט אגרוב/אגורוף נוכחים זורוק עוד קבוצה מידה $\frac{\varepsilon}{2}$ שמחוץ אליה $f \rightarrow g_n$ במידה שווה ואז קיבלנו שמחוץ לקובוצה במידה ε יש סדרת פונקציות המתכנסת ל- f במידה שווה, כלומר f רציפה בקבוצה זו. \square

8.2 משפט אגרוב/אגوروֹף

משפט 8.2.1 (משפט אגרוב/אגوروֹף): *יהי (X, \mathcal{A}, μ) מרחב מידת סופי ונינה כי $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ מתחננת כמעיטה-תמיד ל- μ מידת. אז לכל $0 < \varepsilon < \mu(E) < f_n(x) - f(x)$ עם $E \in \mathcal{A}$ קיימת ε ב- E^c ש- f_n במידה שווה ב- E^c .*

הוכחה: יהי $\varepsilon > 0$ ונסמן

$$n_k(x) := \min \left\{ n \mid \forall N > n, |f_N(x) - f(x)| < \frac{1}{k} \right\} \quad (\min(\emptyset) = \infty)$$

עבור $x \in X$, $n_k(x) < \infty$ מתקיים $|f_N(x) - f(x)| < \frac{1}{k}$ *ולכן מהנתון על התכנסות כמעיטה-תמיד נובע ש-* $n_k^{-1}(\{\infty\})$ *היא מידת אפס לכל $k \in \mathbb{N}$. נסתכל על הקנות $(0, m)$ עבור $\mathbb{N} \in m$ ונקבל ש- n_k מידת:*

$$x \in n_k^{-1}((0, m)) \iff n_k(x) \geq m \iff x \in \bigcup_{N \geq m} \left\{ x \mid |f_N(x) - f(x)| < \frac{1}{k} \right\}$$

והרימנית מידת, אז

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} n_k^{-1}((m, \infty]) = n_k^{-1}(\{\infty\})$$

רציפות מלמעלה (ניתן להשתמש כי הוכיחו שהמרחב מידת סופי).

או לכל $\mathbb{N} \in k$ הסדרה $n_k^{-1}((m, \infty])$ מתחננת ל-0. *לכל $\mathbb{N} \in k$ נבחר $m_k > m_k$ מתקיים*

$$\mu(n_k^{-1}((m, \infty])) < \varepsilon \cdot 2^{-k} \implies \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} n_k^{-1}((m_k, \infty))\right) < \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon \cdot 2^{-k} = \varepsilon$$

או $N \geq m_k$ $n_k(x) \leq m_k(x)$ *ולכן לכל $x \in E^c$ מתקיים $x \notin n_k^{-1}((m_k, \infty))$ כלומר לכל $x \in E^c$ $|f_N(x) - f(x)| < \frac{1}{k}$ מתקיים*

□

9 מרחבי L^p

9.1 איזומורפיזם אגן

משפט 9.1.1 (אי-איזומורפיזם אגן): יהיו (X, \mathcal{A}, μ) מרחב הסתברות ותהי $\varphi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ קמורה.

אם $f : X \rightarrow (a, b)$ פונקציה מדידה, אז

$$\varphi \left(\int_X f d\mu \right) \leq \int_X \varphi \circ f d\mu$$

הוכחה: נסמן $\beta := \sup_{s \in (a, T)} \left\{ \frac{\varphi(T) - \varphi(s)}{T-s} \right\}$ ונסמן $T := \int_X f d\mu$
אוילר $s < T$ מתקיים

$$\varphi(T) - \varphi(s) \leq \beta(T-s) \implies \varphi(T) - \beta(s-T)$$

והאי-איזומורפיזם מתקיים טריוויאלית עבור $s = T$.
לכל $s < T$ מהקירות של φ מתקיים

$$\beta \leq \frac{\varphi(s) - \varphi(T)}{s - T}$$

ולכן נובע

$$\varphi(s) \geq \varphi(T) + \beta(s-T)$$

ולכן אי-האיזומורפיזם מתקיים לכל $s \in (a, b)$ ולכל $x \in X$ מתקיים מהיות המרחב מרחב הסתברות

$$\varphi(f(x)) \geq \varphi(T) + \beta(f(x)-T) \implies \int \varphi \circ f d\mu \geq \varphi \left(\int f d\mu \right) + \beta \left(\int f - T d\mu \right) = \varphi \left(\int f d\mu \right) + \underline{\beta(T - T\mu(X))}$$

□

9.2 אִ-שְׁיוֹוֹן הַולְדֵר וְאִ-שְׁיוֹוֹן מַנִּיקּוּבֶסְקִי

משפט 9.2.1 (אִ-שְׁיוֹוֹן הַולְדֵר וְאִ-שְׁיוֹוֹן מַנִּיקּוּבֶסְקִי): יהי (X, \mathcal{A}, μ) מרחב מידה ונניח כי $1 \leq p, q \leq \infty$ ומקיימים

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

או לכל f, g מדידות אִ-שְׁלִילִיות מתקיימים

$$(1) \int_X fg d\mu \leq \left(\int_X f^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X g^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$(2) \left(\int_X (f+g)^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_X f^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X g^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

כאשר הראשון זה אִ-שְׁיוֹוֹן הַולְדֵר והשני הוא אִ-שְׁיוֹוֹן מַנִּיקּוּבֶסְקִי ואמ $p = q = 2$ זה אִ-שְׁיוֹוֹן קָרוֹשִׁי-שָׂוּרֶץ.

הוכחה: נוכחה את (1) בהנחה ש- $\|fg\|_1 \leq 1$ וגראה כי $\log \log fg \leq \|f\|_p = \|g\|_q = 1$ נקבל

$$\log(fg) = \log f + \log g = \frac{\log f^p}{p} + \frac{\log g^q}{q} \leq \log \left(\frac{f^p}{p} + \frac{g^q}{q} \right)$$

ואם נעלם את e בחזקת אלו נקבל

$$(\star) \quad fg \leq \frac{f^p}{p} + \frac{g^q}{q}$$

אִ-שְׁיוֹוֹן זה טריוויאלי במקרה שבו $fg = 0$ וכן נוכל להתעלם מההנחה ש- $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$ נקבל

$$\int_X \frac{f^p}{p} + \frac{g^q}{q} d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

ואם ניקח אינטגרל על שני האגפים, (\star) יביא לנו $\|fg\|_1 \leq 1$.

כדי להוכיח את (2) נניח ש- $\|f\|_p = \|g\|_p = 1$ ונשתמש בקמירות x^p ונקבל שלכל $t \in (0, 1)$

$$((1-t)f + tg)^p \leq (1-t)f^p + tg^p$$

ושוב multilinearity ומונוטוניות

$$\int_X ((1-t)f + tg)^p d\mu = (1-t) + t = 1$$

ולכן

$$\|(1-t)f + tg\|_p^p \leq 1$$

כלומר $\|(1-t)f + tg\|_p \leq 1$.

ללא ההנחה, כתוב את $f + g$ כממוצע משוקלל של פונקציות מנורמה 1, כלומר $f + g = \|f\|_p \bar{f} + \|g\|_p \bar{g}$ ונקבל

$$\|f + g\|_p = \left\| \bar{f} \cdot \|f\|_p + \bar{g} \|g\|_p \right\|_p = (\|f\|_p + \|g\|_p) \cdot \left\| \bar{f} \frac{\|g\|_p}{\|f\|_p + \|g\|_p} + \bar{g} \frac{\|f\|_p}{\|f\|_p + \|g\|_p} \right\|_p$$

נבחן שגורם המכפלת מימין הוא בידוק ביטוי של נורמה של ממוצע משוקלל של פונקציות מנורמה 1 ולכן נוכל להסום אותו מלעיל עלי-ידי 1 ולקבל

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

□

9.3 $\mathcal{L}^p(\mu)$ הוא מרחב פסודו-נורמי מעל \mathbb{C}

משפט 9.3.1 $\mathcal{L}^p(\mu)$ הוא מרחב פסודו-נורמי מעל \mathbb{C} .

