

פתרון מטלה 05 – פונקציות מרוכבות, 90519

27 בנובמבר 2025



שאלה 1

יהי $G \subseteq \mathbb{C}$ תחום ו- $f \in C^1(G, \mathbb{C})$. נראה ש- f הולומורפית אם ורק אם $\partial_{\bar{z}}f = 0$.

הוכחה:

\Leftrightarrow נניח כי f הולומורפית ונראה כי $\partial_{\bar{z}}f = 0$

f הולומורפית ולכן היא מקיימת את משוואות קושי-רימן

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

כאשר $u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ עבור $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$

נציב באופרטור Wirtinger ונקבל

$$\partial_{\bar{z}}f = \frac{1}{2}(\partial_x f + i\partial_y f) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right) + i\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right) \underset{\text{C.R.E}}{=} 0$$

\Rightarrow נניח כי $0 = \partial_{\bar{z}}f$ ונראה כי f הולומורפית.

אם גם החלק המודומה וגם החלק המשני הינם 0, כלומר $\partial_{\bar{z}}f = 0$

$$\partial_{\bar{z}}f = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right)$$

כלומר

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \implies \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \implies \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

כלומר f מקיימת את משוואות קושי-רימן ולכן הולומורפית.

□

שאלה 2

ההינה $(z - 1)^2$ ו- γ מסילה המתארת מעגל ברדיוס 1 סביב הראשת.

סעיף א'

נחשב את $L(f \circ \gamma)$.

פתרון: נכתוב פרמטריזציה של γ

$$\gamma(t) = \cos(t) + i \sin(t) = e^{it}$$

עבור $t \in [0, 2\pi]$

בهرצאה הגדרנו אורך של מסילה להיות

$$L(f \circ \gamma) = \int_a^b |f'(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt$$

כאשר $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ולכן

$$\begin{aligned} L(f \circ \gamma) &= \int_a^b |f'(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt = \int_0^{2\pi} |(-2(1-z)) \circ (\cos(t) + i \sin(t))| |i \cos(t) - \sin(t)| dt \\ &= \int_0^{2\pi} |-2(1-\cos(t) - i \sin(t))| |i \cos(t) - \sin(t)| dt = 2 \int_0^{2\pi} |1 - \cos(t) - i \sin(t)| |i \cos(t) - \sin(t)| dt \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos(t) - i \sin(t))(1 - \cos(t) + i \sin(t))} \sqrt{(i \cos(t) - \sin(t))(-i \cos(t) - \sin(t))} dt \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2 \cos(t)} dt = 2 \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos(t))} dt = 2 \int_0^{2\pi} \sqrt{2 \left(2 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)} dt = 4 \int_0^{2\pi} \left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right| dt \end{aligned}$$

מהיות $\sin\left(\frac{t}{2}\right) \geq 0$ ובקטע זה $\frac{t}{2} \in [0, \pi]$ או $t \in [0, 2\pi]$ ולכן

$$2 \int_0^{2\pi} 2 \left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right| dt = 4 \int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt = \left[4 \cdot \left(-2 \cos\left(\frac{t}{2}\right)\right)\right]_{t=0}^{t=2\pi} = -8 \cos(\pi) + 8 \cos(0) = (-8) \cdot (-1) + 8 \cdot 1 = 16$$

נשים לב שיתור קצר לפטור את זה עם הביטוי בצורת אקספוננט:

$$\begin{aligned} L(f \circ \gamma) &= \int_a^b |f'(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt = \int_0^{2\pi} |(-2(1-z)) \circ e^{it}| |ie^{it}| dt = 2 \int_0^{2\pi} |1 - e^{it}| dt \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos(t))^2 + \sin^2(t)} dt = 2 \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2 \cos(t) + \cos^2(t) + \sin^2(t)} dt = 2 \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2 \cos(t)} dt \end{aligned}$$

□ המשך החישוב זהה.

סעיף ב'

נראה שלא משנה באיזו פרמטריזציה של γ נשחטש עבור החישוב בסעיף א'.

פתרון: בסעיף א' בחרנו פרמטריזציה של γ המתקדים נגד כיוון השעון, כאשר הפרמטריזציה עם כיוון השעון נתונה על ידי $\gamma(t) = e^{-it}$. במקרה שלנו זה לא משנה בגלל שהערך המוחלט במקורה זה נשאר: 1.

$$\begin{aligned} L(f \circ \gamma^-) \int_0^{2\pi} |(-2(1-z)) \circ e^{-it}| |-ie^{-it}| dt &= 2 \int_0^{2\pi} |1 - e^{-it}| dt = 2 \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos^2(t))^2 + (-\sin(t))^2} dt \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2 \cos(t) + \cos^2(t) + \sin^2(t)} dt = 2 \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2 \cos(t)} dt \end{aligned}$$

□

סעיף ג'

נחשב את השטח של $f(\{z \mid |z - 1| < 1\})$.

