פתרון מטלה 05 — אנליזה פונקציונלית, 80417

21 במאי 2025

שאלה 1

יהי $T : C[0,1] \to \mathbb{R}$ פונקציונל לינארי רציף ונניח שלכל $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ מתקיים $T(x^k) = \frac{1}{k+1}$.
נוכיח שלכל $f \in C[0,1]$ מתקיים

$$T(f) = \int_0^1 f(x)dx$$

הוכחה: נוכיח בהתחלה את הטענה עבור פולינומים ולאחר מכן נוכיח אותה עבור פונקציה $f \in C[0,1]$ באמצעות משפט הקירוב של ויירשטראס.
יהי $p \in C[0,1]$ פולינום ולכן הוא מהצורה $p = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ מתקיים:

$$T(p) = T\left(\sum_{i=0}^n a_i x^i\right) \underset{T \text{ פונקציונל לינארי}}{=} \sum_{i=0}^n a_i T(a^i) = \sum_{i=0}^n = \frac{a_i}{i+1}$$

מצד שני, מתקיים

$$T(p) = \int_0^1 \sum_{i=0}^n a_i x^i = \sum_{i=0}^n a_i \int_0^1 x^i = \sum_{i=0}^n a_i \cdot \left[\frac{x^{i+1}}{i+1}\right]_0^1 = \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{i+1} = T(p)$$

אז הטענה נכונה עבור פולינומים. יהי $f \in C[0,1]$, ממשפט הקירוב של ויירשטראס לכל $\varepsilon > 0$ קיימת סדרת פולינומים $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N < n \in \mathbb{N}$ ולכל $x \in [0,1]$ מתקיים

$$|f(x) - p_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

כעת, T פונקציונל לינארי ולכן הוא חסום, משמע לכל $g \in C[0,1]$ קיים $M > 0$ כך שיתקיים

$$|T(g)| \leq M\|g\|_\infty \underset{(f-p_n) \text{ רציפה}}{\Rightarrow} |T - p_n| \leq M\|f - p_n\|_\infty$$

אבל קיים $N' \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N' < n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$\|f - p_n\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2M} \Rightarrow |T - p_n| \leq M\frac{\varepsilon}{2M} = \frac{\varepsilon}{2}$$

נבחר $N_{\max} = \max\{N, N'\}$ ולכל $N_{\max} < n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$|f(x) - p_n(x)| < \varepsilon,\ |T(f - p_n)| < \varepsilon$$

ולכן מתקיים

$$\left|T(f) - \int_0^1 f(x)dx\right| = \left|T(f) - T(p_n) + T(p_n) - \int_0^1 f(x)dx\right| = \left|T(f) - T(p_n) - \int_0^1 p_n(x)dx - \int_0^1 f(x)dx\right|$$

$$= \left|T(f) - T(p_n) + \int_0^1 (p_n(x) - f(x))dx\right| \leq |T(f) - T(p_n)| + \int_0^1 |p_n(x) - f(x)|dx$$

$$\underset{T \text{ פונקציונל לינארי}}{=} |T(f - p_n)| + \int_0^1 |p_n(x) - f(x)|dx < \frac{\varepsilon}{2} + \int_0^1 \frac{\varepsilon}{2}dx = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

אז בסך־הכל לכל $\varepsilon > 0$ מתקיים

$$0 \leq \left|T(f) - \int_0^1 f(x)dx\right| < \varepsilon \Rightarrow 0 \leq \left|T(f) - \int_0^1 f(x)dx\right| \leq 0 \underset{\text{כלל הכריך}}{\Rightarrow} \left|T(f) - \int_0^1 f(x)dx\right| = 0$$

זאת־אומרת

$$T(f) = \int_0^1 f(x)dx$$

$\square$

שאלה 2

נוכיח שאוסף הפולינומים צפוף במרחב $C^{k[0,1]}$ בנורמה C^k. כלומר, שלכל $f \in C^{k[0,1]}$ קיימת סדרת פולינומים $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך שמתקיים

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{k}\left\|f^{(j)}-p_n^{(j)}\right\|_\infty=0$$

הוכחה: באינדוקציה על k.

