,3 פתרון מטלה -03 חשבון אינפיניטסימלי -03

2025 באפריל 13



'סעיף א

ידי על־ידי $f:\mathbb{R}^2 o \mathbb{R}$ תהיי

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

. אינה אבל fאינה רציפה פונקציה היא פונקני היא המוגדרת על־ידי אינה המוגדרת המוגדרת הפונקציה הפונקציה אבל המוגדרת על־ידי המוגדרת המוגדרת הפונקציה אבל אינה רציפה המוגדרת המו

הוכחה: נתחיל מלהראות ש־f לא רציפה.

בראשית: מאריתמטיקה שהיא לא שהיא ונראה ונראה מאריתמטיקה של פונקציות מאריתמטיקה לא רציפה בראשית: $(x,y) \neq (0,0)$

נניח בשלילה שהיא רציפה בראשית, ולכן לפי קריטריון הנייה לרציפות מספיק שנמצא סדרה (x_n,y_n) כך ש־0 כך ע־0 עניח בשלילה בניח בשלילה בראשית, ולכן לפי קריטריון הנייה לרציפות מספיק שנמצא סדרה (x_n,y_n) בראשית, ובבחירה של הסדרות $(x_n,y_n)=\frac{1}{n}, (y_n)=\frac{1}{n}$ נקבל בראשית, ולכן לפי קריטריון הנייה בראשית, ולכן לפי קריטריון הנייה לרציפות מספיק שנמצא סדרה בראשית, ולכן לפי קריטריון הנייה לרציפות מספיק שנמצא סדרה בראשית, ולכן לפי קריטריון הנייה לרציפות מספיק שנמצא סדרה בראשית, ולכן לפי קריטריון הנייה לרציפות מספיק שנמצא סדרה בראשית, ולכן לפי קריטריון הנייה לרציפות מספיק שנמצא סדרה בראשית, ולכן לפי קריטריון הנייה לרציפות מספיק שנמצא סדרה בראשית, ולכן לפי קריטריון הנייה לרציפות מספיק שנמצא סדרה בראשית, ולכן לפי קריטריון הנייה לרציפות מספיק שנמצא סדרה בראשית, ולכן לפי קריטריון הנייה לרציפות מספיק שנמצא סדרה בראשית, ולכן לפי קריטריון הנייה לרציפות מספיק שנמצא מספיק שנמצא מדיבה בראשית, ולכן לפי קריטריון הנייה בראשית, ולכן לפי הנייה בראשית, ולכן לפי קריטריון הנייה בראשית, ולכן לפי הבראשית בראשית בראשי

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n,y_n) = \lim_{n \to \infty} \frac{x_n^2 y_n}{x_n^4 + y_n^2} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n^2} \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^4}} = = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{2}{n^4}} = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0)$$

. ולכן f לא רציפה בראשית

מתקיים $t\in\mathbb{R}$ אז לכל $v=(0,0)\in\mathbb{R}^2$ אם רציפה: אם הפונקציה הפונקציה ע $v\in\mathbb{R}^2$ אז לכל כעת כי

$$f_v(t) = f(tv) = f(0,0) = 0$$

 $t \in \mathbb{R}$ וזו פונקציה רציפה לכל

מתקיים $t \in \mathbb{R}$ אז לכל $v = (x,y) \neq (0,0) \in \mathbb{R}^2$ אם

$$f_v(t) = f(tv) = f(xt,yt) = \frac{(xt)^2(yt)}{(xt)^4 + (yt)^2} = \frac{x^2yt^3}{x^4t^4 + y^2t^2} = \frac{x^2yt^3}{t^2(x^4t^2 + y^2)} = \frac{x^2yt}{x^4t^2 + y^2}$$

 $t \in \mathbb{R}$ מאריתמטיקה של פונקציות רציפות (המכנה לא מתאפס לאף מאריתמטיקה $t \in \mathbb{R}$ מאריתמטיקה פונקציה רציפה און

'סעיף ב

נראה כי הפונקציה $\mathbb{R}^2 o \mathbb{R}$ הנתונה על־ידי

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x \sin(y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

היא רציפה.

