

פתרון מטלה 03 – פונקציות מרוכבות, 80519

18 בנובמבר 2025



שאלה 1

נראה כי ההעתקה $z \mapsto \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2$ ו- $z \mapsto i\frac{1-z^2}{1+z^2}$ ממפות את החצי העליון של הדיסק לחצי מישור העליון. הוכחה: קודם כל נכתוב מפורשות את התחומים הנדרשים

$$\mathbb{D}^+ = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1 \text{ and } \operatorname{Im}(z) \geq 0\}, \quad H^+ = \{w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(w) > 0\}$$

השפה של \mathbb{D}^+ הם כל $z \in \mathbb{C}^-$ המקיימים $|z| = 1$ או $\operatorname{Im}(z) = 0$, נצטרך לכתוב את $\partial\mathbb{D}^+$ מפורשות ולכן ננתח את התנאים האלו, כלומר נרצה לכתוב פרמטריזציה של $z = e^{i\theta}$ ולמצוא תנאים מגבילים על θ . התנאי $|z| = 1$ עם $\operatorname{Im}(z) \geq 0$ אומר כי $|e^{i\theta}| = 1$ ולכן $e^{i\theta} = 1$ או $e^{i\theta} = -1$ ואנחנו יודעים שתנאים אלו מתקיימים אם $0 < \theta < \pi$. כמו-כן, עם נוסחת אויילר ניתן לראות כי מתקיים $\operatorname{Im}(z) \geq 0$:

$$z = e^{i0} = \cos(0) + i\sin(0) = 1 \implies \operatorname{Im}(z) = 0,$$

$$z = e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1 + 0 = -1 \implies \operatorname{Im}(z) = 0,$$

$$z = e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 + i \implies \operatorname{Im}(z) = 1$$

התנאי $|z| \leq 1$ עם $\operatorname{Im}(z) = 0$ זו בעצם פונקציה לינארית ממשית עם $z = x$ עבור $-1 \leq x \leq 1$. נסמן את התנאי $|z| = 1 \wedge \operatorname{Im}(z) \geq 0$ ב- A ואת התנאי $|z| \leq 1 \wedge \operatorname{Im}(z) = 0$ ב- B . נסמן את ההעתקה $z \mapsto \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2$ על-ידי $f(z)$ ונבחין שזו הרכבה של העתקת מוביוס עם הפונקציה של ההעלאה בריבוע. נכתוב $w_1 = \frac{1+z}{1-z}$ עבור $z = e^{i\theta}$ ונחשב בהתאם לשני המקרים שהגדרנו מקודם

$$w_1 = \frac{1+z}{1-z} = \frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = \frac{e^{\frac{i\theta}{2}}(e^{-\frac{i\theta}{2}} + e^{\frac{i\theta}{2}})}{e^{\frac{i\theta}{2}}(e^{-\frac{i\theta}{2}} - e^{\frac{i\theta}{2}})} = \frac{e^{-\frac{i\theta}{2}}(e^{\frac{i\theta}{2}} + e^{-\frac{i\theta}{2}})}{e^{-\frac{i\theta}{2}}(e^{\frac{i\theta}{2}} - e^{-\frac{i\theta}{2}})}$$

נעדיף את הנוסחה השנייה שכן בתרגול שראינו שמתקיים

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sin(z), \quad \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2i} = \cos(z) \implies w_1 = \frac{2\cos(\frac{z}{2})}{2i\sin(\frac{z}{2})} = \frac{\cos(\frac{z}{2})}{i\sin(\frac{z}{2})}$$

תחת מקרה A , כמובן שהביטוי מוגדר היטב (אין חלוקה ב-0) וגם מתקיים $\operatorname{Re}(w_1) = 0$ כלומר w_1 הוא מהצורה ib עבור $b \in \mathbb{R}$. כלומר, $w_1^2 = f(z) = -b^2$. תחת המקרה B , $-1 < z < 1$ ולכן $w_1 = \frac{1+z}{1-z} \in \mathbb{R}^+$ ולכן גם $w_1^2 = f(z) \in \mathbb{R}^+$ כלומר f ממופה על-ידי f אל כל הישר הממשי.

