פתרון מטלה 07 — תורת המידה, 80517

11 בדצמבר 2025

שאלה 1

יהי $(X,\mathcal{A},\mu)$ מרחב מידה. עבור $0<r<1$ נגדיר לכל $f:X\to\mathbb{C}$ מדידה

$$\|f\|_r=\left(\int|f|^r\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{r}}$$

ונגדיר גם

$$L^r(\mu)=\{f:X\to\mathbb{C}\mid \|f\|_r<\infty, \text{מדידה } f\}$$

נראה כי אם ב־X יש שתי קבוצות זרות מדידות ממידה סופית ששתיהן לא ממידה אפס, אז $\|\cdot\|_r$ לא מקיימת את אי־שיוויון המשולש.

הוכחה: תהיינה $A,B\in X$ כך ש־$0<\mu(A),\mu(B)<\infty$ ו־$A\cap B=\emptyset$.

נגדיר $f=\mathbb{1}_A$ ומכך ש־$0<\mu(A)<\infty$ נקבל $\|f\|_r<\infty$, באופן דומה נגדיר גם $g=\mathbb{1}_B$ () ומאותו שיקול $\|g\|_r<\infty$. נגדיר

$$h=f+g=\mathbb{1}_A+\mathbb{1}_B\underset{A\cap B=\emptyset}{=}\mathbb{1}_{A\cup B}$$

אז נחשב

$$\|h\|_r^r=\int|\mathbb{1}_{A\cup B}|^r\,\mathrm{d}\mu=\int_{A\cup B}1\,\mathrm{d}\mu=\mu(A\cup B)=\mu(A)+\mu(B)\Longrightarrow\|h\|_r=(\mu(A)+\mu(B))^{\frac{1}{r}}$$

מצד שני מתקיים

$$\|f\|_r^r=\int|\mathbb{1}_A|^r\,\mathrm{d}\mu=\int_A1^r\,\mathrm{d}\mu=\int_A1\,\mathrm{d}\mu=\mu(A)\Longrightarrow\|f\|_r=(\mu(A))^{\frac{1}{r}}$$

$$\|g\|_r^r=\int|\mathbb{1}_B|^r\,\mathrm{d}\mu=\int_B1^r\,\mathrm{d}\mu=\int_B1\,\mathrm{d}\mu=\mu(B)\Longrightarrow\|g\|_r=(\mu(B))^{\frac{1}{r}}$$

אז אנחנו רוצים לבחון **האם** האי־שיוויון הבא מתקיים (ליתר דיוק, שהוא נופל):

$$\|h\|_r=\|f+g\|_r\overset{?}{\le}\|f\|_r+\|g\|_r\Longleftrightarrow(\mu(A)+\mu(B))^{\frac{1}{r}}\overset{?}{\le}\mu(A)^{\frac{1}{r}}+\mu(B)^{\frac{1}{r}}$$

נסמן לנוחות $a=\mu(A),b=\mu(B)$ ו־$0<a,b$ וכן $p=\frac{1}{r}>1$ (כי $0<r<1$) ונבחן

$$(a+b)^p\overset{?}{\le}(a^p+b^p)$$

נשים לב שהפונקציה $\varphi(x)=x^p$ היא פונקציה קמורה, כלומר לכל $t\in(0,1)$ מתקיים

$$\varphi(ta+(1-t)b)\le t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b)$$

נחלק את אי־השיוויון שאנחנו בוחנים ב־$b^p\neq0$ כמובן

$$(a+b)^p\overset{?}{\le}(a^p+b^p)\Longleftrightarrow\frac{(a+b)^p}{b^p}\overset{?}{\le}\frac{a^p+b^p}{b^p}\Longleftrightarrow\left(\frac{a}{b}+1\right)^p\overset{?}{\le}\left(\frac{a}{b}\right)^p+1\underset{x=\frac{a}{b}}{\Longleftrightarrow}(x+1)^p\le x^p+1$$

