פתרון מטלה 01 — תורת המידה, 80517

25 באוקטובר 2025

שאלה 1

תהיי X קבוצה לא ריקה.

סעיף א'

תהיי $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ כך ש־$X \in \mathcal{A}$ ולכל $E_1, E_2 \in \mathcal{A}$ מתקיים $E_1 \setminus E_2 \in \mathcal{A}$ $(\star)$.
נוכיח כי $\mathcal{A}$ היא אלגברה על X.

הוכחה: $X \in \mathcal{A}$: נתון, נבחן את שתי התכונות האחרות:
סגורה תחת לקיחת משלים: יהי $E \in \mathcal{A}$ ונרצה להראות ש־$E^c \in \mathcal{A}$. היות ו־$X \in \mathcal{A}$ מהנתון $(\star)$ נקבל שמתקיים $E^c = X \setminus E \in \mathcal{A}$ וסיימנו.
סגורה תחת איחודים סופיים: תהיינה $E_1, E_2 \in \mathcal{A}$ ונרצה להראות ש־$E_1 \cup E_2 \in \mathcal{A}$.
מכללי דה־מורגן מתקיים $E_1 \cup E_2 = (E_1^c \cap E_2^c)^c$ וכן $E_1^c \cap E_2^c = E_1^c \setminus E_2$ מהגדרת החיתוך והמשלים.
ראינו ש־$\mathcal{A}$ סגורה תחת לקיחת משלים ולכן $E_1^c \in \mathcal{A}$ ולפי $(\star)$ מתקיים $E_1^c \setminus E_2 \in \mathcal{A}$ וכן מתקיים גם $(E_1^c \setminus E_2)^c \in \mathcal{A}$.
מכללי דה־מורגן שראינו לעיל מתקיים $E_1 \cup E_2 = (E_1^c \cap E_2^c)^c = (E_1^c \setminus E_2)^c$ וזה בידיוק אומר ש־$E_1 \cup E_2 \in \mathcal{A}$, כלומר $\mathcal{A}$ סגורה תחת איחודים סופיים.
שלושת התנאים מתקיימים ולכן $\mathcal{A}$ היא אלגברה. $\square$

סעיף ב'

תהיינה $(\mathcal{A}_n)_{n=1}^{\infty}$ אלגבראות על X כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $\mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{A}_{n+1}$.
נוכיח שמתקיים $\mathcal{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$ היא אלגברה על $\mathcal{A}$.

הוכחה: $X \in \mathcal{A}$: היות ו־$\mathcal{A}_1$ אלגברה על X נובע כי $X \in \mathcal{A}_1$ ומכך ש־$\mathcal{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n \supseteq \mathcal{A}_1$ נובע כי $X \in \mathcal{A}$.
סגירות תחת לקיחת משלים: יהי $E \in \mathcal{A}$, נרצה להראות ש־$E^c \in \mathcal{A}$.
מכך ש־$E \in \mathcal{A}$ נובע כי קיים $k \in \mathbb{N}$ מינימלי כך ש־$E \in \mathcal{A}_k$.
$\mathcal{A}_k$ היא אלגברה ולכן סגורה ללקיחת משלים ולכן $E^c \in \mathcal{A}_k$ ומכך ש־$\mathcal{A}_k \subseteq \mathcal{A}$ נובע כי $E^c \in \mathcal{A}$ וקיבלנו סגירות תחת לקיחת משלים.
סגירות תחת איחודים סופיים: תהיינה $E_1, E_2 \in \mathcal{A}$ ולכן קיימים $n, m \in \mathbb{N}$ כך שמתקיים ללא הגבלת הכלליות $E_1 \in \mathcal{A}_n, E_2 \in \mathcal{A}_m$.
נבחר $k = \max(n, m)$ ולכן מהנתון על השרשרת העולה של הכלות נקבל ש־$E_1, E_2 \in \mathcal{A}_k$, אבל $\mathcal{A}_k$ היא אלגברה ולכן סגורה תחת איחודים סופיים, כלומר $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{A}_k$, אבל $\mathcal{A}_k \subseteq \mathcal{A}$ מהגדרת האיחוד ולכן $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{A}$ וקיבלנו ש־$\mathcal{A}$ סגורה תחת איחודים סופיים.
שלושת התנאים מתקיימים ולכן $\mathcal{A}$ היא אלגברה. $\square$

