פתרון מטלה 09 — תורת המידה, 80517

2 בינואר 2026

שאלה 1

יהיו $(X, \mathcal{A}, \nu)$ מרחב מידה σ־סופי עם הפירוק $X = \dot\bigcup_n X_n$ כאשר $\nu(X_n) < \infty$ ונגדיר

$$\mu(E) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu(E \cap X_n)}{2^n(\nu(X_n)+1)}$$

בהרצאה הראינו כי μ סופית ו־$\nu \ll \mu$.

סעיף א'

נראה כי μ ו־ν שקולות, כלומר נראה שגם $\mu \ll \nu$.

הוכחה: עלינו להראות שלכל $E \in \mathcal{A}$, $\nu(E) = 0 \implies \mu(E) = 0$.

אז תהיי $A \in \mathcal{A}$ כך שמתקיים $\mu(E) = 0$, כלומר

$$\mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu(E \cap X_n)}{2^n(\nu(X_n)+1)} = 0$$

ראשית נבחין שיש לנו סכום של ערכים אי־שליליים ולכן הוא אפס אם ורק אם כל המחוברים היינם אפס, כלומר לכל $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{\nu(E \cap X_n)}{2^n(\nu(X_n)+1)} = 0$$

נשים לב שהמכנה הוא מונוטוני עולה ממש כי $2^n \geq 2$ ובפרט $2^n \geq 2^{n-1}$ לכל $n \in \mathbb{N}$ ונתון כי $\nu(X_n) \geq 0$ אז הדרך היחידה שהשבר שלנו ייתאפס זה אם ורק אם המונה הוא אפס, כלומר לכל $n \in \mathbb{N}$ צריך להתקיים

$$(\star)\ \nu(E \cap X_n) = 0$$

ומתקיים אם כך

$$\nu(E) = \nu(E \cap X) \underset{\sigma\text{-סופיות}}{=} \nu\left(E \cap \left(\dot\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n\right)\right) = \nu\left(\dot\bigcup_{n=1}^{\infty} (E \cap X_n)\right) \underset{\text{אדטיביות המידה}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E \cap X_n) \underset{(\star)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$$

כלומר מתקיים $\nu(E) = 0$ ולכן $\mu \ll \nu$ וקיבלנו שהמידות שקולות. $\square$

סעיף ב'

נחשב את נגזרות רדון־ניקודים $\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\nu}, \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$.

פתרון: נתחיל מלמצוא את נגזרת רדון־ניקודים $\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\nu}$, כאשר $h = \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\nu}$ היא הפונקציה המדידה היחידה (עד־כדי ν־כמעט תמיד) המקיימת

$$\mu(E) = \int_E h \, \mathrm{d}\nu$$

ראשית נשים לב

$$\nu(E \cap X_n) = \int_E \mathbb{1}_{X_n} \, \mathrm{d}\nu$$

ולכן

$$\mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n(\nu(X_n)+1)} \cdot \int_E \mathbb{1}_{X_n} \, \mathrm{d}\nu = \int_E \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{1}_{X_n}}{2^n(\nu(X_n)+1)}}_{:=h} \mathrm{d}\nu$$

מותר לשנות את סדר האינטגרציה והסכום בגלל שהטור מתכנס בהחלט.

אז מצאנו פונקציה $h = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{1}_{X_n}}{2^n(\nu(X_n)+1)}$ המקיימת $\mu(E) = \int_E h \, \mathrm{d}\nu$ ולכן מיחידות נגזרת רדון־ניקודים נקבל

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\nu}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{1}_{X_n}(x)}{2^n(\nu(X_n)+1)}$$

עבור $\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$ נשתמש בגלל השרשרת שכן המידות שקולות והמרחב σ־סופי

$$\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu} = \left(\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\nu}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\nu}}$$

ולכן

$$\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{X_n}(x)(2^n(\nu(X_n)+1))$$

