פתרון מטלה 01 — חשבון אינפיניטסימלי 3, 80415

7 באפריל 2025

שאלה 1

סעיף א'

תהיי $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה מונוטונית עולה ממש. נוכיח כי הפונקציה

$$d(x,y)=|F(x)-F(y)|$$

מגדירה מטריקה על $\mathbb{R}$.

הוכחה:

1. סימטרייה – מהגדרת הערך המוחלט מתקיים עבור $x,y\in\mathbb{R}$:

$$d(x,y)=|F(x)-F(y)|=|F(y)-F(x)|=d(y,x)$$

2. אי שליליות – נובע ישירות מהגדרת הערך המוחלט כאי־שלילי. כמו כן מתקיים עבור $x,y\in\mathbb{R}$:

$$x=y\Longleftrightarrow F(x)-F(y)\Longrightarrow|F(x)-F(y)|=00=d(x,y)=|F(x)-F(y)|=0\Longleftrightarrow F(x)=F(y)\underset{(1)}{\Longrightarrow}x=y$$

כאשר (1) נובע מהיות F מונוטונית עולה ממש ולכן חד־חד ערכית.

3. אי־שיוויון המשולש – יהיו $x,y,z\in\mathbb{R}$. מאי־שיוויון המשולש (על ערך מוחלט) מתקיים:

$$d(x,z)=|F(x)-F(z)|\leq|F(x)-F(y)|+|F(y)-F(z)|=d(x,y)+d(y,z)$$

ולכן $d(x,y)=|F(x)-F(y)|$ מגדירה מטריקה על $\mathbb{R}$.

$\square$

סעיף ב'

יהי $G=(V,E)$ גרף לא־מכוון קשיר, כלומר לכל שני קודקודים $u,v\in V$ קיים מסלול $\gamma=(x_0,...,x_n)$ עבור $x_i\in V$ ו־$\{x_{i-1},x_i\}\in E$ המקיים $x_0=u$ ו־$x_n=v$.
נסמן ב־$\ell(\gamma)=n$ את אורך המסלול (מספר הקשתות). נוכיח כי הפונקציה:

$$d(u,v)=\min\{\ell(\gamma)\mid\gamma\text{ is a path between u and v}\}$$

מגדירה מטריקה על V.

הוכחה:

1. סימטרייה – מקבלים ישר מהגדרת המסלול שכן אם יש מסלול בין u לבין v יש גם מסלול בין v לבין u והוא כמובן באותו אורך (כי הגרף לא־מכוון)
2. אי־שליליות ראשית הוא אי־שלילי שכן אורך מסלולי מינימלי הוא מספר הקשתות שכמובן אי־שלילי. מכיוון שבגרף לא־מכוון קשיר יחס של צלע הוא אנטי־רפלקסיבי נובע כי בין u לבין u אין מסלול, משמע מספר הקשתות הוא 0.
3. אי־שיוויון המשולש – ראשית מכיוון שהגרף קשיר נובע כי בין כל שני קודקודים שונים יש מסלול. יהיו $u,v,w\in V$ ונניח בשלילה כי אי־שיוויון המשולש לא מתקיים, משמע

$$d(u,v)+d(v,w)<d(u,w)$$

מהגדרה, $d(u,v)$ זה אורך המסלול המינימלי בין u לבין v וכן $d(v,w)$ הוא אורך המסלול המינימלי בין v לבין w.
אבל $d(u,w)$ הוא אורך המסלול המינימלי בין u לבין w ולכן לא יתכן כי $d(u,v)+d(v,w)<d(u,w)$ וקיבלנו סתירה ולכן אי־שיוויון המשולש מתקיים.

$\square$

סעיף ג'

יהיו $(X, d_X), (Y, d_Y)$ מרחבים מטריים. נוכיח כי הפונקציה

$$d((x_0, y_0), (x_1, y_1)) = d_X(x_0, x_1) + d_Y(y_0, y_1)$$

מגדירה מטריקה על המכפלה $X \times Y$.

