פתרון מטלה 04 — תורת הקבוצות, 80200

24 באפריל 2025

שאלה 1

נוכיח שאם X,Y,Z קבוצות אז מתקיים $\left|X^{Y\times Z}\right| = \left|\left(X^Y\right)^Z\right|$.

הוכחה: נעזר בהכוונה ונגדיר $\varphi : \left(X^Y\right)^Z \to X^{Y\times Z}, \psi : X^{Y\times Z} \to \left(X^Y\right)^Z$ על־ידי

$$\varphi(f)(y,z) = f(z)(y)$$
$$\psi(f')(z)(y) = f'(y,z)$$

נראה שאלו פונקציות הפיכות אחת של השנייה

$$\psi(\varphi(f))(z)(y) = \varphi(f)(y,z) = f(z)(y) \Rightarrow \psi(\varphi(f)) = f$$
$$\varphi(\psi(f'))(y,z) = \psi(f')(z)(y) = f;(y,z) \Rightarrow \varphi(\psi(f')) = f'$$

ולכן מצאנו פונקציות הפיכות אחת של השנייה, משמע חד־חד ערכיות ועל ולכן מהגדרת שיוויון עוצמות $\left|X^{Y\times Z}\right| = \left|\left(X^Y\right)^Z\right|$. $\square$

שאלה 2

נחשב את העוצמה של $C(\mathbb{R})$, קבוצת הפונקציות הרציפות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

סעיף א'

נוכיח שמתקיים $|\mathbb{R}|\le|C(\mathbb{R})|$.

הוכחה: נגדיר $f:\mathbb{R}\to C(\mathbb{R})$ על־ידי $f(x)=x$.
אנחנו יודעים שכל פונקציה קבועה היא פונקציה רציפה ולכן $f\in C(\mathbb{R})$, נראה כי היא חד־חד ערכית: נשים לב שלכל $x,y\in\mathbb{R}$ מתקיים

$$f(x)=f(y)\iff x=y$$

ולכן f חד־חד ערכית ונקבל $|\mathbb{R}|\le|C(\mathbb{R})|$. $\square$

סעיף ב'

נוכיח שהקבוצה $\mathcal{P}(\mathbb{N})^{\mathbb{Q}}$ היא בעוצמת הרצף, משמע יש פונקציה חד־חד ערכית ועל ממנה ל־$\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

הוכחה: ניעזר ברמז $|\mathcal{P}(\mathbb{N})|=\left|\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right|$ ונשים לב שמתקיים

$$\left|\mathcal{P}(\mathbb{N})^{\mathbb{Q}}\right|=\left|\left(\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right)^{\mathbb{Q}}\right|\underset{(1)}{=}\left|\{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{Q}}\right|\underset{(2)}{=}\left|\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right|=|\mathcal{P}(\mathbb{N})|=|\mathbb{R}|$$

כאשר (1) נובע משאלה 1 ו־2 נובע מכך שמכפלה קרטזית סופית של קבוצות בנות־מנייה היא בת־מנייה. $\square$

סעיף ג'

נוכיח שהעתקת הצמצום $F:C(\mathbb{R})\to\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$ המוגדרת על־ידי $F(f)=f\restriction\mathbb{Q}$ היא חד־חד ערכית.
נסיק את אי־השיוויון $|C(\mathbb{R})|\le|\mathbb{R}|$ ונסיק ש־$C(\mathbb{R})$ היא מעוצמת הרצף.

