הכנה למבחן מועד א' — משפטים והוכחות נבחרים — תורת המידה, 80517

22 בינואר 2026

תוכן עניינים

1 מידה

משפט 1.1 (תנאי שקול לפונקציה מדידה): יהי $(X,\mathcal{A})$ מרחב מדיד. אם $f:X\to[-\infty,\infty]$ פונקציה אזי f מדידה אם ורק אם $f^{-1}((\alpha,\infty])$ לכל $\alpha\in\mathbb{R}$.

הוכחה:

$\Leftarrow$ מיידי מהגדרה כי אם f מדידה לכל $E\in\mathbb{B}([-\infty,\infty])$ מתקיים $f^{-1}(E)\in\mathcal{A}$ ולכן בהינתן $\alpha\in\mathbb{R}$ כלשהו, מתקיים $(\alpha,\infty]\in\mathbb{B}([\infty,\infty])$ ובפרט $f^{-1}((\alpha,\infty])\in\mathcal{A}$.

$\Longrightarrow$ מספיק להראות שהמקור של כל אחת מהקבוצות

$$(\alpha,\beta),\qquad(\alpha,\infty],\qquad[-\infty,\beta)$$

הוא מדיד, ואכן:

1. בהינתן $\beta\in\mathbb{R}$ מתקיים

$$f^{-1}([-\infty,\alpha))=\bigcup_{n=1}^{\infty}f^{-1}\left(\left[-\infty,\beta-\frac{1}{n}\right)\right)=\bigcup_{n=1}^{\infty}f^{-1}\left(\left(\beta-\frac{1}{n},\infty\right]^c\right)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(f^{-1}\left(\left(\beta-\frac{1}{n},\infty\right]\right)\right)^c\in\mathcal{A}$$

כאשר המעבר האחרון נובע מההנחה שלכל $\alpha\in\mathbb{R}$ מתקיים $f^{-1}((\alpha,\infty])$ ולכן לכל $n\in\mathbb{N}$ בפרט עבור $\alpha=\beta-\frac{1}{n}\in\mathbb{R}$ נקבל $f^{-1}\left(\left(\beta-\frac{1}{n},\infty\right]\right)\in\mathcal{A}$.

אבל $\mathcal{A}$ היא σ־אלגברה ולכן מצד אחד נקבל $\left(f^{-1}\left(\left(\beta-\frac{1}{n},\infty\right]\right)\right)^c$ לכל $n\in\mathbb{N}$ ומצד שני $\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(f^{-1}\left(\left(\beta-\frac{1}{n},\infty\right]\right)\right)^c\in\mathcal{A}$ לכל $\beta\in\mathbb{R}$, וזה סוגר את שני המקרים הימניים.

2. בהינתן $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

$$f^{-1}((\alpha,\beta))=f^{-1}([-\infty,\beta)\cap(\alpha,\infty])=f^{-1}([-\infty,\beta))\cap f^{-1}((\alpha,\infty])\in\mathcal{A}$$

כאשר המעבר האחרון נובע מכך ש־σ־אלגברה סגורה לחיתוכים סופיים.

כעת, אם $U\subseteq[-\infty,\infty]$ היא איחוד בן־מנייה $U=\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n$ אזי I_n כאשר לכל $n\in\mathbb{N}$, I_n הוא מהצורה של $(\star)$ וכי קבוצה פתוחה ב־$[-\infty,\infty]$ היא איחוד בן־מנייה של קבוצות מהצורה $(\star)$ ונקבל

$$f^{-1}(U)=f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n\right)=\bigcup_{n=1}^{\infty}f^{-1}(I_n)\in\mathcal{A}$$

כלומר המקור של כל קבוצה פתוחה הוא מדיד ולכן f מדידה. $\square$

משפט 1.2 (מדידות נשמרת תחת הפעלת sup/inf/limsup/liminf): יהי $(X,\mathcal{A})$ מרחב מדידה. אם $\{f_n : X \to [-\infty,\infty]\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות מדידות, אז הפונקציות

$$(1)\ \sup_{n\in\mathbb{N}}\{f_n\} \qquad (2)\ \inf_{n\in\mathbb{N}}\{f_n\} \qquad (3)\ \limsup_{n\to\infty} f_n \qquad (4)\ \liminf_{n\to\infty} f_n$$

כולן מדידות.

הוכחה: (1) נסמן $g := \sup_{n\in\mathbb{N}}\{f_n\}$, ומספיק להראות שהקבוצה $g^{-1}((a,\infty])$ היא מדידה לכל $\alpha\in\mathbb{R}$, אז נרצה להראות

$$(\star)\ g^{-1}((\alpha,\infty)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}((a,\infty])$$

$\subseteq$: אם $x\in g^{-1}((\alpha,\infty])$ אז

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\{f_n(x)\} = g(x) \in (\alpha,\infty] > \alpha$$

כלומר קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך ש־$f_{n_0}(x) > \alpha$ (אחרת לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $f_n(x)\le\alpha$ וזו סתירה) אז

$$x\in f_{n_0}^{-1}((\alpha,\infty]) \Longrightarrow x\in\bigcup_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}((\alpha,\infty]) \Longrightarrow g^{-1}((\alpha,\infty]) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}((\alpha,\infty])$$

$\supseteq$: אם $x\in\bigcup_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}((\alpha,\infty])$ אז קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך ש־$x\in f_n^{-1}((\alpha,\infty])$ ולכן $f_{n_0}(x)\in(\alpha,\infty]$ כלומר $f_{n_0}(x)>\alpha$ ומתקיים

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\{f_n(x)\} \ge f(n_0)(x) > \alpha \Longrightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}}\{f_n(x)\} > \alpha \Longrightarrow g(x)\in(\alpha,\infty] \Longrightarrow x\in g^{-1}((\alpha,\infty])$$

אז $(\star)$ נכון ולכן f_n מדידה לכל $n\in\mathbb{N}$ ולכן $f_n^{-1}((\alpha,\infty])$ מדידה לכל $n\in\mathbb{N}$, כלומר הקבוצה $g^{-1}((\alpha,\infty])$ היא איחוד בן־מנייה של קבוצות מדידות ולכן מדידה בעצמה וקיבלנו שהפונקציה g מדידה.

(2) זהה עבור קטעים מהצורה $[-\infty,\beta]$.

(3)

$$\limsup_{n\to\infty} f_n = \inf_{k\in\mathbb{N}}\left\{\sup_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\ge k}}\{f_n\}\right\}$$

ולכן עבור סדרת הפונקציות $\{h_k : X\to[-\infty,\infty]\}_{k=1}^{\infty}$ המוגדרת על־ידי

$$\forall k\in\mathbb{N},\ h_k := \sup_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\ge k}}\{f_n\}$$

מתקיים מ־(1) ש־$\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות מדידות ונקבל מ־(2) ש־$\inf_{k\in\mathbb{N}}\{h_k\}$ מדידה ולכן $\limsup_{n\to\infty} f_n$ מדידה.

(4) באותו אופן למקרה הקודם רק עבור

$$\liminf_{n\to\infty} f_n = \sup_{k\in\mathbb{N}}\left\{\inf_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\ge k}}\{f_n\}\right\}$$

□

2 אינטגרציה

משפט 2.1 (לכל פונקציה מדידה יש סדרת פונקציות פשוטות שמתכנסת אליה): אם $f : X \to [0,\infty]$ פונקציה מדידה כלשהי, אז קיימת סדרת פונקציות פשוטות $\{s_n\} \mid X \to [0,\infty)_{n=1}^{\infty}$ כך שמתקיים

1. $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית עולה וחסומה על־ידי f, כלומר

$$\forall n,m \in \mathbb{N},\ m \le n \Longrightarrow 0 \le s_m \le s_n \le f$$

2. הסדרה $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת נקודתית ל־f, כלומר

$$\forall x \in X,\ s_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$$

הוכחה: נגדיר $\varphi_n : [0,\infty) \to [0,\infty)$ על־ידי

$$\forall x \in [0,\infty),\ \varphi_n(x) := \begin{cases} 2^{-n} \cdot \lfloor 2^n \cdot x \rfloor & 0 \le x < n \\ n & x \ge n \end{cases}$$

אז לכל $n \in \mathbb{N}$, φ_n היא צירוף לינארי של פונקציות מהצורה $\mathbb{1}_{\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}}$ לכל $0 \le k \le n \cdot 2^n - 1$ ולכן היא מדידה בורל ביחס ל־$[0,\infty)$ ולכן תמונתה סופית ו־φ_n היא פונקציה פשוטה.
לכל $n \in \mathbb{N}$ ולכל $x \in [0,n]$ מתקיים

$$\lfloor 2^n x \rfloor \le 2^n x < \lfloor 2^n x \rfloor + 1 \Longleftrightarrow 2^{-n}\lfloor 2^n x \rfloor \le x < 2^{-n}(\lfloor 2^n x \rfloor + 1)$$

כלומר

$$\varphi_n(x) \le x < \varphi_n(x) + 2^{-n} \Longleftrightarrow \varphi_n(x) \le x \wedge x < \varphi_n(x) + 2^{-n} \Longleftrightarrow x \ge \varphi_n(x) \wedge \varphi_n(x) > x - 2^{-n} \Longleftrightarrow x - 2^{-n} < \varphi_n(x) \le x$$

ולכן $x - 2^{-n} < \varphi_n(x) \le x$ לכל $n \in \mathbb{N}, x \in [0,n]$ ומכאן הרי ש־$\varphi_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ לכל $x \in [0,n]$ וכן לכל $x \in [0,\infty)$ מתקיים

$$\forall n,m \in \mathbb{N},\ n \le m \Longrightarrow \varphi_n \le \varphi_m \le x$$

ולכן $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית עולה ואם לכל $n \in \mathbb{N}$ נגדיר $s_n := \varphi_n \circ f$ נקבל את הטענה שכן הרכבת פונקציות מדידות היא פונקציה מדידה, אז $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ מקיימת את הנדרש. $\square$

משפט 2.2 (תכונות האינטגרל): תהיינה $f, g : X \to [0, \infty]$ פונקציות מדידות ותהיינה $A, B, E \in \mathcal{E}$ מדידות.
האינטגרל של f, g ביחס ל־μ מקיים את התכונות הבאות

