

# פתרון מטלה 01 – פונקציות מרוכבות, 80519

1 בנובמבר 2025



# שאלה 1

## סעיף א'

נתון  $z = 1 - i\sqrt{3}$ , נמיר לקורדינאטות פולאריות ונצייר.

פתרון: נחשב  $r = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

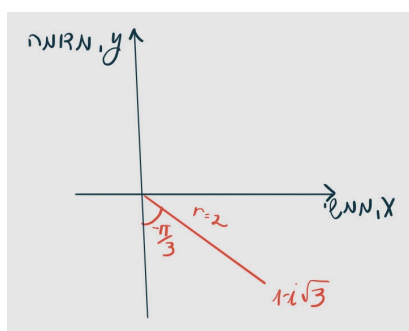
בשביל הארגומנט, נשים לב ש- $Re(z) > 0$  ו- $Im(z) < 0$  כלומר אנחנו נמצאים ברביע הרביעי ולכן

$$\alpha = \arctan\left(\left|\frac{-\sqrt{3}}{1}\right|\right) = \frac{\pi}{3}$$

וכדי שנהיה ברביע הנכון בשביל הארגומנט עלינו לשקף כלומר  $Arg(z) = -\frac{\pi}{3}$

אז בכתיב פולארי, מתקיים

$$z = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2e^{-\frac{i\pi}{3}}$$

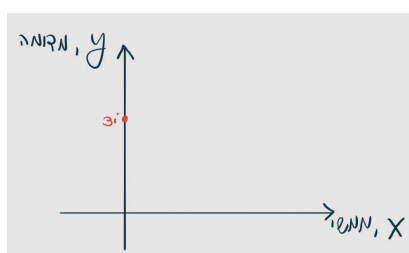


□

## סעיף ב'

נתון  $z = 3e^{\frac{i\pi}{2}}$ , נעביר לקורדינאטות פולאריות ונצייר.

פתרון: נתון  $r = 3$  ולכן  $z = 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 3i$  כלומר ממש קיבלנו נקודה.



□

## סעיף ג'

נסמן  $\mathbb{C} \ni z = x + iy, w = a + ib$  ותהינה  $M_z, M_w$  המטריצות שמייצגות את המספר המרוכב  $z, w$  בהתאמה.

תזכורת:  $M_z = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$

## תת-סעיף א'

נוכיח את הזהות  $M_{z+w} = M_z + M_w$

הוכחה: מתקיים

$$z + w \stackrel{\text{חיבור מרוכבים}}{=} (x + a) + i(y + b) \Rightarrow M_{z+w} = \begin{pmatrix} x + a & -(y + b) \\ y + b & x + a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + a & -y - b \\ y + b & x + a \end{pmatrix}$$

מצד שני

$$M_z + M_w = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+a & -y-b \\ y+b & x+a \end{pmatrix} = M_{z+w}$$

□

תת-סעיף ב'

נוכיח את הזהות  $M_{z \cdot w} = M_z \cdot M_w$ .

הוכחה: מתקיים

$$z \cdot w \stackrel{\text{כפל מרוכבים}}{=} (x + iy) \cdot (a + ib) = (xa - yb) + i(ya + xb) \Rightarrow M_{z \cdot w} = \begin{pmatrix} xa - yb & -ya - xb \\ ya + xb & xa - yb \end{pmatrix}$$

מצד שני

$$M_z \cdot M_w = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa - yb & -xb - yb \\ ya + xb & -yb + xa \end{pmatrix} = M_{z \cdot w}$$

□

## שאלה 2

### סעיף א'

נפתור  $x^4 = -8 + i8\sqrt{3}$ .

פתרון: אנהנו מחפשים את השורש ארבעת השורשים המרוכבים של המספר  $z = -8 + i8\sqrt{3}$ .  
נעבור לקורדינאטות פולאריות

$$r = |z| = \sqrt{(-8)^2 + (8\sqrt{3})^2} = \sqrt{64 + 192} = \sqrt{256} = 16 \quad (r \geq 0)$$

ראינו  $Arg(z) = \text{atan2}(y, x)$ , כלומר  $\arctan$  עם התחשבות ברביע.  
במקרה שלנו מתקיים  $Re(z) = -8, Im(z) = 8\sqrt{3}$  כלומר  $z$  נמצא ברביע השני ו- $\arctan$  יחזיר לנו זווית בכיוון הפוך ולכן עלינו לתקן בהוספת  $\pi, \pi$

$$\text{atan2}(z) = \arctan\left(\frac{8\sqrt{3}}{-8}\right) + \pi = \frac{-\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3}$$

