פתרון מטלה 03 — תורת ההסתברות 1, 80420

14 בנובמבר 2025

שאלה 1

הגדרה 0.1 (מאורע מחזק): נאמר שמאורע A מחזק את מאורע B אם $\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)} > \mathbb{P}(B)$.

יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות.

סעיף א'

נפריך את הטענה שאם A מחזק את B ו־B מחזק את C אז A מחזק את C.

הוכחה: נניח שאנחנו במרחב הסתברות הוגן של הטלה של שתי קוביות.

נגדיר את מאורע A להיות המאורע שיצא 2 בקובייה הראשונה, את המאורע B להיות המאורע שיצא לפחות 2 בכל קובייה ואת מאורע C להיות המאורע שיצא לפחות 2 בקובייה השנייה.

נחשב ונראה שאכן המאורעות האלו עומדים בתנאי השאלה

$$\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(\{(\omega_1, \omega_2) \in [6]^2 \mid \omega_1 = 2, \omega_2 \in \{2,3,4,5,6\}\})}{\mathbb{P}(\{(\omega_1, \omega_2) \in [6]^2 \mid \omega_1 = 2\})} = \frac{\frac{5}{36}}{\frac{1}{6}} = \frac{5}{6} = \frac{30}{36} > \frac{25}{36} = \mathbb{P}(B)$$

$$\mathbb{P}(C \mid B) = \frac{\mathbb{P}(C \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(\{(\omega_1, \omega_2) \in [6]^2 \mid \omega_1, \omega_2 \in \{2,3,4,5,6\} \wedge \omega_2 \in \{2,3,4,5,6\})\})}{\mathbb{P}(\{(\omega_1, \omega_2) \in [6]^2 \mid \omega_1, \omega_2 \in \{2,3,4,5,6\}\})} = \frac{\frac{25}{36}}{\frac{25}{36}} = 1 > \frac{25}{36} = \mathbb{P}(C)$$

מצד שני

$$\mathbb{P}(C \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap C)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(\{(\omega_1, \omega_2) \in [6]^2 \mid \omega_1 = 2, \omega_2 \in \{2,3,4,5,6\}\})}{\mathbb{P}(\{(\omega_1, \omega_2) \in [6]^2 \mid \omega_1 = 2\})} = \frac{\frac{5}{36}}{\frac{1}{6}} = \frac{5}{6} = \frac{30}{36} \not> \frac{30}{36} = \mathbb{P}(C)$$

אז הטענה לא נכונה. □

סעיף ב'

נוכיח שאם A מחזק את B אז B מחזק את A.

הוכחה: ישירות מהגדרה מתקיים

$$\mathbb{P}(B \mid A) > \mathbb{P}(B) \iff \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} > \mathbb{P}(B) \iff \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} > \mathbb{P}(A) \iff \mathbb{P}(A \mid B) > \mathbb{P}(A)$$

□

סעיף ג'

נפריך את הטענה שאם $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות אחידה (בפרט Ω סופית) ואם יש מאורע B כך ש־$\mathbb{P}(B) > 0$ אז $(\Omega, \mathbb{P}_B)$ מרחב הסתברות אחידה.

הוכחה: ניקח שוב מרחב הסתברות של הטלת קובייה הוגנת בעלת 6 פאות.

נגדיר את המאורע B להיות שיצא $\{1,2,3\}$, המרחב שלנו כמובן אחיד ו־$\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$. אבל

$$\mathbb{P}_B(\{1\}) = \mathbb{P}(\{1\} \mid B) = \frac{1}{3} \neq 0 = \mathbb{P}(\{4\} \mid B) = \mathbb{P}_B(\{4\})$$

□

סעיף ד'

נוכיח שאם $\left(\Omega, \mathcal{F} = 2^{\Omega}, \mathbb{P}\right)$ איננו מרחב הסתברות אחיד כאשר Ω סופית ויהי B מאורע כך ש־$\mathbb{P}(B) > 0$ אז $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_B)$ איננו מרחב הסתברות אחיד.

הוכחה: $|\Omega| \neq \emptyset$ (אחרת לא היה לנו מאורע B עם הסתברות חיובית) ולכן יש שתי אפשרויות: או ש־$\Omega = B$ ואז סיימנו מהנתון או ש־$\Omega \neq B$.

במקרה השני, נגדיר $A = \Omega \setminus B$ ומתקיים

$$\mathbb{P}_B(B) = 1 \neq 0 = \mathbb{P}_B(A)$$

□

סעיף ה'

נוכיח שמתקיים $\mathbb{P}(A^c \mid B) = 1 - \mathbb{P}(A \mid B)$.

הוכחה: נשים לב שניתן לכתוב

$$B = \Omega \cap B = (A \cup A^c) \cap B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$$

נשים לב שמהגדרה נובע כי $A \cap B$ ו־$A^c \cap B$ הם מאורעות זרים (זה פשוט מהגדרת המשלים) ולכן $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A^c \cap B)$.
אם כך, מתקיים

$$\mathbb{P}(A^c \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A^c \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = 1 - \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = 1 - \mathbb{P}(A \mid B)$$

$\square$

סעיף ו'

נפריך את הטענה שאם $\mathbb{P}(A \mid B^c) = 1 - \mathbb{P}(A \mid B)$.

