פתרון מבחן 2025א' — תורת הקבוצות, 80200

14 באוגוסט 2025

שאלה 1

סעיף א'

הגדירו מהי קבוצה סופית.

הוכחה: תהיי A קבוצה, נגיד כי A סופית אם קיים $n \in \mathbb{N}$ כך שמתקיים $|A| = |[n]|$ כאשר $[n] = \{0, 1, \cdots, n-1\}$ ושיוויון עוצמות אומר שקיימת פונקציה $f : A \to [n]$ שהיא חד־חד ערכית ועל. $\square$

סעיף ב'

נוכיח כי לכל קבוצה סופית A, אם $F : A \to A$ היא חד־חד ערכית אז F על.

הוכחה:

מהיות A סופית נובע שקיים $n \in \mathbb{N}$ כך שמתקיים $|A| = |[n]|$.

אם $n = 0$ הטענה נכונה באופן ריק ולכן נניח ש־$n \neq 0$.

יהי n_0 המספר הטבעי המינימלי עבורו קיימת פונקציה $F : A \to [n_0]$ חד־חד ערכית ונטען ש־F על:

נניח בשלילה שיש $k \notin \operatorname{range}(F)$ ונסתכל על $H : [n_0] \to [n_0]$ המחליפה בין k לבין $n_0 - 1$, כלומר

$$H(j) = \begin{cases} k & j = n_0 - 1 \\ n_0 - 1 & j = k \\ j & j \neq n_0 - 1 \wedge j \neq k \end{cases}$$

נסתכל על $H \circ F$, נבחין ש־$H \circ F : A \to [n_0 - 1]$ והיא חד־חד ערכית.

מתקיים $n_0 - 1 \notin \operatorname{range}(H \circ F)$ (כי $k \notin \operatorname{range}(F)$ ולכן לא ייתכן שנקבל $(H \circ F)(x) = n_0 - 1$ כי $F(x) \neq k$), ולכן $H \circ F$ היא פונקציה חד־חד ערכית מ־A ל־$[n_0 - 1]$, בסתירה למינימליות n_0 וקיבלנו סתירה להנחה כי F לא על.

כלומר $|A| = |[n_0]|$ (מהגדרת שיוויון עוצמות), אבל $|A| = |[n]|$ ולכן $|[n_0]| = |[n]|$, כלומר $n_0 = n$.

את הטענה האחרונה צריך להראות בגדול באינדוקציה, אבל זה נובע כי $|\{0, \cdots, n_0 - 1\}| = |\{0, \cdots, n-1\}| \implies |[n_0]| = |[n]|$. $\square$

שאלה 2

סעיף א'

נחשב את עוצמת הקבוצה $\{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid f$ חד־חד ערכית$\}$.

פתרון: נסמן $A := \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid f$ חד־חד ערכית$\}$.

באמצעות משפט קנטור־שרדר־ברנשטיין:

ראשית נבחין שמתקיים $A \subseteq \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\} := B = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ וונטען שמתקיים $\left|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right| = 2^{\aleph_0}$:

ניקח את $\mathbb{N}$ להיות נציג של $\aleph_0$ ואת $[2]$ להיות נציג של 2.

$\geq$: נשים לב שמתקיים $[2]^{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ כלומר $\left|[2]^{\mathbb{N}}\right| \leq \left|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right|$ כלומר $2^{\aleph_0} \leq \left|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right|$.

$\leq$: נשים לב שמתקיים $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ שכן $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ היא סדרת הזוגות הסדוריים $\{(n, f(n)) \mid n \in \mathbb{N}\}$ כלומר $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

ראינו שמתקיים $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$ ולכן $\left|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = 2^{\aleph_0}$.

ממשפט קנטור־שרדר־ברנשטיין מתקיים $\left|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right| = \aleph_0$, ומהיות $A \subseteq B$ מתקיים $|A| \leq 2^{\aleph_0}$.

בשביל הצד השני, נבחין כי $C = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ סט כל הסדרות הבינאריות האינסופיות $(b_0, b_1, \cdots)$.

