פתרון מטלה 03 — תורת ההסתברות 1, 80420

15 בנובמבר 2025

שאלה 1

הגדרה 0.1 (מאורע מחזק): נאמר שמאורע A מחזק את מאורע B אם $\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)} > \mathbb{P}(B)$.

יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות.

סעיף א'

נפריך את הטענה שאם A מחזק את B ו־B מחזק את C אז A מחזק את C.

הוכחה: נניח שאנחנו במרחב הסתברות הוגן של הטלה של שתי קוביות.

נגדיר את מאורע A להיות המאורע שיצא 2 בקובייה הראשונה, את המאורע B להיות המאורע שיצא לפחות 2 בכל קובייה ואת מאורע C להיות המאורע שיצא לפחות 2 בקובייה השנייה.

נחשב ונראה שאכן המאורעות האלו עומדים בתנאי השאלה

$$\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(\{(\omega_1,\omega_2)\in[6]^2 \mid \omega_1 = 2, \omega_2 \in \{2,3,4,5,6\}\})}{\mathbb{P}(\{(\omega_1,\omega_2)\in[6]^2 \mid \omega_1 = 2\})} = \frac{\frac{5}{36}}{\frac{1}{6}} = \frac{5}{6} = \frac{30}{36} > \frac{25}{36} = \mathbb{P}(B)$$

$$\mathbb{P}(C \mid B) = \frac{\mathbb{P}(C\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(\{(\omega_1,\omega_2)\in[6]^2 \mid \omega_1,\omega_2 \in \{2,3,4,5,6\} \wedge \omega_2 \in \{2,3,4,5,6\})\})}{\mathbb{P}(\{(\omega_1,\omega_2)\in[6]^2 \mid \omega_1,\omega_2 \in \{2,3,4,5,6\}\})} = \frac{\frac{25}{36}}{\frac{25}{36}} = 1 > \frac{25}{36} = \mathbb{P}(C)$$

מצד שני

$$\mathbb{P}(C \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A\cap C)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(\{(\omega_1,\omega_2)\in[6]^2 \mid \omega_1 = 2, \omega_2 \in \{2,3,4,5,6\}\})}{\mathbb{P}(\{(\omega_1,\omega_2)\in[6]^2 \mid \omega_1 = 2\})} = \frac{\frac{5}{36}}{\frac{1}{6}} = \frac{5}{6} = \frac{30}{36} \not> \frac{30}{36} = \mathbb{P}(C)$$

אז הטענה לא נכונה. $\square$

סעיף ב'

נוכיח שאם A מחזק את B אז B מחזק את A.

הוכחה: ישירות מהגדרה מתקיים

$$\mathbb{P}(B \mid A) > \mathbb{P}(B) \iff \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)} > \mathbb{P}(B) \iff \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} > \mathbb{P}(A) \iff \mathbb{P}(A \mid B) > \mathbb{P}(A)$$

$\square$

סעיף ג'

נפריך את הטענה שאם $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות אחידה (בפרט Ω סופית) ואם יש מאורע B כך ש־$\mathbb{P}(B) > 0$ אז $(\Omega, \mathbb{P}_B)$ מרחב הסתברות אחידה.

הוכחה: ניקח שוב מרחב הסתברות של הטלת קובייה הוגנת בעלת 6 פאות.

נגדיר את המאורע B להיות שיצא $\{1,2,3\}$, המרחב שלנו כמובן אחיד ו־$\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$. אבל

$$\mathbb{P}_B(\{1\}) = \mathbb{P}(\{1\} \mid B) = \frac{1}{3} \neq 0 = \mathbb{P}(\{4\} \mid B) = \mathbb{P}_B(\{4\})$$

$\square$

סעיף ד'

נוכיח שאם $\left(\Omega, \mathcal{F} = 2^\Omega, \mathbb{P}\right)$ איננו מרחב הסתברות אחיד כאשר Ω סופית ויהי B מאורע כך ש־$\mathbb{P}(B) > 0$ אז $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_B)$ איננו מרחב הסתברות אחיד.

