פתרון מטלה 08 — חשבון אינפיניטסימלי 3, 80415

6 ביוני 2025

שאלה 1

תהיי $g : B_r(0) \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ פונקציה c־ליפשיצית עבור $c \in (0,1)$ ונניח בנוסף כי $g(0) = 0$.
נגדיר $f : B_r(0) \to \mathbb{R}^k$ על־ידי $f(x) = x + g(x)$.

סעיף א'

נראה כי f היא חד־חד ערכית.

הוכחה: יהיו $x, y \in B_r(0)$ ונשים לב שמתקיים

$$f(x) = f(y) \iff x + g(x) = y + g(y) \iff x - y = g(y) - g(x) \iff \|x - y\| = \|g(y) - g(x)\| \underset{\text{ליפשיציות}}{\leq} c\|y - x\|$$

אבל זאת כמובן סתירה, שכן $c \in (0,1)$, ולכן $f(x) = f(y)$ אם ורק אם $x = y$ וקיבלנו כי f היא חד־חד ערכית. $\square$

סעיף ב'

נוכיח כי מתקיים

$$B_{(1-c)r}(0) \subseteq f(B_r(0)) \subseteq B_{(1+c)r}(0)$$

הוכחה: יהי $x \in B_r(0)$ ולכן

$$\|x\| = \|x + g(x)\| \leq \|x\| + \|g(x)\| \underset{(\star)}{\leq} \|x\| + c\|x\| = (1+c)\|x\| < (1+c)r$$

כאשר המעבר $(\star)$ נובע מהנתון כי $g(0) = 0$ וש־g היא c־ליפשיצית, כי אז לכל $x, y \in B_r(0)$ מתקיים

$$\|g(x) - g(y)\| \leq c\|x - y\|$$

וזה נכון בפרט עבור $y = 0$ ומהנתון ש־$g(0) = 0$ נקבל

$$\|g(x) - g(0)\| \leq c\|x - 0\| = c\|x\|$$

וקיבלנו ש־$f(x) \in B_{1(+c)r}(0)$ ולכן קיבלנו את ההכלה $f(B_r(0)) \subseteq B_{(1+c)r}(0)$.
בשביל הכיוון השני, נרצה להראות שלכל $y \in B_{(1-c)r}(0)$ מתקיים $y \in f(B_r(0))$, משמע שקיים $x \in B_r(0)$ כך שיתקיים

$$f(x) = x + g(x) = y \Rightarrow x = y - g(x)$$

בשביל זה, נגדיר $h(x) = y - g(x)$ ונרצה להראות ש־$x = h(x)$.
נשים לב שמתקיים

$$\|h(x) - h(y)\| = \|g(x) - g(y)\| \underset{(\star)}{\leq} c\|x - y\|$$

כאשר $(\star)$ זה שוב מהליפשיציות, והיות ו־$c \in (0,1)$ נובע כי h העתקה מכווצת!
ניקח $y \in B_{(1-c)r}(0)$ ונראה שלמשוואה $x = h(x)$ יש פיתרון ב־$B_r(0)$, דהיינו x נקודת שבת (שאנחנו יודעים שיש ממשפט העתקה מכווצת), אז עבור $x \in B_r(0)$ מתקיים

$$\|h(x)\| = \|y - g(x)\| \leq \|y\| + \|g(x)\| < (1-c)r + c\|x\| < (1-c)r + cr = r$$

אז $h(B_r(0)) \subseteq B_r(0)$, ו־$h$ העתקה מכווצת ולכן קיים $x \in B_r(0)$ כך שמתקיים

$$x = h(x) = y - g(x) \Rightarrow f(x) = y$$

ולכן $y \in B_r(0)$ וזה מביא לנו את ההכלה $B_{(1-c)r}(0) \subseteq f(B_r(0))$. $\square$

שאלה 2

סעיף א'

