הכנה למבחן — תורת הקבוצות, 80200

16 באוגוסט 2025

שאלה 1

סעיף א'

נחשב את עוצמת קבוצת הפונקציות החד־חד ערכיות מהטבעיים לעצמם.

פתרון: נסמן $A := \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid f \text{ חד־חד ערכית}\}$.

באמצעות משפט קנטור־שרדר־ברנשטיין:

ראשית נבחין שמתקיים $A \subseteq \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\} := B = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ וונטען שמתקיים $\left|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right| = 2^{\aleph_0}$:

ניקח את $\mathbb{N}$ להיות נציג של $\aleph_0$ ואת $[2]$ להיות נציג של 2.

$\geq$: נשים לב שמתקיים $[2]^{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ כלומר $\left|[2]^{\mathbb{N}}\right| \leq \left|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right|$ כלומר $2^{\aleph_0} \leq \left|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right|$.

$\leq$: נשים לב שמתקיים $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ שכן $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ היא סדרת הזוגות הסדוריים $\{(n, f(n)) \mid n \in \mathbb{N}\}$ כלומר $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

ראינו שמתקיים $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$ ולכן $\left|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = 2^{\aleph_0}$.

ממשפט קנטור־שרדר־ברנשטיין מתקיים $\left|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right| = \aleph_0$, ומהיות $A \subseteq B$ מתקיים $|A| \leq 2^{\aleph_0}$.

בשביל הצד השני, נבחין כי $C = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ סט כל הסדרות הבינאריות האינסופיות $(b_0, b_1, \cdots)$.

נגדיר $\varphi : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to A$ כך שלכל רצף b מתקיים $f_b(n) = 2n + b_n$; כלומר, אם $b_n = 0$ אז $f_b(n)$ זוגי ואחרת אי־זוגי.

נבחין שכל $f_b(n)$ היא חד־חד ערכית ממונוטוניות עולה ממש בגלל n.

אם $b \neq b'$ אז יש k כך שמתקיים $b_k \neq b'_k$, כלומר $f_b(k) \neq f_{b'}(k)$ ולכן $f_b \neq f_{b'}$ ולכן φ פונקציה חד־חד ערכית ומתקיים $\left|\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right| \leq |A|$.

כעת נטען שמתקיים $\left|\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right| = 2^{\aleph_0}$ וזה פשוט נובע מאריתמטיקה של עוצמות שכן $2 = |\{0,1\}|$ ולכן $\left|\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right| = 2^{\aleph_0}$.

ראינו שמתקיים $|A| \leq 2^{\aleph_0}$ וגם שמתקיים $2^{\aleph_0} \leq |A|$ ולכן ממשפט קנטור־שרדר־ברנשטיין מתקיים $|A| = 2^{\aleph_0}$.

באמצעות טיעון אלכסון:

נניח בשלילה ש־A בת־מנייה ולכן יש $\sigma : \mathbb{N} \to A$ פונקציה על ונסמן $\sigma(n) = \sigma_n$.

נגדיר $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ בצורה רקורסיבית:

$$f(0) = \min \mathbb{N} \setminus \{\sigma_0(0)\}$$

כלומר, 0 אם $\sigma_0(0) \neq 0$ ו־1 אם אחרת.

נגדיר

$$f(n+1) = \min \mathbb{N} \setminus \{f(0), \cdots, f(n), \sigma_{n+1}(n+1)\}$$

נטען ש־$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ היא חד–חד ערכית ושונה מכל σ_n.

לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $\sigma_n(n) \neq f(n)$ ונשאר רק להראות שהיא חד־חד ערכית: נניח שהיא לא חד־חד ערכית, אז יהי n המינימלי כך שעבורו קיים $m < n$ המקיים $f(n) = f(m)$, אבל $f(n) = f((n-1)+1)$, כלומר $f(n) \notin \{f(0), \cdots, f(n-1)\}$ וזו סתירה ולכן f חד־חד ערכית וזו סתירה להיות σ על, ולכן A לא בת־מנייה. $\square$

סעיף ב'

נחשב את עוצמת קבוצת הפונקציות החד־חד ערכיות מהטבעיים לממשיים.

פתרון: נסמן $A := \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid f \text{ חד־חד ערכית}\}$.

ניזכר שמתקיים $2^{\aleph_0} = |(0,1)| = |\mathbb{R}|$, ולכן לכל $a \in (0,1)$ נגדיר $f_a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ על־ידי $f_a(n) = a + n$.

נבחין ש־f_a חד־חד ערכית לכל $a \in (0,1)$ כי הפונקציה מונוטונית עולה ממש. בפרט, אם מתקיים $a_1 \neq a_2$ אזי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$f_{a_1}(n) = a_1 + n \neq a_2 + n = f_{a_2}(n)$$

נגדיר את B להיות אוסף הפונקציות הנ"ל ונבחין ש־$B \subseteq A$ ומתקיים $|B| = 2^{\aleph_0}$ ולכן $|B| = 2^{\aleph_0} \leq |A|$.

נבחין שמתקיים $A \subseteq \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\}$ ואנחנו כבר יודעים שמתקיים $\left|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right| = \left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} \underset{|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|}{=} 2^{\aleph_0}$.

ראינו שמתקיים $|A| \leq 2^{\aleph_0}$ וגם שמתקיים $2^{\aleph_0} \leq |A|$ ולכן ממשפט קנטור־שרדר־ברנשטיין מתקיים $|A| = 2^{\aleph_0}$.

ניתן להשתמש בסעיף הקודם ולהשתמש בהכלה $A \supseteq \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid f \text{ חד־חד ערכית}\}$ ומהסעיף הקודם לקבל את האי־שיוויון $2^{\aleph_0} \leq |A|$. $\square$

סעיף ג'

בונוס: נחשב את עוצמת הפונקציות החד־חד ערכיות ועל מהטבעיים לעצמם.

פתרון:

נסמן $A := \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid f$ חד־חד ערכית ועל$\}$.

באמצעות משפט קנטור־שרדר־ברנשטיין:

ראשית מתקיים $B := \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid f$ חד־חד ערכית$\} \supseteq A$ שמסעיף א' נובע כי $|A| \le 2^{\aleph_0}$.

בכיוון השני, ניקח טור המתכנס בתנאי $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$. ממשפט רימן (של טורים), לכל $\lambda \in \mathbb{R}$ יש $\sigma \in A$ **תמורה** כך שמתקיים $\sum_{n=0}^{\infty} x_{\sigma(n)} = \lambda$.

כלומר, מצאנו העתקה חד־חד ערכית בין $\mathbb{R}$ לבין A אז $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0} \le |A|$.

ראינו שמתקיים $|A| \le 2^{\aleph_0}$ וגם שמתקיים $2^{\aleph_0} \le |A|$ ולכן ממשפט קנטור־שרדר־ברנשטיין מתקיים $|A| = 2^{\aleph_0}$.

