

פתרון מטלה 01 – חשבון אינפיניטסימלי 3, 80415

4 באפריל 2025



שאלה 1

סעיף א'

תהי $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה מונוטונית עולה ממש. נוכיח כי הפונקציה

$$d(x, y) = |F(x) - F(y)|$$

מגדירה מטריקה על \mathbb{R} .

הוכחה:

1. סימטריה – מהגדרת הערך המוחלט מתקיים עבור $x, y \in \mathbb{R}$

$$d(x, y) = |F(x) - F(y)| = |F(y) - F(x)| = d(y, x)$$

2. אי שליליות – נובע ישירות מהגדרת הערך המוחלט כאי-שלילי. כמו כן מתקיים עבור $x, y \in \mathbb{R}$

$$x = y \iff F(x) - F(y) = 0 \implies |F(x) - F(y)| = 0 = d(x, y) = |F(x) - F(y)| = 0 \iff F(x) = F(y) \xrightarrow{(1)} x = y$$

כאשר (1) נובע מהיות F מונוטונית עולה ממש ולכן חד-חד ערכית.

3. אי-שיוויון המשולש – יהיו $x, y, z \in \mathbb{R}$. מאי-שיוויון המשולש (על ערך מוחלט) מתקיים:

$$d(x, z) = |F(x) - F(z)| \leq |F(x) - F(y)| + |F(y) - F(z)| = d(x, y) + d(y, z)$$

ולכן $d(x, y) = |F(x) - F(y)|$ מגדירה מטריקה על \mathbb{R} .

□

סעיף ב'

יהי $G = (V, E)$ גרף לא-מכוון קשיר, כלומר לכל שני קודקודים $u, v \in V$ קיים מסלול $\gamma = (x_0, \dots, x_n)$ עבור $x_i \in V$ ו- $\{x_{i-1}, x_i\} \in E$ המקיים $x_0 = u$ ו- $x_n = v$.

נסמן ב- $n = \ell(\gamma)$ את אורך המסלול (מספר הקשתות). נוכיח כי הפונקציה:

$$d(u, v) = \min\{\ell(\gamma) \mid \gamma \text{ is a path between } u \text{ and } v\}$$

מגדירה מטריקה על V .

הוכחה:

1. סימטריה – מקבלים ישירות מהגדרת המסלול שכן אם יש מסלול בין u לבין v יש גם מסלול בין v לבין u והוא כמובן באותו אורך (כי הגרף לא-מכוון).

2. אי-שליליות ראשית הוא אי-שלילי שכן אורך מסלולי מינימלי הוא מספר הקשתות שכמובן אי-שלילי. מכיוון שבגרף לא-מכוון קשיר יחס של צלע הוא אנטי-רפלקסיבי נובע כי בין u לבין u אין מסלול, משמע מספר הקשתות הוא 0.

3. אי-שיוויון המשולש – ראשית מכיוון שהגרף קשיר נובע כי בין כל שני קודקודים שונים יש מסלול. יהיו $u, v, w \in V$ ונגיח בשלילה כי אי-שיוויון המשולש לא מתקיים, משמע

$$d(u, v) + d(v, w) < d(u, w)$$

מהגדרה, $d(u, v)$ זה אורך המסלול המינימלי בין u לבין v וכן $d(v, w)$ הוא אורך המסלול המינימלי בין v לבין w .

אבל $d(u, w)$ הוא אורך המסלול המינימלי בין u לבין w ולכן לא יתכן כי $d(u, v) + d(v, w) < d(u, w)$ וקיבלנו סתירה ולכן אי-שיוויון המשולש מתקיים.

□

סעיף ג'

יהיו $(X, d_X), (Y, d_Y)$ מרחבים מטריים. נוכיח כי הפונקציה

$$d((x_0, y_0), (x_1, y_1)) = d_X(x_0, x_1) + d_Y(y_0, y_1)$$

מגדירה מטריקה על המכפלה $X \times Y$.

