פתרון מטלה 10 — תורת ההסתברות 1, 80420

14 בינואר 2026

שאלה 1

תהיי $(Y_i)_{i=1}^{\infty}$ סדרה של משתנים מקריים בלתי־תלויים ושווי התפלגות כך ש־$Y_i \sim Unif([0,1])$ לכל i.
נגדיר סדרה נוספת של משתנים מקריים $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ על־ידי $X_i = Y_i Y_{i+1}$.

סעיף א'

נחשב את תוחלת X_i לכל i.

פתרון: נתון כי $(Y_i)_{i=1}^{\infty}$ היא סדרה של משתנים מקריים בלתי־תלויים ולכן

$$\mathbb{E}(X_i) = \mathbb{E}(Y_i Y_{i+1}) = \mathbb{E}(Y_i)\mathbb{E}(Y_{i+1})$$

כאשר ראינו כבר בהרצאה את התוחלת של משתנה מקרי אחיד על $[0,1]$:

$$\mathbb{E}(Y_i) = \int_0^1 y \cdot f(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^1 y \cdot 1\,\mathrm{d}y = \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{2}$$

ולכן

$$\mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$\square$

סעיף ב'

נחשב את השונות של X_i לכל i.

פתרון: מהיות Y_i בלתי־תלויים מטענה שראינו גם בהפעלה של פונקציה רציפה עליהם האי־תלות נשמרת ולכן גם Y_i^2, Y_{i+1}^2 הם בלתי־תלויים ונקבל

$$\mathrm{Var}(X_i) = \mathbb{E}(X_i^2) - \mathbb{E}(X_i)^2 = \mathbb{E}(Y_i^2 Y_{i+1}^2) - \mathbb{E}(Y_i Y_{i+1})^2 = \mathbb{E}(Y_i^2)\mathbb{E}(Y_{i+1}^2) - \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

כאשר את $\mathbb{E}(Y_i^2)$ נחשב על־ידי טענה 8.31 – תוחלת של פונקציה של משתנה מקרי ונקבל

$$\mathbb{E}(Y_i^2) = \int_0^1 y^2\,\mathrm{d}y = \left[\frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{3}$$

ולכן

$$\mathrm{Var}(X_i) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{9} - \frac{1}{16} = \frac{7}{144}$$

בשביל השונות המשותפת עלינו להבחין ש־X_i, X_{i+1} בעלי שונות משותפת כי הם שניהם מסתמכים על Y_{i+1} כלומר לכל i מתקיים ש־X_i, X_{i+1} תלויים ולכל $j \neq i+1$ מתקיים X_i, X_j שהם בלתי־תלויים. ונחשב:

$$\mathrm{Cov}(X_i, X_{i+1}) = \mathbb{E}(X_i X_{i+1}) - \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_{i+1}) = \mathbb{E}(X_i X_{i+1}) - \frac{1}{16}$$

כזכור הפעלת פונקציה רציפה משמרת את האי־תלות ומהיות המשתנים בלתי־תלויים

$$X_i X_{i+1} = (Y_i Y_{i+1})(Y_{i+1} Y_{i+2}) = Y_i Y_{i+1}^2 Y_{i+2} \Longrightarrow \mathbb{E}(X_i X_{i+1}) = \mathbb{E}(Y_i Y_{i+1}^2 Y_{i+2}) = \mathbb{E}(Y_i)\mathbb{E}(Y_{i+1}^2)\mathbb{E}(Y_{i+2}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

ולכן

$$\mathrm{Cov}(X_i, X_{i+1}) = \frac{1}{12} - \frac{1}{16} = \frac{1}{48}$$

$\square$

סעיף ג'

נוכיח כי סדרת הממוצעים מקיימת

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{d} \mathbb{E}(X_i)$$

הוכחה: נגדיר

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

אז מכיול ריבועי של השונות נקבל

$$\mathrm{Var}\left(\overline{X_n}\right) = \mathrm{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\,\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i) + 2\sum_{1\le i<j\le n}\mathrm{Cov}\left(X_i, X_j\right)\right)$$

