פתרון מטלה 07 — תורת המידה, 80517

6 בדצמבר 2025

שאלה 1

נקרא את ההוכחה למשפט 3.5 בספר Real and Complex Analysis של W.Rudin, המתחילה בעמוד 63.

תוכן ההוכחה הוא אי־שיוויונות מניקובסקי והלדר.

הוכחה: קראתי. $\square$

שאלה 2

יהי $(X, \mathcal{A}, \mu)$ מרחב מידה. עבור $0 < r < 1$ נגדיר לכל $f : X \to \mathbb{C}$ מדידה

$$\|f\|_r = \left(\int |f|^r \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{r}}$$

ונגדיר גם

$$L^r(\mu) = \{ f : X \to \mathbb{C} \mid \|f\|_r < \infty, \text{מדידה } f \}$$

נראה כי אם ב־X יש שתי קבוצות זרות מדידות ממידה סופית ששתיהן לא ממידה אפס, אז $\|\cdot\|_r$ לא מקיימת את אי־שיוויון המשולש.

הוכחה: תהיינה $A, B \in X$ כך ש־$0 < \mu(A), \mu(B) < \infty$ ו־$A \cap B = \emptyset$.

נגדיר $f = \mathbb{1}_A$ ומכך ש־$0 < \mu(A) < \infty$ נקבל $\|f\|_r < \infty$, באופן דומה נגדיר גם $g = \mathbb{1}_B$ () ומאותו שיקול $\|g\|_r < \infty$. נגדיר

$$h = f + g = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B \underset{A \cap B = \emptyset}{=} \mathbb{1}_{A \uplus B}$$

אז נחשב

$$\|h\|_r^r = \int |\mathbb{1}_{A \uplus B}|^r \, \mathrm{d}\mu = \int_{A \uplus B} 1 \, \mathrm{d}\mu = \mu(A \uplus B) = \mu(A) + \mu(B) \Longrightarrow \|h\|_r = (\mu(A) + \mu(B))^{\frac{1}{r}}$$

מצד שני מתקיים

$$\|f\|_r^r = \int |\mathbb{1}_A|^r \, \mathrm{d}\mu = \int_A 1^r \, \mathrm{d}\mu = \int_A 1 \, \mathrm{d}\mu = \mu(A) \Longrightarrow \|f\|_r = (\mu(A))^{\frac{1}{r}}$$

$$\|g\|_r^r = \int |\mathbb{1}_B|^r \, \mathrm{d}\mu = \int_B 1^r \, \mathrm{d}\mu = \int_B 1 \, \mathrm{d}\mu = \mu(B) \Longrightarrow \|g\|_r = (\mu(B))^{\frac{1}{r}}$$

אז אנחנו רוצים לבחון **האם** האי־שיוויון הבא מתקיים (ליתר דיוק, שהוא נופל):

$$\|h\|_r = \|f + g\|_r \overset{?}{\le} \|f\|_r + \|g\|_r \iff (\mu(A) + \mu(B))^{\frac{1}{r}} \overset{?}{\le} \mu(A)^{\frac{1}{r}} + \mu(B)^{\frac{1}{r}}$$

נסמן לנוחות $a = \mu(A), b = \mu(B)$ ו־$0 < a, b$ וכן $p = \frac{1}{r} > 1$ (כי $0 < r < 1$) ונבחן

$$(a + b)^p \overset{?}{\le} (a^p + b^p)$$

נשים לב שהפונקציה $\varphi(x) = x^p$ היא פונקציה קמורה, כלומר לכל $t \in (0, 1)$ מתקיים

$$\varphi(ta + (1 - t)b) \le t\varphi(a) + (1 - t)\varphi(b)$$

נחלק את אי־השיוויון שאנחנו בוחנים ב־$b^p \neq 0$ כמובן

$$(a + b)^p \overset{?}{\le} (a^p + b^p) \iff \frac{(a + b)^p}{b^p} \overset{?}{\le} \frac{a^p + b^p}{b^p} \iff \left(\frac{a}{b} + 1 \right)^p \overset{?}{\le} \left(\frac{a}{b} \right)^p + 1 \underset{x = \frac{a}{b}}{\iff} (x + 1)^p \le x^p + 1$$