הוכחה: $|\Omega| \neq \emptyset$ (אחרת לא היה לנו מאורע B עם הסתברות חיובית) ולכן יש שתי אפשרויות: או ש־$B = \Omega$ ואז סיימנו מהנתון או ש־$B \neq \Omega$.

במקרה השני, נגדיר $A = \Omega \setminus B$ ומתקיים

$$\mathbb{P}_B(B) = 1 \neq 0 = \mathbb{P}_B(A)$$

$\square$

סעיף ה'

נוכיח שמתקיים $\mathbb{P}(A^c \mid B) = 1 - \mathbb{P}(A \mid B)$.

הוכחה: נשים לב שניתן לכתוב

$$B = \Omega \cap B = (A \cup A^c) \cap B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$$

נשים לב שמהגדרה נובע כי $A \cap B$ ו־$A^c \cap B$ הם מאורעות זרים (זה פשוט מהגדרת המשלים) ולכן $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A^c \cap B)$.
אם כך, מתקיים

$$\mathbb{P}(A^c \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A^c \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = 1 - \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = 1 - \mathbb{P}(A \mid B)$$

$\square$

סעיף ו'

נפריך את הטענה שאם $\mathbb{P}(A \mid B^c) = 1 - \mathbb{P}(A \mid B)$.

הוכחה: ניקח את מרחב ההסתברות שלנו להיות מרחב הסתברות אחיד של הטלת קובייה הוגנת בעלת 6 פעם אחת.
נגדיר את המאורע A להיות שיצא בהטלה $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, את המאורע B שיצאה תוצאה זוגית ו־B^c זה כמובן המאורע שיצאה תוצאה אי־זוגית.
נחשב

$$\mathbb{P}(A \mid B^c) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B^c)}{\mathbb{P}(B^c)} = \frac{\mathbb{P}(\{1,3,5\})}{\mathbb{P}(\{1,3,5\})} = 1 \neq \frac{1}{3} = 1 - \frac{4}{6} = 1 - \frac{\frac{2}{6}}{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{\mathbb{P}(\{2,4\})}{\mathbb{P}(\{2,4,6\})} = 1 - \mathbb{P}(A \mid B)$$

$\square$

שאלה 2

יהיו $A,B,C\subseteq\Omega$ שלושה מאורעות במרחב הסתברות $(\Omega,\mathbb{P})$.
נניח במובלע כי המאורע בו אנחנו מתנים הוא בעל הסתברות גדולה מ־0.

סעיף א'

נוכיח את הטענה שאם $A\subseteq B$ אז $\mathbb{P}(A)\le\mathbb{P}(A\mid B)$.

הוכחה: ממונוטוניות פונקציית ההסתברות ומהנתון כי $A\subseteq B$ נובע כי $\mathbb{P}(A)\le\mathbb{P}(B)$ וכן $\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A)$.
אז מתקיים

$$\mathbb{P}(A\mid B)=\frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}=\frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

כלומר מתקיים

$$\mathbb{P}(A)\le\frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

אבל $0<\mathbb{P}(B)\le 1$ ולכן $\frac{1}{\mathbb{P}(B)}\ge 1$ ובפרט $\frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}\ge\mathbb{P}(A)$ □

סעיף ב'

נוכיח שאם $A\subseteq B$ אזי $\mathbb{P}(A)\le\mathbb{P}(A\mid B)$.

הוכחה: שוב ממונוטוניות פונקציית ההסתברות, מהנתון $A\subseteq B$ נובע כי $\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(B)$ ולכן

$$\mathbb{P}(A\mid B)=\frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}=\frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)}=1$$

אז בהכרח שמתקיים גם $P(A)\le 1$ מהגדרת פונקציית ההסתברות. □

סעיף ג'

נפריך את הטענה שאם $A\cap B=\emptyset$ אז $\mathbb{P}(A)\le\mathbb{P}(A\mid B)$.

