פתרון מטלה -02 מטלה פתרון

2025 במרץ 31



 $.|X| = |Y|, |X^{\prime}| = |Y^{\prime}|$ תהיימות קבוצות אבוצות $X, Y, X^{\prime}, Y^{\prime}$ תהיינה

'סעיף א

 $|X \times X'| = |Y \times Y'|$ נוכיח שמתקיים

הדרחד פונקציה שמתקיים |X'|=|Y'| ומכך שמתקיים $f:X \to Y$ ועל ערכית פונקציה שקיימת פונקציה שקיימת |X'|=|Y'| קיימת ארכית ועל ערכית ועל $g:X' \to Y'$

נגדיר ערכית חד־חד ערכית היא h(x,x')=(f(x),g(x')) על־ידי $f:X\times X' o Y\times Y'$ נגדיר

חד־חד ערכית: נשים לב שמתקיים

$$h(x_1, x_1') = h(x_2, x_2') \Longleftrightarrow (f(x_1), g(x_1')) = (f(x_2), g(x_2')) \Longleftrightarrow f(x_1) = f(x_2) \land g(x_1') = g(x_2') \Longleftrightarrow x_1 = x_2 \land x_1' = x_2' \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2) \land g(x_1') = f(x_1') \land g(x_1') = f(x$$

. ערכיות ק־וf ו־g נובע מהיות (1) נובע כאשר

על: יהי yעל נובע שקיים $x'_{y'} \in X'$ מהיות על, נובע שקיים f(x) = y מתקיים על כי קיים על, נובע על, נובע על, נובע כי קיים איז $x_y \in X$ כך שמתקיים על: יהי על: יהי $x_y \in X$ מהיות $x_y \in X$ נובע כי קיים על, ולכן $x_y \in X'$ ומכך $x_y \in X'$ ומכך שמתקיים על: $x_y \in X'$ ומכך שמתקיים על: יהי על: $x_y \in X'$ ומכך שקיים על: יהי על: יהי

 $|X \times X'| = |Y \times Y'|$ בונקציה עוצמות שיוויון מהגדרת ועל ולכן ערכית ערכית הד־חד מצאנו פונקציה מצאנו

'סעיף ב

 $.|X \cup X'| = |Y \cup Y'|$ שמתקיים שמתקיים $.X \cap X' = Y \cap Y' = \emptyset$ נניח שמתקיים נניח

הדרחד קיימת פונקציה אריחד |X'|=|Y'| ומכך שמתקיים הריחד ערכית פונקציה אריחד ערכית קיימת פונקציה אוכרה: מכך שמתקיים אונקציה אריחד ערכית פונקציה פונקציה הריחד ערכית ועל אריכית ועל אריים פונקציה פונקציה אריים פונ

נגדיר כמו בתרגול:

$$f \oplus g(x) = \begin{cases} f(x) & x \in X \\ g(x) & x \in X' \end{cases}$$

 $A \in \mathcal{A}$ תחת תחת לערך יחיד לערך נשלח $X \in X \cup X'$ נובע שכל $X \cap X' = Y \cap Y' = \emptyset$ שכן מכך שכן מוגדרת מוגדרת מוגדרת מוגדרת שכן אינו אינו מוגדרת מוגדרת היטב שכן מכך אינו אינו מוגדרת מוגדרת היטב שכן מכך שר

 $y \in Y \cup Y'$ יהי על: על: בתרגול, נראה בתרגול, ערכיות ערכיות החד־חד ערכית ועל: את החד־חד ערכית ערכית ערכיות האינו בתרגול

 $y \in Y'$ או $y \in Y$ נובע כי $Y \cap Y' = \emptyset$ מכך שמתקיים

f(x)=y בין מהיים כך על, נובע כי קיים על, על, מהיות f מהיות על, אם f

g(x')=y בקיים כך כך מהיות על, נובע כי קיים על, נובע אל, מהיות אם א

מכך שונים. אלו שני כי נובע כי נובע גובע גובע אנו אלו או $X \neq X'$ כי נובע גובע מסך מכך מכך מכך מכך אונים.

