

פתרון מטלה 09 – אנליזה פונקציונלית, 80417

16 ביוני 2025



שאלה 1

יהי $x_0 \in [-\pi, \pi]$ ותהינה $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציות אינטגרביליות רימן בקטע $[-\pi, \pi]$, מחזוריות עם מחזור 2π כך ש- $f \equiv g$ בסביבה של x_0 . נסמן ב- S_N^f, S_N^g את סכום פוריה ה- N של f, g בהתאמה. נוכיח ש- $\lim_N S_N^f(x_0) = \lim_N S_N^g(x_0)$ קיים אם ורק אם $\lim_N S_N^g(x_0)$ קיים ושארם הם קיימים אז הם שווים. הוכחה: בלי הגבלת הכלליות נניח ש- $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N^f = L_f$ (נשים לב כי המקרים סימטריים ולכן מספיק להסתכל על המקרה הזה). נגדיר $h = f - g$ ונשים לב ש- $h \equiv 0$ בסביבת x_0 מהנתון וכן $\lim_{x \rightarrow x_0} h = 0$. נשים לב שגם עבור $u \in (0, \delta)$ עבור $\delta > 0$

$$|h(x_0 + u) - h(x_0)| = 0 \leq u$$

ולכן תנאי ליפשיץ מתקיים וממשפט התכנסות נקודתית של טורי פורייה מתקיים

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N^f(x_0) = \frac{1}{2}(f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)) = h(x_0) = 0$$

ממה שראינו בהרצאה מתקיים גם $S_N^h = S_N^{f-g} = S_N^f - S_N^g$ ולכן מתקיים

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N^{f-g}(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N^f(x_0) - S_N^g(x_0) = 0$$

□

ומההנחה $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N^g = L_f$ נובע שמתקיים $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N^f = L_f$.

שאלה 2

נגדיר את גרעין דירכלה $D_N(u) = \frac{\sin((N+\frac{1}{2})u)}{2\sin(\frac{u}{2})}$ ונוכיח שקיים קבוע $C > 0$ כך שלכל $N > 1$ מתקיים

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(u)| du \geq C \ln(N-1)$$

הוכחה: ראשית, בהרצאה ראינו שמתקיים $D_N(-x) = D_N(x)$ ולכן אינטגרל על קטע סימטרי של פונקציה זוגית מקיים

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |D_N(u)| du &= 2 \int_0^{\pi} |D_N(u)| du = 2 \int_0^{\pi} \left| \frac{\sin((N+\frac{1}{2})u)}{2\sin(\frac{u}{2})} \right| du = \int_0^{\pi} \left| \frac{\sin((N+\frac{1}{2})u)}{\sin(\frac{u}{2})} \right| du \\ &\stackrel{\forall x \geq 0, \sin(x) \leq x}{\geq} \int_0^{\pi} \frac{|\sin((N+\frac{1}{2})u)|}{\frac{u}{2}} du = 2 \int_0^{\pi} \frac{|\sin((N+\frac{1}{2})u)|}{u} du \\ &\stackrel{u \rightarrow s = (N+\frac{1}{2})u}{=} 2 \int_0^{(N+\frac{1}{2})\pi} \frac{|\sin(s)|}{s} ds \geq 2 \int_0^{N\pi} \frac{|\sin(s)|}{s} ds = 2 \sum_{j=0}^{N-1} \int_{j\pi}^{(j+1)\pi} \frac{|\sin(s)|}{s} ds \\ &\geq \frac{2}{\pi} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{j+1} \int_{j\pi}^{(j+1)\pi} |\sin(s)| ds \geq \frac{2}{\pi} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{j+1} \left| \int_{j\pi}^{(j+1)\pi} \sin(s) ds \right| = \frac{4}{\pi} \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \geq \frac{4}{\pi} \ln(n) \end{aligned}$$

□

כאשר המעברים נובעים מהרמז, אינטגרציה בחלקים וחסימה של האינטגרל $\frac{|\sin(x)|}{x}$.

שאלה 3

עבור $x \in \mathbb{R}$ נסמן $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$ כאשר $i = \sqrt{-1}$.

סעיף א'

נוכיח ש- $\mathcal{A} = \text{Span} \{e^{inx}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ היא אלגברה ב- $C([- \pi, \pi], \mathbb{C})$ שלא מתאפסת, מפרידה נקודות (פרט ל- $\pm \pi$) וסגורה להצמדה. נסיק בעזרת הגרסה המרוכבת של משפט סטון-ויירשטראס ש- \mathcal{A} צפופה ב- $\tilde{C}([- \pi, \pi], \mathbb{C})$ בנורמה $\|\cdot\|_\infty$.
הוכחה: עלינו להראות כמה דברים:

1. \mathcal{A} היא אלגברה ב- $C([- \pi, \pi], \mathbb{C})$, עלינו להראות שלושה דברים: סגירות לחיבור, כפל וסקלר.
1. עבור חיבור מתקיים (באופן די טריוויאלי)

$$e^{inx} + e^{imx} \in \text{Span} \{e^{inx}\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

2. עבור כפל מתקיים מחוקי חזקות

$$e^{inx} \cdot e^{imx} = e^{i(n+m)x} \stackrel{\mathbb{Z} \ni k=n+m}{=} e^{ikx} \in \text{Span} \{e^{inx}\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

3. עבור כפל בסקלר זה נובע ישירות מהגדרת Span , בדומה לחיבור

2. לא מתאפסת: נבחר $f(x) = 1$ עבור $n = 0$.

