

פתרון מטלה 07 — תורת המידה, 80517

11 בדצמבר 2025



שאלה 1

יהי (X, \mathcal{A}, μ) מרחב מידה. עבור $0 < r < 1$ נגדיר לכל $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ מדידה

$$\|f\|_r = \left(\int |f|^r d\mu \right)^{\frac{1}{r}}$$

ונגדיר גם

$$L^r(\mu) = \{f : X \rightarrow \mathbb{C} \mid \|f\|_r < \infty, \text{ מדידה } f\}$$

נראה כי אם X יש שתי קבוצות זרות מדידות ממידה סופית ששתיהן לא ממידה אפס, אז $\|\cdot\|_r$ לא מקיימת את אי־שיוויון המשולש.

הוכחה: תהיינה $A, B \in X$ כך ש־ $0 < \mu(A), \mu(B) < \infty$ ו־ $A \cap B = \emptyset$.

נגדיר $f = \mathbb{1}_A$ ומכך ש־ $0 < \mu(A) < \infty$ נקבל $\|f\|_r < \infty$. באופן דומה נגדיר גם $g = \mathbb{1}_B$ ומאותו שיקול $\|g\|_r < \infty$.

$$h = f + g = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B \stackrel{A \cap B = \emptyset}{=} \mathbb{1}_{A \cup B}$$

אז נחשב

$$\|h\|_r^r = \int |\mathbb{1}_{A \cup B}|^r d\mu = \int_{A \cup B} 1 d\mu = \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \implies \|h\|_r = (\mu(A) + \mu(B))^{\frac{1}{r}}$$

מצד שני מתקיים

$$\|f\|_r^r = \int |\mathbb{1}_A|^r d\mu = \int_A 1^r d\mu = \int_A 1 d\mu = \mu(A) \implies \|f\|_r = (\mu(A))^{\frac{1}{r}}$$

$$\|g\|_r^r = \int |\mathbb{1}_B|^r d\mu = \int_B 1^r d\mu = \int_B 1 d\mu = \mu(B) \implies \|g\|_r = (\mu(B))^{\frac{1}{r}}$$

אז אנחנו רוצים לבחון האם האי־שיוויון הבא מתקיים (ליתר דיוק, שהוא נופל):

$$\|h\|_r = \|f + g\|_r \stackrel{?}{\leq} \|f\|_r + \|g\|_r \iff (\mu(A) + \mu(B))^{\frac{1}{r}} \stackrel{?}{\leq} \mu(A)^{\frac{1}{r}} + \mu(B)^{\frac{1}{r}}$$

נסמן לנוחות $a = \mu(A), b = \mu(B)$ ו־ $0 < a, b$ וכן $p = \frac{1}{r} > 1$ (כי $0 < r < 1$) ונבהך

$$(a + b)^p \stackrel{?}{\leq} (a^p + b^p)$$

נשים לב שהפונקציה $\varphi(x) = x^p$ היא פונקציה קמורה, כלומר לכל $t \in (0, 1)$ מתקיים

$$\varphi(ta + (1 - t)b) \leq t\varphi(a) + (1 - t)\varphi(b)$$

נחלק את אי־השיוויון שאנחנו בוחנים ב־ $b^p \neq 0$ כמובן

$$(a + b)^p \stackrel{?}{\leq} (a^p + b^p) \iff \frac{(a + b)^p}{b^p} \stackrel{?}{\leq} \frac{a^p + b^p}{b^p} \iff \left(\frac{a}{b} + 1\right)^p \stackrel{?}{\leq} \left(\frac{a}{b}\right)^p + 1 \stackrel{x=\frac{a}{b}}{\iff} (x + 1)^p \leq x^p + 1$$

נגדיר $\psi(x) = (x + 1)^p - x^p - 1$ זה פולינום ולכן חלק, נגזר

$$\psi'(x) = p(x + 1)^{p-1} - px^{p-1}$$

מכך ש־ $p > 1$ אז $p - 1 > 0$ ו־ $x > 0$ אז $x^{p-1} > (x + 1)^{p-1}$ כלומר $\psi'(x) > 0$ ונשים לב

$$\psi(0) = 1^p - 0^p = 0$$

אז ψ היא מונוטונית עולה ממש לכל $x > 0$ ונובע מכך

$$(x + 1)^p > x^p + 1$$

בסתירה, כלומר אי־שיוויון המשולש לא מתקיים.