. בראשית. עדיפה בכל שהיא רציפה לכן נשאר פונקציות שהיא פונקציות ($x,y) \neq (0,0) \in \mathbb{R}^2$ רציפה בכל בכל ראשית. ראשית: ראשית מאריתמטיקה מאריתמטיקה בכל $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ נעבוד כמו בתרגול ונעבור לקורדינאטות קוטביות, נגדיר באיטות מארית בעדיר כמו בתרגול ונעבור לחורדינאטות פוטביות, בעדיר באיטות פוטביות, בעדיר באיטות בעריד באיטות פוטביות, בעדיר באיטות פוטביות בעדיר באיטות פוטביות באיטות פוטביות באיטות בעדיר באיטות באיטות באיטות באיטות באיטות באיטות באיטות באיטות באיטות בעדיר באיטות בא

$$\begin{split} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\sin(y)}{\sqrt{x^2+y^2}} &= \lim_{r\to 0} \frac{r\cos\theta\cdot\sin(r\sin\theta)}{\sqrt{r^2\cos\theta^2+r^2\sin\theta^2}} \\ &= \lim_{r\to 0} \frac{r\cos\theta\cdot\sin(r\sin\theta)}{\sqrt{r^2(\cos\theta^2+\sin\theta^2)}} \\ &= \lim_{(1)} \frac{r\cos\theta\cdot\sin(r\sin\theta)}{\sqrt{r^2}} \\ &= \lim_{(2)} \frac{r\cos\theta\cdot\sin(r\sin\theta)}{r} \\ &= \lim_{r\to 0} \cos\theta\cdot\sin(r\sin\theta) \\ &= \lim_{r\to 0} \sin\theta\cdot\sin(r\sin\theta) \\ &= \lim_{r\to 0} \sin\theta\cdot\sin(r\cos\theta)$$

 \mathbb{R}^2 כאשר (3) נובע מהזהות הטריגונומטרית (3) רציפה נובע (2) נובע ההיות ((2) נובע הייטר אפסה ולכן עובע הייטריגונומטרית ((2)

. מטרי מטרי למרחב למרחב הומיאומורפי הומיאומורפי מטרי מטרי מטרי נוכיח נוכיח בי כל מרחב מטרי הומיאומורפי מ

 $X\subseteq B_r(x)$ כך שמתקיים כך ר0ו בי אם קיימים מטרי יקרא מטרי מיסר ניזכר ניזכר ניזכר מוכחה. הוכחה

 $.x,y\in X$ לכל $d'(x,y)\leq 1$ שמתקיים לב שמתקיים $d'(x,y)\coloneqq \min\{1,d(x,y,)\}$ לכל על־ידי לכל מטריקה מטריקה נגדיר מטריקה י

:נראה ש־d' אכן מטריקה

- $d'(x,y)=0\Longleftrightarrow d(x,y)=0\Longleftrightarrow x=y$ מטריקה מטריקה מטריקה נובע אי־שליליות מידעה מטריקה מטריקה ואכן .1
 - מטריקה d מטריה נובע מהיות d .2
 - מטריקה מהיות מהיות $x,y,z\in X$ הייו מטריקה מהיות מיוויון מ

$$d'(x,z) = \min\{1,d(x,z)\} \leq \min\{1,d(x,y) + d(y,z)\} \leq \min\{1,d(x,y)\} + \min\{1,d(y,z)\} = d'(x,y) + d'(y,z)$$

