פתרון מטלה 05 — פונקציות מרוכבות, 80519

29 בנובמבר 2025

שאלה 1

יהי $G \subseteq \mathbb{C}$ תחום ו־$f \in C^1(G,\mathbb{C})$. נראה ש־f הולומורפית אם ורק אם $\partial_{\overline{z}} f = 0$.

הוכחה:

$\Longleftarrow$ נניח כי f הולומורפית ונראה כי $\partial_{\overline{z}} f = 0$.

f הולומורפית ולכן היא מקיימת את משוואות קושי־רימן

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

כאשר $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ עבור $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

נציב באופרטור Wirtinger ונקבל

$$\partial_{\overline{z}} f = \frac{1}{2}(\partial_x f + i\partial_y f) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right) + i\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right) \underset{\text{C.R.E}}{=} 0$$

$\Longrightarrow$ נניח כי $\partial_{\overline{z}} f = 0$ ונראה כי f הולומורפית.

אם $\partial_{\overline{z}} f = 0$ אז גם החלק המדומה וגם החלק הממשי היינם 0, כלומר

$$\partial_{\overline{z}} f = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right)$$

כלומר

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

כלומר f מקיימת את משוואות קושי־רימן ולכן הולומורפית. $\square$

שאלה 2

תהיינה $f(z) = (z-1)^2$ ו־γ מסילה המתארת מעגל ברדיוס 1 סביב הראשית.

סעיף א'

נחשב את $L(f \circ \gamma)$.

פתרון: נכתוב פרמטריזציה של γ

$$\gamma(t) = \cos(t) + i\sin(t) = e^{it}$$

עבור $t \in [0, 2\pi]$.

בהרצאה הגדרנו אורך של מסילה להיות

$$L(f \circ \gamma) = \int_a^b |f'(\gamma(t))||\gamma'(t)|dt$$

כאשר $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ולכן

$$L(f \circ \gamma) = \int_a^b |f'(\gamma(t))||\gamma'(t)|dt = \int_0^{2\pi} |(-2(1-z)) \circ (\cos(t) + i\sin(t))||i\cos(t) - \sin(t)|dt$$

$$= \int_0^{2\pi} |-2(1 - \cos(t) - i\sin(t))||i\cos(t) - \sin(t)|dt = 2\int_0^{2\pi} |1 - \cos(t) - i\sin(t)||i\cos(t) - \sin(t)|dt$$

$$= 2\int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos(t) - i\sin(t))(1 - \cos(t) + i\sin(t))}\sqrt{(i\cos(t) - \sin(t))(-i\cos(t) - \sin(t))}dt$$

$$= 2\int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos(t)}dt = 2\int_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos(t))}dt = 2\int_0^{2\pi} \sqrt{2\left(2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)}dt = 4\int_0^{2\pi} \left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right|dt$$

מהיות $t \in [0, 2\pi]$ אז $\frac{t}{2} \in [0, \pi]$ ובקטע זה $\sin(\frac{t}{2}) \geq 0$ ולכן

$$2\int_0^{2\pi} 2\left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right|dt = 4\int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right)dt = \left[4 \cdot \left(-2\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right)\right]_{t=0}^{t=2\pi} = -8\cos(\pi) + 8\cos(0) = (-8)\cdot(-1) + 8 \cdot 1 = 16$$

נשים לב שיותר קצר לפתור את זה עם הביטוי בצורת אקספוננט:

$$L(f \circ \gamma) = \int_a^b |f'(\gamma(t))||\gamma'(t)|dt = \int_0^{2\pi} \left|(-2(1-z)) \circ e^{it}\right|\left|ie^{it}\right|dt = 2\int_0^{2\pi} \left|1 - e^{it}\right|dt$$

$$= 2\int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos(t))^2 + \sin^2(t)}dt = 2\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos(t) + \cos^2(t) + \sin^2(t)} = 2\int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos(t)}dt$$

המשך החישוב זהה. $\square$

סעיף ב'

נראה שלא משנה באיזו פרמטריזציה של γ נשתמש עבור החישוב בסעיף א'.

