פתרון מטלה 05 — תורת הקבוצות, 80200

9 במאי 2025

שאלה 1

נוכיח מאקסיומות פאנו את הטענה הבאה

$$\forall x\ \forall y\ (x \cdot y = y \cdot x)$$

הוכחה: נשתמש באקסיומות פאנו מסדר שני הבאות

$$(1)\ \forall x(x \cdot 0 = 0)$$

$$(2)\ \forall x \forall y(x \cdot S(y) = x \cdot y + x)$$

$$(3)\ \forall A \subseteq N((0 \in A \wedge (\forall x(x \in A \to S(x) \in A) \to A = N)))$$

$$(4)\ \forall x(x + 0 = x)$$

$$(5)\ \forall x \forall y\ x + y = y + x\ \text{(הוכחנו בתרגול)}$$

לכל $x \in \mathbb{N}$ נסמן $A_x = \{y \in \mathbb{N} \mid x \cdot y = y \cdot x\}$ ונסמן גם $A = \{x \in \mathbb{N} \mid A_X = \mathbb{N}\}$ ונרצה להראות שמתקיים $A = \mathbb{N}$.
כדי להראות זאת, מאקסיומת האינדוקציה (3) מספיק להראות ש־$0 \in A$ ואז שלכל $x \in A$ גם $S(x) \in A$.
נראה שמתקיים $0 \cdot m = 0$ לכל $m \in \mathbb{N}$:
מאקסיומה (2) נובע ש־$A_0 = \mathbb{N}$. נניח שמתקיים $m \in A_0$, כלומר $0 \cdot m = 0$ אז מאקסיומה (2) מתקיים

$$0 \cdot S(m) = 0 \cdot m + 0 \underset{(\star)}{=} 0 \cdot m \underset{(\star\star)}{=} 0$$

כאשר $(\star)$ נובע מאקסיומה (4) לעיל ו־$(\star\star)$ נובע מהנחת האינדוקציה, ולכן $0 \in A$.
נניח שמתקיים $x \in A$ ונרצה להראות ש־$S(x) \in A$ ואז $A_{S(x)} = \mathbb{N}$.
נראה ש־$0 \in A_{S(x)}$ ושלכל $m \in A_{S(x)}$ מתקיים $S(m) \in A_{S(x)}$: נשים לב ש־$S(x) \cdot 0 = 0 \cdot S(x)$ לפי מה שהראינו עבור A_0, ולכן נניח $m \in A_{S(x)}$ כלומר $S(x) \cdot m = m \cdot S(x)$.
כמו כן, נשים לב שמתקיים

$$S(m) \cdot S(x) = S(m) \cdot x + S(m)$$

וכן עם אקסיומה (3) נקבל

$$S(x) \cdot S(m) \underset{(2)}{=} S(x) \cdot m + S(x) \underset{m \in A_{S(x)}}{=} m \cdot S(x) + S(x) \underset{(2)}{=} m \cdot x + m + S(x) \underset{(5)}{=} m \cdot x + x + S(m)$$

$$\underset{\text{הנחת האינדוקציה}}{=} x \cdot m + x + S(m) \underset{(2)}{=} x \cdot S(m) + S(m) \underset{\text{הנחת האינדוקציה}}{=} S(m) \cdot x + S(m) = S(m) \cdot S(x)$$

כאשר המיספורים הם בהתאם למיספור האקסיומות לעיל וקיבלנו את הנדרש. $\square$

שאלה 2

תהיינה X, Y, Z קבוצות. ניזכר $X \uplus X' = (X \times \{0\}) \cup (X' \times \{1\})$.

סעיף א'

נוכיח שמתקיים $|X \times (Y \uplus Z)| = |(X \times Y) \uplus (X \times Z)|$.

הוכחה: נגדיר $f : X \times (Y \uplus Z) \to (X \times Y) \uplus (X \times Z)$ על־ידי

$$f(x, (l, i)) = ((x, l), i)$$

f מוגדרת היטב: נשים לב שאיברי $X \times (Y \uplus Z) X \times (Y \uplus Z)$ הם משתי צורות אפשריות:

1. $(x, (y, 0))$ עבור $x \in X, y \in Y$ שימופה ביחידות אל $((x, y), 0)$
2. $(x, (z, 1))$ עבור $x \in X, z \in Z$ שימופה ביחידות אל $((x, z), 1)$

ולכן f מוגדרת היטב. נראה כי היא חד־חד ערכית ועל.

על: יהי $b = ((x, l), i) \in (X \times Y) \uplus (X \times Z)$ נשים לב שבבחירה של $a = (x, (l, i)) \in X \times (Y \uplus Z)$ נקבל $f(a) = b$ ולכן f על.

