מבנים אלגבריים 2, 80446 — פתרון מבחן מועד א' 2021

18 ביולי 2025

שאלה 1

בכל הרחבת שדות סופית וספרבילית L/K קיים איבר פרימיטיבי.

הוכחה: תחילה נוכיח למה:

למה 0.1 (משפט האיבר הפרימיטיבי חלק 1): תהיי L/K הרחבה סופית. אז L/K היא הרחבה פרימיטיבית אם ורק אם יש כמות סופית של שדות ביניים.

הוכחה: $\Longleftarrow$ תהיי L/K פרימיטיבית, כלומר $K=L(\alpha)$ ויהי F שדה ביניים. אז $f_{\alpha/F}=\sum_{i=1}^{n}a_it^i$.
יהי $L\subset F\subset E=K(a_0,\cdots,a_n)$ אז $f_{\alpha/F}\in E[t]$ ולכן $f_{\alpha/E}\mid f_{\alpha/F}$ ובפרט הם שווים.
לכן $[L:F]=\deg\left(f_{\alpha/F}\right)=\deg\left(f_{\alpha/E}\right)=[L:E]$ ולכן $E=F$ (כי $[F:E]=\frac{[L:E]}{[L:F]}=1$).
אז $F=K(a_1,\cdots,a_n)$ נקבע ביחידות על־ידי $f_{\alpha/F}$ ואנחנו יודעים ש־$f_{\alpha/K}\mid f_{\alpha/F}$ ולכן יש רק כמות סופית של אפשרויות ל־$f_{\alpha/F}$ (מקסימום $2^{\deg\left(f_{\alpha/K}\right)}=2^{[L:K]}$ כי $f_{\alpha/K}=\prod_{i=1}^{n}(t-\alpha_i)\in\overline{K}[t]$ ואם אני רוצה פולינום שיחלק, צריך לבחור קבוצה כלשהי של שורשים ויש 2^n אפשרויות לכל היותר).
$\Longrightarrow$ נניח שיש כמות סופית של שדות ביניים, $K\subset F_i\subset L$ עבור $1\leq i\leq m$.
אם K סופי, אז אנחנו יודעים ש־L/K פרימיטיבית, אז נניח ש־K אינסופי ונוכיח באינדוקציה על $[L:K]$:
הבסיס של דרגה 1 הוא טריוויאלי ולכן ניח שהטענה מתקיימת לכל הרחבה מדרגה הקטנה ל־$[L:K]$.
נכתוב $L=K(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)$ הרחבה סופית וכן $E=K(\alpha_1,\cdots,\alpha_{r-1})$ (ואז $L=E(\alpha_r),\alpha=\alpha_r$).
נניח בלי הגבלת הכלליות ש־$L\neq E$ (אחרת נזרוק את α_r כי הוא מיותר).
מהנחת האינדוקציה, $E=K(\beta)$ כי ל־K יש רק מספר סופי של תתי־שדות.
ניקח סדרה אינסופית (מההנחה ש־K אינסופי) $c_1,c_2,\cdots\in K$ וניקח $\gamma_i=\alpha+\beta c_i$ (צירופים לינאריים שונים של α,β).
נגדיר $F_j=K\left(\gamma_j\right)$ וקיימים $j\neq\ell$ כך ש־$F_j=F_\ell$ (כי יש כמות סופית של שדות ביניים וכמות אינסופית של איברים).
מתקיים $\beta=\frac{(\alpha+\beta c_\ell)-(\alpha+\beta c_j)}{c_\ell-c_j}=\frac{\gamma_\ell-\gamma_j}{c_\ell-c_j}\in F_j=F_\ell$ ולכן $\alpha=\gamma_\ell-c_\ell\beta\in F_\ell$ ואז $\alpha,\beta\in F_j$, כלומר

$$L=K(\alpha,\beta)\subset F_j=K\left(\alpha+c_j\beta\right)=K\left(\gamma_j\right)$$