. פתוחה ע $U\subseteq (X,d')$ אם ורק אם ורק פתוחה שקבוצות פתוחה (זאת אומרת אומרפיזם (זאת הומיאומורפיזם שקבוצות פתוחות נשמרות שקבוצות בתרגול נגדיר את הכדורים שלנו:

$$B_d(x,r) = \{ y \in X \mid d(x,y) < r \}$$

$$B_{d'}(x,r) = \{ y \in X \mid d'(x,y) < r \}$$

 $B_d(x,arepsilon_x)\subseteq U$ פתוחה תחת המטריקה ב $x\in U$ אם ורק אם לכל פתוחה בt פתוחה ביזכר כי t פתוחה ביזכר כי שמתקיים שמתקיים ביt פתוחה ביt פתוחה ביt פתוחה נקבל שמתקיים שמתקיים ביt פתוחה ביt

 $B_d(y, arepsilon_y) \subseteq V$ נובע כי נובע מתחה מהגדרת ואז מתקיים בכיוון השני, מתקיים $\varepsilon_y < 1$ ולכן עבור ולכן עבור עבור עבור אוז מתקיים ואז מהגדרת ואז משמע אוז פראינו בי (X, d') אם ורק אם היא פתוחה ב־(X, d') משמע משמע (X, d') הם הומיאומורפים וי(X, d') אם ורק אם היא פתוחה בי

 \mathbb{R} מעל מרחב ממימד מרחב מרחב ($X,\|\cdot\|)$ יהי יהי

'סעיף א

. נוכיח עם ורק אם ורק אם ורק אם ורק איזומטרי ל- \mathbb{R}^n עם נורמה כלשהי ונסיק כי X איזומטרי ל-

TODOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOO

. הוכחה: על \mathbb{R}^n איזומטרי ל- \mathbb{R}^n עם נורמה כלשהי ובהרצאה ראינו שכל הנורמות על \mathbb{R}^n הן שקולות.

מהיות לו בסיס, נסמנו מימדי נובע כי מרחב נורמי מהיות מהיות מהיות מורמי מ

$$\{x_1, x_2, ..., x_n\} \subseteq X$$

ידי על־ידי $T:\mathbb{R}^n o X$ על־ידי

$$T(a_1, a_2, ..., a_n) = a_1 x_1 + ... + a_n x_n$$

X איברי הבסיס של איברית מכיוון שהיא מוגדרת על חד-חד ערכית והיא זו כמובן העתקה לינארית נשים לב שמתקיים בראה כי Tחד-חד ערכית: נשים לב שמתקיים

$$T(a_1,a_2,...,a_n) = T(b_1,b_2,...,b_n) \Longleftrightarrow \sum a_i x_i = \sum b_i x_i \Longleftrightarrow \sum (a_i-b_i) x_i = 0 \underset{(1)}{\Longleftrightarrow} \forall i a_i - b_i = 0 \Longleftrightarrow \forall i a_i = b_i$$

כאשר (1) נובע מהיות הבסיס בלתי־תלוי לינארית.

נראה על: מהגדרת הבסיס נובע כי כל $x \in X$ הוא מהצורה נראה כי על: מהגדרת הבסיס נובע כי

$$x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$$

על. Tעל. וקיבלנו T(a)=x ואז ווא $a=(a_1,a_2,...,a_n)\in\mathbb{R}^n$ ואז לבחר ווקיבלנו שידים, יחידים, עבור מהיות כל הגדיר נגדיר נגדיר נגדיר על הגדיר בדיר נורמה על המורמות שקולות נוכל להגדיר בדיר נורמה על הא

$$\left\|(a_1,a_2,...,a_n)\right\|' \coloneqq \left\|T(a_1,a_2,...,a_n)\right\|_X = \left\|\sum_{i=1}^n a_i x_i\right\|_X$$

נשים לב שזו אכן נורמה מהיות שלוש הדרישות (שלוש הדרישות מהגדרה). נשים לב שזו אכן נורמה מהיות $\|\cdot\|_X$

