# פתרון מטלה 02 — מבנים אלגבריים 2, 80446

10 באפריל 2025

## שאלה 1

יהי $K \subseteq \mathbb{C}$ שדה שאינו מוכל ב־$\mathbb{R}$. נראה שלא בהכרח שמתקיים $[K : K \cap \mathbb{R}] = 2$.

*הוכחה:* נבחן את $K = \mathbb{Q}\left(i, \sqrt{2}i\right) = \mathbb{Q}\left(i, \sqrt{2}\right)$ ובבירור $K \not\subseteq \mathbb{R}$ וכן $K \cap \mathbb{R} = \mathbb{Q}$. נשאר לחשב את $[K : K \cap \mathbb{R}] = [K : \mathbb{Q}]$.
נסתכל על מגדל ההרחבות

$$[K : \mathbb{Q}] = \left[\mathbb{Q}\left(i, \sqrt{2}\right) : \mathbb{Q}\right] \cdot \left[\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right) : \mathbb{Q}\right]$$

כאשר אנחנו כבר יודעים

$$\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right) : \mathbb{Q}\right] = 2$$

וגם

$$\left[\mathbb{Q}\left(i, \sqrt{2} : \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)\right)\right] = 2$$

שכן הפולינום $x^2 + 1 = 0$ אי־פריק (אין $a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$ כך שהריבוע שלו הוא $-1$).
ולכן מכפליות הדרגה נקבל

$$[K : \mathbb{Q}] = \left[\mathbb{Q}\left(i, \sqrt{2}\right) : \mathbb{Q}\right] \cdot \left[\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right) : \mathbb{Q}\right] = 4 \neq 2$$

$\square$

## שאלה 2

### סעיף א'

עבור $\alpha=\sqrt{3}+\sqrt{7}i\in\mathbb{C}$, נמצא את $f_{\alpha/\mathbb{Q}}(x)$, הפולינום המינימלי של $\alpha$ מעל $\mathbb{Q}$.

*פתרון:*

$$\alpha=\sqrt{3}+\sqrt{7}i\iff\alpha-\sqrt{3}=\sqrt{7}i\iff\left(\alpha-\sqrt{3}\right)^2=-7\iff\left(\alpha-\sqrt{3}\right)^2+7=0\iff\alpha^2-2\sqrt{3}\alpha+10=0$$

$$\iff a^2+10=2\sqrt{3}\alpha\iff\left(a^2+10\right)^2=\left(2\sqrt{3}\alpha\right)^2\iff\alpha^4+20\alpha^2+100=12\alpha^2\iff\alpha^4+8\alpha^2+100=0$$

ולכן נסמן $f_{\alpha/\mathbb{Q}}(x)=x^4+8x^2+100$ ונראה כי הוא אכן הפולינום המינימלי של $\alpha$ מעל $\mathbb{Q}$.
על־מנת שנגיד כי $f_{\alpha/\mathbb{Q}}(x)$ הוא הפולינום המינימלי, עלינו להראות כי מתקיימים שלושת התנאים הבאים:

1. צריך להתקיים $f_{\alpha/\mathbb{Q}}(\alpha)=0$, ואכן:

$$\alpha^4+8\alpha^2+100=0\implies\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}i\right)^4+8\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}i\right)^2+100=16-\cancel{16\sqrt{3}\sqrt{7}i}-84-32+\cancel{16\sqrt{3}\sqrt{7}i}+100=0$$

2. הוא אכן פולינום מתוקן – המקדם של $x^4$ הוא 1
3. נשאר להראות שהוא אי־פריק: בשביל זה נחשב את $\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt{3},\sqrt{7}i\right):\mathbb{Q}\right]$:

$$\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt{3},\sqrt{7}i\right):\mathbb{Q}\right]=\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt{3},\sqrt{7}i\right):\mathbb{Q}\left(\sqrt{3}\right)\right]\cdot\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt{3}\right):\mathbb{Q}\right]$$

