פתרון מטלה 00 — תורת ההסתברות 1, 80420

21 באוקטובר 2025

שאלה 1

תהיי S קבוצה של אינדקסים ותהיינה $(A_\alpha)_{\alpha\in S}$ קבוצות.

סעיף א'

נוכיח את הזהות

$$\bigcup_{\alpha\in S} A_\alpha^c = \left(\bigcap_{\alpha\in S} A_\alpha\right)^c$$

הוכחה: יהי $x\in\bigcup_{\alpha\in S} A_\alpha^c$, כלומר קיים (לפחות אחד) $\alpha_i\in S$ כך ש־$x\in A_{\alpha_i}^c$.
מהגדרת המשלים זה אומר ש־$x\notin A_{\alpha_i}$, כלומר $x\notin\bigcap_{\alpha\in S} A_\alpha$ ולכן מהגדרת המשלים $x\in\left(\bigcap_{\alpha\in S} A_\alpha\right)^c$.
זה מביא לנו את ההכלה $\subseteq$, ונוכיח כעת את ההכלה $\supseteq$:
יהי $y\in\left(\bigcap_{\alpha\in S} A_\alpha\right)^c$, כלומר מהגדרת המשלים $y\notin\bigcap_{\alpha\in S} A_\alpha$.
מהגדרת החיתוך זה אומר שקיים $\alpha_i\in S$ כך ש־$y\notin A_{\alpha_i}$ ולכן $y\in A_{\alpha_i}^c$ והיות ו־$\alpha_i\in S$ נקבל $y\in\bigcup_{\alpha\in S} A_\alpha^c$.
מצאנו הכלה דו־כיוונית ולכן קיבלנו שיוויון. $\square$

סעיף ב'

נוכיח את הזהות

$$\bigcap_{\alpha\in S} A_\alpha^c = \left(\bigcup_{\alpha\in S} A_\alpha\right)^c$$

הוכחה: יהי $x\in\bigcap_{\alpha\in S} A_\alpha^c$ ולכן לכל $\alpha\in S$ מתקיים $x\in A_\alpha^c$ ומהגדרת המשלים, $x\notin A_\alpha$ לכל $\alpha\in S$, כלומר $x\notin\bigcup_{\alpha\in S} A_\alpha$ ומהגדרת המשלים, $x\in\left(\bigcup_{\alpha\in S} A_\alpha\right)^c$.
זה מביא לנו את ההכלה $\subseteq$ ונוכיח כעת את ההכלה $\supseteq$:
יהי $y\in\left(\bigcup_{\alpha\in S} A_\alpha\right)^c$, מהגדרת המשלים זה אומר ש־$y\notin\bigcup_{\alpha\in S} A_\alpha$ ומהגדרת האיחוד זה אומר שלכל $\alpha\in S$, $y\notin A_\alpha$ ולכן מהגדרת המשלים זה אומר שלכל $\alpha\in S$ מתקיים $y\in A_\alpha^c$ ומהגדרת החיתוך זה אומר ש־$y\in\bigcap_{\alpha\in S} A_\alpha^c$.
מצאנו הכלה דו־כיוונית ולכן קיבלנו שיוויון. $\square$

שאלה 2

תהיי $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ סדרת קבוצות סופיות.

סעיף א'

נוכיח את הטענה שלכל $n\in\mathbb{N}$, מתקיים $\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| \le \sum_{i=1}^{n}|A_i|$.

הוכחה: נוכיח באינדוקציה על n, עבור $n=1$ זה המקרה הטריוויאלי ועבור בסיס האינדוקציה נראה עבור $n=2$.

תהיינה A_1, A_2 קבוצות סופיות.

אם $A_1\cap A_2=\emptyset$ נקבל מהגדרת האיחוד שמתקיים $|A_1\cup A_2| = |A_1| + A_2$.

אם $A_1\cap A_2\neq\emptyset$ אז נגדיר $A_3 = A_1\setminus A_2$ ולכן $|A_3|<|A_1|$ (מהגדרה) ו־$A_3\cap A_2=\emptyset$ ולכן

$$|A_3+A_2| \underset{(\star)}{=} |A_3|+|A_2| < |A_1|+|A_2|$$

כאשר $(\star)$ נובע מהמקרה של הזרות.

מתקיים $A_3\cup A_2 = A_1\cup A_2$ ולכן $|A_1\cup A_2| < |A_1|+|A_2|$.

