

פתרון מטלה 08 – תורת ההסתברות 1, 80420

20 בדצמבר 2025



שאלה 1

יהי $1 \leq n$ ויהי $X \sim Unif(\{-n, \dots, n\})$.

נוכיח שאם $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ היא פונקציה זוגית (כלומר $f(x) = f(-x)$ לכל $x \in \mathbb{R}$), אז המשתנים המקריים $X, f(X)$ הם בלתי-מתואמים ונבחן האם הם בלתי-תלויים.

הוכחה: ראשית נגיד כי שני משתנים מקריים X, Y הם בלתי-מתואמים אם מתקיים

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = 0$$

ראשית נבחין

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i \in \{-n, \dots, n\}} i \mathbb{P}(X = i) \stackrel{X \sim Unif(\{-n, \dots, n\})}{=} \sum_{i \in \{-n, \dots, n\}} \frac{i}{2n+1} = \frac{1}{2n+1} \sum_{i \in \{-n, \dots, n\}} i = 0$$

ולכן בהכרח יתקיים

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(Xf(X)) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(f(X)) = \mathbb{E}(Xf(X))$$

נשאר לחשב את $\mathbb{E}(Xf(X))$, נזכר שראינו שאם $Y = f(X)$ אז

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k \in \text{supp}} f(k) \mathbb{P}(X = k)$$

ולכן אם נגדיר $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ על-ידי $g(X) = X$, אז g היא פונקציה אי-זוגית כי $g(-x) = -x$ לכל $x \in \mathbb{R}$. אז $h(X) = g(X) \cdot f(X)$ היא פונקציה אי-זוגית שכן

$$h(-X) = g(-X) \cdot f(-X) \stackrel{\substack{f \text{ זוגית} \\ g \text{ אי-זוגית}}}{=} -g(X) \cdot f(X) = -X \cdot f(X) = -h(X)$$

ולכן אם נסמן $Y = h(X)$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Xf(X)) &= \mathbb{E}(Y) = \sum_{i \in \{-n, \dots, n\}} h(i) \mathbb{P}(X = i) = \sum_{i=-n}^n if(i) \mathbb{P}(X = i) \stackrel{X \sim Unif(\{-n, \dots, n\})}{=} \frac{1}{2n+1} \sum_{i=-n}^n if(i) \\ &= \frac{1}{2n+1} \sum_{i=1}^n (-if(-i) + if(i)) \stackrel{f(-i)=f(i)}{=} \frac{1}{2n+1} \sum_{i=1}^n (-if(i) + if(i)) = 0 \end{aligned}$$

אז $X, f(X)$ בלתי-מתואמים.

נטען שלא בהכרח שהם בלתי-תלויים: ניקח $f(x) = x^2 = Y$ ונניח שהם בלתי-תלויים ולכן צריך להתקיים

$$\mathbb{P}(X = n, Y = n^2) = \mathbb{P}(X = n) \mathbb{P}(Y = n^2)$$

נשים לב שהסתברות $\mathbb{P}(X = n, Y = n^2)$ זו ההסתברות שגם $X = n$ וגם $Y = n^2$, אבל אם $X = n$ אז בהכרח $Y = n^2$ (כי $Y = f(X)$) אז

$$\mathbb{P}(X = n, Y = n^2) = \mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{2n+1}$$

מצד שני

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = n) \mathbb{P}(Y = n^2) &= \mathbb{P}(X = n) \mathbb{P}(X = n \text{ or } X = -n) \stackrel{\text{א-תלות}}{=} \mathbb{P}(X = n) (\mathbb{P}(X = n) + \mathbb{P}(X = -n)) \\ &= \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{2}{2n+1} = \frac{2}{(2n+1)^2} \end{aligned}$$

אבל לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$\frac{1}{2n+1} \neq \frac{2}{(2n+1)^2}$$

ולכן לא בהכרח שהמאורעות בלתי-תלויים.

