פתרון מטלה 08 — פונקציות מרוכבות, 80519

31 בדצמבר 2025

שאלה 1

סעיף א'

עבור $z_0 \in G$ התבוננו בכדור ברדיוס $r > 0$ קטן מספיק כך ש־$B_r(z_0) \subseteq G$ והגדרנו

$$F(z) = \int_{[z_0,z]} f(w)\,\mathrm{d}w$$

נוכיח ש־F אכן הולומורפית וש־$F' = f$ בכדור הזה.

הוכחה: יהי $z \in B_r(z_0)$, עבור h קטן דיו, $z + h \in B_r(z_0)$ ובגלל ש־$B_r(z_0)$ זה כדור, נסתכל על המשולש שקודקודיו הם $z_0, z, z+h$ מוכל לחלוטין בכדור $B_r(z_0)$ וממשפט קושי למשולש ומלינאריות האינטגרל

$$\int_{[z_0,z]} f(w)\,\mathrm{d}w + \int_{[z,z+h]} f(w)\,\mathrm{d}w + \int_{[z+h,z_0]} f(w)\,\mathrm{d}w = 0$$

ומהגדרת $F(z)$ נקבל

$$F(z+h) - F(z) = \int_{[z,z+h]} f(w)\,\mathrm{d}w \iff \frac{F(z+h)-F(z)}{h} = \frac{1}{h}\int_{[z,z+h]} f(w)\,\mathrm{d}w$$
$$\iff \frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z) = \frac{1}{h}\int_{[z,z+h]} (f(w)-f(z))\,\mathrm{d}w$$

שכן

$$\int_{[z,z+h]} f(z)\,\mathrm{d}w = [f(z)\cdot w]_{w=z}^{w=z+h} = f(z)\cdot h$$

אבל f הולומורפית ולכן רציפה ב־z ולכן לכל $\varepsilon > 0$ יש $\delta > 0$ כך שלכל w המקיים $|w-z| < \delta$ מתקיים $|f(w)-f(z)| < \varepsilon$.
אז אם נבחר $|h| < \delta$, לכל w על הקטע $[z, z+h]$ מתקיים $|w-z| < |h|$ ונקבל

$$\left|\frac{1}{h}\int_{[z,z+h]} (f(w)-f(z))\,\mathrm{d}w\right| \le \frac{1}{|h|}\cdot\varepsilon\cdot L([z,z+h]) = \frac{\varepsilon\cdot|h|}{|h|} = \varepsilon$$

כלומר כאשר $h \to 0$ הגבול שואף ל־0, כלומר בידיוק מתקיים $F'(z) = f(z)$ לכל z ולכן F גזירה במובן המורכב.
בנוסף, F היא גזירה במובן במובן המורכב בכל נקודה בכדור ולכן היא הולומורפית. $\square$

סעיף ב'

הפונקציה F בסעיף הקודם הוגדרה רק בכדור $B_r(z_0)$ ותלויה בנקודה z_0 ונסביר למה זה אומר שיש פונקציה קדומה ל־f בכל G.

הוכחה: נעזר ברמז.
אם לכל $\triangle \subseteq G$ מתקיים $\int_{\partial\triangle} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ אז בפרט נובע שהאינטגרל יהיה 0 על כל קו פוליגונלי סגור P כי כל פוליגון יכול להתפרק למספר סופי של משולשים כפי שראינו בהוכחה של משפט קושי אז

$$\int_{\partial P} f \underset{\text{לינאריות האינטגרל}}{=} \sum \int_{\partial\triangle_j} f = 0$$

אבל אם האינטגרל הוא אפס לכל קו פוליגוני סגור אז הוא אפס גם עבור מסילה סגורה ב־C^1 ממשפט הקירוב הפוליגונלי, כי כל עקומה כזאת ניתנת לקירוב על־ידי עקומות פוליגונליות בתחום ו־f רציפה אז אינטגרלים על המסילות האלו מתכנסים לאינטגרל על העקומה המקורית, כלומר לכל γ עקומה גזירה למקוטעין וסגורה מתקיים

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

בפרט נובע שאם γ_1, γ_2 שתיהן מסילות סגורות מ־z_0 ל־z אז

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z$$

כי החיסור שלהן הוא עקומה סגורה ולכן

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1-\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

כלומר העקומות הן בלתי־תלויות.

אז נקבע $z_0 \in G$ ולכל $z \in G$ נגדיר

$$F(z) := \int_\gamma f(w)\,\mathrm{d}w$$

כאשר γ היא מסילה גזירה למקוטעין בין z_0 ל־z ו־F מוגדרת היטב (כי המסילות בלתי־תלויות ומוגדרת לכל $z \in G$).