הוכחה: ניקח את מרחב ההסתברות האהוב עלינו של הטלת קובייה הוגנת בעלת 6 פאות ונגדיר את A להיות המאורע שתוצאת ההטלה היא זוגית ו־B המאורע שתוצאת ההטלה היא אי־זוגית.

אז כמובן שמתקיים $A\cap B=\emptyset$ וניזכר שמהגדרת פונקציית ההסתברות, $\mathbb{P}(\emptyset)=0$ וגם מתקיים

$$\mathbb{P}(A)=\frac{1}{2}\not\le 0=\frac{0}{\frac{1}{2}}=\frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}=\mathbb{P}(A\mid B)$$

□

סעיף ד'

נוכיח שמתקיים $\mathbb{P}(A\cap B\mid C)=\mathbb{P}(A\mid B\cap C)\mathbb{P}(B\mid C)$.

הוכחה: מתקיים

$$\mathbb{P}(A\cap B\mid C)=\frac{\mathbb{P}(A\cap B\cap C)}{\mathbb{P}(C)}$$

מצד שני

$$\mathbb{P}(A\mid B\cap C)\mathbb{P}(B\mid C)=\frac{\mathbb{P}(A\cap B\cap C)}{\mathbb{P}(B\cap C)}\frac{\mathbb{P}(B\cap C)}{\mathbb{P}(C)}=\frac{\mathbb{P}(A\cap B\cap C)}{\mathbb{P}(C)}=\mathbb{P}(A\cap B\mid C)$$

□

שאלה 3

סעיף א'

בשידה שלוש מגירות. באחת זוג גרביים שחורים, בשנייה זוג גרביים לבנים ובשלישית גרב שחור וגרב לבן.
נניח שבחרתי באקראי (בהסתברות אחידה) מגירה והוצאתי ממנה גרב באקראי והוא לבן, נבחן מה ההסתברות שגם הגרב השני במגירה הוא לבן.

פתרון: נרצה להשתמש בנוסחת ההסתברות השלמה בהסתברות מותנית.

נמספר את המגירות $1, 2, 3$ כאשר 1 המגירה עם זוג גרביים שחורים, 2 עבור המגירה עם זוג גרביים לבנים ו־3 למגירה בה יש גרב לבן וגרב שחור.
נגדיר את המאורע A_1 להיות המאורע שלפתי גרב לבן, A_2 המאורע שנשאר במגירה גרב לבן, B_1 המאורע שפתחתי את המגירה הראשונה, B_2 המאורע שפתחתי את המגירה השנייה ו־B_3 המאורע שפתחתי את המגירה השלישית.
נתחיל מלחשב את ההסתברות ששלפי גרב לבן:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1) &= \sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}(B_i)\mathbb{P}(A_1 \mid B_i) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(A_1 \mid B_1) + \mathbb{P}(B_2)\mathbb{P}(A_1 \mid B_2) + \mathbb{P}(B_3)\mathbb{P}(A_1 \mid B_3) \\ &= \frac{1}{3}\frac{\mathbb{P}(A_1 \cap B_1)}{\mathbb{P}(B_1)} + \frac{1}{3}\frac{\mathbb{P}(A_1 \cap B_2)}{\mathbb{P}(B_2)} + \frac{1}{3}\frac{\mathbb{P}(A_1 \cap B_3)}{\mathbb{P}(B_3)} \\ &= 0 + \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

שכן במגירה הראשונה יש רק גרביים שחורים, בשנייה רק לבנים ובשלישית לבן אחד ושחור אחד.
כעת נחשב את ההסתברות ששלפנו גרב לבן ונשאר גרב לבן במגירה, כלומר שוב מנוסחת ההסתברות השלמה להסתברות מותנית