□

שאלה 2

מטילים באופן בלתי-תלוי מטבע על כל משבצת בלוח משבצות בגודל $n \times n$.

יהי X_n המשתנה המקרי הסופר את מספר הריבועים מהצורה $\begin{bmatrix} H & H \\ H & H \end{bmatrix}$.

נחשב את התוחלת והשונות של X_n ונראה כי $\frac{X_n}{\mathbb{E}(X_n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$.

פתרון: נגדיר את המשתנה המקרי $X_{i,j}$ להיות המשתנה המקרי המציין שבמשבצת ה- (i, j) הטלת המטבע יצאה H , אז $X_{i,j} \sim \text{Ber}(\frac{1}{2})$ (המטבע הוגן).

נגדיר $Y_{i,j} = X_{i,j}X_{i+1,j}X_{i,j+1}X_{i+1,j+1}$ המשתנה המקרי שאומר שיש לנו ריבוע שכולו H שמתחיל בקורדינאטה (i, j) (כלומר, קורדינאטה זו היא הפינה השמאלית שלו).

מהיות ההטלות בלתי-תלויות, $Y_{i,j} \sim \text{Ber}(\frac{1}{2^4}) = \text{Ber}(\frac{1}{16})$ וכן $X_n = \sum_{1 \leq i,j \leq n-1} Y_{i,j}$.
כאשר האינדקסים נובעים מגבולות אפשריים של ריבועים על לוח מסדר $n \times n$ מלינאריות התוחלת נקבל

$$\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}\left(\sum_{1 \leq i,j \leq n-1} Y_{i,j}\right) = (n-1)^2 \mathbb{E}(Y_{1,1}) \stackrel{Y_{i,j} \sim \text{Ber}(\frac{1}{16})}{=} \frac{(n-1)^2}{16}$$

בשביל חישוב השונות עלינו למצוא את כל החפיפות האפשריות (כמובן שאם שני ריבועים של H יים אינם חופפים אז הם מייצגים הטלות בלתי-תלויות ולכן בלתי-מתואמות).

בדומה למטלה הקודמת, יש לנו חפיפה בין שני מרובעים בשתי צורות אפשריות:

1. יש לנו צורת L ולכן חולקים משבצת אחת

HHT

HHH

THH

2. חולקים 2 משבצות

$H \ H \ H$

$H \ H \ H$

נתייחס קודם למקרה השני כי הוא פשוט יותר, הוא קורה כאשר כל 6 הקורדינאטות הן הטלה של H כלומר $\mathbb{E}(Y_{i,j}Y_{k,l}) = \frac{1}{2^6}$ (שכן כמובן משתנה ברנולי נתמך על $\{0, 1\}$ ובריבוע הם אותו הדבר) ולכן

$$\text{Cov}(Y_{i,j}, Y_{k,l}) = \frac{1}{64} - \frac{1}{16^2} = \frac{1}{64} - \frac{1}{256} = \frac{3}{256}$$

מבחינת כמות חפיפות, יש לנו $(n-1)(n-2)$ חפיפות אופקיות וכן הנחיות ובסך-הכל $2(n-1)(n-2)$ חפיפות כאלו מהסוג הזה.

עבור המקרה הראשון, הוא קורה כאשר יש לנו 7 קורדינאטות שכולן קיבלו H , כלומר $\mathbb{E}(Y_{i,j}Y_{k,l}) = \frac{1}{2^7}$ ולכן

$$\text{Cov}(Y_{i,j}, Y_{k,l}) = \frac{1}{128} - \frac{1}{256} = \frac{1}{256}$$

נשאר לבחון כמה פעמים מקרה כזה קורה:

אם יש לנו מרובע שמתחיל ב- (i, j) אז ריבוע שחופף לו בדיוק בקורדינאטה אחת מתחיל ב- $(i+1, j+1)$, כלומר הגבולות שלנו מצטמצמים באחד מהקורדינאטות שאנחנו יכולים לקבל, כלומר יש $(n-2)^2$ אפשרויות כאלו (כמובן צריך לכפול ב-2 כי זה רק לחפיפה תחתונה לצורך העניין), ולכן

יש לנו $2(n-2)^2$ אפשרויות לחיתוכים של L .