1. מונטוניות של f, g: אם $0 \le f \le g$ אזי $0 \le \int_A f \,\mathrm{d}\mu \le \int_A g \,\mathrm{d}\mu$
2. מונטוניות ביחס להכלה: אם $0 \le f$ ו־$A \subseteq B$ אזי $\int_A f \,\mathrm{d}\mu \le \int_B f \,\mathrm{d}\mu$
3. הומוגניות: אם $0 \le f$ ו־$c \in [0, \infty)$ אזי $\int_A c \cdot f \,\mathrm{d}\mu = c \cdot \int_A f \,\mathrm{d}\mu$
4. אם $f|_E \equiv 0$ אזי $\int_E f \,\mathrm{d}\mu = 0$ (גם אם $\mu(E) = \infty$)
5. אינטגרציה על קבוצות ממידה אפס: אם $\mu(E) = 0$ אזי $\int_E f \,\mathrm{d}\mu = 0$ (גם אם $f|_E \equiv \infty$)
6. אינטגרציה על קבוצה בניסוח עם הפונקציה המציינת: אם $0 \le f$ אזי $\int_E f \,\mathrm{d}\mu = \int_X f \cdot \mathbb{1}_E \,\mathrm{d}\mu$
7. אינטגרציה על איחוד זר: אם $A \cap B = \emptyset$ אזי $\int_{A \cup B} f \,\mathrm{d}\mu = \int_A f \,\mathrm{d}\mu + \int_B \mathrm{d}\mu$

הוכחה:

1. **תעתיקי מהמטלה**
2. **תעתיקי מהמטלה**
3. **תעתיקי מהמטלה**
4. תהיי $s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ פונקציה פשוטה ואם נסתכל על E אזי $0 \le s \le f$ וכן $f|_E \equiv; e0$ ולכן על E, $s(x) = 0$ לכל $x \in E$.
מהגדרת האינטגרל של פונקציה פשוטה
$$\int_E s \,\mathrm{d}\mu = \sum \alpha_i \mu(A_i \cap E)$$
ולכן אם $A_i \cap E$ לא ריקה אז המקדמים α_i חייבים להיות אפסים ולכן הסכום הוא בידיוק 0; מהגדרת אינטגרל לבג
$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu = \sup\left\{ \int_E s \,\mathrm{d}\mu \mid 0 \le s \le f, \text{פשוטה } s \right\}$$
אבל לכל פשוטה הנימוק לעיל תקף כלומר האינטגרל על כל הקבוצה הוא 0 ולכן $\int_E f \,\mathrm{d}\mu = 0$ (ניזכר כי $0 \cdot \infty = 0$ ולכן גם הסוגריים נכונים).
5. תהיי $0 \le s \le f$ פונקציה פשוטה $s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ ומהגדרת האינטגרל
$$\int_E s \,\mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \mu(A_i \cap E)$$
אבל $\mu(E) = 0$ ו־$A_i \cap E \subseteq E$ ולכן ממונטוניות, $\mu(A_i \cap E) = 0$ כלומר $\int_E s \,\mathrm{d}\mu = 0$; זה נכון לכל פונקציה פשוטה ולכן מהגדרת האינטגרל מתקיים $\int_E f \,\mathrm{d}\mu = 0$ (אפשר וצריך לסיים עם משפט ההתכנסות המונוטונית ועם $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ פשוטות כך ש־$s_n \nearrow f$)
6. מתקיים
$$\int_E \mathbb{1}_A \,\mathrm{d}\mu = \mu(A \cap E)$$
אבל $\mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_E = \mathbb{1}_{A \cap E}$ ולכן
$$\int_X \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_E \,\mathrm{d}\mu = \int_X \mathbb{1}_{A \cap E} \,\mathrm{d}\mu = \mu(A \cap E)$$
אז הטענה נכונה לאינדיקטורים; תהיי $s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ פונקציה פשוטה, אז
$$\int_E s \,\mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_E \mathbb{1}_{A_i} \,\mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_X \mathbb{1}_{A_i} \cdot \mathbb{1}_E \,\mathrm{d}\mu = \int_X \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{A_i} \right) \cdot \mathbb{1}_E \,\mathrm{d}\mu = \int_X s \cdot \mathbb{1}_E \,\mathrm{d}\mu$$
והטענה נכונה לפונקציות פשוטות; לבסוף, נשתמש במשפט ההתכנסות המונוטונית שכן יש $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ פשוטות כך ש־$s_n \nearrow f$ נקודתית ונקבל
$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu = \int_E \left(\lim_{n\to\infty} s_n \right) \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E s_n \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X s_n \cdot \mathbb{1}_E \,\mathrm{d}\mu = \int_X \left(\lim_{n\to\infty} s_n \cdot \mathbb{1}_E \right) \mathrm{d}\mu = \int_X f \cdot \mathbb{1}_E \,\mathrm{d}\mu$$
7. מתקיים
$$\mathbb{1}_{A \cup B}(x) = \mathbb{1}_A(x) + \mathbb{1}_B(x)$$
ולכן מהפעלת הסעיף הקודם פעמיים בקצוות

$$\int_{A \uplus B} f \,\mathrm{d}\mu = \int_X f \cdot \mathbb{1}_{A \uplus B} \,\mathrm{d}\mu = \int_X f \cdot (\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B) \,\mathrm{d}\mu \underset{\text{לינאריות}}{=} \int_X f \cdot \mathbb{1}_A \,\mathrm{d}\mu + \int_X f \cdot \mathbb{1}_B \,\mathrm{d}\mu = \int_A f \,\mathrm{d}\mu + \int_B f \,\mathrm{d}\mu$$

$\square$

משפט 2.3 (משפט ההתכנסות המונוטונית): יהי $(X,\mathcal{A},\mu)$ מרחב מידה ותהיי $\{f_n \mid X\to[0,\infty]\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות מדידות.
אם $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית עולה, אזי הפונקציה

$$f\coloneqq\lim_{n\to\infty}f_n=\sup_{n\in\mathbb{N}}\{f_n\}$$

מקיימת

$$\forall A\in\mathcal{A}\qquad\int_A f\,\mathrm{d}\mu=\lim_{n\to\infty}\int_A f_n\,\mathrm{d}\mu\Longrightarrow\forall A\in\mathcal{A}\qquad\int_A\lim_{n\to\infty}f_n\,\mathrm{d}\mu=\lim_{n\to\infty}\int_A f_n\,\mathrm{d}\mu$$

הוכחה: נוכיח עבור $A=X$ (עבור $A\subset X$ ההוכחה זהה) וראינו כי $f=\sup_{n\in\mathbb{N}}\{f_n\}$ מדידה.
$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית עולה ולכן קיים $\alpha\in[0,\infty]$ כך ש־$\alpha=\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,\mathrm{d}\mu$ ונרצה להראות

$$\alpha\underset{(1)}{\le}\int_X f\,\mathrm{d}\mu\underset{(2)}{\le}\alpha\Longrightarrow\alpha=\int_X f\,\mathrm{d}\mu$$

(1) נכון כי מתקיים

$$\forall n\in\mathbb{N}\ 0\le f_n\le\sup_{n\in\mathbb{N}}\{f_n\}=f\Longrightarrow 0\le f_n\le f$$

וממונוטוניות האינטגרל

$$\forall n\in\mathbb{N}\ 0\le\int_X f_n\,\mathrm{d}\mu\le\int_X f\,\mathrm{d}\mu$$

בפרט בלקיחת גבול נקבל $\alpha\le\int_X f\,\mathrm{d}\mu$.
עבור (2) : תהיי $s:X\to[0,\infty)$ פונקציה פשוטה כלשהי המקיימת $0\le s\le f$ ולכן יש $\{A_i\}_{i=1}^{k}$ חלוקה כלשהי של X כך שניתן לכתוב $s=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\mathbb{1}_{A_i}$.
יהי $x\in X$ ויהי $c\in(0,1)$, נסמן

$$\forall n\in\mathbb{N},\ E_n\coloneqq\{x\in X\mid c\cdot s(x)\le f_n(x)\}$$

מהיות $f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)$ מתקיים $f(x)=0$ (ואז $f\equiv 0$) או $f(x)\neq 0$ ולכן בהכרח $f(x)>0$.
במקרה הראשון

$$0\le c\cdot s(x)\le f_n(x)\le f(x)=0$$

ואז $x\in E_n$ לכל n וסיימנו.
אחרת, קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n>n_0$ מתקיים $f_n(x)>c\cdot s(x)$ ולכן $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה עולה ביחס להכלה $(\star)$ ממונוטוניות $\{f_n\}$ ולכן ונקבל $\lim_{n\to\infty}E_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n=X$

$$\alpha=\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,\mathrm{d}\mu\underset{\text{מונוטוניות ביחס להכלה}}{\ge}\lim_{n\to\infty}\int_{E_n}f_n\,\mathrm{d}\mu\underset{\text{מונוטוניות}}{\ge}\lim_{n\to\infty}\int_{E_n}c\cdot s\,\mathrm{d}\mu=c\cdot\lim_{n\to\infty}\int_{E_n}s\,\mathrm{d}\mu=c\cdot\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\mu(E_n\cap A_i)$$

אז מ־$(\star)$ נובע

$$\forall i\in[k],\ \forall n,m\in\mathbb{N},\ n\le m\Longrightarrow A_i\cap E_n\subseteq A_i\cap E_m$$

ולכן גם $\{A_i\cap E_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה עולה גם היא ו־$\{A_i\}$ חלוקה של X אז

$$\forall i\in[k],\ \bigcup_{n=1}^{\infty}A_i\cap E_n=A_i\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)=A_i\cap X=A_i$$

אז מרציפות המידה לאיחודים עולים נקבל $\mu(A_i\cap E_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}\mu(A_i)$ ומכאן

$$\alpha\ge c\cdot\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\mu(A_i\cap E_n)=c\cdot\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\lim_{n\to\infty}\mu(A_i\cap E_n)=c\cdot\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\mu(A_i)=c\cdot\int_X s\,\mathrm{d}\mu$$

מהיות $c\in(0,1)$ שרירותי נובע $\alpha\ge\int_X s\,\mathrm{d}\mu$ לכל $0\le s\le f$ פשוטה אבל מהגדרת אינטגרל של פונקציה אי־שלילית נקבל $\alpha\ge\int_X f\,\mathrm{d}\mu$. $\square$

משפט 2.4 (החלפת סדר אינטגרציה וסכום): יהי $(X,\mathcal{A},\mu)$ מרחב מידה. אם $\{f_n \mid X\to[0,\infty]\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות מדידות, אזי

$$\int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu$$

הוכחה: באינדוקציה על $N\in\mathbb{N}$.

