פתרון מטלה 03 — פונקציות מרוכבות, 80519

13 בנובמבר 2025

שאלה 1

נראה כי ההעתקה $z \mapsto \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2$ ו־$z \mapsto i\frac{1-z^2}{1+z^2}$ ממפות את החצי העליון של הדיסק לחצי מישור העליון.

הוכחה: קודם כל נכתוב מפורשות את התחומים הנדרשים

$$\mathbb{D}^+ = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1 \text{ and } Im(z) \geq 0\},\ \ H^+ = \{w \in \mathbb{C} \mid Im(w) > 0\}$$

השפה של $\mathbb{D}^+$ הם כל ה־$z \in \mathbb{C}$ המקיימים $|z| = 1$ או $Im(z) = 0$, נצטרך לכתוב את $\partial\mathbb{D}^+$ מפורשות ולכן ננתח את התנאים האלו, כלומר נרצה לכתוב פרמטריזציה של $z = e^{i\theta}$ ולמצוא תנאים מגבילים על θ.

התנאי $|z| = 1$ עם $Im(z) \geq 0$ אומר כי $\left|e^{i\theta}\right| = 1$ ולכן $e^{i\theta} = 1$ או $e^{i\theta} = -1$ ואנחנו יודעים שתנאים אלו מתקיימים אם $0 < \theta < \pi$.

כמו־כן, עם נוסחת אויילר ניתן לראות כי מתקיים $Im(z) \geq 0$:

$$z = e^{i0} = \cos(0) + i\sin(0) = 1 \Longrightarrow Im(z) = 0,$$

$$z = e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1 + 0 = -1 \Longrightarrow Im(z) = 0,$$

$$z = e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 + i \Longrightarrow Im(z) = 1$$

התנאי $|z| \leq 1$ עם $Im(z) = 0$ זו בעצם פונקציה לינארית ממשית עם $z = x$ עבור $-1 \leq x \leq 1$.

נסמן את התנאי $|z| = 1 \wedge Im(z) \geq 0$ ב־A ואת התנאי $|z| \leq 1 \wedge Im(z) = 0$ ב־B.

נסמן את ההעתקה $z \mapsto \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2$ על־ידי $f(z)$ ונבחין שזו הרכבה של העתקת מוביוס עם הפונקציה של ההעלאה בריבוע.

נכתוב $w_1 = \frac{1+z}{1-z}$ עבור $z = e^{i\theta}$ ונחשב בהתאם לשני המקרים שהגדרנו מקודם

$$w_1 = \frac{1+z}{1-z} = \frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = \frac{e^{\frac{i\theta}{2}}\left(e^{-\frac{i\theta}{2}} + e^{\frac{i\theta}{2}}\right)}{e^{\frac{i\theta}{2}}\left(e^{-\frac{i\theta}{2}} - e^{\frac{i\theta}{2}}\right)} = \frac{e^{-\frac{i\theta}{2}}\left(e^{\frac{i\theta}{2}} + e^{-\frac{i\theta}{2}}\right)}{e^{-\frac{i\theta}{2}}\left(e^{\frac{i\theta}{2}} - e^{-\frac{i\theta}{2}}\right)}$$

נעדיף את הנוסחה השנייה שכן בתרגול שראינו שמתקיים

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sin(z),\ \ \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2i} = \cos(z)$$

ולכן

$$w_1 = \frac{2\cos\left(\frac{z}{2}\right)}{2i\sin\left(\frac{z}{2}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{z}{2}\right)}{i\sin\left(\frac{z}{2}\right)}$$

תחת מקרה A, כמובן שהביטוי מוגדר היטב (אין חלוקה ב־0) וגם מתקיים ש־$Re(w_1) = 0$ כלומר w_1 הוא מהצורה ib עבור $b \in \mathbb{R}$.

כלומר, $w_1^2 = f(z) = -b^2$, כלומר כל הציר המדומה ממופה אל הציר הממשי השלילי.

תחת המקרה B, $-1 < z < 1$ ולכן $w_1 = \frac{1+z}{1-z} \in \mathbb{R}^+$ ולכן גם $w_1^2 = f(z) \in \mathbb{R}^+$ כלומר שוב מופנו לחלק הממשי רק שהפעם לחלק החיובי.

כלומר $\partial\mathbb{D}$ ממופה על־ידי f אל כל הישר הממשי.

נרצה לראות מה קורה בנקודות הפנימיות כדי לנתח לאן כל $\mathbb{D}$ נשלח. ניקח $z_0 = \frac{i}{2}$ ולכן

$$f(z_0) = \left(\frac{1+\frac{i}{2}}{1-\frac{i}{2}}\right)^2 = \left(\frac{2+i}{2-i}\right)^2 = \frac{(2+i)^2}{(2-i)^2} = \frac{3+4i}{3-4i}$$

לא עוזר לנו כל־כך, נחשב בדרך אחרת

$$\frac{2+i}{2-i} = \frac{(2+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{3+4i}{5} = \frac{3}{5} + \frac{4i}{5} \Longrightarrow \left(\frac{2+i}{2-i}\right)^2 = \left(\frac{3+4i}{5}\right)^2 = \frac{-7+24i}{25}$$

אז $Im(z) = \frac{24}{25} \geq 0$, ולכן ראינו שנקודה פנימית נשלחת ל־H^+ ונטען שזה מספיק כדי להראות ש־f ממפה את החצי העליון של הדיסק לחצי מישור העליון: f רציפה כהרכבה של פונקציות רציפות. ניקח z_0 נקודה בחצי הדיסק העליון ונבנה מסילה אל z_1 בחצי הדיסק העליון ונניח $w_0 = f(z_0)$ ממפה לחצי המישור העליון ונניח בשלילה ש־$w_1 = f(z_1)$ נשלחת לחצי המישור התחתון אז מרציפות f עם המסילה הרציפה שיצרנו נקבל מסילה בין w_0 לבין w_1, אבל אז המסילה הזאת בהכרח עוברת בשפה כלומר יש z_2 כך ש־$f(z_2)$ היא נקודה על הציר הממשי והמקור שלה הוא נקודה פנימית בחצי הדיסק העליון אבל אמרנו שרק נקודות על השפה של החצי דיסק העליון יכולות לשלוח לציר הממשי, ו־z_2 היא פנימית אז זאת כמובן סתירה.

נשאר לעשות את אותו התהליך עבור ההעתקה $z \mapsto i\frac{1-z^2}{1+z^2}$, נסמנה ב־$g(z)$.
נסמן $w_1 = \frac{1+z^2}{1-z^2}$ ולכן $g(z) = \frac{i}{w_2}$, או שניתן להסתכל על זה כשרשרת הרכבות (ושוב עם העתקת מוביוס).

$\square$