פתרון מטלה 07 — חשבון אינפיניטסימלי 3, 80415

28 במאי 2025

שאלה 1

תהיי $f : A \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ פונקציה הגזירה פעמיים ברציפות ב־$a \in A$. נסמן ב־$P : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ את פולינום טיילור מסדר 2 של f סביב a:

$$P(x) = f(a) + Df_a(x-a) + \frac{1}{2}D^2 f_a(x-a, x-a)$$

סעיף א'

נוכיח שמתקיים $DP_a = Df_a, D^2P_a = D^2 f_a$.

הוכחה: $P(x)$ הוא פולינום ולכן פונקציה חלקה ולכן ניתן לגזור אותו, נגזור פעם אחת ונקבל ש־$DP_a = Df_a$. למה? כי $Df_a(x-a)$ היא פונקציה לינארית של x, ולכן בהצבה של $x = a$ נקבל $Df_a(a-a) = Df_a(0)$ ובפרט בגלל ש־f גזירה פעמיים ברציפות נובע גם כי Df_a גזירה. אבל Df_a היא העתקה לינארית ולכן $Df_a(0)$ זה פשוט ערך הנגזרת בנקודה a, וזה בידיוק Df_a.

הביטוי $f(a)$ כמובן נעלם כקבוע, והביטוי $D^2 f_a(x-a, x-a)$ נעלם כי זו תבנית בילנארית ותבנית בילינארית המקבלת זוג 0־ים מתאפסת ולכן $D^2 f_a(0,0) = 0$ ולכן $DP_a(f) = Df_a$.

נשאר להראות שמתקיים $D^2 P_a = D^2 f_a$. נגזור את DP_x שמצאנו ו־Df_a זה קבוע ולכן בגזירה נעלם, ומהלינאריות של $D^2 f_a(x-a)$ נקבל $D^2 P_a = D^2 f_a$. □

סעיף ב'

נוכיח כי $f(x) = P(x) + o(\|x-a\|^2)$, משמע שמתקיים $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-P(x)}{\|x-a\|^2} = 0$.

הוכחה: נגדיר $h = x-a, x = a+h$ ונגדיר $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}^m$ על־ידי

$$\phi(t) = f(a+th)$$

ולכן $\phi(0) = f(a), \phi(1) = f(a+h) = f(x)$.

זו פונקציה גזירה כהרכבה של פונקציות גזירות ומכלל השרשרת

$$\phi'(t) = Df_{a+th}(h), \phi''(t) = D^2 f_{a+th}(h,h)$$

ממשפט טיילור החד־מימדי אנחנו יודעים שמתקיים

$$\phi(1) = \phi(0) + \phi'(0) + \frac{1}{2}\phi''(0) + R$$

עם שארית המקיימת

$$\|R\| \leq \frac{1}{2} \sup_{t\in(0,1)} \|\phi''(t) - \phi''(0)\|$$

אז

$$f(x) = f(a+h) = f(a) + Df_a(h) + \frac{1}{2}D^2 f_a(h,h) + R(h)$$

כאשר

$$\|R(h)\| \leq \frac{11}{2} \sup_{t\in(0,1)} \left\|D^2 f_{a+th} - D^2 f_a\right\| \cdot \|h\|^2$$

f גזירה ברציפות פעמיים ולכן $D^2 f$ רציפה, ולכן כאשר $th \to 0$ מתקיים

$$\left\|D^2 f_{a+th} - D^2 f_a\right\| \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

אבל $R(x) = f(x) - P(x)$ וזה מסיים. □

שאלה 2

נחשב את פולינום טיילור מסדר 2 של הפונקציה $f(x,y)=e^{x\sin(y)}$ סביב הנקודות $(1,0),(2,\pi)$.