הוכחה:

1. סימטריה – נשים לב שמתקיים מהגדרת $(X, d_X), (Y, d_Y)$ בתור מרחבים מטריים:

$$d((x_0, y_0), (x_1, y_1)) = d_X(x_0, x_1) + d_Y(y_0, y_1) = d_X(x_1, x_0) + d_Y(y_1, y_0) = d((x_1, y_1), (x_0, y_0))$$

2. אי-שליליות – מהיות $(X, d_X), (Y, d_Y)$ מרחבים מטריים נובע כי $d((x_0, y_0), (x_1, y_1))$ הנתונה אי-שלילית כסכום של מספרים אי שליליים. נשים לב שמתקיים:

$$d(x_0, y_0), (x_1, y_1) = 0 \iff d_X(x_0, x_1) = 0 \wedge d_Y(y_0, y_1) = 0 \iff x_0 = x_1 \wedge y_0 = y_1$$

$$d((x_0, y_0), (x_1, y_1)) = 0 \iff (x_0, y_0) = (x_1, y_1) \text{ ולכן}$$

3. אי-שיויון המשולש – יהיו $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in X \times Y$. מתקיים:

$$\begin{aligned} d((x_1, y_1), (x_3, y_3)) &= d_X(x_1, x_3) + d_Y(y_1, y_3) \stackrel{(1)}{\leq} d_X(x_1, x_2) + d_X(x_2, x_3) + d_Y(y_1, y_2) + d_Y(y_2, y_3) \\ &= d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) + d((x_2, y_2), (x_3, y_3)) \end{aligned}$$

כאשר (1) נובע מאי-שיויון המשולש עבור המרחבים המטריים $(X, d_X), (Y, d_Y)$.

□

שאלה 2

סעיף א'

נוכיח כי לכל $x \in \mathbb{R}^n$ מתקיים $\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

הוכחה: יהי $x \in \mathbb{R}^n$ ויהי $p \geq 1$, מהגדרה מתקיים:

$$\begin{aligned}\|x\|_p &= \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\sup_i |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_\infty \\ \|x\|_p &= \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(n \cdot \sup_i |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = n^{\frac{1}{p}} \cdot \|x\|_\infty\end{aligned}$$

זאת אומרת, מתקיים:

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}} \cdot \|x\|_\infty$$

ובפרט כאשר ניקח גבול מאריתמטיקה של גבולות נקבל:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_\infty \leq \lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p \leq \lim_{p \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{p}} \cdot \|x\|_\infty$$

וכן:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_\infty = \|x\|_\infty \leq \lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \lim_{p \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{p}} \cdot \|x\|_\infty \stackrel{(1)}{=} 1 \cdot \|x\|_\infty \implies \lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$$

כאשר (1) נובע מכך ש- $\lim_{p \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{p}} \rightarrow 1$ שכן $\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p} \rightarrow 0$ ומכלל הכריך נקבל:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$$

□

סעיף ב'

נוכיח שהטענה מהסעיף הקודם לא נכונה גם עבור $x \in \ell^\infty$, כאשר ℓ^∞ הוא מרחב כל הסדרות האינסופיות החסומות.

$$\|(x_0, x_1, \dots)\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^p}$$

הוכחה: ראשית, ניזכר כי הגדרנו את הנורמה על מרחבי ℓ^p על-ידי

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|(x_0, x_1, \dots)\|_p = \lim_{p \rightarrow \infty} \sqrt[p]{\sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^p} = \lim_{p \rightarrow \infty} \sqrt[p]{\sum_{i=0}^{\infty} 1} = \infty \neq 1 = \left(\sup_i |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_\infty$$

□

סעיף ג'

יהיו $1 \leq p < q \leq \infty$ ונוכיח כי לכל סדרה $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ מתקיים: $\|x\|_q \leq \|x\|_p$ ונסיק כי מתקיים $\ell^p \subseteq \ell^q$.

