פתרון מטלה 03 — פונקציות מרוכבות, 80519

19 בנובמבר 2025

שאלה 1

נראה כי ההעתקה $z \mapsto \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2$ ו־$z \mapsto i\frac{1-z^2}{1+z^2}$ ממפות את החצי העליון של הדיסק לחצי מישור העליון.

הוכחה: קודם כל נכתוב מפורשות את התחומים הנדרשים

$$\mathbb{D}^+ = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1 \text{ and } Im(z) \geq 0\},\ \ H^+ = \{w \in \mathbb{C} \mid Im(w) > 0\}$$

השפה של $\mathbb{D}^+$ הם כל ה־$z \in \mathbb{C}$ המקיימים $|z| = 1$ או $Im(z) = 0$, נצטרך לכתוב את $\partial\mathbb{D}^+$ מפורשות ולכן ננתח את התנאים האלו, כלומר נרצה לכתוב פרמטריזציה של $z = e^{i\theta}$ ולמצוא תנאים מגבילים על θ.

התנאי $|z| = 1$ עם $Im(z) \geq 0$ אומר כי $\left|e^{i\theta}\right| = 1$ ולכן $e^{i\theta} = 1$ או $e^{i\theta} = -1$ ואנחנו יודעים שתנאים אלו מתקיימים אם $0 < \theta < \pi$.

כמו־כן, עם נוסחת אויילר ניתן לראות כי מתקיים $Im(z) \geq 0$:

$$z = e^{i0} = \cos(0) + i\sin(0) = 1 \Longrightarrow Im(z) = 0,$$
$$z = e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1 + 0 = -1 \Longrightarrow Im(z) = 0,$$
$$z = e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 + i \Longrightarrow Im(z) = 1$$

התנאי $|z| \leq 1$ עם $Im(z) = 0$ זו בעצם פונקציה לינארית ממשית עם $z = x$ עבור $-1 \leq x \leq 1$.

נסמן את התנאי $|z| = 1 \wedge Im(z) \geq 0$ ב־A ואת התנאי $|z| \leq 1 \wedge Im(z) = 0$ ב־B.

נסמן את ההעתקה $z \mapsto \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2$ על־ידי $f(z)$ ונבחין שזו הרכבה של העתקת מוביוס עם הפונקציה של ההעלאה בריבוע.

נכתוב $w_1 = \frac{1+z}{1-z}$ עבור $z = e^{i\theta}$ ונחשב בהתאם לשני המקרים שהגדרנו מקודם

$$w_1 = \frac{1+z}{1-z} = \frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = \frac{e^{\frac{i\theta}{2}}\left(e^{-\frac{i\theta}{2}} + e^{\frac{i\theta}{2}}\right)}{e^{\frac{i\theta}{2}}\left(e^{-\frac{i\theta}{2}} - e^{\frac{i\theta}{2}}\right)} = \frac{e^{-\frac{i\theta}{2}}\left(e^{\frac{i\theta}{2}} + e^{-\frac{i\theta}{2}}\right)}{e^{-\frac{i\theta}{2}}\left(e^{\frac{i\theta}{2}} - e^{-\frac{i\theta}{2}}\right)}$$

נעדיף את הנוסחה השנייה שכן בתרגול שראינו שמתקיים

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sin(z),\ \ \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2i} = \cos(z) \Longrightarrow w_1 = \frac{2\cos\left(\frac{z}{2}\right)}{2i\sin\left(\frac{z}{2}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{z}{2}\right)}{i\sin\left(\frac{z}{2}\right)}$$

תחת מקרה A, כמובן שהביטוי מוגדר היטב (אין חלוקה ב־0) וגם מתקיים ש־$Re(w_1) = 0$ כלומר w_1 הוא מהצורה ib עבור $b \in \mathbb{R}$.

כלומר, $w_1^2 = f(z) = -b^2$, כלומר כל הציר המדומה ממופה אל הציר הממשי השלילי.

תחת המקרה B, $-1 < z < 1$ ולכן $w_1 = \frac{1+z}{1-z} \in \mathbb{R}^+$ ולכן גם $w_1^2 = f(z) \in \mathbb{R}^+$ כלומר שוב מופנו לחלק הממשי רק שהפעם לחלק החיובי.