$\square$

שאלה 2

יהי $(X, \mathcal{A}, \mu)$ מרחב מידה ותהיי $T : X \to X$ העתקה משמרת מידה (כלומר $\mu = T_* \mu$).
נניח כי $f \in L^1$ ונגדיר σ־אלגברה $\operatorname{inv}(T) \subseteq \mathcal{A}$ על־ידי

$$\operatorname{inv}(T) := \{E \mid T^{-1}(E) = E\}$$

נזכיר את ההגדרה של התוחלת המותנית: תהיי $f \in L^1$, בהינתן $\mathcal{N} \subset \mathcal{A}$ σ־אלגברה, נגדיר את $\mathbb{E}[f \mid \mathcal{N}]$ להיות הפונקציה היחידה המדידה לפי $\mathcal{N}$ עד־כדי שיוויון כמעט־תמיד המקיימת לכל $G \in \mathcal{N}$

$$\int_G \mathbb{E}[f \mid \mathcal{N}] \, \mathrm{d}\mu = \int_G f \, \mathrm{d}\mu$$

ונעיר בנוסף כי הקיום והיחידות של פונקציה זו ניתן על־ידי חישוב הנגזרת $\frac{\mathrm{d}\mu_f}{\mathrm{d}\mu}$ במרחב המדיד $(X, \mathcal{N})$.

סעיף א'

נראה כי $\mathbb{E}[f \mid \operatorname{inv}(T)]$ היא T־אינווריאנטית.

הוכחה: נגדיר

$$g := \mathbb{E}[f \mid \operatorname{inv}(T)]$$

ונרצה להראות שכמעט־תמיד מתקיים $g \circ T = g$.
g היא $\operatorname{inv}(T)$־מדידה לכל $B \subset \mathbb{R}$ מתקיים

$$\{x \mid g(x) \in B\} \in \operatorname{inv}(T)$$

שכן קבוצות ב־$\operatorname{inv}(T)$ הן T^{-1}־אינווריאנטיות, כלומר

$$\{x \mid g(Tx) \in B\} = T^{-1}\{x \mid g(x) \in B\} \in \operatorname{inv}(T)$$

כלומר $g \circ T$ היא $\operatorname{inv}(T)$־מדידה.
תהיי $G \in \operatorname{inv}(T)$, מהיות T משמרת מידה

$$\int_G g \circ T \, \mathrm{d}\mu = \int_{T^{-1}(G)} g \, \mathrm{d}\mu = \int_G g \, \mathrm{d}\mu = \int_G f \, \mathrm{d}\mu$$

מהגדרת התוחלת המותנית ולכן $g \circ T = g$ כמעט־תמיד.0 $\square$

סעיף ב'

נניח כי T הפיכה וכי T^{-1} מדידה גם היא ונראה שכל N ממידה אפס מוכלת בקבוצה אינווריאנטית ממידה אפס.

הוכחה: עלינו להראות שאם $N \in \mathcal{A}$ מקיימת $\mu(N) = 0$ אז קיימת $I \in \mathcal{A}$ כך שמתקיים

$$N \subset I, \ \mu(I) = 0, \ T^{-1}(I) = I$$

נגדיר

$$T^k = \begin{cases} T \circ \cdots \circ T & k > 0 \\ \operatorname{id} & k = 0 \\ T^{-1} \circ \cdots \circ T^{-1} & k < 0 \end{cases}$$

מהיות T ו־T^{-1} מדידות נובע שלכל $k \in \mathbb{Z}$, $T^k(N)$ היא קבוצה מדידה ומהיות $\mathbb{Z}$ בת־מנייה

$$I = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} T^k(N) \in \mathcal{A}$$

מהיות T משמרת מידה, לכל $k \in \mathbb{Z}$

$$\mu\big(T^k(N)\big) = \mu(N) = 0$$

ומסכימות בת־מנייה

$$\mu(I) \le \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mu\big(T^k(N)\big) = 0 \Longrightarrow \mu(I) = 0$$

ואכן I הוא T-אינווריאנטי, שכן

$$T^{-1}(I) = T^{-1}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} T^k(N)\right) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} T^{-1}\big(T^k(N)\big) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} T^{k-1}(N)$$

אבל $\mathbb{Z} = \{k-1 \mid k\in\mathbb{Z}\}$ ולכן בפרט

$$T^{-1}(I) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} T^k(N) = I$$

וקיבלנו ש־I הוא T-אינווריאנטי ולכן

$$N = T^0(N) \subset I$$

כנדרש. □

סעיף ג'

נניח כי μ שלמה ותהיי $\overline{\mathrm{inv}(T)}$ ההשלמה של $\mathrm{inv}(T)$.
נמצא את הקבוצות שנמצאות בה.