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) &= \sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \mid B_i)\mathbb{P}(B_i) = \frac{1}{3}\left(\frac{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap B_1)}{\mathbb{P}(B_1)} + \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap B_2)}{\mathbb{P}(B_2)} + \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap B_3)}{\mathbb{P}(B_3)}\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\frac{1}{3}} + 0\right) = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

שכן במגירה הראשונה יש רק גרביים שחורים, בשנייה רק לבנים ובשלישית לבן אחד ושחור אחד.
נשאר לחשב אם כך

$$\mathbb{P}(A_2 \mid A_1) = \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)}{\mathbb{P}(A_1)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

□

סעיף ב'

נתון דלי עם k כדורים לבנים ו־k כדורים שחורים.
מוציאים $n < k$ כדורים ללא החזרות ולאחר מכן מוציאים את הכדור ה־$n+1$ במספר.
בהינתן שכל ה־n כדורים הראשונים היו לבנים, נחשב את ההסתברות שהכדור ה־$n+1$ הוא שחור.

פתרון: אנחנו רוצים לחשב את ההסתברות שבהינתן שהוצאנו n כדורים לבנים, הכדור ה־$n+1$ שהוצאנו הוא שחור.
אנחנו מוציאים ללא החזרות, אז השאלה שקולה ללהוציא כדור אחד שחור אחרי שהוצאנו n כדורים שאנחנו יודעים שהם לבנים מתוך כל המרחב מדגם שלנו, ואז זו הסתברות אחידה מעל המרחב מדגם המצומצם, כלומר

$$\mathbb{P}(\text{הכדור ה־}n+1\text{ הוא שחור}) = \frac{|\text{כמות כדורים שחורים}|}{|\text{כמות הכדורים בדלי}|} = \frac{k}{2k-n}$$

□

שאלה 4

יהי $(\Omega, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות ונשים לב שאנחנו **לא** מניחים שההסתברות של המאורעות היא חיובית (קרי, יכולה להיות 0).
תזכורת: נגיד ש־A, B שני מאורעות במרחב הסתברות הם בלתי־תלויים אם ורק אם $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

סעיף א'

נפריך את הטענה ששני מאורעות A, B הם בלתי־תלויים אם ורק אם הם זרים.
הוכחה: ניקח שוב את מרחב ההסתברות האהוב עלינו, מרחב הטלה אחת של קובייה הוגנת בעלת 6 פאות.
נגדיר את A להיות המאורע שיצא אחד מהבאים $\{1,2,3\}$ ואת B להיות Ω כלומר $B = \{1,2,3,4,5,6\}$.
אז מתקיים $A \cap B = A \neq \emptyset$ וכן

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$$

$\square$

סעיף ב'

נפריך את הטענה שאי־תלות היא יחס טרנזטיבי: בהינתן מאורעות A, B, C כך ש־A בלתי־תלוי ב־B ו־B בלתי־תלוי ב־C נראה ש־A תלוי ב־C.
הוכחה: ניקח הפעם את מרחב ההסתברות של קובייה **לא** הוגנת כך ש־$\mathbb{P}(\{1\}) = \mathbb{P}(\{2\}) = 0$ ולכל השאר יש הסתברות אחידה, כלומר $\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{4}$ עבור $\omega \in \{3,4,5,6\}$.
נגדיר את המאורעות הבאים לתוצאות ההטלה $A = \{1,3\}, B = \{1,2\}, C = \{3\}$, אכן מתקיים

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\{1\}) = 0 = \frac{1}{4} \cdot 0 = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$$
$$\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0 = 0 \cdot \frac{1}{4} = \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C)$$

מנגד

$$\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(\{3\}) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{16} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(C)$$

$\square$

סעיף ג'

נוכיח כי אם A בלתי־תלוי בעצמו אזי $\mathbb{P}(A) \in \{0,1\}$.
הוכחה: מההנחה ש־$\mathbb{P}(A)$ בלתי־תלוי בעצמו נובע שמתקיים

$$\mathbb{P}(A \cap A) = \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}^2(A)$$