כלומר $\partial\mathbb{D}$ ממופה על־ידי f אל כל הישר הממשי.

נרצה לראות מה קורה בנקודות הפנימיות כדי לנתח לאן כל $\mathbb{D}$ נשלח. ניקח $z_0 = \frac{i}{2}$ ולכן

$$f(z_0) = \left(\frac{1+\frac{i}{2}}{1-\frac{i}{2}}\right)^2 = \left(\frac{2+i}{2-i}\right)^2 = \frac{(2+i)^2}{(2-i)^2} = \frac{3+4i}{3-4i}$$

לא עוזר לנו כל־כך, נחשב בדרך אחרת

$$\frac{2+i}{2-i} = \frac{(2+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{3+4i}{5} = \frac{3}{5} + \frac{4i}{5} \Longrightarrow \left(\frac{2+i}{2-i}\right)^2 = \left(\frac{3+4i}{5}\right)^2 = \frac{-7+24i}{25}$$

אז $Im(z) = \frac{24}{25} \geq 0$, ולכן ראינו שנקודה פנימית נשלחת ל־H^+ ונטען שזה מספיק כדי להראות ש־f ממפה את החצי העליון של הדיסק לחצי מישור העליון: f רציפה כהרכבה של פונקציות רציפות. ניקח z_0 נקודה בחצי הדיסק העליון ונבנה מסילה אל z_1 בחצי הדיסק העליון ונניח $w_0 = f(z_0)$ ממפה לחצי המישור העליון ונניח בשלילה ש־$w_1 = f(z_1)$ נשלחת לחצי המישור התחתון אז מרציפות f עם המסילה הרציפה שיצרנו נקבל מסילה בין w_0 לבין w_1, אבל אז המסילה הזאת בהכרח עוברת בשפה כלומר יש z_2 כך ש־$f(z_2)$ היא נקודה על הציר הממשי והמקור שלה הוא נקודה פנימית בחצי הדיסק העליון אבל אמרנו שרק נקודות על השפה של החצי דיסק העליון יכולות לשלוח לציר הממשי, ו־z_2 היא פנימית אז זאת כמובן סתירה.

נשאר לעשות את אותו התהליך עבור ההעתקה $z \mapsto i\frac{1-z^2}{1+z^2}$, נפרק אותה לשלוש העתקות שונות

$$z \underset{T_1}{\mapsto} z^2 = u \underset{T_2}{\mapsto} \frac{1-u}{1+u} = w \underset{T_3}{\mapsto} iw$$

כלומר שרשור העתקות החזקה, העתקת מוביוס ומכפלה ב־i. ננתח כל העתקה בנפרד:

ההעתקה $T_1(z) = z^2 = u$ לוקחת $z \in \mathbb{D}^+$ ושולחת אותו אל $\mathbb{D}$ דיסק היחידה המלא שכן אם $|z| < 1$ אז $\left|z^2\right| < 1$, כלומר נקודות פנימיות בחצי הדיסק העליון נשלחות לנקודות פנימיות בדיסק היחידה המלא ואם z בשפה אז $u = e^{i2\theta}$ מזהות דה־מואבר ולכן עבור $0 < \theta < \pi$ אנחנו נשלחים למעגל היחידה ואם $-1 < x < 1$ אז אנחנו נשלחים לקטע $[0,1)$.

כלומר, ההעתקה T_1 שולחת את חצי הדיסק העליון אל דיסק היחידה.

נסתכל כעת על $T_2(u) = \frac{1-u}{1+u} = w'$ זו בעצם שוב העתקת מוביוס.

אם נסתכל על הנקודות שעל מעגל היחידה (השפה של דיסק היחידה) אז $|u| = 1$ ולכן $|u| = 1 = u\overline{u}$, ונשים לב שמתקיים

$$\overline{\frac{1-u}{1+u}} = \frac{1-\overline{u}}{1+\overline{u}} = \frac{1-\frac{1}{u}}{1+\frac{1}{u}} = \frac{u-1}{u+1} \Longrightarrow \frac{u-1}{u+1} = \frac{-(1-u)}{1+u}$$

אז אם נסמן $w' = \frac{1-u}{1+u}$ קיבלנו שמתקיים $\overline{w'} = -w'$, וזה בהכרח אומר ש־w' הוא מהצורה $w' = ib$ עבור $b \in \mathbb{R}$, כלומר מעגל היחידה נשלח בידיוק אל הציר המדומה ובגלל ש־$Re(w') = 0$ זה נשלח לרביע הימני של חצי המישור העליון.