פתרון: בסעיף א' בחרנו פרמטריזציה של γ המתקדמת נגד כיוון השעון, כאשר הפרמטריזציה עם כיוון השעון נתונה על־ידי $\gamma(t) = e^{-it}$.

במקרה שלנו זה לא משנה בגלל שהערך המוחלט במקרה זה נשאר 1:

$$L(f \circ \gamma^-) \int_0^{2\pi} \left|(-2(1-z)) \circ e^{-it}\right|\left|-ie^{-it}\right|dt = 2\int_0^{2\pi} \left|1 - e^{-it}\right|dt = 2\int_0^{2\pi} \sqrt{\left(1 - \cos^2(t)\right)^2 + (-\sin(t))^2}$$

$$= 2\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos(t) + \cos^2(t) + \sin^2(t)} = 2\int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos(t)}dt$$

$\square$

סעיף ג'

נחשב את השטח של $f(\{z \mid |z-1|<1\})$.

פתרון: נסמן $u=1-z$ ולכן $D=\{z \mid |z-1|<1\}=\{u \mid |u|<1\}$ ו־$w=u^2 \implies f(z)=(1-z)^2$ על דיסק היחידה.
כדי לפשט את האינטגרל, בדרך־כלל במשפט החלפת משתנה אנחנו עושים קורדינאטות פולאריות סביב הראשית אך הפעם נעשה קורדינאטות מוזזות ונניח ש־$z=1$ היא הראשית שלנו ולכן $z-1=re^{i\theta}$ וכן $0\le r<1$ (בגלל רדיוס הדיסק כמובן) וכן $r^2=|1-z|^2$ ו־$0\le\theta<2\pi$.
נשים לב ש־D קבוצה יפה מספיק (היא פתוחה ולכן מדידה) אז

$$\mathrm{Area}(D)=\iint_D |f'(w)|^2 dD=\iint_D 4|z-1|^2 dD \underset{\text{משפט החלפת משתנה}}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^1 4r^2\cdot r dr d\theta = 4\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^1 r^3 dr = 4\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}d\theta = 2\pi$$

$\square$

שאלה 3

יהיו $G \subseteq \mathbb{C}$ תחום ותהיינה $f, g : G \to \mathbb{C}$ פונקציות רציפות ו־$\gamma \in C^1([a,b],G)$ מסילה.

סעיף א'

נוכיח

$$\int_\gamma (f+g)d\gamma = \int_\gamma f d\gamma + \int_\gamma g d\gamma$$

הוכחה:

$$\int_\gamma (f+g)d\gamma = \int_a^b (f+g)(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b (f(\gamma(t)) + g(\gamma(t)))\gamma'(t)dt = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) + g(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

$$\underset{(\star)}{=} \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt + \int_a^b g(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_\gamma f d\gamma + \int_\gamma g d\gamma$$

כאשר האדטיביות שהשתמשנו בה ב־$(\star)$ זה אדטיביות האינטגרל מאינפי3. $\square$

סעיף ב'

נוכיח שאם $\lambda \in \mathbb{C}$ אז

$$\int_\gamma \lambda f d\gamma = \lambda \int_\gamma f d\gamma$$

הוכחה:

$$\int_\gamma \lambda f d\gamma = \int_a^b (\lambda f)(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b (\lambda f(\gamma(t)))\gamma'(t)dt = \int_a^b \lambda(f(\gamma(t))\gamma'(t))dt \underset{(\star)}{=} \lambda \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

$$= \lambda \int_\gamma f d\gamma$$

כאשר האדטיביות שהשתמשנו בה ב־$(\star)$ זה לינאריות האינטגרל מאינפי3. $\square$

סעיף ג'