נרצה לראות מה קורה בנקודות הפנימיות כדי לנתח לאן כל \mathbb{D} נשלח. ניקח $z_0 = \frac{i}{2}$ ולכן

$$f(z_0) = \left(\frac{1+\frac{i}{2}}{1-\frac{i}{2}}\right)^2 = \left(\frac{2+i}{2-i}\right)^2 = \frac{(2+i)^2}{(2-i)^2} = \frac{3+4i}{3-4i}$$

לא עוזר לנו כל-כך, נחשב בדרך אחרת

$$\frac{2+i}{2-i} = \frac{(2+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{3+4i}{5} = \frac{3}{5} + \frac{4i}{5} \implies \left(\frac{2+i}{2-i}\right)^2 = \left(\frac{3+4i}{5}\right)^2 = \frac{-7+24i}{25}$$

אז $\operatorname{Im}(z) = \frac{24}{25} \geq 0$, ולכן ראינו שנקודה פנימית נשלחת ל- H^+ ונטען שזה מספיק כדי להראות ש- f ממפה את החצי העליון של הדיסק לחצי מישור העליון: f רציפה כהרכבה של פונקציות רציפות. ניקח z_0 נקודה בחצי הדיסק העליון ונבנה מסילה אל z_1 בחצי הדיסק העליון ונניח $w_0 = f(z_0)$ ממפה לחצי המישור העליון ונניח בשלילה ש- $w_1 = f(z_1)$ נשלחת לחצי המישור התחתון אז מרציפות f עם המסילה הרציפה שיצרנו נקבל מסילה בין w_0 לבין w_1 , אבל אז המסילה הזאת בהכרח עוברת בשפה כלומר יש z_2 כך ש- $f(z_2)$ היא נקודה על הציר הממשי והמקור שלה הוא נקודה פנימית בחצי הדיסק העליון אבל אמרנו שרק נקודות על השפה של החצי דיסק העליון יכולות לשלוח לציר הממשי, ו- z_2 היא פנימית אז זאת כמובן סתירה.

נשאר לעשות את אותו התהליך עבור ההעתקה $z \mapsto i \frac{1-z^2}{1+z^2}$, נפרק אותה לשלוש העתקות שונות

$$z \xrightarrow{T_1} z^2 = u \xrightarrow{T_2} \frac{1-u}{1+u} = w \xrightarrow{T_3} iw$$

כלומר שרשור העתקות החזקה, העתקת מוביוס ומכפלה ב- i . ננתח כל העתקה בנפרד:

ההעתקה $T_1(z) = z^2 = u$ לוקחת $z \in \mathbb{D}^+$ ושולחת אותו אל \mathbb{D} דיסק היחידה המלא שכן אם $|z| < 1$ אז $|z^2| < 1$, כלומר נקודות פנימיות בחצי הדיסק העליון נשלחות לנקודות פנימיות בדיסק היחידה המלא ואם z בשפה אז $u = e^{i2\theta}$ מזהות דה-מואבר ולכן עבור $0 < \theta < \pi$ אנחנו נשלחים למעגל היחידה ואם $-1 < x < 1$ אז אנחנו נשלחים לקטע $[0, 1)$.

כלומר, ההעתקה T_1 שולחת את חצי הדיסק העליון אל דיסק היחידה.

נסתכל כעת על $T_2(u) = \frac{1-u}{1+u} = w'$ זו בעצם שוב העתקת מוביוס.

אם נסתכל על הנקודות שעל מעגל היחידה (השפה של דיסק היחידה) אז $|u| = 1$ ולכן $|u| = 1$ ונשים לב שמתקיים

$$\frac{\overline{1-u}}{1+u} = \frac{1-\bar{u}}{1+\bar{u}} = \frac{1-\frac{1}{u}}{1+\frac{1}{u}} = \frac{u-1}{u+1} \Rightarrow \frac{u-1}{u+1} = \frac{-(1-u)}{1+u}$$

אז אם נסמן $w' = \frac{1-u}{1+u}$ קיבלנו שמתקיים $\overline{w'} = -w'$ וזה בהכרח אומר ש- w' הוא מהצורה $w' = ib$ עבור $b \in \mathbb{R}$, כלומר מעגל היחידה נשלח בידיוק אל הציר המדומה ובגלל ש- $Re(w') = 0$ זה נשלח לרביע הימני של חצי המישור העליון.

