פתרון מטלה 05-8 אנליזה פונקציונלית,

2025 במאי 21



 $.T\big(x^k\big)=\frac{1}{k+1}$ מתקיים $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ שלכל ונניה עציף לינארי פונקציונל פונקציונל ד $T:C[0,1]\to\mathbb{R}$ יהי נוכיח שלכל לינארים מתקיים $f\in C[0,1]$

$$T(f) = \int_0^1 f(x)dx$$

הירשטראס. באמצעות משפט הקירוב $f\in C[0,1]$ אותה עבור פונקציה מכן נוכיח אל הקירוב של ויירשטראס. בורים פולינומים את הטענה את בור פולינומים לוכיח אותה עבור $p=\sum_{i=0}^n a_i x^i$ באמצעות משפט הקירוב עבור יידי $p=\sum_{i=0}^n a_i x^i$

$$T(p) = Tigg(\sum_{i=0}^n a_i x^iigg)$$
 יינארי $T(p) = Tigg(\sum_{i=0}^n a_i x^iigg)$ פונקציונל לינארי $T(p) = Tigg(\sum_{i=0}^n a_i x^iigg)$

מצד שני, מתקיים

$$T(p) = \int_0^1 \sum_{i=0}^n a_i x^i = \sum_{i=0}^n a_i \int_0^1 x^i = \sum_{i=0}^n a_i \cdot \left[\frac{x^{i+1}}{i+1} \right]_0^1 = \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{i+1} = T(p)$$

עכך $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ קיים סדרת פולינומים לכל כל פר ויירשטראס הקירוב של הקירום אז ממשפט הקירום והיירשטראס אז הטענה נכונה עבור פולינומים. יהי $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ ממשפט הקיים אז הטענה נכונה עבור אז הטענה אז הטענה משפט הקיים משפט הקיים משפט הקיים אז הטענה ווירשטראס אז הטענה ביירשטראס אז הטענה עבור פולינומים. אז הטענה עבור פולינומים אז הטענה אז הטענה עבור פולינומים אז הטענה אז הטענה עבור פולינומים אז הטענה בייר פולינומים אז הטענה עבור פולינומים אז הטענה עבור פולינומים אז הטענה עבור פולינומים אז הטענה בייר פולינומים אז הטענה עבור פולינומים ווידים אז הטענה בייר פולינומים אז הטענה בייר פולינומים בייר פולי

$$|f(x)-p_n(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

כך שיתקיים קיים אוה קיים קיים קיים קיים פונקציונל משמע חסום, הוא ולכן לינארי פונקציונל כעת, כעת, די חסום, משמע לכן אולכן לינארי ולכן שיתקיים פונקציונל לינארי ו

$$|T(g)| \leq M \|g\|_{\infty} \underset{(f-p_n)}{\Rightarrow} |T-p_n| \leq M \|f-p_n\|_{\infty}$$

מתקיים $N' < n \in \mathbb{N}$ כך שלכל א $N' \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$\left\|f-p_n\right\|_{\infty}<\frac{\varepsilon}{2M}\Rightarrow |T-p_n|\leq M\frac{\varepsilon}{2M}=\frac{\varepsilon}{2}$$

מתקיים $N_{\mathrm{max}} < n \in \mathbb{N}$ ולכל ו $N_{\mathrm{max}} = \mathrm{max}\{N, N'\}$ נבחר

$$|f(x)-p_n(x)|<\varepsilon,\ |T(f-p_n)|<\varepsilon$$

ולכן מתקיים

$$\left|T(f)-\int_0^1 f(x)dx\right| = \left|T(f)-T(p_n)+T(p_n)-\int_0^1 f(x)dx\right| = \left|T(f)-T(p_n)-\int_0^1 p_n(x)dx-\int_0^1 f(x)dx\right|$$

$$= \left|T(f)-T(p_n)+\int_0^1 (p_n(x)-f(x))dx\right| \leq |T(f)-T(p_n)|+\int_0^1 |p_n(x)-f(x)|dx$$

$$\lim_{x\to \infty} \lim_{x\to \infty} |T(f-p_n)|+\int_0^1 |p_n(x)-f(x)|dx < \frac{\varepsilon}{2}+\int_0^1 \frac{\varepsilon}{2}dx = \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

אז רחד־הרל לרל 0 > 0 אחהיים

$$0 \leq \left| T(f) - \int_0^1 f(x) dx
ight| < arepsilon \Rightarrow 0 \leq \left| T(f) - \int_0^1 f(x) dx
ight| \leq 0 \underset{ ext{centr}}{\Rightarrow} \left| T(f) - \int_0^1 f(x) dx
ight| = 0$$

זאת־אומרת

$$T(f) = \int_0^1 f(x)dx$$

בורמה לאפרים אסתקיים קרימת סדרת קרימת שאוסף שלכל (בורמה C^k בנורמה בנורמה בנורמה עלינומים הפולינומים במרחב בנורמה כלומר, בנורמה כלומר, כלומר, בנורמה בנורמה בנורמה במרחב בנורמה בנורמה במרחב בנורמה בנורמה במרחב בנורמה בנורמה

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^k\left\|f^{(j)}-p_n^{(j)}\right\|_\infty=0$$

 $\cdot k$ אינדוקציה על הוכחה: באינדוקציה

. האינדוקציה. בסיס את מכסה וזה לב שירוב של הקירוב משפט בעצם את הכסה לב שעבור לב לב משפט הקירוב או הינדוקציה.