את $\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt{3}\right):\mathbb{Q}\right]$ אנחנו יודעים לחשב שכן הפולינום המינימלי במקרה זה הוא $x^2-3$ ולכן $\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt{3}\right):\mathbb{Q}\right]=2$.
גם את $\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt{3},\sqrt{7}i\right):\mathbb{Q}\left(\sqrt{3}\right)\right]$ אנחנו יודעים לחשב: ראינו שהפולינום $x^2+7$ ללא שורש וללא פירוק ב־$\mathbb{Q}\left(\sqrt{3}\right)$ ולכן זהו הפולינום המינימלי של $\sqrt{7}i$ מעל $\mathbb{Q}\left(\sqrt{3}\right)$ והוא $\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt{3},\sqrt{7}i\right):\mathbb{Q}\left(\sqrt{3}\right)\right]=2$.
ולכן

$$\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt{3},\sqrt{7}i\right):\mathbb{Q}\right]=\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt{3},\sqrt{7}i\right):\mathbb{Q}\left(\sqrt{3}\right)\right]\cdot\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt{3}\right):\mathbb{Q}\right]=4$$

ומכיוון שהפולינום שמצאנו הוא ממעלה 4 ומקיים את התנאים לעיל, מיחידות הפולינום המינימלי נוכל להסיק כי בהכרח הפולינום שמצאנו הוא אי-פריק.

ולכן $f_{\alpha/\mathbb{Q}}(x)=x^4+8x^2+100$ הוא הפולינום המינימלי הנדרש. $\square$

## סעיף ב'

יהי $d \in \mathbb{N}$ מספר טבעי שאינו חזקה שלישית של מספר רציונלי ויהיו $0 \neq s, t \in \mathbb{Q}$.
נסמן ב-$\alpha = \sqrt[3]{d} \in \mathbb{C}$ את אחד השורשים השלישיים של $d$. עבור $\beta = s\alpha + t\alpha^2$ נביע את הפולינום המינימלי של $f_{\beta/\mathbb{Q}}$ של $\beta$ מעל $\mathbb{Q}$ באמצעות $d, s, t$.

*פתרון:*

$$\begin{aligned}\beta = s\alpha + t\alpha^2 \Longleftrightarrow \beta^3 &= \left(s\alpha + t\alpha^2\right)^3 \\ &= s^3\alpha^3 + 3s^2\alpha^4 t + 3t^2 s\alpha^5 + t^3\alpha^6 \\ &= \alpha^3(s^3 + \alpha^3 t^3) + 3ts\alpha^3(s\alpha + t\alpha^2) \\ &= d(s^3 + dt^3) + 3tsd(s\alpha + t\alpha^2)\end{aligned}$$

ולכן

$$\left(s\alpha + t\alpha^2\right)^3 - \left(d(s^3 + dt^3) + 3tsd(s\alpha + t\alpha^2)\right) = 0$$

משמע הפולינום $p(x) = x^3 - 3xtsd(s\alpha + t\alpha^2) - d(s^3 + dt^3)$ מאפס את $\beta$, וזהו פולינום מתוקן ולכן אם נשאר להראות שהוא אי־פריק:
נשים לב כי $\beta = s\alpha + t\alpha^2 \in \mathbb{Q}(\alpha)$ ומכך ש-$\mathbb{Q}(\alpha)$ היא הרחבה מדרגה 3 (כי הפולינום המינימלי הוא $x^3 - d$) אזי הדרגה של הפולינום המינימלי של $\beta$ מעל $\mathbb{Q}$ היא לכל היותר 3. נטען שהיא בידיוק 3:
נניח שהדרגה של $\beta$ היא 1, ולכן $\beta \in \mathbb{Q}$ ואז $\beta = s\alpha + t\alpha^2 \in \mathbb{Q}$ משמע $t\alpha^2 + s\alpha - \beta = 0$ הוא פיתרון למשוואה ריבועית וזו סתירה להיות $x^3 - d$, הפולינום המינימלי ב-$\mathbb{Q}(\alpha)$.
אם הדרגה של $\beta$ היא 2, ומכך ש-$\beta \in \mathbb{Q}(\alpha)$ נקבל את שרשרת ההכלות

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\beta) \subseteq \mathbb{Q}(\alpha)$$