הוכחה: נתחיל מלחשב נגזרות חלקיות מסדר ראשון ושני

$$\frac{\partial f}{\partial x}=e^{x\sin(y)}\sin(y)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=e^{x\sin(y)}x\cos(y)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=e^{x\sin(y)}\sin^2(y)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\cos(y)\big(e^{x\sin(y)}x\sin(y)+e^{x\sin(y)}\big)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=x\big(e^{x\sin(y)}x\cos^2(y)-e^{x\sin(y)}\sin(y)\big)$$

ולכן

$$Df_{(x,y)}=\big(e^{x\sin(y)}\sin(y),e^{x\sin(y)}x\cos(y)\big)\Rightarrow Df_{(1,0)}=(0,1),Df_{(2,\pi)}=(0,-2)$$
$$D^2f_{(x,y)}=\begin{pmatrix}e^{x\sin(y)}\sin^2(y) & \cos(y)\big(e^{x\sin(y)}x\sin(y)+e^{x\sin(y)}\big)\\ \cos(y)\big(e^{x\sin(y)}x\sin(y)+e^{x\sin(y)}\big) & x\big(e^{x\sin(y)}x\cos^2(y)-e^{x\sin(y)}\sin(y)\big)\end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow D^2f_{(1,0)}=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix},D^2f_{(2,\pi)}=\begin{pmatrix}0&-1\\-1&4\end{pmatrix}$$

ובתרגול ראינו שהצורה הכללית של פולינום טיילור מסדר 2 היא

$$P_{f,(a,b),2}(x,y)=f(a,b)+Df_{(a,b)}\begin{pmatrix}x-a\\y-b\end{pmatrix}+\frac{1}{2}D^2f_{(a,b)}\left(\begin{pmatrix}x-a\\y-b\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x-a\\y-b\end{pmatrix}\right)$$

ולכן

$$P_{f,(1,0),2}(x,y)=f(1,0)+Df_{(1,0)}\begin{pmatrix}x-1\\y\end{pmatrix}+\frac{1}{2}Df_{(1,0)}\left(\begin{pmatrix}x-1\\y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x-1\\y\end{pmatrix}\right)=1+y+xy-y+\frac{y^2}{2}$$
$$P_{f,(2,\pi),2}(x,y)=f(2,\pi)+Df_{(2,\pi)}\begin{pmatrix}x-2\\y-\pi\end{pmatrix}+\frac{1}{2}Df_{(2,\pi)}\left(\begin{pmatrix}x-2\\y-\pi\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x-2\\y-\pi\end{pmatrix}\right)=$$
$$1-2y+2\pi+\frac{1}{2}(4y^2-8\pi y-2xy+4y+4\pi^2-4\pi+2\pi x)=1+2y^2-4\pi y-xy+2\pi^2+\pi x$$

$\square$

שאלה 3

בכל סעיף נמצא את הנקודות הקריטיות ונסווגן.

הערה: יונתן אמר אפשר להניח שהפונקציות גזירות פעמיים ברציפות.

סעיף א'

$f(x,y) = x^3 - 2xy^2$

הוכחה: נחשב נגזרות חלקיות

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 2y^2,\ \frac{\partial f}{\partial y} = -4xy$$

נשים לב שכל הנגזרות החלקיות רציפות מאריתמטיקה של פונקציות רציפות ולכן $f(x,y)$ דיפרנציאבילית בכל נקודה ומתקיים

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 2y^2 \\ -4xy \end{pmatrix}$$

נשים לב ש-$\nabla f(x,y) = 0 \iff x = y = 0$ ולכן $(0,0)$ נקודה קריטית. נחשב את מטריצת ההסיאן של f

$$Hf_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & -4y \\ -4y & -4x \end{pmatrix}$$

ונשים לב שמתקיים $Hf_{(0,0)} = \det\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$ ולא ניתן להשתמש במבחן ההסיאן לסיווג נקודות קיצון, ולכן עלינו לעבוד כמו בתרגול ולראות איך מתנהגת f בסביבת הנקודה $(0,0)$: יהי $\varepsilon > 0$ ונבחן עבור $y = x$ ו-$x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ את התנהגות $f(x) = x^3 - 2x^3$.

