פתרון מטלה 01 — חשבון אינפיניטסימלי 3, 80415

3 באפריל 2025

שאלה 1

סעיף א'

תהיי $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה מונוטונית עולה ממש. נוכיח כי הפונקציה

$$d(x,y)=|F(x)-F(y)|$$

מגדירה מטריקה על $\mathbb{R}$.

הוכחה:

1. סימטרייה – מהגדרת הערך המוחלט מתקיים עבור $x,y\in\mathbb{R}$:

$$d(x,y)=|F(x)-F(y)|=|F(y)-F(x)|=d(y,x)$$

2. אי שליליות – נובע ישירות מהגדרת הערך המוחלט כאי־שלילי. כמו כן מתקיים עבור $x,y\in\mathbb{R}$:

$$x=y\iff F(x)-F(y)\implies|F(x)-F(y)|=00=d(x,y)=|F(x)-F(y)|=0\iff F(x)=F(y)\underset{(1)}{\implies}x=y$$

כאשר (1) נובע מהיות F מונוטונית עולה ממש ולכן חד־חד ערכית.

3. אי־שיוויון המשולש – יהיו $x,y,z\in\mathbb{R}$. מאי־שיוויון המשולש (על ערך מוחלט) מתקיים:

$$d(x,z)=|F(x)-F(z)|\le|F(x)-F(y)|+|F(y)-F(z)|=d(x,y)+d(y,z)$$

ולכן $d(x,y)=|F(x)-F(y)|$ מגדירה מטריקה על $\mathbb{R}$. □

סעיף ב'

יהי $G=(V,E)$ גרף לא־מכוון קשיר, כלומר לכל שני קודקודים $u,v\in V$ קיים מסלול $\gamma=(x_0,...,x_n)$ עבור $x_i\in V$ ו־$\{x_{i-1},x_i\}\in E$ המקיים $x_0=u$ ו־$x_n=v$. נסמן ב־$\ell(\gamma)=n$ את אורך המסלול (מספר הקשתות). נוכיח כי הפונקציה $d(u,v)=\min\{\ell(\gamma)\mid\}$ מגדירה מטריקה על V.

הוכחה: TODOOOOOOOOOOOOOOOOOOO □

סעיף ג'

יהיו $(X,d_X),(Y,d_Y)$ מרחבים מטריים. נוכיח כי הפונקציה $d((x_0,y_0),(x_1,y_1))=d_X(x_0,x_1)+d_Y(y_0,y_1)$.

הוכחה: TODOOOOOOOOOOOOOOOOOOO □

סעיף ד'

יהיו $\{(X_i,d_i)\}_{i=0}^{\infty}$ מרחבים מטריים. נגדיר מטריקה על המכפלה $\prod_{i=0}^{\infty}X_i$.

הוכחה: TODOOOOOOOOOOOOOOOOOOO □

שאלה 2

סעיף א'

נוכיח כי לכל $x \in \mathbb{R}^n$ מתקיים $\lim\limits_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

הוכחה: יהי $x \in \mathbb{R}^n$ ויהי $p \geq 1$, מהגדרה מתקיים:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\sup_i |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_\infty$$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(n \cdot \sup_i |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = n^{\frac{1}{p}} \cdot \|x\|_\infty$$

זאת אומרת, מתקיים:

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}} \cdot \|x\|_\infty$$

ובפרט כאשר ניקח גבול מאריתמטיקה של גבולות נקבל:

$$\lim_{p\to\infty} \|x\|_\infty \leq \lim_{p\to\infty} \|x\|_p \leq \lim_{p\to\infty} n^{\frac{1}{p}} \cdot \|x\|_\infty$$

וכן:

$$\lim_{p\to\infty} \|x\|_\infty = \|x\|_\infty \leq \lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \lim_{p\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \lim_{p\to\infty} n^{\frac{1}{p}} \cdot \|x\|_\infty \underset{(1)}{=} 1 \cdot \|x\|_\infty \Longrightarrow \lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$$

כאשר (1) נובע מכך ש־$\lim\limits_{p\to\infty} n^{\left(\frac{1}{p}\right)} \longrightarrow 1$ שכן $\lim\limits_{p\to\infty} \dfrac{1}{p} \longrightarrow 0$. $\square$

סעיף ב'

נוכיח שהטענה מהסעיף הקודם לא נכונה גם עבור $x \in \ell^\infty$, כאשר ℓ^∞ הוא מרחב כל הסדרות האינסופיות החסומות.

