פתרון מטלה 01 — תורת ההסתברות 1, 80420

4 בנובמבר 2025

שאלה 1

יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות.

סעיף א'

נוכיח שאם $A \subseteq \Omega$ מקיימת $\mathbb{P}(A) = 0$ אז לכל $B \subseteq \Omega$ מתקיים $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(B)$.

הוכחה: תהיי $D = B \setminus A$ ומתקיים $D \cap (A \cap B) = \emptyset$ ולכן מתכונת הסכימות בת־מנייה של $\mathbb{P}$ מתקיים

$$(\star)\ \mathbb{P}(D \cup (A \cap B)) = \mathbb{P}(D) + \mathbb{P}(A \cap B)$$

מהגדרת החיתוך ומתכונות פונקציית הסתברות נקבל

$$0 \leq P(A \cap B) \leq \mathbb{P}(A) = 0 \Longrightarrow P(A \cap B) = 0$$

ומ־$(\star)$ נקבל $\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(B)$ ובסך־הכל

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A \cup (B \setminus A)) = \mathbb{P}(A \uplus D) \underset{\text{סכימות בת־מנייה}}{=} \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(D) = 0 + \mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(B)$$

$\square$

סעיף ב'

נפריך את הטענה שאם $A \subsetneq B$ אזי $\mathbb{P}(A) < \mathbb{P}(B)$.

הוכחה: נגדיר $\Omega = \{1, 2, 3\}$ כך שמתקיים $p(1) = p(2) = \frac{1}{2}, p(3) = 0$.

נסתכל על הקבוצות $A = \{1\}, B = \{1, 3\}$ ואכן $A \subsetneq B$ אבל $\mathbb{P}(A) = p(1) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$, בסתירה. $\square$

סעיף ג'

נוכיח שלכל $A, B \subseteq \Omega$ מתקיים $\mathbb{P}(A \cap B) \geq \mathbb{P}(A) + +\mathbb{P}(B) - 1$.

הוכחה: מתכונות פונקציית ההסתברות ועיקרון ההכלה וההדחה מתקיים

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \Longleftrightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B) \underset{\forall X \in \mathcal{F}, 1 \geq \mathbb{P}(X)}{\geq} \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1$$

$\square$

סעיף ד'

יהיו $A, B \subseteq \Omega$ ונוכיח שמתקיים

$$\mathbb{P}(A \Delta B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2\mathbb{P}(A \cap B)$$

הוכחה: ניזכר בהגדרה

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \cap (A \cap B)^c$$

מתקיים

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \Delta B) &= \mathbb{P}((A \cup B) \cap (A \cap B)^c) \\
&\underset{(1)}{=} \mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}((A \cap B)^c) - \mathbb{P}((A \cup B) \cup (A \cap B)^c) \\
&\underset{(2)}{=} \mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(\Omega \setminus (A \cap B)) - \mathbb{P}(A \cup B \cup A^c \cup B^c) \\
&= \mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(\Omega \setminus (A \cap B)) - \mathbb{P}(\Omega) \\
&\underset{(3)}{=} \mathbb{P}(A \cup B) \cancel{+ \mathbb{P}(\Omega)} - \mathbb{P}(A \cap B) \cancel{- 1} \\
&\underset{(1)}{=} \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2\mathbb{P}(A \cap B)
\end{aligned}$$

כאשר (1) נובע מהכלה והדחה, (2) נובע מכללי דה־מורגן לקבוצות ו־(3) נובע מתכונת המשלים של פונקציית הסתברות. $\square$

שאלה 2

במסגרת ניסוי דו־שלבי, מוגרל בשלב הראשון מספר טבעי $n \in \mathbb{N}$ על־פי פונקציית ההתפלגות הנקודתית $p(n) = 2 \cdot 3^{-n}$.
בשלב השני מוגרל מספר באקראי באופן אחיד מתוך $[2^n]$.

סעיף א'

נראה כי p מקיימת את ההגדרה של פונקציית הסתברות נקודתית על $\mathbb{N}$.

הוכחה: נראה שכל התנאים מתקיימים.
אכן, לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $p(n) = 2 \cdot 3^{-n} > 0$.
מהגדרת סכום גיאומטרי/הנדסי מתקיים

$$\sum_{n=1}^{\infty} p(n) = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot 3^{-n} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n} = 2 \cdot \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

אז זו אכן פונקציית הסתברות נקודתית מעל $\mathbb{N}$. $\square$

סעיף ב'

נחשב מה ההסתברות שהגורל בסוף השלב השני המספר 1.