הוכחה: נתחיל מהרמז. יהיו $1 \leq p < q \leq \infty$ ובתרגול הגדרנו $\|x\|_p = \left(\sum_i |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$. נניח כי $\|x\|_q = 1$ ולכן כמובן מתקיים $\|x\|_q^q = 1$ ולכן i מתקיים $|x_i| \leq 1$ ובפרט מכך שמתקיים $q > p$ נובע כי $|x_i|^q \leq |x_i|^p$ לכל i ומתקיים:

$$1 = \|x\|_q^q = \sum_i |x_i|^q \leq \sum_i |x_i|^p = \|x\|_p^p$$

וקיבלנו $\|x\|_q \geq 1 = \|x\|_p$

עכשיו אם $x = 0$ זה טריוויאלי ולכן $x \neq 0$ ונגדיר $e = \frac{x}{\|x\|_p}$ וכן $\|e\|_p = 1$ ובאותו אופן לעיל בגלל ש- $p < q$ מתקיים:

$$\|e\|_q = \left(\sum_i |e_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_i |e_k|^p \right)^{\frac{1}{q}} = \|e\|_p^{\frac{p}{q}} = 1$$

ולכן

$$\|x\|_q = \|\|x\|_p e\|_q = \|x\|_p \|e\|_q \leq \|x\|_p$$

מאי-השוויון לעיל נוכל להסיק כי $\ell^p \subseteq \ell^q$ ישירות מהגדרה, שכן מתקיים $x_n \in \ell^p$ אם ורק אם $\left(\sum |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ מתכנס במובן הצר וזה קורה אם ורק אם $\sum |x_n|^p < \infty$ וניזכר כי משפט הזנב לטורים אי-שליליים אומר כי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אם ורק אם לכל $m > 1$ הטור $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ מתכנס. \square

סעיף ד'

נוכיח כי בתנאים של הסעיף הקודם קיימת הכלה ממש $\ell^p \subset \ell^q$.

הוכחה: נבחן את הסדרה $x(i) = i^{-\frac{1}{p}}$ נשים לב כי היא אכן ב- ℓ^q שכן מתקיים:

$$\|x\|_q = \left(\sum_i |x(i)|^q \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_i \left| i^{-\frac{1}{p}} \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_i \left| \frac{1}{i^{\frac{q}{p}}} \right| \right)^{\frac{1}{q}} \stackrel{(1)}{<} \infty$$

כאשר (1) נובע מאריתמטיקה של טורים אי-שליליים.

מנגד, מתקיים:

$$\|x\|_p = \left(\sum_i |x(i)|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_i \left| i^{-\frac{1}{p}} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_i 1 \right)^{\frac{1}{p}} = \infty$$

ולכן מתקיים $\ell^p \subset \ell^q$. \square

שאלה 3

עבור מרחב נורמי $(X, \|\cdot\|)$ נסמן ב- $B(x) := B(X, X)$ את מרחב ההעתקות הלינאריות החסומות תחת הנורמה האופרטורית מ- X לעצמו.

סעיף א'

נוכיח כי לכל $T, S \in B(X)$ מתקיים $\|S \circ T\|_{\text{op}} \leq \|S\|_{\text{op}} \|T\|_{\text{op}}$

הוכחה: ראשית, בתרגול ראינו כי $(B(X, X), \|\cdot\|_{\text{op}})$ הוא מרחב נורמי ולכן הוא מקיים את אי-שיויון המשולש, ולכן מתקיים לכל $x \in X$:

$$\|(S \circ T)(x)\|_{\text{op}} \leq \|S\|_{\text{op}} \|Tx\|_{\text{op}} \leq \|S\|_{\text{op}} \|T\|_{\text{op}} \|x\|_{\text{op}}$$

בתרגול ראינו שלכל $T \in B(X, X)$ ו- $x \in X$ מתקיים $\|T(x)\|_X \leq \|T\|_{\text{op}} \|x\|_X$, ולכן נובע מכך

$$\|S \circ T\|_{\text{op}} = \sup_{\|x\|=1} \|(S \circ T)(x)\|_{\text{op}} \leq \sup_{\|x\|=1} \|S\|_{\text{op}} \|T\|_{\text{op}} \|x\|_{\text{op}} = \|S\|_{\text{op}} \|T\|_{\text{op}}$$

□ כמובן שמכך ש- $\{T \in \text{Hom}(X, X) \mid \|T\|_{\text{op}} < \infty\}$ נובע כי $B(X, X) := \{T \in \text{Hom}(X, X) \mid \|T\|_{\text{op}} < \infty\}$.