שוב מאותם טיעוני רציפות אם נסתכל על $u = 0$ נשים לב שמ־$w' = 1$ ינבע שנקודות פנימיות נשלחות לחצי המישור העליון כי $Re(u) > 0$, כלומר נשלח לרביע הימני בחצי המישור העליון.

נשארה ההעתקה האחרונה, $T_3(w') = iw' = w$.

ניזכר שאם כופלים ב־i מספר מרוכב אנחנו מסתובבים בפועל על הציר 90 מעלות **נגד** כיוון השעון ולכן זה לוקח ערכים מהרבע הימני של החצי מישור העליון בו $Re(w') > 0$ אל החצי מישור העליון בו $Im(w) > 0$ ובנקודות קצה בהן $Re(w') = 0$ אנחנו נשלחים בידיוק לציר הממשי בו $Im(w) = 0$.

זה בידיוק אומר ש־g גם שולחת את חצי הדיסק העליון לחצי המישור העליון. $\square$

שאלה 2

סעיף א'

תזכורת (זהות אוילר): לכל $z \in \mathbb{C}$ מתקיים

$$e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z)$$

נוכיח שלכל $z = a + ib \in \mathbb{C}$ מתקיים $e^z = e^a(\cos b + i\sin(b))$ ובפרט $e^z \neq 0$ לכל $z \in \mathbb{C}$.

הוכחה:

$$e^z = e^{a+ib} \underset{\text{סעיף ב'}}{=} e^a \cdot e^{ib} \underset{\text{זהות אוילר}}{=} e^a \cdot (\cos(b) + ib)$$

מהיות $e^a > 0$ לכל $a \in \mathbb{R}$ כפונקציה ממשית וחיובית, מתקיים גם

$$|e^z| = \left|e^a \cdot e^{ib}\right| \underset{(\star)}{=} |e^a| \cdot \left|e^ib\right| \underset{(\star\star)}{=} |e^a| \cdot 1 > 0$$

כאשר $(\star)$ זה תרגיל בסיכום של עדי: לכל $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ מתקיים $|w_1 \cdot w_2| = |w_1| \cdot |w_2|$.
וזה נכון בגלל שאם נכתוב $w_1 = x_1 + iy_1, w_2 = x_2 + iy_2$ אז

$$w_1 \cdot w_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2) \Longrightarrow |w_1 \cdot w_2| = \sqrt{(x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (x_1y_2 + y_1x_2)^2}$$
$$= \sqrt{x_1^2x_2^2 - 2x_1x_2y_1y_2 + y_1^2y_2^2 + x_1^2y_2^2 + 2x_1y_2y_1x_2 + y_1^2x_2^2} = \sqrt{x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 + x_1^2y_2^2 + y_1^2x_2^2}$$

מצד שני

$$|w_1| \cdot |w_2| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2} = \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)} = \sqrt{x_1^2x_2^2 + x_1^2y_2^2 + y_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2}$$

וזה מסיים ו־ $(\star\star)$ נובע מהחישוב

$$\left|e^{ib}\right| = |\cos(b) + i\sin(b)| = \sqrt{(\cos(b) + i\sin(b)) \cdot \overline{\cos(b) + i\sin(b)}} = \sqrt{(\cos(b) + i\sin(b))((\cos(b) - i\sin(b)))}$$
$$= \sqrt{\cos^2(b) + \sin^2(b)} = \sqrt{1} = 1$$

□

סעיף ב'

נוכיח שלכל $z, w \in \mathbb{C}$ מתקיים $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$.
הוכחה: יהיו $z, w \in \mathbb{C}$. ראינו

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

ולכן מצד אחד

$$e^z \cdot e^w = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{w^j}{j!}\right) \underset{\text{מכפלת קושי לטורים אינסופיים}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} c_k$$

כאשר

$$c_k = \sum_{l=0}^{k} \frac{z^l}{l!} \cdot \frac{w^{k-l}}{(k-l)!} = \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{k!} \cdot \frac{k!}{l!(k-l)!} z^l \cdot w^{k-l} \underset{\text{הבינום של ניוטון}}{=} \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} z^l \cdot w^{k-l} = \frac{(z+w)^k}{k!}$$

