פתרון מטלה 12 — תורת המידה, 80517

17 בינואר 2026

שאלה 1

תהיי $E \subset \mathbb{R}$ קבוצה מדידה לבג ו־$t \in \mathbb{R}$. נאמר כי E היא t־מחזורית אם $E + t = E$.

נוכיח כי אם E היא t_n־מחזורית עבור סדרה $0 \neq t_n \to 0$ אז האחת מבין E, E^c היא ממידה אפס.

הוכחה: נוכיח תחילה שהפונקציה $x \mapsto \lambda(E\Delta(E+x)) = 0$ רציפה ב־0 (הרציפות באפס תספיק כי הזזה ב־h תתנהג באופן דומה כמו הזזה ב־$h + x$).

יהי $I = (a, b)$ קטע סופי ויהי x כך ש־$|x| < b - a$ ונסתכל על $I + x$.

ההפרש הסימטרי $I\Delta(I + x)$ מכיל שני חלקים שאין ביניהם חפיפה:

1. אם $x > 0$ אז ההפרש יהיה $(a, a + x] \cup (b, b + x]$
2. אם $x < 0$ אז ההפרש יהיה $(a + x, a] \cup (b + x, b]$

וממידת לבג אנחנו יודעים שמתקיים

$$\lambda(I\Delta(I + x)) = |x| + |x| = 2|x|$$

וכאשר $x \to 0$ אז $\lambda(I\Delta(I + x)) \to 0$.

כעת, יהי U איחוד סופי של קטעים פתוחים זרים בזוגות $U = \bigcup_{k=1}^{n} I_k$ ומתת־אדטיביות של המידה נקבל

$$\lambda(U\Delta(U + x)) = \lambda\left(\bigcup_{k=1}^{n} I_k \Delta \bigcup_{k=1}^{n}(I_k + x)\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda(I_k\Delta(I_k + x)) = \sum_{k=1}^{n} 2|x| = 2n|x|$$

כעת ניקח את E להיות כל קבוצה מדידה לבג סופית. מהרגולריות של מידת לבג נובע שלכל $\varepsilon > 0$ קיימת U כאיחוד סופי של קטעים פתוחים כך שמתקיים

$$\lambda(E\Delta U) < \frac{\varepsilon}{3}$$

אזי

$$\lambda(E\Delta(E + x)) \leq \lambda(E\Delta U) + \lambda(U\Delta(U + x)) + \lambda((U + x)\Delta(E + x))$$

נשים לב שמהעובדה שמידת לבג היא אינווריאנטית להזזות נובע כי

$$\lambda((U + x)\Delta(E + x)) = \lambda((U\Delta E) + x) = \lambda(U\Delta E) < \frac{\varepsilon}{3}$$

ומהמקרה הקודם קיימת $\delta > 0$ כך שאם $|x| < \delta$ אז $\lambda(U\Delta(U + x)) < \frac{\varepsilon}{3}$, כלומר

$$\lambda(E\Delta(U + x)) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

כלומר

$$\lim_{x \to 0} \lambda(E\Delta(E + x)) = 0$$

אז במקרה שלנו אם נסתכל על

$$\mathbb{1}_E(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

מהנתון $E + t_n = E$ נקבל כי לכל $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ עם מה שהוכחנו לעיל על הרציפות

$$\mathbb{1}_E(x + t_n) = \mathbb{1}_E(x)$$

היות $t_n \to 0$ מתקיים

$$\mathbb{1}_E(x + t_n) \to \mathbb{1}_E(x)$$

אבל אמרנו שאגף שמאל הוא בידיוק $\mathbb{1}_E(x)$ לכל n ולכן $\mathbb{1}_E(x)$ קבועה כמעט־תמיד.

אם $\mathbb{1}_E(x)$ קבועה כמעט־תמיד אז או ש־$\mathbb{1}_E(x) = 0$ כמעט־תמיד ואז $m(E) = 0$ או ש־$\mathbb{1}_E(x) = 1$ כמעט־תמיד ואז $m(E^c) = 0$. $\square$

שאלה 2

תהיי $K \subset \mathbb{R}^2$ קבוצה קומפקטית. נסמן ב־$d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to [0,\infty)$ את המטריקה האוקלידית ונזכיר את הגדרת פונקציית המרחק מקבוצה

$$x \mapsto d(x,K) = \inf_{a \in K} d(x,a)$$

וכי מהיותה של K קומפקטית האינפימום הנ"ל מתקבל באיזשוהי $a_0 \in K$.
נגדיר את הקבוצה

$$A := \{x \mid d(x,K) = 1\}$$

ונזכיר כי שנאמר כי x היא נקודת לבג של הפונקציה $\mathbb{1}_A$ אם

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{\lambda(B_r(x))} \int_{B_r(x)} \mathbb{1}_A(y)\,\mathrm{d}\lambda(y) = \mathbb{1}_A(x)$$