 $\lfloor k \rfloor$ ננים שהטענה נכונה עבור k-1 ונרצה להראות נכונות עבור

כך שמתקיים ($q_n\}_{n=1}^\infty$ בדוקציה קיימת האינדוקציה ומהנחת ואז האינדו $f\in C^{k-1}[0,1]$ ואז וואז ואז $\varepsilon>0$ יהי

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{k-1} \left\| f^{(j)} - q_n^{(j)} \right\|_{\infty} = 0 \Longleftrightarrow \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{k} \left\| f^{(j-1)} - q_n^{(j-1)} \right\|_{\infty}$$

 $x \in [0,1]$ רו ויר לכל אז נגדיר לכל אז נגדיר לכל

$$p_n(x)\coloneqq f(0)+\int_0^x q_n(t)dt$$

כמובן ש־ $p_n(x)'=q_n(x)$ בפרט, לכל של פולינום בפרט, לכל פולינום ומתקיים (אינטגרל של פולינום אינטגרל של פולינום פולינום פולינום פולינום אינטגרל פולינום ווא פולינום פולינום פולינום אינטגרל פולינום אינטגרל של פולינום ווא פולינום פולינום פולינום אינטגרל של פולינום ווא פולינום ווא פולינום פולינום פולינום ווא פולינום ווא פולינום ווא פולינום פולינום פולינום פולינום ווא פולינום פולינום

$$p_n^{(j)}(x)=q_n^{(j-1)}(x)<\frac{\varepsilon}{2}$$

וזה גורר שמתקיים

$$\sum_{j=1}^k \left\|f^{(j)} - q_n^{(j-1)}\right\|_\infty = \sum_{j=1}^k \left\|f^{(j)} - p_n^{(j)}\right\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$$

נשים לב שמתקיים

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt = f(0) + f(x) - f(0) = f(x)$$

ואז מתקיים

$$\begin{split} |f(x)-p_n(x)| &= \left|f(0) + \int_0^x f'(t)dt - \left(f(0) + \int_0^x q_n(t)dt\right)\right| \\ &= \left|\int_0^x (f'(t)-q_n(t))dt\right| \leq \int_0^x |f'(t)-q_n(t)|dt \underset{\text{finded pair princes}}{\leq} \int_0^x \sum_{j=1}^k \left\|f^{(j)}-q_n^{(j-1)}\right\|_\infty dt \leq \int_0^x \frac{\varepsilon}{2}dt = \frac{\varepsilon}{2} \end{split}$$

מתקיים $N < n \in \mathbb{N}$ לכל לכל ,
 $\|f - p_n\|_{\infty} < \frac{\varepsilon}{2}$ מתקיים ולכן ולכן ולכן

$$\sum_{j=0}^{k}\left\|f^{(j)}-p_{n}^{(j)}\right\|_{\infty}=\sum_{j=1}^{k}\!\left\|f^{(j)}-p_{n}^{(j)}\right\|+\left\|f-p_{n}\right\|_{\infty}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

משמע מתקיים

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^k \left\| f^{(j)} - p_n^{(j)} \right\|_{\infty} = 0$$

 C^k בנורמה במרחב מפוף במרחב בנורמה אז קיבלנו שאוסף הפולינומים צפוף במרחב

נוכיח $W = \mathrm{Span}\{x, x^2, x^3, ...\}$ נוכיח עם נורמת עם נורמת במרחב נתבונן במרחב C[0,1]

$$\overline{W} = \{ f \in C[0,1] \mid f(0) = 0 \}$$

. אפס. מקדם עם מקדם שווה של פולינומים במידה שווה $f:[0,1] o \mathbb{R}$ היא אבס. כלומר, שאם

ומתקיים משמע $p_n
ightharpoonup f$ משמע המתכנסת פולינומים סדרת $\{p_n\}_{n=1}^\infty \subseteq W$ ותהיי ותהיי ותהיי הראשון, תהיי וווה הראשון, תהיי ותהיי וווה $f \in C[0,1]$ משמע וווה הווו $m_{n o \infty}$ ומתקיים וווח $m_{n o \infty}$

שבל שר ההתכנסות במידה שווה, מכך שי f(0)=0 משמע $p_n(0)=0$ ולכן $W=\mathrm{Span}\{x,x^2,...\}$ כי $n\in\mathbb{N}$ לכל $x\mid p_n$ אבל $\overline{W}\subseteq\{f\in C[0,1]\mid f(0)=0\}$ עבור $f\in\overline{W}$ ומתקבלת ההכלה $f\in\overline{W}$ ולכן f(0)=0 כך שר $f\in C[0,1]$ עבור f(0)=0 עבור ההכלה בכיוון השני, יהי $f\in C[0,1]$ ותהיי $f\in C[0,1]$ ולכן שר $f\in C[0,1]$ עבור ההכלה בכיוון השני, יהי $f\in C[0,1]$ ולכן שר שר $f\in C[0,1]$ מומתקבלת השני, יהי שר $f\in C[0,1]$ יהי שר שר במידה שווה, מכך שר במידה שר במידה שר במידה שווה, מכך שר במידה שר במידה שר במידה שווה, מכך שר במידה שר במיד

