פתרון מטלה 02 — תורת המידה, 80517

4 בנובמבר 2025

שאלה 1

נוכיח את הלמה של בורל קנטלי: בהינתן מרחב מידה $(X, \mathcal{B}, \mu)$, נאמר שתכונה כלשהי של נקודות ב־X מתקיימת **כמעט תמיד** או **כמעט בכל מקום** אם אוסף הנקודות שלא מקיימות את התכונה הזו מוכלת בקבוצה בעלת מידה אפס.
תהיי $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{B}$ כך שמתקיים

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$$

נוכיח כי התכונה "x שייך רק למספר סופי של A_n־ים" מתקיימת כמעט בכל מקום.
הוכחה:

$\square$

שאלה 2

תהיי μ מידה המוגדרת על איזשהו מרחב מדיד $(X, \mathcal{B})$. נגדיר

$$\mathcal{N} := \{E \subseteq X \mid E \subseteq N \in \mathcal{B}, \mu(N) = 0\},$$

$$\overline{\mathcal{B}} := \{A \cup E \mid A \in \mathcal{B}, E \in \mathcal{N}\}$$

ותהיי $\overline{\mu} : \overline{\mathcal{B}} \to [0, \infty]$ כך שמתקיים $\overline{\mu}(A \cup E) = \mu(A)$ לכל $A \in \mathcal{B}, E \in \mathcal{N}$.

סעיף א'

נוכיח כי $\overline{\mathcal{B}}$ היא σ־אלגברה.

הוכחה: עלינו להראות את שלוש התכונות של σ־אלגברה עבור $\overline{\mathcal{B}}$ $\square$

סעיף ב'

נוכיח כי $\overline{\mu}$ מוגדרת היטב.

הוכחה:

$\square$

סעיף ג'

נוכיח שכל מידה $\hat{\mu}$ על $\overline{\mathcal{B}}$ המקיימת $\hat{\mu}(A) = \mu(A)$ לכל $A \in \mathcal{B}$ למעשה מתלכדת עם $\overline{\mu}$.
כלומר נוכיח ש־$\overline{\mu}$ היא ההרחבה היחידה של μ למידה על $\overline{\mathcal{B}}$.

שאלה 3

תהיי $\Sigma \supset (A_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת קבוצות במרחב מידה (X,Σ,μ) ונגדיר

$$\liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$
$$\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

סעיף א'

נוכיח $\liminf A_n, \limsup A_n \in \Sigma$.

הוכחה: נוכיח עבור $\liminf A_n$.

מכך ש־Σ היא σ־אלגברה נובע כי היא סגורה תחת איחוד בן־מנייה ומכללי דה־מורגן נובע שהיא סגורה תחת חיתוך בן־מנייה.

מכך ש־$\Sigma \supseteq (A_k)_{k=n}^{\infty}$ הוא אוסף בן־מנייה, אם נסמן $B_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$ נקבל ש־$B_n \in \Sigma$.

נסתכל על $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ ושוב מתכונות σ־אלגברה היא סגורה לאיחוד בן־מנייה ולכן $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \Sigma$ אבל $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \liminf A_n$, כלומר $\liminf A_n \in \Sigma$.

עבור $\limsup A_n$ נשים לב שלפי חוקי דה־מורגן מתקיים

$$(\limsup A_n)^c = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=b}^{\infty} A_k^c = \liminf A_n^c$$

ראינו $\liminf A_n \in \Sigma$ ו־Σ היא σ־אלגברה ולכן $\liminf A_n^c \in \Sigma$ מסגירות למשלים של σ־אלגברה, ולכן $(\limsup A_n)^c \in \Sigma$ ושוב מהסגירות למשלים נקבל $\limsup A_c \in \Sigma$. □

סעיף ב'

נוכיח $\mu(\liminf A_n) \le \liminf \mu(A_n)$.

הוכחה: נשתמש בסימון מהסעיף הקודם $B_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$ ונבחין שמהגדרת החיתוך מתקיים

$$B_1 \subseteq B_2 \subseteq B_3 \subseteq \ldots$$

מתקיים

$$\mu(\liminf A_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \underset{\text{רציפות לסדרות עולות}}{=} \lim_{n\to\infty}\mu(B_n)$$

ומהגדרה לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $B_n \subseteq A_k$ לכל $k \ge n$ ומהמונוטוניות ביחס להכלה מתקיים $\mu(B_n) \le \mu(A_k)$.

