

פתרון מטלה 03 – פונקציות מרוכבות, 90519

18 בנובמבר 2025



שאלה 1

נראה כי העתקה $\frac{1+z}{1-z} \mapsto z$ מפות את החצי העליון של הדיסק לחצי מישור העליון.
הוכחה: קודם כל נוכיח מפורשות את התכונות הנדרסיות

$$\mathbb{D}^+ = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1 \text{ and } \operatorname{Im}(z) \geq 0\}, \quad H^+ = \{w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(w) > 0\}$$

השפה של \mathbb{D}^+ הם כל $z \in \mathbb{C}$ המקיימים $|z| = 1$ או $\operatorname{Im}(z) = 0$, נctrיך לכתוב את $\partial\mathbb{D}^+$ מפורשות ולען נתנו את התנאים האלו, כמובן נרצה לנוכח פרמטריזציה של $e^{i\theta} = z$ ולמצוא תנאים מגבלים על θ .
התנאי $|z| = 1$ עם $0 < \theta < \pi$ אומר כי $\operatorname{Im}(z) \geq 0$ ואנחנו יודעים שתנאים אלו מתקיים אם $\pi < \theta < 0$.
כמו כן, עם נוסחת אוילר ניתן לראות כי מתקיים $\operatorname{Im}(z) \geq 0$:

$$z = e^{i0} = \cos(0) + i \sin(0) = 1 \implies \operatorname{Im}(z) = 0,$$

$$z = e^{i\pi} = \cos(\pi) + i \sin(\pi) = -1 + 0 = -1 \implies \operatorname{Im}(z) = 0,$$

$$z = e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 + i \implies \operatorname{Im}(z) = 1$$

התנאי $-1 \leq x \leq 1$ עם $\operatorname{Im}(z) = 0$ ובזם פונקציה לנארית ממשית עם $x = z$ עברו z

$$\text{נסמן את התנאי } 0 \leq |z| = 1 \wedge \operatorname{Im}(z) = 0 \text{ כ-}B.$$

נסמן את העתקה $f(z) \mapsto z$ על-ידי (ב- B) ונהבחן שזו הרכבה של העתקת מובוס עם הפונקציה של הгалואה ברייבוע.

נכחו $w_1 = e^{i\theta}$ $z = e^{i\theta}$ ונחשב בהתאם לשני המקרים שהגדרנו מוקדם

$$w_1 = \frac{1+z}{1-z} = \frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = \frac{e^{\frac{i\theta}{2}}(e^{-\frac{i\theta}{2}} + e^{\frac{i\theta}{2}})}{e^{\frac{i\theta}{2}}(e^{-\frac{i\theta}{2}} - e^{\frac{i\theta}{2}})} = \frac{e^{-\frac{i\theta}{2}}(e^{\frac{i\theta}{2}} + e^{-\frac{i\theta}{2}})}{e^{-\frac{i\theta}{2}}(e^{\frac{i\theta}{2}} - e^{-\frac{i\theta}{2}})}$$

נעדי' את הנוסחה השנייה שכן בתרגול שראינו שמתקיים

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sin(z), \quad \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2i} = \cos(z) \implies w_1 = \frac{2 \cos(\frac{z}{2})}{2i \sin(\frac{z}{2})} = \frac{\cos(\frac{z}{2})}{i \sin(\frac{z}{2})}$$

תחת מקרה A, כמובן שהביטוי מוגדר היטב (אין חלקה ב-0) וגם מתקיים $z=0$ הוא מהצורה ib עבור $b \in \mathbb{R}$.

כלומר, $w_1 = f(z) = -b^2$, כלizar כל הציג המודמה מוגפה אל הציג המשי השלייל.

תחת המקרה B, $w_1 = \frac{1+z}{1-z} \in \mathbb{R}^+$ וכאן גם $w_1 = f(z) \in \mathbb{R}^+$ כלומר שוב מופנו להחלק המשי רק שהפעם לחלק החיוובי.

כלומר $\partial\mathbb{D}$ מוגפה על-ידי f אל כל הישר המשי.

