

פתרונות מטלה 07 – תורת המידה, 80517

2025 נובמבר 11



שאלה 1

יהי מרחב מידה. עבור $0 < r < 1$ נגידר לכל $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ מדידה

$$\|f\|_r = \left(\int |f|^r d\mu \right)^{\frac{1}{r}}$$

ונגידר גם

$$L^r(\mu) = \{f : X \rightarrow \mathbb{C} \mid \|f\|_r < \infty\}$$

נראה כי אם ב- X יש שתי קבוצות זרות מדידות ממידה סופית שתיהן לא מדידה אף, או $\|\cdot\|_r$ לא מקיימת את איזומורפיזם המשולש.
הוכחה: תהינה $A, B \in X$ כך $0 < \mu(A), \mu(B) < \infty$ ו- $A \cap B = \emptyset$.
נגידר $f = g + 1_A - 1_B$ ונוכיח $\|f\|_r < \infty$.
נגידר $h = f + g = 1_A + 1_B$ ונקבל $\|h\|_r = (\mu(A) + \mu(B))^{\frac{1}{r}} < \infty$.

$$h = f + g = 1_A + 1_B \underset{A \cap B = \emptyset}{=} 1_{A \cup B}$$

או נחשב

$$\|h\|_r^r = \int |1_{A \cup B}|^r d\mu = \int_{A \cup B} 1 d\mu = \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \implies \|h\|_r = (\mu(A) + \mu(B))^{\frac{1}{r}}$$

מצד שני מתקיים

$$\|f\|_r^r = \int |1_A|^r d\mu = \int_A 1^r d\mu = \int_A 1 d\mu = \mu(A) \implies \|f\|_r = (\mu(A))^{\frac{1}{r}}$$

$$\|g\|_r^r = \int |1_B|^r d\mu = \int_B 1^r d\mu = \int_B 1 d\mu = \mu(B) \implies \|g\|_r = (\mu(B))^{\frac{1}{r}}$$

או אנחנו רוצים לבדוק האם האיזומורפיזם (ליתר דיוק, שהוא נופל):

$$\|h\|_r = \|f + g\|_r \stackrel{?}{\leq} \|f\|_r + \|g\|_r \iff (\mu(A) + \mu(B))^{\frac{1}{r}} \stackrel{?}{\leq} \mu(A)^{\frac{1}{r}} + \mu(B)^{\frac{1}{r}}$$

נסמן לנוחות $p = \frac{1}{r} > 0$ ו- $a, b > 0$ ($0 < r < 1$ כי $p = \frac{1}{r} > 1$ ו- $a = \mu(A), b = \mu(B)$)

$$(a+b)^p \stackrel{?}{\leq} (a^p + b^p)$$

נשים לב שהפונקציה x^p היא פונקציה קמורה, כלומר לכל $t \in (0, 1)$ מתקיים

$$\varphi(ta + (1-t)b) \leq t\varphi(a) + (1-t)\varphi(b)$$

נחלק את איזומורפיזם שאנו בוחנים ב- $b^p \neq 0$ כמוין

$$(a+b)^p \stackrel{?}{\leq} (a^p + b^p) \iff \frac{(a+b)^p}{b^p} \stackrel{?}{\leq} \frac{a^p + b^p}{b^p} \iff \left(\frac{a}{b} + 1\right)^p \stackrel{?}{\leq} \left(\frac{a}{b}\right)^p + 1 \stackrel{x=\frac{a}{b}}{\iff} (x+1)^p \leq x^p + 1$$

נגידר $\psi(x) = (x+1)^p - x^p - 1$

$$\psi'(x) = p(x+1)^{p-1} - px^{p-1}$$

מכך ש- $\psi'(x) > 0$ ו- $x > 0$ ($x+1 > x$ ו- $p-1 > 0$ כי $p > 1$) ו- $\psi(0) = 1^p - 0^p = 0$

או ψ היא מונוטונית עולה ממש לכל $x > 0$ ו- $\psi(0) = 0$

$$(x+1)^p > x^p + 1$$

בסתירה, כלומר איזומורפיזם המשולש לא מתקיים.

□

שאלה 2

נניח כי (X, μ) מרחב מידת ס-סופי (איחוד בון-מניה של קבוצות מדידות עם מידת סופית) ו- $\infty < t \leq s \leq 1$.

