# פתרון שאלות חזרה למבחן — חשבון אינפיניטסימלי 3, 80415

30 ביולי 2025

## שאלה 1

שאלה 4 – מועד א' תשפ"ב של שיא.

יהי התחום $D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=1 \right\}$ ותהיי $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ הפונקציה הנתונה על־ידי $f(x,y,z) = x^2+2y^2+3z^2$.

נקבע האם $f$ משיגה מינימום ומקסימום ב־$D$ ואם כן נחשב את הערך.

*פתרון:*

**הגדרה 0.1** (הלגראנז'יאן): תהיי $B \subseteq \mathbb{R}^k$ פתוחה ו־$f, g_1, \cdots, g_n : B \to \mathbb{R}$ גזירות ברציפות עבור $n+1 \leq k$.

נגדיר את הקבוצה

$$A := \{x \in B \mid g_1(x) = \cdots = g_n(x) = 0\}$$

נניח כי לכל $a \in A$ מתקיים ש־$\nabla g_1(a), \cdots, \nabla g_n(a) \in \mathbb{R}^k$ בלתי־תלויים לינארית.

נגדיר את **הלגראנז'יאן** $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \times B \to \mathbb{R}$ באמצעות

$$\mathcal{L}(\lambda, x) = f(x) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i(x)$$

תהיי $(\lambda, a) \in \mathbb{R}^n \times A$ נקודת קריטית של הלגראנז'יאן ונסמן $\hat{H} = H\mathcal{L}_{(\lambda,a)}$. אז מתקיים

1. $a$ היא מינימום מקומי של $f|_A$ אם $H\mathcal{L}_a^\lambda$ חיובית בהחלט על $\ker(Dg_a)$ ולפי ההסיאן המוגבל זה קורה אם $(-1)^n \det\left(\hat{H}_i\right)) > 0$ לכל $2n+1 \leq i \leq k+n$
2. $a$ היא מקסימום מקומי של $f|_A$ אם $H\mathcal{L}_a^\lambda$ שלילית בהחלט על $\ker(Dg_a)$ ולפי ההסיאן המוגבל זה קורה אם $(-1)^{n+i} \det\left(\hat{H}_i\right)) > 0$ לכל $2n+1 \leq i \leq k+n$
3. $a$ היא אוכף של $f|_A$ אם $H\mathcal{L}_a^\lambda$ אינה מוחלטת על $\ker(Dg_a)$ ולפי ההסיאן המוגבל זה קורה אם $\det\left(\hat{H}_{2n+1}\right), \cdots, \det\left(\hat{H}_i\right)$ בעלי סימנים המתאימים לאחד משני המקרים הקודמים אבל ל־$\det\left(\hat{H}_{i+1}\right)$ יש סימן הפוך

אז נגדיר $g(x,y,z) = x+y+z-1$ ונשים לב ש־$Dg_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$ לכל $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ נובע שניתן להשתמש בשיטת הלגראנז'יאן, והלגראנז'יאן נתון על־ידי

$$\mathcal{L}(\lambda,x,y,z) = x^2+2y^2+3z^2-\lambda x-\lambda y-\lambda z+\lambda$$

נחשב את הנקודות הקריטיות של $\mathcal{L}$ זוהי כמובן פונקציה רציפה

$$D\mathcal{L}_{(\lambda,x,y,z)} = \begin{pmatrix} -x-y-z+1 & 2x-\lambda & 4y-\lambda & 6z-\lambda \end{pmatrix}$$

נשווה ל־0 ונפתור את מערכת המשוואות

$$\begin{gathered} 2x-\lambda = 0 \Longrightarrow 2x = \lambda \\ 4y-\lambda = 0 \Longrightarrow 4y = \lambda \\ 6z-\lambda = 0 \Longrightarrow 6z = \lambda \\ -x-y-z+1 = 0 \Longrightarrow x+y+z = 1 \end{gathered}$$

אז

$$2x = 4y = 6z \Longrightarrow x = 2y = 3z$$

ולכן

$$x+y+z = 1 \underset{x=2y}{\Longleftrightarrow} 3y+z = 1 \Longleftrightarrow z = 1-3y$$

אבל אבל

$$x = 3z \Longleftrightarrow x = 3-9y \Longleftrightarrow 11y = 3 \Longleftrightarrow y = \frac{3}{11}$$

אז בסך־הכל

$$x = \frac{6}{11}, y = \frac{3}{11}, z = \frac{2}{11}, \lambda = \frac{12}{11}$$

ואכן גם מתקיימים

$$x+y+z=\frac{3}{11}+\frac{6}{11}+\frac{2}{11}=\frac{11}{11}=1\checkmark$$
$$\frac{12}{11}=2\cdot\frac{6}{11}=4\cdot\frac{3}{11}=6\cdot\frac{2}{11}\checkmark$$

ולכן יש נקודה אחת חשודה לקיצון והיא $(\lambda,x,y,z)=\left(\frac{12}{11},\frac{6}{11},\frac{3}{11},\frac{2}{11}\right)$, נחשב את ההסיאן של $\mathcal{L}$:

$$H\mathcal{L}_{(\lambda,x,y,z)}=\begin{pmatrix}0&-1&-1&-1\\-1&2&0&0\\-1&0&4&0\\-1&0&0&6\end{pmatrix}$$

צריך לבדוק את המינורים הראשיים מסדר מסדרים 3 ו־4.

מתקיים $(-1)^3\det(H\mathcal{L})=44$ ועבור המינור מסדר 3 מתקיים $(-1)^3\det\begin{pmatrix}0&-1&-1\\-1&2&0\\-1&0&4\end{pmatrix}=6$ ולכן זו נקודת מינימום יחידה.

$\square$

## שאלה 2

שאלה 4 ממטלה 11 של דניאל: תהיי $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ הנתונה על־ידי $f(x,y,z)=2x+2y+3z$.
נסביר ונמצא למה $f$ מקבלת ערך מקסימלי ומינימלי בקבוצה $A:=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+3z^3=35,\ x+y+z=7\}$.
*הוכחה:* נטען ש־$A$ קבוצה קומפקטית ולכן $f$ שהיא פונקציה רציפה (פולינום בכמה משתנים) מקבלת עליה מינימום ומקסימום.
נגדיר $B:=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+3z^3=35\}$ ונטען ש־$B$ סגורה וחסומה ולכן לפי משפט היינה־בורל נקבל שהיא קומפקטית.
סגורה: אם $(x_n,y_n,z_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה ב־$B$ שמתכנסת ל־$(x,y,z)$ ובפרט $x_n\to x, y_n\to y, z_n\to z$.
לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $x_n^2+y_n^2+3z_n^2=35$ לכן מאריתמטיקה של גבולות נסיק שמתקיים $(x,y,z)=\lim_{n\to\infty}x_n^2+y_n^2+3z_n^2=35$ ולכן $(x,y,z)\in B$.
חסומה: נשים לב שמתקיים $\frac{x^2}{35}+\frac{y^2}{35}+\frac{z^2}{\frac{35}{3}}=1$ וזה בבירור חסום כי לדוגמה $x$ מקבל ערך מקסימלי כאשר $y=z=0$ ואז $x=\sqrt{35}$.
אז $B$ סגורה וחסומה ולכן לפי משפט היינה־בורל היא קומפקטית.
נגדיר $C:=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y+z=7\}$, זו בבירור קבוצה לא חסומה אבל זו כן קבוצה סגורה כי אם $(x_n,y_n,z_n)_{n=1}^{\infty}$ קבוצה ב־$C$ שמתכנסת ל־$(x,y,z)$ בפרט $x_n\to x, y_n\to y, z_n\to z$.
לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $x_n+y_n+z_n=7$ ולכן מאריתמטיקה של גבולות נסיק שמתקיים $x+y+z=\lim_{n\to\infty}x_n+y_n+z_n=7$ ולכן $(x,y,z)\in C$, אז $C$ קבוצה סגורה.
נשים לב ש־$A=B\cap C$ ובהרצאה ראינו שחיתוך סופי של קבוצות סגורות הוא סגור (זה נובע מכך שאיחוד סופי של קבוצות פתוחות הוא פתוח, וקבוצה סגורה היא קבוצה שהמשלים שלה הוא פתוח ועם כללי דה־מורגן נקבל את הנדרש).
אז $A$ קבוצה סגורה אבל מהגדרה $A\subseteq B$ ש־$B$ קומפקטית וראינו שתת־קבוצה סגורה של קבוצה קומפקטית היא קומפקטית, ולכן $A$ קומפקטית ולכן בהכרח $f$ שרציפה מקבלת עליה מינימום ומקסימום.
אם $f$ מינימום/מקסימום בנקודה פנימית של $A$, נוכל לבדוק לפי איפוס הגרדיאנט

$$\nabla f(x,y,z)=(2\ \ 2\ \ 3)\neq(0\ \ 0\ \ 0)$$

אז אין אף נקודה פנימית שבה $f$ מקבלת מינימום/מקסימום, ולכן נצטרך להשתמש בשיטת כופלי לגראנז' (כי הנקודות קיצון מתקבלות רק על השפה של האילוצים).
נגדיר $g_1:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ על־ידי $g_1(x,y,z)=x^2+y^2+3z^2-35$ ו־$g_2:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ על־ידי $g_2(x,y,z)=x+y+z-7$ וכמובן ש־$g_1,g_2$ דיפרנציאביליות ברציפות כי אלו פולינומים ומתקיים

$$\nabla g_1(x,y,z)=(2x\ \ 2y\ \ 6z),\ \nabla g_2(x,y,z)=(1\ \ 1\ \ 1)$$

יש לנו בפועל שלוש משוואות של אילוצים שאנחנו יכולים להוציא

$$\nabla f(x,y,z)=\lambda\nabla g_1(x,y,z)+\mu\nabla g_2(x,y,z)\iff(2\ \ 2\ \ 3)=\lambda(2x,2y,6z)+\mu(1\ \ 1\ \ 1)$$

בבירור $\lambda\neq0$ כי $(2\ \ 2\ \ 3)$ ו־$(1\ \ 1\ \ 1)$ בלתי תלויים לינארית ולכן $y=\frac{2-\mu}{\lambda}=x$ ואם נציב $x=y$ באילוץ השני נקבל

$$z=7-2x$$

ומהצבה באילוץ הראשון

$$2x^2+3(7-2x)^2=35\iff x=2,4$$

ולכן הנקודות הן $(2,2,3),(4,4,-1)$ ומתקיים $f(2,2,3)=17, f(4,4,-1)=13$ ולכן המינימום הוא 13 בנקודה $(4,4,-1)$ והמקסימום הוא 17 בנקודה$(2,2,3)$.
אפשר גם בצורה אלימה לפתור את מערכת המשוואות אז נקבל מערכת משוואות

$$2=2x\lambda+\mu\implies\mu=2-2x\lambda$$
$$2=2y\lambda+\mu\implies\mu=2-2y\lambda$$
$$3=6z\lambda+\mu\implies\mu=3-6z\lambda$$
$$x^2+y^2+3z^2=35$$
$$x+y+z=7$$

אבל אני אוותר. $\square$

## שאלה 3

שאלה 7 תרגיל בית 11: בכל סעיף נתונה קבוצה ואינטגרל, נשתמש במשפט חילוף משתנה כדי לחשב את האינטגרל על הקבוצה.