נוכיח שאם β היא המסילה שמתקדמת בכיוון ההפוך מ־γ (כלומר, $\beta(t) = \gamma(a+b-t)$) אז

$$\int_\beta f d\beta = -\int_\gamma f d\gamma$$

הוכחה: נשים לב

$$\beta(a) = \gamma(a+b-a) = \gamma(b),\ \ \beta(b) = \gamma(a+b-b) = \gamma(a)$$

אז

$$\int_\beta f d\beta = \int_a^b f(\beta(t))\beta'(t)dt$$

אבל $\beta(t) = \gamma(a+b-t)$ ולכן מכלל שרשרת

$$\beta'(t) = \frac{d}{dt}(\gamma(a+b-t)) \underset{\substack{u=a+b \\ \frac{du}{dt}=-1}}{=} \gamma'(u)\cdot\frac{du}{dt} = \gamma'(a+b-t)\cdot(-1) = -\gamma'(t)(a+b-t)$$

ולכן

$$\int_\beta f d\beta = \int_a^b f(\beta(t))\beta'(t)dt = \int_a^b f(\gamma(a+b-t))\cdot(-\gamma'(t)(a+b-t))dt$$

$$\underset{\text{סעיף ב'}}{=} -\int_a^b f(\gamma(a+b-t))\cdot(\gamma'(t)(a+b-t))dt$$

$$\underset{\substack{u=a+b-t \\ \frac{du}{dt}=-1}}{=} -\int_b^a f(\gamma(u))\gamma'(u)(-du) \underset{\text{סעיף ב'}}{=} \int_b^a f(\gamma(u))\gamma'(u)du$$

$$\underset{\text{היפוך תחום אינטגרציה}}{=} -\int_a^b f(\gamma(u))\gamma'(u)du = -\int_\gamma f d\gamma$$

$\square$

שאלה 4

נחשב את $\int_\gamma f d\gamma$ כאשר $f(z) = \log(|z|) + i\, Arg(z)$ ו־γ מציירת מעגל ברדיוס 2 סביב הראשית, נגד כיוון השעון וכאשר Arg הוא הענף הראשי של הארגומנט.

מהיות Arg לא רציפה בקרן $(-\infty, 0]$ נגדיר בשביל תרגיל זה $\forall x < 0, \quad Arg(x) = \pi$.

פתרון: γ מסילה ברדיוס 2 סביב הראשית נגד כיוון השעון ולכן $\gamma(t) = 2e^{it}$ עבור $t \in [0, 2\pi]$ ולכן כמובן $\gamma'(t) = 2ie^{it}$.
מתקיים

$$f(\gamma(t)) = \ln(|\gamma(t)|) + i\, Arg(\gamma(t)) = \ln\left(\left|2e^{it}\right|\right) + i\, Arg(2e^{it}) = \ln(2) + i\, Arg(2e^{it})$$

כמו־כן, מהגדרת $Arg(z)$ להיות הזווית θ כך שמתקיים $z = |z|e^{i\theta}$ עבור $\theta \in (-\pi, \pi]$, נצטרך להתחשב בנקודות אי־רציפות שקורות כאשר $t \in (\pi, 2\pi]$: בקטע זה אנחנו עוברים מהציר השלילי הממשי תחת חצי המישור התחתון אל הציר הממשי החיובי.
אם נבחר $t = \pi$ אנחנו נצא מהתחום המוגדר וכדי לחזור לתחום של הארגומנט הראשי עלינו להחסיר 2π (כי זה שקול לסיבוב מלא), כלומר

$$Arg(2e^{it}) = \begin{cases} t & t \in [0, \pi] \\ t - 2\pi & (\pi, 2\pi] \end{cases}$$