כלומר

$$e^z \cdot e^w = \sum_{k=0}^{\infty} c_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z+w)^k}{k!} \underset{\text{הגדרה}}{=} e^{z+w}$$

□

סעיף ג'

נוכיח שמתקיים $\sin(z) = 0 \iff z \in \{k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

הוכחה: ראינו שעבור $z \in \mathbb{C}$ מתקיים

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

אז

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 0 \iff e^{iz} - e^{-iz} = 0 \iff e^{iz} = e^{-iz} \underset{w=e^{iz}}{\iff} w = w^{-1} = \frac{1}{w} \iff w^2 = 1$$

כלומר $w = \pm 1$.

בהרצאה ראינו שמתקיים $e^i z = 1 \iff iz = 2\pi i\mathbb{Z}$ כלומר $z = 2\pi\mathbb{Z}$ וכן ראינו $e^{iz} = -1 \iff iz = i\pi + 2\pi i\mathbb{Z}$ כלומר $z = \pi + 2\pi\mathbb{Z}$.
במקרה אחד קיבלנו לכל כפולה זוגית של π עם $\mathbb{Z}$ ובמקרה השני קיבלנו לכל כפולה אי־זוגית של π עם $\mathbb{Z}$, במילים אחרות

$$\sin(z) = 0 \iff z \in \{2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{(2k+1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

$\square$

סעיף ד'

יהיו $z, w \in \mathbb{C}$ ונוכיח שמתקיים $\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$.

הוכחה: ראינו

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \ \ \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

ולכן

$$\cos(z+w) = \frac{e^{i(z+w)} + e^{-i(z+w)}}{2} = \frac{e^{iz+iw} + e^{-iz-iw}}{2} \underset{\text{סעיף ב'}}{=} \frac{e^{iz}e^{iw} + e^{-iz}e^{-iw}}{2}$$

מצד שני יש לנו

$$\begin{aligned}\cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w) &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} - \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} = \\ &\frac{e^{iz}e^{iw} + e^{iz}e^{-iw} + e^{-iz}e^{iw} + e^{-iz}e^{-iw}}{4} + \frac{e^{iz}e^{iw} - e^{iz}e^{-iw} - e^{-iz}e^{iw} + e^{-iz}e^{-iw}}{4} \\ &= \frac{e^{iz}e^{iw} + \cancel{e^{iz}e^{-iw}} + \cancel{e^{-iz}e^{iw}} + e^{-iz}e^{-iw} + e^{iz}e^{iw} - \cancel{e^{iz}e^{-iw}} - \cancel{e^{-iz}e^{iw}} + e^{-iz}e^{-iw}}{4} \\ &= \frac{2e^{iz}e^{iw} + 2e^{-iz}e^{-iw}}{4} = \frac{e^{iz}e^{iw} + e^{-iz}e^{-iw}}{2}\end{aligned}$$

כאשר האחרון שווה ל־$\cos(z+w)$ לפי מה שמצאנו. $\square$

סעיף ה'

יהיו $z, w \in \mathbb{C}$ ונוכיח שמתקיים $\sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$.

הוכחה: ראינו

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

ולכן

$$\sin(z+w) = \frac{e^{i(z+w)} - e^{-i(z+w)}}{2i} = \frac{e^{iz+iw} - e^{-iz-iw}}{2i} \underset{\text{סעיף ב'}}{=} \frac{e^{iz}e^{iw} - e^{-iz}e^{-iw}}{2i}$$

מצד שני יש לנו

$$\sin(z)\cos(w)+\cos(z)\sin(w)=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\frac{e^{iw}+e^{-iw}}{2}+\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i}$$

$$=\frac{e^{iz}e^{iw}+\cancel{e^{iz}e^{-iw}}-\cancel{e^{-iz}e^{iw}}-e^{-iz}e^{-iw}+e^{iz}e^{iw}-\cancel{e^{iz}e^{-iw}}+\cancel{e^{-iz}e^{iw}}-e^{-iz}e^{-iw}}{4i}$$

$$=\frac{2e^{iz}e^{iw}-2e^{-iz}e^{-iw}}{4i}=\frac{e^{iz}e^{iw}-e^{-iz}e^{-iw}}{2i}$$