הוכחה:

1. סימטרייה – נשים לב שמתקיים מהגדרת $(X, d_X), (Y, d_Y)$ בתור מרחבים מטריים:

$$d((x_0, y_0), (x_1, y_1)) = d_X(x_0, x_1) + d_Y(y_0, y_1) = d_X(x_1, x_0) + d_Y(y_1, y_0) = d((x_1, y_1), (x_0, y_0))$$

2. אי־שליליות – מהיות $(X, d_X), (Y, d_Y)$ מרחבים מטריים נובע כי $d((x_0, y_0), (x_1, y_1))$ הנתונה אי־שלילית כסכום של מספרים אי שליליים. נשים לב שמתקיים:

$$d(x_0, y_0), (x_1, y_1) = 0 \iff d_X(x_0, x_1) = 0 \wedge d_Y(y_0, y_1) = 0 \iff x_0 = x_1 \wedge y_0 = y_1$$

ולכן $d((x_0, y_0), (x_1, y_1)) = 0 \iff (x_0, y_0) = (x_1, y_1)$

3. אי־שיוויון המשולש – יהיו $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in X \times Y$. מתקיים:

$$\begin{aligned} d((x_1, y_1), (x_3, y_3)) &= d_X(x_1, x_3) + d_Y(y_1, y_3) \underset{(1)}{\leq} d_X(x_1, x_2) + d_X(x_2, x_3) + d_Y(y_1, y_2) + d_Y(y_2, y_3) \\ &= d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) + d((x_2, y_2), (x_3, y_3)) \end{aligned}$$

כאשר (1) נובע מאי־שיוויון המשולש עבור המרחבים המטריים $(X, d_X), (Y, d_Y)$.

$\square$

שאלה 2

סעיף א'

נוכיח כי לכל $x \in \mathbb{R}^n$ מתקיים $\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

הוכחה: יהי $x \in \mathbb{R}^n$ ויהי $p \geq 1$, מהגדרה מתקיים:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\sup_i |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_\infty$$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(n \cdot \sup_i |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = n^{\frac{1}{p}} \cdot \|x\|_\infty$$

זאת אומרת, מתקיים:

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}} \cdot \|x\|_\infty$$

ובפרט כאשר ניקח גבול מאריתמטיקה של גבולות נקבל:

$$\lim_{p\to\infty} \|x\|_\infty \leq \lim_{p\to\infty} \|x\|_p \leq \lim_{p\to\infty} n^{\frac{1}{p}} \cdot \|x\|_\infty$$

וכן:

$$\lim_{p\to\infty} \|x\|_\infty = \|x\|_\infty \leq \lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \lim_{p\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \lim_{p\to\infty} n^{\frac{1}{p}} \cdot \|x\|_\infty \underset{(1)}{=} 1 \cdot \|x\|_\infty \Longrightarrow \lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$$

כאשר (1) נובע מכך ש־$\lim_{p\to\infty} n^{\left(\frac{1}{p}\right)} \longrightarrow 1$ שכן $\lim_{p\to\infty} \dfrac{1}{p} \longrightarrow 0$ ומכלל הכריך נקבל:

$$\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$$

$\square$

סעיף ב'

נוכיח שהטענה מהסעיף הקודם לא נכונה גם עבור $x \in \ell^\infty$, כאשר ℓ^∞ הוא מרחב כל הסדרות האינסופיות החסומות.

הוכחה: ראשית, ניזכר כי הגדרנו את הנורמה על מרחבי ℓ^p על־ידי $\|(x_0, x_1, ...)\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^p}$

נסתכל על הסדרה הקבועה $(1, 1, ...)$ הסדרה הקבועה 1. מתקיים:

$$\lim_{p\to\infty} \|(x_0, x_1, ...)\|_p = \lim_{p\to\infty} \sqrt[p]{\sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^p} = \lim_{p\to\infty} \sqrt[p]{\sum_{i=0}^{\infty} 1} = \infty \neq 1 = \left(\sup_i |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_\infty$$

$\square$

סעיף ג'

יהיו $1 \le p < q \le \infty$ ונוכיח כי לכל סדרה $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ מתקיים: $\|x\|_q \le \|x\|_p$ ונסיק כי מתקיים $\ell^p \subseteq \ell^q$.

