פתרון מטלה 07 — מבנים אלגבריים 2, 80446

6 ביוני 2025

שאלה 1

שאלה 2

סעיף א'

נמצא תת־חבורה H מאינדקס 2 של $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\xi_7)/\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ ונמצא במפורש אוטומורפיזם σ שיוצר אותה.

הוכחה:

$\square$

שאלה 3

יהי K שדה, יהי $f \in K[x]$ פולינום אי־פריק וספרבילי ויהי L שדה פיצול של f מעל K.

סעיף א'

נוכיח שאם כל שדה ביניים $L/E/K$ הוא נורמלי אז כל שורש של f של f יוצר את L מעל K.

הוכחה: ראשית, $f \in K[x]$ פולינום אי־פריק וספרבילי ולכן בשדה פיצול יש $\alpha_1, ..., \alpha_n \in L$ שורשים שונים זה מזה ו־$L = K(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ הרחבה סופית, ספרבילית ונורמלית ולכן הרחבת גלואה.

עלינו להראות שלכל שורש α מתקיים $L = K(\alpha)$.

היות ו־f אי־פריק וספרבילי מעל K ו־α הוא שורש של f, ההרחבה $E = K(\alpha) \subseteq L/K$ היא הרחבה ספרבילית עם דרגה r המקיימת $1 \leq r \leq \deg(f)$ ומההנחה גם נובע ש־$K \subseteq E \subseteq L/K$ היא נורמלית מעל K.

היות וההרחבה נורמלית, נובע שהפולינום מתפצל לחלוטין ב־$K(\alpha)$ ומכך ש־f אי־פריק מעל K ומתקיים $\alpha \in K(\alpha)$ ולכן כל שאר הצמודים נמצאים ב־$K(\alpha)$.

אבל f מתפצל לחלוטין ב־L (כי שדה פיצול) ואם f מתפצל ב־$K(\alpha)$ אז $K(\alpha)$ חייב להכיל את כל שאר השורשים של f, משמע $L = K(\alpha)$. $\square$

סעיף ב'

נסיק שאם $\mathrm{Gal}(L/K)$ אבלית אז כל שורש של f יוצר את L מעל K.

הוכחה: נניח כי $\mathrm{Gal}(L/K)$ אבלית $\square$

שאלה 4

נסמן $f(x) = x^4 - 7x^2 + 7 \in \mathbb{Q}[x]$ ויהי L שדה פיצול של f.
נסמן β_1, β_2 שני השורשים של המשוואה $y^2 - 7y + 7 = 0$.

סעיף א'

נוכיח ש־$\mathbb{Q}(\beta_1, \beta_2) = \mathbb{Q}(\beta_1)$ ושמתקיים $\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt{\beta_1}, \sqrt{\beta_2}\right) : \mathbb{Q}(\beta_1)\right] = 4$.
הוכחה: השורשים של $y^2 - 7y + 7$ הם

$$y = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 28}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{21}}{2}$$

נסמן בלי הגבלת הכלליות

$$\beta_1 = \frac{7 + \sqrt{21}}{2}, \ \beta_2 = \frac{7 - \sqrt{21}}{2}$$

נשים לב שמתקיים $\beta_2 = 7 - \beta_1$ כי

$$\beta_2 = \frac{7 - \sqrt{21}}{2} = 7 - \frac{7 + \sqrt{21}}{2} = \frac{14 - 7 - \sqrt{21}}{2} = \frac{7 - \sqrt{21}}{2}$$

ולכן בהכרח מתקיים $\mathbb{Q}(\beta_1, \beta_2) = \mathbb{Q}(\beta_1)$.
נשאר לחשב את $\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt{\beta_1}, \sqrt{\beta_2}\right) : \mathbb{Q}(\beta_1)\right]$.
במטלה 5 שאלה 3 סעיף ב' ראינו שמתקיים $\sqrt{\beta_2} \notin \mathbb{Q}\left(\sqrt{\beta_1}\right)$, ולכן בהכרח $\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt{\beta_1}, \sqrt{\beta_2}\right) : \mathbb{Q}\left(\sqrt{\beta_1}\right)\right] = 2$ כי הוספנו עוד איבר להרחבה.
מכפליות הדרגה נקבל

$$\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt{\beta_1}, \sqrt{\beta_2}\right) : \mathbb{Q}(\beta_1)\right] = \left[\mathbb{Q}\left(\sqrt{\beta_1}\right) : \mathbb{Q}(\beta_1)\right] \cdot \left[\mathbb{Q}\left(\sqrt{\beta_2}\right) : \mathbb{Q}\left(\sqrt{\beta_1}\right)\right] = 2 \cdot 2 = 4$$

