

פתרון מטלה 08 – חשבון אינפיניטסימלי 3, 80415

5 ביוני 2025



שאלה 1

תהי $g : B_r(0) \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ פונקציה c -ליפשיצית עבור $c \in (0, 1)$ ונניח בנוסף כי $g(0) = 0$.
נגדיר $f : B_r(0) \rightarrow \mathbb{R}^k$ על-ידי $f(x) = x + g(x)$.

סעיף א'

נראה כי f היא חד-חד ערכית.

הוכחה: יהיו $x, y \in B_r(0)$ ונשים לב שמתקיים

$$f(x) = f(y) \iff x + g(x) = y + g(y) \iff x - y = g(y) - g(x) \iff \|x - y\| = \|g(y) - g(x)\| \stackrel{\text{ליפשיציות}}{\leq} c\|y - x\|$$

אבל זאת כמובן סתירה, שכן $c \in (0, 1)$, ולכן $f(x) = f(y)$ אם ורק אם $x = y$ וקיבלנו כי f היא חד-חד ערכית. □

סעיף ב'

נוכיח כי מתקיים

$$B_{(1-c)r}(0) \subseteq f(B_r(0)) \subseteq B_{(1+c)r}(0)$$

הוכחה: יהי $x \in B_r(0)$ ולכן

$$\|x\| = \|x + g(x)\| \leq \|x\| + \|g(x)\| \stackrel{(*)}{\leq} \|x\| + c\|x\| = (1+c)\|x\| < (1+c)r$$

כאשר המעבר $(*)$ נובע מהנתון כי $g(0) = 0$ ו- g היא c -ליפשיצית, כי אז לכל $x, y \in B_r(0)$ מתקיים

$$\|g(x) - g(y)\| \leq c\|x - y\|$$

וזה נכון בפרט עבור $y = 0$ ומהנתון ש- $g(0) = 0$ נקבל

$$\|g(x) - g(0)\| \leq c\|x - 0\| = c\|x\|$$

וקיבלנו ש- $f(B_r(0)) \subseteq B_{(1+c)r}(0)$ והכלה את ההכלה $f(B_r(0)) \subseteq B_{(1+c)r}(0)$ ולכן קיבלנו את ההכלה $f(B_r(0)) \subseteq B_{(1+c)r}(0)$.
בשביל הכיוון השני, נרצה להראות שלכל $y \in B_{(1-c)r}(0)$ מתקיים $y \in f(B_r(0))$ משמע שקיים $x \in B_r(0)$ כך שיתקיים

$$f(x) = x + g(x) = y \Rightarrow x = y - g(x)$$

בשביל זה, נגדיר $h(x) = y - g(x)$ ונרצה להראות ש- $x = h(x)$.

נשים לב שמתקיים

$$\|h(x) - h(y)\| = \|g(x) - g(y)\| \stackrel{(*)}{\leq} c\|x - y\|$$

כאשר $(*)$ זה שוב מהליפשיציות, והיות ו- $c \in (0, 1)$ נובע כי h העתקה מכווצת!

ניקח $y \in B_{(1-c)r}(0)$ ונראה שלמשוואה $x = h(x)$ יש פיתרון ב- $B_r(0)$, דהיינו x נקודת שבת (שאנחנו יודעים שיש ממשפט העתקה מכווצת), אז עבור $x \in B_r(0)$ מתקיים

$$\|h(x)\| = \|y - g(x)\| \leq \|y\| + \|g(x)\| < (1-c)r + c\|x\| < (1-c)r + cr = r$$

אז $h(B_r(0)) \subseteq B_r(0)$ ו- h העתקה מכווצת ולכן קיים $x \in B_r(0)$ כך שמתקיים

$$x = h(x) = y - g(x) \Rightarrow f(x) = y$$

ולכן $y \in B_r(0)$ וזה מביא לנו את ההכלה $B_{(1-c)r}(0) \subseteq f(B_r(0))$. □

שאלה 2

סעיף א'

