פתרון מטלה 04 — תורת ההסתברות 1, 80420

27 בנובמבר 2025

שאלה 1

עבור $i \in \{1,2\}$, תהיי $\Omega_i \subset \mathbb{R}$ ותהיי $\mathbb{P}_i$ פונקציית הסתברות בדידה על Ω_i ותהיי $X_i : \Omega_i \to \mathbb{R}$ פונקציית הזהות, כלומר $X_i(\omega) = \omega$.
נראה כי הבאים שקולים

1. $X_1 \overset{d}{=} X_2$
2. $S \subset \Omega_1 \cap \Omega_2$ קבוצה בת־מנייה או סופית המקיימת $S = \operatorname{supp}(P_1) = \operatorname{supp}(P_2)$ ולכל $x \in S$ מתקיים $\mathbb{P}_1(\{x\}) = \mathbb{P}_2(\{x\})$

הוכחה:

נניח את (1) ונראה $1 \implies 2$:
מהגדרת שיוויון בהתפלגות, מתקיים $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_2$.
נגדיר $S = \operatorname{supp}(\mathbb{P}_1) = \operatorname{supp}(\mathbb{P}_2)$ ומהיות $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2$ פונקציות הסתברות בדידות, ראינו בהרצאה (וטענה 1.12 בספר) שהתומך שלהן הוא בן־מנייה.
מהיות $S \subseteq \Omega_1, \Omega_2$ בפרט נובע $S \subseteq \Omega_1 \cap \Omega_2$ ו־S בת־מנייה ומתקיים מהיות X_i פונקציית הזהות

$$P_1(X_1 = x) = \mathbb{P}(\{y \in S \mid y \in X_1^{-1}(x)\}) = \mathbb{P}(\{y \in S \mid x = y\}) = \mathbb{P}_1(x)$$
$$P_2(X_2 = x) = \mathbb{P}(\{y \in S \mid y \in X_2^{-1}(x)\}) = \mathbb{P}(\{y \in S \mid x = y\}) = \mathbb{P}_2(x)$$

$\implies$ נניח את (2) ונראה $2 \implies 1$:
נשים לב שראינו מקודם שלכל $x \in S$ מתקיים $\mathbb{P}_1(X_1 = x) = \mathbb{P}_1(x)$ וגם $\mathbb{P}_2(X_2 = x) = \mathbb{P}_2(x)$ ולכן מספיק שנראה לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $\mathbb{P}_1(x) = \mathbb{P}_2(x)$.
אם $x \in \mathbb{R} \setminus S$ אזי $P_1(x) = 0 = P_2(x)$ מהגדרת התומך ומההנחה לכל $x \in S$ מתקיים $\mathbb{P}_1(x) = \mathbb{P}_2(x)$ ולכן נובע ישירות $X_1 \overset{d}{=} X_2$. $\square$

שאלה 2

סעיף א'

נוכיח שאם $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה חד־חד ערכית, אזי $X\overset{d}{=}Y$ אם ורק אם $f(X)\overset{d}{=}f(Y)$.

הוכחה: הכיוון שאם $X\overset{Y}{=}$ אז $f(X)\overset{d}{=}f(Y)$ הוכח בכיתה לכל $f\in\mathcal{F}_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}$, אז נוכיח רק את הכיוון השני.

יהי $x\in\mathbb{R}$, אם קיים $y\in\mathbb{R}$ כך ש־$x=f(y)$ אז

$$\mathbb{P}(f(X)=f(y))=\mathbb{P}(f(Y)=f(y))\Longrightarrow\mathbb{P}(X=x)=\mathbb{P}(Y=x)$$

מהחד־חד ערכיות.

אם לא קיים $y\in\mathbb{R}$ כזה, מתקיים $A=\{\omega\in\Omega\mid\omega=X^{-1}(f^1(x))\}=\emptyset$ כלומר $\mathbb{P}(X=x)=\mathbb{P}(\emptyset)=0$. $\square$

סעיף ב'

נפריך את הטענה אם $X\overset{d}{=}Y$ אזי $\mathbb{P}(X=Y)>0$.

