פתרון מטלה 07 — תורת הקבוצות, 80200

23 במאי 2025

שאלה 1

ניזכר שלכל $x \in \omega$ הגדרנו $S(x) = x \cup \{x\}$.

סעיף א'

נוכיח שלכל $x \in y \in \omega$ מתקיים $S(x) \in y$ או $S(x) = y$.

הוכחה: נגדיר

$$I = \{y \in \omega \mid \forall x \in y,\ (S(x) \in y \vee S(x) = y)\} \subseteq \omega$$

I קיימת מאקסיומת ההפרדה, ונראה שהיא אינדוקטיבית ומהיות ω הקבוצה האינדוקטיבית המינימלית נקבל ש־$\omega \subseteq I$ ומאקסיומת ההיקפיות נקבל $I = \omega$ וזה יסיים.

באופן ריק, לכל $x \in \emptyset$ מתקיים $S(x) \in \emptyset$ או $S(x) = \emptyset$ ולכן $\emptyset \in I$.

יהי $y \in I$ ו־$x \in S(y) = y \cup \{y\}$ ומאקסיומת האיחוד נקבל ש־$x \in y$ או ש־$x \in \{y\}$.

אם $x \in y$ אז ישר נקבל ש־$S(x) \in y$ או ש־$S(x) = y$ כי $y \in I$. נבחן את כל האופציות:

אם $S(x) \in y$, אז מאקסיומת האיחוד נקבל $S(x) \in y \cup \{y\} = S(y)$ ולכן $S(x) \in S(y)$.

אם $S(x) = y$ אז מאקסיומת הזוג הלא סדור $S(x) \in \{y\}$ ומאקסיומת האיחוד $S(x) \in y \cup \{y\} = S(y)$ ושוב $S(x) \in S(y)$.

אם $x \in \{y\}$, מאקסיומת הזוג הלא סדור נקבל $x = y$ ולכן $S(x) = S(y)$.

כיסינו את כל המקרים וראינו שלכל $x \in S(y)$ מתקיים $S(x) \in S(y)$ או $S(x) = S(y)$ וזה אומר ש־$S(y) \in I$.

בסך־הכל זה אומר ש־I קבוצה אינדוקטיבית ו־$I = \omega$ מהנימוק בהתחלה. אז לכל $y \in \omega$ מתקיים $y \in I$ ואז לכל $x \in y$ מתקיים $S(x) \in y$ או $S(x) = y$, וזה בידיוק מה שהתבקשנו להראות.

$\square$

סעיף ב'

נוכיח שלכל $x, y \in \omega$ מתקיים $x \in y$ או $y \in x$ או $x = y$ ונסיק מכך שלכל $x, y \in \omega$ מתקיים $x \subseteq y$ או $y \subseteq x$.

הוכחה: יהי $x \in \omega$ ונגדיר

$$I_x = \{y \in \omega \mid (x \in y) \vee (y \in x) \vee (x = y)\} \subseteq \omega$$

אם נראה ש־I_x קבוצה אינדוקטיבית, נקבל ש־$\omega \subseteq I_x$ מכך ש־ω היא הקבוצה האינדוקטיבית המינימלית ואז נקבל ש־$I_x = \omega$ (מאקסיומת ההקפיות) וזה מסיים.

ראשית, I_x קיימת מאקסיומת ההפרדה ומתקיים$I_x \ni \emptyset$ כי לכל $y \in \emptyset$ מתקיים גם $x \in y$ וגם $y \in x$ או $x = y$ ולכן $\emptyset \in I_x$.

כעת, יהי $y \in I_x$ ולכן אחד מהבאים מתקיים:

1. $x \in y$ – מאקסיומת האיחוד נקבל ש־$x \in y \cup \{y\}$ אבל $S(y) = y \cup \{y\}$ ולכן $x \in S(y)$
2. $y \in x$ – מסעיף א' נקבל ש־$S(y) \in x$ או ש־$S(y) = x$
3. $x = y$ – מאקסיומת הזוג הלא סדור נקבל $x \in \{y\}$ ומאקסיומת האיחוד $x \in y \cup \{y\} = S(y)$ ולכן $x \in S(y)$

זאת אומרת שלכל $y \in I_x$ מתקיים $S(y) \in I_x$ וגם $\emptyset \in I_x$ ולכן I_x קבוצה אינדוקטיבית.

