פתרון תרגיל בונוס לפסח — תורת הקבוצות, 80200

9 באפריל 2025

שאלה 1

נוכיח שלא קיימת קבוצה A המקיימת $|\mathcal{P}(A)| = \aleph_0$.

הוכחה: נניח בשלילה שקיימת קבוצה A כך ש־$|\mathcal{P}(A)| = \aleph_0$.
במקרה הראשון, אם קיים $n \in \mathbb{N}$ כך שמתקיים $|A| = n$, לפי מטלה 3 אנחנו יודעים שמתקיים $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|} = 2^n$ ולכן בפרט לא ייתכן כי מספר סופי יסמן שהקבוצה היא בת־מנייה ולכן קיבלנו סתירה.
במקרה השני, אם A קבוצה אינסופית ובת־מנייה, ממשפט קנטור על קבוצת החזקה שראינו בתרגול נובע כי $|A| = \aleph_0 < |\mathcal{P}(A)|$ וזאת סתירה.
המקרה האחרון הוא ש־A אינסופית אך אינה בת־מנייה ושוב ממשפט קנטור נקבל כי $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.
לכן לא קיימת קבוצה A המקיימת $|\mathcal{P}(A)| = \aleph_0$.
הערה: בתרגול הגדרנו $|X| < |Y|$ אם $|X| \le |Y|$ וגם $|X| \ne |Y|$. $\square$

שאלה 2

נראה שלא ניתן לשכן קבוצה מת מנייה

הוכחה: □

שאלה 3

נשתמש בטיעון האלכסון של קנטור כדי להראות שקבוצת הפונקציות $\{\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \sigma$ חד־חד ערכית ועל $\sigma\}$ אינה בת־מנייה.

הוכחה: $\square$