פתרון מטלה 07 — תורת ההסתברות 1, 80420

27 בדצמבר 2025

שאלה 1

סעיף א'

נוכיח שאם X משתנה מקרי שהתומך שלו הוא $\mathbb{N}_0$ אזי $\mathbb{P}(X>0)\leq\mathbb{E}(X)$.

הוכחה: מהגדרת התוחלת היות והמשתנה נתמך על הטבעיים

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{k=1}^{\infty}k\mathbb{P}(X=k)$$

לכל $k\geq 1$ מתקיים

$$k\cdot\mathbb{P}(X=k)\geq\mathbb{P}(X=k)$$

וזה נכון לכל k, משמע

$$\mathbb{E}(X)\geq\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(X=k)=\mathbb{P}(X>0)$$

$\square$

סעיף ב'

יהי $G_n(n,p_n)$ גרף מקרי ונגדיר $T(G_n)$ המשתנה המקרי שסופר את מספר המרובעים שקיימים בגרף כאשר מרובע זה קבוצה של ארבעה קודקודים v_1,v_2,v_3,v_4 שביניהן קיימות אך ורק הקשתות

$$(v_1,v_2),(v_2,v_3),(v_3,v_4),(v_4,v_1)$$

נראה שעבור $p_n=o\left(\frac{1}{n}\right)$ מתקיים $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbb{P}(T(G_n)=0)=1$.

פתרון: $\square$

נגדיר $T(G_n)$ המשתנה המקרי שסופר את מספר המרובעים שקיימים בגרף ונשים לב שעבור משתנה מקרי X שתוצאתו היא מספר הצלעות בגרף אז $\operatorname{supp}(X)=\left\{\binom{n}{2}\right\}\cup\{0\}$ ו־$X\sim Bin(\binom{n}{2},p_n)$ וההסתברות שקיימת צלע בין שני קודקודים היא p_n.

נגדיר $X_{i,j,k,m}$ האינדיקטור שמציין האם קיים ריבוע בין הקודקודים i,j,k,m וממה שראינו לעיל $X_{i,j,k,m}\sim Bin(p_n^4)$ וכן $\mathbb{E}\big(X_{i,j,k,m}\big)=p_n^4$.

נשים לב ש־$T(G_n)=\sum_{1\leq i<j<k<m\leq n}X_{i,j,k,m}$ ומאי־שיוויון מרקוב נקבל

$$\mathbb{P}(T\geq 1)\leq\frac{\mathbb{E}(T)}{1}\underset{\text{לינארית התוחלת}}{=}\sum_{1\leq i<j<k<m\leq n}\mathbb{E}\big(X_{i,j,k,m}\big)=\binom{n}{4}\cdot p_n^4$$

ולכן

$$\mathbb{P}(T=0)=1-\mathbb{P}(T\geq 1)=1-\binom{n}{4}\cdot p_n^4=1-\frac{n!\cdot p_n^4}{(n-4)!4!}\leq 1-\frac{n!}{n!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^4=1-\frac{1}{n^4}$$

$$\implies\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(T(G_n)=0)=\lim_{n\to\infty}1-\frac{1}{n^4}=1-0=1$$

שאלה 2

יצרן ברגים יודע מניסיון שב־95% בורג שמייצרת החברה שלו עומד בתו תקן באופן בלתי־תלוי בברגים אחרים שיוצרו.
כל משלוח של $10,000$ ברגים מגיע עם תעודת אחריות המבטיחה החזר במלא במקרה שיותר מ־r ברגים לא עובדים בתו התקן.
נחשב כמה קטן r יכול להיות כך שלכל היותר 1% מהמשלוחים יהיו זכאים להחזר מלא.

