פתרון מטלה 04 — תורת המידה, 80517

18 בנובמבר 2025

שאלה 1

יהי $(X, \mathcal{A}, \mu)$ מרחב מידה.

סעיף א'

נוכיח כי אם לכל $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות מדידות המתכנסת במידה לפונקציה מדידה f אזי קיימת לה תת־סדרה המתכנסת ל־f כמעט תמיד.

הוכחה: נאמר ש־$f_n \to f$ במידה אם לכל $\varepsilon > 0$ מתקיים $\mu(\{x \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) \to 0$.

נעבוד לפי ההדרכה, ניקח $\varepsilon_k = \frac{1}{k}$ ומההתכנסות במידה קיים n_k אינדקס כך שלכל $m \geq n_k$ מתקיים

$$\mu(\{x \in X \mid |f_m(x) - f(x)| \geq \varepsilon_k\}) > \frac{1}{2^k}$$

ניקח אינדקסים כך ש־$n_k < n_{k+1}$ בצורה הבאה: עבור $k = 1$ ניקח את n_1 ועבור $n_{k+1} > \max(n_k, N_{k+1})$ כאשר N_{k+1} הוא האינדקס שנקבל מההתכנסות עבור ε_{k+1}.

כלומר, $\left(f_{n_k}\right)_{k=1}^{\infty}$ כך שלכל $1 \leq k$ מתקיים $\mu(E_k) < \frac{1}{2^k}$ כאשר $E_k := \left\{x \in X \mid \left|f_{n_k}(x) - f(x)\right| \geq \frac{1}{k}\right\}$.

מתקיים

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$

כאשר זה האחרון הוא טור מתכנס ולכן מהלמה של בורל־קנטלי נקבל $\mu(\lim_{n\to\infty} \sup E_k) = 0$.

אם $x_0 \notin \lim_{n\to\infty} \sup E_k$ אז x_0 שייכת למספר סופי של איברים ב־E_k, ולכן קיים K_0 אינדקס מקסימלי שמכיל אותה ולכל $k \geq K_0$ מתקיים $x_0 \notin E_k$, כלומר

$$\left|f_{n_k}(x) - f(x)\right| < \frac{1}{k}$$

כלומר $f_{n_k}(x) \to f(x)$ לכל x מחוץ לקבוצה ממידה אפס, כלומר $\left(f_{n_k}\right)_{k=1}^{\infty}$ כמעט בכל מקום. $\square$

סעיף ב'

נסיק כי אם סדרת פונקציות f_n מתכנסת כמעט תמיד ל־g_1 וב־L^1 ל־g_2 אזי $g_1 = g_2$ כמעט תמיד.

הוכחה: מהסעיף הקודם נובע של־f_n יש תת־סדרה המתכנסת ל־g_1 כמעט תמיד, כלומר $f_n \to g_1$.

נרצה להראות שהתכנסות ב־L^1 גוררת התכנסות במידה: יהי $\varepsilon > 0$, מההתכנסות ב־L^1 נובע

$$\mu(\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) \underset{\text{אי־שוויון מרקוב}}{\leq} \frac{1}{\varepsilon} \int |f_n - f| d\mu \to 0$$

אז התכנסות ב־L^1 גוררת התכנסות במידה ובסעיף הקודם ראינו שזה גורר שיש לה תת־סדרה המתכנסת ל־g_2 כמעט תמיד, כלומר $f_{n_k} \to g_2$ כמעט תמיד.

מכיוון ש־$f_n \to g_1$ לפי הנתון, בפרט מתקיים $f_{n_k} \to g_1$ ממשפט הירושה.

מהיות $f_{n_k} \to g_1$ נובע כי קיים $N_1 \in X$ שזו קבוצה ממידה אפס כך שמתקיים $\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = g_1(x)$ לכל $x \in X \setminus N_1$.