אם-כך, מנוסחה לחישוב סכום שנויות מהיות

$$\text{Var}(X_n) = \text{Var}\left(\sum_{1 \leq i,j \leq n-1} Y_{i,j}\right) = \sum_{1 \leq i,j \leq n-1} \text{Var}(Y_{i,j}) + 2 \sum_{(i,j) < (k,l)} \text{Cov}(Y_{i,j}, Y_{k,l})$$

ראשית

$$Y_{i,j} \sim \text{Ber}\left(\frac{1}{16}\right) \Rightarrow \text{Var}(Y_{i,j}) = \frac{1}{16}\left(1 - \frac{1}{16}\right) = \frac{15}{256}$$

ולכן

$$\begin{aligned}
\text{Var}(X_n) &= (n-1)^2 \cdot \frac{15}{256} + 2 \left(2(n-1)(n-2) \cdot \frac{3}{256} + 2(n-2)^2 \cdot \frac{1}{256} \right) \\
&= \frac{15n^2 - 30n + 15}{256} + 2 \left(\frac{3n^2 - 9n + 6}{128} + \frac{n^2 - 4n + 4}{128} \right) = \frac{15n^2 - 30n + 15}{256} + \frac{4n^2 - 13n + 10}{64} \\
&= \frac{15n^2 - 30n + 15}{256} + \frac{4(4n^2 - 13n + 10)}{256} = \frac{15n^2 - 30n + 15 + 16n^2 - 52n + 40}{256} \\
&= \frac{31n^2 - 82n + 55}{256}
\end{aligned}$$

נשאר להראות $\frac{X_n}{\mathbb{E}(X_n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ יהי $\varepsilon > 0$ ונראה כי $\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{\mathbb{E}(X_n)} - 1\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ ממה שמצאנו אודות $\text{Var}(X_n)$ נובע כי קיים $C \in \mathbb{R}$ כך ש- $\text{Var}(X_n) \leq Cn^2$ ונקבל אם כך

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{\mathbb{E}(X_n)} - 1\right| \geq \varepsilon\right) = \mathbb{P}(|X_n - \mathbb{E}(X_n)| \geq \varepsilon \mathbb{E}(X_n)) \stackrel{\text{אי-שוויון צ'בישב}}{\leq} \frac{\text{Var}(X_n)}{\varepsilon^2 \mathbb{E}(X_n)^2} \leq \frac{Cn^2}{\varepsilon^2 \left(\frac{(n-1)^2}{16}\right)^2} = \frac{16Cn^2}{\varepsilon^2 (n-1)^4} = 0$$

שכן יש לנו ביטוי מהצורה

$$\frac{n^2}{n^4} = \frac{1}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

□

שאלה 3

יהיו X_1, X_2, \dots משתנים מקריים בלתי-תלויים כך ש- $X_i \sim \text{Ber}(\frac{1}{2})$.
נגדיר $Z_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ ו- $Y_i = \max(X_i, X_{i+1})$.

סעיף א'

נחשב את התוחלת והשונות של Z_n .

פתרון: ראשית נבחין כי $Y_i \in \{0, 1\}$ שכן $X_i \sim \text{Ber}(\frac{1}{2})$ ונפרט את המקרים האפשריים:

$$Y_i = 1 \iff \{X_i = X_{i+1} = 1\}, \{X_i = 1, X_{i+1} = 0\}, \{X_i = 0, X_{i+1} = 1\}$$

$$Y_i = 0 \iff \{X_i = X_{i+1} = 0\}$$

כלומר $Y_i = 0$ אם ורק אם $X_i = X_{i+1} = 0$ ו- $Y_i = 1$ אם לפחות אחד מ- X_i, X_{i+1} הם 1.
מהאי-תלות אנחנו יכולים להסיק שמתקיים $Y_i = 0$ בהסתברות של $\frac{1}{4}$ ו- $Y_i = 1$ בהסתברות של $\frac{3}{4}$, כלומר $Y_i \sim \text{Ber}(\frac{3}{4})$.
מלינאריות התוחלת נקבל

$$\mathbb{E}(Z_n) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n Y_i\right) = n \cdot \mathbb{E}(Y_1) = \frac{3n}{4}$$

