,תורת הקבוצות, -02

2025 באפריל 3



 $.|X| = |Y|, |X^{\prime}| = |Y^{\prime}|$ תהיימות קבוצות אבוצות $X, Y, X^{\prime}, Y^{\prime}$ תהיינה

'סעיף א

. $|X \times X'| = |Y \times Y'|$ נוכיח שמתקיים

הדרחד פונקציה שמתקיים |X'|=|Y'| ומכך שמתקיים $f:X \to Y$ ועל ערכית פונקציה שקיימת פונקציה שקיימת |X'|=|Y'| קיימת ארכית ועל ערכית ועל $g:X' \to Y'$

נגדיר ערכית חד־חד ערכית היא ועל: $h(x,x') = \langle f(x),g(x') \rangle$ על־ידי $f:X \times X' \to Y \times Y'$ נגדיר

חד־חד ערכית: נשים לב שמתקיים

$$h(x_1,x_1')=h(x_2,x_2') \Longleftrightarrow \langle f(x_1),g(x_1')\rangle = \langle f(x_2),g(x_2')\rangle \Longleftrightarrow f(x_1)=f(x_2) \wedge g(x_1')=g(x_2') \underset{(1)}{\Longleftrightarrow} x_1=x_2 \wedge x_1'=x_2' \wedge x_2' \wedge x_2$$

. ערכיות ק־וf ו־g נובע מהיות (1) נובע כאשר

על: יהי y על נובע שקיים $x'_{y'} \in X'$ כך שמתקיים על נובע על נובע על: יהי על: על, נובע נובע על, נובע כי קיים על, נובע כי קיים $x_y \in X$ כך שמתקיים על: יהי על: יהי על: יהי על, נובע לו על, נובע כי קיים על, ולכן $(y,y') = \langle y,y' \rangle$ ולכן $(y,y') = \langle y,y' \rangle$ ולכן על: יהי על: יהי

. $|X \times X'| = |Y \times Y'|$ בונקעיה עוצמות שיוויון מהגדרת ולכן ולכן ערכית ערכית מצאנו מצאנו מצאנו

'סעיף ב

 $.|X \cup X'| = |Y \cup Y'|$ שמתקיים אוניכיה א $X \cap X' = Y \cap Y' = \emptyset$ נניה שמתקיים נניה נניה אוני

הדיחד קיימת פונקציה |X'|=|Y'| ומכך שמתקיים הוא ערכית ערכית פונקציה הדיחד ערכית שקיימת פונקציה |X'|=|Y'| אוכך מכך מכך ערכית ועל בובע שקיימת פונקציה הדיחד ערכית ועל אונים ביימת ביימת פונקציה הדיחד ערכית ועל אונים ביימת ביימת ביימת פונקציה הדיחד ערכית ועל אונים ביימת ביימת

נגדיר כמו בתרגול:

$$f \oplus g(x) = \begin{cases} f(x) & x \in X \\ g(x) & x \in X' \end{cases}$$

 $y \in Y \cup Y'$ יהי על: שהיא שהיא בתרגול, בתרגול ערכיות החד־חד את ועל: את ערכית שהיא נראה בתרגול בתרגול את בתרגול את החד־חד את בתרגול שהיא בתרגול את החד־חד בתרגול את החד־חד ערכית ועל: את החד־חד בתרגול את החד־חד ערכית ועל: את החד־חד בתרגול את החד־חד בתרגול בתרגול את החד־חד בתרגול בתרג

 $y \in Y'$ או $y \in Y$ נובע כי $Y \cap Y' = \emptyset$ מכך שמתקיים

f(x)=y בין מהיים על, נובע כי קיים על, נובע f מהיות $y\in Y$ אם

g(x')=y מתקיים כך על, נובע כי קיים על, נובע על, מהיות $y\in Y'$ אם

מכך שונים. אלו שני כי נובע כי נובע גובע גובע עבר אלו או $X \neq X'$ כי נובע גובע מסקיים מכך מכך מכך אונים.