מתקיים $N < n \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N \in \mathbb{N}$ משמע קיים $p_n \Rightarrow f$ כך עך כך $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ מתקיים סדרת סדרת סדרת פולינומים

$$\left\|f(x)-p_n(x)\right\|_{\infty}<\frac{\varepsilon}{2}$$

ולכן $q_n(0)=p_n(0)-p_n(0)=0$ על־ידי ומתקיים ולכן פולינומים ולכן פולינומים $q_n(x)=p_n(x)-p_n(0)$ על־ידי על־ידי ולכן $q_n(0)=q_n(0)-q_n(0)=0$ אה הפרש פולינומים ולכן פולינום ומתקיים ולכן על־ידי ולכן $q_n(0)=p_n(0)-p_n(0)=0$ אולכן פולינום ומתקיים ולכן על־ידי ולכן פולינום ומתקיים ולכן פולינום ומתקיים ולכן על־ידי ולכן פולינום ומתקיים ומ

מתקיים $x \in [0,1]$ לב שלכל ונשים היים, $f \in \overline{W}$ מתקיים

$$\begin{aligned} |q_n(x) - f(x)| &= |p_n(x) - p_n(0) - f(x)| = |p_n(x) - f(x) - (p_n(0) - 0)| = |p_n(x) - f(x) - (p_n(0) - f(0))| \\ &\leq |p_n(x) - f(x)| + |p_n(0) - f(0)| \leq \left\|p_n(x) - f(x)\right\|_{\infty} + \left\|p_n(0) - f(0)\right\|_{\infty} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

 $.f\in\overline{W}$ ולכן $q_n\rightrightarrows f$ ימתקיים כך $q_n\in W$ פולינומים פולינומרת, זאת־אומרת, $\overline{W}=\{f\in C[0,1]\mid f(0)=0\}$ ולכן הכלה דו־כיוונית ולכן

.C(K)בפופה בבו
p $\mathrm{Lip}(K)$ כר בראה מטרי מטרי מטרי מרחב (
 (K,ρ) יהי יהי

Kהוכחה: ראינו שזו אלגברה של פונקציות רציפות ולכן נותר רק להראות שהיא מפרידה נקודות ולא מתאפסת ב־לפי הגדרה, מתקיים

$$\operatorname{Lip}(K) = \{ f \in C[K, \mathbb{R}] \mid \exists L \ge 0 \ \forall x, y, \in K, \ |f(x) - f(y)| \le L \cdot \rho(x, y) \}$$

 $f(x) \neq f(y)$ כך ש־ $f \in \operatorname{Lip}(K)$ שקיימת ונראה $x \neq y$ ש־ כך כך $x,y \in K$ יהיי יהיו

 $f\in \mathrm{Lip}(K)$ נגדיר $f:K o \mathbb{R}$ על־ידי $f:K o \mathbb{R}$ מטריקה היא פונקציה רציפה ובמקרה זה היא היא $f:K o \mathbb{R}$ מטריקה נגדיר $f:K o \mathbb{R}$ על־ידי $f:K o \mathbb{R}$ מסריקה נובע ש־ $f:K o \mathbb{R}$ ולכן אבל הנחנו ש־ $f:K o \mathbb{R}$ ולכן מפרידה בין מפרידה נובע ש־ $f:K o \mathbb{R}$ ולכן אבל הנחנו ש־ $f:K o \mathbb{R}$ ולכן מפרידה בין מפרידה בין $f:K o \mathbb{R}$ ולכן בהכרח $f:K o \mathbb{R}$ ולכן מפרידה בין $f:K o \mathbb{R}$ ולכן מפרידה בין $f:K o \mathbb{R}$ ולכן מפרידה בין $f:K o \mathbb{R}$ ולכן מפרידה בין מפרידה בין $f:K o \mathbb{R}$ ולכן מפרידה בין מפרידה בין

נשאר היא פונקציה קבועה וכל פונקציה איז על־ידי $f:K\to\mathbb{R}$ על־ידי קבועה היא בועה להראות של $\mathrm{Lip}(K)$ לא מתאפסת בK. נגדיר אינה מתאפסת בK ולכן $f:K\to\mathbb{R}$ מתקיים מתקיים f:K ולכן אינה מתאפסת בK ולכן אינה מתאפסת ב

אז בוקר שמתאס נקבל שמתאס מטון־ויירטשראס נקבל שמתקיים אז בוקודות ואינה אלגברה, מפרידה נקודות אלגברה, מפרידה נקודות אלגברה באף נקודה ולכן ממשפט מטון־ויירטשראס נקבל שמתקיים בולבות בולכן בפופה בירוע צפופה בירוע צפופה בירוע בולכן ב