כי אנחנו צריכים להישאר בתחום $(-\pi, \pi]$.
אז האינטגרל שעלינו לחשב היינו

$$\int_\gamma f\, \mathrm{d}\gamma = \int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\gamma'(t)\, \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} (\ln(2) + i\, Arg(2e^{it}))2ie^{it}\, \mathrm{d}t \underset{\text{אדטיביות}}{=} \int_0^{2\pi} \ln(2)2ie^{it}\, \mathrm{d}t - \int_0^{2\pi} 2e^{it}\, Arg(2e^{it})\, \mathrm{d}t$$
$$= 2i\ln(2) \int_0^{2\pi} e^{it}\, \mathrm{d}t - 2\int_0^{2\pi} e^{it}\, Arg(2e^{it})\, \mathrm{d}t$$
$$\underset{\text{לינארית האינטגרל}}{=} 2i\ln(2) \int_0^{2\pi} e^{it}\, \mathrm{d}t - 2\left(\int_0^{\pi} e^{it}\, Arg(2e^{it})\, \mathrm{d}t + \int_\pi^{2\pi} e^{it}\, Arg(2e^{it})\, \mathrm{d}t\right)$$
$$= 2i\ln(2) \int_0^{2\pi} e^{it}\, \mathrm{d}t - 2\left(\int_0^{\pi} e^{it} t\, \mathrm{d}t + \int_\pi^{2\pi} e^{it}(t - 2\pi)\, \mathrm{d}t\right)$$
$$= \left[2\ln(2)e^{it}\right]_{t=0}^{t=2\pi} - \left[2(1 - it)e^{it}\right]_{t=0}^{t=\pi} - \left[2e^{ik}(1 - ik)\right]_{k=-\pi}^{k=0} = 0 - 2((-2 + ip) + (2 + ip)) = -4i\pi$$

כאשר השתמשנו באינטגרציה בחלקים לחישובים האינטגרלים והחלפת משתנה $k = t - 2\pi$. $\square$

שאלה 5

נמצא בשיטה שראינו בהרצאה צמודה הרמונית לפונקציה $f(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$ בדיסק $B_1(0)$.

פתרון: ראשית נציין שהסיבה שאנחנו צריכים את הדיסק זה בשביל שהמכנה לא יתתאפס.

ראינו שפונקציה היא הרמונית אם היא גזירה פעמיים והלפסליאן שלה הוא 0.

נכתוב $z=x+iy$ ולכן מהנתון נקבל

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{x+iy}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

וכן

$$u(x,y)=Re\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{x}{x^2+y^2} \qquad v(x,Y)=Im\left(\frac{1}{z}\right)=-\frac{y}{x^2+y^2}$$

נחשב נגזרות שניות של החלק הממשי

$$u_x=\frac{-x^2+y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} \qquad u_y=-\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$
$$u_{xx}=\frac{2x(x^2-3y^2)}{\left(x^2+y^2\right)^3} \qquad u_{yy}=\frac{2x(-x^2+3y^2)}{\left(x^2+y^2\right)^3}$$

ואכן

$$\Delta u=u_{xx}+u_{yy}=0$$

ובאותו אופן

$$v_x=\frac{2yx}{\left(x^2+y^2\right)^2} \qquad v_y-\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$
$$v_{xx}=\frac{2y(y^2-3x^2)}{\left(x^2+y^2\right)^3} \qquad v_{yy}=\frac{2y(3x^2-y^2)}{\left(x^2+y^2\right)^3}$$

ואכן

$$\Delta v=v_{xx}+v_{yy}=0$$

ולכן $u,v\in\mathrm{Harm}(G)$.

כאשר הנגזרות השניות של החלק הממשי והמדומה קיימות כי זו מנה של פונקציות גזירות (מנת פולינומים).

נשאר להראות ש־$f=u+iv\in\mathrm{Hol}(G)$ ולכן נקבל מטענה שראינו בהרצאה שהם צמודות הרמונית.

מספיק שנראה שמשוואות קושי־רימן מתקיימות:

ואכן מהחישובים לעיל

$$u_x=v_y=\frac{-x^2+y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} \qquad u_y=-\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}=-\left(\frac{2yx}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right)=-v_x$$

אז משוואות קושי־רימן מתקיימות ואלו פונקציות הרמוניות ולכן $f\in\mathrm{Hol}(G)$ ומתקיים $v=\tilde{u}$ צמודה הרמונית. □