. ערכית חד־חד $f\oplus g$ כי וקיבלנו $f\oplus g(x)=y$ שמתקיים כך מר $f\oplus g$ וים נובע כי קיים א כך מהגדרת מהגדרת נובע או מהגדרת מה

 $|X \cup X'| = |Y \cup Y'|$ מצאנו פונקציה חד־חד ערכית ועל ולכן מהגדרת שיוויון עוצמות פונקציה מצאנו

'סעיף ג

 $\left|X^{X'}
ight|=\left|Y^{Y'}
ight|$ נוכיח שמתקיים

הוכחה פונקציה שקיימת |X'|=|Y'| ומכך שמתקיים $f:X\to Y$ ומכך ערכית פונקציה הד־חד נובע כי קיימת פונקציה |X'|=|Y'| מכך מכך ארכית ועל פונקציה $g:X'\to Y'$ ומכך ערכית ועל י

. פונקציות. בהרכבה של מוגדרת היטב φ רו $\varphi(h)(y')=(f\circ h\circ g^{-1})(y')$ על־ידי $\varphi:X^{X'} o Y^{Y'}$ נגדיר

בראה כי arphi היא חד־חד ערכית ועל:

כי מתקיים: נעים לב כי ניים א $\varphi(h')=\varphi(h)$ כך שמתקיים לה $h,h'\in X^{X'}$ נשים לב כי ערכית: ערכית: ערכית

$$\varphi(h') = \varphi(h) \Longleftrightarrow \forall y' \in Y', \quad \varphi(h')(y') = \varphi(h)(y') \Longleftrightarrow f\big(h'\big(g^{-1}(y')\big)\big) = f\big(h\big(g^{-1}(y')\big)\big) \Longleftrightarrow h\big(g^{-1}(y')\big) = h'\big(g^{-1}(y')\big)$$

.הפיכה f הפיכה (1) נובע מהיות

לכן נקבל $g^{-1}(y')=x'$ ביוון ש $g'\in Y'$ דיחיד בייה $x'\in X'$ שלכל שלכל הפיכה הפיכה מכיוון בין מכיוון בייה אלכל

$$h\big(g^{-1}(y')\big) = h'\big(g^{-1}(y')\big) \Longleftrightarrow \forall x' \in X, \quad h'(x') = h(x') \Longrightarrow h' = h$$

וקיבלנו φ היא חד־חד ערכית.

יביים: $\varphi(h)=l$ בתקיים להוכיח כך $h:X'\to X$ היימת $p:X'\to Y$ מתקיים. להוכיח שלכל עלינו להוכיח בראה כי

$$\forall y' \in Y', \quad \varphi(h)(y') = l(y') \underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} f\big(h\big(g^{-1}(y')\big)\big) = l(y') \underset{(1)}{\Longleftrightarrow} h\big(g^{-1}(y')\big) = \big(f^{-1} \circ l\big)(y')$$

.הפיכה f הפיכה (1) נובע מהיות לא

ולכן: g(x)=y ביים שמתקיים כך $x'\in X'$ דיחיו אבל לכל לכל לכל שלכל הפיכה אבל מהיות אבל מהיות אבל אבל א

$$\forall x' \in X', \quad h\big(g^{-1}(g(x))\big) = \big(f^{-1}(l(g(x)))\big) \Longrightarrow h(x) = \big(f^{-1}(l(g(x)))\big)$$

על. φ ובהתאם מקור לכל לכל h^{-1} ולכן בנייה מצאנו מצאנו

 $\left|X^{X'}
ight|=\left|Y^{Y'}
ight|$ מצאנו פונקציה חד-חד ערכית ועל בין $X^{X'}$ לבין לבין אלכן מהגדרת שיוויון עוצמות מתקיים

תהיינה X,X^\prime קבוצות.

