פתרון מטלה 01 — תורת ההסתברות 1, 80420

27 באוקטובר 2025

שאלה 1

יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות.

סעיף א'

נוכיח שאם $A \subseteq \Omega$ מקיימת $\mathbb{P}(A) = 0$ אז לכל $B \subseteq \Omega$ מתקיים $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(B)$.

הוכחה: תהיי $D = B \setminus A$ ומתקיים $(A \cap B) \cap D = \emptyset$ ולכן מתכונת הסכימות בת־מנייה של $\mathbb{P}$ מתקיים

$$(\star)\ \mathbb{P}(D \cup (A \cap B)) = \mathbb{P}(D) + \mathbb{P}(A \cap B)$$

מהגדרת החיתוך ומתכונות פונקציית הסתברות נקבל

$$0 \leq P(A \cap B) \leq \mathbb{P}(A) = 0 \Longrightarrow P(A \cap B) = 0$$

ומ־$(\star)$ נקבל $\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(B)$ ובסך־הכל

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A \cup (B \setminus A)) = \mathbb{P}(A \uplus D) \underset{\text{סכימות בת־מנייה}}{=} \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(D) = 0 + \mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(B)$$

$\square$

סעיף ב'

נפריך את הטענה שאם $A \subsetneq B$ אזי $\mathbb{P}(A) < \mathbb{P}(B)$.

הוכחה: נגדיר $\Omega = \{1, 2, 3\}$ כך שמתקיים $p(1) = p(2) = \frac{1}{2}, p(3) = 0$.

נסתכל על הקבוצות $A = \{1\}, B = \{1, 3\}$ ואכן $A \subsetneq B$ אבל $\mathbb{P}(A) = p(1) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$, בסתירה. $\square$

סעיף ג'

נוכיח שלכל $A, B \subseteq \Omega$ מתקיים $\mathbb{P}(A \cap B) \geq \mathbb{P}(A) + +\mathbb{P}(B) - 1$.

הוכחה: מתכונות פונקציית ההסתברות ועיקרון ההכלה וההדחה מתקיים

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \Longleftrightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B) \underset{\forall X \in \mathcal{F}, 1 \geq \mathbb{P}(X)}{\geq} \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1$$

$\square$

סעיף ד'

יהיו $A, B \subseteq \Omega$ ונוכיח שמתקיים

$$\mathbb{P}(A \Delta B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2\mathbb{P}(A \cap B)$$

הוכחה: ניזכר בהגדרה

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \cap (A \cap B)^c$$

מתקיים

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \Delta B) &= \mathbb{P}((A \cup B) \cap (A \cap B)^c) \\
&\underset{(1)}{=} \mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}((A \cap B)^c) - \mathbb{P}((A \cup B) \cup (A \cap B)^c) \\
&\underset{(2)}{=} \mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(\Omega \setminus (A \cap B)) - \mathbb{P}(A \cup B \cup A^c \cup B^c) \\
&= \mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(\Omega \setminus (A \cap B)) - \mathbb{P}(\Omega) \\
&\underset{(3)}{=} \mathbb{P}(A \cup B) \cancel{+ \mathbb{P}(\Omega)} - \mathbb{P}(A \cap B) \cancel{- 1} \\
&\underset{(1)}{=} \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2\mathbb{P}(A \cap B)
\end{aligned}$$

כאשר (1) נובע מהכלה והדחה, (2) נובע מכללי דה־מורגן לקבוצות ו־(3) נובע מתכונת המשלים של פונקציית הסתברות. $\square$

שאלה 2

במסגרת ניסוי דו־שלבי, מוגרל בשלב הראשון מספר טבעי $n \in \mathbb{N}$ על־פי פונקציית ההתפלגות הנקודתית $p(n) = 2 \cdot 3^{-n}$.
בשלב השני מוגרל מספר באקראי באופן אחיד מתוך $[2^n]$.

סעיף א'

נראה כי p מקיימת את ההגדרה של פונקציית הסתברות נקודתית על $\mathbb{N}$.