נגדיר $\psi(x)=(x+1)^p-x^p-1$ זה פולינום ולכן חלק, נגזר

$$\psi'(x)=p(x+1)^{p-1}-px^{p-1}$$

מכך ש־$p>1$ אז $p-1>0$ ו־$x>0$ אז $(x+1)^{p-1}>x^{p-1}$ כלומר $\psi'(x)>0$ ונשים לב

$$\psi(0)=1^p-0^p=0$$

אז ψ היא מונוטונית עולה ממש לכל $x>0$ ונובע מכך

$$(x+1)^p>x^p+1$$

בסתירה, כלומר אי־שיוויון המשולש לא מתקיים. $\square$

שאלה 2

נניח כי $(X, \mathcal{A}, \mu)$ מרחב מידה σ־סופי (איחוד בן־מנייה של קבוצות מדידות עם מידה סופית) ו־$1 \le s \le t \le \infty$.

סעיף א'

נוכיח כי $L^t(\mu) \subseteq L^s(\mu)$ אם ורק אם $\mu(X) < \infty$.

הוכחה: $\Longrightarrow$ נניח כי $\mu(X) < \infty$ ונוכיח $L^t(\mu) \subseteq L^s(\mu)$.

אם $s = t$ סיימנו ולכן נניח שיש שם אי־שיוויון חזק ושכרגע $t < \infty$.

תהי $f \in L^t(\mu)$, ונסמן $g(x) = 1$.

נסמן $p = \frac{t}{s}, q = \frac{t}{t-s}$ ומההנחות מתקיים $q, p \ge 1$ ובדיקה מראה שהם צמודים אחד לשנייה $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{s}{t} + \frac{t-s}{t} = \frac{s+t-s}{t} = 1$.

מאי־שיוויון הולדר

$$\|f\|_s = \left(\int |f|^s \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{s}} = \left(\int |f|^s \cdot 1 \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{s}} \le \||f|^s\|_{\frac{t}{s}}^{\frac{1}{s}} \|1\|_{\frac{t}{s}}^{\frac{1}{s}}$$

נבחין

$$\||f|^s\|_{\frac{t}{s}} = \left(\int (|f|^s)^{\frac{t}{s}}\right)^{\frac{s}{t}} = \left(\int |f|^t\right)^{\frac{s}{t}} = \|f\|_s^t$$

$$\|1\|_{\frac{t}{s}} = \mu(X)^{\frac{t-s}{t}}$$

מידת המרחב היא סופית ולכן נסמן $M = \mu(X)$ אז מהאי־שיוויון לעיל

$$\|f\|_s \le \left(M^{\frac{t-s}{t}}\right)^{\frac{1}{s}} (\|f\|_t^s)^{\frac{1}{s}} = M^{\frac{1}{s} - \frac{1}{t}} \|f\|_t < \infty \Longrightarrow f \in L^s(\mu)$$

אם $t = \infty$ אז $f \in L^\infty$ היא $|f| \le \|f\|_\infty$ כמעט תמיד (ראינו בהרצאה) אז

$$\|f\|_s^s = \int |f|^s \,\mathrm{d}\mu \le \int \|f\|_\infty^s \,\mathrm{d}\mu = \|f\|_\infty^s \mu(X) < \infty \Longrightarrow f \in L^s(\mu)$$

$\Longleftarrow$ נניח כי $L^t(\mu) \subseteq L^s(\mu)$ ונוכיח $\mu(X) < \infty$.

נניח שלא ככה, כלומר $\mu(X) = \infty$.

X הוא מרחב מידה σ־סופי ולכן קיימות $E_1, E_2, \ldots$ מדידות כך ש־$0 < \mu(E_n) < \infty$ ו־$X = \bigcup_{n=1}^\infty E_n$ (לאו־דווקא שהן זרות בצורה טבעית אלא הזרנו אותן בתהליכים דומים למה שראינו במטלות הראשונות) ומתקיים כמובן $\mu(X) = \sum_{n=1}^\infty \mu(E_n)$ והסכום מתבדר ואי־שלילי.

יהי $N_1 \in \mathbb{N}$ כך שמתקיים $\sum_{n=1}^{N_1} \mu(E_n) \ge 1$ (יש כזה כי הטור מתבדר, לא סתם מתבדר – שואף לאינסוף) ונגדיר $F_1 = \bigcup_{n=1}^{N_1} E_n$ וכמובן $1 \le \mu(F_1) < \infty$ כסכום סופי של מידות סופיות.