נשים לב שעבור $k=0$, זה בעצם משפט הקירוב של ויירשטראס וזה מכסה את בסיס האינדוקציה.

נניח שהטענה נכונה עבור $k-1$ ונרצה להראות נכונות עבור k.

יהי $\varepsilon>0$ ותהיי $f \in C^{k[0,1]}$ ואז $f' \in C^{k-1}[0,1]$ ומהנחת האינדוקציה קיימת סדרת פולינומים $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך שמתקיים

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{k-1}\left\|f^{(j)}-q_n^{(j)}\right\|_\infty=0 \iff \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{k}\left\|f^{(j-1)}-q_n^{(j-1)}\right\|_\infty$$

אז נגדיר לכל $n\in\mathbb{N}$ ו־$x\in[0,1]$

$$p_n(x):=f(0)+\int_0^x q_n(t)dt$$

כמובן ש־p_n הוא פולינום כסכום פולינומים (אינטגרל של פולינום הוא פולינום), ומתקיים $p_n(x)'=q_n(x)$. בפרט, לכל $1\le j\le k$ מתקיים

$$p_n^{(j)}(x)=q_n^{(j-1)}(x)<\frac{\varepsilon}{2}$$

וזה גורר שמתקיים

$$\sum_{j=1}^{k}\left\|f^{(j)}-q_n^{(j-1)}\right\|_\infty=\sum_{j=1}^{k}\left\|f^{(j)}-p_n^{(j)}\right\|_\infty<\frac{\varepsilon}{2}$$

נשים לב שמתקיים

$$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)dt=f(0)+f(x)-f(0)=f(x)$$

ואז מתקיים

$$|f(x)-p_n(x)|=\left|\cancel{f(0)}+\int_0^x f'(t)dt-\left(\cancel{f(0)}+\int_0^x q_n(t)dt\right)\right|$$

$$=\left|\int_0^x (f'(t)-q_n(t))dt\right|\le\int_0^x|f'(t)-q_n(t)|dt\underset{\text{הנחת האינדוקציה}}{\le}\int_0^x\sum_{j=1}^{k}\left\|f^{(j)}-q_n^{(j-1)}\right\|_\infty dt\le\int_0^x\frac{\varepsilon}{2}dt=\frac{\varepsilon}{2}$$

ולכן גם מתקיים $\|f-p_n\|_\infty<\frac{\varepsilon}{2}$, ולכן לכל $N<n\in\mathbb{N}$ מתקיים

$$\sum_{j=0}^{k}\left\|f^{(j)}-p_n^{(j)}\right\|_\infty=\sum_{j=1}^{k}\left\|f^{(j)}-p_n^{(j)}\right\|+\|f-p_n\|_\infty<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

משמע מתקיים

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{k}\left\|f^{(j)}-p_n^{(j)}\right\|_\infty=0$$

אז קיבלנו שאוסף הפולינומים צפוף במרחב $C^{k[0,1]}$ בנורמה C^k. $\square$

שאלה 3

נתבונן במרחב $C[0,1]$ עם נורמת sup ונסמן $W = \text{Span}\{x, x^2, x^3, ...\}$. נוכיח

$$\overline{W} = \{f \in C[0,1] \mid f(0) = 0\}$$

כלומר, שאם $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ רציפה ומתאפסת בנקודה 0 אז היא גבול במידה שווה של פולינומים עם מקדם חופשי אפס.

הוכחה: בכיוון הראשון, תהיי $f \in C[0,1]$ ותהיי $\{p_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq W$ סדרת פולינומים המתכנסת במידה שווה ל־f משמע $p_n \rightrightarrows f$ ומתקיים $\lim_{n\to\infty} p_n(0) = 0$.

אבל $x \mid p_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$ (כי $W = \text{Span}\{x, x^2, ...\}$) ולכן $p_n(0) = 0$, משמע $f(0) = 0$ (כי מהגדרת ההתכנסות במידה שווה, מכך ש־$p_n(0) = 0$) נקבל $|f(0)| < \varepsilon$ עבור $\varepsilon > 0$ ולכן בהכרח $f(0) = 0$), ולכן $f \in \overline{W}$ ומתקבלת ההכלה $\overline{W} \subseteq \{f \in C[0,1] \mid f(0) = 0\}$.