**משפט 0.1** (משפט חילוף משתנה – תזכורת): תהיינה $A, B \subseteq \mathbb{R}^k$ קבוצות פתוחות ו־$g : A \to B$ דיפאומורפיזם (חד־חד ערכית, על, גזירה ברציפות ובעלת הופכית גזירה ברציפות) ו־$f : B \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה.
אז $f$ אינטגרבילית על $B$ אם ורק אם הפונקציה $|x \mapsto (f \circ g)(x)|\det(Dg_x)$ אינטגרבילית על $A$ ובמקרה זה מתקיים

$$\int_B f(t)dt = \int_A (f \circ g)(x)|\det(Dg_x)|dx$$

### סעיף א'

תהיי $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - xy + y^2 < 2\}$ ונחשב את האינטגרל $\int_B (x^2 - xy + y^2)dxdy$ באמצעות משפט חילוף משתנה.

*פתרון*: הקבוצה $B$ מהווה אליפסה סביב הראשית שאינה מקבילה לצירים, ולכן נצטרך לבצע חילוף משתנה לינארי כדי להפוך את האליפסה לעיגול.
נשתמש בהשלמה לריבוע:

$$x^2 - xy + y^2 = \left(x - \frac{1}{2}y\right)^2 - \frac{1}{4}y^2 + y^2 = \left(x - \frac{1}{2}y\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2$$

נבצע את חילוף המשתנה הלינארי $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - \frac{1}{2}y \\ \frac{\sqrt{3}}{2}y \end{pmatrix}$ ואז

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}^{-1}$$

נזכר שמתקיים $\det(T^{-1}) = \frac{1}{\det(T)}$ ולכן

$$dxdy = \left|\det(T^{-1})\right|dudv = \frac{2}{\sqrt{3}}dudv$$

נסמן $A = T(B) = B_2(0) \setminus \{0\}$ אז ממשפט חילוף משתנה, הפונקציה $f$ אינטגרבילית על $B$ אם ורק אם $f \circ T^{-1}$ אינטגרבילית על $A$ ומתקיים

$$\int_B f(x, y)dxdy = \int_A u^2 + v^2 \cdot \frac{s}{\sqrt{3}}dudv = \frac{2}{\sqrt{3}} \underset{\text{קוטביות}}{=} \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^2 dr d\theta = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^{r=2} d\theta = \frac{24\pi}{3\sqrt{3}}$$

□

### סעיף ב'

תהיי

$$C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y > 0,\ 1 < xy < 3,\ x^2 < y^2 < x^2 + 1\}$$

ונחשב באמצעות משפט חילוף משתנה את האינטגרל

$$\int_C (y^2 - x^2)^{xy}(x^2 + y^2)dxdy$$

*פתרון*: נשים לב שמהאילוץ $x^2 < y^2 < x^2 + 1$ אנחנו מקבלים $0 < y^2 - x^2 < 1$ לכן הגיוני שנגדיר $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ y^2 - x^2 \end{pmatrix}$ ואז

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x \\ -2x & 2y \end{pmatrix}$$

אז

$$\det(J) = 2y \cdot .y + x \cdot 2x = 2(x^2 + y^2)$$

ולכן

$$dxdy = \left|\det(J^{-1})\right| dudv \Longrightarrow dxdy = \frac{1}{2(x^2+y^2)} dudv$$

אז תחום האינטגרציה שלנו יהיה $A = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < u < 3, 0 < v < 1\}$ ולכן

$$\int_C f(x,y)dxdy = \int_A \frac{v^u \cancel{(x^2+y^2)}}{2\cancel{(x^2+y^2)}} dudv = \frac{1}{2}\int_A v^u dudv = \frac{1}{2}\int_0^1 \int_1^3 v^u dudv = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\frac{v^u}{\ln(v)}\right]_{u=1}^{u=3} dv$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{v^3}{\ln(v)} - \frac{v}{\ln(v)} dv$$

אבל האינטגרל האחרון הוא לא אינטגרל שאנחנו יודעים לחשב, ולכן נשתמש במשפט פוביני

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \int_1^3 v^u dudv = \frac{1}{2}\int_1^3 \int_0^1 v^u dvdu = \frac{1}{2}\int_1^3 \left[\frac{v^{u+1}}{u+1}\right]_{v=0}^{v=1} = \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{1^{u+1}}{u+1} du = \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{1}{u+1} du = \frac{1}{2}[\ln(u+1)]_{u=1}^{u=3}$$
$$= \frac{1}{2}(\ln(4) - \ln(2)) = \frac{1}{2}\ln(2)$$

□

## שאלה 4

מטלה 12 שאלה 1: תהיי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ הפונקציה הנתונה על־ידי

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

נגדיר $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ על־ידי $g(x) = f(x)f(1-x)$.

### סעיף א'

נוכיח כי $g$ היא פונקציה חלקה (גזירה אינסוף פעמיים) עם תומך $\operatorname{supp}(g) = [0,1]$.

*הוכחה:* ניזכר

$$\operatorname{supp}(g) := \overline{\{x \in \mathbb{R}^k \mid g(x) \ne 0\}} \subseteq \mathbb{R}$$

עבור $x > 0$ בבירור $f$ חלקה כי היא מזדהה עם הפונקציה החלקה $e^{-\frac{1}{x}}$ וגם אם $x \le 0$ אז $f$ מזדהה עם הפונקציה החלקה 0.
נשים לב של־$g$ יש לנו 3 חלוקות:

1. $x > 1$ – במקרה זה, $f(x) > 0$ אבל $1 - x \le 0$ ולכן $f(1-x) = 0$ ולכן $g(x) = 0$
2. $x < 1$ – במקרה זה $f(x) = 0$ ולכן $g(x) = 0$
3. $0 < x < 1$ במקרה זה מתקיים $f(x) > 0$ וגם $f(1-x) > 0$ כי $1 - x > 0$ ולכן במקרה זה $g(x) \ne 0$

בסך־הכל מצאנו שמתקיים

$$\{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \ne 0\} = (0,1)$$

ולכן כמובן שמתקיים

$$\operatorname{supp}(g) = \overline{\{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \ne 0\}} = \overline{(0,1)} = [0,1]$$

וכמובן ש־$g$ חלקה כי בכל קטע היא מזדהה עם פונקציה חלקה (ובפרט מרציפות הגבול בשאיפה ל־0 זהה). $\square$

### סעיף ב'

תהיי $Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_k, b_k] \subseteq \mathbb{R}^k$ תיבה לא מנוונת. נגדיר $\phi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ על־ידי

$$\phi(x) = \prod_{i=1}^{k} g\left(\frac{x_i - a_i}{b_i - a_i}\right)$$

נוכיח כי $\phi$ היא פונקציה חלקה עם תומך $\operatorname{supp}(\phi) = Q$.

*הוכחה:* אנחנו מחפשים את $\operatorname{supp}(\phi) = \overline{\{x \in \mathbb{R} \mid \phi(x) \ne 0\}}$.
היות ו־$\phi$ היא מכפלה של $g_i$ אז אנחנו צריכים שכל $g_i(x) \ne 0$. ממה שמצאנו בסעיף הקודם, זה קורה אם ורק אם

$$0 \frac{\le (x_i - a_i)}{b_i - a_i} \le 1 \iff 0 \le x_i - a_i \le b_i - a_i \iff a_i \le x_i \le b_i$$

משמע $x_i \in [a_i, b_i]$ ולכן

$$\{x \in \mathbb{R} \mid \phi(x) \ne 0\} = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_k, b_k] = Q$$

אבל $Q$ היא קבוצה קומפקטית ב־$\mathbb{R}^k$ ולכן סגורה, על־כן $\overline{Q} = Q$ ולכן אכן מתקיים $\operatorname{supp}(\phi) = \overline{\{x \in \mathbb{R} \mid \phi(x) \ne 0\}} = Q$. $\square$

## שאלה 5

מטלה 12 שאלה 2: תהיי $A \subseteq \mathbb{R}^k$ קבוצה פתוחה ו־$f : A \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה.

### סעיף א'

נוכיח כי אם $f$ בעלת תומך קומפקטי אז $f$ אינטגרבילית על $A$ ומתקיים

$$\int_A f(x)dx = \int_{\operatorname{supp}(f)} f(x)dx$$

*הוכחה:* נגדיר $f_+ = \max\{f, 0\}, f_- = -\min\{f, 0\}$.
$f$ אינטגרבילית על $A$ ולכן $f_+, f_-$ אינטגרביליות, כאשר אנחנו אומרים שהן אינטגרביליות אומר שמתקיים

$$\int_A f_\pm(x)dx := \sup\left\{\int_D f_\pm(x)dx \mid \text{קומפקטית בעלת נפח } D \subseteq A\right\} < \infty$$

$f$ בעלת תומך קומפקטי, ולכן $f = 0$ לכל $x \in A \setminus \operatorname{supp}(f)$ ולכן

$$\int_A f(x)dx = \int_{\operatorname{supp}(f)} f(x)dx + \int_{A \setminus \operatorname{supp}(f)} f(x)dx = \int_{\operatorname{supp}(f)} f(x)dx$$

$\square$

## שאלה 6

מטלה 13 שאלה 7 סמסטר א' 2025: תהיי $f:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^k$ פונקציה ליפשצית. נראה שאם $N\subseteq\mathbb{R}^k$ ממידה אפס, אז $f(N)$ ממידה אפס.

*הוכחה:* תהיי $N\subseteq\mathbb{R}^k$ ממידה אפס ויהי $\varepsilon>0$.

$f$ ליפשיצית, ומכך שכל הנורמות שקולות אז בפרט הנורמות $\|\cdot\|_2,\|\cdot\|_\infty$ שקולות ולכן קיים $L$ כך שלכל $x,y\in\mathbb{R}^k$ מתקיים

$$\|f(x)-f(y)\|_\infty\le L\|x-y\|_\infty$$

(מהלשפיציות ומהשקילות נורמות).

תהיי $B=\prod[a_i,b_i]$ תיבה, אז $f(B)$ מוכלת בתיבה שאורך צלעותיה הן $L(b_i-a_i)$.

