פתרון מטלה 03 — תורת הקבוצות, 80200

19 באפריל 2025

שאלה 1

תהיי A קבוצה. לכל $A_0 \subseteq A$ נתאים פונקציה $\chi_{A_0} : A \to \{0,1\}$, הנקראת הפונקציה המציינת של A_0, באופן הבא:

$$\chi_{A_0}(a) = \begin{cases} 1 & a \in A_0 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

נוכיח שהתאמה זו מגדירה פונקציה חד־חד ערכית ועל $\chi : \mathcal{P}(A) \to \{0,1\}^A$.

הוכחה: נגדיר $\varphi : \{0,1\}^A \to \mathcal{P}(A)$ על־ידי $f \mapsto f^{-1}(1) = \{a \in A \mid f(a) = 1\}$ כאשר $f \in \{0,1\}^A$.
נראה $\chi \circ \varphi = \mathrm{Id}_{\{0,1\}^A}$ וכן $\varphi \circ \chi = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}(A)}$ ואז פונקציות אלו הופכיות אחת של השנייה ולכן χ היא פונקציה חד־חד ערכית ועל.
בכיוון הראשון, תהיי $A \in \mathcal{P}(A)$ ונרצה להראות ש־$(\varphi \circ \chi)(A) = A$:

$$(\varphi \circ \chi)(A) = \varphi(\chi(A)) = \{a \in A \mid \chi_A(a) = 1\} \underset{(1)}{=} A$$

כאשר (1) נובע מכך שלכל $A \in \mathcal{P}(A)$ ולכל $x \in X$ מתקיים $\chi_A(x) = 1$ אם ורק אם $x \in A$.
בכיוון השני, תהיי $f \in \{0,1\}^A$ ונרצה להראות ש־$(\chi \circ \varphi)(f) = f$:

$$(\chi \circ \varphi)(f) = \chi(\{a \in A \mid f(x) = 1\}) \underset{(1)}{=} f$$

כאשר (1) נובע מכך שאם נסמן $S = \{a \in A \mid f(x) = 1\}$ אז $f(x) = 1 \iff \chi_S(x) = 1$ וגם $f(x) = 0 \iff \chi_S(x) = 0$ אבל זוהי בידיוק ההגדרה של f.
הראינו כי φ ו־χ הופכיות אחת של השנייה ולכן ההתאמה של הפונקציה המציינת מגדירה פונקציה חד־חד ערכית ועל על χ.
אפשר להוכיח זאת גם על־ידי זה שנראה ש־χ היא חד־חד ערכית ועל:
על: יהי $f \in \{0,1\}^A$ ונראה להראות שקיים $S \in \mathcal{P}(A)$ כך ש־$\chi_S(a) = f(a)$. לכל $a \in A$.
נגדיר $S = \{a \in A \mid f(a) = 1\}$ ואז לכל $a \in A$ יתקיים:

$$\chi_S(a) = \begin{cases} 1 & a \in S \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

ולפי איך שבנינו את S נקבל $\chi_S(a) = f(a)$ לכל $a \in A$, ולכן קיבלנו שהיא על.
חד־חד ערכיות: נניח כי קיימות $S_1, S_2 \in \mathcal{P}(A)$ כך שמתקיים $\chi_{S_1} = \chi_{S_2}$, משמע לכל $a \in A$ מתקיים:

$$\chi_{S_1}(a) = \chi_{S_2}(a) \iff \chi_{A_0}(a) = \begin{cases} 1 & a \in S_1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} = \begin{cases} 1 & a \in S_2 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} = \chi_{S_2}(a)$$

במילים אחרות S_1 ו־S_2 מזדהות איבר־איבר משמע $S_1 = S_2$ והראינו כי χ היא חד־חד ערכית. □

שאלה 2

נוכיח שלכל $n,m\in\mathbb{N}_{>0}$, הקבוצה $[\mathbb{Q}^n]^m=\{A\subseteq\mathbb{Q}^n\mid |A|=|[m]|\}$ בת־מנייה.

הוכחה: יהיו $n,m\in\mathbb{N}_{>0}$ כאשר $[\mathbb{Q}^n]^m$ זה אוספים בגודל m של וקטורים מעל $\mathbb{Q}^n$.

ראשית, נוכיח באינדוקציה כי $\mathbb{Q}^n=\bigtimes_{i=1}^{n}\mathbb{Q}$ היא בת־מנייה:

עבור בסיס האינדוקציה, $\mathbb{Q}$ בת־מנייה ובהרצאה ראינו שמכפלה קרטזית של קבוצות בנות מנייה היא בת־מנייה ולכן $\mathbb{Q}^2$ היא בת־מנייה.

