פתרון מטלה 02 — תורת הקבוצות, 80200

3 באפריל 2025

שאלה 1

תהיינה X, Y, X', Y' קבוצות המקיימות $|X| = |Y|, |X'| = |Y'|$.

סעיף א'

נוכיח שמתקיים $|X \times X'| = |Y \times Y'|$.

הוכחה: מכך שמתקיים $|X| = |Y|$ נובע שקיימת פונקציה חד־חד ערכית ועל $f : X \to Y$ ומכך שמתקיים $|X'| = |Y'|$ קיימת פונקציה חד־חד ערכית ועל $g : X' \to Y'$.

נגדיר $f : X \times X' \to Y \times Y'$ על־ידי $h(x, x') = \langle f(x), g(x') \rangle$. נראה כי היא חד־חד ערכית ועל:

חד־חד ערכית: נשים לב שמתקיים

$$h(x_1, x_1') = h(x_2, x_2') \iff \langle f(x_1), g(x_1') \rangle = \langle f(x_2), g(x_2') \rangle \iff f(x_1) = f(x_2) \wedge g(x_1') = g(x_2') \underset{(1)}{\iff} x_1 = x_2 \wedge x_1' = x_2'$$

כאשר (1) נובע מהיות f ו־g חד־חד ערכיות.

על: יהי $\langle y, y' \rangle \in Y \times Y'$. מהיות f על, נובע כי קיים $x_y \in X$ כך שמתקיים $f(x) = y$ ומכך ש־g על נובע שקיים $x'_{y'} \in X'$ כך שמתקיים $g(x') = y'$. ולכן $h\big(x_y, x'_{y'}\big) = \langle y, y' \rangle$ וקיבלנו ש־h על.

מצאנו פונקציה חד־חד ערכית ועל ולכן מהגדרת שיוויון עוצמות נובע $|X \times X'| = |Y \times Y'|$. □

סעיף ב'

נניח שמתקיים $X \cap X' = Y \cap Y' = \emptyset$ ונוכיח שמתקיים $|X \cup X'| = |Y \cup Y'|$.

הוכחה: מכך שמתקיים $|X| = |Y|$ נובע שקיימת פונקציה חד־חד ערכית ועל $f : X \to Y$ ומכך שמתקיים $|X'| = |Y'|$ קיימת פונקציה חד־חד ערכית ועל $g : X' \to Y'$.

נגדיר כמו בתרגול:

$$f \oplus g(x) = \begin{cases} f(x) & x \in X \\ g(x) & x \in X' \end{cases}$$

הפונקציה מוגדרת היטב שכן מכך ש־$X \cap X' = Y \cap Y' = \emptyset$ נובע שכל $x \in X \cup X'$ נשלח לערך יחיד תחת $f \oplus g$.

נראה שהיא חד־חד ערכית ועל: את החד־חד ערכיות ראינו בתרגול, נראה שהיא גם על: יהי $y \in Y \cup Y'$.

מכך שמתקיים $Y \cap Y' = \emptyset$ נובע כי $y \in Y$ או $y \in Y'$.

אם $y \in Y$, מהיות f על, נובע כי קיים $x \in X$ כך שמתקיים $f(x) = y$.

אם $y \in Y'$, מהיות g על, נובע כי קיים $x \in X'$ כך שמתקיים $g(x') = y$.

מכך שמתקיים $X \cap X' = \emptyset$ נובע כי $x \neq x'$ ואלו שני מקרים שונים.

מהגדרת $f \oplus g$ נובע כי קיים $x \in X \cup X'$ כך שמתקיים $f \oplus g(x) = y$ וקיבלנו כי $f \oplus g$ חד־חד ערכית ועל.

מצאנו פונקציה חד־חד ערכית ועל ולכן מהגדרת שיוויון עוצמות נובע $|X \cup X'| = |Y \cup Y'|$. □

סעיף ג'

נוכיח שמתקיים $\left|X^{X'}\right| = \left|Y^{Y'}\right|$.

הוכחה: מכך שמתקיים $|X| = |Y|$ נובע כי קיימת פונקציה חד־חד ערכית ועל $f : X \to Y$ ומכך שמתקיים $|X'| = |Y'|$ נובע שקיימת פונקציה חד־חד ערכית ועל $g : X' \to Y'$.

נגדיר $\varphi : X^{X'} \to Y^{Y'}$ על־ידי $\varphi(h)(y') = \left(f \circ h \circ g^{-1}\right)(y')$ ו־φ מוגדרת היטב כהרכבה של פונקציות.

