פתרון תרגיל בונוס 2 — תורת הקבוצות, 80200

10 ביוני 2025

שאלה 1

נוכיח שלכל $x, y \in N$ המקיימים $x \leq y$ קיים $z \in N$ עבורו $x + z = y$.

הוכחה: לכל $x \in N$, נסמן $A_x = \{y \in N \mid \exists z \in N \ s.t. \ x + z = y \wedge x \leq y\}$ ונסמן $A = \{x \in N \mid A_x = N\}$ ונראה $A = N$.

במילים אחרות, נגדיר

$$A = \{x \in N \mid \forall y \in N, x \leq y \Rightarrow \exists z \in N \ s.t. \ x + z = y\}$$

ונרצה להראות ש־$A = N$.

נתחיל מלהראות ש־$0 \in A$: ניקח $y \in N$ ונניח שמתקיים $0 \leq y$, עלינו למצוא $z \in N$ כך שיתקיים $0 + z = y$.

מהאקסיומה השלישית $\forall x(x + 0 = x)$ ומהטענה שראינו בתרגול $\forall x \forall y(x + y = y + x)$ נקבל שבבחירה של $z = y$ הטענה תתקיים.

משמע קיבלנו $0 \in A$.

נניח כעת ש־$x \in A$ ונרצה להראות שגם $S(x) \in A$, ומאקסיומת האינדוקציה נסיים.

מכך ש־$x \in A$ נובע שלכל $y \in N$ המקיים $x \leq y$ קיים $z \in N$ כך שמתקיים $x + z = y$.

עלינו להראות שלכל $y \in N$ המקיים $S(x) \leq y$ גורר שקיים $z \in N$ המקיים $S(x) + z = y$.

אם $y = S(x)$, אז $z = 0$ מקיים את הנדרש.

אם $y \neq S(x)$, ומכך שמתקיים $x \leq S(x)$ ולכן בפרט גם $x \leq y$ (בפרט, אי־שיוויון חזק).

מהנחת האינדוקציה נובע שקיים $z \in N$ כך שמתקיים $x + z = y$, מכך ש־$y \neq S(x)$ ומכך ש־$S(x) \leq y$ נובע כמובן ש־$y \neq x$ ובהכרח $z \neq 0$ וגם $z \neq S(0)$.

מהאקסיומה הראשונה מתקיים $\forall x(0 \neq S(x))$, ולכן קיים $k \in N$ כך ש־$z = S(k)$, ולכן $y = x + S(k) = S(x + k)$ ולכן $y = S(x) + k$, ולכן $S(x) \in A$.

מעיקרון האינדוקציה קיבלנו ש־$A = N$. $\square$

שאלה 2

סעיף א'

נוכיח שלכל $x \in N$ ו־$y \in N$ המקיימים $x + y = x + 0$ מתקיים $y = 0$.

הוכחה: נראה באינדוקציה על y.

אם $y = 0$, נתון שמתקיים $x + y = x + 0$ ומהאקסיומה השלישית אנחנו יודעים שמתקיים $x + 0 = x$ וגם $x + y = x + 0 = x \Rightarrow x = x$.

כעת, נניח בשלילה: ניקח $y = S(k)$ עבור $k \in N$ ונראה ש־$x + S(k) \neq x + 0$.

מהאקסיומה הראשונה נובע $S(k) \neq 0$ כי $\forall x(0 \neq S(x))$, ולכן עם האקסיומה הרביעית

$$x + S(k) = S(x + k) \neq x$$

ולכן

$$x + 0 = x \neq S(x + k) = x + S(k)$$

אז אם $x + y = x + 0$ אז $y \neq S(k)$ עבור $k \in N$ ולכן $y = 0$ בלבד מהאקסיומה השביעית.

מעיקרון האינדוקציה נקבל את הטענה. □

סעיף ב'

נוכיח שלכל $x, y \in N$ אם מתקיים $x + y = 0$ אז $x = y = 0$.

הוכחה: נניח בשלילה ש־$x + y = 0$ אבל לכל הפחות אחד מבין x, y איננו 0.

נניח כי $y \neq 0$ ולכן קיים $k \in N$ כך ש־$y = S(k)$, מאקסיומת החיבור האקסיומה הרביעית

$$x + y = x + S(k) = S(x + k)$$

אבל $x + y = 0$ ולכן $S(x + k) = 0$ אבל מהאקסיומה הראשונה נובע ש־$\forall x(0 \neq S(x))$ ולכן $y = 0$.

