הכנה למבחן מועד א' — משפטים והוכחות נבחרים — תורת המידה, 80517

15 בינואר 2026

משפט 0.1 (משפט ההתכנסות המונוטונית): יהי $(X, \mathcal{A}, \mu)$ מרחב מידה ותהיי $\{f_n \mid X \to [0,\infty]\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות מדידות.
אם $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית עולה, אזי הפונקציה

$$f \coloneqq \lim_{n\to\infty} f_n = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{f_n\}$$

מקיימת

$$\forall A \in \mathcal{A} \qquad \int_A f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty}\int_A f_n \,\mathrm{d}\mu \Longrightarrow \forall A \in \mathcal{A} \qquad \int_A \lim_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty}\int_A f_n \,\mathrm{d}\mu$$

הוכחה: נוכיח עבור $A = X$ (עבור $A \subset X$ ההוכחה זהה) וראינו כי $f = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{f_n\}$ מדידה.
$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית עולה ולכן קיים $\alpha \in [0,\infty]$ כך ש־$\alpha = \lim_{n\to\infty}\int_X f_n \,\mathrm{d}\mu$ ונרצה להראות

$$\alpha \underset{(1)}{\leq} \int_X f \,\mathrm{d}\mu \underset{(2)}{\leq} \alpha \Longrightarrow \alpha = \int_X f \,\mathrm{d}\mu$$

(1) נכון כי מתקיים

$$\forall n \in \mathbb{N}\ 0 \leq f_n \leq \sup_{n\in\mathbb{N}}\{f_n\} = f \Longrightarrow 0 \leq f_n \leq f$$

וממונוטוניות האינטגרל

$$\forall n \in \mathbb{N}\ 0 \leq \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \int_X f \,\mathrm{d}\mu$$

בפרט בלקיחת גבול נקבל $\alpha \leq \int_X f \,\mathrm{d}\mu$.
עבור (2) : תהיי $s : X \to [0,\infty)$ פונקציה פשוטה כלשהי המקיימת $0 \leq s \leq f$ ולכן יש $\{A_i\}_{i=1}^{k}$ חלוקה כלשהי של X כך שניתן לכתוב $s = \sum_{i=1}^{k}\alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$.
יהי $x \in X$ ויהי $c \in (0,1)$, נסמן

$$\forall n \in \mathbb{N},\ E_n \coloneqq \{x \in X \mid c\cdot s(x) \leq f_n(x)\}$$

מהיות $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ מתקיים $f(x) = 0$ (ואז $f \equiv 0$) או $f(x) \neq 0$ ולכן בהכרח $f(x) > 0$.
במקרה הראשון

$$0 \leq c\cdot s(x) \leq f_n(x) \leq f(x) = 0$$

ואז $x \in E_n$ לכל n וסיימנו.
אחרת, קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > n_0$ מתקיים $f_n(x) > c\cdot s(x)$ ולכן $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה עולה ביחס להכלה ($\star$) ממונטוניות $\{f_n\}$ ולכן $\lim_{n\to\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = X$ ונקבל

$$\alpha = \lim_{n\to\infty}\int_X f_n \,\mathrm{d}\mu \underset{\text{מונוטוניות ביחס להכלה}}{\geq} \lim_{n\to\infty}\int_{E_n} f_n \,\mathrm{d}\mu \underset{\text{מונוטוניות}}{\geq} \lim_{n\to\infty}\int_{E_n} c\cdot s \,\mathrm{d}\mu = c\cdot\lim_{n\to\infty}\int_{E_n} s \,\mathrm{d}\mu = c\cdot\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\mu(E_n \cap A_i)$$

אז מ־($\star$) נובע

$$\forall i \in [k],\ \forall n,m \in \mathbb{N},\ n \leq m \Longrightarrow A_i \cap E_n \subseteq A_i \cap E_m$$

ולכן גם $\{A_i \cap E_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה עולה גם היא ו־$\{A_i\}$ חלוקה של X אז

$$\forall i \in [k],\ \bigcup_{n=1}^{\infty} A_i \cap E_n = A_i \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = A_i \cap X = A_i$$

