פתרון מטלה 10 — פונקציות מרוכבות, 80519

10 בינואר 2026

שאלה 1

בכל סעיף נמצא את הנקודות הסינגולריות של הפונקציה, נסווגן ונחשב בהן את השארית.

סעיף א'

$f(z)=\frac{z^{2n}}{(z+1)^n}$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

פתרון: המכנה נעלם כאשר

$$z+1=0\iff z=-1$$

ונטען שהיא נקודה סינגולרית מסוג קוטב: נזכיר ש־$z_0=-1$ תהיה קוטב מסדר m אם קיימת פונקציה הולומורפית $g(z)$ עבורה $g(z_0)\neq 0$ המקיימת

$$f(z)=\frac{g(z)}{(z-z_0)^m}$$

בסביבה מנוקבת של z_0.

נגדיר $g(z)=z^{2n}$ זה המונה והוא פולינום ולכן פונקציה שלמה ומתקיים

$$g(-1)=(-1)^{2n}=1\neq 0$$

אז המונה היא פונקציה הולומורפית בסביבת $z_0=-1$ והיא לא נעלמת בנקודה.

כלומר $z_0=-1$ היא נקודה סינגולרית מסוג קוטב מסדר n.

נזכר בטענה מהתרגול: אם $f\in\operatorname{Hol}(G\setminus\{a\})$ ו־a קוטב מסדר n אז

$$\operatorname{res}_f(a)=\frac{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^{n-1}((z-a)^nf(z))|_{z=a}}{(n-1)!}=\frac{((z-a)^nf(z))^{n-1}(a)}{(n-1)!}$$

ובהתאם במקרה שלנו

$$\operatorname{res}_f(-1)=\frac{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^{n-1}\left((z+1)^n\frac{z^{2n}}{(z+1)^n}\right)|_{z=-1}}{(n-1)!}=\frac{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^{n-1}(z^{2n}|_{z=-1})}{(n-1)!}=\frac{(2n)!}{(2n-(n-1))!}z^{2n-(n-1)}|_{z=-1}\ \frac{1}{(n-1)!}$$
$$=\frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!}(-1)^{n+1}$$

□

סעיף ב'

$f(z)=z^2\cos\left(\frac{1}{z-2}\right)$.

פתרון: המכנה של $\cos$ לא מוגדר כאשר $z_0=2$.

ניזכר בפיתוח טיילור של $\cos(w)$:

$$\cos(w)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}w^{2k}$$

בהצבה של $w=\frac{1}{z-2}$ נקבל

$$\cos\left(\frac{1}{z-2}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\frac{1}{(z-2)^{2k}}$$

ובמכפלה של z^2

$$z^2\cos\left(\frac{1}{z-2}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\frac{z^2}{(z-2)^{2k}}$$

נשים לב שהחזקות הן שליליות ולכן יש לנו פה פיתוח לורן אינסופי ולפי הטענה שראינו בהרצאה ובתרגול נובע ש־$z_0=2$ היא נקודה סינגולרית עיקרית (יש אינסוף חזקות שליליות).

לפי הגדרה, $\operatorname{res}_f(-1)$ יהיה המקדם של c_{-1} בפיתוח לורן סביב $z_0 = 2$.
נשים לב

$$z^2 = ((z-2)+2)^2 = (z-2)^2 + 4(z-2) + 4$$

ולכן

$$z^2 \cos\left(\frac{1}{z-2}\right) = ((z-2)^2 + 4(z-2) + 4)\cos\left(\frac{1}{z-2}\right) = ((z-2)^2 + 4(z-2) + 4)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\frac{1}{(z-2)^{2k}}$$

