פתרון מטלה 04 — תורת הקבוצות, 80200

22 באפריל 2025

שאלה 1

נוכיח שאם X, Y, Z קבוצות אז מתקיים $\left|X^{Y \times Z}\right| = \left|\left(X^Y\right)^Z\right|$.

הוכחה: תהיי $f : Z \to X^Y$ נגדיר $\hat{f} : Y \times Z \to X$ על-ידי $\hat{f}(y, z) = f(z)(y)$.

TODOOOOOOOOOOOOOOOOOO $\square$

שאלה 2

נחשב את העוצמה של $C(\mathbb{R})$, קבוצת הפונקציות הרציפות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

סעיף א'

נוכיח שמתקיים $|\mathbb{R}|\le|C(\mathbb{R})|$.

הוכחה: נגדיר $f:\mathbb{R}\to C(\mathbb{R})$ על־ידי $f(x)=x$.
אנחנו יודעים שכל פונקציה קבועה היא פונקציה רציפה ולכן $f\in C(\mathbb{R})$, נראה כי היא חד־חד ערכית: נשים לב שלכל $x,y\in\mathbb{R}$ מתקיים

$$f(x)=f(y)\iff x=y$$

ולכן f חד־חד ערכית ונקבל $|\mathbb{R}|\le|C(\mathbb{R})|$. $\square$

סעיף ב'

נוכיח שהקבוצה $\mathcal{P}(\mathbb{N})^{\mathbb{Q}}$ היא בעוצמת הרצף, משמע יש פונקציה חד־חד ערכית ועל ממנה ל־$\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

הוכחה: ניעזר ברמז ונסמן $\mathcal{P}(\mathbb{N})=\left|\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right|$.
במטלה הקודמת ראינו שמהגדרת הפונקציה המציינת מתקיים $|\mathcal{P}(\mathbb{N})|=2^{|\mathbb{N}|}$ ומהרמז ומסקנה מההרצאה מתקיים

$$|\mathbb{R}|=|\mathcal{P}(\mathbb{N})|=\left|\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right|=2^{|\mathbb{N}|}=2^{\aleph_0}$$

תהיי $f\in\mathcal{P}(\mathbb{N})^{\mathbb{Q}}$, זו פונקציה שלוקחת כל $q\in\mathbb{Q}$ ומתאימה לו $A\subseteq\mathbb{N}$ ($f:\mathbb{Q}\to\mathcal{P}(\mathbb{N})$), ולכן נוכל להסתכל על f כזו כמו משיטת האלכסון על־ידי טבלה

$$\begin{array}{cccccc}
 & q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & \cdots \\
n=0 & x_{01} & x_{02} & x_{03} & x_{04} & \cdots \\
n=1 & x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & \cdots \\
n=2 & x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

זאת אומרת שלכל n,q מתקיים $x_{nq}=1$ אם ורק אם $n\in f(q)$ ו־$x_{nq}=0$ אם ורק אם $n\notin f(q)$, במילים אחרות $f\in\{0,1\}^{\mathbb{Q}\times\mathbb{N}}$.
אנחנו יודעים שמכפלה קרטזית של קבוצות בנות־מנייה היא בת־מנייה ולכן

$$\left|\{0,1\}^{\mathbb{Q}\times\mathbb{N}}\right|=\left|\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right|=|\mathcal{P}(\mathbb{N})|=|\mathbb{R}|=2^{\aleph_0}$$

משמע קיימות פונקציות חד־חד ערכיות ועל

$$g:\mathbb{R}\to\mathcal{P}(\mathbb{N})$$
$$h:\mathcal{P}(\mathbb{N})\to\{0,1\}^{\mathbb{N}}$$
$$k:\{0,1\}^{\mathbb{N}}\to\{0,1\}^{\mathbb{Q}\times\mathbb{N}}$$

נגדיר $F:\mathbb{R}\to\{0,1\}^{\mathbb{Q}\times\mathbb{N}}$ על־ידי $F(x)=k(h(g(x)))$, F חד־חד ערכית ועל כהרכבה של פונקציות חד־חד ערכיות ועל.
מצאנו פונקציה חד־חד ערכית ועל בין $\mathcal{P}(\mathbb{N})^{\mathbb{Q}}$ לבין $\mathbb{R}$ ולכן מהגדרת שיוויון עוצמות נובע $\left|\mathcal{P}(\mathbb{N})^{\mathbb{Q}}\right|=|\mathbb{R}|$. $\square$

סעיף ג'

נוכיח שהעתקת הצמצום $F:C(\mathbb{R})\to\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$ המוגדרת על־ידי $F(f)=f\restriction\mathbb{Q}$ היא חד־חד ערכית.
נסיק את אי־השיוויון $|C(\mathbb{R})|\le|\mathbb{R}|$ ונסיק ש־$C(\mathbb{R})$ היא מעוצמת הרצף.

