

**הכנה ל מבחן – פונקציות מרוכבות, 90519**

10 בפברואר 2026



## תוכן עניינים

1	אРИתמטיקות בסיסיות שאות תמיד שוכחת
2	ספרינט על החומר .....
4	4..... 2. גזירות מרכובת .....
4	4..... 2.1.1 הקדמה .....
4	4..... 2.1.2 טורי חזקות .....
4	4..... 2.1.3 האקספונט המרכיב .....
5	5..... 2.1.4 הלוגריתם המרכיב ופונקציית הארגומנט .....
5	5..... 2.1.5 משוואות קושירמן .....
6	6..... 2.1.6 פונקציות הרמוניות .....
6	6..... 2.1.7 העתקות קונפורמיות .....
7	7..... 2.2 אינטגרלים קווים .....
7	7..... 2.2.1 הקדמה .....
7	7..... 2.2.2 משפט קושי .....
8	8..... 2.2.3 מסקנות משפט קושי .....
10	10..... 2.3 טורי לורן .....
10	10..... 2.3.1 נקודות סינגולריות .....
11	11..... 2.3.2 שאrienות .....
11	11..... 2.3.3 בחזרה לחישוב אינטגרלים ממשיים .....
12	12..... 2.4 עקרונות גיאומטריים .....
12	12..... 2.4.1 עקרון הארגומנט .....
12	12..... 2.4.2 משפט רושא .....
12	12..... 2.4.3 אינדקס ליפוף .....
13	13..... 2.4.4 הימה של שורץ .....
13	13..... 2.4.5 משפט העתקה של רימן .....
14	14..... 3 דברים שימושים בפתרונותות תרגילים .....
14	14..... 3.1 למצואו כמה פתרונות (כולל ריבויים) .....
15	15..... 3.2 טורי לורן .....
15	15..... 3.2.1 פיתוחים שימושים .....
15	15..... 3.2.2 How To Guide .....
16	16..... 3.3 בשאלה מבולבל – הרם קושי אל-על .....
16	16..... 3.4 תוכחתי קיום/אי קיום .....

# 1 ארכיטקטורת בסיסיות שתמך שוכחת

בහינתן  $z = x + iy, w = a + ib$   
.1. ערך מוחלט

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{(x + iy) \cdot (x - iy)} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

.2. חילוק

$$\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \bar{w}}{w \cdot \bar{w}} = \frac{z \cdot \bar{w}}{|w|^2}$$

.3. זהות אוילר

$$e^{iz} = \cos(z) + i \sin(z)$$

$$e^{\pi i} = (-1) \quad e^{2\pi i} = 1, \quad e^{i\frac{\pi}{2}} = i \quad .4$$

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad .5$$

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad .6$$

$$\sinh(z) = -i \sin(iz) = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad .7$$

$$\cosh(z) = \cos(iz) = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad .8$$

$$|e^w| = e^{\operatorname{Re}(w)} \quad .9$$

## 2 ספרינט על החומר

### 2.1 גזירות מרוכבת

הקדמה

הגדרה 2.1.1 (תחום) : נגיד ש-  $G \subset \mathbb{C}$  היא תחום אם היא קבוצה פתוחה וקשירה. אם  $G$  פתוחה או ניתן לכתוב  $G_j$  כאשר  $G = \bigcup_{j=1}^N G_j$  תחום.

הגדרה 2.1.2 (גזירות מרוכבת) : תהי  $f : U_{z_0} \rightarrow \mathbb{C}$ , נגיד שהוא  $\mathbb{C}$ -דיפרנציאבילית ב-  $z_0$  אם הגבול הבא קיים וסופי

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z + h) - f(z)}{h}$$

באופן שקול, קיים  $\mathbb{R} \in a$  כך שהגבול הבא קיים וסופי

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - (f(z_0) + a(z - z_0))}{z - z_0}$$

כמובן שזה גורר רציפות ב-  $z_0$ .

הגדרה 2.1.3 (פונקציה אנגליתית) : פונקציה  $f$  היא אנגליתית ב-  $z_0$  אם קיימת סביבה  $U_{z_0}$  כך ש-  $f$  היא  $\mathbb{C}$ -דיפרנציאבילית בכל  $.z \in U_{z_0}$ . נגיד ש-  $f$  היא אנגליתית ב-  $\mathbb{C}$  אם לכל  $\mathbb{C} \in z_0$ ,  $f$  היא אנגליתית ב-  $z$ .

