

פתרון מטלה 02 – תורת הקבוצות, 80200

3 באפריל 2025



שאלה 1

תהיינה X, Y, X', Y' קבוצות המקיימות $|X| = |Y|, |X'| = |Y'|$.

סעיף א'

נוכיח שמתקיים $|X \times X'| = |Y \times Y'|$.

הוכחה: מכך שמתקיים $|X| = |Y|$ נובע שקיימת פונקציה חד-חד ערכית ועל $f: X \rightarrow Y$ ומכך שמתקיים $|X'| = |Y'|$ קיימת פונקציה חד-חד ערכית ועל $g: X' \rightarrow Y'$. נגדיר $f: X \times X' \rightarrow Y \times Y'$ על-ידי $h(x, x') = \langle f(x), g(x') \rangle$. נראה כי היא חד-חד ערכית ועל: חד-חד ערכית: נשים לב שמתקיים

$$h(x_1, x'_1) = h(x_2, x'_2) \iff \langle f(x_1), g(x'_1) \rangle = \langle f(x_2), g(x'_2) \rangle \iff f(x_1) = f(x_2) \wedge g(x'_1) = g(x'_2) \xrightarrow{(1)} x_1 = x_2 \wedge x'_1 = x'_2$$

כאשר (1) נובע מהיות f ו- g חד-חד ערכיות.

על: יהי $\langle y, y' \rangle \in Y \times Y'$. מהיות f על, נובע כי קיים $x_y \in X$ כך שמתקיים $f(x_y) = y$ ומכך ש- g על נובע שקיים $x'_{y'} \in X'$ כך שמתקיים $g(x'_{y'}) = y'$. ולכן $h(x_y, x'_{y'}) = \langle y, y' \rangle$.

מצאנו פונקציה חד-חד ערכית ועל ולכן מהגדרת שיויון עוצמות נובע $|X \times X'| = |Y \times Y'|$.

□

סעיף ב'

נניח שמתקיים $X \cap X' = Y \cap Y' = \emptyset$ ונוכיח שמתקיים $|X \cup X'| = |Y \cup Y'|$.

הוכחה: מכך שמתקיים $|X| = |Y|$ נובע שקיימת פונקציה חד-חד ערכית ועל $f: X \rightarrow Y$ ומכך שמתקיים $|X'| = |Y'|$ קיימת פונקציה חד-חד ערכית ועל $g: X' \rightarrow Y'$. נגדיר כמו בתרגול:

$$f \oplus g(x) = \begin{cases} f(x) & x \in X \\ g(x) & x \in X' \end{cases}$$

הפונקציה מוגדרת היטב שכן מכך ש- $X \cap X' = Y \cap Y' = \emptyset$ נובע שכל $x \in X \cup X'$ נשלח לערך יחיד תחת $f \oplus g$.

נראה שהיא חד-חד ערכית ועל: את החד-חד ערכיות ראינו בתרגול, נראה שהיא גם על: יהי $y \in Y \cup Y'$.

מכך שמתקיים $Y \cap Y' = \emptyset$ נובע כי $y \in Y$ או $y \in Y'$.

אם $y \in Y$, מהיות f על, נובע כי קיים $x \in X$ כך שמתקיים $f(x) = y$.

אם $y \in Y'$, מהיות g על, נובע כי קיים $x \in X'$ כך שמתקיים $g(x) = y$.

מכך שמתקיים $X \cap X' = \emptyset$ נובע כי $x \neq x'$ ואלו שני מקרים שונים.

מהגדרת $f \oplus g$ נובע כי קיים $x \in X \cup X'$ כך שמתקיים $f \oplus g(x) = y$ וקיבלנו כי $f \oplus g$ חד-חד ערכית ועל.

מצאנו פונקציה חד-חד ערכית ועל ולכן מהגדרת שיויון עוצמות נובע $|X \cup X'| = |Y \cup Y'|$.

□

סעיף ג'

נוכיח שמתקיים $|X^{X'}| = |Y^{Y'}$.

הוכחה: מכך שמתקיים $|X| = |Y|$ נובע כי קיימת פונקציה חד-חד ערכית ועל $f: X \rightarrow Y$ ומכך שמתקיים $|X'| = |Y'|$ נובע שקיימת פונקציה חד-חד ערכית ועל $g: X' \rightarrow Y'$.

נגדיר $\varphi: X^{X'} \rightarrow Y^{Y'}$ על-ידי $\varphi(h)(y') = (f \circ h \circ g^{-1})(y')$ ו- φ מוגדרת היטב כהרכבה של פונקציות.