וזה בדיוק אומר ש־L/K פרימיטיבית. $\square$

אם כך, מספיק להוכיח שיש כמות סופית של שדות ביניים. נסתכל על סגור גלואה $L^{nor}=L^{\text{gal}}/K$ (הסגור הנורמלי הוא סגור גלואה כי L/K פרידה) ומספיק להוכיח של־L^{gal}/K יש כמות סופית של שדות ביניים (כי $L\subset L^{\text{gal}}$).
מהתאמת גלואה לכל $K\subset F\subset L^{\text{gal}}$ מתקיים $F=L^{\text{Gal}(L/F)}$ ולכן F נקבע ביחידות על־ידי $\text{Gal}(L/F)\leq\text{Gal}(L/K)$ ויש כמות סופית כזאת כי $\text{Gal}(L/K)$ היא חבורה סופית. $\square$

שאלה 2

אם $n \in K^\times$ אז קיים שורש פרימיטיבי $\xi_n \in \overline{K}$ מסדר n, ההרחבה $K(\xi_n)/K$ היא גלואה וישנו שיכון $\mathrm{Gal}(K(\xi_n)/K) \hookrightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$.

הוכחה: נניח ש־$n \in K^\times$, הפולינום $x^n - 1$ הוא ספרבילי ולכן ל־$\overline{K}$ יש n שורשי יחידה שונים.

ראינו שאם ל־$\overline{K}$ יש n שורשי יחידה שונים זה מזה, אז $\mu_n \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$, זו חבורה ציקלית ולכן יש לנו שורש יחידה פרימיטיבי ξ_n שיוצר אותה.

$K(\xi_n)/K$ הוא שדה הפיצול של הפולינום שלנו ולכן ההרחבה נורמלית וספרבילית ולכן זו הרחבת גלואה.

כל $\sigma \in G(L/K)$ נקבע ביחידות על־ידי $\sigma(\xi)$ ולכן אנחנו מקבלים שיכון $\mathrm{Gal}(L/K) \hookrightarrow \mathrm{Aut}(\mu_n)$ על־ידי $\sigma \mapsto \sigma|_{\mu_n}$.

נגדיר $\lambda : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to \mathrm{Aut}(\mu_n)$ על־ידי $a \mapsto \sigma_a$ כאשר $\sigma_a(\xi) = \xi^a$ לכל $a \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ והעתקה הזאת מגדירה את השיכון $\mathrm{Gal}(L/K) \hookrightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$. $\square$

שאלה 3

בכל סעיף נקבע האם הטענה נכונה או לא נכונה וננמק לספורט.

סעיף א'

בחבורה $\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_9)$ יש יותר איברים מאשר ב־$\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_8)$.

הוכחה: הטענה **לא נכונה.**

נשים לב

$$\mathbb{F}_8 = \mathbb{F}_{2^3}, \mathbb{F}_9 = \mathbb{F}_{3^2}$$

ראינו שהשדות הסופיים $\mathbb{F}_q = \mathbb{F}_{p^n}$ עבור p ראשוני ו־$n \in \mathbb{N}$ הם יחידים עד־כדי איזומורפיזם, והאיברים בשדה $\mathbb{F}_{p^n}$ הם השורשים של הפולינום $x^{p^n} - x$.

ניזכר ש־$\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_{p^n})$ נוצרת על־ידי אוטומורפיזם הפרובניוס ולכן $\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_{p^n}) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, ולכן ב־$\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_8)$ יש יותר איברים. □

סעיף ב'

תהיי L/K הרחבת שדות סופית ו־$\overline{L}$ סגור אלגברי של L. אם שני איברים $\alpha, \beta \in \overline{L}$ צמודים מעל L אז הם צמודים גם מעל K.

הוכחה: הטענה **נכונה.**

ניזכר $\overline{L}$ הוא סגור אלגברית, כלומר לכל פולינום ממעלה גדולה מ־1 יש שורש ב־$\overline{L}$. אם $\alpha, \beta \in \overline{K}$ צמודים, זה אומר שהם שורש של אותו פולינום (כי $\alpha \in \overline{K}$ אז הצמודים שלו מעל L הם השורשים של הפולינום המינימלי $f_{\alpha/L}$ ובאותו אופן גם על β).