אבל זה אפשרי אם ורק אם $\mathbb{P}(A) \in \{0,1\}$ שכן אין שני מספרים ממשיים אחרים שכשכופלים אותם בעצמם הם אינווריאנטים למכפלה. $\square$

סעיף ד'

נוכיח שאם A, B מאורעות בלתי־תלויים אזי A^c, B^c מאורעות בלתי־תלויים.
הוכחה:

$$\mathbb{P}(A^c \cap B^c) \underset{\text{כללי דה־מורגן}}{=} \mathbb{P}((A \cup B)^c) \underset{\text{משלים}}{=} 1 - \mathbb{P}(A \cup B) \underset{\text{נוסחאת הכלה והדחה}}{=} 1 - (\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B))$$
$$\underset{A,B \text{ אי־תלות של}}{=} 1 - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = (1 - \mathbb{P}(A))(1 - \mathbb{P}(B)) = \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B^c)$$

$\square$

סעיף ה'

נסתור את הטענה שאם A, B, C מאורעות בלתי־תלויים אזי $A \cup B$ ו־C בלתי־תלויים.

הוכחה: נניח שמרחב ההסתברות שלנו הוא מרחב הסתברות אחידה של הטלת שתי קוביות הוגנות בעלות 6 פאות כל אחת.

את המאורע A נגדיר להיות שתוצאת ההטלה הראשונה זוגית, את מאורע B להיות שתוצאת ההטלה השנייה היא זוגית ואת המאורע C להיות שסכום תוצאות שתי ההטלות הוא אי־זוגי.

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}((\omega_1, \omega_2) \mid \omega_1 \in \{2,4,6\}) = \frac{1}{2},$$
$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}((\omega_1, \omega_2) \mid \omega_2 \in \{2,4,6\}) = \frac{1}{2},$$
$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}((\omega_1, \omega_2) \mid (\omega_1 + \omega_2) \bmod 2 = 1)$$
$$= \mathbb{P}((\omega_1, \omega_2) \mid (\omega_1 \in \{1,3,5\} \wedge \omega_2 \in \{2,4,6\}) \vee (\omega_1 \in \{2,4,6\} \wedge \omega_2 \in \{1,3,5\})) = \frac{1}{2}$$

נראה כי המאורעות בלתי־תלויים

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}((\omega_1, \omega_2) \mid \omega_1, \omega_2 \in \{2,4,6\}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$
$$\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}((\omega_1, \omega_2) \mid \omega_1 \in \{2,4,6\}, \omega_2 \in \{1,3,5\}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)$$
$$\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}((\omega_1, \omega_2) \mid \omega_2 \in \{2,4,6\}, \omega_1 \in \{1,3,5\}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)$$

מצד שני

$$\mathbb{P}((A \cup B) \cap C) = 0 \neq \frac{1}{8} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \mathbb{P}(A \cup B)\mathbb{P}(C)$$

כאשר $\mathbb{P}((A \cup B) \cap C) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$ שכן סכום של שני מספרים זוגיים הוא תמיד זוגי. $\square$

סעיף ו'

נפריך את הטענה שאם A ו־C מאורעות בלתי־תלויים וכן B ו־C בלתי־תלויים אז $A \cup B$ ו־C בלתי־תלויים.

הוכחה: נשים לב שהסעיף הקודם מכליל את המקרה הזה.

ניקח את מרחב ההסתברות שלנו להיות מרחב ההסתברות של הטלת קובייה הוגנת בעלת 4 פאות הפעם, כלומר $\Omega = \{1,2,3,4\}$ ו־$\mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{4}$.

