פתרון מטלה 01 — תורת הקבוצות, 80200

26 במרץ 2025

שאלה 1

תהיינה X ו־Y קבוצות.

נאמר ש־X קטנה או שווה בעוצמתה ל־Y אם יש פונקציה חד־חד ערכית $f : X \to Y$ ונסמן זאת $|X| \leq |Y|$.

נאמר ש־X שווה בעוצמתה ל־Y אם יש פונקציה חד־חד ערכית ועל $f : X \to Y$ ונסמן זאת $|X| = |Y|$

סעיף א'

נוכיח שהיחס $\leq$ המתואר לעיל הוא רפלקסיבי וטרנזטיבי.

הוכחה: עבור הרפלקסיביות, נבחן את הקבוצה X ונראה שמתקיים $|X| \leq |X|$

נתבונן בפונקציה $f : X \to X$ הנתונה על־ידי $\forall x \in X, f(x) = x$, פונקציית הזהות.

פונקציית הזהות כפי שראינו בהרצאה היא פונקציה חד־חד ערכית ועל, לכן מתקיים $|X| = |X|$ ובפרט מתקיים $|X| \leq |X|$ והיחס רפלקסיבי.

עבור טרנזטיביות, תהיינה X, Y ו־Z קבוצות כך שמתקיים $|X| \leq |Y|$ ו־$|Y| \leq |Z|$ ונרצה להראות שמתקיים $|X| \leq |Z|$.

מכך שמתקיים $|X| \leq |Y|$ נובע כי קיימת פונקציה חד־חד ערכית $f : X \to Y$.

מכך שמתקיים $|Y| \leq |Z|$ נובע כי קיימת פונקציה חד־חד ערכית $g : Y \to Z$.

ונסתכל על ההרכבה $h : X \to Z h(x) = g \circ f(x)$.

נראה תחילה שהרכבה של פונקציות חד־חד ערכיות היא פונקציה חד־חד ערכית:

מהיות הפונקציות f ו־g חד־חד ערכיות, מתקיים:

$$f(a) = f(b) \Leftrightarrow a = b \ (a, b \in X)$$
$$g(c) = g(d) \Leftrightarrow c = d \ (c, d \in Y)$$

ולכן נקבל $g(f(a)) = g(f(b)) \Rightarrow f(a) = f(b)$ אבל f חד־חד ערכית ולכן $a = b$.

דהיינו ההרכבה $h : X \to Z$ הנתונה על־ידי $h(x) = g \circ f(x)$ היא פונקציה חד־חד ערכית ומהטענה לעיל נובע כי מתקיים $|X| \leq |Z|$ והיחס טרנזטיבי. $\square$

סעיף ב'

נסמן ב־$\mathcal{P}$ את קבוצת החזקה של X: קבוצת כל תתי־הקבוצות של X.

נוכיח שאם $|X| \leq |Y|$ אז $|\mathcal{P}(X)| \leq |\mathcal{P}(Y)|$.

הוכחה: ראשית, מכך ש־$|X| \leq |Y|$ נובע כי קיימת פונקציה חד־חד ערכית $f : X \to Y$.

נגדיר $g : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$ על־ידי $\forall A \subseteq X : g(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$

נניח שעבור $A, B \subseteq X$ מתקיים $C = g(A), D = g(B)$ ונניח כי $C = D$.

נובע מכך שלכל $x \in C$ קיים ויחיד (מהיות f חד־חד ערכית) $y \in A$ כך ש־$f(y) = x$ ולכן נקבל ש־$y \in B \Longleftrightarrow y \in A$ ולכן נקבל כי $A = B$

וקיבלנו ש־g חד־חד ערכית.

מהטענה לעיל נקבל כי $|\mathcal{P}(X)| \leq |\mathcal{P}(Y)|$. $\square$

שאלה 2

קבוצה X תיקרא סופית אם יש מספר טבעי $n \in \mathbb{N}$ עבורו $|X| = |\{0, ..., n-1\}|$.

סעיף א'

נניח ש־X ו־Y קבוצות סופיות המקיימות $|X| = |Y|$.
נוכיח שהפונקציה $f : X \to Y$ היא חד־חד ערכית אם ורק אם היא על.

הוכחה:

$\Longleftarrow$ נניח שהפונקציה $f : X \to Y$ היא חד־חד ערכית ונראה כי היא על.
מהיות f חד־חד ערכית נובע כי $|\text{Range}(f)| = |X| = n$ ולכן מהיות $|X| = |Y| = n$ נובע כי f על (שכן אחרת היינו מקבלים סתירה לחד־חד ערכיות).