סעיף א'

יהי $x \in A$ ונראה כי x איננה נקודת לבג של $\mathbb{1}_A$.
הוכחה: מהיות $x \in A$ נובע כי $d(x,K) = 1$ כלומר יש $a_0 \in K$ כך שמתקיים $d(x,a_0) = 1$.
נסתכל על הכדור הפתוח $B_1(a_0)$ ותהיי $y \in B_1(a_0)$ ולכן $d(a_0,y) < 1$.
אבל $a_0 \in K$ ולכן

$$d(y,K) \leq d(y,a_0) < 1$$

אבל מכך ש־$d(y,K) < 1$ נובע כי $A \cap B_1(a_0) = \emptyset$ בהכרח, ולכן עבור כדור קטן דיו $B_r(x)$ הקבוצה A מוגבלת לחלק שמחוץ ל־$B_1(a_0)$, כלומר

$$A \cap B_r(x) \subseteq B_r(x) \setminus B_1(a_0)$$

כלומר

$$\lambda(A \cap B_r(x)) \leq \lambda(B_r(x)) - \lambda(B_r(x) \cap B_1(a_0)) \Longrightarrow \frac{\lambda(A \cap B_r(x))}{\lambda(B_r(x))} \leq 1 - \frac{\lambda(B_r(x) \cap B_1(a_0))}{\lambda(B_r(x))}$$

אבל מהיות $d(x,a_0) = 1$ נובע כי x נמצאת על השפה של $B_1(a_0)$.
כלומר כאשר $r \to 0$ אנחנו מקבלים שני כדורים – אחד בתוך $B_1(a_0)$ ואחד מחוץ ל־$B_1(a_0)$ והשפה של $B_1(a_0)$ זה בעצם עיגול אז כאשר $r \to 0$ זה מתנהג כמו משיק שעובר בראשית של המעגל השני – כלומר מחלק את המעגל לשניים כלומר הביטוי בצד ימין שואף ל־$\frac{1}{2}$ כאשר $r \to 0$ ובסך־הכל

$$\lim_{r \to \infty} \frac{\lambda(A \cap B_r(x))}{\lambda(B_r(x))} \leq \lim_{r \to 0} 1 - \frac{\lambda(B_r(x) \cap B_1(a_0))}{\lambda(B_r(x))} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \notin \{1,0\}$$

כלומר x איננה נקודת לבג של $\mathbb{1}_A$. $\square$

סעיף ב'

נסיק כי $\lambda(A) = 0$.
הוכחה: בסעיף הקודם הוכחנו שלכל $x \in A$ מתקיים $\lim_{r \to \infty} \frac{\lambda(A \cap B_r(x))}{\lambda(B_r(x))} \leq \frac{1}{2}$.
אם $\lambda(A) > 0$ אז היה נובע שכמעט לכל $x \in A$ היה מתקיים

$$\lim_{r \to \infty} \frac{\lambda(A \cap B_r(x))}{\lambda(B_r(x))} = 1 \neq \frac{1}{2}$$

ולכן זו סתירה ו־$\lambda(A) = 0$. $\square$

שאלה 3

יהי X מרחב מידה כלשהו ויהי Y מרחב טופולוגי האוסדרוף מנייה שנייה. נניח כי $f : X \to Y$ פונקציה מדידה.
נזכיר את ההגדרה של הגרף של f

$$G_f := \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subset X \times Y$$

סעיף א'

נשתכנע כי קבוצת האלכסון $\Delta_Y \subset Y \times Y$ סגורה בטופולוגיית המכפלה ונראה כי היא ב־$\mathcal{B}_Y \times \mathcal{B}_Y$.

הוכחה: תהיינה $x, y \in Y$ ומהיות המרחב האוסדרוף מנייה שנייה נובע שקיימות $U_x, U_y \subset \mathcal{T}_Y$ זרות המקיימות $x \in U_x, y \in U_y$ ובהתאם $(x, y) \in U_x \times U_Y$.