תהיי $A \subseteq \mathbb{R}^k$ פתוחה ו־$f : A \to \mathbb{R}^k$ פונקציה חד־חד ערכית וגזירה ברציפות כך ש־Df_a הפיכה לכל $a \in A$.
נוכיח כי התמונה $B = f(A)$ היא פתוחה וכי $f^{-1} : B \to A$ היא גזירה ברציפות.
הוכחה: היות ו־f גזירה ברציפות ו־Df_a הפיכה לכל $a \in A$, ממשפט הפונקציה ההפוכה נובע כי לכל $a \in A$ קיימת סביבה U_a של a כך ש־f היא דיפאומורפיזם (חד־חד ערכית ועל ו־$f, f^{-1} \in C^1$) מ־U_a אל $f(U_a)$ וממשפט הפונקציה ההפוכה אנחנו מקבלים גם ש־$f(U_a)$ היא פתוחה.
היות ו־A פתוחה, נובע שלכל $a \in A$ נוכל למצוא סביבה U_a כך ש־$f(U_a)$ היא פתוחה, ובפרט כך נוכל לכסות את A.
אז

$$B = f(A) = \bigcup_{a \in A} f(U_a)$$

היא איחוד של קבוצות פתוחות וראינו כבר שאיחוד של קבוצות פתוחות הוא פתוח, ולכן B קבוצה פתוחה.
ממשפט הפונקציה ההפוכה אנחנו מקבלים ש־$f^{-1} \in C^1$ לכל $b = f(a)$ עבור $a \in A$ וכפי שראינו האיחוד של זה מכסה את התמונה, את B ולכן לכל $b \in B$ קיימת סביבה סביב b כך ש־$f^{-1} \in C^1$, אבל זה בדיוק אומר שגם האיחוד בכיוון הזה מוביל לכך ש־$f^{-1} \in C^1$ ב־B. $\square$

סעיף ב'

עבור הסעיפים הבאים נתבונן בפונקציה $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ הנתונה על־ידי

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} e^x \cos(y) \\ e^x \sin(y) \end{pmatrix}$$

תת־סעיף א'

נוכיח כי f אינה חד־חד ערכית אבל $Df_{(x,y)}$ הפיכה לכל $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
הוכחה: f לא חד־חד ערכית שכן מהמחזוריות של $\cos, \sin$ נקבל

$$f(0,\pi) = \begin{pmatrix} e^0 \cos(\pi) \\ e^0 \sin(\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^0 \cos(3\pi) \\ e^0 \sin(3\pi) \end{pmatrix} = f(0, 3\pi)$$

אז f לא חד־חד ערכית.
נעבור להראות ש־$Df_{(x,y)}$ כן הפיכה: נסמן

$$f_1(x,y) = e^x \cos(y), \;\; f_2(x,y) = e^x \sin(y)$$

f היא גזירה ברציפות מאריתמטיקה של פונקציות גזירות (פונקציות טריגונומטריות ואקספוננט הם גזירים ברציפות) ועל־כן היא דיפרנציאבילית ומתקיים

$$Df_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x \cos(y) & -e^x \sin(y) \\ e^x \sin(y) & e^x \cos(y) \end{pmatrix}$$

נחשב את היעקוביאן של $Df_{(x,y)}$:

$$Jf_{(x,y)} = \det \begin{bmatrix} e^x \cos(y) & -e^x \sin(y) \\ e^x \sin(y) & e^x \cos(y) \end{bmatrix} = e^{2x}\cos^2(y) + e^{2x}\sin^2(y) = e^{2x}(\cos^2(y) + \sin^2(y)) \underset{\cos^2(y)+\sin^2(y)=1}{=} e^{2x}$$

נשים לב כי $Jf_{(x,y)} \neq 0$ לכל $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ולכן $Df_{(x,y)}$ הפיכה לכל $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. $\square$

תת־סעיף ב'

תהיי $A = \mathbb{R} \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ונוכיח כי $f|_A$ היא חד־חד ערכית ונמצא את $B = f(A)$.
הוכחה: יהיו $a_1 = (x_1, y_1), a_2 = (x_2, y_2) \in A$ ונניח שמתקיים $f(a_1) = f(a_2)$, משמע מתקיים

$$f(a_1) = f(a_2) \iff f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) \iff \begin{pmatrix} e^{x_1} \cos(y_1) \\ e^{x_1} \sin(y_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{x_2} \cos(y_2) \\ e^{x_2} \sin(y_2) \end{pmatrix}$$

