פתרון מטלה 09 — תורת המידה, 80517

1 בינואר 2026

שאלה 1

יהיו $(X,\mathcal{A},\nu)$ מרחב מידה σ־סופי עם הפירוק $X=\dot{\bigcup}_n X_n$ כאשר $\nu(X_n)<\infty$ ונגדיר

$$\mu(E):=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\nu(E\cap X_n)}{2^n(\nu(X_n)+1)}$$

בהרצאה הראינו כי μ סופית ו־$\mu \ll \nu$.

סעיף א'

נראה כי μ ו־ν שקולות, כלומר נראה שגם $\nu \ll \mu$.

הוכחה: עלינו להראות שלכל $E\in\mathcal{A}$, $\mu(E)=0 \Longrightarrow \nu(E)=0$.

אז תהיי $A\in\mathcal{A}$ כך שמתקיים $\mu(E)=0$, כלומר

$$\mu(E)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\nu(E\cap X_n)}{2^n(\nu(X_n)+1)}=0$$

ראשית נבחין שיש לנו סכום של ערכים אי־שליליים ולכן הוא אפס אם ורק אם כל המחוברים הינם אפס, כלומר לכל $n\in\mathbb{N}$

$$\frac{\nu(E\cap X_n)}{2^n(\nu(X_n)+1)}=0$$

נשים לב שהמכנה הוא מונוטוני עולה ממש כי $2^n\geq 2$ ובפרט $2^n\geq 2^{n-1}$ לכל $n\in\mathbb{N}$ ונתון כי $\nu(X_n)\geq 0$ אז הדרך היחידה שהשבר שלנו ייתאפס זה אם ורק אם המונה הוא אפס, כלומר לכל $n\in\mathbb{N}$ צריך להתקיים

$$(\star)\ \nu(E\cap X_n)=0$$

ומתקיים אם כך

$$\nu(E)=\nu(E\cap X)\underset{\sigma\text{-סופיות}}{=}\nu\left(E\cap\left(\dot{\bigcup_{n=1}^{\infty}}X_n\right)\right)=\nu\left(\dot{\bigcup_{n=1}^{\infty}}(E\cap X_n)\right)\underset{\text{אדטיביות המידה}}{=}\sum_{n=1}^{\infty}\nu(E\cap X_n)\underset{(\star)}{=}\sum_{n=1}^{\infty}0=0$$

כלומר מתקיים $\nu(E)=0$ ולכן $\nu\ll\mu$ וקיבלנו שהמידות שקולות. $\square$

סעיף ב'

נחשב את נגזרות רדון־ניקודים $\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\nu},\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$.

פתרון: נתחיל מלמצוא את נגזרת רדון־ניקודים $\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\nu}$, כאשר $h=\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\nu}$ היא הפונקציה המדידה היחידה (עד־כדי ν־כמעט תמיד) המקיימת

$$\mu(E)=\int_E h\,\mathrm{d}\nu$$

ראשית נשים לב

$$\nu(E\cap X_n)=\int_E \mathbb{1}_{X_n}\,\mathrm{d}\nu$$

ולכן

$$\mu(E)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n(\nu(X_n)+1)}\cdot\int_E\mathbb{1}_{X_n}\,\mathrm{d}\nu=\int_E\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathbb{1}_{X_n}}{2^n(\nu(X_n)+1)}}_{:=h}\mathrm{d}\nu$$

מותר לשנות את סדר האינטגרציה והסכום בגלל שהטור מתכנס בהחלט.

אז מצאנו פונקציה $h=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathbb{1}_{X_n}}{2^n(\nu(X_n)+1)}$ המקיימת $\mu(E)=\int_E h\,\mathrm{d}\nu$ ולכן מיחידות נגזרת רדון־ניקודים נקבל

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\nu}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathbb{1}_{X_n}(x)}{2^n(\nu(X_n)+1)}$$

עבור $\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$ נשתמש בגלל השרשרת שכן המידות שקולות והמרחב σ־סופי

$$\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu} = \left(\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\nu}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\nu}}$$

ולכן

$$\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{X_n}(x)(2^n(\nu(X_n)+1))$$

$\square$

שאלה 2

שאלה 3

שאלה 4

סעיף א'

נניח כי μ, ν מידון רדון על מרחב טופולוגי קומפקטי מקומי σ־קומפקטי.
הראו כי אם לכל U פתוחה מתקיים $\nu(U)=\mu(U)$ אז $\mu=\nu$.
הוכחה: יש לנו רגולריות פנימית שלכל U פתוחה מתקיים

$$\mu(U)=\sup\{\mu(K)\mid K\subset U, \text{קומפקטית } K\}$$
$$\nu(U)=\sup\{\nu(K)\mid K\subset U, \text{קומפקטית } K\}$$