נמשיך ונגדיר $F_2, F_3, \ldots$ וכן הלאה כך שלכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים $1 \le \mu(F_k) < \infty$ והן זרות אחת לשנייה (איחדנו קבוצות זרות) ונחלק למקרים:

אם $t = \infty$ אז $f \equiv 1 \in L^{\infty(\mu)}$ אבל $\int (|f|^s \,\mathrm{d}\mu) = \mu(X) = \infty$, כלומר $f \notin L^s(\mu)$ ולכן $L^\infty(\mu) \nsubseteq L^t(\mu)$, סתירה.

אם $t < \infty$ ושוב נניח כי $s < t$ (אחרת זה שוב סתירה), ונבחר $\delta > 0$ כך שיתקיים $0 < \delta < \frac{t}{s} - 1$ ולכל $k \in \mathbb{N}$ נגדיר $b_k := \mu(F_k)^{-\frac{1}{t}} k^{\frac{-(1+\delta)}{t}}$ ונגדיר $f := \sum_{k=1}^\infty b_k \mathbb{1}_{F_k}$.

נחשב ונקבל מהזרות

$$\int |f|^t \,\mathrm{d}\mu = \int \left|\sum_{k=1}^\infty b_k \mathbb{1}_{F_k}\right|^t \mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^\infty b_k^t \int_{F_k} 1 \,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^\infty b_k^t \mu(F_k) = \sum_{k=1}^\infty \left(\mu(F_k)^{-\frac{1}{t}}\right)^t \left(k^{\frac{-(1+\delta)}{t}}\right)^t \mu(F_k) = \sum_{k=1}^\infty k^{-(1+\delta)} < \infty$$

כאשר ההתכנסות היא מהיות $\delta + 1 > 0$.

כלומר קיבלנו $f \in L^t(\mu)$, אבל מצד שני

$$\int |f|^s \,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^\infty b_k^s \int_{F_k} 1 \,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^\infty \mu(F_k)^{1-\frac{s}{t}} k^{-\frac{s(1+\delta)}{t}} \underset{\substack{1-\frac{s}{t} \ge 0 \\ \mu(F_k) \ge 1}}{\ge} \sum_{k=1}^\infty k^{-\frac{s(1+\delta)}{t}} \ge \infty$$

כאשר ההתבדרות היא מהיות $\frac{s(1+\delta)}{t} \le 1$.

כלומר, קיבלנו $f \notin L^s(\mu)$, אבל הנחנו $L^s(\mu) \subseteq L^t(\mu)$ וזאת סתירה, כלומר $\mu(X) < \infty$. $\square$

סעיף ב'

נוכיח כי $L^s(\mu) \subseteq L^t(\mu)$ אם ורק אם אין ב־$\mathcal{A}$ תתי־קבוצות ממידה קטנה כרצוננו, כלומר קיים $\varepsilon > 0$ כך שאם $\mu(A) < \varepsilon$ עבור A מדידה כלשהי, אז A ממידה אפס.

הוכחה: $\Longleftarrow$ נניח כי $L^s(\mu) \subseteq L^t(\mu)$ ונראה כי אין ב־$\mathcal{A}$ תתי־קבוצות ממידה קטנה כרצוננו.

נניח בשלילה שיש ב־$\mathcal{A}$ תת־קבוצה ממידה קטנה כרצוננו, ולכן לכל $n \in \mathbb{N}$ יש קבוצה מדידה A_n כך ש־$0 < \mu(A_n) < \frac{1}{n}$.

מהיות המרחב σ־סופי נוכל לבנות תת־סדרה של $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ שכל איברי הסדרה זרים ומדידים כך שמתקיים $0 < \mu(B_n) \to 0$.

