פתרון מטלה 04 — תורת ההסתברות 1, 80420

22 בנובמבר 2025

שאלה 1

עבור $i \in \{1,2\}$, תהיי $\Omega_i \subset \mathbb{R}$ ותהיי $\mathbb{P}_i$ פונקציית הסתברות בדידה על Ω_i ותהיי $X_i : \Omega_i \to \mathbb{R}$ פונקציית הזהות, כלומר $X_i(\omega) = \omega$.
נראה כי הבאים שקולים

1. $X_1 \overset{d}{=} X_2$
2. $S \subset \Omega_1 \cap \Omega_2$ קבוצה בת־מנייה או סופית המקיימת $S = \text{supp}(P_1) = \text{supp}(P_2)$ ולכל $x \in S$ מתקיים $\mathbb{P}_1(\{x\}) = \mathbb{P}_2(\{x\})$

הוכחה:

נניח את (1) ונראה $1 \implies 2$:
מהגדרת שיוויון בהתפלגות, מתקיים $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_2$.
נגדיר $S = \text{supp}(\mathbb{P}_1) = \text{supp}(\mathbb{P}_2)$ ומהיות $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2$ פונקציות הסתברות בדידות, ראינו בהרצאה (וטענה 1.12 בספר) שהתומך שלהן הוא בן־מנייה.
מהיות $S \subseteq \Omega_1, \Omega_2$ בפרט נובע $S \subseteq \Omega_1 \cap \Omega_2$ ו־S בת־מנייה ומתקיים מהיות X_i פונקציית הזהות

$$P_1(X_1 = x) = \mathbb{P}(\{y \in S \mid y \in X_1^{-1}(x)\}) = \mathbb{P}(\{y \in S \mid x = y\}) = \mathbb{P}_1(x)$$
$$P_2(X_2 = x) = \mathbb{P}(\{y \in S \mid y \in X_2^{-1}(x)\}) = \mathbb{P}(\{y \in S \mid x = y\}) = \mathbb{P}_2(x)$$

$\Longrightarrow$ נניח את (2) ונראה $2 \implies 1$:
נשים לב שראינו מקודם שלכל $x \in S$ מתקיים $\mathbb{P}_1(X_1 = x) = \mathbb{P}_1(x)$ וגם $\mathbb{P}_2(X_2 = x) = \mathbb{P}_2(x)$ ולכן מספיק שנראה לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $\mathbb{P}_1(x) = \mathbb{P}_2(x)$.
אם $x \in \mathbb{R} \setminus S$ אזי $P_1(x) = 0 = P_2(x)$ מהגדרת התומך ומההנחה לכל $x \in S$ מתקיים $\mathbb{P}_1(x) = \mathbb{P}_2(x)$ ולכן נובע ישירות $X_1 \overset{d}{=} X_2$. $\square$

שאלה 2

סעיף א'

נוכיח שאם $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה חד־חד ערכית, אזי $X\overset{d}{=}Y$ אם ורק אם $f(X)\overset{d}{=}f(Y)$.
הוכחה: הכיוון שאם $X\overset{Y}{=}$ אז $f(X)\overset{d}{=}f(Y)$ הוכח בכיתה לכל $f\in\mathcal{F}_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}$, אז נוכיח רק את הכיוון השני.
יהי $x\in\mathbb{R}$, אם קיים $y\in\mathbb{R}$ כך ש־$x=f(y)$ אז

$$\mathbb{P}(f(X)=f(y))=\mathbb{P}(f(Y)=f(y))\implies\mathbb{P}(X=x)=\mathbb{P}(Y=x)$$

מהחד־חד ערכיות.
אם לא קיים $y\in\mathbb{R}$ כזה, מתקיים $A=\{\omega\in\Omega\mid\omega=X^{-1}(f^1(x))\}=\emptyset$ כלומר $\mathbb{P}(X=x)=\mathbb{P}(\emptyset)=0$. □

סעיף ב'