תהיי $K\subset X$ קומפקטית, אבל X האוסדרוף ולכן קבוצות קומפקטיות הן סגורות, כלומר

$$\mu(K)=\inf\{\mu(U)\mid \text{פתוחה } U, K\subset U\}$$

מהנתון שלכל $\mu(U)=\nu(U)$ נובע כי

$$\mu(K)=\inf\{\mu(U)\mid K\subset U\}=\inf\{\nu(U)\mid K\subset U\}=\nu(K)$$

ולכן μ ו־ν מסכימות על קבוצות קומפקטיות.
מהיות X מרחב σ־קומפקטי נובע שכל קבוצה פתוחה יכולה להיכתב על־ידי איחוד בן־מנייה של קבוצות קומפקטיות ומהרגולריות הפנימית נקבל

$$\mu(U)=\sup\{\mu(K)\mid K\subset U, \text{קומפקטית } K\}$$

אבל לכל K קומפקטי, $\mu(K)=\nu(K)$ ולכן $\mu(U)=\nu(U)$.
אז בפרט לכל A קבוצת בורל

$$\mu(A)=\inf\{\mu(U)\mid A\subset U, \text{פתוחה } U\}=\inf\{\nu(U)\mid A\subset U, \text{פתוחה } U\}=\nu(A)$$

כלומר $\mu=\nu$. $\square$

סעיף ב'

נניח כי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ היא פונקציה דיפרנציאבילית עם נגזרות חלקיות רציפות, חד־חד ערכית ועל ועם $\det(D_xf)\neq 0$.
נסמן ב־λ_f את $f_*\lambda$ כאשר λ מידת לבג.
נראה כי $f_*\lambda\ll\lambda$ ונחשב את נגזרת רדון־ניקודים $\frac{\mathrm{d}f_*\lambda}{\mathrm{d}\lambda}$.
הוכחה: נעזר בהנחייה וננחש את h:

$$h(y):=\left|\det Df^{-1}(y)\right|$$

כי לפי כל הנתונים f היא דיפאומורפיזם ולכן זה מוגדר היטב וקיים והנחה טובה למשפט החלפת משתנה, אז נגדיר

$$\mu_h(A)=\int_A h\,\mathrm{d}\lambda$$

ואם נראה שמתקיים $\mu_h=f_*\lambda$ נקבל כי $f_*\lambda\ll\lambda$.
תהיי $B\subseteq\mathbb{R}^n$ כדור פתוח, אז מדחיפה קדימה של המידה

$$f_*\lambda(B)=\lambda\big(f^{-1}(B)\big)$$

אבל כמו שאמרנו f היא דיפאומורפיזם ולכן אם נפעיל את משפט החלפת משתנה על ההעתקה

$$f^{-1}:B\to f^{-1}(B)$$

נקבל

$$\lambda\big(f^{-1}(B)\big)=\int_B\left|\det Df^{-1}(y)\right|\mathrm{d}\lambda=\int_B h\,\mathrm{d}\lambda=\mu_h(B)$$

כלומר $f_*\lambda(B)=\mu_h(B)$ לכל כדור פתוח B.
אבל כל $U\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה יכולה להיכתב בתור איחוד בן־מנייה זר של כדורים פתוחים ולכן מאדטיביות המידה

$$f_*\lambda(U) = f_*\lambda\left(\dot{\bigcup_{k=1}^{\infty}} B_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} f_*\lambda(B_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_h(B_k) = \mu_h(U)$$

אז לכל U פתוחה

$$f_*\lambda(U) = \int_U h \,\mathrm{d}\lambda$$

כלומר $f_*\lambda$ ו־μ_h מסכימות על קבוצות פתוחות ולכן הן מסכימות על קבוצות בורל, כלומר

$$f_*\lambda = h \,\mathrm{d}\lambda$$

כלומר לכל $A \subset \mathbb{R}^n$ מדידה מתקיים

$$f_*\lambda(A) = \int_A h(x) \,\mathrm{d}\lambda$$

אבל אם A ממידה אפס

$$\int_A h \,\mathrm{d}\lambda = 0$$

לכל h שכן אינטגרציה היא ביחס למידה! אז

$$f_*\lambda(A) = 0 \Longrightarrow f_*\lambda \ll \lambda$$

$\square$