הוכחה: נתחיל מהרמז. יהיו $1 \le p < q \le \infty$ ובתרגול הגדרנו $\|x\|_p = \left(\sum_i |x_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$.

נניח כי $\|x\|_q = 1$ ולכן כמובן מתקיים $\|x\|_q^q = 1$ ולכן i מתקיים $|x_i| \le 1$ ובפרט מכך שמתקיים $q > p$ נובע כי $|x_i|^q \le |x_i|^p$ לכל i ומתקיים:

$$1 = \|x\|_q^q = \sum_i |x_i|^q \le \sum_i |x_i|^p = \|x\|_p^p$$

וקיבלנו $\|x\|_q \ge 1 = \|x\|_p$

עכשיו אם $x = 0$ זה טריוויאלי ולכן $x \ne 0$ ונגדיר $e = \frac{x}{\|x\|_p}$ ולכן לכל $|e_k| \le 1$ וכן $\|e_k\| = 1$ ובאותו אופן לעיל בגלל ש־$q < p$ מתקיים:

$$\|e\|_q = \left(\sum_i |e_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \le \left(\sum_i |e_k|^p\right)^{\frac{1}{q}} = \|e\|_p^{\frac{p}{q}} = 1$$

ולכן

$$\|x\|_q = \big\|\|x\|_p e\big\|_q = \|x\|_p \|e\|_q \le \|x\|_p$$

מאי־השיוויון לעיל נוכל להסיק כי $\ell^p \subseteq \ell^q$ ישירות מהגדרה, שכן מתקיים $x_n \in \ell^p$ אם ורק אם $\left(\sum |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ מתכנס במובן הצר וזה קורה אם ורק אם $\sum |x_n|^p < \infty$ וניזכר כי משפט הזנב לטורים אי־שליליים אומר כי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אם ורק אם לכל $m > 1$ הטור $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ מתכנס. $\square$

סעיף ד'

נוכיח כי בתנאים של הסעיף הקודם קיימת הכלה ממש $\ell^p \subset \ell^q$.

הוכחה: נבחן את הסדרה $x(i) = i^{-\frac{1}{p}}$ נשים לב כי היא אכן ב־ℓ^q שכן מתקיים:

$$\|x\|_q = \left(\sum_i |x(i)|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_i \left|i^{-\frac{1}{p}}\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_i \left|\frac{1}{i^{\frac{q}{p}}}\right|\right)^{\frac{1}{q}} \underset{(1)}{<} \infty$$

כאשר (1) נובע מאריתמטיקה של טורים אי־שליליים.

מנגד, מתקיים:

$$\|x\|_p = \left(\sum_i |x(i)|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_i \left|i^{-\frac{1}{p}}\right|^p\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_i |1|\right)^{\frac{1}{q}} = \infty$$

ולכן מתקיים $\ell^p \subset \ell^q$. $\square$

שאלה 3

עבור מרחב נורמי $(X, \|\cdot\|)$ נסמן ב־$B(x) := B(X, X)$ את מרחב ההעתקות הלינאריות החסומות תחת הנורמה האופרטורית מ־X לעצמו.

סעיף א'

נוכיח כי לכל $T, S \in B(X)$ מתקיים $\|S \circ T\|_{\text{op}} \le \|S\|_{\text{op}} \|T\|_{\text{op}}$

הוכחה: ראשית, בתרגול ראינו כי $\left(B(X, X), \|\cdot\|_{\text{op}}\right)$ הוא מרחב נורמי ולכן הוא מקיים את אי־שיוויון המשולש, ולכן מתקיים לכל $x \in X$:

$$\|(S \circ T)(x)\|_{\text{op}} \le \|S\|_{\text{op}} \|Tx\|_{\text{op}} \le \|S\|_{\text{op}} \|T\|_{\text{op}} \|x\|_{\text{op}}$$

בתרגול ראינו שלכל $T \in B(X, X)$ ו־$x \in X$ מתקיים $\|T(x)\|_X \le \|T\|_{\text{op}} \|x\|_X$, ולכן נובע מכך

$$\|S \circ T\|_{\text{op}} = \sup_{\|x\|=1} \|(S \circ T)(x)\|_{\text{op}} \le \sup_{\|x\|=1} \|S\|_{\text{op}} \|T\|_{\text{op}} \|x\|_{\text{op}} = \|S\|_{\text{op}} \|T\|_{\text{op}}$$