והמסעיפים הקודמים אם כך

$$\mathrm{Var}\left(\overline{X_n}\right) = \frac{1}{n^2}\left(n\cdot\frac{7}{144} + \frac{2(n-1)}{48}\right) = \frac{1}{n^2}\left(\frac{7n}{144} + \frac{n-1}{24}\right) = \frac{1}{n^2}\cdot\frac{13n-6}{144n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ונשים לב שמתקיים מלינארית התוחלת

$$\mathbb{E}\left(\overline{X_n}\right) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{n}\cdot n\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

אז לכל $\varepsilon > 0$ מאי־שיוויון צ'בישב נקבל

$$\mathbb{P}\left(\left|\overline{X_n} - \mathbb{E}\left(\overline{X_n}\right)\right| \ge \varepsilon\right) \le \frac{\mathrm{Var}\left(\overline{X_n}\right)}{\varepsilon^2} = \frac{13n-6}{144n^2\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

כלומר

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{d} \mathbb{E}(X_i)$$

□

שאלה 2

נניח כי $X, Y \sim Exp(1)$ בלתי־תלויים ונחשב את הצפיפות של $X - Y$.

פתרון: ניזכר

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y} & y \geq 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases}$$

ומהיות X, Y בלתי־תלויים נובע מאבחנה 8.52 כי מתקיים

$$f_{X,Y} = f_X f_Y = \begin{cases} e^{-(x+y)} & x \wedge y \geq 0 \\ 0 & x \vee y < 0 \end{cases}$$

תהיה $D = X - Y$ פונקציית הצפיפות של

$$\mathbb{P}(X - Y \leq d) = \iint_{x-y \leq d} e^{-(x+y)} \, \mathrm{d}A$$

נשתמש במשפט פוביני כדי לענות על דרישת השאלה.

נתחיל מהמקרה של $d \geq 0$.

קודם אינטגרל לפי x ואז לפי y: בקטע זה נסתכל על $x - y \leq d$ כ־$0 \leq x \leq y + d$ עבור y מקובע, ולכן

$$F_D(d) = \int_0^\infty \int_0^{y+d} e^{-x} e^{-y} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_0^\infty e^{-y} [-e^{-x}]_{x=0}^{x=y+d} \, \mathrm{d}y = \int_0^\infty e^{-y} \big(1 - e^{-(y+d)}\big) = \int_0^\infty e^{-y} - e^{-2y+d} \, \mathrm{d}y$$

$$= \left[-e^{-y} + \frac{e^{-d}}{2} e^{-2y}\right]_{y=0}^{y=\infty} = (0 + 0) - \left(-1 + \frac{1}{2} e^{-d}\right) = 1 - \frac{1}{2} e^{-d}$$

קודם אינטגרל לפי y ואז לפי x: בקטע זה נסתכל על $x - y \leq d$ בתור $y \geq x - d$ שכן $y \geq 0$ אז החסם התחתון יהיה $\max(0, x - d)$ ובגלל שאנחנו במקרה בו $d \geq 0$ אז יש שני מקרים

1. אם $0 \leq x \leq d$ אז $y \geq 0$
2. אם $x > d$ אז $y \geq x - d$

ונקבל שני אינטגרלים

$$F_D(d) = \int_0^d \int_0^\infty e^{-x} e^{-y} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x + \int_d^\infty \int_{x-d}^\infty e^{-x} e^{-y} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$$

עבור האינטגרל הראשון

$$\int_0^d e^{-x} [-e^{-y}]_{y=0}^{y=\infty} \, \mathrm{d}x = \int_0^d e^{-x} \, \mathrm{d}x = 1 - e^{-d}$$

ועבור האינטגרל השני

$$\int_d^\infty e^{-x} [-e^{-y}]_{y=x-d}^{y=\infty} \, \mathrm{d}x = \int_d^\infty e^{-x} \big(e^{-(x-d)}\big) \, \mathrm{d}x = e^d \int_d^\infty e^{-2x} \, \mathrm{d}x = e^d \left[\frac{e^{-2x}}{-2}\right]_{x=d}^{x=\infty} = e^d \left(0 + \frac{1}{2} e^{-2d}\right) = \frac{1}{2} e^{-d}$$

כלומר

$$F_D(d) = \big(1 - e^{-d}\big) + \frac{1}{2} e^{-d} = 1 - \frac{1}{2} e^{-d}$$

עכשיו צריך לעבור למקרה בו $d < 0$.

