

פתרון מטלה 05 – תורת ההסתברות 1, 80420

4 בדצמבר 2025



שאלה 1

בקופה n מטבעות.

נניח ששני שחקנים מטיילים בלתי-לוייה בכל סיבוב, כאשר ההתפלגות של הקובייה היא

$$\mathbb{P}(1) = \mathbb{P}(2) = \mathbb{P}(3) = \mathbb{P}(4) = \frac{1}{5}, \quad \mathbb{P}(5) = \mathbb{P}(6) = \frac{1}{10}$$

מי שמקבל את הערך הגבוה ביותר בהטלה זוכה במטבע אחד מן הקופה.

אם שני השחקנים מקבלים ערכים שווים – אף שחקן אינו מקבל מטבע.

סעיף א'

נמצא את התפלגות מספר המטבעות שכל אחד מהשחקנים מרוויח בסוף המשחק.

פתרון: נסמן ב- Y ו- Z את תוצאות ההטלה של השחקן הראשון והשני בהתאמה.

נגדיר X_i המשתנה המקרי שהשחקן הראשון זכה במטבע ה- i ובהתאם $X = \sum_{k=1}^n X_k$, סך הזכיות של המשתתף הראשון. אז

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_i = 1) &= \mathbb{P}(Y > Z) = \sum_{k=1}^6 \mathbb{P}(Y > Z, Z = k) = \mathbb{P}(Y > Z, Z = 1) + \dots + \mathbb{P}(Y > Z, Z = 6) \\ &= \underbrace{\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{5}}_{=\mathbb{P}(Y > Z, Z=1)} + \underbrace{\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{5}}_{=\mathbb{P}(Y > Z, Z=2)} + \underbrace{\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{5}}_{=\mathbb{P}(Y > Z, Z=3)} + \underbrace{\frac{2}{10} \cdot \frac{1}{5}}_{=\mathbb{P}(Y > Z, Z=4)} + \underbrace{\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10}}_{=\mathbb{P}(Y > Z, Z=5)} + \underbrace{0 \cdot \frac{1}{5}}_{=\mathbb{P}(Y > Z, Z=6)} = \frac{41}{100} \end{aligned}$$

יש לנו משתנה מקרי עם n ניסיונות והסתברות הצלחה $p = 0.41$ וזה בידיק לפי הגדרה התפלגות בינומית. \square

סעיף ב'

נחשב את ההסתברות לקבלת תוצאת תיקו בהטלה מסויימת.

פתרון: מהסימטריה של כל משתתף לנצח בסיבוב, ומהגדרת המשלים נקבל שההסתברות לקבלת תוצאת תיקו בהטלה מסויימת היא $1 - 0.41 \cdot 2 = 0.18$.

\square

סעיף ג'

נחשב את ההסתברות שמספר הסיבובים הכולל במשחק יהיה לכל היותר $n + 1$.

פתרון: יש לנו לכל הפחות n סיבובים ולכן יש שלוש אפשרויות: או שיש שחקן שזכה בכל ה- n סיבובים הראשונים, או שהיו $n + 1$ סיבובים ובסיבוב

ה- k , $1 \leq k \leq n$, משתתף אחד זכה ובשאר המשתתף השני זכה, או שבמקום שהמשתתף השני זכה באחד הסיבובים בידיק יהיה שבסיבוב אחד בידיק היה לנו תיקו.

נגדיר משתנה מקרי T – מספר תוצאות התיקו שהיו, כאשר ההסתברות לתיקו לפי הסעיף הקודם מתפלג ברנולי עם פרמטר 0.18, ויש לנו או תיקו אחד או אפס תיקו.

נגדיר W_i להיות המשתנה המקרי שאומר שהסיבוב ה- i נגמר בניצחון ולפי סעיף א' זה מתפלג ברנולי עם פרמטר 0.41.

נסמן ב- W המאורע שיהיו k סיבובים במשחק, כלומר $\mathbb{P}(W = k) = \mathbb{P}(\sum_{i=1}^k W_i = n)$ כלומר לפי מה שראינו בהצאה, $W \sim \text{Bin}(0.82)$ ולכן

$$\mathbb{P}(W \leq n + 1) = \mathbb{P}(W < n) + \mathbb{P}(W = n) + \mathbb{P}(W = n + 1) = 0 + 0.82^n + \binom{n+1}{n} 0.82^n \cdot 0.18$$

\square

שאלה 2

יהיו $X \sim \text{Bin}(n, p)$ ו- $Y \sim \text{Bin}(n, 1-p)$ ונוכיח $n - X \stackrel{d}{=} Y$.