הגדרה 2.1.4 (פונקציה הולומורפית) : פונקציה  $f$  היא הולומורפית אם היא אנגליתית ב-  $\mathbb{C}$ .  
נסמן ב-  $Hol(G)$  את אוסף כל הפונקציות האנגליטיות ב-  $G$ .

טורי חזקות

משפט 2.1.1 (משפט ה- M של ויירשטראס) : תהי  $E \subset \mathbb{C}$  ו-  $E \subset \mathbb{C}$ . אם לכל  $n$ ,  $f_n : E \rightarrow \mathbb{C}$  מתכנס בהחלה ומידה שווה ב-  $E$

למה 2.1.1 : אם  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (w - z_0)^n$  מתכנס עבור  $z_0 \neq w$  או הסכום מתכנס במידה שווה ובכחול ב-  $\{z \mid |z - z_0| < q \text{ abs } w - z_0\} \neq \emptyset$ .  
 $q \in (0, 1)$

מסקנה 2.1.1 : אחד מה הבאים מתקיים

1. לכל  $z_0 \neq z$  הסכום  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$  מתבדר

2. לכל  $z \in \mathbb{C}$  הסכום  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$  מתכנס

3. קיימים  $z_1, z_2$  כך שהסכום  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z_2 - z_0)^n$  מתכנס

הגדרה 2.1.5 (רדיווס התכנסות ונוסחת הדامر) : הגדרנו את רדיוס התכנסות  $R_C$  להיות המשי החיוויי כך שלכל  $z$  המקיימים  $|z - z_0| < R_C$  הסכום מתכנס בהחלה ועבור כל  $z$  המקיימים  $|z - z_0| > R_C$  הטור מתבדר (לא ידוע מה קורה כאשר  $|z - z_0| > R_C$  וכל פעם צריך לבדוק).  
הגדרנו את נוסחת הדامر להיות

$$\frac{1}{R_C} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{\frac{1}{n}}$$

הקספוננט המורכב

משפט 2.1.2 : אם  $f$  הולומורפית אז  $f' = f$  אם ורק אם  $f(z) = c \cdot e^z$  עבור  $c$  קבוע.

מסקנה 2.1.2 (מסקנות מזהות אוילר) :

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta), z = |z| + e^{i\theta} = |z|(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) .1$$

$$z = x + iy \implies e^z = e^x (\cos(y) + i \sin(y)) .2$$

$$|e^z| = e^x, \operatorname{Arg}(e^z) = y .3$$

הגדעה 2.1.6 (הענף הראשי של הלוגרithם):

$$\text{Log}(z) = \log(|z|) + i \text{Arg}(z)$$

הגדעה 2.1.7 (ענף של הארגומנט): יהיו  $G \subset \mathbb{C}$  תחום כך ש- $G \neq 0$ . נגידיר ענף של הארגומנט להיות כל  $\alpha(z)$  שרציפה מעלה  $G$  כך שלכל  $z \in G$  מתקיים  $\alpha(z) \in \{\text{Arg}(z) + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ .

הגדעה 2.1.8 (ענף של הלוגרithם): יהיו  $G \subset \mathbb{C}$  תחום כך ש- $G \neq 0$ . נגידיר ענף של הלוגרithם להיות כל פונקציה  $\ell(z)$  שרציפה מעלה  $G$  כך שלכל  $z \in G$  מתקיים  $e^{\ell(z)} = \{ \text{Log}(z) + 2\pi ik \mid k \in \mathbb{Z} \}$ .

הערה: נשים לב שיכולה להיות שverb' מתקיימים

$$e^{z_1} = e^{z_2} \quad \text{Arg}(z_1) = \text{Arg}(z_2) \quad \text{Log}(z_1) = \text{Log}(z_2)$$

אבל  $z_2 \neq z_1$  לדוגמה,  $z_1 = z_2 + 2\pi k$  (זאת מכיוון ש- $\log$  זכר אורך ולא חזות וזכר חזות). דוגמה של דנייאל (אני לחין):

$$z_1 = |-10|, z_2 = \left| \frac{10(1+i)}{\sqrt{2}} \right|$$

אכן החזות של שניהם היא אפס (המ על הציר ממשי) והאורך שלהם אותו הדבר מחוקי לוגרithמים.

