פתרון מטלה 04 — חשבון אינפיניטסימלי 3, 80415

28 באפריל 2025

שאלה 1

נסמן ב־I את קטע היחידה $I=[0,1]$.
נגיד שמרחב מטרי (X,d) הוא קשיר מסילתית אם לכל $x_0,x_1\in X$ קיימת מסילה $\gamma:I\to X$ כך ש־$\gamma(0)=x_0,\gamma(1)=x_1$.

סעיף א'

נוכיח כי אם $f:X\to Y$ פונקציה רציפה ועל כך ש־X קשיר מסילתית אז גם Y קשיר מסילתית.

הוכחה: תהיינה $y_1,y_2\in f(X)$ ולכן קיימים x_1,x_2 כך שמתקיים $f(x_1)=y_1,\ f(x_2)=y_2$.
X קשיר מסילתית ולכן קיימת מסילה $\gamma:[0,1]\to X$ כך שמתקיים $\gamma(0)=x_1,\ \gamma(1)=x_2$.
נסתכל על ההרכבה $\varphi=f\circ\gamma:[0,1]\to f(X)$ שרציפה מהרכבת פונקציות רציפות.
בפרט, מתקיים $\varphi(0)=y_1$ ו־$\varphi(1)=y_2$ ולכן $f(X)$ קשירה מסילתית. $\square$

סעיף ב'

נוכיח כי אם $f:X\to Y$ פונקציה רציפה, חד־חד ערכית ועל כך ש־X קומפקטי אזי f היא הומיאומורפיזם.

הוכחה: עלינו להראות ש־f על ו־f^{-1} רציפה.
נצמצם את f להיות $Y\restriction f(X)\to X:f$. היות ו־$X$ קומפקטי ו־f רציפה, ולכן $f(X)\subseteq Y$ קבוצה קומפקטית, ולכן סגורה וחסומה.
בפרט, נובע כי f היא פונקציה חד־חד ערכית ועל.
$f(X)\subseteq Y$ היא קבוצה קומפקטית ולכן סגורה וחסומה ו־X קבוצה סגורה (כי X קומפקטי) ולפי התנאים השקולים לרחציפות נובע כי f^{-1} היא פונקציה רציפה (כאשר $f^{-1}:f(X)\to X$ והמקור של קבוצה סגורה בפונקציה רציפה היא קבוצה סגורה).
מצאנו ש־f חד־חד ערכית, על, רציפה ו־f^{-1} רציפה ולכן f הומיאומורפיזם (כמובן שקיים שיכון $g:f(X)\to Y$ כך ש־$g\circ f=f$ כאשר מסתכלים על $f:X\to Y$). $\square$

סעיף ג'

נוכיח כי אם $\gamma:I\to I^2$ מסילה ממלאת שטח (כלומר על) אז היא אינה חד־חד ערכית.

הוכחה: נעזר ברמז, נראה תחילה כי $I\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$ אינה קשירה מסילתית: נסתכל על $x_1=\frac{1}{4},x_2=\frac{3}{4}\in I$, ונניח כי $I\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$ הוא קשיר מסליתית.
אז קיימת $\gamma:I\to I\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$ מ־$\frac{1}{4}$ ל־$\frac{3}{4}$.
γ רציפה והיא ממקטע למקטע ולכן התמונה שלה היא גם מקטע ולכן קיים $s\in I$ כך שמתקיים $\gamma(s)=\frac{1}{2}$ (גם ממשפט ערך הביניים),
אבל $\frac{1}{2}\notin I\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$ וזו סתירה ולכן $I\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$ אינה קשירה מסילתית.
תהיי $(x,y)\in I^2$ ונראה כי $I^2\setminus\{(x,y)\}$ קשירה מסילתית: יהיו $p,q\in I^2\setminus\{(x,y)\}$ ונראה שקיימת מסילה רציפה $\gamma:[0,1]\to I^2\setminus\{(x,y)\}$ כך שמתקיים