באמצעות משפט קנטור־שרדר־ברנשטיין בלי אינפי:

ההכלה $A \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ברורה ומאריתמטיקה של עוצמות מתקיים

$$\left|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right| = \aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$$

כי מכך שמתקיים $2 \le n \le \aleph_0 \le 2^{\aleph_0}$ עבור $2 \le n \in \mathbb{N}$ אז מתקיים

$$2^{\aleph_0} \le n^{\aleph_0} \le (\aleph_0)^{\aleph_0} \le \left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0}$$

בשביל ההכלה בכיוון השני, נסתכל על $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ (שאנחנו יודעים שמתקיים $\left|\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right| = 2^{\aleph_0}$ מאריתמטיקה של עוצמות) קבוצת כל הסדרות הבינאריות.

לכל $b = (b_0, b_1, \cdots) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ נגדיר σ_b תמורה בצורה הבאה

$$\sigma_b(2n) = \begin{cases} 2n & b_n = 0 \\ 2n+1 & b_n = 1 \end{cases}, \qquad \sigma_b(2n+1) = \begin{cases} 2n+1 & b_n = 0 \\ 2n & b_n = 1 \end{cases}$$

σ_b בבירור חד־חד ערכית ומצאנו שיכון בין אוסף הסדרות הבינאריות לבין אוסף התמורות, ולכן $\left|\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right| = 2^{\aleph_0} \le |A|$.

ראינו שמתקיים $|A| \le 2^{\aleph_0}$ וגם שמתקיים $2^{\aleph_0} \le |A|$ ולכן ממשפט קנטור־שרדר־ברנשטיין מתקיים $|A| = 2^{\aleph_0}$.

באמצעות טיעון אלכסון, בלי בחירה:

נניח בשלילה ש־A בת־מנייה ולכן $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \cdots$ כאשר כל σ_n היא פרמוטציה של $\mathbb{N}$.

נבנה פרמוטציה חדשה τ ונעבוד על הצמדים $\{2n, 2n+1\}$ לכל $n \in \mathbb{N}$:

1. אם $\sigma_n(2n) = 2n$ אז $\tau(2n) = 2n+1, \tau(2n+1) = 2n$
2. אם $\sigma_n(2n) \neq 2n$ אז $\tau(2n) = 2n, \tau(2n+1) = 2n+1$

בגלל שעבדנו על בלוקים נפרדים כמובן τ מוגדרת היטב כפונקציה ונבחין ש־τ היא חד־חד ערכית ועל כי בכל בלוק או שלא נגענו ושמרנו על החד־חד ערכיות ועל מ־σ_n או שהחלפנו בין שני צמדים (זרים כל פעם) ולכן שימרנו את העל והחד־חד ערכיות ולכן τ היא פרמוטציה של $\mathbb{N}$.

נשים לב כעת שלכל $n \in \mathbb{N}$, אם $\sigma_n(2n) = 2n$ אז $\tau(2n) = 2n+1 \neq 2n = \sigma_n(2n)$ ואם $\sigma_n(2n) =\neq 2n$ אז $\tau(2n) = 2n \neq \sigma_n(2n)$.

כלומר בכל מקרה לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $\sigma_n(n) \neq \tau(n)$ וזאת סתירה להנחה, אז A לא בת־מנייה.

באמצעות טיעון אלכסון, עם בחירה:

נניח בשלילה ש־A קבוצה בת־מנייה ולכן $\sigma_1, \sigma_2, \cdots$ תמורות של $\mathbb{N}$.

יהי $X \subseteq \mathbb{N}$ כך ש־$X, \mathbb{N} \setminus X$ שתיהן קבוצות אינסופיות.

נגדיר σ תמורה חדשה על־ידי $\sigma(0)$ ערך מ־X ששונה מ־$\sigma_1(0)$; $\sigma(2)$ להיות ערך מ־X ששונה מ־$\{\sigma(0), \sigma_2(0)\}$ נמשיך רקורסיבית באותו אופן וקיבלנו פונקציה חד־חד ערכית בין המספרים הזוגיים לבין X כך שמתקיים $\sigma(2k-2) \neq \sigma_k(2k-2)$ לכל k ולכן $\sigma \neq \sigma_k$.

נגדיר $B := \mathbb{N} \setminus \sigma(2\mathbb{N})$ הוא בן־מנייה ואינסופי. נגדיר $\sigma(2k-1)$ להיות האיבר במקום ה־k מ־B.

σ היא פונקציה חד־חד ערכית ועל שונה מכל $\sigma_1, \cdots$ שמצאנו ולכן זו סתירה, ו־A לא בת־מנייה. $\square$

סעיף ד'

בונוס לבונוס: נסיק את עוצמת הפונקציות החד־חד ערכיות ועל מהטבעיים לממשיים.

פתרון: **עם בחירה:** נראה טענה חזקה יותר: נראה שאין $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ על.

נניח בחירה, ונניח שיש f כזאת שהיא על. אז מבחירה נקבל שמתקיים $|\mathbb{R}| \le |\mathbb{N}|$ וזאת כמובן סתירה.

$\square$

שאלה 2

אוסף הוכחות $\left|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right| = 2^{\aleph_0}$.

הוכחה:

הוכחה ראשונה – אריתמטיקה של עוצמות:

$2^{\aleph_0} \le \aleph_0 \le n \le 2$ עבור $2 \le n \in \mathbb{N}$ אז מתקיים

$$2^{\aleph_0} \le n^{\aleph_0} \le (\aleph_0)^{\aleph_0} \le \left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0}$$

אריתמטיקה של עוצמות – הוכחה שנייה:

$$\left|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right| \le_{\text{מונוטוניות}} \left|\left(\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right)^{\mathbb{N}}\right| = \left|\{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}\right| = \left|\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right|$$

הוכחה שלישית – טיעון אלכסון:

נניח ש־$\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ היא קבוצה בת־מנייה, ולכן $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ הוא אוסף בן־מנייה של כל הפונקציות $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.
נגדיר $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ על־ידי $h(n) = f_n(n) + 1$, אבל לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $h(n) \ne f_n(n)$ אזי $h(n) \notin (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ וזו סתירה להיות הקבוצה בת־מנייה (בבירור היא לא אינסופית) ולכן $\left|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right| = 2^{\aleph_0}$.

הוכחה רביעית – משפט קנטור־שרדר־ברנשטיין:

ניקח את $\mathbb{N}$ להיות נציג של $\aleph_0$ ואת $[2]$ להיות נציג של 2.
$\ge$: נשים לב שמתקיים $[2]^{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ כלומר $\left|[2]^{\mathbb{N}}\right| \le \left|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right|$ כלומר $2^{\aleph_0} \le \left|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right|$.
$\le$: נשים לב שמתקיים $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ שכן $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ היא סדרת הזוגות הסדוריים $\{(n, f(n)) \mid n \in \mathbb{N}\}$ כלומר $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N}$.
ראינו שמתקיים $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N}\times\mathbb{N}|$ ולכן $\left|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right| \le |\mathcal{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N})| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = 2^{\aleph_0}$.
ממשפט קנטור־שרדר־ברנשטיין מתקיים $\left|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right| = \aleph_0$, ומהיות $A \subseteq B$ מתקיים $|A| \le 2^{\aleph_0}$.

$\square$

שאלה 3

תהיי X קבוצה.

סעיף א'

נראה ש־X טרנזטיבית אם ורק אם $X \subseteq \mathcal{P}(X)$.