וקיבלנו מערכת משוואות

$$\begin{cases} (1)\ e^{x_1}\cos(y_1) = e^{x_2}\cos(y_2) \\ (2)\ e^{x_1}\sin(y_1) = e^{x_2}\sin(y_2) \end{cases}$$

נעלה כל משוואה בריבוע ונחבר ביניהן

$$e^{2x_1}\cos^2(y_1) + e^{2x_1}\sin^2(y_1) = e^{2x_2}\cos^2(y_2) + e^{2x_2}\sin^2(y_2) \iff e^{2x_1}\left(\cos^2(y_1)+\sin^2(y_1)\right) = e^{2x_2}\left(\cos^2(y_2)+\sin^2(y_2)\right)$$

$$\underset{\cos^2(x)+\sin^2(x)=1}{\iff} e^{2x_1} = e^{2x_2} \underset{\text{אקספוננט מונוטוני עולה ממש}}{\iff} x_1 = x_2$$

ועכשיו נקבל במערכת המשוואות שלנו

$$\begin{cases} (1)\ e^{x_1}\cos(y_1) = e^{x_1}\cos(y_2) \\ (2)\ e^{x_1}\sin(y_1) = e^{x_1}\sin(y_2) \end{cases} \iff \begin{cases} (1)\ \cos(y_1) = \cos(y_2) \\ (2)\ \sin(y_1) = \sin(y_2) \end{cases}$$

אבל $\sin(x), \cos(x)$ הן חד־חד ערכיות בגלל המחזוריות שלהן ב־$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (כי המחזור של $\sin(x)$ הוא הקטע $(0, 2\pi)$ ששם $\sin$ חד־חד ערכית ועבור $\cos(x)$ זה הקטע $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right)$ ששם $\cos$ היא חד־חד ערכית, אז אם נזיז את הקטעים לקטע $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ אנחנו שומרים על הקטעים החד־חד ערכיים).

ולכן נקבל שאם $f(a_1) = f(a_2)$ אז $a_1 = a_2$ בהכרח, דהיינו f חד־חד ערכית ב־A.

עבור התמונה $f(A)$, נכתוב

$$f(x, y) = e^x \begin{pmatrix} \cos(y) \\ \sin(y) \end{pmatrix}$$

עבור $x \in \mathbb{R}, y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, אבל זה בידיוק התצוגה במישור (אם נסתכל על זה כקורדינאטות קוטביות, יש לנו $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ זווית ו־$r = e^x \in (0, \infty)$, ללא הראשית בכלל ובעצם הזווית מכווינה לחצי המישור הימני), ובמילים אחרות

$$f(A) = \left\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u > 0\right\}$$

□

תת־סעיף ג'

נתאר במפורש את הפונקציה ההופכית $g = \left(f|_A\right)^{-1} : B \to A$.

הוכחה: נסמן

$$(u, v) = f(x, y) = e^x \begin{pmatrix} \cos(y) \\ \sin(y) \end{pmatrix} \underset{\text{נורמה והזהות } \cos^2(x)+\sin^2(x)=1}{\iff} \sqrt{u^2+v^2} = e^x \iff x = \ln\left(\sqrt{u^2+v^2}\right) = \frac{1}{2}\ln(u^2+v^2)$$

עבור הקורדינאטה השנייה, נשים לב

$$\tan(y) = \frac{\sin(y)}{\cos(y)} = \frac{v}{u} \Rightarrow y = \arctan\left(\frac{v}{u}\right)$$

שמוגדר היטב עבור $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

אז $g : B = \left\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u > 0\right\} \to \mathbb{R} \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ נתונה על־ידי

$$g(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\ln(u^2+v^2) \\ \arctan(v, u) \end{pmatrix}$$