בפרט מתקיים $\mu(B_n) \le \inf_{k\ge n}\mu(A_k)$ ואם נחזור לביטוי לעיל שראינו שמוגדר היטב וניקח גבול

$$\lim_{n\to\infty}\mu(B_n) \le \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{k\ge n}\mu(A_k)\right)$$

כלומר

$$\mu(\liminf A_n) \le \liminf A_n$$

□

סעיף ג'

נוכיח כי אם מרחב המידה הוא סופי, כלומר $\mu(X) < \infty$ אז גם $\limsup \mu(A_n) \leq \mu(\limsup A_n)$.

הוכחה: נניח שלא כך, כלומר $\mu(\limsup A_n) < \limsup \mu(A_n)$.

בדומה לסעיפים הקודמים נגדיר $C_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} C_k$ ואז $\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$.

מהגדרת האיחוד מתקיים

$$C_1 \supseteq C_2 \supseteq C_3 \supseteq \dots$$

וממונוטוניות המידה מתקיים $\mu(C_1) \geq \mu(C_2) \geq \dots$ ובפרט מתקיים $\mu(C_1) < \mu(X)$ כי $C_1 \subseteq X$.

שוב מרציפות לסדרות יורדות מתקיים

$$\mu(\limsup A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(C_n)$$

וממה שמצאנו מתקיים

$$\lim_{n\to\infty} \mu(C_n) < \limsup \mu(A_n)$$

ושוב ממונוטוניות המידה,

$$\mu(C_n) = \mu\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \geq \mu_{k\geq n}(A_k) \Longrightarrow \mu(C_n) \geq \sup_{k\geq n} \mu(A_k)$$

ניקח גבול ונקבל

$$\lim_{n\to\infty} \mu(C_n) \geq \lim_{n\to\infty} \left(\sup_{k\geq n} \mu(A_k)\right) = \limsup \mu(A_n)$$

וזאת כמובן סתירה. $\square$

שאלה 4

יהי $(X, \mathcal{B})$ מרחב מדיד.

סעיף א'

תהיי $f_n : X \to [0, \infty]$ סדרה של פונקציות מדידות.
נראה כי קבוצת הנקודות $x \in X$ בהן הסדרה $f_n(x)$ מתכנסת היא מדידה וכי אם נסמן קבוצה זו ב־E ונגדיר את $f : E \to [-\infty, \infty]$ על־ידי $f := \lim_{n\to\infty} f_n$ זו תהיה פונקציה מדידה.
הוכחה:

$\square$

סעיף ב'

נסמן לכל $x \in [0, 1]$ את הפיתוח הבינארי שלו כ־$0, d_1 d_2 d_3 \ldots$ כאשר

$$d_n(x) = \begin{cases} 0 & \exists m \in \mathbb{N} \ s.t. \ x \in \left[\frac{2m}{2^n}, \frac{2m+1}{2^n}\right] \\ 1 & \exists m \in \mathbb{N} \ s.t. \ x \in \left[\frac{2m-1}{2^n}, \frac{2m}{2^n}\right] \end{cases}$$

ונסיק מהסעיף הקודם כי קבוצת הנקודות $x \in [0, 1]$ עבורן

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{d_i(x)}{n} = \frac{1}{2}$$

היא מדידה בורל.

שאלה 5

נזכיר את ה־σ־אלגברה מהתרגול הראשון על קבוצה $\mathbb{R}$

$$\mathcal{A} = \{E \subseteq \mathbb{R} \mid |A| \le \aleph_0, |E^c| \le \aleph_0\}$$

סעיף א'

נגדיר $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ על־ידי

$$\mu(E) = \begin{cases} 0 & |E| \le \aleph_0 \\ 1 & \text{אחרת} \end{cases}$$

נראה כי μ מהווה מידה על $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$.

הוכחה:

$\square$

סעיף ב'

נמצא את כל הפונקציות המדידות מ־$(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ לישר הממשי ולכל אחת נחשב את האינטגרל שלה.

הוכחה: $\square$