בשביל השונות נשתמש כמובן בנוסחה לחישוב סכום שנויות

$$\text{Var}(Z_n) = \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n Y_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(Y_i) + 2 \sum_{i < j} \text{Cov}(Y_i, Y_j)$$

ראשית נבחין מהיות $Y_i \sim \text{Ber}(\frac{3}{4})$

$$\text{Var}(Y_i) = \frac{3}{4} \left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{3}{16}$$

כעת, נבחין כי המאורעות Y_i, Y_j בלתי-תלויים אם $j = i + 2$ שכן אז הם ערכים של פונקציות שמייצגות מאורעות בלתי-תלויים.
אז המקרה המעניין היחידי עבורו לחשב שונות זה המקרה של Y_i, Y_{i+1} :

$$\text{Cov}(Y_i, Y_{i+1}) = \mathbb{E}(Y_i Y_{i+1}) - \mathbb{E}(Y_i) \mathbb{E}(Y_{i+1})$$

נשים לב שלחשב את $\{Y_i Y_{i+1} = 1\}$ יותר קל לחשב עם המשלים, כלומר להוריד את המקרים הרעים:
 $\{Y_i Y_{i+1} = 0\}$ קורה אם $Y_i = 0$ או $Y_{i+1} = 0$ כאשר שניהם קורים אם ורק אם $X_i = X_{i+1} = 0$ או $X_{i+1} = X_{i+2} = 0$ כלומר אם ורק אם יש לנו את אחת מהשלשות הבאות

$$(X_i, X_{i+1}, X_{i+2}) \in \{000, 001, 100\}$$

נשים לב שכל מאורע כזה הוא מהסתברות של $\frac{1}{8}$, ולכן $\mathbb{P}(Y_i Y_{i+1} = 1) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$ ונקבל

$$\text{Cov}(Y_i, Y_{i+1}) = \frac{5}{8} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{5}{8} - \frac{9}{16} = \frac{1}{16}$$

כלומר הנוסחה שאנחנו מחשבים לפיה היא

$$\text{Var}(Z_n) = \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n Y_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(Y_i) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \text{Cov}(Y_i, Y_{i+1}) = \frac{3n}{16} + \frac{2(n-1)}{16} = \frac{5n-2}{16}$$

□

סעיף ב'

נוכיח שלכל $\varepsilon > 0$ מתקיים $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} Y_i - \frac{3}{4}\right| \geq \varepsilon\right) = 0$
הוכחה: מהסעיף הקודם אנחנו יכולים להסיק

$$2n \cdot \frac{3}{4} = \mathbb{E}(Z_{2n})$$

אז מהגדרת

$$Z_n = \sum_{i=1}^n Y_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{2n} Y_i = Z_{2n}$$

ולכן נקבל

$$\text{Var}(Z_{2n}) = \text{Var}\left(\sum_{i=1}^{2n} Y_i\right) = \sum_{i=1}^{2n} \text{Var}(Y_i) + 2 \sum_{i=1}^{2n-1} \text{Cov}(Y_i, Y_{i+1}) = \frac{6n}{16} + \frac{2(2n-1)}{16} = \frac{10n+2}{16}$$

ובסך־הכל

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} Y_i - \frac{3}{4}\right| \geq \varepsilon\right) = \mathbb{P}(|Z_{2n} - \mathbb{E}(Z_{2n})| \geq 2n\varepsilon) \stackrel{\text{אי־שוויון צ'בישב}}{\leq} \frac{\text{Var}(Z_{2n})}{4n^2\varepsilon^2} = \frac{\frac{10n+2}{16}}{4n^2\varepsilon^2} = \frac{10n+2}{64n^2\varepsilon^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

□

מאירתמטיקה של גבולות.