הוכחה: יהיו $f,g\in C(\mathbb{R})$ ונראה שאם לכל $q\in\mathbb{Q}$ מתקיים $f(q)=g(q)$ אזי $f=g$.
יהי $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. מצפיפות הרציונליים בממשיים אנחנו יודעים שקיימת סדרה של רציונליים (q_n) כך שמתקיים $q_n\xrightarrow[n\to\infty]{}x$.
מרציפות f,g נובע שמתקיים

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(x),\ \lim_{n\to\infty}g(x_n)=g(x)$$

היות ו־(q_n) סדרה של רציונליים מהנתון נובע כי $f(x_n) = g(x_n)$ לכל $n \in \mathbb{N}$ ובפרט הגבולות שלהם שווים, משמע מתקיים

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x) = g(x) = \lim_{n\to\infty} g(x_n)$$

ראינו שלכל $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ מתקיים $f(x) = g(x)$ ומההנחה לכל $q \in \mathbb{Q}$ מתקיים $f(q) = g(q)$ ולכן מתקיים $f = g$.
נסיק את אי־השיוויון $|C(\mathbb{R})| \le |\mathbb{R}|$: מהיות $\mathbb{Q}$ בת־מנייה נקבל

$$|\mathbb{R}| \le |C(\mathbb{R})| \le \left|\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}\right| \underset{(1)}{=} \left|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right| \underset{(2)}{=} |\mathbb{R}|$$

כאשר (1) נובע ממטלה 2 שאלה 1 ו־(2) נובע מהסעיף הקודם ומכך שמתקיים $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.
בסעיף א' ראינו שגם מתקיים $|\mathbb{R}| \le |C(\mathbb{R})|$ וממשפט קנטור־שרדר־ברנשטיין נקבל את השיוויון $|C(\mathbb{R})| = |\mathbb{R}|$.

$\square$

סעיף ד'

נחשב את עוצמת הקבוצה $C = \{f \in C(\mathbb{R}) \mid f[\mathbb{R}] \subseteq \mathbb{Q}\}$.

פתרון: בעצם, C זו קבוצת כל הפונקציות הרציפות מעל $\mathbb{R}$ שתמותן היא תת־קבוצה של $\mathbb{Q}$.
נראה שמתקיים $C = \{f(x) = q \mid q \in \mathbb{Q}\}$, משמע C מכילה רק את הפונקציות הקבועות שתמותן מספר רציונלי.
ההכלה בכיוון הראשון טריוויאלית כי פונקציה קבועה היא פונקציה רציפה. בכיוון השני, נניח בשלילה שקיימת $f \in C$ כך שמתקיים $|f(\mathbb{R})| > 1$, משמע קיימים $q_1 \neq q_2 \in \mathbb{Q}$ שעבורם קיימים $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ כך שמתקיים בלי הגבלת הכלליות $f(x_1) = q_1, f(x_2) = q_2$.
מצפיפות הרציונליים בממשיים נובע כי קיים $r \in \mathbb{R}$ כך שמתקיים $q_1 < r < q_2$ ומהסעיף הקודם או ממשפט ערך הביניים נסיק שקיים $x \in \mathbb{R}$ כך שמתקיים $f(x) = r$, אבל הנחנו ש־$f \in C$ ולכן $f[\mathbb{R}] \subseteq \mathbb{Q}$ וזו כמובן סתירה.
לכן C מכילה את כל הפונקציות הקבועות שהקבוע שלהם הוא $q \in \mathbb{Q}$ בלבד ומכיוון ש־$|\mathbb{Q}| = \aleph_0$ נסיק כי $|C| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0$. $\square$

שאלה 3

נחשב את העוצמה של $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

סעיף א'

נוכיח בעזרת האלכסון של קנטור שאין פונקציה על $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

