פתרון מטלה 01 (לא להגשה) — אנליזה פונקציונלית, 80417

3 ביולי 2025

שאלה 1

תהיי $A \subseteq \mathbb{R}$, נראה כי A חסומה טוטאלית אם ורק אם היא חסומה.

בפרט, אם $I \subseteq \mathbb{R}$ הוא קטע סגור וחסום אזי לכל $\varepsilon > 0$ קיימים קטעים סגורים $I_1, \cdots, I_n \subseteq I$ כך שמתקיים $I = \bigcup_{i=1}^n I_i$ ואורכו של כל I_i הוא לכל היותר ε.

הוכחה: ניזכר שנגיד כי A חסומה טוטאלית אם לכל $\varepsilon > 0$ קיימים $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$ כך שמתקיים $A = \bigcup_{i=1}^n B_\varepsilon(x_i)$.

$\Longleftarrow$ נניח כי A חסומה ונרצה להראות שהיא חסומה טוטאלית.

יהי $\varepsilon > 0$ ונסתכל על הקטע $(n\varepsilon - \frac{\varepsilon}{2}, n\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2})$ עבור $n \in \mathbb{Z}$: אלו בעצם כדורים פתוחים עם רדיוס $\frac{\varepsilon}{2}$.

מהחסימות, ניתן למצוא $m, n \in \mathbb{Z}$ כך ש־$m < n$ אבל $A \subset (m\varepsilon - \frac{\varepsilon}{2}, n\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2})$ אבל אז $A \subset \displaystyle\bigcup_{k=m}^{n} \left(k\varepsilon - \frac{\varepsilon}{2}, k\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2}\right)$

$\Longrightarrow$ נניח כי A חסומה טוטאלית ונרצה להראות שהיא חסומה.

יהי $\varepsilon > 0$, מהיות A חסומה טוטאלית נובע שקיימים $x_1, \cdots, x_N \in \mathbb{R}$ כך שמתקיים $A \subset \displaystyle\bigcup_{k=1}^{N} B_\varepsilon(x_k)$, אבל זה איחוד סופי של קבוצות חסומות ולכן חסום גם־כן.

□

שאלה 2

מרחב מטרי X נקרא **ספרבילי** אם קיימת קבוצה בת־מנייה $A \subseteq X$ שצפופה ב־X.

נראה כי מרחב מטרי חסום טוטאלית הוא ספרבילי.

הוכחה: מהיות X מרחב מטרי חסום טוטאלי נובע שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $X \subseteq \bigcup_{x \in D_n} B_{\frac{1}{n}}(x)$ כאשר $|D_n| < \infty$.

נגדיר $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ שהיא בת־מנייה מאיחוד קבוצות בנות־מנייה, נראה כי D צפופה:

יהי $\varepsilon > 0$ ויהי $B_\varepsilon(y) \in X$, כדור פתוח וניקח $n \in \mathbb{N}$ כך ש־$\frac{1}{n} < \varepsilon$ ולכן $y \in X \subseteq \bigcup_{x \in D_n} B_{\frac{1}{n}}(x)$ ולכן קיים $x \in D_n \subseteq D$ המקיים

$$y \in B_{\frac{1}{n}}(x) \Rightarrow d(x,y) < \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow x \in B_\varepsilon(y)$$

$\square$

שאלה 3

יהי (X,d) מרחב מטרי. נראה כי קבוצה $A \subseteq X$ היא חסומה טוטאלית אם ורק אם לכל סדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in A$ יש תת־סדרה $\left(x_{n_k}\right)_{k=1}^{\infty}$ כך שלכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים $d\left(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}\right) < 2^{-k}$

הוכחה: זה משפט האוסדרוף ואני עצלנית. $\square$

שאלה 4

נתבונן במרחב $(C[-\pi,\pi],\|\cdot\|_2)$, מרחב הפונקציות הרציפות על $[-\pi,\pi]$ עם הנורמה

$$\|f\|_2=\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}f^2dx}$$

נראה כי במרחב זה הסדרה $(\sin(nt))_{n=1}^{\infty}$ היא חסומה אבל לא חסומה טוטאלית.