'סעיף א

 $(X \times \{0\}) \cap (X' \times \{1\}) = \emptyset$ נוכיה ש־

 $(a,b) \in (X \times \{0\}) \cap (X' \times \{1\})$ ולכן קיים ($X \times \{0\}$) הוכחה: נניח בשלילה ש־ \emptyset

 $(a,b)\in X' imes\{1\}$ מהגדרת החיתוך נובע כי $(a,b)\in X' imes\{0\}$ ולכן $(a,b)\in b=0$ מאני, מהגדרת החיתוך נובע כי גופ

'סעיף ב

f(a,i)=a על־ידי $f:X\uplus X'\to X\cup X'$ פונקציה ונגדיר אונגדיר על־ידי א על־ידי $f:X\uplus X'\to X\cup X'$ פונקציה ונגדיר איז א על. ונגדיר פונקציה איז א פונקציה איז א פונקציה על

 $f(x,i)=x_0$ המקיים ($x,i)\in X$ שלא קיים בשלילה כך מרע קיים איננה על, ולכן קיים קיים איננה על כך מרע מניח הוכחה: נניח איננה על, ולכן קיים איננה על, ולכן קיים איננה על, ולכן פון איננה על איננה על, וולכן איננה על איני על איננה על איני על איני על א

:אבאים אחד מהבאים ולכן $x_0 \in X \cup X'$ אבל

 $f(x_0,0)=f(x_0,1)=x_0$ ואז $x_0\in X\land x_0\in X'$ או או $f(x_0,1)=x_0$ או או לכן $x_0\in X$ או אולכן $x_0\in X$ או לכן $x_0\in X$ אולכן $x_0\in X$ אולכן $x_0\in X$

'סעיף ג

 $X \cap X' = \emptyset$ אם ורק אם ערכית ערכית היא הקודם האסעיף מהסעיף שהפונקציה נוכיח

:הוכחה

 $X \cap X' = \emptyset$ נניח כי חד־חד ערכית ונראה כי f

נניח בשלילה כי $0 \neq X'$ אבל החיתוך $X \cap X' \neq \emptyset$ אבל מהגדרת מקיים בעלילה כי $X \cap X' \neq \emptyset$ ולכן אים אבל $X \cap X' \neq \emptyset$ ולכן מתקיים בעלילה כי $X \cap X' \neq \emptyset$ וזו סתירה לחד־חד ערכיות של $X \cap X' = \emptyset$ ולכן אבל החיד ערכיות של ולכן $X \cap X' \neq \emptyset$

. ערכית דר־חד fכי ונראה אור או ארכית ארכית

'סעיף ד

i'(x)=(x,1) על־ידי $i':X' o X \uplus X'$ ונגדיר i(x)=(x,0) על־ידי $i:X o X \uplus X'$ ונגדיר i(x)=(x,0) ונגדיר $i:X o X \uplus X'$ ווגדיר g:X' o Y ורעם אם יש קבוצה f:X o Y המקיימת f:X o Y ורעם אם יש קבוצה f:X o Y ווגדיר f:X o Y ווגם וואס יש קבוצה f:X o Y וואס יש פונקציה יחידה יש פונקציה יחידה וואס יש פונקציות יש פונקציות וואס יש פונקציה יחידה וואס יש פונקציה יחידה וואס יש פונקציות וואס יש פונקציות וואס יש פונקציה יחידה וואס יש פונקציה יחידה וואס יש פונקציות וואס יש פונקציות וואס יש פונקציה יחידה וואס יש פונקציות וואס יש פונקציות וואס יש פונקציה יחידה וואס יש פונקציה וואס יש פונקציים וואס פונק

:הוכחה

. הנדרש. את המקיימת המקיימת פונקציה ליימת פונקציה ליימת $g:X'\to Y$ ו וויך המקיימת פונקציה ליימת פונקציה ליימת הנדרש ליימת הנדרש ליימת המקיימת את הנדרש. בגדיר:

$$f \oplus g = \{ \langle \langle x, j \rangle, y \rangle \mid (j = 0 \land y = f(x) \land x \in X) \lor (j = 1 \land y = g(x) \land x \in X') \}$$

