פתרון מטלה 07 — פונקציות מרוכבות, 80519

30 בדצמבר 2025

שאלה 1

נניח ש־G תחום כוכבי ונוכיח שלכל לכל $f \in \mathrm{Hol}(G)$ יש פונקציה קדומה.
נסיק את משפט קושי בתחום כוכבי: תהיי S תחום כוכבי חסום עם שפה C^1 למקוטעין בעלת אורך סופי (כלומר, ניתן לתאר את השפה בעזרת מסילה גזירה ברציפות ולמקוטעין) ו־G סביבה של S. אז לכל $f \in \mathrm{Hol}(G)$ מתקיים $\int_{\partial S} f \, \mathrm{d}\gamma = 0$.
תזכורת (קבוצה כוכבית): קבוצה $S \subseteq \mathbb{R}^n$ נקראת כוכבית אם קיים $x_0 \in S$ כך שלכל $x \in S$ מתקיים $[x_0, x] \subseteq S$.
הוכחה: יהי $z_0 \in G$ עבורו לכל $z \in G$ מתקיים $[z_0, z] \subseteq G$, נעזר ברמז ונגדיר

$$F(z) = \int_{[z_0,z]} f(z) \, \mathrm{d}z$$

מהיות f אנליטית, אז עבור $z_1 \in G$ ו־$\varepsilon > 0$ יש $\delta > 0$ כך ש־$B_\delta(z_1) \subseteq G$ ומתקיים לכל $z_2 \in B_\delta(z_1)$

$$(\star) \ |f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$$

ולכן ניקח $z_2 \in B_\delta(z_1)$ ונקבל $[z_1, z_2] \subseteq B_\delta(z_1) \subseteq G$.
ניקח משולש T להיות המשולש עם הקודקודים z_0, z_1, z_2.
נשים לב שאם $y \in T$, יש $x \in [z_1, z_2]$ כך ש־$y \in [z_0, x]$, אבל $x \in G$ ולכן $[z_0, x] \subseteq G$ ו־$y \in G$.
לכן מתקיימים כל התנאים למשפט קושי במשולש ומתקיים

$$\int_{\partial T} f(z) \, \mathrm{d}z = 0$$

נכתוב את המשולש בדרך אחרת מלינארית האינטגרל

$$\int_{[z_0,z_1]} f(z) \, \mathrm{d}z + \int_{[z_1,z_2]} f(z) \, \mathrm{d}z + \int_{[z_2,z_0]} f(z) \, \mathrm{d}z = 0$$

וכן

$$F(z_2) - F(z_1) = \int_{[z_0,z_2]} f(z) \, \mathrm{d}z - \int_{[z_0,z_1]} f(z) \, \mathrm{d}z = -\int_{[z_2,z_0]} f(z) \, \mathrm{d}z - \int_{[z_0,z_1]} f(z) \, \mathrm{d}z = \int_{[z_1,z_2]} f(z) \, \mathrm{d}z$$

ולכן בפרט מתקיים

$$|F(z_2) - F(z_1) - (z_2 - z_1) f(z_1)| = \left| \int_{[z_1,z_2]} (f(z) - f(z_1)) \, \mathrm{d}z \right| \underset{(\star)}{\leq} \left| \int_{[z_1,z_2]} \varepsilon \, \mathrm{d}z \right| = \varepsilon |z_2 - z_1|$$

אבל זה בידיוק אומר

$$F'(z_1) = \lim_{z_2 \to z_1} \frac{F(z_2) - F(z_1)}{z_2 - z_1} = f(z_1)$$

וזה נכון לכל $z_1 \in G$, כלומר F קדומה של f.
נעבור לחלק השני – הסקה של משפט קושי בתחום כוכבי: תהיי $\gamma : [a, b] \to G$ מסילה סגורה, אז ממה שהוכחנו לעיל מתקיים $f(z) = F'(z)$, אז

$$\int_\gamma f(z) \, \mathrm{d}z = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) \, \mathrm{d}t = \int_a^b F'(\gamma(t)) \gamma'(t) \, \mathrm{d}t \underset{\text{כלל שרשרת}}{=} \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (F(\gamma(t))) \, \mathrm{d}t \underset{\text{המשפט היסודי}}{=} F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0$$

כאשר המעבר האחרון נובע מהיות המסילה מסילה סגורה, כלומר $\gamma(b) = \gamma(a)$.
נסמן $\gamma = \partial S$, מסילה סגורה ורציפה למקוטעין בעלת אורך סופי והטענה נובעת. $\square$

שאלה 2

תהיי $f \in \mathrm{Hol}(B(z_0, R))$ אז לכל $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ולכל $r < R$ ראינו שמתקיים כמסקנה ממשפט קושי

$$|f^n(z_0)| \leq \frac{n!}{r^n} M_{f,z_0}(r)$$

ונניח ש־f הולומורפית. *תזכורת:* בהינתן $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ רציפה, נגדיר $M_{f,z_0}(r) = \max_{z \in B(z_0,r)} |f(z)|$.