הוכחה: יהיו $f,g\in C(\mathbb{R})$ ונראה שאם לכל $q\in\mathbb{Q}$ מתקיים $f(q)=g(q)$ אזי $f=g$.
יהי $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. מצפיפות הרציונליים בממשיים אנחנו יודעים שקיימת סדרה של רציונליים (q_n) כך שמתקיים $q_n\xrightarrow[n\to\infty]{}x$.
מרציפות f,g נובע שמתקיים

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(x),\lim_{n\to\infty}g(x_n)=g(x)$$

היות ו־(q_n) סדרה של רציונליים מהנתון נובע כי $f(x_n)=g(x_n)$ לכל $n\in\mathbb{N}$ ובפרט הגבולות שלהם שווים, משמע מתקיים

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(x)=g(x)=\lim_{n\to\infty}g(x_n)$$

ראינו שלכל $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ מתקיים $f(x)=g(x)$ ומההנחה לכל $q\in\mathbb{Q}$ מתקיים $f(q)=g(q)$ ולכן מתקיים $f=g$.
נסיק את אי־השיוויון $|C(\mathbb{R})|\le|\mathbb{R}|$: מהיות $\mathbb{Q}$ בת־מנייה נקבל

$$|\mathbb{R}|\le|C(\mathbb{R})|\le\left|\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}\right|\underset{(1)}{=}\left|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right|\underset{(2)}{=}|\mathbb{R}|$$

כאשר (1) נובע ממטלה 2 שאלה 1 ו־(2) נובע מהסעיף הקודם ומכך שמתקיים $|\mathbb{R}|=|\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.
בסעיף א' ראינו שגם מתקיים $|C(\mathbb{R})|\le|\mathbb{R}|$ וממשפט קנטור־שרדר־ברנשטיין נקבל את השיוויון $|C(\mathbb{R})|=|\mathbb{R}|$.

$\square$

סעיף ד'

נחשב את עוצמת הקבוצה $C=\{f\in C(\mathbb{R})\mid f[\mathbb{R}]\subseteq\mathbb{Q}\}$.

פתרון: בעצם, C זו קבוצת כל הפונקציות הרציפות מעל $\mathbb{R}$ שתמותן היא תת־קבוצה של $\mathbb{Q}$.
נראה שמתקיים $C=\{f(x)=q\mid q\in\mathbb{Q}\}$, משמע C מכילה רק את הפונקציות הקבועות שתמותן מספר רציונלי.
ההכלה בכיוון הראשון טריוויאלית כי פונקציה קבועה היא פונקציה רציפה. בכיוון השני, נניח בשלילה שקיימת $f\in C$ כך שמתקיים $|f(\mathbb{R})|>1$,
משמע קיימים $q_1\ne q_2\in\mathbb{Q}$ שעבורם קיימים $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ כך שמתקיים בלי הגבלת הכלליות $f(x_1)=q_1,f(x_2)=q_2$.
מצפיפות הרציונליים בממשיים נובע כי קיים $r\in\mathbb{R}$ כך שמתקיים $q_1<r<q_2$ ומהסעיף הקודם או ממשפט ערך הביניים נסיק שקיים $x\in\mathbb{R}$ כך

שמתקיים $f(x)=r$, אבל הנחנו ש-$f\in C$ ולכן $f[\mathbb{R}]\subseteq\mathbb{Q}$ וזו כמובן סתירה.

לכן C מכילה את כל הפונקציות הקבועות שהקבוע שלהם הוא $q\in\mathbb{Q}$ בלבד ומכיוון ש-$|\mathbb{Q}|=\aleph_0$ נסיק כי $|C|=|\mathbb{Q}|=\aleph_0$. $\square$

שאלה 3

נחשב את העוצמה של $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

סעיף א'

נוכיח בעזרת האלכסון של קנטור שאין פונקציה על $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

הוכחה: נניח בשלילה שקיימת $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ כך ש־F על, ולכן לכל $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ קיים $r\in\mathbb{R}$ כך שמתקיים $F(r)=g$ ($F(r)(x)\in\mathbb{R}$).
נגדיר $d:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ על־ידי $d(x)=F(x)(x)+1$ ונראה שלא קיים $r\in\mathbb{R}$ כך שיתקיים $F(r)=d$.
נניח שכן, ולכן קיים $r\in\mathbb{R}$ כך ש־$F(r)=d$, משמע

$$F(r)=d\iff F(r)(x)=d(x)=F(x)(x)+1$$

בפרט גם עבור $x=r$ נקבל

$$F(r)(r)=F(r)(r)+1\iff 0=1$$

וזו כמובן סתירה ולכן אין $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ על. $\square$

סעיף ב'

נוכיח שמתקיים $|\mathcal{P}(\mathbb{N})\times\mathcal{P}(\mathbb{N})|=|\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.