□

שאלה 2

נניח כי (X, \mathcal{A}, μ) מרחב מידה σ -סופי (איחוד בן-מנייה של קבוצות מדידות עם מידה סופית) ו- $1 \leq s \leq t \leq \infty$.

סעיף א'

נוכיח כי $L^t(\mu) \subseteq L^s(\mu)$ אם ורק אם $\mu(X) < \infty$.

הוכחה: \Rightarrow נניח כי $\mu(X) < \infty$ ונוכיח $L^t(\mu) \subseteq L^s(\mu)$.

אם $s = t$ סיימנו ולכן נניח שיש שם אי-שוויון חזק ושכרגע $t < \infty$.

תהי $f \in L^t(\mu)$, ונסמן $g(x) = 1$.

נסמן $p = \frac{t}{s}$, $q = \frac{t}{t-s}$ ומההנחות מתקיים $q, p \geq 1$ ובדיקה מראה שהם צמודים אחד לשנייה $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{s}{t} + \frac{t-s}{t} = \frac{s+t-s}{t} = 1$ מאי-שוויון הולדר

$$\|f\|_s = \left(\int |f|^s d\mu \right)^{\frac{1}{s}} = \left(\int |f|^s \cdot 1 d\mu \right)^{\frac{1}{s}} \leq \|f\|_s^{\frac{1}{s}} \|1\|_{\frac{t}{t-s}}^{\frac{1}{s}}$$

נבחין

$$\|f\|_s^{\frac{t}{s}} = \left(\int (|f|^s)^{\frac{t}{s}} d\mu \right)^{\frac{s}{t}} = \left(\int |f|^t d\mu \right)^{\frac{s}{t}} = \|f\|_t^t$$

$$\|1\|_{\frac{t}{t-s}} = \mu(X)^{\frac{t-s}{t}}$$

מידת המרחב היא סופית ולכן נסמן $M = \mu(X)$ אז מהאי-שוויון לעיל

$$\|f\|_s \leq \left(M^{\frac{t-s}{t}} \right)^{\frac{1}{s}} (\|f\|_t^{\frac{t}{s}})^{\frac{1}{s}} = M^{\frac{1}{s} - \frac{1}{t}} \|f\|_t < \infty \Rightarrow f \in L^s(\mu)$$

אם $t = \infty$ אז $f \in L^\infty$ היא $|f| \leq \|f\|_\infty$ כמעט תמיד (ראינו בהרצאה) אז

$$\|f\|_s^s = \int |f|^s d\mu \leq \int \|f\|_\infty^s d\mu = \|f\|_\infty^s \mu(X) < \infty \Rightarrow f \in L^s(\mu)$$

\Leftarrow נניח כי $L^t(\mu) \subseteq L^s(\mu)$ ונוכיח $\mu(X) < \infty$.

נניח שלא ככה, כלומר $\mu(X) = \infty$.

X הוא מרחב מידה σ -סופי ולכן קיימות E_1, E_2, \dots מדידות כך ש- $0 < \mu(E_n) < \infty$ ו- $X = \bigcup_{n=1}^\infty E_n$ (לא-דווקא שהן זרות בצורה טבעית אלא הזרנו אותן בתהליכים דומים למה שראינו במטלות הראשונות) ומתקיים כמובן $\mu(X) = \sum_{n=1}^\infty \mu(E_n)$ והסכום מתבדר ואי-שלילי.

