# פתרון מטלה 05 — תורת המידה, 80517

21 בנובמבר 2025

**שאלה 1**

## שאלה 2

### סעיף א'

נחשב את הגבול

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{\frac{x}{2}}dx$$

*פתרון:* נגדיר $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ על־ידי

$$f_n(x)=\begin{cases}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{\frac{x}{2}} & x\in[0,n]\\ 0 & x\notin[0,n]\end{cases}$$

ונרצה לחשב את

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{\frac{x}{2}}dx=\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx$$

ניזכר באריתמטיקה של גבולות

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n=e^a$$

אז עבור $x\in[0,\infty)$, בבחירת $a=-x$ מתקיים

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=e^{-x}e^{\frac{x}{2}}=e^{-\frac{x}{2}}$$

אז יש לנו התכנסות נקודתית $f_n\to f$ כאשר

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{x}{2}} & x\geq 0\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

נרצה להשתמש במשפט ההתכנסות הנשלטת ולכן עלינו לחסום את $|f_n(x)|$ עבור $x\in[0,n]$.
נשים לב ש־$\frac{x}{n}\in[0,1]$ ולכן $1-\frac{x}{n}\geq 0$, ונזכר באי־השיוויון הבא עבור $y\in[0,\infty)$,

$$1-y\leq e^{-y}$$

אז מהאי־שליליות ומהאי־שיוויון הזה נקבל

$$\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\leq e^{\left(-\frac{x}{n}\right)^n}=e^{-x}\implies|f_n(x)|=\left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{\frac{x}{2}}\leq e^{-x}e^{\frac{x}{2}}=e^{-\frac{x}{2}}$$

ולכן נוכל להגדיר את הפונקציה השולטת

$$g(x)=\begin{cases}e^{-\frac{x}{2}} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

כדי להשתמש במשפט ההתכנסות הנשלטת עלינו להראות ש־$g(x)$ אינטגרבילית, ואכן

$$\int_{\mathbb{R}}g(x)dx=\int_0^\infty e^{-\frac{x}{2}}dx=\left[\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{-\frac{1}{2}}\right]_0^\infty=\left[-2e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^\infty=0-(-2)=2$$

ולכן $g$ אינטגרבילית ומתקיים במקרה זה יחד עם משפט ההתכנסות הנשלטת

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}f_n(x)dx=\int_{\mathbb{R}}\lim_{n\to\infty}f_n(x)dx=\int_{\mathbb{R}}f(x)dx=\int_{\mathbb{R}}g(x)dx=2$$

$\square$