פתרון: בעצם הניסוי הדו־שלבי שלנו מתואר על־ידי הזוגות (n, k) כאשר $n \in \mathbb{N}, k \in \{1, 2, ..., 2^n\}$.
בשלב הראשון אנחנו יודעים שההסתברות היא $2 \cdot 3^{-n}$ לקבל $n \in \mathbb{N}$.
על־מנת לקבל $k \in \{1, 2, ..., 2^n\}$, נתון כי זה בהתפלגות אחידה.
כלומר ההסתברות לקבל את הזוג (n, k) המתואר תהיה $2 \cdot 3^{-n} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{2}{6^n}$.
כעת מבקשים מאיתנו למצוא את ההסתברות לקבל את אחד הצמדים

$$(1, 1), (2, 1), (3, 1), ..., (n, 1)$$

מהיות כל המקרים זרים נוכל להשתמש בסכימות בת־מנייה ולקבל

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(n, 1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{6^n} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6^n} \underset{\text{סכום טור גיאומטרי/הנדסי}}{=} 2 \cdot \frac{\frac{1}{6}}{1 - \frac{1}{6}} = 2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$$

$\square$

שאלה 3

בכל סעיף, נבנה מרחב הסתברות אחיד המתאר נכונה את השאלה ונחשב את ההסתברות של המאורע המתואר.

סעיף א'

נתונים 5 בני־אדם. נחשב מה ההסתברות שלפחות שניים מהם נולדו באותו החודש.

פתרון: נסמן $\Omega = [12]^5$ ל־12 חודשי השנה וחמשת בני־האדם.

ההסתברות היא אחידה ולכן נגדיר $\mathbb{P} = \mathbb{P}_p$ עבור $p : [12] \to [0,1]$ פונקציית הסתברות נקודתית אחידה כך שלכל $\omega \in \Omega$ מתקיים $p(\omega) = \frac{1}{12^5}$.

לחישוב ההסתברות ששני בני־אדם חולקים חודש יום־הולדת נשתמש במשלים ולכן נשאל מה ההסתברות שאף־אחד מהם לא חולק יום־הולדת.

משיקולים קומבינטוריים ומהגדרת ההתפלגות האחידה ההסתברות מתקיים

$$\mathbb{P}(\text{לכולם יש חודשי לידה שונים})\frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{12^5} = \frac{7920}{2036} = \frac{55}{144}$$

נשאר להשתמש בהגדרת הסתברות המשלים ולקבל

$$\mathbb{P}(\text{לפחות שני בני־אדם חולקים יום־הולדת}) = 1 - \mathbb{P}(\text{לכולם יש חודשי לידה שונים}) = 1 - \frac{55}{144} = \frac{89}{144}$$

□

סעיף ב'

4 בנים ו־4 בנות עומדים בשורה באופן מקרי. נחשב מה ההסתברות שיעמדו כך ש־4 הבנים יעמדו ב־4 המקומות הימניים ו־4 הבנות יעמדו ב־4 המקומות השמאליים.

פתרון: נסמן $G = \{G_1, G_2, G_3, G_4\}, B = \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$ ונגדיר $P = G \cup B$ כלומר S הוא אוסף שמונת הבנים והבנות.

נגדיר $\Omega = \big\{(P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8) \mid \{P_1, ..., P_8\} = S, P_i \neq P_j \iff i \neq j\big\}$ כלומר כל $\omega \in \Omega$ הוא בעצם ה־8־יה הסדורה לסדר כלשהו של האוסף.

משיקולים קומבינטוריים מתקיים $|\Omega| = 8!$.

כנתון ההסתברות היא אחידה ולכן נגדיר לכל $\omega \in \Omega$ שמתקיים $P(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{40320}$.

המאורע שאנחנו מחפשים נסמן אותו ב־E הוא המאורע שבו ארבעת הבנות תעמודנה בארבעת המקומות השמאליים וארבעת הבנים יעמדו בארבעת המקומות הימניים, כאשר לא אכפת לנו מהסידורים הפנימיים בין כל רביעייה.

כלומר יש לנו $24 \neq 4$ אפשרויות סידור לארבעת הבנות ובאותו אופן גם 24 אפשרויות לסידור ארבעת הבנים.

מההגדרת ההסתברות האחידה נקבל $P(E) = \dfrac{|E|}{|\Omega|} = \frac{24^2}{40320} = \frac{1}{70}$.