הוכחה: כלומר, נרצה להראות $(n - X) \sim \text{Bin}(n, 1-p)$. מהגדרה מתקיים

$$\mathbb{P}(n - X = l) = \mathbb{P}(X = n - l) \stackrel{X \sim \text{Bin}(n, p)}{=} \binom{n}{n-l} p^{n-l} (1-p)^{n-(n-l)} \stackrel{\binom{n}{l} = \binom{n}{n-l}}{=} \binom{n}{l} p^{n-l} (1-p)^l$$

כלומר $(n - X) \sim \text{Bin}(n, 1-p)$.

□

שאלה 3

יהיו $X_i \sim Ber(p), Z_i \sim Ber(q)$ משתנים מקריים בלתי תלויים. עבור $i \in [n]$ נגדיר

$$Y_i = X_i Z_i, \quad X = \sum_{i=1}^n X_i, \quad Y = \sum_{i=1}^n Y_i$$

סעיף א'

נראה כי $X \sim Bin(n, p), Y \sim Bin(n, pq)$ וכן שלכל $0 \leq m \leq n$ מתקיים

$$Y \mid \{X = m\} \sim Bin(m, q)$$

הוכחה: בהרצאה ראינו $X \sim Bin(n, p)$, נשחזר את ההוכחה לשלמות: יהי $k \in \{0, \dots, n\}$ ונסמן $A_k := \{X = k\}$ וכן נסמן $B_k := \{Y = k\}$. וקומבינטורית אנחנו יודעים שמתקיים $|A_k| = \binom{n}{k}$ או

$$\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{x \in A_k} \mathbb{P}(X = x) = \sum_{x \in A_k} \left(\prod_{i \in [n]} \mathbb{P}(X_i = x_i) \right) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

כלומר $Y \sim Bin(n, pq)$.

נעבור להראות $Y \sim Bin(n, pq)$ נבחין שמתקיים לכל i עם האי-תלות הנתונה:

$$\mathbb{P}(Y_i = k) = \mathbb{P}(X_i Z_i = k) = \begin{cases} \mathbb{P}(X_i = 1) \mathbb{P}(Z_i = 1) & k = 1 \\ \mathbb{P}(X_i = 1) \mathbb{P}(Z_i = 0) + \mathbb{P}(X_i = 0) \mathbb{P}(Z_i = 1) + \mathbb{P}(X_i = 0) \mathbb{P}(Z_i = 0) & k = 0 \\ \mathbb{P}(X_i = k) \mathbb{P}(Z_i = k) & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} pq & k = 1 \\ p(1-q) + q(1-p) + (1-q)(1-p) & k = 0 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} = \begin{cases} pq & k = 1 \\ 1-pq & k = 0 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

כאשר המקרה של "האחרת" נובע מהתומך של משתנה ברנולי ולכן $Y_i \sim Ber(pq)$ ובפרט מהטענה לעיל, $Y \sim Bin(n, pq)$.

נשאר להראות $Y \mid \{X = m\} \sim Bin(m, q)$: לכל $0 \leq t \leq m$ מתקיים $\mathbb{P}(Y = t \mid X = m) = \frac{\mathbb{P}(Y=t, X=m)}{\mathbb{P}(X=m)}$.

$\{X = m\}$ שקול ללהגיד שיש $j_1, \dots, j_m \in [n]$ כך שלכל אחד מהם, $X_{j_i} = 1$ ולשאר 0.

בשביל $\{Y = t\}$ יש לנו k_1, \dots, k_t שהם ב- j_1, \dots, j_m ובאינדקסים אלו גם $Z_{k_i} = 1$ ובשאר 0.

אז יש לנו $\binom{n}{m}$ לבחירת אינדקסים ה- j ו- $\binom{m}{t}$ לבחירת ל- Z_i ים שיקבלו 1 מתוך קבוצת האינדקסים של j ומהאי תלות נקבל

$$\mathbb{P}(Y = t \mid X = m) = \frac{\mathbb{P}(Y = t, X = m)}{\mathbb{P}(X = m)} = \frac{\binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m} \binom{m}{t} q^t (1-q)^{m-t}}{\binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m}} = \binom{m}{t} q^t (1-q)^{m-t}$$

$$\implies Y \mid \{X = m\} \sim Bin(m, q)$$

□

סעיף ב'

נראה כי אם עבור $0 \leq m \leq n$ מתקיים $W \mid \{X = m\} \sim \text{Bin}(m, q)$ אז $W \sim \text{Bin}(n, pq)$.
הוכחה: נרצה להשתמש בנוסחת ההסתברות השלמה

$$\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{m=k}^n \mathbb{P}(Y = k \mid X = m) \mathbb{P}(X = m)$$

אז

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y = k) &= \sum_{m=k}^n \binom{m}{k} q^k (1-q)^{m-k} \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m} \\ &\stackrel{(\star)}{=} q^k \binom{n}{k} \sum_{m=k}^n \binom{n-k}{m-k} (pq)^k (1-p)^{n-m} (1-q)^{m-k} \\ &= q^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \sum_{m=k}^n \binom{n-k}{m-k} (p(1-q))^{m-k} \\ &= q^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} (p(1-q))^j \\ &= q^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} (pq)^k (1-pq)^{n-k} \\ \implies Y &\sim \text{Bin}(n, pq) \end{aligned}$$

□

כאשר (\star) נובע מכך $\binom{n}{m} \binom{m}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{m-k}$.

