הכנה למבחן מועד א' — משפטים והוכחות נבחרים — תורת המידה, 80517

21 בינואר 2026

תוכן עניינים

1 מידה

משפט 1.1 (תנאי שקול לפונקציה מדידה): יהי $(X,\mathcal{A})$ מרחב מדיד. אם $f:X\to[-\infty,\infty]$ פונקציה אזי f מדידה אם ורק אם $f^{-1}((\alpha,\infty])$ לכל $\alpha\in\mathbb{R}$.

הוכחה:

$\Leftarrow$ מיידי מהגדרה כי אם f מדידה לכל $E\in\mathbb{B}([-\infty,\infty])$ מתקיים $f^{-1}(E)\in\mathcal{A}$ ולכן בהינתן $\alpha\in\mathbb{R}$ כלשהו, מתקיים $(\alpha,\infty]\in\mathbb{B}([\infty,\infty])$ ובפרט $f^{-1}((\alpha,\infty])\in\mathcal{A}$.

$\Longrightarrow$ מספיק להראות שהמקור של כל אחת מהקבוצות

$$(\alpha,\beta),\qquad(\alpha,\infty],\qquad[-\infty,\beta)$$

הוא מדיד, ואכן:

1. בהינתן $\beta\in\mathbb{R}$ מתקיים

$$f^{-1}([-\infty,\alpha))=\bigcup_{n=1}^{\infty}f^{-1}\left(\left[-\infty,\beta-\frac{1}{n}\right)\right)=\bigcup_{n=1}^{\infty}f^{-1}\left(\left(\beta-\frac{1}{n},\infty\right]^{c}\right)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(f^{-1}\left(\left(\beta-\frac{1}{n},\infty\right]\right)\right)^{c}\in\mathcal{A}$$

כאשר המעבר האחרון נובע מההנחה שלכל $\alpha\in\mathbb{R}$ מתקיים $f^{-1}((\alpha,\infty])$ ולכן לכל $n\in\mathbb{N}$ בפרט עבור $\alpha=\beta-\frac{1}{n}\in\mathbb{R}$ נקבל $f^{-1}\left(\left(\beta-\frac{1}{n},\infty\right]\right)\in\mathcal{A}$.

אבל $\mathcal{A}$ היא σ־אלגברה ולכן מצד אחד נקבל $\left(f^{-1}\left(\left(\beta-\frac{1}{n},\infty\right]\right)\right)^{c}$ לכל $n\in\mathbb{N}$ ומצד שני $\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(f^{-1}\left(\left(\beta-\frac{1}{n},\infty\right]\right)\right)^{c}\in\mathcal{A}$ לכל $\beta\in\mathbb{R}$, וזה סוגר את שני המקרים הימניים.

2. בהינתן $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

$$f^{-1}((\alpha,\beta))=f^{-1}([-\infty,\beta)\cap(\alpha,\infty])=f^{-1}([-\infty,\beta))\cap f^{-1}((\alpha,\infty])\in\mathcal{A}$$

כאשר המעבר האחרון נובע מכך ש־σ־אלגברה סגורה לחיתוכים סופיים.

כעת, אם $U\subseteq[-\infty,\infty]$ אזי $U=\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n$ כאשר לכל $n\in\mathbb{N}$, I_n הוא מהצורה של $(\star)$ וכי קבוצה פתוחה ב־$[-\infty,\infty]$ היא איחוד בן־מנייה של קבוצות מהצורה $(\star)$ ונקבל

$$f^{-1}(U)=f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n\right)=\bigcup_{n=1}^{\infty}f^{-1}(I_n)\in\mathcal{A}$$

כלומר המקור של כל קבוצה פתוחה הוא מדיד ולכן f מדידה. $\square$

משפט 1.2 (מדידות נשמרת תחת הפעלת sup/inf/limsup/liminf): יהי $(X, \mathcal{A})$ מרחב מדידה. אם $\{f_n : X \to [-\infty, \infty]\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות מדידות, אז הפונקציות

$$(1)\ \sup_{n\in\mathbb{N}}\{f_n\} \qquad (2)\ \inf_{n\in\mathbb{N}}\{f_n\} \qquad (3)\ \limsup_{n\to\infty} f_n \qquad (4)\ \liminf_{n\to\infty} f_n$$

כולן מדידות.

הוכחה: (1) נסמן $g := \sup_{n\in\mathbb{N}}\{f_n\}$, ומספיק להראות שהקבוצה $g^{-1}((a,\infty])$ היא מדידה לכל $\alpha \in \mathbb{R}$, אז נרצה להראות

$$(\star)\ g^{-1}((\alpha,\infty)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}((a,\infty])$$

$\subseteq$: אם $x \in g^{-1}((\alpha,\infty])$ אז

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\{f_n(x)\} = g(x) \in (\alpha,\infty] > \alpha$$

כלומר קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש־$f_{n_0}(x) > \alpha$ (אחרת לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $f_n(x) \leq \alpha$ וזו סתירה) אז

$$x \in f_{n_0}^{-1}((\alpha,\infty]) \Longrightarrow x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}((\alpha,\infty]) \Longrightarrow g^{-1}((\alpha,\infty]) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}((\alpha,\infty])$$

$\supseteq$: אם $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}((\alpha,\infty])$ אז קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש־$x \in f_n^{-1}((\alpha,\infty])$ ולכן $f_{n_0}(x) \in (\alpha,\infty]$ כלומר $f_{n_0}(x) > \alpha$ ומתקיים

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\{f_n(x)\} \geq f(n_0)(x) > \alpha \Longrightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}}\{f_n(x)\} > \alpha \Longrightarrow g(x) \in (\alpha,\infty] \Longrightarrow x \in g^{-1}((\alpha,\infty])$$

אז $(\star)$ נכון ולכן f_n מדידה לכל $n \in \mathbb{N}$ ולכן $f_n^{-1}((\alpha,\infty])$ מדידה לכל $n \in \mathbb{N}$, כלומר הקבוצה $g^{-1}((\alpha,\infty])$ היא איחוד בן־מנייה של קבוצות מדידות ולכן מדידה בעצמה וקיבלנו שהפונקציה g מדידה.

(2) זהה עבור קטעים מהצורה $[-\infty,\beta]$.

(3)

$$\limsup_{n\to\infty} f_n = \inf_{k\in\mathbb{N}}\left\{\sup_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\geq k}}\{f_n\}\right\}$$

ולכן עבור סדרת הפונקציות $\{h_k : X \to [-\infty,\infty]\}_{k=1}^{\infty}$ המוגדרת על־ידי

$$\forall k \in \mathbb{N},\ h_k := \sup_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\geq k}}\{f_n\}$$

מתקיים מ־(1) ש־$\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות מדידות ונקבל מ־(2) ש־$\inf_{k\in\mathbb{N}}\{h_k\}$ מדידה ולכן $\limsup_{n\to\infty} f_n$ מדידה.