הוכחה: ניקח את מרחב ההסתברות של הטלת מטבע הוגן פעם אחת ונגדיר

$$X(\omega)=\begin{cases}1 & \omega=H\\ 0 & \omega=T\end{cases},\ Y(\omega)=\begin{cases}1 & \omega=T\\ 0 & \omega=H\end{cases}$$

בעצם הפונקציות המציינות של עץ ופלי בהתאמה.

$$\mathbb{P}(X=1)=\mathbb{P}(\{H\})=\frac{1}{2},\ \mathbb{P}(X=0)=\mathbb{P}(\{T\})=\frac{1}{2},\ \mathbb{P}(Y=1)=\mathbb{P}(\{T\})=\frac{1}{2},\ \mathbb{P}(Y=0)=\mathbb{P}(\{H\})=\frac{1}{2}$$

כלומר לכל $k\in\{0,1\}$ מתקיים $\mathbb{P}(X=k)=\mathbb{P}(Y=k)$ ולכן $X\overset{d}{=}Y$.

מצד שני, מתקיים

$$\mathbb{P}(X=Y)=\mathbb{P}(\{\omega\in\Omega\mid X(\omega)=Y(\omega)\})=\mathbb{P}(\emptyset)=0$$

$\square$

סעיף ג'

נסתור את הטענה שאם $X\overset{d}{=}Y$ וגם X,Y בלתי־תלויים אזי $\mathbb{P}(X=Y)>0$.

הוכחה: ניקח מרחב הסתברות של הטלת שתי קוביות הוגנות ונגדיר את המשנים המקריים

$$X(n,m)=n,\ Y(n,m)=m+6$$

ומתקיים

$$\mathbb{P}(X)=\frac{|\{(x,m)\mid m\in[6]\}|}{36}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$
$$\mathbb{P}(Y=y)=\frac{|\{n,y-6\}\mid n\in[6]|}{36}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

נשים לב שהם בלתי־תלויים שכן

$$\mathbb{P}(X=x,Y=y)=\mathbb{P}((x,y-6))=\frac{1}{36}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\mathbb{P}(X=x)\mathbb{P}(Y=y)$$

וכן $X\overset{d}{=}Y$, מצד שני

$$\mathbb{P}(X=Y)=\mathbb{P}(\{\omega\in\Omega\mid X(\omega)=Y(\omega)\})=\mathbb{P}(\{1,2,3,4,5,6\}\cap\{7,8,9,10,11,12\})=\mathbb{P}(\emptyset)=0$$

$\square$

סעיף ד'

נוכיח שאם X בלתי־תלוי בעצמו אז קיים $c \in \mathbb{R}$ שעבורו $\mathbb{P}(X = C) = 1$.

הוכחה: תהיינה $A, B \subseteq \mathbb{R}$, מהנתון על אי־תלות מתקיים

$$\mathbb{P}(X \in A, X \in B) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(X \in B)$$

נבחר $A = B = \{x\}$ יחידון, מתקיים

$$\mathbb{P}(X = x, X = x) = \mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(X = x)^2$$

כלומר $p_x \in \{0, 1\} \iff p_x = p_x^2$ אבל

$$\sum_{x \in \mathbb{R}} \mathbb{P}(X = x) = 1$$

ואמרנו $\mathbb{P}(X = x) = 0$ או $\mathbb{P}(X = x) = 1$ ולכן קיים בידיוק $x \in \mathbb{R}$ יחיד עבורו מתקיים $\mathbb{P}(X = c) = 1$ (במילים אחרות, $X \overset{a.s.}{=} c$). $\square$

סעיף ה'

נוכיח שאם $X^2 \overset{\text{def}}{=} X$ אז קיים $p \in [0, 1]$ שעבורו $X \sim Ber(p)$.

הוכחה: מתקיים

$$\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(X^2 = x) \iff \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}) = \mathbb{P}\big(\{\omega \in \Omega \mid X^2(\omega = x)\}\big)$$

עבור $x \in \{0, 1\}$ מתקיים $X(\omega) = X^2(\omega)$ ואם $x \notin \{0, 1\}$ מתקיים

$$\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}\big(X = \sqrt{x}\big) = \mathbb{P}\big(X = \sqrt[4]{x}\big) \cdots$$

אם $\mathbb{P}(X = x) \neq 0$ אז $\mathbb{P}(\Omega) = \infty$ בסתירה להגדרת פונקציית ההסתברות ולכן $\mathbb{P}(X = x) = 0$, ולכן גם $\mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) = 1$ ולכן קיים $p \in [0, 1]$ כך ש־$X \sim Ber(p)$. $\square$

שאלה 3

יהיו X, Y, Z משתנים מקריים המקיימים $X \overset{a.s}{=} Y$.