שוב מאותם טיעוני רציפות אם נסתכל על $u = 0$ נשים לב ש- $w' = 1$ ינבע שנקודות פנימיות נשלחות לחצי המישור העליון כי $Re(u) > 0$, כלומר נשלח לרביע הימני בחצי המישור העליון.

נשארה ההעתקה האחרונה, $T_3(w') = iw' = w$,

ניזכר שאם כופלים ב- i מספר מרוכב אנחנו מסתובבים בפועל על הציר 90 מעלות נגד כיוון השעון ולכן זה לוקח ערכים מהרבע הימני של החצי מישור העליון בו $Re(w') > 0$ אל החצי מישור העליון בו $Im(w) > 0$ ובנקודות קצה בהן $Re(w') = 0$ אנחנו נשלחים בידיוק לציר הממשי בו $Im(w) = 0$.

זה בידיוק אומר ש- g גם שולחת את חצי הדיסק העליון לחצי המישור העליון.

□

שאלה 2

סעיף א'

תזכורת (זהות אויילר): לכל $z \in \mathbb{C}$ מתקיים

$$e^{iz} = \cos(z) + i \sin(z)$$

נוכיח שלכל $z = a + ib \in \mathbb{C}$ מתקיים $e^z = e^a(\cos b + i \sin b)$ ובפרט $e^z \neq 0$ לכל $z \in \mathbb{C}$.
הוכחה:

$$e^z = e^{a+ib} \stackrel{\text{סעיף ב'}}{=} e^a \cdot e^{ib} \stackrel{\text{זהות אויילר}}{=} e^a \cdot (\cos(b) + i \sin(b))$$

מהיות $e^a > 0$ לכל $a \in \mathbb{R}$ כפונקציה ממשית וחיובית, מתקיים גם

$$|e^z| = |e^a \cdot e^{ib}| \stackrel{(*)}{=} |e^a| \cdot |e^{ib}| \stackrel{(**)}{=} |e^a| \cdot 1 > 0$$

כאשר $(*)$ זה תרגיל בסיכום של עדי: לכל $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ מתקיים $|w_1 \cdot w_2| = |w_1| \cdot |w_2|$.
וזה נכון בגלל שאם נכתוב $w_1 = x_1 + iy_1, w_2 = x_2 + iy_2$

$$\begin{aligned} w_1 \cdot w_2 &= (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2) \implies |w_1 \cdot w_2| = \sqrt{(x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (x_1y_2 + y_1x_2)^2} \\ &= \sqrt{x_1^2x_2^2 - 2x_1x_2y_1y_2 + y_1^2y_2^2 + x_1^2y_2^2 + 2x_1y_2y_1x_2 + y_1^2x_2^2} = \sqrt{x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 + x_1^2y_2^2 + y_1^2x_2^2} \end{aligned}$$

מצד שני

$$|w_1| \cdot |w_2| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2} = \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)} = \sqrt{x_1^2x_2^2 + x_1^2y_2^2 + y_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2}$$

וזה מסיים ר' $(*)$ נובע מהחישוב

$$\begin{aligned} |e^{ib}| &= |\cos(b) + i \sin(b)| = \sqrt{(\cos(b) + i \sin(b)) \cdot \overline{\cos(b) + i \sin(b)}} = \sqrt{(\cos(b) + i \sin(b))((\cos(b) - i \sin(b)))} \\ &= \sqrt{\cos^2(b) + \sin^2(b)} = \sqrt{1} = 1 \end{aligned}$$

□

סעיף ב'

נוכיח שלכל $z, w \in \mathbb{C}$ מתקיים $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$.

הוכחה: יהיו $z, w \in \mathbb{C}$. ראינו

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

ולכן מצד אחד

$$e^z \cdot e^w = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{w^j}{j!} \right) \stackrel{\text{מכפלת קושי לטורים אינסופיים}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} c_k$$

כאשר

$$c_k = \sum_{l=0}^k \frac{z^l}{l!} \cdot \frac{w^{k-l}}{(k-l)!} = \sum_{l=0}^k \frac{1}{k!} \cdot \frac{k!}{l!(k-l)!} z^l \cdot w^{k-l} \stackrel{\text{הבינום של ניוטון}}{=} \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} z^l \cdot w^{k-l} = \frac{(z+w)^k}{k!}$$

כלומר

$$e^z \cdot e^w = \sum_{k=0}^{\infty} c_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z+w)^k}{k!} \stackrel{\text{הגדרה}}{=} e^{z+w}$$

□

סעיף ג'

נוכיח שמתקיים $\sin(z) = 0 \iff z \in \{k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

הוכחה: ראינו שעבור $z \in \mathbb{C}$ מתקיים

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

אז

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 0 \iff e^{iz} - e^{-iz} = 0 \iff e^{iz} = e^{-iz} \xleftrightarrow{w=e^{iz}} w = w^{-1} = \frac{1}{w} \iff w^2 = 1$$

כלומר $w = \pm 1$.