נראה כי φ היא חד־חד ערכית ועל:

חד־חד ערכית: נניח כי קיימים $h, h' \in X^{X'}$ כך שמתקיים $\varphi(h') = \varphi(h)$, נשים לב כי מתקיים:

$$\varphi(h') = \varphi(h) \iff \forall y' \in Y', \quad \varphi(h')(y') = \varphi(h)(y') \iff f\left(h'\left(g^{-1}(y')\right)\right) = f\left(h\left(g^{-1}(y')\right)\right) \underset{(1)}{\iff} h\left(g^{-1}(y')\right) = h'\left(g^{-1}(y')\right)$$

כאשר (1) נובע מהיות f הפיכה.

כמו כן, מכיוון ש־g הפיכה מתקיים שלכל $x' \in X'$ קיים ויחיד $y' \in Y'$ כך שמתקיים $g^{-1}(y') = x'$, ולכן נקבל

$$h\left(g^{-1}(y')\right) = h'\left(g^{-1}(y')\right) \iff \forall x' \in X, \quad h'(x') = h(x') \implies h' = h$$

וקיבלנו φ היא חד־חד ערכית.

נראה כי φ היא על, ולכן עלינו להוכיח שלכל $l : Y' \to Y$, קיימת $h : X' \to X$ כך שמתקיים $\varphi(h) = l$. מתקיים:

$$\forall y' \in Y', \quad \varphi(h)(y') = l(y') \underset{\text{def}}{\iff} f\left(h\left(g^{-1}(y')\right)\right) = l(y') \underset{(1)}{\iff} h\left(g^{-1}(y')\right) = \left(f^{-1} \circ l\right)(y')$$

כאשר (1) נובע מהיות f הפיכה.

אבל מהיות g הפיכה נובע שלכל לכל $y' \in Y'$ קיים ויחיד $x' \in X'$ כך שמתקיים $g(x) = y$ ולכן:

$$\forall x' \in X', \quad h\left(g^{-1}(g(x))\right) = \left(f^{-1}(l(g(x)))\right) \implies h(x) = \left(f^{-1}(l(g(x)))\right)$$

מצאנו בנייה ל־h ולכן לכל l קיים מקור ובהתאם φ על.

מצאנו פונקציה חד־חד ערכית ועל בין $X^{X'}$ לבין $Y^{Y'}$ ולכן מהגדרת שיוויון עוצמות מתקיים $\left|X^{X'}\right| = \left|Y^{Y'}\right|$. $\square$

שאלה 2

תהיינה X, X' קבוצות.

סעיף א'

נוכיח ש־$(X \times \{0\}) \cap (X' \times \{1\}) = \emptyset$.

הוכחה: נניח בשלילה ש־$(X \times \{0\}) \cap (X' \times \{1\}) \neq \emptyset$ ולכן קיים $(a,b) \in (X \times \{0\}) \cap (X' \times \{1\})$.
מהגדרת החיתוך נובע כי $(a,b) \in X \times \{0\}$ ולכן $b = 0$. מצד שני, מהגדרת החיתוך נובע כי גם $(a,b) \in X' \times \{1\}$ ולכן $b = 1$ וזו סתירה. $\square$

סעיף ב'

נגדיר $X \uplus X' = (X \times \{0\}) \cup (X' \times \{1\})$ ונגדיר פונקציה $f : X \uplus X' \to X \cup X'$ על־ידי $f(a,i) = a$.
נוכיח ש־f היא על.

הוכחה: נניח בשלילה כי f איננה על, ולכן קיים $x_0 \in X \cup X'$ כך שלא קיים $(x,i) \in X \uplus X'$ המקיים $f(x,i) = x_0$.
אבל $x_0 \in X \cup X'$ ולכן מתקיימים אחד מהבאים:
$x_0 \in X$ ולכן $f(x_0, 0) = x_0$ או $x_0 \in X'$ ולכן $f(x_0, 1) = x_0$ או $x_0 \in X \wedge x_0 \in X'$ ואז $f(x_0, 0) = f(x_0, 1) = x_0$.
בכל מקרה הגענו לסתירה ולכן f על. $\square$

סעיף ג'

נוכיח שהפונקציה מהסעיף הקודם היא חד־חד ערכית אם ורק אם $X \cap X' = \emptyset$.

הוכחה:
$\Leftarrow$ נניח כי f חד־חד ערכית ונראה כי $X \cap X' = \emptyset$.
נניח בשלילה כי $X \cap X' \neq \emptyset$ ולכן קיים $x_0 \in X \cap X'$, ולכן $x_0 \in X$ מקיים $f(x_0, 0) = x_0$ אבל מהגדרת החיתוך $x_0 \in X'$ ולכן מתקיים $f(x_0, 1) = x_0$ וזו סתירה לחד־חד ערכיות של f ולכן $X \cap X' = \emptyset$.
$\Longrightarrow$ נניח $X \cap X' = \emptyset$ ונראה כי f חד־חד ערכית.
נניח כי f לא חד־חד ערכית, ולכן קיימים $(x_1, i_1), (x_2, i_2) \in X \uplus X'$ כך ש־$(x_1, i_1) \neq (x_2, i_2)$ אבל $f((x_1, i_1)) = f((x_2, i_2))$, אבל אז מהגדרת f נובע $x_1 = x_2$, אבל $X \cap X' = \emptyset$ ולכן נקבל $i_1 = i_2 = 0$ או $i_1 = i_2 = 1$ ולכן f חד־חד ערכית. $\square$