הוכחה: ראשית, ניזכר כי הגדרנו את הנורמה על מרחבי ℓ^p על־ידי $\|(x_0, x_1, ...)\|_p = \sqrt[p]{\sum\limits_{i=0}^{\infty} |x_i|^p}$

נסתכל על הסדרה הקבועה $(1, 1, ...)$ הסדרה הקבועה 1. מתקיים:

$$\lim_{p\to\infty} \|(x_0, x_1, ...)\|_p = \lim_{p\to\infty} \sqrt[p]{\sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^p} = \lim_{p\to\infty} \sqrt[p]{\sum_{i=0}^{\infty} 1} = \infty \neq 1 = \left(\sup_i |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_\infty$$

$\square$

סעיף ג'

יהיו $1 \leq p < q \leq \infty$ ונוכיח כי לכל סדרה $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ מתקיים: $\|x\|_q \leq \|x\|_p$ ונסיק כי מתקיים $\ell^p \subseteq \ell^q$.

הוכחה: יהיו $1 =< p < q \leq \infty$, לכל $m \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$|a_m| \leq \frac{\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^p\right)^1}{p}$$

תהיי $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ויהיו $1 \leq p < q < \infty$ ונניח כי $x \neq 0$ כי אחרת המקרה טריוויאלי.
נסמן $e = \frac{x}{\|x\|_p}$ ולכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים $|e_k| \leq 1$ ו־$\|e\|_p = 1$. מכך שמתקיים $p < q$ נקבל:

$$\|e\|_q = \frac{\left(\sum_{k=1}^{\infty} |e_k|^q\right)^1}{q} \leq \frac{\left(\sum_{k=1}^{\infty} |e_k|^p\right)^1}{q} = \|e\|_p^{\frac{p}{q}} = 1$$

זאת אומרת

$$\|x\|_q=\left\|\|x\|_p e\right\|_q=\|x\|_p\|e\|_q \leftarrow \|x\|_p$$

ראשית, ניזכר כי הגדרנו את הנורמה על מרחבי ℓ^p **TODOOOOOOOOOOOOOOOOOOO** $\square$

שאלה 3

עבור מרחב נורמי $(X, \|\cdot\|)$ נסמן ב־$B(x) := B(X, X)$ את מרחב ההעתקות הלינאריות החסומות תחת הנורמה האופרטורית מ־X לעצמו.

סעיף א'

נוכיח כי לכל $T, S \in B(X)$ מתקיים $\|S \circ T\|_{\text{op}} \leq \|S\|_{\text{op}} \|T\|_{\text{op}}$

הוכחה: ראשית, בתרגול ראינו כי $\left(B(X, X), \|\cdot\|_{\text{op}}\right)$ הוא מרחב נורמי ולכן הוא מקיים את אי־שיוויון המשולש, ולכן מתקיים לכל $x \in X$:

$$\|(S \circ T)(x)\|_{\text{op}} \leq \|S\|_{\text{op}} \|Tx\|_{\text{op}} \leq \|S\|_{\text{op}} \|T\|_{\text{op}} \|x\|_{\text{op}}$$

בתרגול ראינו שלכל $T \in B(X, X)$ ו־$x \in X$ מתקיים $\|T(x)\|_X \leq \|T\|_{\text{op}} \|x\|_X$, ולכן נובע מכך

$$\|S \circ T\|_{\text{op}} = \sup_{\|x\|=1} \|(S \circ T)(x)\|_{\text{op}} \leq \sup_{\|x\|=1} \|S\|_{\text{op}} \|T\|_{\text{op}} \|x\|_{\text{op}} = \|S\|_{\text{op}} \|T\|_{\text{op}}$$

כמובן שמכך ש־$B(X, X) := \left\{T \in \text{Hom}(X, X) \mid \|T\|_{\text{op}} < \infty\right\}$ נובע כי $\|S \circ T\|_{\text{op}} \leq \|S\|_{\text{op}} \|T\|_{\text{op}} < \infty$. $\square$

סעיף ב'

נוכיח כי אם λ ערך עצמי של $T \in B(X)$ אז $\lambda \leq \|T\|_{\text{op}}$.