פתרון: יהיו $X_1, ..., X_{10000}$ המשתנים המקריים מסוג אינדיקטור שמקבלים 1 אם הבורג תקול, כלומר לפי הנתונים $X_i \sim Ber(0.05)$.
נגדיר $X = \sum_{i=1}^{10000} X_i$ ולכן מהיות כל המאורעות לעיל בלתי־תלויים מהנתון, אז ראינו שסכום של משתנים מקריים בלתי־תלויים המתפלגים ברנולי, מתפלג בינומי, כלומר $X \sim Bin(10000, 0.05)$.
משונות של משתנה מקרי המתפלג בינומית שראינו

$$\mathrm{Var}(X) = 10000 \cdot 0.05 \cdot (1 - 0.05) = 10000 \cdot 0.05 \cdot 0.95 = 475$$

אז מאי־שיוויון צ'בישב נקבל עבור $a > 0$

$$\mathbb{P}(X - 500 \geq a) \leq \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{a^2} = \frac{475}{a^2}$$

זו ההסתברות שאנחנו רוצים שתהיה קטנה מ־1%, כלומר

$$\frac{475}{a^2} \leq \frac{1}{100} \iff 47500 \leq a^2 \iff \sqrt{47500} \leq a$$

והודות למחשבון אנחנו יודעים ש־$a = 218$ הוא השלם המינימלי, כלומר $r = 500 + 218 = 718$. $\square$

שאלה 3

יהי $n \leq 1$. נתונים n זוגות, כל זוג כולל גבר ואישה. מסדרים ה־$2n$ באקראי במעגל.

סעיף א'

עבור n ,$i = 1, ..., n$, יהי X_i המשתנה המקרי שתוצאתו היא 1 אם ורק אם בני הזוג i יושבים זה לצד זה ו־0 אחרת.
נראה כי $X_i \sim Ber\left(\frac{2}{2n-1}\right)$ לכל i.
הוכחה: לכל זוג i נסמן W_i, M_i ולכל i אנחנו מחפשים את המאורע $E_i = 1$ אם ורק אם הגבר M_i והאישה W_i יושבים אחד ליד השנייה.
כידוע, לסדר $2n$ אנשים במעגל יש לנו $(2n-1)!$ אפשרויות סידור ולכן זה מרחב המדגם שלנו.
עבור i, נסתכל על הזוג **הלא סדור**, (W_i, M_i) בתור אחד ולכן $2n - 2 + 1 = 2n - 1$ "אנשים" שצריך לסדר במעגל, כלומר יש $(2n-2)!$ אפשרויות לסידור.
כמובן בתור הזוג שי לנו $2 \neq 2$ אפשרויות לסידור ולכן $|E_i| = 2 \cdot (2n-2)!$, ולכן

$$p = \frac{2 \cdot (2n-2)!}{(2n-1)!}$$

נשים לב

$$(2n-1)! = (2n-1) \cdot ((2n-1)-1)! = (2n-1) \cdot (2n-2)!$$

אז

$$p = \frac{2 \cdot (2n-2)!}{(2n-1)!} = \frac{2 \cdot (2n-2)!}{(2n-1) \cdot (2n-2)!} = \frac{2}{2n-1}$$

כלומר $X_i \sim Ber\left(\frac{2}{2n-1}\right)$. $\square$

סעיף ב'

נחשב את תוחלת מספר הזוגות שיושבים יחד.
פתרון: נסמן $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ ולכן מלינאריות התוחלת ומתוחלת של משתנה מקרי מתפלג ברנולי

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2}{2n-1}\right) = \frac{2n}{2n-1}$$

$\square$

סעיף ג'

נראה שלכל $i \neq j$, $X_i X_j \sim Ber\left(\frac{4}{(2n-2)(2n-1)}\right)$.
פתרון: ניזכר שמכפלה של משתנים מקריים שמתפלגים ברנולי הוא מתפלג ברנולי גם כן (התומך 0 או 1).
כמקודם, נגדיר $U_i = (W_i, M_i), U_j = \left(W_j, M_j\right)$ ולכן מספר הסידורים הפעם הוא $2n - 2 = 2 + (2n-4)$ "אנשים" שצריך לסדר במעגל, כלומר $(2n-3)! = ((2n-2)-1)!$ סידורים אפשריים.
כמובן, לכל U_i, U_j כמובן יש שתי אפשרויות לסידור פנימי ולכן בסך־הכל $\left|E_{i,j}\right| = 4 \cdot (2n-3)!$ ובסך־הכל

$$\mathbb{P}(X_i X_j = 1) = \frac{4 \cdot (2n-3)!}{(2n-1)!} = \frac{4 \cdot (2n-3)!}{(2n-1) \cdot (2n-2) \cdot (2n-3)!} = \frac{4}{(2n-1)(2n-2)}$$

$\square$

סעיף ד'

נחשב את שונות מספר הזוגות שיושבים זו לצד זו.