כמובן שמכך ש־$B(X, X) := \left\{T \in \text{Hom}(X, X) \mid \|T\|_{\text{op}} < \infty\right\}$ נובע כי $\|S \circ T\|_{\text{op}} \le \|S\|_{\text{op}} \|T\|_{\text{op}} < \infty$. $\square$

סעיף ב'

נוכיח כי אם λ ערך עצמי של $T \in B(X)$ אז $\lambda \le \|T\|_{\text{op}}$.

הוכחה: בתרגול ראינו שמתקיים לכל $T \in B(X, X)$ ו־$x \in X$:

$$\|Tx\|_X \le \|T\|_{\mathsf{op}} \|x\|_X$$

יהי u וקטור עצמי של הערך עצמי λ, מתקיים:

$$|\lambda| = \frac{|\lambda| \cdot \|u\|_X}{\|u\|_X} = \frac{\|\lambda u\|_X}{\|u\|_X} = \frac{\|Tu\|_X}{\|u\|_X} \underset{(1)}{\le} \frac{\|T\|_{\mathsf{op}} \|u\|_X}{\|u\|_X} = \|T\|_{\mathsf{op}}$$

כאשר (1) נובע מהתזכורת מהתרגול. $\square$

שאלה 4

סעיף א'

יהי (X,d) מרחב מטרי עבור X מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$. נוכיח כי המטריקה d מושרית מנורמה אם ורק אם היא הומגניות ואינווריאנטית להזזה.

הוכחה:

$\Longleftarrow$ נניח כי המטריקה d מושרית מנורמה ונראה כי היא הומוגנית ואינווריאנטית להזזה.

ניזכר כי מטריקה המושרית מנורמה מוגדרת על־ידי $d(x,y) := \|x-y\|$.

ולכן לפי התזכורת מתקיים:

1. הומגניות:

$$d(\alpha x, \alpha y) = \|\alpha x - \alpha y\| = \|\alpha(x-y)\| = |\alpha|\|x-y\|$$

2. אינווריאנטיות להזזה:

$$d(x+z, y+z) = \|(x+z)-(y+z)\| = \|x+z-y-z\| = \|x-y\|$$

$\Longrightarrow$ נניח כי d הומוגנית ואינווריאנטית להזזה ונראה כי d מושרית מנורמה.

מכיוון ש־$d(x,y)$ אינווריאנטית להזזה נובע כי $d(x,y) = d(x-y,0)$.

נגדיר $\|x\| = d(x,0)$ ונראה כי זוהי נורמה:

1. חיוביות: d מטריקה ולכן אי־שלילית וכן $\|x\| = d(x,0) = 0 \iff x = 0$.
2. הומוגניות:

$$\|\alpha x\| = d(\alpha x, 0) = d(\alpha x, \alpha 0) = |\alpha| d(x,y) = |\alpha|\|x\|$$

3. אי־שיוויון המשולש:

$$|x+y| = d(x+y,0) = d(x,-y) \leq d(x,0) + d(0,-y) = d(x,0) + d(y,0) = \|x\| + \|y\|$$

$\square$

סעיף ב'

יהי $(X, \|\cdot\|)$ מרחב נורמי מעל $\mathbb{R}$. נוכיח כי הנורמה $\|\cdot\|$ מושרית ממכפלה פנימית אם ורק אם היא מקיימת את כלל המקבילית, כלומר לכל $x,y \in X$ מתקיים:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

הוכחה:

$\Longleftarrow$ נניח כי הנורמה $\|\cdot\|$ מושרית ממכפלה פנימית ונראה כי היא מקיימת את כלל המקבילית.

מתקיים מהגדרה:

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle \\ = \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle + \langle x,x\rangle - \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle &= 2\langle x,x\rangle + 2\langle y,y\rangle \\ &= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \end{aligned}$$

וקיבלנו את כלל המקבילית.