הוכחה: נניח בשלילה שקיימת $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ כך ש-F על, ולכן לכל $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ קיים $r\in\mathbb{R}$ כך שמתקיים $F(r)=g$ ($F(r)(x)\in\mathbb{R}$).
נגדיר $d:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ על־ידי $d(x)=F(x)(x)+1$ ונראה שלא קיים $r\in\mathbb{R}$ כך שיתקיים $F(r)=d$.
נניח שכן, ולכן קיים $r\in\mathbb{R}$ כך ש-$F(r)=d$, משמע

$$F(r)=d\iff F(r)(x)=d(x)=F(x)(x)+1$$

בפרט גם עבור $x=r$ נקבל

$$F(r)(r)=F(r)(r)+1\iff 0=1$$

וזו כמובן סתירה ולכן אין $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ על. □

סעיף ב'

נוכיח שמתקיים $|\mathcal{P}(\mathbb{N})\times\mathcal{P}(\mathbb{N})|=|\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.

הוכחה: בכיוון הראשון, נגדיר $f:\mathcal{P}(\mathbb{N})\to\mathcal{P}(\mathbb{N})\times\mathcal{P}(\mathbb{N})$ על־ידי $f(A)=(A,\emptyset)$.
נראה ש-f חד־חד ערכית: אם $A\neq B\subseteq\mathbb{N}$ בגלל ששיוויון הוא קורדינאטה־קורדינאטה נקבל $(A,\emptyset)\neq(B,\emptyset)$.
לכן f חד־חד ערכית ו-$|\mathcal{P}(\mathbb{N})|\le|\mathcal{P}(\mathbb{N})\times\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.
בכיוון השני, נגדיר $g:\mathcal{P}(\mathbb{N})\times\mathcal{P}(\mathbb{N})\to\mathcal{P}(\mathbb{N})$ על־ידי $g(A,B)=\{2n\mid n\in A\}\cup\{2n+1\mid n\in B\}$.
g מוגדרת היטב שכן איברי A נשלחים רק למספרים הזוגיים ביחידות ואיברי B נשלחים למספרים האי־זוגיים ביחידות.
נשאר להראות ש-g חד־חד ערכית: יהיו $(A,B),(C,D)\in(\mathcal{P}(\mathbb{N})\times\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ ונניח שמתקיים $g(A,B)=g(C,D)$.
נפריד לשיוונות בין כל שני חלקים של האיחוד ואנחנו יכולים לעשות זאת כי אוסף המספרים הזוגיים זר לאוסף המספרים האי־זוגיים.
מההנחה מתקיים $A'=\{2n\mid n\in A\}=\{2n\mid n\in C\}=C'$, אבל אם $A\neq C$ זה אומר שקיים בלי הגבלת הכלליות $a\in A$ כך ש-$a\notin C$
ולכן $a\in A'$ אבל גם $a\notin C'$ ולכן $A'=C'$ אם ורק אם $A=C$.
באותו אופן נקבל שגם $B=D\iff B'=\{2n+1\mid n\in B\}=\{2n+1\mid n\in D\}=D'$.
לכן g חד־חד ערכית ו-$|\mathcal{P}(\mathbb{N})\times\mathcal{P}(\mathbb{N})|\le|\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.
ממשפט קנטור־שרדר־ברנשטיין נקבל $|\mathcal{P}(\mathbb{N})\times\mathcal{P}(\mathbb{N})|=|\mathcal{P}(\mathbb{N})|$. □

סעיף ג'

נסיק שמתקיים $|\mathbb{N}\times\mathcal{P}(\mathbb{N})|=|\mathcal{P}(\mathbb{N})|$ וכן $|\mathbb{N}\times\mathbb{R}|=|\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.

הוכחה: בכיוון הראשון, נגדיר $f:\mathbb{N}\times\mathcal{P}(\mathbb{N})\to\mathcal{P}(\mathbb{N})\times\mathcal{P}(\mathbb{N})$ על־ידי $f(n,A)=\langle\{n\},A\rangle$, נראה שהיא חד־חד ערכית:
יהיו $n,m\in\mathbb{N}$ ו-$A,B\subseteq\mathbb{N}$, מתקיים

$$f(n,A)=f(m,B)\iff\langle\{n\},A\rangle=\langle\{m\},B\rangle\iff n=m\wedge A=B$$