פתרון:

$$\mathrm{Var}(S) = \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) + \sum_{i \neq j} \mathrm{Cov}\big(X_i, X_j\big) = n \cdot \mathrm{Var}(X_1) + n \cdot (n-1) \cdot \mathrm{Cov}(X_1, X_2)$$

כאשר השיוויון האחרון נובע מסימטרית של השונות עבור $i \neq j$ וכמות הצירופים האפשריים.

מסעיף א' נובע כי $X_i \sim Ber\big(\frac{2}{2n-1}\big)$ ולכן משונות של משתנה מקרי מתפלג ברנולי

$$\mathrm{Var}(X_1) = \frac{2}{2n-1}\left(1 - \frac{2}{2n-1}\right) = \frac{2}{2n-1}\frac{2n-3}{2n-1} = \frac{4n-6}{(2n-1)^2}$$

נשאר לחשב את $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$, מסעיפים ב' וג' נקבל

$$\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = \mathbb{E}(X_1 X_2) - \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2) = \frac{4}{(2n-1)(2n-2)} - \frac{4}{(2n-1)^2} = \frac{4(2n-1) - 4(2n-2)}{(2n-1)^2(2n-2)} = \frac{4}{(2n-1)^2(2n-2)}$$

ובסך־הכל נקבל

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(S) &= n \cdot \frac{4n-6}{(2n-1)^2} + n \cdot (n-1) \cdot \frac{4}{(2n-1)^2(2n-2)} = \frac{4n^2-6n}{(2n-1)^2} + n \cdot (n-1) \cdot \frac{4}{(2n-1)^2 2(n-1)} \\ &= \frac{4n^2-6n}{(2n-1)^2} + \frac{2n}{(2n-1)^2} = \frac{4n^2-4n}{(2n-1)^2} = \frac{4n(n-1)}{(2n-1)^2}\end{aligned}$$

$\square$

סעיף ה'

לכל $n \geq 1$ יהי Y_n משתנה מקרי שתוצאתו היא מספר הזוגות שיושבים ביחד לאחר שמושיבים n זוגות באקראי במעגל.

נחשב את הגבולות כאשר n שואף לאינסוף של התוחלת של Y_n ושל השונות של Y_n.

פתרון: נסמן $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ ומלינארית התוחלת ותוצאות הסעיפים הקודמים

$$\mathbb{E}(Y_n) = \frac{2n}{2n-1} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{2-\frac{1}{n}} = 1$$

ועבור השונות עם תוצאות הסעיף הקודם

$$\mathrm{Var}(Y_n) = \frac{4n(n-1)}{(2n-1)^2} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{4n(n-1)}{(2n-1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2-4n}{4n^2-4n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{4-\frac{4}{n}}{4-\frac{4}{n}+\frac{1}{n}} = 1$$

$\square$

שאלה 4

יהי $n \leq 3$. נתבונן בטבלה של $n \times n$ משבצות, כאשר כל אחד מהמשבצות צבועה בשחור או בלבן באקראי ובאופן בלתי־תלוי. יהי X מספר הזוגות שצבועים בלבן, כלומר מספר הזוגות של משבצות סמוכות ששתיהן צבועות בלבן.

סעיף א'

נחשב מהו מספר הצמדים של זוגות חופפים (זוגות משבצות שחולקים בידיוק משבצת אחת).

פתרון: באופן כללי, יש $n(n-1)$ זוגות אפשריים בצורה אופקית ובהתאם גם בצורה אנכית.

שני זוגות הם חופפים אם ורק אם הם חולקים בידיוק איבר אחד במשותף.

במקרה הראשון בהתאם לדוגמאות בטופס המטלה, כאשר הם חולקים איבר אחד אופקי או אנכי, אלו זוגות מהצורה

$$(i,j),(i,j+1) \ \vee \ (i,j),(i+1,j)$$

ומקומבינטוריקה נקבל $2n(n-2)$ זוגות אפשריים חופפים הן אופקית והן אנכית.

צריך לטפל במקרים של צורת L – זה קורה כשזוג אופקי חולק איבר עם זוג אנכי, אז משבצת (i,j) היא משבצת כזאת אם יש לה שכן לבן אופקי ושכן לבן אנכי.