סעיף ד'

נגדיר $i : X \to X \uplus X'$ על־ידי $i(x) = (x,0)$ ונגדיר $i' : X' \to X \uplus X'$ על־ידי $i'(x) = (x,1)$.
נוכיח שאם יש קבוצה Y ופונקציות $f : X \to Y$ ו־$g : X' \to Y$ אז יש פונקציה יחידה $f \oplus g : X \uplus X' \to Y$ המקיימת $(f \oplus g) \circ i = f$ וגם $(f \oplus g) \circ i' = g$.

הוכחה:
נניח כי קיימת קבוצה Y ופונקציות $f : X \to Y$ ו־$g : X' \to Y$ לעיל ונראה כי קיימת פונקציה יחידה המקיימת את הנדרש.
נגדיר:

$$f \oplus g = \{\langle\langle x, j\rangle, y\rangle \mid (j = 0 \land y = f(x) \land x \in X) \lor (j = 1 \land y = g(x) \land x \in X')\}$$

נשים לב שמתקיים מהגדרת i ו־$f \oplus g$:

$$\forall x \in X, \quad ((f \oplus g) \circ i)(x) = (f \oplus g)(\langle x, 0\rangle) = f(x) \Longrightarrow (f \oplus g) \circ i = f$$

באותו אופן נובע מהגדרת i' ו־$f \oplus g$:

$$\forall x' \in X', \quad ((f \oplus g) \circ i')(x') = (f \oplus g)(\langle x', 1\rangle) = g(x) \Longrightarrow (f \oplus g) \circ i' = g$$

ולכן הראינו קיום, נשאר להראות יחידות: נניח כי $h = f \oplus g$ ו־h' המקיימות את הנדרש ונראה שהן זהות. מתקיים מהגדרה:

$$\forall a \in X \uplus X', \quad h'(a) = \begin{cases} f(x) & a = \langle x,0\rangle \\ g(x) & a = \langle x,1\rangle \end{cases} = h(a)$$

ולכן $h = h'$ ו־h מוגדרת ביחידות. $\square$

שאלה 3

תהיינה X,X',Y,Y' קבוצות כך שמתקיים $|X|\leq|Y|$ ו־$|X'|\leq|Y'|$.

סעיף א'

נניח $X\cap X'=\emptyset$ אבל $Y\cap Y'\neq\emptyset$. נפריך את הטענה $|X\cup X'|\leq|Y\cup Y'|$.

הוכחה: נגדיר

$$X=\{1,2,3\},X'=\{4,5\},Y=\{1,2,3\},Y'=\{3,4\}$$

אכן מתקיים $|X|\leq|Y|,|X'|\leq|Y'|$ ו־$X\cap X'=\emptyset$.
אבל $X\cup X'=\{1,2,3,4,5\}\Rightarrow|X\cup X'|=5$ ומנגד $Y\cup Y'=\{1,2,3,4\}\Rightarrow|Y\cup Y'|=4$.
ניתן דוגמה גם לקטן ממש: נגדיר

$$X=\{1,2\},X'=\{4,5\},Y=\{1,2,3\}=Y'$$

אכן מתקיים $|X|\leq|Y|,|X'|\leq|Y'|$ ו־$X\cap X'=\emptyset$.
אבל $X\cup X'=\{1,2,4,5\}$ אז $|X\cup X'|=4$ ומנגד $Y\cup Y'=\{1,2,3\}$ וכן $|Y\cup Y'|=3$.
נשים לב שבשני המקרים לא יכולה להיות פונקציה חד־חד ערכית מעקרון שובך היונים – יש לנו יותר יונים (איברים ב־$X\cup X'$) מאשר שובכים (איברים ב־$Y\cup Y'$) ולכן בהכרח יהיה לנו שובך עם שתי יונים, דהיינו פונקציה לא חד־חד ערכית. □

סעיף ב'

נניח $X\cap X'=\emptyset$ וגם $Y\cap Y'=\emptyset$. נוכיח שמתקיים $|X\cup X'|\leq|Y\cup Y'|$.