שאלה 4

יהיו X, Y משתנים מקריים ב- L^2 בעלתי תוחלת μ_X, μ_Y וסטיות תקן σ_X, σ_Y בהתאמה. נראה כי

$$\min\{\mathbb{E}((X - Z)^2) \mid Z \in \text{Span}(1, Y)\} = \mathbb{E}\left((X - \text{Proj}_{1,Y}(X))^2\right) = \sigma_X^2 - \frac{\text{Cov}(X, Y)^2}{\sigma_Y^2}$$

□

הוכחה: **TOD00000000000000000000**

שאלה 5

סעיף א'

יהי X משתנה מקרי בעל תוחלת 0 המקיים $|X| \leq M$ כמעט-תמיד עבור $M > 0$. נוכיח שלכל $t \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$\mathbb{E}(e^{tX}) \leq \exp\left(\frac{M^2 t^2}{2}\right)$$

הוכחה: נשחזר את ההוכחה מההרצאה בהתאם לשינויים הנדרשים.

ראשית מהיות $|X| \leq M$ מתקיים $-M \leq X \leq M$ ואם נגדיר את הפונקציה $f(x) = e^{tx}$ כפי שראינו בהרצאה היא פונקציה קמורה. אנחנו רוצים למתוח קו ישר בין $(-M, e^{-tM})$ ולבין (M, e^{tM}) בקטע $[-M, M]$, והמשוואה לקו-ישר נתונה על-ידי

$$y = \frac{e^{tM} - e^{-tM}}{2M}(x - (-M)) + e^{-tM} = \frac{x}{2M}(e^{tM} - e^{-tM}) + \frac{e^{tM} - e^{-tM}}{2} + e^{-tM} = \left(\frac{M+x}{2M}\right)e^{tM} + \left(\frac{M-x}{2M}\right)e^{-tM}$$

ומקמירות אנחנו יודעים שמתקיים

$$e^{tx} \leq \left(\frac{M+x}{2M}\right)e^{tM} + \left(\frac{M-x}{2M}\right)e^{-tM}$$

נפעיל על הביטוי הזה את התוחלת

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{tX}) &\leq \mathbb{E}\left(\left(\frac{M+X}{2M}\right)e^{tM} + \left(\frac{M-X}{2M}\right)e^{-tM}\right) \\ &\stackrel{(*)}{=} \left(\frac{M+\mathbb{E}(X)}{2M}\right)e^{tM} + \left(\frac{M-\mathbb{E}(X)}{2M}\right)e^{-tM} \\ &\stackrel{(**)}{=} \left(\frac{M}{2M}\right)e^{tM} + \left(\frac{M}{2M}\right)e^{-tM} \\ &= \frac{1}{2}e^{tM} + \frac{1}{2}e^{-tM} \\ &= \cosh(tM) \end{aligned}$$

כאשר $(*)$ נובע מלינאריות התוחלת, $(**)$ נובע מהיות $\mathbb{E}(X) = 0$.

אבל בהרצאה ראינו שלכל $t \in \mathbb{R}$ מתקיים $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \leq e^{\frac{x^2}{2}}$ (נובע מטור טיילור), אז בפרט עבור $x = tM$ נקבל

$$\cosh(tM) \leq e^{\frac{(tM)^2}{2}} = e^{\frac{t^2 M^2}{2}} = \exp\left(\frac{t^2 M^2}{2}\right)$$

כפי שהתבקשנו להראות. \square

סעיף ב'

יהיו X_1, X_2, \dots, X_n משתנים מקריים בלתי-תלויים ויהיו M_1, M_2, \dots, M_n מספרים חיוביים כך שלכל $i \in [n]$ מתקיים $|X_i| \leq M_i$ כמעט-תמיד ו- $\mathbb{E}(X_i) = 0$.