(4) באותו אופן למקרה הקודם רק עבור

$$\liminf_{n\to\infty} f_n = \sup_{k\in\mathbb{N}}\left\{\inf_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\geq k}}\{f_n\}\right\}$$

$\square$

2 אינטגרציה

משפט 2.1 (לכל פונקציה מדידה יש סדרת פונקציות פשוטות שמתכנסת אליה): אם $f : X \to [0,\infty]$ פונקציה מדידה כלשהי, אז קיימת סדרת פונקציות פשוטות $\{s_n\} \mid X \to [0,\infty)_{n=1}^{\infty}$ כך שמתקיים

1. $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית עולה וחסומה על־ידי f, כלומר
$$\forall n,m \in \mathbb{N},\ m \le n \Longrightarrow 0 \le s_m \le s_n \le f$$
2. הסדרה $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת נקודתית ל־f, כלומר
$$\forall x \in X,\ s_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$$

הוכחה: נגדיר $\varphi_n : [0,\infty) \to [0,\infty)$ על־ידי
$$\forall x \in [0,\infty),\ \varphi_n(x) := \begin{cases} 2^{-n}\cdot\lfloor 2^n \cdot x\rfloor & 0 \le x < n \\ n & x \ge n \end{cases}$$
אז לכל $n \in \mathbb{N}$, φ_n היא צירוף לינארי של פונקציות מהצורה $\mathbb{1}_{\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}}$ לכל $0 \le k \le n\cdot 2^n - 1$ ולכן היא מדידה בורל ביחס ל־$[0,\infty)$ ולכן תמונתה סופית ו־φ_n היא פונקציה פשוטה.
לכל $x \in [0,n]$ ולכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים
$$\lfloor 2^n x\rfloor \le 2^n x < \lfloor 2^n x\rfloor + 1 \Longleftrightarrow 2^{-n}\lfloor 2^n x\rfloor \le x < 2^{-n}(\lfloor 2^n x\rfloor + 1)$$
כלומר
$$\varphi_n(x) \le x < \varphi_n(x) + 2^{-n} \Longleftrightarrow \varphi_n(x) \le x \wedge x < \varphi_n(x) + 2^{-n} \Longleftrightarrow x \ge \varphi_n(x) \wedge \varphi_n(x) > x - 2^{-n} \Longleftrightarrow x - 2^{-n} < \varphi_n(x) \le x$$
ולכן $x - 2^{-n} < \varphi_n(x) \le x$ לכל $n \in \mathbb{N}, x \in [0,n]$ ומכאן הרי ש־$\varphi_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ לכל $x \in [0,n]$ וכן לכל $x \in [0,\infty)$ מתקיים
$$\forall n,m \in \mathbb{N},\ n \le m \Longrightarrow \varphi_n \le \varphi_m \le x$$
ולכן $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית עולה ואם לכל $n \in \mathbb{N}$ נגדיר $s_n := \varphi_n \circ f$ נקבל את הטענה שכן הרכבת פונקציות מדידות היא פונקציה מדידה, אז $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ מקיימת את הנדרש. $\square$

משפט 2.2 (תכונות האינטגרל): תהיינה $f,g:X\to[0,\infty]$ פונקציות מדידות ותהיינה $A,B,E\in\mathcal{E}$ מדידות.
האינטגרל של f,g ביחס ל־μ מקיים את התכונות הבאות

1. מונטוניות של f,g: אם $0\le f\le g$ אזי $0\le\int_A f\,\mathrm{d}\mu\le\int_A g\,\mathrm{d}\mu$
2. מונטוניות ביחס להכלה: אם $0\le f$ ו־$A\subseteq B$ אזי $\int_A f\,\mathrm{d}\mu\le\int_B f\,\mathrm{d}\mu$
3. הומוגניות: אם $0\le f$ ו־$c\in[0,\infty)$ אזי $\int_A c\cdot f\,\mathrm{d}\mu=c\cdot\int_A f\,\mathrm{d}\mu$
4. אם $f|_E\equiv 0$ אזי $\int_E f\,\mathrm{d}\mu=0$ (גם אם $\mu(E)=\infty$)
5. אינטגרציה על קבוצות ממידה אפס: אם $\mu(E)=0$ אזי $\int_E f\,\mathrm{d}\mu=0$ (גם אם $f|_E\equiv\infty$)
6. אינטגרציה על קבוצה בניסוח עם הפונקציה המציינת: אם $0\le f$ אזי $\int_E f\,\mathrm{d}\mu=\int_X f\cdot\mathbb{1}_E\,\mathrm{d}\mu$
7. אינטגרציה על איחוד זר: אם $A\cap B=\emptyset$ אזי $\int_{A\cup B} f\,\mathrm{d}\mu=\int_A f\,\mathrm{d}\mu+\int_B\mathrm{d}\mu$

הוכחה:

1. **תעתיקי מהמטלה**
2. **תעתיקי מהמטלה**
3. **תעתיקי מהמטלה**
4. תהיי $s=\sum_{i=1}^n\alpha_i\mathbb{1}_{A_i}$ פונקציה פשוטה ואם נסתכל על E אזי $0\le s\le f$ וכן $f|_E\equiv;e0$ ולכן על E, $s(x)=0$ לכל $x\in E$.
מהגדרת האינטגרל של פונקציה פשוטה

$$\int_E s\,\mathrm{d}\mu=\sum\alpha_i\mu(A_i\cap E)$$

ולכן אם $A_i\cap E$ לא ריקה אז המקדמים α_i חייבים להיות אפסים ולכן הסכום הוא בידיוק 0; מהגדרת אינטגרל לבג

$$\int_E f\,\mathrm{d}\mu=\sup\left\{\int_E s\,\mathrm{d}\mu\mid 0\le s\le f,\text{פשוטה } s\right\}$$

אבל לכל פשוטה הנימוק לעיל תקף כלומר האינטגרל על כל הקבוצה הוא 0 ולכן $\int_E f\,\mathrm{d}\mu=0$ (ניזכר כי $0\cdot\infty=0$ ולכן גם הסוגריים נכונים).

5. תהיי $0\le s\le f$ פונקציה פשוטה $s=\sum_{i=1}^n\alpha_i\mathbb{1}_{A_i}$ ומהגדרת האינטגרל

$$\int_E s\,\mathrm{d}\mu=\sum_{i=1}^n\alpha_i\cdot\mu(A_i\cap E)$$

אבל $\mu(E)=0$ ו־$A_i\cap E\subseteq E$ ולכן ממונטוניות, $\mu(A_i\cap E)=0$ כלומר $\int_E s\,\mathrm{d}\mu=0$; זה נכון לכל פונקציה פשוטה ולכן מהגדרת האינטגרל מתקיים $\int_E f\,\mathrm{d}\mu=0$ (אפשר וצריך לסיים עם משפט ההתכנסות המונוטונית ועם $\{s_n\}_{n=1}^\infty$ פשוטות כך ש־$s_n\nearrow f$)

6. מתקיים

$$\int_E\mathbb{1}_A\,\mathrm{d}\mu=\mu(A\cap E)$$

אבל $\mathbb{1}_A\cdot\mathbb{1}_E=\mathbb{1}_{A\cap E}$ ולכן

$$\int_X\mathbb{1}_A\cdot\mathbb{1}_E\,\mathrm{d}\mu=\int_X\mathbb{1}_{A\cap E}\,\mathrm{d}\mu=\mu(A\cap E)$$

אז הטענה נכונה לאינדיקטורים; תהיי $s=\sum_{i=1}^n\alpha_i\mathbb{1}_{A_i}$ פונקציה פשוטה, אז

$$\int_E s\,\mathrm{d}\mu=\sum_{i=1}^n\alpha_i\int_E\mathbb{1}_{A_i}\,\mathrm{d}\mu=\sum_{i=1}^n\alpha_i\int_X\mathbb{1}_{A_i}\cdot\mathbb{1}_E\,\mathrm{d}\mu=\int_X\left(\sum_{i=1}^n\alpha_i\mathbb{1}_{A_i}\right)\cdot\mathbb{1}_E\,\mathrm{d}\mu=\int_X s\cdot\mathbb{1}_E\,\mathrm{d}\mu$$

והטענה נכונה לפונקציות פשוטות; לבסוף, נשתמש במשפט ההתכנסות המונוטונית שכן יש $\{s_n\}_{n=1}^\infty$ פשוטות כך ש־$s_n\nearrow f$ נקודתית ונקבל

$$\int_E f\,\mathrm{d}\mu=\int_E\left(\lim_{n\to\infty}s_n\right)\mathrm{d}\mu=\lim_{n\to\infty}\int_E s_n\,\mathrm{d}\mu=\lim_{n\to\infty}\int_X s_n\cdot\mathbb{1}_E\,\mathrm{d}\mu=\int_X\left(\lim_{n\to\infty}s_n\cdot\mathbb{1}_E\right)\mathrm{d}\mu=\int_X f\cdot\mathbb{1}_E\,\mathrm{d}\mu$$