סעיף א'

נראה כי לכל פונקציה $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ מתקיים $f(X) \overset{a.s.}{=} f(Y)$.

הוכחה: מכך שמתקיים $X \overset{a.s.}{=} Y$ נובע שמתקיים $\mathbb{P}(X = Y) = \mathbb{P}(\{\omega \in X(\omega) = Y(\omega)\}) = 1$, כלומר $\mathbb{P}(X \neq Y) = 0$ מהגדרת המשלים.
נסמן

$$N \coloneqq \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \neq Y(\omega)\}$$

נרצה להראות ש-$\mathbb{P}(f(X) \neq f(y)) = 0$, אז נגדיר

$$N_f \coloneqq \{\omega \in \Omega \mid f(X(\omega)) \neq f(Y(\omega))\}$$

אם $\omega \in N$, מתקיים $X(\omega) \neq Y(\omega)$ ויכול להיות $f(X(\omega)) \neq f(Y(\omega))$ ויכול להיות $f(X(\omega)) \neq f(Y(\omega))$.
אם $\omega \notin N$ מתקיים $X(\omega) = Y(\omega)$ כמספרים ממשיים ולכן מהגדרת הפונקציה נובע שמתקיים בהכרח $f(X(\omega)) = f(Y(\omega))$, כלומר אם $\omega \notin N$ אז בהכרח $\omega \notin N_f$.
כלומר בהכרח מתקיים $N_f \subseteq N$ וממונוטוניות פונקציית ההסתברות מתקיים $\mathbb{P}(N_f) \leq \mathbb{P}(N) = 0$. $\square$

סעיף ב'

נוכיח שאם $Y \overset{a.s.}{=} Z$ אז $Z \overset{a.s.}{=} X$.

הוכחה: נרצה להראות שאם $\mathbb{P}(X \neq Y) = 0$ וגם $\mathbb{P}(Y \neq Z) = 0$ אזי $\mathbb{P}(X \neq Z) = 0$, בדומה לסעיף הקודם נגדיר

$$N_{X,Y} \coloneqq \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \neq Y(\omega)\}$$

$$N_{Y,Z} \coloneqq \{\omega \in \Omega \mid Y(\omega) \neq Z(\omega)\}$$

נסתכל על $N = N_{X,Y} \cup N_{Y,Z}$ כלומר

$$N = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \neq Y(\omega) \vee Y(\omega) \neq Z(\omega)\}$$

מחסם האיחוד מתקיים

$$0 \underset{\text{הסתברות אי-שלילית}}{\leq} \mathbb{P}(N) = \mathbb{P}(N_{X,Y} \cup N_{Y,Z}) \leq \mathbb{P}(N_{X,Y}) + \mathbb{P}(N_{Y,Z}) = 0 + 0 = 0$$

אז $\mathbb{P}(N) = 0$.
נסתכל על N^c: אם $\omega \in N^c$ אזי $\omega \notin N_{X,Y}, N_{Y,Z}$ ולכן $X(\omega) = Y(\omega)$ וכן $Y(\omega) = Z(\omega)$, אבל כפונקציות מעל הממשיים יש לנו טרנזטיביות כלומר $X(\omega) = Z(\omega)$ וזה גורר שעבור הקבוצה

$$N_{X,Z} \coloneqq \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \neq Z(\omega)\}$$

מתקיים $N_{X,Z} \subseteq N$ ושוב ממונוטוניות פונקציית ההסתברות מתקיים $\mathbb{P}(N_{X,Z}) \leq \mathbb{P}(N) = 0$ כלומר $\mathbb{P}(X \neq Z) = 0$ ולכן $X \overset{a.s.}{=} Z$. $\square$