הוכחה: בכיוון הראשון, נגדיר $f:\mathcal{P}(\mathbb{N})\to\mathcal{P}(\mathbb{N})\times\mathcal{P}(\mathbb{N})$ על־ידי $f(A)=(A,\emptyset)$.
נראה ש־f חד־חד ערכית: אם $A\neq B\subseteq\mathbb{N}$ בגלל ששיוויון הוא קורדינאטה־קורדינאטה נקבל $(A,\emptyset)\neq(B,\emptyset)$.
לכן f חד־חד ערכית ו־$|\mathcal{P}(\mathbb{N})|\le|\mathcal{P}(\mathbb{N})\times\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.
בכיוון השני, נגדיר $g:\mathcal{P}(\mathbb{N})\times\mathcal{P}(\mathbb{N})\to\mathcal{P}(\mathbb{N})$ על־ידי $g(A,B)=\{2n\mid n\in A\}\cup\{2n+1\mid n\in B\}$.
g מוגדרת היטב שכן איברי A נשלחים רק למספרים הזוגיים ביחידות ואיברי B נשלחים למספרים האי־זוגיים ביחידות.
נשאר להראות ש־g חד־חד ערכית: יהיו $(A,B),(C,D)\in(\mathcal{P}(\mathbb{N})\times\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ ונניח שמתקיים $g(A,B)=g(C,D)$.
נפריד לשיוונות בין כל שני חלקים של האיחוד ואנחנו יכולים לעשות זאת כי אוסף המספרים הזוגיים זר לאוסף המספרים האי־זוגיים.
מההנחה מתקיים $A'=\{2n\mid n\in A\}=\{2n\mid n\in C\}=C'$, אבל אם $A\neq C$ זה אומר שקיים בלי הגבלת הכלליות $a\in A$ כך ש־$a\notin C$ ולכן $a\in A'$ אבל גם $a\notin C'$ ולכן $A'=C'$ אם ורק אם $A=C$.
באותו אופן נקבל שגם $B=D\iff B'=\{2n+1\mid n\in B\}=\{2n+1\mid n\in D\}=D'$.
לכן g חד־חד ערכית ו־$|\mathcal{P}(\mathbb{N})\times\mathcal{P}(\mathbb{N})|\le|\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.
ממשפט קנטור־שרדר־ברנשטיין נקבל $|\mathcal{P}(\mathbb{N})\times\mathcal{P}(\mathbb{N})|=|\mathcal{P}(\mathbb{N})|$. $\square$

סעיף ג'

נסיק שמתקיים $|\mathbb{N}\times\mathcal{P}(\mathbb{N})|=|\mathcal{P}(\mathbb{N})|$ וכן $|\mathbb{N}\times\mathbb{R}|=|\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.

הוכחה: בכיוון הראשון, נגדיר $f:\mathbb{N}\times\mathcal{P}(\mathbb{N})\to\mathcal{P}(\mathbb{N})\times\mathcal{P}(\mathbb{N})$ על־ידי $f(n,A)=\langle\{n\},A\rangle$, נראה שהיא חד־חד ערכית:
יהיו $n,m\in\mathbb{N}$ ו־$A,B\subseteq\mathbb{N}$, מתקיים

$$f(n,A)=f(m,B)\iff\langle\{n\},A\rangle=\langle\{m\},B\rangle\iff n=m\wedge A=B$$