כעת, מכך ש־$(x, x) \notin U_X \times U_Y$ נובע כי $(x, x) \in \Delta_Y^c$ ואז בהתאם $U_x \times U_Y \subset \Delta_Y^c$ שהאחרונה היא איחוד של קבוצות פתוחות כי

$$\Delta_Y^c = \bigcupdot_{x \neq y \in Y} U_X \times U_y$$

נסיק אז ש־Δ_Y סגורה ובהתאם מהגדרת $\mathcal{B}_Y \times \mathcal{B}_Y$ נובע כי Δ_Y מדידה ב־σ־אלגברה של המכפלה. $\square$

סעיף ב'

נסיק כי במצב הזה $G_f \subset X \times Y$ מדידה.

הוכחה: נעזר ברמז ונגדיר $H : X \times Y \to Y \times Y$ על־ידי

$$H(x, y) = (f(x), y)$$

ונראה ש־$G_f = H^{-1}(\Delta_Y)$:

אם $(x, y) \in G_f$ אז $y = f(x)$ ואז $H(x, y) = (f(x), f(x)) \in \Delta_Y$.

אם $H(x, y) \in \Delta_Y$ אז $(f(x), y)$ הוא על האלכסון כלומר $y = f(x)$ ולכן $(x, y) \in G_f$.

כעת, H היא פשוט פונקציית ההטלה בכל קורדינאטה: ההעתקה $(x, y) \mapsto f(x)$ זו ההרכבה של $f \circ \pi_X$ ופונקציית ההטלה היא מדידה וכן f מדידה ולכן ההרכבה מדידה וכן $(x, y) \mapsto y$ זו פשוט פונקציית ההטלה π_Y שמדידה.

ראינו בהרצאה שמרחב מכפלה מדיד מגיע מצוייד באופן טבעי עם ההטלות והן מדידות.

יחד עם הסעיף הקודם נובע ש־Δ_Y מדידה.

היות ו־H פונקציה מדידה ו־Δ_Y קבוצה מדידה, המקור של קבוצה מדידה הוא קבוצה מדידה ולכן מכך ש־$G_f = H^{-1}(\Delta_Y)$ נובע כי G_f מדידה. $\square$

שאלה 4

נסמן ב־$s : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ את העתקת הסכום, כלומר את ההעתקה שלוקחת את זוג הוקטורים (x, y) ל־$x + y$.
יהיו μ, ν מידות בורל סופיות על $\mathbb{R}^n$, נגדיר את הקונבולוציה של μ ו־ν להיות

$$\mu * \nu := s_*(\mu \times \nu)$$

סעיף א'

נראה כי לכל $E \subseteq \mathbb{R}^n$ מתקיים

$$(\mu * \nu)(E) = \int_{\mathbb{R}^n} \mu(E - x) \, \mathrm{d}\nu(x)$$

וכי אם μ רציפה בהחלט ביחס למידת לבג אז כך גם $\mu * \nu$.

הוכחה: נרשום

$$s^{-1}(E) = \{(y, x) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid y + x \in E\}$$

כאשר החלפנו את הסדר בשביל להתאים למידות.
ממשפט פוביני נובע כי

$$(\mu \times \nu)(A) = \int_{\mathbb{R}^n} \mu(A_x) \, \mathrm{d}\nu(x)$$

נסתכל על הסיב

$$A_x := \{y \in \mathbb{R}^n \mid (y, x) \in A\}$$

נבחר $A = s^{-1}(E)$ ונקבע x, כלומר

$$\left(s^{-1}(E)\right)_x = \left\{y \in \mathbb{R}^n \mid (y, x) \in s^{-1}(E)\right\}$$

אבל

$$(y, x) \in s^{-1}(E) \iff s(y, x) \in E \iff y + x \in E \implies y \in E - x$$

אז

$$\left(s^{-1}(E)\right)_x = E - x \implies \mu\Big(\left(s^{-1}(E)\right)_x\Big) = \mu(E - x)$$

ולכן

$$(\mu \times \nu)\left(s^{-1}(E)\right) = \int_{\mathbb{R}^n} \mu(E - x) \, \mathrm{d}\nu(x)$$

ולכן קיבלנו בידיוק את הנדרש.
עבור החלק השני, נניח כי $\lambda \ll \mu$ כאשר λ מידת לבג אז $\lambda \ll \mu * \nu$: נראה שאם $\lambda(E) = 0$ אז $(\mu * \nu)(E) = 0$.
אז תהיי E כך ש־$\lambda(E) = 0$ ראינו שמידת לבג היא אינווריאנטית ביחס להזזה, כלומר לכל $x \in \mathbb{R}^n$ מתקיים

$$\lambda(E - x) = \lambda(E) = 0$$

מהיות $\lambda \ll \mu$ נובע כי בהכרח מתקיים

$$\mu(E - x) = 0 \underset{\text{הקונבולוציה שהוכחנו לעיל}}{\implies} (\mu * \nu)(E) = \int_{\mathbb{R}^n} \mu(E - x) \, \mathrm{d}\nu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} 0 \, \mathrm{d}\nu(x) = 0$$

אז $(\mu * \nu)(E) = 0$ ולכן $\lambda \ll \mu * \nu$, כנדרש.

