פתרון מטלה 09 — פונקציות מרוכבות, 80519

3 בינואר 2026

שאלה 1

בכל אחד מהסעיפים נקבע האם קיימת פונקציה שלמה (הולומורפית ב־$\mathbb{C}$) המקיימת את התנאי הנתון. אם כן, נמצא אותה ואם לא נפריך.
נשתמש במשפט היחידות השני: אם G תחום ו־$f \in \mathrm{Hol}(G)$ ונניח שקיים $z_0 \in G$ כך שיש סדרה $(z_n)_{n=1}^{\infty} \subset G$ כך ש־$z_n \to z_0$.
אם לכל n, $f(z_n) = 0$ אז $f \equiv 0$.

סעיף א'

$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{(-1)^n}{n}$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

הוכחה: נטען שלא קיימת פונקציה כזאת כי עבור כל $n \in \mathbb{N}$ זוגי מתקיים

$$f\left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2n}$$

כלומר זאת העתקת הזהות, אז נגדיר

$$g(z) \coloneqq f(z) - z$$

ונסתכל על הסדרה $z_n = \frac{1}{2n}$, נקבל

$$g\left(\frac{1}{2n}\right) = f\left(\frac{1}{2n}\right) - \frac{1}{2n} = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

נפעיל את משפט היחידות השני על g ונקבל $g \equiv 0$, כלומר $f(z) = z$, אבל עבור $n = 1$ נקבל

$$f\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{(-1)^1}{1} = -1 \neq 1$$

וזאת סתירה. □

סעיף ב'

$f(n) = (-1)^n n$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

הוכחה: כידוע, $e^{i\pi} = -1$ ולכן עם עיקרון דה־מואבר מההרצאה ראשונה

$$f(n) = (-1)^n n = \left(e^{i\pi}\right)^n n = e^{i\pi n} n$$

כלומר f היא שלמה כהרכבה ומכפלה של פונקציות שלמות. □

סעיף ג'

$f\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n}$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

הוכחה: ראשית נשים לב שמתקיים

$$f(0) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n^2}\right) = 0$$

אם נניח בשלילה שקיימת f כזאת אז היא צריכה להיות גזירה בראשית, כלומר

$$f'(0) = \lim_{n\to\infty} \frac{f\left(\frac{1}{n^2}\right) - f(0)}{\frac{1}{n^2} - 0} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} n = \infty$$

וזאת סתירה, אז אין אחת כזאת. □

סעיף ד'

$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{n+1}$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

הוכחה: מתקיים

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{\frac{1}{n} + 1}$$

ולכן אם נגדיר

$$g(z) := \frac{1}{z+1}$$

f, g אנליטיות ב־$\mathbb{C} \setminus \{-1\}$ ואם נבחר $z_n = \frac{1}{n}$ לכל $n \in \mathbb{N}$ ממשפט היחידות השני נקבל $f(z) = g(z)$.
כלומר

$$f(z) = \frac{1}{z+1}$$

אבל

$$\lim_{z \to -1} \frac{1}{z+1} = \infty$$

אז $g(z)$ לא הולומורפית ב־$\mathbb{C}$ ולכן בוודאי לא שלמה ולא ייתכן שיש f שלמה כזאת $\square$

שאלה 2

בכל סעיף נמצא את התחום בו ניתן לפתח את הפונקציה לטור לורן סביב הנקודה הנתונה ונמצא את הפיתוח.

טור לורן $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$ מתכנס בטבעת מהצורה

$$A_{r_-}^{r_+}(a) := \{z \in \mathbb{C} \mid r_- < |z-a| < r_+\}$$

עבור $0 \le r_- < r_+ \le \infty$.

סעיף א'

$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2}$ סביב $z_0 = i$.

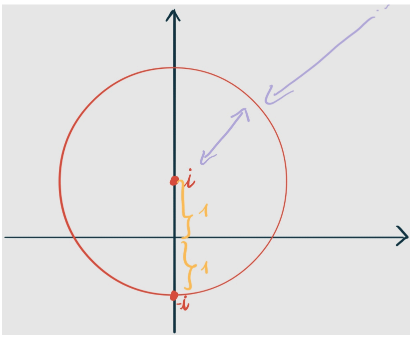
פתרון: ראשית f לא מוגדרת ב־$\pm i$ שכן

$$(z^2+1)^2 = ((z-i)(z+i))^2 = (z-i)^2(z+i)^2$$

וזו נקודה סינגולרית מסוג קוטב שכן

$$\lim_{z\to i}\left|\frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2}\right| = \left|\frac{1}{0\cdot(2i)^2}\right| = \infty$$

ולכן יש לנו שני תחומים שבהם הטור מתכנס A_0^2 שבו הטור לורן מתלכד עם הטור טיילור ו־A_2^∞.



איור 1: המחשה לתחום התכנסות

ראשית ניזכר בפיתוח טיילור הידוע

$$(\star)\ \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

אז אם נכתוב

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2} = \frac{1}{((z+i)(z-i))^2} = (z-i)^{-2}\cdot\frac{1}{(z+i)^2} = (z-z_0)^{-2}\cdot\frac{1}{(z+i)^2}$$

זה מבנה של טור טיילור

$$(x-x_0)^k\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^{n-k}$$

אז נפתח את טור טיילור של $\frac{1}{(z+i)^2}$ ונרצה להשתמש ב־$(\star)$ ובאריתמטיקה של טורי טיילור עם הרכבה.

נשים לב שניתן לכתוב

$$\frac{1}{(z+i)^2} = \frac{1}{(2i+(z-i))^2} = \frac{1}{\left(2i\cdot\frac{1}{2i}(2i+(z-i))\right)^2} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2i}(z-i)\right)^2}$$

נתעלם כרגע מה־$-\frac{1}{4}$ ונחזיר אותו בסוף התהליך כסקלר.