נראה כי φ היא חד-חד ערכית ועל:

חד-חד ערכית: נניח כי קיימים $h, h' \in X^{X'}$ כך שמתקיים $\varphi(h) = \varphi(h')$, נשים לב כי מתקיים:

$$\varphi(h) = \varphi(h') \iff \forall y' \in Y', \quad \varphi(h)(y') = \varphi(h')(y') \iff f(h(g^{-1}(y'))) = f(h'(g^{-1}(y'))) \stackrel{(1)}{\iff} h(g^{-1}(y')) = h'(g^{-1}(y'))$$

כאשר (1) נובע מהיות f הפיכה.

כמו כן, מכיוון g הפיכה מתקיים שלכל $x' \in X'$ קיים יחיד $y' \in Y'$ כך שמתקיים $g^{-1}(y') = x'$, ולכן נקבל

$$h(g^{-1}(y')) = h'(g^{-1}(y')) \iff \forall x' \in X, \quad h'(x') = h(x') \implies h' = h$$

וקיבלנו φ היא חד-חד ערכית.

נראה כי φ היא על, ולכן עלינו להוכיח שלכל $l: Y' \rightarrow Y$ קיימת $h: X' \rightarrow X$ כך שמתקיים $\varphi(h) = l$. מתקיים:

$$\forall y' \in Y', \quad \varphi(h)(y') = l(y') \stackrel{\text{def}}{\iff} f(h(g^{-1}(y'))) = l(y') \stackrel{(1)}{\iff} h(g^{-1}(y')) = (f^{-1} \circ l)(y')$$

כאשר (1) נובע מהיות f הפיכה.

אבל מהיות g הפיכה נובע שלכל $y' \in Y'$ קיים יחיד $x' \in X'$ כך שמתקיים $g(x') = y'$ ולכן:

$$\forall x' \in X', \quad h(g^{-1}(g(x'))) = (f^{-1}(l(g(x')))) \implies h(x) = (f^{-1}(l(g(x))))$$

מצאנו בנייה ל- h ולכן לכל l קיים מקור ובהתאם φ על.

מצאנו פונקציה חד-חד ערכית ועל בין $X^{X'}$ לבין $Y^{Y'}$ ולכן מהגדרת שיויון עוצמות מתקיים $|X^{X'}| = |Y^{Y'}|$.

□

שאלה 2

תהיינה X, X' קבוצות.

סעיף א'

נוכיח ש- $(X \times \{0\}) \cap (X' \times \{1\}) = \emptyset$.

הוכחה: נניח בשלילה ש- $(X \times \{0\}) \cap (X' \times \{1\}) \neq \emptyset$ ולכן קיים $(a, b) \in (X \times \{0\}) \cap (X' \times \{1\})$.

מהגדרת החיתוך נובע כי $(a, b) \in X \times \{0\}$ ולכן $b = 0$. מצד שני, מהגדרת החיתוך נובע כי גם $(a, b) \in X' \times \{1\}$ ולכן $b = 1$ וזו סתירה. \square

סעיף ב'

נגדיר $X \uplus X' = (X \times \{0\}) \cup (X' \times \{1\})$ ונגדיר פונקציה $f : X \uplus X' \rightarrow X \cup X'$ על-ידי $f(a, i) = a$.

נוכיח ש- f היא על.

הוכחה: נניח בשלילה כי f איננה על, ולכן קיים $x_0 \in X \cup X'$ כך שלא קיים $(x, i) \in X \uplus X'$ המקיים $f(x, i) = x_0$.

אבל $x_0 \in X \cup X'$ ולכן מתקיימים אחד מהבאים:

$x_0 \in X$ ולכן $f(x_0, 0) = x_0$ או $f(x_0, 1) = x_0$ ולכן $x_0 \in X'$ או $x_0 \in X \wedge x_0 \in X'$ ואז $f(x_0, 0) = f(x_0, 1) = x_0$.

בכל מקרה הגענו לסתירה ולכן f על. \square

סעיף ג'

נוכיח שהפונקציה מהסעיף הקודם היא חד-חד ערכית אם ורק אם $X \cap X' = \emptyset$.

הוכחה:

\Leftarrow נניח כי f חד-חד ערכית ונראה כי $X \cap X' = \emptyset$.

נניח בשלילה כי $X \cap X' \neq \emptyset$ ולכן קיים $x_0 \in X \cap X'$, ולכן $x_0 \in X$ מקיים $f(x_0, 0) = x_0$ אבל מהגדרת החיתוך $x_0 \in X'$ ולכן מתקיים

$f(x_0, 1) = x_0$ וזו סתירה לחד-חד ערכיות של f ולכן $X \cap X' = \emptyset$.

\Rightarrow נניח $X \cap X' = \emptyset$ ונראה כי f חד-חד ערכית.