הוכחה: ראשית, נשים לב שמתקיים:

$$\|T\|_{\text{op}} = \sup_{\|x\|_X=1} \{\|T(x)\|_X\}$$

יהי u וקטור עצמי של הערך עצמי λ, מתקיים:

$$\|T\|_{\text{op}}$$

TODOOOOOOOOOOOOOOOOOO $\square$

שאלה 4

סעיף א'

יהי (X,d) מרחב מטרי עבור X מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$. נוכיח כי המטריקה d מושרית מנורמה אם ורק אם היא הומגניות ואינווריאנטית להזזה.

הוכחה:

$\Longleftarrow$ נניח כי המטריקה d מושרית מנורמה ונראה כי היא הומוגנית ואינווריאנטית להזזה.

ניזכר כי מטריקה המושרית מנורמה מוגדרת על־ידי $d(x,y) := \|x-y\|$.

ולכן לפי התזכורת מתקיים:

1. הומגניות:

$$d(\alpha x,\alpha y) = \|\alpha x - \alpha y\| = \|\alpha(x-y)\| = |\alpha|\|x-y\|$$

2. אינווריאנטיות להזזה:

$$d(x+z,y+z) = \|(x+z)-(y+z)\| = \|x+z-y-z\| = \|x-y\|$$

$\Longrightarrow$ נניח כי d הומוגנית ואינווריאנטית להזזה ונראה כי d מושרית מנורמה.

מכיוון ש־$d(x,y)$ אינווריאנטית להזזה נובע כי $d(x,y) = d(x-y,0)$.

נגדיר $\|x\| = d(x,0)$ ונראה כי זוהי נורמה:

1. חיוביות: d מטריקה ולכן אי־שלילית וכן $\|x\| = d(x,0) = 0 \iff x = 0$.
2. הומוגניות:

$$\|\alpha x\| = d(\alpha x,0) = d(\alpha x,\alpha 0) = |\alpha| d(x,y) = |\alpha|\|x\|$$

3. אי־שיוויון המשולש:

$$|x+y| = d(x+y,0) = d(x,-y) \le d(x,0) + d(0,-y) = d(x,0) + d(y,0) = \|x\| + \|y\|$$

$\square$

סעיף ב'

יהי $(X,\|\cdot\|)$ מרחב נורמי מעל $\mathbb{R}$. נוכיח כי הנורמה $\|\cdot\|$ מושרית ממכפלה פנימית אם ורק אם היא מקיימת את כלל המקבילית, כלומר לכל $x,y \in X$ מתקיים:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

הוכחה:

$\Longleftarrow$ נניח כי הנורמה $\|\cdot\|$ מושרית ממכפלה פנימית ונראה כי היא מקיימת את כלל המקבילית.

מתקיים מהגדרה:

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \langle x+y,x+y\rangle + \langle x-y,x-y\rangle \\ &= \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle + \langle x,x\rangle - \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle = 2\langle x,x\rangle + 2\langle y,y\rangle \\ &= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \end{aligned}$$

וקיבלנו את כלל המקבילית.

$\Longrightarrow$ נניח כי הנורמה $\|\cdot\|$ מקיימת את כלל המקבילית ונרצה להראות שהיא מושרית ממכפלה פנימית.

נגדיר:

$$\langle x,y\rangle = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$$

ונשים לב ש־$\langle x,y\rangle \mapsto (x,y)$ היא רציפה כצירוף לינארי של פונקציות רציפות (ראינו שנורמה היא רציפה). נשים לב שמתקיימים:

1. $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$ וכן $\|x\| = \sqrt[2]{\langle x,x\rangle}$
2. נרצה להראות שמתקיים $\langle x+y,z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$. מכלל המקבילית, מתקיים:

$$
\begin{aligned}
&2\|x+z\|^2+2\|y\|^2=\|x+y+z\|^2+\|x-y+z\|^2\\
\iff &\|x+y+z\|^2=2\|x+z\|^2+2\|y\|^2-\|x-y+z\|^2\\
&\underset{(1)}{=}2\|y+z\|^2+2\|x\|^2-\|y-x+z\|^2
\end{aligned}
$$