מהסעיף הקודם אנחנו מקבלים ש־$F'(z) = f(z)$ שכן עבור $z \in G$ נבחר $r > 0$ כך ש־$B_r(z) \subseteq G$ ונקבל עבור h קטן דיו

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h}\int_{[z,z+h]} f(w)\,\mathrm{d}w \xrightarrow[h\to 0]{} f(z)$$

שכן f רציפה, ולכן $F'(z) = f(z)$.

כלומר ההגדרה הגלובאלית (ההפך מלוקאלית) שעשינו ל־F משתמשת בעובדה שהמסילות בלתי־תלויות כדי "להדביק" אותן מהמקרה הלוקאלי.

מותר לנו לעשות את המהלכים הללו כי G הוא תחום ולכן קשיר. $\square$

שאלה 2

בשאלה זו נחקור את שארית הטיילור של טורי טיילור מרוכבים.

תהיי $f \in \mathrm{Hol}(B_r(z_0))$ ורציפה בשפה של הכדור ונסמן את שארית טור הטיילור מסדר k סביב z_0 על־ידי

$$R_k(z) = f(z) - \sum_{n=0}^{k} \frac{f^n(z_0)}{n!}(z-z_0)^n = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{f^n(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

סעיף א'

נוכיח שלכל $z \in B_r(z_0), w \in \partial B_r(z_0)$ מתקיים

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n$$

הוכחה: ראשית מתקיים

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-z_0)-(z-z_0)} = \frac{1}{w-z_0} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}} \quad (\star)$$

בנוסף מהיות $z \in B_r(z_0), w \in \partial B_r(z_0)$ נובע כי

$$\left|\frac{z-z_0}{w-z_0}\right| = \frac{|z-z_0|}{|w-z_0|} < \frac{r}{r} = 1$$

ולכן אם נגדיר $q := \frac{z-z_0}{w-z_0} \in \mathbb{C}$ נקבל כי $|q| < 1$.

אבל אם $|q| < 1$ אנחנו יודעים מטור הנדסי

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \implies \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n$$

אבל מ־$(\star)$ נקבל בהצבה

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n$$

$\square$

סעיף ב'

נוכיח כי לכל $z \in B_r(z_0)$ מתקיים

$$R_k(z) = \frac{(z-z_0)^{k+1}}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)(w-z_0)^{k+1}} \, \mathrm{d}w$$

כאשר $\gamma = \partial B_r(z_0)$, חד־חד ערכית ומתקדמת נגד כיוון השעון.

הוכחה: ראשית, נתחיל מלהרחיב את התוצאה של הסעיף הקודם:

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{k} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}$$

ונבחן את טור הזנב

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} \underset{m=n-(k+1)}{=} \frac{(z-z_0)^{k+1}}{(w-z_0)^{k+1}} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^m$$

אבל שוב כמו הסעיף הקודם בגלל שיש לנו טור הנדסי

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^m = \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}} = \frac{w-z_0}{w-z}$$

כלומר

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} = \frac{(z-z_0)^{k+1}}{(w-z_0)^{k+1}} \cdot \frac{w-z_0}{w-z} = \frac{(z-z_0)^{k+1}}{(w-z)(w-z_0)^{k+1}}$$

ובסך־הכל

$$\frac{1}{w-z} = \sum_{n=0}^{k} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} + \frac{(z-z_0)^{k+1}}{(w-z)(w-z_0)^{k+1}}$$

אבל מהסעיף הקודם אם נפרק לסכום של הטור וסכום של השארית

$$\frac{1}{w-z} = \frac{(z-z_0)^{k+1}}{(w-z)(w-z_0)^{k+1}} + \sum_{n=0}^{k} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}$$

נסמן תוצאה זו ב־$(\star)$.

כעת, לכל $z \in B_r(z_0)$ מנוסחת האינטגרל של קושי מתקיים

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(w) \cdot \frac{1}{w-z}\,\mathrm{d}w \underset{(\star)}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(w) \cdot \left(\frac{(z-z_0)^{k+1}}{(w-z)(w-z_0)^{k+1}} + \sum_{n=0}^{k} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} \right) \mathrm{d}w \\ &\underset{\text{לינארית האינטגרל}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(w) \sum_{n=0}^{k} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}w + \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(w) \frac{(z-z_0)^{k+1}}{(w-z)(w-z_0)^{k+1}}\,\mathrm{d}w \\ &\underset{\substack{\text{הוצאת קבועים} \\ \text{והטור מתכנס במידה שווה} \\ \text{הסבר למטה ב־}(\star)}}{=} \sum_{n=0}^{k} (z-z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}w + \frac{(z-z_0)^{k+1}}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)(w-z_0)^{k+1}}\,\mathrm{d}w \end{aligned}$$