נניח שהטענה נכונה עבור $k\in\mathbb{N}$, כלומר מתקיים $\left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right| \le \sum_{i=1}^{k}|A_i|$ ונרצה להראות עבור המקרה של $k+1$, כלומר נרצה להראות שמתקיים

$$\left|\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i\right| \le \sum_{i=1}^{k}+1|A_i|$$

נשים לב שמתקיים

$$\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right)\cup A_{k+1}$$

ואם נגדיר $B=\bigcup_{i=1}^{k} A_i$, מבסיס האינדוקציה אנחנו כבר יודעים שמתקיים

$$\left|\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i\right| = \left|B\cup A_{k+1}\right| \le |B| + \left|A_{k+1}\right| \underset{\text{הנחת האינדוקציה}}{\le} \sum_{i=1}^{k}|A_i| + \left|A_{k+1}\right| = \sum_{i=1}^{k+1}|A_i|$$

הערה: זה כמובן גם מתיישר עם מה שמופיע בתרגול 00 על נוסחת ההכלה וההפרדה. □

סעיף ב'

נפריך את הטענה שלכל $n\in\mathbb{N}$, אם מתקיים $\cap_{i=1}^{n} A_i=\emptyset$ אז $\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n}|A_i|$.

הוכחה: בתרגול ראינו את נוסחת ההכלה וההפרדה עבור $n=3$, ניזכר

$$|A_1\cup A_2\cup A_3| = |A_1|+|A_2|+|A_3| - |A_1\cap A_2| - |A_1\cap A_3| - |A_2\cap A_2| + |A_1\cap A_2\cap A_3|$$

תחת ההנחה שלנו, אנחנו יודעים שהמחובר האחרון הוא 0 וכדי שיהיה שיוויון בין $|A_1\cup A_2\cup A_3|$ לבין $\sum_{i=1}^{3}|A_i|$ אנחנו צריכים שגם כל חיתוכי הביניים סכומם יהיה 0, אבל זה לא קורה בהכרח, נגדיר עבור $n=3$ את הקבוצות

$$A_1=\{1,2\}, A_2=\{2,3\}, A_3=\{3,4\}$$

אכן מתקיים $A_1\cap A_2\cap A_3=\emptyset$.

מנוסחת ההכלה וההדחה וחישוב ישיר נקבל אם כך

$$|A_1\cup A_2\cup A_3| = 4 \neq 6 = |A_1|+|A_2|+|A_3|$$

□

שאלה 3

יהיו $n, k \in \mathbb{N}$.

סעיף א'

נקבע כמה סדרות באורך k של מספרים בין 1 ל־n יש שמכילות את 1 לפחות פעם אחת.

פתרון: היות וסדרות נבדלות ביניהן לפי סדר המופעים, אנחנו מדברים על בעיית המנייה הראשונה – עם חשיבות לסדר ועם חזרות, כלומר יש n^k סדרות שונות.

אנחנו רוצים סדרות שמכילות לכל הפחות פעם אחת את הספרה 1 ולכן נסתכל על המשלים – מה מספר הסדרות ש־1 לא מופיע בהן, על־כן יש $(n-1)^k$ סדרות כאלו ובסך־הכל מספר הסדרות הרצוי הוא $n^k - (n-1)^k$. □

סעיף ב'

נקבע כמה סדרות באורך k של מספרים בין 1 ל־n יש שמכילות את 1 בידיוק פעם אחת.

פתרון: יש לנו k אפשרויות שונות לבחור את המיקום של 1 ולאחר מכן עלינו למקם $n-1$ מספרים $k-1$ פעמים ($k-1$ כי כבר מיקמנו את 1) ולכן מספר האפשרויות יהיה בידיוק $k(n-1)^{k-1}$. □

שאלה 4

נתונים 13 נשים ו־7 גברים. נקבע מה מספר האפשרויות לבחירת 5 נשים ו־5 גברים והתאמתם בזוגות שוני־־מין.

פתרון: החלק הראשון הוא בעיית המנייה השלישית – ללא חשיבות לסדר וללא חזרות, ולכן מספר הדרכים לבחור 5 נשים מ-13 נשים יהיה

$$\binom{13}{5}=\frac{13!}{5!(13-5)!}=\frac{13!}{5!8!}=\frac{\cancel{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}\cdot\cancel{6}\cdot\cancel{7\cdot8}\cdot9\cdot\cancel{10}\cdot11\cdot\cancel{12}\cdot13}{\cancel{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}\cdot\cancel{1\cdot2\cdot3}\cdot\cancel{4\cdot5\cdot6}\cdot\cancel{7\cdot8}}=9\cdot11\cdot13=1287$$

באופן דומה עבור מספר הדרכים לבחור 5 גברים מתוך 7 גברים יהיה

$$\binom{7}{5}=\frac{7!}{5!(7-5)!}=\frac{7!}{5!2!}=\frac{\cancel{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}\cdot\cancel{6}\cdot7}{\cancel{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}\cdot1\cdot\cancel{2}}=3\cdot7=21$$

הבחירות האלו כמובן זרות ולכן מספר האפשרויות לבחור גם וגם היא מכפלה שלהם, ולכן מספר הדרכים הכולל לבחור את חמשת הנשים והגברים יהיה $\binom{13}{5}\cdot\binom{7}{5}=1287\cdot21=27027$.