$\Longrightarrow$ נניח שהפונקציה $f : X \to Y$ היא על ונראה כי היא חד־חד ערכית.
מהיות f על נובע כי $\forall y \in Y \; \exists x \in X, f(x) = y$ וכן גם נובע כי $|Y| = |\text{Range}(f)|$
נניח בשלילה כי f לא חד־חד ערכית, ולכן קיימים $x_0 \neq x_1 \in X$ כך שמתקיים $f(x_0) = f(x_1) = y$.
נקבל מכך שמתקיים $|Y| = |\text{Range}(f)| < |X| = n$, וזו סתירה לנתון $|X| = |Y| = n$. $\square$

סעיף ב'

נמצא פונקציות $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ כך ש־f חד־חד ערכית ואינה על וכך ש־g על ואינה חד־חד ערכית.

פתרון: נגדיר $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ על־ידי $f(n) = 2n$
ראשית נראה כי היא לא על: נבחר את $n = 1$ ואכן אין $n \in \mathbb{N}$ כך שמתקיים $2n = 1$ (שכן $n = \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$)
נראה כי היא אכן חד־חד ערכית: יהיו $n, m \in \mathbb{N}$ ונניח כי $f(n) = f(m)$ ונרצה להראות שמתקיים $n = m$. מתקיים:

$$f(n) = f(m) \iff 2n = 2m \iff n = m$$

ולכן f חד־חד ערכית ולא על. נגדיר $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ על־ידי

$$g(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & n \text{ is even} \\ \frac{n+1}{2} & n \text{ is odd} \end{cases}$$

נראה כי g על: יהי $m \in \mathbb{N}$ ונרצה למצוא $n \in \mathbb{N}$ כך שיתקיים $f(n) = m$ ולכן נבחר $n = 2m$ ואז מתקיים $g(n) = g(2m) = \frac{2m}{2} = m$
ולכן g על.

נראה כי g היא לא חד־חד ערכית: נשים לב שמתקיים $g(1) = \frac{1+1}{2} = 1 = \frac{2}{2} = g(2)$ ולכן g לא חד־חד ערכית. $\square$

שאלה 3

סעיף א'

נוכיח שכל $X \subseteq \mathbb{N}$ היא סופית או בת־מנייה. נסיק שבאופן כללי אם Y בת־מנייה ו־$X \subseteq Y$ אז X סופית או בת־מנייה.

הוכחה: תהיי $X \subseteq \mathbb{N}$. אם $X = \emptyset$, סיימנו (שכן $|\emptyset| = 0$).
מכך ש־$X \subseteq \mathbb{N}$ נובע כי מתקיים $|X| \leq |\mathbb{N}|$ שכן אם נסתכל על פונקציית ההטלה $f : X \to \mathbb{N}, f(x) = x$ היא חד־חד ערכית ומתקיים $|X| = |\mathrm{Range}(f)|$ ו־$\mathrm{Range}(f) \subseteq \mathbb{N}$.
נגדיר