כאשר (1) מתקיים מחילוף תפקידים בין x לבין y. מתקיים אם כך:

$$
\begin{aligned}
\|x+y+z\|^2&=\frac{2\|x+z\|^2+2\|y\|^2-\|x-y+z\|^2+2\|y+z\|^2+2\|x\|^2-\|y-x+z\|^2}{2}\\
&=\|x\|^2+\|y\|^2+\|x+z\|^2+\|y+z\|^2-\frac{1}{2}\|x-y+z\|^2-\frac{1}{2}\|y-x+z\|^2
\end{aligned}
$$

נזכור שמתקיים $\|w\|=\|-w\|$ ולכן

$$
\|x+y-z\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2+\|x-z\|^2+\|y-z\|^2-\frac{1}{2}\|x-y-z\|^2-\frac{1}{2}\|y-x-z\|^2
$$

ולכן

$$
\langle x+y,z\rangle=\frac{1}{4}(\|x+y+z\|^2-\|x+y-z\|^2)=\frac{1}{4}(\|x+z\|^2-\|x-z\|^2)+\frac{1}{4}(\|y+z\|^2-\|y-z\|^2)=\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle
$$

3. נרצה להראות שמתקיים $\langle\lambda x,y\rangle=\lambda\langle x,y\rangle$ לכל $\lambda\in\mathbb{R}$.

נשים לב שעבור $\lambda\in\mathbb{N}$ הטענה נובעת באינדוקציה מהמקרה הקודם. עבור $\lambda\in\mathbb{Z}$, נסמן $\lambda=\frac{p}{q}$ כאשר $p,q\in\mathbb{Z}$ ו-$q\neq 0$, מתקיים:

$$
q\langle\lambda x,y\rangle=q\langle p\cdot\left(\frac{x}{q}\right),y\rangle=p\langle q\frac{x}{q},y\rangle=p\langle x,y\rangle
$$

TODOOOOOOOOOOOOOOOOOO $\square$

סעיף ג'

יהי $1\leq p\leq\infty$. נראה כי הנורמה על המרחב $(\ell^p,\|\cdot\|)$ מושרית ממכפלה פנימית אם ורק אם $p=2$.

הוכחה:

ראשית, בתרגול ראינו כי ℓ^p אכן מהווה מרחב וקטורי ולכן הוא מרחב נורמי.

$\Longleftarrow$ נניח כי הנורמה על המרחב $(\ell^p,\|\cdot\|)$ מושרית ממכפלה פנימית ונראה כי $p=2$.

$\Longrightarrow$ נניח כי $p=2$ ונראה כי הנורמה על המרחב $\ell^p,\|\cdot\|$ מושרית ממכפלה פנימית. TODOOOOOOOOOOOOOOOOOO $\square$

שאלה 5

יהי (X,d) מרחב אולטרה־מטרי, כלומר (X,d) מרחב מטרי המקיים את אי־שיוויון המשולש החזק: $d(x,z)\le\max(d(x,y),d(y,z))$.

סעיף א'

יהיו $x,y,z\in X$ ונוכיח כי אם $d(x,y)>d(y,z)$ אזי $d(x,z)=d(x,y)$.

הוכחה: מכך שמתקיים $d(x,y)>d(y,z)$ ומכך ש־(X,d) מרחב אולטרה־מטרי נובע כי $d(x,z)\le d(x,y)$.
מאי־שיוויון המשולש מתקיים $d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z)\underset{(1)}{<}2d(x,y)$ TODOOOOOOOOOOOOOOOOOOO $\square$

סעיף ב'

נוכיח כי לכל $x,y\in X$ ו־$r>0$ כך ש־$y\in B_r(x)$ מתקיים $B_r(x)=B_r(y)$.