באופן דומה, יש $N_2 \in X$ קבוצה ממידה אפס כך שמתקיים $\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = g_2(x)$ לכל $x \in X \setminus N_2$.

ניקח $N = N_1 \cup N_2$אז איחודם הוא גם קבוצה ממידה אפס (מלינאריות) ולכן לכל $x \in X \setminus N$ מתקיים $x \in X \setminus N_1$ או $x \in X \setminus N_2$, כלומר

$$g_1(x) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = g_2(x)$$

כלומר $g_1 = g_2$ עד כדי קבוצה ממידה אפס, כלומר כמעט תמיד. $\square$

סעיף ג'

נניח ש־X מרחב מידה סופי ונוכיח כי אם $f_n \to f$ כמעט תמיד אז $f_n \to f$ במידה.

הוכחה: נניח ש־X מרחב ממידה סופית.

נגדיר

$$E_n = \{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}$$

מההתכנסות כמעט תמיד, נובע שכמעט כל x מתקיים $\varepsilon < |f_n(x) - f(x)|$ כמות סופית של פעמים, באופן שקול

$$\limsup_{n\to\infty} E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k\geq n} E_n$$

ממידה אפס.

נסמן $U_k = \bigcup_{n\geq k} E_n$ וזו סדרה יורדת של קבוצות מדידות, מהסופיות מתקיים גם $\mu(U_1) \leq \mu(X) < \infty$ אז מרציפות המידה לסדרות יורדות

$$\mu\left(\limsup_n E_n\right) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(U_n) = 0$$

לכל n מתקיים $E_n \subseteq U$ ולכן ממונוטוניות המידה, $\mu(E_n) \leq \mu(U_n)$ ובפרט

$$\limsup_{n\to\infty} \mu(E_n) \leq \limsup_{n\to\infty} \mu(U_n) = 0$$

כלומר לכל $\varepsilon > 0$ מתקיים

$$\mu(\{x \mid |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\}) \to 0$$

כלומר, מתכנס במידה, כנדרש. $\square$

שאלה 2

יהי $(X,\mathcal{A},\mu)$ מרחב מידה. ונניח כי f,f_n פונקציות אי־שליליות כך ש־$f_n \to f$ במידה.
נראה כי $\int f d\mu \le \liminf \int f_n d\mu$.
הוכחה: ראשית ניזכר שמהגדרת האינפימה, יש סדרת אינדקסים $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ כך שמתקיים

$$\lim_{k\to\infty}\int_X f_{n_k} d\mu = \liminf_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu$$

וכמובן שכאשר הגבול קיים, $\liminf = \lim = \limsup$.
כעת, $f_n \to f$ במידה משמע לכל $\varepsilon > 0$ מתקיים $\mu(\{x \mid |f_n(x) - f(x)| \ge \varepsilon\}) \to 0$ ובפרט בשאלה הקודמת ראינו שהתכנסות במידה גוררת קיום של תת־סדרה המתכנסת כמעט תמיד, כלומר לסדרה $\left(f_{n_k}\right)$ יש תת־סדרה $\left(f_{n_{k_\ell}}\right)_{\ell=1}^{\infty}$ כך שמתקיים $f_{n_{k_\ell}}(x) \to f(x)$ כמעט תמיד.
כעת נשתמש בלמה של פאטו ונקבל

$$\int_X f d\mu \le \liminf_{\ell\to\infty}\int_X f_{n_{k_\ell}} d\mu = \lim_{k\to\infty}\int_X f_{n_k} d\mu = \liminf_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu$$

$\square$

שאלה 3

יהי $(X, \mathcal{A}, \mu)$ מרחב מידה.

נוכיח כי לכל $f : X \to [0, \infty]$ מדידה ואינטגרבילית ולכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל $E \in \mathcal{A}$ עם $\mu(E) < \delta$ מתקיים $\int_E |f| d\mu < \varepsilon$.