פתרון: נסמן $z = 1 - u$ ולכן $u = 1 - z$. $f(z) = (1 - z)^2 \Rightarrow w = u^2$. $D = \{z \mid |z - 1| < 1\} = \{u \mid |u| < 1\}$ על דיסק היחידה. כדי לפשט את האינטגרל, בדרכו הכליל במשפט הולפת משתנה אנחנו עושים קורדינאטות פולאריות סביבה הראשית אך הפעם נעשה קורדינאטות מוזזות ונניח ש- $z = 1$ היא הראשית שלנו ולכן $0 \leq r < 1$ (בגלל רדיוס הדיסק המקורי) וכן $|z - 1|^2 = |1 - z|^2 = r^2 < 2\pi$.
 נשים לב ש- D קבוצה יפה מספיק (היא פתוחה ולכן מדידה) או

$$\text{Area}(D) = \iint_D |f'(w)|^2 dD = \iint_D 4|z - 1|^2 dD \stackrel{\text{משפט הולפת משתנה}}{=} \int_0^{2\pi} \int_0^1 4r^2 \cdot r dr d\theta = 4 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^3 dr = 4 \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} d\theta = 2\pi$$

□

שאלה 3

יהיו $G \subseteq \mathbb{C}$ תחום ותהיינה $f, g : G \rightarrow \mathbb{C}$ פונקציות רציפות ו- γ מסילה.

סעיף א'

נוכחה:

$$\int_{\gamma} (f + g) d\gamma = \int_{\gamma} f d\gamma + \int_{\gamma} g d\gamma$$

הוכחה:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} (f + g) d\gamma &= \int_a^b (f + g)(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_a^b (f(\gamma(t)) + g(\gamma(t))) \gamma'(t) dt = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) + g(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \\ &\stackrel{(*)}{=} \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt + \int_a^b g(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_{\gamma} f d\gamma + \int_{\gamma} g d\gamma \end{aligned}$$

כאשר האדרטיביות שהשתמשנו בה ב- $(*)$ זה אדרטיביות האינטגרל מאינפי.3.

סעיף ב'

נוכחה שאם $\lambda \in \mathbb{C}$ אז

$$\int_{\gamma} \lambda f d\gamma = \lambda \int_{\gamma} f d\gamma$$

הוכחה:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \lambda f d\gamma &= \int_a^b (\lambda f)(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_a^b (\lambda f(\gamma(t))) \gamma'(t) dt = \int_a^b \lambda (f(\gamma(t)) \gamma'(t)) dt \stackrel{(*)}{=} \lambda \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \\ &= \lambda \int_{\gamma} f d\gamma \end{aligned}$$

כאשר האדרטיביות שהשתמשנו בה ב- $(*)$ זה לינאריות האינטגרל מאינפי.3.

סעיף ג'

נוכחה שאם β היא המסללה שמתקדמת בכיוון ההפוך מ- γ (כלומר, $\beta(t) = \gamma(a + b - t)$) אז

$$\int_{\beta} f d\beta = - \int_{\gamma} f d\gamma$$

הוכחה: נשים לב

$$\beta(a) = \gamma(a + b - a) = \gamma(b), \quad \beta(b) = \gamma(a + b - b) = \gamma(a)$$

אז

$$\int_{\beta} f d\beta = \int_a^b f(\beta(t)) \beta'(t) dt$$

אבל $\beta(t) = \gamma(a + b - t)$ ולכן $\beta'(t) = -\gamma'(a + b - t)$

$$\beta'(t) = \frac{d}{dt}(\gamma(a + b - t)) \stackrel{\substack{u=a+b \\ \frac{du}{dt}=-1}}{=} \gamma'(u) \cdot \frac{du}{dt} = \gamma'(a + b - t) \cdot (-1) = -\gamma'(t)(a + b - t)$$

ולכן

$$\begin{aligned}
\int_{\beta} f d\beta &= \int_a^b f(\beta(t)) \beta'(t) dt = \int_a^b f(\gamma(a+b-t)) \cdot (-\gamma'(t)(a+b-t)) dt \\
&\stackrel{\text{by def}}{=} - \int_a^b f(\gamma(a+b-t)) \cdot (\gamma'(t)(a+b-t)) dt \\
&\stackrel{\substack{u=a+b-t \\ \frac{du}{dt}=-1}}{=} - \int_b^a f(\gamma(u)) \gamma'(u) (-du) \stackrel{\text{by def}}{=} \int_b^a f(\gamma(u)) \gamma'(u) du \\
&\stackrel{\text{by def}}{=} - \int_a^b f(\gamma(u)) \gamma'(u) du = - \int_{\gamma} f d\gamma
\end{aligned}$$

□

שאלה 4

נחשב את $\int_{\gamma} f d\gamma$ כאשר $f(z) = \log(|z|) + i Arg(z)$ ו- γ מסירה מעגל ברדיוס 2 סביבה הראשית, נגד כיוון השעון ובאשר Arg הוא הענף הראשי של הארגומנט.

מיהו Arg לא רציפה בקון $(-\infty, 0]$ נגיד בשביל תרגיל זה $\pi = Arg(x)$.

פתרונות:

□

שאלה 5

נמצא בשיטה שראינו בהרצאה צמודה הרמוניית לפונקציה $f(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ בדיסק $B_1(0)$ בדיסק
פתרון:

□