כלומר אנחנו מחפשים את המקדמים של $(z-2)^{-1}$ ולכן נפתח סוגריים לכל מקדם

$$(z-2)^2 \cdot (z-2)^{-2k} = (z-2)^{2-2k} \implies 2-2k = -1 \iff 3 = 2k \iff k = \frac{3}{2} \text{ ✗}$$

$$4(z-2)\cdot(z-2)^{-2k} \implies -2k+1 = -1 \iff -2k = -2 \iff k = 1 \checkmark$$

$$4\cdot(z-2)^{-2k} \implies -2k = -1 \iff k = \frac{1}{2} \text{ ✗}$$

כלומר רק הביטוי השני רלוונטי ונקבל עבור $k = 1$

$$\frac{(-1)^1}{(2)!}(z-2)^{-2} = -\frac{1}{2}(z-2)^{-2}$$

ועם המקדם

$$4(z-2)\cdot -\frac{1}{2}(z-2)^{-2} = -2(z-2)^{-1}$$

ולכן

$$\operatorname{res}_f(2) = -2$$

□

סעיף ג'

$f(z) = \frac{1}{\sin(\frac{1}{z})}$.
פתרון: ראינו ש־$\sin(w)$ היא פונקציה שלמה ולכן יש נקודה סינגולרית היכן שהמכנה מתאפס, כלומר

$$\sin(w) = 0 \iff w = k\pi(\ k \in \mathbb{Z}) \implies z = \frac{1}{k\pi}$$

כלומר

$$E := \left\{\frac{1}{k\pi} \mid k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}\right\} \cup \{0\}$$

כלומר E זה אוסף הנקודות הסינגולריות של f.
נטען שלכל $k \in \mathbb{Z}$, הנקודה $z_k = \frac{1}{k\pi}$ היא נקודה סינגולרית מבודדת מסוג קוטב (הגבול בשאיפה לנקודה הוא אינסוף), אז נגזור ונקבל

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\sin\left(\frac{1}{z}\right)\right)|_{z=\pi k} = -\frac{\cos\left(\frac{1}{z}\right)}{z^2}|_{z=\frac{1}{\pi k}} = -\frac{\cos\left(\frac{1}{\pi k}\right)}{(\pi k)^2} = \frac{(-1)^{k+1}}{\pi^2 k^2} \neq 0$$

כלומר z_k היא נקודה סינגולרית מסוג קוטב מסדר 1.
נזכר בטענה שראינו בהרצאה: אם $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ מקיימת $\psi(a) = 0, \varphi(a) \neq 0, \psi'(a) \neq 0$ אז $\operatorname{res}_f(a) = \frac{\varphi(a)}{\psi(a)}$.
ואכן כפי שראינו $\psi(z) = \sin\left(\frac{1}{z}\right)$ ו־$\psi'(z) \neq 0$, נשתמש בטענה ונקבל

$$\operatorname{res}_f(z_k) = \frac{1}{(-1)^{k+1}\pi^2 k^2} = \frac{(-1)^{k+1}}{\pi^2 k^2}$$

כעת, עבור $z = 0$ נשים לב שיש לנו נקודה סינגולרית לא מבודדת (כי עבור כל R רדיוס סביב הראשית ניתן למצוא $k \in \mathbb{N}$ כך ש־$\frac{1}{\pi k}$ נמצא בכדור ברדיוס R סביב הראשית) ולכן לא ניתן למצוא לה שארית.
□

שאלה 2

נוכיח שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(x^2+1\right)^{n+1}} \,\mathrm{d}x = \pi \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

כאשר עצרת כפולה מוגדרת על־ידי;;

$$n!! \coloneqq \prod_{k=0}^{\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1} (n-2k) = n(n-2)(n-4)\cdots$$

הוכחה: נגדיר

$$f(z) = \frac{1}{\left(z^2+1\right)^{n+1}} = \frac{1}{(z-i)^{n+1}(z+i)^{n+1}}$$

והאפסים של f הם ב־$\pm i$ והם קטבים מסדר $n+1$ והם מבודדים (כי לפולינומים האפסים מבודדים) והם אכן קטבים כי אם נכתוב