נגדיר $\psi(x) = (x + 1)^p - x^p - 1$ זה פולינום ולכן חלק, נגזר

$$\psi'(x) = p(x + 1)^{p-1} - px^{p-1}$$

מכך ש־$p > 1$ אז $p - 1 > 0$ ו־$x > 0$ אז $(x + 1)^{p-1} > x^{p-1}$ כלומר $\psi'(x) > 0$ ונשים לב

$$\psi(0) = 1^p - 0^p = 0$$

אז ψ היא מונוטונית עולה ממש לכל $x > 0$ ונובע מכך

$$(x + 1)^p > x^p + 1$$

בסתירה, כלומר אי־שיוויון המשולש לא מתקיים. $\square$

שאלה 3

נניח כי $(X,\mathcal{A},\mu)$ מרחב מידה σ־סופי (איחוד בן־מנייה של קבוצות מדידות עם מידה סופית) ו־$1\le s\le t\le\infty$.

סעיף א'

נוכיח כי $L^t(\mu)\subseteq L^s(\mu)$ אם ורק אם $\mu(X)<\infty$.

הוכחה: $\Longleftarrow$ נניח כי $\mu(X)<\infty$ ונוכיח $L^t(\mu)\subseteq L^s(\mu)$.

אם $s=t$ סיימנו ולכן נניח שיש שם אי־שיוויון חזק ושכרגע $t<\infty$.

תהי $f\in L^t(\mu)$, ונסמן $g(x)=1$.

נסמן $p=\frac{t}{s},q=\frac{t}{t-s}$ ומההנחות מתקיים $q,p\ge 1$ ובדיקה מראה שהם צמודים אחד לשנייה $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{s}{t}+\frac{t-s}{t}=\frac{s+t-s}{t}=1$.

מאי־שיוויון הולדר

$$\|f\|_s=\left(\int|f|^s\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{s}}=\left(\int|f|^s\cdot 1\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{s}}\le \||f|^s\|_{\frac{t}{s}}^{\frac{1}{s}}\|1\|_{\frac{t}{s}}^{\frac{1}{s}}$$

נבחין

$$\||f|^s\|_{\frac{t}{s}}=\left(\int(|f|^s)^{\frac{t}{s}}\right)^{\frac{s}{t}}=\left(\int|f|^t\right)^{\frac{s}{t}}=\|f\|_s^t$$

$$\|1\|_{\frac{t}{s}}=\mu(X)^{\frac{t-s}{t}}$$

מידת המרחב היא סופית ולכן נסמן $M=\mu(X)$ אז מהאי־שיוויון לעיל

$$\|f\|_s\le\left(M^{\frac{t-s}{t}}\right)^{\frac{1}{s}}(\|f\|_t^s)^{\frac{1}{s}}=M^{\frac{1}{s}-\frac{1}{t}}\|f\|_t<\infty\Longrightarrow f\in L^s(\mu)$$

אם $t=\infty$ אז $f\in L^\infty$ היא $|f|\le\|f\|_\infty$ כמעט תמיד (ראינו בהרצאה) אז

$$\|f\|_s^s=\int|f|^s\,\mathrm{d}\mu\le\int\|f\|_\infty^s\,\mathrm{d}\mu=\|f\|_\infty^s\mu(X)<\infty\Longrightarrow f\in L^s(\mu)$$

$\Longrightarrow$ נניח כי $L^t(\mu)\subseteq L^s(\mu)$ ונוכיח $\mu(X)<\infty$.

נניח שלא ככה, כלומר $\mu(X)=\infty$.

X הוא מרחב מידה σ־סופי ולכן קיימות $E_1,E_2,\ldots$ מדידות כך ש־$0<\mu(E_n)<\infty$ ו־$X=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$ (לאו־דווקא שהן זרות בצורה טבעית אלא הזרנו אותן בתהליכים דומים למה שראינו במטלות הראשונות) ומתקיים כמובן $\mu(X)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)$ והסכום מתבדר ואי־שלילי.

יהי $N_1\in\mathbb{N}$ כך שמתקיים $\sum_{n=1}^{N_1}\mu(E_n)\ge 1$ (יש כזה כי הטור מתבדר, לא סתם מתבדר – שואף לאינסוף) ונגדיר $F_1=\bigcup_{n=1}^{N_1}E_n$ וכמובן $1\le\mu(F_1)<\infty$ כסכום סופי של מידות סופיות.