בהרצאה ראינו שמתקיים $e^{iz} = 1 \iff iz = 2\pi i\mathbb{Z}$ וכן ראינו $e^{iz} = -1 \iff iz = i\pi + 2\pi i\mathbb{Z}$. במקרה אחד קיבלנו לכל כפולה זוגית של π עם \mathbb{Z} ובמקרה השני קיבלנו לכל כפולה אי-זוגית של π עם \mathbb{Z} , במילים אחרות

$$\sin(z) = 0 \iff z \in \{2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{(2k+1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

□

סעיף ד'

יהיו $z, w \in \mathbb{C}$ ונוכיח שמתקיים $\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$.

הוכחה: ראינו

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

ולכן

$$\cos(z+w) = \frac{e^{i(z+w)} + e^{-i(z+w)}}{2} = \frac{e^{iz+iw} + e^{-iz-iw}}{2} \stackrel{\text{סעיף ב'}}{=} \frac{e^{iz}e^{iw} + e^{-iz}e^{-iw}}{2}$$

מצד שני יש לנו

$$\begin{aligned} \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w) &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} - \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} = \\ &= \frac{e^{iz}e^{iw} + e^{iz}e^{-iw} + e^{-iz}e^{iw} + e^{-iz}e^{-iw}}{4} + \frac{e^{iz}e^{iw} - e^{iz}e^{-iw} - e^{-iz}e^{iw} + e^{-iz}e^{-iw}}{4} = \\ &= \frac{e^{iz}e^{iw} + \cancel{e^{iz}e^{-iw}} + \cancel{e^{-iz}e^{iw}} + e^{-iz}e^{-iw} + e^{iz}e^{iw} - \cancel{e^{iz}e^{-iw}} - \cancel{e^{-iz}e^{iw}} + e^{-iz}e^{-iw}}{4} = \\ &= \frac{2e^{iz}e^{iw} + 2e^{-iz}e^{-iw}}{4} = \frac{e^{iz}e^{iw} + e^{-iz}e^{-iw}}{2} \end{aligned}$$

□

כאשר האחרון שווה ל- $\cos(z+w)$ לפי מה שמצאנו.

סעיף ה'

יהיו $z, w \in \mathbb{C}$ ונוכיח שמתקיים $\sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$.

הוכחה: ראינו

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

ולכן

$$\sin(z+w) = \frac{e^{i(z+w)} - e^{-i(z+w)}}{2i} = \frac{e^{iz+iw} - e^{-iz-iw}}{2i} \stackrel{\text{סעיף ב'}}{=} \frac{e^{iz}e^{iw} - e^{-iz}e^{-iw}}{2i}$$

מצד שני יש לנו

$$\begin{aligned}\sin(z) \cos(w) + \cos(z) \sin(w) &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} + \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} \\ &= \frac{e^{iz}e^{iw} + \cancel{e^{iz}e^{-iw}} - \cancel{e^{-iz}e^{iw}} - e^{-iz}e^{-iw} + e^{iz}e^{iw} - \cancel{e^{iz}e^{-iw}} + \cancel{e^{-iz}e^{iw}} - e^{-iz}e^{-iw}}{4i} \\ &= \frac{2e^{iz}e^{iw} - 2e^{-iz}e^{-iw}}{4i} = \frac{e^{iz}e^{iw} - e^{-iz}e^{-iw}}{2i}\end{aligned}$$

כאשר האחרון שווה ל- $\sin(z+w)$ לפי מה שמצאנו.