$\Longrightarrow$ נניח כי הנורמה $\|\cdot\|$ מקיימת את כלל המקבילית ונרצה להראות שהיא מושרית ממכפלה פנימית.

נגדיר:

$$\langle x,y\rangle = \left(\frac{1}{4}\right)(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$$

ונשים לב ש־$\langle x,y\rangle \mapsto (x,y)$ היא רציפה כצירוף לינארי של פונקציות רציפות (ראינו שנורמה היא רציפה), נסמן טענה זאת ב־$\Diamond$.

נשים לב שמתקיימים:

1. $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$ וכן $\|x\| = \sqrt[2]{\langle x,x\rangle}$
2. נרצה להראות שמתקיים $\langle x+y, z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$. מכלל המקבילית, מתקיים:

$$
\begin{aligned}
&2\|x+z\|^2+2\|y\|^2=\|x+y+z\|^2+\|x-y+z\|^2\\
\iff &\|x+y+z\|^2=2\|x+z\|^2+2\|y\|^2-\|x-y+z\|^2\\
&\underset{(1)}{=}2\|y+z\|^2+2\|x\|^2-\|y-x+z\|^2
\end{aligned}
$$

כאשר (1) מתקיים מחילוף תפקידים בין x לבין y. מתקיים אם כך:

$$
\begin{aligned}
\|x+y+z\|^2&=\frac{2\|x+z\|^2+2\|y\|^2-\|x-y+z\|^2+2\|y+z\|^2+2\|x\|^2-\|y-x+z\|^2}{2}\\
&=\|x\|^2+\|y\|^2+\|x+z\|^2+\|y+z\|^2-\frac{1}{2}\|x-y+z\|^2-\frac{1}{2}\|y-x+z\|^2
\end{aligned}
$$

נזכור שמתקיים $\|w\|=\|-w\|$ ולכן:

$$
\|x+y+z\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2+\|x-z\|^2+\|y-z\|^2-\frac{1}{2}\|x-y-z\|^2-\frac{1}{2}\|y-x-z\|^2
$$

ולכן

$$
\langle x+y,z\rangle=\frac{1}{4}(\|x+y+z\|^2-\|x+y-z\|^2)=\frac{1}{4}(\|x+z\|^2-\|x-z\|^2)+\frac{1}{4}(\|y+z\|^2-\|y-z\|^2)=\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle
$$

3. נרצה להראות שמתקיים $\langle\lambda x,y\rangle=\lambda\langle x,y\rangle$ לכל $\lambda\in\mathbb{R}$.

נשים לב שעבור $\lambda\in\mathbb{N}$ הטענה נובעת באינדוקציה מהמקרה הקודם. עבור עבור $\lambda\in\mathbb{Z}$ נסמן $\lambda=\frac{p}{q}$ כאשר $p,q\in\mathbb{Z}$ ו־$q\neq 0$ מתקיים:

$$
p\langle x,y\rangle=\langle px,y\rangle=\langle\frac{q}{q}px,y\rangle=q\langle\frac{p}{q}x,y\rangle\Longrightarrow\frac{p}{q}\langle x,y\rangle=\langle\frac{p}{q}x,y\rangle
$$

כאשר המעברים נובעים מהומגניות שהוכחנו ועונה על המקרה כאשר $\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}$. נשאר להראות שהטענה נכונה עבור כל $p\in\mathbb{R}$, ובשביל זה נשתמש ברציפות שראינו ב־$\Diamond$.

נגדיר:

$$
f(\lambda)=\lambda\langle x,y\rangle,\quad g(\lambda)=\langle\lambda x,y\rangle
$$

מ־$\Diamond$ נובע כי f ו־g רציפות מלינאריות והרכבה של פונקציות רציפות. בפרט, לכל $\lambda\in\mathbb{Q}$ מתקיים $f(\lambda)=g(\lambda)$.

אבל פונקציות רציפות שמשתוות בכל $\lambda\in\mathbb{Q}$ בהכרח משתוות גם בכל $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ מצפיפות, ולכן לכל $\lambda\in\mathbb{R}$ מתקיים $f(\lambda)=g(\lambda)$ ובמילים אחרות מתקיים $\langle\lambda x,y\rangle=\lambda\langle x,y\rangle$.