כאשר האחרון שווה ל־$\sin(z+w)$ לפי מה שמצאנו. $\square$

שאלה 3

תזכורת: ראינו בהרצאה שהבאים מתקיימים

$$\cos(z)=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},\ \ \sin(z)=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},\ \ \cosh(z)=\cos(iz)=\frac{e^{z}+e^{-z}}{2},\ \ \sinh(z)=-i\sin(iz)=\frac{e^{z}-e^{-z}}{2}$$

סעיף א'

נניח $z=a+ib$ ונוכיח שמתקיים $\cos(z)=\cos(a)\cosh(b)-i\sin(a)\sinh(b)$

הוכחה: ראינו בהרצאה שהבאים מתקיימים

$$\cos(z)=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},\ \ \sin(z)=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},\ \ \cosh(z)=\cos(iz)=\frac{e^{z}+e^{-z}}{2},\ \ \sinh(z)=-i\sin(iz)=\frac{e^{z}-e^{-z}}{2}$$

מתקיים

$$\cos(z)=\cos(a+ib)\underset{\text{שאלה 2 סעיף ד'}}{=}\cos(a)\cos(ib)-\sin(a)\sin(ib)$$

אבל מהגדרת הפונקציות ההיפרבוליות מתקיים

$$\cos(ib)=\cosh(b),\ \ \sin(ib)=i\sinh(b)$$

ולכן

$$\cos(z)=\cos(a)\cos(ib)-\sin(a)\sin(ib)=\cos(a)\cosh(b)-i\sin(a)\sinh(b)$$

□

סעיף ב'

נניח $z=a+ib$ ונוכיח שמתקיים $\sin(z)=\sin(a)\cosh(b)+i\cos(a)\sinh(b)$.

הוכחה: באופן דומה לסעיף הקודם

$$\sin(z)=\sin(a+ib)\underset{\text{שאלה 2 סעיף ה'}}{=}\sin(a)\cos(ib)+\cos(a)\sin(ib)\underset{\substack{\cos(ib)=\cosh(b)\\ \sin(iz)=\frac{\sinh(z)}{-i}}}{=}\sin(a)\cosh(b)+\cos(a)\frac{\sinh(b)}{-i}$$

נשים לב שמתקיים

$$\frac{1}{-i}=\frac{1}{-i}\cdot\frac{i}{i}=\frac{i}{(-i)\cdot i}=\frac{i}{1}=i$$

ולכן

$$\sin(z)=\sin(a+ib)=\sin(a)\cosh(b)+\cos(a)\frac{\sinh(b)}{-i}=\sin(a)\cosh(b)+i\cos(a)\sinh(b)$$

□

סעיף ג'

לכל $z\in\mathbb{C}$ נוכיח שמתקיים $\cosh^2(z)-\sinh^2(z)=1$.

הוכחה: יהי $z\in\mathbb{C}$, מתקיים

$$\cosh^2(z)-\sinh^2(z)=\left(\frac{e^z+e^{-z}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^z-e^{-z}}{2}\right)^2=\frac{e^ze^z+2e^ze^{-z}+e^{-z}e^{-z}-e^ze^z+2e^{-z}e^z-e^{-z}e^{-z}}{4}$$
$$=e^{-z}e^{z}\underset{\text{שאלה 2 סעיף ב'}}{=}e^{-z+z}=e^0=1$$

□

סעיף ד'

יהי $z=a+ib$ ונוכיח שמתקיים $|\cos(z)|^2=\cos^2(a)+\sinh^2(b)$.

הוכחה: יהי $z=a+ib\in\mathbb{C}$, בסעיף א' ראינו שמתקיים

$$\cos(z)=\cos(a)\cosh(b)-i\sin(a)\sinh(b)$$

נשתמש בזה

$$\begin{aligned}|\cos(z)|^2=|\cos(a)\cosh(b)-i\sin(a)\sinh(b)|^2&=(\cos(a)\cosh(b)-i\sin(a)\sinh(b))\cdot\overline{\cos(a)\cosh(b)-i\sin(a)\sinh(b)}\\&=(\cos(a)\cosh(b)-i\sin(a)\sinh(b))\cdot(\cos(a)\cosh(b)+i\sin(a)\sinh(b))\\&=\cos^2(a)\cosh^2(b)+\sin^2(a)\sinh^2(b)\end{aligned}$$