הוכחה: יהי $\varepsilon > 0$, נשים לב שמתקיים

$$\lim_{M \to \infty} \int_{\{x \in X \mid f(x) > M\}} f d\mu = 0$$

שכן מהיות האינטגרל סופי נובע כי קבוצת הנקודות שבהן f שואפת/הינה אינסוף היא קבוצה ממידה אפס.

בפרט ניתן לבחור M כזה כך שיתקיים

$$\int_{\{x \in X \mid f(x) > M\}} f d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$$

יהי $E \in \mathcal{A}$ מדידה, מלינאריות האינטגרל מתקיים

$$\int_E f d\mu = \int_{E \cap \{x \in X \mid f(x) \leq M\}} f d\mu + \int_{E \cap \{x \in X \mid f(x) > M\}} f d\mu \leq \int_{E \cap \{x \in X \mid f(x) \leq M\}} f d\mu + \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\underset{\text{מונוטוניות האינטגרל}}{\leq} \int_{E \cap \{x \in X \mid f(x) \leq M\}} M d\mu + \frac{\varepsilon}{2} \underset{\text{מונוטוניות האינטגרל והמידה}}{\leq} M \cdot \mu(E) + \frac{\varepsilon}{2}$$

אז נבחר $\delta = \frac{\varepsilon}{2M}$ ותהיי $E \in \mathcal{A}$ כך שמתקיים $\mu(E) < \delta$, אז עם מה שמצאנו מתקיים

$$\int_E f d\mu \leq M \cdot \mu(E) + \frac{\varepsilon}{2} < M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\square$

שאלה 4

יהי X מרחב מטרי קומפקטי מקומית. בהינתן $E \neq \emptyset$ נגדיר

$$d_E(x) := \inf\{d(x,y) \mid Y \in E\}$$

סעיף א'

נראה כי לכל E כזו, $d_E : X \to [0,\infty)$ היא רציפה.

הוכחה: כדי ש־d_E תהיה רציפה ב־$x_0 \in X$ עלינו להראות שלכל $\varepsilon > 0$ יש $\delta > 0$ כך שמתקיים

$$d(x,x_0) < \delta \Longrightarrow |d_E(x) - d_E(x_0)| < \varepsilon$$

יהיו $x_0, x \in X$, אז לכל $y \in E$ מתקיים $d_E(x_0) \leq d(x_0,y)$ ומאי־שיוויון המשולש

$$d(x,y) \leq d(x,x_0) + d(x_0,y) \Longleftrightarrow \inf_{y\in E}\{d(x,y)\} \leq d(x,x_0) + \inf_{y\in E}\{d(x_0,y)\}$$

$$\Longleftrightarrow d_E(x) \leq d(x,x_0) + d_E(x_0) \Longleftrightarrow d_E(x) - d_E(x_0) \leq d(x,x_0)$$

מהסימטריות של המטריקה נחליף תפקידים בין x, x_0 ונקבל

$$d_E(x_0) - d_E(x) \leq d(x,x_0)$$

כלומר

$$|d_E(x) - d_E(x_0)| \leq d(x,x_0)$$

זה נכון לכל $x, x_0 \in X$ וזה בדיוק אומר ש־d_E היא ליפשיצית עם קבוע ליפשיציות 1 ופונקציה ליפשיצית היא רציפה עבור $\delta = \varepsilon > 0$. $\square$

סעיף ב'

תהיי $K \subset X$ תת־קבוצה קומפקטית ו־U קבוצה פתוחה המכילה אותה.

נביע באמצעות פונקציות מהצורה d_E פונקציה רציפה f המקיימת $f\mid_K = 1$ ו־$f\mid_{U^c} = 0$.

פתרון: אנחנו במרחב מטרי ולכן מהיות K קומפקטית נובע כי היא סגורה, ולכן K^c פתוחה.

באופן זהה, מהיות U פתוחה אז U^c סגורה.