סעיף ג'

נראה כי הסעיף הקודם אינו נכון עבור σ־אלגבראות. כלומר, נראה שאיחוד עולה של σ־אלגבראות אינו בהכרח σ־אלגברה.
הוכחה: ניקח $X = \mathbb{N}$, נגדיר לכל $n \in \mathbb{N}$

$$A_k = \{k\},\ \ k \in \{1, ..., n\}, A_{n+1} = X \setminus \{1, ..., n\} = \{n+1, n+2, ...\}$$

ונגדיר

$$\mathcal{F}_n = \left\{ \bigcup_{j \in J} A_j \mid J \subseteq \{1, ..., n+1\} \right\}$$

$\mathcal{F}_n$ היא אכן σ־אלגברה: סגירות תחת משלים ו־$X \in \mathcal{F}_n$ נובעים ישירות מהגדרת A_k לכל $k \in [n]$ והגדרת A_{n+1}.
סגירות תחת איחוד בן־מנייה נובע מכך ש־$|\mathcal{F}_n| = 2^{n+1}$ אז כל $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ מכיל מספר סופי של איברים זרים, כלומר האיחוד (כקבוצות) הופך להיות איחוד סופי (כלומר אלגברה) ולכן היא σ־אלגברה באופן ריק.
כעת, לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1}$ מבנייה ונסמן $\mathcal{F} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$.
נגדיר $E = \{2k-1 \mid k \in \mathbb{N}\} = \{1, 3, 5, 7, ...\}$ ואכן $E \in F$ עבור כל יחידון $m = 2k-1$ מתקיים $\{m\} \in \mathcal{F}_m$ ולכן $\{m\} \in \mathcal{F}$ ו־E הוא איחוד בן־מנייה של איברים ב־$\mathcal{F}$.
נניח כי $E \in \mathcal{F}$, כלומר קיים $n \in \mathbb{N}$ כך שמתקיים $E \in \mathcal{F}_n$ ומהגדרת $\mathcal{F}_n$ נובע כי קיימות שתי אפשרויות בידיוק ל־E: או ש־E זנב (כלומר $E = A_{n+1} = \{n+1, n+2, ...\}$) או שהוא לא מכיל כלל את הזנב.
אם $E \cap A_{n+1} = \emptyset$ נובע כי $E \subseteq \{1, 2, ..., n\}$ וזאת סתירה לאינסופיות של E.
אחרת, $A_{n+1} \subseteq E$ כלומר כל $k > n$ הוא אי־זוגי וזאת כמובן סתירה לאינסופיות המספרים הזוגיים.
לכן $E \notin \mathcal{F}$, כלומר $\mathcal{F}$ לא σ־אלגברה. $\square$

שאלה 2

נסמן ב־$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ את σ־אלגברת בורל על $\mathbb{R}$. תהיי $U \subseteq \mathbb{R}$ פתוחה.

סעיף א'

נראה כי U ניתנת להצגה כאיחוד של אוסף של קטעים פתוחים זרים בזוגות.

הוכחה: נגדיר

$$C_x = \cup \{I \mid I \subseteq U, x \in I, \text{קטע פתוח } I\}$$

U פתוחה ו־$x \in U$ (כי $U \neq \emptyset$) ולכן יש קטע פתוח $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq U$ עבור $\varepsilon > 0$ קטן דיו ולכן $C_x \neq \emptyset$.

C_x פתוחה כאיחוד כלשהו של קבוצות פתוחות ולכן קבוצה פתוחה אבל עלינו להראות שזה קטע: יהיו $a, b \in C_x$ ובלי הגבלת הכלליות $a < b$.

מהגדרה, נובע שיש $I_a, I_b \in U$ כך ש־$a \in I_a, b \in I_b$ ו־$I_a \cup I_b$ הוא קטע ב־U.

כל $a < c < b$ מקיים $c \in I_a \cup I_b$ ולכן $c \in U$, אבל U פתוחה ולכן יש קטע פתוח $I_c \subseteq U$ כך ש־$c \in I_c$ ולכן $I_c \subseteq C_x$ וזה גורר ש־C_x הוא קטע פתוח.

