פתרון מטלה 01 — פונקציות מרוכבות, 80519

29 באוקטובר 2025

שאלה 1

דברים עם ציורים וזה

סעיף א'

TODOOOOOOOOOOOOOOOOOO

סעיף ב'

TODOOOOOOOOOOOOOOOOOO

סעיף ג'

נסמן $\mathbb{C} \ni z = x + iy, w = a + ib$ ותהיינה M_z, M_w המטריצות שמייצגות את המספר המרוכב z, w בהתאמה.
תזכורת: $M_z = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$.

תת־סעיף א'

נוכיח את הזהות $M_{z+w} = M_z + M_w$.
הוכחה: מתקיים

$$z + w \underset{\text{חיבור מרוכבים}}{=} (x + a) + i(y + b) \Longrightarrow M_{z+w} = \begin{pmatrix} x + a & -(y + b) \\ y + b & x + a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + a & -y - b \\ y + b & x + a \end{pmatrix}$$

מצד שני

$$M_z + M_w = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + a & -y - b \\ y + b & x + a \end{pmatrix} = M_{z+w}$$

$\square$

תת־סעיף ב'

נוכיח את הזהות $M_{z \cdot w} = M_z \cdot M_w$.
הוכחה: מתקיים

$$z \cdot w \underset{\text{כפל מרוכבים}}{=} (x + iy) \cdot (a + ib) = (xa - yb) + i(ya + xb) \Longrightarrow M_{z \cdot w} = \begin{pmatrix} xa - yb & -ya - xb \\ ya + xb & xa - yb \end{pmatrix}$$

מצד שני

$$M_z \cdot M_w = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa - yb & -xb - yb \\ ya + xb & -yb + xa \end{pmatrix} = M_{z \cdot w}$$

$\square$

שאלה 2

סעיף א'

נפתור $x^4 = -8 + i8\sqrt{3}$.

פתרון: אנחנו מחפשים את השורש ארבעת השורשים המרוכבים של המספר $z = -8 + i8\sqrt{3}$.

נעבור לקורדינאטות פולאריות

$$r = |z| = \sqrt{(-8)^2 + \left(8\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{64+192} = \sqrt{256} = 16 \ (r \geq 0)$$

ראינו $Arg(z) = \operatorname{atan2}(y,x)$, כלומר $\arctan$ עם התחשבות ברביע.

במקרה שלנו מתקיים $Re(z) = -8, Im(z) = 8\sqrt{3}$ כלומר z נמצא ברביע השני ו־$\arctan$ יחזיר לנו זווית בכיוון הפוך ולכן עלינו לתקן בהוספת π, אז

$$\operatorname{atan2}(z) = \arctan\left(\frac{8\sqrt{3}}{-8}\right) + \pi = \frac{-\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3}$$

באופן דומה יכלנו למצוא באמצעות פתירת מערכת המשוואות

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \Longrightarrow \cos(\theta) = \frac{-8}{16} = -\frac{1}{2} \\ y = r\sin(\theta) \Longrightarrow \sin(\theta) = \frac{8\sqrt{3}}{16} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Longrightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$$

אז

$$z = 16\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 16e^{\frac{i2\pi}{3}}$$

יש 4 שורשים ולכן ממשפט דה־מואבר נקבל

$$x_k = \sqrt[n]{16}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta+2\pi k}{n}\right)\right), \ k \in \{0,1,2,3\}, \ n = 4$$

נחשב

$$x_0 = 2\left(\cos\left(\frac{\frac{2\pi}{3}+0}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{2\pi}{3}+0}{4}\right)\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$x_1 = 2\left(\cos\left(\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi}{4}\right)\right) = 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right),$$

$$x_2 = 2\left(\cos\left(\frac{\frac{2\pi}{3}+4\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{2\pi}{3}+4\pi}{4}\right)\right) = 2\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right),$$

$$x_3 = 2\left(\cos\left(\frac{\frac{2\pi}{3}+6\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{2\pi}{3}+6\pi}{4}\right)\right) = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right)$$

□

סעיף ב'

תהיי $\theta \in \mathbb{R}$ ו־$N \in \mathbb{N}$ ונמצא נוסחה סגורה לסכום בכל סעיף.

תת־סעיף א'

$\sum_{n=1}^{N} \cos(n\theta)$.

פתרון: ראינו $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ ולכן $\cos(n\theta) = Re\big(e^{in\theta}\big)$ ונקבל

$$\sum_{n=1}^{N} \cos(n\theta) = \sum_{n=1}^{N} Re\big(e^{in\theta}\big) = Re\left(\sum_{n=1}^{N} e^{in\theta}\right) \underset{\text{משפט דה־מואבר}}{=} Re\left(\sum_{n=1}^{N} \left(e^{i\theta}\right)^n\right) \underset{\text{תור הנדסי סופי}}{=} Re\left(\frac{e^{i\theta} - e^{i(N+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}\right)$$

$$Re\left(\frac{e^{\frac{i\theta}{2}}\left(e^{\frac{i\theta}{2}} - e^{i(N+\frac{1}{2})\theta}\right)}{e^{\frac{i\theta}{2}}\left(e^{\frac{-i\theta}{2}} - e^{\frac{i\theta}{2}}\right)}\right) = Re\left(\frac{e^{\frac{i\theta}{2}} - e^{i(N+\frac{1}{2})\theta}}{e^{\frac{-i\theta}{2}} - e^{\frac{i\theta}{2}}}\right)(\star)$$

מנוסחת דה־מואבר ומהיות $\sin, \cos$ פונקציות אי־זוגית וזוגית בהתאמה

$$e^{\frac{-i\theta}{2}} - e^{\frac{i\theta}{2}} = \cos\left(-\frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\theta}{2}\right) - \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) = \cancel{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} - i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - \cancel{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} - i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$= -2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