לכן f חד־חד ערכית ומתקיים $|\mathbb{N}\times\mathcal{P}(\mathbb{N})|\le|\mathcal{P}(\mathbb{N})\times\mathcal{P}(\mathbb{N})|\underset{(1)}{=}|\mathcal{P}(\mathbb{N})|$, כאשר (1) נובע מסעיף א'.
בכיוון השני, נגדיר $g:\mathcal{P}(\mathbb{N})\to\mathbb{N}\times\mathcal{P}(\mathbb{N})$ על־ידי $g(A)=\langle\min(A),A\rangle$.
g מוגדרת היטב כי מעיקרון הסדר הטוב יש מינימום ($A\subseteq\mathbb{N}$) ובפרט g חד־חד ערכית: יהיו $A,B\subseteq\mathbb{N}$, מתקיים

$$g(A)=g(B)\iff\langle\min(A),A\rangle=\langle\min(B),B\rangle\iff\min(A)=\min(B)\wedge A=B$$

לכן g חד־חד ערכית ומתקיים $|\mathcal{P}(\mathbb{N})|\le|\mathbb{N}\times\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.
ממשפט קנטור־שרדר־ברנשטיין נקבל שמתקיים $|\mathcal{P}(\mathbb{N})|=|\mathbb{N}\times\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.
בהרצאה ראינו שמתקיים גם $|\mathbb{R}|=|\mathcal{P}(\mathbb{N})|$ ולכן מטרנזטיביות נקבל שמתקיים גם $|\mathcal{P}(\mathbb{N})|=|\mathbb{N}\times\mathbb{R}|$ (נקבל זאת גם מהרכבת הפונקציות ההפיכות שקיימות מפאת השיוויון עוצמות).

$\square$

סעיף ד'

נסיק שמתקיים $\left|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\right| = |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))|$.

הוכחה: ראשית ניזכר $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$ ויחד עם סעיף ב' נסיק $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}| = |\mathbb{R}\times\mathbb{R}|$ $(\diamond)$.
בכיוון הראשון, תהיי $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ משמע $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ולכן $f \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ מהגדרת הפונקציה כיחס.
אז $\varphi : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ המוגדרת על־ידי $\varphi(f) = f \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ היא פונקצית חד־חד ערכית כזהות, ולכן $\left|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\right| \le |\mathcal{P}(\mathbb{R}\times\mathbb{R})|$.
אבל מ־$\diamond$ נקבל בפרט שמתקיים $\left|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\right| \le |\mathcal{P}(\mathbb{R}\times\mathbb{R})| = |\mathcal{P}(\mathbb{R})| = |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))|$.
בכיוון השני, ראינו במטלה 3 שהפונקציה המציינת מגדירה פונקציה חד־חד ערכית ועל בין $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ לבין $\{0,1\}^{\mathbb{R}}$, ולכן $\left|\{0,1\}^{\mathbb{R}}\right| = |\mathcal{P}(\mathbb{R})|$.
נגדיר $F : \{0,1\}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ על־ידי $F(f) = f$ שכן כל פונקציה שתמונתה היא $\{0,1\} \subseteq \mathbb{R}$ בפרט תמונתה ב־$\mathbb{R}$, משמע F היא הזהות פשוט מורחבת ל־$\mathbb{R}$ בתמונה, ולכן F חד־חד ערכית ונקבל $\left|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\right| \le \left(\{0,1\}^{\mathbb{R}}\right) = |\mathcal{P}(\mathbb{R})| = |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))|$.
ממשפט קנטור־שרדר־ברנשטיין נקבל כי $\left|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\right| = |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))|$. $\square$

שאלה 4

תהיינה X, Y קבוצות כך ש־$X \subseteq Y$ ותהי פונקציה $f : Y \to X$ חד־חד ערכית. בכל סעיף נעקוב אחר ההוכחה של משפט קנטור־שרדר־ברנשטיין ונכתוב פונקציה חד־חד ערכית ועל $\hat{f} : Y \to X$ המקיימת $\hat{f} \subseteq \mathrm{Id}_Y \cup f$.