נגדיר $\varphi : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to A$ כך שלכל רצף b מתקיים $f_b(n) = 2n + b_n$; כלומר, אם $b_n = 0$ אז $f_b(n)$ זוגי ואחרת אי־זוגי.

נבחין שכל $f_b(n)$ היא חד־חד ערכית ממונוטוניות עולה ממש בגלל n.

אם $b \neq b'$ אז יש k כך שמתקיים $b_k \neq b'_k$, כלומר $f_b(k) \neq f_{b'}(k)$ ולכן $f_b \neq f_{b'}$ ולכן φ פונקציה חד־חד ערכית ומתקיים $\left|\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right| \leq |A|$.

כעת נטען שמתקיים $\left|\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right| = 2^{\aleph_0}$ וזה פשוט נובע מאריתמטיקה של עוצמות שכן $2 = |\{0,1\}|$ ולכן $\left|\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right| = 2^{\aleph_0}$.

ראינו שמתקיים $|A| \leq 2^{\aleph_0}$ וגם שמתקיים $2^{\aleph_0} \leq |A|$ ולכן ממשפט קנטור־שרדר־ברנשטיין מתקיים $|A| = 2^{\aleph_0}$.

באמצעות טיעון אלכסון:

נניח בשלילה ש־A בת־מנייה ולכן יש $\sigma : \mathbb{N} \to A$ פונקציה על ונסמן $\sigma(n) = \sigma_n$.

נגדיר $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ בצורה רקורסיבית:

$$f(0) = \min \mathbb{N} \setminus \{\sigma_0(0)\}$$

כלומר, 0 אם $\sigma_0(0) \neq 0$ ו־1 אם אחרת.

נגדיר

$$f(n+1) = \min \mathbb{N} \setminus \{f(0), \cdots, f(n), \sigma_{n+1}(n+1)\}$$

נטען ש־$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ היא חד–חד ערכית ושונה מכל σ_n.

לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $\sigma_n(n) \neq f(n)$ ונשאר רק להראות שהיא חד־חד ערכית: נניח שהיא לא חד־חד ערכית, אז יהי n המינימלי כך שעבורו קיים $m < n$ המקיים $f(n) = f(m)$, אבל $f(n) = f((n-1)+1)$, כלומר $f(n) \notin \{f(0), \cdots, f(n-1)\}$ וזו סתירה ולכן f חד־חד ערכית וזו סתירה להיות σ על, ולכן A לא בת־מנייה. $\square$

סעיף ב'

נחשב את עוצמת הקבוצה $A := \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid f$ חד־חד ערכית$\}$.

פתרון: ראשית נשים לב שמתקיים $A \subseteq \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ומאריתמטיקה של עוצמות

$$\left|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right| = \left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} \underset{(\star)}{=} 2^{\aleph_0}$$

כאשר $(\star)$ נובע מכך שראינו $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$ (מטלה 1).

מצד שני, ניזכר שמתקיים $2^{\aleph_0} = |(0,1)| = |\mathbb{R}|$, ולכל $a \in (0,1)$ נגדיר $f_a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ על־ידי $f_a(n) + n + a$ ו־f_a חד־חד ערכית.

בפרט, לכל $a_1 \neq a_2 \in (0,1)$ מתקיים לכל $n \in \mathbb{N}$

$$f_{a_1}(n) = a_1 + n \neq a_2 + n = f_{a_2}$$

נגדיר B להיות אוסף הפונקציות הנ"ל ונקבל $|B| = 2^{\aleph_0}$.

נבחין שמתקיים $B \subseteq A$ ולכן $|B| = 2^{\aleph_0} \leq |A|$.

ראינו שמתקיים $|A| \leq 2^{\aleph_0}$ וגם שמתקיים $2^{\aleph_0} \leq |A|$ ולכן ממשפט קנטור־שרדר־ברנשטיין מתקיים $|A| = 2^{\aleph_0}$.

$\square$