הוכחה: ניקח את מרחב ההסתברות שלנו להיות מרחב הסתברות אחיד של הטלת קובייה הוגנת בעלת 6 פעם אחת.
נגדיר את המאורע A להיות שיצא בהטלה $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, את המאורע B שיצאה תוצאה זוגית ו־B^c זה כמובן המאורע שיצאה תוצאה אי־זוגית.
נחשב

$$\mathbb{P}(A \mid B^c) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B^c)}{\mathbb{P}(B^c)} = \frac{\mathbb{P}(\{1,3,5\})}{\mathbb{P}(\{1,3,5\})} = 1 \neq \frac{1}{3} = 1 - \frac{4}{6} = 1 - \frac{\frac{2}{6}}{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{\mathbb{P}(\{2,4\})}{\mathbb{P}(\{2,4,6\})} = 1 - \mathbb{P}(A \mid B)$$

$\square$

שאלה 2

יהיו $A, B, C \subseteq \Omega$ שלושה מאורעות במרחב הסתברות $(\Omega, \mathbb{P})$.
נניח במובלע כי המאורע בו אנחנו מתנים הוא בעל הסתברות גדולה מ־0.

סעיף א'

נוכיח את הטענה שאם $A \subseteq B$ אז $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(A \mid B)$.
הוכחה: ממונוטוניות פונקציית ההסתברות ומהנתון כי $A \subseteq B$ נובע כי $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ וכן $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)$.
אז מתקיים

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

כלומר מתקיים

$$\mathbb{P}(A) \leq \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

אבל $0 < \mathbb{P}(B) \leq 1$ ולכן $\frac{1}{\mathbb{P}(B)} \geq 1$ ובפרט $\frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} \geq \mathbb{P}(A)$ □

סעיף ב'

נוכיח שאם $B \subseteq A$ אזי $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(A \mid B)$.
הוכחה: שוב ממונוטוניות פונקציית ההסתברות, מהנתון $B \subseteq A$ נובע כי $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)$ ולכן

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = 1$$

אז בהכרח שמתקיים גם $P(A) \leq 1$ מהגדרת פונקציית ההסתברות. □

סעיף ג'

נפריך את הטענה שאם $A \cap B = \emptyset$ אז $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(A \mid B)$.
הוכחה: ניקח את מרחב ההסתברות האהוב עלינו של הטלת קובייה הוגנת בעלת 6 פאות ונגדיר את A להיות המאורע שתוצאת ההטלה היא זוגית ו־B המאורע שתוצאת ההטלה היא אי־זוגית.
אז כמובן שמתקיים $A \cap B = \emptyset$ וניזכר שמהגדרת פונקציית ההסתברות, $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ וגם מתקיים

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2} \nleq 0 = \frac{0}{\frac{1}{2}} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A \mid B)$$

□

סעיף ד'

נוכיח שמתקיים $\mathbb{P}(A \cap B \mid C) = \mathbb{P}(A \mid B \cap C)\mathbb{P}(B \mid C)$.
הוכחה: מתקיים

$$\mathbb{P}(A \cap B \mid C) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B \cap C)}{\mathbb{P}(C)}$$

מצד שני

$$\mathbb{P}(A \mid B \cap C)\mathbb{P}(B \mid C) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B \cap C)}{\mathbb{P}(B \cap C)} \frac{\mathbb{P}(B \cap C)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B \cap C)}{\mathbb{P}(C)} = \mathbb{P}(A \cap B \mid C)$$

□

שאלה 3

סעיף א'

בשידה שלוש מגירות. באחת זוג גרביים שחורות, בשנייה זוג גרביים לבנות ובשלישית גרב שחורה וגרב לבנה.
נניח שבחרתי באקראי (בהסתברות אחידה) והוצאתי ממנה גרב באקראי והוא לבן, נבחן מה ההסתברות שגם הגרב השני במגירה הוא לבן.

פתרון: □

סעיף ב'

נתון דלי עם k כדורים לבנים ו־k כדורים שחורים.
מוציאים $n < k$ כדורים ללא החזרות ולאחר מכן מוציאים את הכדור ה־$n+1$ במספר.
בהינתן שכל ה־n כדורים הראשונים היו לבנים, נחשב את ההסתברות שהכדור ה־$n+1$ הוא שחור.

פתרון: □

שאלה 4

יהי $(\Omega, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות ונשים לב שאנחנו **לא** מניחים שההסתברות של המאורעות היא חיובית (קרי, יכולה להיות 0).
תזכורת: נגיד ש־A, B שני מאורעות במרחב הסתברות הם בלתי־תלויים אם ורק אם $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

סעיף א'

נפריך את הטענה ששני מאורעות A, B הם בלתי־תלויים אם ורק אם הם זרים.

הוכחה: ניקח שוב את מרחב ההסתברות האהוב עלינו, מרחב הטלה אחת של קובייה הוגנת בעלת 6 פאות.
נגדיר את A להיות המאורע שיצא אחד מהבאים $\{1, 2, 3\}$ ואת B להיות Ω כלומר $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
אז מתקיים $A \cap B = A \neq \emptyset$ וכן

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$$

$\square$

סעיף ב'

נפריך את הטענה שאי־תלות היא יחס טרנזיטיבי: בהינתן מאורעות A, B, C כך ש־A בלתי־תלוי ב־B ו־B בלתי־תלוי ב־C נראה ש־A תלוי ב־C.
הוכחה: ניקח הפעם את מרחב ההסתברות של קובייה **לא** הוגנת כך ש־$\mathbb{P}(\{1\}) = \mathbb{P}(\{2\}) = 0$ ולכל השאר יש הסתברות אחידה, כלומר $\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{4}$ עבור $\omega \in \{3, 4, 5, 6\}$.
נגדיר את המאורעות הבאים לתוצאות ההטלה $A = \{1, 3\}, B = \{1, 2\}, C = \{3\}$, אכן מתקיים

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\{1\}) = 0 = \frac{1}{4} \cdot 0 = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$$

$$\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0 = 0 \cdot \frac{1}{4} = \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C)$$

מנגד

$$\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(\{3\}) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{16} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(C)$$

$\square$