עבור ההכלה בכיוון השני, יהי $\varepsilon > 0$ ותהיי $f \in C[0,1]$ כך ש־$f(0) = 0$. נרצה להראות ש־$f \in \overline{W}$.

ממשפט הקירוב של ויירשטראס קיימת סדרת פולינומים $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך ש־$p_n \rightrightarrows f$, משמע קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N < n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$\|f(x) - p_n(x)\|_{\infty} < \frac{\varepsilon}{2}$$

נגדיר $\{q_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C[0,1]$ על־ידי $q_n(x) = p_n(x) - p_n(0)$ זה הפרש פולינומים ולכן פולינום ומתקיים $q_n(0) = p_n(0) - p_n(0) = 0$ ולכן $q_n \in W$.

נרצה להראות ש־$f \in \overline{W}$, ונשים לב שלכל $x \in [0,1]$ מתקיים

$$\begin{aligned}|q_n(x) - f(x)| &= |p_n(x) - p_n(0) - f(x)| = |p_n(x) - f(x) - (p_n(0) - 0)| = |p_n(x) - f(x) - (p_n(0) - f(0))| \\ &\leq |p_n(x) - f(x)| + |p_n(0) - f(0)| \leq \|p_n(x) - f(x)\|_{\infty} + \|p_n(0) - f(0)\|_{\infty} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

זאת־אומרת, קיים פולינומים $q_n \in W$ כך שמתקיים $f \rightrightarrows q_n$ ולכן $f \in \overline{W}$.

הראינו הכלה דו־כיוונית ולכן $\overline{W} = \{f \in C[0,1] \mid f(0) = 0\}$. $\square$

שאלה 4

יהי (K,ρ) מרחב מטרי קומפקטי. נראה כ־$\mathrm{Lip}(K)$ צפופה ב־$C(K)$.

הוכחה: ראינו שזו אלגברה של פונקציות רציפות ולכן נותר רק להראות שהיא מפרידה נקודות ולא מתאפסת ב־K.

לפי הגדרה, מתקיים

$$\mathrm{Lip}(K)=\{f\in C[K,\mathbb{R}]\mid \exists L\geq 0\ \forall x,y,\in K,\ |f(x)-f(y)|\leq L\cdot\rho(x,y)\}$$

יהיו $x,y\in K$ כך ש־$x\neq y$ ונראה שקיימת $f\in\mathrm{Lip}(K)$ כך ש־$f(x)\neq f(y)$.

נגדיר $f:K\to\mathbb{R}$ על־ידי $f(t)=\rho(t,x)$. מטריקה היא פונקציה רציפה ובמקרה זה היא 1־ליפשיצית מאי־שיוויון המשולש, ולכן $f\in\mathrm{Lip}(K)$.

מהגדרת המטריקה נובע ש־$t=x \iff f(t)=\rho(t,x)=0$, אבל הנחנו ש־$x\neq y$ ולכן בהכרח $\rho(x,y)\neq 0$ ולכן $f(y)\neq 0$ ו־f מפרידה בין x,y.

נשאר להראות ש־$\mathrm{Lip}(K)$ לא מתאפסת ב־K. נגדיר $f:K\to\mathbb{R}$ על־ידי $f(x)=1$, זוהי פונקציה קבועה וכל פונקציה קבועה היא 0־ליפשיצית ולכן $f\in\mathrm{Lip}(K)$ ולכל $x\in K$ מתקיים $f(x)\neq 0$ ולכן f אינה מתאפסת ב־K.

אז (K,ρ) מרחב מטרי קומפקטי, $\mathrm{Lip}(K)$ אלגברה, מפרידה נקודות ואינה מתאפסת באף נקודה ולכן ממשפט סטון־ויירטשראס נקבל שמתקיים $\overline{\mathrm{Lip}(K)}=C(K)$, ולכן $\mathrm{Lip}(K)$ צפופה ב־$C(K)$. □