. ערכית ועל. $f\oplus g$ וקיבלנו כי $f\oplus g(x)=y$ ברכית ערכית ערכית הדיחד ליים נובע כי היים $f\oplus g$ מהגדרת מהגדרת בי ערכית ועל.

. $|X \cup X'| = |Y \cup Y'|$ נובע עוצמות שיוויון מהגדרת ועל ולכן ערכית ערכית מצאנו פונקציה מצאנו

'סעיף ג

 $\left|X^{X'}
ight|=\left|Y^{Y'}
ight|$ נוכיה שמתקיים

מוקציה שקיימת פונקציה |X'|=|Y'| ומכך שמתקיים היד ערכית ועל ערכית פונקציה דר־חד נובע קיימת פונקציה |X'|=|Y'| נובע שקיימת פונקציה חד־חד ערכית ועל |X'|=|Y'| נובע שקיימת פונקציה חד־חד ערכית ועל י

TBD . נגדיר $\varphi: X^{X'} o Y^{Y'}$ ונרצה להראות כי $\varphi: X^{X'} o Y^{Y'}$ ונגדיר להראות כי $\varphi: X^{X'} o Y^{Y'}$

תהיינה X,X^\prime קבוצות.

'סעיף א

 $(X \times \{0\}) \cap (X' \times \{1\}) = \emptyset$ נוכיה ש־

 $(a,b) \in (X \times \{0\}) \cap (X' \times \{1\})$ ולכן קיים ($X \times \{0\}$) הוכחה: נניח בשלילה ש־ \emptyset

b=1 מהגדרת החיתוך נובע כי $(a,b)\in X imes\{0\}$ ולכן $(a,b)\in b=0$. מצד שני, מהגדרת החיתוך נובע כי גם

'סעיף ב

f(a,i)=a על־ידי $f:X\uplus X'\to X\cup X'$ פונקציה אונגדיר פונקציה אל על־ידי $X\uplus X'=(X\times\{0\})\cup (X'\times\{1\})$ נגדיר נגדיר פונקניה על

 $.f(x,i)=x_0$ המקיים ($x,i)\in X$ שלא קיים בעליה כך מר מיים לקיים איננה על, ולכן איננה על, ולכן מיים הוכחה: נניח בשלילה בי

:אבאים אחד מהבאים ולכן $x_0 \in X \cup X'$ אבל

 $f(x_0,0)=f(x_0,1)=x_0$ ואז $x_0\in X\wedge x_0\in X'$ או או $f(x_0,1)=x_0$ ולכן $x_0\in X'$ או או או לכן $x_0\in X$ ואל. בכל מקרה הגענו לסתירה ולכן $x_0\in X$

'סעיף ג

 $X \cap X' = \emptyset$ אם ורק אם ערכית ערכית היא הקודם האסעיף מהסעיף שהפונקציה שהפונקציה נוכיח

:הוכחה

 $X \cap X' = \emptyset$ כי ונראה ערכית ערכית f הד־חד בניח כי

נניח בשלילה כי $0 \neq X'$ ולכן קיים $x_0 \in X$, ולכן $x_0 \in X$ מקיים מקיים $x_0 \in X$ אבל מהגדרת החיתוך אבל מתקיים נניח בשלילה כי $X \cap X' \neq \emptyset$ ולכן אבל $X \cap X' \neq \emptyset$ וולכן מתקיים אבר ביות של $X \cap X' = \emptyset$ וולכן מתקיים אבל מהגדרת החירה לחד־חד ערכיות של $X \cap X' = \emptyset$