בתחום $x \in (0,\varepsilon)$ אנחנו מקבלים ש-$x^3 \leq 2x^3$, אבל עבור $x \in (-\varepsilon, 0)$ אנחנו מקבלים ש-$x^3 \leq 2x^3$, ולכן נסיק אם כך ש-$(0,0)$ היא נקודת קיצון מסוג אוכף. $\square$

סעיף ב'

$g(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy + 4$

הוכחה: נחשב נגזרות חלקיות

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 3x^2 - 3y,\ \frac{\partial g}{\partial y} = 3y^2 - 3x$$

נשים לב שכל הנגזרות החלקיות רציפות מאריתמטיקה של פונקציות רציפות ולכן $g(x,y)$ דיפרנציאבילית בכל נקודה ומתקיים

$$\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3y \\ 3y^2 - 3x \end{pmatrix}$$

נשים לב ש-

$$\nabla g(x,y) = 0 \iff \begin{pmatrix} 3x^2 - 3y \\ 3y^2 - 3x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

מהקורדינאטה הראשונה נקבל $3x^2 - 3y = 0 \iff x^2 = y$ ובהצבה בקורדינאטה השנייה נקבל

$$3y^2 - 3x = 0 \iff 3\left(x^2\right)^2 - 3x = 0 \iff x^4 - x = 0 \iff x\left(x^3 - 1\right) = 0 \iff x = 0 \lor x = 1$$

אם $x = 0$ אז $y = 0$ ואם $x = 1$ אז $y = 1$ ולכן הנקודות הקריטיות שלנו הן $(0,0)$ ו-$(1,1)$. נחשב את מטריצת ההסיאן של g

$$Hg_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$$

נציב את הנקודות הקריטיות שלנו ונשים לב שמתקיים

$$Hg_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = -9$$

$$Hg_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \det\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} = 36 - 9 = 27$$

אז $\det\left(Hg_{0,0}\right) < 0$ ולכן $(0,0)$ נקודת אוכף לפי האלגוריתם שראינו בתרגול, ומכך ש־$\det\left(Hg_{(1,1)}\right) > 0$ ו־$\operatorname{tr}\left(Hg_{(1,1)}\right) = 12 > 0$ נקבל מהאלגוריתם מהתרגול ש־$(1,1)$ היא נקודת קיצון מסוג מינימום. □

סעיף ג'

$h(x,y) = 3x^2y + y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 2$

הוכחה: נחשב נגזרות חלקיות

$$\frac{\partial h}{\partial x} = 6xy - 6x,\ \frac{\partial h}{\partial y} = 3x^2 + 3y^2 - 6y$$

נשים לב שכל הנגזרות החלקיות רציפות מאריתמטיקה של פונקציות רציפות ולכן $h(x,y)$ דיפרנציאבילית בכל נקודה ומתקיים

$$\nabla h(x,y) = \begin{pmatrix} 6xy - 6x \\ 3x^2 + 3y^2 - 6y \end{pmatrix}$$

ונשים לב שמתקיים

$$\nabla h(x,y) = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 6xy - 6x \\ 3x^2 + 3y^2 - 6y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

עבור הקורדינאטה הראשונה מתקיים

$$6xy - 6x = 0 \Longleftrightarrow x(y-x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \vee x = y$$

נציב בקורדינאטה השנייה

$$3x^2 + 3y^2 - 6y = 0 \underset{x=0}{\Longleftrightarrow} 3y^2 - 6y = 0 \Longleftrightarrow y(y-2) = 0 \Longleftrightarrow y = 0 \vee y = 2$$

$$3x^2 + 3y^2 - 6y = 0 \underset{x=y}{\Longleftrightarrow} 6y^2 - 6y = 0 \Longleftrightarrow y(y-1) = 0 \Longleftrightarrow y = 1, y = 0$$

ולכן הנקודות הקריטיות שלנו הן $(0,0), (0,2), (1,1), (-1,1)$, נחשב את מטריצת ההסיאן של h

$$Hh_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6y - 6 & 6x \\ 6x & 6y - 6 \end{pmatrix}$$