נמשיך ונגדיר $F_2,F_3,\ldots$ וכן הלאה כך שלכל $k\in\mathbb{N}$ מתקיים $1\le\mu(F_k)<\infty$ והן זרות אחת לשנייה (איחדנו קבוצות זרות) ונחלק למקרים:

אם $t=\infty$ אז $f\equiv 1\in L^{\infty(\mu)}$ אבל $\int(|f|^s\,\mathrm{d}\mu)=\mu(X)=\infty$, כלומר $f\notin L^s(\mu)$ ולכן $L^\infty(\mu)\nsubseteq L^t(\mu)$, סתירה.

אם $t<\infty$ ושוב נניח כי $s<t$ (אחרת זה שוב סתירה), ונבחר $\delta>0$ כך שיתקיים $0<\delta<\frac{t}{s}-1$ ולכל $k\in\mathbb{N}$ נגדיר $b_k:=\mu(F_k)^{-\frac{1}{t}}k^{\frac{-(1+\delta)}{t}}$ ונגדיר $f:=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\mathbb{1}_{F_k}$.

נחשב ונקבל מהזרות

$$\int|f|^t\,\mathrm{d}\mu=\int\left|\sum_{k=1}^{\infty}b_k\mathbb{1}_{F_k}\right|^t\mathrm{d}\mu=\sum_{k=1}^{\infty}b_k^t\int_{F_k}1\,\mathrm{d}\mu=\sum_{k=1}^{\infty}b_k^t\mu(F_k)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\mu(F_k)^{-\frac{1}{t}}\right)^t\left(k^{\frac{-(1+\delta)}{t}}\right)^t\mu(F_k)=\sum_{k=1}^{\infty}k^{-(1+\delta)}<\infty$$

כאשר ההתכנסות היא מהיות $\delta+1>0$.

כלומר קיבלנו $f\in L^t(\mu)$, אבל מצד שני

$$\int|f|^s\,\mathrm{d}\mu=\sum_{k=1}^{\infty}b_k^s\int_{F_k}1\,\mathrm{d}\mu=\sum_{k=1}^{\infty}\mu(F_k)^{1-\frac{s}{t}}k^{-\frac{s(1+\delta)}{t}}\underset{\substack{1-\frac{s}{t}\ge 0\\ \mu(F_k)\ge 1}}{\ge}\sum_{k=1}^{\infty}k^{-\frac{s(1+\delta)}{t}}\ge\infty$$

כאשר ההתבדרות היא מהיות $\frac{s(1+\delta)}{t}\le 1$.

כלומר, קיבלנו $f\notin L^s(\mu)$, אבל הנחנו $L^t(\mu)\subseteq L^s(\mu)$ וזאת סתירה, כלומר $\mu(X)<\infty$. $\square$

סעיף ב'

נוכיח כי $L^s(\mu) \subseteq L^t(\mu)$ אם ורק אם אין ב־$\mathcal{A}$ תתי־קבוצות ממידה קטנה כרצוננו, כלומר קיים $\varepsilon > 0$ כך שאם $\mu(A) < \varepsilon$ עבור A מדידה כלשהי, אז A ממידה אפס.

הוכחה: $\Longleftarrow$ נניח כי $L^s(\mu) \subseteq L^t(\mu)$ ונראה כי אין ב־$\mathcal{A}$ תתי־קבוצות ממידה קטנה כרצוננו.

נניח בשלילה שיש ב־$\mathcal{A}$ תת־קבוצה ממידה קטנה כרצוננו, ולכן לכל $n \in \mathbb{N}$ יש קבוצה מדידה A_n כך ש־$0 < \mu(A_n) < \frac{1}{n}$.

מהיות המרחב σ־סופי נוכל לבנות תת־סדרה של $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ שכל איברי הסדרה זרים ומדידים כך שמתקיים $0 < \mu(B_n) \to 0$.