נראה לראות מה קורה בנקודות הפנימיות כדי לנתח לאן כל \mathbb{D} נשלה. ניקח $z_0 = \frac{i}{2}$ וכאן

$$f(z_0) = \left(\frac{1+\frac{i}{2}}{1-\frac{i}{2}} \right)^2 = \left(\frac{2+i}{2-i} \right)^2 = \frac{(2+i)^2}{(2-i)^2} = \frac{3+4i}{3-4i}$$

לא עוזר לנו כל-כך, נחשב בדרך אחרת

$$\frac{2+i}{2-i} = \frac{(2+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{3+4i}{5} = \frac{3}{5} + \frac{4i}{5} \implies \left(\frac{2+i}{2-i} \right)^2 = \left(\frac{3+4i}{5} \right)^2 = \frac{-7+24i}{25}$$

או $\operatorname{Im}(z) = \frac{24}{25} \geq 0$, ולכן ראיינו שנקודה פנימית נשלה ל- H^+ ונטען שזה מספיק כדי להראות ש- f מוגפה את החצי העליון של הדיסק לחצי

מישור העליון: f רציפה כהרכבה של פונקציות רציפות. ניקח z_0 נקודה בחצי הדיסק העליון וنبנה מסילה אל z_1 בחצי הדיסק העליון וניתה

($z_0 = f(z_0)$ מוגפה לחצי המישור העליון ונניח בשיליה ש- $f(z_1) = w_1$ נשלה לחצי המישור התיכון אז מרציפות f עם המסילה הרציפה שיצרנו נקבל מסילה בין w_1 לבין w_0 , אבל או המסילה הזאת בהכרח עוברת בשפה כלומר יש z_2 כך ש- $f(z_2)$ היא נקודה על הציג המשי והמקור שלה הוא

נקודה פנימית בחצי הדיסק העליון אבל אמרנו שرك נקודות על השפה של החצי דיסק העליון יכולות לשולח לציר המשי, ו- z היא פנימית אז זאת

כמובן סתירה.

נשאר לעשות את אותו התהליך עבור העתקה $i \mapsto z$, נפרק אותה לשלוש העתקות שונות

$$z \underset{T_1}{\mapsto} z^2 = u \underset{T_2}{\mapsto} \frac{1-u}{1+u} = w \underset{T_3}{\mapsto} iw$$

כלומר שרישור העתקות החזקה, העתקת מובאים ומכפלה ב- i . נ נתח כל העתקה בונפרד:

העתקה u $\in \mathbb{D}^+$ לוקחת $T_1(z) = z^2$ ושולחת אותו אל \mathbb{D} דיסק היחידה המלא שכן אם $|z| < 1$ אז $|z^2| < |z|^2$, כלומר נקודות פנימיות בחזקי הדיסק העליון נשולחות לנקודות פנימיות בדיסק היחידה המלא ואם z בשפה אז $u = e^{i2\theta}$ מזוהה דה-ימואבר ולכן עבור $\pi < \theta < 0$ אנחנו נשלחים

למעגל החזקה ואם $x < -1$ אז אנחנו נשלחם לקטע $[0, 1)$.

כלומר, העתקה T_1 שולחת את החזקי הדיסק העליון אל דיסק החזקה.

נסתכל כעת על $w' = \frac{1-u}{1+u}$ זו בעצם שוב העתקת מובאים.

אם נסתכל על הנקודות של מעגל החזקה ($Re(w) = 0$) ושים לב שמתקיים

$$\overline{\frac{1-u}{1+u}} = \frac{1-\bar{u}}{1+\bar{u}} = \frac{1-\frac{1}{\bar{u}}}{1+\frac{1}{\bar{u}}} = \frac{u-1}{u+1} \Rightarrow \frac{u-1}{u+1} = \frac{-(1-u)}{1+u}$$

או אם נסמן $w' = ib$ קיבלנו שמתקיים $w' = -\bar{w}'$, וזה בהכרח אומר ש- w' הוא מהצורה $w' = ib$ עבור $b \in \mathbb{R}$, כלומר מעגל החזקה נשלה בבדיקה אל הציר המודומה ובגלל $Re(w') = 0$ זה נשלה לריביע הימני של החזקי המישור העליון.