הוכחה:

משפט 9.3.2: אם $p, q \in [1, \infty]$ חזקות צמודות ו- \star אזי $f \in \mathcal{L}^p(\mu), g \in \mathcal{L}^q(\mu)$, $f \cdot g \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

הוכחה: עבור $p, q \in (1, \infty)$ הטענה נובעת מאי-שוויון הולדר. אם $1 = p = q = \infty$ מתקיים $|g(x)| \leq \|g\|_\infty$ ווגם $g \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$ -כמעט תמיד ולכן $\int_X |f \cdot g| d\mu \leq \int_X |f| \cdot \|g\|_\infty d\mu = \|g\|_\infty \cdot \int_X |f| d\mu < \infty$.

$$\|f \cdot g\|_1 = \int_X |f \cdot g| d\mu = \int_X |f| \cdot |g| d\mu \stackrel{(*)}{\leq} \int_X |f| \cdot \|g\|_\infty d\mu = \|g\|_\infty \cdot \int_X |f| d\mu < \infty$$

כלומר $\|f \cdot g\|_1 < \infty$ וכך $f \cdot g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ ולכן $f \cdot g \in \mathcal{L}^p(\mu)$.

משפט 9.3.3 אי-שוויון המשולש של נורמה (p) : אם $p \in [1, \infty]$ אזי לכל $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ מתקיים $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

הוכחה: אם $(1, \infty) \ni p$ או הטענה נובעת מאי-שוויון מניקובסקי ואחרת הטענה נובעת מאי-שוויון המשולש של ערך המוחלט ב- \mathbb{R} .
הוכחה: נשאר להראות הומוגניות – אם $\lambda \in \mathbb{C}$ ו- $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ אז $\lambda \cdot f \in \mathcal{L}^p(\mu)$.

$$\int_X |\lambda f|^p d\mu = \int_X (|\lambda| \cdot |f|)^p d\mu = \int_X |\lambda|^p \cdot |f|^\lambda d\mu = |\lambda|^p \int_X |f|^p d\mu < \infty$$

כאשר השתמשנו בתכונות ערך המוחלט ומהומוגניות האינטגרל למכפלה בקבוע.

אי-השוויון האחרון נובע מהיות $\int |f|^p d\mu < \infty$ כי $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ ומஹות $|\lambda|^p < \infty$ ולכן המכפלה היא סופית.
הערה: זה מרחב פסודו-נורמי כי זו לא באמת נורמה $\|f\|_p = 0 \nRightarrow f \equiv 0$ אבל $\|f\|_p = 0$ אכן גורר $f = 0$.

9.4 טענות חשובות מתרגילי הבית

משפט 9.4.1 (טענות חשובות מתרגילי הבית):

משפט 9.4.2 (הכלת מרחבי (L^p, μ)): יהיו (X, \mathcal{A}, μ) מרחב מידה ס-סופי ויהיו $q \leq p \in [1, \infty]$.

$$L^p(\mu) \subseteq L^q(\mu) \iff \mu(X) < \infty .1$$

$$L^q(\mu) \subseteq L^p(\mu) \iff \exists \varepsilon > 0, \forall A \in \mathcal{A}, \mu(A) < \varepsilon \implies \mu(A) = 0 .2$$

משפט 9.4.3 (הוכנות L^∞): נניח שגם (X, \mathcal{A}, μ) מרחב מידה סופי ותהי $f \in L^\infty(\mu)$.

1. אם $\|f\|_\infty = 1$ או הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ המוגדרת על-ידי $a_n = \int_X |f|^n d\mu$ מתחנסת

2. אם $\|f\|_\infty > 0$ אז

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|f\|_{n+1}^{n+1}}{\|f\|_n^n} = \|f\|_\infty$$

9.5.1 לכל $[1, \infty]$, המרחב הנורמי $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ הוא מרחב בnx.

משפט 9.5.1 לכל $p \in [1, \infty]$ המרחב הנורמי $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ הוא מרחב בnx. הוכחה:

נניח ש- $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ סדרת קושי, או קיימת תת-סדרה המקיים

$$\|f_{(n_i)+1} - f_{n_i}\|_p < 2^{-i}$$

ונגיד

$$g_k := \sum_{i=1}^{k-1} |f_{(n_i)+1} - f_{n_i}|$$

מאי-שווין מניקובסקי נקבע

$$\|g_k\|_p \leq \sum_{i=1}^{k-1} \|f_{(n_i)+1} - f_{n_i}\|_p \leq 1$$

ולכן $(g_k) \in L^p(\mu)$ לכל k וכן ... וממשפט הה收敛ות המונוטונית מתקיים עבור

$$\int g^p d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int g_k^p d\mu \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|g_k\|_p^p \leq 1$$

ולכן $g \in L^p(\mu)$ ובפרט $\|g\|_p < \infty$.

$$f = f_{n_1} + \sum_{i=1}^{\infty} (f_{(n_i)+1} - f_{n_i})$$

מתכנסת בהחלה μ -כמעט תמיד ונגיד $f = \lim_{i \rightarrow \infty} f_{n_i}$ היכן שהטור טלסקופי נובע f ויתר על-כן

$$\|f\|_p \leq \|f_{n_1}\|_p + \|g\|_p < \infty \implies f \in L^p(\mu)$$

מכך שהסדרה $\{f_n\}$ קושי נובע שלכל $\varepsilon > 0$ יש N כך שכל $n, m > N$ מתקיים $\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$.

$$\|f - f_m\|_p^p = \int \lim_{i \rightarrow \infty} |f_m - f_{n_i}|^p d\mu \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \int |f_m - f_{n_i}|^p d\mu = \liminf_{i \rightarrow \infty} \|f_m - f_{n_i}\|_p^p < \varepsilon^p \implies \|f - f_n\|_p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

נניח ש- $\infty = p$ ונסמן 2.

$$A_n := \{x \in X \mid |f_n| \cdot \|f_n\|_\infty\} \quad B_{n,m} := \{x \in X \mid |f_n - f_m| > \|f_n - f_m\|_\infty\}$$

במידה ש- $f_n \rightarrow f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ היא קבוצה מ- μ -מידה אפס (מהגדרת $E = \bigcup_{n,m} B_{n,m} \cup \bigcup_n A_n$ ומכך ש- $\|f - f_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$).

□

9.6 צפופה ב- $L^p(\mu)$

משפט 9.6.1 \mathcal{G} צפופה ב- $L^p(\mu)$: נסמן ב- \mathcal{S}_f את אוסף הפונקציות הפשוטות $s : X \rightarrow \mathbb{C}$ המקיימות $\int_X |s(x)|^p d\mu < \infty$. אזי לכל $s \in \mathcal{S}_f$, $p \in [1, \infty)$.

הוכחה: תהי $f \in L^p(\mu)$. סדרת הפונקציות הפשוטות שמתכנסת אליה ונבחין s_n ב- \mathcal{S}_f אשר $0 \leq s_n \leq f$ ו- $\int_X |s_n(x)|^p d\mu \rightarrow 0$ (נוקודתיות ומתקיים $|s_n - f| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$).

$$0 \leq |f - s_n|^p \leq f^p$$

לכן ממשפט ההחכניות הנשלטת

$$\|f - s_n\|_p^p = \int |f - s_n|^p d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

כל $f \in L^p(\mu)$ היא צירוף לינארי של פונקציות איזומיליות ב- $L^p(\mu)$ ומכאן הטענה. \square

הערה (אי-נכונות הטענה ב- $L^\infty(\mathbb{R})$): \mathcal{G} איינה צפופה ב- $L^\infty(\text{Leb}_{\mathbb{R}})$: ניקח $f(x) = 1$ לכל $x \in \mathbb{R}$ ו- $s(x) = 0$ כי $\int_{\mathbb{R}} |f(x) - s(x)|^\infty d\mu = \infty$.