ולכן בסך־הכל $I_x = \omega$ ומתקיים לכל $x, y \in \omega$ או ש־$y \in x$ או ש־$x \in y$ או ש־$x = y$ וזה בפרט גורר את ההכלות $y \subseteq x$ או ש־$x \subseteq y$. $\square$

שאלה 2

סעיף א'

נניח ש־x, y קבוצות ונוכיח ש־$x \setminus y$ קיימת.

הוכחה: תהיינה x, y קבוצות ונגדיר את התכונה $P(z) = (z \notin y)$, ולכן לפי אקסיומת ההפרדה הקבוצה

$$x \setminus y = \{z \in x \mid z \notin y\}$$

קיימת. $\square$

סעיף ב'

נניח ש־x, y קבוצות, $f : x \to y$ פונקציה. נוכיח שלכל $y_0 \subseteq y$ הקבוצה $f^{-1}(y_0)$ קיימת.

הוכחה: תהיינה x, y קבוצות ו־$f : x \to y$ פונקציה ותהיי $y_0 \subseteq y$, נגדיר את התכונה $P(z) = (f(z) \in y_0)$.

מאקסיומת ההפרדה, הקבוצה

$$f^{-1}(y_0) = \{z \in x \mid f(z) \in y_0\}$$

קיימת. $\square$

סעיף ג'

נניח ש־x, y, z קבוצות. נוכיח שלא מתקיים $z \in x \in y \in z$.

הוכחה: נניח בשלילה שמתקיים $z \in x \in y \in z$ ונבחן את הקבוצה $\{x, y, z\}$: קודם כל, נראה שהיא בכלל קיימת: מאקסיומת הזוג הלא סדור, הקבוצה $\{x, y\}$ קיימת וגם $\{z\}$ קיימת, ואם נפעיל שוב את אקסיומת הזוג הלא סדור על $\{\{x, y\}, \{z\}\}$ נקבל שהקבוצה הזאת קיימת.

נגדיר את התכונה

$$P(w) = ((w \in \{x, y\}) \vee w \in \{z\})$$

ויחד עם אקסיומת האיחוד נקבל את הקבוצה

$$\cup \{\{x, y\}, \{z\}\} = \{w \mid P(w)\} = \{x, y, z\}$$

אז הקבוצה $\{x, y, z\}$ קיימת.

מההנחה, נובע כי $z \in x$ ולכן $z \in \{x, y, z\} \cap x$ ולכן מאקסיומת הקבוצה הריקה נובע ש־$\{x, y, z\} \cap x \neq \emptyset$, אבל באותו אופן נקבל גם ש־$\{x, y, z\} \cap z \neq \emptyset, \{x, y, z\} \cap y \neq \emptyset$.

אבל אז לכל $w \in \{x, y, z\}$ מתקיים $\{x, y, z\} \cap w \neq \emptyset$, אבל זו סתירה לאקסיומת היסוד! $\square$

סעיף ד'

נניח ש־x קבוצה, E יחס שקילות על x. נוכיח שהקבוצה x/E קיימת.

הוכחה: לכל $x' \in x$ נגדיר את התכונה

$$P_1(\tilde{x}) = ((\tilde{x}, x') \in E)$$

לכל $x' \in x$ מחלקת השקילות שלו לפי היחס E מוגדרת על־ידי

$$[x']_E = \{\tilde{x} \in x \mid P_1(\tilde{x})\}$$

מאקסיומת ההפרדה נקבל ש־$[x']_E$ קיימת.

מההגדרה, x/E מכילה את כל האיברים שמגיעים למחלקת השקילות הנ"ל ולכן נשתמש גם באקסיומת קבוצת החזקה שאומרת שקיימת קבוצת החזקה של x ונסמנה ב־$\mathcal{P}(x)$, נגדיר את התכונה

$$P_2(a) = \left(\exists x' \in x\left(a = [x']_E\right)\right)$$

ומאקסיומת ההפרדה, נקבל שהקבוצה

$$x/E = \{a \in \mathcal{P}(x) \mid P_2(a)\}$$

קיימת. $\square$

סעיף ה'

נניח ש-x, y, z קבוצות, $R \subseteq x \times y$, $T \subseteq y \times z$ יחסים. נוכיח שההרכבה $T \circ R$ קיימת.

הוכחה: בתרגול ראינו שהקבוצות $x \times y, y \times z$ קיימות.
נגדיר לכל $(x', z') \in x \times z$ את התכונה

$$P((x', z')) = \exists (y' \in y)((x', y') \in R \wedge (y', z') \in T)$$

אז לפי אקסיומת ההפרדה נקבל שהקבוצה

$$T \circ R = \{(x', z') \in x \times z \mid P((x', z'))\}$$

קיימת. $\square$