פתרון מטלה 05 — תורת ההסתברות 1, 80420

3 בדצמבר 2025

שאלה 1

בקופה n מטבעות.
נניח ששני שחקנים מטילים קובייה בלתי־תלויה בכל סיבוב, כאשר ההתפלגות של הקובייה היא

$$\mathbb{P}(1)=\mathbb{P}(2)=\mathbb{P}(3)=\mathbb{P}(4)=\frac{1}{5},\qquad \mathbb{P}(5)=\mathbb{P}(6)=\frac{1}{10}$$

מי שמקבל את הערך הגבוה ביותר בהטלה זוכה במטבע אחד מן הקופה.

אם שני השחקנים מקבלים ערכים שווים – אף שחקן אינו מקבל מטבע.

סעיף א'

נמצא את התפלגות מספר המטבעות שכל אחד מהשחקנים מרוויח בסוף המשחק.

פתרון: נסמן ב־Y ו־Z את תוצאות ההטלה של השחקן הראשון והשני בהתאמה.

נגדיר X_i המשתנה המקרי שהשחקן הראשון זכה במטבע ה־i ובהתאם $X=\sum_{k=1}^{n}X_i$, סך הזכיות של המשתתף הראשון. אז

$$\mathbb{P}(X_i=1)=\mathbb{P}(Y>Z)=\sum_{k=1}^{6}\mathbb{P}(Y>Z,Z=k)=\mathbb{P}(Y>Z,Z=1)+\cdots+\mathbb{P}(Y>Z,Z=6)$$

$$=\underbrace{\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{5}+\frac{2}{10}\cdot\frac{1}{5}}_{=\mathbb{P}(Y>Z,Z=1)}+\underbrace{\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5}+\frac{2}{10}\cdot\frac{1}{5}}_{\mathbb{P}(Y>Z,Z=2)}+\underbrace{\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}+\frac{2}{10}\cdot\frac{1}{5}}_{\mathbb{P}(Y>Z,Z=3)}+\underbrace{\frac{2}{10}\cdot\frac{1}{5}}_{\mathbb{P}(Y>Z,Z=4)}+\underbrace{\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}}_{\mathbb{P}(Y>Z,Z=5)}+\underbrace{0\cdot\frac{1}{5}}_{\mathbb{P}(Y>Z,Z=6)}=\frac{41}{100}$$

יש לנו משתנה מקרי עם n ניסיונות והסתברות הצלחה $p=0.41$ וזה בידיוק לפי הגדרה התפלגות בינומית. $\square$

סעיף ב'

נחשב את ההסתברות לקבלת תוצאת תיקו בהטלה מסויימת.

פתרון: מהסימטרייה של כל משתתף לנצח בסיבוב, ומהגדרת המשלים נקבל שההסתברות לקבלת תוצאת תיקו בהטלה מסויימת היא $1-0.41\cdot 2=$
$1-0.82=0.18$. $\square$

סעיף ג'

נחשב את ההסתברות שמספר הסיבובים הכולל במשחק יהיה לכל היותר $n+1$.

פתרון: יש לנו לכל הפחות n סיבובים ולכן יש שלוש אפשרויות: או שיש שחקן שזכה בכל ה־n סיבובים הראשונים, או שהיו $n+1$ סיבובים ובסיבוב ה־n $1\le k\le n$, משתתף אחד זכה ובשאר המשתתף השני זכה, או שבמקום שהמשתתף השני זכה באחד הסיבובים בידיוק יהיה שבסיבוב אחד בידיוק היה לנו תיקו.

ההסתברות לתיקו היא קבועה ומתקיים $Z\sim Ber(0.18)$ $\square$