שוב מאותם טיעוני ריציפות אם נסתכל על $0 = u$ ונשים לב ש- $m-1 = w'$ יגבע שנקודות פנימיות נשולחות לחזקי המישור העליון כי $Re(u) > 0$.
כלומר נשלה לריביע הימני בחזקי המישור העליון.

נשארה העתקה האחרונה, $w = iw' = T_3(w')$.

נזכיר שגם כופלים ב- i מספר מרוכב אנחנו מסתווכבים בפועל על הציר 90 מעלות נגד כיוון השעון ולכן זה לוקח ערכיהם מהרביע הימני של החזקי מישור העליון בו $0 < Re(w') < 0$ אל החזקי מישור העליון בו $0 < Im(w) < 0$ ובנקודות קצה בהן $Re(w') = 0$ אנחנו נשלחים בבדיקה לציר הממשי בו $Im(w) = 0$.

זה בבדיקה אומר ש- g גם שולחת את החזקי הדיסק העליון לחזקי המישור העליון.

□

שאלה 2

סעיף א'

חשיבות (זהות אוילר): לכל $z \in \mathbb{C}$ מתקיים

$$e^{iz} = \cos(z) + i \sin(z)$$

ונכיה שלכל $z \in \mathbb{C}$ מתקיים $e^z = e^a(\cos(b) + i \sin(b))$ כאשר $z = a + ib \in \mathbb{C}$

$$e^z = e^{a+ib} \stackrel{\text{טענה}}{=} e^a \cdot e^{ib} \stackrel{\text{זהות אוילר}}{=} e^a \cdot (\cos(b) + i \sin(b))$$

מהיות $0 < a \in \mathbb{R}$ לכל $e^a > 0$ כפונקציה ממשית וחיבורית, מתקיים גם

$$|e^z| = |e^a \cdot e^{ib}| \stackrel{(*)}{=} |e^a| \cdot |e^{ib}| \stackrel{(**)}{=} |e^a| \cdot 1 > 0$$

כאשר $(*)$ זה הרגיל בסיסicos של עדי: לכל $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ מתקיים $|w_1 \cdot w_2| = |w_1| \cdot |w_2|$ וזה נכון בכלל שם נכתוב וא'

$$\begin{aligned} w_1 \cdot w_2 &= (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2) \Rightarrow |w_1 \cdot w_2| = \sqrt{(x_1 x_2 - y_1 y_2)^2 + (x_1 y_2 + y_1 x_2)^2} \\ &= \sqrt{x_1^2 x_2^2 - 2x_1 x_2 y_1 y_2 + y_1^2 y_2^2 + x_1^2 y_2^2 + 2x_1 y_2 y_1 x_2 + y_1^2 x_2^2} = \sqrt{x_1^2 x_2^2 + y_1^2 y_2^2 + x_1^2 y_2^2 + y_1^2 x_2^2} \end{aligned}$$

מצד שני

$$|w_1| \cdot |w_2| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2} = \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)} = \sqrt{x_1^2 x_2^2 + x_1^2 y_2^2 + y_1^2 x_2^2 + y_1^2 y_2^2}$$

זה מסיים ו- \star (נובע מההישוב

$$\begin{aligned} |e^{ib}| &= |\cos(b) + i \sin(b)| = \sqrt{(\cos(b) + i \sin(b)) \cdot \overline{(\cos(b) + i \sin(b))}} = \sqrt{(\cos(b) + i \sin(b))((\cos(b) - i \sin(b)))} \\ &= \sqrt{\cos^2(b) + \sin^2(b)} = \sqrt{1} = 1 \end{aligned}$$

□

סעיף ב'

ונכיה שלכל $z, w \in \mathbb{C}$ מתקיים $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$ הוכחה: יהו $z, w \in \mathbb{C}$. ראיינו

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

ולכן מצד אחד

$$e^z \cdot e^w = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{w^j}{j!} \right) \stackrel{\text{מכפלת קושי לסדרים אונסופיים}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} c_k$$

כאשר

$$c_k = \sum_{l=0}^k \frac{z^l}{l!} \cdot \frac{w^{k-l}}{(k-l)!} = \sum_{l=0}^k \frac{1}{k!} \cdot \frac{k!}{l!(k-l)!} z^l \cdot w^{k-l} \stackrel{\text{הביטויים ניצטן}}{=} \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} z^l \cdot w^{k-l} = \frac{(z+w)^k}{k!}$$