הוכחה: נניח ש־X טרנזטיבית ונרצה להראות ש־$X \subseteq \mathcal{P}(X)$.

מהיות X טרנזטיבית נובע שלכל $x \in X$ ו־$a \in x$ מתקיים $a \in X$.

כלומר, לכל $x \in X$ מתקיים ש־$x \subseteq X$, משמע איברי X הם תתי־קבוצות של X, וזה בדיוק אומר $X \subseteq \mathcal{P}(X)$.

הכיוון השני זהה: נניח ש־$X \subseteq \mathcal{P}(X)$ ונרצה להראות ש־X טרנזטיבית.

יהי $x \in X$. מההנחה מתקיים $x \in \mathcal{P}(X)$ ו־$x \subseteq X$, אבל זו בדיוק ההגדרה של טרנזטיביות. $\square$

סעיף ב'

נוכיח ש־X טרנזטיבית אם ורק אם $\mathcal{P}(X)$ טרנזטיבית.

הוכחה:

$\Longleftarrow$ נניח ש־X טרנזטיבית ונרצה להראות ש־$\mathcal{P}(X)$.

יהיו $x \in \mathcal{P}(X)$ ו־$a \in x$. מטרנזטיביות X נובע ש־$a \in X$ כלומר $a \subseteq X$ ומהסעיף הקודם מהיות X טרנזטיבית אזי $X \subseteq \mathcal{P}(X)$, כלומר $a \in \mathcal{P}(X)$, כנדרש.

$\Longrightarrow$ נניח ש־$\mathcal{P}(X)$ טרנזטיבית ונרצה להראות ש־X טרנזטיבית.

$$x \in \mathcal{P}(X) \underset{\text{הגדרת קבוצת החזקה}}{\iff} x \subseteq X, \qquad x \in y \in \mathcal{P}(X) \underset{\text{טרנזטיביות } \mathcal{P}(X)}{\Longrightarrow} x \in \mathcal{P}(X)$$

כלומר מטרנזטיביות נקבל ש־$x \subseteq \mathcal{P}(X) \Longrightarrow x \in \mathcal{P}(X)$.

נניח ש־$x \in y \in X$ ונרצה להראות ש־$x \in X$.

מהיות $y \in X$ נובע ש־$\{y\} \in \mathcal{P}(X)$ כלומר $\{y\} \subseteq X$, אבל מהאיפיון השקול לטרנזטיביות נקבל

$$y \in \{y\} \in \mathcal{P}(A) \Longrightarrow y \in \mathcal{P}(X)$$

כלומר $y \subseteq X$ אבל $x \in y \subseteq X$, כלומר $x \in X$ וקיבלנו ש־X טרנזטיבית.

$\square$

שאלה 4

תהיי A קבוצה של קבוצות טרנזטיביות.

סעיף א'

נוכיח ש־$\bigcup A$ היא קבוצה טרנזטיבית.

הוכחה: נניח ש־$x \in \bigcup A$ ו־$a \in x$, כלומר יש $X_0 \in A$ כך שמקיים $a \in X_0$.
X_0 טרנזטיבית ולכן $a \in X_0$, אבל $X_0 \subseteq \bigcup A$, ולכן $a \in \bigcup A$. $\square$

סעיף ב'

נוכיח ש־$\bigcap A$ היא קבוצה טרנזטיבית.

הוכחה: נניח ש־$x \in \bigcap A$ ו־$a \in x$, כלומר לכל $X_0 \in A$ מתקיים $a \in X_0$.
כל X_0 היא קבוצה טרנזטיבית ולכן $a \in X_0$, כלומר $a \in \bigcap A$. $\square$

שאלה 5

נניח ש־X קבוצה של סודרים ונראה ש־$\bigcup X$ הוא סודר.

הוכחה: כדי להראות ש־$\bigcup X$ הוא סודר, מספיק להראות ש־$\langle \bigcup X, \in \rangle$ הוא סדר קווי חד (ואז נקבל שהוא סדר טוב) וש־$\bigcup X$ קבוצה טרנזטיבית.
ואכן, $\bigcup X$ קבוצה טרנזטיבית שכן כל סודר הוא קבוצה טרנזטיבית ולכן יש לנו איחוד של קבוצות טרנזטיביות: נניח ש־$x \in \bigcup X$ ו־$a \in x$, כלומר יש $X_0 \in X$ כך שמתקיים $x \in X_0$ ומטרנזטיביות X_0 נקבל $a \in X_0$, ולכן $a \in \bigcup X$.
נרצה להראות ש־$\langle \bigcup X, \in \rangle$ הוא סדר קווי חד ביחס השייכות, כלומר $b \in a$ או $a \in b$, לכל a, b.
נניח ש־$\alpha \neq \beta \in \bigcup X$ ולכן קיימים $A, B \in X$ כך שמתקיים $\alpha \in A$ ו־$\beta \in B$ ו־A, B הם סודרים כי X קבוצה של סודרים.
ראינו שלכל שני סודרים מתקיים $A \subseteq B$ או $B \subseteq A$, בלי הגבלת הכלליות נניח $A \subseteq B$ ולכן $\alpha \in B$, אבל B סודר ולכן יחס השייכות עליה קווי – כלומר $\beta \in \alpha$ או $\alpha \in \beta$. $\square$

שאלה 6

טענה 17 במילים שלי: יהיו $m, n \in \mathbb{N}$. אז קיימת פונקציה $F : [n] \to [m]$ **על** אם ורק אם $n = m = 0$ או $n \geq m > 0$.

הוכחה:

$\Longrightarrow$ אם $n = m = 0$ אז רק $\emptyset$ היא פונקציה חד־חד ערכית ועל.

אם $n \geq m > 0$, נסתכל על הפונקציה $\mathrm{Id}_{[m]} \cup (([n]/[m]) \times \{0\})$, היא פונקציה על.

$\Longleftarrow$ נניח כי $F : [n] \to [m]$ היא על.

אם $n = 0$ אזי $\mathrm{range}(F) = \emptyset = [m]$ ולכן $m = 0$.

אחרת $n \neq 0$ ומהגדרת הפונקציה, $m \neq 0$ נוכיח באינדוקציה על n שאם F על אזי $n \geq m > 0$:

אם $n = 0$ אז הטענה מתקיימת באופן ריק ולכן נניח שהטענה מתקיימת לכל טבעי קטן מ־n ונראה שהיא מתקיימת עבור n.

F על, ולכן יש $k < n$ כך שמתקיים $F(k) = m - 1$, נגדיר את $H : [n] \to [n]$ על־ידי

$$H(j) = \begin{cases} k & j = n-1 \\ n-1 & j = k \\ j & \text{אחרת} \end{cases}$$

אז H פונקציה על ולכן $G = F \circ H$ היא פונקציה על כהרכבת פונקציות על ו־$G : [n] \to [m]$, נסתכל על $G \restriction [n-1]$.