$$\gamma(0)=p,\gamma(1)=q$$

נגדיר קו ישר בין p לבין q

$$\ell(t)=(1-t)p+tq,t\in[0,1]$$

אם $(x,y)\notin\mathrm{Im}(\ell)$ אזי $\ell(t)\in I^2\setminus\{(x,y)\}$ וסיימנו.
לכן נניח כי $(x,y)\in\mathrm{Im}(\ell)$. יהי $\varepsilon>0$ ונגדיר $r=(x,y+\varepsilon)$ כאשר ε קטן דיו כך ש־q־$r\neq p,r\neq q$.
נגדייר את המסילה $\gamma:[0,1]\to I^2\setminus\{(x,y)\}$ על־ידי

$$\gamma(t)=\begin{cases}(1-2t)p+2tr & 0\le t\le\frac{1}{2}\\ \left(1-2\left(t--\frac{1}{2}\right)\right)r+2\left(t-\frac{1}{2}\right)q & \frac{1}{2}\le t\le 1\end{cases}$$

זאת אומרת, עבור $t\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$ אני זזה בצורה לינארית מ־p ל־r ועבור $t\in\left[\frac{1}{2},1\right]$ אני זזה בצורה לינארית מ־r ל־q, וככה אני לא עוברת בנקודה (x,y) ו־$\gamma(t)\in I^2\setminus\{(x,y)\}$ לכל $t\in[0,1]$.
נשאר רק להראות ש־γ רציפה: γ רציפה בכל $0\le t<\frac{1}{2}$ ובכל $\frac{1}{2}<t\le 1$ כהרכבה של פונקציות רציפות ולכן נשאר לראות שהיא רציפה ב־$\frac{1}{2}$.
נשים לב שמתקיים:

$$\lim_{t\to\frac{1}{2}^-}\gamma(t)=r=\lim_{t\to\frac{1}{2}^+}\gamma(t)$$

מצאנו כי בין כל $p, q \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y)\}$ קיימת מסילה, ולכן $I^2 \setminus \{(x,y)\}$ קשירה מסילתית.

כעת, נניח בשלילה כי γ כן חד־חד ערכית. היות ו־γ רציפה, חד־חד ערכית ועל נובע כי I ו־I^2 איזומורפיים אחד לשני ונסמן $\gamma\left(\frac{1}{2}\right) = (x_0, y_0)$.

בפרט, גם $\gamma : I \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\} \to I^2 \setminus \{(x_0, y_0)\}$ היא חד־חד ערכית ועל, שכן הורדנו את המקור ואת התמונה של המקור ובכך שימרנו את האיזומורפיזם (אך לא בהכרח את הרציפות).

אבל $I \setminus \frac{1}{2}$ לא קשירה מסילתית לפי מה שהראינו לעיל ו־$I^2 \setminus \{(x_0, y_0)\}$ כן קשירה מסילתית וזו סתירה: המרחבים לא יכולים להיות הומיאמורפים אם הם לא משמרים תכונות טופולוגיות (כפי שראינו בתרגול 3).

קיבלנו סתירה להנחה כי γ חד־חד ערכית ולכן γ לא חד־חד ערכית, כנדרש.

$\square$

שאלה 2

יהי (X,d) מרחב מטרי חסום לחלוטין.

סעיף א'

נראה כי קיימת תת־קבוצה $A \subseteq X$ צפופה ובת־מנייה.

הוכחה: מהיות X מרחב מטרי חסום לחלוטין זה בפרט אומר כי $A \subseteq X$ (שכן אם אפשר לכסות את המרחב כולו על־ידי ε־רשת סופית, בפרט אפשר תת־קבוצה).

לכן, נובע שלכל $n \in \mathbb{N}$ קיימת D_n קבוצה סופית כך ש־$X \subseteq \bigcup_{x \in D_n} B_{\frac{1}{n}}(x)$ ותהיי $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$.