מקרה בסיס הוא אדטיביות האינטגרל עבור $N=2$ (עבור $N=1$ הטענה טריוויאלית): תהיינה $s,t : X\to[0,\infty]$ פונקציות פשוטות כלשהן כאשר

$$s=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \mathbb{1}_{A_i} \qquad t=\sum_{j=1}^{m}\beta_j \mathbb{1}_{B_j}$$

עבור $\{A_i\}_{i=1}^{n},\{B_j\}_{j=1}^{m}$ הן חלוקות של X ומתקיים

1. $\{A_i\cap B_j\}_{(i,j)\in[n\times m]}$ חלוקה של X
2. לכל $j\in[m]$ מתקיים $\dot\bigcup_{i=1}^{n} A_i\cap B_j=B_j$ כי $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ חלוקה של X
3. לכל $i\in[n]$ מתקיים $\dot\bigcup_{j=1}^{m} A_i\cap B_j=A_i$ כי $\{B_j\}_{j=1}^{m}$ חלוקה של X

מאדטיביות סופית של מידה נקבל

$$\sum_{j=1}^{m}\mu\big(A_i\cap B_j\big)\overset{(\star)}{=}\mu(A_i) \qquad \sum_{i=1}^{n}\mu\big(A_i\cap B_j\big)\overset{(\star\star)}{=}\mu\big(B_j\big)$$

אבל גם $s+t$ היא פונקציה פשוטה שכן

$$s+t=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\big(\alpha_i+\beta_j\big)\mathbb{1}_{A_i\cap B_j}$$

ולכן

$$\int_X (s+t)\,\mathrm{d}\mu=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\big(\alpha_i+\beta_j\big)\cdot\mu\big(A_i\cap B_j\big)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\cdot\sum_{j=1}^{m}\mu\big(A_j\cap B_j\big)+\sum_{j=1}^{m}\beta_j\cdot\sum_{i=1}^{n}\mu\big(A_i\cap B_j\big)$$
$$\underset{(\star),(\star\star)}{=}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\cdot\mu(A_i)+\sum_{j=1}^{m}B_j\cdot\mu\big(B_j\big)=\int_X s\,\mathrm{d}\mu+\int_X t\,\mathrm{d}\mu$$

אז הטענה נכונה עבור פונקציות פשוטות.

תהיינה $f_1,f_2\in\{f_n \mid X\to[0,\infty]\}_{n=1}^{\infty}$ מדידות ותהיינה $\{s_n\}_{n=1}^{\infty},\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרות עולות של פונקציות פשוטות כך שמתקיים

$$s_n\xrightarrow[n\to\infty]{}f_1 \qquad t_n\xrightarrow[n\to\infty]{}f_2$$

נקודתית ומאריתמטיקה של גבולות נקבל $s_n+t_n\xrightarrow[n\to\infty]{}f_1+f_2$ כאשר זו התכנסות עולה לכן לפי משפט ההתכנסות המונוטונית

$$\int_X (f_1+g_2)\,\mathrm{d}\mu=\lim_{n\to\infty}\int_X (s_n+t_n)\,\mathrm{d}\mu=\lim_{n\to\infty}\left(\int_X s_n\,\mathrm{d}\mu+\int_X t_n\,\mathrm{d}\mu\right)=\lim_{n\to\infty}\int_X s_n\,\mathrm{d}\mu+\lim_{n\to\infty}\int_X t_n\,\mathrm{d}\mu$$
$$=\int_X f_1\,\mathrm{d}\mu+\int_X f_2\,\mathrm{d}\mu$$

וזה מראה את בסיס האינדוקציה.

בשביל לסיים את האינדוקציה נשים לב $\sum_{n=1}^{N} f_n\xrightarrow[N\to\infty]{}\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ נקודתית כאשר הסדרה $\left\{\sum_{n=1}^{N} f_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה מונוטונית עולה ולכן ממשפט ההתכנסות המונוטוניות נקבל את הטענה, כנדרש. $\square$

משפט 2.5 (טענה חשובה ללא שם): יהי $(X, \mathcal{A}, \mu)$ מרחב מידה. אם $h : X \to [0,\infty]$ מדידה אזי הפונקציה $\nu : A \to [0,\infty]$ המוגדרת על־ידי

$$\forall E \in \mathcal{A},\ \ \nu(E) = \int_E h \, \mathrm{d}\mu$$

היא מידה על $(X, \mathcal{A})$ ובמקרה זה נסמן $\mathrm{d}\nu := h \, \mathrm{d}\mu$ ויתר על־כן מתקיים

$$\int_X g \, \mathrm{d}\nu = \int_X g \cdot h \, \mathrm{d}\mu$$

לכל $g : X \to [0,\infty]$ מדידה.

הוכחה: בשביל להראות מידה עלינו להראות ש־ν אינה קבועה אינסוף ושהיא σ אדטיבית: ואכן, $\nu(\emptyset) = 0$ ושנית תהיי $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת כלשהי של קבוצות מדידות זרות בזוגות ונסמן $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ ואז

$$(\star)\ \mathbb{1}_E = \mathbb{1}_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{E_n}$$

ולכן

$$\begin{aligned} \nu\left(\dot{\bigcup_{n=1}^{\infty}} E_n\right) &= \nu(E) \underset{\text{הגדרה}}{=} \int_E h \, \mathrm{d}\mu = \int_X h \mathbb{1}_E \, \mathrm{d}\mu \underset{(\star)}{=} \int_X h \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{E_n} \, \mathrm{d}\mu \\ &= \int_X \sum_{n=1}^{\infty} h \cdot 1\mathbb{1}_{E_n} \, \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X h \cdot \mathbb{1}_{E_n} \, \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} h \, \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n) \end{aligned}$$

ולכן ν מידה על $(X, \mathcal{A})$.

עבור החלק השני, תהיי $s = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbb{1}_{E_i}$ פונקציה פשוטה, אז

$$\begin{aligned} \int_X s \, \mathrm{d}\nu &= \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \nu(E_i) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \int_{E_i} h \, \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{k} \int_{E_i} \alpha_i h \, \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{k} \int_X \alpha_i \mathbb{1}_{E_i} h \, \mathrm{d}\mu \\ &= \int_X \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbb{1}_{E_i} h \, \mathrm{d}\mu = \int_X h \cdot \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbb{1}_{E_i} \, \mathrm{d}\mu = \int_X h \cdot s \, \mathrm{d}\mu \end{aligned}$$

אז עבור g מדידה כלשהי ניקח $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה עולה של פונקציות פשוטות כך ש־$s_n \xrightarrow[n\to\infty]{} g$ ונקבל ממשפט ההתכנסות המונוטוניות על מרחב המידה $(X, \mathcal{A}, \nu)$ שמתקימי

$$\int_X g \, \mathrm{d}\nu = \lim_{n\to\infty} \int_X s_n \cdot h \, \mathrm{d}\mu = \int_X g \cdot h \, \mathrm{d}\mu$$

כי $\{s_n \cdot h\}_{n=1}^{\infty}$ היא עולה ו־$s_n \cdot h \xrightarrow[n\to\infty]{} g \cdot h$. $\square$

הערה: אם $\mathrm{d}\nu = h \, \mathrm{d}\mu$ אז לכל $E \in \mathcal{A}$ מדידה מתקיים

$$\mu(E) = 0 \Longrightarrow \nu(E) = 0$$

כלומר רציפות בהחלט.

משפט 2.6 (הלמה של פאטו): יהי $(X,\mathcal{A},\mu)$ מרחב מידה. אם $\{f_n : X \to [0,\infty]\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות מדידות כלשהי, אזי

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu$$

הוכחה: לכל $k \in \mathbb{N}$ נסמן $g_k := \inf_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\Rightarrow k}} \{f_n\}$ אזי הסדרה $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית עולה ואי־שלילית.
ממשפט ההתכנסות המונוטונית נקבל

$$\int_X \lim_{k\to\infty} g_k \,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int_X g_k \,\mathrm{d}\mu$$

ומתקיים מהגדרה

$$\lim_{k\to\infty} g_k = \lim_{k\to\infty} \inf_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\ge k}} \{f_n\} = \liminf_{n\to\infty} f_n$$

וביחד

$$(\star)\quad \int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int_X g_k \,\mathrm{d}\mu$$

מצד שני

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \ g_k = \inf_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\ge k}} \{f_n\} \le f_k \Longrightarrow g_k \le f_k$$

ממונוטוניות האינטגרל נקבל

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \ a_k := \int_X g_k \,\mathrm{d}\mu \le \int_X f_k \,\mathrm{d}\mu =: b_k$$

אז לכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_k \le b_k$ וכן מ־$(\star)$ נובע כי $\lim_{k\to\infty} a_k$ קיים ונקבל

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu \underset{(\star)}{=} \lim_{k\to\infty} \int_X g_k \,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} a_k \le \liminf_{k\to\infty} b_k = \liminf_{k\to\infty} \int_X f_k \,\mathrm{d}\mu \Longrightarrow \int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu \le \liminf_{k\to\infty} \int_X f_k \,\mathrm{d}\mu$$

$\square$

משפט 2.7 (הלמה של בורל־קנטלי): יהי $(X,\mathcal{A},\mu)$ מרחב מידה ותהיי $\mathcal{A}\supseteq(E_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה של קבוצות מדידות כך שמתקיים

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)<\infty$$

אז

$$\mu\left(\limsup_{n\to\infty}E_n\right)=0$$

הוכחה: ממונוטוניות המידה והגדרת החיתוך

$$\limsup_{n\to\infty}E_n=\bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=i}^{\infty}E_j\Longrightarrow\mu\left(\limsup_{n\to\infty}E_n\right)=\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty}E_j\right)\underset{\forall i\in\mathbb{N}}{\le}\mu\left(\bigcup_{j=i}^{\infty}E_j\right)\underset{\text{תת־אדטיביות המידה}}{\le}\sum_{j=i}^{\infty}\mu\left(E_j\right)<\infty$$

כאשר המעבר האחרון נובע מההנחה ומטור זנב ולכן $\lim_{i\to\infty}\sum_{n=i}^{\infty}\mu(E_n)=0$, כלומר $\mu(\limsup_{n\to\infty}E_n)\le 0$.
אבל μ מידה ולכן $0\le\mu(\limsup_{n\to\infty}E_n)$ כלומר $\mu(\limsup_{n\to\infty}E_n)=0$. □

משפט 2.8 (אי־שיוויון המשולש האינטגרלי)**:** אם $f \in L^1(\mu)$ אזי $\left|\int_X f \,\mathrm{d}\mu\right| \leq \int_X |f| \,\mathrm{d}\mu$.