7. מתקיים

$$\mathbb{1}_{A\cup B}(x)=\mathbb{1}_A(x)+\mathbb{1}_B(x)$$

ולכן מהפעלת הסעיף הקודם פעמיים בקצוות

$$\int_{A\uplus B} f\,\mathrm{d}\mu = \int_X f\cdot \mathbb{1}_{A\uplus B}\,\mathrm{d}\mu = \int_X f\cdot(\mathbb{1}_A+\mathbb{1}_B)\,\mathrm{d}\mu \underset{\text{לינאריות}}{=} \int_X f\cdot \mathbb{1}_A\,\mathrm{d}\mu + \int_X f\cdot \mathbb{1}_B\,\mathrm{d}\mu = \int_A f\,\mathrm{d}\mu + \int_B f\,\mathrm{d}\mu$$

□

משפט 2.3 (משפט ההתכנסות המונוטונית): יהי $(X,\mathcal{A},\mu)$ מרחב מידה ותהיי $\{f_n \mid X\to[0,\infty]\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות מדידות.
אם $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית עולה, אזי הפונקציה

$$f:=\lim_{n\to\infty} f_n=\sup_{n\in\mathbb{N}}\{f_n\}$$

מקיימת

$$\forall A\in\mathcal{A}\qquad \int_A f\,\mathrm{d}\mu=\lim_{n\to\infty}\int_A f_n\,\mathrm{d}\mu \Longrightarrow \forall A\in\mathcal{A}\qquad \int_A \lim_{n\to\infty} f_n\,\mathrm{d}\mu=\lim_{n\to\infty}\int_A f_n\,\mathrm{d}\mu$$

הוכחה: נוכיח עבור $A=X$ (עבור $A\subset X$ ההוכחה זהה) וראינו כי $f=\sup_{n\in\mathbb{N}}\{f_n\}$ מדידה.
$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית עולה ולכן קיים $\alpha\in[0,\infty]$ כך ש־$\alpha=\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,\mathrm{d}\mu$ ונרצה להראות

$$\alpha\underset{(1)}{\leq}\int_X f\,\mathrm{d}\mu\underset{(2)}{\leq}\alpha\Longrightarrow\alpha=\int_X f\,\mathrm{d}\mu$$

(1) נכון כי מתקיים

$$\forall n\in\mathbb{N}\ 0\leq f_n\leq\sup_{n\in\mathbb{N}}\{f_n\}=f\Longrightarrow 0\leq f_n\leq f$$

וממונוטוניות האינטגרל

$$\forall n\in\mathbb{N}\ 0\leq\int_X f_n\,\mathrm{d}\mu\leq\int_X f\,\mathrm{d}\mu$$

בפרט בלקיחת גבול נקבל $\alpha\leq\int_X f\,\mathrm{d}\mu$.
עבור (2) : תהיי $s:X\to[0,\infty)$ פונקציה פשוטה כלשהי המקיימת $0\leq s\leq f$ ולכן יש $\{A_i\}_{i=1}^{k}$ חלוקה כלשהי של X כך שניתן לכתוב $s=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\mathbb{1}_{A_i}$.
יהי $x\in X$ ויהי $c\in(0,1)$, נסמן

$$\forall n\in\mathbb{N},\ E_n:=\{x\in X\mid c\cdot s(x)\leq f_n(x)\}$$

מהיות $f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)$ מתקיים $f(x)=0$ (ואז $f\equiv 0$) או $f(x)\neq 0$ ולכן בהכרח $f(x)>0$.
במקרה הראשון

$$0\leq c\cdot s(x)\leq f_n(x)\leq f(x)=0$$

ואז $x\in E_n$ לכל n וסיימנו.
אחרת, קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n>n_0$ מתקיים $f_n(x)>c\cdot s(x)$ ולכן $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה עולה ביחס להכלה $(\star)$ ממונוטוניות $\{f_n\}$ ולכן $\lim_{n\to\infty}E_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n=X$ ונקבל

$$\alpha=\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,\mathrm{d}\mu\underset{\text{מונוטוניות ביחס להכלה}}{\geq}\lim_{n\to\infty}\int_{E_n}f_n\,\mathrm{d}\mu\underset{\text{מונוטוניות}}{\geq}\lim_{n\to\infty}\int_{E_n}c\cdot s\,\mathrm{d}\mu=c\cdot\lim_{n\to\infty}\int_{E_n}s\,\mathrm{d}\mu=c\cdot\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\mu(E_n\cap A_i)$$

אז מ־$(\star)$ נובע

$$\forall i\in[k],\ \forall n,m\in\mathbb{N},\ n\leq m\Longrightarrow A_i\cap E_n\subseteq A_i\cap E_m$$

ולכן גם $\{A_i\cap E_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה עולה גם היא ו־$\{A_i\}$ חלוקה של X אז

$$\forall i\in[k],\ \bigcup_{n=1}^{\infty}A_i\cap E_n=A_i\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)=A_i\cap X=A_i$$

אז מרציפות המידה לאיחודים עולים נקבל $\mu(A_i\cap E_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}\mu(A_i)$ ומכאן

$$\alpha\geq c\cdot\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\mu(A_i\cap E_n)=c\cdot\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\lim_{n\to\infty}\mu(A_i\cap E_n)=c\cdot\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\mu(A_i)=c\cdot\int_X s\,\mathrm{d}\mu$$

מהיות $c\in(0,1)$ שרירותי נובע $\alpha\geq\int_X s\,\mathrm{d}\mu$ לכל $0\leq s\leq f$ פשוטה אבל מהגדרת אינטגרל של פונקציה אי־שלילית נקבל $\alpha\geq\int_X f\,\mathrm{d}\mu$. $\square$

משפט 2.4 (החלפת סדר אינטגרציה וסכום): יהי $(X, \mathcal{A}, \mu)$ מרחב מידה. אם $\{f_n \mid X \to [0,\infty]\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות מדידות, אזי

$$\int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu$$

הוכחה: באינדוקציה על $N \in \mathbb{N}$.

מקרה בסיס הוא אדטיביות האינטגרל עבור $N = 2$ (עבור $N = 1$ הטענה טריוויאלית): תהיינה $s, t : X \to [0,\infty]$ פונקציות פשוטות כלשהן כאשר

$$s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i} \qquad t = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mathbb{1}_{B_j}$$

עבור $\{A_i\}_{i=1}^{n}, \{B_j\}_{j=1}^{m}$ הן חלוקות של X ומתקיים

1. $\{A_i \cap B_j\}_{(i,j)\in[n\times m]}$ חלוקה של X
2. לכל $j \in [m]$ מתקיים $\bigcupdot_{i=1}^{n} A_i \cap B_j = B_j$ כי $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ חלוקה של X
3. לכל $i \in [n]$ מתקיים $\bigcupdot_{j=1}^{m} A_i \cap B_j = A_i$ כי $\{B_j\}_{j=1}^{m}$ חלוקה של X

מאדטיביות סופית של מידה נקבל

$$\sum_{j=1}^{m} \mu(A_i \cap B_j) \overset{(\star)}{=} \mu(A_i) \qquad \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i \cap B_j) \overset{(\star\star)}{=} \mu(B_j)$$

אבל גם $s + t$ היא פונקציה פשוטה שכן

$$s + t = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (\alpha_i + \beta_j) \mathbb{1}_{A_i \cap B_j}$$

ולכן

$$\begin{aligned}\int_X (s+t)\,\mathrm{d}\mu &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} (\alpha_i + \beta_j)\cdot \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \sum_{j=1}^{m} \mu(A_j \cap B_j) + \sum_{j=1}^{m} \beta_j \cdot \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i \cap B_j) \\ &\underset{(\star),(\star\star)}{=} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \mu(A_i) + \sum_{j=1}^{m} B_j \cdot \mu(B_j) = \int_X s\,\mathrm{d}\mu + \int_X t\,\mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

אז הטענה נכונה עבור פונקציות פשוטות.

