פתרון מטלה 10 — חשבון אינפיניטסימלי 3, 80415

21 ביוני 2025

שאלה 1

תהיי $B \subseteq \mathbb{R}^k$ תיבה.

סעיף א'

נוכיח שלכל כיסוי $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ של B על־ידי תיבות מתקיים

$$\sum_{i=1}^{\infty} V(B_i) \geq V(B)$$

הוכחה: בהרצאה ראינו שעבור $B \subseteq \mathbb{R}^k$ תיבה מתקיים

$$B = \prod_{i=1}^{k} [a_i, b_i] \Rightarrow \mathrm{Vol}(B) = \prod_{i=1}^{k} (b_i - a_i)$$

יהי $\varepsilon > 0$ וניקח $B_\varepsilon \subseteq B$ כך שיתקיים

$$\mathrm{Vol}(B_\varepsilon) > \mathrm{Vol}(B) - \varepsilon$$

היות ו־$B \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ נובע כי $B_\varepsilon \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$.
B_ε היא קבוצה סגורה וחסומה ולכן יש לה תת־כיסוי סופי (כי היא קומפקטית) $B_\varepsilon \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} B_i$.
כעת, גם אם עבור $i \neq j \in [N]$ מתקיים $B_i \cap B_j \neq \emptyset$, מתקיים

$$\mathrm{Vol}(B_\varepsilon) \leq \sum_{i=1}^{N} \mathrm{Vol}(B_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{Vol}(B_i)$$

משמע

$$\mathrm{Vol}(B) - \varepsilon < \mathrm{Vol}(B_\varepsilon) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{Vol}(B_i)$$

היות וזה נכון לכל ε נקבל כאשר $\varepsilon \to 0$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{Vol}(B_i) \geq \mathrm{Vol}(B)$$

$\square$

סעיף ב'

נוכיח כי קיימת חלוקה של B לתיבות $\{B_i\}_{i=1}^{m}$ עבורן היחס בין הצלע הארוכה ביותר לצלע הקצרה ביותר הוא לכל היותר 2.
הוכחה: נתון $B = [a_1, b_1] \times \cdots [a_n, b_n]$ ונגדיר $B_i = [a_{i-1}, b_{i-1}] \times [a_i, b_i]$ ו־$\{B_i\}$ כיסוי סופי של B על־ידי תיבות.
לפי טענה שראינו בכיתה, קיימת $\{B_{i'}\}$ כיסוי של B על־ידי תיבות שנחתכות רק בשפה (שפה של תיבה היא ממידה אפס) ולכן נגדיר $C_i = B \cap B_i$
ונקבל ש־$\{C_i\}$ חלוקה סופית של B כך שמתקיים $C_i^\circ \cap C_j^\circ = \emptyset$ וכל חיתוך כזה הוא תיבה מהצורה $[b_n^i - a_n^i] \cdot \cdots \cdot [b_1^i - a_1^i] = C_i$ ואז

$$l_i = \min\left\{b_j^j - a_j^j \mid 1 \leq j \leq n\right\}, L_i = \max\left\{b_j^j - a_j^j \mid 1 \leq j \leq n\right\}$$

עבור C_1, אם $\frac{L_1}{l_1} \geq 2$ סיימנו. אחרת נפרק את הצלע ה־L_i בצורה הבאה, אם $m = \frac{b_j^j - a_j^j}{2}$ אז

$$L_i = \left[b_j^j - a_j^j\right] = \left[b_j^j - m\right] \times \left[m - a_j^j\right]$$

ואם עכשיו $\frac{L_i}{l_i} \geq 2$ סיימנו, ואם לא נחזור על התהליך.
נבחין שבסוף כן התהליך ייעצר: יש לנו כמות סופית של איברים לעשות עליהם את התהליך הזה ובשלב מסויים נחתוך קטן מספיק את הצלע.

$\square$

שאלה 2

סעיף א'

תהיי $K\subseteq\mathbb{R}^k$ קומפקטית ו־$f:K\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה, נזכור כי הגרף של f מוגדר באמצעות

$$\Gamma_f:=\left\{(x,f(x))\in\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}\mid x\in K\right\}$$

נוכיח כי Γ_f ממידה אפס.

