פתרון מטלה 10 — אנליזה פונקציונלית, 80417

20 ביוני 2025

שאלה 1

תזכורת: עבור $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ אינטגרביליות רימן בקטע $[-\pi, \pi]$ ומחזוריות עם מחזור 2π נגדיר

$$(f * g)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)g(u)du$$

סעיף א'

נוכיח שאם $g \in \tilde{C}[-\pi, \pi]$ אזי $f * g \in C[-\pi, \pi]$.

הוכחה: נניח כי $g \in \tilde{C}[-\pi, \pi]$ ולכן g רציפה ו־2π מחזורית ומהיותה רציפה היא כמובן אינטגרבילית רימן ונתון כי f אינטגרבילית רימן ומחזורית 2π אך־לאו דווקא רציפה.

ראשית, $f * g$ מוגדרת היטב: מכפלה של פונקציה אינטגרבילית בפונקציה רציפה היא פונקציה אינטגרבילית (כמסקנה ממשפט לבג).

אם $f * g$ לא פונקציה רציפה, ניקח את $x_0 \in \mathbb{R}$ נקודת אי־רציפות של $f * g$: בהכרח היא מסדר שני (אם לפונקציה קדומה יש נקודת אי־רציפות היא רק מסדר שני, ראינו את זה באינפי 2), g רציפה ולכן גם הפונקציה הקדומה שלה רציפה, ולכן זו נקודת אי־רציפות של f, אבל אז ל־f יש נקודת אי־רציפות מסדר שני, ולכן בהגדרה היא לא יכולה להיות אינטגרבילית. על־כן, $f * g$ פונקציה רציפה. □

סעיף ב'

נוכיח שאם $g \in \widetilde{C^1}[-\pi, \pi]$ אז $f * g \in C^1[-\pi, \pi]$ ושלכל $x \in [-\pi, \pi]$ מתקיים $(f * g)'(x) = (f * g')(x)$.

הוכחה: מהיות f אינטגרבילית, נסמן ב־F את הפונקציה הקדומה של f נעשה אינטגרציה בחלקים (שניתן לעשות מכך ש־$g \in \widetilde{C^1}[-\pi, \pi]$) ונקבל

$$(\star)(f * g)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)g(u)du = [-F(x-u)g(x)]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} g'(x)F(x-u)du$$

$$\underset{g \in \widetilde{C^1}[-\pi,\pi]}{=} 0 + \int_{-\pi}^{\pi} g'(x)F(x-u)du \underset{\text{הגדרה}}{=} (F * g')(x) \underset{\text{מהרמז}}{=} (g' * F)(x)$$

אז $f(* g) \in C[-\pi, \pi]$ כמכפלה של פונקציות רציפות, עלינו להראות שהיא גם גזירה (וגם שהנגזרת רציפה).

נעבוד לפי הגדרת הנגזרת, מתקיים

$$\begin{aligned}
(\star\star)(f * g)'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}((f * g)(x+h)) - (f * g)(x) \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)g(u) - f(x-u-h)g(u+h)du \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)g(u) - f(x-u-h)g)u) + f(x-u-h)(g(u) - g(u+h))du \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-u) - f(x-u-h))g(u) + f(x-u-h)(g(u) - g(u+h))du \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}((f(x-u) - f(x-u-h)) * g(u)) + \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)g'(u)du \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}((F(x-u) - F(x-u-h)) * g'(u)) + (f * g')(x) \\
&= (f * g')(x)
\end{aligned}$$

(מהמחזוריות, רציפות וגם גזירות של F, הפונקציה הקדומה של f).

עם $(\star)$ ו־$(\star)(\star)$ נובעת הטענה והמסקנה. □

שאלה 2

סעיף א'

תהיי $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$. נניח שלכל n מתקיים $\left|x_{n+1} - x_n\right| \leq \frac{C}{n}$ ובנוסף הסדרה $y_m = \frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} x_n$ מתכנסת לגבול $A \in \mathbb{R}$.
נוכיח שגם הסדרה x_n מתכנסת לאותו הגבול.