כמו־כן

$$\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2i}(z-i)\right)^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{-2i}{1+\frac{1}{2i}(z-i)}\right)$$

ולכן עם $(\star)$ ומהרכבה של פולינומי טיילור

$$\begin{aligned}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2i}(z-i)\right)^2} &= \sum_{m=1}^{\infty}(-2i)\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{2i}(z-i)}\right)\cdot(-1)^m \\ &= (-2i)\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\cdot(2i)^{-m}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z-i)^m \\ &= \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\cdot(2i)^{-(m+1)}\cdot m\cdot(z-i)^{m-1} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}(-2i)^{-m}\cdot(m+1)\cdot(z-i)^m\end{aligned}$$

כלומר מכך ש־$z_0 = i$ ועם ההחזרה של $-\frac{1}{4}$

$$f(z) = (z-z_0)^{-2}\cdot\frac{1}{(z+i)^2} = (z-z_0)^{-2}\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot(-2i)^{-m}\cdot(m+1)\cdot(z-z_0)^m$$

$$= -\frac{1}{4}\sum_{m=0}^{\infty}(-2i)^{-m}\cdot(m+1)\cdot(z-z_0)^{m-2} \underset{n=m+2}{=} -\frac{1}{4}\sum_{n=-2}^{\infty}(-2i)^{-n+2}\cdot(n+3)\cdot(z-z_0)^n$$

היה יכול להיות יותר קצר אם היינו משתמשים בפיתוח טיילור של סדרה בינומיאלית (היה מקצר מ־"כמו־כן").
עבור A_2^{∞} התהליך דומה אך שונה כי $(\star)$ נכון רק עבור $x \in (-1,1)$.
אז

$$\frac{1}{(z+i)^2} = \frac{1}{(z-i+2i)^2} = \frac{1}{(z-i)^2\left(1+\frac{2i}{z-i}\right)^2}$$

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)^4}\left(1+\frac{2i}{z-i}\right)^{-2}$$

ונשתמש בפיתוח טיילור של סדרה בינומיאלית שלילית כי בתחום זה הפרמטר קטן מ־1 בערך מוחלט.
אז

$$\binom{-2}{k} = (-1)^k(k+1)$$

ולכן

$$(1+x)^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^n$$

ובמקרה שלנו

$$\left(1+\frac{2i}{z-i}\right)^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)\left(\frac{2i}{z-i}\right)^n$$

ובסך־הכל

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)^4}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)\left(\frac{2i}{z-i}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(2i)^n(z-i)^{n-4}$$

□

סעיף ב'

$f(z) = \frac{z^2-6z+10}{z^2-7z+12}$ סביב $z_0 = 2$.

פתרון:

$\square$

שאלה 3

תהיי f שלמה ולא קבועה.

סעיף א'

נוכיח ש־$f(\mathbb{C})$ צפופה ב־$\mathbb{C}$.

הוכחה: ראשית בגלל ש־f שלמה ואיננה קבועה נובע ממשפט ליוביל שהיא לא חסומה (כי אם בשלילה f הייתה חסומה היינו עומדים בכל תנאי משפט ליוביל והיינו מקבלים ש־f קבועה, בסתירה לכך שהיא לא).

בשביל צפיפות עלינו להוכיח שלכל $w \in \mathbb{C}$ ו־$\varepsilon > 0$ יש $z \in \mathbb{C}$ כך ש־$|f(z) - w| < \varepsilon$.

נניח בשלילה ש־$f(\mathbb{C})$ איננה צפופה ב־$\mathbb{C}$ ולכן קיימים $w_0 \in \mathbb{C}$ ו־$\varepsilon > 0$ כך שלכל $z \in \mathbb{C}$ מתקיים $|f(z) - w_0| \geq \varepsilon$.

נגדיר

$$h(z) := f(z) - w_0,\ \ g(z) := \frac{1}{h(z)} = \frac{1}{f(z) - w_0}$$

ומכך ש־$h(z)$ אף־פעם לא מתאפסת מההנחה אז $g(z)$ מוגדרת היטב.

בנוסף, מכך ש־f שלמה והמכנה אינו מתאפס נובע כי גם $g(z)$ שלמה כהרכבה של פונקציות שלמות ומתקיים

$$|g(z)| = \left|\frac{1}{f(z) - w_0}\right| \leq \frac{1}{\varepsilon}$$

כלומר, $g(z)$ היא פונקציה קבועה ולכן אנחנו עומדים בתנאי משפט ליוביל ולכן קיים $c \in \mathbb{C}$ כך שמתקיים

$$\forall z \in \mathbb{C}, g(z) = c$$

ונובע מכך

$$g(z) = c \Longleftrightarrow \frac{1}{f(z) - w_0} = c \Longleftrightarrow f(z) = \frac{1}{c} + w_0$$

אבל זה בידיוק אומר ש־$f(z)$ היא פונקציה קבועה וזאת סתירה.

לכן $f(\mathbb{C})$ צפופה ב־$\mathbb{C}$. $\square$

סעיף ב'

נוכיח כי אם $g \in \mathrm{Hol}(U_a^*)$ בעלת סינגולריות עיקרית ב־$g \in \mathbb{C}$ אז ל־$f \circ g$ יש סינגולריות עיקרית ב־a.

הוכחה:

$\square$

שאלה 4

שאלה 5

תהיי $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ שלמה וחד־חד ערכית ונגדיר $g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ על־ידי $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$.

סעיף א'

נוכיח שהסינגולריות של g בראשית אינה סליקה.

הוכחה:

$\square$