. כעת, נגדיר $f:X \to \mathbb{R}^n$ ולכן נשאר רק שהיא משמרת שהיא משמרת ערכית ועל מהיות T איזומורפיזם, ולכן שהיא משמרת שהיא משמרת לכל $f:X \to \mathbb{R}^n$ מתקיים ואכן, לכל $x,y \in X$

$$\begin{split} \|x-y\|_X &= \|f(x)-f(y)\|' \\ &= \|(a_1,a_2,...,a_n)-(b_1,b_2,...,b_n)\|' \\ &= \|T(a_1-b_1,a_2-b_2,...,a_n-b_n)\|_X \\ &= \left\|\sum_{i=1}^n (a_i-b_i)x_i\right\|_X \\ &= \|x-y\|_X \end{split}$$

. עם נורמה נלשהי עם \mathbb{R}^n איזומטרי ולכן איזומטריה היא איזומטריה ל- וקיבלנו

נסיק כעת כי היא סגורה סדרתית סדרתית היא קומפקטית היא היא בסגורה היא נסיק כעת כי $A \subset X$

⇒ ראינו בהרצאה שמרחב קומפקטי סדרתי הוא סגור וחסום לכל מרחב מטרי, ופרט למרחב נורמי.

(לשאר, ינבע באינדוקציה). n=2 סגורה וחסומה ונרצה להראות שהיא קומפקטית. מההוכחה לעיל נובע שנוכל להוכיח עבור n=2 (לשאר, ינבע באינדוקציה). מהיי $(a_n)=(x_n,y_n)_{n=1}^\infty\subseteq A\subseteq\mathbb{R}^2$ תהיי $(a_n)=(x_n,y_n)_{n=1}^\infty\subseteq A\subseteq\mathbb{R}^2$

$$\left\|(x_n,y_n)\right\|_{\infty} \leq M$$

 $|y_n| \leq M$ משמע $|x_n| \leq M$ משמע

היות ו־ $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$ סדרה מתכנסת שיש לה תת־סדרה מתכנסת בולציאנו וירשטראס בולציאנו משפט בולציאנו משפט בולציאנו וירשטראס נובע היות ו־ (x_n)

$$x_{n_k} \xrightarrow[k \to \infty]{} x_0$$

היות שיש נובע שיש בולציאנו וירשטראס בולציאנו ממשפט הירושה, חסומה מלכן $\left(y_{n_k}\right)$ חסומה חסומה היות שהיא סדרה של שהיא סדרה חסומה ולכן עובע שיש הירושה, וממשפט בולציאנו וירשטראס נובע שיש לה תת־סדרה מתכנסת בולציאנו וירשטראס נובע שיש לה עובע שיש עובע שיש לה ע

$$y_{n_{k_l}} \xrightarrow[l \to \infty]{} y_0$$

וממשפט הירושה נובע גם כי

$$x_{n_{k_l}} \xrightarrow[l \to \infty]{} x_0$$

ולכן שקולה ב-צמטה, ולכן שקולה להתכנסות שקולה \mathbb{R}^2 שקולה שהתכנסות וראינו

$$\left(x_{n_{k_l}},y_{n_{k_l}}\right)\underset{l\to\infty}{\longrightarrow} (x_0,y_0)$$

. אבל סדרתית. קומפקטית קומפקטית איבר ב־A ולכן לאיבר ב־A ולכן מצאנו תת־סדרה מצאנו תר $(x_0,y_0)\in A$ קומפקטית סדרתית.

'סעיף ב

 $.B(X,Y)={\rm Hom}(X,Y)$ מתקיים מימדי) קווקא (לאו דווקא לאו נוכיה נורמי לכל מרחב נורמי לאו נוכיה לאו פווקא תוקא לינארית $T:X\to Y$ העתקה לינארית שלכל העתקה לינארית לאו מיקאים מיקא

הוכחה: מספיק שנראה שכל העתקה לינארית במרחב נורמי סופי היא רציפה.