אז מרציפות המידה לאיחודים עולים נקבל $\mu(A_i \cap E_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu(A_i)$ ומכאן

$$\alpha \geq c\cdot\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\mu(A_i \cap E_n) = c\cdot\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\lim_{n\to\infty}\mu(A_i \cap E_n) = c\cdot\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\mu(A_i) = c\cdot\int_X s \,\mathrm{d}\mu$$

מהיות $c \in (0,1)$ שרירותי נובע $\alpha \geq \int_X s \,\mathrm{d}\mu$ לכל $0 \leq s \leq f$ פשוטה אבל מהגדרת אינטגרל של פונקציה אי־שלילית נקבל $\alpha \geq \int_X f \,\mathrm{d}\mu$. $\square$

משפט 0.2 (החלפת סדר אינטגרציה וסכום): יהי $(X,\mathcal{A},\mu)$ מרחב מידה. אם $\{f_n \mid X\to[0,\infty]\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות מדידות, אזי

$$\int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\int_X f_n \,\mathrm{d}\mu$$

הוכחה: באינדוקציה על $N\in\mathbb{N}$.

מקרה בסיס הוא אדטיביות האינטגרל עבור $N=2$ (עבור $N=1$ הטענה טריוויאלית): תהיינה $s,t:X\to[0,\infty]$ פונקציות פשוטות כלשהן כאשר

$$s=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mathbb{1}_{A_i}\qquad t=\sum_{j=1}^{m}\beta_j\mathbb{1}_{B_j}$$

עבור $\{A_i\}_{i=1}^{n},\{B_j\}_{j=1}^{m}$ הן חלוקות של X ומתקיים

1. $\{A_i\cap B_j\}_{(i,j)\in[n\times m]}$ חלוקה של X
2. לכל $j\in[m]$ מתקיים $\bigcupdot_{i=1}^{n}A_i\cap B_j=B_j$ כי $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ חלוקה של X
3. לכל $i\in[n]$ מתקיים $\bigcupdot_{j=1}^{m}A_i\cap B_j=A_i$ כי $\{B_j\}_{j=1}^{m}$ חלוקה של X

מאדטיביות סופית של מידה נקבל

$$\sum_{j=1}^{m}\mu(A_i\cap B_j)\overset{(\star)}{=}\mu(A_i)\qquad\sum_{i=1}^{n}\mu(A_i\cap B_j)\overset{(\star\star)}{=}\mu(B_j)$$

אבל גם $s+t$ היא פונקציה פשוטה שכן

$$s+t=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(\alpha_i+\beta_j)\mathbb{1}_{A_i\cap B_j}$$

ולכן

$$\begin{aligned}\int_X(s+t)\,\mathrm{d}\mu&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(\alpha_i+\beta_j)\cdot\mu(A_i\cap B_j)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\cdot\sum_{j=1}^{m}\mu(A_j\cap B_j)+\sum_{j=1}^{m}\beta_j\cdot\sum_{i=1}^{n}\mu(A_i\cap B_j)\\&\underset{(\star),(\star\star)}{=}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\cdot\mu(A_i)+\sum_{j=1}^{m}B_j\cdot\mu(B_j)=\int_X s\,\mathrm{d}\mu+\int_X t\,\mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

אז הטענה נכונה עבור פונקציות פשוטות.