נבחין גם ש־C_x הוא הקטע הפתוח המקסימלי שמכיל את x, כי אחרת אם J קטע פתוח כך ש־$J \subsetneq C_X$ ו־$J \subseteq U$ אז $x \in J$ וזו סתירה להגדרת C_x.

כעת, יהיו $x, y \in U$ ו־C_x, C_y קטעים פתוחים ב־U.

אם $C_x \cap C_y \neq \emptyset$ אז יש $z \in C_X \cap C_y$ אבל ממה שראינו לעיל C_z הוא הקטע הפתוח המקסימלי שמכיל את z נקבל $C_x \subseteq C_z$ וכן $C_y \subseteq C_z$ אבל גם C_x, C_y הם המקסימליים שמכילים את x, y בהתאמה ולכן $C_x = C_z$ וכן $C_y = C_z$ ולכן $C_x = C_y$.

כלומר, לכל $x, y \in U$ מתקיים $C_x = C_y$ או $C_x \cap C_y = \emptyset$ כלומר זוגות קטעים פתוחים זרים בזוגות וניתן לכתוב $U = \bigcup_{x \in U} C_x$. $\square$

סעיף ב'

נראה כי U היא איחוד של אוסף בן־מנייה של קטעים פתוחים זרים בזוגות.

הוכחה: יהי $\mathcal{J} = \{I_\alpha\}_{\alpha \in A}$ אוסף הזוגות הזרים בזוגות כך ש־I_α $U = \bigcup_{\alpha \in A} I_\alpha$.

יהי $\alpha \in A$ ונסתכל על $I_\alpha \neq \emptyset$ קטע פתוח, מצפיפות $\mathbb{Q}$ ב־$\mathbb{R}$ נובע כי יש $q_\alpha \in \mathbb{Q}$ כך ש־$q_\alpha \in I_\alpha$.

נגדיר $f : A \to \mathbb{Q}$ על־ידי $f(\alpha) = q_\alpha$ מספר רציונלי ב־I_α וזאת התאמה חד־חד ערכית מכך שהקטעים זרים בזוגות.

אז f מעידה על כך ש־$|A| \leq |\mathbb{Q}| = \aleph_0$ ואם $|A| = n \in \mathbb{N}$ סיימנו ואחרת אם A אינסופית אז ראינו שהיא בת־מנייה וסיימנו. $\square$

סעיף ג'

נסיק כי $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ נוצרת על־ידי אוסף הקטעים הפתוחים ב־$\mathbb{R}$.

הוכחה: במילים אחרות נרצה להראות ש־$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{J})$ כאשר $\mathcal{J}$ כמקודם אוסף כל הקטעים הפתוחים ב־$\mathbb{R}$ ונראה באמצעות הכלה דו־כיוונית.

$\sigma(\mathcal{J}) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$: כל $I \in \mathcal{J}$ הוא קבוצה פתוחה ומהטופולוגיה הסטנדרטית על $\mathbb{R}$ אנחנו יודעים ש־$\mathcal{J} \subseteq \{U \mid U \subseteq \mathbb{R}, U \text{ is open}\}$ ואנחנו יודעים שאלגברת בורל היא ה־σ־אלגברה הקטנה ביותר (ביחס ההכלה) שמכילה את כל הקבוצות הפתוחות ב־$\mathbb{R}$ ולכן מכילה את הקטעים הפתוחים וכן $\sigma(\mathcal{J})$ היא ה־σ־אלגברה הקטנה ביותר ביחס ההכלה שמכילה את $\mathcal{J}$ נקבל את ההכלה.

$\sigma(\mathcal{J}) \supseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$: מהסעיף הקודם אנחנו יודעים שלכל $n \in \mathbb{N}$, I_n הוא קטע פתוח ומכך ש־$I_n \in \mathcal{J}$ נובע כי $I_n \in \sigma(\mathcal{J})$ ומהגדרת ה־σ־אלגברה לאיחוד בן־מנייה נקבע ש־$U = \bigcup(n=1)^\infty I_n \in \sigma(\mathcal{J})$.

כלומר, $\sigma(\mathcal{J})$ היא σ־אלגברה שמכילה את כל הקבוצות הפתוחות, אבל σ־ת אלגברה בורל היא המינימלית ביחס ההכלה שמכילה את כל הקבוצות הפתוחות ולכן קיבלנו את ההכלה. $\square$

סעיף ד'

הוכחתי.