 $a \in X$ ותהיי לינארית העתקה העתקה $T: X \to Y$ תהיי

מהיים, אז הקודם, שלו מהסעיף הבסיס על נסתכל מימדי סוף מהיות מהיות מהיות על הבסיס מהיות מימדי מימדי מימדי מחלים מהיות מחלים מהיות מחלים מולים מולים מולים מולים מולים מחלים מו

$$T(a) = T(a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n) = \sum_{i=1}^n x_i f(a_i)$$

מאי־שיוויון המשולש מתקיים

$$\|T(a)\| = \left\|\sum_{i=1}^n x_i f(a_i)\right\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|T(a_i)\|$$

נבחר

$$M=\sup_i\{\|T(a_i)\|\}$$

שקיים מהיות הקבוצה סופית.

משמע , $\sum_{i=1}^n |x_i| \leq C \|x\|$ כך שמתקיים ס $0 < C \in \mathbb{R}$ שקיים נובע שקולות, נובע הנורמות וכל הנורמות וכל הנורמות משקיים

$$\|T(a)\| \le \left(\sum_{i=1}^n x_i\right) M \le CM\|a\|$$

. ונקבל רציפות ליפשיצית שהיא שהיא נראה חסום, לינארי לינארי היא אופרטור ולינארי חסום, ולכן T

נסמן $a,b\in X$ ואז לכל וא
 $M=\|T\|_{\mathsf{op}}$ נסמן

$$\|Ta - Tb\|_Y = \|T(a - b)\|_Y \leq |a - b|_X \cdot \|T\|_{\mathrm{op}} = C|a - b|_Y$$

 $B(X,Y) = \mathrm{Hom}(X,Y)$ ולכן ואסומה רציפה, ופונקציה רציפה, ופונקציה היא פונקציה ליפשיצית היא רציפה, ופונקציה רציפה פונקציה היא רציפה, ופונקציה היא רציפה, ופונקציה היא רציפה ופונקציה היא רציפה וופונקציה היא רציפה וופונקציה היא רציפה וופונקציה וופונקציה היא רציפה וופונקציה וופ

. בהשלמה איכון של השיכון השלמה וו $i:X\to \hat{X}$ ייר מטרי מרחב (X,d) יהי

'סעיף א

ניתן להרחיב j:X o j(X) איזומטריה ו־j:X o j(X) ניתן להרחיב (כלומר j:X o j(X) איזומטריה בפופה ב־j:X o j(X) ניתן להרחיב (כלומר j:X o j(X) את באופן יחיד לאיזומטריה $j:\hat{X} o Y$ המקיימת $j:\hat{X} o Y$

הוכחה: TODOOOOOOOOOOOO

'סעיף ב

A של השלמה להעטרי איזומטרי היכית מתקיים להעקיים $\widehat{i(A)}\subseteq \hat{X}$ מתקיים איזומטרי לכל

הוכחה: TODOOOOOOOOOOOO

יהי $p \in \mathbb{N}$ יהי

'סעיף א

. בוכיח המשולש האולטרה את־שיוויון מקיימת המטריקה (\mathbb{Q},d_p) היא של של של האולטרה מטריקה לוכיח המשריקה של של של של של של האולטרה בוכיח נוכיח בי

'סעיף ב

$$.a_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$
 אם ורק אם מתכנס מתכנס הטור הטור הטור ,
ו $(a_n) \subseteq \mathbb{Q}_p$ הדרה לכל כי נוכיח נוכיח הטור הטור א

$$a_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$
 כי מתכנס ונראה ב $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ שהטור בניח נניח שהטור

מתכנסת, ולכן: אחלקיים שלנו מתכנס. ולכן אז סדרת הסכומים מחלקיים שלנו מתכנס. ולכן מתכנס, נובע מסדרת הסכומים שלנו מתכנס. ולכן: מהיות הטור מתכנס, נובע מסדרת הסכומים החלקיים שלנו מתכנס. ולכן: מחלקיים שלנו מתכנסת החלקיים שלנו מתכנסת החלקים של

$$\left|a_{k+1}\right|_p = \left|S_{k+1} - S_k\right|_p \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$$