סעיף א'

נתונים $X = 2\mathbb{N}, Y = \mathbb{N}, f(y) = 4y$.

פתרון: נשתמש בחלק הראשון של ההוכחה של המקרה הפרטי של משפט קנטור־שרדר־ברנשטיין ונחזר את התהליך.
נסמן $A = \mathbb{N} = Y$ ו־$B = 2\mathbb{N} = X$, $f = F$ (בשביל לשמור על עקביות עם ההוכחה מההרצאה).
עלינו להגדיר פונקציה $H : A \to B$ שהיא חד־חד ערכית ועל.
נסמן $C_0 = A \setminus B = 2\mathbb{N} + 1$, האי־זוגיים.
עבור כל $a \in C_0$ בהכרח מתקיים $H(a) = F(a) = 4a$ כיוון שתמונת H צריכה להיות בתוך $B = 2\mathbb{N}$.
נסמן

$$C_1 = F[C_0] = \{n \in \mathbb{N} \mid 4 \mid n \wedge 8 \nmid n\}$$

נקבל כי $C_1 \cap C_0 = \emptyset$ ושלכל $a \in C_1$ נגדיר $H(a) = F(a)$ זאת שכן אחרת באופן דומה להוכחה מההרצאה, לא אפשרי תחת ההגבלות שלנו להגדיר בדרך אחרת.
נמשיך ברקורסיה ונגדיר

$$C_{n+1} = F[C_n]$$

ובהתאם נקבל שתחת האילוץ בהכרח מתקיים $H \restriction C_{n+1} = F \restriction C_n$.
נסמן $C = \bigcup\{C_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ונגדיר

$$H = F \restriction C \cup \mathrm{Id}_{A \setminus C}$$

זו אכן פונקציה מ־A ל־B שכן $A \setminus C \subseteq A \setminus C_0 = A \setminus (A \setminus B)$.
מהטענה מההרצאה נובע כי H היא חד־חד ערכית ועל.
ואכן, עבור $x \in Y$ אם קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש־$x \in C_n$ אזי $H(x) = F(x)$ וזה קורה אם ורק אם $x \nmid 2 \cdot 4^k \wedge x \mid 4^k$.
הראשון קורה אם k חזקה זוגית והשני קורה כאשר k חזקה אי־זוגית.
לכן $H = \hat{f}$ מקיימת את הנדרש. $\square$

סעיף ב'

נתונים $X = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, Y = \mathbb{R}$ וכן

$$f(y) = \begin{cases} y + \sqrt{2} & \exists q \in \mathbb{Q}\ \exists n \in \mathbb{N}\ s.t.\ y = q + n\sqrt{2} \\ y & \text{אחרת} \end{cases}$$

פתרון: בדומה לסעיף הקודם, נסמן $A = \mathbb{R}, B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, f = F$.
מהסעיף הקודם אנחנו רק צריכים לאפיין את C_n לכל n.
נבחין ש־$C_0 = A \setminus B = \mathbb{R} \setminus (R \setminus \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.
נשים לב ש־$C_1 = F[C_0] = \left\{y + \sqrt{2} \mid y \in \mathbb{Z}\right\}$, ואז נקבל $C_n = F[C_{n-1}] = \left\{y + \sqrt{2} \mid y \in C_{n-1}\right\} = \left\{y + n\sqrt{2} \mid y \in \mathbb{Z}\right\}$.
באופן זהה לסעיף הקודם אם נגדיר

$$\hat{f}(y) = \begin{cases} f(y) & \exists z \in \mathbb{Z}, \exists n \in \mathbb{N}\ s.t.\ y = z + n\sqrt{2} \\ y & \text{אחרת} \end{cases}$$

$\square$