בסעיף הקודם ראינו שמתקיים $\cosh^2(z)-\sinh^2(z)=1$ ולכן

$$\begin{aligned}\cos^2(a)\cosh^2(b)+\sin^2(a)\sinh^2(b)&=\cos^2(a)(1+\sinh^2(b))+\sin^2(a)\sinh^2(b)\\&=\cos^2(a)+\cos^2(a)\sinh^2(b)+\sin^2(a)\sinh^2(a)=\cos^2(a)+\sinh^2(b)(\cos^2(a)+\sin^2(a))\\&=\cos^2(a)+\sinh^2(b)\end{aligned}$$

כאשר $\cos^2(a)+\sin^2(a)=1$ זו זהות ידועה אבל נוכיח אותה כמו בסעיף הקודם:

$$\begin{aligned}\left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)^2+\left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)^2&=\frac{e^{iz}e^{iz}+2e^{iz}e^{-iz}+e^{-iz}e^{-iz}}{4}-\frac{e^{iz}e^{iz}-2e^{iz}e^{-iz}+e^{-iz}e^{-iz}}{4}\\&=\frac{4e^{iz}e^{-iz}}{4}=e^{iz}e^{-iz}\underset{\text{שאלה 2 סעיף ב'}}{=}e^{iz-iz}=e^0=1\end{aligned}$$

□

סעיף ה'

יהי $z=a+ib$ ונוכיח שמתקיים $|\sin(z)|^2=\sin^2(a)+\sinh^2(b)$.

הוכחה: יהי $z=a+ib\in\mathbb{C}$, בסעיף ב' ראינו שמתקיים

$$\sin(z)=\sin(a)\cosh(b)+i\cos(a)\sinh(b)$$

נשתמש בזה ונפעל כמו בסעיף הקודם

$$\begin{aligned}|\sin(z)|^2=|\sin(a)\cosh(b)+i\cos(a)\sinh(b)|^2&=(\sin(a)\cosh(b)+i\cos(a)\sinh(b))\cdot\overline{(\sin(a)\cosh(b)+i\cos(a)\sinh(b))}\\(\sin(a)\cosh(b)+i\cos(a)\sinh(b))\cdot(\sin(a)\cosh(b)-i\cos(a)\sinh(b))&=\sin^2(a)\cosh^2(b)+\cos^2(a)\sinh^2(b)\\&=\sin^2(a)(1+\sinh^2(b))+\cos^2(a)\sinh^2(b)=\sin^2(a)+\sin^2(a)\sinh^2(b)+\cos^2(a)\sinh^2(b)\\&=\sin^2(a)+\sinh^2(b)(\sin^2(a)+\cos^2(a))=\sin^2(a)+\sinh^2(b)\end{aligned}$$

□

שאלה 4

סעיף א'

תהיי $\left\{te^{i\frac{3\pi}{4}} \mid t\in[0,\infty)\right\}$ $\gamma =$. נבנה ונתאר ענף של הארגומנט עבור $G=\mathbb{C}\setminus\gamma$.

פתרון: נתחיל מלהוכיח טענה שמופיעה בסיכומי הרצאות של עדי: לכל z,w מתקיים $Arg(zw)=(Arg(z)+Arg(w))(\bmod 2\pi)$:

נסמן $z=r_1e^{i\theta_1}, w=r_2e^{i\theta_2}$ ולכן $zw=r_1r_2e^{(i(\theta_1+\theta_2)}$, מתקיים

$$Arg(z)=\theta_1+2\pi k\ \ (k\in\mathbb{Z})$$

$$Arg(w)=\theta_2+2\pi k\ \ (k\in\mathbb{Z})$$

$$Arg(zw)=\theta_1+\theta_2+2\pi k\ \ (k\in\mathbb{Z})$$

כלומר

$$Arg(zw)=\theta_1+\theta_2=(Arg(z)+Arg(w))(\bmod 2\pi)$$

כעת ניזכר בהגדרה של הענף שראינו בתרגול: אנחנו מגדירים ענף של ארגומנט להיות כל פונקציה $\alpha(z)$ שרציפה מעל התחום שלנו ומקיימת שלכל z בתחום מתקיים $\alpha(z)\in\{Arg(z)+2\pi\cdot k \mid k\in\mathbb{Z}\}$.