תהיינה $f_1,f_2\in\{f_n\mid X\to[0,\infty]\}_{n=1}^{\infty}$ מדידות ותהיינה $\{s_n\}_{n=1}^{\infty},\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרות עולות של פונקציות פשוטות כך שמתקיים

$$s_n\xrightarrow[n\to\infty]{}f_1\qquad t_n\xrightarrow[n\to\infty]{}f_2$$

נקודתית ומאריתמטיקה של גבולות נקבל $s_n+t_n\xrightarrow[n\to\infty]{}f_1+f_2$ כאשר זו התכנסות עולה לכן לפי משפט ההתכנסות המונוטונית

$$\begin{aligned}\int_X(f_1+g_2)\,\mathrm{d}\mu&=\lim_{n\to\infty}\int_X(s_n+t_n)\,\mathrm{d}\mu=\lim_{n\to\infty}\left(\int_X s_n\,\mathrm{d}\mu+\int_X t_n\,\mathrm{d}\mu\right)=\lim_{n\to\infty}\int_X s_n\,\mathrm{d}\mu+\lim_{n\to\infty}\int_X t_n\,\mathrm{d}\mu\\&=\int_X f_1\,\mathrm{d}\mu+\int_X f_2\,\mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

וזה מראה את בסיס האינדוקציה.

בשביל לסיים את האינדוקציה נשים לב $\sum_{n=1}^{N}f_n\xrightarrow[N\to\infty]{}\sum_{n=1}^{\infty}f_n$ נקודתית כאשר הסדרה $\left\{\sum_{n=1}^{N}f_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה מונוטונית עולה ולכן ממשפט ההתכנסות המונוטוניות נקבל את הטענה, כנדרש. $\square$

משפט 0.3 (טענה 2.14 ללא שם):

הוכחה: □

משפט 0.4 (הלמה של פאטו): יהי $(X,\mathcal{A},\mu)$ מרחב מידה. אם $\{f_n : X \to [0,\infty]\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות מדידות כלשהי, אזי

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu$$

הוכחה: לכל $k\in\mathbb{N}$ נסמן $g_k := \inf_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\Rightarrow k}}\{f_n\}$ אזי הסדרה $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית עולה ואי־שלילית.
ממשפט ההתכנסות המונוטונית נקבל

$$\int_X \lim_{k\to\infty} g_k \,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int_X g_k \,\mathrm{d}\mu$$

ומתקיים מהגדרה

$$\lim_{k\to\infty} g_k = \lim_{k\to\infty} \inf_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\ge k}}\{f_n\} = \liminf_{n\to\infty} f_n$$

וביחד

$$(\star)\quad \int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int_X g_k \,\mathrm{d}\mu$$

מצד שני

$$\forall k\in\mathbb{N},\ g_k = \inf_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\ge k}}\{f_n\} \le f_k \Longrightarrow g_k \le f_k$$

ממונוטוניות האינטגרל נקבל

$$\forall k\in\mathbb{N},\ a_k := \int_X g_k \,\mathrm{d}\mu \le \int_X f_k \,\mathrm{d}\mu =: b_k$$

אז לכל $k\in\mathbb{N}$ מתקיים $a_k \le b_k$ וכן מ־$(\star)$ נובע כי $\lim_{k\to\infty} a_k$ קיים ונקבל

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu \underset{(\star)}{=} \lim_{k\to\infty} \int_X g_k \,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} a_k \le \liminf_{k\to\infty} b_k = \liminf_{k\to\infty} \int_X f_k \,\mathrm{d}\mu \Longrightarrow \int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu \le \liminf_{k\to\infty} \int_X f_k \,\mathrm{d}\mu$$

$\square$

משפט 0.5 (הלמה של בורל־קנטלי): יהי $(X, \mathcal{A}, \mu)$ מרחב מידה ותהיי $\mathcal{A} \supseteq (E_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה של קבוצות מדידות כך שמתקיים

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty$$

אז

$$\mu\left(\limsup_{n\to\infty} E_n\right) = 0$$

הוכחה: ממונוטוניות המידה והגדרת החיתוך

$$\limsup_{n\to\infty} E_n = \bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=i}^{\infty} E_j \Longrightarrow \mu\left(\limsup_{n\to\infty} E_n\right) = \mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) \underset{\forall i\in\mathbb{N}}{\leq} \mu\left(\bigcup_{j=i}^{\infty} E_j\right) \underset{\text{תת־אדטיביות המידה}}{\leq} \sum_{j=i}^{\infty} \mu(E_j) < \infty$$

