פתרון מטלה 12 — פונקציות מרוכבות, 80519

7 בפברואר 2026

שאלה 1

השלמת משפטים.

סעיף א'

נוכיח את משפט ההעתקה הפתוחה: יהיו G תחום ו־$f \in \mathrm{Hol}(G)$ לא קבועה. אז $f(G)$ פתוחה.

הוכחה: ניזכר במשפט העתקה מקומית: תהיי $f \in \mathrm{Hol}(G)$ לא קבועה, $z_0 \in G$ ו־$f(z_0) = w_0$. יהי m סדר ההתאפסות של $f - w_0$ בנקודה z_0.
אז קיים $\varepsilon_0 > 0$ כך שלכל $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ יש $\delta > 0$ כך שלכל $B(w_0, \delta)^*$ יש בידיוק m פתרונות שונים למשוואה $f(z) = w$ בכדור $B(z_0, \varepsilon)$. $\square$

שאלה 2

נוכיח שהבאים שקולים:

1. התחום G פשוט קשר
2. האינטגרל של כפונקציה הולומורפית ב־G לאורך מסילה סגורה וחלקה למקוטעין הוא אפס
3. כל פונקציה הולומורפית ב־G היא נגזרת של פונקציה הולומורפית
4. כל פונקציה הולומורפית ב־G שלא מתאפסת היא בעלת לוגריתם
5. כל פונקציה הולומורפית ב־G שלא מתאפסת היא בעלת שורש
6. לכל מסילה סגורה וחלקה למקוטעין ב־G אינדקס הליפוף של כל נקודה שאינה ב־G הוא אפס

הוכחה: נוכיח את הגרירות $1 \Longrightarrow 2 \Longrightarrow 3 \Longrightarrow 4 \Longrightarrow 5 \Longrightarrow 6$ ובתרגול ראינו $6 \Longrightarrow 1$ וזה יסיים.

$1 \Longrightarrow 2$: נניח ש־G תחום פשוט קשר, כלומר $\hat{\mathbb{C}} \setminus G$ הוא קשיר כאשר $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

תהיי γ מעגל מוכלל ב־G, אז לכל $z_0 \notin G$ נובע כי $z_0 \in \hat{\mathbb{C}} \setminus G$, אז $z \mapsto \mathrm{ind}_\gamma(z)$ רציפה ומקבלת ערכים מהטבעיים על $\hat{\mathbb{C}} \setminus \gamma$ אז היא חייבת להיות קבועה על $\hat{\mathbb{C}} \setminus G$ (בשביל הרציפות).

מכך ש־$\mathrm{ind}_\gamma(\infty) = 0$ אז $\mathrm{ind}_\gamma(z_0) = 0$ לכל $z_0 \notin G$ (כי $\infty \in \hat{\mathbb{C}} \setminus G$).

ממשפט קושי המוכלל נובע שלכל $f \in \mathrm{Hol}(G)$ ולכל מעגל מוכלל ממקודם לכל $z \notin G$ מתקיים $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

$2 \Longrightarrow 3$: תהיי $z_0 \in G$ ולכל $z \in G$ נגדיר $F(z) = \int_{\gamma_z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$ כאשר γ_z היא המסילה הרציפה למקוטעין המחברת בין z_0 ו־z.

אם γ_1, γ_2 הן שתי מסילות בין z_0 ל־z אזי $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$ היא מסילה סגורה ומההנחה שלנו $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$, כלומר $\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$ ולכן $F(z)$ תלוי רק ב־z ולא על המסילה ומניוטון לייבניץ' נקבל ש־$F'(z) = f(z)$ כלומר f היא הנגזרת של פונקציה הולומורפית F.

$3 \Longrightarrow 4$: תהיי $f \in \mathrm{Hol}(G)$ כך ש־$f(z) \neq 0$ לכל $z \in G$ ולכן הפונקציה $\frac{f'(z)}{f(z)}$ היא פונקציה הולומורפית ומההנחה נובע שקיימת $g(z)$ כך ש־$g'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$ ונסתכל על הנגזרת של $f(z)e^{-g(z)}$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(f(z)e^{-g(z)}\right) = f'(z)e^{-g(z)} - f(z)g'(z)e^{-g(z)} = e^{-g(z)}\left(f'(z) - f(z)\frac{f'(z)}{f(z)}\right) = 0$$

כלומר, $f(z)e^{-g(z)} = c$ עבור קבוע כלשהו ולכן $c = e^k$ עבור k קבוע כלשהו.

כלומר, $f(z) = e^{g(z)+k}$ והפונקציה $L(z) = g(z) + k$ היא לוגריתם רציף של f.

$4 \Longrightarrow 5$: תהיי $g(z) \in \mathrm{Hol}(G)$ כך ש־$g(z) \neq 0$. מההנחה, קיימת $\phi(z) \in \mathrm{Hol}(G)$ כך ש־$g(z) = e^{\phi(z)}$ ונגדיר $f(z) = e^{\frac{1}{2}\phi(z)}$, אז

$$(f(z))^2 = \left(e^{\frac{1}{2}\phi(z)}\right)^2 = e^{\phi(z)} = g(z)$$

כלומר f היא שורש של g.

$5 \Longrightarrow 6$: נקבע $\gamma \subset G$ ו־$z_0 \notin G$, אז הפונקציה $f(z) = z - z_0$ היא הולומורפית ולא נעלמת ב־G.