□

סעיף ג'

בוחרים באקראי ובאופן אחיד חלוקה של 12 כדורים זהים בין 8 תאים ממוספרים בהתפלגות אחידה. נחשב מה ההסתברות שאין תא ריק.

פתרון: ראשית מרחב המדגם שלנו יהיה אוסף כל האפשרויות לחלוקה של 12 כדורים זהים ל־8 תאים ממוספרים וקומבינטורית מתקיים

$$|\Omega| = \binom{12+8-1}{8-1} = \binom{19}{7} = \frac{19!}{7!12!} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = 3 \cdot 4 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 = 50388$$

אנחנו מחפשים את ההסתברות שאין אף תא ריק, כלומר המאורע E הוא המאורע שבכל תא יש לפחות כדור אחד. קומבינטורית, זה שקול למציאת פיתרון למשוואה

$$x_1 + ...x_8 = 12, \ x_i \geq 1$$

במילים אחרות, נשאר לנו לחלק 4 כדורים ל־8 התאים השונים ולכן שוב לפי בעיית המנייה הרביעית

$$|E| = \binom{4+8-1}{8-1} = \binom{11}{7} = \frac{11!}{4!7!} = 3 \cdot 10 \cdot 11 = 330$$

שוב ההסתברות היא אחידה ולכן

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{330}{50388} = \frac{55}{8398}$$

□

סעיף ד'

מחלקים באקראי 12 כדורים זהים בין 8 תאים ממוספרים בזה אחר זה, כאשר לכל כדור נבחר תא באופן אקראי ואחיד. נחשב את ההסתברות שאין תא ריק.

פתרון: בניגוד לסעיף הקודם, כאן אנחנו מחלקים בסדר סדרתי. כל אחד מ־12 הכדורים יכול להיות בכל אחת מה־8 תאים בצורה אחידה ולכן לפי בעיית המנייה הראשונה מתקיים $|\Omega| = 8^{12}$.

אנחנו מחפשים את המאורע בו אין אף תא ריק, כלומר יש פונקציה על בין ה־12 כדורים לבין 8 התאים.

נרצה להשתמש בעיקרון ההכלה וההדחה ונגדיר E_i המאורע בו התא ה־i הוא ריק עבור $i \in [8]$.

אנחנו רוצים למצוא את $|E||\Omega| - |E_1 \cup ... \cup E_8|$ ולכן נשתמש במשלים ונחפש עם הכלה והדחה את $|E^c|$ שמתקיים

$$|E^c| = |E_1 \cup ... \cup E_8| = \sum_{k=1}^{8} \sum_{I \subseteq [8], |I|=k} (-1)^{k+1} \left| \bigcap_{i \in I} E_i \right|$$

מספר הדרכים לבחור k תאים ריקים הוא $\binom{8}{k}$ ואם k תאים ריקים, אז ה־12 כדורים צריכים להתפזר בין ה־$8-k$ התאים הנותרים ולכן יש $(8-k)^{12}$ אפשרויות לחלוקה שלהם ולכן

$$|E^c| = \sum_{k=1}^{8} (-1)^{k-1} \binom{8}{k} (8-k)^{12}$$

מהגדרת המשלים מתקיים

$$|E| = |\Omega| - |E^c|$$

ובגלל שההסתברות אחידה מתקיים

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{8^{12} - \sum_{k=1}^{8} (-1)^{k-1} \binom{8}{k} (8-k)^{12}}{8^{12}}$$

$\square$

שאלה 4

סעיף א'

נפריך את הטענה שקיים מרחב הסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ עם $\Omega = \mathbb{N}$ כך שלכל $A, B \subset \Omega$ סופיות ומאותו גודל יתקיים $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)$.

הוכחה: נניח בשלילה שיש מרחב הסתברות כזה, ותהיינה $A, B \subset \Omega$ כך ש־$|A| = |B| < \infty$.

מההנחה, מתקיים $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)$ בפרט, זה אומר שגם עבור $n \neq m \in \mathbb{N}$ מכך שמתקיים $|\{m\}| = |\{n\}|$ מתקיים $\mathbb{P}(\{m\}) = \mathbb{P}(\{n\})$.

כלומר, לכל $n \in \mathbb{N}$ יש בדיוק את אותה הסתברות, נסמן $p = \mathbb{P}(\{n\})$.