תהיה $s \in \mathcal{S}$ ולכן קיימת E כך $\mu(E) < \infty$ ו- s נתמכת על E ולכן

$$s(x) = 0 \quad \forall x \in E^c$$

אזי

$$\|f - s\|_\infty = \text{ess sup}_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - s(x)|$$

אבל $\|f - s\|_\infty = \infty$ ו- $\mu(E^c) = \infty$ ($\mu(E) < \infty$) ו- $\text{ess sup}_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - s(x)| = 1$).

$$|f(x) - s(x)| = |1 - 0| = 1 \implies \|f - s\|_\infty \geq 1$$

או אי אפשר לבנות סדרה שמתכנסת ל-0 ולכן \mathcal{G} לא צפופה ב- $L^\infty(\text{Leb}_{\mathbb{R}})$.

9.7 קירוב על-ידי פונקציות רציפות

משפט 9.7.1 (קירוב על-ידי פונקציות רציפות): יהיו X מרחב האוסדרוף kompaktijski-makomiyah ותהי μ ממידת רדון על X .
לכל $p \in [1, \infty)$ הקיוצה $C_C(X)$ צפופה ב- $L^p(\mu)$.

הוכחה: מטענה שראינו מספיק להוכיח ש- $\overline{C_C(X)} \supseteq \mathcal{S}_f$.
תהי $s \in \mathcal{S}_f$ אז s עומדת בתנאי משפט לוין ולכן לכל $\epsilon > 0$ קיימת פונקציה $g \in C_C(X)$ עבורה $\mu(\{s \neq g\}) < \epsilon$.
יתר על-כן, ניתן לבחור g כך ש- $s \leq \sup g$ ולכן

$$\|g - s\|_p^p = \int |g - s|^p d\mu = \underbrace{\int_{\{s=g\}} |g - s|^p d\mu}_{=0} + \underbrace{\int_{\{s \neq g\}} |g - s|^p d\mu}_{\mu(\{s \neq g\}) < \epsilon} \leq 0 + \epsilon(2\|s\|_\infty)^p$$

□

הערה (אי-נכונות הטענה ב- L^∞): הדוגמה מהטענה הקודמת מראה את אי-נכונות הטענה גם כאן: מהגדה, אם $f \in C_C(\mathbb{R})$ או קיים $M \in \mathbb{R}^+$ כך שמהוון לקטע $[-M, M]$ מתקיים $f(x) = 0$. ניקח $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ כך $g(x) = 1$ עבור כל $x \in [-M, M]$ ו- $\|g\|_\infty = 1$. אם ננסה לקרב את g עם כל $f \in C_C(\mathbb{R})$ נקבל

$$\|g - f\|_\infty = \text{ess sup}_{x \in \mathbb{R}} |1 - f(x)|$$

או מהיות $f \in C_C(\mathbb{R})$ נובע שבעור $M > |x|$ כלשהו מתקיים

$$|g(x) - f(x)| = |1 - 0| = 1$$

כלומר $1 \geq \|g - f\|_\infty$ ולכן לא ניתן לקרב ו- $\|g\|_\infty$ לא צפופה ב- $L^\infty(\mathbb{R})$.

10. יחסים בין מידות

תהיינה ν, μ מידות על מרחב מדיד (X, \mathcal{A}) .

הדרה 10.0.1 (מידה רציפה בהחלה, מידות שקולות): נאמר $\nu \ll \mu$ רציפה בהחלה ביחס ל- μ ונסמן $\mu \ll \nu$ אם ורק אם

$$\forall E \in \mathcal{A}, \mu(E) = 0 \implies \nu(E) = 0$$

נגדן שהמידות הן שקולות ונסמן $\mu \sim \nu$ אם ורק אם $\mu \ll \nu$ וגם $\nu \ll \mu$, כלומר $\nu(E) = 0 \iff \mu(E) = 0$.

הדרה 10.0.2 (מידות סינגולריות): נאמר $\nu \ll \mu$ ו- μ סינגולריות ונסמן $\nu \perp \mu$ אם ורק אם קיימות זורות כך שמתקיים $(\nu(B) = \mu(A) = 0 \iff A \cup B = X)$.

10.1 טענה שקולת לרציפות בהחלה במרחב סופי

משפט 10.1.1 (טענה שקולת לרציפות בהחלה במרחב סופי): אם μ סופית או $\nu \ll \mu$ אם ורק אם לכל $0 < \delta < \epsilon$ קיים $\delta < \epsilon$ כך שאם $\delta < \epsilon$ אז $\nu(A) < \delta$.

הוכחה: \iff נניח כי $\nu \ll \mu$. יהיו $0 < \epsilon < \mu$ ונניח בשילולו שלכל $n \in \mathbb{N}$ קיימת A_n עם $n \ll \epsilon$ כך ש- $\epsilon > \mu(A^n)$. לפי בורל-קנטלי $0 = \bigcap_n A_n = \bigcup_n A_n$ אבל מרציפות בהחלה ומוסיפות μ

$$\mu\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n\right) = \mu(\limsup A_n) \geq \limsup \mu(A_n) \geq \epsilon$$

□ $\mu(A) = 0 \iff \nu(A) < \delta$ ולכן $\nu(A) < \epsilon$ ולכן $\nu(A) = 0$.

10.2 טענה שקולת לרציפות בהחלה במרחב ס-סופי

משפט 10.2.1 (טענה שקולת לרציפות בהחלה במרחב ס-סופי): אם μ מידת ס-סופית ו- ν מידת כלשהי או $\mu \ll \nu$ אם ורק אם $\mu|_A \ll \nu|_A$ לכל A עם $\nu(A) < \infty$.

הוכחה: \iff כי אם $\mu \ll \nu$ זה נכון גם לצטום.

נניח $X = \bigcup_n A_n$ עם $\infty < \nu(A_n) = 0$ ונניח כי $\mu(E) = 0$ ומהיות $0 = \mu(E) = \mu(E \cap A_n) + \dots + \mu(E \cap A_1)$ המידה (כי חיתוך קבוצות מדידות הוא קבוצה מדידה) ולכן $\nu(A_n) = 0$ ומההנחה קיבל

$$\nu|_{A_n}(E) = 0 = \nu(E \cap A_n) \implies \nu(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E \cap A_n) = 0$$

□

10.3 תנאי שקול למידת האפס

משפט 10.3.1 (אם מידה רציפה בהחלה וסינגולרית ביחס למידה אחרת היא מידת האפס): אם $\nu \ll \mu$ וגם $\nu \perp \mu$ אז μ היא מידת האפס.

הוכחה: מהסינגולריות של המדידות נובע כי μ נתמכת על הקבוצה A כך ש- $0 = \nu(A) = \mu(A)$, כלומר $\mu(A) = 0$.

10.4 תנאי שקול לסינגולריות על מדידות חיוביות

משפט 10.4.1 (תנאי שקול לסינגולריות על מדידות חיוביות): תהיינה ν, μ מידות חיוביות על X . אם $\nu \ll \mu$ מידות חיוביות על X .

הוכחה: \iff אם $\nu \perp \mu$ אז קיימת קבוצה $A \subset X$ מדידה כך ש- $\nu(A) = 0$ ו- $\mu(A) = 0$, כנדרש.

נבחר $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת קבוצות כך שמתקיים $\nu(A_n^c) < 2^{-n}$, $\nu(A_n^c) < 2^{-n}$.

ונדריך $A = \limsup A_n$ ובורל-קנטלי נקבל $0 = \mu(A) = \nu(A) \leq \liminf \nu(A_n^c) = \liminf \nu(A_n^c) = 0$; מצד שני מהלמה של פאטו $\mu(A) = 0$.