הוכחה: $\int_X f \,\mathrm{d}\mu \in \mathbb{C}$ ולכן קיים $\alpha \in \mathbb{C}$ עם $|\alpha| = 1$ עבורו מתקיים $\left|\int_X f \,\mathrm{d}\mu\right| \in \mathbb{R}$ $\alpha \int_X f \,\mathrm{d}\mu =$:
שכן אם נסמן $z = \int_X f \,\mathrm{d}\mu$ אז אם $z = 0$ אז $\alpha z = |z| \in \mathbb{R}$ לכל $\alpha \in \mathbb{C}$ עם $|\alpha| = 1$ כי נקבל ש־$0 = 0$.
אחרת, אם $z \neq 0$ אז קיים $\theta \in \mathbb{R}$ כך ש־$z = |z| \cdot e^{i\theta}$ וניקח $\alpha = e^{-i\theta}$ ונקבל

$$\alpha z = e^{-i\theta} \cdot \big(|z| e^{i\theta}\big) = |z|\big(e^{-i\theta} \cdot e^{i\theta}\big)\big) = |z| \in \mathbb{R}$$

ולכן יש $\alpha \in \mathbb{C}$ המקיים זאת.
נקבל אם־כך

$$\begin{aligned}
\left|\int_X f \,\mathrm{d}\mu\right| &= \alpha \int_X f \,\mathrm{d}\mu \\
&= \underbrace{\int_X \alpha f \,\mathrm{d}\mu}_{\in \mathbb{R}} \\
&= \int_X Re(\alpha f) \,\mathrm{d}\mu + i \cancel{\int_X Im(\alpha f) \,\mathrm{d}\mu} \\
&= \int_X Re(\alpha f) \,\mathrm{d}\mu \\
&\leq \int_X |Re(\alpha f)| \,\mathrm{d}\mu \\
&\leq \int_X |\alpha f| \,\mathrm{d}\mu = \int_X |f| \,\mathrm{d}\mu
\end{aligned}$$

$\square$

משפט 2.9 (משפט ההתכנסות הנשלטת):

הגדרה 2.1 (סדרת פונקציות נשלטת): תהיי X קבוצה ותהיי $\{f_n \mid X \to \mathbb{R}\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות כלשהי ותהיי $g : X \to \mathbb{R}$ פונקציה.
נאמר שהסדרה $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ נשלטת על־ידי הפונקציה g אם ורק אם לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $|f_n| \le g$.

תהיי $\{f_n \mid X \to \mathbb{C}\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות מדידות המתכנסת נקודתית לפונקציה $f : X \to \mathbb{C}$.
אם קיימת $g \in L^1(\mu)$ כך שהסדרה $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ נשלטת על־ידי g אזי $f \in L^1(\mu)$ ומתקיים

$$\int_X |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ובפרט

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu$$

הוכחה: ראשית מכך ש־$|f_n| \le g$ לכל $n \in \mathbb{N}$ נובע כי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq L^1(\mu)$ וגם מתקיים $|f| \le g$ אז $f \in L^1(\mu)$.
בפרט מתקיים לכל $n \in \mathbb{N}$ ש־$|f - f_n| \le 2g$ אז נגדיר $h_n := 2g - |f - f_n|$ ומהלמה של פאטו עבור סדרת הפונקציות $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ נקבל

$$(\star) \quad \int_X \liminf_{n\to\infty} h_n \, \mathrm{d}\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_X h_n \, \mathrm{d}\mu$$

וכן $h_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 2g$ נקודתית, אז בפרט $2g(x) = \liminf_{n\to\infty} h_n(x)$ לכל $x \in X$, אז יינבע מכך

$$\int_X 2g \, \mathrm{d}\mu = \int_X \liminf_{n\to\infty} h_n \, \mathrm{d}\mu \underset{(\star)}{\le} \liminf_{n\to\infty} \int_X h_n \, \mathrm{d}\mu = \liminf_{n\to\infty} \int_X (2g - |f - f_n|) \, \mathrm{d}\mu$$

מכאן מתקיים

$$\int_X 2g \, \mathrm{d}\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_X (2g - |f - f_n|) \, \mathrm{d}\mu \underset{\text{לינאריות האינטגרל}}{=} \liminf_{n\to\infty} \left(\int_X 2g \, \mathrm{d}\mu - \int_X |f - f_n| \, \mathrm{d}\mu \right)$$

$$= \liminf_{n\to\infty} \int_X 2g \, \mathrm{d}\mu + \liminf_{n\to\infty} \left(- \int_X |f - f_n| \, \mathrm{d}\mu \right) \underset{\liminf_{n\to\infty}(-a_n) = -\limsup_{n\to\infty} a_n}{=} \int_X 2g \, \mathrm{d}\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_X |f - f_n| \, \mathrm{d}\mu$$

כלומר

$$\int_X 2g \, \mathrm{d}\mu \le \int_X 2g \, \mathrm{d}\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_X |f - f_n| \, \mathrm{d}\mu$$

אבל $g \in L^1(\mu)$ אי־שלילית ולכן $\int_X 2g \, \mathrm{d}\mu < \infty$ ולכן ניתן להחסיר ולקבל $\limsup_{n\to\infty} \int_X |f - f_n| \, \mathrm{d}\mu = 0$ ובפרט מאי־שיוויון המשולש האינטגרלי

$$\left| \int_X f \, \mathrm{d}\mu - \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \right| = \left| \int_X (f - f_n) \, \mathrm{d}\mu \right| \le \int_X |f - f_n| \, \mathrm{d}\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

□

משפט 2.10 (אי־שיוויון מרקוב):

1. תהיי f מדידה ואי־שלילית, אז לכל $0 < a < \infty$ מתקיים

$$\mu(f^{-1}[\alpha,\infty]) \leq \frac{\int f \,\mathrm{d}\mu}{a}$$

2. תהיי $f : X \to [0,\infty]$ אינטגרבילית. אז $\mu(f^{-1}(\{\infty\})) = 0$ והקבוצה $f^{-1}((0,\infty))$ היא σ־סופית.

הוכחה:

1. נגדיר

$$E_a \coloneqq f^{-1}([a,\infty]) = \{x \in X \mid f(x) \geq a\}$$
$$g(x) = a \cdot \mathbb{1}_{E_a}(x)$$

אם $x \in E_a$ אזי $f(x) \geq a$ ו־$g(x) = a \cdot 1 = a$ ולכן $f(x) \geq g(x)$.
אם $x \notin E_a$ אז $f(x) \geq 0$ו־$g(x) = a \cdot 0 = 0$ ולכן $f(x) \geq g(x)$ כלומר לכל $x \in X$ מתקיים $g(x) \leq f(x)$.
ממונוטוניות אינטגרל לבג נקבל

$$\int_X g \,\mathrm{d}\mu \leq \int_X f \,\mathrm{d}\mu$$

אבל

$$\int_X g \,\mathrm{d}\mu = \int_X a \cdot \mathbb{1}_{E_a} \,\mathrm{d}\mu = a \cdot \int_X \mathbb{1}_{E_a} \,\mathrm{d}\mu = a \cdot \mu(E_a)$$

כלומר

$$a \cdot \mu(E_a) \leq \int_X f \,\mathrm{d}\mu$$

היות ו־$0 < a < \infty$ ניתן לחלק בלי לשנות את כיוון אי־השיוויון ונקבל

$$\mu(E_a) \leq \frac{1}{a} \int_X f \,\mathrm{d}\mu$$

2. מהמקרה הקודם אנחנו מקבלים שאם $\int f \,\mathrm{d}\mu < \infty$ אזי אגף ימין שואף לאינסוף כאשר $a \to \infty$ ולכן מרציפות המידה מלמעלה (חיתוכים יורדים) נסיק כי

$$\mu(f^{-1}(\{\infty\})) = 0$$

מתקיים

$$\mu\left(f^{-1}\left[\frac{1}{n},\infty\right]\right) < \infty$$

ולכן

$$f^{-1}((0,\infty)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}\left(\left[\frac{1}{n},\infty\right]\right)$$

היא σ־סופית.

$\square$

3 קבוצות ממידה אפס

משפט 3.1 (סדרות פונקציות וכמעט־תמיד): תהיי $\{f_n \mid X \to \mathbb{C}\}_{i=1}^{n}$ סדרת פונקציות מדידות המוגדרות μ־כמעט תמיד.
אם $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n|\,\mathrm{d}\mu < \infty$ אז
1. הפונקציה $f : X \to \mathbb{C}$ הנתונה על־ידי $x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מוגדרת μ־כמעט תמיד
2. $f \in L^1(\mu)$
3. $\int_X f\,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f_X f_n\,\mathrm{d}\mu$

הוכחה:
1. נניח ש־f_n מוגדרת על קבוצה $S_n \subseteq X$ כך ש־$\mu(S_n^c) = 0$, אז $\varphi = \sum_{n=1}^{\infty}|f_n|$ מוגדרת על $S := \cap_{n=1}^{\infty} S_n$ ומתקיים

$$\mu(S^c) = \mu\left(\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n\right)^c\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n^c\right) = 0 \Longrightarrow \mu(S^c) = 0$$

ולכן φ מוגדרת μ־כמעט תמיד ומהטענה אודות החלפת סדר של גבול ואינטגרל עבור טורים של פונקציות אי־שליליות מתקיים

$$\int_X \varphi\,\mathrm{d}\mu = \int_X \sum_{n=1}^{\infty}|f_n|\,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\int_X |f_n|\,\mathrm{d}\mu < \infty \Longrightarrow \int_X \varphi\,\mathrm{d}\mu < \infty$$

בפרט $\mu(|\varphi(x)|) < \infty$ μ־כמעט לכל $x \in X$ ולכן $\varphi \in L^1(\mu)$ ולכן עבור μ־כמעט לכל $x \in X$ הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס בהחלט μ־כמעט תמיד ולכן הוא מתכנס ב־$\mathbb{C}$ μ־כמעט תמיד ולכן $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ מוגדרת μ־כמעט תמיד
2. לכל $k \in \mathbb{N}$ נסמן $g_k := \sum_{n=1}^{k} f_n$ ומתקיים

$$\forall k \in \mathbb{N},\ |g_k| = \left|\sum_{n=1}^{k} f_n\right| \le \sum_{n=1}^{k}|f_n| \le \sum_{n=1}^{\infty}|f_n| = \varphi \Longrightarrow |g_k| \le \infty$$

כלומר סדרת הפונקציות $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ נשלטת על־ידי $\varphi \in L^1(\mu)$ ומכאן ממשפט ההתכנסות הנשלטת עבור f $g_k \xrightarrow[k\to\infty]{} f$ נובע כי $f \in L^1(\mu)$ וכן מהטענה על החלפת סדר סכום ואינטגרל

$$\int_X f\,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty}\int_X g_k\,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\int_X f_n\,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\int_X f_n\,\mathrm{d}\mu \Longrightarrow \int_X f\,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\int_X f_n\,\mathrm{d}\mu$$

וזה מוכיח גם את 3.

