פתרון מטלה 11 — חשבון אינפיניטסימלי 3, 80415

26 ביוני 2025

שאלה 1

תהיינה $T \subseteq S \subseteq \mathbb{R}^k$ קבוצות חסומות ו־$f : S \to \mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית על S ו־T כך ש־$f \geq 0$. נוכיח כי מתקיים

$$\int_T f(x)dx \leq \int_S f(x)dx$$

הוכחה: הרעיון: זה נובע מהאי־שליליות של f ולכן אנחנו מוסיפים עוד איברים לכל הפחות אי־שליליים.
מכיוון ש־f אינטגרבילית על S, קיימת תיבה $S \subseteq Q \subseteq \mathbb{R}^k$ עבורה האינטגרל $\int_Q f_S(x)dx$ קיים.
בפרט, כמובן שמתקיים $T \subseteq S \subseteq Q$.
נגדיר

$$f_Q(x) = \begin{cases} f(x) & x \in S \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

נסתכל על χ_S, χ_T הפונקציות המציינות של S, T בהתאמה על Q, מתקיים אם כך

$$\int_S f(x)dx = \int_Q f(x)_{\chi_S}(x)dx, \int_T f(x)dx = \int_Q f(x)_{\chi_T}(x)dx$$

מכך שמתקיים $T \subseteq S$ מתקיים גם $\chi_T(x) \leq \chi_S(x)$ לכל $x \in Q$ מהגדרה, ומכך ש־$f(x) \geq 0$ על S ו־0 לכל $x \in Q \setminus S$, אז מתקיים לכל $x \in Q$

$$f_Q(x)_{\chi_T}(x) \leq f_Q(x)_{\chi_S}(x)$$

וכשניקח אינטגרל על שני האגפים נקבל

$$\int_T f(x)dx = \int_Q f_Q(x)_{\chi_T} \leq \int_Q f_Q(x)_{\chi_S} = \int_S f(x)dx$$

$\square$

שאלה 2

תהיי $S \subseteq \mathbb{R}^k$ קבוצה בעלת נפח ו־$f : S \to \mathbb{R}$ פונקציה חסומה.

סעיף א'

נוכיח כי אם קבוצת נקודות האי־רציפות של f ממידה אפס, אז f אינטגרבילית על S.

הוכחה: מהיות S בעלת נפח נובע כי S חסומה ו־∂S.

ניקח תיבה $A \subseteq \mathbb{R}^k$ כך שמתקיים $S \subseteq A$, ניתן לעשות זאת מהיות S חסומה ונגדיר $\hat{f} : A \to \mathbb{R}$ על־ידי

$$\hat{f} = \begin{cases} f(x) & x \in S \\ 0 & x \notin S \end{cases}$$

ניזכר כי $\hat{f}$ אינטגרבילית על A אם ורק אם קבוצת נקודות האי־רציפות של $\hat{f}$ על A היא ממידה אפס.

נבחין כי מהבנייה שלנו, נקודות האי־רציפות של $\hat{f}$ על A יכולות לקרות או בתוך S, או על ∂S, ולכן

$$D_{\hat{f}} \subseteq D_f \cup \partial S$$

כאשר $D_{\hat{f}}, D_f$ אלו נקודות האי־רציפות של $\hat{f}$ ו־f על A ו־S בהתאמה.

נשים לב שמההנחה כפי שצויין קודם ∂S ממידה אפס ומההנחה כי קבוצת נקודות האי־רציפות של f על S היא ממידה אפס.

ראינו שאיחוד בן־מנייה של קבוצות ממידה אפס הוא קבוצה ממידה אפס ולכן $D_{\hat{f}}$ היא קבוצה ממידה אפס, ולכן $\hat{f}$ אינטגרבילית על A ממשפט לבג.

נשים לב שמכך ש־$\hat{f}(x) = f(x)$ לכל $x \in S$ ו־0 אחרת, נובע שמתקיים

$$\int_A \hat{f}(x)dx = \int_S f(x)dx$$

ו־f אינטגרבילית על S, כנדרש. $\square$

סעיף ב'

נוכיח כי אם f רציפה אז f אינטגרבילית בנוסף על S° ומתקיים

$$\int_S f(x)dx = \int_{S^\circ} f(x)dx$$

הוכחה: ראשית, כמובן אם f פונקציה רציפה אז קבוצת נקודות האי־רציפות שלה היא הקבוצה הריקה שממידה אפס ולכן f אינטגרבילית על S.

TODOOOOOOOOOOOOOOOOOO $\square$

סעיף ג'

נוכיח כי אם S ממידה אפס ו־f אינטגרבילית על S אז מתקיים

$$\int_S f(x)dx = 0$$

הוכחה: S ממידה אפס ובעלת נפח ולכן לפי טענה שראינו בתרגול נובע כי S מתכולה אפס ובמקרה זה מתקיים $V(S) = \int_S 1_S(x)dx = 0$ $(\star)$.

f אינטגרבילית על S וחסומה (מהיותה בעלת נפח) ולכן קיימת $A \subseteq \mathbb{R}^k$ תיבה כך ש־$A \subseteq S$ ואם נרחיב את f לפונקציה על A

$$f_S(x) = \begin{cases} f(x) & x \in S \\ 0 & x \notin S \end{cases}$$

כך שהאינטגרל $\int_A f_S(x)dx$ קיים וראינו שמתקיים $\int_S f(x)dx = \int_A f_S(x)dx$.