הוכחה: **TODOOOOOOOOOOOOOOOOOO** $\square$

סעיף ב'

נחשב מה ההסתברות שהגורל בסוף השלב השני המספר 1.

פתרון:

$\square$

שאלה 3

בכל סעיף, נבנה מרחב הסתברות אחיד המתאר נכונה את השאלה ונחשב את ההסתברות של המאורע המתואר.

סעיף א'

נתונים 5 בני־אדם. נחשב מה ההסתברות שלפחות שניים מהם נולדו באותו החודש.

פתרון:

□

סעיף ב'

4 בנים ו־4 בנות עומדים בשורה באופן מקרי. נחשב מה ההסתברות שיעמדו כך ש־4 הבנים יעמדו ב־4 המקומות הימניים ו־4 הבנות יעמדו ב־4 המקומות השמאליים.

פתרון:

□

סעיף ג'

בוחרים באקראי ובאופן אחיד חלוקה של 12 כדורים **זהים** בין 8 תאים ממוספרים בהתפלגות אחידה. נחשב מה ההסתברות שאין תא ריק.

פתרון: □

סעיף ד'

מחלקים באקראי 12 כדורים זהים בין 8 תאים ממוספרים בזה אחר זה, כאשר לכל כדור נבחר תא באופן אקראי ואחיד. נחשב את ההסתברות שאין תא ריק.

פתרון: □

שאלה 4

סעיף א'

הוכחה:

□

סעיף ב'

הוכחה: □

שאלה 5

בכל סעיף נבנה מרחב הסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ עם שלושה מאורעות A, B, C שונים כך שתנאי הסעיף יתקיימו.

סעיף א'

$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{3}{4}$ וגם $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4}$.

פתרון: $\square$

סעיף ב'

$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{3}{4}$ וגם $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \frac{3}{4}$.

פתרון: $\square$

סעיף ג'

$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{3}{4}$ וגם $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \frac{1}{2}$.

פתרון: $\square$

שאלה 6

תהיי Ω קבוצה בת־מנייה ולא סופית. במקום לקחת את $\mathcal{F}$ להיות אוסף כל התת־קבוצות של Ω, נגדיר את $\mathcal{F}$ להיות אוסף תת־הקבוצות של Ω שהן או סופיות או שהקבוצה המשלימה שלהן סופית.

נגדיר $P:\mathcal{F}\to[0,1]$ על־ידי

$$P(A)=\begin{cases}0 & |A|<\infty\\ 1 & |\Omega\setminus A|=|A^c|<\infty\end{cases}$$

סעיף א'

נראה כי האוסף $\mathcal{F}$ סגור ללקיחת משלים ולאיחודים סופיים.

הוכחה: יהי $A\in\mathcal{F}$.

מהגדרת $\mathcal{F}$ יש שני מקרים אפשריים או ש־$|A|<\infty$ ולכן $|A^c|<\infty$ או שמתקיים $|A^c|<\infty$ ולכן $|A|<\infty$ וקיבלנו סגירות למשלים.

תהיינה $A,B\in\mathcal{F}$ ונחלק למקרים:

1. אם $|A|,|B|<\infty$ אזי בהכרח $|A\cup B|<\infty$ ולכן $A\cup B\in\mathcal{F}$
2. אם $|A|,|B|=\infty$ אזי $A\cup B=(A^c\cap B^c)^c$ אבל מהגדרת $\mathcal{F}$ נובע ש־$|A^c|,|B^c|<\infty$ ולכן בהכרח $|A^c\cap B^c|<\infty$ אז שוב קיבלנו $A\cup B\in\mathcal{F}$
3. אם $|A|,|B^c|<\infty$ (בלי הגבלת הכלליות) אזי $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$ אבל B^c סופית ולכן גם $|A^c\cap B^c|<\infty$ ושוב $A\cup B\in\mathcal{F}$

כיסינו את כל המקרים האפשריים לאיחוד זוגות ולכן $\mathcal{F}$ סגורה לאיחודי זוגות.