הוכחה: קודם כל ההשלמה מוגדרת על־ידי

$$\overline{\mathrm{inv}(T)} := \{A\in\mathcal{A} \mid \exists I\in\mathrm{inv}(T), \mu(A\Delta I) = 0\}$$

תהיי $A\in\overline{\mathrm{inv}(T)}$ ולכן יש $I\in\mathrm{inv}(T)$ כך ש־$\mu(A\Delta I) = 0$, אבל T היא משמרת מידה ולכן

$$\mu\big(T^{-1}A\Delta T^{-1}I\big) = \mu(A\Delta I) = 0$$

אבל I הוא אינווריאנטי ולכן $T^{-1}I = I$ ולכן

$$\mu\big(A\Delta T^{-1}A\big) \le \mu(A\Delta I) + \mu\big(I\Delta \mathbb{T}^{-1}A\big) = 0$$

ולכן כל $A\in\overline{\mathrm{inv}(T)}$ מקיים $\mu(A\Delta T^{-1}A) = 0$.
אבל אם כך, אם נגדיר כמו בתרגיל 8

$$A_1 = A,\ \ A_{n+1} = T^{-1}(A_n)$$

לכל $n\in\mathbb{N}$ נקבל

$$\mu\big(A_n\Delta A_{n+1}\big) = 0$$

ואם נגדיר

$$I_- := \liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{k\ge1}\bigcap_{n\ge k} A_n, \qquad I_+ := \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{k\ge1}\bigcup_{n\ge k} A_n$$

נקבל

$$T^{-1}(I_-) = I_-,\ \ T^{-1}(I_+) = I_+$$

כלומר I_-, I_+ הם T-אינווריאנטיים ולכן $I_-, I_+\in\mathrm{inv}(T)$.
ומתקיים גם

$$\mu\big(A_n\Delta I_-\big) = \mu\big(A_n\Delta I_+\big) = 0$$

כלומר $A\in\overline{\mathrm{inv}(T)}$, ולכן

$$\overline{\mathrm{inv}(T)} = \big\{A\in\mathcal{A} \mid \mu\big(A\Delta T^{-1}A\big) = 0\big\}$$

□

שאלה 3

יהי $(X, \mathcal{A}, \mu)$ מרחב הסתברות ו־$\mathcal{N} \subset \mathcal{A}$ תת־σ־אלגברה.

סעיף א'

נשתכנע (נוכיח) כי $L^2(\mathcal{N}) \subset L^2(\mathcal{A})$ מוכל כתת־מרחב סגור ביחס לנורמת L^2.

הוכחה: תהיינה $f, g \in L^2(\mathcal{N})$ ו־$a, b \in \mathbb{R}$ (או $\mathbb{C}$, לא משנה), אז $h = af + bg$ היא $\mathcal{N}$־מדידה ו־$\int |h|^2 < \infty$ ולכן $L^2(\mathcal{N}) \subset L^2(\mathcal{A})$.
בגלל ששני המרחבים מוגדרים על אותה הנורמה

$$\|f\|_2 = \left(\int_X |f|^2 \,\mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{2}}$$

אז יש לנו איזומטריה

$$\|f\|_{L^2(\mathcal{N})} = \|f\|_{L^2(\mathcal{A})}$$

בשביל הסגירות, תהיי $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq L^2(\mathcal{N})$ כך שמתקיים $f_n \to f \in L^2(\mathcal{A})$ ונראה ש־$f \in L^2(\mathcal{A})$.
בגלל שהתכנסות ב־L^2 גוררת התכנסות במידה, ולכן ממה שראינו יש לה תת־סדרה מתכנסת כמעט תמיד, כלומר $f_{n_k}(x) \to f(x)$ כמעט־תמיד וכל f_{n_k} היא $\mathcal{N}$־מדידה אבל ראינו שהתכנסות נקודתית כמעט־תמיד של $\mathcal{N}$־מדידות היא $\mathcal{N}$־מדידה ולכן f היא $\mathcal{N}$־מדידה.
אבל גם $f \in L^2(\mathcal{A})$ ולכן $\|f\|_2 < \infty$ ולכן $f \in L^2(\mathcal{N})$ ולכן קיבלנו את הסגירות. $\square$

סעיף ב'