נוכיח כי לכל $a > 0$ מתקיים

$$\mathbb{P}(X_1 + X_2 + \dots + X_n \geq a) \leq \exp\left(-\frac{a^2}{2M}\right)$$

כאשר $M = M_1 + M_2 + \dots + M_n$.

הוכחה: נסמן $X = \sum_{i=1}^n X_i$, אז לכל $t > 0$ מתקיים

$$\mathbb{P}(X \leq a) = \mathbb{P}(e^{tX} \geq e^{ta}) \stackrel{\text{א-ישיבון מרקוב}}{\leq} e^{-ta} \mathbb{E}(e^{tX})$$

מהיות המשתנים בלתי-תלויים

$$\mathbb{E}(e^{tX}) = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}(e^{tX_i}) \stackrel{\text{סעיף קודם}}{\leq} \prod_{i=1}^n \exp\left(\frac{M_i^2 t^2}{2}\right) = \exp\left(\frac{t^2}{2} \sum_{i=1}^n M_i^2\right)$$

נרצה לחסום בצורה הדוקה יותר ולשים כך נשתמש בעובדה ש- $M = \sum_{i=1}^n M_i$ ומהיות כל $M_i > 0$ נקבל

$$\sum_{i=1}^n M_i^2 \leq \sum_{i=1}^n M_i M = M^2$$

אזי

$$\mathbb{E}(e^{tX}) \leq \exp\left(\frac{M^2 t^2}{2}\right)$$

ולכן

$$\mathbb{P}(X \leq a) \leq e^{-ta} \mathbb{E}(e^{tX}) \leq \exp\left(-ta + \frac{M^2 t^2}{2}\right)$$

בדומה להרצאה, כדי למקסם על ערך ה- t נגזור לפי t ונקבל

$$\frac{d}{dt} \left(-ta + \frac{M^2 t^2}{2}\right) = -a + M^2 t \implies t = \frac{a}{M^2}$$

כלומר

$$-ta + \frac{M^2 t^2}{2} \implies -\frac{a^2}{M^2} + \frac{M^2}{2} \cdot \frac{a^2}{M^4} = -\frac{a^2}{M^2} + \frac{a^2}{2M^2} = -\frac{a^2}{2M^2}$$

ולכן

$$\mathbb{P}(X \leq a) \leq \exp\left(-\frac{a^2}{2M^2}\right)$$

□

סעיף ג'

נסק את אי-שוויון הופדינג המוכלל: יהיו X_1, X_2, \dots, X_n משתנים מקריים בלתי-תלויים והיו M_1, M_2, \dots, M_n מספרים חיוביים כך שלכל $i \in [n]$ מתקיים $|X_i - \mathbb{E}(X_i)| \leq M_i$ כמעט-תמיד.

נסמן $X = X_1 + \dots + X_n$, $M = M_1 + \dots + M_n$ אז לכל $a > 0$ מתקיים

$$\mathbb{P}(X - \mathbb{E}(X) \geq a) \leq \exp\left(-\frac{a^2}{2M^2}\right)$$

הוכחה: נגדיר $Y_i = X_i - \mathbb{E}(X_i)$ לכל $i \in [n]$ אז Y_1, Y_2, \dots, Y_n הם משתנים מקריים בלתי-תלויים כך ש- $\mathbb{E}(Y_i) = 0$. נתון כי $|Y_i| = |X_i - \mathbb{E}(X_i)| \stackrel{a.s.}{\leq} M_i$ ולכן אם נגדיר $Y = \sum_{i=1}^n Y_i$ נוכל להשתמש בסעיף הקודם ולקבל

$$\mathbb{P}(Y \geq a) \leq \exp\left(-\frac{a^2}{2M^2}\right) \implies \mathbb{P}(X - \mathbb{E}(X) \geq a) \leq \exp\left(-\frac{a^2}{2M^2}\right)$$

כאשר \implies נובע מלינאריות התוחלת, שכן

$$Y = \sum_{i=1}^n Y_i = \sum_{i=1}^n (X_i - \mathbb{E}(X_i)) = \sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i) = \sum_{i=1}^n X_i - \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = X - \mathbb{E}(X)$$

□

סעיף ד'

אורנה בוחרת באקראי ובאופן אחיד מספר בין 0 ל-10, דפנה בוחרת באקראי מספר בין 0 ל-20 ודורית בוחרת באקראי מספר בין 0 ל-30, באופן בלתי-תלוי.

