פתרון מטלה 01 — תורת המידה, 80517

23 באוקטובר 2025

שאלה 1

תהיי X קבוצה לא ריקה.

סעיף א'

תהיי $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ כך ש־$X \in \mathcal{A}$ ולכל $E_1, E_2 \in \mathcal{A}$ מתקיים $E_1 \setminus E_2 \in \mathcal{A}$ $(\star)$.
נוכיח כי $\mathcal{A}$ היא אלגברה על X.

הוכחה: כדי שנגיד ש־$\mathcal{A}$ היא אלגברה על X צריכים להתקיים הבאים:

1. $X \in \mathcal{A}$
2. $\mathcal{A}$ סגורה תחת לקיחת משלים
3. $\mathcal{A}$ סגורה תחת איחודים סופיים

$X \in \mathcal{A}$ נתון, נבחן את שתי התכונות האחרות:
סגורה תחת לקיחת משלים: יהי $E \in \mathcal{A}$ ונרצה להראות ש־$E^c \in \mathcal{A}$. היות ו־$X \in \mathcal{A}$ מהנתון $(\star)$ נקבל שמתקיים $E^c = X \setminus E \in \mathcal{A}$ וקיבלנו סגירות תחת לקיחת משלים.
סגורה תחת איחודים סופיים: תהיינה $E_1, E_2 \in \mathcal{A}$ ונרצה להראות ש־$E_1 \cup E_2 \in \mathcal{A}$.
מכללי דה־מורגן מתקיים $E_1 \cup E_2 = (E_1^c \cap E_2^c)^c$ וכן $E_1^c \cap E_2^c = E_1^c \setminus E_2$ מהגדרת החיתוך והמשלים.
ראינו ש־$\mathcal{A}$ סגורה תחת לקיחת משלים ולכן $E_1^c \in \mathcal{A}$ ולפי $(\star)$ מתקיים $E_1^c \setminus E_2 \in \mathcal{A}$ וכן מתקיים גם $(E_1^c \setminus E_2)^c \in \mathcal{A}$.
מכללי דה־מורגן שראינו לעיל מתקיים $E_1 \cup E_2 = (E_1^c \cap E_2^c)^c = (E_1^c \setminus E_2)^c$ וזה בידיוק אומר ש־$E_1 \cup E_2 \in \mathcal{A}$, כלומר $\mathcal{A}$ סגורה תחת איחודים סופיים.
שלושת התנאים מתקיימים ולכן $\mathcal{A}$ היא אלגברה. $\square$

סעיף ב'

תהיינה $(\mathcal{A}_n)_{n=1}^{\infty}$ אלגבראות על X כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $\mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{A}_{n+1}$.
נוכיח שמתקיים $\mathcal{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$ היא אלגברה על $\mathcal{A}$.
הוכחה: $X \in \mathcal{A}$: היות ו־$\mathcal{A}_1$ אלגברה על X נובע כי $X \in \mathcal{A}_1$ ומכך ש־$\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$ נובע כי $X \in \mathcal{A}$.
סגירות תחת לקיחת משלים: יהי $E \in \mathcal{A}$, נרצה להראות ש־$E^c \in \mathcal{A}$.
מכך ש־$E \in \mathcal{A}$ נובע כי קיים $k \in \mathbb{N}$ מינימלי כך ש־$E \in \mathcal{A}_k$.
$\mathcal{A}_k$ היא אלגברה ולכן סגורה ללקיחת משלים ולכן $E^c \in \mathcal{A}_k$ ומכך ש־$\mathcal{A}_k \subseteq \mathcal{A}$ נובע כי $E^c \in \mathcal{A}$ וקיבלנו סגירות תחת לקיחת משלים.
סגירות תחת איחודים סופיים: תהיינה $E_1, E_2 \in \mathcal{A}$ ולכן קיימים $n, m \in \mathbb{N}$ כך שמתקיים ללא הגבלת הכלליות $E_1 \in \mathcal{A}_n, E_2 \in \mathcal{A}_m$.
נבחר $k = \max(n, m)$ ולכן מהנתון על השרשרת העולה של הכלות נקבל ש־$E_1, E_2 \in \mathcal{A}_k$, אבל $\mathcal{A}_k$ היא אלגברה ולכן סגורה תחת איחודים סופיים, כלומר $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{A}_k$, אבל $\mathcal{A}_k \subseteq \mathcal{A}$ מהגדרת האיחוד ולכן $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{A}$ וקיבלנו ש־$\mathcal{A}$ סגורה תחת איחודים סופיים.
שלושת התנאים מתקיימים ולכן $\mathcal{A}$ היא אלגברה. $\square$