טענה 2.1.1 (ענף של הלוגרithם הוא הולומורפי): אם  $\ell$  היא ענף של הלוגרithם מעלה תחום  $G$  או  $\ell \in \text{Hol}(G)$  או  $\ell'$  על-כן  $\ell'(z) = \frac{1}{z}$ .

הגדעה 2.1.9 (ענף לוגרithמי של פונקציה): תהי  $f \in \text{Hol}(G)$  ו-  $0 \neq f(z) \neq 0$  לכל  $z \in G$ , או נגידיר ענף של  $\log(f)$  להיות כל פונקציה רציפה המקיימת  $e^{\text{Log}(f)} = f(z)$ .

$$g'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

משפט 2.1.3 (משפט העתקה הפתוחה): תהי  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  פונקציה הולומורפית או  $f$  העתקה פתוחה, כלומר שולחת קבוצות פתוחות לקבוצות פתוחות.

הגדעה 2.1.10 (נגזרת לוגרithמית): אם  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  לא מתאפסת, הנגזרת הלוגרithמית מוגדרת להיות  $\frac{f'}{f}$ .

הגדעה 2.1.11: יהיו  $G \subset \mathbb{C}$  תחום שיש עליו ענף של הלוגרithם. לכל  $\sigma \in \mathbb{C}$  נגידיר  $z^\sigma = \exp(\sigma \log(z))$

משוואות קושי-רימן

סימון: תהי  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ונסמן  $u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  כאשר  $Re(f) = u(x, y), Im(f) = v(x, y)$  משפט 2.1.4: תהי  $f = u + iv$  פונקציה  $\mathbb{C}$ -דיפרנציאבילית, אז

$$f' = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

משפט 2.1.5 (משוואות קושי-רימן): תהי  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  שהיא  $\mathbb{C}$ -דיפרנציאבילית ב- $iy + z = x$  אם ורק אם מתקיימות המשוואות הבאות (משוואות קושי-רימן)

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y)$$

ובמקרה זה זה שווה לנגזרת.

**משפט 2.1.6:** ידי  $G \subset \mathbb{C}$  תחום ו-  $f \in \text{Hol}(G)$ , הבאים שקולים

$$f \text{ קבועה} .1$$

$$f' \equiv 0 .2$$

$$\text{Re}(f) = u .3$$

$$\text{Im}(f) = v .4$$

$$|f| \text{ קבועה} .5$$

$$(f \neq 0 \text{ ואם } \arg(f)) .6$$

: (Wirtinger Operators) **2.1.12** הגדרה

$$\partial_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

: **2.1.2** טענה

$$\partial_{\bar{z}} f = \frac{1}{2} (u_x - u_y + i(v_x + v_y)) .1$$

$$\partial_{\bar{z}} f = 0 \text{ הולומורפית אם ורק אם } f .2$$

$$\overline{\partial}_{\bar{z}} f = \partial_{\bar{z}} \bar{f} .3$$

$$\overline{\partial}_{\bar{z}} f = \partial_z \bar{f} .4$$

$$\partial_z (f \cdot g) = (\partial_z f) \cdot g + f \cdot (\partial_z g) .5$$

$$\partial_{\bar{z}} (f \cdot g) = (\partial_{\bar{z}} f) \cdot g + f \cdot (\partial_{\bar{z}} g) .6$$

$$\partial_z (f \circ g) = ((\partial_z f) \circ g) \cdot \partial_z g + ((\partial_{\bar{z}} f) \circ g) \cdot \partial_z \bar{g} .7$$

$$\partial_{\bar{z}} (f \circ g) = ((\partial_z f) \circ g) \cdot \partial_{\bar{z}} g + ((\partial_{\bar{z}} f) \circ g) \cdot \partial_{\bar{z}} \bar{g} .8$$

פונקציות הרמוניות

הגדרה **2.1.13** (הლפליאן): תהי  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  :  $u$  נגדיר את הלפליאן להיות

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4\partial_{zz} u$$

הגדרה **2.1.14** (פונקציה הרמוני): נגדיר כי  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  :  $u$  היא הרמוני אם היא גזירה פעמים ומתקיים  $\Delta u = 0$

**משפט 2.1.7:** אם  $f \in \text{Hol}(G) \cap C^2(G)$  אז  $Re(f), Im(f)$  או  $f$  הן הרמוניות

הגדרה **2.1.15** (הרמוני צמודה): תהינה  $u, v \in \text{Harm}(G)$ , הן נקראות הרמוניות צמודות אם  $(u + iv) \in \text{Hol}(G)$  (כלומר מקיימות את משוואות קושי רימן) וואו  $\bar{u} = v$  (בפרט, הצמידות היא יחידה).