הוכחה: K קומפקטית ולכן f רציפה במידה שווה, ולכן לכל $\varepsilon>0$ יש $\delta>0$ כך שלכל $x,y\in K$ מתקיים

$$\|x-y\|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\varepsilon$$

ניקח תיבה $B\subseteq\mathbb{R}^{k-1}$ כך ש־$K\subseteq B$ וניקח חלוקה $P=\{J_1,\cdots J_n\}$ חלוקה של B כך שלכל $J\in P$ מתקיים

$$\sup_{x,y\in J}\|x-y\|<\delta$$

ואז יתקיים

$$\Gamma_f=\left\{(x,f(x))\in\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}\mid x\in K\right\}\subseteq\bigcup_{J_i\cap K\neq\emptyset}J_i\times\left[\min_{J_i\cap K}f,\max_{J_i\cap K}f\right]$$

ואז גם יתקיים

$$V\left(J_i\times\left[\min_{J_i\cap K}f,\max_{J_i\cap K}f\right]\right)=V'(J_i)\cdot\left|\min_{J_i\cap K}f-\max_{J_i\cap K}f\right|<V'\varepsilon$$

כאשר V' הוא הנפח ה־$k-1$ מימדי.

משאלה 1 נקבל שמתקיים

$$V\left(\bigcup_{J_i\cap K\neq\emptyset}J_i\times\left[\min_{J_i\cap K}f,\max_{J_i\cap K}f\right]\right)\leq\sum_{i=1}^{n}V'(J_i)\varepsilon=V'(B)\varepsilon$$

וזה נכון לכל ε ולכן כאשר $\varepsilon\to0$ נקבל כי Γ_f ממידה אפס (כי הנפח קטן מנפח של קבוצה ממידה אפס).

$\square$

סעיף ב'

תהיי $U\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה ו־$g:U\to\mathbb{R}$ גזירה ברציפות. נגדיר $A=g^{-1}(\{0\})$ ונניח כי $\nabla g(a)\neq0$ לכל $a\in A$.

נראה כי A ממידה אפס.

הוכחה: ראשית, כל תנאי משפט הפונקציה הסתומה מתקיימים ולכן קיימת סביבה פתוחה U_a ונוכל להשתמש במשפט הפונקציה הסתומה על סביבה זאת ולקבל

$$U_a=\{g(x,y)=0\}\underset{h\in C^1}{=}\left\{h(x)=y\mid x\in\mathbb{R}^{K-1},y\in\mathbb{R}\right\}$$

כלומר לכל $a\in A$ קיימת סביבה פתוחה U_a כך שניתן לתאר את g על־ידי גרף של פונקציה רציפה ואז מסעיף א' נקבל מידה אפס.

היות וזה נכון לכל $a\in A$, נטען שזה נכון גם לאיחודם: מסעיף ב' ומהעובדה שהמקור של קבוצה סגורה הוא קבוצה סגורה על פונקציה רציפה נובע שאנחנו מדברים על קבוצות קומפקטיות, ומהאיחוד מסעיף ב' נקבל איחוד בן־מנייה של קבוצות ממידה אפס הוא ממידה אפס. $\square$

סעיף ג'

נסיק כל כל תת־מרחב $V\subseteq\mathbb{R}^k$ ממימד $n<k$ הוא ממידה אפס.

הוכחה: יהי $V\subseteq\mathbb{R}^k$ תת־מרחב ממימד $n<k$, ניזכר שניתן לכתוב במקרה זה

$$V\simeq\mathbb{R}^n\simeq\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{n-m}$$

מספיק אם כך שניקח העתקה לינארית $T:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^{n-m}$ ואז $V=\left\{(x,T(x))\mid x\in\mathbb{R}^m\right\}$ ומסעיפים קודמים מכך שגרף של פונקציה הוא ממידה אפס נקבל ישירות ש־V ממידה אפס. $\square$

שאלה 3

תהיי $A \subseteq \mathbb{R}^k$ תיבה ו־$f : A \to \mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית כך שקיימת קבוצה $E \subseteq A$ ממידה אפס עבורה $f|_{A \setminus E} \equiv 0$.
נוכיח כי $\int_A f(x)dx = 0$.

