פתרון מטלה 09 — חשבון אינפיניטסימלי 3, 80415

9 ביוני 2025

שאלה 1

תהיי $H \in M_{k\times k}(\mathbb{R})$ מטריצה סימטרית ונוכיח כי קיים ל־H ערך עצמי ממשי.

הוכחה: נעזר בהדרכה, ספירת היחידה נתונה על־ידי $S_1 = \left\{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x\| = 1\right\}$, נגדיר את $q(x)$ הפונקציה שלנו ואת פונקציית האילוץ לכך ש־$x \in S_1$ על־ידי

$$q(x) = \langle Hx, x\rangle, g(x) = \|x\|^2 - 1 = 0$$

ממשפט כופלי לגראנז' נקבל שאנחנו בוחנים את המערכת

$$\nabla q(x) = \lambda \nabla g(x)$$

נחשב את הגרדיאנטים, מהיות H מטריצה סימטרית נקבל מגזירת מכפלה פנימית

$$\nabla q(x) = \nabla(\langle Hx, x\rangle) = \nabla(x^T Hx) = Hx + H^T x = Hx + Hx = 2Hx$$
$$\nabla g(x) = \nabla(x^T x - 1) = 2x$$

ממשפט כופלי לגראנז' נקבל שמתקיים

$$2Hx = \lambda \cdot 2x \iff Hx = \lambda x$$

זה בידיוק הגדרה ש־x הוא וקטור עצמי של H, אז כל נקודת קיצון של $q(x)$ על ספירת היחידה היא בידיוק x שהוא וקטור עצמי של H ו־λ הוא הערך העצמי.

נשאר להראות שהערך העצמי הוא ממשי:

נשים לב ש־$q(x) = x^T Hx \in \mathbb{R}$ לכל $x \in \mathbb{R}^k$ וזו פונקציה רציפה (בגלל ש־H סימטרית ממשית) ו־$\lambda \in \mathbb{R}$, ופונקציה רציפה על מרחבת קומפקטית מקבלת מקסימום אז כל הערכים העצמיים הם ממשיים. $\square$

שאלה 2

תהיי $B \subseteq \mathbb{R}^k$ פתוחה ו־$f : B \to \mathbb{R}$ גזירה פעמיים ברציפות.

סעיף א'

נוכיח שלכל $\varepsilon > 0$ ומסילה גזירה פעמיים ברציפות $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to B$ כך ש־$\gamma(0) = a$ ו־$\gamma'(0) = v$ מתקיים

$$(f \circ \gamma)''(0) = v^t H f_a v + D f_a(\gamma''(0))$$

הוכחה: TODOOOOOOOOOOOOOOOOOO □

סעיף ב'

תהיי $g : B \to \mathbb{R}^n$ גזירה פעמיים ברציפות עבור $n + 1 \leq k$. נגדיר $A = g^{-1}(\{0\})$ ונסמן ב־$\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \times B \to \mathbb{R}$ את הלגראנז'יאן של f ביחס ל־g.

תהיי $(\lambda, a) \in \mathbb{R}^n \times A$ נקודה קריטית של $\mathcal{L}$ כך ש־Dg_a מדרגה n.

נוכיח כי לכל $\varepsilon > 0$ ומסילה גזירה פעמיים ברציפות $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to A$ כך ש־$\gamma(0) = a$ ו־$\gamma'(0) = v$ מתקיים

$$(f \circ \gamma)''(0) = v^t H \mathcal{L}^\lambda_a v \ \left(\mathcal{L}^\lambda(x) = \mathcal{L}(\lambda, x)\right)$$

הוכחה: TODOOOOOOOOOOOOOOOOOO □

שאלה 3

תהיי $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ הפונקציה הנתונה על־ידי $f(x, y, z) = 12x + y^2 - xz$.
נמצא את הנקודות הקריטיות של f תחת האילוץ של $z = x^2 + y^2$ ונסווגן.
פתרון: נגדיר $g(x, y, z) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ על־ידי $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$ ומתקיים $\nabla g = (2x, 2y, -1)$ ולכל $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ מתקיים $\nabla g(x, y, z) \neq 0$.
הלגראנז'יאן נתון על־ידי

$$12x + y^2 - xz - \lambda x^2 - \lambda y^2 + \lambda z$$

נמצא נקודות חשודות לקיצון של הלגראנז'יאן

$$\nabla \mathcal{L}_{(\lambda,x,y,z)} = \left(-x^2 - y^2 + z, 12 - 2x\lambda - z, 2y - 2y\lambda, -x + \lambda\right)$$

נחפש מתי הביטוי מתאפס אבל קודם כל נשים לב שמתקיים

$$-x + \lambda = 0 \Rightarrow x = \lambda$$

ואז

$$12 - 2x\lambda - z = 0 \iff 12 - 2x^2 - z = 0 \iff z = 12 - 2x^2$$

ואז

$$-x^2 - y^2 + z = 0 \iff -x^2 - y^2 + 12 - 2x^2 = 0 \iff y^2 = -3x^2 + 12$$

ראינו ששהסיאן המוגבל מוגדר באמצעות הנגזרת השנייה של להגראנז'יאן

$$H\mathcal{L}_{(\lambda,a)} = \begin{pmatrix} 0 & -Dg_a \\ -Dg_a^t & H\mathcal{L}_a^\lambda \end{pmatrix}$$

TODOOOOOOOOOOOOOOOOOO $\square$

שאלה 4

תהיי $A \subseteq \mathbb{R}^k$ תיבה סגורה ו־$f : A \to \mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית.