אז $f_{\alpha/L} = f_{\beta/L}$, אבל $f_{\alpha/K} \mid f_{\alpha/L}$, ו־$f_{\alpha/K}$ הוא פולינום אי־פריק ומתוקן שגם β מאפס (כי אם β שורש של $f_{\alpha/L}$ הוא גם שורש של $f_{\alpha/K}$) וזה בידיוק אומר ש־$f_{\alpha/K} = f_{\beta/K}$ ולכן α, β צמודים מעל K. □

סעיף ג'

תהיי E/K הרחבת שדות ויהיו L, F תתי־הרחבות כך ש־$E = LF$. אם E/F סופית אז L/K סופית.

הוכחה: הטענה **לא נכונה.**

גבע הראה את הטענה הזאת $\pm$ באחד התרגולים אבל הוא דיבר על איזומורפיזם כלשהו אבל הרעיון דומה: ניקח $K = \mathbb{F}_5, L = K(t), F = K(t^2)$, מתקיים $F \subseteq L$ ולכן מהגדרת הקומפוזיטום, $E = LF = L$ ומתקיים $[L : F] = 2$ בגלל הפולינום $x^2 - t^2$ שהוא פולינום אי־פריק אבל כמובן שמתקיים $[L : K] = \infty$ כי זה שדה הפונקציונליות הרציונליות עם t. □

סעיף ד'

לכל חבורה סופית G יש הרחבת גלואה L/K כך שמתקיים $G \simeq \mathrm{Gal}(L/K)$.

הוכחה: הטענה **נכונה.**

משפט 0.1 (תזכורת: *משפט קיילי*): תהיי G חבורה סופית מסדר n. אז קיים שיכון (הומומורפיזם חד־חד ערכי) $\phi : G \to S_n$.

אז קיימת $H \leq S_n$ כך ש־$G \simeq H$.

נגדיר $L = \mathbb{Q}(t_1, \cdots, t_n)$ ו־$F = \mathbb{Q}(s_1, \cdots, s_n)$ כאשר $s_1, \cdots, s_n$ הם הפולינומים סימטריים.

ההרחבה L/F היא הרחבת גלואה כי אנחנו בשדה ממציין 0 ולכן כל פולינום אי־פריק הוא ספרבילי ואם t_i הוא שורש ב־L אז מהגדרת הפולינום הסימטריים אפשר לבטא אותו באמצעות פולינום סימטריים ולכן הוא מתפצל לחלוטין ב־L. אז מצאנו נורמליות + ספרבליות $\Longleftarrow$ גלואה.

בפרט מתקיים $\mathrm{Gal}(L/F) = S_n$ ו־H שדה שבת ולכן ממשפט ארטין $K^H = \{x \in K \mid \forall \sigma \in H \ \sigma(x) = x\}$ ולכן $\mathrm{Gal}(L/K) \simeq H \simeq G$. □

סעיף ה'

אם להרחבה סופית L/K אין תתי־הרחבות $K \subsetneq F \subsetneq L$ אז $[L : K]$ ראשוני.

הוכחה: לא יודעת, אבל התשובה **לא נכונה.**

הנימוק של מיכאל: $F = \mathbb{Q}(x_1, x_2, x_3, x_4), K = \mathbb{Q}(s_1, s_2, s_3, s_4)$ כאשר s_1, s_2, s_3, s_4 הפולינומים הסימטריים עם 4 משנים וראינו ש־L/F גלואה.

נסתכל על $H = S_3 \leq S_4$ ונסתכל על שדה השבת של H, $L = F^H$.

ממשפט ההתאמה, $[L : K] = \frac{|S_4|}{|S_3|} = 4$ ומצד שני אם הייתה תת־הרחבה $K \subsetneq F \subsetneq L$ כזאת אז מהמשפט היסודי של התאמת גלואה היה צריך להתקיים שיש התאמה ל־$S_3 \leq \mathscr{F}(F) \leq S_4$, אבל אין כזאת תת־חבורה ולכן אין כזה שדה. □