כלומר

$$e^z \cdot e^w = \sum_{k=0}^{\infty} c_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z+w)^k}{k!} \stackrel{\text{הדראה}}{=} e^{z+w}$$

□

סעיף ג'

. $\sin(z) = 0 \iff z \in \{k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
 הוכחה: ראיינו שעבור $z \in \mathbb{C}$ מתקיים

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

אך

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 0 \iff e^{iz} - e^{-iz} = 0 \iff e^{iz} = e^{-iz} \underset{w=e^{iz}}{\iff} w = w^{-1} = \frac{1}{w} \iff w^2 = 1$$

$w = \pm 1$

בהרצאה ראיינו שמתקיים $e^{iz} = -1 \iff iz = i\pi + 2\pi\mathbb{Z}$ וכנ"ל $e^{iz} = 1 \iff iz = 2\pi i\mathbb{Z}$ כזכור $z = \pi + 2\pi\mathbb{Z}$ במקורה השני קיבלנו לכל כפולה אריזוגית של π עם \mathbb{Z} , במילים אחרות

$$\sin(z) = 0 \iff z \in \{2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{(2k+1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

□

סעיף ד'

. $\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$ $z, w \in \mathbb{C}$
 הוכחה: ראיינו

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

ולכן

$$\cos(z+w) = \frac{e^{i(z+w)} + e^{-i(z+w)}}{2} = \frac{e^{iz+iw} + e^{-iz-iw}}{2} \underset{\text{סעיף ב'}}{=} \frac{e^{iz}e^{iw} + e^{-iz}e^{-iw}}{2}$$

מצד שני יש לנו

$$\begin{aligned} \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w) &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} - \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} = \\ &= \frac{e^{iz}e^{iw} + e^{iz}e^{-iw} + e^{-iz}e^{iw} + e^{-iz}e^{-iw}}{4} + \frac{e^{iz}e^{iw} - e^{iz}e^{-iw} - e^{-iz}e^{iw} + e^{-iz}e^{-iw}}{4} \\ &= \frac{e^{iz}e^{iw} + \cancel{e^{iz}e^{-iw}} + \cancel{e^{-iz}e^{iw}} + e^{-iz}e^{-iw} + e^{iz}e^{iw} - \cancel{e^{iz}e^{-iw}} - \cancel{e^{-iz}e^{iw}} + e^{-iz}e^{-iw}}{4} \\ &= \frac{2e^{iz}e^{iw} + 2e^{-iz}e^{-iw}}{4} = \frac{e^{iz}e^{iw} + e^{-iz}e^{-iw}}{2} \end{aligned}$$

□

כאשר האחרון שווה ל- $\cos(z+w)$ לפי מה שמצאנו.

סעיף ה'

. $\sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$ $z, w \in \mathbb{C}$
 הוכחה: ראיינו

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

ולכן

$$\sin(z+w) = \frac{e^{i(z+w)} - e^{-i(z+w)}}{2i} = \frac{e^{iz+iw} - e^{-iz-iw}}{2i} \underset{\text{סעיף ב'}}{=} \frac{e^{iz}e^{iw} - e^{-iz}e^{-iw}}{2i}$$

מצד שני יש לנו

$$\begin{aligned}\sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w) &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} + \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} \\&= \frac{e^{iz}e^{iw} + \cancel{e^{iz}e^{-iw}} - \cancel{e^{-iz}e^{iw}} - e^{-iz}e^{-iw} + e^{iz}e^{iw} - \cancel{e^{iz}e^{-iw}} + \cancel{e^{-iz}e^{iw}} - e^{-iz}e^{-iw}}{4i} \\&= \frac{2e^{iz}e^{iw} - 2e^{-iz}e^{-iw}}{4i} = \frac{e^{iz}e^{iw} - e^{-iz}e^{-iw}}{2i}\end{aligned}$$

כאשר האחרון שווה ל- $\sin(z+w)$ לפי מה שמצוינו.