נגדיר

$$\alpha_n := \frac{1}{n^2 \mu(B_n)^{\frac{1}{s}}}$$

ולכן אם נגדיר פונקציה f הנתמכת על $(B_n)_{n=1}^{\infty}$, כלומר $f = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \mathbb{1}_{B_n}$ נקבל

$$\int |f|^s = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^s \mu(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(B_n)}{\left(n^2 \mu(B_n)^{\frac{1}{s}}\right)^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2s}} < \infty$$

שזהו טור מתכנס כי $s \geq 1$. מצד שני

$$\int |f|^t = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^t \mu(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(B_n)}{\left(n^2 \mu(B_n)^{\frac{1}{s}}\right)^t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2t} \mu(B_n)^{\frac{t}{s}-1}}$$

מהיות $t > s$ אז $\frac{t}{s} - 1 > 0$ ו־$\mu(B_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ואנחנו תמיד יכולים לבנות את B_n כך שיתקיים

$$\mu\left(B_{n_k}\right)^{-\left(\frac{t}{s}-1\right)} > n_k^{2t} \Longrightarrow \frac{\mu\left(B_{n_k}\right)^{-\left(\frac{t}{s}-1\right)}}{n_k^{2t}} > 1$$

ולכן הטור במקרה זה מתבדר, וזו סתירה להנחה $L^s(\mu) \subseteq L^t(\mu)$.

$\Longrightarrow$ נניח כי אין ב־$\mathcal{A}$ תתי־קבוצות ממידה קטנה כרצוננו ונוכיח $L^s(\mu) \subseteq L^t(\mu)$.

תהיי $f \in L^s(\mu)$ ולכל $k \in \mathbb{Z}$ נגדיר

$$E_k := \left\{x \in X \mid 2^k \leq |f(x)| < 2^{k+1}\right\}$$

כל E_k כזה מדידה כתמונה של פונקציה ומדידה ומתקיים לכל $i \neq j$ ש־$E_i \cap E_j = \emptyset$ (כי הקטעים $\left[2^k, 2^{k+1}\right)$ אינם נחתכים)

$$\int |f|^s \,\mathrm{d}\mu = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{E_k} |f|^s \,\mathrm{d}\mu \geq \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{ks} \mu(E_k)$$

כעת, נטען שיש מספר סופי של k־ים עבורם $\mu(E_k) > 0$: שכן אם בשלילה לא היה ככה, היה מתקיים

$$\|f\|_s^s = \int |f|^s \,\mathrm{d}\mu \geq \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{ks} \mu(E_k)$$

אם הייתה כמות שאיננה סופית סופית, אז הסכום מצד ימין היה מתבדר (בין אם בשאיפה לאינסוף ובין אם שאיפה למינוס אינסוף) ואז נקבל $\int |f|^s = \infty$ אבל $f \in L^s$.

אז קיים $M < \infty$ כך שמתקיים $|f(x)| \leq M$ כלומר $f \in L^\infty(\mu)$ ומהיות $s \leq t \leq \infty$ נקבל $L^\infty(\mu) \subseteq L^t(\mu)$ ולכן $f \in L^t(\mu)$ ונקבל $L^s(\mu) \subseteq L^t(\mu)$. $\square$

שאלה 4

יהי $(X, \mathcal{A}, \mu)$ מרחב מידה. עבור $f : X \to \mathbb{R}$ מדידה נגדיר

$$\text{ess sup}\, f := \inf\{\alpha \mid \mu(f^{-1}((\alpha, \infty))) = 0\}, \ \ \text{ess inf}\, f := \sup\{\alpha \mid \mu(f^{-1}((-\infty, \alpha))) = 0\}$$

עבור $f : X \to \mathbb{C}$ נסמן $\|f\|_\infty = \text{ess sup}|f|$.

סעיף א'

תהיי $f : X \to \mathbb{R}$ מדידה. נסמן ב־$K \subseteq \mathbb{R}$ את התומך של המידה $f_*\mu$ המוגדרת על $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$.
נוכיח כי הסופרמום והאינפימום של K הם בידיוק $\text{ess sup}\, f, \text{ess inf}\, f$.

הוכחה: $\square$

סעיף ב'

נראה כי לכל f מדידה

$$\|f\|_1 \le \mu(X) \cdot \|f\|_\infty$$

הוכחה: $\square$

סעיף ג'

נניח כי f_n, f פונקציות מדידות כך ש־$\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
נראה כי קיימת ל־f_n תת־סדרה המתכנסת נקודתית ל־f.
הוכחה:

$\square$

שאלה 5

נניח כי $(X,\mathcal{A},\mu)$ מרחב מידה סופי ו־$f:X\to\mathbb{C}$ מדידה.

סעיף א'

נראה כי אם $\|f\|_\infty = 1$ אז הסדרה $a_n=\int_X |f|^n\,\mathrm{d}\mu$ מתכנסת.