$\square$

סעיף ג'

יהי $1 \leq p \leq \infty$. נראה כי הנורמה על המרחב $(\ell^p, \|\cdot\|)$ מושרית ממכפלה פנימית אם ורק אם $p = 2$.

הוכחה:

ראשית, בתרגול ראינו כי ℓ^p אכן מהווה מרחב וקטורי ולכן הוא מרחב נורמי.

$\Longleftarrow$ נניח כי הנורמה על המרחב $(\ell^p, \|\cdot\|)$ מושרית ממכפלה פנימית ונראה כי $p = 2$.

מהיות ℓ^p מרחב נורמי, נובע מהסעיף הקודם כי הוא מושרה ממכפלה פנימית אם ורק אם הוא מקיים את כלל המקבילית.

לכן מספיק שניקח $x = (1,0,0), y = (0,1,0)$ ונשים לב שמתקיים $\|x\| = \|y\| = 1$. מכלל המקבילית מתקיים:

$$\|x+y\|_p^2 + \|x-y\|_p^2 = 2 \cdot 2^{\frac{2}{p}} = 4 = 2+2 = 2\|x\|_p^{\frac{2}{p}} + 2\|y\|_p^{\frac{2}{p}} \Longleftrightarrow 2^{\frac{2}{p}} = 2 \Longleftrightarrow p = 2$$

$\Longrightarrow$ נניח כי $p = 2$ ונראה כי הנורמה על המרחב $(\ell^p, \|\cdot\|)$ מושרית ממכפלה פנימית. יהיו $x = (x_n), y(y_n) \in \ell^2$ ונגדיר $\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$.

נראה כי זו אכן מכפלה פנימית:

1. לינאריות ברכיב הראשון: יהיו $x, y, z \in \ell^2$ ו־$\alpha \in \mathbb{R}$, מתקיים:

$$\langle \alpha x + y, z \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha x_n + y_n) z_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} x_n z_n + \sum_{n+1}^{\infty} y_n z_n = \alpha \langle x, z \rangle + + \langle y, z \rangle$$

2. סימטרייה: ישיר
3. אי־שליליות:

$$\infty > \langle x, x \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 \geq 0$$

וכמובן $x = 0 \Longleftrightarrow \langle x, x \rangle = 0$ והביטוי לעיל קטן מאינסוף כי אנחנו ב־ℓ^2.

ולכן זו אכן מכפלה פנימית, ולכן היא מקיימת את כלל המקבילית והנורמה:

$$\|x\|_2 = \sqrt[2]{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2} = \sqrt[2]{\langle x,x \rangle}$$

נורמה על ℓ^2 המושרית ממכפלה פנימית. $\square$

שאלה 5

יהי (X,d) מרחב אולטרה־מטרי, כלומר (X,d) מרחב מטרי המקיים את אי־שיוויון המשולש החזק: $d(x,z) \leq \max(d(x,y), d(y,z))$.

סעיף א'

יהיו $x,y,z \in X$ ונוכיח כי אם $d(x,y) > d(y,z)$ אזי $d(x,z) = d(x,y)$.

הוכחה: מכך שמתקיים $d(x,y) > d(y,z)$ ומכך ש־(X,d) מרחב אולטרה־מטרי נובע כי $d(x,z) \leq d(x,y)$.
נשים לב שבאותו אופן נובע גם $d(x,y) \leq \max\{d(x,z), d(y,z)\} = d(x,z)$.
בסך־הכל קיבלנו $d(x,z) = d(x,y)$. $\square$

סעיף ב'

נוכיח כי לכל $x,y \in X$ ו־$r > 0$ כך ש־$y \in B_r(x)$ מתקיים $B_r(x) = B_r(y)$.

הוכחה: יהי $y \in B_r(x)$. מהגדרה נובע כי זה קורה אם ורק אם $|y-x| < r$ ויהי z כך שמתקיים $|z-x| < r$. מהגדרת המרחב האולטרה־מטרי, נובע כי מתקיים $|z-y| \leq \max\{|z-x|, |y-x|\} < r$ משמע $z \in B_r(y)$ ולכן $B_r(x) \subseteq B_r(y)$ ונשים לב שבהחלפת תפקידים בין x לבין y נקבל את ההכלה בכיוון השני. $\square$

סעיף ג'

נוכיח כי לכל $x \in X$ ו־$r > 0$ הכדור הסגור $\hat{B}_r(x)$ הוא גם פתוח.