סעיף א'

נוכיח שמתקיים לכל $c \in \mathbb{R}$ שהפונקציה cf אינטגרבילית ומתקיים

$$\int_A (cf)(x)dx = c \int_A f(x)dx$$

הוכחה: יהי $\varepsilon > 0$. f אינטגרבילית ולכן קיימת חלוקה P של A עבורה מתקיים $\overline{S_f}(f, P) - \underline{S_f}(f, P) < \varepsilon$.
נסמן ב־$\overline{S}_{cf}(P), \underline{S_{cf}}(P)$ את הסכום העליון והתחתון של cf המתאימים לחלוקה P.
אם $c = 0$ אז הטענה טריוויאלית כי פונקציית ה־0 אינטגרבילית, ולכן נחלק לשני מקרים $c > 0, c < 0$.
אם $c > 0$, אנחנו יודעים שלכל קבוצה חסומה B גם $c \cdot B$ חסומה ומתקיים

$$\sup(c \cdot B) = c \cdot \sup(B), \ \ \inf(c \cdot B) = c \cdot \inf(B)$$

ובפרט $c \cdot B$ ולכן

$$\overline{S_{cf}}(P) = c \cdot \overline{S_f}(P), \ \ \underline{S_{cf}}(P) = c \cdot \underline{S_f}(P)$$

השיוונות הללו נכונים לכל חלוקה P, אז נסמן $(\star)$

$$L_{cf} = \left\{ \underline{S_{cf}}(cf, P) \mid A \text{ חלוקה של } P \right\} = c \cdot \left\{ \underline{S_f}(f, P) \mid A \text{ חלוקה של } P \right\} = c \cdot L_f$$
$$U_{cf} = \left\{ \overline{S_{cf}}(cf, P) \mid A \text{ חלוקה של } P \right\} = c \cdot \left\{ \overline{S_f}(f, P) \mid A \text{ חלוקה של } P \right\} = c \cdot U_f$$

f אינטגרבילית ולכן מתקיים $\overline{\int_A} f = \underline{\int_A} f$, משמע מתקיים

$$\inf\left(U_f\right) = \sup\left(L_f\right) = \int_A f$$

ולכן גם

$$c \cdot \inf\left(U_f\right) = c \cdot \sup\left(L_f\right) = c \cdot \int_A f$$

אבל ראינו שמתקיים

$$c \cdot \inf\left(U_f\right) = \inf\left(c \cdot U_f\right), \ \ c \cdot \sup\left(L_f\right) = \sup\left(c \cdot L_f\right)$$

ולכן גם מתקיים

$$\inf\left(c \cdot U_f\right) = \sup\left(c \cdot L_f\right) = c \cdot \int_A f(x)dx \underset{(\star)}{\Rightarrow} \inf\left(U_{cf}\right) = \sup\left(L_{cf}\right) = c \cdot \int_A f(x)dx$$

ולכן עבור $c > 0$ אנחנו מקבלים ש־$c \cdot f$ אינטגרבילית על A ושמתקיים

$$\int_A c \cdot f(x)dx = \inf\left(c \cdot U_f\right) = \sup\left(c \cdot L_f\right) = c \cdot \int_A f(x)dx$$

נשאר להראות עבור $c < 0$. ההוכחה זהה לחלוטין, למעט הנקודות הבאות:

1. עבור קבוצה חסומה B, הקבוצה $c \cdot B$ גם חסומה ומתקיים

$$\sup(c \cdot B) = c \cdot \inf(B), \ \ \inf(c \cdot A) = c \cdot \sup(B)$$

2. החלוקה מתחלפת (אינפה לסופרמה, סופרמה לאינפמה)

$$\overline{S_{cf}}(P) = c \cdot \underline{S_f}(P), \ \ \underline{S_{cf}}(P) = c \cdot \overline{S_f}(P)$$

שאר ההוכחה זהה. $\square$

סעיף ב'