D בת־מנייה כאיחוד בן־מנייה של קבוצות סופיות ולכן נשאר רק להראת ש־D צפופה: יהיו $\varepsilon > 0$ ו־$B_\varepsilon(y) \in X$ כדור פתוח.

יהי $n \in \mathbb{N}$ כך שמתקיים $\varepsilon < \frac{1}{n}$ ולכן $y \in X \subseteq \bigcup_{x \in D_n} B_{\frac{1}{n}}(x)$.

לכן קיים $x \in D_n \subseteq D$ כך שמתקיים $y \in B_{\frac{1}{n}}(x)$ משמע $d(x,y) < \frac{1}{n} < \varepsilon$ ולכן $x \in B_\varepsilon(y)$ ולכן D צפופה ו־$D \subseteq X$ בת־מנייה וצפופה. □

סעיף ב'

נוכיח כי ההשלמה $\left(\hat{X}, \hat{d}\right)$ היא קומפקטית.

הוכחה: ראשית, אנחנו יודעים שבמרחבים מטריים קומפקטיות וקומפקטיות סדרתית שקולות.

שנית, אנחנו יודעים שמרחב מטרי הוא קומפקטי סדרתית אם ורק אם הוא שלם וחסום לחלוטין.

כעת, אנחנו יודעים שההשלמה $\left(\hat{x}, \hat{d}\right)$ היא מרחב שלם ואם נראה שהוא גם חסום לחלוטין אז מהטענה לעיל נקבל את הקומפקטיות:

יהי $\varepsilon > 0$, X מרחב מטרי חסום לחלוטין ולכן $X \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_i)$ כאשר $x_1, ..., x_n$ זה בעצם $\frac{\varepsilon}{2}$־רשת.

נסתכל על ההעתקה $i : X \to \hat{X}$ האיזומטריה שנובעת מההשלמה.

ידוע כי $i(X)$ צפופה ב־$\hat{X}$ ולכן לכל $y \in \hat{X}$ ו־$\delta > 0$ קיים $x \in X$ כך שמתקיים $d(x,y) < \delta$.

יהי $y \in \hat{X}$ בפרט הטענה לעיל נכונה עבור $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ ולכן קיים $x \in X$ כך שמתקיים $d(x,y) < \delta = \frac{\varepsilon}{2}$.

היות ו־$x \in X$ נובע מכך ש־X מרחב מטרי חסום לחלוטין שקיים x_i מהכיסוי לעיל כך שמתקיים $d(x, x_i) < \frac{\varepsilon}{2}$, מאי־שיוויון המשולש נקבל

$$d(y, x_i) \leq d(y, x) + d(x, x_i) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

משמע עבור $\varepsilon > 0$ מתקיים $\bigcup_{i=1}^{N} B_\varepsilon(x_i) \subseteq \hat{X}$ ולכן $\hat{X}$ מרחב מטרי חסום לחלוטין גם־כן.

$\hat{X}$ חסום לחלוטין ושלם ולכן קומפקטי סדרתית ועל־כן קומפקטי. □

שאלה 3

תהיי $\gamma : I \to X$ מסילה במרחב מטרי (X,d) ונסמן את תמונתה ב־$C = \gamma(I)$.
נוכיח כי לכל פונקציה רציפה $f : C \to \mathbb{R}$ ו־$t \in [f(a), f(b)]$ עבור $a, b \in C$, קיים $c \in C$ כך שמתקיים $f(c) = t$.

