פתרון מטלה 10 — אנליזה פונקציונלית, 80417

16 ביוני 2025

שאלה 1

תזכורת: עבור $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ אינטגרביליות רימן בקטע $[-\pi,\pi]$ ומחזוריות עם מחזור 2π נגדיר

$$(f*g)(x)=\int_{-\pi}^{\pi}f(x-u)g(u)du$$

סעיף א'

נוכיח שאם $g\in\tilde{C}[-\pi,\pi]$ אזי $f*g\in C[-\pi,\pi]$.

הוכחה: נניח כי $g\in\tilde{C}[-\pi,\pi]$ ולכן g רציפה ו־2π מחזורית ומהיותה רציפה היא כמובן אינטגרבילית רימן ונתון כי f אינטגרבילית רימן ומחזורית 2π אך־לאו דווקא רציפה.

ראשית, $f*g$ מוגדרת היטב: מכפלה של פונקציה אינטגרבילית בפונקציה רציפה היא פונקציה אינטגרבילית (כמסקנה ממשפט לבג).

אם $f*g$ לא פונקציה רציפה, ניקח את $x_0\in\mathbb{R}$ נקודת אי־רציפות של $f*g$: בהכרח היא מסדר שני (אם לפונקציה קדומה יש נקודת אי־רציפות היא רק מסדר שני, ראינו את זה באינפי 2), g רציפה ולכן גם הפונקציה הקדומה שלה רציפה, ולכן זו נקודת אי־רציפות של f, אבל אז ל־f יש נקודת אי־רציפות מסדר שני, ולכן בהגדרה היא לא יכולה להיות אינטגרבילית. על־כן, $f*g$ פונקציה רציפה. □

סעיף ב'

נוכיח שאם $g\in\widetilde{C^1}[-\pi,\pi]$ אז $f*g\in C^1[-\pi,\pi]$ ושלכל $x\in[-\pi,\pi]$ מתקיים $(f*g)'(x)=(f*g')(x)$.

הוכחה: מהיות f אינטגרבילית, נסמן ב־F את הפונקציה הקדומה של f נעשה אינטגרציה בחלקים (שניתן לעשות מכך ש־$g\in\widetilde{C^1}[-\pi,\pi]$) ונקבל

$$\begin{aligned}(\star)(f*g)(x)&=\int_{-\pi}^{\pi}f(x-u)g(u)du=[-F(x-u)g(x)]_{-\pi}^{\pi}+\int_{-\pi}^{\pi}g'(x)F(x-u)du\\&\underset{g\in\widetilde{C^1}[-\pi,\pi]}{=}0+\int_{-\pi}^{\pi}g'(x)F(x-u)du\underset{\text{הגדרה}}{=}(F*g')(x)\underset{\text{מהרמז}}{=}(g'*F)(x)\end{aligned}$$

אז $f(*g)\in C[-\pi,\pi]$ כמכפלה של פונקציות רציפות, עלינו להראות שהיא גם גזירה (וגם שהנגזרת רציפה).

נעבוד לפי הגדרת הנגזרת, מתקיים

$$\begin{aligned}(\star\star)(f*g)'(x)&=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}((f*g)(x+h))-(f*g)(x)\\&=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-u)g(u)-f(x-u-h)g(u+h)du\\&=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-u)g(u)-f(x-u-h)g)u)+f(x-u-h)(g(u)-g(u+h))du\\&=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x-u)-f(x-u-h))g(u)+f(x-u-h)(g(u)-g(u+h))du\\&=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}((f(x-u)-f(x-u-h))*g(u))+\int_{-\pi}^{\pi}f(x-u)g'(u)du\\&=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}((F(x-u)-F(x-u-h))*g'(u))+(f*g')(x)\\&=(f*g')(x)\end{aligned}$$

(מהמחזוריות, רציפות וגם גזירות של F, הפונקציה הקדומה של f).

עם $(\star)$ ו־$(\star)(\star)$ נובעת הטענה והמסקנה. □

שאלה 2

סעיף א'

תהיי $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$. נניח שלכל n מתקיים $\left|x_{n+1}-x_n\right| \leq \frac{C}{n}$ ובנוסף הסדרה $y_m = \frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} x_n$ מתכנסת לגבול $A \in \mathbb{R}$.
נוכיח שגם הסדרה x_n מתכנסת לאותו הגבול.

הוכחה: נניח בלי הגבלת הכלליות ש-$C = 1, A = 0$. יהי $\varepsilon > 0$ ונניח בשלילה שהטענה לא נכונה, ולכן x_n לא שואף ל-0 כאשר $n \to \infty$, ולכן עבור $\delta > 0$ תת־סדרה x_{n_k} המקיימת $\forall k \in \mathbb{N}, x_{n_k} > \delta$ או $\forall k \in \mathbb{N} x_{n_k} < -\delta$. בלי הגבלת הכלליות נניח ש-$x_{n_k} > \delta$.
עכשיו נשים לב שמתקיים עבור x_m, x_n עם $n < m$ מהנתון

$$|x_m - x_n| \leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \cdots + \left|x_{n+1} - x_n\right| \leq \frac{1}{m-1} + \frac{1}{m-2} + \cdots + \frac{1}{n} \leq \log\left(\frac{m}{n}\right)$$

