פתרון מטלה 08 — תורת הקבוצות, 80200

4 ביוני 2025

שאלה 1

יהי $\ell \in \omega$.

סעיף א'

נשתמש בעיקרון האינדוקציה כדי להוכיח שיש פונקציה $p_\ell : \omega \to \omega$ המקיימת $p_\ell(0) = 1$ ולכל $n \in \omega$ מתקיים $p_\ell(n+1) = p_\ell(n) \cdot \ell$, כלומר שהפונקציה $n \mapsto \ell^n$ קיימת.

הוכחה: ממשפט הרקורסיה השכחני נגדיר $G : \omega \to \omega$ המוגדרת על־ידי $G(x) = \ell \cdot x = x \cdot \ell$ אז קיימת פונקציה F המקיימת

$$F(0) = 1,\ F(n+1) = G(F(n)) = \ell \cdot F(n)$$

נרצה להראות ש־$F = \ell_p$ באמצעות עיקרון האינדוקציה.
נניח ש־A קבוצת הערכים כך שאם $a \in A$ אז $F(a) = p_\ell(a) = \ell^a$. נוכיח באינדוקציה ש־$A = \omega$.
עבור בסיס האינדוקציה, נשים לב שמתקיים

$$F(0) = 1 = \ell^0$$

ולכן $0 \in A$.
נניח ש־$n \in A$, ולכן מתקיים

$$F(n) = \ell^n$$

נשים לב שמתקיים

$$F(n+1) = G(F(n)) = \ell \cdot F(n) = \ell \cdot \ell^n \underset{\text{הגדרת חזקה}}{=} \ell^{n+1}$$

ולכן $n+1 \in A$.
מעיקרון האינדוקציה נובע כי $A = \omega$. ראינו כי p_ℓ מוגדרת היטב וזה מסיים. $\square$

סעיף ב'

נוכיח (במובן של הסעיף הקודם) שהפונקציה $n \mapsto n^\ell$ קיימת.
הוכחה: נרצה להוכיח שקיימת פונקציה $q_\ell : \omega \to \omega$ המוגדרת על־ידי $q_\ell(n) = n^\ell$.
נעשה זאת באינדוקציה על ℓ: עבור $\ell = 0$ הטענה טריוויאלית: נגדיר $q_0(n) = n^0 = 1$ ונשים לב שגם עבור $\ell = 1$ נקבל $q_1(n) = n^1 = n$.
נניח ש־q_ℓ קיימת ונגדיר $f(n) = q_\ell(n) \cdot n$ ונוכיח באינדוקציה כי אכן $f(n) = q_{\ell+1}(n)$ לכל n.
יש לנו כאן אינדוקציה פנימית: נשים לב שעבור $n = 0$ נקבל $f(0) = 0$ כי יש לנו כפולה ב־0 ומאקסיומות פאנו ראינו שכפולה ב־0 היא 0.
נניח ש־$f(n) = p_{\ell+1}(n)$ ונראה שעבור $f(n+1) = p_{\ell+1}(n+1)$, מתקיים

$$f(n+1) = p_{\ell+1}(n+1) \cdot (n+1) \underset{\text{הנחת האינדוקציה}}{=} (n+1)^\ell \cdot (n+1) = (n+1)^{\ell+1}$$

ולכן הטענה של האינדוקציה הפנימית נכונה מעיקרון האינדוקציה, וזה גם סוגר את האינדוקציה החיצונית והפונקציה $f = q_{\ell+1}$ קיימת, משמע הפונקציה $n \mapsto n^\ell$ קיימת, כנדרש. $\square$

שאלה 2

תהיי X קבוצה, $G : X \to X$ פונקציה על. עבור $x_0 \in X$ נפעיל את משפט הרקורסיה השכחני כדי לקבל $F_{x_0} : \omega \to X$ מתאימה. נאמר ש־G **טרנזטיבית ב־x_0** אם הפונקציה F_{x_0} היא על X.

סעיף א'

נוכיח בעזרת האקסיומה שאם יש קבוצה Y ופונקציה על $f : \omega \to Y$ אז יש פונקציה חד־חד ערכית $g : Y \to \omega$.

הוכחה: זו טענה 76 מהרשומות של ההרצאות: תחת הנחת אקסיומת הבחירה, נניח כי קיימת פונקציה על $F : A \to B$ אז $|B| \leq |A|$ ולכן קיימת פונקציה חד־חד ערכית $G : B \to A$ מהגדרת שיוויון עוצמות.