מספיק שנסתכל על האינטגרל העליון (כי הוא שווה לאינטגרל התחתון): מכך ש־S ממידה אפס, אז לכל חלוקה P של A, התרומה של f בכל תיבה $R \in P$ המקיימת $R \cap S \neq \emptyset$, התרומה של כל חלוקה כזו הוא בעצם 0:

f אינטגרבילית ולכן חסומה אז $M = \sup_{x \in R}|f(x)|$ ולכן התרומה שלו לסכומים עליונים חסומה על־ידי

$$M \cdot \mathrm{Vol}(S) \underset{(\star)}{=} M \cdot 0 = 0$$

אבל בכל $R \in P$ כך שמתקיים $R \cap S = \emptyset$ התרומה היא 0 מהגדרת $f_S(x)$, ולכן בסך־הכל נקבל

$$\int_A f_S(x)dx = 0 \Rightarrow \int_S f(x)dx = 0$$

□

שאלה 3

תהיי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה כך ש־$f\geq 0$.
נסמן ב־$\Gamma_f=\{(x,f(x))\mid x\in[a,b]\}\subseteq\mathbb{R}^2$ את הגרף של f.
נוכיח כי Γ_f בעלת נפח ומתקיים

$$V(\Gamma_f)=\int_a^b f(x)dx$$

הוכחה: f רציפה ו־$[a,b]$ קבוצה סגורה וחסומה ולכן קומפקטית ופונקציה רציפה על קבוצה קומפקטית שולחת קבוצה קומפקטית לקבוצה קומפקטית ולכן Γ_f היא קבוצה קומפקטית. **TODOOOOOOOOOOOOOOOOOO** $\square$

שאלה 4

TODOOOOOOOOOOOOOOOOOO

שאלה 5

תהיי $f:(0,\infty)^2\to\mathbb{R}$ הפונקציה הנתונה על־ידי $f(x,y)=\frac{1}{(y+1)^2}$.

סעיף א'

נראה שהפונקציה f אינה אינטגרבילית על הקבוצה $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x>0, x<y<2x\right\}$.

פתרון: A פתוחה ולכן עלינו להגדיר סדרת מיצוי פתוחה של A.

נגדיר

$$A_n=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{n}<x<n, x+\frac{1}{n}<y<2x-\frac{1}{n}\right\}$$

זאת סדרת מיצוי פתוחה של A, ומטענה שראינו ניתן לחשב את האינטגרל על $C_n=\overline{A_n}$ נחשב עם משפט פוביני:

$$\int_{A_n} f(x,y)dydx=\int_{\frac{1}{n}}^{n}\left(\int_{x+\frac{1}{n}}^{2x-\frac{1}{n}}\frac{1}{(y+1)^2}dy\right)dx=\int_{\frac{1}{n}}^{2n}\left(\int_{\frac{y}{2}}^{y}\frac{1}{(y+1)^2}dx\right)dy=\int_{\frac{1}{n}}^{2n}\left[\frac{x}{(y+1)^2}\right]_{y=\frac{y}{2}}^{x=y}dy$$

$$=\int_{\frac{1}{n}}^{2n}\frac{y}{2(y+1)^2}dy=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{n}}^{2n}\frac{y}{(y+1)^2}dy\underset{\substack{u=y+1\\du=dy\\y=u-1}}{=}\frac{1}{2}\left[\ln(|y+1|)+\frac{1}{y+1}\right]_{y=\frac{1}{n}}^{y=2n}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\ln(2n+1)+\frac{1}{2n+1}-\ln\left(\frac{1}{n}+1\right)-\frac{1}{\frac{1}{n}+1}\right)=\frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{n(2n+1)}{1+n}\right)+\frac{1-2n^2}{2n^2+3n+1}\right)\underset{n\to\infty}{\to}\infty$$

□

סעיף ב'

נראה שהפונקציה f אינטגרבילית על הקבוצה $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x>0, x^2<y<2x^2\right\}$.

פתרון: באותו אופן לסעיף הקודם נגדיר

$$A_n=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{n}<x<n, x^2+\frac{1}{n}<y<2x^2-\frac{1}{n}\right\}$$

זאת סדרת מיצוי פתוחה של A, ומטענה שראינו ניתן לחשב את האינטגרל על $C_n=\overline{A_n}$ נחשב עם משפט פוביני: ונחשב

$$\int_{A_n} f(x,y)dxdy=\int_{\frac{1}{n}}^{n}\left(\int_{x^2+\frac{1}{n}}^{2x^2-\frac{1}{n}}\frac{1}{(y+1)^2}dy\right)dx=\int_{\frac{1}{n}}^{n}\left(\int_{\sqrt{\frac{y}{2}}}^{\sqrt{y}}\frac{1}{(y+1)^2}dx\right)dy$$

$$=\int_{\frac{1}{n}}^{n}\left[\frac{x}{(y+1)^2}\right]_{x=\sqrt{\frac{y}{2}}}^{x=\sqrt{y}}dy=\int_{\frac{1}{n}}^{n}\left(\frac{\sqrt{y}}{(y+1)^2}-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{2}(y+1)^2}\right)dy$$

$$\left[-\frac{\sqrt{y}}{1+y}+\arctan(\sqrt{y})+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{\sqrt{y}}{y+1}+\arctan(\sqrt{y})\right)\right]_{y=\frac{1}{n}}^{y=n}$$

$$=\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)+\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{n})\underset{n\to\infty}{\to}0+\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

□