תהי $A \subseteq \mathbb{R}^k$ פתוחה ו- $f: A \rightarrow \mathbb{R}^k$ פונקציה חד-חד ערכית וגזירה ברציפות כך ש- Df_a הפיכה לכל $a \in A$. נוכיח כי התמונה $B = f(A)$ היא פתוחה וכי $f^{-1}: B \rightarrow A$ היא גזירה ברציפות. הוכחה: היות ו- f גזירה ברציפות ו- Df_a הפיכה לכל $a \in A$, ממשפט הפונקציה ההפוכה נובע כי לכל $a \in A$ קיימת סביבה U_a של a כך ש- f^{-1} היא דיפאומורפיזם (חד-חד ערכית ועל ו- $f, f^{-1} \in C^1$) מ- U_a אל $f(U_a)$ וממשפט הפונקציה ההפוכה אנחנו מקבלים גם ש- $f(U_a)$ היא פתוחה. היות ו- A פתוחה, נובע שלכל $a \in A$ נוכל למצוא סביבה U_a כך ש- $f(U_a)$ היא פתוחה, ובפרט כך נוכל לכסות את A . אז

$$B = f(A) = \bigcup_{a \in A} f(U_a)$$

היא איחוד של קבוצות פתוחות וראינו כבר שאיחוד של קבוצות פתוחות הוא פתוח, ולכן B קבוצה פתוחה. ממשפט הפונקציה ההפוכה אנחנו מקבלים ש- $f^{-1} \in C^1$ לכל $b = f(a)$ עבור $a \in A$ וכפי שראינו האיחוד של זה מכסה את התמונה, את B ולכן לכל $b \in B$ קיימת סביבה סביב b כך ש- $f^{-1} \in C^1$, אבל זה בדיוק אומר שגם האיחוד בכיוון הזה מוביל לכך ש- $f^{-1} \in C^1$ ב- B . \square

סעיף ב'

עבור הסעיפים הבאים נתבונן בפונקציה $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ הנתונה על-ידי

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} e^x \cos(y) \\ e^x \sin(y) \end{pmatrix}$$

תת-סעיף א'

נוכיח כי f אינה חד-חד ערכית אבל $Df_{(x,y)}$ הפיכה לכל $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. הוכחה: f לא חד-חד ערכית שכן מהמחזוריות של \cos, \sin נקבל

$$f(0, \pi) = \begin{pmatrix} e^0 \cos(\pi) \\ e^0 \sin(\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^0 \cos(3\pi) \\ e^0 \sin(3\pi) \end{pmatrix} = f(0, 3\pi)$$

אז f לא חד-חד ערכית. נעבור להראות ש- $Df_{(x,y)}$ כן הפיכה: נסמן

$$f_1(x, y) = e^x \cos(y), \quad f_2(x, y) = e^x \sin(y)$$

f היא גזירה ברציפות מאריתמטיקה של פונקציות גזירות (פונקציות טריגונומטריות ואקספוננט הם גזירים ברציפות) ועל-כן היא דיפרנציאבילית ומתקיים

$$Df_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x \cos(y) & -e^x \sin(y) \\ e^x \sin(y) & e^x \cos(y) \end{pmatrix}$$

נחשב את היעקוביאן של $Df_{(x,y)}$:

$$Jf_{(x,y)} = \det \begin{bmatrix} e^x \cos(y) & -e^x \sin(y) \\ e^x \sin(y) & e^x \cos(y) \end{bmatrix} = e^{2x} \cos^2(y) + e^{2x} \sin^2(y) = e^{2x} (\cos^2(y) + \sin^2(y)) \stackrel{\cos^2(y) + \sin^2(y) = 1}{=} e^{2x}$$

נשים לב כי $Jf_{(x,y)} \neq 0$ לכל $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ולכן $Df_{(x,y)}$ הפיכה לכל $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. \square

תת-סעיף ב'

תהי $A = \mathbb{R} \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ונוכיח כי $f|_A$ היא חד-חד ערכית ונמצא את $B = f(A)$. הוכחה: יהיו $a_1 = (x_1, y_1), a_2 = (x_2, y_2) \in A$ ונניח שמתקיים $f(a_1) = f(a_2)$, משמע מתקיים

$$f(a_1) = f(a_2) \iff f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) \iff \begin{pmatrix} e^{x_1} \cos(y_1) \\ e^{x_1} \sin(y_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{x_2} \cos(y_2) \\ e^{x_2} \sin(y_2) \end{pmatrix}$$

