פתרון מטלה 08 — אנליזה פונקציונלית, 80417

11 ביוני 2025

שאלה 1

יהי $[a,b]$ קטע. נוכיח שהמרחב $\tilde{C}[a,b]$ של פונקציות רציפות המקיימות $f(a)=f(b)$ צפוף בנורמה $\|\cdot\|_2$ במרחב $C[a,b]$ (ולכן גם ב־$L^2[a,b]$).

הוכחה: עלינו להראות שלכל $f\in C[a,b]$ ולכל $\varepsilon>0$ קיימת $g\in\tilde{C}[a,b]$ כך שמתקיים

$$\|f-g\|_2<\varepsilon$$

וזה גורר צפיפות גם ב־$L^2[a,b]$ מכך שראינו ש־$C[a,b]$ צפופה ב־$L^2[a,b]$.

נגדיר את הקו הישר

$$\phi(x)=f(a)+\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)(x-a)$$

מתקיים

$$\phi(a)=f(a)$$
$$\phi(b)=f(b)$$

ונגדיר

$$h(x)=f(x)-\phi(x)$$

h כמובן רציפה מאריתמטיקה של פונקציות רציפות ומתקיים $h(a)=0,h(b)=0$ ולכן $h\in\tilde{C}[a,b]$.

נגדיר $\psi\in C[a,b]$ כך ש־$\|\psi-\phi\|_2<\frac{\varepsilon}{2}$ (שקיימת כי $C[a,b]$ צפוף ב־$L^2[a,b]$).

אז

$$g(x)=\psi(x)-\psi(a)+\frac{\psi(b)-\psi(a)}{b-a}(x-a)$$

מתקיימים כמה דברים:

1. $g\in C[a,b]$
2. $g(a)=\psi(a)-\psi(a)+0=0$
3. $g(b)=\psi(b)-\psi(a)+\psi(b)-\psi(a)=2(\psi(b)-\psi(a))$

אז נגדיר שוב

$$\mu(x)=g(x)-\frac{g(b)}{b-a}(x-a)$$

ושוב

1. $\mu\in C[a,b]$
2. $\mu(a)=g(a)=0$
3. $\mu(b)=g(b)-\frac{g(b)}{b-a}(b-a)=0$

אז

$$f_\varepsilon=h+\mu$$

ונשים לב $f_\varepsilon\in\tilde{C}[-\pi,\pi]$ כסכום של פונקציות ב־$\tilde{C}[-\pi,\pi]$, אז

$$\|f-f_\varepsilon\|_2=\|f-(h+\mu)\|_2=\|\phi-\mu\|_2$$

שעבור ψ קטן דיו מתקיים

$$\|\phi-\mu\|_2<\varepsilon\Rightarrow\|f-f_\varepsilon\|_2<\varepsilon$$

□

שאלה 2

נחשב את מקדמי טור פוריה של הפונקציה האינטגרבילית $f(x) = \operatorname{sgn}(x) \cdot \frac{\pi - |x|}{2}$, כאשר

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

הוכחה: ראשית נשים לב ש־$f(x)$ היא פונקציה אי־זוגית:

$$f(-x) = \operatorname{sgn}(-x) \cdot \frac{\pi - |x|}{2} \underset{\substack{\operatorname{sgn}(-x) = -\operatorname{sgn}(x) \\ |-x| = |x|}}{=} -\operatorname{sgn}(x) \cdot \frac{\pi - |x|}{2} = -f(x)$$

בתרגול 8 ראינו שעבור פונקציה אי־זוגית מתקיים $a_n = 0$ לכל $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

כמו־כן, מכפלה של פונקציה אי־זוגית בפונקציה אי־זוגית היא פונקציה זוגית ועבור פונקציה זוגית g מתקיים

$$\int_{-a}^{a} g(x)dx = 2\int_{0}^{a} g(x)dx$$

היות ו־$\sin(x)$ פונקציה אי־זוגית, אז $f(x) \cdot \sin(nx)$ היא פונקציה זוגית.

נחשב את b_n לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin((nx))dx \\
&= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \cdot \sin(nx)dx \\
&= \frac{2}{2\pi} \int_{0}^{\pi} (\operatorname{sgn}(x) \cdot |x| \cdot \sin(nx))dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} (\pi - x) \sin(nx)dx \\
&= \frac{1}{\pi} \left(\pi \int_{0}^{\pi} \sin(nx)dx - \int_{0}^{\pi} x\sin(nx) \right) \\
&= \frac{1}{\pi} (\left[\frac{-\pi \cdot \cos(nx)}{n} \right]_{0}^{\pi} - \left[\left(\frac{\sin(nx)}{n^2} - \frac{x\cos(nx)}{n} \right]_{0}^{\pi} \right) \\
&= \frac{1}{\pi} (\left(\frac{\pi(-(-1)^n + 1)}{n} + \frac{\pi(-1)^n}{n} \right) \\
&= \frac{-(-1)^n + 1}{n} + \frac{(-1)^n}{n}
\end{aligned}$$

עבור n זוגי נקבל

$$\frac{-1+1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{1}{n}$$

ועבור n אי־זוגי נקבל

$$\frac{1+1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{1}{n}$$

אז מצאנו שטור פורייה של f הוא $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(nx)$. □

שאלה 3

נשתמש בזהות פרסבל על־מנת לחשב את סכומי הטורים בכל סעיף.
ניזכר בשיוויון פרסבל מההרצאה: אם $f \in \tilde{C}[-\pi, \pi]$ אז

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)dt = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right)$$

סעיף א'

הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ בעזרת הפונקציה $f(x) = x$ ונסיק מהו סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.
הוכחה: נשים לב שמתקיים $f(-x) = -x$, משמע $f(x)$ היא פונקציה אי־זוגית ולכן לכל $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ מתקיים $a_n = 0$.
בפרט, ניתן להשתמש ב־$f(x)$ מהצפיפות של $\tilde{C}$ ב־C.
כמו־כן, בדומה לשאלה הקודמת מכיוון שמכפלה של פונקציות אי־זוגיות היא פונקציה זוגית, $f(x)\sin(nx)$ היא פונקציה זוגית.
נחשב את b_n לכל $n \in \mathbb{N}$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(nx)}{n} - \frac{x\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n}[\sin(nx) - x\cos(nx)] = \frac{2}{\pi}\cdot \pm\frac{\pi}{n} = \pm\frac{2}{n}$$

ומשווין פרסבל

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(0^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}$$

ומצד שני, באגף שמאל רשום

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}$$

ובסך־הכל

$$\frac{2\pi^2}{3} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2} \iff \frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

ואנחנו כבר יודעים שזה אכן ערך הסכום.
נעבור ללהסיק את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.
קודם כל נבין שהטור סוכם את החזקות של המספרים האי־זוגיים ובאותו אופן הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2}$ סוכם את החזקות של המספרים הזוגיים. ולכן

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2}$$

ולכן

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2} \iff \frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi^2}{6}$$
$$\iff \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{24} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} \iff \frac{3\pi^2}{24} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} \iff \frac{\pi^2}{8}$$

$\square$

סעיף ב'

הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}$ בעזרת הפונקציה $f(x)=|x|$.

הוכחה: הפונקציה $f(x)$ היא פונקציה זוגית, ואנחנו יודעים שמכפלה של פונקציה זוגית בפונקציה זוגית היא פונקציה זוגית ומכפלה של פונקציה זוגית בפונקציה אי־זוגית היא פונקציה אי־זוגית.

לכן, $f(x)\sin(nx)$ היא פונקציה אי־זוגית והאינטגרל שלה על קטע סימטרי הוא 0, על־כן, $b_n=0$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

נחשב את a_n לכל $n\in\mathbb{N}$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot\cos(nx)dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\cdot\cos(nx)dx=\frac{2((-1)^n-1)}{\pi n^2}$$

עבור a_0 נקבל

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot\cos(0x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}xdx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}xdx=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi}=\pi$$

נשתמש כעת בשיוויון פרסבל ונקבל

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx=\frac{\pi^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left|\left(\frac{2((-1)^n-1)}{\pi n^2}\right)^2\right|+0\right)=\frac{\pi^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi n^4}|(-1)^n-1|$$

כאשר באגף שמאל יש לנו מהיות $f^2(x)$ פונקציה זוגית

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x^2dx=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi}=\frac{2\pi^2}{3}$$

ולכן

$$\frac{2\pi^2}{3}=\frac{\pi^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2((-1)^n-1)}{\pi n^2}+0\right)\iff\frac{\pi^2}{6}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi n^4}|(-1)^n-1|$$

נשים לב שעבור n זוגי הערך שיתווסף לסכום הוא 0 ולכן לא משפיע על ערך הטור, ולכן נסתכל רק על הערכים האי־זוגיים

$$a_{2k-1}=-\frac{4}{\pi(2k-1)^2}\Rightarrow a_{2k-1}^2=\frac{16}{\pi^2(2k-1)^4}$$

ונקבל

$$\frac{\pi^2}{6}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{16}{\pi^2(2k-1)^4}\iff\frac{\pi^4}{96}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4}$$

□

שאלה 4

נוכיח את מבחן ה־M של ויירשטראס: יהיו $I \subseteq \mathbb{R}$ קטע, $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות רציפות בקטע I ו־$(M_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$ כך שלכל n מתקיים $|f_n|_{\infty} < M_n$ בקטע I.
אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ מתכנס אז

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

מוגדרת היטב בקטע I, רציפה שם והטור מתכנס אליה במידה שווה.
הוכחה: לכל $N \in \mathbb{N}$ מתקיים מהנתון $\sum_{n=1}^{N} f_n(x) < \sum_{n=1}^{N} M_n$, לכל $x \in I$.
אין תלות ב־x ומסנדוויץ' נקבל ש־f מוגדרת בכל I ושההתכנסות היא במידה שווה.
נראה ש־f רציפה: יהי $\varepsilon > 0$, מתקיים

$$|f(x) - f(y)| \leq \left| f(x) - \sum_{n=1}^{N} f_n(x) \right| + \left| \sum_{n=1}^{N} (f_n(x) - f_n(y)) \right| + \left| \sum_{n=1}^{N} f_n(y) - f(y) \right|$$

מההתכנסות במידה שווה קיים $N \in \mathbb{N}$ מקסימלי כך שמתקיים

$$\left| f(x) - \sum_{n=1}^{N} f_n(x) \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \ \left| f(y) - \sum_{n=1}^{N} f_n(y) \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

לכל $n \leq N$ מרציפות f_n קיים $\delta > 0$ כך שלכל $|x - y| < \delta$ מתקיים

$$\left| \sum_{n=1}^{N} (f_n(x) - f_n(y)) \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

ולכן $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ וקיבלנו ש־f רציפה במידה שווה ובפרט רציפה. $\square$

שאלה 5

תהיי $f \in \tilde{C}[-\pi,\pi]$ כך ש-$f' \in \tilde{C}[-\pi,\pi]$ (בפרט, f גזירה ברציפות).
נסמן ב-a_n^f, b_n^f את מקדמי טור פורייה של f וב-a_n', b_n' את מקדמי טור פורייה של f'.

סעיף א'

נוכיח שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_n = -\frac{1}{n}b_n'$ וכן $b_n = \frac{1}{n}a_n'$.

הוכחה: מתקיים

$$a_n^f = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos(nx)dx \underset{\text{אינטגרציה בחלקים}}{=} \frac{1}{\pi n}[f(x)\cdot\sin(nx)]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cdot\sin(nx)dx$$
$$\underset{\substack{f\in\tilde{C}[-\pi,\pi] \\ \sin(x)=-\sin(x)}}{=} -\frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cdot\sin(nx) = -\frac{1}{n}b_n'$$

ההוכחה עבור b_n^f זהה. $\square$

סעיף ב'

ניזכר ש-$(a_n')_{n=1}^{\infty}, (b_n')_{n=1}^{\infty} \in l^2$ ונסיק ש-$(a_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty} \in l^1$ ובפרט שטור פורייה של f מתכנס במידה שווה.

הוכחה: מתקיים

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_n^f\right| \underset{\text{סעיף א'}}{=} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}|b_n'| \underset{\text{אי-שיוויון קושי-שוורץ}}{\le} \underbrace{\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}}_{<\infty}\underbrace{\left(\sum_{n=1}^{\infty}|b_n'|^2\right)^{\frac{1}{2}}}_{\text{מהתזכורת }<\infty} < \infty$$

ובאותו אופן

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|b_n^f\right| \underset{\text{סעיף א'}}{=} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}|a_n'| \underset{\text{אי-שיוויון קושי-שוורץ}}{\le} \underbrace{\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}}_{<\infty}\underbrace{\left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n'|^2\right)^{\frac{1}{2}}}_{\text{מהתזכורת }<\infty} < \infty$$

ונשים לב שגם

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|b_n'|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \|f'\|_2,\ \left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n'|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \|f'\|_2$$

ולכן הטור $\frac{a_0^f}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^f\cos(nx) + b_n^f\sin(nx)\right)$ מקיים את תנאי משפט M של ויירשטראס ולכן הוא מתכנס במידה שווה ובהחלט

$$a_0^f + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^f\cos(nx) + b_n^f\sin(nx)\right) \underset{|\sin(x)|\le 1, |\cos(x)|\le 1}{\le} a_0^f + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left|a_n^f\right| + \left|b_n^f\right|\right)$$

$\square$

סעיף ג'

נסיק שהטור מתכנס לפונקציה f במידה שווה, כלומר בנורמת $\|\cdot\|_{\infty}$.

הוכחה: זה נובע ישירות מהסעיף הקודם: מכך ש-$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left|a_n^f\right| + \left|b_n^f\right|\right) < \infty$ נובע כי הטור מגדיר פונקציה $g \in \tilde{C}[-\pi,\pi]$ המוגדרת על-ידי

$$g(x) = \frac{a_0^f}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^f\cos(nx) + b_n^f\sin(nx)\right)$$

אבל אז ל-f ול-g יש את אותם מקדמי פורייה, ושתיהן ב-$\tilde{C}[-\pi,\pi]$ ולכן הן חייבות להיות זהות (שכן אחרת, ההפרש שלהן מוביל למקדמי פורייה שמתאפסים ולכן גם לכל N מתקיים ש-S_N^{f-g} מתאפס ואז בפרט $\lim_{N\to\infty}\left\|(f-g) - S_N^{f-g}\right\|_{\infty} = 0$), ולכן $\left\|S_N^f - f\right\|_{\infty} \to 0$, כנדרש. $\square$