נניח עכשיו ש־$x \neq 0$ ולכן $x = S(m)$ עבור $m \in N$, ונעשה באינדוקציה על y:

אם $y = 0$ אז $x + y = x + 0 = x$ מהאקסיומה השלישית, אבל $x = S(m) \neq 0$ מהאקסיומה הראשונה ולכן $x + y \neq 0$ וזו סתירה.

אם $y = S(n)$ עבור $n \in N$ אז נקבל

$$x + y = x + S(n) = S(x + n) \neq 0$$

שוב מהאסיומה השלישית יחד עם האקסיומה הרביעית ולכן גם $x \neq 0$.

בסך־הכל קיבלנו שאם $x + y = 0$ אז $x = y = 0$. □

שאלה 3

נוכיח שלכל $x, y \in N$ המקיימים $x \leq y$ וגם $y \leq x$ אז מתקיים $x = y$ (טריכונוטומיה).

הוכחה: נניח בשלילה ש־$y \neq x$ ונחלק לשני מקרים, בלי הגבלת הכלליות $y \neq 0$ או $y = 0$.

אם $y = 0$, מההנחה $x \neq 0$, אבל $x \leq y$ משמע $x \leq 0$ אבל מאקסיומה 7 זה אומר ש־$x = 0$ וזו סתירה להנחה.

אם $y \neq 0$, אז אם $x = 0$ נקבל $y \leq 0$ וזו שוב סתירה לאקסיומה 7.

אחרת, $x = S(x')$ ו־$y = S(y')$ ולכן גם מתקיים $S(x') \neq S(y')$ ולכן מאקסיומה 2 נובע שמתקיים גם $x' \neq y'$, אבל יש לנו מספר סופי של צעדים עד שנגיע למקרה בו $x' = 0$ וזה יהווה סתירה ל־$y' \leq 0$ מכך ש־$x' = 0 \neq y'$, אבל זו שוב סתירה לאקסיומה 7.

בכל מקרה קיבלנו סתירה להנחה ש־$y \neq x$, ולכן $x = y$. $\square$

שאלה 4

נוכיח שלכל $x, y, z \in N$ המקיימים $x \le y$ מתקיים $x + z \le y + z$.

הוכחה: נוכיח באינדוקציה על z.

עבור $z = 0$, מאקסיומה 3 אנחנו מקבלים $\forall x(x + 0 = x)$ ולכן $x + z = x + 0 = x$ וגם $y + z = y + 0 = y$ ומכך שמתקיים $x \le y$ נקבל $x + 0 \le y + 0$.

נניח שעבור $z \in N$ מתקיים $x + z \le y + z$ ונרצה להראות שהטענה נכונה גם עבור $S(z)$.

מהאקסיומה הרביעית מתקיים

$$x + S(z) = S(x + z),\ \ y + S(z) = S(y + z)$$

מהנחת האנידוקציה ומשאלה 1, קיים $k \in N$ כך שיתקיים $y + z = x + z + k$.

אז

$$S(y + z) = S(x + z + k) = S(x + z) + k = (x + S(z)) + k$$

אז

$$y + S(z) = x + S(z) + k$$

ולכן משאלה 1 נקבל

$$x + S(z) \le y + S(z)$$

מעיקרון האינדוקציה הטענה נכונה לכל $x, y, z \in N$. $\square$

שאלה 5

נוכיח שלכל $x, y, z \in N$ המקיימים $x \leq y, y \leq z$ מתקיים $x \leq z$.

הוכחה: משאלה 1 ומכך ש־$x \leq y$ נקבל שקיים $k \in N$ כך שמתקיים $x + k = y$ ובאותו אופן מכך ש־$y \leq z$ נובע שקיים $m \in N$ כך שמתקיים $y + m = z$.

מאסוציאטיביות החיבור אנחנו יודעים שמתקיים

$$\forall x, y, z \in N((x + y) + z) = x + (y + z))$$

אז

$$z = y + m = (x + k) + m = x + (k + m)$$

נסמן $n = k + m$ ונשים לב שמהאקסיומה הראשונה, השלישית והתשיעית נובע כי $n \geq 0$ (גם עם האקסיומה השביעית), ואז

$$z = x + (k + m) = x + n$$

ולכן $x \leq z$. $\square$