נפריך את הטענה אם $X\overset{d}{=}Y$ אזי $\mathbb{P}(X=Y)>0$.
הוכחה: ניקח את מרחב ההסתברות של הטלת מטבע הוגן פעם אחת ונגדיר

$$X(\omega)=\begin{cases}1 & \omega=H\\ 0 & \omega=T\end{cases},\ Y(\omega)=\begin{cases}1 & \omega=T\\ 0 & \omega=H\end{cases}$$

בעצם הפונקציות המציינות של עץ ופלי בהתאמה.

$$\mathbb{P}(X=1)=\mathbb{P}(\{H\})=\frac{1}{2},\ \mathbb{P}(X=0)=\mathbb{P}(\{T\})=\frac{1}{2},\ \mathbb{P}(Y=1)=\mathbb{P}(\{T\})=\frac{1}{2},\ \mathbb{P}(Y=0)=\mathbb{P}(\{H\})=\frac{1}{2}$$

כלומר לכל $k\in\{0,1\}$ מתקיים $\mathbb{P}(X=k)=\mathbb{P}(Y=k)$ ולכן $X\overset{d}{=}Y$.
מצד שני, מתקיים

$$\mathbb{P}(X=Y)=\mathbb{P}(\{\omega\in\Omega\mid X(\omega)=Y(\omega)\})=\mathbb{P}(\emptyset)=0$$

□

סעיף ג'

נסתור את הטענה שאם $X\overset{d}{=}Y$ וגם X,Y בלתי־תלויים אזי $\mathbb{P}(X=Y)>0$.
הוכחה: TODOOOOOOOOOOOOOOOOOO □

סעיף ד'

נוכיח שאם X בלתי־תלוי בעצמו אז קיים $c\in\mathbb{R}$ שעבורו $\mathbb{P}(X=C)=1$.
הוכחה: תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}$, מהנתון על אי־תלות מתקיים

$$\mathbb{P}(X\in A,X\in B)=\mathbb{P}(X\in A)\mathbb{P}(X\in B)$$

נבחר $A=B=\{x\}$ יחידון, מתקיים

$$\mathbb{P}(X=x,X=x)=\mathbb{P}(X=x)=\mathbb{P}(X=x)^2$$

כלומר $p_x\in\{0,1\}\iff p_x=p_x^2$ אבל

$$\sum_{x\in\mathbb{R}}\mathbb{P}(X=x)=1$$

ואמרנו $\mathbb{P}(X=x)=0$ או $\mathbb{P}(X=x)=1$ ולכן קיים בידיוק $x\in\mathbb{R}$ יחיד עבורו מתקיים $\mathbb{P}(X=c)=1$ (במילים אחרות, $X\overset{a.s.}{=}c$). □

סעיף ה'

נוכיח שאם $X^2\overset{\text{def}}{=}X$ אז קיים $p\in[0,1]$ שעבורו $X\sim Ber(p)$.
הוכחה: מתקיים

$$\mathbb{P}(X=x)=\mathbb{P}(X^2=x)\iff\mathbb{P}(\{\omega\in\Omega\mid X(\omega)=x\})=\mathbb{P}(\{\omega\in\Omega\mid X^2(\omega=x)\})$$

עבור $x \in \{0,1\}$ מתקיים $X(\omega) = X^2(\omega)$ ואם $x \notin \{0,1\}$ מתקיים

$$\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}\big(X = \sqrt{x}\big) = \mathbb{P}\big(X = \sqrt[4]{x}\big)$$

$\square$

שאלה 3

יהיו X, Y, Z משתנים מקריים המקיימים $X \overset{a.s}{=} Y$.

סעיף א'

נראה כי לכל פונקציה $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ מתקיים $f(X) \overset{a.s.}{=} f(Y)$.