אבל מנוסחת האינטגרל של קושי אודות הנגזרת אנחנו יודעים שמתקיים

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}w = \frac{f^n(z_0)}{n!}$$

אבל זה בידיוק המחובר הראשון בסכום לעיל וזה בידיוק הפולינום טיילור מסדר k, אבל זה בידיוק אומר שכל השאר זה השארית, כלומר

$$R_k(z) = \frac{(z-z_0)^{k+1}}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)(w-z_0)^{k+1}}\,\mathrm{d}w$$

$(\star)$ נסביר למה הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}$ מתכנס במידה שווה לכל $w \in \gamma$:

יהי $z \in B_R(z_0)$ ונגדיר $\rho := |z-z_0| < r$ ולכל $w \in \gamma = \partial B_r(z_0)$ מתקיים $|w-z_0| = r$, אז

$$\left| \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} \right| = \frac{|z-z_0|^n}{|w-z_0|^{n+1}} = \frac{\rho^n}{r^{n+1}} = \frac{1}{r} \left(\frac{\rho}{r} \right)^n$$

אבל אם נגדיר

$$M_n := \frac{1}{r} \left(\frac{\rho}{r} \right)^n$$

מהיות $\rho < r$ נקבל

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_n = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{r} \right)^n < \infty$$

אבל זה בידיוק אומר ממבחן ה־M של ויירשטראס שהטור שלנו מתכנס ומתכנס בהחלט לכל $w \in \gamma$, כלומר

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} < \infty$$

אבל בגלל שהטור מתכנס בהחלט על γ אפשר לשנות סדר סכימה ואינטגרציה, כלומר המעבר שעשינו מקודם חוקי. $\square$

סעיף ג'

נסיק כי

$$|R_k(z)| \le \frac{|z-z_0|^{k+1}}{r-|z-z_0|r^k} \cdot \max_{|w-z_0|=r}|f(w)|$$

הוכחה:

$$\begin{aligned}
|R_k(z)| &\underset{\text{סעיף קודם}}{=} \left|\frac{(z-z_0)^{k+1}}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)(w-z_0)^{k+1}}\,\mathrm{d}w\right| \\
&= \frac{|z-z_0|^{k+1}}{2\pi}\left|\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)(w-z_0)^{k+1}}\,\mathrm{d}w\right| \\
&\underset{\text{ML}}{\le} \frac{|z-z_0|^{k+1}}{2\pi} \underbrace{L(\gamma)}_{L(\gamma)=L(\partial B_r(z_0))=2\pi r} \cdot \max_{w\in\gamma}\left|\frac{f(w)}{(w-z)(w-z_0)^{k+1}}\right| \\
&= |z-z_0|^{k+1} r \cdot \max_{w\in\gamma}\frac{|f(w)|}{|w-z|\cdot|w-z_0|^{k+1}} \\
&\underset{(\star)}{\le} \left(r\cdot\max_{w\in\gamma}\frac{|f(w)|}{|w-z|}\right)\left(\frac{|z-z_0|}{r}\right)^{k+1} \\
&\underset{(\star\star)}{\le} \left(\frac{r}{r-|z-z_0|}\cdot\max_{|w-z_0|=r}|f(w)|\right)\left(\frac{|z-z_0|}{r}\right)^{k+1}
\end{aligned}$$

כאשר ML זו טענה 4.12 בסיכומי הרצאות של עדי ו־$(\star)$ נובע מהיות

$$|w-z_0| = r \implies |w-z_0|^{k+1} = r^{k+1}$$

ולכן

$$|z-z_0|^{k+1} r\cdot\max_{w\in\gamma}\frac{|f(w)|}{|w-z|\cdot|w-z_0|^{k+1}} = |z-z_0|^{k+1} r\max_{w\in\gamma}\frac{|f(w)|}{|w-z|r^{k+1}} = \frac{|z-z_0|^{k+1}}{r^k}\max_{w\in\gamma}\frac{|f(w)|}{|w-z|}$$

אחרון חביב $(\star\star)$ נובע מהיות

$$|w-z| = |(w-z_0)-(z-z_0)| \ge ||w-z_0|-|z-z_0|| \underset{|w-z_0|=r}{\implies} |w-z| \ge r-|z-z_0| \implies \frac{1}{|w-z|} \le \frac{1}{r-|z-z_0|}$$

ולכן אי־השיוויון הנדרש מתקיים. $\square$

שאלה 3

תהיי $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות שלמות. נסמן ב־a_n^k את המקדם ה־n בפיתוח הטיילור של הפונקציה f_k סביב הראשית, כלומר $f_k = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^k z^n$.