הוכחה: מהנתון $\|f\|_\infty = 1$ נובע $\inf\{\alpha\geq 0 \mid \mu(|f|\geq\alpha)=0\}=1$, כלומר מתקיים μ־כמעט תמיד לכל $x\in X$, $|f(x)|\leq 1$, ולכן

$$a_n=\int_X |f|^n\,\mathrm{d}\mu \leq \int_X 1\,\mathrm{d}\mu = \mu(X) \underset{\text{מרחב מידה סופי}}{<} \infty$$

עוד נובע $|f|\leq\cdots\leq|f|^{n-2}\leq|f|^{n-1}\leq|f|^n$ כלומר $a_{n+1}\leq a_n$ו נשים לב גם שלכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $0\leq a_n$ כאינטגרל על פונקציה אי־שלילית על מרחב מידה סופי. אז $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית יורדת חלש ואי־שלילית ולכן מתכנסת. □

סעיף ב'

נראה כי לכל f עם $0<\|f\|_\infty<\infty$ מתקיים

$$\|f\|_\infty = \lim_{n\to\infty}\frac{\|f\|_{n+1}^{n+1}}{\|f\|_n^n}$$

הוכחה: נסמן

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{\|f\|_{n+1}^{n+1}}{\|f\|_n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\int_X |f|^{n+1}\,\mathrm{d}\mu}{\int_X |f|^n\,\mathrm{d}\mu},\ 0<M:=\|f\|_\infty<\infty$$

נגדיר $g:X\to\mathbb{C}$ על־ידי $g(x)=\frac{f(x)}{M}$ ועל־ידי נרמול זה נקבל

$$\|g\|_\infty=\left\|\frac{f}{M}\right\|_\infty=\frac{\|f\|_\infty}{M}=1,\ \|g\|_p=\int_X |g|^p\,\mathrm{d}\mu=\int_X\left|\frac{f}{M}\right|^p\mathrm{d}\mu=\frac{1}{M^p}\int_X |f|^n\,\mathrm{d}\mu=\frac{1}{M^p}\|f\|_p^p$$

ולכן

$$\frac{\|f\|_{n+1}^{n+1}}{\|f\|_n^n}=\frac{\int_X |f|^{n+1}\,\mathrm{d}\mu}{\int_X |f|^n\,\mathrm{d}\mu}=\frac{\int_X |Mg|^{n+1}\,\mathrm{d}\mu}{\int_X |Mg|^n\,\mathrm{d}\mu}=\frac{M^{n+1}\int_X |g|^{n+1}\,\mathrm{d}\mu}{M^n\int_X |g|^n\,\mathrm{d}\mu}=M\cdot\frac{\int_X |g|^{n+1}\,\mathrm{d}\mu}{\int_X |g|^n\,\mathrm{d}\mu}$$

נגדיר

$$a_n=\int_X |g|^n\,\mathrm{d}\mu=\|g\|_n^n$$

מהסעיף הקודם $A=\lim_{n\to\infty}a_n$ קיים ומוגדר ומכך ש־$g\in L^\infty(\mu),\|g\|_\infty$ נקבל

$$A=\lim_{n\to\infty}\|g\|_n^n=\lim_{n\to\infty}\int_X |g|^n\,\mathrm{d}\mu$$

ו־A אי־שלילי (חסם מלרע), נשים לב שאנחנו צריכים להצדיק למה זה מוגדר היטב:

מהיות $\|g\|_\infty=1$, אנחנו יודעים שמתקיים $A=\mu(\{x\in X \mid |g(x)|=1\})$ ומכך ש־$0<\|f\|_\infty<\infty$ אז $\mu(A)>0$ ולכן מתקיים

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_X |g|^{n+1}\,\mathrm{d}\mu}{\int_X |g|^n\,\mathrm{d}\mu}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$$

כאשר השיוויון האחרון נובע מזה שהמכנה מתכנס לאותו ערך כמו המונה מנוסחת הזנב. נקבל בסך־הכל עם מה שמצאנו ולקיחת גבול

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\|f\|_{n+1}^{n+1}}{\|f\|_n^n}=\lim_{n\to\infty}M\cdot\frac{\int_X |g|^{n+1}\,\mathrm{d}\mu}{\int_X |g|^n\,\mathrm{d}\mu}=M\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=M\cdot 1=M$$

□