$\square$

משפט 3.2 (תנאים שקולים לשלמות): *תזכורת:* יהי $(X,\mathcal{A},\mu)$ מרחב מידה. נאמר שהם **שלם** אם כל קבוצה $E\subseteq X$ המוכלת בקבוצה ממידה אפס היא מדידה בעצמה. ההשלמה של $(X,\mathcal{A},\mu)$ ניתנת על־ידי ה־σ־אלגברה

$$\overline{\mathcal{A}} \coloneqq \{A\cup E \mid A\in\mathcal{A}, E\subseteq N, \mu(N)=0\}$$

והמידה

$$\overline{\mu}(A\cup E)=\mu(A)$$

יהי $(X,\mathcal{A},\mu)$ מרחב מידה, אזי הגרירות הבאות נכונות אם ורק אם μ שלמה:

1. אם f מדידה ו־$f=g$ μ־כמעט תמיד, אז g היא מדידה
2. אם $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות מדידות ובנוסף $f_n\to f$ μ־כמעט תמיד, אזי f היא מדידה

הוכחה: בשביל ההוכחה נשתמש בטענה מהסוג הבא שנכונה במרחבי מידה שלמים: נניח כי E,G מדידות ו־$E\subseteq F\subseteq G$ עם $\mu(G\setminus E)=0$. אז F מדידה: זה נכון כי $F\setminus E\subseteq G\setminus E$ והתלכדות המידות גוררת ש־$\mu(G\setminus E)=0$ ולכן $F\setminus E$ מדידה וגם F.
שלמות $\Longleftarrow$ 1: אם f מדידה ו־$f=g$ μ־כמעט תמיד, נרשום

$$N\coloneqq\{x\mid f(x)\neq g(x)\}$$

מאחר ו־N מוכלת בקבוצה ממידה אפס ו־μ שלמה אזי N מדידה.
מתקיים

$$g^{-1}(A)=\left(g^{-1}(A)\cap f^{-1}(A)\right)\cup\left(g^{-1}(A)\setminus f^{-1}(A)\right)$$

מאחר ו־N^c היא בידיוק הקבוצה בה הפונקציות מתלכדות, נוכל לכתוב

$$f^{-1}(A)\cap N^c\subseteq f^{-1}(A)\cap g^{-1}(A)\subseteq f^{-1}(A)$$

ומהיות

$$f^{-1}(A)\setminus\left(f^{-1}(A)\cap N^c\right)\subseteq N$$

נדע ששרשרת ההכלות היא כפי שמופיע בטענה שנוסחה בתחילת ההוכחה ולכן הקבוצה $f^{-1}(A)\cap g^{-1}(A)$ היא מדידה ובאופן דומה נשים לב

$$g^{-1}(A)\setminus f^{-1}(A)\subseteq N$$

ולכן כקבוצה המוכלת בקבוצה ממידה אפס היא מדידה.
$1\Longleftarrow$ שלמות: תהיי E קבוצה המוכלת בקבוצה ממידה אפס אזי $\mathbb{1}_E=0$ כמעט־תמיד ולכן $\mathbb{1}_E$ מדידה, אבל אינדיקטור מדיד אם ורק אם הקבוצה שהוא מציין מדידה, כלומר E מדידה.
$1\Longleftarrow 2$: מאחר והוכחנו ש־1 שקול לשלמות, אז μ שלמה. נניח ש־$f_n\to f$ μ־כמעט תמיד.
לכן קיימת קבוצה N כך ש־$\mu(N)=0$ ובנוסף $f_n(x)\to f(x)$ לכל $x\in N^c$ ונגדיר

$$\tilde{f}_n(x)=\begin{cases}f_n(x) & x\in N^c\\ 0 & x\in N\end{cases}$$

אזי מהסעיף הקודם לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים ש־$\tilde{f}$ מדידה כי $\tilde{f}_n=f_n$ μ־כמעט תמיד ו־$\tilde{f}$ מתכנסת נקודתית לפונקציה

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases}f(x) & x\in N^c\\ 0 & x\in N\end{cases}$$

ולכן $\tilde{f}$ מדידה ול־$f=\tilde{f}$ μ־כמעט תמיד ולכן f מדידה.
$2\Longleftarrow 1$: נניח ש־$f=g$ μ־כמעט תמיד ו־f מדידה, אז נגדיר את f_n להיות הסדרה הקבועה $f_n=f$ ומתקיים $f_n\to g$ כמעט־תמיד ולכן g מדידה מההנחה של 2, כנדרש. $\square$

משפט 3.3 (תנאים שקולים לפונקציה אפסה כמעט־תמיד):

1. אם $f : X \to [0,\infty]$ מדידה עם $\int_X f \,\mathrm{d}\mu = 0$ אם ורק אם $f \underset{\mu}{=} 0$
2. אם $f : X \to \mathbb{C}$ מדידה ולכל $E \in \mathcal{A}$ מתקיים $\int_E f \,\mathrm{d}\mu = 0$ אזי $f \underset{\mu}{=} 0$

הוכחה:

1. ההנחה ש־$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = 0$ גוררת ש־$\mu\left(\left\{x \in X \mid f(x) \geq \frac{1}{n}\right\}\right) = 0$ הכח $n \in \mathbb{N}$ ולכן $f = 0$, μ־כמעט תמיד
2. נסמן $f = u + iv$ ותהיי $E = \{x \in X \mid u(x) \geq 0\}$. אז מהגדרת E ומההנחה שלכל $E \in \mathcal{A}$ מתקיים $\int_E f \,\mathrm{d}\mu = 0$ נובע $\int_E Re(f) \,\mathrm{d}\mu = 0$ ולכן לכל $h \in \{u, v\}$ מתקיים

$$0 = \int_E Re(f) \,\mathrm{d}\mu = \int_E h \,\mathrm{d}\mu = \int_X h^{\pm} \,\mathrm{d}\mu \Longrightarrow h^{\pm} \underset{\mu}{=} 0$$
$$\Longrightarrow h^{\pm} \underset{\mu}{=} 0 \Longrightarrow u^{\pm}, v^{\pm} \underset{\mu}{=} 0 \Longrightarrow u, v \underset{\mu}{=} 0 \Longrightarrow f \underset{\mu}{=} 0$$

□

משפט 3.4 (טענה על ממוצעי פונקציה):

תזכורת (ממוצע של פונקציה): יהי $(X, \mathcal{A}, \mu)$ מרחב מידה סופי, תהיי $f \in L^1(\mu)$ ותהיי $E \in \mathcal{A}$ קבוצה מדידה עם $\mu(E) > 0$.
הממוצע של f על E ביחס ל־μ הוא

$$A_E(f) := \frac{1}{\mu(E)} \int_E f \, \mathrm{d}\mu$$

ועכשיו למשפט:
יהי $(X, \mathcal{A}, \mu)$ מרחב מידה סופי ותהיי $f \in L^1(\mu)$. אם $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ קבוצה סגורה כך שלכל קבוצה מדידה $E \in \mathcal{A}$ עם $\mu(E) > 0$ מתקיים $A_E(f) \in \Omega$ אז $f(x) \in \Omega$ μ־כמעט לכל $x \in X$.

הוכחה: לכל $r > 0$ ולכל $\alpha \in \mathbb{C}$ נסמן ב־$\overline{B}_r(\alpha)$, הכדור הסגור ברדיוס r סביב α.
מכך ש־Ω סגורה נובע כי Ω^c פתוחה ולכן יש איחוד בן־מנייה של כדורים פתוחים שעל־ידו ניתן לייצג את Ω^c.
אבל ב־$\mathbb{C}$, כל כדור פתוח ניתן להצגה כאיחוד בן־מנייה של כדורים סגורים, ולכן Ω^c היא איחוד בן־מנייה של כדורים סגורים.
לכן, מספיק להראות שעבור כל $\overline{B}_r(\alpha) \subseteq \Omega^c$ מתקיים $\mu\left(f^{-1}\left(\overline{B}_r(\alpha)\right)\right) = 0$, כאשר

$$f^{-1}\left(\overline{B}_r(\alpha)\right) = \left\{x \in X \mid f(x) \in \overline{B}_r(\alpha)\right\}$$