באופן דומה יכלנו למצוא באמצעות פתירת מערכת המשוואות

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \Rightarrow \cos(\theta) = \frac{-8}{16} = -\frac{1}{2} \\ y = r \sin(\theta) \Rightarrow \sin(\theta) = \frac{8\sqrt{3}}{16} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$$

אז

$$z = 16 \left( \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right) = 16e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

יש 4 שורשים ולכן ממשפט דה־מואבר נקבל

$$x_k = \sqrt[4]{16} \left( \cos\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right) \right), \quad k \in \{0, 1, 2, 3\}, \quad n = 4$$

נחשב

$$\begin{aligned} x_0 &= 2 \left( \cos\left(\frac{\frac{2\pi}{3} + 0}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\frac{2\pi}{3} + 0}{4}\right) \right) = 2 \left( \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right) \\ x_1 &= 2 \left( \cos\left(\frac{\frac{2\pi}{3} + 2\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\frac{2\pi}{3} + 2\pi}{4}\right) \right) = 2 \left( \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right), \\ x_2 &= 2 \left( \cos\left(\frac{\frac{2\pi}{3} + 4\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\frac{2\pi}{3} + 4\pi}{4}\right) \right) = 2 \left( \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) \right), \\ x_3 &= 2 \left( \cos\left(\frac{\frac{2\pi}{3} + 6\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\frac{2\pi}{3} + 6\pi}{4}\right) \right) = 2 \left( \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) \right) \end{aligned}$$

□

## סעיף ב'

תהי  $\theta \in \mathbb{R}$  ו- $N \in \mathbb{N}$  ונמצא נוסחה סגורה לסכום בכל סעיף.

### תת-סעיף א'

$$\sum_{n=1}^N \cos(n\theta)$$

פתרון: ראינו  $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$  ולכן  $\cos(n\theta) = \operatorname{Re}(e^{in\theta})$  ונקבל

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \cos(n\theta) &= \sum_{n=1}^N \operatorname{Re}(e^{in\theta}) = \operatorname{Re}\left(\sum_{n=1}^N e^{in\theta}\right) \stackrel{\text{משפט דה-מואבר}}{=} \operatorname{Re}\left(\sum_{n=1}^N (e^{i\theta})^n\right) \stackrel{\text{תור הנדסי סופי}}{=} \operatorname{Re}\left(\frac{e^{i\theta} - e^{i(N+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}\right) \\ &= \operatorname{Re}\left(\frac{e^{\frac{i\theta}{2}}(e^{\frac{i\theta}{2}} - e^{i(N+\frac{1}{2})\theta})}{e^{\frac{i\theta}{2}}(e^{-\frac{i\theta}{2}} - e^{\frac{i\theta}{2}})}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{e^{\frac{i\theta}{2}} - e^{i(N+\frac{1}{2})\theta}}{e^{-\frac{i\theta}{2}} - e^{\frac{i\theta}{2}}}\right) (*) \end{aligned}$$

מנוסחת דה-מואבר ומהיות  $\sin, \cos$  פונקציות אי-זוגיות וזוגיות בהתאמה

$$\begin{aligned} e^{-\frac{i\theta}{2}} - e^{\frac{i\theta}{2}} &= \cos\left(-\frac{\theta}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\theta}{2}\right) - \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) = \cancel{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} - i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - \cancel{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} - i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ &= -2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{aligned}$$

נניח  $\theta \neq 2\pi k$  עבור  $k \in \mathbb{Z}$ , ולכן כאשר  $(*)$  נובע שוב מדה-מואבר