היות $\Omega = \mathbb{N}$ אז $\mathbb{N}$ הוא איחוד בן־מנייה זר של יחידונים $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{n\}$ ומתכונת הסכימות בת־מנייה מתקיים

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\{n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} p$$

אם $p > 0$ אז הטור מתבדר, אם $p = 0$ נקבל סתירה ומהגדרת פונקציית ההסתברות לא ייתכן כי $p < 0$, כלומר הטור בין כה וכה מתבדר ולא ייתכן שיהיה מרחב הסתברות כזה. $\square$

סעיף ב'

יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות בדיד כך ש־$|\Omega| > 2$ כך שלכל $A, B \subset \Omega$ המקיימות $|A| = |B| = 2$ מתקיים $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)$.

נוכיח ש־$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ הוא מרחב הסתברות אחיד.

הוכחה: נסמן ב־$p_i = \mathbb{P}(\{\omega_i\})$, ההסתברות של היחידות $\omega_i \in \Omega$.

יהיו $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4 \in \Omega$ ונגדיר את הקבוצות

$$A = \{\omega_1, \omega_2\},\ B = \{\omega_3, \omega_4\},\ C = \{\omega_1, \omega_3\},\ D = \{\omega_2, \omega_4\}$$

מההנחה מתקיים

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) \Longrightarrow p_1 + p_2 = p_3 + p_4,$$
$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(D) \Longrightarrow p_1 + p_3 = p_2 + p_4$$

מחיסור המשוואות נקבל

$$p_1 + p_2 - p_1 - p_3 = p_3 + p_4 - p_2 - p_4 \Longleftrightarrow p_2 - p_3 = p_3 - p_2 \Longleftrightarrow 2p_2 = 2p_3 \Longleftrightarrow p_2 = p_3$$

נבחין שאם קיימים $i \neq j \in [4]$ כך ש־$\omega_i = \omega_j$ (ויש לכל היותר זוג אחד כזה מפאת ההנחה $|\Omega| > 2$) זה לא משנה את התוצאה כלל.

כלומר, מצאנו שלכל 4 איברים שרירותיים ב־Ω יש את אותה הסתברות, וזה נכון לבחירה של כל 4 איברים שרירותיים, כלומר לכל איבר ב־Ω יש את אותה ההסתברות והמרחב הוא מרחב הסתברות אחיד. $\square$

שאלה 5

בכל סעיף נבנה מרחב הסתברות $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ עם שלושה מאורעות A,B,C שונים כך שתנאי הסעיף יתקיימו.

סעיף א'

$\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(B)=\mathbb{P}(C)=\frac{3}{4}$ וגם $\mathbb{P}(A\cap B\cap C)=\frac{1}{4}$.

פתרון: נגדיר $\Omega=\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1),(1,1,1)\}$ עם פונקציות הסתברות נקודתית אחידה, כלומר לכל $\omega\in\Omega$, $\mathbb{P}(\{\omega\})=\frac{1}{4}$ ואכן $\mathbb{P}(\Omega)=1$.

נגדיר

$$A=\{(1,1,0),(1,0,1),(1,1,1)\},\ B=\{(1,1,0),(0,1,1),(1,1,1)\},\ C=\{(1,0,0),(1,0,1),(1,1,1)\}$$

אז מתקיים

$$\mathbb{P}(A)=1-\mathbb{P}(A^c)=1-\mathbb{P}(\{0,1,1\})=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

$$\mathbb{P}(B)=1-\mathbb{P}(B^c)=1-\mathbb{P}(\{1,0,1\})=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

$$\mathbb{P}(C)=1-\mathbb{P}(C^c)=1-\mathbb{P}(\{1,1,0\})=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

ומתקיים גם

$$\mathbb{P}(A\cap B\cap C)=\mathbb{P}(\{1,1,1\})=\frac{1}{4}$$

וכל תנאי הסעיף מתקיימים. $\square$

סעיף ב'

$\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(B)=\mathbb{P}(C)=\frac{3}{4}$ וגם $\mathbb{P}(A\cap B\cap C)=\frac{3}{4}$.