חד־חד ערכיות: יהיו $a = (x_1, (l_1, i_1)), c = (x_2, (l_2, i_2)) \in X \times (Y \uplus Z)$, נשים לב שמתקיים

$$f(a) = f(c) \iff ((x_1, l_1), i_1) = ((x_2, l_2), i_2) \iff x_1 = x_2 \wedge l_1 = l_2 \wedge i_1 = i_2 \iff a = c$$

ולכן f חד־חד ערכית.

מצאנו פונקציה חד־חד ערכית ועל f ולכן לפי הגדרת שיוויון עוצמות מתקיים $|X \times (Y \uplus Z)| = |(X \times Y) \uplus (X \times Z)|$. $\square$

סעיף ב'

נוכיח שמתקיים $\left|(X \times Y)^Z\right| = \left|X^Z \times Y^Z\right|$.

הוכחה: לכל $f \in (X \times Y)^Z$ ולכל $z \in Z$ נסמן $f(z) := \langle x, y \rangle$.

נגדיר גם $g : Z \to X, h : Z \to Y$ על־ידי $g(z) = x,\ h(z) = y$ (לכל $z \in Z$ בהתאם ל־f).

בהתאמה, נגדיר את $\varphi : (X \times Y)^Z \to \left(X^Z \times Y^Z\right)$ על־ידי $\varphi(f) := \langle g, h \rangle$.

נראה כי φ חד־חד ערכית ועל:

על: יהיו $(g, h) \in \left(X^Z \times Y^Z\right)$ ולכן $\psi(z) = \langle g(z), h(z) \rangle$ (ואכן $\psi : Z \to X \times Y$ מקיימת $\varphi(\psi) = \langle g, h \rangle$).

חד־חד ערכית: יהיו $f_1, f_2 \in (X \times Y)^Z$, נשים לב שמתקיים

$$\varphi(f_1) = \varphi(f_2) \iff \langle g_1, h_1 \rangle = \langle g_2, h_2 \rangle \iff \forall z \in Z, g_1(z) = g_2(z) \wedge h_1(z) = h_2(z) \iff f_1 = f_2$$

ולכן φ חד־חד ערכית.

מצאנו פונקציה חד־חד ערכית ועל ולכן לפי הגדרת שיוויון עוצמות מתקיים $\left|X^Z \times Y^Z\right| = \left|(X \times Y)^Z\right|$. $\square$

סעיף ג'

נוכיח שמתקיים $\left|X^{Y \uplus Z}\right| = \left|X^Y \times X^Z\right|$.

הוכחה: תהיי $f : Y \uplus Z \to X$, נגדיר את $\varphi : X^{Y \uplus Z} \to X, \varphi_1 : Y \to X, \varphi_2 Z \to X$ על־ידי

$$\varphi_1(y) = f(\langle y, 0 \rangle)$$
$$\varphi_2(z) = f(\langle z, 1 \rangle)$$
$$\varphi(f) = \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle$$

$\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ מוגדרות היטב מהגדרת $Y \uplus Z$, נראה כי φ חד־חד ערכית ועל:

על: יהי $(g, h) \in X^Y \times X^Z$, ונרצה להראות שקיימת $f \in Y \uplus Z \to X$ כך שמתקיים $\varphi(f) = \langle g, h \rangle$.

נגדיר

$$f(\langle \alpha, i \rangle) = \begin{cases} g(\alpha) & i = 0 \\ h(\alpha) & i = 1 \end{cases}$$

ואז $\varphi(f) = \langle g, h \rangle$ וקיבלנו ש־φ על.

נראה כי φ חד־חד ערכית: יהיו $f_1, f_2 \in X^{Y \uplus Z}$ כך שמתקיים $\varphi(f_1) = \varphi(f_2)$, נשים לב שמתקיים:

$$\varphi(f_1)=\varphi(f_2)\iff\langle{\varphi_1}_{f_1},{\varphi_2}_{f_1}\rangle=\langle{\varphi_1}_{f_2},{\varphi_2}_{f_2}\rangle\iff$$

$$\forall y\in Y,\ f_1(\langle y,0\rangle)=f_2(\langle y,0\rangle)\land\forall z\in Z,\ f_1(\langle z,1\rangle)=f_2(\langle z,1\rangle)\iff f_1=f_2$$

משמע $f_1=f_2$ וקיבלנו כי φ חד־חד ערכית.

מצאנו פונקציה חד־חד ערכית ועל ולכן לפי הגדרת שיוויון עוצמות מתקיים $\left|X^{Y\uplus Z}\right|=\left|X^Y\times X^Z\right|$. $\square$