□

שאלה 3

נמצא את הנקודה הקרובה ביותר והנקודה הרחוקה ביותר מהראשית ב־$\mathbb{R}^3$ על החיתוך של שתי הספירות

$$(x-1)^2+y^2+z^2=1, x^2+y^2+(z-1)^2=1$$

הוכחה: נגדיר את הפונקציה שלנו $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ על־ידי $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$, השורש לא משנה לנו בפונקציית המרחק כי שורש משמר יחסי מינימום־מקסימום.
נגדיר את פונקציות האילוצים

$$g_1(x,y,z)=(x-1)^2+y^2+z^2-1, g_2(x,y,z)=x^2+y^2+(z-1)^2-1$$

ונסתכל על

$$\nabla f=\lambda\nabla g_1+\mu\nabla g_2$$

נחשב אותם

$$\begin{aligned}\nabla f&=2(x,y,z)\\ \nabla g_1&=2(x-1,y,z)\\ \nabla g_2&=2(x,y,z-1)\end{aligned}$$

אפשר כבר לבטל את הפקטור של 2 ונקבל

$$\nabla f=\lambda\nabla g_1+\mu\nabla g_2\iff (x,y,z)=\lambda(x-1,y,z)+\mu(x,y,z-1)$$

קיבלנו אם ככה כמה משוואות

$$\begin{cases}(1)\ x=\lambda(x-1)+\mu x=\lambda x-\lambda+\mu x\\ (2)\ y=\lambda y+\mu y\\ (3)\ z=\lambda z+\mu(z-1)=\lambda z+\mu z-\mu\end{cases}$$

ממשוואה (2) נקבל $y=0$ או $\lambda+\mu=1$. נניח תחילה ש־$y=0$ ונציב באילוצים שלנו, נקבל

$$g_1(x,0,z)=(x-1)^2+z^2-1=x^2-2x+z^2=0,\ \ g_2(x,0,z)=x^2+(z-1)^2-1=x^2+z^2-2z$$

נחסר ביניהם, ונקבל

$$(x^2-2x+z^2)-(x^2-2z+z^2)=2x+2z=0\Rightarrow x=z$$

נציב באחד האילוצים ונקבל

$$g_1(x=z,0,z)=(z-1)^2+z^2-1=2z^2-2z\Rightarrow 2z(z-1)=0\iff z=0\vee z=1$$

בסך־הכל מהמקרה הזה הנקודות החשודות שלנו הם $P_1=(0,0,0), P_2=(1,0,1)$.
נבחן את המקרה השני, נניח ש־$\lambda+\mu=1$ נקבל אז אם נציב ב־$x=\lambda(x-1)+\mu x$ את $\lambda=1-\mu$ נקבל

$$x=\lambda(x-1)+\mu x\underset{\lambda=1-\mu}{\iff}x=(1-\mu)(x-1)+\mu x\iff x=x-1-\mu x+\mu+\mu x\iff x=x-1+\mu\iff\mu=1$$

ובהצבה עבור (3) נקבל

$$z=\lambda z+\mu(z-1)\iff z=0\cdot z+1(z-1)\iff z=z-1\iff 0=-1$$

וזאת סתירה!
אז הנקודות היחידות שלנו הן P_1,P_2 ולכן $P_1=(0,0,0)$ הנקודה הקרובה ביותר לראשית ו־$P_2=(1,0,1)$ הנקודה הרחוקה ביותר מהראשית תחת האילוצים (כמובן שהן נמצאות על שתי הספירות!). $\square$

שאלה 4

נוכיח את אי־שיוויון קושי־שוורץ באמצעות כופלי לגראנז', כלומר נראה שלכל $u, v \in \mathbb{R}^k$ מתקיים

$$|\langle u,v\rangle| \leq \|u\|\|v\|$$

הוכחה: נגדיר $U = \sum_{i=1}^k x_i^2, V = \sum_{i=1}^k y_i^2$, נרצה למצוא מינימום/מקסימום של $f(x_1, ..., x_k, y_1, ..., y_k) = \sum_{i=1}^k x_i y_i$.
נסמן את האילוצים שלנו, $g = U, h = V$, ולפי משפט כופלי לגראנז'

$$\nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h$$

נחשב

$$\nabla f = (y_1, ..., y_k, x_1, ..., x_k)$$

$$\nabla g = 2\left(x_1, ..., x_k, \underbrace{0,...,0}_{k \text{ פעמים}}\right)$$

$$\nabla h = 2\left(\underbrace{0,...,0}_{k \text{ פעמים}}, y_1, ..., y_k\right)$$