נניח בשלילה שקיים כדור סגור $\overline{B}_r(\alpha) \subseteq \Omega^c$ כך ש־$\mu\left(f^{-1}\left(\overline{B}_r(\alpha)\right)\right) > 0$ ונסמן $E := f^{-1}\left(\overline{B}_r(\alpha)\right)$.
על E מתקיים $|f - \alpha| \leq r$ ולכן

$$|A_E(f) - \alpha| = \left|\frac{1}{\mu(E)} \int_E f \, \mathrm{d}\mu - \frac{1}{\mu(E)} \cdot \mu(E) \cdot \alpha\right| = \left|\frac{1}{\mu(E)} \int_E f \, \mathrm{d}\mu - \frac{1}{\mu(E)} \int_E \alpha \, \mathrm{d}\mu\right|$$

$$= \left|\frac{1}{\mu(E)}\left(\int_E f \, \mathrm{d}\mu - \int_E \alpha \, \mathrm{d}\mu\right)\right| \underset{\substack{\text{לינאריות האינטגרל} \\ \mu(E)>0}}{=} \frac{1}{\mu(E)}\left|\int_E (f - \alpha) \, \mathrm{d}\mu\right| \underset{\text{אי־שיוויון המשולש}}{\leq} \frac{1}{\mu(E)} \int_E |f - \alpha| \, \mathrm{d}\mu \leq \frac{1}{\mu(E)} \int_E r \, \mathrm{d}\mu$$

$$= \frac{1}{\mu(E)} \cdot r \cdot \mu(E) = r$$

כלומר $|A_E(f) - \alpha| \leq r$ ולכן $A_E(f) \in \overline{B}_r(\alpha) \subseteq \Omega^c$ ולכן $A_E(f) \in \Omega^c$.
אבל זו סתירה להנחה ש־$A_E(f) \in \Omega$. $\square$

4 משפט ההצגה של ריס

5 רגולריות ומידות רדון

משפט 5.1 (תכונות מידת רדון על מרחב σ־קומפקטי): יהי $(X, \mathcal{m}, \mu)$ מרחב מידה המכיל את σ־אלגברת בורל על X.
אם X הוא σ־קומפקטי ו־μ מידת רדון אז מתקיימים

1. לכל $\varepsilon > 0$ ולכל $E \in \mathcal{m}$ קיימת קבוצה פתוחה $V \subseteq X$ וקבוצה סגורה $F \subseteq X$ עם $F \subseteq E \subseteq V$ כך ש־$\mu(V \setminus F) < \varepsilon$
2. כל קבוצה $E \in \mathcal{m}$ היא רגולרית פנימית וחיצונית
3. לכל $E \in \mathcal{m}$ קיימות $A, B \in \mathcal{m}$ כאשר A היא F_σ ו־B היא G_σ כך ש־$A \subseteq E \subseteq B$ וגם $\mu(B \setminus A) = 0$

הוכחה: ראשית מהיות X σ־קומפקטי נובע שקיים אוסף בן־מנייה של קבוצות קומפקטיות $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך ש־$X = \cup_{n=1}^{\infty} K_n$.

1. תהיי $E \in \mathcal{m}$ מדידה
   1. מהיות $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ כיסוי של X מתקיים ש־$E = \cup_{n=1}^{\infty} E \cap K_n$.
   מהיות μ מידת רדון ו־K_n קומפקטית נובע ש־$\mu(K_n) < \infty$ לכל $n \in \mathbb{N}$ ולכן בפרט ממונוטוניות $\mu(E \cap K_n) < \infty$.
   מהרגולריות החיצונית של μ נובע שלכל $\varepsilon > 0$ קיימת $V_n \in \mathcal{m}$ פתוחה עם $E \cap K_n \subseteq V_n$ כך ש־$\mu(V_n) \underset{(\star)}{<} \mu(E \cap K_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$.
   נסמן $V := \cup_{n=1}^{\infty} V_n$ ומתקיים מכך ש־$E \cap K_n \subseteq K_n$

$$V \setminus E = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n\right) \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E \cap K_n\right) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n \setminus (E \cap K_n)$$

ולכן

$$\mu(V \setminus E) \underset{\text{מונוטוניות}}{\leq} \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n \setminus (E \cap K_n)\right) \underset{\text{תת־אדטיביות}}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(V_n \setminus (E \cap K_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} (\mu(V_n) - \mu(E \cap K_n)) \underset{(\star)}{<} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \frac{\varepsilon}{2}$$

   2. עבור $E^c \in \mathcal{m}$ מתקיים גם ש־$E^c = \cup_{n=1}^{\infty} E^c \cap K_n$ אפשר לעשות את אותו תהליך שוב: מהיות μ מידת רדון נובע כי $E^c \cap K_n$ רגולרית חיצונית ולכן קיימת פתוחה $U_n \in \mathcal{m}$ עם $E^c \cap K_n \subseteq U_n$ כך ש־$\mu(U_n) \underset{(\diamondsuit)}{<} \mu(E^c \cap K_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$.
   נסמן $U := \cup_{n=1}^{\infty} U_n$ ואז U פתוחה כאיחוד של פתוחות ו־$E^c \subseteq U$ (כי $E^c = \cup_{n=1}^{\infty} E^c \cap K_n \subseteq \cup_{n=1}^{\infty} U_n = U$) ונקבל

$$U \setminus E^c = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n\right) \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E^c \cap K_n\right) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \setminus (E^c \cap K_n)$$

ובהתאם

$$\mu(U \setminus E^c) \leq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \setminus (E^c \cap K_n)\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(U_n \setminus E^c \cap K_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(U_n) - \mu(E^c \cap K_n) \underset{(\diamondsuit)}{<} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \frac{\varepsilon}{2}$$

אז אם נסמן $F := U^c$ נקבל
   1. U פתוחה $\Longleftarrow$ F סגורה
   2. $E^c \subseteq U \Longleftarrow U^c \subseteq E \Longleftarrow F \subseteq E$
   3. מתקיים

$$E \setminus F = E \cap F^c = F^c \cap E = F^c \setminus E^c \Longrightarrow \mu(E \setminus F) = \mu(F^c \setminus E^c) = \mu(U \setminus E^c) < \frac{\varepsilon}{2}$$

אם כך קיבלנו בסך־הכל קבוצה פתוחה $E \subseteq V$ ו־$F \subseteq E$ סגורה המקיימות

$$(1)\ \mu(V \setminus E) = \mu(V) - \mu(E) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (2)\ \mu(E \setminus F) = \mu(E) - \mu(F) < \frac{\varepsilon}{2}$$

ולכן

$$\mu(V \setminus F) = \underbrace{\mu(V) - \mu(E)}_{\mu(V \setminus E)} + \underbrace{\mu(E) - \mu(F)}_{\mu(E \setminus F)} \underset{(1),(2)}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Longrightarrow \mu(V \setminus F) < \varepsilon$$

2. מהסעיף הקודם, לכל $E \in \mathcal{m}$ קיימת קיימת קבוצה סגורה $F \in \mathcal{m}$ עם $F \subseteq E$ ו־$\mu(E \setminus F) < \frac{\varepsilon}{2}$ ושוב מה־σ־קומפקטיות, $F = \cup_{n=1}^{\infty} F \cap K_n$, אבל לכל n, $F \cap K_n$ היא קבוצה קומפקטית (כי חיתוך של קבוצה קומפקטית עם קבוצה סגורה הוא קומפקטי) ולכן לכל $N \in \mathbb{N}$ נובע כי $\cup_{n=1}^{N} (F \cap K_n)$ היא קבוצה קומפקטית כאיחוד סופי של קומפקטיות, אז מרציפות המידה לאיחודים עולים נקבל

$$\lim_{N\to\infty}\mu\left(\bigcup_{n=1}^{N}F\cap K_n\right)=\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}F\cap K_n\right)=\mu(F)\Longrightarrow\mu(F)=\lim_{N\to\infty}\mu\left(\bigcup_{n=1}^{N}F\cap K_n\right)$$

כלומר לכל $\varepsilon>0$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $k\geq N$ מתקיים

$$\mu\left(F\setminus\bigcup_{n=1}^{k}F\cap K_n\right)=\mu(F)-\mu\left(\bigcup_{n=1}^{k}F\cap K_n\right)<\frac{\varepsilon}{2}$$

נסמן $K:=\cup_{n=1}^{N}F\cap K_n$ ואז $K\subseteq F\subseteq E$ כאשר K קומפקטית ומאי־השיוויון לעיל נקבל שלכל $\varepsilon>0$ קיימת $K\subseteq X$ קומפקטית עם $K\subseteq E$ כך שמתקיים

$$\mu(E)-\mu(K)=\mu(E)-\mu(F)+\mu(F)-\mu(K)=\mu(E\setminus F)+\mu(F\setminus K)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

$$\Longrightarrow\mu(E)-\mu(K)<\varepsilon\Longleftrightarrow\mu(K)>\mu(E)-\varepsilon\Longrightarrow\mu(E)=\sup\{\mu(C)\mid C\subseteq E\ \text{קומפקטית}\ C\}$$

כלומר $E\in\mathcal{M}$ רגולרית פנימית ומהיות μ מידת רדון ולכן רגולרית חיצונית ביחס לכל קבוצה מדידה, מהיות $E\in\mathcal{M}$ שרירותי נובע כי סעיף 2 נכון.

3. תהיי $E\in\mathcal{M}$. מסעיף 1 נובע קיום של $V_n\in\mathcal{M}$ פתוחה ו־$F_n\in\mathcal{M}$ סגורה עם $F_n\subseteq E\subseteq V_n$ כך ש־$\mu(V_n\setminus F_n)<\frac{1}{n}$.
נגדיר $A:=\cup_{n=1}^{\infty}F_n, B:=\cup_{n=1}^{\infty}V_n$ אז A היא F_σ ו־B היא G_σ ומתקיים

$$B\setminus A=\bigcap_{n=1}^{\infty}V_n\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}V_n\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n\right)^c=\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}V_n\right)\cap\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n^c\right)\subseteq\bigcap_{n=1}^{\infty}(V_n\cap F_n^c)=\bigcap_{n=1}^{\infty}(V_n\setminus F_n)$$

אבל $\mu(V_n\setminus F_n)<\frac{1}{n}$ ולכן

$$\forall n\in\mathbb{N},\ 0\leq\mu(B\setminus A)\leq\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}V_n\setminus F_n\right)\underset{\bigcap_{n=1}^{\infty}V_n\setminus F_n\subseteq V_n\setminus F_n}{\leq}\mu(V_n\setminus F_n)<\frac{1}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

$\square$

משפט 5.2 (תנאים שגוררים שמידה היא מידת רדון): יהי X מרחב האוסדרוף קומפקטי־מקומית המקיים שכל קבוצה פתוחה בו היא σ־קומפקטית. אם μ מידה על $\mathbb{B}(X)$ המקיימת $\mu(K) < \infty$ לכל $K \subseteq X$ קומפקטית, אזי μ היא מידת רדון על $\mathscr{m}$ וכל קבוצה מדידה $E \in \mathscr{m}$ היא רגולרית פנימית וחיצונית.