נציב את הנקודות הקריטיות שלנו ונשים לב שמתקיים

$$Hh_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow \det\begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} = 36$$

$$Hh_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} = -36$$

$$Hh_{(-1,1)} = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det\begin{bmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} = -36$$

$$Hh_{(0,2)} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \det\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = 36$$

אז לפי האלגוריתם שראינו בתרגול, בנקודה $(0,0)$ נקבל מקסימום (דטרמיננטה חיובית אבל עקבה שלילית), בנקודה $(0,2)$ נקבל מינימום (דטרמיננטה חיובית ועקבה חיובית), בנקודות $(-1,1), (1,1)$ נקבל נקודות אוכף (דטרמיננטה שלילית). □

שאלה 4

תהיי $f : A \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ פונקציה הגזירה שלוש פעמים ברציפות ב־A $a \in$. נניח כי $Df_a = 0 = D^2 f_a$ אבל $D^3 f_a \neq 0$. נגדיר $\varphi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ על־ידי $\varphi(v) = D^3 f_a(v, v, v)$.

סעיף א'

נוכיח כי לכל $u, v, w \in \mathbb{R}^k$ מתקיים

$$D^3 f_a(u, v, w) = \frac{1}{6}(\varphi(u + v + w) - \varphi(u + v) - \varphi(u + w) - \varphi(v + w) + \varphi(u) + \varphi(v) + \varphi(w))$$

הוכחה: f גזירה ברציפות 3 פעמים ולכן היא העתקה מולטי־לינארית סימטרית ולכן $D^3 f_a(v_1, v_2, v_3)$ לא תלוי בסדר הוקטורים, ולכן $D^3 f_a(v_1, v_2, v_3) = D^3 f_a(v_3, v_2, v_1)$ וכו'.
יהיו $u, v, w \in \mathbb{R}^k$ ונבחן את $\varphi(u + v)$, מהיות $D^3 f_a$ העתקה מולטי־לינארית ומהסימטריות מתקיים

$$\varphi(u, v) = D^3 f_a(u + v, u + v, u + v) = D^3 f_a(u, u, u) + 3D^3 f_a(u, u, v) + 3D^3 f_a(u, v, v) + D^3 f_a(v, v, v)$$

נפתח באותו אופן כל־אחד מהגורמים

$$\varphi(u + w) = D^3 f_a(u + w, u + w, u + w) = D^3 f_a(u, u, u) + 3D^3 f_a(u, u, w) + 3D^3 f_a(u, w, w) + D^3 f_a(w, w, w)$$
$$\varphi(v + w) = D^3 f_a(v + w, v + w, v + w) = D^3 f_a(v, v, v) + 3D^3 f_a(v, v, w) + 3D^3 f_a(v, w, w) + D^3 f_a(w, w, w)$$
$$\varphi(u + v + w) = D^3 f_a(u + v + w, u + v + w, u + v + w) = D^3 f_a(u, u, u) + D^3 f_a(v, v, v) + D^3 f_a(w, w, w)$$
$$+3(D^3 f_a(u, u, v) + D^3 f_a(u, u, w) + D^3 f_a(v, v, u) + D^3 f_a(v, v, w) + D^3 f_a(w, w, v) + D^3 f_a(w, w, u)) + 6D^3 f_a(u, v, w)$$