מסקנה **2.1.3**: אם  $G$  הוא דיסק או מלבן או לכל  $.u + i\tilde{v} \in \text{Hol}(G)$  אז  $\tilde{u} \in \text{Harm}(G)$  ו-  $u \in \text{Harm}(G)$

**משפט 2.1.8** (דרך לחישוב הרמוני צמודה): אם  $G$  דיסק או מלבן או  $(x_0, y_0) \in G$  ו-  $u \in \text{Harm}(G)$  אז

$$v(x_0, y_0) = \int_y^{y_0} u_x(x_0, t) dt - \int_x^{x_0} u_y(t, y) dt - v(x_0, y_0)$$

העתקות קונפורמיות

הגדרה **2.1.16** (נקודה רגולרית): אם  $t_0 \in I$  תקרא רגולרית אם  $0 \neq \gamma'(t_0) \in I$ .

**משפט 2.1.9:**

1. אם  $f \in \text{Hol}(G) \cap C^1(G)$  אז  $f'(z_0) \neq 0$  משמרת זווית בין מסילות כלומר  $z_0$  היא נקודת רגולרית.

2. אם  $f \in C^1(G)$  ו-  $f'(z_0) = 0$  משמרת זווית בין מסילות עברון  $z_0$  היא נקודת רגולרית או  $f$  היא  $\mathbb{C}$ -דיפרנציאבילית ו-  $f''(z_0) = 0$ .

הגדרה **2.1.17** (העתקה קונפורמית): נגדיר ש-  $f$  היא העתקה קונפורמית אם היא משמרת זווית בין מסילות או אופן שקול אם היא הולומורפית ו-

$$f' \neq 0$$

בפרט, העתקה קונפורמית היא הפיכה וההופכית שלה היא גם העתקה קונפורמית.

## 2.2 אינטגרלים קווים

הקדמה

**הגדעה 2.2.1** (אורך של מסילה):

$$L(f \circ \gamma) = \int_a^b |f'(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt$$

**הגדעה 2.2.2 (אינטגרל קווי):** יהיו  $G \subseteq \mathbb{C}$  תחום,  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  רציפה ו- $\gamma$  מסילה  $C^1$  שתמונהה מוכלת ב- $G$ . האינטגרל המסלילי של  $f$  לאורך  $\gamma$  הוא

$$\int_{\gamma} f d\gamma := \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

**הגדעה 2.2.3 (מסילה פשוטה):** מסילה  $\gamma$  תיקרא פשוטה אם היא חד-חד ערכית. עוקמה תקרה פשוטה אם היא תמונה של מסילה פשוטה.

**הגדעה 2.2.4 (תחום טוב):** תחום  $G$  ייקרא תחום טוב אם  $G$  חסומה ואם  $\partial G$  היא איחוד סופי זר של מסילות פשוטות ו- $C^1$  למקוטען מאורך סופי ונגידיר

$$\int_{\partial G} f(z) dz = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} f(z) dz$$

**הגדעה 2.2.5 (תחום כוכב):** תחום  $G$  נקרא תחום כוכב אם קיים  $z_0 \in G$  כך שלכל  $z \in G$  מתקיים  $[z_0, z] \in G$ .

**משפט 2.2.1** (הארישיוון האהוב עליוו מרוכבות): לכל  $G \in \text{Hol}(G)$ ,  $\gamma : I \rightarrow G$  מתקיים

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \max_{\gamma} |f| \cdot L(\gamma) := \max_{t \in I} |f(\gamma(t))| \cdot L(\gamma)$$

**משפט 2.2.2:** אם  $f_n \rightarrow f$  במידה שווה מקומית (במידה שווה בכל קבוצה קומפקטיבית  $G \subset K \subset G$  או לכל  $G$  או לכל  $I \rightarrow G$ ) אז  $\gamma$  מתקיים

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz$$

**משפט 2.2.3** (קיזרוב פוליאגנלי): תהי  $I = [a, b]$  מסילה רציפה למקוטען והיה  $f \in \text{Hol}(G)$  כה שקיימת  $\gamma : I \rightarrow G$  נאשר אשר  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$  כך  $\sum_{k=1}^N |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| < \varepsilon$