נניח כי הטענה נכונה עבור $k\in\mathbb{N}$ משמע $\mathbb{Q}^k$ היא בת־מנייה ונרצה להראות שגם $\mathbb{Q}^{k+1}$ היא בת־מנייה. מתקיים:

$$\bigtimes_{i=1}^{k+1}\mathbb{Q}=\underbrace{\bigtimes_{i=1}^{k+1}\mathbb{Q}}_{\text{בת־מנייה מהנחת האינדוקציה}}\times\mathbb{Q}$$

אבל מכפלה קרטזית של קבוצות בנות מנייה היא בת־מנייה, ולכן $\bigtimes_{i=1}^{k+1}\mathbb{Q}$ בת־מנייה (מכפלה קרטזית סופית) ולכן גם $(\mathbb{Q}^n)^m$ בת־מנייה.

כעת, נרצה לבנות פונקציה חד־חד ערכית ועל $f:[\mathbb{Q}^n]^m\to(\mathbb{Q}^n)^m$.

נגדיר סדר מילוני לכל $x,y\in\mathbb{Q}^n$ בצורה הבאה

$$x\leq_{lex}y\iff\big(\exists i<n\big(\forall j<i,x_j=y_j\big)\wedge(x_i<y_i)\big)\vee x=y$$

אנחנו יודעים שזה סדר קווי ולכן נגדיר לכל

$$\forall\{q^i\}_{i=1}^m\in[\mathbb{Q}^n]^m,q^i\leq_{lex}x^{i+1}$$

ונגדיר את f להיות

$$f\Big(\{q^i\}_{i=1}^m\Big)=\langle q^i\rangle_{i=1}^m$$

נראה כי f חד־חד ערכית: יהיו $A,B\in[\mathbb{Q}^n]^m$ כך ש־$A\neq B$ ולכן קיים $a\in A\setminus B$ ולכן $a\in f(A)$ אבל $a\notin f(b)$ (שכן הפונקציה רק משרה סדר ולא משנה את הוקטורים במקור) ובאותו אופן גם עבור $b\in B\setminus A$ ולכן נקבל $f(A)\neq f(B)$ ו־f חד־חד ערכית.

מצאנו פונקציה חד־חד ערכית בין $[\mathbb{Q}^n]^m$ לבין $(Q^n)^m$, היות והאחרונה בת־מנייה נובע כי $\big|[\mathbb{Q}^n]^m\big|\leq\big|(\mathbb{Q}^n)^m\big|=|\mathbb{N}|$.

נראה שגם מתקיים $|\mathbb{N}|\leq\big|[\mathbb{Q}^n]^m\big|$:

נגדיר $g:\mathbb{N}\to[\mathbb{Q}^n]^m$ כך שלכל $k\in\mathbb{N}$

$$g(k)=\left\{\underbrace{\underbrace{(0,...,0)}_{n\text{ פעמים}},...,(0,...,m-1)}_{m-1\text{ פעמים}},\underbrace{(k,...,k)}_{n\text{ פעמים}}\right\}$$

ואז אכן $|g(k)|=m$ ו־$g(k)\subseteq\mathbb{Q}^n$, וכמובן היא חד־חד ערכית שכן יש וקטור אחד תלוי ב־$k\in\mathbb{N}$ ולכן $\big|[\mathbb{Q}^n]^m\big|\leq|\mathbb{N}|$.

מצאנו שמתקיים $\big|[\mathbb{Q}^n]^m\big|\leq|\mathbb{N}|$ וגם $|\mathbb{N}|\leq\big|[\mathbb{Q}^n]^m\big|$ וממשפט קנטור־ברנשטיין־שרדר נקבל ש־$\big|[\mathbb{Q}^n]^m\big|=|\mathbb{N}|$ ולכן $[\mathbb{Q}^n]^m$ בת־מנייה. $\square$

שאלה 3

נשתמש בטיעון האלכסון של קנטור כדי להוכיח שהקבוצה $A = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid f \text{ חד־חד ערכית}\}$ אינה בת־מנייה.

הוכחה: נניח בשלילה כי היא A כן בת־מנייה ולכן קיימת פונקציה $f : \mathbb{N} \to A$ חד־חד ערכית ועל.
לכן נוכל למנות את כל האיברים ב־A כ־$f_1, f_2, f_3, ...$ ולסדר אותם בשורות בתור טבלה אינסופית

$$\begin{matrix} f_0(0) & f_0(1) & f_0(2) & \cdots \\ f_1(0) & f_1(1) & f_1(2) & \cdots \\ f_2(0) & f_2(1) & f_1(2) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{matrix}$$