ונבחן כעת את

$$\varphi(u + v + w) - \varphi(u + v) - \varphi(u + w) - \varphi(v + w) + \varphi(u) + \varphi(v) + \varphi(w) =$$
$$= \cancel{D^3 f_a(u, u, u)} + \cancel{D^3 f_a(v, v, v)} + \cancel{D^3 f_a(w, w, w)}$$
$$+3(\cancel{D^3 f_a(u, u, v)} + \cancel{D^3 f_a(u, u, w)} + \cancel{D^3 f_a(v, v, u)} + \cancel{D^3 f_a(v, v, w)} + \cancel{D^3 f_a(w, w, v)} + \cancel{D^3 f_a(w, w, u)}) + 6D^3 f_a(u, v, w)$$
$$-\cancel{D^3 f_a(u, u, u)} + \cancel{3D^3 f_a(u, u, v)} - \cancel{3D^3 f_a(v, v, u)} - \cancel{D^3 f_a(v, v, v)} - \cancel{D^3 f_a(u, u, u)} - \cancel{3D^3 f_a(u, u, w)} - \cancel{3D^3 f_a(w, w, u)} - \cancel{D^3 f_a(w, w, w)}$$
$$-\cancel{D^3 f_a(v, v, v)} - \cancel{3D^3 f_a(v, v, w)} - \cancel{3D^3 f_a(w, w, v)} - \cancel{D^3 f_a(w, w, w)} + \cancel{D^3 f_a(u, u, u)} + \cancel{D^3 f_a(v, v, v)} + \cancel{D^3 f_a(w, w, w)}$$
$$= 6D^3 f_a(u, v, w)$$

ולכן

$$D^3 f_a(u, v, w) = \frac{1}{6}(\varphi(u + v + w) - \varphi(u + v) - \varphi(u + w) - \varphi(v + w) + \varphi(u) + \varphi(v) + \varphi(w)) = \frac{1}{6} \cdot 6D^3 f_a(u, v, w)$$

□

סעיף ב'

נסיק שקיים $v \in \mathbb{R}^k$ כך שמתקיים $\varphi(v) \neq 0$.
הוכחה: נניח שלא ככה, ולכן לכל $v \in \mathbb{R}^k$ מתקיים $\varphi(v) = 0$, אבל אז בנוסחה מסעיף א' נקבל

$$D^3 f_a(u, v, w) = \frac{1}{6}(\varphi(u + v + w) - \varphi(u + v) - \varphi(u + w) - \varphi(v + w) + \varphi(u) + \varphi(v) + \varphi(w)) \underset{\forall v \in \mathbb{R}^k, \varphi(v) = 0}{=} 0$$

אבל מהנתון $D^3 f_a(u, v, w) \neq 0$ וזו סתירה. □

סעיף ג'

נוכיח כי a היא נקודת אוכף של f.
הוכחה: מכך ש־$D^3 f_a(v, v, v)$ היא העתקה מולטי־לינארית סימטרית נובע כי היא לינארית בכל וקטור משמע

$$\varphi(\lambda v) = D^3 f_a(\lambda v, \lambda v, \lambda v) = \lambda^3 \varphi(v)$$

דהיינו φ פונקציה הומוגנית מדרגה 3 ובפרט נובע מכך ש־$\varphi(-v) = -\varphi(v)$.
מסעיף ב' אנחנו יודעים שקיים $v \in \mathbb{R}^k$ כך שמתקיים $\varphi(v) \neq 0$ ומהיותה העתקה מולטי־לינארית סימטרית אי־זוגית נובע שאם $\varphi(v) > 0$ אז $\varphi(-v) < 0$ ולהפך.
נבחן את

$$f(a+tv) = f(a) + \frac{t^3}{6}\varphi(v) + o(t^3)$$

ועבור $t > 0$ קטן דיו מתקיים

1. אם $\varphi(v) > 0$ אז $f(a+tv) > f(a)$
2. אם $\varphi(v)) < 0$ אז $f(a+tv) < f(a)$

ובכך שניקח את $v, -v$ נקבל שבכיוונים מנוגדים יש לנו עלייה בכיוון אחד וירידה בכיוון שני, הווה אומר לא נקודת מינימום ולא נקודת מקסימום ב־a אבל כן נקודה קריטית מסוג אוכף. $\square$