פתרון: נגדיר $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5\}$ עם $\mathcal{F}=\mathcal{P}(\Omega)$ כך שיתקיים $\mathbb{P}(\{\omega_1\})=\frac{3}{4},\mathbb{P}(\{\omega_2\})=\frac{1}{4},\forall i\in\{3,4,5\},\mathbb{P}(\{\omega_i\})=0$.
אכן מתקיים $\mathbb{P}(\Omega)=1$ ונגדיר את הקבוצות $A=\{\omega_1,\omega_3\},\ B=\{\omega_1,\omega_4\},\ C=\{\omega_1,\omega_5\}$.
אכן מתקיים $\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(\{\omega_1\})+\mathbb{P}(\{\omega_3\})=\frac{3}{4}$ ובאותו אופן $\mathbb{P}(B)=\mathbb{P}(C)=\frac{3}{4}$.
נסתכל על $A\cap B\cap C=\{\omega_1\}$ ולכן $\mathbb{P}(A\cap B\cap C)=\mathbb{P}(\{\omega_1\})=\frac{3}{4}$ וכל תנאי הסעיף מתקיימים. $\square$

סעיף ג'

$\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(B)=\mathbb{P}(C)=\frac{3}{4}$ וגם $\mathbb{P}(A\cap B\cap C)=\frac{1}{2}$.

פתרון: ניקח מהסעיף הקודם $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5\}$ עם $\mathcal{F}=\mathcal{P}(\Omega)$ רק שהפעם נגדיר

$$\mathbb{P}(\{\omega_1\})=\frac{1}{2},\ \forall i\in\{2,3,4,5\},\mathbb{P}(\{\omega_i\})=\frac{1}{8}$$

אכן מתקיים $\mathbb{P}(\Omega)=1$ ונגדיר כעת

$$A=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\},\ B=\{\omega_1,\omega_2,\omega_4\},\ C=\{\omega_1,\omega_3,\omega_4\}$$

מתקיים מהגדרת פונקציית ההסתברות

$$\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(\{\omega_1\})+\mathbb{P}(\{\omega_2\})+\mathbb{P}(\{\omega_3\})=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{3}{4}$$

ובאותו אופן $\mathbb{P}(B)=\mathbb{P}(C)=\frac{3}{4}$.
עוד מתקיים $A\cap B\cap C=\{\omega_1\}$ כלומר $\mathbb{P}(A\cap B\cap C)=\mathbb{P}(\{\omega_1\})=\frac{1}{2}$ וכל תנאי הסעיף מתקיימים. $\square$

שאלה 6

תהיי Ω קבוצה בת־מנייה ולא סופית. במקום לקחת את $\mathcal{F}$ להיות אוסף כל התת־קבוצות של Ω, נגדיר את $\mathcal{F}$ להיות אוסף תת־הקבוצות של Ω שהן או סופיות או שהקבוצה המשלימה שלהן סופית.

נגדיר $P:\mathcal{F}\to[0,1]$ על־ידי

$$P(A)=\begin{cases}0 & |A|<\infty\\ 1 & |\Omega\setminus A|=|A^c|<\infty\end{cases}$$

סעיף א'

נראה כי האוסף $\mathcal{F}$ סגור ללקיחת משלים ולאיחודים סופיים.

הוכחה: יהי $A\in\mathcal{F}$.

מהגדרת $\mathcal{F}$ יש שני מקרים אפשריים או ש־$|A|<\infty$ ולכן $|A^c|<\infty$ או שמתקיים $|A^c|<\infty$ ולכן $|A|<\infty$ וקיבלנו סגירות למשלים.

תהיינה $A,B\in\mathcal{F}$ ונחלק למקרים:

1. אם $|A|,|B|<\infty$ אזי בהכרח $|A\cup B|<\infty$ ולכן $A\cup B\in\mathcal{F}$
2. אם $|A|,|B|=\infty$ אזי $A\cup B=(A^c\cap B^c)^c$ אבל מהגדרת $\mathcal{F}$ נובע ש־$|A^c|,|B^c|<\infty$ ולכן בהכרח $|A^c\cap B^c|<\infty$ אז שוב קיבלנו $A\cup B\in\mathcal{F}$
3. אם $|A|,|B^c|<\infty$ (בלי הגבלת הכלליות) אזי $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$ אבל B^c סופית ולכן גם $|A^c\cap B^c|<\infty$ ושוב $A\cup B\in\mathcal{F}$

כיסינו את כל המקרים האפשריים לאיחוד זוגות ולכן $\mathcal{F}$ סגורה לאיחודי זוגות.

כדי להוכיח סגירות למשלים סופי, נוכל להשתמש בטענה הזאת ולהוכיח באינדוקציה: נניח $(A_i)_{i=1}^{\ell}\subseteq\mathcal{F}$, בסיס האינדוקציה נובע ממה שראינו לעיל מהנחת האינדוקציה והבסיס הטענה נובעת.