הוכחה: מכך שמתקיים $|X|\leq|Y|$ נובע כי קיימת פונקציה חד־חד ערכית $f:X\to Y$ ומכך שמתקיים $|X'|\leq|Y'|$ נובע כי קיימת פונקציה חד־חד ערכית $g:X'\to Y'$.
נגדיר $h:X\cup X'\to Y\cup Y'$ על־ידי:

$$h(x)=\begin{cases}f(x) & x\in X\\ g(x) & x\in X'\end{cases}$$

הפונקציה מוגדרת היטב שכן $X\cap X'=\emptyset$ ולכן כל $x_0\in X\cup X'$ נשלח לערך יחיד תחת h.
h חד־חד ערכית, שכן f ו־g חד־חד ערכיות ומכך ש־$Y\cap Y'=\emptyset$ נובע שלכל $x\in X$ ולכל $x'\in X'$ מתקיים $f(x)\neq g(x')$.
מצאנו פונקציה חד־חד ערכית בין $X\cup X'$ לבין $Y\cup Y'$ ולכן מתקיים $|X\cup X'|\leq|Y\cup Y'|$. □

סעיף ג'

נניח $X=X'=\emptyset$. נפריך את הטענה $\left|X^{X'}\right|\leq\left|Y^{Y'}\right|$.

הוכחה: בהרצאה ראינו שאם $X=X'=\emptyset$ אז $\emptyset:X\to X'$ היא חד־חד ערכית, על ויחידה.
נבחר $Y=\emptyset,Y'\neq\emptyset$ ונשים לב שבמקרה זה מתקיים $\left|Y^{Y'}\right|=0$:
נשים לב שבמקרה זה אנחנו לא מקיימים את הגדרת הפונקציה: אמרנו כי יחס F בין Y' ל־Y נקרא פונקציה אם לכל $y'\in Y'$ קיים $y\in Y$ כך ש־$\langle y',y\rangle\in F$ אבל $Y=\emptyset$ וקיבלנו סתירה להגדרת הפונקציה.
לכן נקבל במקרה זה שמתקיים $\left|Y^{Y'}\right|=0\leq1=\left|X^{X'}\right|$ וזו סתירה. □

סעיף ד'

נניח $X'=\emptyset$ אבל $X\neq\emptyset$. נוכיח שמתקיים $\left|X^{X'}\right|\leq\left|Y^{Y'}\right|$.

הוכחה: ראשית נשים לב שמהיות $X\neq\emptyset$ נובע כי $Y\neq\emptyset$ שכן $1\leq|X|\leq|Y|$.
נשים לב שמהיות $X'=\emptyset$ נובע כי $\left|X^{X'}\right|=1$: ניזכר כי היחס F יקרא פונקציה אם לכל $x'\in X$ קיים $x\in X$ כך ש־$\langle x',x\rangle\in F$.
מכך ש־$X'=\emptyset$, המכפלה הקרטזית $\emptyset\times X$ ריקה, ולכן היחס היחידי שיתאים הוא היחס הריק: לכל $x'\in\emptyset$ קיים $x\in X$ יחיד כך שמתקיים $(x',x)\in\emptyset\times X=\emptyset$. נקבל אם כך $\left|X^{X'}\right|=1$.
כעת, אם נבחר $Y'=\emptyset$ נקבל $\left|Y^{Y'}\right|=1$ וזו התוצאה המינימלית מהנימוק לעיל ומכך ש־$Y\neq\emptyset$.
נקבל בסך־הכל שמתקיים $\left|Y^{Y'}\right|=1\leq1=\left|X^{X'}\right|$. □

שאלה 4

תהיינה X',Y' קבוצות ונניח שמתקיים $X' \neq \emptyset$ וגם $|X'| \leq |Y'|$. נוכיח שיש פונקציה על $g: Y' \to X'$.

הוכחה: מכך שמתקיים $|X'| \leq |Y'|$ נובע כי קיימת $f: X' \to Y'$ חד־חד ערכית ומתקיים $Y' = f(X') \uplus (Y' \setminus f(X'))$.
יהי $x'_0 \in X' \setminus f^{-1}(X')$ (אם $X' \setminus f^{-1}(X') = \emptyset$ הטענה טריוויאלית כי f הפיכה ו־f^{-1} הפיכה גם כן).
מהיות f חד־חד ערכית נובע שלכל $y' \in f(X')$ קיים $x'_{y'} \in X'$ יחיד כך שמתקיים $f\left(x'_{y'}\right) = y'$. נגדיר $g: Y' \to X'$ על־ידי:

$$g(y') = \begin{cases} f^{-1}(y') & y' \in f(X') \\ x'_0 & y' \notin f(X') \end{cases}$$

g מוגדרת היטב שכן לכל $f(X') \cap (Y' \setminus f(X')) = \emptyset$ ולכן כל $y' \in Y'$ נשלח לערך יחיד תחת g.
היות ו־f חד־חד ערכית נובע $|X'| = |f(X')| \leq |Y|$ וקיבלנו ש־g על (שכן לכל $x' \in X'$ קיים $y' \in Y$ כך שמתקיים $g(y') = x'$). $\square$