F על, ולכן לכל $i < m$ מתקיים שיש $j < n$ כך ש־$j \neq k$ ומתקיים $F(j) = i$ ולכן עלינו לבחון האם $m - 1 \in \mathrm{range}(G)$:

1. אם $m - 1 \notin \mathrm{range}(G)$, אזי $G : [n-1] \to [m-1]$ היא על, ולכן מהנחת האינדוקציה $n - 1 \geq m - 1$ כלומר $n \geq m$
2. אם $m - 1 \in \mathrm{range}(G)$ אזי $G : [n-1] \to [m]$ היא על, ומהנחת האינדוקציה $n \geq n - 1 \geq m$ ולכן $n \geq m$

מפתח:

$\Longrightarrow$ טריוויאלי עם פונקציית הזהות.

$\Longleftarrow$ אינדוקציה ועם הפונקציה שמחליפה בין שני ערכים תחת העובדה שהרכבת פונקציות על היא על. $\square$

שאלה 7

טענה 20 במילים שלי: תהיי A קבוצה סופית ונניח שיש $n \in \mathbb{N}$ כך ש־$|A| = |[n]|$.
אז כל פונקציה מ־A ל־$[n]$ היא חד־חד ערכית אם ורק אם היא על.

הוכחה: $\Longleftarrow$ יהי $n_0 \in \mathbb{N}$ המינימלי כך שמתקיים $F : A \to [n_0]$ היא חד־חד ערכית, ונטען שהיא בהכרח על:
אם $n_0 = 0$, אז הטענה נכונה באופן טריוויאלי ולכן נניח ש־$n_0 \neq 0$, כלומר יש $n_0 - 1 \in \mathbb{N}$.
נניח ש־F לא על, אז יש $k \in [n_0]$ כך שמתקיים $k \notin \mathrm{range}(F)$ ונסתכל על $H : [n_0] \to [n_0]$ הנתונה על־ידי

$$H(j) = \begin{cases} k & j = n_0 - 1 \\ n_0 - 1 & k = j \\ j & \text{אחרת} \end{cases}$$

שמוגדרת היטב היות ו־$n_0 - 1$ מוגדר היטב.
נסתכל על ההרכבה $H \circ F$, מההנחה נובע ש־$n_0 - 1 \notin \mathrm{range}(H \circ F)$, אז $H \circ F$ היא פונקציה חד־חד ערכית (כהרכבה של פונקציות חד־חד ערכיות) מ־A ל־$[n_0 - 1]$, אבל זאת סתירה למינימליות של n_0, ולכן F על.
$\Longrightarrow$ נניח ש־$F : A \to [n]$ על ושמתקיים $|A| = |[n]|$ ונרצה להראות ש־F היא חד־חד ערכית.
מכך ש־$|A| = |[n]|$ נובע שיש $G : [n] \to A$ שהיא חד־חד ערכית ועל, נגדיר $H : [n] \to [n]$ על־ידי

$$H(k) = \min\{\ell \in [n] \mid F \circ G(\ell) = k\}$$

נטען ש־H מוגדרת היטב שכן $F \circ G$ היא הרכבה של פונקציות על, ולכן הקבוצה לא ריקה וניתן לקחת עליה מינימום.
כעת, נשים לב שמתקיים $F \circ G \circ H = \mathrm{Id}_{[n]}$ כי אם $\ell \in [n]$, אז $H(\ell) = k$ עבור $k \in [n]$ המקיים $F \circ G(k) = \ell$ ואז $(F \circ G \circ H)(\ell) = (F \circ G)(k) = \ell$ מהגדרה.
אז H חד־חד ערכית (כי אם $H(k_0) = H(k_1) = n$, אז $k_0 = k_1 = (F \circ G)(n)$).
לכן מהמקרה הראשון שראינו נובע כי H היא על.
נשים לב שאם נניח בשלילה שמתקיים $F(G(\ell_0)) = F(G(\ell_1))$ ו־$\ell_0 < \ell_1$ אזי $\ell_1 \notin \mathrm{range}(H)$:
ישירות מהגדרת H, אם $H(k) = \ell_1$ אזי $k = (F \circ G)(\ell_1)$ אבל לפי הגדרת H, $\ell_1 = H(k) \leq \ell_0$ וזאת סתירה. $\square$

שאלה 8

משפט 25 במילים שלי: תהיי A קבוצה סופית של קבוצות סופיות, אזי $\bigcup A$ סופית.

הוכחה: ראשית נגדיר

$$\bigcup A = \{b \mid \exists B \in A, b \in B\}$$

נוכיח באינדוקציה על n, כאשר $|A| = |[n]|$ ונראה ש־$\bigcup A$ סופית.

בסיס האינדוקציה עבור $n = 0$ אז $A = \emptyset$ ואז $\bigcup A = \emptyset$ והטענה טריוויאלית.

נניח שהטענה נכונה כאשר $|A| = |[n]|$ ונראה עבור $|A| = |[n+1]|$.

מכך שמתקיים $|A| = |[n+1]|$ נובע כי יש $F : [n+1] \to A$ שהיא חד־חד ערכית ועל.

נגדיר $A \supseteq \{F(a) \mid a \in [n]\} = Y = F[[n]]$ ולכן $|Y| = |[n]|$ שכל איבריה הם קבוצות סופיות.

מהנחת האינדוקציה, מתקיים ש־$C = \bigcup Y$ היא קבוצה סופית שוות עוצמה ל־$[m]$.

נגדיר $X = F(n)$ וזו גם קבוצה סופית מהגדרת F, שוות עוצמה ל־$[k]$.

נסתכל על $D = X \setminus C$, ראינו שמתקיים $|C \cup D| = |[m+k]|$, ונראה שמתקיים $\bigcup A = C \cup D$ באמצעות הכלה דו־כיוונית:

יהי $b \in \bigcup A$, ולכן קיים $B \in A$ כך שמתקיים $b \in B$ ו־F על ולכן יש $j \in [n+1]$ כך שמתקיים $F(j) = B$.

אם $j = n$, אז $B = X$ ולכן $b \in C \cup D$. אם $j \neq n$, אז $j \in [n]$ ולכן $B \in Y$, כלומר $b \in C$.

יהי $x \in C \cup D$, אם $x \in D$ אז $b \in X$ ו־$X \in A$ אז $b \in \bigcup A$.

אם $x \in C$ אז $x \in Y$ ו־$Y \subseteq A$ ולכן $x \in A$, כלומר $b \in \bigcup A$. $\square$

שאלה 9

משפט 29 ומסקנה 30 במילותיי: נניח כי נתונה סדרה של זוגות סדורים (A_n, F_n) כאשר $F_n : A_n \to \mathbb{N}$ מעידה על כך ש־A_n לכל היותר בת־מנייה. אזי $\bigcup\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ היא לכל היותר בת־מנייה.

הוכחה: ראשית ניזכר שאנחנו אומרים שקבוצה היא לכל היותר בת־מנייה אם היא סופית או בת־מנייה.

נסמן $B = \bigcup\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ונגדיר $G : B \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ בצורה הבאה:

עבור $b \in B$, מהגדרת האיחוד יש $n \in \mathbb{N}$ כך ש־$b \in A_n$ ונבחר את ה־$n_0 \in \mathbb{N}$ המינימלי שמקיים זאת, אז

$$G(b) = \langle n_0, F_{n_0}(b) \rangle$$

ו־G היא חד־חד ערכית: כי אם $G(b) = G(c) = \langle n, m \rangle$ אזי $b, c \in A_n$ וגם $F_n(b) = F_n(c) = m$ אבל F_n חד־חד ערכית, אז $b = c$.