10.5 מסקנה מתרגילי הבית

משפט 10.5.1 (מסקנה מתרגילי הבית): $\nu, \mu, \nu_1, \nu_2, \dots$ מידות חיוביות על X ונדריך $\nu = \sum_{i=1}^{\infty} \nu_i$ אזי

$$(1) \forall i \in \mathbb{N}, \nu_i \perp \mu \implies \nu \perp \mu \quad (2) \forall i \in \mathbb{N}, \nu_i \ll \mu \implies \nu \ll \mu$$

11 מרחבי הילברט

11.1 משפט ההצגה של Riesz–Fréchet

תזכורת:

$$\mathcal{H}^* := \{\phi \in \text{Hom}(\mathcal{H}, \mathbb{C}) \mid \|\phi\|_{\text{op}} < \infty\}$$

משפט 11.1.1 (משפט ההצגה של Riesz–Fréchet): יהיו \mathcal{H} מרחב הילברט, ההעתקה ששולחת כל וקטור $h \in \mathcal{H}$ לפונקציונל $\phi_h(x) := \langle x, h \rangle$. (Riesz–Fréchet) הינה איזומורפיזם צמוד–lienari בין \mathcal{H} ל– \mathcal{H}^* שהיינה גם איזומטריה. הוכחה: מהגדotta המכפלה הפנימית נסיק $\phi_h \mapsto h$ היא צמודה–lienaria. מאידישוון קושיר–שוורץ לכל $1 = \|x\|$ מתקיים

$$|\varphi_h(x)| = |\langle x, h \rangle| \leq \|x\| \cdot \|h\| = \|h\|$$

נובע אם כך $\|\phi_h\|_{\text{op}} = \|h\|$ אבל $\frac{h}{\|h\|}$ הוא מנורמה 1 ומקיים $\phi_h\left(\frac{h}{\|h\|}\right) = \langle \frac{h}{\|h\|}, h \rangle = \|h\|$ ולכן ההעתקה היא איזומטריה. יהיו $\ell \in \mathcal{H}^*$ ו– $V = \ker \ell \subseteq \mathcal{H}$, או $V = \ker \ell$ תחת–מרחב סגור כי ℓ פונקציונל חסום ולכן רציף ו– V היא המקור של קבוצה סגורה $\{0\}$. אם $\ell = \phi_w$ ו– $V = \mathcal{H}$ אז $\ell = \phi_0$; $\ell = \phi_w$ ו– $V \subset \mathcal{H}$ ולכן קיים $z \in V^\perp$ כך $\ell(z) \neq 0$ או נוכחה שהוקטור $w = \frac{\ell(z)}{\|z\|^2} \cdot z$ מקיים $\ell(w) = \ell(z)$ וכאן לכל $x \in \mathcal{H}$ מתקיים

$$\begin{aligned} \ell(\ell(z) \cdot x - \ell(x) \cdot z) &= \ell(z) \cdot \ell(x) - \ell(x) \cdot \ell(z) = 0 \\ \implies \ell(z) \cdot x - \ell(x) \cdot z &\in \ker \ell = V \\ \implies \langle \ell(z) \cdot x - \ell(x) \cdot z, z \rangle &= 0 \\ \implies \ell(x) &= \langle x, \frac{\overline{\ell(z)}}{\|z\|^2} \cdot z \rangle \implies \ell = \phi_w \end{aligned}$$

□

11.2 אם μ איננה מידת האפס אז יש מידת סופית ששהוללה לה

משפט 11.2.1 : אם $\mu \neq 0$ מידת ס-סופית על מרחב מדיד (X, \mathcal{A}) , אז קיימת מידת סופית ν על (X, \mathcal{A}) כך ש- $\nu \sim \mu$.
 הוכחה: מהוות (X, \mathcal{A}, μ) מרחב מידת ס-סופית נובע שקיים אוסף $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ עם $\mu(A_n) < \infty$ לכל $n \in \mathbb{N}$ כך ש- $\nu \sim \mu$ גדרה $w : X \rightarrow [0, 1]$

$$w(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n}}{1 + \mu(A_n)} \cdot \mathbb{1}_{A_n}(x)$$

ושדייה כגבול של סדרת פונקציות שהן צירופים לינאריים סופיים של פונקציות מציינות שהן כמובן מדידות.
 נשים לב שמתקיים $0 \leq w \leq 1$ שכן לכל $x \in X$ ברור שהכיטורי איסלילי ומה-ס-סופיות נובע שקיים לפחות $N \in \mathbb{N}$ אחד כך ש- $\nu \sim x$ ולכן

$$w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n}}{1 + \mu(A_n)} \cdot \mathbb{1}_{A_n}(x) \geq \frac{2^{-n}}{1 + \mu(A_n)} \cdot \mathbb{1}_{A_n}(x) = \frac{2^{-n}}{1 + \mu(A_n)} > 0$$

בנוסף, מהוות $0 < \mu(A_n) < 1$ ולכן $1 + \mu(A_n) > 1$ וולכן $\frac{1}{1 + \mu(A_n)} \leq 1$ אז $w(x) \leq 1$.

$$0 < w \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n}}{1 + \mu(A_n)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1 \implies w(x) \in (0, 1]$$

או גדרה w מידת המוגדרת על-ידי $d\nu = w d\mu$ ראיינו שזאת מידת וש- $\mu \ll \nu$, נשאר להראות $\nu \ll \mu$, ואכן:

$$\text{תהי } E \in \mathcal{A} \text{ כך ש-} \nu(E) = \int_E w d\mu = 0.$$

מהוות $0 < w$ נסיק כי $0 = \nu(E) = \int_E w d\mu > 0$ וגם $0 > \mu(E) > 0$ נקבל כי $0 > \mu(E) > 0$ בסתייה ולכן $\nu \ll \mu$.
 מכאן ש- $\nu \ll \mu$ וכן $\nu \sim \mu$.

□

12 גזרת רדון-ניקודים

12.1 משפט גזרת רדון-ניקודים-לבג

משפט 12.1.1 (משפט גזרת רדון-ניקודים-לבג): יהיו (X, \mathcal{A}) מרחב מדיד ויהיו ν, μ שתי מידות ס-סופיות על X . אזי קיימות ויחדשות שתי מידות s, a , $\nu_a = \nu_s + \nu$ כאשר $\mu \ll \nu_a$ וגם $\mu \perp_s \nu$ (פירוק לבג). כמו כן, קיימת ויחידה $h : X \rightarrow [0, \infty]$ מדידה עבורה מתקיים $h d\nu_a = h d\mu$ ונראה ל- h גזרת רדון-ניקודים של ν_a ביחס ל- μ ונסמנה $\frac{d\nu_a}{d\mu} h \in L^1(\mu)$. יורר על-כן אם ν סופית אזי h

הוכחה:

1. נניח שהטענה כאמור ν מדידה סופית ו- μ מדידה ס-סופית ונראה את הנכונות עבור מידות ν , μ שהן ס-סופיות: המרחב (X, \mathcal{A}, ν) הוא מרחב ס-סופי נובע שקיים אוסף $\mathcal{A} = \{A_n\}_{n=1}^\infty$ של קבוצות מדידות ממדידה סופית תחת ν ובלי הגבלת הכלליות נניח שהן זרות זו מזו (תמיד ניתן להזיר אותן) כך ש- $\bigcup_{n=1}^\infty A_n = X$ ולכל $N \in \mathbb{N}$ נסמן את מרחב המידה המצוומצם

$$v_n := \nu|_{A_n} \quad \mathcal{A}_n := \mathcal{A}|_{A_n}$$

או ν מדידה על מרחב מדיד מצומצם ומהסופיות של ν נובע שגם (A_n, \mathcal{A}_n) מרחב מדידה סופי.