נניח כי f לא חד-חד ערכית, ולכן קיימים $(x_1, i_1), (x_2, i_2) \in X \uplus X'$ כך ש- $(x_1, i_1) \neq (x_2, i_2)$ אבל $f((x_1, i_1)) = f((x_2, i_2))$, אבל אז

מהגדרת f נובע $x_1 = x_2$, אבל $X \cap X' = \emptyset$ ולכן נקבל $i_1 = i_2 = 0$ או $i_1 = i_2 = 1$ ולכן f חד-חד ערכית. \square

סעיף ד'

נגדיר $i : X \rightarrow X \uplus X'$ על-ידי $i(x) = (x, 0)$ ונגדיר $i' : X' \rightarrow X \uplus X'$ על-ידי $i'(x) = (x, 1)$. נוכיח שאם יש קבוצה Y ופונקציות $f : X \rightarrow Y$ ו- $g : X' \rightarrow Y$ אז יש פונקציה יחידה $f \oplus g : X \uplus X' \rightarrow Y$ המקיימת $f \oplus g \circ i = f$ וגם $f \oplus g \circ i' = g$.

הוכחה:

נניח כי קיימת קבוצה Y ופונקציות $f : X \rightarrow Y$ ו- $g : X' \rightarrow Y$ לעיל ונראה כי קיימת פונקציה יחידה המקיימת את הנדרש. נגדיר:

$$f \oplus g = \{ \langle \langle x, j \rangle, y \rangle \mid (j = 0 \wedge y = f(x) \wedge x \in X) \vee (j = 1 \wedge y = g(x) \wedge x \in X') \}$$

נשים לב שמתקיים מהגדרת i ו- $f \oplus g$:

$$\forall x \in X, \quad ((f \oplus g) \circ i)(x) = (f \oplus g)(\langle x, 0 \rangle) = f(x) \implies (f \oplus g) \circ i = f$$

באותו אופן נובע מהגדרת i' ו- $f \oplus g$:

$$\forall x' \in X', \quad ((f \oplus g) \circ i')(x') = (f \oplus g)(\langle x', 1 \rangle) = g(x') \implies (f \oplus g) \circ i' = g$$

ולכן הראינו קיום, נשאר להראות יחידות: נניח כי $h = f \oplus g$ ו- h' המקיימות את הנדרש ונראה שהן זהות. מתקיים מהגדרה:

$$\forall a \in X \uplus X', \quad h'(a) = \begin{cases} f(x) & a = \langle x, 0 \rangle \\ g(x) & a = \langle x, 1 \rangle \end{cases} = h(a)$$

ולכן $h = h'$ מוגדרת ביחידות.

□

שאלה 3

תהיינה X, X', Y, Y' קבוצות כך שמתקיים $|X| \leq |Y|$ ו- $|X'| \leq |Y'|$.

סעיף א'

נניח $X \cap X' = \emptyset$ אבל $Y \cap Y' \neq \emptyset$. נפריך את הטענה $|X \cup X'| \leq |Y \cup Y'|$.

הוכחה: נגדיר

$$X = \{1, 2, 3\}, X' = \{4, 5\}, Y = \{1, 2, 3\}, Y' = \{3, 4\}$$

אכן מתקיים $X \cap X' = \emptyset$ ו- $|X| \leq |Y|, |X'| \leq |Y'|$.

אבל $Y \cup Y' = \{1, 2, 3, 4\} \Rightarrow |Y \cup Y'| = 4$ ומנגד $X \cup X' = \{1, 2, 3, 4, 5\} \Rightarrow |X \cup X'| = 5$

ניתן דוגמה גם לקטן ממש: נגדיר

$$X = \{1, 2\}, X' = \{4, 5\}, Y = \{1, 2, 3\} = Y'$$

אכן מתקיים $X \cap X' = \emptyset$ ו- $|X| \leq |Y|, |X'| \leq |Y'|$.

אבל $X \cup X' = \{1, 2, 4, 5\}$ אז $|X \cup X'| = 4$ ומנגד $Y \cup Y' = \{1, 2, 3\}$ וכן $|Y \cup Y'| = 3$.

נשים לב שבשני המקרים לא יכולה להיות פונקציה חד-חד ערכית מעקרון שובך היונים – יש לנו יותר יונים (איברים ב- $X \cup X'$) מאשר שובכים (איברים ב- $Y \cup Y'$) ולכן בהכרח יהיה לנו שובך עם שתי יונים, דהיינו פונקציה לא חד-חד ערכית.

□

סעיף ב'

נניח $X \cap X' = \emptyset$ וגם $Y \cap Y' = \emptyset$. נוכיח שמתקיים $|X \cup X'| \leq |Y \cup Y'|$.

הוכחה: מכך שמתקיים $|X| \leq |Y|$ נובע כי קיימת פונקציה חד-חד ערכית $f: X \rightarrow Y$ ומכך שמתקיים $|X'| \leq |Y'|$ נובע כי קיימת פונקציה חד-חד ערכית $g: X' \rightarrow Y'$.