ניזכר שבמרחב מטרי המרחק תמיד מתקבל מהסגירות והחסימות ולכן

$$\delta_0 = d(K,U^c) = \{\inf(d(x,y)) \mid x \in K, y \in U^c\} > 0$$

עבור $x \in U^c$ מתקיים $d_{U^c}(x) = 0$ ואם $x \in U$ מתקיים $d_{U^c}(x) > 0$.

עבור $x \in K$, מהקומפקטיות מתקיים $d_K(x) = 0$ ולכל $x \in X \setminus K$ מתקיים $d_K(x) > 0$.

אנחנו רוצים שלכל $x \in K$ יתקיים $f(x) = 1$ ולכל $x \in U$ יתקיים $f(x) = 0$.

מיותר לציין שאם $x \in K$ אז $x \notin U^c$ כי $x \in K \subset U$, ונחלק למקרים:

$$\begin{cases} x \in K \Longrightarrow d_K(x) = 0,\ d_{U^c}(x) < 0 \\ x \in U^c \Longrightarrow d_K(x) > 0,\ d_{U^c}(x) = 0 \\ x \notin K \cup U^c \Longrightarrow d_K(x) > 0,\ d_{U^c}(x) > 0 \end{cases}$$

כדי שיתקיימו התנאים שלנו, נגדיר

$$f(x) = \frac{d_{U^c}(x)}{d_{U^c}(x) + d_K(x)}$$

ראשית זו הרכבה של פונקציות רציפות ולכן רציף ובפרט מהפיצול למקרים שראינו לעיל נובע כי המכנה לעולם לא מתאפס ולכן רציפה ומוגדרת היטב.

נשאר להראות ש־$f\mid_K = 1, f\mid_{U^c} = 0$.

ואכן, אם $x \in K$ מתקיים $f(x) = \frac{d_{U^c}(x)}{d_{U^c}(x)+0} = 1$ ואם $x \in U^c$ מתקיים $f(x) = \frac{0}{0+d_K(x)} = 0$. $\square$

שאלה 5

יהי $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \lambda)$ הישר הממשי עם מידת לבג.
בכל סעיף, נקבע האם לסדרת הפונקציות $(f_n)_{n=1}^{\infty} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ יש גבול נקודתי, נקודתי כמעט תמיד, ב־L^1 או במידה ואם קיימים – נמצא אותם.

סעיף א'

$$f_n(x) = f(nx),\ \ f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

פתרון: ראשית, עבור $x < 0$ מתקיים $f_n(x) = 0$ לכל $n \in \mathbb{N}$ ובפרט $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$.
אם $x = 0$ אז $f(x) = 1$ ולכן $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(0) = \lim\limits_{n\to\infty} n \cdot 1 = \infty$.
אם $x > 0$ אזי $f(x) = e^{-x}$ ולכן

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{e^{nx}} \underset{\text{לופיטל}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{xe^{nx}} = 0$$

לכן קיבלנו שני דברים:

$$f_n(x) \to f_0(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \infty & x = 0 \end{cases}$$

ובפרט $f_n \to 0$ כמעט תמיד.
עבור התכנסות ב־L^1 מתקיים

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |f - 0| d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f d\lambda = \lim_{n\to\infty} \left(\int_{-\infty}^{0} 0 d\lambda + \int_{0}^{\infty} ne^{-nx} d\lambda \right) = \lim_{n\to\infty} \int_{0}^{\infty} ne^{-nx} d\lambda$$

מתקיים

$$\int_0^{\infty} ne^{-nx} d\lambda \underset{\substack{u=nx \\ du=nd\lambda}}{=} \int_0^{\infty} e^{-u} du = [-e^{-u}]_0^{\infty} = 0 - (-1) = 1$$

כלומר

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} ne^{-nx} d\lambda = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0$$