יהי $N_1 \in \mathbb{N}$ כך שמתקיים $\sum_{n=1}^{N_1} \mu(E_n) \geq 1$ (יש כזה כי הטור מתבדר, לא סתם מתבדר - שואף לאינסוף) ונגדיר $F_1 = \bigcup_{n=1}^{N_1} E_n$ וכמובן $1 \leq \mu(F_1) < \infty$ כסכום סופי של מידות סופיות.

נמשיך ונגדיר F_2, F_3, \dots וכן הלאה כך שלכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים $1 \leq \mu(F_k) < \infty$ והן זרות אחת לשנייה (איחדנו קבוצות זרות) ונחלק למקרים:

אם $t = \infty$ אז $f \equiv 1 \in L^\infty(\mu)$ אבל $\int (|f|^s d\mu) = \mu(X) = \infty$ ולכן $f \notin L^s(\mu)$ ולכן $L^\infty(\mu) \not\subseteq L^t(\mu)$ סתירה.

אם $t < \infty$ ושוב נניח כי $s < t$ (אחרת זה שוב סתירה), ונבחר $\delta > 0$ כך שיתקיים $0 < \delta < \frac{t}{s} - 1$ ולכל $k \in \mathbb{N}$ נגדיר $b_k := \mu(F_k)^{-\frac{1}{t}} k^{-\frac{(1+\delta)}{t}}$ ונגדיר $f := \sum_{k=1}^\infty b_k \mathbb{1}_{F_k}$ נחשב ונקבל מהזרות

$$\int |f|^t d\mu = \int \left| \sum_{k=1}^\infty b_k \mathbb{1}_{F_k} \right|^t d\mu = \sum_{k=1}^\infty b_k^t \int_{F_k} 1 d\mu = \sum_{k=1}^\infty b_k^t \mu(F_k) = \sum_{k=1}^\infty \left(\mu(F_k)^{-\frac{1}{t}} \right)^t \left(k^{-\frac{(1+\delta)}{t}} \right)^t \mu(F_k) = \sum_{k=1}^\infty k^{-(1+\delta)} < \infty$$

כאשר ההתכנסות היא מהיות $\delta + 1 > 0$.

כלומר קיבלנו $f \in L^t(\mu)$, אבל מצד שני

$$\int |f|^s d\mu = \sum_{k=1}^\infty b_k^s \int_{F_k} 1 d\mu = \sum_{k=1}^\infty \mu(F_k)^{1-\frac{s}{t}} k^{-\frac{s(1+\delta)}{t}} \underset{\substack{1-\frac{s}{t} \geq 0 \\ \mu(F_k) \geq 1}}{\geq} \sum_{k=1}^\infty k^{-\frac{s(1+\delta)}{t}} \geq \infty$$

כאשר ההתבדרות היא מהיות $\frac{s(1+\delta)}{t} \leq 1$.

כלומר, קיבלנו $f \notin L^s(\mu)$ אבל הנחנו $L^t(\mu) \subseteq L^s(\mu)$ וזאת סתירה, כלומר $\mu(X) < \infty$.

□

סעיף ב'

נוכיח כי $L^s(\mu) \subseteq L^t(\mu)$ אם ורק אם אין ב- \mathcal{A} תתי־קבוצות ממידה קטנה כרצוננו, כלומר קיים $\varepsilon > 0$ כך שאם $\mu(A) < \varepsilon$ עבור A מדידה כלשהי, אז A ממידה אפס.

הוכחה: \Leftarrow נניח כי $L^s(\mu) \subseteq L^t(\mu)$ ונראה כי אין ב- \mathcal{A} תתי־קבוצות ממידה קטנה כרצוננו.