נניח $\theta \neq 2\pi k$ עבור $k \in \mathbb{Z}$, ולכן כאשר $(\star\star)$ נובע שוב מדה־מואבר

$$(\star) = Re\left(\frac{e^{\frac{i\theta}{2}} - e^{i(N+\frac{1}{2})\theta}}{-2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right) \underset{\frac{1}{-i}=i}{=} = Re\left(\frac{i\left(e^{\frac{i\theta}{2}} - e^{i(N+\frac{1}{2})\theta}\right)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)$$

$$\underset{(\star\star)}{=} Re\left(\frac{i\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - \cos\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)\theta\right) - i\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)\theta\right)\right)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)$$

$$= Re\left(\frac{i\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - i\cos\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)\theta\right) + \sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)\theta\right)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)$$

$$= \frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)\theta\right) - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

אם $\theta = 2\pi k$ עבור $k \in \mathbb{Z}$ אז

$$\sum_{n=1}^{N} \cos(n\theta) = \sum_{n=1}^{N} 1 = N$$

$\square$

תת־סעיף ב'

$\sum_{n=1}^{N} \sin(n\theta)$.

פתרון: נשתמש בסעיף א' עם אותן הגבלות על θ רק שאם $\theta = 2\pi k$ עבור $k \in \mathbb{Z}$ אז $\sum_{n=1}^{N} \sin(n\theta) = 0$

$$\sum_{n=1}^{N} \sin(n\theta) = \sum_{n=1}^{N} Im\big(e^{in\theta}\big) = Im\left(\sum_{n=1}^{N} e^{in\theta}\right) \underset{\text{משפט דה־מואבר}}{=} Im\left(\sum_{n=1}^{N} \left(e^{i\theta}\right)^n\right) \underset{\text{תור הנדסי סופי}}{=} Im\left(\frac{e^{i\theta} - e^{i(N+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}\right)$$

$$\underset{\text{סעיף א' רק מדומה במקום ממשי}}{\Longrightarrow} Im\left(\frac{i\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - i\cos\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)\theta\right) + \sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)\theta\right)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \cos\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)\theta\right)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \underset{\text{זהות}}{=} (\sin)$$

$\square$

שאלה 3

סעיף א'

נוכיח שמתקיים

$$z_n \to z \iff Re(z_n) \to Re(z) \ \wedge \ \ Im(z_n) \to Im(z)$$

הוכחה: לכל $n \in \mathbb{N}$ נסמן $z_n = x_n + iy_n$ ו־$z = x + iy$.

$\Leftarrow$ נניח כי $z_n \to z$ ונרצה להראות $Re(z_n) \to Re(z)$ וכן $Im(z_n) \to Im(z)$.

יהי $\varepsilon > 0$, מההתכנסות נובע שיש $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq N$ מתקיים

$$|z_n - z| = |x_n + iy_n - (x + iy)| = |x_n - x + i(y_n - y)| = \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} < \varepsilon$$

מצד שני

$$|Re(z_n) - Re(z)| = |x_n - x| = \sqrt{(x_n - x)^2} \leq \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} < \varepsilon$$

$$|Im(z_n) - Im(z)| = |y_n - y| = \sqrt{(y_n - y)^2} \leq \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} < \varepsilon$$

כלומר, $Re(z_n) \to Re(z) \ \wedge \ \ Im(z_n) \to Im(z)$, כנדרש.

$\Longrightarrow$ נניח כי $Re(z_n) \to Re(z) \ \wedge \ \ Im(z_n) \to Im(z)$ ונרצה להראות $z_n \to z$.

יהי $\varepsilon > 0$ ומההתכנסות נובע שקיימים $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ כך שמתקיים לכל $k \geq N_1$ ו־$m \geq N_2$,

$$|Re(z_k) - Re(z)| < \frac{\varepsilon}{2}, \ |Im(z_m) - Im(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

נבחר $N = \max(N_1, N_2)$ ולכל $n \geq N$ מתקיים

$$|z_n - z| = |x_n + iy_n - (x + iy)| = |(x_n - x) + i(y_n - y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

כלומר, $z_n \to z$, כנדרש. $\square$

סעיף ב'

יהי $K \subset \mathbb{C}$ ונראה ש־K קומפקטי אם ורק אם לכל סדרה $K \subseteq (z_n)_{n=1}^{\infty}$ יש תת־סדרה $\left(z_{n_k}\right)_{k=1}^{\infty}$ מתכנסת ל־$z \in K$.

הוכחה:

תזכורת: בהרצאה הגדרנו שקבוצה היא קומפקטית אם היא סגורה וחסומה וש־$\mathbb{C}$ הוא אכן מרחב מטרי.

$\Leftarrow$ נניח כי K קומפקטי ונראה שלסדרה $K \subseteq (z_n)_{n=1}^{\infty}$ יש תת־סדרה מתכנסת.

נניח בשלילה כי K אינו קומפקטי־סדרתית, כלומר יש $z \subseteq (z_n)_{n=1}^{\infty}$ כך שאין לה תת־סדרה מתכנסת. $\Longrightarrow$ נניח שלכל סדרה $K \subseteq (z_n)_{n=1}^{\infty}$ יש תת־סדרה מתכנסת $\left(z_{n_k}\right)_{k=1}^{\infty}$ ל־$z \in K$ ונרצה להראות ש־K סגור וחסום.

סגור: נובע מהניסוח השקול קבוצה סגורה כאוסף כל הנקודות הגבוליות במרחב ומכך שלכל סדרה יש תת־סדרה מתכנסת ל־$z \in K$, כלומר K אוסף כל הנקודות הגבוליות.

חסום: נניח ש־K לא חסומה ויהי $z_0 \in K$

$\square$