נגדיר $A = \{1,2\}, B = \{1,3\}, C = \{2,3\}$ ואכן

$$\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(\{2\}) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)$$
$$\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(\{3\}) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$$

אבל

$$\mathbb{P}((A \cup B) \cap C) = \mathbb{P}(\{1,2,3\} \cap \{2,3\}) = \mathbb{P}(\{2,3\}) = \frac{1}{2} \neq \frac{3}{8} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \mathbb{P}(A \cup B)\mathbb{P}(C)$$

$\square$

סעיף ז'

נוכיח שאם A ו־B מאורעות בלתי־תלויים וכן B ו־C בלתי־תלויים ובנוסף $A \cap B = \emptyset$ אז $A \cup B$ ו־C בלתי־תלויים.

הוכחה:

$$\mathbb{P}((A \uplus B) \cap C) = \mathbb{P}((C \cap A) \uplus (C \cap B)) = \mathbb{P}(C \cap A) + \mathbb{P}(C \cap B) \underset{\text{אי־תלות נתונה}}{=} \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(C)\mathbb{P}(B)$$
$$= \mathbb{P}(C)(\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)) \underset{\text{מאורעות זרים}}{=} \mathbb{P}(C)\mathbb{P}(A \uplus B)$$

$\square$

שאלה 5

שלושה שופטים מכריעים את גורלו של נאשם על־פי דעת רוב.
שניים מהשופטים מנוסים ומזהים נכונה את אשמתו של הנאשם בסיכוי של 90%.
האחרון איננו מנוסה ומזהה את נכונה את אשמתו של הנאשם בסיכוי של 60%.
נשווה בכל סעיף בין ההסתברויות לפסק דין נכון.

סעיף א'

החלטת כל שופט בלתי־תלויה.
פתרון: נסמן ב־ A_1, A_2, A_3 את המאורעות שבהם השופט הראשון, השני והשלישי בהתאמה שפטו כצדק.
אנחנו צריכים דעת רוב ולכן אנחנו מחפשים את המאורע שבו לפחות שני שופטים שפטו נכונה כאשר ידוע $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2) = \frac{9}{10}, \mathbb{P}(A_3) = \frac{6}{10}$.
ניזכר כי אם A ו־B מאורעות בלתי־תלויים אז גם A^c ו־B הם מאורעות בלתי־תלויים וכמובן גם בהתאם לאוסף מאורעות בלתי־תלויים כפי שראינו.
אז ההסתברות ששפטו שנכונה היא סכום ההסתברויות הבא

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}((A_1 \cap A_2 \cap A_3) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3^c) \cup (A_1 \cap A_2^c \cap A_3) \cup (A_1^c \cap A_2 \cap A_3)) \\
&= \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3^c) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2^c \cap A_3) + \mathbb{P}(A_1^c \cap A_2 \cap A_3) \\
&= \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3) + \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3^c) + \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2^c)\mathbb{P}(A_3) + \mathbb{P}(A_1^c)\mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3) \\
&= \left(\frac{9}{10}\right)^2 \cdot \frac{6}{10} + \left(\frac{9}{10}\right)^2 \cdot \frac{4}{10} + \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{6}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{6}{10} \\
&= \frac{486}{1000} + \frac{324}{1000} + \frac{54}{1000} + \frac{54}{1000} = \frac{918}{1000}
\end{aligned}$$

$\square$

סעיף ב'

נניח שהשופטים המנוסים מחליטים באופן בלתי־תלוי והשופט שאינו מנוסה בוחר באחד מהם באקראי ומצטרף להחלטתו.
פתרון: אנחנו מחפשים את ההסתברות שבה שיש רוב של לפחות שני שופטים ששופטים כצדק. נשים לב שבמקרה זה מתקיים

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \mathbb{P}(A_1^c \cap A_2 \cap A_3) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2^c \cap A_3) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3^c) \\
&= \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + 2\mathbb{P}(A_1^c \cap A_2 \cap A_3) \\
&\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + 2\mathbb{P}(A_1^c \cap A_2 \cap A_3)
\end{aligned}$$