מתכנסות y_m נובע שלכל $\delta > 0$ קיים M כך שלכל $m > M$ מתקיים

$$|y_m - 0| < \delta \iff \left|\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} x_n\right| < \delta \iff \left|\sum_{n=1}^{m} x_n\right| < m\delta$$

מההנחה כי x_n לא מתכנסת ל-0, נסמן ב־N_1 את קבוצת כל האינדקסים כך שמתקיים $|x_n| \geq \varepsilon$ וב־N_2 את קבוצת כל האינדקסים כך שמתקיים $|x_n| < \varepsilon$.
עבור כל $n \in N_1$ מתקיים

$$\sum_{n \in N_1} x_n \geq \sum_{n \in N_1} (0 + \varepsilon) = |N_1|\varepsilon$$
$$\sum_{n \in N_2} x_n < \sum_{n \in N_2} (0 + \varepsilon) = |N_2|\varepsilon$$

ואז

$$\sum_{n=1}^{m} x_n = \sum_{n \in N_1} x_n + \sum_{n \in N_2} x_n \Longrightarrow \sum_{n=1}^{m} x_n \geq |N_1|\varepsilon - |N_2|\varepsilon$$

אבל כאשר $m \to \infty$, מתקיים ש-$|N_1| \to \infty$ מהגדרת חוסר התכנסות ובפרט

$$\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} x_n \geq \frac{|N_1|\varepsilon}{m}$$

אבל צד שמאל מתכנס וצד ימין לא וזאת סתירה. □

סעיף ב'

נסיק שאם f אינטגרבילית רימן בקטע $[-\pi, \pi]$, קיים $C > 0$ כך שלכל n מקדמי פוריה של f מקיימים $|a_n|, |b_n| \leq \frac{C}{n}$ ויש $x_0 \in [-\pi, \pi]$ כך שמתקיים $K_m * f(x_0) \to A$ אז גם $D_n * f(x_0)$ כאשר K_m גרעין פייר ו־D_n גרעין דירכלה.

הוכחה: TODOOOOOOOOOOOOOOOOOO □

שאלה 3

סעיף א'

נוכיח שאם V מרחב סוף־מימדי, $U \subseteq V$ סגורה ו־$v \in V$ אז קיים $u \in U$ כך ש־$\operatorname{dist}(U,v) = \|u - v\|$.

הוכחה: ראשית, ניזכר

$$\operatorname{dist}(U,v) = \inf_{u \in U} \|v - u\|$$

ניקח $d = \operatorname{dist}(U,v)$ ולכן לכל $\varepsilon > 0$ קיים u_ε כך ש־$\|u_\varepsilon - v\| < d + \varepsilon$.

נגדיר אם כך סדרה $U \supseteq \{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $\|u_n - v\| < d + \frac{1}{n}$, ובפרט $\|u_n - v\| \underset{n\to\infty}{\to} d$.

V הוא סוף־מימדי ולכן $\{u_n\}$ סדרה חסומה וניקח $\left\{u_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$, תת־סדרה מתכנסת שלה (משפט בולצאנו-ויירשטראס).

אבל $U \subseteq V$ סגורה, ולכן $u \in U$ $\xrightarrow[n\to\infty]{}$ u_n, אבל זה בידיוק אומר שמתקיים

$$\lim_{k\to\infty} \left\|u_{n_k} - v\right\| = d = \|u - v\|$$

□

סעיף ב'

נתבונן במרחב $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$.

ניתן דוגמה לקבוצה $U \subseteq \mathbb{R}^2$ סגורה וקמורה ו־$v \in \mathbb{R}^2$ כך שקיימים אינסוף $u \in U$ המקיימים $\operatorname{dist}(U,v) = \|u - v\|_\infty$.

הוכחה: נגדיר $U = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0\right\}$ וניקח $v = (-1,1)$.

ועבור $u \in U$ מתקיים מהגדרה

$$\|u - v\|_\infty = \max(|u_1 - v_1|, |u_2 - v_2|)$$

ו־$u \in U$ שתקיים מרחק מינימלי ל־v היא $(0,1)$ (בגלל שהנקודה v בציר ה־x שלילית אז הנקודה הכי קרובה אליה ברביע החיובי תהיה עם $x = 0$).

אז נקבל $\|u - v\|_\infty = \max(1,0) = 1$ ולכן אנחנו מחפשים $u = (u_1,u_2) \in U$ כך שיתקיים $\|u - v\|_\infty = \max(|u_1 + 1|, |u_2 - 1|) = 1$.

נחלק למקרים

1. $|u_1 + 1| = 1, |u_2 - 1| \leq 1$
   אז מהאילוץ הראשון נקבל $u_1 = 0$ או $u_1 = -2$ אבל $u_1 \geq 0$ ולכן $u_1 = 0$.
   עבור $u_1 = 0$, אז $|u_2 - 1| \leq 1$ נקבל $0 \leq u_2 \leq 2$ ולכן $u_2 \in [0,2]$.
2. $|u_2 - 1| = 1, |u_1 + 1| \leq 1$ מהאילוץ הראשון נקבל $u_2 = 2$ או $u_2 = 0$.
   מהאילוץ השני נקבל $-2 \leq u_1 \leq 0$ אבל $u_1 \geq 0$ ולכן $u_1 = 0$.

סך־הכל משני המקרים נקבל שהנקודות האפשריות הן

$$\{(0,0),(2,0)\} \cup \{(0,u_2) \mid u_2 \in [0,2]\}$$

וזה מקיים את תנאי השאלה. □