ומכפליות הדרגה נקבל

$$[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}(\beta)] \cdot [\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}] \Longrightarrow [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}(\beta)] = \frac{3}{2}$$

וזו כמובן סתירה (דרגה היא מספר טבעי), ולכן $[\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}] = 3$.
מצאנו פולינום מתוקן, שמתאפס בהצבה של $\beta$ והוא מהדרגה של הפולינום המינימלי ולכן

$$p(x) = x^3 - 3xtsd(s\alpha + t\alpha^2) - d(s^3 + dt^3)$$

הוא הפולינום המינימלי של $f_{\beta/\mathbb{Q}}$ של $\beta$ מעל $\mathbb{Q}$ באמצעות $d, s, t$. $\square$

# שאלה 3

## סעיף א'

יהי $f \in \mathbb{Q}[x]$ ונסמן $f(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$.
נראה שאם $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ שורש של $f$ אז $s \mid a_n$ וגם $r \mid a_0$.

*הוכחה:* בלי הגבלת הכלליות נניח כי $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ הוא שבר מצומצם ונניח כי $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ הוא שורש של $f$, משמע $f\left(\frac{r}{s}\right) = 0$ ולכן:

$$f\left(\frac{r}{s}\right) = a_n\left(\frac{r}{s}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{r}{s}\right)^{n-1} + ... + a_1\left(\frac{r}{s}\right) + a_0 = 0$$
$$\iff a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} s + ... + a_1 r s^{n-1} + a_0 s^n = 0$$
$$\iff r\left(a_n r^{n-1} + a_{n-1} s r^{n-1} + ... + a_1 s^{n-1}\right) = -a_0 s^n$$

משמע $r$ מחלק את $a_0 s^n$ אבל $\gcd(r,s)=1$ ולכן גם $\gcd(r,s^n)=1$ ולכן $r$ מחלק את $a_0$.
באותו אופן, מתקיים:

$$f\left(\frac{r}{s}\right) = a_n\left(\frac{r}{s}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{r}{s}\right)^{n-1} + ... + a_1\left(\frac{r}{s}\right) + a_0 = 0$$
$$\iff a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} s + ... + a_1 r s^{n-1} + a_0 s^n = 0$$
$$\iff s\left(a_{n-1} r^{n-1} + a_{n-2} s r^{n-2} ... + a_0 s^{n-1}\right) = -a_n r^n$$

משמע $s$ מחלק את $a_n r^n$ אבל $\gcd(r,s)=1$ ולכן גם $\gcd(s,r^n)=1$ ולכן $s$ מחלק את $a_n$.

$\square$

## סעיף ב'

נסביר כיצד להשתמש בסעיף הקודם ובשאלה 4 מהתרגיל הקודם כדי לבדוק ש־$f \in \mathbb{Q}[x]$ נתון מדרגה 2 או 3 הוא אי־פריק.
נבצע בדיקה זו לפולינומים הבאים:

1. $f(x) = x^3 - 4x + 2$
2. $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 3$

*פתרון:* לפי האלגוריתם בסעיף הקודם נוכל לקבוע האם קיימים לפולינום (מתוקן) מדרגה 2 או 3 שורשים ואם כן מה הם. אם לא נמצא לו שורשים, בשאלה 4 במטלה הקודמת הראינו שאם לפולינום מדרגה זו אין שורשים ($\forall \alpha \in \mathbb{Q},\ \ f(\alpha) \neq 0$) אז הוא ראשוני ולכן אי־פריק (כי תחום ראשי).
ניישם את התהליך עבור הפולינומים הנתונים:

1. $f(x) = x^3 - 4x + 2$

   במקרה זה, $a_n = 1$ ו־$a_0 = 2$ ולכן $r \in \{\pm 1, \pm 2\}$ ו־$s = 1$. נציב ונראה כי אף אחד מהם לא שורש של הפולינום:

   1. $r = s = 1$ ואז

   $$f\left(\frac{r}{s}\right) = f(1) = 1^3 - 4\cdot 1 + 2 = -1 \neq 0$$

   2. $r = -1,\ s = 1$ ואז

   $$f\left(\frac{r}{s}\right) = f(-1) = (-1)^3 - 4\cdot(-1) + 2 = 5 \neq 0$$

   3. $r = 2,\ s = 1$ ואז

   $$f\left(\frac{r}{s}\right) = f(2) = 2^3 - 4\cdot 2 + 2 = 2 \neq 0$$

   4. $r = -2,\ s = 1$ ואז

   $$f\left(\frac{r}{s}\right) = f(-2) = (-2)^3 - 4\cdot(-2) + 2 = 2 \neq 0$$

   מצאנו שאין ל־$f$ שורשים ולכן $f$ אי־פריק לפי האלגוריתם.

2. $f(x)=x^3-4x^2+3x+3$ במקרה זה, $a_n=1$ ו־$a_0=3$ ולכן $r\in\{\pm1,\pm3\}$ ו־$s=1$. נציב ונראה כי אף אחד מהם לא שורש של הפולינום:

1. $r=s=1$ ואז

$$f\left(\frac{r}{s}\right)=f(1)=1^3-4\cdot1^2+3\cdot1+3=3\neq0$$

2. $r=-1,\ s=1$ ואז

$$f\left(\frac{r}{s}\right)=f(-1)=(-1)^3-4\cdot(-1)^2+3\cdot(-1)+3=-5\neq0$$

3. $r=3,\ s=1$ ואז

$$f\left(\frac{r}{s}\right)=f(1)=3^3-4\cdot3^2+3\cdot3+3=3\neq0$$

4. $r=-3,\ s=1$ ואז

$$f\left(\frac{r}{s}\right)=f(1)=(-3)^3-4\cdot(-3)^2+3\cdot(-3)+3=-69\neq0$$

מצאנו שאין ל־$f$ שורשים ולכן $f$ אי־פריק לפי האלגוריתם.

$\square$

## שאלה 4

תהיי $E/F$ הרחבת שדות ויהי $f \in F[x]$ אי־פריק כך ש־$L = F[x]/(f)$ הוא שדה.
נסמן ב־$\alpha$ את התמונה של $x$ ב־$L$, משמע $a = x + (f) \in L$.
נניח שנתון $F$־הומומורפיזם $\varphi : L \to E$ משמע הומומורפיזם המקיים $\varphi \restriction_F = \mathrm{id}_F$.

### סעיף א'

נוכיח ש־$\varphi(\alpha) \in E$ הוא שורש של $f \in F[x] \subseteq E[x]$.

*הוכחה:* נגיד ש־$\varphi(\alpha) \in E$ הוא שורש של $f \in F[x] \subseteq E[x]$ אם מתקיים $f(\varphi(\alpha)) = 0$.
נגדיר $\pi : F[x] \to L$ הומומורפיזם ההטלה $\pi(a) = a + (f)$, ונשים לב שמתקיים:

$$f(\varphi(\alpha)) = \sum_{i=0}^{n} a_i \varphi(\alpha)^i = \varphi\left(\sum_{i=0}^{n} a_i \alpha^i\right) = \varphi \circ \pi\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right) = \varphi(\pi(f)) = \varphi(0) = 0$$

□

### סעיף ב'

נוכיח שאם $\psi : L \to E$ הוא $F$־הומומורפיזם נוסף כך ש־$\psi(\alpha) = \varphi(\alpha)$ אזי $\psi = \varphi$.

*הוכחה:* במטלה הקודמת ראינו שקיים $F$־הומומורפיזם יחיד כך ש־$\sigma : F[x] \to F[\alpha]$ המוגדר על־ידי $\sigma(x) = \alpha$.
נבחן תחילה את $\varphi \circ \pi$ כאשר $\pi$ כמו בסעיף הקודם $\pi : F[x] \to L$ הומומורפיזם ההטלה $\pi(a) = a + (f)$.
יהי $\beta \in F[x]$, מתקיים:

$$(\varphi \circ \pi)(\beta) = \varphi(\beta + (f)) = \varphi(\beta(\alpha)) = \beta(\varphi(\alpha))$$