נניח בשלילה שיש ב- \mathcal{A} תתי־קבוצה ממידה קטנה כרצוננו, ולכן לכל $n \in \mathbb{N}$ יש קבוצה מדידה A_n כך ש- $0 < \mu(A_n) < \frac{1}{n}$. מהיות המרחב σ -סופי נוכל לבנות תת־סדרה של $(B_n)_{n=1}^\infty$ שכל איברי הסדרה זרים ומדידים כך שמתקיים $0 < \mu(B_n) \rightarrow 0$. נגדיר

$$\alpha_n := \frac{1}{n^2 \mu(B_n)^{\frac{1}{s}}}$$

ולכן אם נגדיר פונקציה f הנתמכת על $(B_n)_{n=1}^\infty$, כלומר $f = \sum_{n=1}^\infty \alpha_n \mathbb{1}_{B_n}$ נקבל

$$\int |f|^s = \sum_{n=1}^\infty \alpha_n^s \mu(B_n) = \sum_{n=1}^\infty \frac{\mu(B_n)}{(n^2 \mu(B_n)^{\frac{1}{s}})^s} = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{2s}} < \infty$$

שזהו טור מתכנס כי $s \geq 1$. מצד שני

$$\int |f|^t = \sum_{n=1}^\infty \alpha_n^t \mu(B_n) = \sum_{n=1}^\infty \frac{\mu(B_n)}{(n^2 \mu(B_n)^{\frac{1}{s}})^t} = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{2t} \mu(B_n)^{\frac{t}{s}-1}}$$

מהיות $s > t$ אז $\frac{t}{s} - 1 < 0$, $\mu(B_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ ואנחנו תמיד יכולים לבנות את B_n כך שיתקיים

$$\mu(B_{n_k})^{-(\frac{t}{s}-1)} > n_k^{2t} \Rightarrow \frac{\mu(B_{n_k})^{-(\frac{t}{s}-1)}}{n_k^{2t}} > 1$$

ולכן הטור במקרה זה מתבדר, וזו סתירה להנחה $L^s(\mu) \subseteq L^t(\mu)$.

\Rightarrow נניח כי אין ב- \mathcal{A} תתי־קבוצות ממידה קטנה כרצוננו ונוכיח $L^s(\mu) \subseteq L^t(\mu)$.

תהיי $f \in L^s(\mu)$ ולכל $k \in \mathbb{Z}$ נגדיר

$$E_k := \{x \in X \mid 2^k \leq |f(x)| < 2^{k+1}\}$$

כל E_k כזה מדידה כתמונה של פונקציה ומדידה ומתקיים לכל $i \neq j$ ש- $E_i \cap E_j = \emptyset$ (כי הקטעים $[2^k, 2^{k+1})$ אינם נחתכים)

$$\int |f|^s d\mu = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{E_k} |f|^s d\mu \geq \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{ks} \mu(E_k)$$

כעת, נטען שיש מספר סופי של k -ים עבורם $\mu(E_k) > 0$: שכן אם בשלילה לא היה ככה, היה מתקיים

$$\|f\|_s^s = \int |f|^s d\mu \geq \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{ks} \mu(E_k)$$

אם הייתה כמות שאיננה סופית סופית, אז הסכום מצד ימין היה מתבדר (בין אם בשאיפה לאינסוף ובין אם שאיפה למינוס אינסוף) ואז נקבל $\int |f|^s = \infty$ אבל $f \in L^s$.

אז קיים $M < \infty$ כך שמתקיים $|f(x)| \leq M$ כלומר $f \in L^\infty(\mu)$ ומהיות $s \leq t \leq \infty$ נקבל $L^\infty(\mu) \subseteq L^t(\mu)$ ולכן $f \in L^t(\mu)$ ונקבל $L^s(\mu) \subseteq L^t(\mu)$. □

שאלה 3

יהי (X, \mathcal{A}, μ) מרחב מידה. עבור $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ מדידה נגדיר

$$\text{ess sup } f := \inf\{\alpha \mid \mu(f^{-1}((\alpha, \infty))) = 0\}, \quad \text{ess inf } f := \sup\{\alpha \mid \mu(f^{-1}((-\infty, \alpha))) = 0\}$$

עבור $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ נסמן $\|f\|_\infty = \text{ess sup } |f|$.

סעיף א'

תהי $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ מדידה. נסמן ב- $K \subseteq \mathbb{R}$ את התומך של המידה $f_*\mu$ המוגדרת על $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$. נוכיח כי הסופרמום והאינפמום של K הם בדיוק $\text{ess sup } f, \text{ess inf } f$.