$$\begin{aligned} (*) &= \operatorname{Re}\left(\frac{e^{\frac{i\theta}{2}} - e^{i(N+\frac{1}{2})\theta}}{-2i \sin(\frac{\theta}{2})}\right) \stackrel{\frac{1}{-i}=i}{=} \operatorname{Re}\left(\frac{i(e^{\frac{i\theta}{2}} - e^{i(N+\frac{1}{2})\theta})}{2 \sin(\frac{\theta}{2})}\right) \\ &\stackrel{(**)}{=} \operatorname{Re}\left(\frac{i(\cos(\frac{\theta}{2}) + i \sin(\frac{\theta}{2})) - \cos((N + \frac{1}{2})\theta) - i \sin((N + \frac{1}{2})\theta))}{2 \sin(\frac{\theta}{2})}\right) \\ &= \operatorname{Re}\left(\frac{i \cos(\frac{\theta}{2}) - \sin(\frac{\theta}{2}) - i \cos((N + \frac{1}{2})\theta) + \sin((N + \frac{1}{2})\theta)}{2 \sin(\frac{\theta}{2})}\right) \\ &= \frac{\sin((N + \frac{1}{2})\theta) - \sin(\frac{\theta}{2})}{2 \sin(\frac{\theta}{2})} \end{aligned}$$

אם  $\theta = 2\pi k$  עבור  $k \in \mathbb{Z}$  אז

$$\sum_{n=1}^N \cos(n\theta) = \sum_{n=1}^N 1 = N$$

□

### תת-סעיף ב'

$$\sum_{n=1}^N \sin(n\theta)$$

פתרון: נשתמש בסעיף א' עם אותן הגבלות על  $\theta$  רק שאם  $\theta = 2\pi k$  עבור  $k \in \mathbb{Z}$  אז  $\sum_{n=1}^N \sin(n\theta) = 0$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \sin(n\theta) &= \sum_{n=1}^N \operatorname{Im}(e^{in\theta}) = \operatorname{Im}\left(\sum_{n=1}^N e^{in\theta}\right) \stackrel{\text{משפט דה-מואבר}}{=} \operatorname{Im}\left(\sum_{n=1}^N (e^{i\theta})^n\right) \stackrel{\text{תור הנדסי סופי}}{=} \operatorname{Im}\left(\frac{e^{i\theta} - e^{i(N+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}\right) \\ &\Rightarrow \operatorname{Im}\left(\frac{i \cos(\frac{\theta}{2}) - \sin(\frac{\theta}{2}) - i \cos((N + \frac{1}{2})\theta) + \sin((N + \frac{1}{2})\theta)}{2 \sin(\frac{\theta}{2})}\right) \\ &= \frac{\cos(\frac{\theta}{2}) - \cos((N + \frac{1}{2})\theta)}{2 \sin(\frac{\theta}{2})} \stackrel{\text{זהות}}{=} (\sin) \end{aligned}$$

□

### שאלה 3

#### סעיף א'

נוכיה שמתקיים

$$z_n \rightarrow z \iff \operatorname{Re}(z_n) \rightarrow \operatorname{Re}(z) \wedge \operatorname{Im}(z_n) \rightarrow \operatorname{Im}(z)$$

הוכחה: לכל  $n \in \mathbb{N}$  נסמן  $z_n = x_n + iy_n$  ו-  $z = x + iy$ .

$\Leftarrow$  נניח כי  $z_n \rightarrow z$  ונרצה להראות  $\operatorname{Re}(z_n) \rightarrow \operatorname{Re}(z)$  וכן  $\operatorname{Im}(z_n) \rightarrow \operatorname{Im}(z)$ . יהי  $\varepsilon > 0$ , מההתכנסות נובע שיש  $N \in \mathbb{N}$  כך שלכל  $n \geq N$  מתקיים

$$|z_n - z| = |x_n + iy_n - (x + iy)| = |x_n - x + i(y_n - y)| = \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} < \varepsilon$$

מצד שני

$$|\operatorname{Re}(z_n) - \operatorname{Re}(z)| = |x_n - x| = \sqrt{(x_n - x)^2} \leq \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} < \varepsilon$$

$$|\operatorname{Im}(z_n) - \operatorname{Im}(z)| = |y_n - y| = \sqrt{(y_n - y)^2} \leq \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} < \varepsilon$$

כלומר,  $\operatorname{Re}(z_n) \rightarrow \operatorname{Re}(z) \wedge \operatorname{Im}(z_n) \rightarrow \operatorname{Im}(z)$  כנדרש.

$\Rightarrow$  נניח כי  $\operatorname{Re}(z_n) \rightarrow \operatorname{Re}(z) \wedge \operatorname{Im}(z_n) \rightarrow \operatorname{Im}(z)$  ונרצה להראות  $z_n \rightarrow z$ .