אז $|B| \le |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$.

מסקנה: אם לפחות אחת מהקבוצות A_n היא בת־מנייה, אז $\bigcup\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ הוא בן־מנייה.

הוכחת המסקנה: נסתכל על $\mathrm{Id}_{A_n} : A_n \to \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, היא חד־חד ערכית ומעידה על כך ש־$|\mathbb{N}| = (A_n) \le |\bigcup\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}|$ כאשר האחרונה היא תת־קבוצה של $\mathbb{N}$ שהיא אינסופית ולכן לפי טענה שראינו, היא בת־מנייה. $\square$

שאלה 10

אם A לכל היותר בת־מנייה ולא ריקה, אז $\mathrm{Seq}(A)$ היא בת־מנייה.

הוכחה: ראשית נתחיל בהגדרה

$$\mathrm{Seq}(A) = \bigcup \left\{ A^{[n]} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

שקיימת מאקסיומת האיחוד, ו־$A^{[n]}$ זו קבוצת כל הפונקציות מ־$[n]$ ל־A.

מהיות A בת־מנייה נובע כי $G : A \to \mathbb{N}$ היא פונקציה חד־חד ערכית.

נראה באינדוקציה שלכל $n \in \mathbb{N}$, $A^{[n]}$ היא לכל היותר בת־מנייה, הבנייה של הפונקציה G_n היא באופן רקורסיבי.

נראה שמתקיים $\left|A^{[n]} \times A\right| = \left|A^{[n+1]}\right|$ על־ידי הפונקציה $F(\langle g, a\rangle) = g \cup \{\langle n, a\rangle\}$.

נראה כי $F : A^{[n+1]} \to A^{[n]} \times A$ היא חד־חד ערכית ועל באמצעות ההופכית שלה, נגדיר $G : A^{[n]} \times A \to A^{[n+1]}$ על־ידי

$$G(g, a) = g \cup \{(n, a)\}$$

כי $\mathrm{domain}(g) = [n]$ והרחבנו את הפונקציה באמצעות $n \mapsto a$ להיות עם domain של $[n+1]$.

אז G מוגדרת היטב (כי $n \notin \mathrm{domain}(g)$) ולכן $G \in A^{[n+1]}$.

נשים לב שההגדרה הנתונה של F שקולה ל־$F(g) = \left(g|_{[n]}, g(n)\right)$.

נסתכל על ההרכבה $F \circ G$: ניקח $(g, a) A^{[n]} \times A$ ונגדיר $h = G(g, a) = g \cup \{(n, a)\}$ אז $h|_{[n]} = g$ ו־$h(n) = a$ אז

$$F(G(g, a)) = F(g \cup \{(n, a)\}) = \left(h|_{[n]}, h(n)\right) = (g, a)$$

מצד שני, נסתכל על ההרכבה $G \circ F$: ניקח $h \in A^{[n+1]}$, אז $(g, a) = F(h) = \left(h|_{[n]}, h(n)\right)$, אז $G(g, a) = g \cup \{(n, a)\} = h|_{[n]} \cup \{(n, h(n))\}$,

וזה בדיוק $h = g \cup \{(n, a)\}$, אז $G(F(h)) = h$.

כלומר $F \circ G = \mathrm{Id}$ וגם $G \circ F = \mathrm{Id}$ אז הן הופכיות אחת של השנייה ולכן חד־חד ערכיות ועל.

כעת, ניקח $H : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ שהיא חד־חד ערכית ועל (כי $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ בת־מנייה) ונגדיר את

$$G_{n+1}(f) = H \circ \underbrace{(G_n \otimes G)}_{(G_n \otimes G)(g,a) = (G_n(g), G(a))} \circ F^{-1}(f)$$

ו־G_{n+1} היא הרכבה של פונקציות חד־חד ערכיות ולכן חד־חד ערכית.

אז יש סדרה (X_n, φ_n) כאשר φ_n מעידה על היות X_n לכל היותר בת־מנייה ולכן האיחוד הוא לכל היותר בן־מנייה לפי טענה שראינו.

מכך ש־A לא ריקה, יהי $a \in A$ ונגדיר $K : \mathbb{N} \to \mathrm{Seq}(A)$ על־ידי $K(n) = [n] \times \{a\} \subseteq [n] \times A$ אז $K(n) \in \mathrm{Seq}(A)$ (כי התחום הוא $[n]$).

אבל אם $n \neq m$ אז $K(n) \neq K(m)$ כי $\mathrm{domain}(K(n)) \neq \mathrm{domain}(K(m))$ ולכן K חד־חד ערכית.

ממשפט קנטור־שרדר־ברנשטיין נקבל ש־$|\mathrm{Seq}(A)| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$. $\square$

שאלה 11

מסקנות חשובות – קבוצות בנות־מנייה: קבוצת הפולינומים במקדמים שלמים וקבוצת המספרים האלגבריים הממשיים הן בנות־מנייה.

הוכחה:

למה: תהיי X קבוצה לכל היותר בת־מנייה ו־Y קבוצה כך שקיימת $F : X \to Y$ **על**. אז Y לכל היותר בת־מנייה.

הוכחת הלמה: ראשית נבחין שאם X סופית, אז בהכרח Y סופית (מהגדרת **הפונקציה** לא ייתכן ש־Y תהיה בת־מנייה ו־X סופית והפונקציה על), ואם X בת־מנייה אזי Y יכולה להיות סופית או בת־מנייה (לכל היותר בת־מנייה).

מהיות X בת־מנייה, יש $G : X \twoheadrightarrow \mathbb{N}$ שהיא חד־חד ערכית.

נגדיר $H : Y \to \mathbb{N}$ על־ידי

$$H(y) = \min F[G^{-1}(\{y\})] = \min\{n \in \mathbb{N} \mid \exists x \in X, F(x) = y, G(x) = n\}$$

H מוגדרת היטב מהיות הפונקציה F על, ולכן הקבוצה לא ריקה וניתן לקחת עליה מינימום. נשאר להראות ש־H היא חד־חד ערכית, מתקיים

$$H(y) = H(y') = n \iff \exists x, x' \in X,\ \ s.t.\ F(x') = y' \land F(x) = y \land G(x) = G(x') = n$$

אבל G חד־חד ערכית, אז $x = x'$ ו־F פונקציה ולכן $y = y'$ ו־H חד־חד ערכית.

טענה: קבוצת הפולינומים במקדמים שלמים היא בת־מנייה.

הוכחת הטענה: לכל סדרה $\langle z_0, \cdots, z_{n-1}\rangle \in \mathrm{Seq}(\mathbb{Z})$ נתאים את הפולינום $\sum_i z_i x^i$, זו התאמה שאיננה חד־חד ערכית אך היא על, מקבוצה בת־מנייה לקבוצת הפולינומים במקדמים שלמים ולכן מהלמה לעיל – קבוצת הפולינומים במקדמים שלמים היא בת־מנייה.

טענה: קבוצת המספרים האלגבריים הממשיים היא בת־מנייה, בפרט קיים מספר ממשי שאיננו אלגברי.