וקיבלנו מערכת משוואות

$$\begin{cases} (1) e^{x_1} \cos(y_1) = e^{x_2} \cos(y_2) \\ (2) e^{x_1} \sin(y_1) = e^{x_2} \sin(y_2) \end{cases}$$

נעלה כל משוואה בריבוע ונחבר ביניהן

$$e^{2x_1} \cos^2(y_1) + e^{2x_1} \sin^2(y_1) = e^{2x_2} \cos^2(y_2) + e^{2x_2} \sin^2(y_2) \iff e^{2x_1} (\cos^2(y_1) + \sin^2(y_1)) = e^{2x_2} (\cos^2(y_2) + \sin^2(y_2))$$

$$\xLeftrightarrow[\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1] e^{2x_1} = e^{2x_2} \xLeftrightarrow[\text{אקספוננט מונוטוני עולה ממש}] x_1 = x_2$$

ועכשיו נקבל במערכת המשוואות שלנו

$$\begin{cases} (1) e^{x_1} \cos(y_1) = e^{x_1} \cos(y_2) \\ (2) e^{x_1} \sin(y_1) = e^{x_1} \sin(y_2) \end{cases} \iff \begin{cases} (1) \cos(y_1) = \cos(y_2) \\ (2) \sin(y_1) = \sin(y_2) \end{cases}$$

אבל $\sin(x), \cos(x)$ הן חד-חד ערכיות בגלל המחזוריות שלהן ב- $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ (כי המחזור של $\sin(x)$ הוא הקטע $(0, 2\pi)$ ששם \sin חד-חד ערכית ועבור $\cos(x)$ זה הקטע $(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2})$ ששם \cos היא חד-חד ערכית, אז אם נזיז את הקטעים לקטע $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ אנחנו שומרים על הקטעים החד-חד ערכיים).

ולכן נקבל שאם $f(a_1) = f(a_2)$ אז $a_1 = a_2$ בהכרח, דהיינו f חד-חד ערכית ב- A .
עבור התמונה $f(A)$, נכתוב

$$f(x, y) = e^x \begin{pmatrix} \cos(y) \\ \sin(y) \end{pmatrix}$$

עבור $x \in \mathbb{R}, y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, אבל זה בידיק התצוגה במישור (אם נסתכל על זה כקורדינאטות קוטביות, יש לנו $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ זווית ו- $r = e^x \in (0, \infty)$, ללא הראשית בכלל ובעצם הזווית מכוונית לחצי המישור הימני, ובמילים אחרות

$$f(A) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u > 0\}$$

□

תת-סעיף ג'

נתאר במפורש את הפונקציה ההופכית $g = (f|_A)^{-1} : B \rightarrow A$

הוכחה: נסמן

$$(u, v) = f(x, y) = e^x \begin{pmatrix} \cos(y) \\ \sin(y) \end{pmatrix} \xLeftrightarrow[\text{נורמה וזהות}] \sqrt{u^2 + v^2} = e^x \iff x = \ln(\sqrt{u^2 + v^2}) = \frac{1}{2} \ln(u^2 + v^2)$$

עבור הקורדינאטה השנייה, נשים לב

$$\tan(y) = \frac{\sin(y)}{\cos(y)} = \frac{v}{u} \Rightarrow y = \arctan\left(\frac{v}{u}\right)$$

שמוגדר היטב עבור $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

אז $g : B = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u > 0\} \rightarrow \mathbb{R} \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ נתונה על-ידי

$$g(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \ln(u^2 + v^2) \\ \arctan(v, u) \end{pmatrix}$$

□

שאלה 3

נמצא את הנקודה הקרובה ביותר והנקודה הרחוקה ביותר מהראשית ב- \mathbb{R}^3 על החיתוך של שתי הספירות

$$(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1, x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$$

הוכחה: נגדיר את הפונקציה שלנו $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ על-ידי $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, השורש לא משנה לנו בפונקציית המרחק כי שורש משמר יחסי מינימום-מקסימום.