סעיף ג'

נראה כי הסעיף הקודם אינו נכון עבור σ־אלגבראות. כלומר, נראה שאיחוד עולה של σ־אלגבראות אינו בהכרח σ־אלגברה.
הוכחה: TODOOOOOOOOOOOOOOOOOOO $\square$

שאלה 2

נסמן ב־$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ את **σ־אלגברת בורל על** $\mathbb{R}$. תהיי $U \subseteq \mathbb{R}$ פתוחה.

סעיף א'

נראה כי U ניתנת להצגה כאיחוד של אוסף של קטעים פתוחים זרים בזוגות.

הוכחה: **TODOOOOOOOOOOOOOOOOOO** $\square$

סעיף ב'

נראה כי U היא איחוד של אוסף בן־מנייה של קטעים פתוחים זרים בזוגות.

הוכחה: **TODOOOOOOOOOOOOOOOOOO** $\square$

סעיף ג'

נסיק כי $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ נוצרת על־ידי אוסף הקטעים הפתוחים ב־$\mathbb{R}$.

הוכחה: **TODOOOOOOOOOOOOOOOOOO** $\square$

סעיף ד'

הוכחתי.

שאלה 3

תהיי $f : X_1 \to X_2$ פונקציה בין שתי קבוצות ותהיי $\mathcal{M}_2$, σ־אלגברה על X_2. נוכיח

$$\mathcal{M}_1 = \{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{M}_2\}$$

היא σ־אלגברה על X_1.

הוכחה: כדי להגיד ש־$\mathcal{M}_1$ היא σ־אלגברה, עלינו להראות שהבאים מתקיימים:

1. $X_1 \in \mathcal{M}_1$ – נתון ש־$\mathcal{M}_2$ היא σ־אלגברה על X_2 ולכן $X_2 \in \mathcal{M}_2$ ומהגדרת הפונקציה, $f^{-1}(X_2) = X_1$ ולכן $X_1 \in \mathcal{M}_2$.
2. $\mathcal{M}_1$ סגורה תחת לקיחת משלים – יהי $E \in \mathcal{M}_1$ ונרצה להראות ש־$E^c \in \mathcal{M}_1$.
   $E \in \mathcal{M}_1$ כלומר קיים $A \in \mathcal{M}_2$ כך ש־$E = f^{-1}(A)$, מתקיים

$$E = f^{-1}(A) \Longleftrightarrow E^c = \left(f^{-1}(A)\right)^c = X_1 \setminus f^{-1}(A)$$

לכל $x \in X_1$ מתקיימת שרשרת הגרירות הבאה

$$x \in X_1 \setminus f^{-1}(A) \Longleftrightarrow x \notin f^{-1}(A) \Longleftrightarrow f(x) \notin A \Longleftrightarrow f(x) \in A^c \Longleftrightarrow x \in f^{-1}(A^c)$$

כלומר

$$(\star)\ E^c = f^{-1}(A^c)$$

מהיות $\mathcal{M}_2$ σ־אלגברה נובע כי $A^c \in \mathcal{M}_2$ ויחד עם $(\star)$ נובע $E^c \in \mathcal{M}_1$.

3. $\mathcal{M}_1$ סגורה תחת איחודים בת־מנייה – תהיי $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{M}_1$ ונרצה להראות ש־$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{M}_1$.
   מכך ש־$\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{M}_1$ נובע כי קיימים $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{M}_2$ בהתאמה כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $f^{-1}(A_n) = E_n$.
   מתקיים

$$f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A_n)$$

שכן לכל $x \in X_1$ מתקיים

$$x \in f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \Longleftrightarrow f(x) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Longleftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, f(x) \in A_n \Longleftrightarrow \exists n, x \in f^{-1}(A_n) \Longleftrightarrow x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A_n)$$

ובמקרה שלנו מתקיים

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A_n) = f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

היות ו־$\mathcal{M}_2$ היא σ־אלגברה מתקיים $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}_2$ ולכן $f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \in \mathcal{M}_1$.

