הכנה למבחן — משפטים והוכחות נבחרים — תורת ההסתברות 1, 80420

16 בינואר 2026

משפט 0.1 (אי־שוויון בול):

הוכחה: $\square$

משפט 0.2 (רציפות פונקציית ההסתברות):

הוכחה: □

משפט 0.3 (נוסחת ההסתברות השלמה במונחי הסתברות מותנית):

הוכחה: □

משפט 0.4 (כלל בייס):

הוכחה: $\square$

משפט 0.5 (לקט תכונות של אי־תלות):

הוכחה: □

משפט 0.6 (שוויון כמעט־תמיד גורר שיוויון התפלגויות):

הוכחה: □

משפט 0.7 (שיוויון התפלגויות נשמר תחת הפעלת פונקציה):

הוכחה: $\square$

משפט 0.8 (הצלחה ראשונה בסדרת ניסויי ברנולי בלתי־תלויים מתפלג גיאומטרי):

הוכחה: □

משפט 0.9 (חוסר זיכרון של התפלגות גיאומטרית):

הוכחה: □

משפט 0.10 (סכום משתנים ברנולי בלתי־תלויים מתפלג בינומית):

הוכחה: □

משפט 0.11 (חיבור משתנים מקריים בינומיים בלתי־תלויים):

הוכחה: $\square$

משפט 0.12 (פואסון כגבול של בינומי במובן הנקודתי):

הוכחה: □

משפט 0.13 (נוסחת התוחלת השלמה): תהיי $\mathcal{A}$ חלוקה בת־מנייה של מרחב הסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ויהי X משתנה מקרי בעל תוחלת סופית על מרחב זה. אז

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{A\in\mathcal{A}} \mathbb{E}(X\mathbb{1}_A)$$

הוכחה: נוכיח עבור X בדיד: $\mathcal{A}$ חלוקה ולכן $\sum_{A\in\mathcal{A}} \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_\Omega = 1$ ולכן גם $\sum_{A\in\mathcal{A}} X\mathbb{1}_A = X$ ונחשב

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}\left(\sum_{A\in\mathcal{A}} X\mathbb{1}_A\right) \underset{\text{הגדרת התוחלת}}{=} \sum_{x\in\mathbb{R}} x\mathbb{P}\left(\sum_{A\in\mathcal{A}} X\mathbb{1}_A\right) \underset{\text{הסתברות שלמה}}{=} \sum_{x\in\mathbb{R}} x \sum_{A\in\mathcal{A}} \mathbb{P}(X\mathbb{1}_A = x)$$

$$\underset{\substack{\text{שינוי סדר סכימה}\\\text{בטור מתכנס בהחלט}}}{=} \sum_{A\in\mathcal{A}}\sum_{x\in\mathbb{R}} x\mathbb{P}(X\mathbb{1}_A = x) \underset{\text{הגדרת התוחלת}}{=} \sum_{A\in\mathcal{A}} \mathbb{E}(X\mathbb{1}_A)$$

כאשר השיוויון של הסתברות שלמה נובע מכך שלכל $x \neq 0$

$$\dot\bigcup_{A\in\mathcal{A}} \{X\mathbb{1}_A = x\} = \dot\bigcup_{A\in\mathcal{A}} (\{X = x\} \cap A) = \{X = x\}$$

$\square$

משפט 0.14 (נוסחת סכום לשונות): לכל אוסף $(X_k)_{k\in[n]}$ של משתנים מקריים מתקיים

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_k\right) = \sum_{\ell,k\le n} \mathrm{Cov}(X_k,X_\ell) = \sum_{k\le n} \mathrm{Var}(X_k) + 2\sum_{k<\ell\le n} \mathrm{Cov}(X_k,X_\ell)$$

בכל מקרה בו אגף ימין מוגדר היטב.