 $f \oplus g$ יים מהגדרת ו־gנשים לב שמתקיים מהגדרת

$$\forall x \in X, \quad ((f \oplus g) \circ i)(x) = (f \oplus g)(\langle x, 0 \rangle) = f(x) \Longrightarrow (f \oplus g) \circ i = f(x)$$

 $f \oplus g$ ו־ו וי־מהגדרת באותו באותו באותו

$$\forall x' \in X', \quad ((f \oplus g) \circ i')(x') = (f \oplus g)(\langle x', 1 \rangle) = g(x) \Longrightarrow (f \oplus g) \circ i' = g$$

ולכן מהגדרה: מתקיים מהגדרה: נניח כי $h=f\oplus g$ בי מהגדרה: נניח להראות שהן ונראה את הנדרש ולכן הראינו לבי מהגדרה: המקיים מהגדרה: המקיים מהגדרה:

$$\forall a \in X \uplus X', \quad h'(a) = \begin{cases} f(x) & a = \langle x, 0 \rangle \\ g(x) & a = \langle x, 1 \rangle \end{cases} = h(a)$$

ולכן ביחידות ה' ולכן h=h' ולכן

 $|X'| \leq |Y'|$ ר $|X| \leq |Y|$ ההיינה X, X', Y, Y' קבוצות כך שמתקיים

'סעיף א

 $.|X \cup X'| \leq |Y \cup Y'|$ הטענה את נפריך $.Y \cap Y' \neq \emptyset$ אבל אבל א $X \cap X' = \emptyset$ נניח נניח

הוכחה: נגדיר

$$X = \{1, 2, 3\}, X' = \{4, 5\}, Y = \{1, 2, 3\}, Y' = \{3, 4\}$$

 $X \cap X' = \emptyset$ רן ו־ $|X| \leq |Y|, |X'| \leq |Y'|$ אכן מתקיים

ניתן דוגמה גם לקטן ממש: נגדיר

$$X = \{1, 2\}, X' = \{4, 5\}, Y = \{1, 2, 3\} = Y'$$

 $X\cap X'=\emptyset$ רי ו' $|X|\leq |Y|,|X'|\leq |Y'|$ אכן מתקיים

$$|Y\cup Y'|=3$$
 וכן $Y\cup Y'=\{1,2,3\}$ ומנגד ומנגד אז אז אז א אז א אבל אז א איז א אבל אז אז אז אז אז אז אז איז אומנגד

נשים לב שבשני המקרים לא יכולה להיות פונקציה חד־חד ערכית מעקרון שובך היונים – יש לנו יותר יונים (איברים ב־ $(X \cup X' \cup X' \cup X')$ מאשר שובכים לשיברים ב־ $(Y \cup Y' \cup X')$ ולכן בהכרח יהיה לנו שובך עם שתי יונים, דהיינו פונקציה לא חד־חד ערכית.

'סעיף ב

. $|X \cup X'| \leq |Y \cup Y'|$ נניח שמתקיים $|X \cap Y'| = \emptyset$ נניח גוב מניח נניח גוביח אוגב

הוכץ פונקציה אובע כי קיימת אובע אובע מכך ומכך ומכך מכך דימת פונקציה דיחד פונקציה וובע אובע כי קיימת פונקציה אובע אובע אובע אובע אובע בי אובע כי קיימת פונקציה וובע אובערכית אובערכית וובע כי קיימת פונקציה וובע כי קיימת פונקציה אובערכית וובע כי קיימת פונקציה וובע כי קיימת פונקציה אובערכית וובע כי קיימת פונקציה וובע כי קיימת פונקציה אובערכית וובע כי קיימת פונקציה וובע בי קיימת פי קיימת פונקציה וובע בי קיימת פונקציה וובע בי קיימת פיימת פונקציה וובע בי קיימת פונ

:נגדיר $h:X\cup X' o Y\cup Y'$ נגדיר

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in X \\ g(x) & x \in X' \end{cases}$$

A תחת יחיד לערך נשלח לערך נשלח מוגדרת הפונקציה ולכן אולכן אולכן אולכן אכן שכן שכן שכן מוגדרת היטב הפונקציה אולכן אולכן אולכן אולכן איז תחת