סעיף א'

נוכיח כי $\mu(X) < \infty$ אם ורק אם $L^t(\mu) \subseteq L^s(\mu)$
 הוכחה: \Rightarrow נניח כי $\infty < (X, \mu)$ ונוכיח $L^t(\mu) \subseteq L^s(\mu)$
 אם $s = t$ סימנו ולכון נניח שיש שם איזיויון חזק ושכרעג $\infty < t$.
 תהי $g(x) = 1, f \in L^t(\mu)$, ונסמן $p = \frac{t}{s}, q = \frac{t}{t-s}$ ומההנחה מתקיים $1 \geq q, p \geq 1$ ובדיקה מראה שהם צמודים אחד לשנייה
 נסמן $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{s}{t} + \frac{t-s}{t} = \frac{s+t-s}{t} = 1$ מאיזיויון הולדר

$$\|f\|_s = \left(\int |f|^s d\mu \right)^{\frac{1}{s}} = \left(\int |f|^s \cdot 1 d\mu \right)^{\frac{1}{s}} \leq \| |f|^s \|_{\frac{t}{s}}^{\frac{1}{s}} \|1\|_{\frac{t}{s}}$$

נבחין

$$\begin{aligned} \| |f|^s \|_{\frac{t}{s}} &= \left(\int (|f|^s)^{\frac{t}{s}} \right)^{\frac{s}{t}} = \left(\int |f|^t \right)^{\frac{s}{t}} = \|f\|_t^s \\ \|1\|_{\frac{t}{s}} &= \mu(X)^{\frac{t-s}{t}} \end{aligned}$$

מידת המרחב היא סופית ולכון נסמן $M = \mu(X)$ אז מהאי-שוויון לעיל

$$\|f\|_s \leq \left(M^{\frac{t-s}{t}} \right)^{\frac{1}{s}} (\|f\|_t^s)^{\frac{1}{s}} = M^{\frac{1}{s}-\frac{1}{t}} \|f\|_t < \infty \Rightarrow f \in L^s(\mu)$$

אם $t = \infty$ או $f \in L^\infty$ (f ראנו בהרצאה) אז

$$\|f\|_s = \int |f|^s d\mu \leq \int \|f\|_\infty^s d\mu = \|f\|_\infty^s \mu(X) < \infty \Rightarrow f \in L^s(\mu)$$

\Leftrightarrow נניח כי $L^t(\mu) \subseteq L^s(\mu)$ ונוכיח $\infty < \mu(X) = \mu$
 נניח שלא ככה, כלומר $\mu(X) < \infty$

X הוא מרחב מידת ס-סופי ולכון קיימות E_1, E_2, \dots מדידות כך $0 < \mu(E_n) < \infty$ (לא-זוווקה שהן זרות בצורה טבעית
 אלא הורנו אותן בתהליכי דומים למה שראינו במלואת הראשונת) ומתקיים $\mu(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$ והסכום מתברר ואישליili.
 יהי $N \in \mathbb{N}$ כך שקיימים $1 \geq \sum_{n=1}^{N_1} \mu(E_n) \geq \dots$ (יש כזה כי הטור מתברר, לא סתם מתברר - שווה לאינסוף) ונגידיר $F_1 = \bigcup_{n=1}^{N_1} E_n$ וכמוהן
 $\infty < \mu(F_1) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty$ סכום סופי של מידות סופיות.

נמשיך ונגידיר F_2, F_3, \dots וכן הלאה כך שלכל N מתקיים $\mu(F_k) < \infty$ ו- $\mu(F_k) \leq 1$ וכן זרות אחת לשנייה (איחודן קבוצות זרות) ונחלה לנקרים:

אם $t = \infty$ אז $f \in L^\infty$ אבל $f \notin L^t(\mu)$, כלומר $\int |f|^s d\mu = \mu(X) = \infty$ אבל $f \notin L^s(\mu)$ ולכון $L^s(\mu) \subseteq L^t(\mu)$, סתירה.
 אם $t < \infty$ ושוב נניח כי $s < t$ ($s < t$ אחרת זה שוב סתירה), ונבחר $0 < \delta < \frac{t}{s} - 1$ ולכל N נגידיר
 $b_k := \mu(F_k)^{-\frac{1}{t}} k^{-\frac{(1+\delta)}{t}}$ ונגידיר $f := \sum_{k=1}^{\infty} b_k \mathbf{1}_{F_k}$ ונחשב ונקבל מהזרות

$$\int |f|^t d\mu = \int \left| \sum_{k=1}^{\infty} b_k \mathbf{1}_{F_k} \right|^t d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^t \int_{F_k} 1 d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^t \mu(F_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\mu(F_k)^{-\frac{1}{t}} \right)^t \left(k^{-\frac{(1+\delta)}{t}} \right)^t \mu(F_k) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-(1+\delta)} < \infty$$