$$g : X \to \mathbb{N}, g(x) = |X \cap [x]|$$

כאשר

$$[x] = [0, ..., x-1]$$

נטען כי g מוגדרת היטב והעוצמה המדוברת סופית: זה נובע מכך ש־$[x]$ סופית וחיתוך של קבוצה סופית עם קבוצה מכל עוצמה הוא סופי מהגדרת החיתוך ולכן $g(x) \in \mathbb{N}$.
נראה כי g חד־חד ערכית: יהיו $x \neq y \in X$ ונניח בלי הגבלת הכלליות $x < y$.
מכך ש־$x \in [y] \cap X$ נובע ש־$[x] \cap X \subsetneq [y] \cap X$ ולכן קיבלנו ש־g חד־חד ערכית ובפרט מונוטונית עולה (שכן, אם $x < y$ נקבל מהגדרת החיתוך ומהחד־חד ערכיות שנובע $g(x) < g(y)$).
אם מתקיים $\mathrm{Range}(g) = \mathbb{N}$ אז נקבל כי X בת־מנייה, וסיימנו (שכן מצאנו פונקציה חד־חד ערכית ועל).
אז נניח ש־$\mathrm{Range}(g) \neq \mathbb{N}$ ולכן קיים $N \in \mathbb{N}$ המינמלי ביותר המקיים $N \notin \mathrm{Range}(g)$.
ממינימליות N נובע כי $[N] \subseteq \mathrm{Range}(g)$ ונרצה להראות שמתקיים $\mathrm{Range}(g) = [N]$.
יהיו $x_0, ..., x_{N-1} \in X$ כך ש־$g(x_i) = i$ ואם נראה שמתקיים $X = \{x_0, ..., x_{N-1}\}$ נקבל $\mathrm{Range}(g) = \{g(x_0), ..., g(x_{N-1})\} = [N]$.
נניח שלא, ולכן הקבוצה $A = X \setminus \{x_0, ..., x_{N-1}\}$ לא ריקה וקיימת $b \in A$ שהוא האיבר המינימלי בה (מעיקרון הסדר הטוב של הטבעיים).
לכן נרצה להראות שמתקיים $X \cap [b] = \{x_0, ..., x_{N-1}\}$.
נראה שמתקיים $X \cap [B] \subseteq \{x_0, ..., x_{N-1}\}$: אם לא, נובע שקיים $c \in (X \cap [b]) \setminus \{x_0, ..., x_{N-1}\}$ זאת אומרת $c < b$ וזאת סתירה למינימליות של b.
נראה שמתקיים $X \cap [b] \supseteq \{x_0, ..., x_{N-1}\}$: נניח שלא, ולכן יש $i < N$ כך ש־$b < a_i$. אבל g מונוטונית עולה ולכן $g(b) < g(a_i) = i$ אבל אז $g(b) = j = g(a_j)$ עבור $j < i$ בסתירה להיות g חד־חד ערכית.
הוכחנו הכלה דו־כיוונית ולכן נובע כי $A \cap [b] = \{x_0, ..., x_{N-1}\}$ ולכן מכך שהקבוצות זהות איבר איבר נובע כי יש גם שיוויון עוצמות:

$$|A \cap [b]| = |\{x_0, ..., x_{N-1}\}|$$

זאת אומרת $g(b) = N$ אבל הנחנו $N \notin (\mathrm{Range}(g))$, וזאת סתירה.
נסיק שאם Y בת־מנייה ו־$X \subseteq Y$ אז X סופית או בת־מנייה:
מהיות Y בת־מנייה נובע כי קיימת פונקציה $f : \mathbb{N} \to Y$ חד־חד ערכית ועל, ולכן קיים איזומורפיזם בין Y לבין $\mathbb{N}$ ולכן בלי הגבת הכלליות נוכל להניח כי $Y = \mathbb{N}$ ומההוכחה לעיל נקבל ש־X סופית או בת־מנייה. $\square$

סעיף ב'

נסיק מהסעיף הקודם שאם X קבוצה אינסופית, Y קבוצה בת־מנייה ו־$f : X \to Y$ חד־חד ערכית אז X גם בת־מנייה.

הוכחה: מהיות f חד־חד ערכית נובע כי $\mathrm{Range}(f) \subseteq Y$, אבל Y בת־מנייה ולכן נובע מהסעיף הקודם ש־ $\mathrm{Range}(f)$ בת־מנייה.
נבחן את $g : f^{-1}(X) \to f(X) \subseteq Y$, זוהי פונקציה חד־חד ערכית ועל (בעצם, $g = f` \restriction f^{-1}(X)$) ולכן נובע כי $|X| = |g(X)|$.
מהסעיף הקודם נובע כי $g(X)$ בת־מנייה או סופית: אבל $g(X)$ לא יכולה להיות סופית שכן המקור שלה הוא מקבוצה אינסופית והיא חד־חד ערכית ולכן לא יכולה להיות סופית (שכן יש אינסוף ערכים למפות אליהם על־מנת שהפונקציה תהיה מוגדרת היטב).
לכן נובע כי $g(X)$ בת־מנייה ולכן X בת־מנייה גם כן. $\square$

שאלה 4

ניזכר שבהינתן קבוצות X, Y, המכפלה הקרטזית שלהן מוגדרת באופן הבא:

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

סעיף א'

נגדיר $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ על־ידי $f(n, m) = 2^n 3^m$.
נוכיח שפונקציה זו חד־חד ערכית ונסיק שהקבוצה $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ בת־מנייה.