קודם אינטגרל לפי x ואז לפני y: נסמן $d = -|d|$ והתנאי $x - y \leq -|d|$ אומר $x \leq y - \text{abs } d$ ובגלל ש־$x \geq 0$ אז $y - |d| \geq 0$ כלומר $y \geq |d|$ ונחשב את האינטגרל

$$F_D(d) = \int_{|d|}^{\infty}\int_0^{y-|d|} e^{-x}e^{-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{|d|}^{\infty} e^{-y}[-e^{-x}]_{x=0}^{x=y-|d|}\,\mathrm{d}y = \int_{|d|}^{\infty} e^{-y} - e^{|d|}e^{-2y}\,\mathrm{d}y = \left[-e^{-y} + \frac{e^{|d|}}{2}e^{-2y}\right]_{y=|d|}^{y=\infty}$$

$$= \frac{1}{2}e^{-|d|} = \frac{1}{2}e^{d}$$

קודם אינטגרל לפי y ואז לפי x: נשים לב שהתנאי $x-y\le d$ גורר $y\ge x-d$ אבל d שלילי ולכן $y\ge x-d>x\ge 0$ ולכן מכל החישובים ממקודם

$$F_D(d) = \int_0^{\infty}\int_{x-d}^{\infty} e^{-y}e^{-x}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} e^{d}e^{-2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^{d}$$

כמובן שמשפט פוביני שירת אותנו כנדרש כי האינטגרלים בכל החלפה התקבלו כזהים.

ובסך־הכל

$$F_D(d) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{d} & d<0 \\ 1-\frac{1}{2}e^{-d} & d\ge 0 \end{cases}$$

ושוב מהאבחנה אודות פונקציית צפיפות כנגזרת של פונקציית התפלגות מצטברת

$$f_D(d) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{d} & d<0 \\ \frac{1}{2}e^{-d} & d\ge 0 \end{cases} = \frac{1}{2}e^{-|d|}$$

□

שאלה 3

תהיי $a_n = \omega(n)$ (כלומר $\frac{a_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$), יהי $\lambda > 0$ ותהיי $X_n \sim Exp(\lambda)$ סדרה של משתנים מקריים בלתי־תלויים שווי התפלגות. נוכיח בעזרת אי־שיוויון צ'רנוף כי

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq a_n\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

הוכחה: נתזכר את אי־שיוויון צ'רנוף: יהי X משתנה מקרי בעל מומנט מעריכי. אז לכל $t > 0$ עבורו $M_X(t)$ מוגדרת ולכל $a \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq M_X(t)e^{-ta}$$

ראינו כי אם $X \sim Exp(\lambda)$ אז עבור $t < \lambda$ נקבל

$$M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

מהאי־תלות הנתונה נובע כי אם נסמן $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ אז

$$M_{S_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t) = [M_X(t)]^n = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^n$$

אז

$$\mathbb{P}(S_n \geq a_n) \leq e^{-ta_n}\left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^n$$

היות וצד ימין אי־שלילי ניקח לוגריתם ונקבל מימין

$$-ta_n + n\ln\left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right) = -ta_n + n\ln\left(\frac{1}{1 - \frac{t}{\lambda}}\right) = -ta_n - n\ln\left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)$$

נגזור לפי t ונקבל

$$-a_n - n \cdot \frac{1}{1 - \frac{t}{\lambda}} \cdot \left(-\frac{1}{\lambda}\right) = 0 \iff = -a_n + \frac{n}{\lambda - t} = 0 \iff \lambda - t = \frac{a_n}{n} \iff t = \lambda - \frac{n}{a_n}$$

אבל $a_n = \omega(n)$ ולכן $\frac{n}{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ אז $t \to \lambda$, אז

$$-ta_n + n\ln\left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right) = \left(\lambda - \frac{n}{a_n}\right)a_n + n\ln\left(\frac{\lambda}{\frac{n}{a_n}}\right) = -\lambda a_n + n - n\ln\left(\frac{n}{\lambda a_n}\right) = -\lambda a_n + n + n\ln\left(\frac{\lambda a_n}{n}\right) =$$
$$n\left(-\lambda\frac{a_n}{n} + 1 + \ln\left(\lambda\frac{a_n}{n}\right)\right)$$