הוכחה: נניח בלי הגבלת הכלליות ש־$C = 1, A = 0$. יהי $\varepsilon > 0$ ונניח בשלילה שהטענה לא נכונה, ולכן x_n לא שואף ל־0 כאשר $n \to \infty$, ולכן עבור $\delta > 0$ תת־סדרה x_{n_k} המקיימת $\forall k \in \mathbb{N}, x_{n_k} > \delta$ או $\forall k \in \mathbb{N} x_{n_k} < -\delta$. בלי הגבלת הכלליות נניח ש־$x_{n_k} > \delta$.
עכשיו נשים לב שמתקיים עבור x_m, x_n עם $n < m$ מהנתון

$$|x_m - x_n| \leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \cdots + \left|x_{n+1} - x_n\right| \leq \frac{1}{m-1} + \frac{1}{m-2} + \cdots + \frac{1}{n} \leq \log\left(\frac{m}{n}\right)$$

מתכנסות y_m נובע שלכל $\delta > 0$ קיים M כך שלכל $m > M$ מתקיים

$$|y_m - 0| < \delta \iff \left|\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} x_n\right| < \delta \iff \left|\sum_{n=1}^{m} x_n\right| < m\delta$$

מההנחה כי x_n לא מתכנסת ל־0, נסמן ב־N_1 את קבוצת כל האינדקסים כך שמתקיים $|x_n| \geq \varepsilon$ וב־N_2 את קבוצת כל האינדקסים כך שמתקיים $|x_n| < \varepsilon$.
עבור כל $n \in N_1$ מתקיים

$$\sum_{n \in N_1} x_n \geq \sum_{n \in N_1} (0 + \varepsilon) = |N_1|\varepsilon$$
$$\sum_{n \in N_2} x_n < \sum_{n \in N_2} (0 + \varepsilon) = |N_2|\varepsilon$$

ואז

$$\sum_{n=1}^{m} x_n = \sum_{n \in N_1} x_n + \sum_{n \in N_2} x_n \Longrightarrow \sum_{n=1}^{m} x_n \geq |N_1|\varepsilon - |N_2|\varepsilon$$

אבל כאשר $m \to \infty$, מתקיים ש־$|N_1| \to \infty$ מהגדרת חוסר התכנסות ובפרט

$$\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} x_n \geq \frac{|N_1|\varepsilon}{m}$$

אבל צד שמאל מתכנס וצד ימין לא וזאת סתירה. $\square$

סעיף ב'

נסיק שאם f אינטגרבילית רימן בקטע $[-\pi, \pi]$, קיים $C > 0$ כך שלכל n מקדמי פוריה של f מקיימים $|a_n|, |b_n| \leq \frac{C}{n}$ ויש $x_0 \in [-\pi, \pi]$ כך שמתקיים $K_m * f(x_0) \to A$ אז גם $D_n * f(x_0)$ כאשר K_m גרעין פייר ו־D_n גרעין דירכלה.

הוכחה: f אינטגרבילית רימן ולכן עבור $x \leq \pi$ נוכל להגדיר $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, F רציפה מהמשפט היסודי ולכן חסומה (על כל $[-\pi, \pi]$) ולכן קיים $0 < M \in \mathbb{R}$ חסם.
כעת, נוכל להשתמש באינטגרציה בחלקים

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} F'(x)\sin(nx)dx \Rightarrow -F(x)\cos(nx)|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos(nx)dx$$

נשים לב שמתקיים עבור n זוגי $\cos(n\pi) = \cos(-n\pi) = 1$ ועבור n אי־זוגי $\cos(n\pi) = \cos(-n\pi) = -1$ ובין כה וכה $\cos(-n\pi) = \cos(n\pi)$ ולכן

$$-F(x)\cos(nx)|_{-\pi}^{\pi} = \cos(n\pi)(F(\pi) - F(-\pi)) = \cos(n\pi)\left(\int_0^{\pi} f(t)dt - \int_0^{-\pi} f(t)dt\right) = \cos(n\pi)\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt$$