יש לנו 4 פינות שבהן אפשר לבנות L וצריך להבדיל בין ריבוע פנימי לבין ריבוע שהוא יכול להיות על השפה אבל לא בפינות של הטבלה. אם אני פינה, למשבצת כזאת יש בידיוק 3 שכנים, ולכן $8(n-2)$ אפשרויות בשבילו (כי כל אחד יכול פינה יכולה לתרום 2 צורות של L ויש 4 פינות).

בשביל הנקודות הפנימיות, יש $(n-2)^2$ ריבועים פנימיים, כל ריבוע כזה יכול לתרום 4 סוגים של L.

בסך־הכל

$$2n(n-2)+4(n-2)^2+8(n-2)+4 = 2n^2-4n+4(n^2-4n+4)+16n-16+4 = 6n^2-12n+4$$

□

סעיף ב'

נחשב מהי תוחלת X.

פתרון: לכל זוג $E=(i,j)$ נגדיר

$$I_E = \begin{cases} 1 & \text{שתי הקורדינאטות לבנות} \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

מהיות הצביעות בלתי־תלויות נובע כי $I_E \sim Ber\left(\frac{1}{4}\right)$ וכן $X=\sum_E I_E$.

כל שורה תורמת $n-1$ זוגות אופקיים וכל עמודה תורמת $n-1$ זוגות אנכיים ולכן בסך־הכל יש לנו $2n(n-1)$ זוגות שאנחנו רצים עליהם, כלומר $X=\sum_{i=1}^{2n(n-1)} I_{E_i}$ ומלינאריות התוחלת ומתוחלת משתנה מקרי ברנולי

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{2n(n-1)} I_{E_i}\right) = \frac{2n(n-1)}{4} = \frac{n(n-1)}{2}$$

□

סעיף ג'

נחשב מהי שונות X.

פתרון: נרצה להשתמש בנוסחה לחישוב סכום שנויות ויחד עם תוחלת של משתנה מקרי ברנולי

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}\left(\sum_e I_e\right) + 2\,\mathrm{Cov}_{e<f}\,\mathrm{Cov}\big(I_e, I_f\big)$$

אז

$$\mathrm{Var}\left(\sum_e I_e\right) = 2n(n-1)\cdot\frac{3}{16} = \frac{3n(n-1)}{8}$$

בשביל השונות המשותפת עלינו לחשב את $\mathbb{E}\left(I_e I_f\right)$, כלומר יש לנו 3 משבצות לבנות אחת אחרי השנייה, כלומר $\mathbb{E}\left(I_e I_f\right) = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ מהאי־תלות, אז

$$\mathrm{Cov}\left(I_e, I_f\right) = \mathbb{E}\left(I_e I_f\right) - \mathbb{E}(I_e)\mathbb{E}\left(I_f\right) = \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$$

אז בסך־הכל ועם סעיף א' נקבל

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) = \frac{3n(n-1)}{8} + \frac{2 \cdot (6n^2 - 12n + 4)}{16} = \frac{3n(n-1)}{8} + \frac{6n^2 - 12n + 4}{8} = \frac{3n^2 - 3n + 6n^2 - 12n + 4}{16} \\ = \frac{3n^2 - 15n + 4}{16}\end{aligned}$$

$\square$

סעיף ד'

עבור כל $n \leq 2$ יהי X_n משתנה מקרי המתאר את מספר הזוגות הצבועים בלבן בטבלה מגודל $n \times n$.
נבחן כיצד נשתמש באי־שיוויון צ'בישב כדי להסיק שלכל $\varepsilon > 0$ הסדרה $p_n = \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{2n(n-1)} - \frac{1}{4}\right| \geq \varepsilon\right)$ שואפת ל־0 כאשר $n \to \infty$.
הוכחה: ראשית

$$\left|\frac{X_n}{2n(n-1)} - \frac{1}{4}\right| \geq \varepsilon \iff \left|X_n - \frac{n(n-1)}{2}\right| \geq \varepsilon(2n(n-1))$$