הוכחה: יהי $y \in \hat{B}_r(x)$ ולכן $d(y,x) \leq r$ ונבחן את $B_r(y)$.
נשים לב שמתקיים $z \in B_r(y) \subseteq \hat{B}_r(x)$ מכיוון שהמרחב הוא אולטרה־מטרי ולכן $d(x,z) = \max\{d(x,y), d(y,z)\} \leq r$ וקיבלנו כי הכדור הוא גם פתוח (לכל נקודה בכדור הסגור יש סביבה מוכלת ממש בכדור הפתוח). $\square$

סעיף ד'

נוכיח כי לכל $x \in X$ ו־$r > 0$ הכדור הפתוח $B_r(x)$ הוא גם סגור.

הוכחה: יהי $y \in \partial B_r(x)$. מהגדרה, נובע כי כל כדור פתוח $B_r(y)$ מכיל סביבה של הכדור $B_r(x)$.
יהי $s \leq r$, נבחן את הכדור הפתוח $B_s(y)$:
מהיות y נקודה על השפה נובע כי $B_r(x) \cap B_s(y) \neq \emptyset$ ולכן קיים $z \in B_r(x) \cap B_s(y)$ זאת אומרת $|z-x| < r$ ו־$|z-y| < s \leq r$ ומהיות המרחב אולטרה־מטרי נקבל:

$$|y-x| \leq \max\{|y-z|, |z-x|\} < \max\{s, r\} = r$$

ולכן $y \in B_r(x)$ אבל מצאנו שנקודה בשפה של הכדור נמצאת בתוך הכדור ולכן הכדור סגור. $\square$

סעיף ה'

יהי $p \in \mathbb{N}$ מספר ראשוני. נחשב את הגבול של הסדרה $X_n = \sum_{i=0}^{n} p^i$ ב־$(\mathbb{Q}, d_p)$ כאשר d_p היא המטריקה ה־p־אדית.

פתרון: ראשית נשים לב כי $X_n = \sum_{i=0}^{n} p^i$ זהו סכום גיאומטרי ולכן $X_n = \sum_{i=0}^{n} p^i = \frac{p^{n+1}-1}{p-1} \in \mathbb{Q}$ ולכן ננחש שמתקיים $\lim_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1}{1-p}$ (זה יהיה טור גיאומטרי אינסופי).
נסמן $L = \frac{1}{1-p} = -\frac{1}{p-1} \in \mathbb{Q}$ ומתקיים:

$$x_n - L = \frac{p^{n+1}-1}{p-1} + \frac{1}{p-1} = \frac{p^{n+1}}{p-1}$$

ועם המטריקה ה־p־אדית מתקיים:

$$|x_n - L|_p = \left|\frac{p^{n+1}}{p-1}\right|_p = \left|p^{n+1}\right|_p \cdot \left|\frac{1}{p-1}\right|_p \underset{(1)}{=} p^{-(n+1)} \Longrightarrow d_p(x_n, L) = p^{-(n+1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

כאשר (1) נובע מכך ש־$\left|\frac{1}{p-1}\right|_p = 1$ שכן $|p-1|_p = 1$ מהגדרת המטריקה ה־p־אדית. $\square$

שאלה 6

יהי (X,d) מרחבי מטרי ו־$A \subseteq X$ תת־קבוצה.

סעיף א'

נוכיח שמתקיים $\left(A^\circ\right)^\circ = A^\circ$.

הוכחה: ראשית ניזכר שראינו כי הפנים של A מוגדר על־ידי $A^\circ := \bigcup_{U\subseteq A \text{ open}} U$ וראינו שאיחוד כלשהו של קבוצות פתוחות הוא פתוח ולכן A° היא קבוצה פתוחה.