נגדיר

$$\alpha_n := \frac{1}{n^2 \mu(B_n)^{\frac{1}{s}}}$$

ולכן אם נגדיר פונקציה f הנתמכת על $(B_n)_{n=1}^{\infty}$, כלומר $f = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \mathbb{1}_{B_n}$ נקבל

$$\int |f|^s = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^s \mu(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(B_n)}{\left(n^2 \mu(B_n)^{\frac{1}{s}}\right)^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2s}} < \infty$$

שזהו טור מתכנס כי $s \geq 1$. מצד שני

$$\int |f|^t = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^t \mu(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(B_n)}{\left(n^2 \mu(B_n)^{\frac{1}{s}}\right)^t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2t} \mu(B_n)^{\frac{t}{s}-1}}$$

מהיות $t > s$ אז $\frac{t}{s} - 1 > 0$ ו־$\mu(B_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ואנחנו תמיד יכולים לבנות את B_n כך שיתקיים

$$\mu\left(B_{n_k}\right)^{-\left(\frac{t}{s}-1\right)} > n_k^{2t} \Longrightarrow \frac{\mu\left(B_{n_k}\right)^{-\left(\frac{t}{s}-1\right)}}{n_k^{2t}} > 1$$

ולכן הטור במקרה זה מתבדר, וזו סתירה להנחה $L^s(\mu) \subseteq L^t(\mu)$.

$\Longrightarrow$ נניח כי אין ב־$\mathcal{A}$ תתי־קבוצות ממידה קטנה כרצוננו ונוכיח $L^s(\mu) \subseteq L^t(\mu)$.

תהיי $f \in L^s(\mu)$ ולכל $k \in \mathbb{Z}$ נגדיר

$$E_k := \left\{x \in X \mid 2^k \leq |f(x)| < 2^{k+1}\right\}$$

כל E_k כזה מדידה כתמונה של פונקציה ומדידה ומתקיים לכל $i \neq j$ ש־$E_i \cap E_j = \emptyset$ (כי הקטעים $\left[2^k, 2^{k+1}\right)$ אינם נחתכים)

$$\int |f|^s \, \mathrm{d}\mu = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{E_k} |f|^s \, \mathrm{d}\mu \geq \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{ks} \mu(E_k)$$

כעת, נטען שיש מספר סופי של k־ים עבורם $\mu(E_k) > 0$: שכן אם בשלילה לא היה ככה, היה מתקיים

$$\|f\|_s^s = \int |f|^s \, \mathrm{d}\mu \geq \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{ks} \mu(E_k)$$

אם הייתה כמות שאיננה סופית סופית, אז הסכום מצד ימין היה מתבדר (בין אם בשאיפה לאינסוף ובין אם שאיפה למינוס אינסוף) ואז נקבל $\int |f|^s = \infty$ אבל $f \in L^s$.

אז קיים $M < \infty$ כך שמתקיים $|f(x)| \leq M$ כלומר $f \in L^{\infty}(\mu)$ ומהיות $s \leq t \leq \infty$ נקבל $L^{\infty}(\mu) \subseteq L^t(\mu)$ ולכן $f \in L^t(\mu)$ ונקבל $L^s(\mu) \subseteq L^t(\mu)$. $\square$

שאלה 3

יהי $(X, \mathcal{A}, \mu)$ מרחב מידה. עבור $f : X \to \mathbb{R}$ מדידה נגדיר

$$\text{ess sup } f := \inf\{\alpha \mid \mu(f^{-1}((\alpha, \infty))) = 0\}, \ \ \text{ess inf} f := \sup\{\alpha \mid \mu(f^{-1}((-\infty, \alpha))) = 0\}$$

עבור $f : X \to \mathbb{C}$ נסמן $\|f\|_\infty = \text{ess sup}|f|$.

סעיף א'

תהיי $f : X \to \mathbb{R}$ מדידה. נסמן ב־$K \subseteq \mathbb{R}$ את התומך של המידה $f_*\mu$ המוגדרת על $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$.
נוכיח כי הסופרמום והאינפימום של K הם בידיוק $\text{ess sup } f, \text{ess inf } f$.
הוכחה: נסמן

$$M := \text{ess sup } f = \inf\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \mu(f^{-1}(\alpha, \infty)) = 0\}$$

יהי $\varepsilon > 0$, מהגדרת האיפנימום נובע $\mu(f^{-1}((M + \varepsilon, \infty))) = 0$ ומהמשיכה קדימה של המידה

$$(f_*\mu)((M + \varepsilon, \infty)) = \mu(f^{-1}((M + \varepsilon, \infty))) = 0$$