אי־שיוויון צ'בישב אומר שלכל $a > 0$ מתקיים

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{a^2}$$

כלומר במקרה שלנו

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{2n(n-1)} - \frac{1}{4}\right| \geq \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(\left|X_n - \frac{n(n-1)}{2}\right| \geq \varepsilon(2n(n-1))\right) \underset{\text{צ'בישב}}{\leq} \frac{\mathrm{Var}(X_n)}{\varepsilon^2(4n^4 - 8n^2 + 4n)} \\ \underset{\text{סעיף קודם}}{=} \frac{\frac{3n^2-15n+4}{16}}{\varepsilon^2(4n^4 - 8n^2 + 4n)} = \frac{3n^2 - 15n + 4}{16\varepsilon^2(4n^4 - 8n^2 + 4n)} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0\end{aligned}$$

כאשר המעבר האחרון נובע מאריתמטיקה של גבולות (החזקה במכנה היא הגבוהה יותר). $\square$

שאלה 5

נקבע $n \geq 3$ ונטיל מטבע n פעמים באופן בלתי־תלוי, כאשר המטבע נופל בכל פעם על 1 בהסתברות p.
יהי X_n מספר הרצפים $1,1,1$ בסדרת ההטלות באורך n.

סעיף א'

נחשב את התוחלת של X_n.
פתרון: יהיו $Y_1, ..., Y_n$ משתנים מקריים כאשר Y_i הוא תוצאת ההטלה ה־i.

$$\forall k \in \{1, ..., n-2\},\ \ I_k = \begin{cases} 1 & Y_k = Y_{k+1} = Y_{k+2} = 1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

ולכן $X_n = \sum_{k=1}^{n-2} I_k$, אז מלינאריות התוחלת

$$\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n-2} I_k\right) = \sum_{k=1}^{n-2} \mathbb{E}(I_k) \underset{\substack{\text{תוחלת משתנה מקרי אינדיקטור} \\ \text{ומהאי־תלות של ההטלות}}}{=} (n-2)p^3$$

□

סעיף ב'

נחשב את השונות של X_n.
פתרון: מהנוסחה לחישוב סכום של שונות

$$\mathrm{Var}(X_n) = \mathrm{Var}\left(\sum_{k=1}^{n-2} I_k\right) = \sum_{k=1}^{n-2} \mathrm{Var}(I_k) + 2\sum_{1\leq i<j\leq n-2} \mathrm{Cov}\big(I_i, I_j\big)$$

נחשב את שני חלקי הסכום:

$$\mathrm{Var}(I_k) = \mathbb{E}(I_k^2) - \mathbb{E}(I_k)^2 \underset{\text{משתנה מקרי אינדיקטור}}{=} \mathbb{E}(I_k) - \mathbb{E}(I_k)^2 = p^3 - p^6 = p^3(1-p^3)$$

עבור החלק השני, היות וההתלות הן בלתי־תלויות, נובע שעבור I_k, I_{k+3} המאורעות הם זרים והם בלתי־תלויים כי ההטלות הן בלתי־תלויות, כלומר לכל $|i-j| \geq 3$ מתקיים ש־I_i, I_j בלתי־תלויים וראינו שאי־תלות גוררת אי־מתואמות ולכן $\mathrm{Cov}\big(I_i, I_j\big) = 0$.
אז המאורעות שהם תלויים הם המאורעות עבורם $|i-j| = 2$ או המאורעות עבורם $|i-j| = 1$.
נתחיל מהמקרה השני, ניקח $j = i+1$ כלומר ההטלות $Y_i, Y_{i+1}Y_{i+2}, Y_{i+3}$ כלומר הסתיימו ב־1 ומהאי־תלות של ההטלות

$$\mathbb{E}\big(I_i I_{i+1}\big) = \mathbb{P}\big(I_i = 1, I_{i+1} = 1\big) = \mathbb{P}(1111) = p^4$$

ולכן

$$\mathrm{Cov}\big(I_i, I_{i+1}\big) = \mathbb{E}\big(I_i I_{i+1}\big) - \mathbb{E}(I_i)\mathbb{E}\big(I_{i+1}\big) = p^4 - p^6 = p^4(1-p^2)$$