שאלה 4

ניתן דוגמה למרחב הסתברות, למשתנים מקריים עליו X,Y ולפונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ כך שיתקיים

$$f(X)\overset{a.s.}{=}f(Y),\ \ X\overset{a.s.}{\neq}Y,\ \ f(X)\neq f(Y)$$

פתרון: נגדיר $\Omega=[6]$ מרחב ההסתברות של הטלת קובייה **לא הוגנת** כך ש-$p(1)=0,p(n)=\frac{1}{5}$ לכל $n\in\{2,3,4,5,6\}$.
נגדיר את המשתנים המקריים

$$X=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,6),(6,5)\},\ \ Y=\{(1,-1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$$

מתקיים

$$\mathbb{P}(X=Y)=\mathbb{P}(\{\omega\in\Omega\mid X(\omega)=Y(\omega)\})=p(2)+p(3)+p(4)=\frac{3}{5}\neq 1\Longrightarrow X\overset{a.s.}{\neq}Y$$

נגדיר

$$f(y)=\begin{cases}6 & y=5\\ y & y\neq 5\end{cases}$$

ולכן

$$f(X)=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(6,6)\}\neq\{(1,-1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,6)(6,6)\}=f(Y)$$

אבל מתקיים

$$\mathbb{P}(X=Y)=p(2)=p(3)=p(4)+p(5)+p(6)=1\Longrightarrow f(X)\overset{a.s.}{=}f(Y)$$

□

שאלה 5

מטילים שלוש קוביות הוגנות ונסמן ב־X_i את המשתנה המקרי שמחזיר את התוצאה בקוביה ה־i.
נגדיר את הוקטור המקרי $X = (X_1, X_2, X_3)$ ונסמן ב־$S \subseteq \mathbb{R}^3$ את הקבוצה $S = \{(a, a+1, a+2) \mid a \in \mathbb{R}\}$ ונחשב את ההסתברות למאורע $X \in S$.

פתרון: נשים לב

$$S = \{(1,2,3), (2,3,4), (3,4,5), (4,5,6)\}$$

ולכן

$$\mathbb{P}_X(S) = \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot 4 \cdot \frac{1}{6^3} = \frac{1}{54}$$

זה פשוט נובע מהסתברות אחידה יחד עם חישוב של הוקטור בהתאם למרחב הסתברות שלנו (כל שאר המאורעות הם עם הסתברות 0). $\square$

שאלה 6

נתאר את ההתפלגות המשותפת של שני משתנים מקריים $X_1 \sim Ber\left(\frac{1}{2}\right), X_2 \sim Ber\left(\frac{1}{2}\right)$ כך שמכפלתם מקיימת $X_1 X_2 \sim Ber(p)$ ונראה שהתפלגות זו נקבעת ביחיות על־ידי הפרמטר $p \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

נקבע עבור אילו ערכי p המשתנים X_1, X_2 שווי התפלגות? בלתי־תלויים? שווים כמעט־תמיד? שונים כמעט־תמיד?

הוכחה: מהיות $X_1 \sim Ber\left(\frac{1}{2}\right), X_2 \sim Ber\left(\frac{1}{2}\right)$ אז $\mathrm{supp}(X_1) = \mathrm{supp}(X_2) = \{0,1\}$ ובפרט מתקיים

$$\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) = \mathbb{P}(X_1 X_2 = 1) \underset{X_1 X_2 \sim Ber(p)}{=} p$$

ובאותו אופן

$$\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 0) = \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 1) = \mathbb{P}(X_1) - \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) = \frac{1}{2} - p$$

מהיות $\mathbb{P}(\{0,1\}) = 1$ נשאר

$$\mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 0) = 1 - \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) - \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 0) - \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 1) = 1 - p - 2\left(\frac{1}{2} - p\right) = p$$

נקבע עבור אילו ערכי p מתקיים הנדרש:

1. X_1, X_2 שווי התפלגות – הם תמיד שווי התפלגות כי שניהם מתפלגים ברנולי $\frac{1}{2}$
2. X_1, X_2 בלתי־תלויים: אם לכל $S, T \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ מתקיים $\mathbb{P}(X \in S, Y \in T) = \mathbb{P}(X \in S)\mathbb{P}(Y \in T)$. ממה שמצאנו לעיל מתקיים

$$\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 0) = \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 1) = \frac{1}{2} - p,\ \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) = p,\ \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 0) = p$$