הוכחה: מכך שמתקיים $X \overset{a.s.}{=} Y$ נובע שמתקיים $\mathbb{P}(X = Y) = \mathbb{P}(\{\omega \in X(\omega) = Y(\omega)\}) = 1$, כלומר $\mathbb{P}(X \neq Y) = 0$ מהגדרת המשלים.
נסמן

$$N := \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \neq Y(\omega)\}$$

נרצה להראות ש־$\mathbb{P}(f(X) \neq f(y)) = 0$, אז נגדיר

$$N_f := \{\omega \in \Omega \mid f(X(\omega)) \neq f(Y(\omega))\}$$

אם $\omega \in N$, מתקיים $X(\omega) \neq Y(\omega)$ ויכול להיות $f(X(\omega)) \neq f(Y(\omega))$ ויכול להיות $f(X(\omega)) \neq f(Y(\omega))$.
אם $\omega \notin N$ מתקיים $X(\omega) = Y(\omega)$ כמספרים ממשיים ולכן מהגדרת הפונקציה נובע שמתקיים בהכרח $f(X(\omega)) = f(Y(\omega))$, כלומר אם $\omega \notin N$ אז בהכרח $\omega \notin N_f$.
כלומר בהכרח מתקיים $N_f \subseteq N$ וממונוטוניות פונקציית ההסתברות מתקיים $\mathbb{P}(N_f) \leq \mathbb{P}(N) = 0$. $\square$

סעיף ב'

נוכיח שאם $Y \overset{a.s.}{=} Z$ אז $X \overset{a.s.}{=} Z$.

הוכחה: נרצה להראות שאם $\mathbb{P}(X \neq Y) = 0$ וגם $\mathbb{P}(Y \neq Z) = 0$ אזי $\mathbb{P}(X \neq Z) = 0$, בדומה לסעיף הקודם נגדיר

$$N_{X,Y} := \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \neq Y(\omega)\}$$

$$N_{Y,Z} := \{\omega \in \Omega \mid Y(\omega) \neq Z(\omega)\}$$

נסתכל על $N = N_{X,Y} \cup N_{Y,Z}$ כלומר

$$N = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \neq Y(\omega) \vee Y(\omega) \neq Z(\omega)\}$$

מחסם האיחוד מתקיים

$$0 \underset{\text{הסתברות אי־שלילית}}{\leq} \mathbb{P}(N) = \mathbb{P}(N_{X,Y} \cup N_{Y,Z}) \leq \mathbb{P}(N_{X,Y}) + \mathbb{P}(N_{Y,Z}) = 0 + 0 = 0$$

אז $\mathbb{P}(N) = 0$.
נסתכל על N^c: אם $\omega \in N^c$ אזי $\omega \notin N_{X,Y}, N_{Y,Z}$ ולכן $X(\omega) = Y(\omega)$ וכן $Y(\omega) = Z(\omega)$, אבל כפונקציות מעל הממשיים יש לנו טרנזטיביות כלומר $X(\omega) = Z(\omega)$ וזה גורר שעבור הקבוצה

$$N_{X,Z} := \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \neq Z(\omega)\}$$

מתקיים $N_{X,Z} \subseteq N$ ושוב ממונוטוניות פונקציית ההסתברות מתקיים $\mathbb{P}(N_{X,Z}) \leq \mathbb{P}(N) = 0$ כלומר $\mathbb{P}(X \neq Z) = 0$ ולכן $X \overset{a.s.}{=} Z$. $\square$

שאלה 4

ניתן דוגמה למרחב הסתברות, למשתנים מקריים עליו X, Y ולפונקציה $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ כך שיתקיים

$$f(X) \overset{a.s.}{=} f(Y),\ X \overset{a.s.}{\neq} Y,\ f(X) \neq f(Y)$$

פתרון:

$\square$

שאלה 5

מטילים שלוש קוביות הוגנות ונסמן ב־X_i את המשתנה המקרי שמחזיר את התוצאה בקוביה ה־i.
נגדיר את הוקטור המקרי $X = (X_1, X_2, X_3)$ ונסמן ב־$S \subseteq \mathbb{R}^3$ את הקבוצה $S = \{(a, a+1, a+2) \mid a \in \mathbb{R}\}$ ונחשב את ההסתברות למאורע $X \in S$.

פתרון: נשים לב

$$S = \{(1,2,3),(2,3,4),(3,4,5),(4,5,6)\}$$

ולכן

$$\mathbb{P}_X(S) = \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot 4 \cdot \frac{1}{6^3} = \frac{1}{54}$$

זה פשוט נובע מהסתברות אחידה יחד עם חישוב של הוקטור בהתאם למרחב הסתברות שלנו (כל שאר המאורעות הם עם הסתברות 0). $\square$