□

שאלה 3

הוכיחו: ראיינו בהרצאה שהבאים מתקיימים

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cosh(z) = \cos(iz) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh(z) = -i \sin(iz) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

סעיף א'

נניח $z = a + ib$ ונווכיה שמתקאים מתקיימים

הוכחה: ראיינו בהרצאה שהבאים מתקיימים מתקיימים

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cosh(z) = \cos(iz) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh(z) = -i \sin(iz) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

מתקאים

$$\cos(z) = \cos(a + ib) = \cos(a) \cos(ib) - \sin(a) \sin(ib)$$

אבל מהגדרת הפונקציות הiperבוליות מתקיים

$$\cos(ib) = \cosh(b), \quad \sin(ib) = i \sinh(b)$$

ולכן

$$\cos(z) = \cos(a) \cos(ib) - \sin(a) \sin(ib) = \cos(a) \cosh(b) - i \sin(a) \sinh(b)$$

□

סעיף ב'

נניח $z = a + ib$ ונווכיה שמתקאים מתקיימים

הוכחה: באופן דומה לסעיף הקודם

$$\sin(z) = \sin(a + ib) = \sin(a) \cos(ib) + \cos(a) \sin(ib) \stackrel{\substack{\sin(ib) = \sinh(b) \\ \cos(ib) = \cosh(b)}}{=} \sin(a) \cosh(b) + \cos(a) \frac{\sinh(b)}{-i}$$

נשים לב שמתקאים

$$\frac{1}{-i} = \frac{1}{-i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{i}{(-i) \cdot i} = \frac{i}{1} = i$$

ולכן

$$\sin(z) = \sin(a + ib) = \sin(a) \cosh(b) + \cos(a) \frac{\sinh(b)}{-i} = \sin(a) \cosh(b) + i \cos(a) \sinh(b)$$

□

סעיף ג'

לכל $z \in \mathbb{C}$ נוכיה שמתקאים מתקיימים

הוכחה: יהיו $z \in \mathbb{C}$, מתקאים

$$\begin{aligned} \cosh^2(z) - \sinh^2(z) &= \left(\frac{e^z + e^{-z}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^z - e^{-z}}{2}\right)^2 = \frac{e^z e^z + 2e^z e^{-z} + e^{-z} e^{-z} - e^z e^z + 2e^{-z} e^z - e^{-z} e^{-z}}{4} \\ &= e^{-z} e^z = \stackrel{\text{סעיף ב'}}{=} e^{-z+z} = e^0 = 1 \end{aligned}$$

□

סעיף 7'

יהי $z = a + ib$ וכן שמתקיים $|cos(z)|^2 = cos^2(a) + sinh^2(b)$
הוכחה: יהי $z = a + ib \in \mathbb{C}$, בסעיף א' ראיינו שמתקיים

$$cos(z) = cos(a)cosh(b) - i sin(a)sinh(b)$$

נשתמש בזה

$$\begin{aligned} |cos(z)|^2 &= |cos(a)cosh(b) - i sin(a)sinh(b)|^2 = (cos(a)cosh(b) - i sin(a)sinh(b)) \cdot \overline{(cos(a)cosh(b) - i sin(a)sinh(b))} \\ &= (cos(a)cosh(b) - i sin(a)sinh(b)) \cdot (cos(a)cosh(b) + i sin(a)sinh(b)) \\ &= cos^2(a)cosh^2(b) + sin^2(a)sinh^2(b) \end{aligned}$$

בסעיף הקודם ראיינו שמתקיים $cosh^2(z) - sinh^2(z) = 1$ ולכן

$$\begin{aligned} cos^2(a)cosh^2(b) + sin^2(a)sinh^2(b) &= cos^2(a)(1 + sinh^2(b)) + sin^2(a)sinh^2(b) \\ &= cos^2(a) + cos^2(a)sinh^2(b) + sin^2(a)sinh^2(b) = cos^2(a) + sinh^2(b)(cos^2(a) + sin^2(a)) \\ &= cos^2(a) + sinh^2(b) \end{aligned}$$