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz - \sum_{k=1}^N f(\gamma(t_k)) |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| \right| < \varepsilon$$

כשהרי  $\sum_{k=1}^N [\gamma(t_k), \gamma(t_{k-1})] \subseteq \Sigma_{\varepsilon}$

**משפט קושי**

**משפט 2.2.4** (משפט קושי במשולש): יהיו  $T$  משולש סגור ו- $G$  סביבה פתוחה של  $T$ , או לכל  $f \in \text{Hol}(G)$  מתקיים

$$\int_{\partial T} f(z) dz = 0$$

**משפט 2.2.5** (משפט קוishi בקבוצה קמורה): תהי  $K$  קבוצה קמורה חסומה ו- $G$  סביבה פתוחה של  $K$ , או לכל מתקיים  $f \in \text{Hol}(G)$

$$\int_{\partial K} f(z) dz = 0$$

הוכורת (קבוצה קמורה):  $K \subset \mathbb{R}^k$  נקראת קמורה אם לכל  $x, y \in K$  מתקיים

$$[x, y] := \{\lambda x + (1 - \lambda)y \mid \lambda \in [0, 1]\} \subseteq K$$

**משפט 2.2.6** (משפט קוishi בתחום טוב): יהיו  $G$  תחום טוב או לכל מתקיים  $f \in \text{Hol}(G \cap C(\bar{G}))$

$$\int_{\partial G} f(z) dz = 0$$

מסקנות המשפט קוishi

**משפט 2.2.7** (נוסחת אינטגרל קוishi): יהיו  $G \subset \mathbb{C}$  תחום טוב,  $\gamma = \partial G$  ותהי  $f \in \text{Hol}(G) \cap C(\bar{G})$ . אז

$$\int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw = \begin{cases} 2\pi i f(z) & z \in G \\ 0 & z \notin \bar{G} \end{cases}$$

כאשר האינטגרל הצד שמאל נקרא אינטגרל קוishi.

**משפט 2.2.8** (נוסחת אינטגרל קוishi לנגורת): תהי  $\gamma$  איחוד סופי של מסילות  $C^1$  ותהי  $\varphi \in C(\gamma)$ . נגדיר

$$F(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(w)}{w - z} dw$$

או  $F \in \text{Hol}(\mathbb{C} \setminus \gamma)$

$$F^n(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(w)}{(w - z)^{n+1}} dw$$

**מסקנה 2.2.1** (טיילור): אם  $f$  הולומורפית או פיתוח טיילור של  $f$  מסביב ל- $z$  מתכנס במידה שווה בדיסק. יתר על-כן,

$$f^n(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\{|w-z|=\rho\}} \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} dw$$

עבור  $\rho < \text{dist}(z, \partial G)$  ומתקיים

$$f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(z)}{n!} (w - z)^n \quad |z - w| < \delta$$

**מסקנה 2.2.2**: אם  $f$  הולומורפית אז היא גזירה אינסופי פעמים בMOVEDן המורכב.

**משפט 2.2.9** (משפט מורה): אם  $G$  תחום ו- $f \in C(G)$  מקיימת שלכל משולש  $T \subset G$  מתקיים  $\int_{\partial T} f(w) dw = 0$

**משפט 2.2.10** (משפט ויירטשטראס): אם  $f_n \in \text{Hol}(G)$  ונניח  $f_n \rightarrow f$  בצורה לוקאלית במידה שווה, אז

1.  $f \in \text{Hol}(G)$ .

2. לכל  $j$ ,  $f_n^j \rightarrow f^j$  בצורה לוקאלית ובמידה שווה ( $j$  ו- $n$  הנגורת ה- $j$ )

**משפט 2.2.11** (אי-שוויון קוishi): תהי  $f \in \text{Hol}(B(z_0, R))$  או לכל  $n \in \mathbb{N}$

$$|f^n(z)| = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\{|w-z|=\rho\}} \frac{|f(w)|}{|w - z|^{n+1}} dw \leq \left| \frac{n!}{2\pi} \right| \frac{\max_{|w-z|=R} |f|}{R^{n+1}} \cdot L(\{|z - w| = R\}) = \frac{n!}{R^n} \max_{|w-z|} |f|$$

**משפט 2.2.12** (משפט ל'ובייל): אם  $f \in \text{Hol}(\mathbb{C})$  ו- $f$  חסומה, אז  $f$  קבוצה.

**משפט 2.2.13** (המשפט היסודי של האלגברה): יהיו  $p$  פולינום מרוכב מדרגה של לפחות 1, אז יש לו שורש.

**מסקנה 2.2.3**: כל פולינום מדרגה  $d$  ניתן לכתיבה כמכפלה  $p(z) = a_0 \prod_{j=1}^d (z - z_j)$  עבור  $z_j \in \mathbb{C}$ .