הוכחת הטענה: ראשית ניזכר שנגיד שמספר הוא אלגברי אם הוא שורש של פולינום כלשהו.

תהיי $P : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}[x] \setminus \{0\}$, פונקציה חד־חד ערכית ועל (ראינו שכל תת־קבוצה אינסופית של קבוצה בת־מנייה היא בת־מנייה).

לכל $n \in \mathbb{N}$, נגדיר A_n קבוצת כל השורשים של $P(n)$ – קבוצה זו סופית (כי עוצמתה חסומה על־ידי דרגת הפולינום, נסמנה $[k_n]$) והיא יכולה להיות ריקה.

נגדיר $F_n : A_n \to [k_n]$ כפונקציה משמרת סדר היחידה – כלומר, F_n שולחת את האיבר המינימלי של A_n ל־0, האיבר הבא ל־1 וכן הלאה.

אז F_n חד־חד ערכית ובפרט גם ההרחבה $F_n : A_n \to \mathbb{N}$ היא פונקציה חד־חד ערכית.

מהתזכורת, $\bigcup\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ זו קבוצת המספרים האלגבריים הממשיים.

יש לנו סדרה של זוגות סדורים של קבוצה עם פונקציה שמעידה על היות הקבוצה לכל היותר בת־מנייה, אז לפי טענה שראינו – האיחוד שלהן הוא לכל היותר בת־מנייה.

נבחין שהקבוצה הזאת מכילה את $\mathbb{N}$ ולכן היא אינסופית, ועל־כן בת־מנייה. $\square$

שאלה 12

שדה הממשיים הוא השדה הסדור השלם היחיד עד־כדי איזומורפיזם.

הוכחה: ראשית, נזכיר שנאמר כי שדה סדור R הוא **שלם** אם לכל תת־קבוצה חסומה ולא ריקה יש סופרימום.

למה: $\mathbb{R}$ שלם.

הוכחה: תהיי $\mathcal{A}$ קבוצה של חתכי דדקינד, נזכיר שקבוצה $A \subseteq \mathbb{Q}$ היא חתך אם

1. $A \neq \mathbb{Q}$
2. $\forall a \in A, \exists b \in A, a < b$
3. $c < a \wedge a \in A \implies c \in A$

נניח כי $\mathcal{A}$ חסומה על־ידי $B \in \mathbb{R}$, ולכן לכל $A \in \mathcal{A}$ מתקיים $A \subseteq B$.

נסתכל על $\bigcup \mathcal{A} = C \subseteq B$, נטען כי C חתך דדקינד:

1. היות ו־$B \nsubseteq \mathbb{Q}$ אז $C \subseteq B$, $C \neq \mathbb{Q}$
2. אם $a \in C$ אז יש $A \in \mathcal{A}$ כך ש־$a \in A$ ולכן יש $b \in A$ כך ש־$a < b$ ולכן $b \in C$
3. אם $a \in C$ ו־$q \in \mathbb{Q}$ מקיים $q < a$ אזי $a \in A \in \mathcal{A}$ ולכן $c \in A$, כלומר $c \in C$

נעבור להוכחת המשפט.

יהי R שדה סדור שלם.

נזהה $N \subseteq R$ בתור חיתוך כל הקבוצות של R שמכילות את 0 וסגורות תחת הפונקציה $F(x) = x + 1$, ומשלמות השדה אנחנו יודעים שנובע כי N לא חסומה (ארכימדיות).

נבחין ש־N הוא מודל של אקסיומות פאנו מסדר שני ולכן ממשפט היחידות של הטבעיים הוא איזומורפי ל־$\mathbb{N}$ ($0 \in N$ ולכל $n \in N$ מתקיים $F(n) = S(n)$ מהסגירות (ומהגדרה אין $n \in N$ כך ש־$F(n) = 0$) ואת אקסיומת האינדוקציה אנחנו מקבלים ישירות מהגדרת F והסגירות).

מתוך N נגדיר את Q בתור כל המנות של איברי N כאשר המכנה שונה מ־0 והנגדיים שלהם, מיחידות הטבעיים – מה שקיבלנו איזומורפי ל־$\mathbb{Q}$ כשדה סדור.

יהי F_0 האיזומורפיזם היחיד ונגדיר העתקה $F : \mathbb{R} \to R$ על־ידי

$$F(A) = \sup\{F_0(a) \mid a \in A\}$$

מוגדרת היטב (משלמות, הסופרמום הזה קיים).

F היא איזומורפיזם:

1. שימור חיבור, כפל וסדר זה ישירות מהגדרה (לפתוח)
2. חד־חד ערכיות: אם $A \neq B$ אז יש $q \in B \setminus A$ (בלי הגבלת הכלליות), לכן לכל $a \in A$ מתקיים $a < q$ ולכן $F(A) \leq F_0(q)$.
   B חתך ולכן יש $r \in B$ כך ש־$r < q$ ולכן

$$F_0(q) < F_0(r) \leq F(B) \implies F(A) < F(B)$$

3. על: נניח שיש $b \in R \setminus F[\mathbb{R}]$ ונגדיר $B = \{q \in \mathbb{Q} \mid F_0(q) < b\}$ ונניח בשלילה ש־$B = \mathbb{Q}$, אז Q חסומה בסתירה לארכימדיות.

יהי $q \in B$, מארכימדיות יש $n \in \mathbb{N}$ כך ש־$F_0(q) + F_0\left(\frac{1}{n}\right)$ ולכן $q + \frac{1}{n} \in B$, כלומר יש רציונלי גדול יותר ב־B, אז B חתך ומתקיים $F(B) \leq b$.

נניח בשלילה ש־$F(B) < b$, ולכן מארכימדיות יש n כך שמתקיים $F(B) + F_0\left(\frac{1}{n}\right) < b$ (אחרת יש חסם עליון ל־Q), אז אם ניקח $q \in B$ נקבל

$$F_0\left(q + \frac{1}{n}\right) = F_0(q) + F_0\left(\frac{1}{n}\right) \leq F(B) + F_0\left(\frac{1}{n}\right) < b$$

$F(B)$ סופרמום של $F_0[B]$ ולכן יש $q \in B$ כך שמתקיים $F(B) - F_0\left(\frac{1}{n}\right) < F_0(q)$, וזאת סתירה (כי $q + \frac{1}{n} \in B$ ו־$F(B) < F_0\left(q + \frac{1}{n}\right)$). $\square$

שאלה 13

דברים על קבוצת החזקה.

סעיף א'

הוכיחי וצטטי את משפט קנטור.

הוכחה:

ניסוח: לכל קבוצה A מתקיים $|A| < |\mathcal{P}(A)|$, כאשר $|A| < |\mathcal{P}(A)|$ אם מתקיים $|A| \leq |\mathcal{P}(A)|$ וגם $|A| \neq |\mathcal{P}(A)|$.

הוכחה: ראשית, בהכרח מתקיים $|A| \leq |\mathcal{P}(A)|$, ניקח את $f : A \to \mathcal{P}(A)$ כך שמתקיים $f(a) = \{a\}$ והיא חד־חד ערכית.