סעיף א'

נוכיח שאם f_k מתכנסות במידה שווה מקומית לפונקציה f אז $a_n^k \to a_n$ כאשר $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

הוכחה: תזכורת לעצמי: התכנסות במידה שווה מקומית משמע לכל נקודה יש סביבה שבה f_k מתכנסת במידה שווה ל־f, כלומר לכל $R > 0$

$$\overline{B_R(0)} = \{z \mid |z| \leq R\}$$

אז $f_k \to f$ במידה שווה על $\overline{B_R(0)}$.

מנוסחת האינטגרל של קושי, לכל $R > 0$ מתקיים

$$a_n^k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f_k(z)}{z^{n+1}} \, \mathrm{d}z, \qquad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{z^{n+1}} \, \mathrm{d}z$$

ונתבונן

$$a_n^k - a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f_k(z)}{z^{n+1}} \, \mathrm{d}z - \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{z^{n+1}} \, \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f_k(z) - f(z)}{z^{n+1}} \, \mathrm{d}z$$

אבל $|z| = R$ זה תחום קומפקטי, כלומר לכל $\varepsilon > 0$ קיים K כך שלכל $k > K$ ולכל w על העיגול $|z| = R$ מתקיים

$$|f_k(w) - f(w)| < \varepsilon$$

אבל מאי־שיוויון ML שראינו בהרצאה (טענה 4.12 בסיכומי ההרצאה של עדי)

$$\left|a_n^k - a_n\right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \max_{|z|=R} \left| \frac{f_k(z) - f(z)}{z^{n+1}} \right| \cdot (2\pi R) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{R^{n+1}} \max_{|z|=R} |f_k(z) - f(z)| \cdot (2\pi R) = \frac{1}{R^n} \max_{|z|=R} |f_k(z) - f(z)|$$

אבל $f_k \to f$ במידה שווה מקומית על $|z| \leq R$, כלומר

$$\max_{|z|=R} |f_k(z) - f(z)| \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$$

ובפרט נובע מכך שלכל $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ מתקיים

$$\left|a_n^k - a_n\right| \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$$

אז מאי־שיוויון המשולש (האינטגרלי/ערך מוחלט)

$$\left|a_n^k - a_n\right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=R} \frac{|f_k(z) - f(z)|}{|z^{n+1}|} \, \mathrm{d}z$$

□

סעיף ב'

נביא דוגמה נגדית: אם $a_n^k \to a_n$ אז f_k לא מתכנסת במידה שווה מקומית לפונקציה $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ בתחום שבו הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ מתכנס.

הוכחה: נגדיר

$$f_k(z) := k z^k$$

אז פיתוח טיילור סביב הראשית יהיה

$$f_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^k z^n$$

כאשר

$$a_n^k = \begin{cases} k & n = k \\ 0 & n \neq k \end{cases}$$

כלומר לכל n $k >$ ממתקיים $a_n^k = 0$ כלומר $0 \xrightarrow[k\to\infty]{} a_n^k$ ולכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_n = 0$, כלומר

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = 0$$

נסתכל על

$$K \coloneqq \{z \mid |z| \leq 1\}$$

זו קבוצה קומפקטית כי סגורה וחסומה אבל

$$\sup_{|z|\leq 1} |f_k(z)| = \sup_{|z|\leq 1} k|z|^k = k$$

כלומר

$$\sup_{|z|\leq 1} |f_k(z) - 0| = k \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$$

אז f_k לא מתכנסת במידה שווה על K או בצורה מקומית באף סביבה של הראשית ולכן זו סתירה. $\square$

שאלה 4

במשפט היחידות השני הנחנו שקיימת סדרה z_n המתכנסת לנקודה $z_0 \in G$.
נקבע האם חשוב שהנקודה z_0 היא פנימית, כלומר נקבע האם המשפט נכון כאשר z_n מתכנסת לנקודה על השפה.
הוכחה: נטען כי z_0 חייבת להיות נקודה פנימית: נסתכל על התחום G שהוא החצי מישור העליון כאשר $Re(z) > 0$ ונגדיר

$$f(z) = \sin\left(\frac{1}{z}\right)$$

זו פונקציה הולומורפית בחצי מישור העליון ומתקיים

$$f(z) = 0 \iff \frac{1}{z} = n\pi$$

כלומר הסדרה $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ הנתונה על־ידי $z_n = \frac{1}{n\pi}$ מקיימת ש־$(z_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq G$.
מצד שני, $z_0 = \lim_{n\to\infty} z_n = 0$ ולכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $f(z_n) = 0$ אבל $f \not\equiv 0$!
זאת לא סתירה למשפט כי 0 היא נקודה סינגולרית עיקרית (לא סליקה ולא קוטב) של f ולכן f לא ניתנת להמשכה אנליטית בה. $\square$