פתרון מטלה 07 — פונקציות מרוכבות, 80519

20 בדצמבר 2025

שאלה 1

נניח ש-G תחום כוכבי ונוכיח שלכל לכל $f \in \mathrm{Hol}(G)$ יש פונקציה קדומה.
נסיק את משפט קושי בתחום כוכבי: תהיי S תחום כוכבי חסום עם שפה C^1 למקוטעין בעלת אורך סופי (כלומר, ניתן לתאר את השפה בעזרת מסילה גזירה ברציפות ולמקוטעין) ו-G סביבה של S. אז לכל $f \in \mathrm{Hol}(G)$ מתקיים $\int_{\partial S} f \, \mathrm{d}\gamma = 0$.
תזכורת (קבוצה כוכבית): קבוצה $S \subseteq \mathbb{R}^n$ נקראת כוכבית אם קיים $x_0 \in S$ כך שלכל $x \in S$ מתקיים $[x_0, x] \subseteq S$.
הוכחה: יהי $z_0 \in G$ עבורו לכל $z \in G$ מתקיים $[z_0, z] \subseteq G$, נעזר ברמז ונגדיר

$$F(z) = \int_{[z_0,z]} f(z) \, \mathrm{d}z$$

מהיות f אנליטית, אז עבור $z_1 \in G$ ו-$\varepsilon > 0$ יש $\delta > 0$ כך ש-$B_\delta(z_1) \subseteq G$ ומתקיים לכל $z_2 \in B_\delta(z_1)$

$$(\star) \; |f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$$

ולכן ניקח $z_2 \in B_\delta(z_1)$ ונקבל $[z_1, z_2] \subseteq B_\delta(z_1) \subseteq G$.
ניקח משולש T להיות המשולש עם הקודקודים z_0, z_1, z_2.
נשים לב שאם $y \in T$, יש $x \in [z_1, z_2]$ כך ש-$y \in [z_0, x]$, אבל $x \in G$ ולכן $[z_0, x] \subseteq G$ ו-$y \in G$.
לכן מתקיימים כל התנאים למשפט קושי במשולש ומתקיים

$$\int_{\partial T} f(z) \, \mathrm{d}z = 0$$

נכתוב את המשולש בדרך אחרת מלינארית האינטגרל

$$\int_{[z_0,z_1]} f(z) \, \mathrm{d}z + \int_{[z_1,z_2]} f(z) \, \mathrm{d}z + \int_{[z_2,z_0]} f(z) \, \mathrm{d}z = 0$$

וכן

$$F(z_2) - F(z_1) = \int_{[z_0,z_2]} f(z) \, \mathrm{d}z - \int_{[z_0,z_1]} f(z) \, \mathrm{d}z = -\int_{[z_2,z_0]} f(z) \, \mathrm{d}z - \int_{[z_0,z_1]} f(z) \, \mathrm{d}z = \int_{[z_1,z_2]} f(z) \, \mathrm{d}z$$

ולכן בפרט מתקיים

$$|F(z_2) - F(z_1) - (z_2 - z_1) f(z_1)| = \left| \int_{[z_1,z_2]} (f(z) - f(z_1)) \, \mathrm{d}z \right| \underset{(\star)}{\leq} \left| \int_{[z_1,z_2]} \varepsilon \, \mathrm{d}z \right| = \varepsilon |z_2 - z_1|$$

אבל זה בידיוק אומר

$$F'(z_1) = \lim_{z_2 \to z_1} \frac{F(z_2) - F(z_1)}{z_2 - z_1} = f(z_1)$$

וזה נכון לכל $z_1 \in G$, כלומר F קדומה של f.
נעבור לחלק השני – הסקה של משפט קושי בתחום כוכבי: תהיי $\gamma : [a, b] \to G$ מסילה סגורה, אז ממה שהוכחנו לעיל מתקיים $f(z) = F'(z)$, אז

$$\int_\gamma f(z) \, \mathrm{d}z = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) \, \mathrm{d}t = \int_a^b F'(\gamma(t)) \gamma'(t) \, \mathrm{d}t \underset{\text{כלל שרשרת}}{=} \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (F(\gamma(t))) \, \mathrm{d}t \underset{\text{המשפט היסודי}}{=} F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0$$