שאלה 3

תהיי $f : X_1 \to X_2$ פונקציה בין שתי קבוצות ותהיי $\mathcal{M}_2$, σ־אלגברה על X_2. נוכיח

$$\mathcal{M}_1 = \{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{M}_2\}$$

היא σ־אלגברה על X_1.

הוכחה: כדי להגיד ש־$\mathcal{M}_1$ היא σ־אלגברה, עלינו להראות שהבאים מתקיימים:

1. $X_1 \in \mathcal{M}_1$ – נתון ש־$\mathcal{M}_2$ היא σ־אלגברה על X_2 ולכן $X_2 \in \mathcal{M}_2$ ומהגדרת הפונקציה, $f^{-1}(X_2) = X_1$ ולכן $X_1 \in \mathcal{M}_2$.
2. $\mathcal{M}_1$ סגורה תחת לקיחת משלים – יהי $E \in \mathcal{M}_1$ ונרצה להראות ש־$E^c \in \mathcal{M}_1$.
   $E \in \mathcal{M}_1$ כלומר קיים $A \in \mathcal{M}_2$ כך ש־$E = f^{-1}(A)$, מתקיים

$$E = f^{-1}(A) \iff E^c = \left(f^{-1}(A)\right)^c = X_1 \setminus f^{-1}(A)$$

לכל $x \in X_1$ מתקיימת שרשרת הגרירות הבאה

$$x \in X_1 \setminus f^{-1}(A) \iff x \notin f^{-1}(A) \iff f(x) \notin A \iff f(x) \in A^c \iff x \in f^{-1}(A^c)$$

כלומר

$$(\star)\ E^c = f^{-1}(A^c)$$

מהיות $\mathcal{M}_2$ σ־אלגברה נובע כי $A^c \in \mathcal{M}_2$ ויחד עם $(\star)$ נובע $E^c \in \mathcal{M}_1$.

3. $\mathcal{M}_1$ סגורה תחת איחודים בת־מנייה – תהיי $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{M}_1$ ונרצה להראות ש־$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{M}_1$.
   מכך ש־$\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{M}_1$ נובע כי קיימים $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{M}_2$ בהתאמה כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $f^{-1}(A_n) = E_n$.
   מתקיים

$$f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A_n)$$

שכן לכל $x \in X_1$ מתקיים

$$x \in f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \iff f(x) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \iff \exists n \in \mathbb{N}, f(x) \in A_n \iff \exists n, x \in f^{-1}(A_n) \iff x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A_n)$$

ובמקרה שלנו מתקיים

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A_n) = f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

היות ו־$\mathcal{M}_2$ היא σ־אלגברה מתקיים $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}_2$ ולכן $f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \in \mathcal{M}_1$.

$\square$

שאלה 4

נניח כי (X,d) מרחב מטרי כך שאוסף הקבוצות הפתוחות בו הוא גם σ־אלגברה.
נוכיח כי זה מרחב דיסקרטי.

הוכחה: נסמן

$$\tau=\{U\subseteq X\mid U\text{ is open}\}$$

מהנתון, τ היא σ־אלגברה, כלומר $X\in\tau$ ויש סגירות תחת לקיחת משלים ואיחוד בן־מנייה.
על־מנת שהמרחב יהיה דיסקרטי עלינו להראות שכל $W\subseteq X$ היא פתוחה או לחילופין להראות ש־$\tau=\mathcal{P}(X)$.
השתכנעתי מתרגיל הרשות בטופולוגיה שבמרחב מטרי אוסף הקבוצות הפתוחות הוא טופולוגיה ולכן τ טופולוגיה, כלומר $X,\emptyset\in\tau$ וסגורה לחיתוך סופי ולאיחודים שרירותיים וכמובן $\tau\subseteq\mathcal{P}(X)$.
מהיות τ σ־אלגברה נובע כי עבור $U\in\tau$ מתקיים ש־U פתוחה מהגדרה ו־$U^c\in\tau$, אבל המשלים של קבוצה פתוחה הוא קבוצה סגורה ולכן כל קבוצה פתוחה היא גם קבוצה סגורה.
ניתן לכתוב $W=\bigcup_{x\in W}\{x\}$ כלומר לכתוב את W כאוסף היחידונים שמרכיבים אותו וכל יחידון במרחב מטרי הוא קבוצה סגורה וממה שראינו לעיל הוא גם קבוצה פתוחה.
באינפי3 ראינו שאיחוד כלשהו של קבוצות פתוחות הוא קבוצה פתוחה ולכן W קבוצה פתוחה, אבל נשים לב שזה נובע גם מההגדרות שלנו:

1. אם W בת־מנייה, מהיות τ σ־אלגברה היא סגורה לאיחוד בן־מנייה וסיימנו.
2. אם W לא בת־מנייה, מהיות τ טופולוגיה היא סגורה לאיחוד שרירותי ולכן שוב סיימנו

ראינו שכל $W\subseteq X$ היא קבוצה פתוחה ולכן המרחב דיסקרטי. $\square$

שאלה 5

תהיי X קבוצה ונניח ש־$\mathcal{M}$ היא σ־אלגברה על X שאיננה סופית.

סעיף א'

נראה כי $\mathcal{M}$ מכילה מספר אינסופי של קבוצות זרות.

הוכחה: מכך ש־$\mathcal{M}$ אינסופית, קיים $A_1 \in \mathcal{M}$ כך ש־$A_1 \neq \emptyset, A_1 \neq X$ ומהיות $\mathcal{M}$ σ־אלגברה, $A_1^c \in \mathcal{M}$ וכמובן $X \in \mathcal{M}$ וכן $\emptyset \in \mathcal{M}$.
מאינסופיות $\mathcal{M}$ נבנה כך סדרה $A_1, A_2, \ldots$ ונגדיר

$$\begin{gathered}
B_1 = A_1, \\
B_2 = A_2 \setminus A_1 = A_2 \cap A_1^c = A_2 \cap A_1^c \underset{\text{כללי דה־מורגן}}{=} (A_2^c \cup (A_1^c)^c)^c = (A_2^c \cup A_1)^c, \\
B_3 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2) = A_3 \setminus B_2, \\
\vdots
\end{gathered}$$

מהיות $\mathcal{M}$ σ־אלגברה, היא סגורה תחת לקיחת משלים כלומר $A_2^c \in \mathcal{M}$ ומסגירות תחת איחוד בן־מנייה (ולכן גם איחוד סופי), $A_2^c \cup A_1 \in \mathcal{M}$
ושוב מסגירות תחת משלים, $(A_2^c \cup A_1)^c \in \mathcal{M}$.
כלומר $\{B_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{M}$ ומבנייה לכל $n, m \in \mathbb{N}$ מתקיים $B_n \cap B_m = \emptyset$.
אם בשלילה נניח ש־$\mathcal{M}$ לא מכילה מספר אינסופי של קבוצות זרות, היה נובע כי קיים $k \in \mathbb{N}$ כך שלכל $\mathbb{N} \ni K > k$ מתקיים $B_K = \emptyset$, כלומר

$$B_K = A_K \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_{K-1}) = \emptyset \implies A_K \subseteq A_1 \cup \ldots \cup A_{K-1}$$

כלומר החל ממקום מסויים $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה קבועה, דהיינו $\mathcal{M}$ היא σ־אלגברה סופית, בסתירה לנתון.

$\square$

סעיף ב'

נראה כי $\mathcal{M}$ אינה בת־מנייה.

הוכחה: מהסעיף הקודם נובע שיש מספר אינסופי של קבוצות זרות, נגדירן $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{M}$.
היות ו־$\mathcal{M}$ σ־אלגברה נובע שהיא סגורה תחת איחוד בן־מנייה, כלומר בהינתן $S \subseteq \mathbb{N}$ מתקיים $\bigcup_{n \in S} A_n \in \mathcal{M}$ (גם אם $S = \mathbb{N}$).
מהזרות נובע כי כל אוסף איחודים שנבחר יהיה שונה מאיחוד אחר, ומטעמי עוצמה אנחנו יודעים שמתקיים $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = 2^{\aleph_0}$, כלומר עוצמת תתי־הקבוצות של $\mathbb{N}$ היא איננה בת־מנייה ולכן בפרט מתקיים $|\mathcal{M}| \geq 2^{\aleph_0}$, שכן יש לנו כמות לא בת־מנייה של איחודים נוספים שנוכל לעשות.

$\square$