כאשר המעבר האחרון נובע מההנחה ומטור זנב ולכן $\lim_{i\to\infty} \sum_{n=i}^{\infty} \mu(E_n) = 0$, כלומר $\mu(\limsup_{n\to\infty} E_n) \leq 0$.
אבל μ מידה ולכן $0 \leq \mu(\limsup_{n\to\infty} E_n)$ כלומר $\mu(\limsup_{n\to\infty} E_n) = 0$. □

משפט 0.6 (אי־שיוויון המשולש האינטגרלי): אם $f \in L^1(\mu)$ אזי $\left|\int_X f \,\mathrm{d}\mu\right| \leq \int_X |f| \,\mathrm{d}\mu$.

הוכחה: $\int_X f \,\mathrm{d}\mu \in \mathbb{C}$ ולכן קיים $\alpha \in \mathbb{C}$ עם $|\alpha| = 1$ עבורו מתקיים $\alpha \int_X f \,\mathrm{d}\mu = \left|\int_X f \,\mathrm{d}\mu\right| \in \mathbb{R}$:
שכן אם נסמן $z = \int_X f \,\mathrm{d}\mu$ אז אם $z = 0$ אז $\alpha z = |z| \in \mathbb{R}$ לכל $\alpha \in \mathbb{C}$ עם $|\alpha| = 1$ כי נקבל ש־$0 = 0$.
אחרת, אם $z \neq 0$ אז קיים $\theta \in \mathbb{R}$ כך ש־$z = |z| \cdot e^{i\theta}$ וניקח $\alpha = e^{-i\theta}$ ונקבל

$$\alpha z = e^{-i\theta} \cdot \left(|z| e^{i\theta}\right) = |z|\left(e^{-i\theta} \cdot e^{i\theta}\right)) = |z| \in \mathbb{R}$$

ולכן יש $\alpha \in \mathbb{C}$ המקיים זאת.
נקבל אם־כך

$$\begin{aligned}
\left|\int_X f \,\mathrm{d}\mu\right| &= \alpha \int_X f \,\mathrm{d}\mu \\
&= \underbrace{\int_X \alpha f \,\mathrm{d}\mu}_{\in \mathbb{R}} \\
&= \int_X Re(\alpha f) \,\mathrm{d}\mu + i \cancel{\int_X Im(\alpha f) \,\mathrm{d}\mu} \\
&= \int_X Re(\alpha f) \,\mathrm{d}\mu \\
&\leq \int_X |Re(\alpha f)| \,\mathrm{d}\mu \\
&\leq \int_X |\alpha f| \,\mathrm{d}\mu = \int_X |f| \,\mathrm{d}\mu
\end{aligned}$$

□

משפט 0.7 (משפט ההתכנסות הנשלטת):

הגדרה 0.1 (סדרת פונקציות נשלטת): תהיי X קבוצה ותהיי $\{f_n \mid X \to \mathbb{R}\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות כלשהי ותהיי $g : X \to \mathbb{R}$ פונקציה.
נאמר שהסדרה $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ נשלטת על־ידי הפונקציה g מתקיים אם ורק אם לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $|f_n| \le g$.

תהיי $\{f_n \mid X \to \mathbb{C}\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות מדידות המתכנסת נקודתית לפונקציה $f : X \to \mathbb{C}$.
אם קיימת $g \in L^1(\mu)$ כך שהסדרה $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ נשלטת על־ידי g אזי $f \in L^1(\mu)$ ומתקיים

$$\int_X |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ובפרט

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu$$

הוכחה: ראשית מכך ש־$|f_n| \le g$ לכל $n \in \mathbb{N}$ נובע כי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq L^1(\mu)$ וגם מתקיים $|f| \le g$ אז $f \in L^1(\mu)$.
בפרט מתקיים לכל $n \in \mathbb{N}$ ש־$|f - f_n| \le 2g$ אז נגדיר $h_n := 2g - |f - f_n|$ ומהלמה של פאטו עבור סדרת הפונקציות $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ נקבל

$$(\star) \quad \int_X \liminf_{n\to\infty} h_n \, \mathrm{d}\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_X h_n \, \mathrm{d}\mu$$