מההנחה, f בעלת שורש ולכן $\left(g_1(z)\right)^2 = z - z_0$ ולפי הגדרת אינדקס הליפוף

$$\mathrm{ind}_\gamma(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z - z_0}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{2g_1(z)g_1'(z)}{\left(g_1(z)\right)^2} = \frac{1}{\pi i}\int_\gamma \frac{g_1'(z)}{g_1(z)}\,\mathrm{d}z = 2 \cdot \mathrm{ind}_{g_1 \circ \gamma}(0)$$

ולכן $\mathrm{ind}_{\gamma(z_0)}$ חייב להיות זוגי.

$g_1(z)$ לא עלמת ולכן מההנחה יש להה שורש, g_2. נמשיך ונחזור על התהליך באינדוקציה ונקבל $\mathrm{ind}_\gamma(z_0)$ מתחלק ב־2^k לכל $k \in \mathbb{N}$ אבל המספר היחידי שמתחלק בכל החזקות של 2 הוא אפס ולכן $\mathrm{ind}_\gamma(z_0) = 0$. $\square$

שאלה 3

תהיי $f:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ הולומורפית בעלת המשכה רציפה ל־$\overline{D}$ ונניח בנוסף ש־f איננה קבועה וש־$f(\partial\mathbb{D})\subseteq\partial\mathbb{D}$.

סעיף א'

נוכיח שיש $z\in\mathbb{D}$ כך ש־$f(z)=0$.

הוכחה: מכך ש־$f(\partial\mathbb{D})\subseteq\partial\mathbb{D}$ נובע כי $|f(z)|=1$ לכל $z\in\partial\mathbb{D}$.
מכך ש־f הולומורפית על $\mathbb{D}$ ורציפה על $\overline{\mathbb{D}}$, ניתן להשתמש בעיקרון המקסימום.
מכך ש־$|f(z)|=1$ על $\partial\mathbb{D}$ ו־f היא לא קבועה, נובע כי לכל $z\in\mathbb{D}$ מתקיים

$$|f(z)|<1$$

ולכן $f(\mathbb{D})\subset\mathbb{D}$.
על השפה $\partial\mathbb{D}$, f ממפה את מעגל היחידה לעצמו, כלומר העקומה $f(e^{-it})$ מסתובבת (מלופפת) k פעמים סביב הראשית. מהיות f לא קבועה ורציפה על $\partial\mathbb{D}$ נובע כי אינדקס הליפוף הוא לפחות 1, ומעיקרון הארגומנט כמות האפסים של f על $\mathbb{D}$ כולל ריבויים זהה לאינדקס הליפוף k, ולכן לכל הפחות ל־f יש אפס אחד. $\square$

סעיף ב'

עבור $a\in\mathbb{D}$ תהיי $\varphi_a:\overline{\mathbb{D}}\to\overline{\mathbb{D}}$ ההעתקה $\varphi_a(z)=\frac{a-z}{1-\bar{a}z}$ נוכיח כי קיימים $n,m_k\in\mathbb{N}\cup\{0\},a_k\in\mathbb{D}$ ו־$|\lambda|=1$ כך שמתקיים

$$f(z)\lambda\prod_{k=1}^{n}\varphi_{a_k}^{m_k}(z)$$

הוכחה: ראשית מתקיים

1. φ_a הולומורפית על $\mathbb{D}$ ורציפה על $\overline{\mathbb{D}}$
2. $\varphi_a(\mathbb{D})=\mathbb{D}$ ו־$\varphi_a(\partial\mathbb{D})=\partial\mathbb{D}$
3. $\varphi_a(a)=0,\varphi_a(0)=a$
4. $|\varphi_a(z)|=1$ לכל $z\in\partial\mathbb{D}$

כלומר φ_a, הוא אוטומורפיזם של מעגל היחידה שמזיז את a ל־0.
ראינו של־f יש לפחות אפס אחד ב־$\mathbb{D}$ ומהיות f הולומורפית על $\mathbb{D}$ ורציפה על $\overline{\mathbb{D}}$ נובע כי מספר האפסים האלו הוא סופי, ולכן יש $a_1,...,a_n\in\mathbb{D}$ עם ריבוי $m_1,...,m_n\in\mathbb{N}$.
נגדיר

$$g(z)=\prod_{k=1}^{n}\varphi_{a_k}^{m_k}(z)$$

אז g הולומורפית על $\mathbb{D}$, $g(\partial\mathbb{D})\subset\partial\mathbb{D}$ ול־g יש בידיוק את אותה כמות אפסים כמו של f מבנייה והפונקצייה

$$h(z)=\frac{f(z)}{g(z)}$$

היא הולומורפית ולא מתאפסת על $\mathbb{D}$ ורציפה על $\overline{\mathbb{D}}$ ולכן $z\in\partial\mathbb{D}$ מתקיים

$$|h(z)|=\frac{|f(z)|}{|g(z)|}=1$$

אבל h הולומורפית על $\mathbb{D}$ ורציפה על $\overline{\mathbb{D}}$ ועל השפה מקבלת $|h|=1$ ולכן מעיקרון המקסימום נובע כי $h(z)=\lambda$ עבור $|\lambda|=1$ לכל z.
כלומר

$$f(z)=\lambda\prod_{k=1}^{n}\varphi_{a_k}^{m_k}(z)$$

כנדרש. $\square$

$$e^{\frac{1}{\pi}\log\left(-te^{\frac{-\pi i}{2}-i\varepsilon}\right)}=e^{\left(\frac{1}{\pi}(\log(-t)-(\frac{\pi}{2}+\varepsilon)i\right)}$$