פתרון מטלה 06 — אנליזה פונקציונלית, 80417

28 במאי 2025

שאלה 1

יהי $1 \le p < \infty$ ונגדיר את המרחב ℓ^p להיות מרחב הסדרות הממשיות $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ המקיימות $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$ ונגדיר $\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$,
באינפי 3 ראינו שזו נורמה על ℓ^p.

סעיף א'

נוכיח שאם $p \neq 2$ אז $\|\cdot\|_p$ אינה מושרית ממכפלה פנימית על ℓ^p.

הוכחה: נשים לב שהקבלה לטענה שאנחנו מתבקשים להוכיח היא שהנורמה על המרחב $\left(\ell^p, \|\cdot\|_p\right)$ מושרית ממכפלה פנימית אם ורק אם $p = 2$:

$\Leftarrow$ נניח כי הנורמה על המרחב $(\ell^p, \|\cdot\|)$ מושרית ממכפלה פנימית ונראה כי $p = 2$.

מהיות ℓ^p מרחב נורמי, נובע משאלה 4 כי הוא מושרה ממכפלה פנימית אם ורק אם הוא מקיים את כלל המקבילית.

לכן מספיק שניקח $x = (1, 0, 0), y = (0, 1, 0)$ ונשים לב שמתקיים $\|x\| = \|y\| = 1$. מכלל המקבילית מתקיים:

$$\|x + y\|_p^2 + \|x - y\|_p^2 = 2 \cdot 2^{\frac{2}{p}} = 4 = 2 + 2 = 2\|x\|_p^{\frac{2}{p}} + 2\|y\|_p^{\frac{2}{p}} \iff 2^{\frac{2}{p}} = 2 \iff p = 2$$

$\Longrightarrow$ נניח כי $p = 2$ ונראה כי הנורמה על המרחב $(\ell^p, \|\cdot\|)$ מושרית ממכפלה פנימית. יהיו $x = (x_n), y = (y_n) \in \ell^2$ ונגדיר

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$

נראה כי זו אכן מכפלה פנימית:

1. לינאריות ברחיב הראשון: יהיו $x, y, z \in \ell^2$ ו־$\alpha \in \mathbb{R}$, מתקיים:

$$\langle \alpha x + y, z\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha x_n + y_n)z_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} x_n z_n + \sum_{n+1}^{\infty} y_n z_n = \alpha\langle x, z\rangle + +\langle y, z\rangle$$

2. סימטרייה: ישיר
3. אי־שליליות:

$$\infty > \langle x, x\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 \ge 0$$

וכמובן $x = 0 \iff \langle x, x\rangle = 0$ והביטוי לעיל קטן מאינסוף כי אנחנו ב־ℓ^2.

ולכן זו אכן מכפלה פנימית, ולכן היא מקיימת את כלל המקבילית והנורמה:

$$\|x\|_2 = \sqrt[2]{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2} = \sqrt[2]{\langle x,x\rangle}$$

נורמה על ℓ^2 המושרית ממכפלה פנימית. $\square$

סעיף ב'

נוכיח שנורמת ∞ על המרחב $C[a, b]$ אינה מושרת ממכפלה פנימית.

הוכחה: בלי הגבלת הכלליות נבחן את $C[0, 1]$ (שאר המקרים יתקבלו על־ידי מתיחה והזזה של פונקציות).

נגדיר

$$f(x) = x, g(x) = 1 - x$$

מתקיים

$$\|f\|_{\infty}^2 = 1 = \|g\|_{\infty}^2$$

וגם מתקיים

$$f + g = x + 1 - x = 1,\ \ f - g = x - 1 + x = 2x - 1$$

ואז

$$\|f+g\|_\infty^2 = 1,\ \ \|f-g\|_\infty^2 = 1$$

אבל אם נורמת ∞ הייתה מושרית ממכפלה פנימית, היא הייתה מקיימת את תנאי המקבילית, אבל

$$2\big(\|f\|^2+\|y\|^2\big) = 2(1+1) = 4 \neq 2 = 1+1 = \|f+g\|^2+\|f-g\|^2$$

ולכן נורמת ∞ על המרחב $C[0,1]$ לא מושרית ממכפלה פנימית. $\square$

שאלה 2

יהי $(H,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ מרחב מכפלה פנימית ו־$x,(x_k)_{k=1}^{\infty}\in H$.

סעיף א'

נראה כי אם $\|x_k\|\to\|x\|$ וגם $\langle x,x_k\rangle\to\langle x,x\rangle$ אז $x_k\to x$.

