פתרון מטלה 03 — תורת הקבוצות, 80200

23 באפריל 2025

שאלה 1

יהיו $a<b,c<d\in\mathbb{R}$, $F:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ ליפשיצית עם קבוע K ו־$(x_0,y_0)\in(a,b)\times(c,d)$.
נוכיח שקיים $h>0$ ופונקציה גזירה $f:[x_0-h,x_0+h]\to[c,d]$ כך ש־$f(x_0)=y_0$ וכן $\forall x\in[x_0-h,x_0+h]:f'(x)=F(x,f(x))$

סעיף א'

נגדיר סדרת פונקציות על־ידי $f_0(x)=y_0$ ו־$f_{n+1}(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}F(t,f_n(t))dt$. נוכיח שקיים $h>0$ כך ש־$f_n:[x_0-h,x_0+h]\to[c,d]$ מוגדרת היטב ורציפה לכל n.

הוכחה: $\square$

סעיף ב'

נוכיח שהסדרה $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה במידה אחידה ורציפה במידה אחידה ולכן ממשפט ארצלה יש לה תת־סדרה $\left\{f_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ מתכנסת במידה שווה.

הוכחה: $\square$

סעיף ג'

נוכיח שהסדרה $\left\{F\left(x,f_{n_k}(x)\right)\right\}_{k=1}^{\infty}$ מתכנסת במידה שווה ונסיק ש־$f=\lim_k f_{n_k}$ היא הפונקציה המבוקשת.

הוכחה: $\square$

סעיף ד'

נוכיח שהפיתרחון של המשוואה $f(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}F(t,f(t))dt$ הוא יחיד בסביבה כלשהי של x_0.

הוכחה: $\square$

שאלה 2

תהיי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C^1[0,1]$ סדרת פונקציות ונניח שקיים קטע $[a,b] \subseteq [0,1]$ ושקיימת סדרה $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ ששואפת לאינסוף, כך שלכל n ולכן $x \in [a,b]$ מתקיים $f_n'(x) \geq M_n$.

נוכיח שהסדרה $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ לא רציפה במידה אחידה.

הוכחה: אם הסדרה $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ לא רציפה במידה אחידה, זה אומר

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x, x_0 \in [0,1], \ |x_0 - x| < \delta \ |f(x_0) - f(x)| \geq \varepsilon_0$$

יהי $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$ ותהיי $\delta > 0$.

מהיות $M_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$, נובע שקיים $n \in \mathbb{N}$ כך שמתקיים

$$M_n > \frac{1}{\delta} \Longleftrightarrow \delta > \frac{1}{M_n}$$

נקבע $n \in \mathbb{N}$ כנ"ל, ויהיו $x, y \in [a,b]$ כך שמתקיים $|x-y| = \frac{1}{M_n} < \delta$.

מהיות $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \in C^1[0,1]$ ולכן נוכל להשתמש במשפט ערך הממוצע של לגראנז', ולקבל

$$f_n(x) - f_n(y) = f_n'(z)(x-y)$$

עבור $z \in (x,y)$.

מהנתון, $f_n'(x) \geq M_n$ לכל n ולכל $x \in [a,b]$ ולכן בפרט מתקיים

$$|f_n(x) - f_n(y)| = |f_n'(z)||x-y| \geq M_n|x-y| = M_n \cdot \frac{1}{M_n} = 1$$

ובפרט מתקיים

$$|f_n(x) - f_n(y)| \geq 1 \geq \frac{1}{2} = \varepsilon_0$$

נבין איך זה מסתדר עם מה שראינו בתרגול 3 דוגמה 1. ניזכר בסדרת הפונקציות הנגזרת המדוברת (נסמן ב-g_n' כדי להבדיל)

$$g_n'(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 1 - \frac{1}{n} \\ n^{\frac{3}{2}}\left(x - 1 + \frac{1}{n}\right) & x > 1 - \frac{1}{n} \end{cases}$$

נשים לב שבמקרה שלנו $f_n'(x)$ מתבדרת בתחום סופי, בעוד $g_n'(x)$ מתבדרת לאינסוף בקטע שהולך וקטן ולכן גם לא קיימת לה סדרה $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתאימה המתבדרת לאינסוף, ובפרט לא נוכל להגדיר δ כפי שהגדרנו, משמע הטענה לא נכונה עבור $g_n'(x)$ מהתרגול. $\square$

שאלה 3

תהיי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C(\mathbb{R})$ סדרה המוגדרת על־ידי $f_n(x) = \frac{1}{(x-n)^2+1}$

סעיף א'

נוכיח שהסדרה חסומה במידה אחידה, רציפה במידה אחידה ומתכנסת נקודתית לפונקצית האפס.

הוכחה: נשים לב שמתקיים לכל $n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$ מתקיים $(x-n)^2+1 \geq 1$ ולכן $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \leq 1$ משמע חסומה במידה אחידה.
עבור רציפות במידה אחידה, נשים לב שמתקיים

$$f_n'(x) = \frac{-2(x-n)}{((x-n)^2+1)^2}$$

נסמן $y = x-n$ ולכן $f_n'(x) = g(y) = \frac{-2y}{(y^2+1)^2}$ זה פולינום ולכן חלק, אז מכלל השרשרת $g'(y) = \frac{-2(-3y^2+1)}{(y^2+1)^3}$.
נבחן מתי הנגזרת מתאפסת: המכנה לא מתאפס לאף $y \in \mathbb{R}$ ולכן מתאפס רק כאשר

$$6y^2 - 2 = 0 \iff y^2 = \frac{1}{3} \iff y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

ומתקיים

$$g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{-\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}^2}+1\right)^2} = \frac{-\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{16}{9}} = -\frac{18}{16\sqrt{3}} = -\frac{9}{8\sqrt{3}} = -\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$$

$$g\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$$

זו נקודה מסוג מקסימום, כי $g'\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) > 0$ שכן כל המחוברים חיוביים.
אז נקבל $|g(y)| \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$ ובפרט $\lim_{y\to\pm\infty} g(y) = 0$ משמע מצאנו $|f_n'(x)| \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$.
לפי טענה שראינו בהרצאה נובע ש־$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה במידה אחידה וגם רציפה במידה אחידה.
עבור התכנסות נקודתית, נקבע $x \in \mathbb{R}$ ונשים לב שמתקיים $(x-n)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ ולכן $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ משמע $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת נקודתית ל־0. □

סעיף ב'

נראה שהסדרה לא מתכנסת במידה שווה לפונקציית האפס.

הוכחה: לו הייתה $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ הייתה מתכנסת במידה שווה לפונקציית האפס, היה מתקיים מההגדרה האלטרנטיבית להתכנסות במידה שווה

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - 0| = 0$$

ונשים לב;

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} f_n(x) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{(x-n)^2+1}$$

והסופרמום מתקבל כאשר המכנה מקסימלי, משמע כאשר $x = n$ ואז מתקיים

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} f_n(x) = 1$$

וזו כמובן סתירה. □

שאלה 4

יהי $P \subseteq C[0,1]$ מרחב הפולינומים המוגדרים על הקטע $[0,1]$ עם הנורמה $\|\cdot\|_\infty$, זהו מרחב נורמי.
נוכיח ש־P אינו מרחב שלם ולכן אינו מרחב בנך.

הוכחה: נוכיח שקיימת סדרת פולינומים $\{p_n\}_{n=1}^\infty \in P$ כך ש־$\{p_n\}_{n=1}^\infty$ מתכנסת במידה שווה לפונקציה $f \in C[0,1]$ אבל f אינה פולינום.

$\square$