הוכחה: נשים לב ש־$\sin^2(-nt)=(-\sin(nt))^2=\sin^2(nt)$ ולכן פונקציה זוגית, אז על קטע סימטרי מתקיים

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(nt)dt=2\int_0^{\pi}\sin^2(nt)dt$$

עכשיו נחשב

$$\int\sin^2(nt)dt\underset{\substack{x=nt\\ t=\frac{x}{n}\\ dt=\frac{1}{n}dx}}{=}\int\frac{\sin^2(x)}{n}dx=\frac{1}{n}\int\sin^2(x)dx=\frac{1}{n}\int\frac{1-\cos(2x)}{2}dx=\frac{1}{2n}\int 1-\cos(2x)dx$$

וגם

$$\int\cos(2x)dx\underset{\substack{u=2x\\ \frac{du}{2}=dx}}{=}\int\frac{\cos(u)}{2}du=\frac{\sin(u)}{2}=\frac{\sin(2x)}{2}$$

ולכן

$$\frac{1}{2n}\int 1-\cos(2x)dx=\frac{1}{2n}\left(x-\frac{\sin(2x)}{2}\right)\underset{x=nt}{=}\frac{1}{2n}\left(nt-\frac{\sin(2nt)}{2}\right)=\frac{t}{2}-\frac{\sin(2nt)}{4n}$$

ולבסוף

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(nt)dt=2\int_0^{\pi}\sin^2(nt)dt=\left[t-\frac{\sin(2nt)}{2n}\right]_{t=0}^{t=\pi}=\pi-\frac{\sin(2n\pi)}{2n}=\pi$$

אז $\|\sin(nt)\|_2=\sqrt{\pi}$ לכל $n\in\mathbb{N}$ ולכן הסדרה מוכלת בכדור ברדיוס $\sqrt{\pi}<2$ ועל־כן הסדרה חסומה.

נראה כי היא לא חסומה טוטאלית, מספיק שנחשב את המרחק בין שני אינדקסים $n\neq m$

$$\int_{-\pi}^{\pi}(\sin(nt)-\sin(mt))^2dt=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(nt)dt-2\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nt)\sin(mt)dt+\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(mt)dt2\pi-2\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nt)\sin(mt)dt$$

היות ו־$\sin(nt),\sin(mt)$ אי־זוגיות לכל $n,m\in\mathbb{N}$ אז המכפלה שלהם היא פונקציה זוגית ולכן

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nt)\sin(mt)dt=2\int_0^{\pi}\sin(nt)\sin(mt)dt=2\int_0^{\pi}\frac{\cos((n-m)t)-\cos((n+m)t)}{2}dt$$
$$=\int_0^{\pi}\cos((n-m)t)-\cos((n+m)t)dt=\int_0^{\pi}\cos(nt-mt)dt-\int_0^{\pi}\cos(nt+mt)dt$$

אז נחשב

$$\int\cos(nt\pm mt)dt\underset{\substack{x=nt\pm mt\\ \frac{1}{n\pm m}dx=dt}}{=}\int\frac{\cos(x)}{n\pm m}dx=\frac{\sin(x)}{n\pm m}=\frac{\sin(nt\pm mt)}{n\pm m}$$

ואז נקבל

$$\int_0^{\pi}\cos(nt-mt)dt-\int_0^{\pi}\cos(nt+mt)dt=\left[\frac{\sin(nt-mt)}{n-m}-\frac{\sin(nt+mt)}{n+m}\right]_{t=0}^{t=\pi}=0$$

מצאנו שמתקיים $\|\sin(nt)-\sin(mt)\|_2=\sqrt{2\pi}$ לכל $n\neq m$ וזה בפרט אומר שאין לנו תת־סדרה קושי, ולכן היא לא חסומה לחלוטין. $\square$