□

שאלה 3

תזכורת: ראינו בהרצאה שהבאים מתקיימים

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cosh(z) = \cos(iz) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh(z) = -i \sin(iz) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

סעיף א'

נניח $z = a + ib$ ונוכיח שמתקיים $\cos(z) = \cos(a) \cosh(b) - i \sin(a) \sinh(b)$

הוכחה: ראינו בהרצאה שהבאים מתקיימים

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cosh(z) = \cos(iz) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh(z) = -i \sin(iz) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

מתקיים

$$\cos(z) = \cos(a + ib) \stackrel{\text{שאלה 2 סעיף ד'}}{=} \cos(a) \cos(ib) - \sin(a) \sin(ib)$$

אבל מהגדרת הפונקציות ההיפרבוליות מתקיים

$$\cos(ib) = \cosh(b), \quad \sin(ib) = i \sinh(b)$$

ולכן

$$\cos(z) = \cos(a) \cos(ib) - \sin(a) \sin(ib) = \cos(a) \cosh(b) - i \sin(a) \sinh(b)$$

□

סעיף ב'

נניח $z = a + ib$ ונוכיח שמתקיים $\sin(z) = \sin(a) \cosh(b) + i \cos(a) \sinh(b)$

הוכחה: באופן דומה לסעיף הקודם

$$\sin(z) = \sin(a + ib) \stackrel{\text{שאלה 2 סעיף ה'}}{=} \sin(a) \cos(ib) + \cos(a) \sin(ib) \stackrel{\substack{\cos(ib) = \cosh(b) \\ \sin(iz) = \frac{\sinh(z)}{-i}}}{=} \sin(a) \cosh(b) + \cos(a) \frac{\sinh(b)}{-i}$$

נשים לב שמתקיים

$$\frac{1}{-i} = \frac{1}{-i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{i}{(-i) \cdot i} = \frac{i}{1} = i$$

ולכן

$$\sin(z) = \sin(a + ib) = \sin(a) \cosh(b) + \cos(a) \frac{\sinh(b)}{-i} = \sin(a) \cosh(b) + i \cos(a) \sinh(b)$$

□

סעיף ג'

לכל $z \in \mathbb{C}$ נוכיח שמתקיים $\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$

הוכחה: יהי $z \in \mathbb{C}$, מתקיים

$$\begin{aligned} \cosh^2(z) - \sinh^2(z) &= \left(\frac{e^z + e^{-z}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^z - e^{-z}}{2} \right)^2 = \frac{e^z e^z + 2e^z e^{-z} + e^{-z} e^{-z} - e^z e^z + 2e^{-z} e^z - e^{-z} e^{-z}}{4} \\ &= e^{-z} e^z \stackrel{\text{שאלה 2 סעיף ב'}}{=} e^{-z+z} = e^0 = 1 \end{aligned}$$

□

סעיף ד'

יהי $z = a + ib$ ונוכיח שמתקיים $|\cos(z)|^2 = \cos^2(a) + \sinh^2(b)$.

הוכחה: יהי $z = a + ib \in \mathbb{C}$, בסעיף א' ראינו שמתקיים

$$\cos(z) = \cos(a) \cosh(b) - i \sin(a) \sinh(b)$$

נשתמש בזה

$$\begin{aligned} |\cos(z)|^2 &= |\cos(a) \cosh(b) - i \sin(a) \sinh(b)|^2 = (\cos(a) \cosh(b) - i \sin(a) \sinh(b)) \cdot \overline{\cos(a) \cosh(b) - i \sin(a) \sinh(b)} \\ &= (\cos(a) \cosh(b) - i \sin(a) \sinh(b)) \cdot (\cos(a) \cosh(b) + i \sin(a) \sinh(b)) \\ &= \cos^2(a) \cosh^2(b) + \sin^2(a) \sinh^2(b) \end{aligned}$$

בסעיף הקודם ראינו שמתקיים $\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$ ולכן

$$\begin{aligned} \cos^2(a) \cosh^2(b) + \sin^2(a) \sinh^2(b) &= \cos^2(a)(1 + \sinh^2(b)) + \sin^2(a) \sinh^2(b) \\ &= \cos^2(a) + \cos^2(a) \sinh^2(b) + \sin^2(a) \sinh^2(b) = \cos^2(a) + \sinh^2(b)(\cos^2(a) + \sin^2(a)) \\ &= \cos^2(a) + \sinh^2(b) \end{aligned}$$