 $f(x) \neq g(x')$ מתקיים $x' \in X'$ ולכל $x \in X$ נובע שלכל $Y \cap Y' = \emptyset$ מתקיים ערכיות ומכך f חד־חד ערכית, שכן f והד־חד ערכית בין f מצאנו פונקציה חד־חד ערכית בין f לבין f לבין f ולכן מתקיים f ולכן מתקיים ווכל ערכית בין f מצאנו פונקציה חד־חד ערכית בין f לבין f ומכך שיט אולכן מתקיים ווכל מת

'סעיף ג

. היא ערכית, על היא הדרחד איז $\emptyset:X o X'$ אז או $X=X'=\emptyset$ שאם ערכית, על הרצאה הוכחה:

 $\left| Y^{Y'}
ight| = 0$ נבחר זה מתקיים לב ונשים או $Y = \emptyset, Y'
eq \emptyset$ נבחר נבחר

 $y\in Y$ קיים $y'\in Y'$ קיים אם לכל ליך נקרא פונקציה אמרנו כי יחס אמרנו לי אמקיימים את אמקיימים את הגדרת הפונקציה. אמרנו כי יחס אבין $Y'\in Y'$ נקרא אבל אמקיימים את הגדרת הפונקציה. על יחס אביל אביר אביל אבילנו סתירה להגדרת הפונקציה.

'סעיף ד

 $.\left|X^{X'}\right| \leq \left|Y^{Y'}\right|$ שמתקיים אבל $X \neq \emptyset$ אבל אבל מניח נניח נוכיה אבל

 $1 \leq |X| \leq |Y|$ שכן $Y \neq \emptyset$ נובע כי $X \neq \emptyset$ נובע לב שמהיות שכן ראשית בשים האכיות אוכחה:

 $(x',x)\in F$ בשים $X'\in X$ קיים $X'\in X$ בשים לב שמהיות $X'=\emptyset$ ניזכר כי היחס $X'=\emptyset$: ניזכר כי היחס $X'=\emptyset$ ביוכע כי $X'=\emptyset$ ביוכר על $X'=\emptyset$ מכך ש־ $X'=\emptyset$ איז בין היחס היחידי שיתאים הוא היחס הריק: לכל $X'=\emptyset$ קיים $X'=\emptyset$ יחד כך שמתקיים $X'=\emptyset$. נעל אם כך $X'=\emptyset$

 $\left|X^{X'}
ight|=1\leq 1=\left|Y^{Y'}
ight|$ נקבל בסך־הכל שמתקיים

g:Y' o X' קבוצות ונניח שמתקיים $X'\neq\emptyset$ וגם $X'\neq\emptyset$ וגם $X'\neq\emptyset$ פונקציה על X',Y' קבוצות ונניח שמתקיים X',Y'=f(X') נובע כי קיימת X''=f(X') חד־חד ערכית ומתקיים X''=f(X') נובע כי קיימת X''=f(X') הפיכה וX''=f(X') הפיכה גם כן). X''=f(X')

על־ידי: g:Y' o X' נגדיר $f\left(x'_{y'}\right) = y'$ נגדיר כך שמתקיים קיים $x'_{y'} \in X'$ קיים $y' \in f(X')$ נגדיר שלכל מהיות f

$$g(y') = \begin{cases} f^{-1}(y') & \quad y' \in f(X') \\ x'_0 & \quad y' \notin f(X') \end{cases}$$

g מוגדרת היטב שכן לכל $g' \in Y'$ ולכן כל $g' \in Y'$ ולכן כל $g' \in Y'$ נשלח לערך יחיד תחת g מוגדרת היטב שכן לכל $g' \in Y'$ שמתקיים $g' \in Y'$ היות ו $g' \in Y'$ קיים $g' \in Y'$ שמתקיים $g' \in Y'$ היות ו $g' \in Y'$ קיים $g' \in Y'$ שמתקיים $g' \in Y'$