ויש לנו $n-3$ זוגות כאלו.
עבור המקרה השני נפעל באופן דומה: ניקח $j = i+2$ אז ההטלות $Y_i, Y_{i+1}, Y_{i+2}, Y_{i+3}, Y_{i+4}$ כולן הסתיימו ב־1, ומהאי־תלות של ההטלות

$$\mathbb{E}\big(I_i I_{i+2}\big) = \mathbb{P}\big(I_i = 1, I_{i+2} = 1\big) = \mathbb{P}(111111) = p^5$$

ולכן

$$\mathrm{Cov}\big(I_i, I_{i+2}\big) = \mathbb{E}\big(I_i I_{i+2}\big) - \mathbb{E}(I_i)\mathbb{E}\big(I_{i+2}\big) = p^5 - p^6 = p^5(1-p)$$

ויש לנו $n-4$ זוגות כאלו ובסך־הכל

$$\mathrm{Var}(X_n) = \sum_{k=1}^{n-2} \mathrm{Var}(I_k) - \sum_{1\leq i<j\leq n-2} \mathrm{Cov}\big(I_i, I_j\big) = (n-2)p^3(1-p^3) + 2\big((n-3)p^4(1-p^2) + (n-4)p^5(1-p)\big)$$

□

סעיף ג'

נשתמש באי־שיוויון צ'בישב כדי להסיק שלכל $\varepsilon > 0$ הסדרה $p_n = \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n-2} - p^3\right| \geq \varepsilon\right)$ כך ש־0 $p_n \xrightarrow[n\to\infty]{}$.

הוכחה: ראשית

$$\left|\frac{X_n}{n-2} - p^3\right| \geq \varepsilon \iff \left|X_n - (n-2)p^3\right| \geq \varepsilon(n-2)$$

אי־שיוויון צ'בישב אומר שלכל $a > 0$ מתקיים

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{a^2}$$

ובמקרה שלנו, $X = X_n, a = \varepsilon(n-2)$ ונקבל

$$\mathbb{P}(|X_n - \mathbb{E}(X_n)| \geq \varepsilon(n-2)) \leq \frac{\mathrm{Var}(X_n)}{\varepsilon^2(n-2)^2}$$

בסעיף הקודם מצאנו שמתקיים

$$\mathrm{Var}(X_n) = (n-2)p^3(1-p^3) + 2((n-3)p^4(1-p^2) + (n-4)p^5(1-p))$$

זה צירוף לינארי במשתנה n ולכן קיים $C > 0$ שתלוי רק במשתנה p כך שיתקיים $\mathrm{Var}(X_n) < Cn$ עבור n גדול מספיק, ולכן

$$\frac{\mathrm{Var}(X_n)}{\varepsilon^2(n-2)^2} \leq \frac{Cn}{\varepsilon^2(n-2)^2} = \frac{Cn}{\varepsilon^2(n^2-2n+4)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

שכן המכנה דומיננטי יותר. $\square$

שאלה 6

יהיו X, Y משתנים מקריים בלתי־תלויים המקיימים

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y) = \mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = 1$$

סעיף א'

נחשב את התוחלת והשונות של $X + Y$.

פתרון: מלינאריות התוחלת מתקיים

$$\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = 1 + 1 = 2$$

וכן מהיות X, Y בלתי־תלויים, מחיבוריות השונות למשתנים מקריים בלתי־תלויים

$$\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) = 1 + 1 = 2$$

□

סעיף ב'

נחשב את התוחלת והשונות של XY.

פתרון: X, Y בלתי־תלויים ולכן מכפליות התוחלת למשתנים בלתי־תלויים

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = 1 \cdot 1 = 1$$

ניזכר שראינו שאם X, Y משתנים מקריים בלתי־תלויים אז הם נשארים גם בלתי־תלויים תחת הפעלת פונקציה, כלומר אם נסמן $f(Z) = z^2$ אזי $f(X) = X^2$ ו־$f(Y) = Y^2$ הם בלתי־תלויים.
אז מהגדרת השונות נקבל

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(XY) &= \mathbb{E}((XY - 1)^2) = \mathbb{E}(X^2Y^2 - 2XY + 1) \underset{\text{לינאריות}}{=} \mathbb{E}(X^2Y^2) - 2\mathbb{E}(XY) + 1 = \mathbb{E}(X^2Y^2) - 1 \\ &= \mathbb{E}(X^2Y^2) - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) + 1 = \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2) - 1\end{aligned}$$