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-i)^{n+1}},\ g(z) = \frac{1}{(z+i)^{n+1}}$$

אז g הולומורפית בסביבה של $z=i$ ו־$g(i) \neq 0$ אז מההגדרה זה קוטב ובאופן דומה למקרה השני.
אנחנו רוצים אינטגרל על $(-\infty, \infty)$ ולכן ניקח את C_R להיות הישר/עקומה שמכיל את $[-R, R]$ ואת

$$\Gamma_R \coloneqq \left\{ z = Re^{i\theta} \mid \theta \in [0, \pi] \right\}$$

בחצי המישור העליון ונקבל

$$\int_{C_R} f(z) \,\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} f(x) \,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_R} f(z) \,\mathrm{d}z$$

בצורה כזאת נכיל את הנקודה הסינגולרית $z=i$ וממשפט השארית של קושי נקבל

$$\int_{C_R} f(z) \,\mathrm{d}z = 2\pi i \operatorname{res}_f(i)$$

נשים לב שעל Γ_R מתקיים $|z| = R$ ולכן

$$\left|z^2+1\right| \geq |z|^2 - 1 = R^2 - 1 \Longrightarrow |f(z)| \leq \frac{1}{\left(R^2-1\right)^{n+1}}$$

וכן

$$\left| \int_{\Gamma_R} f(z) \,\mathrm{d}z \right| \leq \frac{\pi R}{\left(R^2-1\right)^{n+1}} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

וכאשר $R \to \infty$ מתקיים

$$\int_{-R}^{R} f(x) \,\mathrm{d}x \xrightarrow[R\to\infty]{} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(x^2+1\right)^{n+1}} \,\mathrm{d}x$$

כלומר כתבנו בצורה שונה ("שיטת לא עשיתי כלום" כדי לעבור לתנאים של המשפטים שאנחנו מכירים) וקיבלנו

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(x^2+1\right)^{n+1}} \,\mathrm{d}x = 2\pi i \operatorname{res}_f(i)$$

נרצה להשתמש בטענה אודות שארית של פונקציה בנקודה סינגולרית מסוג קוטב מסדר n:

$$\operatorname{res}_f(a) = \frac{\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}\left((z-a)^n f(z)\right)\big|_{z=a}}{(n-1)!}$$

ובמקרה שלנו בגלל שזה קוטב מסדר $n+1$ נקבל

$$\operatorname{res}_f(i) = \frac{1}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}\left((z-i)^{n+1}\frac{1}{(z+i)^{n+1}(z-i)^{n+1}}\right)|_{z=i} = \frac{1}{n!}(-1)^n\frac{(2n)!}{n!}(z+i)^{-2n+1}|_{z=i} = (-1)^n\frac{(2n)!}{(n!)^2}(2i)^{-2n+1}$$

נפשט את הביטוי

$$(2i)^{-2n+1} = 2^{2n+1} + (-1)^n i$$

ולכן

$$(-1)^n\frac{(2n)!}{(n!)^2}(2i)^{-2n+1} = \cancel{(-1)^n}\frac{(2n)!}{(n!)^2}\frac{1}{2^{2n+1}\cancel{(-1)^n}i} = \frac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2 i}$$

ולכן

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x^2+1)^{n+1}}\,\mathrm{d}x = 2\pi i\operatorname{res}_f(i) = 2\pi i\frac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2 i} = \pi\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$$

נשים לב ואם נקבץ למכפלות זוגיות ולמכפלות אי־זוגיות בנפרד נקבל

$$(\star)\ (2n)! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\dots\cdot(2n-1)\cdot(2n) = (1\cdot 3\cdot 5\cdot\dots\cdot(2n-1))\cdot(2\cdot 4\cdot 6\cdot\dots\cdot 2n) = (2n-1)!!(2n)!!$$

ונשים לב שמהגדרת העצרת השנייה

$$(\star\star)\ (2n)!! = 2n\cdot(2n-2)\cdot(2n-4)\cdot\dots\cdot 4\cdot 2 = (2\cdot n)\cdot(2\cdot(n-1))\cdot(2\cdot(n-2))\cdot\dots\cdot(2\cdot 2)\cdot(2\cdot 1) = 2^n n!$$

אז משילוב של $(\star)$ ו־$(\star\star)$ נקבל

$$(\star\star\star)\ (2n-1)!! = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

ואם נחזור לתוצאה שלנו נקבל

$$\pi\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \pi\frac{(2n)!}{(2^n n!)(2^n n!)} \underset{(\star\star)}{=} \pi\frac{(2n)!}{(2n)!!(2^n n!)} \underset{(\star\star\star)}{=} \pi\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

שזה בידיוק מה שרצינו להוכיח. $\square$

שאלה 3

יהיו $W = \mathbb{C} \setminus [-1,1]$ ו־$\mathbb{C}$ הפונקציה $f : \mathbb{C} \setminus \{-1,1\} \to \mathbb{C}$ $f(z) = \frac{2}{1-z^2}$.

סעיף א'

נמצא את נקודות הסינגולריות של f ונחשב את השארית בהן.

הוכחה: נבחין שהמכנה של f הוא פולינום ולכן שלם ונקודות הסינגולריות של f תהיינה רק כאשר המכנה מתאפס כלומר

$$1 - z^2 = 0 \iff z_0 = \pm 1$$

אלו נקודות סינגולריות מסוג קוטב מסדר 1 ממבחן הנגזרת ואלו הם קטבים שכן כאשר $z \to \pm 1$ המכנה שואף לאפס וכל הביטוי שואף לאינסוף.
נשתמש במבחן המנה לחישוב שארית (הטענה שציטטנו בשאלה 1 סעיף ג') ונקבל אם נסמן

$$\varphi(z) = 2,\ \psi(z) = 1 - z^2 \implies \psi'(z) = -2z \implies \operatorname{res}_f(a) = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$$

ונקבל

$$\operatorname{res}_f(1) = \frac{2}{-2 \cdot 1} = \frac{2}{-2} = -1$$
$$\operatorname{res}_f(-1) = \frac{2}{-2 \cdot -1} = \frac{2}{2} = 1$$

□

סעיף ב'

נסיק שלכל מסילה γ שהיא סגורה ו־C^1 בתחום W מתקיים $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ ולכן יש ל־f פונקציה קדומה F ב־W.

הוכחה: ראינו כבר ש־W הוא תחום קשיר וכל מסילה סגורה $\gamma \subset W$ לא חוצה את הקטע $[-1,1]$.
מבחינה גיאומטרית יש שתי אפשרויות – אם המסילה γ לא מקיפה את המקטע $[-1,1]$ אז f הולומורפית בכל מקום בפנים של γ ולכן ממשפט קושי האינטגרל על γ הוא אפס.
אם לא, בהכרח שהמסילה היא מקיפה של שתי הנקודות, לא ייתכן שרק אחת מהן תהיה כי אז המסילה תהיה לא סגורה (הורדנו את הקטע $[-1,1]$) ואז במקרה זה ממשפט השארית של קושי מתקיים

$$\int_{\partial\gamma} (f)z\,\mathrm{d}z = 2\pi i\big(\operatorname{res}_f(-1) + \operatorname{res}_f(1)\big) = 2\pi i(-1+1) = 0$$

עבור החלק השני, מכך שלכל מסילה הטענה לעיל מתקיימת נובע שהאינטגרל הקווי בין $z_0, z \in W$ תלוי רק בנקודות הקצה ולא על המסילה עצמה, כלומר

$$\int_{\gamma_1} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = \int_{\gamma_2} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$$

אז אם נגדיר

$$F(z) \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$$

היא מוגדרת היטב וכפי שראינו בתרגיל 8, F הולומורפית ומתקיים $F' = f$. □

סעיף ג'

בתרגול 4 הראינו שניתן להגדיר את הפונקציה $g(z)=Log\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$ בתחום W.
נוכיח ש־g היא קדומה של f ב־W.
הוכחה: הגדרנו את הנגזרת הלוגריתמית על $f:G\to\mathbb{C}$ שלא מתאפסת אף־פעם על־ידי $\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}f}{f}$ ואכן על W הפונקציה $h(z)=\frac{z+1}{z-1}$ לא מתאפסת (שכן $\pm 1\notin W$), אז

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}h(z)=\frac{1\cdot(z-1)-(z+1)\cdot(1)}{(z-1)^2}=\frac{-2}{(z-1)^2}$$

אז

$$\frac{h'(z)}{h(z)}=\frac{\frac{-2}{(z-1)^2}}{\frac{z+1}{z-1}}=\frac{-2}{(z-1)(z+1)}=\frac{-2}{z^2-1}=\frac{2}{1-z^2}=f(z)$$

היות והנגזרת של g היא בידיוק f בכל W ולכן

$$g'(z)=f(z)$$

□

סעיף ד'

נחשב את האינטגרל $\int_{|z|=2} g(z)\,\mathrm{d}z$.
פתרון: נשים לב ש־± 1 נמצאים על המעגל $|z|=2$ אבל g הולומורפית על $|z|>1$ אז נוכל להסתכל על השארית באינסוף

$$\int_{|z|=2} g(z)\,\mathrm{d}z=-2\pi\,\mathrm{res}_g(\infty)=2\pi i c_{-1}$$

שכן $\mathrm{res}_g(\infty)=-c_{-1}$.
אז עבור $|z|>1$ נקבל

$$g(z)=Log\left(\frac{z+1}{z-1}\right)=Log\left(\frac{z\left(1+\frac{1}{z}\right)}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)}\right)=Log\left(1+\frac{1}{z}\right)-Log\left(1-\frac{1}{z}\right)$$

סדרת המהלכים הזאת לא טריוויאלית ולא נכונה תמיד (זה נכון רק במודלו $2\pi i$), אבל אפשר לראות שהם שקולים לפי הנגזרת: נסמן $w=\frac{1}{z}$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}(Log(1+w)-Log(1-w))=\frac{1}{1+w}-\frac{-1}{1-w}=\frac{(1-w)+(1+w)}{1-w^2}=\frac{2}{1-w}$$

הנגזרות זהות ומסכימות ב־0 אז עבור $|w|<1$ כלומר $|z|>1$ הן זהות (עשינו משהו דומה בהרצאה עם עדי כמובן בהערה 2.7.2 בסיכום שלה).
נמשיך ולפי פיתוח טיילור

$$Log\left(1+\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{z}-\frac{1}{2z^2}+\frac{1}{3z^3}-\cdots$$
$$Log\left(1-\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{-z}-\frac{1}{2z^2}-\frac{1}{3z^3}-\cdots$$

אז

$$g(z)=\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{2z^2}+\frac{1}{3z^3}-\cdots\right)-\left(\frac{1}{-z}-\frac{1}{2z^2}-\frac{1}{3z^3}-\cdots\right)=\frac{2}{z}+\frac{2}{3z^3}\cdots$$

חישבנו חלק כי החזקות רק עולות ולכן זה מספיק.
ואם כך

$$\int_{|z|=2} g(z)\,\mathrm{d}z=2\pi i c_{-1}=4\pi i$$

□

שאלה 4

נגדיר $f(z)=\frac{\pi}{z^2\tan(\pi z)}$

סעיף א'

לכל $n\in\mathbb{N}$ נסמן ב־C_n את המסילה המקיפה את הריבוע $\left[-n-\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}\right]^2$ נגד כיוון השעון. נוכיח

$$\lim_{n\to\infty}\int_{C_n}f(z)\,\mathrm{d}z=0$$

הוכחה: נגד כיוון השעון $\Longleftarrow$ אוריאנטציה חיובית.
לריבוע הנתון יש אורך צלע של $2n+1$ ולכן

$$L(C_n)=4(2n+1)=8n+4=O(n)$$

עבור $z\in C_n$ מתקיים

$$|z|\geq n+\frac{1}{2}\Longrightarrow\frac{1}{|z|^2}\leq\frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}$$

האפסים של $\tan(\pi z)$ מתרחשים כאשר $z=k$ עבור $k\in\mathbb{Z}$ והקטבים הם כאשר $z=k+\frac{1}{2}$ עבור $k\in\mathbb{Z}$, כלומר לכל n, C_n לא חותך את $\tan(\pi z)$ באזורי הקטבים/אפס ואפילו בפרט הם במרחק של $\delta=\frac{1}{2}$ מהשפה $(\star)$.
היות ו־$\tan(\pi z)$ היא פונקציה הולומורפית בסביבה פתוחה של C_n והיא איננה מתאפסת על C_n ו־C_n קומפקטית (סגורה וחסומה ולכן היינה־בורל) אז היא בהכרח מקבלת מינימום חיובי (בערך מוחלט), כלומר

$$\exists m_n>0\ s.t.\ \forall z\in C_n\ |\tan(\pi z)|\geq m_n$$

אבל $\tan(\pi z)$ היא מחזורית עם מחזור אחד כלומר

$$\tan(\pi(z+k))=\tan(\pi z)$$

נגדיר

$$S:=\left\{z\in\mathbb{C}\mid-\frac{1}{2}\leq Re(z)\leq\frac{1}{2}\right\}$$

ונשים לב שמתקיים

$$C_n\subset\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(S+k)$$

כי מהגדרת C_n רק ביצענו הזזה ולכן כל $|\tan(\pi z)|\in C_n\cap S$, אז אם נגדיר

$$K:=\left\{z\in S\mid\operatorname{dist}\left(z,\mathbb{Z}\cup\left(\mathbb{Z}+\frac{1}{2}\right)\right)\geq\frac{1}{2}\right\}$$

זו קבוצה קומפקטית (סגורה וחסומה), $\tan(\pi z)$ הולומורפית ורציפה ולא מתאפסת בסביבה שלה ומ־$(\star)$ כל נקודה ב־C_n מתאימה עד־כדי $\bmod\mathbb{Z}$ לנקודה ב־K אז ממשפט ויירשטראס למינימום ומקסימום נובע

$$m:=\min_{z\in K}|\tan(\pi z)|>0$$

נשאר להראות שהחסם הזה נכון על כל C_n: יהי $z\in C_n$ ולכן קיים $k\in\mathbb{Z}$ כך ש־$z-k\in K$ ומהמחזוריות

$$|\tan(\pi z)|=|\tan(\pi(z-k))|\geq m$$

אז נובע מכך

$$|f(z)|=\left|\frac{\pi}{z^2\tan(\pi z)}\right|\leq\frac{\pi}{m\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}=O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

אז בסך־הכל

$$\left|\int_{C_n} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \max_{z\in C_n}|f(z)|\cdot L(C_n) = \frac{\pi}{m\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\cdot(8n+4) = O\!\left(\frac{1}{n^2}\right)\cdot O(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

כלומר

$$\lim_{n\to\infty}\int_{C_n}\frac{\pi}{z^2\tan(\pi z)}\,\mathrm{d}z = 0$$

□

סעיף ב'

נשתמש במשפט השארית כדי להסיק שמתקיים

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

הוכחה: כל הנקודות הסינגולריות שלנו בתוך C_n הם מהצורה

$$z = \{0, \pm1, \pm2, \cdots, \pm n\}$$

ואלו הן נקודות מבודדות, אז ממשפט השארית של קושי

$$\int_{C_n} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i\sum_{|k|\le n}\operatorname{res}_f(k)$$

מהסעיף הקודם אנחנו יודעים

$$\lim_{n\to\infty}\int_{C_n} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

ולכן

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\operatorname{res}_f(k) = 0$$

ראשית נכתוב

$$f(z) = \frac{\pi}{z^2\tan(\pi z)} = \frac{\pi\cos(\pi z)}{z^2\sin(\pi z)}$$

אז עבור $z = k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ נוכל להשתמש בטענה שציטטנו בשאלה 1 סעיף ג' ולקבל

$$\varphi(z) = \pi\cos(\pi z)\;\; \varphi(z) = z^2\sin(\pi z) \Longrightarrow \psi'(z) = 2z\sin(\pi z) + \pi z^2\cos(\pi z) \Longrightarrow \psi'(k) = \pi k^2(-1)^k \ne 0$$

ולכן

$$\operatorname{res}_f(k) = \frac{\pi(-1)^k}{\pi k^2(-1)^k} = \frac{1}{k^2}$$

וזה אכן קוטב מסדר 1 כי הנגזרת לא מתאפסת.
כמובן בגלל הסימטרייה נקבל שגם

$$\operatorname{res}_f(-k) = \frac{1}{k^2}$$

בשביל $z = 0$ זה קוטב מסדר 3 (כי z^2 קוטב מסדר 2 ו־$\sin(\pi z)$ קוטב מסדר 1 ולכן זה קוטב מסדר 3 אם נשתמש בפיתוח טיילור של $\sin(z)$) ולכן נשתמש בטענה שציטטנו בשאלה 1 סעיף א' ונקבל

$$\operatorname{res}_f(0) = \frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left(z^3\frac{\pi\cos(\pi z)}{z^2\sin(\pi z)}\right)|_{z=0} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}(\pi z\cot(\pi z))|_{z=0}$$

אני לא אוהבת נגזרות כאלו, אבל ניזכר שהשארית זה המקדם של c_{-1} בפיתוח לורן:

$$\tan(z) = x + \frac{z^3}{3} + \frac{2z^5}{15} + \cdots \Longrightarrow \tan(\pi z) = \pi z + \frac{(\pi z)^3}{3} + \frac{2(\pi z)^5}{15} + \cdots$$

אז

$$\frac{1}{\tan(\pi z)} = \frac{1}{\pi z} \cdot \frac{1}{1 + \frac{(\pi z)^2}{3} + \cdots}$$

אז עבור $u = \frac{(\pi z)^2}{3} + \cdots$ נקבל עם הנוסחה

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - \cdots \Longrightarrow \frac{1}{\tan(\pi z)} = \frac{1}{\pi z}\left(1 - \frac{(\pi z)^2}{3} + \cdots\right) = \frac{1}{\pi z} - \frac{\pi z}{3} + \cdots$$

ועבור f שלנו

$$f(z) = \frac{\pi}{z^2} \cdot \frac{1}{\tan(\pi z)} = \frac{\pi}{z^2}\left(\frac{1}{\pi z} - \frac{\pi z}{3} + \cdots\right) = \frac{1}{z^3} - \frac{\pi^2}{3z} + \cdots$$

ונקבל אם כך

$$\operatorname{res}_f(0) = -\frac{\pi^2}{3}$$

אז אם כך

$$0 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \operatorname{res}_f(k) \iff 0 = \operatorname{res}_f(0) + \sum_{k\in\mathbb{N}} \operatorname{res}_f(k) + \sum_{k\in\mathbb{N}} \operatorname{res}_f(-k) \iff 0 = 2\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{k^2} - \frac{\pi^2}{3} \iff \frac{\pi^2}{3} = 2\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{k^2} \iff \frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{\infty}$$

ההוכחה באנליזה פונקציונלית יפה יותר. $\square$