נגדיר את פונקציות האילוצים

$$g_1(x, y, z) = (x-1)^2 + y^2 + z^2 - 1, g_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + (z-1)^2 - 1$$

ונסתכל על

$$\nabla f = \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2$$

נחשב אותם

$$\nabla f = 2(x, y, z)$$

$$\nabla g_1 = 2(x-1, y, z)$$

$$\nabla g_2 = 2(x, y, z-1)$$

אפשר כבר לבטל את הפקטור של 2 ונקבל

$$\nabla f = \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2 \iff (x, y, z) = \lambda(x-1, y, z) + \mu(x, y, z-1)$$

קיבלנו אם ככה כמה משוואות

$$\begin{cases} (1) x = \lambda(x-1) + \mu x = \lambda x - \lambda + \mu x \\ (2) y = \lambda y + \mu y \\ (3) z = \lambda z + \mu(z-1) = \lambda z + \mu z - \mu \end{cases}$$

ממשוואה (2) נקבל $y = 0$ או $\lambda + \mu = 1$. נניח תחילה ש- $y = 0$ ונציב באילוצים שלנו, נקבל

$$g_1(x, 0, z) = (x-1)^2 + z^2 - 1 = x^2 - 2x + z^2 = 0, g_2(x, 0, z) = x^2 + (z-1)^2 - 1 = x^2 + z^2 - 2z$$

נחסר ביניהם, ונקבל

$$(x^2 - 2x + z^2) - (x^2 - 2z + z^2) = 2x + 2z = 0 \Rightarrow x = z$$

נציב באחד האילוצים ונקבל

$$g_1(x = z, 0, z) = (z-1)^2 + z^2 - 1 = 2z^2 - 2z \Rightarrow 2z(z-1) = 0 \iff z = 0 \vee z = 1$$

בסך-הכל מהמקרה הזה הנקודות החשודות שלנו הם $P_1 = (0, 0, 0), P_2 = (1, 0, 1)$.

נבחן את המקרה השני, נניח ש- $\lambda + \mu = 1$ נקבל אז אם נציב ב- $x = \lambda(x-1) + \mu x$ את $\lambda = 1 - \mu$ נקבל

$$x = \lambda(x-1) + \mu x \xLeftrightarrow[\lambda=1-\mu] x = (1-\mu)(x-1) + \mu x \iff x = x-1-\mu x + \mu + \mu x \iff x = x-1+\mu \iff \mu = 1$$

ובהצבה עבור (3) נקבל

$$z = \lambda z + \mu(z-1) \iff z = 0 \cdot z + 1(z-1) \iff z = z-1 \iff 0 = -1$$

וזאת סתירה!

אז הנקודות היחידות שלנו הן P_1, P_2 ולכן $P_1 = (0, 0, 0)$ הנקודה הקרובה ביותר לראשית ו- $P_2 = (1, 0, 1)$ הנקודה הרחוקה ביותר מהראשית תחת האילוצים (כמובן שהן נמצאות על שתי הספירות!).

□

שאלה 4

נוכיח את אי־שיוויון קושי־שוורץ באמצעות כופלי לגראנז', כלומר נראה שלכל $u, v \in \mathbb{R}^k$ מתקיים

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$$

הוכחה: נגדיר $U = \sum_{i=1}^k x_i^2$, $V = \sum_{i=1}^k y_i^2$, נרצה למצוא מינימום/מקסימום של $f(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k) = \sum_{i=1}^k x_i y_i$. נסמן את האילוץ שלנו, $g = U$, $h = V$, ולפי משפט כופלי לגראנז'

$$\nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h$$

נחשב

$$\nabla f = (y_1, \dots, y_k, x_1, \dots, x_k)$$

$$\nabla g = 2 \left(x_1, \dots, x_k, \underbrace{0, \dots, 0}_{k \text{ פעמים}} \right)$$

$$\nabla h = 2 \left(\underbrace{0, \dots, 0}_{k \text{ פעמים}}, y_1, \dots, y_k \right)$$

אז יש לנו

$$\nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h \Rightarrow (y_1, \dots, y_k, x_1, \dots, x_k) = 2\lambda(y_1, \dots, y_k) + 2\mu(0, \dots, 0, y_1, \dots, y_k)$$

וישר נקבל שמתקיים

$$y_i = 2\lambda x_i, \quad x_i = 2\mu y_i$$

זאת־אומרת

$$\sum_{i=1}^k y_i^2 = \sum_{i=1}^k 4\lambda^2 x_i^2 \Rightarrow 4\lambda^2 U = V$$