הוכחה: נסמן

$$M := \text{ess sup } f = \inf\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \mu(f^{-1}(\alpha, \infty)) = 0\}$$

יהי $\varepsilon > 0$, מהגדרת האינפמום נובע $\mu(f^{-1}((M + \varepsilon, \infty))) = 0$ ומהמשיכה קדימה של המידה

$$(f_*\mu)((M + \varepsilon, \infty)) = \mu(f^{-1}((M + \varepsilon, \infty))) = 0$$

מהגדרת התומך מתקיים ש- $(M + \varepsilon, \infty) \subseteq \mathbb{R} \setminus K$, מהיות ε שרירותי נובע שכל הקטע (M, ∞) ב- $\mathbb{R} \setminus K$, כלומר לכל $y \in (M, \infty)$, $y \notin K$. מצד שני, כל $x \in K$ מקיים $x \leq M = \text{ess sup } f$.

הכיוון השני הוא סימטרי: נסמן

$$T := \text{ess inf } f$$

אז לכל $\varepsilon > 0$ מתקיים $\mu(f^{-1}((-\infty, T - \varepsilon))) = 0$, אז אף נקודה שקטנה מ- $T - \varepsilon$ אינה ב- K , ולכן $\inf K \geq T$, אבל לכל $\beta > T$ מתקיים $\mu(f^{-1}((-\infty, \beta))) > 0$ ולכן $(-\infty, \beta) \cap K \neq \emptyset$ ולכן $K \leq T = \text{ess inf } f$ וקיבלנו $\inf K = T = \text{ess inf } f$. □

סעיף ב'

נראה כי לכל f מדידה

$$\|f\|_1 \leq \mu(X) \cdot \|f\|_\infty$$

הוכחה: נסמן $M := \|f\|_\infty$, אז לכל $\varepsilon > 0$ מהגדרת ess sup נגדיר

$$A_\varepsilon := \{x \in X \mid |f(x)| > M + \varepsilon\} \implies \mu(A_\varepsilon) = 0$$

יתר על-כן, נובע מכך שמתקיים $|f(x)| \leq M$ כמעט בכל מקום ולכן ממונוטוניות האינטגרל

$$\|f\|_1 = \int_X |f| d\mu \leq \int_X \|f\|_\infty d\mu = \|f\|_\infty \cdot \int_X 1 d\mu = \|f\|_\infty \mu(X)$$

□

סעיף ג'

נניח כי f, f_n פונקציות מדידות כך ש- $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. נראה כי קיימת ל- f_n תת-סדרה המתכנסת נקודתית ל- f .

הוכחה: נסמן $M_n := \|f_n - f\|_\infty$ ומהנתון $M_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ ומהגדרת ess sup , אם $M_n < \alpha$ אזי $\mu(\{|f_n - f| < \alpha\}) = 0$. ניקח סדרת אינדקסים $(n_j)_{j \geq 1}$ כך שמתקיים $m_{n_j} < \frac{1}{j}$ לכל j וזה אפשרי מהיות $M_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ ונגדיר

$$E_j := \left\{x \in X \mid |f_{n_j}(x) - f(x)| > \frac{1}{j}\right\}$$

אז לכל j מתקיים ש- $\mu(E_j) = 0$ (מהגדרת ess sup) ונסתכל על $A = \bigcup_{j=1}^\infty A_j$, זה איחוד בן-מנייה של קבוצות ממידה אפס ולכן $\mu(A) = 0$. אם $x \notin A$ אז עבור j גדול דיו מתקיים

$$|f_{n_j}(x) - f(x)| \leq \frac{1}{j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$$

כלומר $f_{n_j}(x) \rightarrow f(x)$ לכל $x \notin A$, כלומר לכל $x \in X$ למעט בקבוצה ממידה אפס, כלומר קיבלנו $f_{n_j} \rightarrow f$ כמעט בכל מקום/כמעט תמיד. □

שאלה 4

נניח כי (X, \mathcal{A}, μ) מרחב מידה סופי ו- $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ מדידה.