תהיינה $f_1, f_2 \in \{f_n \mid X \to [0,\infty]\}_{n=1}^{\infty}$ מדידות ותהיינה $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}, \{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרות עולות של פונקציות פשוטות כך שמתקיים

$$s_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f_1 \qquad t_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f_2$$

נקודתית ומאריתמטיקה של גבולות נקבל $s_n + t_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f_1 + f_2$ כאשר זו התכנסות עולה לכן לפי משפט ההתכנסות המונוטונית

$$\begin{aligned}\int_X (f_1 + g_2)\,\mathrm{d}\mu &= \lim_{n\to\infty} \int_X (s_n + t_n)\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \left(\int_X s_n\,\mathrm{d}\mu + \int_X t_n\,\mathrm{d}\mu \right) = \lim_{n\to\infty} \int_X s_n\,\mathrm{d}\mu + \lim_{n\to\infty} \int_X t_n\,\mathrm{d}\mu \\ &= \int_X f_1\,\mathrm{d}\mu + \int_X f_2\,\mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

וזה מראה את בסיס האינדוקציה.

בשביל לסיים את האינדוקציה נשים לב $\sum_{n=1}^{N} f_n \xrightarrow[N\to\infty]{} \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ נקודתית כאשר הסדרה $\left\{\sum_{n=1}^{N} f_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה מונוטונית עולה ולכן ממשפט ההתכנסות המונוטוניות נקבל את הטענה, כנדרש. $\square$

משפט 2.5 (טענה חשובה ללא שם): יהי $(X,\mathcal{A},\mu)$ מרחב מידה. אם $h:X\to[0,\infty]$ מדידה אזי הפונקציה $\nu:A\to[0,\infty]$ המוגדרת על־ידי

$$\forall E\in\mathcal{A},\ \nu(E)=\int_E h\,\mathrm{d}\mu$$

היא מידה על $(X,\mathcal{A})$ ובמקרה זה נסמן $\mathrm{d}\nu:=h\,\mathrm{d}\mu$ ויתר על־כן מתקיים

$$\int_X g\,\mathrm{d}\nu=\int_X g\cdot h\,\mathrm{d}\mu$$

לכל $g:X\to[0,\infty]$ מדידה.

הוכחה: בשביל להראות מידה עלינו להראות ש־ν אינה קבועה אינסוף ושהיא σ אדטיבית: ואכן, $\nu(\emptyset)=0$ ושנית תהיי $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת כלשהי של קבוצות מדידות זרות בזוגות ונסמן $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$ ואז

$$(\star)\ \mathbb{1}_E=\mathbb{1}_{\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{1}_{E_n}$$

ולכן

$$\begin{aligned}\nu\left(\dot{\bigcup_{n=1}^{\infty}}E_n\right)&=\nu(E)\underset{\text{הגדרה}}{=}\int_E h\,\mathrm{d}\mu=\int_X h\mathbb{1}_E\,\mathrm{d}\mu\underset{(\star)}{=}\int_X h\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{1}_{E_n}\,\mathrm{d}\mu\\&=\int_X\sum_{n=1}^{\infty}h\cdot 1\mathbb{1}_{E_n}\,\mathrm{d}\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\int_X h\cdot\mathbb{1}_{E_n}\,\mathrm{d}\mu=\sum_{n=1}^{\infty}h\,\mathrm{d}\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\nu(E_n)\end{aligned}$$

ולכן ν מידה על $(X,\mathcal{A})$.
עבור החלק השני, תהיי $s=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\mathbb{1}_{E_i}$ פונקציה פשוטה, אז

$$\begin{aligned}\int_X s\,\mathrm{d}\nu&=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\nu(E_i)=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\int_{E_i}h\,\mathrm{d}\mu=\sum_{i=1}^{k}\int_{E_i}\alpha_i h\,\mathrm{d}\mu=\sum_{i=1}^{k}\int_X\alpha_i\mathbb{1}_{E_i}h\,\mathrm{d}\mu\\&=\int_X\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\mathbb{1}_{E_i}h\,\mathrm{d}\mu=\int_X h\cdot\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\mathbb{1}_{E_i}\,\mathrm{d}\mu=\int_X h\cdot s\,\mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

אז עבור g מדידה כלשהי ניקח $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה עולה של פונקציות פשוטות כך ש־$s_n\xrightarrow[n\to\infty]{}g$ ונקבל ממשפט ההתכנסות המונוטוניות על מרחב המידה $(X,\mathcal{A},\nu)$ שמתקימי

$$\int_X g\,\mathrm{d}\nu=\lim_{n\to\infty}\int_X s_n\cdot h\,\mathrm{d}\mu=\int_X g\cdot h\,\mathrm{d}\mu$$

כי $\{s_n\cdot h\}_{n=1}^{\infty}$ היא עולה ו־$s_n\cdot h\xrightarrow[n\to\infty]{}g\cdot h$. $\square$

הערה: אם $\mathrm{d}\nu=h\,\mathrm{d}\mu$ אז לכל $E\in\mathcal{A}$ מדידה מתקיים

$$\mu(E)=0\Longrightarrow\nu(E)=0$$

כלומר רציפות בהחלט.

משפט 2.6 (הלמה של פאטו): יהי $(X, \mathcal{A}, \mu)$ מרחב מידה. אם $\{f_n : X \to [0, \infty]\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות מדידות כלשהי, אזי

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \, \mathrm{d}\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu$$

הוכחה: לכל $k \in \mathbb{N}$ נסמן $g_k := \inf_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ n\Rightarrow k}} \{f_n\}$ אזי הסדרה $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית עולה ואי־שלילית.
ממשפט ההתכנסות המונוטונית נקבל

$$\int_X \lim_{k\to\infty} g_k \, \mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int_X g_k \, \mathrm{d}\mu$$

ומתקיים מהגדרה

$$\lim_{k\to\infty} g_k = \lim_{k\to\infty} \inf_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ n\ge k}} \{f_n\} = \liminf_{n\to\infty} f_n$$

וביחד

$$(\star) \quad \int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \, \mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int_X g_k \, \mathrm{d}\mu$$

מצד שני

$$\forall k \in \mathbb{N}, \; g_k = \inf_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ n\ge k}} \{f_n\} \le f_k \Longrightarrow g_k \le f_k$$

ממונטוניות האינטגרל נקבל

$$\forall k \in \mathbb{N}, \; a_k := \int_X g_k \, \mathrm{d}\mu \le \int_X f_k \, \mathrm{d}\mu =: b_k$$

אז לכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_k \le b_k$ וכן מ־$(\star)$ נובע כי $\lim_{k\to\infty} a_k$ קיים ונקבל

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \, \mathrm{d}\mu \underset{(\star)}{=} \lim_{k\to\infty} \int_X g_k \, \mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} a_k \le \liminf_{k\to\infty} b_k = \liminf_{k\to\infty} \int_X f_k \, \mathrm{d}\mu \Longrightarrow \int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \, \mathrm{d}\mu \le \liminf_{k\to\infty} \int_X f_k \, \mathrm{d}\mu$$

$\square$

משפט 2.7 (הלמה של בורל־קנטלי): יהי $(X,\mathcal{A},\mu)$ מרחב מידה ותהיי $\mathcal{A} \supseteq (E_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה של קבוצות מדידות כך שמתקיים

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)<\infty$$

אז

$$\mu\left(\limsup_{n\to\infty}E_n\right)=0$$

הוכחה: ממונוטוניות המידה והגדרת החיתוך

$$\limsup_{n\to\infty}E_n=\bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=i}^{\infty}E_j\Longrightarrow\mu\left(\limsup_{n\to\infty}E_n\right)=\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty}E_j\right)\underset{\forall i\in\mathbb{N}}{\leq}\mu\left(\bigcup_{j=i}^{\infty}E_j\right)\underset{\text{תת־אדטיביות המידה}}{\leq}\sum_{j=i}^{\infty}\mu\left(E_j\right)<\infty$$

כאשר המעבר האחרון נובע מההנחה ומטור זנב ולכן $\lim_{i\to\infty}\sum_{n=i}^{\infty}\mu(E_n)=0$, כלומר $\mu(\limsup_{n\to\infty}E_n)\leq 0$.
אבל μ מידה ולכן $0\leq\mu(\limsup_{n\to\infty}E_n)$ כלומר $\mu(\limsup_{n\to\infty}E_n)=0$. □

משפט 2.8 (אי־שיוויון המשולש האינטגרלי): אם $f \in L^1(\mu)$ אזי $\left|\int_X f \,\mathrm{d}\mu\right| \le \int_X |f| \,\mathrm{d}\mu$.

