פתרון מטלה 02 — חשבון אינפיניטסימלי 3, 80415

3 באפריל 2025

שאלה 1

יהי $(X, \|\cdot\|)$ מרחב נורמי.

סעיף א'

נוכיח כי לכל $x \in X$ ו־$0 < r$ מתקיים $\left(\hat{B}_{r(x)}\right)^{\circ} = B_{r(x)}$

הוכחה: $\square$

סעיף ב'

נוכיח כי לכל $x \in X$ ו־$0 < r$ מתקיים $\partial B_{r(x)} = S_{r(x)}$

הוכחה: $\square$

שאלה 2

סעיף א'

נמצא את הפנים, הסגור והשפה של הקבוצה $A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z \leq 1\right\} \subseteq \left(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2\right)$.

הוכחה: $\square$

סעיף ב'

נמצא את הפנים, הסגור והשפה של הקבוצה $B = \{f \in C([0,1]) \mid f \text{ מונוטונית יורדת ממש}\} \subseteq \left(C[0,1], \|\cdot\|_\infty\right)$

הוכחה: $\square$

סעיף ג'

נמצא את הפנים, הסגור והשפה של הקבוצה $C = \left\{x \in \ell^\infty \mid L \in (-1,1] \wedge \text{קיים הגבול } L = \lim\limits_{n\to\infty} x_n\right\} \subseteq \left(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty\right)$

הוכחה: $\square$

שאלה 3

יהי $p \in \mathbb{N}$ מספר ראשוני.

סעיף א'

נתאר את כדור היחידה הסגור $\mathbb{Z}_p := \hat{B}_1(0) \subseteq \left(\mathbb{Q}, d_p\right)$.

הוכחה: $\square$

סעיף ב'

נוכיח כי $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_p$ ונקבע מהו $\mathbb{Z}^\circ$.

הוכחה: $\square$

סעיף ג'

נוכיח כי $\mathbb{Z}_p$ אינה קומפקטית סדרתית.

הוכחה: $\square$

שאלה 4

יהיו $(X, d_X), (Y, d_Y)$ מרחבים מטריים ובתרגיל הקודם ראינו כי המכפלה $X \times Y$ היא מרחב מטרי ביחס למטריקה TODO

סעיף א'

נוכיח כי הסדרה $((x_n, y_n)) \subseteq X \times Y$ מתכנסת ל־(x, y) אם ורק אם $(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} x$ ו־$(y_n) \underset{n\to\infty}{\to} y$

הוכחה: $\square$

סעיף ב'

נסמן ב־$p_X : X \times Y \to X$ וב־$p_Y : X \times Y \to Y$ את ההטלות. נוכיח כי p_X ו־p_Y רציפות.

הוכחה: $\square$

סעיף ג'

נוכיח כי לכל מרחב מטרי (Z, x_Z) ופונקציה $f : Z \to X \times Y$ מתקיים ש־f רציפה אם ורק אם $p_X \circ f$ ו־$p_Y \circ f$ רציפות.

הוכחה: $\square$

סעיף ד'

נניח כי X, Y קומפקטיים סדרתית. נוכיח כי גם המכפלה $X \times Y$ קומפקטית סדרתית. נסיק כי מכפלה סופית של מרחבים קומפקטיים סדרתית היא קומפקטית סדרתית.

הוכחה: מספיק שנראה עבור שתי מכפלות והמכפלה של יותר תנבע באינדוקציה. $\square$

שאלה 5

יהי (X, d) מרחב מטרי ו־$K \subseteq X$ קומפקטית סדרתית ו־$B \subseteq X$ כלשהי.

סעיף א'

נוכיח כי כל פונקציה רציפה $f : K \to \mathbb{R}$ מקבלת מינימום ומקסימום.

הוכחה: $\square$

סעיף ב'

נוכיח כי $d(x, B) = 0$ אם ורק אם $x \in \overline{B}$.

הוכחה: $\square$

סעיף ג'

נוכיח כי קיים $x \in K$ כך ש־$d(K, B) = d(x, B)$ ונסיק כי $0 < d(K, B)$ אם ורק אם $K \cap \overline{B} = \emptyset$.

הוכחה: $\square$

שאלה 6

נוכיח כי $\hat{B}_1(0) \subseteq (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ היא קבוצה סגורה וחסומה שאינה קומפקטית סדרתית.