אז יש לנו

$$\nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h \Rightarrow (y_1, ..., y_k, x_1, ..., x_k) = 2\lambda(y_1, ..., y_k) + 2\mu(0, ..., 0, y_1, ..., y_k)$$

וישר נקבל שמתקיים

$$y_i = 2\lambda x_i,\ \ x_i = 2\mu y_i$$

זאת־אומרת

$$\sum_{i=1}^k y_i^2 = \sum_{i=1}^k 4\lambda^2 x_i^2 \Rightarrow 4\lambda^2 U = V$$

ולכן

$$\lambda = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{V}{U}}$$

ונקבל

$$y_i = 2\lambda x_i \Rightarrow \pm\sqrt{\frac{V}{U}} x_i$$

ועכשיו נקבל

$$\sum_{i=1}^k (x_i y_i) \leq \sum_{i=1}^k \left(x_i \cdot \sqrt{\frac{V}{U}} x_i\right) = \sqrt{\frac{V}{U}} \cdot U = \sqrt{\frac{V}{U} \cdot U^2} = \sqrt{UV} = \left(\sum_{i=1}^k x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^k y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

וזה בידיוק אי־שיוויון קושי־שוורץ. $\square$

שאלה 5

תהיי $A \subseteq \mathbb{R}^3$ קבוצת אוסף הפתרונות של מערכת המשוואות

$$\begin{cases} F_1(x,y,z) = \sin(xy) + x^2z - y^3 = 1 \\ F_2(x,y,z) \ e^{yz} + xy^2 + z^3 = 2 \end{cases}$$

סעיף א'

נראה כי קיימת סביבה פתוחה $U \subseteq \mathbb{R}^3$ של $(1,0,1) \in A$ שבה לכל $(x,y,z) \in U \cap A$ ניתן לבטא כל שני משתנים כפונקציה של המשתנה השלישי.

הוכחה: ראשית, אכן $(1,0,1) \in A$ כי $\sin(0) + 1 - 0 = 1, e^0 + 0 + 1 = 2$.
נגדיר $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ על־ידי $F(x,y,z) = \binom{F_1(x,y,z)}{F_2(x,y,z)}$.
מתקיים $F(1,0,1) = (1,2)$ ו־F גזירה קורדינאטה קורדינאטה מאריתמטיקה של פונקציות גזירות (ואף גזירה ברציפות כי כל הגורמים בכל קורדינאטה גזירים ברציפות), אז נחשב

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = y\cos(xy) + 2xz \Rightarrow \frac{\partial F_1}{\partial x} \mid_{(1,0,1)} = 2$$
$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = x\cos(xy) - 3y^2 \Rightarrow \frac{\partial F_1}{\partial y} \mid_{(1,0,1)} = 1$$
$$\frac{\partial F_1}{\partial z} = x^2 \Rightarrow \frac{\partial F_1}{\partial z} \mid_{(1,0,1)} = 1$$
$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = y^2 \Rightarrow \frac{\partial F_2}{\partial x} \mid_{(1,0,1)} = 0$$
$$\frac{\partial F_2}{\partial y} = ze^{yz} + 2yx \Rightarrow \frac{\partial F_2}{\partial y} \mid_{(1,0,1)} = 1$$
$$\frac{\partial F_2}{\partial z} = ye^{yz} + 3z^2 \Rightarrow \frac{\partial F_2}{\partial z} \mid_{(1,0,1)} = 3$$

כמובן כל הנגזרות החלקיות רציפות ולכן $F \in C^1$, ומתקיים

$$DF_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{pmatrix} \Rightarrow DF_{(1,0,1)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

נשים לב שהדרגה מלאה כי השורות בבירור בלתי־תלויות לינארית (דרגה מלאה לכן דטרמיננטה לא אפס).
קיבלנו שכל התנאים של משפט הפונקציה הסתומה מתקיימים, ולכן קיימת סביבה פתוחה $U \in \mathbb{R}^3$ סביב $(1,0,1)$ המקיימת

$$A \cap U = \{(x,y,z) \in U \mid F_1(x,y,z) = 1, F_2(x,y,z) = 2\}$$

מתנהג כקו גובה (כפי שיונתן אמר בתרגול), ולכל $(x,y,z) \in A \cap U$ משפט הפונקציה הסתומה אומר שקיימת סביבה של הנקודה כך שנוכל לרשום

$$\begin{cases} (x,y) = h(z) \\ (x,z) = g(y) \\ (y,z) = f(x) \end{cases}$$

$\square$

סעיף ב'

נחשב את $\frac{dy}{dx}(1,0,1),\ \frac{dz}{dy}(1,0,1)$.

