פתרון תרגיל בונוס 2 — תורת הקבוצות, 80200

9 ביוני 2025

שאלה 1

נוכיח שלכל $x, y \in \mathbb{N}$ המקיימים $x \leq y$ קיים $z \in \mathbb{N}$ עבורו $x + z = y$.

הוכחה: לכל $x \in \mathbb{N}$, נסמן $A_x = \{y \in N \mid \exists z \in \mathbb{N} \; s.t. \; x + z = y \wedge x \leq y\}$ ונסמן $A = \{x \in N \mid A_x = \mathbb{N}\}$.

נרצה להראות שמתקיים $A = \mathbb{N}$.

נרצה להראות שעבור $x = 0$ הטענה מתקיימת, משמע שלכל $y \in \mathbb{N}$ המקיים $0 \leq y$ קיים $z \in \mathbb{N}$ כך שיתקיים $0 + z = y$.

מהאקסיומה השלישית של פאנו אנחנו יודעים שמתקיים $\forall x(x + 0 = x)$ וראינו גם בתרגול שהחיבור אסוציאטיבי ולכן $\forall x(0 + x = x)$.

אז אם $y = 0$ נוכל לבחור $z = 0$ ואם $y = S(n)$ עבור $n \in \mathbb{N}$ (יתקיים $x \leq y$ במקרה זה מהאקסיומה הראשונה $\forall x(0 \neq S(x))$ והאקסיומה התשיעית $\forall x(x \leq 0 \iff x = 0)$ והאקסיומה השביעית $\forall x \forall y(x \leq S(y) \iff x \leq y \vee x = S(y))$) אז נבחר $z = S(n)$ גם כן ונקבל $0 + z = y$ ולכן $0 \in A$.

נניח שמתקיים $x \in A$ ונרצה להראות $S(x) \in A$, כלומר $A_{S(x)=} = \mathbb{N}$ $\square$

שאלה 2

סעיף א'

נוכיח שלכל $x \in N$ ו־$y \in N$ המקיימים $x + y = x + 0$ מתקיים $y = 0$.

הוכחה:

$\square$

סעיף ב'

נוכיח שלכל $x, y \in N$ אם מתקיים $x + y = 0$ אז $x = y = 0$.

הוכחה:

$\square$

שאלה 3

נוכיח שלכל $x,y\in N$ המקיימים $x\le y$ וגם $y\le x$ אז מתקיים $x=y$ (טריכונוטומיה).

הוכחה: נניח בשלילה ש־$y\ne x$ ונחלק לשני מקרים, בלי הגבלת הכלליות $y\ne 0$ או $y=0$.

אם $y=0$, מההנחה $x\ne 0$, אבל $x\le y$ משמע $x\le 0$ אבל מאקסיומה 7 זה אומר ש־$x=0$ וזו סתירה להנחה.

אם $y\ne 0$, אז אם $x=0$ נקבל $y\le 0$ וזו שוב סתירה לאקסיומה 7.

אחרת, $x=S(x')$ ו־$y=S(y')$ ולכן גם מתקיים $S(x')\ne S(y')$ ולכן מאקסיומה 2 נובע שמתקיים גם $x'\ne y'$, אבל יש לנו מספר סופי של צעדים עד שנגיע למקרה בו $x'=0$ וזה יהווה סתירה ל־$y'\le 0$ מכך ש־$x'=0\ne y'$, אבל זו שוב סתירה לאקסיומה 7.

בכל מקרה קיבלנו סתירה להנחה ש־$y\ne x$, ולכן $x=y$. $\square$

שאלה 4

נוכיח שלכל $x,y,z\in N$ המקיימים $y \leq x$ מתקיים $x+z\leq y+z$.

הוכחה: נוכיח באינדוקציה על z.

עבור $z=0$, מאקסיומה 3 אנחנו מקבלים $\forall x(x+0=x)$ ולכן $x+z=x+0=x$ וגם $y+z=y+0=y$ ומכך שמתקיים $x\leq y$ נקבל $x+0\leq y+0$.

עבור $z\neq 0$, אנחנו יודעים שקיים (מאקסיומה 1 ומהגדרה) S(z')=z ונניח כי הטענה נכונה עבור z', משמע $x+z'\leq y+z'$, אבל מהאקסיומה הרביעית מתקיים

$$\forall x\forall y(x+S(y)=S(x+y))$$

TODOOOOOOOOOOOOOOOOOO $\square$

שאלה 5

נוכיח שלכל $x, y, z \in N$ המקיימים $x \leq y, y \leq z$ מתקיים $x \leq z$.

הוכחה:

$\square$