וזה כמובן ערך מספרי קבוע שתלוי ב־n עבור הסימן שחסום על־ידי $A = 2\pi\|f\|_\infty$. אז מתקיים

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx\right| \le A + \left|\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos(nx)dx\right| \le A + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} |F(x)|dx \underset{\text{רציפה } F}{\le} A + \frac{2\pi M}{n}$$

נחלק ב־π, n

$$\frac{1}{\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx\right| \le 2\|f\|_\infty + \frac{2M}{n}$$

ולכן קיים C כזה המקיים את הנדרש. אם יש x_0 כזה, מהגדרת K_m ו־D_n עם סעיף א' נקבל את החלק השני. $\square$

שאלה 3

סעיף א'

נוכיח שאם V מרחב סוף־מימדי, $U \subseteq V$ סגורה ו־$v \in V$ אז קיים $u \in U$ כך ש־$\|u - v\| = \operatorname{dist}(U, v)$.

הוכחה: ראשית, ניזכר

$$\operatorname{dist}(U, v) = \inf_{u \in U} \|v - u\|$$

ניקח $d = \operatorname{dist}(U, v)$ ולכן לכל $\varepsilon > 0$ קיים u_ε כך ש־$\|u_\varepsilon - v\| < d + \varepsilon$.

נגדיר אם כך סדרה $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq U$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $\|u_n - v\| < d + \frac{1}{n}$, ובפרט $\|u_n - v\| \underset{n \to \infty}{\to} d$.

V הוא סוף־מימדי ולכן $\{u_n\}$ סדרה חסומה וניקח $\left\{u_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$, תת־סדרה מתכנסת שלה (משפט בולצאנו-ויירשטראס).

אבל $U \subseteq V$ סגורה, ולכן $u_n \xrightarrow[n \to \infty]{} u \in U$, אבל זה בידיוק אומר שמתקיים

$$\lim_{k \to \infty} \left\|u_{n_k} - v\right\| = d = \|u - v\|$$

□

סעיף ב'

נתבונן במרחב $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$.

ניתן דוגמה לקבוצה $U \subseteq \mathbb{R}^2$ סגורה וקמורה ו־$v \in \mathbb{R}^2$ כך שקיימים אינסוף $u \in U$ המקיימים $\|u - v\|_\infty = \operatorname{dist}(U, v)$.

הוכחה: נגדיר $U = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0\right\}$ וניקח $v = (-1, 1)$.

ועבור $u \in U$ מתקיים מהגדרה

$$\|u - v\|_\infty = \max(|u_1 - v_1|, |u_2 - v_2|)$$

ו־$u \in U$ שתקיים מרחק מינימלי ל־v היא $(0, 1)$ (בגלל שהנקודה v בציר ה־x שלילית אז הנקודה הכי קרובה אליה ברביע החיובי תהיה עם $x = 0$).

אז נקבל $\|u - v\|_\infty = \max(1, 0) = 1$ ולכן אנחנו מחפשים $u = (u_1, u_2) \in U$ כך שיתקיים $\|u - v\|_\infty = \max(|u_1 + 1|, |u_2 - 1|) = 1$.

נחלק למקרים

1. $|u_1 + 1| = 1, |u_2 - 1| \leq 1$

   אז מהאילוץ הראשון נקבל $u_1 = 0$ או $u_1 = -2$ אבל $u_1 \geq 0$ ולכן $u_1 = 0$.

   עבור $u_1 = 0$, אז $|u_2 - 1| \leq 1$ נקבל $0 \leq u_2 \leq 2$ ולכן $u_2 \in [0, 2]$.

2. $|u_2 - 1| = 1, |u_1 + 1| \leq 1$ מהאילוץ הראשון נקבל $u_2 = 2$ או $u_2 = 0$.

   מהאילוץ השני נקבל $-2 \leq u_1 \leq 0$ אבל $u_1 \geq 0$ ולכן $u_1 = 0$.

סך־הכל משני המקרים נקבל שהנקודות האפשריות הן

$$\{(0, 0), (2, 0)\} \cup \{(0, u_2) \mid u_2 \in [0, 2]\}$$

וזה מקיים את תנאי השאלה. □