ולכן
$$a_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$
 ונראה שהטור $\sum_{n=0}^\infty a_n$ מתכנס. $\sum_{n=0}^\infty a_n$ ונראה שהטור מניח כי $\sum_{n=0}^\infty a_n$ ונראה שהטור מלטרה במטרי ולכן מקיים את אי־שיוויון המשולש החזק. ראינו שר \mathbb{Q}_p עם המטריקה ה־ p -אדית הוא מרחב אולטרה מטרי ולכן מקיים את אי־שיוויון המשולש החזק. ול יהי $0 < n \in \mathbb{N}$ ומהיות a_n סדרה מתכנסת נובע שקיים $0 \in \mathbb{N}$ שלכל $0 \in \mathbb{N}$ מתקיים $0 \in \mathbb{N}$

מתקיים m>n עבור , $\left|a_{n}\right|_{p}<arepsilon$ מתקיים אלכל $N\in\mathbb{N}$ שלכל שקיים אקיים סדרה מתכנסת נובע מתקיים האלכל ולבי אלכל מתקיים האלכל איני מתקיים אלכל מתקיים אלכל מתקיים אלכל מתקיים אלכל מתקיים אלכל מתקיים אלכל אלכן אלכן עבור אלכן מתקיים אלכל אלכל מתקיים אלכל אלכל מתקיים אלכל

$$\left|S_m - S_n\right|_p = \left|\sum_{k=n+1}^m a_k\right|_p \leq \max_{(1) \ n+1 \leq k \leq m} \left|a_k\right|_p < \varepsilon$$

כאשר (1) נובע מאי־שיוויון המשולש החזק. נובע מאי־שיוויון משולש החזק.
$$\sum_{n=0}^\infty a_n$$
 מעכנסת מצאנו סדרת קושי מתכנסת (S_k) זו סדרת קושי מתכנסת

d(f(x),f(y)) < d(x,y) מתקיים $x,y \in X$ מכווצת, כלומר כמעט מכווצת, פונקציה כדתית ו־ $X \to X$ מרתית סדרתית מטרי קומפקטי סדרתית הידה.

$$g(x)=d(x,f(x))$$
 על־ידי $g:X o\mathbb{R}$ נגדיר נגדיר

. רציפה והמטריקה והמטריקה ולכן ליפשיצית המטריקה רציפה ביפה היא רציפה ביפה הרכבת ביפה המטריקה רציפה f

g אם מינימום אל מינימום מינימום g הוא מינימום ולכן הוא מינימום אלין מינימום ולכן קרציפה ולכן מקבות דעים אלים מינימום אלים מקבות מינימום אלילה שי $g(x_0)=m\in\mathbb{R}$ הוא מינימום אלילה שי $g(x_0)=m=0$ נראה כי $g(x_0)=m=0$

$$g(f(x_0)) = d(f(x_0), f(f(x_0))) \underset{(1)}{<} d(x_0, f(x_0)) = g(x_0) = m$$

ולכן $g(x)=d(x_0,f(x_0))=0$ מתקיים מתקיים של של המינימום של הנחנו ש-m הנחנו שכן הנחנו, אבל אבל מכווצת, אבל זו סתירה שכן הנחנו שm הוא המינימום של מכווצת, אבל זו סתירה שכן מצאנו $x_0=f(x_0)$

. ולכן: $f(x_1)=x_1, f(x_2)=x_2$ וגם $x_1\neq x_2$ כך ש־ $x_1, x_2\in X$ שקיימות שקיימות נניח היא כי היא גראה כי $x_1, x_2\in X$

$$d(x_1,x_2) = d(f(x_1),f(x_2)) \underset{(1)}{<} d(x_1,x_2)$$

. מהיות כמובן וזו מכווצת f מהיות (1) כאשר כאשר