תזכורת:

$$\mathrm{Var}(X) \coloneqq \mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$
$$\mathrm{Cov}(X,Y) \coloneqq \mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y))) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

הוכחה: נמרכז את המשתנים המקריים $\{X_k\}$ על־ידי $\overline{X_k} = X_k - \mathbb{E}(X_k)$ ולכן

$$\mathbb{E}\left(\overline{X_k}\right) = 0$$
$$\mathrm{Var}\left(\overline{X_k}\right) = \mathbb{E}\left(\overline{X_k}^2\right)$$
$$\mathrm{Cov}\left(\overline{X_k},\overline{X_\ell}\right) = \mathbb{E}\left(\overline{X_k X_\ell}\right)$$

מתקיים

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{k=1}^{n} \overline{X_k}\right) \underset{\text{אדישות להזזות}}{=} \mathrm{Var}\left(\sum_{k=1}^{n} \overline{X_k} - \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k)\right) = \mathrm{Var}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)$$

ונקבל אם־כך

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{k=1}^{n} \overline{X_k}\right) = \mathbb{E}\left(\left(\sum_{k=1}^{n} \overline{X_k}\right)^2\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} \overline{X_k X_\ell}\right) \underset{\text{לינאריות}}{=} \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} \mathbb{E}\left(\overline{X_k X_\ell}\right) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} \mathrm{Cov}(X_k,X_\ell)$$
$$= \sum_{k,\ell\le n} \mathrm{Cov}(X_k,X_\ell)$$

והשיוויון הימני נובע מהיות $\mathrm{Cov}(X,X) = \mathrm{Var}(X)$ והכנסה של ערכים אלו בסכום. $\square$

משפט 0.15 (אי־שיוויון מרקוב): יהי X משתנה מקרי אי־שלילי (כלומר $X \overset{a.s}{\geq} 0$) בעל תוחלת סופית. אזי לכל $a > 0$ מתקיים

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$$

הוכחה: נפעיל את נוסחת התוחלת השלמה על החלוקה $\{\{X<0\},\{X\in[0,a)\},\{a\leq X\}\}$ ונקבל

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X\mathbb{1}_{X<0}) + \mathbb{E}\Big(X\mathbb{1}_{X\in[0,a)}\Big) + \mathbb{E}(X\mathbb{1}_{X\geq a})$$

X הוא אי־שלילי ולכל $b \in \mathbb{R}$ מתקיים $X\mathbb{1}_{X\geq b} \overset{a.s}{\geq} b\mathbb{1}_{X\geq b}$ והרי

$$X\mathbb{1}_{X<0} \overset{a.s}{=} 0 \qquad X\mathbb{1}_{X\in[0,a)} \overset{a.s}{\geq} 0 \qquad X\mathbb{1}_{X\geq a} \overset{a.s}{\geq} a\mathbb{1}_{X\geq a}$$

וממונוטוניות התוחלת נקבל

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X\mathbb{1}_{X<0}) + \mathbb{E}\Big(X\mathbb{1}_{X\in[0,a)}\Big) + \mathbb{E}(X\mathbb{1}_{X\geq a}) \geq 0 + 0 + a\mathbb{E}(\mathbb{1}_{X\geq a}) = a\mathbb{P}(X \geq a)$$

$$\Longrightarrow \mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$$

$\square$

משפט 0.16 (אי־שיוויון צ'בישב): יהי X משתנה מקרי בעל שונות סופית. אז לכל $a > 0$ מתקיים

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{a^2}$$

הוכחה: נגדיר משתנה חדש $Y = (X - \mathbb{E}(X))^2$ וזה משתנה מקרי אי־שלילי המקיים $\mathbb{E}(Y) = \mathrm{Var}(X)$.
לכן לפי אי־שיוויון מרקוב לכל $b > 0$ מתקיים

$$\mathbb{P}(Y \geq b) \leq \frac{\mathbb{E}(Y)}{b} = \frac{\mathrm{Var}(X)}{b}$$

נשים לב $\{|X - \mathbb{E}(X)| \geq a\} = \{(X - \mathbb{E}(X))^2 \geq a^2\}$ ולכן בבחירת $b = a^2$ נקבל

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) = \mathbb{P}\big((X - \mathbb{E}(X))^2 \geq a^2\big) = \mathbb{P}(Y \geq a^2) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{a^2}$$

$\square$

משפט 0.17 (אי־שיוויון צ'רנוף): *יהי X משתנה מקרי בעל מומנט מעריכי. אזי לכל $t > 0$ עבורו $M_X(t)$ מוגדרת ולכל $a \in \mathbb{R}$ מתקיים*

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq M_X(t)e^{-ta}$$

תזכורת: יהי X משתנה מקרי. הפונקציה הממשית $M_X(t)$ הנתונה על־ידי

$$M_X(t) := \mathbb{E}(e^{tX})$$

לכל t עבורו התוחלת מוגדרת נקרא הפונקציה היוצרת מומנטים של X.