ולכן לא מתכנס ב־L^1.
נשאר להראות התכנסות במידה: כלומר, להראות האם לכל $\varepsilon > 0$ מתקיים $\lambda(\{x \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) \to 0$.
יהי $\varepsilon > 0$ ונסמן $A_n(\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid f_n(x) = ne^{-nx} \geq \varepsilon\}$ (כי עבור $x \leq 0$ מתקיים $f_n(x) = 0 < \varepsilon$).
נסמן $g_n(x) = ne^{-nx}$ ונבחין כי $x = 0$ זו נקודת מקסימום עבורה מתקיים $g_n(0) = n$.
אם $\varepsilon \geq n$ אז $f_n(x) \leq n \leq \varepsilon$ לכל x ולכן $A_n(\varepsilon) = \emptyset$ או $A_n(\varepsilon) = \{0\}$ אם $n = \varepsilon$ וניקח $f_n(x) > \varepsilon$.
בגלל שהמידה של יחידון היא עדיין אפס במידת לבג, ממתקיים בכל אופן $\lambda(A_n(\varepsilon)) = 0$.
אם $\varepsilon < n$ אז אי־השוויון $ne^{-nx} \geq \varepsilon$ מתקיים עבור $x \in [0, x_n]$ כאשר x_n הוא הפיתרון למשוואה $ne^{-nx_n} = \varepsilon$, כלומר

$$ne^{-nx_n} = \varepsilon \iff e^{-nx_n} = \frac{\varepsilon}{n} \iff -nx_n = \ln\left(\frac{\varepsilon}{n}\right) \iff nx_n = \ln\left(\frac{n}{\varepsilon}\right) \iff x_n = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{n}{\varepsilon}\right)$$

ואז מתקיים $\lambda(A_n(\varepsilon)) = \lambda([0, x_n]) = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{n}{\varepsilon}\right)$ כלומר

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(A_n(\varepsilon)) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\ln\left(\frac{n}{\varepsilon}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n) - \ln(\varepsilon)}{n} \underset{\text{לופיטל}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n} - 0}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

ולכן זה מתכנס במידה. $\square$

סעיף ב'

$$f_n(x)=nf(n^2x),\ \ f(x)=\begin{cases}e^{-x} & x\geq 0\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

פתרון: ניזכר שהתכנסות ב-L^1 גוררת התכנסות במידה וראינו שהתכנסות במידה גוררת התכנסות כמעט תמיד לפי שאלה 1, אז מתקיים

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}|f-0|d\lambda=\lim_{n\to\infty}ne^{-n^2x}d\lambda=\lim_{n\to\infty}\left[n\cdot-\frac{1}{n^2}e^{-n^2x}\right]_0^\infty=\lim_{n\to\infty}-\frac{1}{n(0-1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

ולכן יש התכנסות ב-L^1 ולכן גם במידה וגם התכנסות נקודתית וכמעט תמיד. $\square$

סעיף ג'

$$f_n(x)=f\left(\frac{x}{n}\right),\ \ f(x)=\begin{cases}x^2 & x\in[-1,1]\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

פתרון: ראשית אם $x\notin[-1,1]$ אזי $f_n(x)=0$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

אם $x\in[-1,1]$אז $f\left(\frac{x}{n}\right)=\frac{x^2}{n^2}$ אבל $x\in[-1,1]$ ולכן $\left|f\left(\frac{x}{n}\right)\right|=\left|\frac{x^2}{n^2}\right|\leq\frac{1}{n^2}$ ולכן $\lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{n^2}=0$ במקרה זה.

כלומר, $f_n\to 0$ כמעט תמיד.

נבדוק התכנסות ב-L^1

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}|f_n-f|d\lambda=\lim_{n\to\infty}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\int_{-1}^{1}x^2d\lambda=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{3n^2}=0$$

ולכן יש התכנסות ב-L^1 ולכן גם במידה וגם התכנסות נקודתית וכמעט תמיד. $\square$