$N$ ממידה אפס ולכן קיים אוסף $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך ש-$B_n$ $N\subseteq\cup_{n=1}^{\infty}B_n$ ומתקיים

$$\sum_{n=1}^{\infty}V(B_n)<\frac{\varepsilon}{L^k}$$

ולכן

$$f(N)\subseteq f\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right)\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}f(B_n)$$

ולכן

$$\sum_{n=1}^{\infty}V(f(B_n))\le\sum_{n=1}^{\infty}V(LB_n)\underset{\text{הגדרת נפח תיבה}}{=}L^k\sum_{n=1}^{\infty}V(B_n)=L^k\frac{\varepsilon}{L^k}<\varepsilon$$

$\square$

## שאלה 7

נמצא את ערכי $\alpha \in \mathbb{R}$ עבורם האינטגרל הבא מתכנס

$$\int_B \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{\alpha}{2}}} dxdydz$$

כאשר

$$B \coloneqq \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 > 1, x,y,z > 0\right\}$$

*פתרון:* אם נעבור לכדוריות, מתקיים $\varphi, \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ כי $x, z > 0$ ולכן $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$$B = \left\{(r,\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^3 \mid r^2 > 1, \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

ואז האינטגרל שלנו הוא

$$\int_1^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{r^{\frac{\alpha}{2}}} r^2 \sin(\varphi) d\theta d\varphi dr = \int_1^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^{\frac{4-\alpha}{2}} \sin(\varphi) d\theta d\varphi dr$$

נשים לב שאפשר לשנות סדר אינטגרציה מפוביני כי הכל רציף ולכן אינטגרבילי, אבל נשים לב

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\varphi) d\varphi = [-\cos(\varphi)]_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} = -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos(0) = 1$$

וכן

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{2}$$

אז אנחנו רק צריכים לבדוק מתי האינטגרל הבא מתכנס

$$\int_1^\infty r^{\frac{4-\alpha}{2}} dr$$

נזכר ש-$r > 1$ ולכן מאינפי 2 אנחנו יודעים שהאינטגרל מתכנס אם ורק אם $\frac{4-\alpha}{2} < -1 \iff 4-\alpha < -2 \iff 6 < \alpha$.
לכן האינטגרל מתכנס אם ורק אם $\alpha > 6$. $\square$

## שאלה 8

מטלה 13 שאלה 1: נוכיח כי קיימת פונקציה רציפה יחידה $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ עבורה לכל $x\in[0,1]$ מתקיים

$$f(x)=x+\frac{1}{2}\sin(f(x))$$

*הוכחה:* נעזר ברמז ונרצה להשתמש במשפט העתקה מכווצת.

**משפט 0.2** (משפט העתקה מכווצת – תזכורת): יהי $(X,d)$ מרחב מטרי שלם ו־$g:X\to X$ העתקה מכווצת. אז ל־$f$ יש נקודת שבת אחת.

**הגדרה 0.2** (העתקה מכווצת): $g:X\to X$ נקראת **העתקה מכווצת** אם יש $0<\lambda<1$ כך שלכל $x,y\in X$ מתקיים $d(f(x),f(y))\le\lambda d(x,y)$.

נגדיר $T:C[0,1]\to C[0,1]$ כאשר $C[0,1]=\{f:[0,1]\to\mathbb{R}\mid f \text{ רציפה}\}$ על־ידי $T(f)(x)=x+\frac{1}{2}\sin(f(x))$ ונזכר שבמרחב הפונקציות הרציפות אנחנו עובדים עם נורמת סופרמום $\|f\|_\infty=\sup_{x\in[0,1]}|f(x)|$.
לכל $x\in[0,1]$ מתקיים עבור $f,g\in C[0,1]$

$$|T(f)(x)-T(g)(x)|=\left|x+\frac{1}{2}\sin(f(x))-x-\frac{1}{2}\sin(g(x))\right|=\frac{1}{2}|\sin(f(x))-\sin(g(x))|$$

נשים לב ש־$\sin(x)$ עומדת בתנאי משפט לגראנז', ולכן קיימת $c\in(0,1)$ כך שמתקיים

$$|\sin(f(x))-\sin(g(x))|\le|f(x)-g(x)||\cos(c)|$$

ולכן

$$|T(f)(x)-T(g)(x)|\le\frac{1}{2}|f(x)-g(x)||\cos(c)|\underset{|\cos(c)|\le1}{\le}\frac{1}{2}|f(x)-g(x)|$$

וכשניקח סופרמום

$$\|T(f)(x)-T(g)(x)\|_\infty\le\frac{1}{2}\|f-g\|_\infty$$

ולכן $T$ היא העתקה מכוצת עם $\lambda=\frac{1}{2}$, וממשפט העתקה מכווצת קיימת ל־$T$ נקודת שבת אחת, קרי פונקציה רציפה אחת המקיימת $T(f)=f$, משמע

$$T(f)(x)=x+\frac{1}{2}\sin((f(x)))=f(x)$$

□

## שאלה 9

מטלה 13 שאלה 2: תהיי $S \subseteq \mathbb{R}^k$ קבוצה קשירה מסילתית ו־$f : S \to \mathbb{R}$ פונקיה רציפה.

**הגדרה 0.3** (תזכורת – קבוצה קשירה מסילתית): נגיד שקבוצה $S \subseteq \mathbb{R}^k$ היא קשירה מסילתית אם לכל $x_1, x_2 \in S$ קיימת מסילה $\gamma : [0,1] \to S$ כך ש־$\gamma(0) = x_0, \gamma(1) = x_1$.

### סעיף א'

יהיו $a, b \in S$ ונניח שמתקיים $f(a) < f(b)$. נראה כי לכל $t \in (f(a), f(b))$ קיים $s \in S$ כך ש־$f(s) = t$.

*הוכחה:* $S$ קשירה מסילתית ולכן יש $\gamma : [0,1] \to S$ כך שמתקיים $\gamma(0) = a, \gamma(1) = b$ ($\gamma$ רציפה) ונסתכל על ההרכבה $f \circ \gamma : [0,1] \to \mathbb{R}$ שהיא רציפה כהרכבה של פונקציות רציפות.
נשים לב $\mathrm{Im}(f \circ \gamma) = [f(a), f(b)]$ (כי $f(\gamma(0)) = f(a), f(\gamma(1)) = f(b)$).
ממשפט ערך הביניים, $f \circ \gamma$ מקבלת כל ערך בין $f(a)$ לבין $f(b)$, גם בקטע הסגור וגם בקטע הפתוח ולכן קיים $s \in [0,1]$ כך ש־$f(\gamma(s)) = t$ לכל $t \in (f(a), f(b))$. □

### סעיף ב'

נראה כי למשוואה הבאה יש פיתרון ב־$B_2(0) \subseteq \mathbb{R}^2$

$$x^2 + 2y^2 = e^{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2} \cos\left(e^{-\sin\left(\frac{y}{x+2}\right)}\right)$$

*הוכחה:* נגדיר $F(x,y) = x^2 + 2y^2 - e^{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2} \cos\left(e^{-\sin\left(\frac{y}{x+2}\right)}\right)$.
נשים לב ש־$F$ רציפה: $x^2 + 2y^2$ רציפה כפולינום, $e^{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}$ גם־כן רציפה כי $e$ חלקה וכן הרכבה של רציפות זה רציף.
נשאר לבחון האם $\cos\left(e^{-\sin\left(\frac{y}{x+2}\right)}\right)$ מהווה פונקצייה רציפה ב־$B_2(0)$ (הכדור הפתוח סביב 0 מרדיוס 2): נבחן את $\frac{y}{x+2}$, ונשים לב $x + 2 \neq \in B_2(0)$ כי $x > 2$ ולכן הפונקציה $\frac{y}{x+2}$ היא פונקציה רציפה כמנה של פונקציות רציפות.
אז כל ההרכבה $\cos\left(e^{-\sin\left(\frac{y}{x+2}\right)}\right)$ היא רציפה כהרכבת פונקציות רציפות ב־$B_2(0)$, ולכן $F$ היא סכום, מכפלה והרכבה של פונקציות רציפות ולכן רציפה.
אנחנו יודעים ש־$B_2(0)$ הוא קשיר מסילתית כי אם נגדיר $\gamma : [0,1] \to B_2(0)$ על־ידי $\gamma(t) = tx + (1-t)y$ עבור $x, y \in B_2(0)$ כי אנחנו יודעים שמתקיים $\|x\| < 2, \|y\| < 2$ ולכן

$$\|tx + (1-t)y\| = \|tx + (1-t)y - (t0 + (1-t)0)\| \le t\|x\| + (1-t)\|y\| < 2t + 2(1-t) = 2$$

לכן $F$ רציפה על קבוצה קשירה מסילתית ולכן ניתן להשתמש בסעיף א'. נשים לב שמתקיים

$$F(0,0) = 0^2 + 2 \cdot 0^2 - e^{\left(0-\frac{1}{2}\right)^2} \cos\left(e^{-\sin\left(\frac{0}{0+2}\right)}\right) = -e^{\frac{1}{4}} \cos(1) < 0$$

ומצד שני

$$F(1,1) = 1^2 + 2 \cdot 1^2 - e^{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} \cos\left(e^{-\sin\left(\frac{1}{1+2}\right)}\right) = 3 - e^{\frac{1}{4}} \cos\left(e^{-\sin\left(\frac{1}{3}\right)}\right)$$

ברור שמתקיים $e^{-\sin\left(\frac{1}{3}\right)} < 1$ ולכן $\cos\left(e^{-\sin\left(\frac{1}{3}\right)}\right) < 1$ אז

$$F(1,1) < 3 - e^{\frac{1}{4}} > 0$$

לכן ממשפט ערך הממוצע שראינו בסעיף א' נובע שיש פיתרון למשוואה. □

### סעיף ג'

יש טעות בשאלה, השאלה הנכונה היא להראות שהקבוצה $S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 \ge 1\right\}$ אינה קשירה מסילתית.
*הוכחה:* נעזר ברמז ונסתכל על הפונקציה $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ הנתונה על־ידי $f(x,y) = x$ ראינו שפונקציית ההטלה היא פונקציה רציפה.
מסעיף א', פונקציה רציפה על מרחב קשיר מסילתית מקיימת את משפט ערך הביניים.
ניקח את הנקודות $(-2,0), (2,0)$ ולכן מסעיף א' לכל $t \in (f(-2,0), f(2,0)) = (-2,2)$ יש $s \in S$ כך שמתקיים $f(s) = 0$, אבל מהגדרת $S$ מתקיים $x^2 \ge 1 + y^2$ משמע $|x| \ge 1$ משמע $x \ge 1$ או $x \le 1$ אבל אז לא ייתכן $-1 < x < 1$ וזו סתירה. □

## שאלה 10

מטלה 13 שאלה 5: תהיי $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה ברציפות ונניח כי $g(0,0)=0$. עבור $\varepsilon>0$ נגדיר

$$g_\varepsilon(x,y)=g(x,y)+\varepsilon(x+y)$$

### סעיף א'

נוכיח כי קיים $\varepsilon_0>0$ כך שלכל $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ קיימת $\delta>0$, סביבה $U$ של $(0,0)$ ופונקציה $f_\varepsilon:(-\delta,\delta)\to\mathbb{R}$ כך שלכל $(x,y)\in U$ מתקיים

$$y=f_\varepsilon(x)\iff g_\varepsilon(x,y)=0$$

*הוכחה:* מזכיר את משפט הפונקציה הסתומה.