$\square$

שאלה 4

נניח כי (X,d) מרחב מטרי כך שאוסף הקבוצות הפתוחות בו הוא גם σ־אלגברה.
נוכיח כי זה מרחב דיסקרטי.

הוכחה: נזכר $\square$

שאלה 5

תהיי X קבוצה ונניח ש־$\mathcal{M}$ היא σ־אלגברה על X שאיננה סופית.

סעיף א'

נראה כי $\mathcal{M}$ מכילה מספר אינסופי של קבוצות זרות.

הוכחה: מכך ש־$\mathcal{M}$ אינסופית, קיים $A_1 \in \mathcal{M}$ כך ש־$A_1 \neq \emptyset, A_1 \neq X$ ומהיות $\mathcal{M}$ σ־אלגברה, $A_1^c \in \mathcal{M}$ וכמובן $X \in \mathcal{M}$ וכן $\emptyset \in \mathcal{M}$.
מאינסופיות $\mathcal{M}$ נבנה כך סדרה $A_1, A_2, \cdots$ ונגדיר

$$B_1 = A_1,$$
$$B_2 = A_2 \setminus A_1 = A_2 \cap A_1^c = A_2 \cap A_1^c \underset{\text{כללי דה־מורגן}}{=} \left(A_2^c \cup (A_1^c)^c\right)^c = (A_2^c \cup A_1)^c,$$
$$B_3 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2) = A_3 \setminus B_2,$$
$$\vdots$$

מהיות $\mathcal{M}$ σ־אלגברה, היא סגורה תחת לקיחת משלים כלומר $A_2^c \in \mathcal{M}$ ומסגירות תחת איחוד בן־מנייה (ולכן גם איחוד סופי), $A_2^c \cup A_1 \in \mathcal{M}$
ושוב מסגירות תחת משלים, $(A_2^c \cup A_1)^c \in \mathcal{M}$.
כלומר $\{B_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{M}$ ומבנייה לכל $n, m \in \mathbb{N}$ מתקיים $B_n \cap B_m = \emptyset$.
אם בשלילה נניח ש־$\mathcal{M}$ לא מכילה מספר אינסופי של קבוצות זרות, היה נובע כי קיים $k \in \mathbb{N}$ כך שלכל $k < K \in \mathbb{N}$ מתקיים $B_K = \emptyset$, כלומר

$$B_K = A_K \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_{K-1}) = \emptyset \Longrightarrow A_K \subseteq A_1 \cup \cdots \cup A_{K-1}$$

כלומר החל ממקום מסויים $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה קבועה, דהיינו $\mathcal{M}$ היא σ־אלגברה סופית, בסתירה לנתון.

□

סעיף ב'

נראה כי $\mathcal{M}$ אינה בת־מנייה.

הוכחה: מהסעיף הקודם נובע שיש מספר אינסופי של קבוצות זרות, נגדירן $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{M}$.
היות ו־$\mathcal{M}$ σ־אלגברה נובע שהיא סגורה תחת איחוד בן־מנייה, כלומר בהינתן $S \subseteq \mathbb{N}$ מתקיים $\bigcup_{n \in S} A_n \in \mathcal{M}$ (גם אם $S = \mathbb{N}$).
מהזרות נובע כי כל אוסף איחודים שנבחר יהיה שונה מאיחוד אחר, ומטעמי עוצמה אנחנו יודעים שמתקיים $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = 2^{\aleph_0}$, כלומר עוצמת תתי־הקבוצות של $\mathbb{N}$ היא איננה בת־מנייה ולכן בפרט מתקיים $|\mathcal{M}| \geq 2^{\aleph_0}$, שכן יש לנו כמות לא בת־מנייה של איחודים נוספים שנוכל לעשות.

□