מ- $(*)$ נובע כי $\nu = \sum_{n=1}^\infty \nu_n$ ומההנחה ניתן לישם את הטענה עבור המידות μ ו- ν על (A_n, \mathcal{A}_n) או $\nu_n = \nu_{n,a} + \nu_{n,s}$ וגם $\mu \perp_s \nu_n$ ו- $\mu \ll \nu_{n,a}$ (אם $\mu \ll \nu_{n,a}$ אז גדריר

$$\nu_s := \sum_{n=1}^\infty \nu_{n,s} \quad \nu_a := \sum_{n=1}^\infty \nu_{n,a}$$

ונקבל אם כך

$$\nu = \sum_{n=1}^\infty \nu_n = \sum_{n=1}^\infty \nu_{n,a} + \nu_{s,n} = \sum_{n=1}^\infty \nu_{n,a} + \sum_{n=1}^\infty \nu_{s,n} = \nu_a + \nu_s$$

ולכל $n \in \mathbb{N}$

1. אם $\nu_a(E) = \sum_{n=1}^\infty \nu_{n,a}(E) = 0$ אז $\mu(E) = 0$ $E \in \mathcal{A}_n$ ולכן $\mu \ll \nu_a$ ו- $\mu \perp_s \nu_{n,a}$ ולכן $\mu(A^c) = \nu_{n,s}(B^c) = 0$ $A, B \in \mathcal{A}$.
2. מכיוון $\nu_a \perp_s \nu_s$ ולכן קיימות מדידות זרות כך ש- $\nu_a \perp_s \nu_s$ ו- $\nu_s(B^c) = 0 = \mu(A^c) \Rightarrow \nu_s \perp \mu$

2. נניח ש- ν מדידה סופית.

מטענה שראינו נובע שקיימת פונקציה מדידה וחובبية $w : X \rightarrow (0, 1]$ שעבורה $d\mu = w d\nu$ היא ממשה סופית אז גדריר את המידה הסופית $f \in L^2(\lambda)$ מתקיים $d\lambda = d\nu + w d\mu$

$$\left| \int f d\nu \right| \leq \int |f| d\nu \leq \int |f| (d\nu + w d\mu) = \int |f| \cdot 1 d\lambda \stackrel{\text{קושי-שווין}}{\leq} \sqrt{\int |f|^2 d\lambda} \sqrt{\int |1|^2 d\lambda} = \sqrt{\lambda(X)} \|f\|_{L^2(\lambda)}$$

או הפונקציונל $\mathbb{C} \rightarrow L^2(\lambda)$ הנתון על-ידי $\phi(f) = \int f d\nu$ הוא חסום וממשפט הצגה של פרשה-רים נסיק שקיימת כך שלכל $g \in L^2(\lambda)$ מתקיים $f \in L^2(\lambda)$

$$(\triangle) \quad \int f d\nu = \phi(f) = \int f \cdot g d\lambda$$

לכל $\mathcal{A} \in \mathcal{A}$ עם $E \in \mathcal{A}$ מתקיים $\lambda(E) > 0$ ולכן $\mathbb{1}_E \in L^2(\lambda)$, כלומר $\int_E g d\lambda = \int_E \mathbb{1}_E d\lambda = \lambda(E)$

$$0 \leq \frac{\nu(E)}{\lambda(E)} = \frac{1}{\lambda(E)} \int_E g d\lambda \leq 1$$

מלמה שראינו על ממווצעים של פונקציות על קבוצות מדידות נסיק $0 \leq g \leq 1$ כמעט תמיד ועל-ידי שינוי של g על קבוצה מ- λ -מידה אף נוכל להסיק כי $0 \leq g \leq 1$

$$A := \{x \in X \mid g(x) \in [0, 1)\} \quad B := \{x \in X \mid g(x) = 1\}$$

$$\nu_a := \nu|_A \quad \nu_s := \nu|_B$$

$$\text{מכך ש-} \nu = \nu_a + \nu_s \text{ חרי ש-} X = A \cup B \text{ ו-} \mu = \nu_a + \nu_s$$

שכחות של \triangle מביאו שלכל f

$$\int f d\nu = \int fg d\nu + \int fgw d\mu \stackrel{(*)}{\iff} \int f(1-g) d\nu = \int fgw d\mu$$

נראה ש- μ מ. $f = \mathbb{1}_B$ או (\star) נקבע

$$0 = \int_B (1-g) d\nu = \int_B gw d\mu$$

אבל $0 > w$ ולכן $\mu(B^c) = 0 = \mu(B)$ כלומר μ מ. נקבע

נראה ש- μ מ. $E \in \mathcal{A}$ או עבור $f = (1+g+g^2+\dots+g^n)\mathbb{1}_E$ נקבע

$$\int_E (1-g^{n+1}) d\nu = \int_E (1+g+g^2+\dots+g^n)gw d\mu$$

אבל $1 < g|_A$ והרי $(1-g^{n+1})\mathbb{1}_E \nearrow 1_{A \cap E}$ נקבע

$$\int_E (1-g^{n+1}) d\nu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \nu(A \cap E) = \nu_a(E)$$

מצד שני h מתכנסה מונוטונית ל- h מדידה ב- $[0, \infty]$ ולכן באגף ימין

$$\int_E (1+g+g^2+\dots+g^n)gw d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_E h d\mu$$

מכך ש- ν_a מ. ולכן $d\nu_a = h d\mu$
 $.h \in L^1(\mu)$ סופית נסיק כי

□

12.2 איך מחשבים נגורת רדון-ניקודים

נניח שיש לנו את המידות ν, μ ואנחנו רוצים לחשב את הנגורת רדון-ניקודים $\frac{d\nu}{d\mu}$.

1. קודם כל חייב להתקיים $\mu \ll \nu$ כלומר $\mu(E) = 0 \Rightarrow \nu(E) = 0$ אזי μ אפסת תנאי המשפט לא מתקיים.
2. כמו כן, חייב שהמרחב שעלינו אנהנו מחשבים הוא ס-טופי
3. חלוקה למקרים של "מסת" המידות

1. אם ν מוגדרת על ידי חלוקה כלשהי – נניח $\nu(\{E_n\}) = \sum a_n \mu(E_n \cap E)$ כאשר a_n חלוקה של המרחב, אז אם נכתב

$$\nu(E) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{E \cap E_n} a_n d\lambda = \int_E \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \mathbf{1}_{E_n}(x) d\lambda(x) \Rightarrow \frac{d\nu}{d\lambda}(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \mathbf{1}_{E_n}(x)$$

כלומר הערך בתחום האינטגרל הוא הנגורת רדון-ניקודים

2. אם לשתי המידות יש צפיפות – כלומר ν, μ מוגדרות על \mathbb{R} עם צפיפות $g(x), h(x)$ ביחס למידת לבג אז

$$d\nu = h(x) dx \quad d\mu = g(x) dx$$

אז,

$$\frac{d\nu}{d\mu}(x) = \frac{h(x)}{g(x)}$$

כאשר זה מוגדר μ -כמעט בכל מקום כאשר $0 > g(x)$

3. המשפט היסודי של האלגברה – אם μ מידת לבג ו- $F(x) = \nu((-\infty, x])$ (כלומר F היא רציפה בהחלט) אזי

$$\frac{d\nu}{d\lambda}(x) = F'(x)$$

4. החלפת משתנה ורציפה קדימה של המידה – אם $\mu_* = f_* \mu$ ואנחנו רוצים את הנגורת רדון-ניקודים ביחס ל- μ זה פשוט היקוביאן.

אם $X \rightarrow T : X$ (במימד אחד לנוחות גוירה ו- $\nu(E) = \mu(T^{-1}(E))$ אזי

$$\frac{d\nu}{d\mu}(x) = \frac{1}{|T'(T^{-1}(x))|}$$

13 גזירה של מידות רצון ב- \mathbb{R}^d

13.1 מסקנות משפט הכיסוי של בסיקוביין'

מסקנה 13.1.1 (מסקנה 1): תהי μ מידת בורל סופית על \mathbb{R}^d (בפרט מידת רצון) והיה $A \subseteq \mathbb{R}^d$ חסומה. אז לכל כיסוי בסיקוביין' \mathcal{F} של A קיים תת-אוסף $\tilde{\mathcal{E}} \subseteq \mathcal{E}$ סופי של כדורים אוקלידיים סגורים וזרים בזוגות המקיים $\mu(\bigcup_{B \in \tilde{\mathcal{E}}} B) \geq \frac{1}{2Q}\mu(A)$, כאשר Q הקבוע האוניברסלי משפט הכיסוי.