נוכיח טענה חזקה יותר – שאין פונקציה על $g : A \to \mathcal{P}$. נניח בשלילה שיש כזאת שהיא חד־חד ערכית ועל, כלומר מתאימה לכל $a \in A$ תת־קבוצה מקבוצת החזקה של A.

עבור חלק $a \in A$ יתקיים ש־$a \in g(a)$ ועבור חלק יתקיים ש־$a \notin g(a)$ אז נגדיר $A_0 = \{a \in A \mid a \notin g(a)\} \subseteq \mathcal{P}(A)$, ולכן מהיות A על יש $a \in A$ כך שיתקיים $g(a) = A_0$ ועלינו לבחון האם $a \in g(a) = A_0$:

1. אם $a \in A_0$ אז מתקיים ש־$a \notin g(a)$ וזאת סתירה
2. אם $a \notin A_0$ אז מתקיים $a \in g(a)$, אבל $g(a) = A_0$ וזאת סתירה

אז g לא פונקציה על ולכן $|A| < |\mathcal{P}(A)|$. $\square$

סעיף ב'

הוכיחי שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $|\mathcal{P}([n])| = |[2^n]|$.

הוכחה: ראשית נציין ש־$\mathcal{P}([n])$ מוגדרת היטב לכל $n \in \mathbb{N}$ מאקסיומת קבוצת החזקה.

באינדוקציה על $n \in \mathbb{N}$, עבור בסיס האינדוקציה $n = 0$ מתקיים $[n] = \emptyset$ ואכן $\mathcal{P}([0]) = \{\emptyset\}$ ומתקיים $2^0 = 1$.

נניח שהטענה נכונה עבור $n \in \mathbb{N}$ ונראה עבור $n + 1$.

לכל $S \subseteq \mathcal{P}([n+1])$ נגדיר

$$A = \{S \subseteq [n+1] \mid n \notin S\}, \qquad B = \{S \subseteq [n+1] \mid n \in S\}$$

אז $A \cap B = \emptyset$ ולכן $\mathcal{P}([n+1]) = A \cup B$ (עם אקסיומת האיחוד).

נגדיר $F : A \to \mathcal{P}([n])$ על־ידי $f(S) = S$ וזאת פונקציה חד־חד ערכית ועל, אז

$$|A| = |\mathcal{P}([n])| \underset{\text{הנחת האינדוקציה}}{=} |[2^n]|$$

נגדיר $g : B \to \mathcal{P}([n])$ על־ידי $g(S) = S \setminus \{n\}$ והיא גם חד־חד ערכית ועל כי $T \mapsto T \cup \{n\}$ היא ההופכית שלה, ולכן

$$|B| = |\mathcal{P}([n])| \underset{\text{הנחת האינדוקציה}}{=} |[2^n]|$$

אז מאריתמטיקה של עוצמות נקבל

$$|\mathcal{P}([n+1])| = |A| + |B| = 2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

$\square$

שאלה 14

ניסוחים.

סעיף א'

נסחי את אקסיומת הבחירה.

הוכחה: לכל אוסף של קבוצות $\mathcal{A}$ המקיים שלכל $X \in \mathcal{A}$, $X \neq \emptyset$, אז קיימת $f : \mathcal{A} \to \bigcup \mathcal{A}$ המקיימת $f(X) \in X$ לכל קבוצה $X \in \mathcal{A}$.
במילים אחרות, אקסיומת הבחירה מבטיחה לנו כי לכל אוסף של קבוצות לא ריקות, קיימת פונקציה המצביעה עבור כל אחת מהקבוצות באוסף על איבר ספציפי ששייך אליו, ולפונקציה זאת נקרא **פונקציית בחירה**. $\square$

סעיף ב'

נסחי את משפט הרקורסיה על הטבעיים.

הוכחה: נניח ש־$P(x, y)$ תכונה כך שלכל x_0 קיים ויחיד y_0 עבורם מתקיים $P(x_0, y_0)$. אז קיימת קבוצה X וקיימת פונקציה יחידה $F : \omega \to X$ כך שלכל $n \in \omega$ מתקיים $P(F \restriction n, F(n))$. $\square$

סעיף ג'

נסחי את משפט הרקורסיה השכחני.

הוכחה: נניח ש־X קבוצה, $G : X \to X$ ו־$x_0 \in X$.
אז קיימת $F : \omega \to X$ המקיימת $F(0) = x_0$ ולכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $F(n+1) = G(F(n))$ $\square$

שאלה 15

סדרים טובים.

סעיף א'

הגדירי מהו סדר קווי חד.

הוכחה: סדר קווי חד הוא סדר טרנזטיבי ואנטי־סימטרי כך שלכל a, b מתקיים בידיוק אחד מהבאים - $a < b, b < a, b = a$. $\square$

סעיף ב'

הגדירי מהו סדר טוב.

הוכחה: סדר קווי חד $\langle A, < \rangle$ יקרא טוב אם לכל $B \subseteq A$ יש מינימום, כלומר יש $b \in B$ כך שלכל $c \in B$ מתקיים $b < c$ או $b = c$. $\square$

סעיף ג'

הוכיחי ש־$\langle \omega, \in \rangle$ הוא סדר טוב.

הוכחה: תהיי $B \subseteq \omega$ לא ריקה, מאקסיומת היסוד יש $b \in B$ כך ש־$b \cap B = \emptyset$.

יהי $m \in B$, אם $m < b$ אז $m \in b$ ולכן $m \in b \cap B = \emptyset$, סתירה.

כלומר, לכל $m \in B$ מתקיים $b \in m$ או $b = m$ וזו בידיוק ההגדרה של מינימום. $\square$

סעיף ד'

תני עוד הוכחה לכך ש־$\langle \omega, \in \rangle$ הוא סדר טוב.

הוכחה: תהיי $B \subseteq \omega$ ונניח כי ל־B אין איבר מינימלי.

נסתכל על $A = \{n \in \omega \mid \forall m \in B, n < m\}$ ובבירור $0 \in A$ (אחרת הוא המינימום של B).

נניח כי $n \in A$ ונבחן את $S(n)$: אם $S(n) \notin A$ אז יש $m \in B$ כך ש־$S(n) \not< m$ כלומר $m \leq S(n)$ ולכן מאקסיומת פאנו נקבל $m \leq n \vee$ $m = S(n)$, אבל לא ייתכן ש־$m \leq n$ כי $n \in A$ ולכן $n < m$.

אז $S(n) \in B$ ולכל $k < S(n)$ מתקיים $k \notin B$ ולכן $S(n)$ הוא המינימום של B בסתיר להנחה.

אז $A = \omega$ ו־$B = \emptyset$. $\square$

סעיף ה'

צטטי והוכיחי את משפט האינדוקציה על סדרים טובים.

הוכחה:

ניסוח: יהי $\langle A, < \rangle$ סדר טוב.

תהיי $B \subseteq A$ המקיימת לכל $b \in A$ כי אם $\{x \in A \mid x < b\} \subseteq B$ אז $b \in B$.

אזי $A = B$.

הוכחה: תהיי B כבמשפט ונסתכל על $C = A \setminus B$.