אבל $\frac{a_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ ולכן מאריתמטיקה של גבולות נקבל

$$n\left(-\lambda\frac{a_n}{n} + 1 + \ln\left(\lambda\frac{a_n}{n}\right)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$$

כלומר

$$\mathbb{P}(S_n \geq a_n) \leq e^{-ta_n}\left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$\square$

שאלה 4

יהיו $\{X_{i,j}\}_{i,j\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ קבוצה של משתנים מקריים בלתי־תלויים ושווי התפלגות כך ש־$X_{i,j}\sim Exp(4)$.
לכל $i,j\in\mathbb{N}$ נגדיר $Y_{i,j}=X_{i-1,j}+X_{i+1,j}+X_{i,j-1}+X_{i,j+1}$.
נוכיח כי

$$\frac{\sum_{i,j=1}^{n}Y_{i,j}}{n^2}\xrightarrow[n\to\infty]{}1$$

הוכחה: ניזכר

$$X_{i,j}\sim Exp(4)\Longrightarrow\mathbb{E}\left(X_{i,j}\right)=\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{4}$$

ולכן מלינארית התוחלת

$$\mathbb{E}\left(Y_{i,j}\right)=\mathbb{E}\left(X_{i-1,j}\right)+\mathbb{E}\left(X_{i+1,j}\right)+\mathbb{E}\left(X_{i,j-1}\right)+\mathbb{E}\left(X_{i,j+1}\right)=4\cdot\frac{1}{4}=1$$

וכן

$$\mathrm{Var}\left(X_{i,j}\right)=\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{16}\Longrightarrow\mathrm{Var}\left(Y_{i,j}\right)=4\cdot\frac{1}{16}=\frac{1}{4}$$

לא ניתן להשתמש בחוק החלש של המספרים הגדולים שכן $Y_{i,j}$ חלקם תלויים!
נסמן $S_n=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}Y_{i,j}$ ואנחנו רוצים לחשב את $\mathrm{Var}(S_n)$ כאשר ממה שחישבנו לעיל נובע כי $\mathbb{E}(S_n)=n^2$ עם לינאריות התוחלת.
ניזכר כי

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y)))$$

אז אם נגדיר

$$\hat{X}\coloneqq X-\mathbb{E}(X),\ \ \hat{Y}\coloneqq Y-\mathbb{E}(Y)$$

אז

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathbb{E}\left(\hat{X}\hat{Y}\right)$$

מקושי־שוורץ ההסתברותי נקבל

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathbb{E}\left(\hat{X}\hat{Y}\right)\leq\sqrt{\mathbb{E}\left(\hat{X}^2\right)\mathbb{E}\left(\hat{Y}^2\right)}$$

אבל

$$\mathbb{E}\left(\hat{X}^2\right)=\mathbb{E}(X-\mathbb{E}(X)^2)=\mathrm{Var}(X)$$

ולכן בפרט

$$|\mathrm{Cov}(X,Y)|\leq\sqrt{\mathrm{Var}(X)\,\mathrm{Var}(Y)}$$

במקרה שלנו נקבל כי לכל $(i,j),(a,b)$ נקבל כי

$$\left|\mathrm{Cov}\left(Y_{i,j},Y_{a,b}\right)\right|\leq\sqrt{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}}=\frac{1}{4}$$

ולכן נוכל לבחור $C=\max\left|\mathrm{Cov}\left(Y_{i,j},Y_{a,b}\right)\right|$.
כעת נשים לב שיש מספר סופי של זוגות שעבורם יש לנו תלות (שכן צריך שיהיה אינדקס אחד משותף לפחות ביניהם) ולכן יש $K+1$ זוגות שלהם השונות המשותפת איננה אפס, אז מהגדרת השונות

$$\mathrm{Var}(S_n)=\sum_{(i,j)}\left(\sum_{(a,b)}\mathrm{Cov}\left(Y_{i,j},Y_{a,b}\right)\right)=\sum_{i,j=1}^{n}(K+1)C=n^2\cdot\hat{C}$$