כאשר $cos^2(a) + sin^2(a) = 1$ זו זהות ידועה אבל נוכיה אותה כמו בסעיף הקודם:

$$\begin{aligned} \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 &= \frac{e^{iz}e^{iz} + 2e^{iz}e^{-iz} + e^{-iz}e^{-iz}}{4} - \frac{e^{iz}e^{iz} - 2e^{iz}e^{-iz} + e^{-iz}e^{-iz}}{4} \\ &= \frac{4e^{iz}e^{-iz}}{4} = e^{iz}e^{-iz} \stackrel{\text{סעיף ב'}}{=} e^{iz-iz} = e^0 = 1 \end{aligned}$$

□

סעיף ה'

יהי $z = a + ib$ וכן שמתקיים $|sin(z)|^2 = sin^2(a) + sinh^2(b)$
הוכחה: יהי $z = a + ib \in \mathbb{C}$, בסעיף ב' ראיינו שמתקיים

$$sin(z) = sin(a)cosh(b) + i cos(a)sinh(b)$$

נשתמש בזה ונפעל כמו בסעיף הקודם

$$\begin{aligned} |sin(z)|^2 &= |sin(a)cosh(b) + i cos(a)sinh(b)|^2 = (sin(a)cosh(b) + i cos(a)sinh(b)) \cdot \overline{(sin(a)cosh(b) + i cos(a)sinh(b))} \\ &= (sin(a)cosh(b) + i cos(a)sinh(b)) \cdot (sin(a)cosh(b) - i cos(a)sinh(b)) = sin^2(a)cosh^2(b) + cos^2(a)sinh^2(b) \\ &= sin^2(a)(1 + sinh^2(b)) + cos^2(a)sinh^2(b) = sin^2(a) + sin^2(a)sinh^2(b) + cos^2(a)sinh^2(b) \\ &= sin^2(a) + sinh^2(b)(sin^2(a) + cos^2(a)) = sin^2(a) + sinh^2(b) \end{aligned}$$

□

שאלה 4

סעיף א'

תהי $G = \mathbb{C} \setminus \{te^{i\frac{3\pi}{4}} \mid t \in [0, \infty)\}$. נבנה ונתרן ענף של הארגומנט עבור γ מתחילה מהוכיחה טענה שמוינעה בסיכון הרצאות של עדי: לכל w מתקיים $Arg(zw) = (Arg(z) + Arg(w))(\text{mod } 2\pi)$ וקיימים $z = r_1 e^{i\theta_1}, zw = r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}, w = r_2 e^{i\theta_2}$.

$$\begin{aligned} Arg(z) &= \theta_1 + 2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ Arg(w) &= \theta_2 + 2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ Arg(zw) &= \theta_1 + \theta_2 + 2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

כלומר

$$Arg(zw) = \theta_1 + \theta_2 = Arg(z) + Arg(w) (\text{mod } 2\pi)$$

כעת נזכיר בהגדירה של הענף שראינו בתרגול: אנחנו מגדירים ענף של ארגומנט להיות כל פונקציה $(z)^\alpha$ שרציפה מעל התחום שלנו ומקיים שלכל z בתחום מתקיים $\alpha(z) \in \{Arg(z) + 2\pi \cdot k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
 אנחנו יודיעים שהารגומנט רציף ב- $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ושה- π רציף ב- $(-\infty, 0]$.
 בתנאים שלנו מתקיים "הרמן" את החלק הלא רציף ב- $-\frac{\pi}{4}$ וזה עצשו היישר שלנו של האירציפות שלנו ולכן אנחנו בפועל רוצים להזין את הקוו*אי-הגדירה* גם בפונקציית הארגומנט שלנו.
 לכן נגידר את הענף

$$\alpha(z) = Arg\left(z \cdot e^{-\frac{\pi i}{4}}\right) + \frac{\pi}{4}$$

עשינו את זהזה מבפנים כדי לתקן את האירציפות וההוספה של $-\frac{\pi}{4}$ נועדה כדי לתקן את הזווית (כדי לקבל את הזווית האמיתית ולא הערך המוז). מהטענה שהוכחנו לעיל, קיבלנו את התנאי השני של הענף ונשאר רק להראות רציפות:
 אבל זה רציף כי הרכבנו פונקציה רציפה (Arg רציף ב- $[0, \infty) \setminus \{0\}$) והזו זו פעולה רציפה ולכן מהגדירה α רציפה ב- $[-\pi, \pi] \setminus \{0\}$.
 תוסף ציר להמחשה. TODOoooooooooooooooooooo