יהי  $\varepsilon > 0$  ומההתכנסות נובע שקיימים  $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$  כך שמתקיים לכל  $k \geq N_1$  ו-  $m \geq N_2$ ,

$$|\operatorname{Re}(z_k) - \operatorname{Re}(z)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |\operatorname{Im}(z_m) - \operatorname{Im}(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

נבחר  $N = \max(N_1, N_2)$  ולכל  $n \geq N$  מתקיים

$$|z_n - z| = |x_n + iy_n - (x + iy)| = |(x_n - x) + i(y_n - y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

כלומר,  $z_n \rightarrow z$  כנדרש.

#### סעיף ב'

יהי  $K \subset \mathbb{C}$  ונראה ש-  $K$  קומפקטי אם ורק אם לכל סדרה  $(z_n)_{n=1}^\infty \subseteq K$  יש תת-סדרה  $(z_{n_k})_{k=1}^\infty$  מתכנסת ל-  $z \in K$ .

הוכחה:

תזכורת: ראשית, ראינו ש-  $\mathbb{C}$  הוא מרחב מטרי. שנית, באינפי3 ראינו שבמרחבים מטריים, קומפקטיות וקומפקטיות סדרתית הן טענות שקולות.

כלומר, להגיד שלקבוצה במרחב מטרי לכל סדרה יש תת-סדרה מתכנסת (קומפקטיות סדרתית) שקול ללהגיד שיש לכל כיסוי פתוח של הקבוצה יש תת-כיסוי סופי (קומפקטיות).

$\Leftarrow$  נניח כי  $K$  קומפקטי ונראה שלסדרה  $(z_n)_{n=1}^\infty \subseteq K$  יש תת-סדרה מתכנסת.

תהי  $(z_n)_{n=1}^\infty \subseteq K$ , כך שלכל  $n \in \mathbb{N}$  מתקיים  $z_n = x_n + iy_n$ .

מהיות  $K$  קומפקטי (סגור וחסום), נובע שקיים  $M > 0$  כך שלכל  $z \in K$  מתקיים  $|z| \leq M$  ובפרט לכל  $n \in \mathbb{N}$  מתקיים  $|z_n| \leq M$ .

נבחין ש-  $(z_n)_{n=1}^\infty$  חסומה ב-  $\mathbb{C}$  אם ורק אם  $(x_n)_{n=1}^\infty, (y_n)_{n=1}^\infty$  חסומות ב-  $\mathbb{R}$ .

החסימות על  $\mathbb{C}$  במקרה זה תקפה גם לחסימות על  $\mathbb{R}$  ולכן ממשפט בולציאנו-ויירשטראס יש ל-  $(x_n)_{n=1}^\infty$  תת-סדרה מתכנסת,  $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$  המתכנסת

ל-  $x \in \mathbb{R}$ .

באותו אופן, ל-  $(y_{n_k})_{k=1}^\infty$  יש גם תת-סדרה מתכנסת,  $(y_{n_{k_l}})_{l=1}^\infty$  המתכנסת ל-  $y \in \mathbb{R}$ .

נסתכל על  $(z_{n_{k_l}})_{l=1}^\infty$  זו כמובן תת-סדרה של  $(z_n)_{n=1}^\infty$  כך שסדרת הממשיים וסדרת המדומים מתכנסות ל-  $y, x$  בהתאמה ולכן מהסעיף הקודם

$$\lim_{l \rightarrow \infty} z_{n_{k_l}} = \lim_{l \rightarrow \infty} (x_{n_{k_l}} + iy_{n_{k_l}}) = x + iy = z \in \mathbb{C}$$

מצאנו סדרה מתכנסת ב-  $K$  ומהיות  $K$  קומפקטי אז הוא סגור וחסום ולכן  $z \in K$  (מהניסוח השקול כאוסף הנקודות הגבוליות).

נניח בשלילה כי  $K$  אינו קומפקטי-סדרתית, כלומר יש  $z \in K$  כך שאין לה תת-סדרה מתכנסת.