הוכחה: תהיי $f : C \to \mathbb{R}$ רציפה ונסתכל על ההרכבה (הרציפה, כי מסילה היא רציפה) $h = f \circ \gamma : I \to \mathbb{R}$.
מהגדרת המסילה γ מתקיים $h(0) = f(\gamma(0)), h(1) = f(\gamma(1))$.
היות ו־$a, b \in C$ נובע כי קיימים i_a, i_b כך שמתקיים $\gamma(i_a) = a, \gamma(i_b) = b$, ולכן

$$h(i_a) = f(\gamma(i_a)) = f(a), h(i_b) = f(\gamma(i_b)) = f(b)$$

היות ו־h רציפה ו־$t \in [h(i_a), h(i_b)]$ ממשפט ערך הביניים לפונקציות רציפות נובע שקיים $s \in [i_a, i_b]$ כך ש־$h(s) = t$, ולכן אם נבחר $c = \gamma(s) \in C$ נקבל $f(c) = t$, כנדרש. $\square$

שאלה 4

תהיי $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ עבור $n, m \geq 1$.

סעיף א'

נוכיח כי $\|A\|_F = \sqrt{\operatorname{tr}(A^t A)}$ כאשר $\|\cdot\|_F$ היא הנורמה האוקלידית תחת הזיהוי $M_{m\times n}(\mathbb{R}) \backsimeq \mathbb{R}^{nm}$.

הוכחה: $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ ולכן $A^t \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ ו־$A^t A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. מהגדרת העקבה מתקיים

$$\operatorname{tr}(A^t A) = \sum_{i=1}^{n} \left(A^t A\right)_{ii} \underset{(1)}{=} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} A_{ki}^2$$

כאשר (1) נובע מהיות $\left(A^t A\right)_{ii} = \sum_{k=1}^{m} A_{ki}^2$ לפי מה שראינו בתרגול

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left|A_{ij}\right|^2}$$

ואכן

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left|A_{ij}\right|^2} = \sqrt{\operatorname{tr}(A^t A)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} A_{ki}^2}$$

$\square$

סעיף ב'

נוכיח כי לכל שתי מטריצות אורתוגונליות $P \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ ו־$Q \in M_{m\times m}(\mathbb{R})$ מתקיים כי

$$\|QAP\|_F = \|A\|_F, \|QAP\|_{\text{op}} = \|A\|_{\text{op}}$$

הוכחה: נתחיל מלהראות את $\|QAP\|_F = \|A\|_F$, נשים לב שמתקיים מסעיף א'

$$\|QAP\|_F = \sqrt{\operatorname{tr}((QAP)^t (QAP))} = \sqrt{\operatorname{tr}((P^t A^t Q^t)(QAP))} = \sqrt{\operatorname{tr}(P^t A^t AP)} \underset{(1)}{=} \sqrt{\operatorname{tr}(P^{-1} A^t AP)} \underset{(2)}{=} \sqrt{\operatorname{tr}(A^t A)} = \|A\|_F$$

כאשר (1) נובע מהיות P מטריצה אורתוגונלית ולכן הפיכה ו־(2) נובע מהיות המטריצה $A^t A$ מטריצה ריבועית ומהזהות

$$\operatorname{tr}\left(P^{-1}(AP)\right) = \operatorname{tr}\left((AP)P^{-1}\right) = \operatorname{tr}(A)$$

כאשר (1) נובע מהיות המטריצה $A^t A$ מטריצה ריבועית ומהיות P מטריצה אורתוגונלית ולכן הפיכה.
נעבור להוכחת $\|QAP\|_{\text{op}} = \|A\|_{\text{op}}$. נשים לב שכמעט מאותם שיקולים בהוכחה לעיל מתקיים

$$\|QAP\|_{\text{op}} = \sqrt{\lambda_{\max}((QAP)^t (QAP))} = \sqrt{\lambda_{\max}((P^t A^t Q^t)(QAP)))} = \sqrt{\lambda_{\max}(P^t A^t AP)} \underset{(1)}{=} \sqrt{\lambda_{\max}(P^{-1} A^t AP)}$$

$$\underset{(2)}{=} \sqrt{\lambda_{\max}(A^t A)} = \|A\|_{\text{op}}$$

כאשר (1) זה כמו במקרה הקודם ו־(2) נובע מהיות המטריצות $M = P^{-1} A^t AP$ והמטריצה $B = A^t A$ מטריצות דומות ולכן בפרט יש להן את אותן ערכים העצמיים.