כעת, אנחנו צריכים לצוות אותם לזוגות שוני־מין: האישה הראשונה יכולה להיות מצוות לאחד מחמשת הגברים, השנייה יכולה להיות מצוות לאחד מארבעת הגברים וכן הלאה, בעצם מספר התמורות על חמישה איברים, שזה $5!=120$.

מספר הסידורים האפשרי לשאלה יהיה אם־כך מכפלת כל הסידורים שמצאנו

$$27027\cdot120=3243240$$

$\square$

שאלה 5

עבור $n,k\in\mathbb{N}$ נוכיח קומבינטורית את הנוסחה

$$\sum_{j=0}^{k}\binom{j+n-1}{j}=\binom{k+n}{k}$$

הוכחה: ראשית, ניזכר תחילה בסימטרייה סביב האמצע

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n!}{(n-k)!k!}=\binom{n}{n-k}$$

בצד ימין של הנוסחה הקומבינטורית אנחנו שואלים בכמה דרכים ניתן לבחור k איברים מתוך $n+k$ איברים כאשר הסדר לא משנה וללא חזרות,
כלומר כמה תתי־קבוצות בגודל k יש לקבוצה בגדול $n+k$.
נבחן את הצד השמאלי של השיוויון; נבחין שמתקיים $\binom{j+n-1}{j}=\binom{j+n-1}{n-1}$ (מהסימטרייה סביב האמצע), כלומר זאת בעיית המנייה הרביעית: מספר האפשרויות לבחור עם חזרות וללא חשיבות לסדר.
כלומר, זהו מספר הפתרונות השלמים האי־שליליים למשוואה $x_1+\cdots+x_n=j$ או מספר הדרכים לחלק j כדורים זהים ל־n מגירות שונות.
הסכימה היא על מספר האפשרויות לחלוקה של עד k כדורים שונים, כלומר אם נחזור לפורמט של המשוואות זה שקול ללהגיד שחלוקה של עד k כדורים זהים ל־n מגירות

$$x_1+\cdots+x_n\leq k,\ \ x_i\geq 0$$

נרצה להפוך את האי־שיוויון לשיוויון ולכן נגדיר

$$x_{n+1}=k-(x_1+\cdots+x_n)$$

ולכן $x_{n+1}\geq 0$ (כי יש שם לכל היותר k כדורים) ונקבל $x_1+\cdots+x_n+x_{n+1}=k$ ולפי בעיית המנייה הרביעית מספר הפתרונות האפשריים למשוואה הזאת יהיו

$$\binom{k+(n+1)-1}{k}=\binom{k+n}{k}$$

שזה בידיוק אגף ימין.

$\square$

שאלה 6

סעיף א'

נחשב בכמה דרכים יכולים 8 ילדים לבחור כל אחד שתי חיות אהובות מרשימה של 5 חיות?

פתרון: כל ילד צריך לבחור שתי חיות (שונות זו מזו) כך שאין חשיבות לסדר הבחירה, אך לא ניתן לבחור פעמיים את אותה החיה ולכן זו בעיית המנייה השלישית – ללא חזרות וללא חשיבות לסדר.
אם כך, מספר האפשרויות לכל ילד יהיה

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 3} = \frac{5\cdot 4}{2} = 10$$

יש לנו 8 ילדים, וכל ילד לא מושפע מהבחירה של הילד לפניו (עם חזרות בבחירה של החיות) ויש חשיבות לסדר, אז זו בעיית המנייה הראשונה, ולכן בסך־הכל מספר הדרכים יהיה $10^8 = 100,000,000$. □

סעיף ב'

נחשב כמה דרכים יש לעשות את סעיף א' אם אסור לשני ילדים לבחור את אותו צירוף חיות.

הוכחה: בסעיף הקודם ראינו שיש 10 צירופים אפשריים לזוגות ואנחנו צריכים שכל בחירה תהיה חד־חד ערכית וזה בעצם מהווה לנו כתמורה: באופן שקול, זה מספר הדרכים לסדר 8 זוגות חד־חד ערכיים מתוך 10 אפשרויות וזו בעצם בעיית המנייה השנייה – ללא חזרות, עם חשיבות לסדר, כלומר עבור $n = 10$ ו־$k = 8$ נקבל שמספר האפשרויות היינו

$$\frac{10!}{(10-8)!} = \frac{\prod_{i=1}^{10} i}{2} = \prod_{i=3}^{10} i = 1814400$$

□