הוכחה: נחלק את ההוכחה לשלבים כדי לבנות מפתח:

1. **סופית על קומפקטיות:** מהיות μ סופית על קומפקטיות, נקבל ש־$\Lambda f = \int_X f \, \mathrm{d}\mu$ היינו פונקציונל לינארי חיובי על $C_c(X)$.
2. **משפט ההצגה של ריס:** ממשפט ההצגה של ריס נובע שקיימת מידת רדון λ על X המקיימת $\int_X f \, \mathrm{d}\mu \underset{(\star)}{=} \int_X f \, \mathrm{d}\lambda$, לכל $f \in C_C(X)$.
3. **שימוש ב־σ־קומפקטיות:** תהיי $V \in \mathscr{m}$ פתוחה, מהנתון נובע שהיא σ־קומפקטית ולכן קיים אוסף $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ של קבוצות קומפקטיות כך שמתקיים
$$V = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$$
4. **שימוש בלמה של אוריסון:** מהלמה, נובע שלכל $n \in \mathbb{N}$ קיימת $g_n \in C_C(X)$ עם $K_n \prec g_n \prec V$.
תזכורת (הלמה של אוריסון): כי מהלמה של אוריסון, במרחב האוסדרוף קומפקטי־מקומית, לכל $K, V \subseteq X$ עם $K \subseteq V$ כאשר K קומפקטית ו־V פתוחה, קיימת $f \in C_C(X)$ המקיימת $K \prec f \prec V \iff \mathbb{1}_K \le f, \operatorname{supp}(f) \subseteq V$
5. **משפט ההתכנסות המונוטונית:** תהיי $\{f_N\}_{N=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות המוגדרת על־ידי
$$\forall N \in \mathbb{N}, \ f_N := \max_{i \in [N]}\{g_i\}$$
נשים לב שמתקיים
   1. $\{f_N\}_{N=1}^{\infty} \subseteq C_C(X)$
   2. $\{f_N\}_{N=1}^{\infty}$ מונוטונית עולה
   3. $f_N \xrightarrow[N \to \infty]{} \mathbb{1}_V$ נקודתית כי $V = \cup_{n=1}^{\infty} K_n$ ו־$K_n \prec g_n \prec V$

אם־כך, אנחנו מקיימים את תנאי משפט ההתכנסות המונוטונית ולכן נקבל
$$\mu(V) = \int_X \mathbb{1}_V \, \mathrm{d}\mu = \int_X \lim_{N \to \infty} f_N \, \mathrm{d}\mu = \lim_{N \to \infty} \int_X f_N \, \mathrm{d}\mu = \lim_{N \to \infty} \int_X f_N \, \mathrm{d}\lambda = \int_X \lim_{N \to \infty} f_N \, \mathrm{d}\lambda = \int_X \mathbb{1}_V \, \mathrm{d}\lambda$$
כלומר לכל $V \in \mathscr{m}$ פתוחה מתקיים $\mu(V) = \lambda(V)$
6. **שימוש בתכונות מידת רדון:** יהי $\varepsilon > 0$, מהיות λ מידת רדון נובע שלכל $E \in \mathscr{m}$ קיימת קבוצה פתוחה $U \subseteq X$ וקבוצה סגורה $F \subseteq X$ עם $F \subseteq E \subseteq U$ כך ש־$\mu(V \setminus F) < \varepsilon$.
בפרט, נובע מהיות $F \subseteq E$ כי $U \setminus E \subseteq U \setminus F$ ולכן ממונוטוניות $\lambda(U \setminus E) \underset{(\star)}{<} \varepsilon$.
אבל $U \setminus F$ היא פתוחה (כי הפרש של פתוחה וסגורה היא פתוחה) ו־$\mu(V) = \lambda(V)$ לכל פתוחה ומדידה, ולכן $\mu(U \setminus F) = \lambda(U \setminus F) < \varepsilon$, כלומר
$$\mu(U) - \mu(E) \underset{\text{מונוטוניות}}{\le} \mu(U) - \mu(F) = \mu(U \setminus F) < \varepsilon \Longrightarrow \mu(U) - \varepsilon < \mu(E)$$
ולכן מתקיים
$$\lambda(E) - \varepsilon \underset{\text{מונוטוניות}}{\le} \lambda(U) - \varepsilon \underset{\substack{\lambda(U)=\mu(U) \\ \text{עבור } U \text{ פתוחה}}}{=} \mu(E) \underset{\text{מונוטוניות}}{<} \mu(U) \underset{\substack{\lambda(U)=\mu(U) \\ \text{עבור } U \text{ פתוחה}}}{=} \lambda(U) \underset{\star}{<} \lambda(E) + \varepsilon$$
$$\Longrightarrow \lambda(E) - \varepsilon < \mu(E) < \lambda(E) + \varepsilon \iff -\varepsilon < \mu(E) - \lambda(E) < \varepsilon \iff |\mu(E) - \lambda(E)| < \varepsilon$$
מהיות ε שרירותי נובע כי $\mu(E) = \lambda(E)$ לכל $E \in \mathscr{m}$ כלומר $\lambda = \mu$ ולכן μ מידת רדון, ומתכונות מידת רדון נובע כי כל קבוצה מדידה $E \in \mathscr{m}$ היא רגולרית פנימית וחיצונית.

$\square$

6 התכנסות חלשה-*

7 מרחבי L^p

משפט 7.1 (אי־שיוויון יאנסן): יהי $(X,\mathcal{A},\mu)$ מרחב הסתברות ותהיי $\varphi:(a,b)\to\mathbb{R}$ קמורה. אם $f:X\to(a,b)$ פונקציה מדידה, אזי

$$\varphi\left(\int_X f\,\mathrm{d}\mu\right)\leq\int_X\varphi\circ f\,\mathrm{d}\mu$$

הוכחה: נסמן $T:=\int_X f\,\mathrm{d}\mu$.
מהיות $Im(f)\subseteq(a,b)$ ומהיות X מרחב הסתברות, נובע ש־$T\in(a,b)$ ונסמן

$$\beta:=\sup_{s\in(a,T)}\left\{\frac{\varphi(T)-\varphi(s)}{T-s}\right\}$$

אזי לכל $s\in(a,b)$ עם $s<T$ מתקיים

$$\frac{\varphi(T)-\varphi(s)}{T-s}\leq\beta\iff\varphi(T)-\varphi(s)\leq\beta(T-s)\iff\varphi(s)\geq\varphi(T)+\beta(s-T)$$

φ קמורה ולכן מהאיפיון השקול לקמירות עבור $s\in(a,b)$ עם $s>T$ מתקיים

$$\frac{\varphi(T)-\varphi(s)}{s-T}\geq\beta\iff\varphi(s)-\varphi(T)\geq\beta(s-T)\iff\varphi(s)\geq\varphi(T)+\beta(s-T)$$

ולכן לכל $s\in(a,b)$ מתקיים $\varphi(s)\geq\varphi(T)+\beta(s-T)$.
בפרט זה נכון לכל $x\in X$ (כי $s=f(x)$) ולכן $\varphi\circ f\geq\varphi(T)+\beta(f-T)$ ונקבל

$$\int_X\varphi\circ f\,\mathrm{d}\mu\underset{\text{מונוטוניות האינטגרל}}{\geq}\int_X(\varphi(T)+\beta(f-T)\,\mathrm{d}\mu)\underset{\text{לינארית האינטגרל}}{=}\int_X\varphi(T)\,\mathrm{d}\mu+\beta\left(\int_X f\,\mathrm{d}\mu-\int_X T\,\mathrm{d}\mu\right)$$

$$=\varphi(T)\varphi(X)+\beta(T-T\mu(X))\underset{\mu(X)=1}{=}\varphi(T)+\beta(T-T)=\varphi\left(\int_X f\,\mathrm{d}\mu\right)$$

$\square$

משפט 7.2 (אי־שיוויון הולדר ואי־שיוויון מניקובסקי): יהי $(X, \mathcal{A}, \mu)$ מרחב מידה ונניח כי $1 \le p, q \le \infty$ ומקיימים

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

אז לכל f, g מדידות אי־שליליות מתקיימים

$$(1)\ \int_X fg \,\mathrm{d}\mu \le \left(\int_X f^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X g^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$(2)\ \left(\int_X (f+g)^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_X f^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X g^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

כאשר הראשון זה אי־שיוויון הולדר והשני הוא אי־שיוויון מניקובסקי ואם $p = q = 2$ זה אי־שיוויון קושי־שוורץ.

הוכחה: נוכיח את (1) בהנחה ש־$\|f\|_p = \|g\|_q = 1$ ונראה כי $\|fg\|_1 \le 1$: $\log$ היא פונקציה קעורה ולכן אם נניח ש־$fg \ne 0$ נקבל

$$\log(fg) = \log f + \log g = \frac{\log f^p}{p} + \frac{\log g^q}{q} \le \log\left(\frac{f^p}{p} + \frac{g^q}{q}\right)$$

ואם נעלה את e בחזקת אלו נקבל

$$(\star)\ fg \le \frac{f^p}{p} + \frac{g^q}{q}$$

אי־שיוויון זה טריוויאלי במקרה שבו $fg = 0$ ולכן נוכל להתעלם מההנחה הזאת ומלינאריות, מונוטוניות ומההנחה ש־$\|f\|_p = \|g\|_q = 1$ נקבל

$$\int_X \frac{f^p}{p} + \frac{g^q}{q} \,\mathrm{d}\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

ואם ניקח אינטגרל על שני האגפים, $(\star)$ יביא לנו $\|fg\|_1 \le 1$.

כדי להוכיח את (2) נניח ש־$\|f\|_p = \|g\|_p = 1$ ונשתמש בקמירות x^p ונקבל שלכל $t \in (0, 1)$

$$((1-t)f + tg)^p \le (1-t)f^p + tg^p$$

ושוב מלינאריות וממונוטוניות

$$\int_X ((1-t)f + tg)^p \,\mathrm{d}\mu = (1-t) + t = 1$$

ולכן

$$\|(1-t)f + tg\|_p^p \le 1$$

כלומר $\|(1-t)f + tg\| \le 1$.