הוכחה: משפט הכיסוי קיימים תת-אוספים $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_Q$ (אולי חלקם ריקים) שמהווים חלוקה של תת-הכיסוי $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$ המובטח משפט הכיסוי. אז

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup \mathcal{E} \cap A\right) = \sum_{i=1}^Q \mu\left(\left(\bigcup \mathcal{E}_i\right) \cap A\right)$$

ולכן לא ניתן שקיימים $i \leq Q$ שבעבורו מתקיים $\mu(\bigcup \mathcal{E}_i \cap A) < \frac{1}{Q}\mu(A)$.

לכן קיים $i_0 \in [Q]$ המקיים $\mu(\bigcup \mathcal{E}_{i_0} \cap A) \geq \frac{1}{Q}\mu(A)$ ומאחר ש- \mathcal{E}_{i_0} אוסף בן-מניה של כדורים זרים בזוגות, ניתן להציג תת-אוסף סופי $\tilde{\mathcal{E}} \subseteq \mathcal{E}_{i_0}$ ממידה $\mu(\bigcup \tilde{\mathcal{E}} \cap A) \geq \frac{1}{2Q}\mu(A)$. \square

מסקנה 13.1.2 (מסקנה 2): תהי μ מידת רצון על \mathbb{R}^d ותהי $A \subseteq \mathbb{R}^d$ מדידה עם כיסוי בסיקוביין' \mathcal{F} המקיים שלכל $x \in A$ מתקיים $\inf\{r \mid B_r(x) \in \mathcal{F}\} = 0$.

או קיים תת-אוסף בן-מניה $\mathcal{E} \subseteq \tilde{\mathcal{E}}$ המורכב מכדורים זרים בזוגות המקיים $\mu(A \setminus \bigcup \tilde{\mathcal{E}}) = 0$.

הוכחה: נניח שה- $A \subseteq \mathbb{R}^d$ חסומה. אז מהיות μ מידת רצון היא סופית על קומפקטיות ורגולריות היוצאות ולכן קיימת $U \subseteq A$ פתוחה המקיימת $\mu(U) < \left(1 + \frac{1}{4Q}\right)\mu(A)$.

נזורק מ- \mathcal{F} את כל הcadורים שלא מוכלים ב- U ומהמסקנה לעיל נובע שקיימים תת-אוסף סופי $\mathcal{E}_1 \subseteq \tilde{\mathcal{E}}$ המקיים $\mu(\bigcup \mathcal{E}_1 \cap A) \geq \frac{1}{2Q}\mu(A)$.

נסמן $A_1 := A \setminus \bigcup \mathcal{E}_1$ ונקבל

$$\mu(A_1) \leq \mu(U \setminus \bigcup \mathcal{E}_1) \leq \mu(U) - \mu(\bigcup \mathcal{E}_1) \leq \left(1 + \frac{1}{4Q}\right)\mu(A) - \frac{1}{2Q}\mu(A) = \left(1 - \frac{1}{4Q}\right)\mu(A)$$

נוקהה עם פתחה $\mu(A_1) < \left(1 + \frac{1}{4Q}\right)\mu(A_1)$ ונזהר על התהיליך עד שנקבל $\mu(A_n) = 0$ או עד אין-סוף. נגידיר $\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{E}_n := \tilde{\mathcal{E}}$ ומהבנייה לכל $\mathbb{N} \in n$ מתקיים

$$\mu(A \setminus \bigcup \tilde{\mathcal{E}}) \leq \mu(A_n) \leq \left(1 - \frac{1}{4Q}\right)^n \mu(A) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

וכן $\mathcal{F} \subseteq \tilde{\mathcal{E}}$ מורכב מכדורים זרים בזוגות וסימנו.

אם $A \subseteq \mathbb{R}^d$ אינה חסומה, נוכל לחלק את \mathbb{R}^d לאוסף בן-מניה של תת-קבוצות פתוחות, זרות וחסומות ולקבוצה מ- μ -מידה אפס. מאחר ש- μ סופית על קומפקטיות הרוי שיש לכל היותר מספר בן-מניה של ספרות סביב הראשית מידת חיובית.

אילו היה אוסף לא בן-מניה של ספרות מידת חיובית ($\partial B_r(0)$) או היו קיימות מספר אינסופי ולא בן-מניה של ספרות מידת חיובית $\delta < 0$ המוכלות ב- $(B_r(0))$ עבור $r < R$, $\delta < 0$ כלשהו וזו סתירה לכך $\delta < \mu(B_R(0))$.

לכן קיימים $\infty \nearrow r_n - r_{n+1} > 1$ עם ספירה מידת אפס ואם נחלק את A לאיחוד בן-מניה על רכבי הקשרות הנוגדים ונפעיל את הטיעון על קבוצות חסומות נקבע את הטענה. \square

13.2 משפט לב הגזירה

משפט 13.2.1 (משפט לב הגזירה): תהינה λ . μ מידות רצון על \mathbb{R}^d ו- $A \subseteq \mathbb{R}^d$ קבוצה מדידה וחסומה ו- $\infty < t <$

1. $\mu(A) \leq t \cdot \lambda(A)$ לכל $x \in A$ $\underline{D}(\mu, \lambda, x) \leq t$.
2. $\mu(A) \geq t \cdot \lambda(A)$ לכל $x \in A$ $\overline{D}(\mu, \lambda, x) \geq t$.

הוכחה: נוכיח את (1) ו-(2) הוא אנלוגי.

$0 > \varepsilon$ אוי קיים cisoi בסיקובי' \mathcal{F} של A המקיים

$$(1) \forall B \in \mathcal{F}, \frac{\mu(B)}{\lambda(B)} < t + \varepsilon \quad (2) \forall x \in A, \inf\{r \mid B_r(x) \in \mathcal{F}\} = 0$$

מהיות μ מידת רצון נוכל לבחור $U \subseteq A$ פתוחה עבורה מתקיים $\varepsilon < \lambda(U) < \lambda(A) + \varepsilon$.

נזורק מ- \mathcal{F} את כל הקיימים שלא מוכלים ב- U והכיסוי החדש עדין מקיים את (1) ובפרט זה עדין cisoi בסיקובי' (בגלל (2)).
משפט שראינו נובע שקיים תת-אוסף בן-מניה $\mathcal{F} \subseteq \tilde{E}$ של כדורי זרים בזוגות עם $= 0$ $\mu(A \setminus \bigcup \tilde{E})$ ולכן שימוש במונוטוניות נקבל

$$\begin{aligned} \mu(A) &\leq \mu\left(\bigcup \tilde{E}\right) + \mu\left(A \setminus \bigcup \tilde{E}\right) \stackrel{\text{חת-אטיבית}}{\leq} \sum_{B \in \tilde{E}} \mu(B) \stackrel{(1)}{\leq} \sum_{B \in \tilde{E}} (t + \varepsilon)\lambda(B) \stackrel{(**)}{=} (t + \varepsilon) \cdot \lambda\left(\bigcup \tilde{E}\right) \\ &\stackrel{(*)}{\leq} (t + \varepsilon)\lambda(U) \stackrel{(*)}{\leq} (t + \varepsilon)(\lambda(A) + \varepsilon) = t \cdot \lambda(A) + \varepsilon(\lambda(A) + \varepsilon + t) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} t \cdot \lambda(A) \end{aligned}$$

כאשר (*) נובע מכך שהוא זר של כדורים זרים בזוגות ומ- σ -אדטיביות.