נגדיר $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ בצורה רקורסיבית:
תהיי

$$A_n = \{g(0), ..., g(n-1)\}$$

ואת $g(n)$ נגדיר על־ידי

$$g(n) = \min\{\mathbb{N} \setminus (A_n \cup \{f_n(n)\})\}$$

g חד־חד ערכית וגם לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $g(n) \neq f_n(n)$ ולכן $g \notin A$ אבל הנחנו ש־A בת־מנייה וזאת סתירה. $\square$

שאלה 4

קבוצה $a \subseteq \mathbb{R}^2$ נקראת צמד ריבועים אופקיים אם קיימים ריבועים (קווי מתאר ללא פנים) $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^2$ המקיימים את התכונות הבאות:

1. צלעות הריבועים a_1, a_2 מאונכות לצירים
2. $a_1 \cap a_2$ הוא צלע ב־a_1 וב־a_2
3. $a_1 \cup a_2 = a$

סעיף א'

נוכיח שכל קבוצה $X \subseteq \mathbb{R}^2$ שאיבריה הם צמדי ריבועים אופקיים כך שלכל $a, b \in X$ מתקיים $a \cap b = \emptyset$ היא סופית או בת־מנייה.

הוכחה: תהיי $X \subseteq \mathbb{R}^2$ המקיימת את התנאים לעיל ונראה שהיא לכל היותר בת־מנייה.

אם X סופית הטענה טריוויאלית ולכן נניח כי X אינסופית.

בשאלה 2 ראינו ש־$\left[\mathbb{Q}^2\right]^2$ בת־מנייה ולכן קיימת פונקציה חד־חד ערכית ועל $f : \mathbb{N} \to \left[\mathbb{Q}^2\right]^2$.

לכל $a \in X$ נגדיר כמו בתרגול

$$Q_a = \left\{(q_1, q_2) \in \left[\mathbb{Q}^2\right]^2\right\} \mid \underbrace{q_1 \in D_1^a}_{a_1\text{הפנים של }}, \underbrace{q_2 \in D_2^a}_{a_2\text{הפנים של }}\}$$

מצפיפות הרציונלים בממשיים נקבל ש־$Q_a \neq \mathbb{Q}$ ולכן נגדיר את $g : \mathbb{X} \to \mathbb{N}$

$$g(a) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid f(n) \in Q_a\} \subseteq \mathbb{N}$$

מעיקרון הסדר הטוב יש לנו מינימום כזה.

נראה כי g חד־חד ערכית:

לכל $a, b \in X$ נתון שמתקיים $a \cap b = \emptyset$ משמע

$$a \cap b = \emptyset \iff \left(\underbrace{a_1 \cup a_2}_{a}\right) \cap \left(\underbrace{b_1 \cup b_2}_{b}\right) = \emptyset \iff (D_1^a \cup D_2^a) \cap \left(D_1^b \cap D_2^b\right) = \emptyset$$
$$\iff Q_a \cap Q_b = \emptyset \iff f(b) \subseteq Q_b \neq f(a) \subseteq Q_a$$

לכן g היא חד־חד ערכית.

מצאנו פונקציה חד־חד ערכית מקבוצה אינסופית לקבוצה בת־מנייה ולכן לפי מטלה 1 נובע כי X בת־מנייה. $\square$

סעיף ב'

נראה שיש אוסף לא בן־מנייה $X \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ של ריבועים זרים בזוגות.

הוכחה: נגדיר את הקבוצה

$$X = \{[-r, r] \times \{r\} \cup [-r, r] \times \{-r\} \cup \{-r\} \times [-r, r] \cup [-r, r] \cup \{r\} \cup [-r, r] \mid r \in (0, \infty)\}$$

4 צלעות של ריבוע לכל $r \in (0, \infty)$.

הקטע $(0, \infty)$ הוא לא בן־מנייה: נסתכל על $f : (0, \infty) : \mathbb{R}$ המוגדרת על־ידי

$$f(x) = \ln(x)$$

f, פונקציה חד־חד ערכית ועל (שכן יש לה הופכית) ולכן $|\mathbb{R}| = |(0, \infty)|$ ו־$(0, \infty)$ לא בן־מנייה.

X היא קבוצה של ריבועים, עלינו להראות שהם זרים בזוגות: יהיו $a, b \in X$ ולכן קיימים $r, q \in (0, \infty)$ כך שהם מגדירים את a ו־b בהתאמה.
שני הריבועים הם סביב הראשית ולכן יש ביניהם הכלה ממש (משמע אחד יותר קטן מהשני): נניח בלי הגבלת הכלליות ש־$q > r$ ולכן הריבועים זרים ואם הייתה להם נקודה משותפת אז היה מתקיים $r \neq q$.
זהו כמובן אוסף לא בן־מנייה מהיות $(0, \infty)$ לא בן־מנייה.

$\square$