נשתמש בתוצאות הסעיף הקודם כדי לתת חסם מלרע להסתברות שסכום המספרים ששלושתן בחרו נמצא בין 0 ל-49.

פתרון: נסמן X_1, X_2, X_3 המספר שאורנה, דפנה ודורית בחרו בהתאמה ונסמן $X = X_1 + X_2 + X_3$.

ניזכר כי אם $Y \sim \text{Unif}([n])$ אז $\mathbb{E}(Y) = \frac{n+1}{2}$, הספירה שלנו כוללת את הקצוות ולכן

$$\mathbb{E}(X_1)_{X_1 \sim \text{Unif}([11])} = \frac{12}{2} = 6, \quad \mathbb{E}(X_2)_{X_2 \sim \text{Unif}([21])} = \frac{22}{2} = 11, \quad \mathbb{E}(X_3)_{X_3 \sim \text{Unif}([31])} = \frac{32}{2} = 16$$

לכן כמעט-תמיד מתקיים

$$|X_1 - \mathbb{E}(X_1)| \leq 6, \quad |X_2 - \mathbb{E}(X_2)| \leq 11, \quad |X_3 - \mathbb{E}(X_3)| \leq 16$$

ומהסעיף הקודם נקבל

$$\mathbb{P}(X \geq 50) = \mathbb{P}(X - \mathbb{E}(X) \geq 17) \leq \exp\left(-\frac{17^2}{2(6^2 + 11^2 + 16^2)}\right) = \exp\left(-\frac{289}{826}\right)$$

□

שאלה 6

שיכור עומד על ציר המספרים השלמים. הוא מטיל מטבע שנופל על עץ בהסתברות q . אם יוצא לו עץ הוא הולך שני צעדים ימינה ואם יוצא לו פלי הוא הולך צד אחד שמאלה. הוא מבצע n הטלות מטבע כאלו באופן בלתי-תלוי. יהי X_n מיקומו אחרי n הצעדים האלו. נמצא עבור אילו ערכים של q ניתן לחסום בצורה לא טריוויאלית את $\mathbb{P}(X_n \geq 0)$ בעזרת אי-שיוויון הופדינג ונמצא מהו החסם שמתקבל.

פתרון: **TODOOOOOOOOOOOOOOOOOO**

□

שאלה 7

עבור $f: \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$ המקיימת

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = a \leq \infty$$

נגדיר משתנה מקרי X הנתמך על $\mathbb{Z} \setminus 0$ בעל פונקציית ההתפלגות הנקודתית

$$p_{\mathbb{Z}} = \frac{f(|z|)}{2a}$$

לכל $N \in \mathbb{N}$ ו- $\varepsilon > 0$ נגדיר

$$p_{N,\varepsilon} := \mathbb{P}\left(\left|\frac{\sum_{n=1}^N X_n}{N}\right| \leq \varepsilon\right)$$

עבור X_1, X_2, \dots, X_n בלתי-תלויים ושווי התפלגות ל- X .

נאמר כי X מקיים את מסקנת החוק החלש אם לכל $\varepsilon > 0$ מתקיים $\lim_{N \rightarrow \infty} p_{N,\varepsilon} = 1$.

נראה כי עבור $f(n) = \frac{1}{n^2 \log(n)}$ המשתנה X מקיים את מסקנת החוק החלש על-אף שאינו עומד בתנאי משפט החוק החלש ונסיק כי החוק החלש אינו משפט של אם ורק אם.

הוכחה: **TODOOOOOOOOOOOOOOOOOOO**

□