$\square$

סעיף ב'

נסיק שלכל $f,g\in L^1(\lambda)$ אי־שליליות, המידה $\mu_f*\mu_g$ רציפה בהחלט ביחס למידת לבג וש־

$$\frac{\mathrm{d}\left(\mu_f*\mu_g\right)}{\mathrm{d}\lambda}=f*g$$

כאשר

$$(f*g)(y)=\int_{\mathbb{R}^n}f(x)g(y-x)\,\mathrm{d}\lambda(x)$$

כלומר הקונבולוציה של המידות מתלכדת עם הקונבולוציה של פונקציות.

הוכחה: בסעיף הקודם ראינו שאם $\mu\ll\lambda$ עבור מידה סופית ν מתקיים $\mu*\nu\ll\lambda$.

בגלל ש־$f\in L^1(\lambda)$ נובע כי $\mu_f\ll\lambda$ ולכן $\mu_f*\mu_g\ll\lambda$ (כי $\mu_f(E)=\int_E f\,\mathrm{d}\lambda$ ואם $\lambda(E)=0$ אז ובגלל ש־$f\in L^1$ אז $\mu_f(E)=\int_E f(x)\,\mathrm{d}\lambda(x)=0$ כי אינטגרל על קבוצה ממידה אפס הוא תמיד אפס ללא קשר לפונקציה) ולכן נגזרת רדון־ניקודים $\frac{\mathrm{d}(\mu_f*\mu_g)}{\mathrm{d}\lambda}$ קיימת.

תהיי E מדידה בורל, מהסעיף הקודם

$$\left(\mu_f*\mu_g\right)(E)=\int_{\mathbb{R}^n}\mu_f(E-y)\,\mathrm{d}\mu_g(y)=\int_{\mathbb{R}^n}\int_{E-y}f(x)\,\mathrm{d}\lambda(x)g(y)\,\mathrm{d}\lambda(y)$$

כאשר המעבר נובע מהצבת $\mathrm{d}\mu_g(y)=g(y)\,\mathrm{d}\lambda(y)$ ו־$\mu_f(E-y)$ כאינטגרל של f.

נשתמש במשפט החלפת משתנה על האינטגרל הפנימי: $z=x+y$ כלומר $x=z-y$ ולכן תחום האינטגרציה שלנו השתנה כי אם $x\in E-y$ אז $z\in E$ ומהאינווראינטיות להזזות של מידת לבג נקבל

$$\int_{E-y}f(x)\,\mathrm{d}\lambda(x)=\int_E f(z-y)\,\mathrm{d}\lambda(z)$$

כלומר

$$\left(\mu_f*\mu_g\right)(E)=\int_{\mathbb{R}^n}\int_E f(z-y)\,\mathrm{d}\lambda(z)g(y)\,\mathrm{d}\lambda(y)$$

היות והפונקציות אי־שליליות ניתן להשתמש במשפט פוביני

$$\left(\mu_f*\mu_g\right)(E)=\int_E\int_{\mathbb{R}^n}f(z-y)g(y)\,\mathrm{d}\lambda(y)\,\mathrm{d}\lambda(z)$$

אבל האינטגרל הפנימי זו בידיוק הקונבולוציה

$$\int_{\mathbb{R}^n}f(z-y)g(y)\,\mathrm{d}\lambda(y)=(g*f)(z)=(f*g)(z)$$

כלומר

$$\left(\mu_f*\mu_g\right)(E)=\int_E(f*g)(z)\,\mathrm{d}\lambda(z)$$

ומיחידות נגזרת רדון־ניקודים נוביע כי

$$\frac{\mathrm{d}\left(\mu_f*\mu_g\right)}{\mathrm{d}\lambda}=f*g$$

$\square$

סעיף ג'

יהי $y\in\mathbb{R}^n$ ונמצא מידה סופית ν כך שלכל μ סופית ולכל E מדידה בורל מתקיים $(\mu*\nu)(E)=\mu(E-y)$.

פתרון: נגדיר $\nu=\delta_y$ מידת דיראק ותהיי μ מידה סופית ו־E מדידה, אז

$$(\mu * \nu)(E) = \int \mu(E - x)\, \mathrm{d}\nu(x) = \int \mu(E - x)\, \mathrm{d}d_y = \mu(E - y)$$

□