כדי להוכיח סגירות למשלים סופי, נוכל להשתמש בטענה הזאת ולהוכיח באינדוקציה: נניח $(A_i)_{i=1}^{\ell}\subseteq\mathcal{F}$, בסיס האינדוקציה נובע ממה שראינו לעיל מהנחת האינדוקציה והבסיס הטענה נובעת.

ראינו ש־$\mathcal{F}$ סגורה להשלמה ולאיחוד סופי וזה מסיים. $\square$

סעיף ב'

נראה כי P מקיימת $P(\Omega)=1,P(\emptyset)=0$ וסכימות סופית (כלומר אם $A_1,\dots,A_k\in\mathcal{F}$ זרים בזוגות אזי $P\left(\bigcup_{i=1}^{k}A_i\right)=\sum_{i=1}^{k}P(A_i)$).

הוכחה: ראשית, $|\emptyset|<\infty$ ולכן מהגדרה P מתקיים $P(\emptyset)=0$.

שנית, $\Omega^c=\Omega\setminus\Omega=\emptyset$ ולכן שוב מהנתון $P(\Omega)=1$.

נשאר להראות אדיטיביות סופית. תהיינה $(A_i)_{i=1}^{\ell}$ מאורעות זרים בזוגות וסופית.

נטען שלכל היותר יש $i\in[\ell]$ יחיד כך ש־$|A_i|=\infty$: נניח שלא ככה, ולכן יש A_i,A_j כך שמתקיים $|A_i|,|A_j|=\infty$ עבור $i,j\in[\ell]$ וכמובן זרים.

מההנחה נובע ש־$|A_i^c|,|B_j^c|<\infty$ ולכן יש $a\notin A_i^c\cap A_j^c$ ולכן $a\in A_i,A_j$ אבל זו סתירה לזורתם.

כעת, נניח כי לכל $2\le i\le\ell$, $|A_i|<\infty$ ו־A_1 ונחלק למקרים:

1. אם $|A_1|<\infty$ אז $\bigcup_{i=1}^{\ell}A_i$ הוא איחוד סופי של עוצמות סופיות ולכן סופי גם־כן ומתקיים $P\left(\bigcup_{i=1}^{\ell}A_i\right)=0=\sum_{i=1}^{\ell}P(A_i)$.
2. אם $|A_1|=\infty$ אזי האיחוד שלהן של הזנב הוא סופי ומתקיים $\sum_{i=1}^{\ell}A_i=P(A_1)+\sum_{i=2}^{\ell}A_i=P\left(\bigcup_{i=1}^{\ell}A_i\right)=1$

$\square$

סעיף ג'

נראה כי יש $A\in\mathcal{F}$ המקיימת $P(A)=1$ שהיא איחוד של $A_1,A_2,\ldots\in\mathcal{F}$ זרות בזוגות אם $P(A_n)=0$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

נסיק כי P אינה מקיימת סכימות בת־מנייה ונבחן האם התשובה לסעיף זה הייתה משתנה אילו Ω הייתה הקטע $[0,1]$ (ולכן לא בת־מנייה).

פתרון: מהנתון,Ω היא בת־מנייה, כלומר $|\mathbb{N}|=|\Omega|$ ולכן קיימת $f:\mathbb{N}\to\Omega$ שמעידה על־כך, כלומר f חד־חד ערכית ועל.

נגדיר $(A_n)_{n=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{F}$ על־ידי $A_n=\{f(n)\}$ ומתקיים $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n=f(\mathbb{N})=\Omega$ אזי $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=P(\Omega)=1$ אבל מצד שני לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $P(A_n)=0$ כי A_n הוא יחידון, כלומר סופית.

זוהי סתירה ישירה לסיגמא־אדיטיביות כי כל יחידון $P(A_n)=0$ אבל איחודם איננו אפס.

אם $\Omega=[0,1]$ אזי $|\Omega|=2^{\aleph_0}$ כלומר לא בת־מנייה ו־$f':\mathbb{N}\to\Omega$ $\square$