סעיף ב'

נוכיח כי אם λ ערך עצמי של $T \in B(X)$ אז $\lambda \leq \|T\|_{\text{op}}$.

הוכחה: בתרגול ראינו שמתקיים לכל $T \in B(X, X)$ ו- $x \in X$:

$$\|Tx\|_X \leq \|T\|_{\text{op}} \|x\|_X$$

יהי u וקטור עצמי של הערך עצמי λ , מתקיים:

$$|\lambda| = \frac{|\lambda| \cdot \|u\|_X}{\|u\|_X} = \frac{\|\lambda u\|_X}{\|u\|_X} = \frac{\|Tu\|_X}{\|u\|_X} \stackrel{(1)}{\leq} \frac{\|T\|_{\text{op}} \|u\|_X}{\|u\|_X} = \|T\|_{\text{op}}$$

□ כאשר (1) נובע מהתזכורת מהתרגול.

שאלה 4

סעיף א'

יהי (X, d) מרחב מטרי עבור X מרחב וקטורי מעל \mathbb{R} . נוכיח כי המטריקה d מושרית מנורמה אם ורק אם היא הומוגנית ואינווריאנטית להזזה.

הוכחה:

\Leftarrow נניח כי המטריקה d מושרית מנורמה ונראה כי היא הומוגנית ואינווריאנטית להזזה.

ניזכר כי מטריקה המושרית מנורמה מוגדרת על-ידי $d(x, y) := \|x - y\|$.

ולכן לפי התזכורת מתקיים:

1. הומוגניות:

$$d(\alpha x, \alpha y) = \|\alpha x - \alpha y\| = \|\alpha(x - y)\| = |\alpha| \|x - y\|$$

2. אינווריאנטיות להזזה:

$$d(x + z, y + z) = \|(x + z) - (y + z)\| = \|x + z - y - z\| = \|x - y\|$$

\Rightarrow נניח כי d הומוגנית ואינווריאנטית להזזה ונראה כי d מושרית מנורמה.

מכיוון ש- $d(x, y) = d(x - y, 0)$ נובע כי $d(x, y) = d(x - y, 0)$

נגדיר $\|x\| = d(x, 0)$ ונראה כי זוהי נורמה:

1. חיוביות: d מטריקה ולכן אי-שלילית וכן $x = 0 \Leftrightarrow \|x\| = d(x, 0) = 0$.

2. הומוגניות:

$$\|\alpha x\| = d(\alpha x, 0) = d(\alpha x, \alpha 0) = |\alpha| d(x, 0) = |\alpha| \|x\|$$

3. אי-שיוויון המשולש:

$$\|x + y\| = d(x + y, 0) = d(x + y, 0) \leq d(x, 0) + d(0, -y) = d(x, 0) + d(y, 0) = \|x\| + \|y\|$$

□

סעיף ב'

יהי $(X, \|\cdot\|)$ מרחב נורמי מעל \mathbb{R} . נוכיח כי הנורמה $\|\cdot\|$ מושרית ממכפלה פנימית אם ורק אם היא מקיימת את כלל המקבילית, כלומר לכל $x, y \in X$ מתקיים:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

הוכחה:

\Leftarrow נניח כי הנורמה $\|\cdot\|$ מושרית ממכפלה פנימית ונראה כי היא מקיימת את כלל המקבילית.