ולכן

$$\lambda = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{V}{U}}$$

ונקבל

$$y_i = 2\lambda x_i \Rightarrow \pm \sqrt{\frac{V}{U}} x_i$$

ועכשיו נקבל

$$\sum_{i=1}^k (x_i y_i) \leq \sum_{i=1}^k \left(x_i \cdot \sqrt{\frac{V}{U}} x_i \right) = \sqrt{\frac{V}{U}} \cdot U = \sqrt{\frac{V}{U}} \cdot U^2 = \sqrt{UV} = \left(\sum_{i=1}^k x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^k y_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

□

זה בדיקת אי־שיוויון קושי־שוורץ.

שאלה 5

תהי $A \subseteq \mathbb{R}^3$ קבוצת אוסף הפתרונות של מערכת המשוואות

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = \sin(xy) + x^2z - y^3 = 1 \\ F_2(x, y, z) = e^{yz} + xy^2 + z^3 = 2 \end{cases}$$

סעיף א'

נראה כי קיימת סביבה פתוחה $U \subseteq \mathbb{R}^3$ של $(1, 0, 1) \in A$ שבה לכל $(x, y, z) \in U \cap A$ ניתן לבטא כל שני משתנים כפונקציה של המשתנה השלישי.

הוכחה: ראשית, אכן $(1, 0, 1) \in A$ כי $\sin(0) + 1 - 0 = 1$, $e^0 + 0 + 1 = 2$.

נגדיר $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ על-ידי $F(x, y, z) = \begin{pmatrix} F_1(x, y, z) \\ F_2(x, y, z) \end{pmatrix}$.

מתקיים $F(1, 0, 1) = (1, 2)$ ו- F גזירה קורדינאטה קורדינאטה מאריתמטיקה של פונקציות גזירות (ואף גזירה ברציפות כי כל הגורמים בכל קורדינאטה גזירים ברציפות), אז נחשב

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = y \cos(xy) + 2xz \Rightarrow \frac{\partial F_1}{\partial x} \Big|_{(1,0,1)} = 2$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = x \cos(xy) - 3y^2 \Rightarrow \frac{\partial F_1}{\partial y} \Big|_{(1,0,1)} = 1$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial z} = x^2 \Rightarrow \frac{\partial F_1}{\partial z} \Big|_{(1,0,1)} = 1$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = y^2 \Rightarrow \frac{\partial F_2}{\partial x} \Big|_{(1,0,1)} = 0$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial y} = ze^{yz} + 2yx \Rightarrow \frac{\partial F_2}{\partial y} \Big|_{(1,0,1)} = 1$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial z} = ye^{yz} + 3z^2 \Rightarrow \frac{\partial F_2}{\partial z} \Big|_{(1,0,1)} = 3$$

כמובן כל הנגזרות החלקיות רציפות ולכן $F \in C^1$, ומתקיים

$$DF_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{pmatrix} \Rightarrow DF_{(1,0,1)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

נשים לב שהדרגה מלאה כי השורות בבירור בלתי-תלויות לינארית (דרגה מלאה לכן דטרמיננטה לא אפס).

קיבלנו שכל התנאים של משפט הפונקציה הסתומה מתקיימים, ולכן קיימת סביבה פתוחה $U \in \mathbb{R}^3$ סביב $(1, 0, 1)$ המקיימת

$$A \cap U = \{(x, y, z) \in U \mid F_1(x, y, z) = 1, F_2(x, y, z) = 2\}$$

מתנהג כקו גובה (כפי שיונתן אמר בתרגול), ולכל $(x, y, z) \in A \cap U$ משפט הפונקציה הסתומה אומר שקיימת סביבה של הנקודה כך שנוכל לרשום

$$\begin{cases} (x, y) = h(z) \\ (x, z) = g(y) \\ (y, z) = f(x) \end{cases}$$

□

שאלה 6

תהי $B \subseteq \mathbb{R}^k$ פתוחה ו- $f, g_1, \dots, g_n : B \rightarrow \mathbb{R}$ גזירות ברציפות עבור $n+1 \leq k$. נגדיר

$$A = \{x \in B \mid g_1(x) = \dots = g_n(x) = 0\}$$

נניח בנוסף כי לכל $a \in A$ מתקיים ש- $\nabla g_1(a), \dots, \nabla g_n(a) \in \mathbb{R}^k$ הם בלתי-תלויים לינארית. נגדיר פונקציה $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \times B \rightarrow \mathbb{R}$ הנקראת לגראנז'יאן באמצעות

$$\mathcal{L}(\lambda, x) = f(x) - \sum_{i=1}^n (\lambda_i g_i(x))$$

סעיף א'