כאשר $\hat{C}$ הוא קבוע (כי כפלנו קבועים).
אז אם אקח

$$M_n = \frac{S_n}{n^2} \Longrightarrow \operatorname{Var}(M_n) = \operatorname{Var}\left(\frac{S_n}{n^2}\right) \underset{\text{כיול ריבועי}}{=} \frac{1}{n^4}\operatorname{Var}(S_n) \leq \frac{n^2 \cdot \hat{C}}{n^4} = \frac{\hat{C}}{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

אז מאי־שיוויון צ'בישב לכל $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n^2} - 1\right|\right) \leq \frac{\operatorname{Var}(M_n)}{\varepsilon^2} \leq \frac{\hat{C}}{n^2\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

אבל זה בידיוק אומר

$$\frac{\sum_{i,j=1}^{n} Y_{i,j}}{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

כנדרש. $\square$

שאלה 5

תהיי $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ סדרת משתנים מקריים שווי התפלגות ובלתי־תלויים המקיימים $X_i \sim Ber\left(\frac{1}{2}\right)$ ויהי $U \sim Unif([0,1])$.
נראה כי

$$\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} X_i \overset{d}{=} U$$

הוכחה: נגדיר

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} X_i \qquad S_n = \sum_{i=1}^{n} 2^{-i} X_i$$

אנחנו צריכים להראות

$$\forall t \in [0,1],\ \mathbb{P}(S \leq t) = t$$

נשים לב

$$0 \leq S - S_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} 2^{-i} X_i \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} 2^{-i} = 2^{-n}$$

נשים לב שמימין יש לנו זנב של טור גיאומטרי, אז

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} 2^{-i} = 2^{-n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2^{-n+1} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2^{-(n+1)} \cdot 2 = 2^{-n}$$

אז בפרט כאשר $n \to \infty$ נובע כי $S \underset{n\to\infty}{\nearrow} S_n$ וההתכנסות היא כמעט־תמיד.
כעת לכל i מתקיים $X_i \in \{0,1\}$ כי $X_i \sim Ber\left(\frac{1}{2}\right)$ ולכן ערכי S_n הם מתוך הקבוצה $\left\{\frac{k}{2^n} \mid k \in \{0,1,...,2^n-1\}\right\}$.
כעת לכל וקטור $(x_1,...,x_n) \in \{0,1\}^n$ מתקיים מהאי־תלות

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, ..., X_n = x_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

כלומר

$$\mathbb{P}\left(S_n = \frac{k}{2^n}\right) = 2^{-n}$$

יהי $t \in [0,1]$ אז

$$\frac{k}{2^n} \leq t \iff k \leq 2^n t$$

כאשר $k \in \{0,1,...,2^n-1\}$ כלומר אנחנו סופרים כמה מספרים טבעיים מהרשימה לעיל נמצאים בקטע $[0,2^n t]$ ולכן במקרה שלנו יש $\lfloor 2^n t \rfloor + 1$ מספרים טבעיים כאלו, כלומר

$$\mathbb{P}(S_n \leq t) = \frac{\lfloor 2^n t \rfloor + 1}{2^n}$$

אז מההתכנסות כמעט־תמיד

$$\mathbb{P}(S \leq t) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(S_n \leq t) = \lim_{n\to\infty} \frac{\lfloor 2^n t \rfloor + 1}{2^n} = t \Longrightarrow \mathbb{P}(S \leq t) = t$$

נשים לב כי מהיות $U \sim Unif([0,1])$ נובע כי לכל $t \in [0,1]$

$$F_U(t) = t$$

כלומר $S \overset{d}{=} U$, כנדרש. $\square$

שאלה 6

יהי $X \sim Unif([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$ ויהי $Y = \tan(X)$.
נחשב את פונקציית ההתפלגות המצטברת ואת פונקציית הצפיפות של Y.
פתרון: ראשית מהיות $X \sim Unif([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$ נקבל מהגדרה 8.19 של התפלגות אחידה

$$f_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t \leftarrow \frac{\pi}{2} \\ \frac{t+\frac{\pi}{2}}{\pi} & -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2} \\ 1 & t > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