סעיף א'

נוכיח שאם f לא קבועה אז לכל z_0 קיים קבוע C כך שלכל r גדול מספיק $m_{f,z_0} \geq C(r+1)$.

הוכחה: נקבע $z_0 \in \mathbb{C}$.

מהיות f לא קבועה, קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש־$f^n(z_0) \neq 0$ נקבע n זה ונקבל לכל $r > 0$

$$|f^n(z_0)| \leq \frac{n!}{r^n} M_{f,z_0}(r) \iff M_{f,z_0}(r) \geq \frac{|f^n(z_0)|}{n!} r^n$$

מהיות $1 \leq n \in \mathbb{N}$ נובע שלכל $r \geq 1$ מתקיים

$$r^n \geq r$$

ולכן במקרה זה מתקיים

$$M_{f,z_0}(r) \geq \frac{|f^n(z_0)|}{n!} r$$

בנוסף עבור $r \geq 1$ מתקיים

$$r \geq \frac{1}{2}(r+1)$$

כלומר

$$M_{f,z_0}(r) \geq \frac{|f^n(z_0)|}{2n!}(r+1)$$

אז אם נסמן

$$C := \frac{|f^n(z_0)|}{2n!}$$

נקבל שעבור r גדול מספיק ובפרט $r \geq 1$ נקבל

$$M_{f,z_0}(r) \geq C(r+1)$$

□

סעיף ב'

נוכיח שאם

$$\lim_{r \to \infty} \frac{\log M_{f,z_0}(r)}{\log(r)} = N < \infty$$

אז $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

הוכחה: מההנחה על הגבול, נובע שלכל $\varepsilon > 0$ קיים R_ε כך שלכל $r > R_\varepsilon$ מתקיים

$$N - \varepsilon < \frac{\log M_{f,z_0}(r)}{\log(r)} < N + \varepsilon$$

כלומר

$$\left(\log M_{f,z_0}(r)\right) < (N+\varepsilon)\log(r) \Longrightarrow M_{f,z_0}(r) < r^{N+\varepsilon}$$

ומהמסקנה מנוסחת האינטגרל של קושי, לכל $n \in \mathbb{N}$ ו־$r > 0$

$$|f^n(z_0)| \leq \frac{n!}{r^n} M_{f,z_0}(r)$$

כלומר מאי־השיוויון הנתון מהגבול

$$|f^n(z_0)| \leq \frac{n!}{r^n} r^{N+\varepsilon} = n! r^{N+\varepsilon-n}$$

כאשר $r > R_\varepsilon$ ונקבע $n > N$, אז עבור ε קטן דיו נקבל $N + \varepsilon - n < 0$ ונקבל

$$|f^n(z_0)| \leq n! r^{N+\varepsilon-n} \xrightarrow[r \to \infty]{} 0 \Longrightarrow f^n(z_0) = 0 \ \forall n > N$$

אבל כל הנגזרות מסדר גדול מ־N מתאפסות ב־z_0 אז הטור טיילור של f סביב z_0 הוא סופי, כלומר עבור $m \leq N$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{m} a_k (z - z_0)^k$$

כלומר f היא פולינום מדרגה m (כי החל מאינדקס מסויים כל המקדמים הם 0).
לכל פולינום שאיננו אפס ממעלה m, קצב הגדילה חסום על־ידי המונום המוביל, כלומר

$$M_{f,z_0}(r) \sim |a_m| r^m \ \left(\lim_{r \to \infty} \frac{M_{f,z_0}(r)}{|a_m| r^m} = 1 \right)$$

ואם ניקח גבול על הלוגריתם

$$\lim_{r \to \infty} \frac{\log(|a_m| r^m)}{\log(r)} = \lim_{r \to \infty} \frac{\log|a_m| + m \log(r)}{\log(r)} = m$$

אבל מהנתון

$$\lim_{r \to \infty} \frac{\log M_{f,z_0}(r)}{\log(r)} = N$$

כלומר $N = m \in \mathbb{N}$ אבל הפולינום יכול להיות קבוע, אז $N \in \mathbb{N}\{0\}$. $\square$