נוכיח כי \mathcal{L} גזירה ברציפות ואם $a \in A$ היא נקודת קיצון מקומי של $f|_A$ אז קיים $\lambda \in \mathbb{R}^n$ כך שיתקיים $D\mathcal{L}_{(\lambda, a)} = 0$.
הוכחה: בבירור \mathcal{L} גזירה ברציפות מאריתמטיקה של פונקציות גזירות ברציפות (סכום ומכפלה בסקלר), ומכללי גזירה

$$\nabla \mathcal{L}_{(\lambda, x)} = \begin{pmatrix} \nabla_\lambda \mathcal{L} \\ \nabla_x \mathcal{L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -g_1(x) \\ \vdots \\ -g_n(x) \\ \nabla f(x) - \sum_{i=1}^n \lambda_i \nabla g_i(x) \end{pmatrix}$$

שכמובן רציפים קורדינאטה-קורדינאטה כסכום ומכפלה בסקלר של פונקציות רציפות. נניח כי $a \in A$ נקודת קיצון מקומי של $f|_A$ אז מתקיים $\nabla f|_a = 0$ ואם נציב במה שמצאנו נקבל

$$0 = D\mathcal{L}_{(\lambda, a)} = \begin{pmatrix} g_1(0) = 0 \\ \vdots \\ g_n(0) = 0 \\ \nabla f(a) - \sum_{i=1}^n \lambda_i \nabla g_i(a) = -\sum_{i=1}^n \lambda_i \nabla g_i(a) \end{pmatrix}$$

כעת, נטען כעת שלכל $v \in \mathbb{R}^k$ שמתקיים $\nabla g_i(a) \cdot v = 0$ לכל $i \in [n]$ נקבל ש- $\nabla f(a) \cdot v = 0$ כי מהגדרת A אנחנו יכולים "לזוז" רק בכיוונים שמשיקים ל- a אחרת נשבור את ההגבלה שלנו של A אבל אם a היא נקודה קריטית, זה גם אומר שהיא שבפרט $\nabla f(a)$ אורתוגונלי לכל וקטור כיוון כזה.

במילים אחרות זה אומר שקיימים $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ כך שמתקיים

$$\nabla f(a) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \nabla g_i(a)$$

(כי אם $V = \{v \in \mathbb{R}^k \mid \nabla g_i(a) \cdot v = 0 \forall i\}$ אז $V^\perp = \{\nabla g_1(a), \dots, \nabla g_n(a)\}$ מהאורתוגונליות שראינו במטלות קודמות ולכן נקבל $\nabla f(a) \in V^\perp$ וזה בידויק מה שרצינו להראות).

□

סעיף ב'

נניח מעתה כי f, g_1, \dots, g_n גזירות פעמיים ברציפות.

תת-סעיף ד'

נוכיח כי \mathcal{L} גזירה פעמיים ברציפות ונחשב את ההסיאן שלה.

הוכחה: נצטרך לחלק לבלוקים בחישוב שלנו בהתאם לנגזרות, באופן כללי מהגדרה זה יהיה מהצורה

$$H\mathcal{L}_{(\lambda, x)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \lambda_i^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \lambda_i \partial x_i} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_i \partial \lambda_i} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial^2 x_i} \end{pmatrix}$$

ובהתאם למה שמצאנו בסעיף הקודם

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \lambda_i \partial x_i}$$

□

תת־סעיף ה'

נראה כי ההסיאן $H\mathcal{L}_{(\lambda,x)}$ בהכרח אינו חיובי או שלילי בהחלט לכל $(\lambda, x) \in \mathbb{R}^n \times B$.
דוכחה:

□