נניח כי $f \in L^2(\mathcal{A})$ ו־$g \in L^2(\mathcal{N})$ חיוביות. נגדיר μ_{fg} ו־μ_f להיות מידות האינטגרציה כנגד f ו־fg.
נוכיח כי $\mu_{fg} \ll \mu_f$ וכן $g = \frac{\mathrm{d}\mu_{fg}}{\mathrm{d}\mu_f}$.
הוכחה: לכל $E \in \mathcal{A}$ נגדיר

$$\mu_f(E) := \int_E f \,\mathrm{d}\mu, \;\; \mu_{Fg}(E) := \int_E fg \,\mathrm{d}\mu$$

מאי־שיוויון קושי־שוורץ נקבל

$$\int |fg| \,\mathrm{d}\mu \le \|f\|_2 \|g\|_2 < \infty$$

אבל מכך ש־$f \in L^2(\mathcal{A})$ נובע כי $\int |f|^2 \,\mathrm{d}\mu < \infty$ ובהתאם גם על g ולכן צד־ימין של אי־השיוויון סופי ולכן $\int |fg| \,\mathrm{d}\mu < \infty$, כלומר $fg \in L^1(\mathcal{A})$ ו־μ_f, μ_{fg} מידות סופיות וחיוביות.
תהיי $E \in \mathcal{A}$ המקיימת

$$\mu_f(E) = \int_E f \,\mathrm{d}\mu = 0$$

ומהיות f חיובית נובע כי $f \equiv 0$ μ־כמעט תמיד על E ולכן

$$\mu_{fg}(E) = \int_E fg \,\mathrm{d}\mu = 0$$

ולכן $\mu_{fg} \ll \mu_f$.
בשביל להוכיח כי $g = \frac{\mathrm{d}\mu_{fg}}{\mathrm{d}\mu_f}$ עלינו להראות שלכל $E \in \mathcal{A}$ מתקיים

$$\int_E g \,\mathrm{d}\mu_f = \mu_{fg}(E)$$

ואכן

$$\int_E g \,\mathrm{d}\mu_f = \int_E gf \,\mathrm{d}\mu = \mu_{fg}(E)$$

$\square$

סעיף ג'

נסביר מדוע f,g הן למעשה ב-L^1 ונראה שמתקיים

$$\mathbb{E}[fg \mid \mathcal{N}] = g\mathbb{E}[f \mid \mathcal{N}]$$

הוכחה: נעשה את הטריק על f ובאופן זהה הוא גם על g: אנחנו יודעים ש-$(X,\mathcal{A},\mu)$ הוא מרחב הסתברות ולכן $\mu(X)=1$ ו-$f\in L^2(\mathcal{A})$ אז מאי-שיוויון קושי-שוורץ

$$\int |f| \,\mathrm{d}\mu \le \left(\int |f|^2 \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int 1^2 \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{2}} = \|f\|_2 < \infty$$

אז $f\in L^1(A)$ ובאופן זהה גם עבור $g\in L^1(\mathcal{N})$.
ראשית מהסעיף הקודם מהנימוק ש-$fg\in L^1(\mathcal{A})$ נובע כי $\mathbb{E}[f \mid \mathcal{N}], \mathbb{E}[fg \mid \mathcal{N}]$ הן בכלל מוגדרות היטב.
נשים לב כי $\mathbb{E}[f \mid \mathcal{N}]$ היא $\mathcal{N}$-מדידה וב-$L^1(\mathcal{N})$ (ראינו).
בשביל להראות את השיוויון המבוקש מספיק להראות מהגדרת התוחלת המותנית שלכל $G\in\mathcal{N}$ מתקיים

$$\int_G \mathbb{E}[f \mid \mathcal{N}] \,\mathrm{d}\mu = \int_G fg \,\mathrm{d}\mu$$

אז תהיי $G\in\mathcal{N}$, מהיות $g\mathbb{1}_G$ פונקציה $\mathcal{N}$-מדידה ואינטגרבילית, מכיוון שמתקיים

$$\int_G \mathbb{E}[f \mid \mathcal{N}] \,\mathrm{d}\mu = \int \mathbb{E}[f \mid \mathcal{N}]\mathbb{1}_G \,\mathrm{d}\mu$$

נקבל

$$\int_G g\mathbb{E}[f \mid \mathcal{N}] \,\mathrm{d}\mu = \int g\mathbb{E}[f \mid \mathcal{N}]\mathbb{1}_G \,\mathrm{d}\mu$$