$\Rightarrow$  נניח שלכל סדרה  $(z_n)_{n=1}^\infty \subseteq K$  יש תת-סדרה מתכנסת  $(z_{n_k})_{k=1}^\infty$  ל- $z \in K$  ונרצה להראות ש- $K$  סגור וחסום.  
 סגור: נובע מהניסוח השקול קבוצה סגורה כאוסף כל הנקודות הגבוליות במרחב ומכך שלכל סדרה יש תת-סדרה מתכנסת ל- $z \in K$ , כלומר  $K$  אוסף כל הנקודות הגבוליות.  
 חסום: נניח ש- $K$  לא חסום ולכן לכל  $n \geq 1$  יש  $z_n \in K$  כך שמתקיים  $|z_n| > n$  נגדיר ככה את הסדרה  $(z_n)_{n=1}^\infty$ .  
 מההנחה יש לסדרה זו תת-סדרה מתכנסת כך שמתקיים  $\lim_{k \rightarrow \infty} z_{n_k} = z \in K$  ולכן בפרט שנובע שהסדרה חסומה.  
 אבל זו סתירה שכן לכל אינדקס  $n_k$  מתקיים  $|z_{n_k}| > n_k$  ו- $n_k \rightarrow \infty$  כלומר  $\lim_{k \rightarrow \infty} |z_{n_k}| = \infty$  בסתירה.  
 לכן הנחת השלילה לא נכונה ו- $K$  חסום.

□

## שאלה 4

תהי  $(z_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathbb{C}$ .

### סעיף א'

נוכיח  $0 \rightarrow \rho(z_n, \infty)$  אם ורק אם  $|z_n| \rightarrow \infty$ .

הוכחה:

תזכורת:

$$\rho(z, \infty) = \lim_{w \rightarrow \infty} \rho(z, w) = \lim_{w \rightarrow \infty} \frac{2|1 - \frac{z}{w}|}{\sqrt{1 + |z|^2} \sqrt{\frac{1}{|w|^2} + 1}} = \frac{2}{\sqrt{1 + |z|^2}}$$

$\Leftarrow$  נניח כי  $0 \rightarrow \rho(z_n, \infty)$  ונרצה להראות  $|z_n| \rightarrow \infty$

מתקיים

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(z_n, \infty) = 0 \iff \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \text{הגדרה}}} \frac{2}{\sqrt{1 + |z_n|^2}} = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + |z_n|^2} = \infty$$

$$\iff \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + |z_n|^2 = \infty \iff \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \text{קבוע}}} |z_n|^2 = \infty \iff \lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = \infty$$

$\Rightarrow$  נניח כי  $|z_n| \rightarrow \infty$  ונרצה להראות  $0 \rightarrow \rho(z_n, \infty)$

מתקיים

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(z_n, \infty) = \frac{2}{\sqrt{1 + |z|^2}}$$

□

היות  $|z_n| \rightarrow \infty$  אזי המכנה שואף ל- $\infty$  ומאריטמטיקה של גבולות  $0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(z_n, \infty)$ .

### סעיף ב'

נוכיח  $0 \rightarrow \rho(z_n, z)$  אם ורק אם  $|z_n - z| \rightarrow 0$ .

הוכחה: תזכורת:

$$\rho(z, w) = \frac{2|z - w|}{\sqrt{1 + |z|^2} \sqrt{1 + |w|^2}}$$

$\Leftarrow$  נניח כי  $0 \rightarrow \rho(z_n, z)$  ונראה כי  $|z_n - z| \rightarrow 0$

מתקיים

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(z_n, z) = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2|z_n - z|}{\sqrt{1 + |z_n|^2} \sqrt{1 + |z|^2}} = 0$$

ראשית,  $\sqrt{1 + |z|^2} = C \in \mathbb{R}$  קבוע כלשהו.

שנית, נובע מהגדרת הגבול שהמונה שואף ל-0 או שהמכנה שואף ל- $\infty$ .

אם המונה שואף ל-0 אזי  $0 = \lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - z| \iff \lim_{n \rightarrow \infty} 2|z_n - z| = 0$  וסיימנו.

לא ייתכן שהמכנה שואף ל- $\infty$ : ההגדרה  $0 \rightarrow \rho(z_n, z)$  אומרת שהמרחק בין  $z_n$  לבין  $z \in \mathbb{C}$  שהיא נקודה סופית שואף ל-0 על הספירה של רימן.

אם יתקיים  $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = \infty$ , יהיה חייב להתקיים  $\rho(\infty, z) = \frac{2}{\sqrt{1 + |z|^2}} \in \mathbb{R}$  וזאת סתירה.

$\Leftarrow$  נניח כי  $|z_n - z| \rightarrow 0$  ונראה כי  $0 \rightarrow \rho(z_n, z)$ .