**משפט 0.3** (תזכורת – משפט הפונקציה הסתומה): תהיינה $A\subseteq\mathbb{R}^k, B\subseteq\mathbb{R}^m$ פתוחות ו־$G:A\times B\to B$ גזירה ברציפות. נניח שמתקיים $(x_0,y_0)\in A\times B$ ומתקיים $G(x_0,y_0)=0$ וכן כי $\left(\frac{\partial G_i}{\partial y_i}(x_0,y_0)\right)_{1\le i,j\le m}$ הפיכה.

אז יש $U\subseteq A\times B$ פתוחה סביב $(x_0,y_0)$ ו־$V\in\mathbb{R}^k$ פתוחה ו־$f:V\to B$ גזירה ברציפות כך שלכל $(x,y)\in U$ מתקיים $f(x)=y\iff$ $G(x,y)=0$.

מהנתון מתקיים $g_\varepsilon(0,0)=g(0,0)+\varepsilon(0+0)=0$ ומתקיים גם

$$\frac{\partial g_\varepsilon}{\partial y}(x,y)=g_y(x,y)+\varepsilon\implies\frac{\partial g_\varepsilon}{\partial y}(0,0)=g_y(0,0)+\varepsilon$$

אז יש לנו שתי אופציות: $g_y(0,0)=0$ או $g_y(0,0)\neq 0$.
אם זה השני, סיימנו ומשפט הפונקציה הסתומה נותן לנו את הנדרש ישירות.
אחרת, $\frac{\partial g_\varepsilon}{\partial y}(0,0)=\varepsilon>0$ ולכן עדיין תנאי משפט הפונקציה הסתומה מתקיימים.
אז קיימת סביבה $\varepsilon_0>0$ כך שלכל $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ מתקיים $\frac{\partial g_\varepsilon}{\partial y}(0,0)\neq 0$ ולכן ממשפט הפונקציה הסתומה יש $\delta>0$ כך ש־$f_\varepsilon:(-\delta,\delta)\to\mathbb{R}$ וסביבה של $(0,0)$ כך שמתקיים לכל $(x,y)\in U$

$$g_\varepsilon(x,y)=0\iff y=f_\varepsilon(x)$$

$\square$

### סעיף ב'

נוכיח כי קיים $\varepsilon_1>0$ כך שלכל $\varepsilon\in(0,\varepsilon_1)$ הפונקציה $f_\varepsilon$ הפיכה בסביבה של 0 עם הופכית גזירה ברציפות.

*הוכחה:* מזכיר את משפט הפונקציה ההפוכה.

**משפט 0.4** (תזכורת – משפט הפונקציה ההפוכה): תהיי $f:A\to\mathbb{R}^k$ עבור $A\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה, $f$ גזירה ברציפות ב־$A$ ותהיי $a\in A$ עבורה $\det(Df)_a\neq 0$.

אז יש $U\subseteq A$ פתוחה, $a\in U$ כך ש־$f|_U$ חד־חד ערכית, $f(U)=V$ פתוחה ו־$f^{-1}|_V$ גזירה ברציפות ומתקיים $\left(Df^{-1}\right)_y=\left[(Df)_{f^{-1}(y)}\right]^{-1}$ לכל $y\in V$.

ממשפט הפונקציה הסתומה קיבלנו

$$g_\varepsilon(x,f_\varepsilon(x))=0$$

נגזור לפי כלל שרשרת

$$\frac{\partial g_\varepsilon}{\partial x}(x,f_\varepsilon(x))+\frac{\partial g_\varepsilon}{\partial y}(x,f_\varepsilon(x))\cdot f_\varepsilon'(x)=0\implies f_\varepsilon'(x)=-\frac{g_{\varepsilon,x}(x,f_\varepsilon(x))}{g_{\varepsilon,y}(x,f_\varepsilon(x))}$$

עבור $x=0, f_\varepsilon(0)=0$ ולכן

$$f_\varepsilon'(0)=-\frac{g_{\varepsilon,x}(0,0)}{g_{\varepsilon,y}(0,0)}=-\frac{g_x(0,0)+\varepsilon}{g_y(0,0)+\varepsilon}$$

ולכן עבור $\varepsilon>0$ קטן דיו נקבל $f_\varepsilon'(0)\neq 0$, ולכן קיים $\varepsilon_1>0$ שלכל $\varepsilon\in(0,\varepsilon_1)$ מתקיים $f_\varepsilon'(0)\neq 0$ ולכן אנחנו עומדים בתנאי משפט הפונקציה ההפוכה וממנה נקבל את הנדרש. $\square$

### סעיף ג'

עבור המקרה בו $f_\varepsilon$ הפיכה בסביבה של 0 נביע את $\left(f_\varepsilon^{-1}\right)'(0)$ במונחי $g$ ונגזורתיה.

*פתרון*: באינפי 1 ראינו שמתקיים

$$\left(f_\varepsilon^{-1}\right)'(0) = \frac{1}{f_\varepsilon'(f_\varepsilon^{-1}(0))}$$

ראינו כבר שמתקיים $f_\varepsilon(0) = 0$ ולכן $f_\varepsilon^{-1}(0) = 0$ ואז

$$\left(f_\varepsilon^{-1}\right)'(0) = \frac{1}{f_\varepsilon'(0)} = -\frac{g_{\varepsilon,y}(0,0)}{g_{\varepsilon,x}(0,0)} = -\frac{g_y(0,0)+\varepsilon}{g_x(0,0)+\varepsilon}$$

$\square$

## שאלה 11

מטלה 13 שאלה 4: תהיי $A\subseteq\mathbb{R}^3$ החיתוך בין הפרבולואיד $z=x^2+y^2$ והמישור $z+x=2$. נוכיח כי קיימת ב-$A$ נקודה הרחוקה ביותר מהראשית ונמצא אותה.

*פתרון:* גיאומטרית: אנחנו מחפשים חיתוך בין משטח לבין פרבלואיד וזה נותן לנו חישוק, אז ברור שיש נקודה שרחוקה ביותר מהראשית (חישוק זו קבוצה קומפקטית כי היא סגורה וחסומה).

נגדיר פורמלית, אנחנו מחפשים את החיתוך בין שתי הצורות ולכן עם השלמה לריבוע נקבל

$$A\coloneqq\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid z=x^2+y^2,\ z+x=2\right\}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{9}{4}\right\}$$

זה בעצם השפה של מעגל ברדיוס $\frac{3}{2}$ שמוזז 1 שמאלה על ציר ה־$x$.

זו השפה של מעגל מוזז ולכן כמובן סגורה, וזאת תת־קבוצה של מעגל ומעגל הוא קבוצה קומפקטית אז $A$ קומפקטית (כי תת־קבוצה סגורה של קבוצה קומפקטית היא קומפקטית), אפשר גם להראות ישירות מהגדרה (זה לא ארוך).

נגדיר $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ על־ידי $f(x,y)=x^2+y^2+\left(x^2+y^2\right)^2=x^2+y^2+x^4+y^4+2x^2y^2$ (כי $z=x^2+y^2$) נזכר ששורש זו פעולה שמשמרת מינימום ומקסימום ולכן ניתן לוותר עליה ופונקציית האילוץ היא $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ על־ידי $g(x,y)=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2-\frac{9}{4}$.

אלו כמובן שתי פונקציות רציפות והן גזירות ברציפות כפולינומים ומתקיים

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}2x+4x(x^2+y^2) & 2y+4y(x^2+y^2)\end{pmatrix}$$
$$\nabla g(x,y)=\begin{pmatrix}2x+1 & 2y\end{pmatrix}$$

נשים לב ש־$\nabla f(x,y)=0\iff x=y=0$ (כי $2x(1+2(x^2+y^2))=0\iff x=0\vee 1+2(x^2+y^2)=0$ והאחרון לא אפשרי כמובן).

אז הראשית היא נקודה חשודה ומתקיים מהאילוץ על $g$, $g(0,0)=\frac{1}{2^2}\neq\frac{9}{4}$ ולכן היא לא נקודה מעניינת.

אז קיצון אחר מתקבל על השפה, ומשיטת כופלי לגראנז' נקבל

$$\nabla f(x,y)=\lambda\nabla g(x,y)\implies\begin{cases}2x+4x(x^2+y^2)=2x(1+2(x^2+y^2))=\lambda(2x+1)\\2y+4y(x^2+y^2)=2y(1+2(x^2+y^2))=\lambda 2y\\\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{9}{4}\end{cases}$$

אם $y=0$ זה פותר את המשוואה השנייה, ואז המשוואה השלישית מניבה $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{4}\implies x=-2,x=1$ ואלו שתי נקודות חשודות.

אם $x=0$ זה פותר את המשוואה הראשונה ואז המשוואה השלישית מניבה $y^2=\frac{9}{4}\iff y=\pm\frac{3}{2}$ ולכן זה עוד צמד נקודות חשודות.

אם גם $x\neq0,y\neq0$ אז משילוב המשוואה הראשונה והשנייה נקבל

$$\frac{2x(1+2(x^2+y^2))}{2x+1}=\frac{2y(1+2(x^2+y^2))}{2y}\iff\frac{2x(1+2(x^2+y^2))}{2x+1}=1+2(x^2+y^2)$$
$$\iff 2x+4x(x^2+y^2)=2x+4x(x^2+y^2)+1+2(x^2+y^2)\iff-\frac{1}{2}=x^2+y^2 ✗$$

ולאחרון כמובן אין פיתרון מעל $\mathbb{R}$.

אז יש לנו 4 נקודות חשודות

$$(-2,0),(1,0),\left(0,\frac{3}{2}\right),\left(0,-\frac{3}{2}\right)$$

ואם נציב ב־$f$ נקבל

$$f(-2,0)=20,f(1,0)=2,f\left(0,\frac{3}{2}\right)=\frac{117}{16}=f\left(0,-\frac{3}{2}\right)$$

ולכן מקסימום מתקבל בנקודה $(-2,0,4)$ הנקודה שהכי רחוקה מהראשית על שתי הצורות. □

## שאלה 12

מטלה 13 שאלה 5: נכתוב כל קבוצה בקורדינאטות גליליות.

### סעיף א'

$A \coloneqq \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid |x|<y, x^2+y^2<z\}$.