כאשר המעבר האחרון נובע מהיות המסילה מסילה סגורה, כלומר $\gamma(b) = \gamma(a)$.
נסמן $\gamma = \partial S$, מסילה סגורה ורציפה למקוטעין בעלת אורך סופי והטענה נובעת. $\square$

שאלה 2

תהיי $f \in \mathrm{Hol}(B(z_0, R))$ אז לכל $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ולכל $r < R$ ראינו שמתקיים כמסקנה ממשפט קושי

$$|f^n(z_0)| \leq \frac{n!}{r^n} M_{f,z_0}(r)$$

ונניח ש-f הולומורפית. *תזכורת*: בהינתן $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ רציפה, נגדיר $M_{f,z_0}(r) = \max_{z \in B(z_0, r)} |f(z)|$.

סעיף א'

נוכיח שאם f לא קבועה אז לכל z_0 קיים קבוע C כך שלכל r גדול מספיק $m_{f,z_0} \geq C(r+1)$.

הוכחה: TODOOOOOOOOOOOOOOOOOOO $\square$

סעיף ב'

נוכיח שאם

$$\lim_{r \to \infty} \frac{\log M_{f,z_0}(r)}{\log(r)} = N < \infty$$

אז $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

הוכחה: TODOOOOOOOOOOOOOOOOOOO $\square$

שאלה 3

יהיו G תחום כוכבי ו־$f \in \mathrm{Hol}(G)$ שלא מתאפסת.

נוכיח שיש ל־f לוגריתם, כלומר קיימת פונקציה $g \in \mathrm{Hol}(G)$ כך ש־$f(z) = e^{g(z)}$.

הוכחה: TODOOOOOOOOOOOOOOOOOOO $\square$

שאלה 4

תהיי $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ שלמה, כלומר הולומורפית בכל המישור.

סעיף א'

נוכיח כי f קבועה תחת ההנחה שלכל $z\in\mathbb{C}$ מתקיים $Re(f(z))\leq 0$.

הוכחה: ניקח $g(z)=e^z$, פונקציה הולומורפית שעומדת בתנאי הרמז.

מתקיים

$$\left|(g\circ f)(z)\right| = e^{Re(f(z))}\left|e^{i\,Im(f(z))}\right| = e^{Re(f(z))}\cdot 1 \underset{(\star)}{\leq} e^0 = 1$$

כאשר $(\star)$ נובע מההנחה.

אז $g\circ f$ היא פונקציה הולומורפית (כהרכבה של פונקציות הולומורפיות) וחסומה, ולכן אנחנו עומדים בכל תנאי משפט ליוביל ונקבל ש־$g\circ f$ קבועה.

לא ייתכן כי g קבועה שכן g היא פונקציית האקספוננט, ולכן נקבל מכך ש־f חייבת להיות קבועה כדי ש־$g\circ f$ תהיה קבועה.

אז f קבועה, כנדרש. $\square$

סעיף ב'

נוכיח כי f קבועה תחת ההנחה שלכל $z\in\mathbb{C}$ מתקיים $|f(z)|\neq 1$.

הוכחה: f הולומורפית ולכן רציפה ומהנתון ניתן להסיק שמתקיים $1<|f(z)|$ או $1>|f(z)|$ לכל $z\in\mathbb{C}$.

אם $|f(z)|<1$ אז f חסומה ושלמה וממשפט ליוביל סיימנו.

אם $|f(z)|>1$ ולכן גם $\left|\frac{1}{f(z)}\right|<1$ לכל $z\in\mathbb{C}$ ושוב ממשפט ליוביל $\left|\frac{1}{f(z)}\right|$ חסומה ושלמה ולכן קבועה ולכן גם $f(z)$ קבועה. $\square$

סעיף ג'

לכל $z\in\mathbb{C}$ מתקיים $f(z)\notin(-\infty,0]$.

הוכחה: נעזר ברמז: ל־f יש לוגריתם ולכן שורש, אז ניקח $g(z)=z^i=e^{i\,Log(z)}$ ולכן

$$\left|(g\circ f)(z)\right| = \left|e^{i\log|z|-Arg(z)}\right| = \left|e^{i\log|z|}\right|\cdot\left|e^{-Arg(z)}\right| \leq 1\cdot e^{\pi}$$

אז בדומה לסעיף א', $f\circ g$ הולומורפית, שלמה וחסומה ולכן ממשפט ליוביל קבועה ומשיקולים דומים לסעיף א', f קבועה. $\square$