הוכחה: נשתמש באי־שיוויון מרקוב בשביל המשתנה המקרי החיובי e^{tX} ונקבל

$$\mathbb{P}(X \geq a) = \mathbb{P}(e^{tX} \geq e^{ta}) \underset{\text{אי־שיוויון מרקוב}}{\leq} \frac{\mathbb{E}(e^{tX})}{e^{ta}} = M_X(t)e^{-ta}$$

□

משפט 0.18 (אי־שיוויון הופדינג): יהיו $\{X_k\}_{k\in[n]}$ משתנים מקריים בלתי־תלויים ובעלי תוחלת אפס אשר מקיימים $|X_k| \overset{a.s}{\leq} 1$ לכל $k \in [n]$ אז

$$\forall d > 0, \ \left(\sum_{k\in[n]} X_k \geq d\right) \leq \exp\left(-\frac{d^2}{2n}\right)$$

משפט 0.19 (כפליות פונקציה יוצרת מומנטים עבור סכום משתנים מקריים בלתי־תלויים): יהיו X ו־Y משתנים מקריים בלתי־תלויים, אז

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t)$$

בתחום שבו $M_X(t), M_Y(t)$ שתיהן מוגדרות.

הוכחה: היות ואי־תלות נשמרת תחת הפעלת פונקצייה נובע כי e^{tX}, e^{tY} משתנים מקרים בלתי־תלויים. אז מכפליות התוחלת למשתנים בלתי־תלויים

$$\mathbb{E}\big(e^{t(X+Y)}\big) = \mathbb{E}\big(e^{tX}e^{tY}\big) = \mathbb{E}\big(e^{tX}\big)\mathbb{E}\big(e^{tY}\big)$$

□

משפט 0.20 (הלמה של הופדינג): יהי X משתנה מקרי המקיים $|X| \overset{a.s}{\leq} 1$ וכן $\mathbb{E}(X) = 1$. אז לכל $t \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$\mathbb{E}(e^{tX}) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$$

הוכחה: נקבע את t ונסמן ב־$L(x)$ את הפונקציה

$$L(x) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} + x\frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

הפונקציה e^{tx} כפונקציה של x היא בעלת נגזרת שנייה חיובית ולכן קמורה, אז לכל $x \in [-1, 1]$ מתקיים $e^{tx} \leq L(x)$.
ממונוטוניות ולינאריות התוחלת נקבל

$$\mathbb{E}(e^{tX}) \leq \mathbb{E}(L(X)) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} + \mathbb{E}(X)\frac{e^t - e^{-t}}{2} \underset{\mathbb{E}(X)=0}{=} \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

לכל $t \in \mathbb{R}$ מתקיים $\frac{e^t+e^{-t}}{2} \leq e^{\frac{t^2}{2}}$ וזה נובע מטור טיילור

$$\frac{e^t + e(-t)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n + (-t)^n}{n!} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^{2m}}{(2m)!} \leq \sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^{2m}}{(2^m m)!} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{t^2}{2}\right)^m}{m!} = e^{\frac{t^2}{2}}$$

□

הוכחה: אם־כך, נסמן $X = \sum_{k\in[n]} X_k$ ומתקיים מהטענות לעיל

$$M_X(t) = \prod_{k\in[n]} M_{X_k}(t) \leq \prod_{k\in[n]} \exp\left(\frac{t^2}{2}\right) = \exp\left(\frac{nt^2}{2}\right)$$