*פתרון:* בגליליות מתקיים

$$0<\rho=\sqrt{x^2+y^2}, \theta\in[0,2\pi)x=\rho\cos(\theta), y=\rho\sin(\theta), z=h$$

ברור שמתקיים $0<\rho^2<z$, וצריך להתקיים

$$|x|<y\Longrightarrow|r\cos(\theta)|=r\sin(\theta)\Longleftrightarrow|\cos(\theta)|\leq\sin(\theta)$$

אם אני אמורה לדעת מתי זה קורה זאת טעות, אבל הדסמוס אומר $\theta\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$, ולכן

$$A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid |x|<y, x^2+y^2<z\}=\left\{(\rho,\theta,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 0<\rho^2<z, \theta\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right], z>0\right\}$$

$\square$

### סעיף ב'

$B \coloneqq \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x,y>0, 0<z<\frac{\pi}{2}, y<x\tan(z)\}$.

*פתרון:* נשים לב שעבור $0<z<\frac{\pi}{2}$ מתקיים $0\leq\tan(z)<\infty$ שזה תמיד נחמד.

כמובן מכך ש-$x>0$ נובע כי $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ (יחד עם $y>0$).

$$B=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x,y>0, 0<z<\frac{\pi}{2}, y<x\tan(z)\right\}=\left\{(\rho,\theta,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 0<\rho, \theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)<z, 0<z<\frac{\pi}{2}\right\}$$

בגלל ש-$x,y>0$ אז

$$y<x\tan(z)\Longleftrightarrow\frac{y}{x}<\tan(z)\Longleftrightarrow\arctan\left(\frac{y}{x}\right)=z$$

ויתרתי באמצע. $\square$

## שאלה 13

מטלה 13 שאלה 6: נכתוב כל קבוצה בקורדינאטות כדוריות. תזכורת:

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\ \theta\in[0,2\pi),\ \varphi\in[0,\pi],\ x=r\cos(\theta)\sin(\varphi),\ y=r\sin(\theta)\sin(\varphi),\ z=r\cos(\varphi)$$

### סעיף א'

$A:=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid \frac{1}{3}z^2<x^2+y^2<3z^2\right\}$.

*פתרון:* ונשים לב ש־$r\neq 0$ כי זה לא מניב פיתרון לאי־שיוויון ולכן נוכל להלק ב־$r$ כשנצטרך. נשים לב

$$\frac{1}{3}z^2<x^2+y^2<3z^2\implies\frac{1}{3}r^2\cos^2(\varphi)<r^2\cos^2(\theta)\sin^2(\varphi)+r^2\sin^2(\theta)\sin^2(\varphi)<3r^2\cos^2(\varphi)\ (\star)$$

אז

$$r^2\cos^2(\theta)\sin^2(\varphi)+r^2\sin^2(\theta)\sin^2(\varphi)=r^2\sin^2(\varphi)(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta))\underset{\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)=1}{=}r^2\sin^2(\varphi)$$

אז

$$(\star)=\frac{1}{3}r^2\cos(\varphi)<r^2\sin^2(\varphi)<3r^2\cos^2(\varphi)\underset{r>0}{\iff}\frac{1}{3}\cos^2(\varphi)<\sin^2(\varphi)<3\cos^2(\varphi)$$

נמשיך להשתמש בזהות $\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)=1$ ונגזורתיה

$$\sin^2(\varphi)-\frac{1}{3}\cos^2(\varphi)>0\iff 1-\cos^2(\varphi)>\frac{1}{3}\cos^2(\varphi)\iff 1>\frac{4}{3}\cos^2(\varphi)\iff\cos^2(\varphi)<\frac{4}{3}\iff|\cos(\varphi)|<\frac{\sqrt{3}}{2}$$

וזה קורה כאשר $\varphi\in\left(\frac{\pi}{6},5\frac{\pi}{6}\right)$ תודה לדסמוס.

$$\sin^2(\varphi)<3\cos^2(\varphi)\iff\sin^2(\varphi)<3-3\sin^2(\varphi)\iff 4\sin^2(\varphi)<3\iff\sin^2(\varphi)<\frac{3}{4}\iff|\sin(\varphi)|<\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ובזכות דסמוס זה קורה כאשר $\varphi\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)\cup\left(2\frac{\pi}{3},\pi\right)$.
אם נחבר את התלויות נקבל $\varphi\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)\cup\left(2\frac{\pi}{3},\pi\right)$.

$$A:=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid\frac{1}{3}z^2<x^2+y^2<3z^2\right\}=\left\{(r,\theta,\varphi)\in\mathbb{R}^3\mid r>0,\theta\in[0,2\pi),\varphi\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)\cup\varphi\in\left(2\frac{\pi}{3},\pi\right)\right\}$$

□

### סעיף ב'

$B:=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x,y,z>0,z^2(x^2+y^2)<x^2(x^2+y^2+z^2)\right\}$.

*פתרון:* נסמן $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ומהנתון של $x,y,z>0$ נקבל $r>0$ וגם מכך אנחנו לומדים ש־$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),\varphi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

$$x^2(x^2+y^2+z^2)\iff r^4\cos^2(\theta)\sin^2(\varphi)$$

וגם

$$\begin{aligned}z^2(x^2+y^2)&=r^2\cos^2(\varphi)(r^2\cos^2(\theta)\sin^2(\varphi)+r^2\sin^2(\theta)\sin^2(\varphi))=r^2\cos^2(\varphi)(r^2\sin^2(\varphi)(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)))\\&\underset{\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)=1}{=}r^2\cos^2(\varphi)(r^2\sin^2(\varphi))=r^4\cos^2(\varphi)\sin^2(\varphi)\end{aligned}$$

אז

$$r^4\cos^2(\varphi)\sin^2(\varphi)<r^4\cos^2(\theta)\sin^2(\varphi)\underset{r>0}{\iff}\cos^2(\varphi)\sin^2(\varphi)<\cos^2(\theta)\sin^2(\varphi)\underset{\sin^2(\varphi)>0,\varphi\in(0,\frac{\pi}{2})}{\iff}\cos^2(\varphi)<\cos^2(\theta)$$

אז בסך־הכל

$$B=\left\{(r,\theta,\varphi)\in\mathbb{R}^3\mid r>0,\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),\varphi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),\cos^2(\varphi)<\cos^2(\theta)\right\}$$

□

## שאלה 14

מטלה 13 שאלה 7: נחשב את הנפח שכלוא בין הצילינדרים עם $a>0$

$$x^2+y^2=a^2, x^2+z^2=a^2, y^2+z^2=a^2$$

*פתרון:* אני רוצה לחשב את הנפח של

$$A=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2\le a^2, x^2+z^2\le a^2, y^2+z^2\le a^2\right\}$$

כמובן שנשתמש בקורדינאטות גליליות (דה), $x=r\cos(\theta), y=r\sin(\theta), z=z$.
כל הצילנדרים סימטריים ולכן מספיק שנסתכל על אחד הכיוונים, נניח הכיוון שבו $x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$ (יש לנו בסך־הכל $2^3=8$ כיוונים אז נצטרך לכפול בסוף ב־8), וברגע שהגבלנו את עצמנו לציר החיובי אנחנו יודעים בהכרח שמתקיים $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$.
ברור שמתקיים $0\le r=\sqrt{x^2+y^2}<a$ ונשים לב שגם מתקיים

$$\begin{cases} x^2+z^2\le a^2 \implies z\le\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-r^2\cos^2(\theta)} \\ y^2+z^2\le a^2 \implies z\le\sqrt{a^2-y^2}=\sqrt{a^2-r^2\sin^2(\theta)} \end{cases}$$

אנחנו כבר יודעים ש־$\cos(x)\ge\sin(x)$ בקטע $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ ולכן גם בקטע הזה $\sqrt{a^2-x^2}\ge\sqrt{a^2-y^2}$ וזה כמובן סימטרי בקטע השני ולכן פשוט ניקח את אחד מהם ונכפול ב־2.
את סדר האינטגרציה נקבע באמצעות משפט פוביני בהתאם למה שיהיה לנו נוח.

$$8\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-r^2\cos^2(\theta)}}dzdrzd\theta=16\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^a r\sqrt{a^2-r^2\cos^2(\theta)}drd\theta=(\star)$$

נחשב בנפרד כי זה ארוך ונעשה החלפת משתנה

$$\int r\sqrt{a^2-r^2\cos^2(\theta)}dr \underset{\substack{x=a^2-r^2\cos^2(\theta)\\ -\frac{1}{2\cos^2(\theta)}dx=rdr}}{=} \frac{-1}{2\cos^2(\theta)}\int\sqrt{x}dx=-\frac{1}{2\cos^2(\theta)}\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}=\frac{-x^{\frac{3}{2}}}{3\cos^2(\theta)}=\frac{\left(r^2-\frac{a^2}{\cos^2(\theta)}\right)\sqrt{a^2-r^2\cos^2(\theta)}}{3}$$

ובחזרה לעניינו

$$(\star)=16\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{\left(r^2-\frac{a^2}{\cos^2(\theta)}\right)\sqrt{a^2-r^2\cos^2(\theta)}}{3}\right]_{r=0}^{r=a}=\frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(a^2-\frac{a^2}{\cos^2(\theta)}\right)\sqrt{a^2(1-\cos^2(\theta))}+\frac{a^3}{\cos^2(\theta)}d\theta\ (\star\star)$$

גם את האינטגרל הזה אנחנו עוד יודעים לחשב אבל זרקתי למחשבון כי אני לא שונאת את עצמי אז עשינו יחד עבודה מצויינת עם הרבה חילופי משתנה

$$\int\left(a^2-\frac{a^2}{\cos^2(\theta)}\right)\sqrt{a^2(1-\cos^2(\theta))}d\theta\underset{a>0}{=}-\frac{\sqrt{\tan^2(\theta)+1}(a^3\tan^2(\theta)+2a^3)|\tan(\theta)|}{\tan^3(\theta)+\tan(\theta)}$$

ובחזרה למקורות נשים לב שיש לנו פה גם אינטגרל לא אמיתי ובזכות מחשבונים טובים נגלה

$$\lim_{\theta\to 0^+}-\frac{\sqrt{\tan^2(\theta)+1}(a^3\tan^2(\theta)+2a^3)|\tan(\theta)|}{\tan^3(\theta)+\tan(\theta)}=-2a^3$$

ולסיום סיומת

$$(\star)(\star)=\frac{16}{3}\left[-\frac{\sqrt{\tan^2(\theta)+1}(a^3\tan^2(\theta)+2a^3)|\tan(\theta)|}{\tan^3(\theta)+\tan(\theta)}+a^3\tan(\theta)\right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{4}}=\frac{16}{3}\left(\frac{-3\sqrt{2}a^3}{2}+3a^3\right)$$

$$=\frac{16a^3}{3}\left(3\frac{-\sqrt{2}+2}{2}\right)=16a^3\left(\frac{-\sqrt{2}+2}{2}\right)=8a^3\left(2-\sqrt{2}\right)$$

שזו בידיוק הנוסחה מהאינטרנט. $\square$

## שאלה 15

מבחן מועד א' סמסטר א' 2025 שאלה 2: יהי $X$ מרחב מטרי קומפקטי, $Y$ מרחב מטרי כלשהו ו־$f : X \to Y$.
נניח שלכל $x \in X$ קיימת $\delta > 0$ כך שלכל $x' \in B_\delta(x)$ מתקיים $d(f(x), f(x')) < \frac{1}{10}$.
נוכיח שקיימת $\delta > 0$ כך שלכל $x, x' \in X$ עם $d(x, x') < \delta$ מתקיים $d(f(x), f(x')) \le \frac{1}{5}$.