אם $C \neq \emptyset$ אז יש לה איבר מינימלי c, כלומר לכל $x \in A$, אם $x < c$ אז $x \in B$, אבבל אז $c \in B$ – סתירה. $\square$

שאלה 16

סודרים.

סעיף א'

הגדירי מהי קבוצה טרנזטיבית.

הוכחה: נגדיר ש־x היא קבוצה טרנזטיבית אם לכל $y \in x$ ו־$z \in y$ מתקיים $z \in x$.

בכתיב הטבעיים, אם לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים שלכל $m \in n$ מתקיים $m \subseteq n$. $\square$

סעיף ב'

הגדירי מהו סודר.

הוכחה: קבוצה טרנזטיבית x כך שמתקיים $\langle x, \in \rangle$ הוא סדר טוב תקרא סודר. $\square$

סעיף ג'

תנאי מספיק לסדר טוב.

תת־סעיף א'

תני לי תנאי מספיק לסדר טוב עבור קבוצה x.

הוכחה: מספיק להראות שהסדר $\langle x, \in \rangle$ הוא סדר קווי חד. $\square$

תת־סעיף ב'

תוכיחי שאת צודקת.

הוכחה: תהיי $\emptyset \neq A \subseteq x$. מאקסיומת היסוד, יש $a \in A$ כך שמתקיים $a \cap A = \emptyset$.

יחס השייכות הוא יחסי קווי על x, אז לכל $b \in a$ בגלל ש־$a \notin b$ אזי $a \in b$ או $a = b$. $\square$

סעיף ד'

הוכיחי ש־$\{\omega\}$ איננה טרנזטיבית.

הוכחה: נבחין ש־$1 \in \omega$ אבל $1 \notin \{\omega\}$. $\square$

סעיף ה'

יהי $\langle \alpha, \in \rangle$ סודר, אז כל איברי α הם סודרים.

הוכחה: יהי $\beta \in \alpha$. α סודר, ולכן α טרנזטיבית: יהי $x \in y \in \beta$, אז מטרנזטיביות α נובע ש־$y \in \alpha$, ואם נפעיל שוב טרנזטיביות נקבל ש־$x \in \alpha$.
α סודר ולכן יחס השייכות עליה הוא לינארי, אז הוא טרנזטיבי על איבר α, אז β היא טרנזטיבית ולכן $x, y \in \beta$ מתקיים $x \in y \lor x = y \lor y \in x$
נובעים ישירות מהיות $\beta \subseteq \alpha$. $\square$

סעיף ו'

הוכיחי שקבוצה טרנזטיבית שכל איבריה הם סודרים היא סודר.

הוכחה: תהיי A קבוצה טרנזטיבית שכל איבריה הם סודרים ויהיו $\alpha, \beta \in A$. אז מטענה שראינו, מתקיים $\alpha \in \beta \lor \beta \in \alpha \lor \alpha = \beta$, כלומר הקבוצה היא סדר קווי חד ביחס השייכות ולכן סדר טוב.

הקבוצה היא טרנזטיבית מהנתון והיא סדר טוב אז היא סודר. $\square$

סעיף ז'

הוכיחי שקבוצה טרנזטיבית שכל איבריה הם קבוצות טרנזטיביות היא סודר.

הוכחה: תהיי x בתנאי השאלה ונגדיר $A = \{z \in x \mid z \text{ סודר}\}$ (הקבוצה קיימת מהפרדה).

אם $A = x$ אז יש לנו קבוצה טרנזטיבית שכל איבריה הם סודרים ועל־כן היא סודר.

נניח בשלילה ש־$x \neq A$. אז מאקסיומת היסוד, יש $z \in x \setminus A$ כך ש־$z \cap (x \setminus A) = \emptyset$ כלומר $z \subseteq A$ ו־z מכיל רק סודרים.

אבל $z \in x$ אז z קבוצה טרנזטיבית, ולכן z סודר – אך זאת סתירה! $\square$

שאלה 17

יחסים בין סודרים.

סעיף א'

נניח כי α, β סודרים. אזי $\alpha \subseteq \beta$ או $\beta \subseteq \alpha$.

הוכחה:

למה: אם β סודר ו־s קבוצה טרנזטיבית. אם $\beta \setminus s \neq \emptyset$, אזי $\min(\beta \setminus s) = \beta \cap s$.

הוכחה: ראשית כמובן לכל סדר טוב יש מינימום, ונסמן $\gamma = \min(\beta \setminus s)$ ונראה באמצעות הכלה דו־כיוונית.

$\gamma \subseteq s \cap \beta$: יהי $\delta \in \gamma$, β טרנזטיבית ולכן $\delta \in \beta$. לא ייתכן ש־$\delta \notin s$ כי אז נקבל סתירה למינימליות γ ולכן $\delta \in s \cap \beta$.

$\gamma \supseteq s \cap \beta$: אם $\delta \in s \cap \beta$ אזי $\delta \in \beta$ מהגדרה, ו־β ו־β סודר ולכן $\delta \in \gamma \vee \delta = \gamma \vee \gamma \in \delta$ ונחלק למקרים.

1. $\delta = \gamma$ לא אפשרי כי $\delta \in s$ אבל $\gamma \notin s$
2. $\gamma \in \delta$ לא ייתכן כי s טרנזטיבית ולכן $\gamma \in s$ אבל $\gamma \notin s$
3. $\delta \in \gamma$ – האופציה האחרונה והתקינה

בחזרה להוכחה.

נניח כי $\alpha \nsubseteq \beta$ ויהי $\gamma = \min(\beta \setminus s)$ ביחס השייכות.

נניח בשלילה ש$\beta \nsubseteq \alpha$ ולכן $\alpha \setminus \beta \neq \emptyset$, מהטענה נקבל $\delta = \min(\alpha \setminus \beta) = \alpha \cap \beta = \gamma$, אבל $\delta = \gamma \in \beta$ בסתירה. $\square$

סעיף ב'

יהיו α, β סודרים. אזי $\alpha = \beta \vee \beta \in \alpha \vee \alpha \in \beta$.

הוכחה: בלי הגבלת הכלליות נניח כי $\alpha \subseteq \beta$. אם $\beta \setminus \alpha = \emptyset$ אז $\alpha = \beta$ וסיימנו;

אם $\beta \setminus \alpha \neq \emptyset$, אז ניקח $\gamma = \min(\beta \setminus \alpha) = \beta \cap \alpha$, ולכן מהגדרת החיתוך, $\gamma \in \beta, \gamma \in \alpha$, כלומר $\alpha \in \beta$. $\square$

סעיף ג'

אם α, β סודרים איזומורפיים אזי $\alpha = \beta$.

הוכחה: נניח בלי הגבלת הכלליות ש־$\alpha \subseteq \beta$, ותהיי $F : \beta \to \alpha \subseteq \beta$, פונקציה שומרת סדר.

מטענה שראינו מתקיים שלכל $\gamma \in \beta$, $F(\gamma) \geq \gamma$.

נניח בשלילה ש־$\alpha \in \beta$ ולכן $\alpha < \beta$, אבל $F(\alpha) \in \alpha$, כלומר $F(\alpha) < \alpha$ אבל זאת סתירה כי $\alpha \in \beta$ ואז נקבל $F(\alpha) \geq \alpha$. $\square$