□

13.3 משפט הגזירה של לבג-בטיקוביץ'

משפט 13.3.1 (משפט הגזירה של לבג-בטיקוביץ'): תהינה μ מדות רדון על \mathbb{R}^d

- .1. קיימים וסופי λ -כמעט תמיד $D(\mu, \lambda, x)$
- .2. $\mu \ll \lambda$ אם $D(\mu, \lambda, x) < \infty$ ובקע אם $\lambda \ll \mu$
- .3. אם $\lambda \ll \mu$ אז $D(\mu, \lambda, x) = \frac{d\mu}{d\lambda}$

הוכחה:

$$1. \text{ לכל } \infty < r < \infty, 0 \leq s < t < \infty \text{ נגיד}$$

$$A_{t,r} := \{x \in B_r(0) \mid \overline{D}(\mu, \lambda, x) \geq t\} \quad A_{s,t,r} := \{x \in B_r(0) \mid \underline{D}(\mu, \lambda, x) \leq s < t \leq \overline{D}(\mu, \lambda, x)\}$$

ומתקיים מטענה על גזירה שראינו

$$t \cdot \lambda(A_{s,t,r}) \underset{\overline{D} \geq t}{\leq} \mu(A_{s,t,r}) \underset{\underline{D} \leq s}{\leq} \cdot \lambda(A_{s,t,r})$$

ומהיות t ו- $\infty > r > s < t$, $\lambda(A_{s,t,r}) = 0$ הרי ש- $s < t$, $\lambda(A_{s,t,r}) < \infty$

$$t \cdot \lambda(A_{t,r}) \leq \mu(A_{t,r}) \leq \mu(B_r(0)) < \infty$$

נסמן

$$A_{\infty,r} := \{x \in B_r(0) \mid \overline{D}(\mu, \lambda, x) = \infty\}$$

ולכן מהיות $\lambda(A_1, r) < \infty$ ומונוטוניות לסדרות יורדות נסיק

$$\lambda(A_{\infty,r}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(A_{n,r}) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mu(B_r(0)) = 0$$

או

$$\{x \in B_r(0) \mid \overline{D}(\mu, \lambda, x) = 0 \text{ או } D(\mu, \lambda, x) \text{ לא קיים}\} = A_{\infty,r} \bigcup_{s < t \in \mathbb{Q}} A_{s,t,r}$$

זה איחוד בן-מניה של קבוצות מ- λ -מידה אפס ולכן זה נכון $r > 0$ וזה גורר את
 1. אם $\lambda \ll \mu$ אז $\lambda(D) < \infty$ \Rightarrow $\lambda(A_{\infty,r}) < \infty$
 2. אם $\lambda \ll \mu$ אז $\lambda(A) = 0$ \Rightarrow $A \subseteq A_{\infty,r}$

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ k \in \mathbb{N}}} A_{n,k}\right)$$

כאשר

$$A_{n,k} := \{x \in A \cap B_k(0) \mid \underline{D}(\mu, \lambda, x) \leq n\}$$

ולכן מטענה שראינו נובע

$$\mu(A_{n,k}) \leq n \cdot \lambda(A_{n,k}) \leq n \cdot \lambda(A) = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0 \Rightarrow \mu \ll \lambda$$

3. תהי $B \subseteq \mathbb{R}^d$ מדידה והסומה כלשהו ונראה ש- $\mu \ll \lambda$ ויתקיים שיוויון כאשר $\int_B D(\mu, \lambda, x) d\lambda \leq \mu(B)$
 נבחר $1 < t < \infty$ כלשהו ונסמן עבור $p \in \mathbb{Z}$

$$B_p := \{x \in B \mid t^p \leq D(\mu, \lambda, x) \leq T^{p+1}\} \quad B_+ := \{x \in B \mid 0 < D(\mu, \lambda, x) < \infty\} = \bigcup_{p \in \mathbb{Z}} B_p$$

או

$$\int_B D(\mu, \lambda, x) d\lambda \stackrel{(1)}{=} \int_{B_+} D(\mu, \lambda, x) d\lambda = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \int_{B_p} D(\mu, \lambda, x) d\lambda \leq \sum_{p \in \mathbb{Z}} t^{p+1} \lambda(B_p) \stackrel{(*)}{\leq} \sum_{p \in \mathbb{Z}} t^{p+1} \left(\frac{1}{t^p} \mu(B_p) \right) = t \sum_{p \in \mathbb{Z}} \mu(B_p) \leq t \mu(B)$$

כאשר (1) נובע מסעיף (1) ומכך שזורקנו קבוצה עליה האינטגרנד הוא אפס ו- (\star) נובע מהטענה שראינו על גזירה. כאשר $1 \searrow t$ נקבל את הטענה עוזר.

אם $\lambda \ll \mu$ אז מ-(1) והחלפת תפקדים בין λ ו- μ נסיק $D(\lambda, \mu, x) < 0$ μ -כמעט תמיד ולבן $\mu(B) = \mu(B_+)$ ולבן $\mu(B, \lambda, x) < \infty$ μ -כמעט תמיד ולבן ומאחר ש- $\lambda \ll \mu$ הרי $\lambda^{-\infty} < \infty$ ולבן $\mu(B) = t^{-1} \mu(B_+) = t^{-1} \mu(B)$

נשאיף את $1 \searrow t$ ונקבל שוויון ואת (3).

□

13.4 משפט הגזירה של לבג לפונקציה אינטגרבילית מקומית

משפט 13.4.1 (משפט הגזירה של לבג עבור פונקציה אינטגרבילית מקומית): תהי λ מידת רצון ב- \mathbb{R}^d ו- \mathbb{C} : $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ אינטגרבילית מקומית (כלומר לכל קבוצה מדידה וחסומה $E \subseteq \mathbb{R}^d$ מתקיים $(f \cdot \mathbf{1}_E) \in L^1(\lambda)$). או עבור λ -כמעט כל $x \in \mathbb{R}^d$ מתקיים

$$\frac{1}{\lambda(B_r(x))} \int_{B_r(x)} f d\lambda \xrightarrow[r \rightarrow 0]{} f(x)$$

בפרט לכל $A \subseteq \mathbb{R}^d$ מדידה מתקיים λ -כמעט תמיד

$$\frac{\lambda(B_r(x) \cap A)}{\lambda(B_r(x))} \xrightarrow[r \rightarrow 0]{} \mathbf{1}_A$$

הוכחה: מספיק להוכיח עבור פונקציות א-שליליות אינטגרביליות מקומית $f : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty]$. או עבור המידה λ היא מידת רצון וכן $D(\mu, \lambda, x) = f(x)$ וממשפט הגזירה של לבג-בטיקוביץ' קיבל $\frac{d\mu}{d\lambda} = f$ כמעט תמיד שחררי

$$\frac{\int_{B_r(x)} f d\lambda}{\lambda(B_r(x))} = \frac{\mu(B_r(x))}{\lambda(B_r(x))} \xrightarrow[r \rightarrow 0]{} D(\mu, \lambda, x) = f(x)$$

□

13.5 משפט הגזירה של לבג (מהתרגול)

משפט 13.5.1 (משפט הגזירה של לבג): תהי $f \in L^1([a, b])$. אזי הפונקציה $F(x) = \int_a^x f d\lambda$ גזירה כמעט בכל מקום ומקיימת עבור כמעט כל $x \in [a, b]$ (ביחס למידת לבג).

הוכחה: נראה שמדובר בכל מתקיים $x \in [a, b]$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f d\lambda = f(x)$$

אם רציפה אז זה המשפט היסודי ולכן נניח ש- f חסומה. לפי משפט לוין לכל $N \in \mathbb{N}$ יש קבוצה A_n כך ש- $\lambda(A_n) < \frac{1}{n}$ ופונקציה רציפה g_n כך שמהווים f, A_n ו- g_n מתלכדות ונסמן λ_n מידה לבג מצומצמת ל- A_n .