*הוכחה:* נניח שלא ככה, ולכן לא קיימת $\delta > 0$ כזאת.
לכן, לכל $n \in \mathbb{N}$ יש $X \supseteq \in (x_n)_{n=1}^\infty, (y_n)_{n=1}^\infty$ כך ש־$y_n \in B_{\frac{1}{n}}(x_n)$ וגם מתקיים $d(f(x_n), f(y_n)) > \frac{1}{5}$.
$X$ קומפקטי ולכן קומפקטית סדרתית (במרחבים מטריים הטענות הללו שקולות) ולכן ל־$(x_n)_{n=1}^\infty$ יש תת־סדרה מתכנסת $\left(x_{n_k}\right)_{k=1}^\infty$ כך ש־$x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x_0 \in X$.
בפרט, לכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים $y_{n_k} \in B_{\frac{1}{n_k}}\left(x_{n_k}\right)$ ולכן $y_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x_0$ (זה מההגדרה השקולה להתכנסות).
מהנתון, ל־$x_0$ קיימת $\delta > 0$ כך שלכל $x' \in B_\delta(x_0)$ מתקיים $d(f(x_0), f(x')) < \frac{1}{10}$, אבל עבור $k$ גדול מספיק מתקיים $x_{n_{k_0}}, y_{n_{k_0}} \in B_\delta(x_0)$ ואז מתקיים

$$\frac{1}{5} < d\left(f\left(x_{n_{k_0}}\right), f\left(y_{n_{k_0}}\right)\right) \underset{\text{אי-שיוויון המשולש}}{\le} d\left(f\left(x_{n_{k_0}}\right), f(x_0)\right) + d\left(f(x_0), f\left(y_{n_{k_0}}\right)\right) < \frac{1}{10} + \frac{1}{10} < \frac{1}{5}$$

וזאת סתירה. $\square$

## שאלה 16

מבחן מועד א' סמסטר א' 2025 שאלה 4: תהיי $f:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^m$ גזירה. נניח שקיימים $\varepsilon,\delta>0$ ו־$x\in\mathbb{R}^k$ כך שלכל $y\in B_\delta(x)$ מתקיים $\left\|Df_y-Df_x\right\|_{\text{op}}<\varepsilon$.

אז לכל $v_1,\dots,h.cv_k\in\mathbb{R}^k$ עם $\|v_i\|_2<\delta$ ו־$v_1+\cdots+v_k=0$, מתקיים

$$\|f(x+v_1)+\cdots f(x+v_k)-kf(x)\|_2\le\varepsilon\left(\|v_1\|_2+\cdots+\|v_k\|_2\right)$$

*הוכחה:* ראשית, מהנתון $\|v_i\|_<\delta$ נובע ש־$x+v_i\in B_\delta(x)$ (star). שנית, מאי־שיוויון המשולש מתקיים

$$\|f(x+v_1)+\cdots f(x+v_k)-kf(x)\|_2=\left\|\sum_{i=1}^k f(x+v_i)-f(x)\right\|_2=\left\|\sum_{i=1}^k(f(x+v_i)-f(x)+Df_x(v_i))+\sum_{i=1}^k Df_x(v_i)\right\|_2$$

$$\le\left\|\sum_{i=1}^k(f(x+v_i)-f(x)+Df_x(v_i))\right\|+\left\|\sum_{i=1}^k Df_x(v_i)\right\|_2=\left\|\sum_{i=1}^k(f(x+v_i)-f(x)+Df_x(v_i))\right\|+\left\|Df_x\left(\sum_{i=1}^k v_i\right)\right\|_2$$

$Df_x(v)$ לינארית ולכן $\left\|Df_x\left(\sum_{i=1}^k v_i\right)\right\|_2=0$ $v_1+\cdots v_k=0\Longrightarrow$.

נגדיר $g(v)=f(x+v)-f(x)-Df_x(v)$, נשים לב שזו פונקציה על כל $\mathbb{R}^k$ והיא גזירה מאריתמטיקה של פונקציות גזירות , ($Df_x(v)$ זו הנגזרת כיוונית של $f$ בנקודה $x$ בכיוון $v$ ולכן בגלל ש־$f$ גזירה, זה גם גזיר) ולכן ניתן להשתמש במשפט ערך הממוצע: מתקיים

$$\|g(x)-g(y)\|\le\sup_{c\in[a,b]}\|Dg_c\|_{\text{op}}\|x-y\|_2$$

בפרט זה אומר שמתקיים

$$\sum_{i=1}^k\|f(x+v_i)-f(x)-Df_x(v)\|_2=\sum_{i=1}^k\|g(v_i)-g(0)\|_2\le\sum_{i=1}^k\sup_{c\in[0,v_i]}\|Dg_c\|_{\text{op}}\|v_i\|_2$$

אבל $Dg_c=Df_c-Df_x$ ולכן

$$\sum_{i=1}^k\sup_{c\in[0,v_i]}\|Dg_c\|_{\text{op}}\|v_i\|_2=\sum_{i=1}^k\sup_{c\in[0,v_i]}\|Df_c-Df_x\|_{\text{op}}\le\sup_{c\in B_\delta(x)}\|Df_c-Df_x\|_{\text{op}}\cdot\sum_{i=1}^k\|v_i\|_2\underset{\text{מהנתון}}{=}\varepsilon\sum_{i=1}^k\|v_i\|$$

□

## שאלה 17

מבחן מועד א' סמסטר ב' 2022 שאלה 6: נגדיר $H : \Delta_d \to \mathbb{R}$ הנתונה על־ידי

$$H(x_1, \cdots, x_d) = -\sum_{i=1}^{d} x_i \ln(x_i)$$

כאשר $0\ln(0) = 0$ ונתונה

$$\Delta_d := \left\{(x_1, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mid \sum_{i=1}^{d} x_i = 1, x_i \geq 0\right\}$$

נעשה בפעם אחת – גם נמצא האם יש נקודות מינימום/מקסימום פנימיות ב־$\Delta_d^\circ$ וגם המינימום-מקסימום של $H$ בכל $\Delta_d$.

*פתרון:* ראשית נצדיק למה בכלל מתקבלים מינימום-מקסימום: זה בגלל ש־$\Delta_d$ היא סגורה וחסומה ולכן קומפקטית ופונקציה רציפה ($H$ רציפה כסכום של פונקציות רציפות) מקבלת מינימום/מקסימום בקבוצה קומפקטית.

החסומה זה ברור כי $\sum_{i=1}^{d} x_i = 1$ והערכים הם אי־שליליים ולכן $x_i \in [0,1]$ לכל $1 \leq i \leq d$.

נראה שהקבוצה סגורה: ניקח $\left\{(x_n)_1, \cdots, (x_n)_d\right\}$ סדרה ב־$\Delta_d$ כך שמתקיים $\sum_{i=1}^{d} x_n^i = 1 \wedge x_n^i \geq 0$ ונניח שהיא מתכנסת ל־$(x_1, \cdots, x_d)$. מאריתמטיקה של גבולות נקבל

$$x_i = \lim_{n\to\infty} x_n^i \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^{d} x_i = \sum_{i=1}^{d} \lim_{n\to\infty} x_n^i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{d} x_n^i = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

כשהשתמשנו ברציפות של הסכום ולכן $(x_1, \cdots, x_d) \in \Delta_d$ ולכן $\Delta_d$ סגורה וחסומה ולפי משפט היינה־בורל היא קומפקטית (וקומפקטית סדרתית מהשקילות במרחבים מטריים).

$H$ סכום של פונקציות גזירות ולכן גזירה ומתקיים מכללי גזירת מכפלה

$$\nabla(H) = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial x_i} & \cdots & \frac{\partial H}{\partial x_d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\ln(x_1) - 1 & \cdots & -\ln(x_d) - 1 \end{pmatrix}$$

ומתקיים

$$\nabla(H) = 0 \iff \forall\ 1 \leq i \leq d,\ -\ln(x_i) - 1 = 0 \iff \ln(x_i) = -1$$

וזה כמובן היה מיותר כי אין פיתרון ועלינו להשתמש שיטת כופלי לגראנז' כדי לאלץ שהפיתרון יהיה על $\Delta_d$, כלומר נגדיר את האילוץ

$$g(x_1, \cdots, x_d) = \sum_{i=1}^{d} x_i - 1,\ \nabla(g) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

משיטת כופלי לגראנז' נקבל

$$\nabla(g) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \nabla(H) = -\lambda\nabla(1, \cdots, 1) \iff \ln(x_i) + 1 = \lambda \iff \ln(x_i) = \lambda - 1 \iff x_i = e^{\lambda - 1}$$

אבל מתקיים

$$\sum_{i=1}^{d} x_i = 1 \Longrightarrow de^{\lambda-1} = 1 \iff e^{\lambda-1} = \frac{1}{d} \Longrightarrow x_i = \frac{1}{d}$$

ולכן יש לנו נקודה חשודה אחת לקיצון $\begin{pmatrix} \frac{1}{d} & \cdots & \frac{1}{d} \end{pmatrix}$ והיא מקיימת את כל התנאים של $\Delta_d$, והיא כמובן נקודה פנימית אם בוחרים $\varepsilon < \frac{1}{d}$ וגם $x_i > 0$.

בשביל נקודות על השפה, זה רק המקרים בהם $x_i = 0$ ולכן יש לנו $k \in \{0, \cdots, d-1\}$ קורדינאטות שאינן מתאפסות.

אם $k = 0$ אז ברור שנקבל מינימום כי יצא $H(0) = 0$ וזה מינימום (כי $0 \leq x_i \leq 1$ ולכן $\ln(x_i) \leq 0$ כלומר $x_i \ln(x_i) \leq 0$ ולכן $H(x_1, \cdots, x_d) \geq 0$).