הוכחה: נשים לב שמתקיים מחוקי חזקות:

$$2^n 3^m = 2^p 3^q \iff 2^{n-p} = 3^{q-m} \iff n - p = q - m = 0 \iff (n = p) \wedge (q - m)$$

כאשר האמם השני נובע מהמשפט היסודי של האריתמטיקה, הקובע כי כל מספר טבעי יכול להיכתב באופן יחיד כמכפלה של מספרים ראשונים עד כדי שינוי סדר המחלקים וקיבלנו כי f חד־חד ערכית.
בתרגול ראינו כי $\mathbb{N}$ בת־מנייה ואינסופית ולכן משאלה 3 סעיף ב' מהיות f חד־חד ערכית נקבל כי $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ היא בת־מנייה. $\square$

סעיף ב'

נגדיר $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ באופן הבא:

$$f(m) = \begin{cases} (m, 0) & m \geq 0 \\ (0, -m) & \text{else} \end{cases}$$

נוכיח ש־f חד־חד ערכית ונסיק ש־$\mathbb{Z}$ בת־מנייה.

הוכחה: נחלק לשני מקרים: $n \in \mathbb{N}$ ו־$m \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ (חלוקה לערכים אי־שליליים ושליליים), שכן מהגדרת הפונקציה שבהכרח מתקיים לכל

$$n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}, f(n) = (n, 0) \neq (0, -m) = f(m)$$

נניח כי קיימים $m, n \in \mathbb{N}$ כך שמתקיים $m = n \iff (m, 0) = (n, 0) \iff f(m) = f(n)$ ואכן קיבלנו חד־חד ערכיות.
נניח כי קיימים $p, q \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ כך שמתקיים $p = q \iff -p = -q \iff (0, -p) = (0, -q) \iff f(p) = f(q)$ ואכן קיבלנו חד־חד ערכיות גם במקרה זה.
נסיק כי $\mathbb{Z}$ היא בת־מנייה: בסעיף הקודם ראינו כי $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ היא בת־מנייה ולכן קיימת $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ שהיא חד־חד ערכית ועל ונסתכל על ההרכבה

$$h : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}, h(z) = g \circ f(z)$$

מכך שהרכבה של פונקציות חד־חד ערכיות היא חד־חד ערכית נובע כי h היא חד־חד ערכית ומשאלה 3 סעיף ב' נובע כי $\mathbb{Z}$ היא בת־מנייה. $\square$

סעיף ג'

נסיק מהסעיף הקודם שהקבוצה $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ בת־מנייה.

הוכחה: מהסעיפים הקודמים ומהגדרה נסיק כי קיימת $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ כך ש־f חד־חד ערכית ועל ונגדיר

$$g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}, \ g(n, m) = (f(n), m)$$

נבחין שמבנייה נובע ישירות כי g היא חד־חד ערכית: נניח שלא ולכן קיימים $(n, m), (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ כך שמתקיים $g(n, m) = g(p, q)$ מתקיים:

$$g(n, m) = g(p, q) \iff (f(n), m) = (f(p), q) \iff (x, m) = (x, q) \iff m = q$$

כאשר המעבר האמצעי נובע מכך ש־f חד־חד ערכית, ולכן g חד־חד ערכית.
משאלה 3 סעיף ב' והסעיף הקודם נקבל כי $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ בת־מנייה. $\square$

סעיף ד'

נגדיר פונקציה $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ באופן הבא:

$$f\left(\frac{m}{n}\right)=\begin{cases}(0,1) & m=0\\ (m,n) & \text{else}\end{cases}$$

כאשר $\frac{m}{n}$ שבר מצומצם.

נוכיח שהפונקציה f חד־חד ערכית ונסיק ש־$\mathbb{Q}$ בת־מנייה.

הוכחה: יהיו $\frac{m}{n},\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}$ שברים מצומצמים ונניח כי מתקיים $f\left(\frac{m}{n}\right)=f\left(\frac{p}{q}\right)$

נקבל שמתקיימים אחד מהבאים:

$$f\left(\frac{m}{n}\right)=(0,1)=f\left(\frac{p}{q}\right)\Longrightarrow m=0\wedge p=0$$

$$f\left(\frac{m}{n}\right)=(m,n)=(p,q)=f\left(\frac{p}{q}\right)\Longrightarrow m=p\wedge n=q$$

ונקבל מכך כי f חד־חד ערכית ושוב משאלה 3 סעיף ב' נקבל כי $\mathbb{Q}$ בת־מנייה. $\square$