. ערכית דר־חד fכי ונראה אור או ארכית ארכית

'סעיף ד

i'(x)=(x,1) על־ידי $i':X' o X\uplus X'$ ונגדיר i(x)=(x,0) על־ידי $i:X o X\uplus X'$ על־ידי $i:X o X\uplus X'$ ונגדיר g:X' o Y ורב g:X' o Y ורב אם יש קבוצה g:X' o Y ורב g:X' o Y ורב א ופונקציות g:X' o Y ורב א יש פונקציה יחידה וופונקציות וופונקציות וופונקציות וופונקציות וופונקציות וופונקציות וופונקציה יחידה וופונקציה יחידה וופונקציות וופונקציות וופונקציות וופונקציות וופונקציה יחידה וופונקציה יחידה וופונקציות וופונקציות וופונקציות וופונקציות וופונקציה וופונקציה יחידה וופונקציה יחידה וופונקציות וופונקציות וופונקציות וופונקציות וופונקציה וופונקציה וופונקציה וופונקציה וופונקציה וופונקציה וופונקציה וופונקציות וופונקציה וופונ

הוכחה: TBD

 $|X'| \leq |Y'|$ ו־ $|X| \leq |Y|$ המתקיים כך שמתקיים X, X', Y, Y'ו

'סעיף א

 $.|X \cup X'| \leq |Y \cup Y'|$ הטענה את נפריך $.Y \cap Y' \neq \emptyset$ אבל אבל א $X \cap X' = \emptyset$ נניח נניח

הוכחה: נגדיר

$$X = \{1, 2, 3\}, X' = \{4, 5\}, Y = \{1, 2, 3\}, Y' = \{3, 4\}$$

 $X \cap X' = \emptyset$ רן וי $|X| \leq |Y|, |X'| \leq |Y'|$ אכן מתקיים

ניתן דוגמה גם לקטן ממש: נגדיר

$$X = \{1, 2\}, X' = \{4, 5\}, Y = \{1, 2, 3\} = Y'$$

 $X\cap X'=\emptyset$ ו ר $|X|\leq |Y|,|X'|\leq |Y'|$ אכן מתקיים

נשים לב שבשני המקרים לא יכולה להיות פונקציה חד־חד ערכית מעקרון שובך היונים – יש לנו יותר יונים (איברים ב־ $(X \cup X' \cup X' \cup X')$ מאשר שובכים לשיברים ב־ $(Y \cup Y' \cup X')$ ולכן בהכרח יהיה לנו שובך עם שתי יונים, דהיינו פונקציה לא חד־חד ערכית.

'סעיף ב

. $|X \cup X'| \leq |Y \cup Y'|$ נניח שמתקיים $|X \cap Y'| = \emptyset$ נניח גוב מניח נניח גוביח אוגב

הוכץ פונקציה אובע כי קיימת אובע אובע מכך ומכך ומכך מכך דימת פונקציה דיחד פונקציה וובע אובע כי קיימת פונקציה אובע אובע אובע אובע אובע בי אובע כי קיימת פונקציה וובע אובערכית אובערכית וובע כי קיימת פונקציה וובע כי קיימת פונקציה אובערכית וובע כי קיימת פונקציה וובע כי קיימת פונקציה אובערכית וובע כי קיימת פונקציה וובע כי קיימת פונקציה אובערכית וובע כי קיימת פונקציה וובע בי קיימת פי קיימת פונקציה וובע בי קיימת פונקציה וובע בי קיימת פיימת פונקציה וובע בי קיימת פונ

על־ידי $h: X \cup X' o Y \cup Y'$ נגדיר

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in X \\ g(x) & x \in X' \end{cases}$$

.hתחת לערך יחיד נשלח נשלח מוגדרת ביטב אכן כל אכן אכן אכן אכן אכן מוגדרת מוגדרת אפונקציה אכן אכן ארו $X\cap X'=\emptyset$

 $f(x) \neq g(x')$ מתקיים $x' \in X'$ ולכל $x \in X$ נובע שלכל עובע $Y \cap Y' = \emptyset$ מתקיים ערכיות חד־חד ערכית, שכן f וד־חד ערכית מצאנו פונקציה חד־חד ערכית בין $f(x) \neq y'$ לבין $f(x) \neq y'$ ולכן מתקיים וולכן מתקיים אינו פונקציה מד-חד ערכית בין $f(x) \neq y'$ לבין $f(x) \neq y'$