ראינו ש־$\mathcal{F}$ סגורה להשלמה ולאיחוד סופי וזה מסיים. $\square$

סעיף ב'

נראה כי P מקיימת $P(\Omega)=1,P(\emptyset)=0$ וסכימות סופית (כלומר אם $A_1,...,A_k\in\mathcal{F}$ זרים בזוגות אזי $P\left(\bigcup_{i=1}^{k}A_i\right)=\sum_{i=1}^{k}P(A_i)$).

הוכחה: ראשית, $|\emptyset|<\infty$ ולכן מהגדרה P מתקיים $P(\emptyset)=0$.

שנית, $\Omega^c=\Omega\setminus\Omega=\emptyset$ ולכן שוב מהנתון $P(\Omega)=1$.

נשאר להראות אדיטיביות סופית. תהיינה $(A_i)_{i=1}^{\ell}$ מאורעות זרים בזוגות וסופית.

נטען שלכל היותר יש $i\in[\ell]$ יחיד כך ש־$|A_i|=\infty$: נניח שלא ככה, ולכן יש A_i,A_j כך שמתקיים $|A_i|,|A_j|=\infty$ עבור $i,j\in[\ell]$ וכמובן זרים.

מההנחה נובע ש־$|A_i^c|,|B_j^c|<\infty$ ולכן יש $a\notin A_i^c\cap A_j^c$ ולכן $a\in A_i,A_j$ אבל זו סתירה לזורתם.

כעת, נניח כי לכל $2\leq i\leq\ell$, $|A_i|<\infty$ ו־A_1 ונחלק למקרים:

1. אם $|A_1|<\infty$ אז $\bigcup_{i=1}^{\ell}A_i$ הוא איחוד סופי של עוצמות סופיות ולכן סופי גם־כן ומתקיים $P\left(\bigcup_{i=1}^{\ell}A_i\right)=0=\sum_{i=1}^{\ell}P(A_i)$.
2. אם $|A_1|=\infty$ אזי האיחוד שלהן של הזנב הוא סופי ומתקיים $1=P\left(\bigcup_{i=1}^{\ell}A_i\right)=P(A_1)+\sum_{i=2}^{\ell}A_i=\sum_{i=1}^{\ell}A_i$

$\square$

סעיף ג'

נראה כי יש $A\in\mathcal{F}$ המקיימת $P(A)=1$ שהיא איחוד של $A_1,A_2,...\in\mathcal{F}$ זרות בזוגות אם $P(A_n)=0$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

נסיק כי P אינה מקיימת סכימות בת־מנייה ונבחן האם התשובה לסעיף זה הייתה משתנה אילו Ω הייתה הקטע $[0,1]$ (ולכן לא בת־מנייה).

פתרון: מהנתון, Ω היא בת־מנייה, כלומר $|\mathbb{N}|=|\Omega|$ ולכן קיימת $f:\mathbb{N}\to\Omega$ שמעידה על־כך, כלומר f חד־חד ערכית ועל.

נגדיר $(A_n)_{n=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{F}$ על־ידי $A_n=\{f(n)\}$ ומתקיים $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n=f(\mathbb{N})=\Omega$ אזי $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=P(\Omega)=1$ אבל מצד שני לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $P(A_n)=0$ כי A_n הוא יחידון, כלומר סופית. זוהי סתירה ישירה לסיגמא־אדיטיביות כי כל יחידון $P(A_n)=0$ אבל איחודם איננו אפס.

נבחן מחדש את התשובה לסעיף לו $\Omega=[0,1]$:

יהי $A\in\mathcal{F}$ כך ש־$P(A)=1$ כלומר $|\Omega\setminus A|<\infty$ ומשיקולי עוצמה נובע כי $|A|=2^{\aleph_0}$.

אם $A_n\in\mathcal{F}$ ו־$P(A_n)=0$ נובע כי $|A_n|<\infty$.

כעת, איחוד בן־מנייה של קבוצות סופיות הוא לכל היותר איחוד בן־מנייה ולכן $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ הוא איחוד בן־מנייה.

כעת, אם נניח שמתקיים $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=A\in\mathcal{F}$ כך שמתקיים $P(A)=1$, היה נובע שבהכרח האיחוד הוא לא בן־מנייה, אבל אמרנו שהאיחוד הוא בן־מנייה ולכן זו סתירה.

כלומר, הדרישה של Ω להיות בת־מנייה היא הכרחית לקיום תנאי הסעיף. $\square$