נטען ש־ $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3^c) = 0$ שכן לפי תנאי השאלה לא אפשרי שרק השופט הלא מנוסה ייבחר לא נכון.
נטען גם ש־$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$ בגלל נתוני השאלה – אם שני השופטים המנוסים שפטו כצדק, השופט הלא מנוסה יכול לבחור פעם אחת בשופט אחד ופעם שנייה בשופט השני אז זה פשוט ההסתברות ששניהם יבחרו נכונה.
כעת נבחן את $\mathbb{P}(A^c \cap A_2 \cap A_3)$, זו ההסתברות של המקרה שבו שופט אחד מנוסה טעה ושופט שני מנוסה צדק והשופט הלא מנוסה בחר מביניהם בצורה אחידה, כלומר אנחנו מחפשים את $\mathbb{P}(A_3 \mid A_1^c \cap A_2)$, כלומר כדי שיהיה צדק אנחנו צריכים שהשופט הלא מנוסה יצטרף לשופט 2 שצדק, כלומר

$$\mathbb{P}(A_3 \mid A_1^c \cap A_2) = \frac{\mathbb{P}(A_1^c \cap A_2 \cap A_3)}{\mathbb{P}(A_1^c \cap A_2)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{9}{10}}{\frac{1}{10} \cdot \frac{9}{10}} = \frac{1}{2}$$

כמובן יש סימטרייה אם בחרנו שהשופט המנוסה הראשון טעה או השופט המנוסה השני טעה.
אז מהאי־תלות של שני השופטים המנוסים בסך־הכל מתקיים

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + 2\mathbb{P}(A_1^c \cap A_2 \cap A_3) = \left(\frac{9}{10}\right)^2 + 2\mathbb{P}(A_1^c)\mathbb{P}(A_2) \cdot \frac{1}{2} = \frac{81}{100} + \frac{9}{100} = \frac{9}{10}$$

$\square$

שאלה 6

שר האופים, שר המשקים ושר הטבעות יושבים בבית האסורים.
אחד הסוהרים מבשר להם כי למחרת היום אחד מהם יוצא להורג והיתר יוצאו לחופשי, ונניח כי לכל אחד מהם יסכוי שווה לעלות לגרדום.
באישון הלילה, שר הטבעות מבקש מהסוהר שיגלה לו את שמו של אחד האסירים האחרים שיצא לחופשי.
קיימות 2 אסטרטגיות אפשריות של הסוהר במידה והוא בוחר להיענות לבקשתו של שר הטבעות:

1. אם שר הטבעות לא יוצא להורג, הסוהר יגלה את שמו של האסיר האחר שאף הוא לא יוצא להורג. אם שר הטבעות כם יוצא להורג, אז הוא יבחר לגלות את שמו של אחד האסירים בהסתברות שווה
2. שר הטבעות יאמר את שמו של שר המשקים, אלא אם שר המשקים יוצא להורג, ואז הוא יאמר את שמו של שר האופים

סעיף א'

לטענת האסיר, אם הסוהר ייענה לבקשתו, לא ייחשף כל מידע לגביו משום שכבר ידוע שלפחות משני האסירים האחרים ישתחרר. הסוהר מסרב, מלפני שלטענתו לאחר שיגלה את שמו של אסיר כזה – סיכוייו של כל אחד מהנותרים להיהרג יעלה לחצי. נקבע מי צודק.

פתרון: □

סעיף ב'

בסופו של דבר מתרצה הסוהר ומודיע לשר הטבעות כי שר המשקים יצא לחופשי. שר הטבעות ממהר ומודיע לשר האופים כי מצב שניהם בכי רע כי כעת יש לכל אחד מהם סיכוי של $\frac{1}{2}$ לקפח את חייהם. נקבע האם הוא צודק ואם לא נמצא מי מהם סביר יותר שיוצא להורג.

פתרון: □