מתקיים מהגדרה:

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle + \langle x - y, x - y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle + \langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle = 2\langle x, x \rangle + 2\langle y, y \rangle \\ &= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \end{aligned}$$

וקיבלנו את כלל המקבילית.

\Rightarrow נניח כי הנורמה $\|\cdot\|$ מקיימת את כלל המקבילית ונרצה להראות שהיא מושרית ממכפלה פנימית.

נגדיר:

$$\langle x, y \rangle = \left(\frac{1}{4}\right)(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

ונשים לב ש- $\langle x, y \rangle \mapsto (x, y)$ היא רציפה כצירוף לינארי של פונקציות רציפות (ראינו שנורמה היא רציפה), נסמן טענה זאת ב- \diamond . נשים לב שמתקיימים:

1. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ וכן $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

2. נרצה להראות שמתקיים $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$. מכלל המקבילית, מתקיים:

$$\begin{aligned}
2\|x+z\|^2 + 2\|y\|^2 &= \|x+y+z\|^2 + \|x-y+z\|^2 \\
\iff \|x+y+z\|^2 &= 2\|x+z\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x-y+z\|^2 \\
&\stackrel{(1)}{=} 2\|y+z\|^2 + 2\|x\|^2 - \|y-x+z\|^2
\end{aligned}$$

כאשר (1) מתקיים מחילוף תפקידים בין x לבין y . מתקיים אם כך:

$$\begin{aligned}
\|x+y+z\|^2 &= \frac{2\|x+z\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x-y+z\|^2 + 2\|y+z\|^2 + 2\|x\|^2 - \|y-x+z\|^2}{2} \\
&= \|x\|^2 + \|y\|^2 + \|x+z\|^2 + \|y+z\|^2 - \frac{1}{2}\|x-y+z\|^2 - \frac{1}{2}\|y-x+z\|^2
\end{aligned}$$

נזכור שמתקיים $\|w\| = \|-w\|$ ולכן:

$$\|x+y+z\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \|x-z\|^2 + \|y-z\|^2 - \frac{1}{2}\|x-y-z\|^2 - \frac{1}{2}\|y-x-z\|^2$$

ולכן

$$\begin{aligned}
\langle x+y, z \rangle &= \frac{1}{4}(\|x+y+z\|^2 - \|x+y-z\|^2) = \frac{1}{4}(\|x+z\|^2 - \|x-z\|^2) + \frac{1}{4}(\|y+z\|^2 - \|y-z\|^2) = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle \\
&\quad \text{3. נרצה להראות שמתקיים } \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle \text{ לכל } \lambda \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

נשים לב שעבור $\lambda \in \mathbb{N}$ הטענה נובעת באינדוקציה מהמקרה הקודם. עבור עבור $\lambda \in \mathbb{Z}$ נסמן $\lambda = \frac{p}{q}$ כאשר $p, q \in \mathbb{Z}$ ו- $q \neq 0$ מתקיים:

$$p\langle x, y \rangle = \langle px, y \rangle = \langle \frac{p}{q}px, y \rangle = q\langle \frac{p}{q}x, y \rangle \implies \frac{p}{q}\langle x, y \rangle = \langle \frac{p}{q}x, y \rangle$$

כאשר המעברים נובעים מהומגנויות שהוכחנו ועונה על המקרה כאשר $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. נשאר להראות שהטענה נכונה עבור כל $p \in \mathbb{R}$, ובשביל זה נשתמש ברציפות שראינו ב- \diamond .

נגדיר:

$$f(\lambda) = \lambda \langle x, y \rangle, \quad g(\lambda) = \langle \lambda x, y \rangle$$

מ- \diamond נובע כי f ו- g רציפות מלינאריות והרכבה של פונקציות רציפות. בפרט, לכל $\lambda \in \mathbb{Q}$ מתקיים $f(\lambda) = g(\lambda)$. אבל פונקציות רציפות שמשוות בכל $\lambda \in \mathbb{Q}$ בהכרח משוות גם בכל $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ מצפיפות, ולכן לכל $\lambda \in \mathbb{R}$ מתקיים $f(\lambda) = g(\lambda)$ ובמילים אחרות מתקיים $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$.