□

סעיף ב'

יהי $0 \in K \subset \mathbb{C}$ חסומה עם $0 \notin \partial K$.
 נבנה ענף של הארגומנט עבור $G = K - \text{diam}(K) = \{z - \text{diam}(K) \mid z \in K\}$ כאשר $G = K - \text{diam}(K)$ נוצרת את הקוטר, ו-0 היה בפנים).
 מתרן: במילים אחרות, יש לנו צורה חסומה שאינה כוללת את 0 (כי הזווית את הקוטר, ו-0 היה בפנים).
 נזכיר שהארגומנט רציף על $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ ונטען שהפעם הארגומנט אינו רציף ב- $(0, \infty)$.
 יהיו $x \in [0, \infty)$ ונראה ש- $G^x \notin G$: נשים לב שהז'וקול להציג

$$x \notin G = K - \text{diam}(K) \iff x + \text{diam}(K) \notin K \iff \forall x \in [\text{diam}(K), \infty), x \notin K$$

ידוע כי $0 \in K$ ולכן בהכרח $0 \notin K$.
 נניח בשילילה ש- $x \in K$ ולכן $x = \text{diam}(K)$ ובירט $x = |x - 0| \leq \text{diam}(K)$. אבל $x = \text{diam}(K) + \varepsilon > 0$ ולכן קיימים $0 < \varepsilon < \text{diam}(K)$ ו- $x - \varepsilon \in K$.
 ידוע כי $x - \varepsilon \in K$ ולכן קיימים $0 < \varepsilon < \text{diam}(K)$ ו- $x - \varepsilon \in K$.
 במקרה הראשון, $x - \varepsilon < \text{diam}(K)$ ו- $x - \varepsilon < \text{diam}(K) - \varepsilon$ וזה סתירה!
 במקרה השני, $x - \varepsilon > \text{diam}(K)$ ו- $x - \varepsilon > \text{diam}(K) + \varepsilon$ וזה סתירה!
 לכן $G \cap (0, \infty) = \emptyset$ ולכן מספיק שנמצא ענף לארגומנט בתחום $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$.
 אם נסתכל על זה על הציר, זה כמו לזרז בזווית של π , כלומר

$$\alpha(z) = Arg(-z) + \pi$$

משיקולים של הסעיף הקודם נקבל שאכן α ענף בתחום ולכן $G \setminus \alpha' = \alpha$ ענף רציף של הארגומנט ב- G .
TODOoooooooooooooooooooo

□

סעיף ג'

יהי $0 \in K \subset \mathbb{C}$ חסומה עם $0 \notin \partial K$ ו- $\pi \notin \partial K$.
 נבנה ענף של הארגומנט עבור $G_\theta = K + e^{i\theta} \cdot \text{diam}(K)$

פתרונות: נראה שהפעם אם $x \notin G$ או $x \in e^{i\theta}[0, \infty)$
 נשים לב שהטענה שקולה לטענה ש- $e^{i\theta}G$ -ב' אבל ככה נקבע $xe^{i\theta} \notin e^{i\theta}G$ וכן ($xe^{i\theta} \in [0, \infty)$ וכן הטענה נובעת ונסיק שוב
 $G \cap e^{i\theta}[0, \infty) = \emptyset$.
 נשים לב שהפעם אנחנו מתחשים

$$e^{\pi i} \mapsto e^{\theta i} = e^{\pi i - (\pi - \theta)i} = e^{\pi i} \cdot e^{-(\pi - \theta)i}$$

כלומר

$$\alpha(z) = \operatorname{Arg}(e^{(\theta-\pi)i}z) + (\pi - \theta)$$

בהתאם לשיקולים בסעיפים הקודמים מצאנו ענף ובשל שיקולי חזזה α רציף ב- $(-\infty, e^{i\theta}[0, \infty) \setminus e^{i\theta}[0, \infty)$ אבל $G \subseteq \mathbb{C} \setminus e^{i\theta}[0, \infty)$ וכן $G \cap e^{i\theta}[0, \infty) = \emptyset$ α רציף וענף.

TODOoooooooooooooooooooo

□

שאלה 5

TODOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOO