פתרון מטלה 11 — תורת המידה, 80517

10 בינואר 2026

שאלה 1

נשלים את הוכחת הלמה מהכיתה – יהיו μ, λ שתי מידות רדון על $\mathbb{R}^d$ ויהיו $0 < t < \infty$.
אם $A \subset \mathbb{R}^d$ היא קבוצת בורל המקיימת לכל $x \in A$

$$\overline{D}(\mu, \lambda, x) \geq t$$

אז

$$\mu(A) \geq t \cdot \lambda(A)$$

הוכחה: $\square$

שאלה 2

שאלה 3

משפט שטיינהאוס: תהיי $A \subseteq \mathbb{R}^d$ ונגדיר את ההפרש של A להיות

$$\mathcal{D} := \{x - y \mid x, y \in A\}$$

נסמן ב־λ את מידת לבג על $\mathbb{R}^d$.

סעיף א'

נוכיח כי אם $\lambda(A) > 0$ אז קיימת $\delta > 0$ כך ש־$B_\delta(0) \subset \mathcal{D}(A)$.

הוכחה: ראשית נבחין כי ניתן להניח ש־$\lambda(A) < \infty$: כי אם $\lambda(A) = \infty$ אז נבחר $K \subset A$ חסומה כך שמתקיים $0 < \lambda(K) < \infty$ ואם נוכיח עבור K אז נקבל $B_\delta(0) \subset \mathcal{D}(K) \subset \mathcal{D}(A)$.
אז נניח $0 < \lambda(A) < \infty$.
נעזר ברמז ונגדיר $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ על־ידי

$$g(x) = \lambda(A \cap (A + x)) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_A(y)\mathbb{1}_A(y - x)\,\mathrm{d}y$$

נבחין כי מתקיים

$$g(0) = \lambda(A \cap (A + 0)) = \lambda(A \cap A) = \lambda(A) > 0$$

וכן ש־$g(x)$ רציפה: בתרגיל 5 ראינו ש־λ היא אינווריאנטית להזזות ובאופן דומה גם ב־$\mathbb{R}^d$ נקבל שהיא אינווריאנטית להזזות.
TODOOOOOOOOOOOOOOOOOO תסיימי את הרציפות מהיות $\lambda(A) > 0$ נובע שיש $\delta > 0$ כך שמתקיים לכל $|r| < \delta$

$$\lambda(A \cap (A + r)) > 0$$

כלומר $A \cap (A + r) \neq \emptyset$ לכל $r \in B_\delta(0)$ וזה בדיוק אומר $B_\delta(0) \subset \mathcal{D}(A)$:
כי אם $g(x) > 0$ אז $A \cap (A + r) \neq \emptyset$ כלומר קיים $a \in A \cap (A + r)$ כך ש־$a \in A + r$ כלומר יש $a' \in A$ כך שמתקיים

$$a = a' + r \iff r = a - a' \in \mathcal{D}(A)$$

$\square$

סעיף ב'

נשתמש בסעיף הקודם כדי להראות שאם $A \subset \mathbb{R}^d$ היא קבוצה מדידה שמהווה תת־חבורה לא טריוויאלית (ביחס לפעולת החיבור) אז $\lambda(A) = 0$.

הוכחה: תהיי A קבוצה מדידה שמהווה תת־חבורה לא טריוויאלית ביחס לפעולת החיבור ונניח בשלילה $\lambda(A) > 0$.
מהסעיף הקודם נובע שקיימת $\delta > 0$ כך ש־$B_\delta(0) \subset \mathcal{D}(A)$.
היות ו־A היא תת־חבורה נובע כי $x - y \in A$ לכל $x, y \in A$ ולכן $\mathcal{D}(A) = A$, כלומר $B_\delta(0) \subset A$.
נטען כי $A = \mathbb{R}^d$: ואכן, לכל $x \in \mathbb{R}^d$ ניקח $n \in \mathbb{N}$ גדול דיו כך ש־$\frac{x}{n} \in B_\delta(0) \subset A$ ומהיות A תת־חבורה

$$x = n \cdot \frac{x}{n} \in A$$

ולכן $A = \mathbb{R}^d$ אבל זה אומר ש־A היא תת־חבורה טריוויאלית, בסתירה. $\square$

שאלה 4

תהיי μ מידת רדון על $\mathbb{R}^d$ ונסמן ב־$P \subseteq \mathbb{R}$ את

$$P := \{r \mid \mu(\partial B_r(0)) > 0\}$$

כלומר את קבוצת הרדיוסים r עבורם הספירה מרדיוס r שמרכזה בראשית הצירים מקבלת מידה חיובית.

סעיף א'

נניח ש־P לא בת־מנייה. לכל $n \in \mathbb{N}$ נגדיר $P_n \subset P$ להיות קבוצת הרדיוסים r עבורם

$$\mu(\partial B_r(0)) > \frac{1}{n}$$

ונראה כי יש n, $R > 0$ כך שהקבוצה $P_n \cap (0, R)$ אינסופית.