'סעיף ג

. $\left|X^{X'}\right| \leq \left|Y^{Y'}\right|$ נניח את נפריך גפריך. גפריך גפריך את נפריך גפריך גערי

. היא ערכית, על היא הדרחד איז $\emptyset:X o X'$ אז או $X=X'=\emptyset$ שאם ערכית, על הרצאה הוכחה:

 $\left| Y^{Y'}
ight| = 0$ נבחר זה מתקיים לב ונשים או $Y = \emptyset, Y'
eq \emptyset$ נבחר נבחר

 $y\in Y$ קיים $y'\in Y'$ קיים אם לכל ליך נקרא פונקציה אמרנו כי יחס אמרנו לי אמקיימים את אמקיימים את הגדרת הפונקציה. אמרנו כי יחס אבין $Y'\in Y'$ נקרא אבל אמקיימים את הגדרת הפונקציה. על יחס אביל אביר אביל אבילנו סתירה להגדרת הפונקציה.

לכן מתירה וזו $\left|X^{X'}\right|=1\leq 0=\left|Y^{Y'}\right|$ חזו סתירה מקרה נקבל לכן נקבל

'סעיף ד

 $.\left|X^{X'}\right| \leq \left|Y^{Y'}\right|$ מניח שמתקיים $.X \neq \emptyset$ אבל אבל מניח נניח נניח

 $1 \leq |X| \leq |Y|$ שכן $Y \neq \emptyset$ נובע כי $X \neq \emptyset$ נובע לב שמהיות שכן ראשית בשים האכיות אוכחה:

 $(x',x)\in F$ נשים $(x',x)\in Y$ ניזכר כי היחס $(x',x)\in Y$ יקרא פונקציה אם לכל $(x',x)\in Y$ ניזכר כי נובע כי $(x',x)\in Y$ ניזכר כי היחס $(x',x)\in Y$ קיים $(x',x)\in Y$ קיים $(x',x)\in Y$ יחד כך שמתקיים מכך ש $(x',x)\in Y$ קיים $(x',x)\in Y$ יחד כך שמתקיים $(x',x)\in Y$ ולכן היחס היחידי שיתאים הוא היחס הריק: לכל $(x',x)\in Y$ קיים $(x',x)\in Y$ יחד כך שמתקיים ושימות לב מכך ווער היחס היחידי שיתאים הוא היחס הריק: לכל $(x',x)\in Y$

. $\left|X^{X'}\right|=1 \le 1 = \left|Y^{Y'}\right|$ נקבל בסך־הכל שמתקיים

 $g:Y'\to X'$ על פונקציה שיש נוכיח נוכיח וגבו אוב וגם אוגב $|X'|\le |Y'|$ וגם או $X'\neq\emptyset$ ים שמתקיים קבוצות קבוצות היינה אונה אוניים או

 $X'=f(X')\uplus(Y'\setminus f(X'))$ מכך שמתקיים X'=f(X') נובע כי קיימת X'=f(X') חד־חד ערכית ומתקיים X'=f(X') נובע כי קיימת X'=f(X') הטענה של חד־חד ערכית ועל ולכן הפיכה ו $X'=f(X')=\emptyset$ אם X'=f(X') הטענה ערכית ועל ולכן הפיכה וועל ולכן הפיכה של חד־חד ערכית ועל ולכן הפיכה וועל ולכן הפיכה של חד־חד ערכית ועל ועלכן ועל ועלכן ועל ועלכן ועל ועלכן ועל ועלכן ועלכן ועל ועלכן ועל ועלכן ועל ועלכן ו

על־ידי: g:Y' o X' נגדיר $f(x'_{y'}) = y'$ מהיות כך שמתקיים $x'_{y'} \in X'$ קיים $y' \in f(X')$ נגדיר שלכל מהיות f

$$g(y') = \begin{cases} f^{-1}(y') & y' \in f(X') \\ x'_0 & y' \notin f(X') \end{cases}$$