□

סעיף ג'

יהי $1 \leq p \leq \infty$. נראה כי הנורמה על המרחב $(\ell^p, \|\cdot\|)$ מושרית ממכפלה פנימית אם ורק אם $p = 2$.

הוכחה:

ראשית, בתרגול ראינו כי ℓ^p אכן מהווה מרחב וקטורי ולכן הוא מרחב נורמי.

\Leftarrow נניח כי הנורמה על המרחב $(\ell^p, \|\cdot\|)$ מושרית ממכפלה פנימית ונראה כי $p = 2$.

מהיות ℓ^p מרחב נורמי, נובע מהסעיף הקודם כי הוא מושרה ממכפלה פנימית אם ורק אם הוא מקיים את כלל המקבילית.

לכן מספיק שניקח $x = (1, 0, 0)$, $y = (0, 1, 0)$ ונשים לב שמתקיים $\|x\| = \|y\| = 1$. מכלל המקבילית מתקיים:

$$\|x + y\|_p^2 + \|x - y\|_p^2 = 2 \cdot 2^{\frac{2}{p}} = 4 = 2 + 2 = 2\|x\|_p^{\frac{2}{p}} + 2\|y\|_p^{\frac{2}{p}} \iff 2^{\frac{2}{p}} = 2 \iff p = 2$$

\Rightarrow נניח כי $p = 2$ ונראה כי הנורמה על המרחב $(\ell^p, \|\cdot\|)$ מושרית ממכפלה פנימית. יהיו $x = (x_n)$, $y = (y_n) \in \ell^2$ ונגדיר $\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$.

נראה כי זו אכן מכפלה פנימית:

1. לינאריות ברחיב הראשון: יהיו $x, y, z \in \ell^2$ ו- $\alpha \in \mathbb{R}$, מתקיים:

$$\langle \alpha x + y, z \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha x_n + y_n) z_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} x_n z_n + \sum_{n=1}^{\infty} y_n z_n = \alpha \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$$

2. סימטריה: ישיר

3. אי-שליליות:

$$\infty > \langle x, x \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 \geq 0$$

וכמובן $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$ והביטוי לעיל קטן מאינסוף כי אנחנו ב- ℓ^2 .

ולכן זו אכן מכפלה פנימית, ולכן היא מקיימת את כלל המקבילית והנורמה:

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2} = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

נורמה על ℓ^2 המושרית ממכפלה פנימית.

□

שאלה 5

יהי (X, d) מרחב אולטרה-מטרי, כלומר (X, d) מרחב מטרי המקיים את אי-שוויון המשולש החזק: $d(x, z) \leq \max(d(x, y), d(y, z))$.

סעיף א'

יהיו $x, y, z \in X$ ונוכיח כי אם $d(x, y) > d(y, z)$ אזי $d(x, z) = d(x, y)$.

הוכחה: מכך שמתקיים $d(x, y) > d(y, z)$ ומכך ש- (X, d) מרחב אולטרה-מטרי נובע כי $d(x, z) \leq d(x, y)$. נשים לב שבאותו אופן נובע גם $d(x, z) \leq \max\{d(x, y), d(y, z)\} \stackrel{(1)}{=} d(x, y)$ כאשר (1) נובע מהנתון $d(x, y) > d(y, z)$. בסך-הכל קיבלנו $d(x, z) = d(x, y)$.

□

סעיף ב'

נוכיח כי לכל $x, y \in X$ ו- $r > 0$ כך ש- $y \in B_r(x)$ מתקיים $B_r(x) = B_r(y)$.

