פתרון מטלה 06 — אנליזה פונקציונלית, 80417

23 במאי 2025

שאלה 1

יהי $1 \leq p < \infty$ ונגדיר את המרחב ℓ^p להיות מרחב הסדרות הממשיות $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ המקיימות $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$ ונגדיר $\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$,
באינפי 3 ראינו שזו נורמה על ℓ^p.

סעיף א'

נוכיח שאם $p \neq 2$ אז $\|\cdot\|_p$ אינה מושרית ממכפלה פנימית על ℓ^p.

הוכחה: נשים לב שהקבלה לטענה שאנחנו מתבקשים להוכיח היא שהנורמה על המרחב $\left(\ell^p, \|\cdot\|_p\right)$ מושרית ממכפלה פנימית אם ורק אם $p = 2$:

$\Leftarrow$ נניח כי הנורמה על המרחב $(\ell^p, \|\cdot\|)$ מושרית ממכפלה פנימית ונראה כי $p = 2$.

מהיות ℓ^p מרחב נורמי, נובע משאלה 4 כי הוא מושרה ממכפלה פנימית אם ורק אם הוא מקיים את כלל המקבילית.

לכן מספיק שניקח $x = (1, 0, 0), y = (0, 1, 0)$ ונשים לב שמתקיים $\|x\| = \|y\| = 1$. מכלל המקבילית מתקיים:

$$\|x+y\|_p^2 + \|x-y\|_p^2 = 2 \cdot 2^{\frac{2}{p}} = 4 = 2 + 2 = 2\|x\|_p^{\frac{2}{p}} + 2\|y\|_p^{\frac{2}{p}} \Longleftrightarrow 2^{\frac{2}{p}} = 2 \Longleftrightarrow p = 2$$

$\Longrightarrow$ נניח כי $p = 2$ ונראה כי הנורמה על המרחב $(\ell^p, \|\cdot\|)$ מושרית ממכפלה פנימית. יהיו $x = (x_n), y = (y_n) \in \ell^2$ ונגדיר

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$

נראה כי זו אכן מכפלה פנימית:

1. לינאריות ברחיב הראשון: יהיו $x, y, z \in \ell^2$ ו־$\alpha \in \mathbb{R}$, מתקיים:

$$\langle \alpha x + y, z \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha x_n + y_n) z_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} x_n z_n + \sum_{n+1}^{\infty} y_n z_n = \alpha \langle x, z \rangle + + \langle y, z \rangle$$

2. סימטרייה: ישיר
3. אי־שליליות:

$$\infty > \langle x, x \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 \geq 0$$

וכמובן $x = 0 \Longleftrightarrow \langle x, x \rangle = 0$ והביטוי לעיל קטן מאינסוף כי אנחנו ב־ℓ^2.

ולכן זו אכן מכפלה פנימית, ולכן היא מקיימת את כלל המקבילית והנורמה:

$$\|x\|_2 = \sqrt[2]{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2} = \sqrt[2]{\langle x, x \rangle}$$

נורמה על ℓ^2 המושרית ממכפלה פנימית. $\square$

סעיף ב'

נוכיח שנורמת ∞ על המרחב $C[a, b]$ אינה מושרת ממכפלה פנימית.

הוכחה: בלי הגבלת הכלליות נבחן את $C[0, 1]$ (שאר המקרים יתקבלו על־ידי מתיחה והזזה של פונקציות).

נגדיר

$$f(x) = x, g(x) = 1 - x$$

מתקיים

$$\|f\|_\infty^2 = 1 = \|g\|_\infty^2$$

וגם מתקיים

$$f + g = x + 1 - x = 1, \;\; f - g = x - 1 + x = 2x - 1$$

ואז

$$\|f+g\|_\infty^2 = 1,\ \ \|f-g\|_\infty^2 = 1$$

אבל אם נורמת ∞ הייתה מושרית ממכפלה פנימית, היא הייתה מקיימת את תנאי המקבילית, אבל

$$2\big(\|f\|^2+\|y\|^2\big) = 2(1+1) = 4 \neq 2 = 1+1 = \|f+g\|^2+\|f-g\|^2$$

ולכן נורמת ∞ על המרחב $C[0,1]$ לא מושרית ממכפלה פנימית. $\square$

שאלה 2

יהי $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ מרחב מכפלה פנימית ו־$x, (x_k)_{k=1}^{\infty} \in H$.

סעיף א'

נראה כי אם $\|x\| \to \|x_k\|$ וגם $\langle x, x \rangle \to \langle x, x_k \rangle$ אז $x_k \to x$.

הוכחה: מתקיים

$$\|x - x_k\| = \langle x - x_k, x - x_k \rangle = \langle x - x_k, x \rangle + \langle x - x_k, -x_k \rangle$$

□

סעיף ב'

תהיי $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ מערכת אורתונורמלית. נראה כי הסדרה $y_k = \langle e_k, x \rangle e_k$ מתכנסת.

הוכחה:

□

שאלה 3

נוכיח שהבסיס הסטנדרטי הוא מערכת אורתונורמלית שלמה ב־ℓ^2, כלומר קבוצת הסדרות e_k ששוות ל־1 במקום ה־k ו־0 אם אחרת.

הוכחה:

$\square$

שאלה 4

יהי $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ מרחב מכפלה פנימית.

סעיף א'

נראה כי נורמה שמושרית ממכפלה פנימית מקיימת את חוק המקבילית: לכל $x, y \in H$ מתקיים

$$2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2$$

הוכחה: נניח כי הנורמה $\|\cdot\|$ מושרית ממכפלה פנימית ונראה כי היא מקיימת את כלל המקבילית.
מתקיים מהגדרה:

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle \\ &= \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle + \langle x,x\rangle - \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle = 2\langle x,x\rangle + 2\langle y,y\rangle \\ &= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \end{aligned}$$

□

סעיף ב'

נוסחאות הפולריזציה

תת־סעיף א'

נניח ש־H מרחב מכפלה פנימית ממשי. נראה שלכל $x, y \in H$ מתקיים

$$\langle x,y\rangle = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4}$$

הוכחה: מכיוון ש־H מרחב מכפלה פנימית ממשי נובע $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$ ולכן מתקיים

$$\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x,y\rangle - \left(\|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x,y\rangle\right) = 4\langle x,y\rangle \Rightarrow \langle x,y\rangle = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4}$$

□