□

סעיף ב'

נסיק ש־$L = \mathbb{Q}\left(\sqrt{\beta_1}, \sqrt{\beta_2}\right)$ מדרגה 8 מעל $\mathbb{Q}$.
הוכחה: נשים לב ש־L היא הרחבה רדיקלית (נוצרת על ידי סיפוח של ביטוי שורשי לשדה הבסיס).
כמו־כן, במטלה 5 שאלה 3 סעיף ב' ראינו שההרחבה $\mathbb{Q}\left(\sqrt{\beta_1}\right)$ היא הרחבה מדרגה 4. מכפליות הדרגה וגם ממה שמצאנו בסעיף הקודם מתקיים

$$\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt{\beta_1}, \sqrt{\beta_2}\right) : \mathbb{Q}\right] = \left[\mathbb{Q}\left(\sqrt{\beta_1}, \sqrt{\beta_2}\right) : \mathbb{Q}\left(\sqrt{\beta_1}\right)\right] \cdot \left[\mathbb{Q}\left(\sqrt{\beta_1}\right) : \mathbb{Q}\right] = 2 \cdot 4 = 8$$

□

סעיף ג'

נמצא את טיפוס האיזומורפיזם של $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$.
הוכחה: תהיי $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$, מהגדרה אנחנו יודעים שמתקיים

$$\sigma\left(\sqrt{\beta_1}\right) \mapsto \pm\sqrt{\beta_1}$$
$$\sigma\left(\sqrt{\beta_2}\right) \mapsto \pm\sqrt{\beta_2}$$

בעצם יש לנו 8 אפשרויות שונות: זהות, שינוי סימן של אחד מהשורשים או שינוי סימן של שני השורשים (וכמובן יש גם שורש חיובי וגם שורש שלילי).
אז עלינו לחפש תתי־חבורות של S_4 (4 שורשים) מסדר 8.
חבורות מסדר 8 הן תת־חבורות 2־סילו של S_4, ממשפט סילו השלישי יש או 1 כזאת או 3 כאלו, אבל 1 לא אפשרית כי אז ממסקנה ממשפטי סילו היא תהיה תת־חבורה נורמלית של S_4 ואין ל־S_4 תת־חבורה נורמלית, ולכן יש 3 חבורות 2־סילו שהן צמודות זו לזו (ועל־כן איזומורפיות).
אפשר לספור את כמות החבורות מסדר 8 בידיים, כי היא חבורת־p סופית עבור $p = 2$, ולכן יש לה מרכז לא טריוויאלי והיא נילפוטנטית.
נוכל לסווג אותן לחבורות אבליות ולא אבליות:
עבור החבורות האבליות, משפט המיון לחבורות אבליות נוצרות סופית נותן אותן בשלמותן: $C_8, C_4 \times C_2, C_2 \times C_2 \times C_2$.

עבור החבורות הלא אבליות, אנחנו יודעים שהן Q_8, D_4 כאשר Q_8 היא חבורת הקווטרניונים.
ראשית, $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ היא לא חבורה אבלית: מספיק שנסתכל על

$$\sigma : \sqrt{\beta_1} \mapsto -\sqrt{\beta_1}, \sqrt{\beta_2} \mapsto \sqrt{\beta_2}$$
$$\tau : \sqrt{\beta_1} \mapsto \sqrt{\beta_1}, \sqrt{\beta_2} \mapsto -\sqrt{\beta_2}$$

ונסתכל על ההרכבות $\sigma\tau, \tau\sigma$, מתקיים

$$\sigma \circ \tau\left(\sqrt{\beta_1}\right) = -\sqrt{\beta_1} \neq \sqrt{\beta_1} = \tau \circ \sigma\left(\sqrt{\beta_1}\right)$$

□