מהגדרת התומך מתקיים ש־$(M + \varepsilon, \infty) \subseteq \mathbb{R} \setminus K$, מהיות ε שרירותי נובע שכל הקטע (M, ∞) ב־$\mathbb{R} \setminus K$, כלומר לכל $y \in (M, \infty)$, $y \notin K$.
מצד שני, כל $x \in K$ מקיים $x \leq M$ אז $\sup K \leq M = \text{ess sup } f$.
הכיוון השני הוא סימטרי: נסמן

$$T := \text{ess inf} f$$

אז לכל $\varepsilon > 0$ מתקיים $\mu(f^{-1}(-\infty, T - \varepsilon)) = 0$, אז אף נקודה שקטנה מ־$T - \varepsilon$ אינה ב־K, ולכן $\inf K \geq T$, אבל לכל $\beta > T$ מתקיים $\mu(f^{-1}(-\infty, \beta)) > 0$ ולכן $(-\infty, \beta) \cap K \neq \emptyset$ ולכן $K \leq T$ וקיבלנו $\inf K = T = \text{ess inf} f$. $\square$

סעיף ב'

נראה כי לכל f מדידה

$$\|f\|_1 \leq \mu(X) \cdot \|f\|_\infty$$

הוכחה: נסמן $\|f\|_\infty =: M$, אז לכל $\varepsilon > 0$ מהגדרת ה־ess sup נגדיר

$$A_\varepsilon := \{x \in X \mid |f(x)| > M + \varepsilon\} \implies \mu(A_\varepsilon) = 0$$

יתר על־כן, נובע מכך שמתקיים $|f(x)| \leq M$ כמעט בכל מקום ולכן ממונוטוניות האינטגרל

$$\|f\|_1 = \int_X |f| \, \mathrm{d}\mu \leq \int_X \|f\|_\infty \, \mathrm{d}\mu = \|f\|_\infty \cdot \int_X 1 \, \mathrm{d}\mu = \|f\|_\infty \mu(X)$$

$\square$

סעיף ג'

נניח כי f_n, f פונקציות מדידות כך ש־$\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
נראה כי קיימת ל־f_n תת־סדרה המתכנסת נקודתית ל־f.
הוכחה: נסמן $M_n := \|f_n - f\|_\infty$ ומהנתון $M_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ומהגדרת ess sup, אם $M_n < \alpha$ אזי $\mu(\{|f_n - f| < \alpha\}) = 0$.
ניקח סדרת אינדקסים $(n_j)_{j\geq1}$ כך שמתקיים $m_{n_j} < \frac{1}{j}$ לכל j וזה אפשרי מהיות $M_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ונגדיר

$$E_j := \left\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| > \frac{1}{j}\right\}$$

אז לכל j מתקיים ש־$\mu(E_j) = 0$ (מהגדרת ess sup) ונסתכל על $A = \bigcup_{j=1}^\infty A_j$, זה איחוד בן־מנייה של קבוצות ממידה אפס ולכן $\mu(A) = 0$.
אם $x \notin A$ אז עבור j גדול דיו מתקיים

$$\left|f_{n_j}(x) - f(x)\right| \leq \frac{1}{j} \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$$

כלומר $f_{n_j}(x) \to f(x)$ לכל $x \notin A$, כלומר לכל $x \in X$ למעט בקבוצה ממידה אפס, כלומר קיבלנו $f_{n_j} \to f$ כמעט בכל מקום/כמעט תמיד. $\square$

שאלה 4

נניח כי $(X, \mathcal{A}, \mu)$ מרחב מידה סופי ו־$f : X \to \mathbb{C}$ מדידה.

סעיף א'

נראה כי אם $\|f\|_\infty = 1$ אז הסדרה $a_n = \int_X |f|^n \,\mathrm{d}\mu$ מתכנסת.