הוכחה: יהי $y\in B_r(x)$. מהגדרה נובע כי זה קורה אם ורק אם $|y-x|<r$ ויהי z כך שמתקיים $|z-x|<r$. מהגדרת המרחב האולטרה־מטרי, נובע כי מתקיים $|z-y|\le\max\{|z-x|,|y-x|\}<r$ משמע $z\in B_r(y)$ ולכן $B_r(x)\subseteq B_r(y)$ ונשים לב שבהחלפת תפקידים בין x לבין y נקבל את ההכלה בכיוון השני. $\square$

סעיף ג'

נוכיח כי לכל $x\in X$ ו־$r>0$ הכדור הסגור $\hat{B}_{r(x)}$ הוא גם פתוח.

הוכחה: TODOOOOOOOOOOOOOOOOOOO $\square$

סעיף ד'

נוכיח כי לכל $x\in X$ ו־$r>0$ הכדור הפתוח $B_r(x)$ הוא גם סגור.

הוכחה: יהי $y\in\partial B_r(x)$. מהגדרה, נובע כי כל כדור פתוח $B_r(y)$ מכיל סביבה של הכדור $B_r(x)$.
יהי $s\le r$, נבחן את הכדור הפתוח $B_s(y)$:
מהיות y נקודה על השפה נובע כי $B_r(x)\cap B_s(y)\ne\emptyset$ ולכן קיים $z\in B_r(x)\cap B_s(y)$ זאת אומרת $|z-x|<r$ ו־$r\ge s>|z-y|$ ומהיות המרחב אולטרה־מטרי נקבל:

$$|y-x|\le\max\{|y-z|,|z-x|\}<\max\{s,r\}=r$$

ולכן $y\in B_r(x)$ אבל מצאנו שנקודה בשפה של הכדור נמצאת בתוך הכדור ולכן הכדור סגור. $\square$

סעיף ה'

יהי $p\in\mathbb{N}$ מספר ראשוני. נחשב את הגבול של הסדרה $X_n=\sum_{i=0}^{n}p^i$ ב־$(\mathbb{Q},d_p)$ כאשר d_p היא המטריקה ה־p־אדית.

הוכחה: TODOOOOOOOOOOOOOOOOOOO $\square$

שאלה 6

יהי (X,d) מרחבי מטרי ו־$A \subseteq X$ תת־קבוצה.

סעיף א'

נוכיח שמתקיים $(A^\circ)^\circ = A^\circ$.

הוכחה: נוכיח באמצעות הכלה דו כיוונית:

$(A^\circ)^\circ \subseteq A^\circ$:

$A^\circ \subseteq (A^\circ)^\circ$:

TODOOOOOOOOOOOOOOOOOOO $\square$

סעיף ב'

נוכיח שמתקיים $\overline{\left(\overline{A}\right)} = \overline{A}$.

הוכחה: נוכיח באמצעות הכלה דו כיוונית:

$\overline{\overline{A}} \subseteq \overline{A}$

$\overline{A} \subseteq \overline{\overline{A}}$

TODOOOOOOOOOOOOOOOOOOO $\square$

סעיף ג'

נוכיח שמתקיים $(A^\circ)^c = \overline{A^c}$.

הוכחה: נזכור כי קבוצה מוכלת ב־A אם ורק אם המשלים שלה מכיל את A^c, ולכן:

$$(A^\circ)^c = \left(\bigcup_{U\subseteq A \text{ open}} U\right)^c = \bigcap_{U\subseteq A \text{ open}} U^c = \bigcap_{A^c\subseteq F \text{ closed}} F = \overline{A^c}$$

$\square$

סעיף ד'

נוכיח שמתקיים $\left(\overline{A}\right)^c = (A^c)^\circ$.

הוכחה: TODOOOOOOOOOOOOOOOOOOO $\square$

סעיף ה'

נוכיח שמתקיים $\overline{\partial A} = \partial A$.

הוכחה: נוכיח באמצעות הכלה דו־כיוונית: $\overline{\partial A} \subseteq \partial A$:

$\partial A \subseteq \overline{\partial A}$: ניזכר כי ∂A היא סגורה: $\partial A = \overline{A} \setminus (A^\circ)^c = \overline{A} \cap \left(\underbrace{X \setminus A^\circ}_{\text{closed set}}\right)$.

$\square$