נשים לב כי ההרכבה $\varphi \circ \pi$ היא אכן $F$־הומומורפיזם, שכן הרכבה של הומומורפיזמים היא הומומורפיזם ועבור $c \in F \subseteq F[x]$ מתקיים $(\varphi \circ \pi)(c) = \varphi(c + (f)) = c$ ולכן $\varphi \circ \pi$ הוא $F$־הומומורפיזם מ־$F[x]$ ל־$F[\alpha]$.
מההנחה כי $\psi(\alpha) = \varphi(\alpha)$ נובע גם כי $\psi(\pi(\alpha)) = \varphi(\pi(\alpha))$ אבל $\psi(\pi(\alpha))$ משמע גם $\psi \circ \pi$ הוא $F$־הומומורפיזם מ־$F[x]$ ל־$F[\alpha]$ ולכן מהיחידות שמצאנו במטלה הקודמת נקבל כי $\psi = \varphi$.

□

## שאלה 5

בשאלה זו נבנה הרחבת שדות $E/\mathbb{Q}$ כך ש־$[E:\mathbb{Q}]=3$ אבל אין $d\in\mathbb{Q}$ כך ש־$E\backsimeq\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{d}\right)$.

### סעיף א'

יהי $d\in\mathbb{Q}$ שאינו חזקה שלישית של מספר רציונלי. נוכיח שקיים הומומורפיזם $\varphi:\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{d}\right)\to\mathbb{C}$ כך ש־$\operatorname{Im}(\varphi)\nsubseteq\mathbb{R}$.

*הוכחה:* אנחנו יודעים שמעל $\mathbb{C}$ הפולינום $x^3-d$ מתפרק לשלושה שורשים שונים, כאשר $\sqrt[3]{d}\in\mathbb{R}$ הוא השורש היחידי שממשי והשאר הם מעל המרוכבים, מדה־מואבר אנחנו יודעים שמתקיים

$$\sqrt[3]{d}=\left\{\left|\sqrt[3]{d^k}\right|\cdot e^{\frac{2\pi i+2\pi k}{3}}\mid k\in\{0,1,2\}\right\}$$

אז נגדיר את $\varphi:\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{d}\right)\to\mathbb{C}$ על־ידי:

$$\varphi(1)=1,\ \varphi\left(\sqrt[3]{d}\right)=e^{\frac{2\pi i+2\pi k}{3}},\ \varphi\left(\sqrt[3]{d^2}\right)=e^{\frac{2\pi i+4\pi}{3}}$$

אנחנו יודעים שהדרגה של ההרחבה היא 3 וכן שהבסיס שלה הוא $\left\{1,\sqrt[3]{d},\sqrt[3]{d^2}\right\}$ ומכיוון ש־$\varphi$ הומומורפיזם של שדות מוגדר לפי איברי הבסיס ולכן משמר את תכונות ההומומורפיזם ובבירור $\operatorname{Im}(\varphi)\nsubseteq\mathbb{R}$ שכן התמונה מכילה מספרים מרוכבים. $\square$

### סעיף ב'

יהי $f\in\mathbb{Q}[x]$ אי־פריק מדרגה 3 כך ששלושת השורשים של $f$ הם ממשיים ואי־רציונליים.
נראה ש־$L=\mathbb{Q}[x]/(f)$ שדה כך ש־$[L:\mathbb{Q}]=3$ ושאם $\varphi:L\to\mathbb{C}$ הומומורפיזם אזי $\operatorname{Im}(\varphi)\subseteq\mathbb{R}$.

*הוכחה:* $\mathbb{Q}[x]$ הוא תחום ראשי ובתחום ראשי איבר הוא אי־פריק אמם האידיאל שהוא יוצר הוא אידיאל מקסימלי ולכן $(f)$ אידיאל מקסימלי ומטענה מהתרגול נובע כי $L=\mathbb{Q}[x]/(f)$ הוא שדה.
נראה כי דרגת ההרחבה היא אכן 3: כל $x\in L$ הוא מהצורה