הוכחה: מהנתון $\|f\|_\infty = 1$ נובע $\inf\{\alpha \ge 0 \mid \mu(|f| \ge \alpha) = 0\} = 1$, כלומר מתקיים μ־כמעט תמיד לכל $x \in X$, $|f(x)| \le 1$, ולכן

$$a_n = \int_X |f|^n \,\mathrm{d}\mu \le \int_X 1 \,\mathrm{d}\mu = \mu(X) \underset{\text{מרחב מידה סופי}}{<} \infty$$

עוד נובע $|f| \le \cdots \le |f|^{n-2} \le |f|^{n-1} \le |f|^n$ כלומר $a_{n+1} \le a_n$ו נשים לב גם שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $0 \le a_n$ כאינטגרל על פונקציה אי־שלילית על מרחב מידה סופי. אז $(a_n)_{n=1}^\infty$ מונוטונית יורדת חלש ואי־שלילית ולכן מתכנסת. □

סעיף ב'

נראה כי לכל f עם $0 < \|f\|_\infty < \infty$ מתקיים

$$\|f\|_\infty = \lim_{n\to\infty} \frac{\|f\|_{n+1}^{n+1}}{\|f\|_n^n}$$

הוכחה: נסמן

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\|f\|_{n+1}^{n+1}}{\|f\|_n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\int_X |f|^{n+1} \,\mathrm{d}\mu}{\int_X |f|^n \,\mathrm{d}\mu},\ \ 0 < M := \|f\|_\infty < \infty$$

נגדיר $g : X \to \mathbb{C}$ על־ידי $g(x) = \frac{f(x)}{M}$ ועל־ידי נרמול זה נקבל

$$\|g\|_\infty = \left\|\frac{f}{M}\right\|_\infty = \frac{\|f\|_\infty}{M} = 1,\ \ \|g\|_p = \int_X |g|^p \,\mathrm{d}\mu = \int_X \left|\frac{f}{M}\right|^p \mathrm{d}\mu = \frac{1}{M^p}\int_X |f|^n \,\mathrm{d}\mu = \frac{1}{M^p}\|f\|_p^p$$

ולכן

$$\frac{\|f\|_{n+1}^{n+1}}{\|f\|_n^n} = \frac{\int_X |f|^{n+1} \,\mathrm{d}\mu}{\int_X |f|^n \,\mathrm{d}\mu} = \frac{\int_X |Mg|^{n+1} \,\mathrm{d}\mu}{\int_X |Mg|^n \,\mathrm{d}\mu} = \frac{M^{n+1}\int_X |g|^{n+1} \,\mathrm{d}\mu}{M^n\int_X |g|^n \,\mathrm{d}\mu} = M \cdot \frac{\int_X |g|^{n+1} \,\mathrm{d}\mu}{\int_X |g|^n \,\mathrm{d}\mu}$$

נגדיר

$$a_n = \int_X |g|^n \,\mathrm{d}\mu = \|g\|_n^n$$

מהסעיף הקודם $A = \lim_{n\to\infty} a_n$ קיים ומוגדר ומכך ש־$\|g\|_\infty$, $g \in L^\infty(\mu)$ נקבל

$$A = \lim_{n\to\infty} \|g\|_n^n = \lim_{n\to\infty} \int_X |g|^n \,\mathrm{d}\mu$$

ו־A אי־שלילי (חסם מלרע), נשים לב שאנחנו צריכים להצדיק למה זה מוגדר היטב:

מהיות $\|g\|_\infty = 1$, אנחנו יודעים שמתקיים $A = \mu(\{x \in X \mid |g(x)| = 1\})$ ומכך ש־$0 < \|f\|_\infty < \infty$ אז $\mu(A) > 0$ ולכן מתקיים

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_X |g|^{n+1} \,\mathrm{d}\mu}{\int_X |g|^n \,\mathrm{d}\mu} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$$

כאשר השיוויון האחרון נובע מזה שהמכנה מתכנס לאותו ערך כמו המונה מנוסחת הזנב. נקבל בסך־הכל עם מה שמצאנו ולקיחת גבול

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|f\|_{n+1}^{n+1}}{\|f\|_n^n} = \lim_{n\to\infty} M \cdot \frac{\int_X |g|^{n+1} \,\mathrm{d}\mu}{\int_X |g|^n \,\mathrm{d}\mu} = M \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = M \cdot 1 = M$$

□