פתרון מטלה 06 — תורת ההסתברות 1, 80420

10 בדצמבר 2025

שאלה 1

סעיף א'

נפריך את הטענה שאם X משתנה מקרי המוגדר על מרחב הסתברות $(\Omega, \mathbb{P})$ כך ש-$X \sim U(\{1,2,3\})$ אז $(\Omega, \mathbb{P})$ הוא מרחב הסתברות אחידה.

הוכחה: נגדיר

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$$

ונגדיר

$$\mathbb{P}(\{\omega_1\}) = \frac{1}{12},\ \mathbb{P}(\{\omega_2\}) = \mathbb{P}(\{\omega_3\}) = \mathbb{P}(\{\omega_4\}) = \frac{3}{12}$$

זהו אינו מרחב הסתברות אחיד, ואם נגדיר $X : \Omega \to \{1,2,3\}$ על-ידי

$$X(\omega_1) = X(\omega_2) = 1,\ X(\omega_3) = 2,\ X(\omega_4) = 3$$

אז מתקיים

$$\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(\{\omega_1, \omega_2\}) = \mathbb{P}(\{\omega_1\}) + \mathbb{P}(\{\omega_2\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\mathbb{P}(X=2) = \mathbb{P}(\{\omega_3\}) = \frac{1}{3}$$

$$\mathbb{P}(X=3) = \mathbb{P}(\{\omega_4\}) = \frac{1}{3}$$

ואכן $X \sim U(\{1,2,3\})$. □

סעיף ב'

נפריך את הטענה שאם X, Y משתנים מקריים בלתי-תלויים ובעלי תומך סופי ומתקיים $\mathbb{E}(|X-Y|) = 0$ אזי $\mathbb{P}(X=Y) = 1$.

הוכחה: ניקח את $\Omega = \{1, -1\}$ ונניח שגם X, Y משתנים מקריים בלתי-תלויים כך שמתקיים $X(\omega) = \omega, Y(\omega) = -\omega$ ואכן התומך של X, Y סופי גם הוא. מצד אחד, מנוסחת התוחלת נקבל $\mathbb{E}(|X-Y|) = 0$ אבל $\mathbb{P}(X=Y) = 0$. □

סעיף ג'

נפריך את הטענה שאם X משתנה מקרי בעל תוחלת אז גם X^2 משתנה מקרי בעל תוחלת.

הוכחה: נניח כי X משתנה מקרי הנתמך על הטבעים ונגדיר $\mathbb{P}(X=n) = \frac{c}{n^3}$ עבור c קבוע.
מצד אחד, הטור $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{c}{n^3}$ מתכנס בהחלט ומנגד $\mathbb{E}(X^2) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot \frac{c}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c}{n}$ מתבדר. □

סעיף ד'

נוכיח שאם X משתנה מקרי כך ש-X^2 בעל תוחלת אז X בעל תוחלת.

הוכחה:

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{s \in \mathbb{R}_{\geq 0}} s\mathbb{P}(X^2 = s) = \sum_{s \in \mathbb{R}_{\geq 0}} \sqrt{s} \cdot \sqrt{s} \cdot \mathbb{P}\big(X \in \{\sqrt{s}, -\sqrt{s}\}\big) = \sum_{s' \in \mathbb{R}_{\geq 0}} s' \cdot s' \cdot \mathbb{P}(X \in \{s', -s'\})$$

$$= \sum_{s' \in \mathbb{R}_{\geq 0}} s' \cdot s' (\mathbb{P}(X = s') + \mathbb{P}(X = -s')) = \sum_{s' \in \mathbb{R}_{\geq 0}} s' \cdot s' \mathbb{P}(X = s') + \sum_{s' \in \mathbb{R}_{<0}} s' \cdot s' \mathbb{P}(X = s')$$

$$= \sum_{s' \in \mathbb{R}_{\geq 0}} |s'||s'\mathbb{P}(X = s')| = \sum_{s' \in \mathbb{R}_{<0}} |s'||s'\mathbb{P}(X = s')| = \sum_{s' \in \mathbb{R}} |s'| \cdot |s'\mathbb{P}(X = s')| = \sum_{s \in \operatorname{supp}(X)} |s| \cdot |s\mathbb{P}(X = s)|$$

זהו טור מתכנס בהחלט ולכן ממבחן ההתכנסות גם

$$\sum_{s \in S} |s\mathbb{P}(X = s)|$$

הוא טור מתכנס. □

סעיף ה'

נפריך את הטענה שאם X,Y משתנים מקריים כך ש־$\mathbb{E}(X)=\mathbb{E}(Y)$ וכן $\mathbb{E}(X^2)=\mathbb{E}(Y^2)$ אז $\mathbb{P}(X=Y)=1$.

הוכחה: נסתכל על $\Omega=[4]^2$ מרחב ההטלה של שתי קוביות הוגנות בעלות 4 פאות.

נגדיר $X((\omega_1,\omega_2))=\omega_1$ וכן $Y((\omega_1,\omega_2))=\omega_2$ ואכן, $X,Y\sim U([4])$ ולכן $\mathbb{E}(X)=\mathbb{E}(Y)$ וגם $\mathbb{E}(X^2)=\mathbb{E}(Y^2)$ אבל $\mathbb{P}(X=Y)=\frac{1}{4}\neq 1$. $\square$

סעיף ו'