פתרון: נגזור את $F_1(x,y(x),z(x))=1$ ביחס ל־x, אז

$$\frac{d}{dx}\left[\sin(xy)+x^2z-y^3\right]=0\underset{\text{כלל השרשרת}}{\Rightarrow}\cos(xy)\left(y+x\cdot\frac{dy}{dx}\right)+2xz+x^2\cdot\frac{dz}{dx}-3y^2\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

$$\Rightarrow|_{(1,0,1)}\ \frac{dy}{dx}+2+\frac{dz}{dx}$$

באותו אופן נגזור את $F_2(x,y(x),z(x))$ ביחס ל־x, אז

$$\frac{d}{dx}\left[e^{yz}+xy^2+z^3\right]=0\underset{\text{כלל השרשרת}}{\Rightarrow}e^{yz}\left(z\cdot\frac{dy}{dx}+y\cdot\frac{dz}{dx}\right)+y^2+2xy\cdot\frac{dy}{dx}+3z^2\cdot\frac{dz}{dx}$$

$$\Rightarrow|_{(1,0,1)}\ \frac{dy}{dx}+3\frac{dz}{dx}$$

שניהם שווים לאפס, אז

$$\frac{dy}{dx}+2+\frac{dz}{dx}=\frac{dy}{dx}+3\frac{dz}{dx}\Rightarrow\frac{dz}{dx}=1$$

ואז

$$\frac{dy}{dx}+2+\frac{dz}{dx}\underset{\frac{dz}{dx}=1}{\Rightarrow}\frac{dy}{dx}=-3$$

נשאר לחשב את $\frac{dz}{dy}(1,0,1)$, נגזור את $F_2(x(y),y,z(y))$ לפי y ונקבל

$$\frac{d}{dy}\left[e^{yz}+xy^2+z^3\right]=0\underset{\text{כלל השרשרת}}{\Rightarrow}e^{yz}\left(z+y\cdot\frac{dz}{dy}\right)+\frac{dx}{dy}y^2+2xy+3z^2\cdot\frac{dz}{dy}$$

$$\Rightarrow|_{(1,0,1)}\ 1(1+0)+0+0+3\cdot1^2\cdot\frac{dz}{dy}=0\Rightarrow\frac{dz}{dy}=-\frac{1}{3}$$

□

שאלה 6

תהיי $B \subseteq \mathbb{R}^k$ פתוחה ו־$f, g_1, ..., g_n : B \to \mathbb{R}$ גזירות ברציפות עבור $n + 1 \leq k$. נגדיר

$$A = \{x \in B \mid g_1(x) = ... = g_n(x) = 0\}$$

נניח בנוסף כי לכל $a \in A$ מתקיים ש-$\nabla g_1(a), ..., \nabla g_n(a) \in \mathbb{R}^k$ הם בלתי־תלויים לינארית.
נגדיר פונקציה $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \times B \to \mathbb{R}$ הנקראת **לגראנז'יאן** באמצעות

$$\mathcal{L}(\lambda, x) = f(x) - \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i g_i(x))$$

סעיף א'

נוכיח כי $\mathcal{L}$ גזירה ברציפות ואם $a \in A$ היא נקודת קיצון מקומי של $f|_A$ אז קיים $\lambda \in \mathbb{R}^n$ כך שיתקיים $D\mathcal{L}_{(\lambda,a)} = 0$.
הוכחה: בבירור $\mathcal{L}$ גזירה ברציפות מאריתמטיקה של פונקציות גזירות ברציפות (סכום ומכפלה בסקלר), ומכללי גזירה

$$\nabla \mathcal{L}_{(\lambda,x)} = \begin{pmatrix} \nabla_\lambda \mathcal{L} \\ \nabla_x \mathcal{L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -g_1(x) \\ \vdots \\ -g_n(x) \\ \nabla f(x) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \nabla g_i(x) \end{pmatrix}$$