הוכחה: $\int_X f \,\mathrm{d}\mu \in \mathbb{C}$ ולכן קיים $\alpha \in \mathbb{C}$ עם $|\alpha| = 1$ עבורו מתקיים $\alpha \int_X f \,\mathrm{d}\mu = \left|\int_X f \,\mathrm{d}\mu\right| \in \mathbb{R}$:
שכן אם נסמן $z = \int_X f \,\mathrm{d}\mu$ אז אם $z = 0$ אז $\alpha z = |z| \in \mathbb{R}$ לכל $\alpha \in \mathbb{C}$ עם $|\alpha| = 1$ כי נקבל ש־$0 = 0$.
אחרת, אם $z \neq 0$ אז קיים $\theta \in \mathbb{R}$ כך ש־$z = |z| \cdot e^{i\theta}$ וניקח $\alpha = e^{-i\theta}$ ונקבל

$$\alpha z = e^{-i\theta} \cdot \left(|z| e^{i\theta}\right) = |z| \left(e^{-i\theta} \cdot e^{i\theta}\right) = |z| \in \mathbb{R}$$

ולכן יש $\alpha \in \mathbb{C}$ המקיים זאת.
נקבל אם־כך

$$\begin{aligned}
\left|\int_X f \,\mathrm{d}\mu\right| &= \alpha \int_X f \,\mathrm{d}\mu \\
&= \underbrace{\int_X \alpha f \,\mathrm{d}\mu}_{\in \mathbb{R}} \\
&= \int_X Re(\alpha f) \,\mathrm{d}\mu + i \cancel{\int_X Im(\alpha f) \,\mathrm{d}\mu} \\
&= \int_X Re(\alpha f) \,\mathrm{d}\mu \\
&\le \int_X |Re(\alpha f)| \,\mathrm{d}\mu \\
&\le \int_X |\alpha f| \,\mathrm{d}\mu = \int_X |f| \,\mathrm{d}\mu
\end{aligned}$$

$\square$

משפט 2.9 (משפט ההתכנסות הנשלטת):

הגדרה 2.1 (סדרת פונקציות נשלטת): תהיי X קבוצה ותהיי $\{f_n \mid X \to \mathbb{R}\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות כלשהי ותהיי $g : X \to \mathbb{R}$ פונקציה.
נאמר שהסדרה $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ נשלטת על־ידי הפונקציה g מתקיים אם ורק אם לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $|f_n| \le g$.

תהיי $\{f_n \mid X \to \mathbb{C}\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות מדידות המתכנסת נקודתית לפונקציה $f : X \to \mathbb{C}$.
אם קיימת $g \in L^1(\mu)$ כך שהסדרה $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ נשלטת על־ידי g אזי $f \in L^1(\mu)$ ומתקיים

$$\int_X |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ובפרט

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu$$

הוכחה: ראשית מכך ש־$|f_n| \le g$ לכל $n \in \mathbb{N}$ נובע כי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq L^1(\mu)$ וגם מתקיים $|f| \le g$ אז $f \in L^1(\mu)$.
בפרט מתקיים לכל $n \in \mathbb{N}$ ש־$|f - f_n| \le 2g$ אז נגדיר $h_n := 2g - |f - f_n|$ ומהלמה של פאטו עבור סדרת הפונקציות $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ נקבל

$$(\star)\quad \int_X \liminf_{n\to\infty} h_n \,\mathrm{d}\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_X h_n \,\mathrm{d}\mu$$

וכן $h_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 2g$ נקודתית, אז בפרט $2g(x) = \liminf_{n\to\infty} h_n(x)$ לכל $x \in X$, אז יינבע מכך

$$\int_X 2g \,\mathrm{d}\mu = \int_X \liminf_{n\to\infty} h_n \,\mathrm{d}\mu \underset{(\star)}{\le} \liminf_{n\to\infty} \int_X h_n \,\mathrm{d}\mu = \liminf_{n\to\infty} \int_X (2g - |f - f_n|) \,\mathrm{d}\mu$$

מכאן מתקיים

$$\int_X 2g \,\mathrm{d}\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_X (2g - |f - f_n|) \,\mathrm{d}\mu \underset{\text{לינאריות האינטגרל}}{=} \liminf_{n\to\infty} \left(\int_X 2g \,\mathrm{d}\mu - \int_X |f - f_n| \,\mathrm{d}\mu \right)$$

$$= \liminf_{n\to\infty} \int_X 2g \,\mathrm{d}\mu + \liminf_{n\to\infty} \left(-\int_X |f - f_n| \,\mathrm{d}\mu \right) \underset{\liminf_{n\to\infty}(-a_n) = -\limsup_{n\to\infty} a_n}{=} \int_X 2g \,\mathrm{d}\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_X |f - f_n| \,\mathrm{d}\mu$$

כלומר

$$\int_X 2g \,\mathrm{d}\mu \le \int_X 2g \,\mathrm{d}\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_X |f - f_n| \,\mathrm{d}\mu$$

אבל $g \in L^1(\mu)$ אי־שלילית ולכן $\int_X 2g \,\mathrm{d}\mu < \infty$ ולכן ניתן להחסיר ולקבל $\limsup_{n\to\infty} \int_X |f - f_n| \,\mathrm{d}\mu = 0$ ובפרט מאי־שיוויון המשולש האינטגרלי

$$\left| \int_X f \,\mathrm{d}\mu - \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu \right| = \left| \int_X (f - f_n) \,\mathrm{d}\mu \right| \le \int_X |f - f_n| \,\mathrm{d}\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

□

משפט 2.10 (אי־שיוויון מרקוב):

1. תהיי f מדידה ואי־שלילית, אז לכל $0 < a < \infty$ מתקיים
$$\mu(f^{-1}[\alpha,\infty]) \leq \frac{\int f \,\mathrm{d}\mu}{a}$$
2. תהיי $f : X \to [0,\infty]$ אינטגרבילית. אז $\mu(f^{-1}(\{\infty\})) = 0$ והקבוצה $f^{-1}((0,\infty))$ היא σ־סופית.

הוכחה:

1. נגדיר
$$E_a \coloneqq f^{-1}([a,\infty]) = \{x \in X \mid f(x) \geq a\}$$
$$g(x) = a \cdot \mathbb{1}_{E_a}(x)$$
אם $x \in E_a$ אזי $f(x) \geq a$ ו־$g(x) = a \cdot 1 = a$ ולכן $f(x) \geq g(x)$.
אם $x \notin E_a$ אז $f(x) \geq 0$ו־$g(x) = a \cdot 0 = 0$ ולכן $f(x) \geq g(x)$ כלומר לכל $x \in X$ מתקיים $g(x) \leq f(x)$.
ממונוטוניות אינטגרל לבג נקבל
$$\int_X g \,\mathrm{d}\mu \leq \int_X f \,\mathrm{d}\mu$$
אבל
$$\int_X g \,\mathrm{d}\mu = \int_X a \cdot \mathbb{1}_{E_a} \,\mathrm{d}\mu = a \cdot \int_X \mathbb{1}_{E_a} \,\mathrm{d}\mu = a \cdot \mu(E_a)$$
כלומר
$$a \cdot \mu(E_a) \leq \int_X f \,\mathrm{d}\mu$$
היות ו־$0 < a < \infty$ ניתן לחלק בלי לשנות את כיוון אי־השיוויון ונקבל
$$\mu(E_a) \leq \frac{1}{a}\int_X f \,\mathrm{d}\mu$$
2. מהמקרה הקודם אנחנו מקבלים שאם $\int f \,\mathrm{d}\mu < \infty$ אזי אגף ימין שואף לאינסוף כאשר $a \to \infty$ ולכן מרציפות המידה מלמעלה (חיתוכים יורדים) נסיק כי
$$\mu(f^{-1}(\{\infty\})) = 0$$
מתקיים
$$\mu\left(f^{-1}\left[\frac{1}{n},\infty\right]\right) < \infty$$
ולכן
$$f^{-1}((0,\infty)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}\left(\left[\frac{1}{n},\infty\right]\right)$$
היא σ־סופית.