נשחזר את ההוכחה מההרצאה יחד עם האקסיומות עם הקבוצות שלנו: נסמן $A = \omega, B = Y$ ו־$F = f, H = g$.

לכל $b \in B$ נסתכל על הקבוצה $F^{-1}(\{b\}) = \{a \in A \mid F(a) = b\}$, כאשר $\{b\}$ קיימת כי b קבוצה כלשהי ו־$\{b\}$ קיימת ומאקסיומת הזוג הלא סדור $\{b, b\} = \{b\}$ קיימת.

כעת, $F^{-1}(\{b\})$ קיימת מאקסיומת ההפרדה כפי שראינו במטלה הקודמת.

F על ולכן לכל $b \in B$ הקבוצה המוזכרת לעיל אינה ריקה, ומאקסיומת הקבוצה הריקה $\emptyset \neq \mathcal{C} = \{F^{-1}(\{b\}) \mid b \in B\}$.

תהיי $G : \mathcal{C} \to \bigcup \mathcal{C} = A$ פונקציית בחירה המוגדרת היטב מאקסיומת האיחוד ואקסיומת הבחירה ונגדיר

$$H(b) = G(F^{-1}(\{b\}))$$

אזי H חד־חד ערכית וההרכבה קיימת מאקסיומת ההפרדה ויחד עם זה שראינו שהרכבת פונקציות מוגדרת תחת האקסיומות (בתרגול 6) עם אקסיומת ההחלפה.

(לכאורה, אפשר לעשות את זה בלי בחירה כי יש איבר מינימלי לכל קבוצה לא ריקה אז יש כלל לבחור את האיבר בפונקציה ההפוכה, בעצם קבוצה לא ריקה שמוכלת ב־ω). $\square$

סעיף ב'

נסיק שאם G טרנזטיבית ב־x_0 כלשהו אז X לכל היותר בת־מנייה.

הוכחה: נניח כי G טרנזטיבית ב־x_0 כלשהו.

מהגדרה, $G : X \to X$ על ו־$F_{x_0} : \omega \to X$ גם היא על. מסעיף א' ותחת אקסיומת הבחירה, קיימת פונקציה $g : X \to \omega$ שהיא חד־חד ערכית ומהגדרת שיוויון עוצמות נקבל ש־$|X| \leq |\omega| = \aleph_0$ ולכן לפי מה שראינו במטלה 1 נקבל ש־X היא לכל היותר בת־מנייה – משמע סופית או בת־מנייה. $\square$

סעיף ג'

נוכיח שאם G טרנזטיבית ב־x_0 כלשהו אז היא טרנזטיבית גם בכל $y_0 \in G^{-1}(\{x_0\})$.

הוכחה: נניח כי G טרנזטיבית ב־x_0 כלשהו ונראה שהיא טרנזטיבית גם בכל $y_0 \in G^{-1}(\{x_0\})$.

בעצם, נראה שהפונקציה $F_{y_0} : \omega \to X$ היא פונקציה על.

יהיו $y_0, x_0 \in X$ כך שיתקיים $G(y_0) = x_0$ ונוכיח באינדוקציה שלכל $n \in \omega$ מתקיים $F_{y_0}(n+1) = F_{x_0}(n)$.

עבור $n = 0$ מתקיים

$$F_{x_0}(0) = x_0 = G(y_0) = G\Big(F_{y_0}(0)\Big) = F_{y_0}(1)$$

נניח כי הטענה נכונה עבור n ונראה עבור $n+1$, מתקיים

$$F_{y_0}(n+2) = G\Big(F_{y_0}(n+1)\Big) \underset{\text{הנחת האינדוקציה}}{=} G\Big(F_{x_0}(n)\Big) = F_{x_0}(n+1)$$

היות ו־F_{x_0} על, לכל $x_1 \in X$ קיים $n_1 \in \omega$ כך שמתקיים $F_{x_0}(n_1) = x_1$ ולכן עבור $n_1 + 1$ מתקיים $F_{y_0}(n_1 + 1) = x_1$ דהיינו F_{y_0} היא על, ולכן G טרנזטיבית גם בכל $y_0 \in G^{-1}(\{x_0\})$. $\square$

סעיף ד'

נסיק שאם G טרנזטיבית ב־x_0 כלשהו אז X סופית ובפרט G חד־חד ערכית וטרנזטיבית בכל $y_0 \in X$.

הוכחה: נניח ש־G טרנזטיבית ב־$x_0 \in X$ ולכן F_{x_0} היא על X.

נסמן $y_0 \in G^{-1}(\{x_0\})$, כלומר $G(y_0) = x_0$.