מהיות $\frac{d\lambda_n}{d\lambda} = \mathbb{1}_{A_n}$ נובע משפט הגזירה של בסיקובי'ץ' כמעט בכל $x \in A_n^c$ מתקיים

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lambda_n((x-h, x+h))}{\lambda((x-h, x+h))} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lambda(A_n \cap (x-h, x+h))}{2h} = \mathbb{1}_{A_n}(x) = 0$$

אם $x \in A_n^c$

$$\left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f d\lambda - \frac{1}{h} \int_x^{x+h} g d\lambda \right| \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f-g| d\lambda = \frac{1}{h} \int_{A_n \cap (x, x+h)} |f-g| d\lambda$$

חסומה ב- $[a, b]$ כפונקציה רציפה ו- f חסומה מההנחה ולכן קיים $M > 0$ כך שקיימים $|f-g| < M$, כלומר g

$$\frac{1}{h} \int_{A_n \cap (x, x+h)} |f-g| d\lambda \leq M \cdot \frac{\lambda(A_n \cap (x-h, x+h))}{h}$$

אך ימין שווה ל-0 כאשר $h \rightarrow 0$ ולכן אם ניקח גבול נקבל

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f d\lambda - \frac{1}{h} \int_x^{x+h} g d\lambda \right| = 0 \implies \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f d\lambda = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} g d\lambda = g(x) = f(x)$$

קיבלו את השוויון שרצינו לכל $x \in A_n^c$ ומאהר נוכל לקחת את A_n להיות עם מידה קטנה כרצונו, כמעט בכל $[a, b]$ יהיה באחת מ-

והטענה נcona עבר f חסומה.

עבור f כללית, נסמן לכל $N \in \mathbb{N}$ את $f_n = \mathbb{1}_{|f| < n} \cdot f$ ומשפט הגזירה של בסיקובי'ץ' (על המידות $d\lambda, d\lambda$) מתקיים כמעט בכל $x \in [a, b]$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f-f_n| d\lambda \leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{2h} \int_x^{x+h} |f-f_n| d\lambda = |f(x)-f_n(x)|$$

אך ימין הוא אף כמעט בכל $x \in [a, b]$ ומאחר $|f|^{-1}(\{\infty\})$ קבוצה ממידה אפס ולכן כמעט בכל $x \in [a, b]$ נמצא ב- $\mathbb{1}_{|f| < n}$ עברו n כלשהו ולכן

$$f(x) = f_n(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f_n(x) d\lambda = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(x) d\lambda$$

□

14 מרחבי מכפלה

14.1 משפט פובייני

משפט 14.1.1 (משפט פובייני): יהיו (X, \mathcal{A}, μ) ו- (Y, \mathcal{C}, ν) מרחבי מידה σ -סופיים. הינה $f : X \times Y \rightarrow [0, \infty]$ מדידה, אזי $f_x^y \in L^1(\mu)$ ו- $f_y^x \in L^1(\nu)$ לכל x, y וכן $\int f d(\mu \times \nu) = \int \left(\int f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y) = \int \left(\int f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x)$.

אם $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$ מדידה ומקיימת $\int |f_x| d\nu < \infty$ אז $f \in L^1(\mu \times \nu)$.
אם $f \in L^1(\mu \times \nu)$ אז $f_x^y \in L^1(\mu)$ ו- $f_y^x \in L^1(\nu)$ וגם $f \in L^1(\mu \times \nu)$ ומתקיים $\int f d\mu = \int \int f d\mu d\nu = \int \int f d\nu d\mu$.

הוכחה:

1. הוכחנו את הטענה עבור פונקציות מציניות $\varphi \in \mathcal{C}(Q)$ ולכן זה נכון עבור פונקציות פשוטות (סכום סופי של פונקציות מציניות).
תהי $f : X \times Y \rightarrow [0, \infty]$ מדידה ותהי $\varphi_n \xrightarrow[n=1]{\infty} \varphi$ סדרה של פונקציות פשוטות שמתכנסות ל- f .
משמעות ההתקנשות המונוטונית, הפונקציות

$$\varphi(x) = \int f_x d\nu \quad \psi(y) = \int f^y d\nu$$

הן גבולות עליים של

$$\varphi_n(x) = \int (s_n)_x d\nu \quad \psi_n(y) = \int (s_n)^y d\nu$$

ואילו צירופים לינאריים של פשוטות ולכון φ_n, ψ_n מדידות ולכון גם φ, ψ .
נעשה שימוש נסכני במשפט ההתקנשות המונוטונית ייתן $\varphi_n \nearrow \varphi, \psi_n \nearrow \psi$ שמתקיים

$$\int \varphi d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \varphi_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \psi_n d\nu = \int \psi d\nu$$

ומתקיים השוויון

$$\int f d(\mu \times \nu) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n d(\mu \times \nu) = \int \varphi d\mu = \int \psi d\nu$$

2. נפעיל את (1) עם $|f|$

3. נפעיל את (1) עם הפירוק של פונקציות מרוכבות לסכום אי-שלילי.

$$f = u + iv = u_+ - u_- + i(v_+ - v_-)$$

ומכך שמתקיים $\int |f|^y d\nu < \infty$ גורר שמתקיים $\int |f| d\mu < \infty$ וכנ"ל ההפוך.

□

מסקנה 14.1.1: אם $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$ מדידה ומקיימת $\int \int |f(x, y)| d\mu(x) d\nu(y) < \infty$ אז $\int f d(\mu \times \nu) = \int \int f d\mu d\nu$.

הוכחה: נובע ישירות מ- $(2) + (3)$ במשפט פובייני.

14.2 תנאי שקול לפונקציה מדידה על מרחב מכפלה

משפט 14.2.1 (תנאי שקול לפונקציה מדידה על מרחב מכפלה): תהי $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y \times Z, \mathcal{B} \otimes \mathcal{C})$: העתקה ותהיינה ההעתקות הקונוגוות

$$\pi_Y : Y \times Z \rightarrow Y \quad \pi_Z : Y \times Z \rightarrow Z$$

או f מדידה אם ורק אם ההרכבה שלה עם כל הטלה על מרחב המכפלה היא מדידה.

הוכחה: \Leftarrow נניח ש- f מדידה ונרצה להראות ש- $f \circ \pi_Y \circ \pi_Z$ מדידות אבל זה נכון כי ראיינו ש- $\pi_Z \circ \pi_Y$ פונקציות מדידות והרכבה של

פונקציות מדידות היא תמיד מדידה.

עלינו להראות ש- $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$ לכל $E \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{C}$, או נגיד $R = B \times C \in \mathcal{R} := \{B \times C \mid B \in \mathcal{B}, C \in \mathcal{C}\}$ ויהי $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$ לכל $E \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{C}$ ונגדיר f מלבן.

ניתן לכתוב $B \times C = \pi_Y^{-1}(B) \cap \pi_Z^{-1}(C)$

$$f^{-1}(B \times C) = f^{-1}(\pi_Y^{-1}(B) \cap \pi_Z^{-1}(C)) = f^{-1}(\pi_Y^{-1}(B)) \cap f^{-1}(\pi_Z^{-1}(C)) = (\pi_Y \circ f)^{-1}(B) \cap (\pi_Z \circ f)^{-1}(C)$$

אבל מההנחה, $f \circ \pi_Y$ מדידה ולכן $(\pi_Y \circ f)^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ ובאופן דומה $(\pi_Z \circ f)^{-1}(C) \in \mathcal{A}$.

היות וחיתוך סופי של קבוצות מדידות הוא מדיד (מהגדרת ה- σ -אלגברה) נובע כי $(\pi_Y \circ f)^{-1}(B) \cap (\pi_Z \circ f)^{-1}(C) \in \mathcal{A}$, וזה נכון לכל $R \in \mathcal{R}$ ולכן f מדידה. \square