שאלה 4

יהיו $X, Y \sim Geo(p)$ משתנים מקריים בלתי-תלויים.

סעיף א'

נחשב את ההתפלגות של $\min\{X, Y\}$.

פתרון: בהרצאה ראינו שמשנתה מקרי נתמך על השלמים מתפלג $Geo(p)$ אם ורק אם לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $\mathbb{P}(Z > n) = (1-p)^n$, אז בפרט מתקיים

$$\mathbb{P}(X \geq n) = \sum_{m=n}^{\infty} \mathbb{P}(X = m) = \sum_{m=n}^{\infty} (1-p)^{m-1} p = p \sum_{m=n+1}^{\infty} (1-p)^m \stackrel{\text{טור הנדסי}}{=} p \cdot \frac{(1-p)^{n+1} - 0}{1 - (1-p)} = (1-p)^{n+1}$$

כאשר מהיות $p \in (0, 1]$ מתקיים $\lim_{m \rightarrow \infty} (1-p)^m = 0$

בפרט מתקיים

$$\mathbb{P}(\min\{X, Y\} \geq k) = \mathbb{P}(X \geq k, Y \geq k) \stackrel{\text{א-תלות}}{=} \mathbb{P}(X \geq k) \mathbb{P}(Y \geq k) = (1-p)^{k-1} (1-p)^{k-1} = (1-p)^{2k-2}$$

נשאר אם-כך לחשב

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\min\{X, Y\} = k) &= \mathbb{P}(\min\{X, Y\} \geq k) - \mathbb{P}(\min\{X, Y\} \geq k+1) = (1-p)^{2k-2} - (1-p)^{2k} \\ &= (1-p)^{2k} ((1-p)^{-2} - 1) = (1-p)^{2k} \frac{2p - p^2}{(1-p)^2} = (1-p)^{2k-2} (2p - p^2) \end{aligned}$$

□

סעיף ב'

נחשב את ההתפלגות של $X + Y$.

פתרון: נגדיר משנתה מקרי חדש $Z = X + Y$ ונשתמש בקונבולוציה:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z = z) &= \mathbb{P}(X + Y = z) = \sum_{k=1}^{z-1} \mathbb{P}(X = k, Y = z-k) \stackrel{\text{א-תלות}}{=} \sum_{k=1}^{z-1} \mathbb{P}(X = k) \mathbb{P}(Y = z-k) \\ &= \sum_{k=1}^{z-1} (p(1-p)^{k-1}) (p(1-p)^{z-k-1}) = \sum_{k=1}^{z-1} p^2 (1-p)^{z-2} = p^2 (1-p)^{z-2} \sum_{k=1}^{z-1} 1 = p^2 (1-p)^{z-2} (z-1) \end{aligned}$$

□

סעיף ג'

נחשב את ההתפלגות של $X - Y$.

פתרון: שוב עם קונבולוציה

$$\mathbb{P}(X - Y = z) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = k+z, Y = k) \stackrel{\text{א-תלות}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = k+z) \mathbb{P}(Y = k)$$

כאשר האינדקסי סכימה נובעים מכך ש- $X = Z + Y$ ולכן הערכים האפשריים עבור Y הם עבור $k \geq 1$ כי משנתה מקרי גיאומטרי ובאותו אופן עבור X צריך להתקין $k \geq 1 - z \implies z + k \geq 1$.

אז האינדקס ההתחלתי לסכימה יהיה $\max\{1, 1-z\}$ ומהגדרת המשתנה המקרי הגיאומטרי יהיה חייבי להתקיים $k = 1$ להתחלה. כעת יש שלוש אופציות:

$$X > Y \quad X < Y \quad X = Y \stackrel{\text{בהתאמה}}{\implies} z \geq 1, \quad z \leq -1, \quad z = 0$$

עבור $z = 0$ זה המקרה הדי טריוויאלי

$$\mathbb{P}(X - Y = 0) = \mathbb{P}(X = Y) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) \mathbb{P}(Y = k) = \sum_{k=1}^{\infty} (p(1-p)^{k-1})(p(1-p)^{k-1}) = p^2(1-p)^{-2} \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^2 k$$

$$\stackrel{\text{טור הנדסי}}{=} p^2(1-p)^{-2} \frac{(1-p)^2}{p(2-p)} = \frac{p}{2-p}$$