היה אפשר להגיע לזה גם מההגדרה השקולה.
עוד נתון כי

$$1 = \mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(X^2) - 1 \Longrightarrow \mathbb{E}(X^2) = 2$$

וכמובן באותו אופן גם עבור $\mathrm{Var}(Y)$ ולכן

$$\mathrm{Var}(XY) = \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2) - 1 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$$

□

שאלה 7

לתוך שתי מעטפות אטומות מוכנסים סכומי כסף מקריים, $10^X, 10^{X+1}$ עבור $X \sim Geo\left(\frac{1}{2}\right)$.
אהוד מקבל מעטפה מקרית, מציץ בתוכה ומחליט האם לקחת אותה או להחליפה במעטפה השנייה.

סעיף א'

יש להראות כי בלי תלות בסכום שיגלה, בהינתן הסכום שבמעטפה, תוחלת הכסף שיקבל אהוד תגדל אם הוא יחליף בין המעטפות.
פתרון: נסמן $Y \in \{10^X, 10^{X+1}\}$ הבחירה של אהוד.
נניח ש-$Y = 10^k$ ולכן יש בידיוק שתי אופציות:

1. $X = k$ ואהוד בחר את המעטפה הקטנה יותר
2. $X = k-1$ ואהוד בחר את המעטפה הגדולה יותר

כלומר

$$\mathbb{P}(X=k)\cdot\frac{1}{2} = 2^{-k+1}\cdot\frac{1}{2} = 2^{-(k+2)}$$
$$\mathbb{P}(X=k-1)\cdot\frac{1}{2} = 2^{-k}\cdot\frac{1}{2} = 2^{-(k+1)}$$

בהתאמה בין המקרים לעיל, כלומר מנוסחת ההסתברות השלמה

$$2^{-(k+2)} + 2^{-(k+1)} = 2^{-k(k+2)} + 2^1\cdot 2^{-(k+2)} = 2^{-(k+2)}(1+2) = 3\cdot 2^{-(k+2)}$$

ומכלל בייס נקבל

$$\mathbb{P}\big(\text{מעטפה עם סכום קטן יותר} \mid Y = 10^k\big) = \frac{1}{3}$$
$$\mathbb{P}\big(\text{מעטפה עם סכום גדול יותר} \mid Y = 10^k\big) = \frac{2}{3}$$

ומנוסחת התוחלת השלמה המותנית

$$\mathbb{E}\big(\text{מחליף} \mid Y = 10^k\big) = \frac{1}{3}10^{k+1} + \frac{2}{3}10^{k-1} = 10^k\left(\frac{10}{3} + \frac{2}{30}\right) = 10^k\cdot\frac{34}{30} > 10^k$$

מאותו טריק מקודם עם החזקה.
מצד שני

$$\mathbb{E}\big(\text{שומר} \mid Y = 10^k\big) = 10^k$$

שכן

$$\mathbb{E}(Y \mid Y = c) = c$$

□

סעיף ב'

מהסעיף הקודם נדמה כי ניתן להסיק כי עוד לפני שנפתחה המעטפה כדאי לאהוד להחליף בין המעטפות, אך מטעמי סימטרייה הדבר כמובן לא ייתכן.
נבחן כיצד נפתור את הפרדוקס.
הוכחה: לפני שאנחנו פותחים מעטפה, שתי המעטפות שקולות אבל ברגע שאנחנו פותחים את המעטפה, וקיבלנו את הערך Y, המעטפות כבר לא שקולות ברמה ההסתברותית שלהן: אחת ידוע הערך שלה, Y, השנייה יש לה הסתברות לא ידועה שתלוייה ב־Y.
אז יש לנו 3 אסטרטגיות: אסטרטגיה A – לא להחליף, אסטרטגיה B – תמיד להחליף, אסטרטגיה C – לפתוח ואז להחליף אם להחליף.
אבל אסטרטגיה C איננה שקולה לאסטרטגיות A ו־B שהן שקולות מבחינת התוחלת שלהן, כי היא תלוייה בתוצאה אחרת.
כלומר, לפני שפתחנו את המעטפה, יש סימטרייה והחלפה לא יכולה לעזור, אבל אחרי שפתחנו את המעטפה – רק אז הסימטריה נעלמת והחלפה יכולה לעזור.
□