הפונקציה הקבועה 1 אינטגרבילית על A ומתקיים

$$\int_A 1dx = V(A)$$

הוכחה: פונקציה קבועה היא פונקציה רציפה ופונקציה רציפה היא אינטגרבילית ולכן $\int_A 1dx$ זה ביטוי מוגדר היטב.
אז הפונקציה הקבועה 1 אינטגרבילית, ולכן

$$\underline{\int_A} 1dx = \overline{\int_A} 1dx$$

שזה אומר

$$\sup\{\underline{S}(f,P) \mid \text{חלוקה של } A \ P\} = \inf\Big\{\overline{S}(f,P) \mid \text{חלוקה של } A \ P\Big\}$$

אבל אנחנו יודעים שלכל חלוקה P של A ההגדרה אומרת שמתקיים

$$\overline{S}(f,P) = \sum_{A_i \in P} M_i V(A_i) = \sum_{A_i \in P} \sup_{x \in A_i} 1V(A_i) = \sum_{A_i \in P} 1V(A_i) = V(A)$$

בפרט גם $\inf\Big\{\overline{S}(f,P) \mid \text{חלוקה של } A \ P\Big\} = V(A)$ כי זה נכון לכל חלוקה.
עם כל מה שמצאנו לעיל אכן מתקיים $\int_A 1dx = V(A)$. $\square$

סעיף ג'

אם $|f(x)| \leq M$ לכל $x \in A$ עבור $M \geq 0$ אז מתקיים

$$\int_A f(x)dx \leq M \cdot V(A)$$

הוכחה: נשים לב שמשילוב שני הסעיפים הקודמים נקבל שמתקיים עבור כל פונקציה קבועה עם פרמטר $M \geq 0$ מתקיים

$$\int_A Mdx = M\int_A 1dx = M \cdot V(A), \ \ \int -Mdx = -M\int_A 1dx = -M \cdot V(A)$$

מכך שמתקיים $|f(x)| \leq M$ נובע שמתקיים $-M \leq f(x) \leq M$, בפרט אם ניקח אינטגרל על כל האגפים נקבל

$$\int_A -Mdx \leq \int_A f(x)dx \leq \int_A Mdx$$

משמע מתקיים

$$\int_A f(x)dx \leq M \cdot V(A)$$

נסביר למה מותר לנו לקחת אינטגרל: בתרגול ראינו שאם הפונקציות f, g אינטגרבליות על A מתקיים

$$\int_A (f+g)dx = \int_A f(x)dx + \int_A g(x)dx$$

בפרט ממה שראינו בסעיף א' זה נכון גם עבור המקרה בו

$$\int_A (\alpha f + \beta g)dx = \int_A \alpha f(x)dx + \int_A \beta g(x)dx = \alpha\int_A f(x) + \beta\int_A g(x)$$

ויחד עם ההצדקה מסעיף א' ראינו שמתקיים גם שאם $f(x) \leq g(x)$ אז מתקיים

$$\int_A f(x)dx \leq \int_A g(x)dx$$

ולכן לקחת אינטגרל הייתה פעולה חוקית על שני האגפים וקיבלנו שאכן מתקיים $\int_A f(x)dx \leq M \cdot V(A)$. $\square$

שאלה 5

תהיינה $A, B \subseteq \mathbb{R}^k$ תיבות סגורות כך שמתקיים $A^\circ \cap B^\circ = \emptyset$ ו־$A \cup B$ גם היא תיבה סגורה.
נוכיח כי אם $f : A \cup B \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית אז גם $f|_A$ ו־$f|_B$ אינטגרביליות.

הוכחה: ראשית, f אינטגרבילית על $A \cup B$ ולכן בפרט זה אומר ש־f חסומה על $A \cup B$ ובפרט זה אומר שהיא חסומה על A ועל B בנפרד.
יהי $\varepsilon > 0$, נבחר חלוקות P_A ו־P_B כך שמתקיים

$$-\varepsilon + \int_A f(x) \leq \underline{S}(f, P_A) \leq \overline{S}(f, P_A) < \int_A f dx + \varepsilon$$

$$-\varepsilon + \int_B f(x) \leq \underline{S}(f, P_B) \leq \overline{S}(f, P_B) < \int_B f dx + \varepsilon$$

כעת, קיימת חלוקה P של $A \cup B$ שמכילה את P_A ואת P_B. למה? כי לכל תיבה $C \subseteq \mathbb{R}^k$ ו־$X \subseteq C$ קבוצה סופית, קיימת חלוקה $P = P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_d$ של C שמכילה את כל X, מהגדרת החלוקה.
אז מתקיים

$$\int_A f dx + \int_B f dx - 2\varepsilon < \underline{S}(f, P_A) + \underline{S}(f, P_B) \leq \underline{S}(f, P) \leq \overline{S}(f, P) \leq \overline{S}(f, P_A) + \overline{S}(f, P_B) < \int_A f dx + \int_B f dx + 2\varepsilon$$

אז לא רק ש־$f|_A$ ו־$f|_B$ אינטגרביליות זה גם משלים את הטענה מהכיתה

$$\int_{A \cup B} f dx = \int_A f dx + \int_B f dx$$

$\square$