$\square$

סעיף ג'

נוכיח כי אם $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ מטריצה סימטרית אז $\|A\|_{\text{op}} = \lambda_{\max}(A)$.

הוכחה: A סימטרית ולכן $A^t = A$ ובפרט $A^tA = AA = A^2$.

A סימטרית ולכן נורמלית, לכסינה אורתוגונלית ועוד הרבה תכונות יפות. ממשפט הפירוק הספקטרלי (עבור מטריצות הרמיטיות ממשיות), קיימות מטריצה אורתוגונלית ממשית Q ומטריצה אלכסונית ממשית D כך שמתקיים

$$A = QDQ^t$$

ולכן

$$A^2 = (QDQ^t)(QDQ^t) = QDQ^tQDQ^t \underset{(1)}{=} QD^2Q^t$$

כאשר (1) נובע מהיות Q מטריצה אורתוגונלית ולכן $QQ^t = Q^tQ = I$.

היות ו־D היא המטריצה האלכסונית הממשית המכילה את הערכיים העצמיים (הממשים, כי A סימטרית) של A אז D^2 מכילה את הערכיים העצמיים בריבוע של A.

במילים אחרות, עבור מטריצה סימטרית הערכיים העצמיים של A^2 הם ריבוע הערכיים העצמיים של A.

נסמן ב־$\lambda_{A_{\max}} = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, ..., |\lambda_n|\}$ את הערך העצמי הגדול ביותר (בערך מוחלט) של A, ולכן $\lambda_{A^2_{\max}} = \lambda^2_{A_{\max}}$.

נזכיר $\|A\|_{\text{op}} = \sqrt{\lambda_{\max}(A^tA)}$ ולכן במקרה שלנו מתקיים

$$\|A\|_{\text{op}} = \sqrt{\lambda_{A^2_{\max}}} = \sqrt{\lambda^2_{A_{\max}}} = \lambda_{A_{\max}} = \lambda_{\max}(A)$$

$\square$

סעיף ד'

נוכיח כי לכל $B \in M_{n\times k}(\mathbb{R})$ מתקיים כי

$$\|AB\|_F \leq \|A\|_{\text{op}}\|B\|_F \leq \|A\|_F\|B\|_F$$

הוכחה: נשים לב – $AB \in M_{m\times k}(\mathbb{R})$, ואנחנו מדברים על נורמות ולכן רק מספרים אי־שליליים (ובפרט חיוביים כי ב־0 הטענה טריוויאלית), אז נוכל להעלות בריבוע כדי להיפטר מהשורש וזה לא ישפיע על התוצאה.

נראה תחילה שמתקיים $\|AB\|_F \leq \|A\|_F\|B\|_F$:

$$\begin{aligned}
\|AB\|_F^2 = \sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^k \left|(AB)_{ij}\right|^2 = \sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^k \left|\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}\right| &\underset{(1)}{\leq} \sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^k \left(\sum_{k=1}^n |a_{ik}|^2 \sum_{k=1}^n |b_{kj}|^2\right) \\
&= \sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^k \left(\sum_{k,l=1}^n |a_{ik}|^2 |b_{lj}|^2\right) \\
&= \sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^k |a_{ik}|^2 \sum_{l=1}^n\sum_{j=1}^k |b_{lj}|^2 \\
&= \|A\|_F^2\|B\|_F^2
\end{aligned}$$

כאשר (1) נובע מאי־שיוויון קושי־שוורץ, ולכן $\|AB\|_F \leq \|A\|_F\|B\|_F$.

בתרגול ראינו שמתקיים

$$\|A\|_{\text{op}} \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n}\|A\|_{\text{op}}$$

אז בפרט יתקיים

$$\|A\|_{\text{op}}\|B\|_F \leq \|A\|_F\|B\|_F$$

נשאר רק להראות שמתקיים גם $\|AB\|_F \leq \|A\|_{\text{op}}\|B\|_F$.