אנחנו יודעים שהארגומנט רציף ב־$\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ וש־$Arg:\mathbb{C}\setminus\{0\}\to[-\pi,\pi)$.

בנתונים שלנו מתקיים ש"הרמנו" את החלק הלא רציף ב־$\frac{\pi}{4}$ וזה עכשיו הישר שלנו של האי־רציפות שלנו ולכן אנחנו בפועל רוצים להזיז את הקו אי־הגדרה גם בפונקציית הארגומנט שלנו.

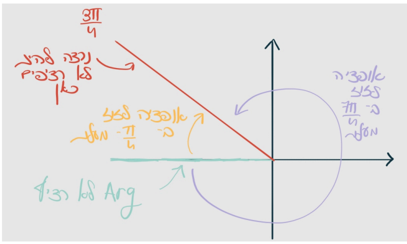
לכן נגדיר את הענף

$$\alpha(z)=Arg\left(z\cdot e^{-\frac{\pi i}{4}}\right)+\frac{\pi}{4}$$

עשינו את ההזה מבפנים כדי לתקן את האי־רציפות וההוספה של ה־$\frac{\pi}{4}$ נועדה כדי לתקן את הזווית (כדי לקבל את הזווית האמיתית ולא הערך המוזז).

מהטענה שהוכחנו לעיל, קיבלנו את התנאי השני של הענף ונשאר רק להראות רציפות:

אבל זה רציף כי הרכבנו פונקציה רציפה (Arg רציף ב־$\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$) והזזה זו פעולה רציפה ולכן מהגדרה α רציפה ב־$\mathbb{C}\setminus e^{-\frac{\pi i}{4}}(-\infty,0]$.



□

סעיף ב'

יהי $0\in K\subset\mathbb{C}$ חסומה עם $0\notin\partial K$.

נבנה ענף של הארגומנט עבור $G=K-\text{diam}(K)=\{z-\text{diam}(K)\mid z\in K\}$ כאשר $\text{diam}(K)=\sup_{x,y\in K}|x-y|$.

פתרון: במילים אחרות, יש לנו צורה חסומה שאיננה כוללת את 0 (כי הזזתי את הקוטר, ו־0 היה בפנים).

ניזכר שהארגומנט רציף על $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ ונטען שהפעם הארגומנט איננו רציף ב־$[0,\infty)$.

יהי $x\in[0,\infty)$ ונראה ש־$x\notin G$: נשים לב שזה שקול ללהגיד

$$x\notin G=K-\text{diam}(K)\iff x+\text{diam}(K)\notin K\iff \forall x\in[\text{diam}(K),\infty), x\notin K$$

ידוע כי $0\in K$ ולכן בהכרח $0+\text{diam}(K)\notin K$.

נניח בשלילה ש־$x\in K$ ולכן $0,x\in K$ ובפרט $x=|x-0|\le\text{diam}(K)$, אבל $\text{diam}(K)\le x$ ולכן $x=\text{diam}(K)$.

ידוע כי $0\in K^\circ$ ולכן קיים $\varepsilon>0$ כך ש־$B(0,\varepsilon)\subseteq K$ ולכן $\frac{\varepsilon}{2}\in K$ כמספר מרוכב.

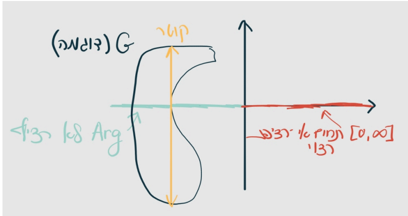
כעת, $x,\frac{\varepsilon}{2}\in K$ ומטיעון דומה נקבל $x=\text{diam}(K)-\varepsilon$ וזו סתירה!

לכן $[0,\infty)\cap G=\emptyset$ ולכן מספיק שנמצא ענף לארגומנט בתחום $\mathbb{C}\setminus[0,\infty)$.

אם נסתכל על זה על הצירים, זה כמו לזוז בזווית של π, כלומר

$$\alpha(z) = Arg(-z) + \pi$$

משיקולים של הסעיף הקודם נקבל שאכן α ענף בתחום ולכן G $\alpha' = \alpha \restriction G$ ענף רציף של הארגומנט ב־G.