**משפט 2.2.14** (משפט ערך הממווצע): אם  $\rho < \text{dist}(z, \partial G)$  ו-  $z \in G$ ,  $f \in \text{Hol}(G)$  אז

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(z + \rho e^{it}) dt$$

כלומר,  $f(a)$  הוא הממווצע של הערכים ב-  $\partial B(z, \rho)$ .

**משפט 2.2.15** (עיקנון המקסימום): אם  $f \in \text{Hol}(G) \cap C(\overline{G})$  ו-  $|f|$  מקבלת מינימום ומקסימום גלובאליים על השפה של  $G$ .

**משפט 2.2.16** (עיקנון פרגמן-ליידלוフ): יהיו  $G \subset \mathbb{C}$  תחום לא חסום ו-  $f \in \text{Hol}(G)$  פונקציה חסומה המקיימת  $|f(z)| \leq M$  לכל  $z \in \partial G$ . אז  $|f(z)| \leq M$  לכל  $z \in G$ .

**משפט 2.2.17** (משפט היחידות 1): יהיו  $G$  תחום ו-  $f \in \text{Hol}(G)$ . נניח שקיים  $z_0 \in G$  כך שלכל  $n \in \mathbb{N}$  מתקיים  $f^n(z_0) = 0$ . אז  $f \equiv 0$ .

**משפט 2.2.18** (טענה שלפני המשפט היחידות 2): יהיו  $G$  תחום ו-  $f \in \text{Hol}(G)$  ונניח שהריבוי של  $f$  ב-  $z_0$  הוא  $m$ . אז  $f(z_0) \neq 0$ .

**משפט 2.2.19** (משפט היחידות 2): יהיו  $G$  תחום ו-  $f \in \text{Hol}(G)$  ונניח שקיים  $z_0 \in G$  כך ש-  $f$  מקיימת  $f(z_n) = 0$  לכל  $n \in \mathbb{N}$ . אז  $f \equiv 0$ .

## 2.3 טורי לורן

הגדעה 2.3.1 (טור לורן) : טור מהצורה

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{c_n}{(z-z_0)^{-n}} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = \sum_{-} + \sum_{+}$$

ייקרא טור לורן, כאשר הרדיוס התחנשות עבור

$$\frac{1}{R_+} := \limsup_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{\frac{1}{n}}$$

$$\frac{1}{R_-} := \limsup_{n \rightarrow \infty} |c_{-n}|^{\frac{1}{n}}$$

הו  $\{R_- < |z-z_0| < R_+\}$

משפט 2.3.1 (תהי  $f \in \text{Hol}(\{R_- < |z-z_0| < R_+\})$  ומתקיים  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$  מתקיים

$$c_n := \frac{1}{2\pi i} \int_{\{|\zeta-z_0|=r\}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} d\zeta$$

### נקודות סינגולריות

הגדעה 2.3.2 (נקודה סינגולרית אינטגרבילית) : נקודה  $x_0 \in \mathbb{R}$  נקראת סינגולרית אינטגרבילית של  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$  אם  $f$  רציפה על  $\{x_0\} \setminus \mathbb{R}$  ומתקיים

$$\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} |f(t)| dt < \infty$$

הערה: נקודה סינגולרית סליקה היא סינגולרית אינטגרבילית.

הגדעה 2.3.3 (בעור  $C \in a$  נסמן ב-  $U_a$  סביבה פתוחה של  $z$  וב-  $U_a^*$  את הסביבה המנוקבת  $\{a\} \setminus U_a$ )

הגדעה 2.3.4 (נקודות סינגולריות) : תהיי  $f \in \text{Hol}(U_a^*)$ . נסוג את הנקודות הסינגולריות של  $f$  ב-  $z$  באופן הבא

1. סליקה - ניתן להמשיך את  $f$  ב-  $a$  כך שתהיה הולומורפית (כלומר, אם  $f|_{U_a^*}$  חסומה)
2. קווטב - הנקודה  $a$  אינה סינגולרית סליקה וקיימים  $m \geq 1$  כך שלפונקציה  $(z-a)^m f(z)$  יש סינגולריות סליקה ב-  $a$ .
3. עיקרייה - הגבול  $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$  אינו קיים במובן הרחב

משפט 2.3.2 (קווטב של  $f$  ב-  $a$  להיות  $\deg f(a) = m$  המינימלי המקיים זאת).