וכן

$$\int_G fg \,\mathrm{d}\mu = \int fg\mathbb{1}_G \,\mathrm{d}\mu$$

אבל משמאל נקבל

$$\int g\mathbb{E}[f \mid \mathcal{N}]\mathbb{1}_G \,\mathrm{d}\mu = \int \mathbb{E}[f \mid \mathcal{N}](g\mathbb{1}_G) \,\mathrm{d}\mu = \int f(g\mathbb{1}_G) \,\mathrm{d}\mu$$

כאשר המעבר האחרון נובע מהגדרת התוחלת המותנית שכן $g\mathbb{1}_G$ מדידה. אבל

$$\int f(g\mathbb{1}_G) \,\mathrm{d}\mu = \int_G fg \,\mathrm{d}\mu$$

כלומר לכל $G\in\mathcal{N}$ מיחידות התוחלת המותנית קיבלנו

$$\mathbb{E}[fg \mid \mathcal{N}] = g\mathbb{E}[f \mid \mathcal{N}]$$

כנדרש. $\square$

סעיף ד'

בעזרת רדון־ניקודים עבור מידות מרוכבות ניתן להגדיר את התוחלת המותנית עבור פונקציות לאו־דווקא חיוביות והוכחת הסעיף הקודם תהיה נכונה גם בלי להניח ש־f, g חיוביות (ההגדרה החדשה תרחיב לינארית את ההגדרה עבור פונקציות חיוביות).
נסיק כי לכל $f \in L^2(\mathcal{A})$ הפונקציה $\mathbb{E}_f = \mathbb{E}[f \mid \mathcal{N}]$ היא ההטלה האורתוגונלית של f על $L^2(\mathcal{N})$, כלומר לכל $g \in L^2(\mathcal{N})$ מתקיים

$$\langle f - \mathbb{E}_f, g \rangle = 0$$

כאשר $\langle \varphi, \psi \rangle = \int_X \varphi\psi \,\mathrm{d}\mu$.
הוכחה: נגדיר מידה מורכבת על $\mathcal{N}$ על־ידי

$$\nu(E) := \int_E f \,\mathrm{d}\mu$$

מהיות $f \in L^2 \in L^1$ נקבל מכך שהמרחב מרחב הסתברות

$$|\nu(E)| \leq \int_E |f| \,\mathrm{d}\mu \leq \|f\|_1 < \infty$$

מתקיים $\nu \ll \mu \mid_{\mathcal{N}}$ וממשפט רדון־ניקודים קיימת ויחידה $\mathbb{E}_F \in L^1(\mathcal{N})$ וכמובן $\mathcal{N}$־מדידה המקיימת

$$\nu(E) = \int_E \mathbb{E}_f \,\mathrm{d}\mu$$

באופן זהה נגדיר

$$\nu_g(E) := \int_E fg \,\mathrm{d}\mu$$

ומהסעיף הקודם / באופן דומה נקבל

$$\mathbb{E}[fg \mid \mathcal{N}] = g\mathbb{E}(f \mid \mathcal{N})$$

נחשב מכפלה פנימית

$$\langle f - \mathbb{E}_f, g \rangle = \int_X (f - \mathbb{E}_f) g \,\mathrm{d}\mu = \int fg \,\mathrm{d}\mu - \int \mathbb{E}_f g \,\mathrm{d}\mu$$

אבל g היא $\mathcal{N}$־מדידה ואינטגרבילית ולכן

$$\int \mathbb{E}_f g \,\mathrm{d}\mu = \int fd \dim \mu$$

ולכן

$$\langle f - \mathbb{E}_f, g \rangle = 0$$

במרחבי הילברט זה בדיוק אומר ש־$\mathbb{E}_f$ זו ההטלה האורותוגונלית של f על $L^2(\mathcal{N})$.