מאי־שיוויון צ'רנוף לכל $t > 0$

$$\mathbb{P}(X \geq d) \leq \exp\left(\frac{nt^2}{2} - td\right)$$

כדי למצוא t שימעזר את החסם נגזור את המעריך ונשווה לאפס

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{nt^2}{2} - td\right) = nt - d = 0 \Longrightarrow t = \frac{d}{n}$$

נקבל

$$\mathbb{P}(X \geq d) \leq \exp\left(\frac{n\left(\frac{d}{n}\right)^2}{2} - \left(\frac{d}{n}\right)d\right) = \exp\left(-\frac{d^2}{2n}\right)$$

□

משפט 0.21 (הלמה של פאטו): תהיי $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ סדרת מאורעות. אז

$$\mathbb{P}(\{A_i, a.e.\}) = \mathbb{P}\left(\liminf_{n\to\infty} A_n\right) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

$$\mathbb{P}(\{A_i, i.o.\}) = \mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) \geq \limsup_{n\to,r\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

הוכחה: ראשית נראה כי הטענה השנייה נובעת מנכונות הטענה הראשונה:

$$\mathbb{P}(\{A_i, i.o.\}) \underset{\{A_i,i.o.\}^c=\{A_i^c,a.e.\}}{=} 1 - \mathbb{P}(\{A_i^c, a.e.\}) \underset{\text{חלק ראשון}}{\geq} 1 - \liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n^c) = 1 - \liminf_{n\to\infty}(1 - \mathbb{P}(A_n)) = \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \lim_{n\to\infty} \inf_{i>n} \mathbb{P}(A_i) \geq \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i>n} A_i\right) \underset{\substack{\text{רציפות פונקציית ההסתברות} \\ \text{למאורעות עולים}}}{=} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{i>n} A_i\right) = \mathbb{P}(\{A_i, a.e.\})$$

$\square$

משפט 0.22 (הלמה הראשונה של בורל־קנטלי)**:** תהיי A_i סדרת מאורעות. אם $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) < \infty$ אז $\mathbb{P}(A_i, i.o.) = 0$.

הוכחה:

$$\mathbb{P}(A_i, i.o.) \underset{\substack{\text{רציפות פונקציית ההסתברות} \\ \text{למאורעות עולים}}}{=} \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i\right) \underset{\text{אי־שיוויון בול}}{\leq} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=n}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) = 0$$

כאשר השיוויון האחרון נובע מכך ש־$\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) < \infty$ אם ורק אם $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=n}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) = 0$. □

משפט 0.23 (הלמה השנייה של בורל־קנטלי): תהיי A_i סדרת מאורעות בלתי־תלויים. אם $\sum_{i=1}^{\infty} A_i = \infty$ אז $\mathbb{P}(A_i, i.o.) = 1$.

הוכחה:

$$\mathbb{P}(A_i, i.o.) = 1 - \mathbb{P}(A_i^c, a.e.) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{i=m}^{\infty} A_i^c\right) \underset{\substack{\text{רציפות פונקציית ההסתברות} \\ \text{למאורעות עולים}}}{=} 1 - \lim_{m\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=m}^{\infty} A_i^c\right)$$

אז מספיק שנראה שלכל $m \in \mathbb{N}$ מתקיים $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=m}^{\infty} A_i^c\right) = 0$ ואכן מהאי־תלות

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=m}^{\infty} A_i^c\right) \underset{\substack{\text{רציפות פונקציית ההסתברות} \\ \text{למאורעות עולים}}}{=} \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=m}^{n} A_i^c\right) = \lim_{n\to\infty} \prod_{i=m}^{n} (1 - \mathbb{P}(A_i)) \le \lim_{n\to\infty} \exp\left(-\sum_{i=m}^{n} \mathbb{P}(A_i)\right) = 0$$

כאשר האי־שיוויון נובע מכך ש־$1 + x \le e^x$ לכל x והשיוויון נובע מכך ש־$\sum_{i=m}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) = \infty \Longleftarrow \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) = \infty$ לכל m. $\square$

משפט 0.24 (החוק החלש של המספרים הגדולים):

הוכחה: □

משפט 0.25 (החוק החזק של המספרים הגדולים):

הוכחה: $\square$