כלומר השיווין להגדרת אי־תלות מתקיים אם ורק אם מערכת המשוואות הבאה תתקיים

$$\begin{cases} \mathbb{P}(X_1 = 1)\mathbb{P}(X_2 = 0) = \mathbb{P}(X_1 = 1)\mathbb{P}(X_2 = 0) = \frac{1}{2} - p \\ \mathbb{P}(X_1 = 0)\mathbb{P}(X_2 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 0)\mathbb{P}(X_2 = 1) = \frac{1}{2} - p \\ \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 1)\mathbb{P}(X_2) = p \\ \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 0) = \mathbb{P}(X_1 = 0)\mathbb{P}(X_2 = 0) = p \end{cases}$$

וחישוב ישיר מראה $p = \frac{1}{4}$ שכן $X_1 \sim Ber\left(\frac{1}{2}\right), X_2 \sim Ber\left(\frac{1}{2}\right)$

3. שווים כמעט־תמיד – נגיד ש־$X \overset{a.s.}{=} Y$ אם מתקיים $\mathbb{P}(X = Y) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = Y(\omega)\}) = 1$.

אז נניח שהם שווים כמעט־תמיד ולכן מהגדרת התומך

$$\mathbb{P}(X = Y) = \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$$

כלומר הם שווים כמעט־תמיד אם ורק אם $p = \frac{1}{2}$.

4. שונים כמעט־תמיד – נגיד ש־X, Y שונים כמעט־תמיד אם קבוצת הנקודות בהן הם שווים היא ממידה אפס, כלומר

$$\mathbb{P}(X \neq Y) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \neq Y(\omega)\}) = 1$$

או באופן שקול

$$\mathbb{P}(X = Y) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = Y(\omega)\}) = 0$$

כלומר שונים כמעט תמיד אם ורק אם $p = \frac{1}{2}$

□

שאלה 7

יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות ו־$X:\Omega\to\mathbb{R}$ וקטור מקרי.

סעיף א'

נפריך את הטענה שאם $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ אחיד אז X מתפלג אחיד על תת־קבוצה סופית של $\mathbb{R}$.

הוכחה: ניקח את $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4\}$ מרחב אחיד ולכן לכל $i\in[4]$ מתקיים $\mathbb{P}(\{\omega_i\})=\frac{1}{4}$.
נגדיר $X:\Omega\to\mathbb{R}$ על־ידי $X(\omega_1)=0,X(\omega_2)=0,X(\omega_3)=0,X(\omega_4)=1$ והתחום של $X=\{0,1\}\subseteq\mathbb{R}$ סופית. אבל

$$\mathbb{P}(X=0)=\mathbb{P}(\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\})=\frac{3}{4},$$
$$\mathbb{P}(X=1)=\mathbb{P}(\{\omega_4\})=\frac{1}{4}$$

כלומר X לא מתפלג אחיד. $\square$

סעיף ב'

נפריך את הטענה שאם X מתפלג אחיד על תת־קבוצה כלשהי של $\mathbb{R}$ אזי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ אחיד.

הוכחה: ניקח $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$ ונגדיר

$$\mathbb{P}(\{\omega_1\})=\frac{1}{2},\mathbb{P}(\{\omega_2\})=\mathbb{P}(\{\omega_3\})=\frac{1}{4}$$

ונגדיר $X:\Omega\to\mathbb{R}$ על־ידי $X(\omega_1)=0,X(\omega_2)=X(\omega_3)=1$ כאשר הטווח הוא שוב $\{0,1\}$.
אז

$$\mathbb{P}(X=0)=\mathbb{P}(\{\omega\in\Omega\mid X(\omega)=0\})=\mathbb{P}(\{\omega_1\})=\frac{1}{2}$$
$$\mathbb{P}(X=1)=\mathbb{P}(\{\omega\in\Omega\mid X(\omega)=1\})=\mathbb{P}(\{\omega_2,\omega_3\})=\mathbb{P}(\{\omega_2\})+\mathbb{P}(\{\omega_3\})=\frac{1}{2}$$

כלומר X מתפלג אחיד אבל המרחב לא. $\square$