שכמובן רציפים קורדינאטה־קורדינאטה כסכום ומכפלה בסקלר של פונקציות רציפות.
נניח כי $a \in A$ נקודת קיצון מקומי של $f|_A$ אז מתקיים $\nabla f|_a = 0$ ואם נציב במה שמצאנו נקבל

$$0 = D\mathcal{L}_{(\lambda,a)} = \begin{pmatrix} g_1(0) = 0 \\ \vdots \\ g_n(0) = 0 \\ \nabla f(a) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \nabla g_i(a) = - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \nabla g_i(a) \end{pmatrix}$$

כעת, נטען כעת שלכל $v \in \mathbb{R}^k$ שמתקיים $\nabla g_i(a) \cdot v = 0$ לכל $i \in [n]$ נקבל ש־$\nabla f(a) \cdot v = 0$ כי מהגדרת A אנחנו יכולים "לזוז" רק בכיוונים שמשיקים ל־a אחרת נשבור את ההגבלה שלנו של A אבל אם a היא נקודה קריטית, זה גם אומר שהיא שבפרט $\nabla f(a)$ אורתוגונלי לכל וקטור כיוון כזה.
במילים אחרות זה אומר שקיימים $\lambda_1, ..., \lambda_n$ כך שמתקיים

$$\nabla f(a) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \nabla g_i(a)$$

(כי אם $V = \{v \in \mathbb{R}^k \mid \nabla g_i(a) \cdot v = 0 \ \forall i\}$ אז $V^\perp = \{\nabla g_1(a), ..., \nabla g_n(a)\}$ מהאורתוגונליות שראינו במטלות קודמות ולכן נקבל $\nabla f(a) \in V^\perp$ וזה בידיוק מה שרצינו להראות). $\square$

סעיף ב'

נניח מעתה כי $f, g_1, ..., g_n$ גזירות פעמיים ברציפות.

תת־סעיף א'

נוכיח כי $\mathcal{L}$ גזירה פעמיים ברציפות ונחשב את ההסיאן שלה.
הוכחה: מההנחה שלנו, Hf (מטריצת ההסיאן של f קיימת) וגם לכל $i \in [n]$ קיימת Hg_i.
נשים לב שההסיאן שמתקבל הוא מצורה של מטריצות בלוקים

$$H\mathcal{L}_{(\lambda,x)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \lambda_i^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \lambda_i \lambda x_i} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_i \partial \lambda_i} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial^2 x_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{n\times n} & -\nabla g(x)^T \\ -\nabla g(x) & Hf(x) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Hg_i(x) \end{pmatrix} \underset{\text{סימון}}{=} \begin{pmatrix} 0 & G^T \\ G & C \end{pmatrix}$$

כאשר הטרנספוס נועד להעברה למימדים הנכונים עבור מטריצת ההסיאן (מוקטור עמודה לשורה במקומות הנכונים). $\square$

תת־סעיף ב'

נראה כי ההסיאן $H\mathcal{L}_{(\lambda,x)}$ בהכרח אינו חיובי או שלילי בהחלט לכל $(\lambda,x)\in\mathbb{R}^n\times B$.

הוכחה: מטרצה M היא חיובית לחלוטין אם לכל $v\neq 0$ וקטור מתקיים $v^TMv>0$ ושלילית לחלוטין אם $v^TMv<0$.
מספיק שנסתכל על $n=1$ וניקח את ניקח $(0,x)\in\mathbb{R}\times B$ ונקבל

$$(0,x)\begin{pmatrix}0 & G^T\\ G & C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ x\end{pmatrix}=Cx^2$$

שיכולה להיות אי־שלילית אם $Hf(x)-\sum_{i=1}^n\lambda_iHg_i(x)<0$ וחיובית אם זה גם חיובי. □