וכן $h_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 2g$ נקודתית, אז בפרט $2g(x) = \liminf_{n\to\infty} h_n(x)$ לכל $x \in X$, אז יינבע מכך

$$\int_X 2g \, \mathrm{d}\mu = \int_X \liminf_{n\to\infty} h_n \, \mathrm{d}\mu \underset{(\star)}{\le} \liminf_{n\to\infty} \int_X h_n \, \mathrm{d}\mu = \liminf_{n\to\infty} \int_X (2g - |f - f_n|) \, \mathrm{d}\mu$$

מכאן מתקיים

$$\int_X 2g \, \mathrm{d}\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_X (2g - |f - f_n|) \, \mathrm{d}\mu \underset{\text{לינאריות האינטגרל}}{=} \liminf_{n\to\infty} \left(\int_X 2g \, \mathrm{d}\mu - \int_X |f - f_n| \, \mathrm{d}\mu \right)$$

$$= \liminf_{n\to\infty} \int_X 2g \, \mathrm{d}\mu + \liminf_{n\to\infty} \left(- \int_X |f - f_n| \, \mathrm{d}\mu \right) \underset{\liminf_{n\to\infty}(-a_n) = -\limsup_{n\to\infty} a_n}{=} \int_X 2g \, \mathrm{d}\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_X |f - f_n| \, \mathrm{d}\mu$$

כלומר

$$\int_X 2g \, \mathrm{d}\mu \le \int_X 2g \, \mathrm{d}\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_X |f - f_n| \, \mathrm{d}\mu$$

אבל $g \in L^1(\mu)$ אי־שלילית ולכן $\int_X 2g \, \mathrm{d}\mu < \infty$ ולכן ניתן להחסיר ולקבל $\limsup_{n\to\infty} \int_X |f - f_n| \, \mathrm{d}\mu = 0$ ובפרט מאי־שיוויון המשולש האינטגרלי

$$\left| \int_X f \, \mathrm{d}\mu - \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \right| = \left| \int_X (f - f_n) \, \mathrm{d}\mu \right| \le \int_X |f - f_n| \, \mathrm{d}\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$\square$

משפט 0.8 (תנאים שקולים לפונקציה אפסה כמעט־תמיד):

1. אם $f : X \to [0,\infty]$ מדידה עם $\int_X f \,\mathrm{d}\mu = 0$ אם ורק אם $f \underset{\mu}{=} 0$
2. אם $f : X \to \mathbb{C}$ מדידה ולכל $E \in \mathcal{A}$ מתקיים $\int_E f \,\mathrm{d}\mu = 0$ אזי $f \underset{\mu}{=} 0$

הוכחה:

1. ההנחה ש־$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = 0$ גוררת ש־$\mu\left(\left\{x \in X \mid f(x) \geq \frac{1}{n}\right\}\right) = 0$ חכח $n \in \mathbb{N}$ ולכן $f = 0$, μ־כמעט תמיד
2. נסמן $f = u + iv$ ותהיי $E = \{x \in X \mid u(x) \geq 0\}$. אז מהגדרת E ומההנחה שלכל $E \in \mathcal{A}$ מתקיים $\int_E f \,\mathrm{d}\mu = 0$ נובע $\int_E Re(f) \,\mathrm{d}\mu = 0$ ולכן לכל $h \in \{u,v\}$ מתקיים

$$0 = \int_E Re(f) \,\mathrm{d}\mu = \int_E h \,\mathrm{d}\mu = \int_X h^{\pm} \,\mathrm{d}\mu \Longrightarrow h^{\pm} \underset{\mu}{=} 0$$

$$\Longrightarrow h^{\pm} \underset{\mu}{=} 0 \Longrightarrow u^{\pm}, v^{\pm} \underset{\mu}{=} 0 \Longrightarrow u, v \underset{\mu}{=} 0 \Longrightarrow f \underset{\mu}{=} 0$$

□