ניזכר בהגדרה של כפל מטריצות ונסמן $B = [b_1, b_2, ..., b_k] \in \mathbb{R}^{n\times k}$ וקטורי העמודה של B, ולכן $AB = [Ab_1 Ab_2 ... Ab_k]$.

ולכן

$$\|AB\|_F^2 = \sum_{j=1}^{k} \left\|Ab_j\right\|_2^2$$

זה נובע מסעיף א' ומהסתכלות על וקטורי עמודה וגם זה די מהגדרת נורמת פרובניוס.
במטלה 1 ראינו שמתקיים $\left\|b_j\right\|_2 \|A\|_{\text{op}} \le \left\|Ab_j\right\|_2$ ולכן בפרט מתקיים $\left\|b_j\right\|_2^2 \|A\|_{\text{op}}^2 \le \left\|Ab_j\right\|^2$ ולכן

$$\|AB\|_F^2 = \sum_{j=1}^{k} \left\|Ab_j\right\|_2^2 \le \|A\|_{\text{op}}^2 \sum_{j=1}^{k} \left\|b_j\right\|_2^2 = \|A\|_{\text{op}}^2 \|B\|_F^2$$

ולכן קיבלנו גם שמתקיים $\|AB\|_F \le \|A\|_{\text{op}} \|B\|_F$.
בסך־הכל ראינו שמתקיים $\|AB\|_F \le \|A\|_{\text{op}} \|B\|_F \le \|A\|_F \|B\|_F$. $\square$

שאלה 5

תהיי $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ המטריצה הבאה

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

סעיף א'

נחשב את $\|A\|_F$ ואת $\|A\|_{\text{op}}$

פתרון:

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}|A_{ij}|^2} = \sqrt{|A_{11}|^2 + (A_{12})^2 + (A_{21})^2 + (A_{22})^2} = \sqrt{4+9+0+4} = \sqrt{17}$$

עבור הנורמה האופרטורית, ניזכר כי $\|A\|_{\text{op}} = \sqrt{\lambda_{\max}(A^tA)}$, כאשר $\lambda_{\max} = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\}$, כאשר λ_1, λ_2 הם הערכים העצמיים של A^tA.

$$A^tA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 13 \end{pmatrix}$$

זוהי מטריצה סימטרית ולכן כל ערכייה העצמיים ממשיים, נמצא אותם:

$$\det\begin{bmatrix} 4-\lambda & 6 \\ 6 & 13-\lambda \end{bmatrix} = (4-\lambda)(13-\lambda) - 36 = 52 - 17\lambda + \lambda^2 - 36 = \lambda^2 - 17\lambda + 16 \Rightarrow (\lambda-1)(\lambda-16) = 0$$

ולכן $\lambda = 1, \lambda = 16$ הם ערכים עצמיים של A^tA ולכן $\lambda_{\max} = 16$ ונקבל $\|A\|_{\text{op}} = \sqrt{\lambda_{\max}(A^tA)} = \sqrt{16} = 4$. $\square$

סעיף ב'

נראה כי A לכסינה אך $\lambda_{\max}(A) < \|A\|_{\text{op}}$.

הוכחה: נראה כי A לכסינה, נמצא ערכים עצמיים:

$$\det\begin{bmatrix} \lambda-2 & -3 \\ 0 & \lambda+2 \end{bmatrix} = (\lambda-2)(\lambda+2)$$

מצאנו של־A יש שני ערכים עצמיים שונים ($\lambda = \pm 2$) והיא ממימד 2 ולכן A לכסינה ואכן מתקיים

$$\lambda_{\max}(A) = \max\{2, -2\} = 2 \underset{(1)}{<} 4 = \|A\|_{\text{op}}$$

כאשר (1) נובע מסעיף א'. $\square$