אם $y_0 = x_0$ אז נקבל ש־$F_{x_0}(n) = x_0$ לכל $n \in \omega$ באינדוקציה: בשביל הבסיס האינדוקציה, מהגדרת הטרנזטיביות ו־F_{x_0} מתקיים $F_{x_0}(0) = x_0$.
באותו אופן, $F_{x_0}(1) = G\Big(F_{x_0}(0)\Big) = G(x_0) = x_0$ ונניח כי הטענה נכונה עבור $n \in \omega$ ונראה עבור $n+1$, מתקיים

$$F_{x_0}(n+1) = G\Big(F_{x_0}(n)\Big) \underset{\text{הנחת האינדוקציה}}{=} G(x_0) = x_0$$

וזה סוגר את המקרה הזה אבל F_{x_0} היא פונקציה קבועה אבל הנחנו שהיא על ולכן X היא פשוט יחידון של x_0 וסיימנו.
כעת, נניח ש־$x_0 \neq y_0$. F_{x_0} היא על ולכן קיים $m \in \omega$ כך ש־$F_{x_0}(m) = y_0$ ונראה באינדוקציה ש־$F_{x_0}(m+1+n) = F_{x_0}(n)$.
עבור בסיס האינדוקציה, מתקיים עם $n = 0$

$$F_{x_0}(m+1) = G\Big(F_{x_0}(m)\Big) = G(y_0) = x_0$$

נניח כי הטענה נכונה עבור $n \in \omega$ ונראה עבור $n+1$, מתקיים

$$F_{x_0}(m+1+n+1) = G\Big(F_{x_0}(m+1+n)\Big) \underset{\text{הנחת האינדוקציה}}{=} G\Big(F_{x_0}(n)\Big) = F_{x_0}(n+1)$$

כלומר קיבלנו שהחל ממקום מסויים, הפונקציה G מחזורית, משמע

$$F_{x_0}([m+1]) = F_{x_0}(\omega) = X$$

דהיינו X היא קבוצה סופית בגודל של לכל היותר $m+1$.
G היא פונקציה על בין קבוצה סופית לעצמה ולכן לפי טענה שראינו ובעצם סעיף א' נובע כי G חייבת להיות חד־חד ערכית.
הטרנזטיביות בכל $y_0 \in X$ נובעת ישירות (כי היא פרמוטציה) ויחד עם סעיף ג' וההוכחה לפי מקרים שעשינו כרגע ומהבחירה השרירותית של x_0 כל פונקציה כזאת היא פרמוטציה על קבוצה סופית ולכן טרנזטיבית לכל $y_0 \in X$. $\square$

סעיף ה'

נוכיח בעזרת משפט הרקורסיה והאקסיומות שכל תת־קבוצה לא חסומה של ω היא בת־מנייה.

הוכחה: נניח ש־$A \subseteq \omega$ היא לא חסומה. ניקח $x_0 \in A$ (שקיים כי אילו $A = \emptyset$ אז היא לא חסומה אבל גם לא בת־מנייה ולכן נתעלם מהמקרה זה) (זאת שלילת אקסיומת הקבוצה הריקה).
בהרצאה ראינו ש־$\langle \omega, \in \rangle$ הוא סדר טוב, ולכן נובע כי גם $\langle A, \in \rangle$ הוא סדר טוב: כי תת־קבוצה של סדר קווי הוא סדר קווי וכל תת־קבוצה של A היא תת־קבוצה של ω ולכן $\langle A, \in \rangle$ הוא סדר טוב.

נגדיר $x_0 = \min A$, יש כזה כי $\langle A, \in \rangle$ סדר טוב. נגדיר $x_{n+1} = \min(A \setminus x_n)$ באופן רקורסיבי, כלומר נשתמש בפונקציה $x \mapsto \min x$ ובפונקציה $B \mapsto A \setminus B$. נבחין כי לכל $n < \omega$ קיים x_n שכן A לא חסומה ולכן לכל $x \in A$ יש $y \in A$ כך ש־$x < y$, ונוכל להניח שבפרט $A \setminus x$ לא ריקה. עתה נגדיר $f : \omega \to A$ על־ידי $f(n) = x_n$. זוהי פונקציה חד־חד ערכית, שכן אם $x \neq y$ אז בלי הגבלת הכלליות $x < y$, ונוכל להסיק ש־$y \in A \setminus x$, כלומר $f(x) < f(y)$ בהכרח. בהתאם נובע $\omega \leq |A| \leq \omega$ ובפרט $|A| = \omega$ והיא לא סופית. $\square$