כאשר ההתקנות היא מוגדרת $\delta + 1 > 0$
 ככלומר קיבלנו $f \in L^t(\mu)$, אבל מצד שני

$$\int |f|^s d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^s \int_{F_k} 1 d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(F_k)^{1-\frac{s}{t}} k^{-\frac{s(1+\delta)}{t}} \geq \sum_{\substack{k=1 \\ \mu(F_k) \geq 1}}^{\infty} k^{-\frac{s(1+\delta)}{t}} \geq \infty$$

כאשר ההתברדות היא מוגדרת $\frac{s(1+\delta)}{t} \leq 1$

כלומר, קיבלנו $f \in L^t(\mu)$, אבל הנחנו $L^t(\mu) \subseteq L^s(\mu)$, אבל $f \notin L^s(\mu)$

□

נוכיה כי (μ) אם ורק אם אין ב- \mathcal{A} תת-קבוצות ממידה קטנה כרצוננו, כלומר קיים $\varepsilon > 0$ כך שאם $\mu(A) < \varepsilon$ עבור A מדידה כלשהי, אז A מדידה אפס.

להלן: \iff נניח כי $L^s(\mu) \subseteq L^t(\mu)$ ונראה כי אין ב- \mathcal{A} תת-קבוצות ממידה קטנה כרצוננו.
 נניח בשילול שיש ב- \mathcal{A} תת-קבוצה ממידה קטנה כרצוננו, ולכן לכל $n \in \mathbb{N}$ יש קבוצה מדידה A_n כך ש- $0 < \mu(A_n) < \frac{1}{n}$.
 מהיות המרחב s -סوفي נוכל לבנות תח-סדרה של $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ שכל איברי הסדרה זרים ומדידים כך שמתקיים $\mu(B_n) \rightarrow 0$.

נגדיר

$$\alpha_n := \frac{1}{n^2 \mu(B_n)^{\frac{1}{s}}}$$

ולכן אם נגדיר פונקציה f הנחמתה על $(B_n)_{n=1}^{\infty}$, כלומר $f = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \mathbf{1}_{B_n}$ נקבל

$$\int |f|^s = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^s \mu(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(B_n)}{\left(n^2 \mu(B_n)^{\frac{1}{s}}\right)^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2s}} < \infty$$

שזהו טור מתכנס כי $s \geq 1$. מצד שני,

$$\int |f|^t = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^t \mu(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(B_n)}{\left(n^2 \mu(B_n)^{\frac{1}{s}}\right)^t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2t} \mu(B_n)^{\frac{t}{s}-1}}$$

מהיות $s > t > 0$ או $t > s$ ואגחנו תמיד יכולים לבנות את B_n כך שיתקיים $\mu(B_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ ו- $\frac{t}{s} - 1 > 0$.

$$\mu(B_{n_k})^{-\left(\frac{t}{s}-1\right)} > n_k^{2t} \implies \frac{\mu(B_{n_k})^{-\left(\frac{t}{s}-1\right)}}{n_k^{2t}} > 1$$

ולכן הטור במקורה זה מתבדר, וזה סתירה להנחה $L^s(\mu) \subseteq L^t(\mu)$
 \implies נניח כי אין ב- \mathcal{A} תת-קבוצות ממידה קטנה כרצוננו ונוכיה
 תהיי $f \in L^s(\mu)$ ולכל $k \in \mathbb{Z}$

$$E_k := \{x \in X \mid 2^k \leq |f(x)| < 2^{k+1}\}$$

כל כזו מדידה כתמונה של פונקציה ומידה ומתקיים לכל $j \neq i$ $E_i \cap E_j = \emptyset$ (כי הקטיעים אינם נחתכים)

$$\int |f|^s d\mu = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{E_k} |f|^s d\mu \geq \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{ks} \mu(E_k)$$

כעת, נטען שיש מספר סופי של k -ים עבורם $\mu(E_k) > 0$: שכן אם בשילול לא היה ככה, היה מתקיים

$$\|f\|_s^s = \int |f|^s d\mu \geq \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{ks} \mu(E_k)$$

אם הייתה כמות שאינה סופית, או הסכום מצד ימין היה מתבדר (בין אם בשאיפה לאינסוף ובין אם שאיפה למינוס אינסוף) וזה נקבע $\int |f|^s d\mu = \infty$ אבל

או קיים $M < \infty$ כך שמתקיים $|f(x)| \leq M$ לכל x ונקבל $f \in L^{\infty}(\mu) \subseteq L^t(\mu) \subseteq L^{\infty}(\mu)$ ומהיות $s \leq t \leq \infty$ ונקבל $f \in L^{\infty}(\mu)$ ולכן $f \in L^s(\mu)$.

□

שאלה 3

יהי (X, \mathcal{A}, μ) מרחב מידה. עבור $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ מדידה נגידר

$$\text{ess sup } f := \inf\{\alpha \mid \mu(f^{-1}((\alpha, \infty))) = 0\}, \quad \text{ess inf } f := \sup\{\alpha \mid \mu(f^{-1}((-\infty, \alpha))) = 0\}$$

עבור $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ נסמן $\|f\|_\infty = \text{ess sup}|f|$

סעיף א'

תהיי $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ מדידה. נסמן ב- $\mathbb{R} \subseteq K$ את התומך של המידה μ המוגדרת על $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$.

nociah כי הsofaromo והainfimom של K הם ביזיוק $\text{ess sup } f, \text{ess inf } f$

הוכחה: נסמן

$$M := \text{ess sup } f = \inf\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \mu(f^{-1}(\alpha, \infty)) = 0\}$$

יהי $0 > \varepsilon$, מהגדרת האינפימום נובע $0 = \mu(f^{-1}((M + \varepsilon, \infty)))$ ומהמשיכה קדימה של המידה

$$(f_*\mu)((M + \varepsilon, \infty)) = \mu(f^{-1}((M + \varepsilon, \infty))) = 0$$

מהגדרת התומך מתקיים $-(M + \varepsilon, \infty) \subseteq \mathbb{R} \setminus K$, כלומר ε שירוטי נובע שכל הקטע

$\text{sup } K \leq M = \text{ess sup } f$ או $x \in K$ מקיימים $x \leq M$

הכוון השני הוא סימטרי: נסמן

$$T := \text{ess inf } f$$

או לכל $0 > \varepsilon$ מקיימים $0 = \mu(f^{-1}(-\infty, T - \varepsilon))$, או אף נקודה שקטנה מ- $T - \varepsilon$ אינה ב- K , ולכן $\inf K \geq T$, אבל לכל $\beta > T$ מקיימים

$\inf K = T = \text{ess inf } f$ וקיים $K \leq T$ $(-\infty, \beta) \cap K \neq \emptyset$ וקיים $\mu(f^{-1}(-\infty, \beta)) > 0$

סעיף ב'

נראה כי לכל f מדידה

$$\|f\|_1 \leq \mu(X) \cdot \|f\|_\infty$$

הוכחה: נסמן $M := \|f\|_\infty$, אז לכל $0 > \varepsilon$ מהגדרת ה- sup נגידר

$$A_\varepsilon := \{x \in X \mid |f(x)| > M + \varepsilon\} \implies \mu(A_\varepsilon) = 0$$

יתר על-כן, נובע לכך שמתקיים $M \leq |f(x)|$ כמעט בכל מקום ולכון מונוטוניות האינטגרל

$$\|f\|_1 = \int_X |f| d\mu \leq \int_X \|f\|_\infty d\mu = \|f\|_\infty \cdot \int_X 1 d\mu = \|f\|_\infty \mu(X)$$

□

סעיף ג'

נניח כי f, f_n פונקציות מדידות כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$. נראה כי קיימת L תחת-סדרה המתכנסת נקודתית ל- f .

הוכחה: נסמן $M_n := \|f_n - f\|_\infty$ ומגנתו $0 \leq M_n < \alpha$, אם $\text{ess sup } M_n < \alpha$ ומהgenton $M_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. ניקח סדרת אינדקסים $(n_j)_{j \geq 1}$ כך שמתקיים $M_{n_j} < \frac{1}{j}$ וזה אפשרי מכיון $0 < M_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L$ ונגידר

$$E_j := \left\{x \in X \mid |f_{n_j}(x) - f(x)| > \frac{1}{j}\right\}$$

או לכל j מקיימים $\mu(E_j) = 0$ (מהגדרת sup ונסתכל על E_j , זה איחוד ב- σ -מניה של קבוצות מדידה אפס ולכון $0 = \mu(A)$) אם $x \notin A$ או עבור j גדול דיו מקיימים

$$|f_{n_j}(x) - f(x)| \leq \frac{1}{j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$$

כלומר $f(x) \rightarrow f(x)$ לכל $x \in X$ למעט בקבוצה מדידה אפס, כלומר קיבלנו $f \rightarrow f$ כמעט בכל מקום/מעט תמיד.

שאלה 4

נניח כי $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ מרחב מידה סופי ו- μ מדידה.

סעיף א'

נראה כי אם $\|f\|_\infty = 1$ או הסדרה $a_n = \int_X |f|^n d\mu$ מתכנסת. הוכחה: מהנתון $|f(x)| \leq 1, x \in X$, כלומר $\inf\{\alpha \geq 0 \mid \mu(|f| \geq \alpha) = 0\} = 1$. וכן $\|f\|_\infty = 1$.

$$a_n = \int_X |f|^n d\mu \leq \int_X 1 d\mu = \mu(X) < \infty$$

עוד נובע $|f|^n \leq |f|^{n-1} \leq |f|^{n-2} \leq \dots \leq |f| \leq a_n$ ונשים לב גם $a_{n+1} \leq a_n$ מתקיים $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $0 < a_n \leq \dots \leq a_{n+1} \leq \dots$ כלומר $(a_n)_{n=1}^\infty$ מונוטונית יורדת חילש וא-שלילית ולכן מתכנסת.

□

סעיף ב'

נראה כי לכל f עם $\|f\|_\infty < 0$ מתקיים

$$\|f\|_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|f\|_{n+1}^{n+1}}{\|f\|_n^n}$$

הוכחה: נסמן

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|f\|_{n+1}^{n+1}}{\|f\|_n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_X |f|^{n+1} d\mu}{\int_X |f|^n d\mu}, \quad 0 < M := \|f\|_\infty < \infty$$

נדיר $g : X \rightarrow \mathbb{C}$ גולדי $g(x) = \frac{f(x)}{M}$ וועלדי נרמול זה נקבע

$$\|g\|_\infty = \left\| \frac{f}{M} \right\|_\infty = \frac{\|f\|_\infty}{M} = 1, \quad \|g\|_p = \int_X |g|^p d\mu = \int_X \left| \frac{f}{M} \right|^p d\mu = \frac{1}{M^p} \int_X |f|^n d\mu = \frac{1}{M^p} \|f\|_p^n$$

ולכן

$$\frac{\|f\|_{n+1}^{n+1}}{\|f\|_n^n} = \frac{\int_X |f|^{n+1} d\mu}{\int_X |f|^n d\mu} = \frac{\int_X |Mg|^{n+1} d\mu}{\int_X |Mg|^n d\mu} = \frac{M^{n+1} \int_X |g|^{n+1} d\mu}{M^n \int_X |g|^n d\mu} = M \cdot \frac{\int_X |g|^{n+1} d\mu}{\int_X |g|^n d\mu}$$

נדיר

$$a_n = \int_X |g|^n d\mu = \|g\|_n^n$$

מההסעיף הקודם קיימmo $A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ נקבע

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \|g\|_n^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |g|^n d\mu$$

ו- A א-שלילי (חסם מלרע), נשים לב שאנו צריכים להוכיח למה זה מוגדר היטב: מהיות $\|g\|_\infty = 1$, אנחנו יודעים שמתקיים $\|f\|_\infty < \infty$ ומכך $\|g\|_\infty < \infty$ או $\mu(A) > 0$ ולכן מתקיים

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_X |g|^{n+1} d\mu}{\int_X |g|^n d\mu} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$$

כאשר השיוויון האחרון נובע מזה שהמכנה מתכנס לאותו ערך כמו המונה מנוסחת הזונב. נקבל בסך-הכל עם מה שמצאנו ולקיחת גבול

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|f\|_{n+1}^{n+1}}{\|f\|_n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} M \cdot \frac{\int_X |g|^{n+1} d\mu}{\int_X |g|^n d\mu} = M \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = M \cdot 1 = M$$

□