נגדיר $h: X \cup X' \rightarrow Y \cup Y'$ על-ידי

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in X \\ g(x) & x \in X' \end{cases}$$

הפונקציה מוגדרת היטב שכן $X \cap X' = \emptyset$ שכן כל $x_0 \in X \cup X'$ נשלח לערך יחיד תחת h .

h חד-חד ערכית, שכן f ו- g חד-חד ערכיות ומכך ש- $Y \cap Y' = \emptyset$ נובע שלכל $x \in X$ ולכל $x' \in X'$ מתקיים $f(x) \neq g(x')$.

מצאנו פונקציה חד-חד ערכית בין $X \cup X'$ לבין $Y \cup Y'$ ולכן מתקיים $|X \cup X'| \leq |Y \cup Y'|$.

□

סעיף ג'

נניח $X = X' = \emptyset$. נפריך את הטענה $|X^{X'}| \leq |Y^{Y'}$.

הוכחה: בהרצאה ראינו שאם $X = X' = \emptyset$ אז $X \rightarrow X' = \emptyset$ היא חד-חד ערכית, על ויחידה.

נבחר $Y = \emptyset, Y' \neq \emptyset$ ונשים לב שבמקרה זה מתקיים $|Y^{Y'}| = 0$.

נשים לב שבמקרה זה אנחנו לא מקיימים את הגדרת הפונקציה: אמרנו כי יחס F בין Y' ל- Y נקרא פונקציה אם לכל $y' \in Y'$ קיים $y \in Y$

כך ש- $\langle y', y \rangle \in F$ אבל $Y = \emptyset$ וקיבלנו סתירה להגדרת הפונקציה.

לכן נקבל במקרה זה שמתקיים $|Y^{Y'}| = 0 \leq 1 = |X^{X'}|$ וזו סתירה.

□

סעיף ד'

נניח $X' = \emptyset$ אבל $X \neq \emptyset$. נוכיח שמתקיים $|X^{X'}| \leq |Y^{Y'}$.

הוכחה: ראשית נשים לב שמהיות $X \neq \emptyset$ נובע כי $Y \neq \emptyset$ שכן $1 \leq |X| \leq |Y|$.

נשים לב שמהיות $X' = \emptyset$ נובע כי $|X^{X'}| = 1$: ניזכר כי היחס F יקרא פונקציה אם לכל $x' \in X'$ קיים $x \in X$ כך ש- $\langle x', x \rangle \in F$.

מכך ש- $X' = \emptyset$, המכפלה הקרטזית $\emptyset \times X$ ריקה, ולכן היחס היחידי שיתאים הוא היחס הריק: לכל $x' \in \emptyset$ קיים $x \in X$ יחד כך שמתקיים

$$\langle x', x \rangle \in \emptyset \times X = \emptyset. |X^{X'}| = 1 \text{ נקבל אם כך } |X^{X'}| = 1$$

כעת, אם נבחר $Y' = \emptyset$ נקבל $|Y^{Y'}| = 1$ וזו התוצאה המינימלית מהנימוק לעיל ומכך ש- $Y \neq \emptyset$.

נקבל בסך-הכל שמתקיים $|X^{X'}| = 1 \leq 1 = |Y^{Y'}|$.

□

שאלה 4

תהיינה X', Y' קבוצות ונניח שמתקיים $X' \neq \emptyset$ וגם $|X'| \leq |Y'|$. נוכיח שיש פונקציה על $g : Y' \rightarrow X'$.

הוכחה: מכך שמתקיים $|X'| \leq |Y'|$ נובע כי קיימת $f : X' \rightarrow Y'$ חד-חד ערכית ומתקיים $Y' = f(X') \cup (Y' \setminus f(X'))$. יהי $x'_0 \in X' \setminus f^{-1}(X')$ (אם $X' \setminus f^{-1}(X') = \emptyset$ הטענה טריוויאלית כי f חד-חד ערכית ועל ולכן הפיכה ו- f^{-1} הפיכה של חד-חד ערכית ועל ולכן על).

מהיות f חד-חד ערכית נובע שלכל $y' \in f(X')$ קיים $x'_{y'} \in X'$ יחיד כך שמתקיים $f(x'_{y'}) = y'$. נגדיר $g : Y' \rightarrow X'$ על-ידי:

$$g(y') = \begin{cases} f^{-1}(y') & y' \in f(X') \\ x'_0 & y' \notin f(X') \end{cases}$$

g מוגדרת היטב שכן לכל $y' \in Y'$ ולכן כל $y' \in Y'$ נשלח לערך יחיד תחת g . $f(X') \cap (Y' \setminus f(X')) = \emptyset$

היות ו- f חד-חד ערכית נובע $|X'| = |f(X')| \leq |Y|$ וקיבלנו ש- g על (שכן לכל $x' \in X'$ קיים $y' \in Y$ כך שמתקיים $g(y') = x'$) \square