הוכחה: מתקיים

$$\begin{aligned}
\|x-x_k\| &\underset{\text{הגדרה}}{=} \langle x-x_k,x-x_k\rangle \\
&\underset{\text{אדיטיביות}}{=} \langle x-x_k,x\rangle+\langle x-x_k,-x_k\rangle \\
&\underset{\text{הרמיטיות}}{=} \overline{\langle x,x-x_k\rangle}+\overline{\langle -x_k,x-x_k\rangle} \\
&\underset{\text{אדיטיביות}}{=} \overline{\langle x,x\rangle}+\overline{\langle x,-x_k\rangle}-\overline{\langle x_k,x\rangle}-\overline{\langle x_k,-x_k\rangle} \\
&= \|x\|^2-\langle x_k,x\rangle-\overline{\langle x_k,x\rangle}+\|x_k\|^2 \\
&\underset{k\to\infty}{=} \|x\|^2-\langle x,x\rangle-\overline{\langle x,x\rangle}+\|x\|^2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

ולכן $x_k\to x$. □

סעיף ב'

תהיי $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ מערכת אורתונורמלית. נראה כי הסדרה $y_k=\langle e_k,x\rangle e_k$ מתכנסת.

הוכחה: מאי־שיוויון בסל נקבל

$$\|x\|\geq\sum_{k=1}^{\infty}|\langle e_k,x\rangle|^2$$

טור ממשי מתכנס בהחלט אם (תנאי הכרחי אך לא מספיק) מתקיים $|\langle e_k,x\rangle|^2\to 0$ ולכן $\langle e_k,x\rangle\to 0$.

אז מתקיים $\|y_k\|=\|\langle e_k,x\rangle\cdot e_k\|=|\langle e_k,x\rangle|\cdot\underbrace{\|e_k\|}_{=1}\to 0$.

אבל אז גם $\langle y_k,0\rangle=0$ לכל $k\in\mathbb{N}$ מהומגניות המכפלה הפנימית ומסעיף א' נקבל $y_k\to 0$. □

שאלה 3

נוכיח שהבסיס הסטנדרטי הוא מערכת אורתונורמלית שלמה ב־ℓ^2, כלומר קבוצת הסדרות e_k ששוות ל־1 במקום ה־k ו־0 אם אחרת.

הוכחה: לכל $n \in \mathbb{N}$ מהגדרת הבסיס הסטנדרטי מתקיים

$$\|e_m\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |e_n|_k^2} = \sqrt{|1|^2} = 1$$

ולכל $n \neq m$ מתקיים

$$\langle e_n, e_m \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} (e_n)_k \overline{(e_m)_k} = 0$$

שכן $e_m = \left(0, ..., 0, \underbrace{1}_{\text{המקום ה־}m}, 0, ..., 0\right), e_n = \left(0, ..., 0, \underbrace{1}_{\text{המקום ה־}n}, 0, ..., 0\right)$ ולכן זה אכן בסיס אורתונורמלי.

נשאר להראות שלמות; יהי $x = (x_1, x_2, ...) \in \ell^2$ נשים לב שזה שקול לביטוי $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_n e_n$, נראה שהטור מתכנס

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n e_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$$

אבל $x \in \ell^2$ ולכן הסדרה מתכנסת ולכן הסדרה $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n e_n) \to x$ בנורמת ℓ^2, בפרט זה אומר ש־$\overline{\mathrm{Span}\{e^k \mid k \in \mathbb{N}\}} = \ell^2$, וראינו שמערכת אורתונורמלית שלמה היא מערכת אורתונורמלית שהסגור של הספאן שלה הוא כל המרחב וזה מסיים. $\square$

שאלה 4

יהי $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ מרחב מכפלה פנימית.

סעיף א'

נראה כי נורמה שמושרית ממכפלה פנימית מקיימת את חוק המקבילית: לכל $x, y \in H$ מתקיים

$$2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2$$

הוכחה: נניח כי הנורמה $\|\cdot\|$ מושרית ממכפלה פנימית ונראה כי היא מקיימת את כלל המקבילית.
מתקיים מהגדרה:

$$\begin{aligned}
\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle + \langle x - y, x - y \rangle \\
= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle + \langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle &= 2\langle x, x \rangle + 2\langle y, y \rangle \\
&= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2
\end{aligned}$$

□

סעיף ב'

נוסחאות הפולריזציה.

תת־סעיף א'

נניח ש־H מרחב מכפלה פנימית ממשי. נראה שלכל $x, y \in H$ מתקיים

$$\langle x, y \rangle = \frac{\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2}{4}$$

הוכחה: מכיוון ש־H מרחב מכפלה פנימית ממשי נובע $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ ולכן מתקיים

$$\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle - \big(\|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y \rangle\big) = 4\langle x, y \rangle \Rightarrow \langle x, y \rangle = \frac{\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2}{4}$$

□