שאלה 5

תהיי $A \subseteq \mathbb{R}^k$ פתוחה, $f : A \to \mathbb{R}^k$ גזירה ברציפות ותהיי $a \in A$ כך ש־Df_a הפיכה.
נסמן $b = f(a), T = Df_a$ ונגדיר $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ ו־$\tilde{f} : \tilde{A} = g^{-1}(A) \to \mathbb{R}^K$ על־ידי

$$g(x) = T^{-1}(x) + a, \tilde{f}(x) = f(g(x)) - b$$

סעיף א'

נוכיח כי g היא העתקה פתוחה, כלומר לכל קבוצה פתוחה $W \subseteq \mathbb{R}^k$ מתקיים ש־$g(W)$ פתוחה.
הוכחה: ראשית נטען ש־g פונקציה רציפה: T^{-1} העתקה לינארית וראינו שהעתקות לינאריות הן רציפות על מרחב סוף מימדי, אז $x \mapsto T^{-1} + a$ שזו בעצם $g(x)$ היא פונקציה רציפה.
כמו־כן, g גזירה מאריתמטיקה של פונקציות גזירות נגזרתה נתונה על־ידי $Dg(x) = T^{-1}$.
כמובן ש־g חד־חד ערכית ועל מהיות $T = Df_a$ הפיכה, נמצא את ההופכית של g:

$$y = g(x) = T^{-1}(x) + a \iff y - a = T^{-1}(x) \iff T(y-a) = T(T^{-x}(x)) = x \Rightarrow g^{-1}(y) = T(y-a)$$

שגם היא רציפה כהעתקה לינארית.
ממשפט הפונקציה ההפוכה נקבל ש־g היא דיפאומורפיזם.
תהיי $U \subseteq \mathbb{R}^k$ קבוצה פתוחה ונסמן $A = T^{-1}$, ואז $A(U) = \left(A^{-1}\right)^{-1}(U)$ היא פתוחה (התמונה ההפוכה של U ביחס להעתקה רציפה) ואז בפרט $g(U)$ היא העתקה פתוחה. $\square$

סעיף ב'

נגיד שקבוצה פתוחה $U \subseteq A$ היא סביבה טובה של $a \in U$ אם $f\mid_U$ היא חד־חד ערכית, $V = f(U)$ פתוחה ו־$\left(f\mid_U\right)^{-1} : V \to U$ היא גזירה ברציפות. באותו אופן נגדיר סביבה טובה של $\tilde{A}$ של $0 \in \tilde{A}$.
נוכיח שאם $\tilde{U} \subseteq \tilde{A}$ היא סביבה טובה של $0 \in \tilde{U}$ אז $U = g(\tilde{U})$ היא סביבה טובה של $a \in U$.
הוכחה: נניח בשלילה ש־$U = g(\tilde{U})$ היא לא סבירה טובה של $a \in A$, ולכן לא קיימת סביבה V של a כך ש־$V \subseteq U$ ו־f רציפה על V.
היות ו־$\tilde{U}$ היא סביבה טובה של 0 ב־$\tilde{A}$ נובע שקיימת סביבה $\tilde{V} \subseteq \tilde{U}$ ו־$\tilde{f}$ רציפה על $\tilde{V}$.
בסעיף הקודם ראינו ש־g היא דיפאומורפיזם סביב 0 ולכן g ממפה סביבות של 0 ב־$\mathbb{R}^k$ אל סביבות של a ב־$\mathbb{R}^k$.
היות ו־$\tilde{V}$ היא סביבה של 0, $g(\tilde{V})$ היא סביבה של a ולכן $g(\tilde{V}) \in U$ שכן $\tilde{V} \subseteq \tilde{U}$ ולכן $g(\tilde{V}) \subseteq g(\tilde{U}) = U$.
אבל $\tilde{f}$ רציפה על $\tilde{V}$ ולכן $\tilde{f} = f(g(x)) - b$ אבל מהרציפות נובע כי $f(g(x))$ רציפה כסכום פונקציות רציפות על $\tilde{V}$ ולכן f רציפה על $g(\tilde{V})$ שהיא סביבה של a, אבל זאת סתירה כי הנחנו ש־U היא לא סביבה טובה של a. $\square$