כעת עבור $z \geq 1$ נקבל

$$\mathbb{P}(X - Y = z) = \sum_{k=1}^{\infty} (p(1-p)^{z+k-1})(p(1-p)^{k-1}) = p^2 \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{z+2k-2} = p^2(1-p)^{z-2} \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{2k}$$

$$\stackrel{\text{טור הנדסי}}{=} p^2(1-p)^{z-2} \frac{(1-p)^2}{p(2-p)} = \frac{p(1-p)^z}{2-p}$$

עבור $z \leq -1$ נשים לב שמתקיים

$$\mathbb{P}(X - Y = z) \stackrel{m=-z}{=} \mathbb{P}(X - Y = -m) = \mathbb{P}(Y - X = m)$$

אבל

$$\mathbb{P}(Y - X = m) = \mathbb{P}(X - Y = m)$$

מטעמי סימטריה, ולכן עבור $z \leq -1$ נקבל מהמקרה הקודם

$$\mathbb{P}(X - Y = z) \mathbb{P}(Y - X = -z) = \frac{p(1-p)^{-z}}{2-p}$$

נשים לב שבעצם בכל המקרים קיבלנו את אותה התוצאה, כלומר לכל $k \in \mathbb{Z}$ מתקיים

$$\mathbb{P}(X - Y = k) = \frac{p(1-p)^{|k|}}{2-p}$$

□

סעיף ד'

נחשב את ההתפלגות של $\max\{X, Y\}$.

פתרון: ראשית נשים לב מהגדרת המקסימום שמתקיים

$$\mathbb{P}(\max\{X, Y\} \leq k) = \mathbb{P}(X \leq k, Y \leq k) \stackrel{\text{א-תלות}}{=} \mathbb{P}(X \leq k) \mathbb{P}(Y \leq k) = (1 - (1-p)^k)^2$$

ובאופן דומה לסעיפים הקודמים שכן אנחנו נתמכים על הטבעיים

$$\mathbb{P}(\max\{X, Y\} = k) = \mathbb{P}(\max\{X, Y\} \leq k) - \mathbb{P}(\max\{X, Y\} \leq k-1) = (1 - (1-p)^k)^2 - (1 - (1-p)^{k-1})^2$$

□

שאלה 5

נגדיר סדרה של משתנים מקריים בלתי־לויים שווי התפלגות על \mathbb{Z} ונגדיר

$$n \geq 0, \quad X_n = \sum_{i=1}^n Y_i, \quad Z = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{X_n=0}$$

נניח $p := 1 - \mathbb{P}(\exists n > 0 \mid X_n = 0) > 0$ ונראה כי $Z \sim \text{Geo}(p)$.

פתרון: ראשית נשים לב $\mathbb{P}(Z = 0) = 0$.

TODOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOO

□

שאלה 6

נראה כי אם $X \sim Poi(\lambda), Y \sim Poi(\eta)$ בלתי-תלויים אז לכל $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ מתקיים

$$(X \mid X + Y = n) \sim \text{Bin}\left(n, \frac{\lambda}{\lambda + \eta}\right)$$

פתרון: TOD000000000000000000000000

☐

שאלה 7

אלקרס וג'וקוביץ משחקים טניס זה מול זה. ההסתברות של אלקרס לנצח במערכה אחת של המשחק היא $\frac{2}{3}$. באופן בלתי-תלוי בתוצאות המערכות הקודמות. השניים משחקים עד אשר אחד מהם זוכה ב-3 מערכות.

מה ההסתברות שאלקרס יזכה במשחק? איך הדבר קשור להתפלגות בינומית?

פתרון: נסמן ב- X_i את המאורע שאלקרס זכה במערכה ה- i ולפי הנתון $X_i \sim \text{Ber}(\frac{2}{3})$ ולכן מהנתון על האי-תלות נקבל $X = \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Bin}(n, \frac{2}{3})$ כאשר יש לנו n סיבובים.

נבחין שאם $n > 5$ יש לפחות 3 נצחונות לאחד מהם ולכן סיימנו, אז מספיק לחשב עד $n = 5$ אז

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \geq 3) &= \mathbb{P}(X = 3) + \mathbb{P}(X = 4) + \mathbb{P}(X = 5) \\ &= \sum_{k=3}^5 \binom{5}{k} \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{5-k} \\ &= \binom{5}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \binom{5}{4} \left(\frac{2}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \binom{5}{5} \left(\frac{2}{3}\right)^5 \left(\frac{1}{3}\right)^0 \\ &= 0.79 \end{aligned}$$

□