נראה אז שהפנים של קבוצה פתוחה הוא הקבוצה עצמה: תהיי $B \subseteq X$ קבוצה ונראה כי $B^\circ = B$ אם ורק אם B פתוחה:

בכיוון הראשון מכיוון ש־B° מהטענה לעיל פתוחה אז אם $B = B^\circ$ פתוחה. מצד שני, אם B פתוחה אז B° היא איחוד של קבוצות פתוחות המוכלות ב־B, שאחת מהן היא B ולכן $B^\circ = B$.

זה סוגר את שני הכיוונים ולכן $\left(A^\circ\right)^\circ = A^\circ$. $\square$

סעיף ב'

נוכיח שמתקיים $\overline{\left(\overline{A}\right)} = \overline{A}$.

הוכחה: ניזכר כי $\overline{A} = \bigcap_{C\subseteq A \text{ close}} C$ וכן ראינו שחיתוך כלשהו של קבוצות סגורות הוא סגור ולכן $\overline{A}$ היא קבוצה סגורה.

מספיק שנראה כי $B = \overline{B}$ אם ורק אם B סגורה:

בכיוון הראשון, $\overline{B}$ סגורה ולכן אם $\overline{B} = B$ נובע כי B סגורה. בכיוון השני, $\overline{B}$ היא חיתוך של קבוצות סגורות המכילות את B ואם B סגורה אז היא אחד האיברים בחיתוך ולכן שווה לחיתוך.

זה סוגר את שני הכיוונים ולכן $\overline{\left(\overline{A}\right)} = \overline{A}$. $\square$

סעיף ג'

נוכיח שמתקיים $\left(A^\circ\right)^c = \overline{A^c}$.

הוכחה: נזכור כי קבוצה מוכלת ב־A אם ורק אם המשלים שלה מכיל את A^c, ולכן:

$$\left(A^\circ\right)^c = \left(\bigcup_{U\subseteq A \text{ open}} U\right)^c = \bigcap_{U\subseteq A \text{ open}} U^c = \bigcap_{A^c\subseteq F \text{ closed}} F = \overline{A^c}$$

$\square$

סעיף ד'

נוכיח שמתקיים $\left(\overline{A}\right)^c = \left(A^c\right)^\circ$.

הוכחה: ראשית $\overline{A}$ סגורה ולכן $\left(\overline{A}\right)^c$ היא פתוחה (קבוצה היא סגורה אם ורק אם המשלים שלה קבוצה פתוחה).

ניזכר כי קבוצה A תהיה פתוחה אם כל $a \in A$ היא נקודה פנימית (או ריקה), ולכן:

$$A^\circ = \{x \in X \mid \exists\varepsilon > 0, B_\varepsilon(x) \subseteq A\}$$

A סגורה אם A^c פתוחה, ולכן מהגדרה שנתנו לעיל נובע כי:

$$\overline{A} = \{x \in X \mid \forall\varepsilon > 0 B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset\}$$

נשים לב שמתקיימת שרשרת הגרירות הבאה מההגדרות לעיל:

$$x \in \left(\overline{A}\right)^c \iff x \notin \overline{A} \underset{(1)}{\iff} \exists\varepsilon > 0, \quad B_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset \underset{(1)}{\iff} \exists\varepsilon > 0, \quad B_\varepsilon(x) \subseteq A^c \underset{(3)}{\iff} x \in \left(A^c\right)^\circ$$

כאשר (1) זה מהגדרת $x \in \overline{A}$, (2) מהגדרת חיתוך והכלת קבוצות ו־(3) נובע מהגדרת $x \in A^\circ$. ולכן $\left(\overline{A}\right)^c = \left(A^c\right)^\circ$. $\square$

סעיף ה'

נוכיח שמתקיים $\overline{\partial A}=\partial A$.

הוכחה: נראה כי ∂A היא סגורה: $\partial A=\overline{A}\setminus(A^{\circ})^{c}=\overline{A}\cap\left(\underbrace{X\setminus A^{\circ}}_{\text{closed set}}\right)$ וחיתוך של קבוצות סגורות הוא סגור ולכן ∂A סגורה.

מהטענה בסעיף ב' נקבל $\overline{\partial A}=\partial A$. $\square$