לכן f חד־חד ערכית ומתקיים $|\mathbb{N}\times\mathcal{P}(\mathbb{N})|\le|\mathcal{P}(\mathbb{N})\times\mathcal{P}(\mathbb{N})|\underset{(1)}{=}|\mathcal{P}(\mathbb{N})|$, כאשר (1) נובע מסעיף א'.
בכיוון השני, נגדיר $g:\mathcal{P}(\mathbb{N})\to\mathbb{N}\times\mathcal{P}(\mathbb{N})$ על־ידי $g(A)=\langle\min(A),A\rangle$.
g מוגדרת היטב כי מעיקרון הסדר הטוב יש מינימום ובפרט g חד־חד ערכית: יהיו $A,B\subseteq\mathbb{N}$, מתקיים

$$g(A)=g(B)\iff\langle\min(A),A\rangle=\langle\min(B),B\rangle\iff\min(A)=\min(B)\wedge A=B$$

לכן g חד־חד ערכית ומתקיים $|\mathcal{P}(\mathbb{N})|\le|\mathbb{N}\times\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.
ממשפט קנטור־שרדר־ברנשטיין נקבל שמתקיים $|\mathbb{N}\times\mathcal{P}(\mathbb{N})|=|\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.
בהרצאה ראינו שמתקיים גם $|\mathbb{R}|=|\mathcal{P}(\mathbb{N})|$ ולכן מטרנזטיביות נקבל שמתקיים גם $|\mathbb{N}\times\mathbb{R}|=|\mathcal{P}(\mathbb{N})|$ (נקבל זאת גם מהרכבת הפונקציות ההפיכות שקיימות מפאת השיוויון עוצמות).

□

סעיף ד'

נסיק שמתקיים $\left|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\right| = |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))|$.

הוכחה: ראשית ניזכר $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$ ויחד עם סעיף ב' נסיק $|\mathbb{R}\times\mathbb{R}| = |\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$ $(\diamond)$.
בכיוון הראשון, תהיי $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ משמע $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ולכן $f \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ מהגדרת הפונקציה כיחס.
אז $\varphi : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ המוגדרת על־ידי $\varphi(f) = f \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ היא פונקצית חד־חד ערכית כזהות, ולכן $\left|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\right| \le |\mathcal{P}(\mathbb{R}\times\mathbb{R})|$.
אבל מ־$\diamond$ נקבל בפרט שמתקיים $\left|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\right| \le \mathcal{P}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}) = |\mathcal{P}(\mathbb{R})| = |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))|$.
בכיוון השני, ראינו במטלה 3 שהפונקציה המציינת מגדירה פונקציה חד־חד ערכית ועל בין $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ לבין $\{0,1\}^{\mathbb{R}}$, ולכן $\left|\{0,1\}^{\mathbb{R}}\right| = |\mathcal{P}(\mathbb{R})|$.
נגדיר $F : \{0,1\}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ על־ידי $F(f) = f$ שכן כל פונקציה שתמונתה היא $\{0,1\} \subseteq \mathbb{R}$ בפרט תמונתה ב־$\mathbb{R}$, משמע F היא הזהות פשוט מורחבת ל־$\mathbb{R}$ בתמונה, ולכן F חד־חד ערכית ונקבל $\left|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\right| \le \left(\{0,1\}^{\mathbb{R}}\right) = |\mathcal{P}(\mathbb{R})| = |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))|$.
ממשפט קנטור־שרדר־ברנשטיין נקבל כי $\left|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\right| = |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))|$. $\square$

שאלה 4

תהיינה X, Y קבוצות כך ש־$Y \subseteq X$ ותהי פונקציה $f : Y \to X$ חד־חד ערכית. בכל סעיף נעקוב אחר ההוכחה של משפט קנטור־שרדר־ברנשטיין ונכתוב פונקציה חד־חד ערכית ועל $\hat{f} : Y \to X$ המקיימת $\hat{f} \subseteq \mathrm{Id}_Y \cup f$ (כלומר, פונקציה $\hat{f}$ כך שלכל $y \in Y$ מתקיים $\hat{f}(y) = y$ **או** שמתקיים $\hat{f}(y) = f(y)$). TODOOOOOOOOOOOOOOOOOOO

סעיף א'

נתונים $X = 2\mathbb{N}, Y = \mathbb{N}, f(y) = 4y$.

פתרון: $\square$

סעיף ב'

נתונים $X = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, Y = \mathbb{R}$ וכן

$$f(y) = \begin{cases} y + \sqrt{2} & \exists q \in \mathbb{Q} \; \exists n \in \mathbb{N} \; s.t. \; y = q + n\sqrt{2} \\ y & \text{אחרת} \end{cases}$$

פתרון: $\square$