אם יש $k$ קורדינאטות שלא מתאפסות, אפשר לחזור על כל התהליך ממקודם עם ולהחליף את $d$ עם $k$ (כי בכל מקר 0־ים בסכום לא משנים את הסכום) וכנראה ששוב נקבל שכל הקורדינאטות צריכות להיות שוות זו לזו.

אז $-\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{k} \ln\left(\frac{1}{k}\right)$ ו־$\ln(x)$ מונוטונית עולה ממש ולכן נקבל מקסימום עבור $x_i = \frac{1}{d}$ לכל $1 \leq i \leq d$. $\square$

## שאלה 18

מבחן מועד א' סמסטר ב' 2022 שאלה 7: יהי $(X,d)$ מרחב מטרי קומפקטי. תהיי $f:K\to K$ פונקציה כך שלכל $x,y\in K$ מתקיים $d(f(x),f(y))<d(x,y)$.

### סעיף א'

נוכיח כי ל־$f$ יש לכל היותר נקודת שבת אחת ב־$K$.

*הוכחה:* נניח בשלילה שגם $x,y\in K$ הן נקודות שבת, קרי $f(x)=x,f(y)=y$. אזי מתקיים

$$d(x,y)=d(f(x),f(y))<d(x,y)$$

מהנתון וזאת כמובן סתירה. $\square$

### סעיף ב'

נוכיח כי ל־$f$ יש נקודת שבת ב־$K$.

*הוכחה:* $K$ קומפקטית ובמרחבים מטריים קומפקטית סדרתית וקומפקטית הם שקולים ולכן קומפקטית סדרתית, על־כן לכל סדרה יש תת־סדרה מתכנסת והמרחב חסום וסגור.

נעזר ברמז ונגדיר $h(x)=d(x,f(x))$, זו פונקציה רציפה מאריתמטיקה של פונקציות רציפות (פונקציית המרחק רציפה) ופונקציה רציפה על מרחב קומפקטי מקבלת מינימום, נסמנו ב־$m$ ולכן יש $x_0\in K$ כך שמתקיים $h(x_0)=m$.

נניח בשלילה ש־$m\neq 0$, ולכן מתקיים

$$h(f(x_0))=(f(x_0),f(f(x_0)))\underset{\text{העתקה מכווצת}}{<}d(x_0,f(x_0))=h(x_0)=m$$

אבל זאת סתירה להנחה ש־$m$ הוא המינימום של $h$! ולכן בהכרח מתקיים $h(x_0)=d(x_0,f(x_0))=0$ וזה קורה אם ורק אם $f(x_0)=x_0$, קרי זאת נקודת שבת. $\square$

## שאלה 19

מבחן מועד א' סמסטר ב' 2022 שאלה 9: תהיי

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\right\}$$

ותהיי $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ הנתונה על־ידי

$$f(x, y) = (x - y, y^2)$$

נוכיח שלקבוצה $f(A)$ יש שטח ("נפח ב-$\mathbb{R}^2$") ונמצא את $\operatorname{Area}(f(A))$.

*פתרון:* קצת אלתור עם כלים של אנליזה2.

ראשית נשים לב ש-$A$ היא קבוצה קומפקטית כי זה החצי העליון של מעגל היחידה.

נרצה להשתמש במשפט החלפת משתנה כדי לבטא מחדש את $f$, נגדיר $u = x - y, v = y^2$ ולכן

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2y \end{pmatrix} \Longrightarrow \det(J) = 2y$$

אז אנחנו רוצים לחשב את

$$\operatorname{Area}(f(A)) = 2\int_A y dA \underset{\text{מעבר לקוטביות}}{=} 2\int_0^\pi \int_0^1 r^2 \sin(\theta) dr d\theta = \int_0^\pi \frac{\sin(\theta)}{3} d\theta = \frac{2}{3}$$

$\square$

## שאלה 20

מבחן מועד א' סמסטר ב' 2022 שאלה 10: תהיי $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ המוגדרת על־ידי

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{y^3x^2}{x^8+y^4} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

### סעיף א'

נוכיח שכל הנגזרות הכיווניות של $f$ קיימות ב־$(0,0)$ (רשום במבחן $y$ במקום $f$ אבל זאת טעות).

*הוכחה:* יהי $\vec{v}=(a,b)\in\mathbb{R}^2$ ונראה שהנגזרת הכיוונית של $f$ בכיוון $v$ קיימת בראשית, כלומר קיים הגבול

$$\lim_{t\to0}\frac{f(0+tv)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{f(ta,tb)}{t}$$

נשים לב שהמקרה של $a=0\vee b=0$ סימטריים ולכן בלי הגבלת הכלליות $b=0$ ומתקיים

$$\lim_{t\to0}\frac{\frac{0}{t^8a^8}}{t}=0=\frac{\lim_{t\to0}}{t^9a^8}=0$$

כעת נניח ש־$a\neq0\wedge b\neq0$ ולכן מתקיים

$$\lim_{t\to0}\frac{\frac{t^5b^3a^2}{a^8t^8+b^4t^4}}{t}=\frac{\cancel{t^5}b^3a^2}{\cancel{t^5}(t^4a^8+b^4)}=\lim_{t\to0}\frac{b^3a^2}{t^4a^8+b^4}=\frac{b^3a^2}{b^4}=\frac{a^2}{b}$$

מצאנו שבכל מקרה הגבול קיים ולכן לכל כיוון הנגזרת הכיוונית של $f$ קיימת בראשית. $\square$

### סעיף ב'

נקבע האם $f$ דיפרנציאבילית ב־$(0,0)$.

*הוכחה:* נזכר שפונקציה דיפרנציאבילית בנקודה היא רציפה בנקודה ו־$f$ בכלל לא רציפה בראשית, אפשר לראות את זה עם עיקרון היינה לרציפות:
נבחר $x_n=\frac{1}{n},y_n=\frac{1}{n^2}$ ומתקיים

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(y_n)^3(x_n)^2}{(x_n)^8+(y_n)^4}=\frac{\frac{1}{n^6}\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^8}+\frac{1}{n^8}}=\frac{\frac{\frac{1}{n^8}}{2}}{n^8}=\frac{1}{2}\neq0$$

שזה הערך של הפונקציה בראשית ולכן בוודאי שלא רציפה, ובטח שלא דיפרנציאבילית. $\square$

## שאלה 21

שאלה של דניאל: לנסח את הנוסחה של פיתוח פולינום טיילור מסדר 2 ולחשב את הפולינום טיילור מסדר 2 סביב הראשית של $f(x,y)=e^{x^2+xy}$.

*הוכחה:* הנוסחה נתונה על־ידי

$$P_{f,2,(a,b)}(x,y)=f(a,b)+Df_{(a,b)}\begin{pmatrix}x-a\\y-b\end{pmatrix}+\frac{1}{2}(x-a\ \ y-b)D^2f_{(a,b)}\begin{pmatrix}x-a\\y-b\end{pmatrix}$$

$f$ כמובן גזירה אינסוף פעמים כחלקה, אבל בשביל המקרה שלנו נשים לב שמתקיים

$$\frac{\partial f}{\partial x}=e^{x^2+xy}(2x+y),\ \frac{\partial f}{\partial y}=xe^{x^2+xy}\Longrightarrow Df_{(x,y)}=\begin{pmatrix}e^{x^2+xy}(2x+y) & xe^{x^2+xy}\end{pmatrix}$$

הנגזרת החלקיות רציפות בראשית ולכן לפי תנאי מספיק לדיפרנצאביליות הפונקציה $f$ גזירה בראשית.
נחשב נגזרות שניות ונגזרות מעורבות (אלו כמובן גם פונקציות גזירות) ונשים לב שהנגזרות המעורבות תהיינה שוות

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}=(2x+y+2)^2e^{x^2+xy},\ \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}=x^2e^{x^2+xy},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=xe^{x^2+xy}(2x+y)+e^{x^2+xy}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$$

$$\Longrightarrow D^2f_{(x,y)}=\begin{pmatrix}(2x+y+2)^2e^{x^2+xy} & xe^{x^2+xy}(2x+y)+e^{x^2+xy}\\ xe^{x^2+xy}(2x+y)+e^{x^2+xy} & x^2e^{x^2+xy}\end{pmatrix}$$

כאשר $\partial x\partial y$ זה אומר קודם כל לפי $x$ ואז לפי $y$.
נציב את הנקודה שלנו

$$Df_{(0,0)}=(0\ \ 0),D^2f_{(0,0)}=\begin{pmatrix}2&1\\1&0\end{pmatrix}$$

אז פולינום טיילור יהיה

$$P_{f,2,(0,0)}(x,y)=1+(x\ \ y)\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=1+\begin{pmatrix}x+\frac{y}{2} & \frac{x}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=1+\frac{(2x+y)x}{2}+\frac{yx}{2}$$

$\square$

## שאלה 22

מבחן מועד ב' סמסטר ב' 2022 שאלה 6: נמצא את המינימום של $f(x,y,z)=x^2+8y^2+27z^2$ תחת האילוץ

$$A:=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1, x,y,z>0\right\}$$

*פתרון:* ראשית $f$ רציפה וגזירה מאריתמטיקה של פונקציות גזירות ובפרט מתקיים

$$\nabla f(x,y,z)=(2x\ \ 16y\ \ 54z)\Longrightarrow \nabla f(x,y,z)=0\Longleftrightarrow x=y=z=0$$

ונשים לב ש־$(0,0,0)\notin A$, אז גם אם מתקבל קיצון מינימלי ל־$f$ הוא חייב להיות על השפה של $A$.
נשים לב שהתחום $A$ הוא תחום שאינו חסום (אולי סגור) ולכן אי אפשר להפעיל את משפט כופלי לגראנז' עליו ישירות.
אין לי כח להשתמש בלגראנז'יאן כי זה ארוך, אבל נשים לב שמכך ש־$1=\frac{1}{z}+\frac{1}{y}+\frac{1}{x}$ נובע ש־$0<\frac{1}{x},\frac{1}{y},\frac{1}{z}<1$ ולכן $x,y,z>1$ ובפרט $f(x,y,z)>1^2+8\cdot1^2+27\cdot1^2=36$ ולכן בהכרח $f$ חסומה מלרע תחת האילוץ על $A$ והפונקציה היא אי־שלילית לכן היא רק עולה, אז נוכל ליצור קבוצה שעליה נבחן את ההתניות שלנו.
בנוסף, אם ניקח $x=100$ אז $f(x,y,z)>x^2=100^2$ ומצד שני $f(3,3,3)=3^2+8\cdot3^2+27\cdot3^2=324<100^2$ אז גם אם יש מינימום הוא כבר לא יתקבל, אז נגדיר

$$A'=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x,y,z\leq 100\right\}$$