ואנחנו רוצים את

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \le y) = \mathbb{P}(\tan(X) \le y)$$

בקטע $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ הפונקציה $\tan(x)$ היא מונוטונית עולה ממש ורציפה ולכן בלי לפגוע בסימן נקבל

$$\tan(X) \le y \Longleftrightarrow X \le \arctan(y)$$

אז מהחישוב של $F_X(t)$ לעיל נקבל

$$F_Y(y) = \frac{\arctan(y) + \frac{\pi}{2}}{\pi}$$

וכמובן לכל $y \in \mathbb{R}$ מתקיים $\arctan(y) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ולכן הביטוי לעיל מוגדר היטב, אז

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \le y) = \frac{\arctan(y) + \frac{\pi}{2}}{\pi}$$

ואנחנו יודעים ש־$X \sim Unif([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$ בשביל הפונקציית צפיפות אפשר להשתמש באבחנה 8.14 שנגזרת של פונקציית ההסתברות המצטברת היא פונקציית צפיפות והפונקציה שלנו גזירה לכל $y \in \mathbb{R}$ ולכן

$$f_Y(y) = \frac{1}{\pi(1 + y^2)}$$

□

שאלה 7

תהיי $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ סדרת משתנים מקריים בלתי־תלויים בעלי התפלגות אחידה על $[0,1]$.

סעיף א'

נוכיח כי למשתנה המקרי $\frac{1}{X_n}$ אין תוחלת לאף n.

הוכחה: מהיות $X_n \sim Unif([0,1])$ נובע כי $f(x)=1$ עבור $0\le x\le 1$ ו־0 אחרת.

נגדיר $Y=g(X)=\frac{1}{X}$ ואז מטענה 8.31 של תוחלת פונקציה של משתנה מקרי נקבל

$$\mathbb{E}(Y)=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_x(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 \frac{1}{x}\cdot 1\,\mathrm{d}x$$

אבל זה אינטגרל לא אמיתי, אז

$$\mathbb{E}(Y)=\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right)=\lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\lim_{(a\to 0^+)_a^1}=\lim_{a\to 0^+}(\ln(1)-\ln(a))=\infty$$

אז אין תוחלת. $\square$

סעיף ב'

נוכיח שסדרת הממוצעים מקיימת $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{1}{X_i}\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$ כלומר עבור כל $M\in\mathbb{R}$ מתקיים

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{1}{X_i}\ge M\right)\xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

הוכחה: לכל $M>0$ נגדיר

$$\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{1}{X_i}\ge M\right\}\supset\left\{\max_{1\le i\le n}\frac{1}{X_i}\ge Mn\right\}$$

אז מספיק שנראה

$$\mathbb{P}\left(\max_{1\le i\le n}\frac{1}{X_i}\ge M_n\right)\xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

נשים לב

$$\max_{1\le i\le n}\frac{1}{X_i}\ge M_n \iff \min_{1\le i\le n} X_i\le \frac{1}{Mn}$$

כלומר

$$\mathbb{P}\left(\max_{1\le i\le n}\frac{1}{X_i}\ge M_n\right)=\mathbb{P}\left(X_1>\frac{1}{Mn},...,X_n<\frac{1}{Mn}\right)$$

היות וכל $X_i\sim Unif([0,1])$ נובע כי

$$\mathbb{P}\left(X_i>\frac{1}{Mn}\right)=1-\frac{1}{Mn}$$

ומהאי־תלות נקבל

$$\mathbb{P}\left(\max_{1\le i\le n}\frac{1}{X_i}\ge M_n\right)=\left(1-\frac{1}{Mn}\right)^n\xrightarrow[n\to\infty]{} 1-e^{-\frac{1}{M}}$$

אבל לכל $M>0$ מתקיים $1-e^{-\frac{1}{M}}>0$ וכאשר $M\to\infty$ הביטוי שואף ל־1, כלומר לכל $\varepsilon>0$ אפשר לבחור $M>0$ גדול מספיק כך שיתקיים

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{1}{X_i}<M\right)<\varepsilon$$

כלומר

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_i} \geq M\right) > 1-\varepsilon$$

כלומר לכל $M \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_i} \geq M\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

$\square$