$\square$

3 קבוצות ממידה אפס

משפט 3.1 (סדרות פונקציות וכמעט־תמיד): תהיי $\{f_n \mid X \to \mathbb{C}\}_{i=1}^{n}$ סדרת פונקציות מדידות המוגדרות μ־כמעט תמיד.
אם $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n| \,\mathrm{d}\mu < \infty$ אז

1. הפונקציה $f : X \to \mathbb{C}$ הנתונה על־ידי $x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מוגדרת μ־כמעט תמיד
2. $f \in L^1(\mu)$
3. $\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f_X f_n \,\mathrm{d}\mu$

הוכחה:

1. נניח ש־f_n מוגדרת על קבוצה $S_n \subseteq X$ כך ש־$\mu(S_n^c) = 0$, אז $\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ מוגדרת על $S := \cap_{n=1}^{\infty} S_n$ ומתקיים
$$\mu(S^c) = \mu\left(\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n\right)^c\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n^c\right) = 0 \Longrightarrow \mu(S^c) = 0$$
ולכן φ מוגדרת μ־כמעט תמיד ומהטענה אודות החלפת סדר של גבול ואינטגרל עבור טורים של פונקציות אי־שליליות מתקיים
$$\int_X \varphi \,\mathrm{d}\mu = \int_X \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n| \,\mathrm{d}\mu < \infty \Longrightarrow \int_X \varphi \,\mathrm{d}\mu < \infty$$
בפרט $\mu(|\varphi(x)|) < \infty$ μ־כמעט לכל $x \in X$ ולכן $\varphi \in L^1(\mu)$ ולכן עבור μ־כמעט לכל $x \in X$ הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס בהחלט μ־כמעט תמיד ולכן הוא מתכנס ב־$\mathbb{C}$ μ־כמעט תמיד ולכן $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ מוגדרת μ־כמעט תמיד
2. לכל $k \in \mathbb{N}$ נסמן $g_k := \sum_{n=1}^{k} f_n$ ומתקיים
$$\forall k \in \mathbb{N},\ |g_k| = \left|\sum_{n=1}^{k} f_n\right| \leq \sum_{n=1}^{k} |f_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| = \varphi \Longrightarrow |g_k| \leq \infty$$
כלומר סדרת הפונקציות $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ נשלטת על־ידי $\varphi \in L^1(\mu)$ ומכאן ממשפט ההתכנסות הנשלטת עבור f $g_k \xrightarrow[k\to\infty]{} f$ נובע כי $f \in L^1(\mu)$ וכן מהטענה על החלפת סדר סכום ואינטגרל
$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int_X g_k \,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu \Longrightarrow \int_X f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu$$
וזה מוכיח גם את 3.

$\square$

משפט 3.2 (תנאים שקולים לשלמות): *תזכורת:* יהי $(X, \mathcal{A}, \mu)$ מרחב מידה. נאמר שהם **שלם** אם כל קבוצה $E \subseteq X$ המוכלת בקבוצה ממידה אפס היא מדידה בעצמה. ההשלמה של $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ניתנת על־ידי ה־σ־אלגברה

$$\overline{\mathcal{A}} := \{A \cup E \mid A \in \mathcal{A}, E \subseteq N, \mu(N) = 0\}$$

והמידה

$$\overline{\mu}(A \cup E) = \mu(A)$$

יהי $(X, \mathcal{A}, \mu)$ מרחב מידה, אזי הגרירות הבאות נכונות אם ורק אם μ שלמה:

1. אם f מדידה ו־$f = g$ μ־כמעט תמיד, אז g היא מדידה
2. אם $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות מדידות ובנוסף $f_n \to f$ μ־כמעט תמיד, אזי f היא מדידה

הוכחה: בשביל ההוכחה נשתמש בטענה מהסוג הבא שנכונה במרחבי מידה שלמים: נניח כי E, G מדידות ו־$E \subseteq F \subseteq G$ עם $\mu(G \setminus E) = 0$.
אז F מדידה: זה נכון כי $F \setminus E \subseteq G \setminus E$ והתלכדות המידות גוררת ש־$\mu(G \setminus E) = 0$ ולכן $F \setminus E$ מדידה וגם F.
שלמות $\Longleftarrow$ 1: אם f מדידה ו־$f = g$ μ־כמעט תמיד, נרשום

$$N := \{x \mid f(x) \neq g(x)\}$$

מאחר ו־N מוכלת בקבוצה ממידה אפס ו־μ שלמה אזי N מדידה.
מתקיים

$$g^{-1}(A) = \left(g^{-1}(A) \cap f^{-1}(A)\right) \cup \left(g^{-1}(A) \setminus f^{-1}(A)\right)$$

מאחר ו־N^c היא בידיוק הקבוצה בה הפונקציות מתלכדות, נוכל לכתוב

$$f^{-1}(A) \cap N^c \subseteq f^{-1}(A) \cap g^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(A)$$

ומהיות

$$f^{-1}(A) \setminus \left(f^{-1}(A) \cap N^c\right) \subseteq N$$

נדע ששרשרת ההכלות היא כפי שמופיע בטענה שנוסחה בתחילת ההוכחה ולכן הקבוצה $f^{-1}(A) \cap g^{-1}(A)$ היא מדידה ובאופן דומה נשים לב

$$g^{-1}(A) \setminus f^{-1}(A) \subseteq N$$

ולכן כקבוצה המוכלת בקבוצה ממידה אפס היא מדידה.
$1 \Longleftarrow$ שלמות: תהיי E קבוצה המוכלת בקבוצה ממידה אפס אזי $\mathbb{1}_E = 0$ כמעט־תמיד ולכן $\mathbb{1}_E$ מדידה, אבל אינדיקטור מדיד אם ורק אם הקבוצה שהוא מציין מדידה, כלומר E מדידה.
$1 \Longleftarrow$ 2: מאחר והוכחנו ש־1 שקול לשלמות, אז μ שלמה. נניח ש־$f_n \to f$ μ־כמעט תמיד.
לכן קיימת קבוצה N כך ש־$\mu(N) = 0$ ובנוסף $f_n(x) \to f(x)$ לכל $x \in N^c$ ונגדיר

$$\tilde{f}_n(x) = \begin{cases} f_n(x) & x \in N^c \\ 0 & x \in N \end{cases}$$

אזי מהסעיף הקודם לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים ש־$\tilde{f}$ מדידה כי $\tilde{f}_n = f_n$ μ־כמעט תמיד ו־$\tilde{f}$ מתכנסת נקודתית לפונקציה

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in N^c \\ 0 & x \in N \end{cases}$$

ולכן $\tilde{f}$ מדידה ול־$f = \tilde{f}$ μ־כמעט תמיד ולכן f מדידה.
$2 \Longleftarrow$ 1: נניח ש־$f = g$ μ־כמעט תמיד ו־f מדידה, אז נגדיר את f_n להיות הסדרה הקבועה $f_n = f$ ומתקיים $f_n \to g$ כמעט־תמיד ולכן g מדידה מההנחה של 2, כנדרש. $\square$

משפט 3.3 (תנאים שקולים לפונקציה אפסה כמעט־תמיד):

1. אם $f : X \to [0, \infty]$ מדידה עם $\int_X f \,\mathrm{d}\mu = 0$ אם ורק אם $f \underset{\mu}{=} 0$
2. אם $f : X \to \mathbb{C}$ מדידה ולכל $E \in \mathcal{A}$ מתקיים $\int_E f \,\mathrm{d}\mu = 0$ אזי $f \underset{\mu}{=} 0$

הוכחה:

1. ההנחה ש־$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = 0$ גוררת ש־$\mu\big(\big\{x \in X \mid f(x) \geq \frac{1}{n}\big\}\big) = 0$ הכח $n \in \mathbb{N}$ ולכן $f = 0$, μ־כמעט תמיד
2. נסמן $f = u + iv$ ותהיי $E = \{x \in X \mid u(x) \geq 0\}$. אז מהגדרת E ומההנחה שלכל $E \in \mathcal{A}$ מתקיים $\int_E f \,\mathrm{d}\mu = 0$ נובע $\int_E Re(f) \,\mathrm{d}\mu =$ 0 ולכן לכל $h \in \{u, v\}$ מתקיים

$$0 = \int_E Re(f) \,\mathrm{d}\mu = \int_E h \,\mathrm{d}\mu = \int_X h^{\pm} \,\mathrm{d}\mu \Longrightarrow h^{\pm} \underset{\mu}{=} 0$$
$$\Longrightarrow h^{\pm} \underset{\mu}{=} 0 \Longrightarrow u^{\pm}, v^{\pm} \underset{\mu}{=} 0 \Longrightarrow u, v \underset{\mu}{=} 0 \Longrightarrow f \underset{\mu}{=} 0$$

$\square$

4 מרחבי L^p

משפט 4.1 (אי־שיוויון יאנסן): יהי $(X, \mathcal{A}, \mu)$ מרחב הסתברות ותהיי $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}$ קמורה. אם $f : X \to (a,b)$ פונקציה מדידה, אזי

$$\varphi\left(\int_X f \,\mathrm{d}\mu\right) \le \int_X \varphi \circ f \,\mathrm{d}\mu$$

הוכחה: נסמן $T := \int_X f \,\mathrm{d}\mu$.
מהיות $Im(f) \subseteq (a,b)$ ומהיות X מרחב הסתברות, נובע ש־$T \in (a,b)$ ונסמן

$$\beta := \sup_{s \in (a,T)} \left\{ \frac{\varphi(T) - \varphi(s)}{T - s} \right\}$$

אזי לכל $s \in (a,b)$ עם $s < T$ מתקיים

$$\frac{\varphi(T) - \varphi(s)}{T - s} \le \beta \iff \varphi(T) - \varphi(s) \le \beta(T - s) \iff \varphi(s) \ge \varphi(T) + \beta(s - T)$$

φ קמורה ולכן מהאיפיון השקול לקמירות עבור $s \in (a,b)$ עם $s > T$ מתקיים

$$\frac{\varphi(T) - \varphi(s)}{s - T} \ge \beta \iff \varphi(s) - \varphi(T) \ge \beta(s - T) \iff \varphi(s) \ge \varphi(T) + \beta(s - T)$$

ולכן לכל $s \in (a,b)$ מתקיים $\varphi(s) \ge \varphi(T) + \beta(s - T)$.
בפרט זה נכון לכל $x \in X$ (כי $s = f(x)$) ולכן $\varphi \circ f \ge \varphi(T) + \beta(f - T)$ ונקבל

$$\int_X \varphi \circ f \,\mathrm{d}\mu \underset{\text{מונוטוניות האינטגרל}}{\ge} \int_X (\varphi(T) + \beta(f - T) \,\mathrm{d}\mu) \underset{\text{לינארית האינטגרל}}{=} \int_X \varphi(T) \,\mathrm{d}\mu + \beta\left(\int_X f \,\mathrm{d}\mu - \int_X T \,\mathrm{d}\mu\right)$$

$$= \varphi(T)\varphi(X) + \beta(T - T\mu(X)) \underset{\mu(X)=1}{=} \varphi(T) + \beta(T - T) = \varphi\left(\int_X f \,\mathrm{d}\mu\right)$$

□

משפט 4.2 (אי־שיוויון הולדר ואי־שיוויון מניקובסקי): יהי $(X, \mathcal{A}, \mu)$ מרחב מידה ונניח כי $1 \le p, q \le \infty$ ומקיימים

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

אז לכל f, g מדידות אי־שליליות מתקיימים

$$(1)\ \int_X fg \,\mathrm{d}\mu \le \left(\int_X f^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X g^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$(2)\ \left(\int_X (f+g)^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_X f^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X g^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

כאשר הראשון זה אי־שיוויון הולדר והשני הוא אי־שיוויון מניקובסקי ואם $p = q = 2$ זה אי־שיוויון קושי־שוורץ.

הוכחה: נוכיח את (1) בהנחה ש־$\|f\|_p = \|g\|_q = 1$ ונראה כי $\|fg\|_1 \le 1$: $\log$ היא פונקציה קעורה ולכן אם נניח ש־$fg \ne 0$ נקבל

$$\log(fg) = \log f + \log g = \frac{\log f^p}{p} + \frac{\log g^q}{q} \le \log\left(\frac{f^p}{p} + \frac{g^q}{q}\right)$$

ואם נעלה את e בחזקת אלו נקבל

$$(\star)\ fg \le \frac{f^p}{p} + \frac{g^q}{q}$$

אי־שיוויון זה טריוויאלי במקרה שבו $fg = 0$ ולכן נוכל להתעלם מההנחה הזאת ומלינאריות, מונוטוניות ומההנחה ש־$\|f\|_p = \|g\|_q = 1$ נקבל

$$\int_X \frac{f^p}{p} + \frac{g^q}{q} \,\mathrm{d}\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

ואם ניקח אינטגרל על שני האגפים, $(\star)$ יביא לנו $\|fg\|_1 \le 1$.

כדי להוכיח את (2) נניח ש־$\|f\|_p = \|g\|_p = 1$ ונשתמש בקמירות x^p ונקבל שלכל $t \in (0,1)$

$$((1-t)f + tg)^p \le (1-t)f^p + tg^p$$

ושוב מלינאריות וממונוטוניות

$$\int_X ((1-t)f + tg)^p \,\mathrm{d}\mu = (1-t) + t = 1$$

ולכן

$$\|(1-t)f + tg\|_p^p \le 1$$

כלומר $\|(1-t)f + tg\| \le 1$.

ללא ההנחה, נכתוב את $f + g$ כממוצע משוקלל של פונקציות מנורמה 1, כלומר $g = \|g\|_p \overline{g}, f = \|f\|_p \overline{p}$ ונקבל

$$\|f+g\|_p = \left\|\overline{f} \cdot \|f\|_p + \overline{g}\|g\|_p\right\|_p = \left(\|f\|_p + \|g\|_p\right) \cdot \left\|\overline{f}\frac{\|g\|_p}{\|f\|_p + \|g\|_p} + \overline{g}\frac{\|f\|_p}{\|f\|_p + \|g\|_p}\right\|_p$$

נבחין שאת גורם המכפלה מימין הוא בידיוק ביטוי של נורמה של ממוצע משוקלל של פונקציות מנורמה 1 ולכן נוכל לחסום אותו מלעיל על־ידי 1 ולקבל

$$\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$$

$\square$

משפט 4.3 ($\mathcal{L}^p(\mu)$ הוא מרחב וקטור מעל $\mathbb{C}$): $\mathcal{L}^p(\mu)$ הוא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$.

הוכחה:

משפט 4.4: אם $p,q\in[1,\infty]$ חזקות צמודות ו־$f\in\mathcal{L}^p(\mu),\, g\in\mathcal{L}^q(\mu)$ אזי $f\cdot g\in\mathcal{L}^1(\mu)$.

הוכחה: עבור $p,q\in(1,\infty)$ הטענה נובעת מאי־שיוויון הולדר. אם $p=1$ ו־$q=\infty$ מתקיים $g\in\mathcal{L}^\infty(\mu)$ וגם $|g(x)|\le\|g\|_\infty(\star)$ μ־כמעט תמיד ולכן

$$\|f\cdot g\|_1=\int_X|f\cdot g|\,\mathrm{d}\mu=\int_X|f|\cdot|g|\,\mathrm{d}\mu\underset{(\star)}{\le}\int_X|f|\cdot\|g\|_\infty\,\mathrm{d}\mu=\|g\|_\infty\cdot\int_X|f|\,\mathrm{d}\mu<\infty$$

כלומר $\|f\cdot g\|_1<\infty$ ולכן $f\cdot g\in\mathcal{L}^1(\mu)$. $\square$

משפט 4.5 (אי־שיוויון המשולש של נורמת p): אם $p\in[1,\infty]$ אזי לכל $f,g\in\mathcal{L}^p(\mu)$ מתקיים $\|f+g\|_p\le\|f\|_p+\|g\|_p$.