$$r_0+r_1\alpha+r_2\alpha^2,\ r_i\in\mathbb{Q},\alpha=x+(f)$$

ולכן הבסיס של ההרחבה הוא $\left\{1,\alpha,\alpha^2\right\}$ משמע $[L:\mathbb{Q}]=\deg(f)=3$.
יהי $\varphi:L\to\mathbb{C}$ הומומורפיזם ונראה כי $\operatorname{Im}(\varphi)\subseteq\mathbb{R}$:
מכיוון שכל השורשים של $f$ הם אי־רציונליים וההומומורפיזמים בין שדות משמרים את החיבור וכפל בשדה ובפרט משמרים שורשים, משמע אם $\alpha$ הוא אחד משורשי $\varphi$ אזי $\varphi(f(\alpha))=f(\varphi(\alpha))=0$ משמע $\varphi(\alpha)$ הוא שורש של $f$ ב־$\mathbb{C}$ אבל כל השורשים הם ב־$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.
כעת, נפעיל את ההומומורפיזם על האיבר הכללי של $L$ ונקבל

$$\varphi(x)=r_0+r_1\varphi(\alpha)+r_2\varphi(\alpha^2)$$

זהו כמובן סכום של איברים ב־$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ ולכן $\operatorname{Im}(\varphi)\subseteq\mathbb{R}$. $\square$

### סעיף ג'

נוכיח ש־$f(x)=x^3-4x+2$ פולינום המקיים את התנאים של הסעיף הקודם ונסיק ש־$E=\mathbb{Q}[x]/(f)$ הרחבה מדרגה 3 של $\mathbb{Q}$ שאינה איזומורפית לשדה מהצורה $\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{d}\right)$.

*הוכחה:* בשאלה 3 ראינו שהפולינום $f(x)=x^3-4x+2$ הוא אי־פריק וכמובן מדרגה 3, נראה כי השורשים ממשיים:
נשים לב ש־$f'(x)=3x^2-4$ היא פרבולה שמתאפסת כאשר $x=\pm\sqrt{\frac{4}{3}}$ ולכן אלו נקודות הקיצון של $f$.
$f$ פולינום שמוגדר על כל $\mathbb{R}$ ולכן נחלק את הישר לשלושה חלקים בהתאם לאיפוס הנגזרת ונבחן מה קורה לנגזרת:

1. בקטע $\left(-\infty,-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ נבחר $x=-2$ ומתקיים $f'(2)=8>0$ ולכן $f$ עולה (ולכן גם $f(x)\xrightarrow[x\to-\infty]{}-\infty$)
2. בקטע $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ נבחר $x=0$ ומתקיים $f'(0)=-4<0$ ולכן $f$ יורדת
3. בקטע $\left(\frac{2}{\sqrt{3}},\infty\right)$ נבחר $x=2$ ומתקיים $f'(2)=8>0$ ולכן $f$ עולה (ולכן גם $f(x)\xrightarrow[x\to\infty]{}\infty$)

ואם נציב את הנקודות קיצון $f\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{4}{3}-4\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}+2=-\frac{16}{\sqrt{27}}+2<0,f\left(-\sqrt{\frac{4}{3}}\right)=\frac{16}{\sqrt{27}}+2>0$ וכמובן שהם ב־$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.
ממשפט ערך הביניים נקבל שקיימים $x_1<-\frac{16}{\sqrt{27}}+2<x_2<\frac{16}{\sqrt{27}}+2<x_3$ כך ש־$f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=0$ ולכן כל התנאים של סעיף ב' מתקיימים.

נסיק ש־$E = \mathbb{Q}[x]/(f)$ אינה איזומורפית לשדה מהצורה $\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{d}\right)$: מסעיף ב' נובע כי לכל $\varphi : \mathbb{Q}[x]/(f) \to \mathbb{C}$ מתקיים ש־$\mathrm{Im}(\varphi) \subseteq \mathbb{R}$.
לו היה מתקיים $\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{d}\right) \backsimeq \mathbb{Q}[x]/(f)$ עבור $d \in \mathbb{Q}$ היה נובע מסעיף א' כי $\mathrm{Im}(\varphi) \nsubseteq \mathbb{R}$ אבל $\mathrm{Im}(\varphi) \subseteq \mathbb{R}$ ולכן זו סתירה. $\square$