$\square$

שאלה 4

סעיף א'

נניח כי μ, ν מידון רדון על מרחב טופולוגי קומפקטי מקומי σ־קומפקטי.
הראו כי אם לכל U פתוחה מתקיים $\nu(U)=\mu(U)$ אז $\nu=\mu$.
הוכחה: יש לנו רגולריות פנימית שלכל U פתוחה מתקיים

$$\mu(U)=\sup\{\mu(K)\mid K\subset U,\text{קומפקטית } K\}$$
$$\nu(U)=\sup\{\nu(K)\mid K\subset U,\text{קומפקטית } K\}$$

תהיי $K\subset X$ קומפקטית, אבל X האוסדרוף ולכן קבוצות קומפקטיות הן סגורות, כלומר

$$\mu(K)=\inf\{\mu(U)\mid \text{פתוחה } U,K\subset U\}$$

מהנתון שלכל $\mu(U)=\nu(U)$ נובע כי

$$\mu(K)=\inf\{\mu(U)\mid K\subset U\}=\inf\{\nu(U)\mid K\subset U\}=\nu(K)$$

ולכן μ ו־ν מסכימות על קבוצות קומפקטיות.
מהיות X מרחב σ־קומפקטי נובע שכל קבוצה פתוחה יכולה להיכתב על־ידי איחוד בן־מנייה של קבוצות קומפקטיות ומהרגולריות הפנימית נקבל

$$\mu(U)=\sup\{\mu(K)\mid K\subset U,\text{קומפקטית } K\}$$

אבל לכל K קומפקטי, $\mu(K)=\nu(K)$ ולכן $\mu(U)=\nu(U)$.
אז בפרט לכל A קבוצת בורל

$$\mu(A)=\inf\{\mu(U)\mid A\subset U,\text{פתוחה } U\}=\inf\{\nu(U)\mid A\subset U,\text{פתוחה } U\}=\nu(A)$$

כלומר $\mu=\nu$. $\square$

סעיף ב'

נניח כי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ היא פונקציה דיפרנציאבילית עם נגזרות חלקיות רציפות, חד־חד ערכית ועל ועם $\det(D_xf)\neq 0$.
נסמן ב־λ_f את $f_*\lambda$ כאשר λ מידת לבג.
נראה כי $\lambda\ll f_*\lambda$ ונחשב את נגזרת רדון־ניקודים $\frac{\mathrm{d}f_*\lambda}{\mathrm{d}\lambda}$.
הוכחה: נעזר בהנחייה וננחש את h:

$$h(y):=\left|\det Df^{-1}(y)\right|$$

כי לפי כל הנתונים f היא דיפאומורפיזם ולכן זה מוגדר היטב וקיים והנחה טובה למשפט החלפת משתנה, אז נגדיר

$$\mu_h(A)=\int_A h\,\mathrm{d}\lambda$$

ואם נראה שמתקיים $\mu_h=f_*\lambda$ נקבל כי $\lambda\ll f_*\lambda$.
תהיי $B\subseteq\mathbb{R}^n$ כדור פתוח, אז מדחיפה קדימה של המידה

$$f_*\lambda(B)=\lambda(f^{-1}(B))$$

אבל כמו שאמרנו f היא דיפאומורפיזם ולכן אם נפעיל את משפט החלפת משתנה על ההעתקה

$$f^{-1}:B\to f^{-1}(B)$$

נקבל

$$\lambda(f^{-1}(B))=\int_B\left|\det Df^{-1}(y)\right|\mathrm{d}\lambda=\int_B h\,\mathrm{d}\lambda=\mu_h(B)$$

כלומר $f_*\lambda(B)=\mu_h(B)$ לכל כדור פתוח B.
אבל כל $U\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה יכולה להיכתב בתור איחוד בן־מנייה זר של כדורים פתוחים ולכן מאדטיביות המידה

$$f_*\lambda(U) = f_*\lambda\left(\dot{\bigcup_{k=1}^{\infty}} B_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} f_*\lambda(B_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_h(B_k) = \mu_h(U)$$

אז לכל U פתוחה

$$f_*\lambda(U) = \int_U h \,\mathrm{d}\lambda$$

כלומר $f_*\lambda$ ו־μ_h מסכימות על קבוצות פתוחות ולכן הן מסכימות על קבוצות בורל, כלומר

$$f_*\lambda = h \,\mathrm{d}\lambda$$

כלומר לכל $A \subset \mathbb{R}^n$ מדידה מתקיים

$$f_*\lambda(A) = \int_A h(x) \,\mathrm{d}\lambda$$

אבל אם A ממידה אפס

$$\int_A h \,\mathrm{d}\lambda = 0$$

לכל h שכן אינטגרציה היא ביחס למידה! אז

$$f_*\lambda(A) = 0 \Longrightarrow f_*\lambda \ll \lambda$$

$\square$