שהיא סגורה וחסומה ולכן אם מתקבל עליה מינימום (כי $f$ רציפה ואפשר משיטת כופלי לגראנז') אז אותו מינימום יהיה אם מתאים לתנאי $A$ גם המינימום של $A$.
אז נגדיר $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ על־ידי $g(x,y,z)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-1$ זו פונקציה רציפה וגזירה ומתקיים $\nabla g(x,y,z)=\left(-\frac{1}{x^2},-\frac{1}{y^2},-\frac{1}{z^2}\right)$
ונשתמש בשיטת כופלי לגראנז' (כבר פסלנו את הראשית כמובן ולכן החלוקה מוגדרת היטב)

$$\nabla f(x,y,z)=\lambda\nabla g(x,y,z)\Longrightarrow\begin{cases}2x=-\frac{\lambda}{x^2}\\16y=-\frac{\lambda}{y^2}\\54z=-\frac{\lambda}{z^2}\end{cases}\Longrightarrow 2x^3=16y^3=54z^3\Longleftrightarrow x^3=8y^3=27z^3\Longleftrightarrow x=2y=3z$$

כאשר הפעולה של לקחת שורש הוגדרה היטב כי $x,y,z>0$ ובפרט לקחנו את השורשים החיוביים של המקדמים.
עלינו לוודא שמתקיים האילוץ $g=0$ ולכן ממה שמצאנו נובע ש־$z=\frac{x}{3},y=\frac{x}{2}$ ולכן בהצבה ב־$g$ נקבל

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{\frac{x}{2}}+\frac{1}{\frac{x}{3}}-1=0\Longleftrightarrow\frac{1}{x}+\frac{2}{x}+\frac{3}{x}=1\Longleftrightarrow 6=x$$

ולכן $x=6,z=2,y=3$ ואכן $\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}+\frac{2}{6}+\frac{3}{6}=\frac{6}{6}=1$.
מצאנו רק נקודה אחת חשודה ואפשר לראות די בקלות שהיא מינימום ולכן $(6,2,3)$ מינימום מקומי ו־$f(6,2,3)=216$ $\square$

## שאלה 23

מבחן מועד ב' סמסטר ב' 2022 שאלה 7: נראה שקיימת פונקציה יחידה $f \in C([0,1])$ כך שמתקיים

$$f(x) = x + \frac{xf(\sqrt{x}) + (1-x)f(x^2)}{2}$$

לכל $x \in [0,1]$.

*הוכחה:* צועק משפט העתקה מכווצת.

נזכר שמעל $C([0,1])$ אנחנו עובדים עם $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]}|f(x)|$.

נגדיר $T : C([0,1]) \to C([0,1])$ על־ידי

$$T(f)(x) = x + \frac{xf(\sqrt{x}) + (1-x)f(x^2)}{2}$$

נשים לב שמתקיים עבור $g, f \in C([0,1])$ ולכל $x \in [0,1]$

$$\begin{aligned}
\|T(f)(x) - T(g)(x)\|_\infty &= \left\| x + \frac{xf(\sqrt{x}) + (1-x)f(x^2)}{2} - x - \frac{xg(\sqrt{x}) + (1-x)g(x^2)}{2} \right\|_\infty \\
&= \frac{1}{2}\left\| xf(\sqrt{x}) + (1-x)f(x^2) - xg(\sqrt{x}) - (1-x)g(x^2) \right\|_\infty \\
&\underset{\substack{\text{אי־שיוויון} \\ \text{המשולש}}}{\leq} \frac{1}{2}\left( \left\| xf(\sqrt{x}) - xg(\sqrt{x}) \right\|_\infty + \left\| (1-x)f(x^2) - (1-x)g(x^2) \right\|_\infty \right) \\
&\underset{x\in[0,1]}{\leq} \frac{1}{2}\left( x\left\| f(\sqrt{x}) - g(\sqrt{x}) \right\|_\infty + (1-x)\left\| f(x^2) - g(x^2) \right\|_\infty \right) \\
&\leq \frac{1}{2}(x\|f-g\|_\infty + (1-x)\|f-g\|_\infty) = \frac{1}{2}\|f-g\|_\infty
\end{aligned}$$

אז $T$ היא העתקה מכווצת ולכן יש לה נקודת שבת אחת, קרי יש פונקציה אחת המקיימת את הנדרש.

**הנתון על הרציפות הוא הכרחי:** כי $\infty = \frac{1}{2} \cdot \infty$. $\square$

## שאלה 24

מבחן מועד ב' סמסטר ב' 2022 שאלה 8.

### סעיף א'

נחשב את נפח הקבוצה $A := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 4, x^2+y^2 \leq 1\right\}$ ונסביר למה הנפח קיים.

*פתרון:* פתרתי על דף.

הנפח קיים כי $A$ היא חיתוך של גרפים ועל־כן היא ממידה אפס והיא גם קומפקטית (קל לראות את הסגורה והסומה) ובתרגול ראינו שקבוצות קומפקטיות ממידה אפס הן מתכולה אפס ועל־כן בעלות נפח (קבוצה מתכולה אפס היא בהכרח חסומה וממידה אפס). אפשר לעבור גם לגלילות וגם לכדוריות אז האחד של כדוריות מסובך יותר, האינטגרלים הם בכל אופן

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} rdzdrd\theta$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\min\left(2,\frac{1}{\sin(\varphi)}\right)} r^2\sin(\varphi)drd\varphi d\theta$$

$\square$

### סעיף ב'

נחשב את האינטגרל

$$\int_0^1\left(\int_y^1 e^{-x^2}\right)dxdy$$

*הוכחה:* ראשית $e^{-x^2}$ פונקציה רציפה ולכן אינטגרבילית, אבל זאת לא פונקציה אלמנטרית אז אנחנו לא יודעים לאנטגרל אותה ולכן עלינו להשתמש במשפט פוביני.

נצטרך לעשות שינוי של התחום, נשים לב שכרגע $0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq 1$ וזה עושים קודם לפני $x$ ואז לפי $y$ ואנחנו רוצים קודם לפי $y$ ואז לפני $x$.

קיבענו את $0 \leq x \leq 1$ ולכן $0 \leq y \leq x$ (אפשר לראות את זה גם על תזוזה על המשולש התחתון שחוצה את ריבוע היחידה) ולכן

$$\begin{aligned}
\int_0^1\left(\int_y^1 e^{-x^2}\right)dxdy &= \int_0^1\int_0^x e^{-x^2}dydx \\
&= \int_0^1 \left[ye^{-x^2}\right]_{y=0}^{y=x}dx \\
&= \int_0^1 xe^{-x^2}dx \\
&\underset{\substack{u=-x^2 \\ du=-2xdx}}{=} \int_0^1 -\frac{e^u}{2}du \\
&= \left[-\frac{1}{2}e^u\right]_{u=0}^{u=1} \\
&= \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_{x=0}^{x=1} \\
&= \frac{1-e^{-2}}{2}
\end{aligned}$$

$\square$

## שאלה 25

מבחן מועד ב' סמסטר ב' 2022 שאלה 9: תהיי $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ ו־$h : A \to \mathbb{R}^2$ הפונקציה הנתונה על־ידי

$$h(x,y) = (y^2\cos(x), y\sin(x))$$

### סעיף א'

נוכיח שלכל נקודה $p \in A$ יש סביבה פתוחה $p \in U$ כך ש־$h|_U : U \to h(U)$ הפיכה.

*הוכחה:* צועק משפט הפונקציה ההפוכה.

נסמן לנוחות $h_1(x,y) = y^2\cos(x), h_2(x,y) = y\sin(x)$ ואז

$$Dh_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x} & \frac{\partial h_1}{\partial y} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x} & \frac{\partial h_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y^2\sin(x) & 2y\cos(x) \\ y\cos(x) & \sin(x) \end{pmatrix}$$

ומתקיים

$$J\Big(Dh_{(x,y)}\Big) = \det\begin{pmatrix} -y^2\sin(x) & 2y\cos(x) \\ y\cos(x) & \sin(x) \end{pmatrix} = -y^2\sin^2(x) - 2y^2\cos^2(x) = -y^2(\sin^2(x) + 2\cos^2(x))$$

נטען ש־$J\Big(Dh_{(x,y)}\Big) \neq 0$: זה נובע מכך ש־$y > 0$ וכן $\sin^2(x) + 2\cos^2(x) > 0$ כסכום של שתי פונקציות אי־שליליות (זה בהכרח גדול מ־0 בגלל המחזוריות של פונקציות סינוס וקוסינוס).

כמובן ש־$h$ גזירה ברציפות כי נגזרתה מורכבות מפונקציות רציפות ועל־כן כל התנאים של משפט הפונקציה ההפוכה מתקיימים ולכן הנדרש קיים. □

### סעיף ב'

נמצא את $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid h(x,y) = (1,0)\}$.

*הוכחה:* אנחנו מחפשים מתי

$$\begin{cases} y^2\cos(x) = 1 \\ y\sin(x) = 0 \end{cases}$$

$y$ גדול מאפס ולכן $x \in \pi k \iff y\sin(x) = 0$ עבור $k \in \mathbb{Z}$ ולכן $y^2\cos(\pi k) = 1$ אבל $\cos(\pi k) = (-1)^k$ ולכן $y^2(-1)^k = 1$, אבל $y > 0$ ולכן $k$ חייב להיות זוגי ולכן $y^2 = 1$ ועל־כן $y = 1$.

אז כלל הפתרונות הם מהצורה $x = 2\pi k, y = 1$. □

### סעיף ג'

עבור כל $p \in S$ נסמן ב־$g$ את הצמצום של $h$ לסביבה $p \in U$ בה $h|_U$ הפיכה ונסמן $q = g^{-1}$. נמצא את $(Dq)_{(1,0)}$.

*הוכחה:* נזכר שמהגדרה מתקיים

$$(Dq)_{(1,0)} = (Dh)^{-1}_{(1,0)}$$

נשים לב שמתקיים

$$Dh_{(0,1)} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \implies \det\Big(Dh_{(0,1)}\Big) = -2$$

והמטריצה ההפיכה הנדרשת מתקבלת לפי

$$\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \implies -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

□

## שאלה 26

מבחן מועד ב' סמסטר ב' 2022 שאלה 10.

### סעיף א'

נוכיח כי האינטגרל הלא נאות הבא קיים ונחשב את ערכו

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{\left(1+4x^2+9y^2\right)^3} dxdy$$

*פתרון*: ראשית $f(x,y) = \frac{1}{\left(1+4x^2+9y^2\right)^3}$ היא פונקציה רציפה ואי־שלילית.
נשים לב ש־$C_N = [N, N+1]$ היא סדרת מיצוי

$$\int_{C_N} \frac{1}{\left(1+4x^2+9y^2\right)^3} dxdy = \int_N^{N+1} \int_N^{N+1} \frac{1}{\left(1+4x^2+9y^2\right)^3} dxdy$$

$\square$