כאשר $\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$ זו זהות ידועה אבל נוכיח אותה כמו בסעיף הקודם:

$$\begin{aligned} \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right)^2 + \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right)^2 &= \frac{e^{iz}e^{iz} + 2e^{iz}e^{-iz} + e^{-iz}e^{-iz}}{4} - \frac{e^{iz}e^{iz} - 2e^{iz}e^{-iz} + e^{-iz}e^{-iz}}{4} \\ &= \frac{4e^{iz}e^{-iz}}{4} = e^{iz}e^{-iz} \underset{\text{שאלה 2 סעיף ב'}}{=} = e^{iz-iz} = e^0 = 1 \end{aligned}$$

□

סעיף ה'

יהי $z = a + ib$ ונוכיח שמתקיים $|\sin(z)|^2 = \sin^2(a) + \sinh^2(b)$.

הוכחה: יהי $z = a + ib \in \mathbb{C}$, בסעיף ב' ראינו שמתקיים

$$\sin(z) = \sin(a) \cosh(b) + i \cos(a) \sinh(b)$$

נשתמש בזה ונפעל כמו בסעיף הקודם

$$\begin{aligned} |\sin(z)|^2 &= |\sin(a) \cosh(b) + i \cos(a) \sinh(b)|^2 = (\sin(a) \cosh(b) + i \cos(a) \sinh(b)) \cdot \overline{(\sin(a) \cosh(b) + i \cos(a) \sinh(b))} \\ &= (\sin(a) \cosh(b) + i \cos(a) \sinh(b)) \cdot (\sin(a) \cosh(b) - i \cos(a) \sinh(b)) = \sin^2(a) \cosh^2(b) + \cos^2(a) \sinh^2(b) \\ &= \sin^2(a)(1 + \sinh^2(b)) + \cos^2(a) \sinh^2(b) = \sin^2(a) + \sin^2(a) \sinh^2(b) + \cos^2(a) \sinh^2(b) \\ &= \sin^2(a) + \sinh^2(b)(\sin^2(a) + \cos^2(a)) = \sin^2(a) + \sinh^2(b) \end{aligned}$$

□

שאלה 4

סעיף א'

תהי $G = \mathbb{C} \setminus \gamma$ נבנה ונתאר ענף של הארגומנט עבור $\gamma = \{te^{i\frac{3\pi}{4}} \mid t \in [0, \infty)\}$.
 פתרון: נתחיל מלהוכיח טענה שמופיעה בסיכומי הרצאות של עדי: לכל z, w מתקיים $Arg(zw) = (Arg(z) + Arg(w)) \pmod{2\pi}$:
 נסמן $z = r_1 e^{i\theta_1}, w = r_2 e^{i\theta_2}$ ולכן $zw = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$ מתקיים

$$Arg(z) = \theta_1 + 2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$Arg(w) = \theta_2 + 2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$Arg(zw) = \theta_1 + \theta_2 + 2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

כלומר

$$Arg(zw) = \theta_1 + \theta_2 = Arg(z) + Arg(w) \pmod{2\pi}$$

כעת ניזכר בהגדרה של הענף שראינו בתרגול: אנחנו מגדירים ענף של ארגומנט להיות כל פונקציה $\alpha(z)$ שרציפה מעל התחום שלנו ומקיימת שלכל z בתחום מתקיים $\alpha(z) \in \{Arg(z) + 2\pi \cdot k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
 אנחנו יודעים שהארגומנט רציף ב- $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ וב- $[-\pi, \pi)$ ו- $Arg: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow [-\pi, \pi)$.
 בנתונים שלנו מתקיים "הרמנו" את החלק הלא רציף ב- $\frac{\pi}{4}$ וזה עכשיו הישר שלנו של האי-רציפות שלנו ולכן אנחנו בפועל רוצים להזיז את הקו אי-הגדרה גם בפונקציית הארגומנט שלנו.
 לכן נגדיר את הענף

$$\alpha(z) = Arg\left(z \cdot e^{-\frac{\pi i}{4}}\right) + \frac{\pi}{4}$$

עשינו את ההזזה מבפנים כדי לתקן את האי-רציפות וההוספה של $-\frac{\pi}{4}$ נועדה כדי לתקן את הזווית (כדי לקבל את הזווית האמיתית ולא הערך המוזר).
 מהטענה שהוכחנו לעיל, קיבלנו את התנאי השני של הענף ונשאר רק להראות רציפות:
 אבל זה רציף כי הרכבנו פונקציה רציפה (Arg רציף ב- $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$) והזזה זו פעולה רציפה ולכן מהגדרה α רציפה ב- $\mathbb{C} \setminus e^{-\frac{\pi i}{4}}(-\infty, 0]$.
 תוסיפי ציור להמחשה. TODOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOO

□

סעיף ב'

יהי $0 \in K \subset \mathbb{C}$ חסומה עם $0 \notin \partial K$.
 נבנה ענף של הארגומנט עבור $G = K - \text{diam}(K) = \{z - \text{diam}(K) \mid z \in K\}$ כאשר $\text{diam}(K) = \sup_{x, y \in K} |x - y|$.
 פתרון: במילים אחרות, יש לנו צורה חסומה שאיננה כוללת את 0 (כי הזזת את הקוטר, ו-0 היה בפנים).
 ניזכר שהארגומנט רציף על $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ ונטען שהפעם הארגומנט איננו רציף ב- $[0, \infty)$.
 יהי $x \in [0, \infty)$ ונראה ש- $x \notin G$: נשים לב שזה שקול ללהגיד

$$x \notin G = K - \text{diam}(K) \iff x + \text{diam}(K) \notin K \iff \forall x \in [\text{diam}(K), \infty), x \notin K$$

ידוע כי $0 \in K$ ולכן בהכרח $0 + \text{diam}(K) \notin K$.
 נניח בשלילה ש- $x \in K$ ולכן $0, x \in K$ ובפרט $0 \leq |x - 0| \leq \text{diam}(K)$ אבל $x = \text{diam}(K)$ ולכן $\text{diam}(K) \leq x$.
 ידוע כי $0 \in K^\circ$ ולכן קיים $\varepsilon > 0$ כך ש- $B(0, \varepsilon) \subseteq K$ ולכן $\frac{\varepsilon}{2} \in K$ כמספר מרוכב.
 כעת, $x \in K$ ומטעון דומה נקבל $x = \text{diam}(K) - \varepsilon$ וזו סתירה!
 לכן $[0, \infty) \cap G = \emptyset$ ולכן מספיק שנמצא ענף לארגומנט בתחום $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$.
 אם נסתכל על זה על הצירים, זה כמו לזוז בזווית של π , כלומר

$$\alpha(z) = Arg(-z) + \pi$$

משיקולים של הסעיף הקודם נקבל שאכן α ענף בתחום ולכן $\alpha' = \alpha \upharpoonright G$ ענף רציף של הארגומנט ב- G .
TODOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOO

□

סעיף ג'

יהי $0 \in K \subset \mathbb{C}$ חסומה עם $0 \notin \partial K$ ו- $\theta \in (-\pi, \pi)$.
 נבנה ענף של הארגומנט עבור $G_\theta = K + e^{i\theta} \cdot \text{diam}(K)$

פתרון: נראה שהפעם אם $x \in e^{i\theta}[0, \infty)$ אז $x \notin G$:
 נשים לב שהטענה שקולה לטענה ש- $xe^{i\theta} \notin G$ אבל ככה נקבל K כמו בסעיף ב' וכן $xe^{i\theta} \in [0, \infty)$ ולכן הטענה נובעת ונסיק שוב
 ש- $G \cap e^{i\theta}[0, \infty) = \emptyset$.
 נשים לב שהפעם אנחנו מחפשים

$$e^{\pi i} \mapsto e^{\theta i} = e^{\pi i - (\pi - \theta)i} = e^{\pi i} \cdot e^{-(\pi - \theta)i}$$

כלומר

$$\alpha(z) = \text{Arg}(e^{(\theta - \pi)i} z) + (\pi - \theta)$$

בהתאם לשיקולים בסעיפים הקודמים מצאנו ענף ובשל שיקולי הזזה α רציף ב- $\mathbb{C} \setminus e^{i\theta}[0, \infty)$ אבל $G \subseteq \mathbb{C} \setminus e^{i\theta}[0, \infty)$ ולכן $\alpha \upharpoonright G$ רציף וענף.

□

TOD00000000000000000000

שאלה 5

TODOOOOOOOOOOOOOOOOOOOO