הוכחה: יהי $y \in B_r(x)$. מהגדרה נובע כי זה קורה אם ורק אם $|y - x| < r$ ויהי z כך שמתקיים $|z - x| < r$. מהגדרת המרחב האולטרה-מטרי, נובע כי מתקיים $|z - y| \leq \max\{|z - x|, |y - x|\} < r$ משמע $z \in B_r(y)$ ולכן $B_r(x) \subseteq B_r(y)$ ונשים לב שבהחלפת תפקידים בין x לבין y נקבל את ההכלה בכיוון השני.

□

סעיף ג'

נוכיח כי לכל $x \in X$ ו- $r > 0$ הכדור הסגור $\hat{B}_r(x)$ הוא גם פתוח.

הוכחה: יהי $y \in \hat{B}_r(x)$ ולכן $d(y, x) \leq r$ ונבחן את $B_r(y)$.

נשים לב שמתקיים $z \in B_r(y) \subseteq \hat{B}_r(x)$ מכיון שהמרחב הוא אולטרה-מטרי ולכן $d(x, z) = \max\{d(x, y), d(y, z)\} \leq r$ וקיבלנו כי הכדור הוא גם פתוח (לכל נקודה בכדור הסגור יש סביבה מוכלת ממש בכדור הפתוח).

□

סעיף ד'

נוכיח כי לכל $x \in X$ ו- $r > 0$ הכדור הפתוח $B_r(x)$ הוא גם סגור.

הוכחה: יהי $y \in \partial B_r(x)$. מהגדרה, נובע כי כל כדור פתוח $B_r(y)$ מכיל סביבה של הכדור $B_r(x)$.

יהי $s \leq r$, נבחן את הכדור הפתוח $B_s(y)$:

מהיות y נקודה על השפה נובע כי $B_r(x) \cap B_s(y) \neq \emptyset$ ולכן קיים $z \in B_r(x) \cap B_s(y)$ זאת אומרת $|z - x| < r$ ו- $|z - y| < s \leq r$ ומהיות המרחב אולטרה-מטרי נקבל:

$$|y - x| \leq \max\{|y - z|, |z - x|\} < \max\{s, r\} = r$$

□

ולכן $y \in B_r(x)$ אבל מצאנו שנקודה בשפה של הכדור נמצאת בתוך הכדור ולכן הכדור סגור.

סעיף ה'

יהי $p \in \mathbb{N}$ מספר ראשוני. נחשב את הגבול של הסדרה $X_n = \sum_{i=0}^n p^i$ ב- (\mathbb{Q}, d_p) כאשר d_p היא המטריקה ה- p -אדית.

פתרון: ראשית נשים לב כי $X_n = \sum_{i=0}^n p^i$ זהו סכום גיאומטרי ולכן $X_n = \sum_{i=0}^n p^i = \frac{p^{n+1}-1}{p-1} \in \mathbb{Q}$ ולכן ננחש שמתקיים $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{1-p}$ (זה יהיה טור גיאומטרי אינסופי).

נסמן $L = \frac{1}{1-p} = -\frac{1}{p-1} \in \mathbb{Q}$ ומתקיים:

$$x_n - L = \frac{p^{n+1}-1}{p-1} + \frac{1}{p-1} = \frac{p^{n+1}}{p-1}$$

ועם המטריקה ה- p -אדית מתקיים:

$$|x_n - L|_p = \left| \frac{p^{n+1}}{p-1} \right|_p = |p^{n+1}|_p \cdot \left| \frac{1}{p-1} \right|_p \stackrel{(1)}{=} p^{-(n+1)} \implies d_p(x_n, L) = p^{-(n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

□

כאשר (1) נובע מכך ש- $\left| \frac{1}{p-1} \right|_p = 1$ שכן $|p-1|_p = 1$ מהגדרת המטריקה ה- p -אדית.

שאלה 6

יהי (X, d) מרחבי מטרי ו- $A \subseteq X$ תת־קבוצה.

סעיף א'

נוכיח שמתקיים $(A^\circ)^\circ = A^\circ$.

הוכחה: ראשית ניזכר שראינו כי הפנים של A מוגדר על־ידי $U \subseteq A$ open $A^\circ := \bigcup U$ וראינו שאיחוד כלשהו של קבוצות פתוחות הוא פתוח ולכן A° היא קבוצה פתוחה.