ללא ההנחה, נכתוב את $f + g$ כממוצע משוקלל של פונקציות מנורמה 1, כלומר $g = \|g\|_p \overline{g}, f = \|f\|_p \overline{p}$ ונקבל

$$\|f + g\|_p = \left\|\overline{f} \cdot \|f\|_p + \overline{g}\|g\|_p\right\|_p = \left(\|f\|_p + \|g\|_p\right) \cdot \left\|\overline{f}\frac{\|g\|_p}{\|f\|_p + \|g\|_p} + \overline{g}\frac{\|f\|_p}{\|f\|_p + \|g\|_p}\right\|_p$$

נבחין שאת גורם המכפלה מימין הוא בידיוק ביטוי של נורמה של ממוצע משוקלל של פונקציות מנורמה 1 ולכן נוכל לחסום אותו מלעיל על־ידי 1 ולקבל

$$\|f + g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$$

$\square$

משפט 7.3 ($\mathcal{L}^p(\mu)$ הוא מרחב וקטור מעל $\mathbb{C}$): $\mathcal{L}^p(\mu)$ הוא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$.

הוכחה:

משפט 7.4: אם $p,q \in [1,\infty]$ חזקות צמודות ו־$f \in \mathcal{L}^p(\mu), g \in \mathcal{L}^q(\mu)$ אזי $f \cdot g \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

הוכחה: עבור $p,q \in (1,\infty)$ הטענה נובעת מאי־שיוויון הולדר. אם $p = 1$ ו־$q = \infty$ מתקיים $g \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$ וגם $|g(x)| \leq \|g\|_\infty (\star)$ μ־כמעט תמיד ולכן

$$\|f \cdot g\|_1 = \int_X |f \cdot g| \,\mathrm{d}\mu = \int_X |f| \cdot |g| \,\mathrm{d}\mu \underset{(\star)}{\leq} \int_X |f| \cdot \|g\|_\infty \,\mathrm{d}\mu = \|g\|_\infty \cdot \int_X |f| \,\mathrm{d}\mu < \infty$$

כלומר $\|f \cdot g\|_1 < \infty$ ולכן $f \cdot g \in \mathcal{L}^1(\mu)$. $\square$

משפט 7.5 (אי־שיוויון המשולש של נורמת p): אם $p \in [1,\infty]$ אזי לכל $f,g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ מתקיים $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

הוכחה: אם $p \in (1,\infty)$ אז הטענה נובעת מאי־שיוויון מניקובסקי.

אם $p \in \{1,\infty\}$ אז הטענה נובעת מאי־שיוויון המשולש של הערך המוחלט ב־$\mathbb{R}$. $\square$

הוכחה: נשאר להראות הומגניות – אם $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ ו־$\lambda \in \mathbb{C}$ אזי $\lambda \cdot f \in \mathcal{L}^p(\mu)$:

$$\int_X |f\lambda f|^p \,\mathrm{d}\mu = \int_X (|\lambda| \cdot |f|)^p \,\mathrm{d}\mu = \int_X |\lambda|^p \cdot |f|^\lambda \,\mathrm{d}\mu = |\lambda|^p \int_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu < \infty$$

כאשר השתמשנו בתכונות ערך המוחלט ומהומוגניות האינטגרל למכפלה בקבוע.

אי־השיוויון האחרון נובע מהיות $|\lambda|^p < \infty$ ומהיות $\int |f|^p \,\mathrm{d}\mu < \infty$ כי $f \in \mathcal{L}^p$ ולכן המכפלה היא סופית. $\square$

משפט 7.6 (לכל $p \in [1,\infty]$ המרחב הנורמי $\left(L^p(\mu), \|\cdot\|_p\right)$ הוא מרחב בנך): לכל $p \in [1,\infty]$, המרחב הנורמי $\left(L^p(\mu), \|\cdot\|_p\right)$ הוא מרחב בנך (אם ורק אם הוא שלם במטריקה המושרית מהנורמה, כלומר כל סדרת קושי היא מתכנסת).

הוכחה: תהיי $\left\{[f_n]_\mu\right\}_{n=1}^\infty \subseteq L^p(\mu)$ סדרת קושי ותהיי $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ נציגים של מחלקות שקילות אלו.

1. נניח ש־$p \in [1,\infty)$, אז לכל $k \in \mathbb{N}$ קיים $n_k \in \mathbb{K}$ כך ש־$\left\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right\| < \frac{1}{2^k}$ כי הסדרה קושי.
תהיי $\left\{f_{n_k}\right\}_{k=1}^\infty$ $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ תת־הסדרה המקיימת זאת ולכל $k \in \mathbb{N}$ נגדיר

$$g_k := \sum_{i=1}^k \left|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\right|$$

ומתקיים

$$\|g_k\|_p = \left\|\sum_{i=1}^k \left|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\right|\right\|_p \le \sum_{i=1}^k \left\|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\right\|_p < \sum_{i=1}^k \frac{1}{2^i} < \infty$$

ולכן $g_k \in L^p(\mu)$ ונסמן $g := \sum_{i=1}^\infty \left|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\right|$ והסדרה $\left\{g_k^p = \left[\sum_{i=1}^k \left|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\right|\right]^p\right\}_{k=1}^\infty$ היא סדרה מונוטוניות עולה של פונקציות אי־שלילית המקיימת $g_k^p \xrightarrow[k\to\infty]{} g^p = \left[\sum_{i=1}^\infty \left|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\right|\right]^p$ נקודתית, אז ממשפט ההתכנסות המונוטונית נקבל

$$\|g\|_p^p = \int_X \left(\sum_{i=1}^\infty \left|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\right|\right)^p \mathrm{d}\mu = \int_X g^p \,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int_X g_k^p \,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \|g_k\|_p^p < 1$$

כאשר אי־השיוויון האחרון נובע מהיות

$$\|g_k\|_p < \sum_{i=1}^k \frac{1}{2^i} < \sum_{i=1\infty} \frac{1}{2^i} \underset{\text{סכום טור הנדסי}}{=} \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1 \Longrightarrow \|g_k\|_p < 1 \Longrightarrow \|g_k\|_p^p < 1$$

ולכן בפרט $\|g\|_p < 1$ ולכן $g(x) < \infty$ μ־כמעט לכל $x \in X$ כלומר הטור מתכנס בהחלט μ־כמעט תמיד אז נגדיר

$$f := f_{n_1} + \sum_{i=1}^\infty \left(f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\right)$$

ונרצה להראות שהסדרה $\{f_m\}_{m=1}^\infty$ מתכנסת ל־f וכן ש־$f \in L^p(\mu)$: f מוגדרת μ־כמעט תמיד לכן נקבע $f = 0$ היכן ש־f לא מוגדרת ואז

$$f(x) = f_{n_1} + \sum_{i=1}^\infty \left(f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\right) = \lim_{i\to\infty} f_{n_i}(x)$$

שכן זהו טור טלסקופי ולכל $m \in \mathbb{N}$ מתקיים $|f_m - f|^p \xrightarrow[i\to\infty]{} \left|f_m - f_{n_i}\right|^p$ כמעט לכל $x \in X$, אז

$$\|f_m - f\|_p^p = \int_X |f_m - f|^p \,\mathrm{d}\mu = \int_X \liminf_{i\to\infty} \left|f_m - f_{n_i}\right|^p \mathrm{d}\mu \underset{\text{פאטו}}{\le} \liminf_{i\to\infty} \int_X \left|f_m - f_{n_i}\right|^p \mathrm{d}\mu = \liminf_{i\to\infty} \left\|f_m - f_{n_i}\right\|_p^p$$

אבל $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ היא סדרת קושי, אז לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n, m \in \mathbb{N}$ עם $n, m > N$ מתקיים $\left\|f_m - f_{n_i}\right\|_p < \varepsilon$ ובפרט עבור $m > N$ נקבל

$$\|f_m - f\|_p^p \le \liminf_{i\to\infty} \left\|f_m - f_{n_i}\right\|_p^p < \varepsilon^p \Longrightarrow f_m \xrightarrow[m\to\infty]{\|\cdot\|_p} f$$

וכן

$$\|f\|_p \underset{\text{אי־שיוויון המשולש}}{\le} \|f - f_m\|_p + \|f_m\|_p < \infty \Longrightarrow f \in L^p(\mu)$$

2. אם $p = \infty$ אז $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq L^{\infty}(\mu)$ סדרת קושי של נציגים עבורה קיימת תת־סדרה $\left\{f_{n_i}\right\}_{i=1}^{\infty}$ כך שמתקיים

$$\forall i \in \mathbb{N},\ \left\|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\right\|_{\infty} < \frac{1}{2^k}$$

נסמן לכל $n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}$

$$A_n := \left\{x \in X \mid |f_n(x)| > \|f_n\|_{\infty}\right\} = |f_n|^{-1}\left(\left(\|f_n\|_{\infty}, \infty\right]\right)$$

$$B_{n,k} := \left\{x \in X \mid |f_n(x) - f_k(x)| > \|f_n - f_k\|_{\infty}\right\} = |f_n - f_k|^{-1}\left(\left(\|f_n - f_k\|_{\infty}, \infty\right]\right)$$

אבל $f_n \in L^{\infty}(\mu)$ אז $\text{ess sup}\{|\cdot|\} = \|\cdot\|_{\infty}$ ש־$\mu(A_n) = \mu\left(B_{n,k}\right) = 0$ אז

$$E := \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \cup \left(\bigcup_{n,k \in \mathbb{N}} B_{n,k}\right)$$

ומ־σ־אדטיביות של μ נקבל $\mu(E) = 0$.

כעת $\sum_{i=1}^{\infty}\left(f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\right)$ מתכנס במידה שווה ממבחן ה־M של ויירשטראס על $X \setminus E$ (כי $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} < \infty$) ולכן $f_{n_1} + \sum_{i=1}^{\infty}\left(f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\right)$ מתכנסת במידה שווה ל־f על $X \setminus E$.

אז $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי ונקבל שהגבול $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ מוגדר וקיים μ־כמעט לכל $x \in X$ ו־f חסומה על־ידי $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_{\infty}$ μ־כמעט לכל $x \in X$, כלומר $f \in L^{\infty}(\mu)$ ומתקיים $\|f - f_n\|_{\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

$\square$