מהתזכורת, מספיק שנבחן את המכנה (כי המונה שואף ל-0 מההנחה), מתקיים

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + |z_n|^2} \sqrt{(1 + |z|^2)} \stackrel{\text{ההנחה}}{=} \sqrt{1 + |z|^2} \sqrt{1 + |z|^2} = 1 + |z|^2 \implies \mathbb{R} \ni 1 + |z|^2 \neq 0$$

□

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(z_n, z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2|z_n - z|}{\underbrace{(\sqrt{1 + |z_n|^2} \sqrt{1 + |z|^2})}_{=1 + |z|^2 =: C}} = \frac{0}{C} = 0 \text{ ונקבל } C = 1 + |z|^2$$



## שאלה 5

תהי  $P = (x_0, y_0, z_0)$  כך שמתקיים  $\phi^{-1}(z) = P$  כלומר

$$\phi^{-1}(z) = \phi^{-1}(x + iy) = \left( \frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2}, 1 - \frac{2}{1+x^2+y^2} \right) = (x_0, y_0, z_0)$$

$$\phi(z) = \left( \frac{2 \operatorname{Re}(z)}{1+|z|^2}, \frac{2 \operatorname{Im}(z)}{1+|z|^2}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} \right)$$

### סעיף א'

נראה כי  $P_1 = (x_0, -y_0, z_0)$  הוא התמונה של  $\bar{z}$ , כלומר  $\phi(\bar{z}) = P_1$ .

פתרון: ניוזכר

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} \implies |\bar{z}| = \sqrt{\bar{z} \cdot z} = \sqrt{\bar{z} \cdot z} = |z|$$

מתקיים  $\bar{z} = x - iy$  ולכן

$$\phi(\bar{z}) = \phi(x - iy) = \left( \frac{2x}{1+|z|^2}, \frac{-2y}{1+|z|^2}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} \right) = P_1$$

□

### סעיף ב'

נראה כי  $P_2 = (x_0, y_0, -z_0)$  הוא התמונה של  $\frac{1}{\bar{z}}$ , כלומר  $\phi\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = P_2$ .

פתרון: נסמן  $z = x + iy$  ולכן  $\bar{z} = x - iy$  ונגדיר  $w = \frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{x - iy}$ , נרצה לייצג את  $w$  בצורה  $w = a + ib$  עבור  $a, b \in \mathbb{R}$ , אז

$$w = \frac{1}{x - iy} = \frac{1}{x - iy} \cdot \frac{x + iy}{x + iy} = \frac{x + iy}{x^2 + y^2} = \frac{x + iy}{|z|^2}$$

ובאותו אופן מהסעיף הקודם  $|w| = \frac{1}{|z|}$  ולכן  $|\bar{z}| = |z|$  ומתקיים

$$\begin{aligned} \phi\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) &= \phi(w) = \phi\left(\frac{x + iy}{|z|^2}\right) = \left( \frac{2 \cdot \frac{x}{|z|^2}}{1 + \frac{1}{|z|^2}}, \frac{2 \cdot \frac{y}{|z|^2}}{1 + \frac{1}{|z|^2}}, \frac{\frac{1}{|z|^2} - 1}{\frac{1}{|z|^2} + 1} \right) \\ &= \left( \frac{2x}{1 + |z|^2}, \frac{2y}{1 + |z|^2}, \frac{1 - |z|^2}{1 + |z|^2} \right) = (x_0, y_0, -z_0) = P_2 \end{aligned}$$

□

### סעיף ג'

נראה כי  $P_3 = (x_0, -y_0, -z_0)$  הוא התמונה של  $\frac{1}{z}$ , כלומר  $\phi\left(\frac{1}{z}\right) = P_3$ .

פתרון: שוב נסמן  $z = x + iy$  ולכן  $w = \frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy}$  ונרצה לייצג את  $w$  בצורה  $w = a + ib$  עבור  $a, b \in \mathbb{R}$ , אז

$$w = \frac{1}{x + iy} = \frac{1}{x + iy} \cdot \frac{x - iy}{x - iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x - iy}{|z|^2}$$

מתקיים

$$\begin{aligned} \phi\left(\frac{1}{z}\right) &= \phi(w) = \phi\left(\frac{x - iy}{|z|^2}\right) = \left( \frac{2 \cdot \frac{x}{|z|^2}}{1 + \frac{1}{|z|^2}}, \frac{2 \cdot \frac{-y}{|z|^2}}{1 + \frac{1}{|z|^2}}, \frac{\frac{1}{|z|^2} - 1}{\frac{1}{|z|^2} + 1} \right) \\ &= \left( \frac{2x}{1 + |z|^2}, \frac{-2y}{1 + |z|^2}, \frac{1 - |z|^2}{1 + |z|^2} \right) = (x_0, -y_0, -z_0) = P_3 \end{aligned}$$

□

## סעיף ד'

נראה כי הפעולות בסעיפים הקודמים משמרים את  $\rho$ .