שאלה 3

יהיו G תחום כוכבי ו־$f \in \mathrm{Hol}(G)$ שלא מתאפסת.
נוכיח שיש ל־f לוגריתם, כלומר קיימת פונקציה $g \in \mathrm{Hol}(G)$ כך ש־$e^{g(z)} = f(z)$.
הוכחה: נעזר ברמז ונגדיר

$$h(z) := \frac{f'(z)}{f(z)}$$

שמוגדרת היטב כי $f \in \mathrm{Hol}(G)$ והחילוק מוגדר היטב כי f איננה מתאפסת ב־G ועל־כן מנה של פונקציות הולומורפיות היא הולומורפית.
משאלה 1 נקבל שקיימת $g_0 \in \mathrm{Hol}(G)$ כך שמתקיים

$$g'(z) = h(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

נעזר בהנחייה ונראה ש־$\frac{e^{g(z)}}{f}$ קבועה על־ידי גזירה (מנה של פונקציות הולומורפיות היא הולומורפית וזה לא מתאפס לפי הנתון):

$$\frac{e^{g(z)} \cdot g'(z) \cdot f(z) - f'(z) \cdot e^{g(z)}}{(f(z))^2} = \frac{e^{g(z)} \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} \cdot f(z) - f'(z) \cdot e^{g(z)}}{(f(z))^2} = \frac{e^{g(z)} \cdot f'(z) - f'(z)e^{g(z)}}{(f(z))^2} = 0$$

אבל G הוא תחום כוכבי ולכן קשיר ולפי טענה שראינו בהרצאה נובע שיש c כך ש־$c = \frac{e^{g(z)}}{f(z)}$.
אבל לכל $z \in G$ מתקיים $f(z) \neq 0$ ולכן $e^{g(z)} = c \cdot f(z)$ ו־$c \neq 0$ ולכן קיים α כך ש־$e^{\alpha} = \frac{1}{c}$, אז אם נגדיר

$$G(z) = g(z) + \alpha \Longrightarrow e^{G(z)} = e^{g(z)+\alpha} = e^{g(z)} \cdot e^{\alpha} = e^{g(z)} \cdot \frac{1}{c} \underset{e^{g(z)} = c \cdot f(z)}{=} \frac{\cancel{c} \cdot f(z)}{\cancel{c}} = f(z)$$

אבל g הולומורפית ו־α קבוע, אז G הולומורפית ב־G ולכן g היא לוגריתם הולומורפי של f, כנדרש. $\square$

שאלה 4

תהיי $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ שלמה, כלומר הולומורפית בכל המישור.

סעיף א'

נוכיח כי f קבועה תחת ההנחה שלכל $z\in\mathbb{C}$ מתקיים $Re(f(z))\leq 0$.

הוכחה: ניקח $g(z)=e^z$, פונקציה הולומורפית שעומדת בתנאי הרמז.

מתקיים

$$\left|(g\circ f)(z)\right| = e^{Re(f(z))}\left|e^{i\,Im(f(z))}\right| = e^{Re(f(z))}\cdot 1 \underset{(\star)}{\leq} e^0 = 1$$

כאשר $(\star)$ נובע מההנחה.

אז $g\circ f$ היא פונקציה הולומורפית (כהרכבה של פונקציות הולומורפיות) וחסומה, ולכן אנחנו עומדים בכל תנאי משפט ליוביל ונקבל ש־$g\circ f$ קבועה.

לא ייתכן כי g קבועה שכן g היא פונקציית האקספוננט, ולכן נקבל מכך ש־f חייבת להיות קבועה כדי ש־$g\circ f$ תהיה קבועה.

אז f קבועה, כנדרש. $\square$

סעיף ב'

נוכיח כי f קבועה תחת ההנחה שלכל $z\in\mathbb{C}$ מתקיים $|f(z)|\neq 1$.

הוכחה: f הולומורפית ולכן רציפה ומהנתון ניתן להסיק שמתקיים $|f(z)|>1$ או $|f(z)|<1$ לכל $z\in\mathbb{C}$.

אם $|f(z)|<1$ אז f חסומה ושלמה וממשפט ליוביל סיימנו.

אם $|f(z)|>1$ ולכן גם $\left|\frac{1}{f(z)}\right|<1$ לכל $z\in\mathbb{C}$ ושוב ממשפט ליוביל $\left|\frac{1}{f(z)}\right|$ חסומה ושלמה ולכן קבועה ולכן גם $f(z)$ קבועה. $\square$

סעיף ג'

לכל $z\in\mathbb{C}$ מתקיים $f(z)\notin(-\infty,0]$.

הוכחה: נעזר ברמז: ל־f יש לוגריתם ולכן שורש, אז ניקח $g(z)=z^i=e^{i\,Log(z)}$ ולכן

$$\left|(g\circ f)(z)\right| = \left|e^{i\log|z|-Arg(z)}\right| = \left|e^{i\log|z|}\right|\cdot\left|e^{-Arg(z)}\right| \leq 1\cdot e^{\pi}$$

אז בדומה לסעיף א', $g\circ f$ הולומורפית, שלמה וחסומה ולכן ממשפט ליוביל קבועה ומשיקולים דומים לסעיף א', f קבועה. $\square$