הוכחה: f אינטגרבילית על A ולכן חסומה על A ולכן קיים $M \in \mathbb{R}$ כך ש־$0 < M$ שלכל $x \in A$ מתקיים $|f(x)| \leq M$.
תהיי P חלוקה של A ונרצה להראות שלכל $\varepsilon > 0$ מתקיים $\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,p) < \varepsilon$ וכן $\overline{S}(f,P), \underline{S}(f,P) < \varepsilon$ ומהגדרה נקבל אם כך שיתקיים $\int_A f(x)dx = 0$.
$E \subseteq A$ קבוצה ממידה אפס, מהגדרה נובע שלכל $\varepsilon > 0$ קיימת קבוצה בת־מנייה $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ של תיבות המכסות את E, כלומר $E \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_i$ ובנוסף מתקיים $\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{Vol}(B_i) < \frac{\varepsilon}{M}$.
ניקח $\{B_j\}_{j=1}^{N}$ תת־כיסוי סופי של E (קיים כזה בגלל ש־E ממידה אפס) וניקח חלוקה P של A כך שמתקיים לכל תיבה $R_i \in P$ אחד מהבאים

1. R_i מחוץ ל־$\bigcup_{j=1}^{N} B_j$
2. $R_i \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} B_j$

היות ו־$f(x)|_{A\setminus E} \equiv 0$, אז לכל $R_i \subseteq A \setminus E$ נקבל $\sup_{x\in R_i}|f(x)| = 0$ ולכן לכל $R_i \subseteq A \setminus \bigcup_{j=1}^{N} B_j$ מתקיים $f(x) \equiv 0$.
עבור כל R_i כך שמתקיים $R_i \cap E \neq \emptyset$, הם כולם מוכלים ב־$\bigcup_{j=1}^{N} B_j$ ולכן התרומה שלהם לסכומים תהיה

$$\sum_{R_i \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} B_j} \sup_{x\in R_i} |f(x)| \cdot \mathrm{Vol}(R_i) \leq M \cdot \sum_{j=1}^{N} \mathrm{Vol}\big(B_j\big) < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

עבור הסכום התחתון, התהליך זהה.
זה נכון לכל חלוקה P, אז מצאנו שמתקיים $\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,p) < \varepsilon$ וכן $\overline{S}(f,P), \underline{S}(f,P) < \varepsilon$ ומהגדרה נקבל אם כך שמתקיים $\int_A f(x)dx = 0$.

$\square$

שאלה 4

תהיי $f:[0,1]^2\to\mathbb{R}$ הפונקציה הנתונה על־ידי

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{q} & y\in\mathbb{Q} \text{ וגם } x=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q} \text{ שבר מצומצם}\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

נוכיח כי f אינטגרבילית ומקיימת $\int_{[0,1]^2}f(x,y)dxdy=0$.

הוכחה: ניזכר כי $\mathbb{Q}$ בת־מנייה ולכן קבוצת הנקודות (x,y) כך ש־$f(x,y)\neq 0$ היא קבוצה בת־מנייה (גם לכל $y\in\mathbb{Q}$, ערכי x עבורכם $x\in\mathbb{Q}$ שבר מצומצם הוא לכל היותר בן־מנייה (בת־מנייה או סופית) כתת־קבוצה של קבוצה בת־מנייה).

נסמן

$$E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid f(x,y)\neq 0\}$$

ומהנימוק לעיל E קבוצה בת־מנייה, ולכן ממידה אפס.

בנוסף, f רציפה בכל $[0,1]^2\setminus E$ (כי היא זהותית 0) ולכן E זה גם קבוצת נקודות האי־רציפות של f.

ראינו כי פונקציה היא אינטגרבילית אם ורק אם קבוצת נקודות האי־רציפות שלה היא ממידה אפס, ולכן f אינטגרבילית.