נראה אז שהפנים של קבוצה פתוחה הוא הקבוצה עצמה: תהי $B \subseteq X$ קבוצה ונראה כי $B^\circ = B$ אם ורק אם B פתוחה: בכיוון הראשון מכיוון ש- B° מהטענה לעיל פתוחה אז אם $B = B^\circ$ פתוחה. מצד שני, אם B פתוחה אז B° היא איחוד של קבוצות פתוחות המוכלות ב- B , שאחת מהן היא B ולכן $B^\circ = B$.
זה סוגר את שני הכיוונים ולכן $(A^\circ)^\circ = A^\circ$. □

סעיף ב'

נוכיח שמתקיים $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$.

הוכחה: ניזכר כי $\overline{A} = \bigcap_{C \subseteq A \text{ close}} C$ וכן ראינו שחיתוך כלשהו של קבוצות סגורות הוא סגור ולכן \overline{A} היא קבוצה סגורה. מספיק שנראה כי $\overline{B} = B$ אם ורק אם B סגורה:

בכיוון הראשון, \overline{B} סגורה ולכן אם $\overline{B} = B$ נובע כי B סגורה. בכיוון השני, \overline{B} היא חיתוך של קבוצות סגורות המכילות את B ואם B סגורה אז היא אחד האיברים בחיתוך ולכן שווה לחיתוך.
זה סוגר את שני הכיוונים ולכן $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$. □

סעיף ג'

נוכיח שמתקיים $(A^\circ)^c = \overline{A^c}$.

הוכחה: נזכור כי קבוצה מוכלת ב- A אם ורק אם המשלים שלה מכיל את A^c , ולכן:

$$(A^\circ)^c = \left(\bigcup_{U \subseteq A \text{ open}} U \right)^c = \bigcap_{U \subseteq A \text{ open}} U^c = \bigcap_{A^c \subseteq F \text{ closed}} F = \overline{A^c}$$

□

סעיף ד'

נוכיח שמתקיים $(\overline{A})^c = (A^c)^\circ$.

הוכחה: ראשית \overline{A} סגורה ולכן $(\overline{A})^c$ היא פתוחה (קבוצה היא סגורה אם ורק אם המשלים שלה קבוצה פתוחה). ניזכר כי קבוצה A תהיה פתוחה אם כל $a \in A$ היא נקודה פנימית (או ריקה), ולכן:

$$A^\circ = \{x \in X \mid \exists \varepsilon > 0, B_\varepsilon(x) \subseteq A\}$$

A סגורה אם A^c פתוחה, ולכן מהגדרה שנתנו לעיל נובע כי:

$$\overline{A} = \{x \in X \mid \forall \varepsilon > 0, B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset\}$$

נשים לב שמתקיימת שרשרת הגרירות הבאה מהגדרות לעיל:

$$x \in (\overline{A})^c \iff x \notin \overline{A} \xLeftrightarrow{(1)} \exists \varepsilon > 0, B_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset \xLeftrightarrow{(1)} \exists \varepsilon > 0, B_\varepsilon(x) \subseteq A^c \xLeftrightarrow{(3)} x \in (A^c)^\circ$$

כאשר (1) זה מהגדרת \overline{A} , $x \in \overline{A}$ (2) מהגדרת חיתוך והכלת קבוצות ו-(3) נובע מהגדרת A° . ולכן $(\overline{A})^c = (A^c)^\circ$. □

סעיף ה'

נוכיח שמתקיים $\overline{\partial A} = \partial A$.

הוכחה: נראה כי ∂A היא סגורה: $\partial A = \overline{A} \setminus (A^\circ)^c = \overline{A} \cap \left(\underbrace{X \setminus A^\circ}_{\text{closed set}} \right)$.
מהטענה בסעיף ב' נקבל $\overline{\partial A} = \partial A$.

□