$\square$

סעיף ג'

יהי $K \subset \mathbb{C}$ $0 \in$ חסומה עם $0 \notin \partial K$ ו־$\theta \in (-\pi, \pi]$.

נבנה ענף של הארגומנט עבור $G_\theta = K + e^{i\theta} \cdot \mathrm{diam}(K)$.

פתרון: נראה שהפעם אם $x \in e^{i\theta}[0,\infty)$ אז $x \notin G$:

נשים לב שהטענה שקולה לטענה ש־$xe^{i\theta} \notin e^{i\theta}G$ אבל ככה נקבל K כמו בסעיף ב' וכן $xe^{i\theta} \in [0,\infty)$ ולכן הטענה נובעת ונסיק שוב ש־$G \cap e^{i\theta}[0,\infty) = \emptyset$.

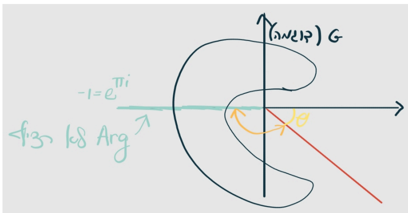
נשים לב שהפעם אנחנו מחפשים

$$e^{\pi i} \mapsto e^{\theta i} = e^{\pi i - (\pi - \theta)i} = e^{\pi i} \cdot e^{-(\pi-\theta)i}$$

כלומר

$$\alpha(z) = Arg\left(e^{(\theta-\pi)i}z\right) + (\pi - \theta)$$

בהתאם לשיקולים בסעיפים הקודמים מצאנו ענף ובשל שיקולי הזזה α רציף ב־$\mathbb{C} \setminus e^{i\theta}[0,\infty)$ אבל $G \subseteq \mathbb{C} \setminus e^{i\theta}[0,\infty)$ ולכן $\alpha \restriction G$ רציף וענף.



$\square$

שאלה 5

יהי $q \in \mathbb{R} \setminus 0$ ונדיר $\gamma_q = \left\{te^{iqt} \mid t \in [0, \infty)\right\}$.
נגדיר $G_t = \mathbb{C} \setminus \gamma_q$ ונבנה ענף של הארגומנט $\alpha_q : G_q \to \mathbb{R}$ ונראה כי הקבוצה $\left\{k \in \mathbb{Z} \mid \exists z \in G_q,\ \alpha_q(z) = Arg(z) + 2\pi k\right\}$ איננו חסום.
הוכחה: נשחזרר את התהליך מהתרגול/הרצאה.
לכל $q \in \mathbb{R} \setminus 0$ נגדיר $U_n^q = \left\{z \in G_q \mid q|z| - Arg(z) < 2\pi\right\} \setminus \bigcup_{x=0}^{n-1} U_x^q$.
עוד נגדיר

$$t^q(z) = 2\pi n, z \in U_n^q$$
$$\alpha_q(z) = Arg(z) + t_q(z)$$

כך שמתקיים $\alpha_q(z) \in \{Arg(z) + 2\pi k\}$ ואכן רציף

$$\lim_{z \to z} 0^+ \alpha_q(z) = \pi + 2\pi n$$
$$\lim_{z \to z_0^-} \alpha_q(z) = -\pi + 2\pi(n+1) = \pi + 2\pi n$$

אז קיבלנו רציפות על $[-\infty, 0-]$ ולכן רציפה בכל G_q.
נשאר להראות ש-$K = \left\{k \in \mathbb{Z} \mid \exists z \in G_q,\ \alpha_q(z) = Arg(z) + 2\pi k\right\}$ איננו חסום:
במילים אחרות, נראה שלכל $n \in \mathbb{N}$ קיים z כך ש-$z \in U_n$, אבל זה אומר שמתקיים $q|z| - Arg(z) < 2\pi n$.
עבור $Arg(z) = 0$ מתקיים

$$2\pi(n-1) < q|z| < 2\pi n \iff \frac{2\pi(n-1)}{q} < |z| < \frac{2\pi n}{q}$$

מצפיפות הממשיים קיימת $z \in G_q$ ששייכת לקטע ולכן $U_n \neq \emptyset$ לכל n, כלומר $\mathbb{N} \subseteq K$ והוא איננו חסום, כנדרש. $\square$