מכך ש־$f|_{[0,1]^2\setminus E}\equiv 0$, אנחנו עומדים בתנאי שאלה 3 ולכן $f|_{[0,1]^2}=0$ וממשפט פוביני לא משנה סדר האינטגרציה ולכן $\int_{[0,1]^2 f(x,y)dxdy=0}$. $\square$

שאלה 5

תהיי $Q = A \times B \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$ מכפלה של תיבות $A \subseteq \mathbb{R}^k, B \subseteq \mathbb{R}^n$ ותהיי $f : Q \to \mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית.
נגדיר $h : A \to \mathbb{R}$ על־ידי

$$h(x) = \overline{\int_B} f(x,y)dy$$

נוכיח כי לכל חלוקה P של Q מתקיים

$$\overline{S}(f,P) \geq \overline{\int_B} h(x)dx$$

הוכחה: תהיי P חלוקה של $Q = A \times B$ לתוך תיבות $R = R_i \times S_j$.
סכום רימן העליון נתון על־ידי

$$\overline{S}(f,P) = \sum_{i,j} \sup_{(x,y)\in R_i \times S_j} f(x,y) \cdot \mathrm{Vol}(R_i) \cdot \mathrm{Vol}\big(S_j\big) \underset{M_{ij} = \sup_{(x,y)\in R_i\times S_j} f(x,y)}{=} \sum_{i,j} M_{ij} \cdot \mathrm{Vol}(R_i) \cdot \mathrm{Vol}\big(S_j\big)$$

נקבע $x \in R_i$ ונעשה אינטגרציה על y, מתקיים

$$\sup_{y\in S_j} f(x,y) \leq \sup_{(x,y)\in R_i \times R_j} f(x,y) = M_{ij} \Rightarrow \sum_j \sup_{y \in S_j} \cdot \mathrm{Vol}\big(S_j\big) \leq \sum_j M_{ij} \cdot \mathrm{Vol}\big(S_j\big)$$

מהגדרה זה גם חסם של

$$\overline{\int_B} f(x,y)dy = h(x) \leq \sup_{x\in R_i} h(x)$$

היות ונפח הוא אי־שלילי מתקיים

$$\overline{\int_A} h(x)dx \leq \sum_i \sup_{x_i \in R_i} h(x) \cdot \mathrm{Vol}(R_i) \leq \sum_{i,j} M_{ij} \cdot \mathrm{Vol}(R_i) \cdot \mathrm{Vol}\big(S_j\big) = \overline{S}(f,P)$$

וזה נכון לכל חלוקה P. $\square$

שאלה 6

בכל סעיף נחשב את האינטגרל בעזרת משפט פוביני ונצדיק את השימוש.

סעיף א'

$\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln(x)}dx$ עבור $0<a<b$.

פתרון: נצדיק את השימוש במשפט פוביני:
נגדיר $f:[0,1]\times[a,b]\to\mathbb{R}$ על־ידי $f(x,y)=x^y$.
למה זה עוזר לנו? כי נסתכל על

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}x^y=x^y\ln(x)$$

ואז

$$\frac{x^b-x^a}{\ln(x)}=\int_a^b x^y dy$$

עכשיו, נבחן את $\lim_{x\to 0}\frac{x^b-x^a}{\ln(x)}$, בבירור כאשר $x\to 0^-$ הביטוי הנ"ל לא מוגדר ולכן הגבול מתבדר, אבל כאשר $x\to 0^+$ הגבול שואף ל־0 מאריתמטיקה של גבולות

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^b-x^a}{\ln(x)}=\frac{\lim_{x\to 0^+}\left(x^b-x^a\right)}{\lim_{x\to 0^+}(\ln(x))}=\frac{0}{-\infty}=0$$

אז הכל מוגדר כשאנחנו מסתכלים על $x\in[0,1]$. נקבל בעצם שמתקיים

$$\int_a^b x^y dy=\frac{x^b-x^a}{\ln(x)}$$

שזה בידיוק האינטגרל שרצינו לחשב, ולכן

$$\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln(x)}dx=\int_0^1\int_a^b x^y dydx$$