הוכחה: אם $p\in(1,\infty)$ אז הטענה נובעת מאי־שיוויון מניקובסקי.
אם $p\in\{1,\infty\}$ אז הטענה נובעת מאי־שיוויון המשולש של הערך המוחלט ב־$\mathbb{R}$. $\square$
הוכחה: נשאר להראות הומגניות – אם $f\in\mathcal{L}^p(\mu)$ ו־$\lambda\in\mathbb{C}$ אזי $\lambda\cdot f\in\mathcal{L}^p(\mu)$:

$$\int_X|f\lambda f|^p\,\mathrm{d}\mu=\int_X(|\lambda|\cdot|f|)^p\,\mathrm{d}\mu=\int_X|\lambda|^p\cdot|f|^\lambda\,\mathrm{d}\mu=|\lambda|^p\int_X|f|^p\,\mathrm{d}\mu<\infty$$

כאשר השתמשנו בתכונות ערך המוחלט ומהומוגניות האינטגרל למכפלה בקבוע.
אי־השיוויון האחרון נובע מהיות $|\lambda|^p<\infty$ ומהיות $\int|f|^p\,\mathrm{d}\mu<\infty$ כי $f\in\mathcal{L}^p$ ולכן המכפלה היא סופית. $\square$

משפט 4.6 (לכל $p \in [1,\infty]$ המרחב הנורמי $\left(L^p(\mu), \|\cdot\|_p\right)$ הוא מרחב בנך): לכל $p \in [1,\infty]$, המרחב הנורמי $\left(L^p(\mu), \|\cdot\|_p\right)$ הוא מרחב בנך (אם ורק אם הוא שלם במטריקה המושרית מהנורמה, כלומר כל סדרת קושי היא מתכנסת).

הוכחה: תהיי $\left\{[f_n]_\mu\right\}_{n=1}^\infty \subseteq L^p(\mu)$ סדרת קושי ותהיי $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ נציגים של מחלקות שקילות אלו.

1. נניח ש־$p \in [1,\infty)$, אז לכל $k \in \mathbb{N}$ קיים $n_k \in \mathbb{K}$ כך ש־$\left\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right\| < \frac{1}{2^k}$ כי הסדרה קושי.
תהיי $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ $\left\{f_{n_k}\right\}_{k=1}^\infty$ תת־הסדרה המקיימת זאת ולכל $k \in \mathbb{N}$ נגדיר

$$g_k := \sum_{i=1}^k \left|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\right|$$

ומתקיים

$$\left\|g_k\right\|_p = \left\|\sum_{i=1}^k \left|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\right|\right\|_p \le \sum_{i=1}^k \left\|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\right\|_p < \sum_{i=1}^k \frac{1}{2^i} < \infty$$

ולכן $g_k \in L^p(\mu)$ ונסמן $g := \sum_{i=1}^\infty \left|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\right|$ והסדרה $\left\{g_k^p = \left[\sum_{i=1}^k \left|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\right|\right]^p\right\}_{k=1}^\infty$ היא סדרה מונוטוניות עולה של פונקציות אי־שלילית המקיימת $g_k^p \xrightarrow[k\to\infty]{} g^p = \left[\sum_{i=1}^\infty \left|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\right|\right]^p$ נקודתית, אז ממשפט ההתכנסות המונוטונית נקבל

$$\|g\|_p^p = \int_X \left(\sum_{i=1}^\infty \left|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\right|\right)^p \mathrm{d}\mu = \int_X g^p \,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int_X g_k^p \,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \|g_k\|_p^p < 1$$

כאשר אי־השיוויון האחרון נובע מהיות

$$\left\|g_k\right\|_p < \sum_{i=1}^k \frac{1}{2^i} < \sum_{i=1\infty} \frac{1}{2^i} \underset{\text{סכום טור הנדסי}}{=} \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1 \Longrightarrow \left\|g_k\right\|_p < 1 \Longrightarrow \|g_k\|_p^p < 1$$

ולכן בפרט $\|g\|_p < 1$ ולכן $g(x) < \infty$ μ־כמעט לכל $x \in X$ כלומר הטור מתכנס בהחלט μ־כמעט תמיד אז נגדיר

$$f := f_{n_1} + \sum_{i=1}^\infty \left(f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\right)$$

ונרצה להראות שהסדרה $\{f_m\}_{m=1}^\infty$ מתכנסת ל־f וכן ש־$f \in L^p(\mu)$: f מוגדרת μ־כמעט תמיד לכן נקבע $f = 0$ היכן ש־f לא מוגדרת ואז

$$f(x) = f_{n_1} + \sum_{i=1}^\infty \left(f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\right) = \lim_{i\to\infty} f_{n_i}(x)$$

שכן זהו טור טלסקופי ולכל $m \in \mathbb{N}$ מתקיים $\left|f_m - f_{n_i}\right|^p \xrightarrow[i\to\infty]{} |f_m - f|^p$ כמעט לכל $x \in X$, אז

$$\|f_m - f\|_p^p = \int_X |f_m - f|^p \,\mathrm{d}\mu = \int_X \liminf_{i\to\infty} \left|f_m - f_{n_i}\right|^p \mathrm{d}\mu \underset{\text{פאטו}}{\le} \liminf_{i\to\infty} \int_X \left|f_m - f_{n_i}\right|^p \mathrm{d}\mu = \liminf_{i\to\infty} \left\|f_m - f_{n_i}\right\|_p^p$$

אבל $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ היא סדרת קושי, אז לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n, m \in \mathbb{N}$ עם $n, m > N$ מתקיים $\left\|f_m - f_{n_i}\right\|_p < \varepsilon$ ובפרט עבור $m > N$ נקבל

$$\|f_m - f\|_p^p \le \liminf_{i\to\infty} \left\|f_m - f_{n_i}\right\|_p^p < \varepsilon^p \Longrightarrow f_m \xrightarrow[m\to\infty]{\|\cdot\|_p} f$$

וכן

$$\|f\|_p \underset{\text{אי־שיוויון המשולש}}{\le} \|f - f_m\|_p + \|f_m\|_p < \infty \Longrightarrow f \in L^p(\mu)$$

2. אם $p=\infty$ אז $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq L^{\infty}(\mu)$ סדרת קושי של נציגים עבורה קיימת תת־סדרה $\left\{f_{n_i}\right\}_{i=1}^{\infty}$ כך שמתקיים

$$\forall i \in \mathbb{N},\ \left\|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\right\|_{\infty} < \frac{1}{2^k}$$

נסמן לכל $n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}$

$$A_n := \left\{x \in X \mid |f_n(x)| > \|f_n\|_{\infty}\right\} = |f_n|^{-1}\left(\left(\|f_n\|_{\infty}, \infty\right]\right)$$

$$B_{n,k} := \left\{x \in X \mid |f_n(x) - f_k(x)| > \|f_n - f_k\|_{\infty}\right\} = |f_n - f_k|^{-1}\left(\left(\|f_n - f_k\|_{\infty}, \infty\right]\right)$$

אבל $f_n \in L^{\infty}(\mu)$ אז $\operatorname{ess\,sup}\{|\cdot|\} = \|\cdot\|_{\infty}$ ש־$\mu(A_n) = \mu\left(B_{n,k}\right) = 0$ אז

$$E := \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \cup \left(\bigcup_{n,k \in \mathbb{N}} B_{n,k}\right)$$

ומ־σ־אדטיביות של μ נקבל $\mu(E) = 0$.

כעת $\sum_{i=1}^{\infty}\left(f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\right)$ מתכנס במידה שווה ממבחן ה־M של ויירשטראס על $X \setminus E$ (כי $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} < \infty$) ולכן $f_{n_1} + \sum_{i=1}^{\infty}\left(f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\right)$ מתכנסת במידה שווה ל־f על $X \setminus E$.

אז $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי ונקבל שהגבול $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ מוגדר וקיים μ־כמעט לכל $x \in X$ ו־f חסומה על־ידי $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_{\infty}$ μ־כמעט לכל $x \in X$, כלומר $f \in L^{\infty}(\mu)$ ומתקיים $\|f - f_n\|_{\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

$\square$