3. מפרידה נקודות: נסתכל על $f(x) = e^{ix}$ עבור $n = 1$ ונטען שהיא מפרידה נקודות: f היא על והיא גם חד-חד ערכית לכל $x \neq \pm \pi$ כי $f(\pi) = 1$ ו- $f(-\pi) = -1$ ולכן עומדת בהגדרה.

4. סגירות להצמדה

$$\overline{e^{inx}} = \cos(nx) + i \sin(nx) = \cos(nx) - i \sin(nx) \stackrel{\substack{\sin(-x) = -\sin(x) \\ \cos(-x) = \cos(x)}}{=} \cos(-nx) + i \sin(-nx) = e^{-inx} \in \text{Span} \{e^{inx}\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

נסמן $K = [- \pi, \pi]$ וכמובן ש- K קומפקטי כקטע חסום וסגור ב- \mathbb{R} ולכן כל תנאי משפט סטון-ויירשטראס המרוכב שראינו בתרגול מתקיימים ולכן \mathcal{A} צפופה ב- $\tilde{C}([- \pi, \pi], \mathbb{C})$. □

סעיף ב'

נסיק שהקבוצה $\{e^{inx}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ היא מערכת אורתוגונלית שלמה ב- $\tilde{C}([- \pi, \pi], \mathbb{C})$ ביחס למכפלה הפנימית $\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)} g(x) dx$.
הוכחה: נשים לב שלכל n, m מתקיים

$$\begin{aligned} \langle e^{inx}, e^{imx} \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \overline{e^{inx}} e^{imx} dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} e^{imx} dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)x} dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos((m-n)x) + i \sin((m-n)x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos((m-n)x) dx + \int_{-\pi}^{\pi} i \sin((m-n)x) dx \stackrel{\substack{\cos(\pi) = \cos(-\pi) \\ \sin(\pi) = \sin(-\pi)}}{=} 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

לכן זו מערכת אורתוגונלית (ובפרט אורתונורמלית כי $|e^{inx}|^2 = 1$ לכל $n \in \mathbb{N}$), ונטען שהיא גם מערכת שלמה לפי התנאים השקולים לשלמות שראינו בהרצאה. □

סעיף ג'

עבור $f \in C([- \pi, \pi], \mathbb{C})$ נגדיר לכל $n \in \mathbb{Z}$ את מקדם פוריה של f ביחס למערכת $\{e^{inx}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ על-ידי $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$ ונסיק שאם f ממשית אז מתקיים

$$\frac{a_0}{2} = c_0$$

$$\forall n > 0 : a_n = c_n + c_{-n}$$

$$\forall n > 0 : b_n = i(c_n - c_{-n})$$

כאשר $\{a_n\}_{n=1}^\infty, \{b_n\}_{n=1}^\infty$ מקדמי טור פורייה הרגילים של f .

הוכחה: ראשית, מהנתון נבנה גם את c_{-n}

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-i(-n)x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} dx$$

נחשב מהגדרה ועם היות הפונקציות $\sin(x), \cos(x)$ אי־זוגיות וזוגיות בהתאמה

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2f(x) \cos(nx) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) + if(x) \sin(nx) - if(x) \sin(nx) + f(x) \cos(nx) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) + if(x) \sin(nx) + if(x) \sin(-nx) + f(x) \cos(-nx) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) + if(x) \sin(nx) dx + \int_{-\pi}^{\pi} if(x) \sin(-nx) + f(x) \cos(-nx) dx \right) \\ &= c_{-n} + c_n = c_n + c_{-n} \end{aligned}$$

ונשים לב

$$a_0 = c_0 + c_0 \Rightarrow \frac{a_0}{2} = c_0$$

באותו אופן נחשב גם

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2f(x) \sin(nx) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} i \int_{-\pi}^{\pi} i2f(x) \sin(-nx) + f(x) \cos(nx) - f(x) \cos(nx) dx \\ &= \frac{1}{2} \pi i \int_{-\pi}^{\pi} if(x) \sin(nx) + f(x) \cos(nx) - if(x) \sin(-nx) - f(x) \cos(-nx) dx \\ &= i(c_n - c_{-n}) \end{aligned}$$

□