היות ו־$f(x,y)$ היא פונקציה רציפה על $[a,b]\times[0,1]$ ולכן ניתן להשתמש במשפט פוביני (זו גם קבוצה קומפקטית בעלת נפח כי השפה שלה היא איחוד של ישרים המרכיבים את המלבן), ונצטרך להשתמש במשפט פוביני כי האינטגרל הפנימי הוא אינטגרל לא אלמנטרי, על־כן נחשב

$$\int_0^1\int_a^b x^y dydx=\int_a^b\int_0^1 x^y dxdy=\int_a^b\left[\frac{x^{y+1}}{y+1}\right]_{x=0}^{x=1}dy=\int_a^b\frac{1^{y+1}}{y+1}dy=\left[\ln(y+1)\right]_{y=a}^{y=b}=\ln(b+1)-\ln(a+1)$$

גבולות האינטגרציה לא השתנו בגלל האי־תלות בין הפרמטרי אינטגרציה. $\square$

סעיף ב'

$\int_{[0,1]^2}\min\{x,y\}dxdy$.

פתרון: נצייר בתור התחלה את התחום שלנו

סימנתי בו כמה דברים: אנחנו מסתכלים על הישר $y=x$ ובעצם מחפשים מה קטן בין שני הערכים.
$[0,1]^2$ הוא ריבוע היחיד והוא מתחלק ל־2 חלקים: מתי $x\le y$ ובקטע זה המינימום הוא y ומתי $y\le x$ ובקטע זה המינימום שלנו הוא x.
אז $y=x$ פונקציה רציפה ולכן אינטגרבילית וריבוע היחידה הוא בעל נפח (השפה שלה היא איחוד של ארבעה ישרים) וריבוע היחידה הוא כמובן קבוצה קומפקטית.
כל תנאי משפט פוביני מתקיימים ולכן ניתן להשתמש במשפט.
אם־כך, יש לנו חלוקה של לתחומים בהתאם למינימום הנדרש ולכן אפשר לחשב עם פוביני

$$\int_{[0,1]^2}\min\{x,y\}=\underbrace{\int_0^1\int_0^y xdxdy}_{0\le x\le y\text{ המינימום כבול בתחום}}+\underbrace{\int_0^1\int_0^x ydydx}_{0\le y\le x\text{ המינימום כבול בתחום}}=\frac{1}{3}$$

$\square$

סעיף ג'

$\int_S e^{-x^2}dxdy$ כאשר $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le y\le 1, y\le x\le 1\}$.

פתרון: לפי הקבוצה S, האינטגרל הכפול שאנחנו מתבקשים לחשב הוא $\int_0^1\int_y^1 e^{-x^2}dxdy$, אבל הפונקציה הפנימית היא לא אלמנטרית ולכן עלינו להשתמש במשפט פוביני.

הפונקציה הפנימית היא כמובן $f(x,y)=e^{-x^2}$ שהיא פונקציה רציפה בתחום והקבוצה S היא בעלת נפח כי השפה שלה היא איחוד של שלושה ישרים: $y=0, y=1, x=1$, לכן תנאי משפט פוביני מתקיימים ואפשר לחשב את האינטגרל בחישוב לפי $dydx$, אז נצטרך להבין את התחום מחדש: מהיות $0\le y\le 1$ ומכך ש־$y\le x\le 1$ נובע כי $0\le x\le 1$ ולכן גם $0\le y\le x$, אז האינטגרל שנחשב יהיה

$$\int_0^1\int_y^1 e^{-x^2}dxdy=\int_0^1\int_0^x e^{-x^2}dydx=\int_0^1\left[e^{-x^2}y\right]_{y=0}^{y=x}dx=\int_0^1 xe^{-x^2}dx(\star)$$

נחשב את האינטגרל מימין באמצעות אינטגרציה בחלקים יחד עם

$$\int xe^{-x^2}dx \underset{\substack{u=x^2\\ \frac{du}{2}=xdx}}{=} \int\frac{1}{2e^u}du=\frac{1}{2}\int\frac{1}{e^u}du \underset{\substack{v=-u\\ -dv=du}}{=} \frac{1}{2}\int -e^v dv=-\frac{1}{2}e^v=-\frac{1}{2e^u}=-\frac{1}{2e^{x^2}}$$

ואז בחזרה ל־$(\star)$

$$(\star)\int_0^1 xe^{-x^2}dx=\left[-\frac{1}{2e^{x^2}}\right]_{x=0}^{x=1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2e}=\frac{1}{2}(1-e^{-1})$$

$\square$