הוכחה: במילים אחרות, אנחנו רוצים להראות שהפונקציות  $z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}, z \mapsto \bar{z}$ ,  $z \mapsto \frac{1}{z}, z \mapsto \bar{z}$  הן כולן איזומטריות. כפעולות על  $\mathbb{C}$  – שיקוף על-פני ציר  $xz$ , שיקוף על-פני ציר  $xy$  וסיבוב ב- $\pi$  מסביב לציר ה- $x$ , בהתאמה לסעיף.

נכתוב  $z = x_0 + iy_0, w = x_1 + iy_1$ .

עבור סעיף א' עלינו להראות  $\rho(\bar{z}, \bar{w}) = \rho(z, w)$  כלומר

$$\frac{2|z - w|}{\sqrt{1 + |z|^2} \sqrt{1 + |w|^2}} = \frac{2|\bar{z} - \bar{w}|}{\sqrt{1 + |\bar{z}|^2} \sqrt{1 + |\bar{w}|^2}}$$

אכן כבר ראינו  $|z| = |\bar{z}|$  (★) לכל  $z \in \mathbb{C}$  וכן

$$\bar{z} - \bar{w} = x_0 - iy_0 - (x_1 - iy_1) = (x_0 - x_1) - i(y_0 - y_1) = \overline{z - w} \Rightarrow |\bar{z} - \bar{w}| = |z - w|$$

כלומר אכן יש למעלה שיוויון.

עבור סעיף ב' עלינו להראות  $\rho\left(\frac{1}{z}, \frac{1}{w}\right) = \rho(z, w)$  כלומר

$$\frac{2|z - w|}{\sqrt{1 + |z|^2} \sqrt{1 + |w|^2}} = \frac{2\left|\frac{1}{z} - \frac{1}{w}\right|}{\sqrt{1 + \left|\frac{1}{z}\right|^2} \sqrt{1 + \left|\frac{1}{w}\right|^2}}$$

מתקיים

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{z} - \frac{1}{w}\right| &= \left|\frac{\bar{w} - \bar{z}}{\bar{z}\bar{w}}\right| \stackrel{|\bar{w}-\bar{z}|=|w-z|}{=} \frac{|w - z|}{|\bar{z}||\bar{w}|} \stackrel{(\star)}{=} \frac{|w - z|}{|z||w|} \\ \sqrt{1 + \left|\frac{1}{z}\right|^2} &\stackrel{(\star)}{=} \sqrt{1 + \frac{1}{|z|^2}} = \sqrt{\frac{|z|^2 + 1}{|z|^2}} = \frac{\sqrt{1 + |z|^2}}{|z|} \end{aligned}$$

ולכן

$$\rho\left(\frac{1}{z}, \frac{1}{w}\right) = \frac{2 \cdot \frac{|z-w|}{|z||w|}}{\frac{\sqrt{1+|z|^2}}{|z|} \frac{\sqrt{1+|w|^2}}{|w|}} = \frac{2|z - w|}{\sqrt{1 + |z|^2} \sqrt{1 + |w|^2}}$$

ושוב קיבלנו לעיל שיוויון.

עבור סעיף ג', נבחין שזה נובע משני המקרים הקודמים כהרכבה של איזומטריות שכן  $\frac{1}{z} = \overline{\frac{1}{\bar{z}}}$  וכידוע הרכבה של איזומטריות היא איזומטרייה, ולכן גם

מתקיים

$$\frac{2|z - w|}{\sqrt{1 + |z|^2} \sqrt{1 + |w|^2}} = \frac{2\left|\frac{1}{z} - \frac{1}{w}\right|}{\sqrt{1 + \left|\frac{1}{z}\right|^2} \sqrt{1 + \left|\frac{1}{w}\right|^2}}$$

□

כלומר, כל הסעיפים הקודמים הם איזומטריות על ספירת רימן.