סעיף א'

נראה כי אם $\|f\|_\infty = 1$ אז הסדרה $a_n = \int_X |f|^n d\mu$ מתכנסת.
הוכחה: מהנתון $\|f\|_\infty = 1$ נובע $1 = \inf\{\alpha \geq 0 \mid \mu(|f| \geq \alpha) = 0\}$, כלומר מתקיים $\mu\text{-כמעט תמיד לכל } x \in X, |f(x)| \leq 1$, ולכן

$$a_n = \int_X |f|^n d\mu \leq \int_X 1 d\mu = \mu(X) < \infty$$

עוד נובע $|f| \leq |f|^{n-1} \leq |f|^{n-2} \leq \dots \leq |f|$ כלומר $a_{n+1} \leq a_n$ ונשים לב גם שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $0 \leq a_n$ כאינטגרל על פונקציה אי-שלילית על מרחב מידה סופי. אז $(a_n)_{n=1}^\infty$ מונוטונית יורדת חלש ואי-שלילית ולכן מתכנסת.

סעיף ב'

נראה כי לכל f עם $0 < \|f\|_\infty < \infty$ מתקיים

$$\|f\|_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|f\|_{n+1}^{n+1}}{\|f\|_n^n}$$

הוכחה: נסמן

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|f\|_{n+1}^{n+1}}{\|f\|_n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_X |f|^{n+1} d\mu}{\int_X |f|^n d\mu}, \quad 0 < M := \|f\|_\infty < \infty$$

נגדיר $g : X \rightarrow \mathbb{C}$ על-ידי $g(x) = \frac{f(x)}{M}$ ועל-ידי נרמול זה נקבל

$$\|g\|_\infty = \left\| \frac{f}{M} \right\|_\infty = \frac{\|f\|_\infty}{M} = 1, \quad \|g\|_p = \int_X |g|^p d\mu = \int_X \left| \frac{f}{M} \right|^p d\mu = \frac{1}{M^p} \int_X |f|^p d\mu = \frac{1}{M^p} \|f\|_p^p$$

ולכן

$$\frac{\|f\|_{n+1}^{n+1}}{\|f\|_n^n} = \frac{\int_X |f|^{n+1} d\mu}{\int_X |f|^n d\mu} = \frac{\int_X |Mg|^{n+1} d\mu}{\int_X |Mg|^n d\mu} = \frac{M^{n+1} \int_X |g|^{n+1} d\mu}{M^n \int_X |g|^n d\mu} = M \cdot \frac{\int_X |g|^{n+1} d\mu}{\int_X |g|^n d\mu}$$

נגדיר

$$a_n = \int_X |g|^n d\mu = \|g\|_n^n$$

מהסעיף הקודם $A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ קיים ומוגדר ומכך ש- $\|g\|_\infty = 1$ נקבל

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \|g\|_n^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |g|^n d\mu$$

ו- A אי-שלילי (חסם מלרע), נשים לב שאנחנו צריכים להצדיק למה זה מוגדר היטב:

מהיות $\|g\|_\infty = 1$, אנחנו יודעים שמתקיים $A = \mu(\{x \in X \mid |g(x)| = 1\})$ ומכך ש- $0 < \|f\|_\infty < \infty$ אז $0 < \mu(A)$ ולכן מתקיים

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_X |g|^{n+1} d\mu}{\int_X |g|^n d\mu} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$$

כאשר השינוי האחרון נובע מזה שהמכנה מתכנס לאותו ערך כמו המונה מנוסחת הזנב. נקבל בסך-הכל עם מה שמצאנו ולקחת גבול

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|f\|_{n+1}^{n+1}}{\|f\|_n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} M \cdot \frac{\int_X |g|^{n+1} d\mu}{\int_X |g|^n d\mu} = M \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = M \cdot 1 = M$$