משפט 2.3.3 (הקשר בין טור לורן לבין נקודות סינגולריות) : נתנו  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$ , אז

1. קווטב אם ורק אם  $\deg f(a) \geq m$  (כלומר, טור הלורן מכיל  $m$  מרכיבים סופיים של חזוקות שליליות)
2. סינגולריות עיקריות אם ורק אם טור הלורן מכיל אינסוף חזוקות שליליות

משפט 2.3.4 (משפט קרטוייז-ירשטראס) : אם  $a$  סינגולרית עיקרית של הפונקציה  $f$ , או  $V$ , סביבה פתוחה של  $a$ , הקבועה ( $\{a\} \setminus V$  צפופה ב-  $C$ )

$$(f(V \setminus \{a\})) = \overline{(f(V \setminus \{a\}))}$$

הגדעה 2.3.5 (פונקציה רצינולית) : פונקציה  $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$  היא פונקציה רצינולית אם  $f$  ניתנת לכתיבה על-ידי  $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$   $p, q$  פולינומים בלילניים.

הגדעה 2.3.6 (נקודות סינגולריות ב-  $\infty$ ) :

1. נגידר ש-  $f$  אנליטית ב-  $\infty$  אם  $F$  יש סינגולריות סליקה ב-  $\infty$

2. אם  $\deg f$  יש קווטב ב-  $\infty$  או נגידר של-  $F$  יש קווטב ב-  $0$

3. אם  $\deg f$  יש סינגולריות עיקריות ב-  $\infty$  או של-  $F$  יש סינגולריות עיקריות ב-  $0$

**הגדה 2.3.7 (פונקציה מרומורפית):** תהי  $f : G \rightarrow \mathbb{C}^*$  ו- $G \subset \mathbb{C}$ . נאמר ש- $f$  היא מרומורפית אם לכל  $a \in G$  קיימת סביבה  $U_a \subseteq G$  כך ש- $\in f(U_a)$  והן  $f$  הולומורפית ב- $a$  או ש- $a$  קוטב (באופן שקול,  $f$  מרומורפית אם היא הולומורפית בכל  $\mathbb{C}$  מלבד בקבוצה של קטבים מבודדים).

את אוסף הפונקציות המרומורפיות נסמן ב- $\text{Mer}(G)$  (זהו כמובן שזה).

מסקנה 2.3.1: תהי  $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$

1. אם  $f$  הולומורפית ב- $\infty$  אז  $f$  קבועה

2. אם  $f$  הולומורפית ב- $\infty$  ויש לה קוטב ב- $\infty$  אז  $f$  פולינום

3. אם  $f$  הולומורפית ב- $\mathbb{C}^*$  וילכל,  $j$ ,  $a_j$  היא קוטב מסדר  $j$ , אז  $f$  פונקציה רצינלית

מסקנה 2.3.2: אם  $f \in \text{Hol}(\mathbb{C})$  אז  $f$  לא רצינלית, או ל- $f$  יש סינגולריות עיקריות ב- $\infty$ .

שאירות

**הגדה 2.3.8 (שארית בנקודה):** יהיו  $a \in \mathbb{C}$  ו- $f \in \text{Hol}(U_a^*)$ . נקבע  $0 < \varepsilon > 0$  כך ש- $\varepsilon > |z - a| < \varepsilon$  נגדיות את השארית ב- $a$  להיות

$$\text{res}_f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=\varepsilon} f(z) dz$$

**משפט 2.3.5 (משפט השארית של קושי):** יהיו  $G \subset \mathbb{C}$  תחום טוב,  $f \in \text{Hol}((G \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_N\}) \cap (\overline{G} \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_N\}))$  ו- $a \in G$  השארית של קושי:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} f(z) dz = \sum_{j=1}^N \text{res}_f(a_j)$$

**טענה 2.3.1:** אם  $\varphi(a) = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}$  אז  $\psi(a) = 0, \varphi(a) \neq 0, \psi'(a) \neq 0$  מקיימת  $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$

**טענה 2.3.2:** אם  $a \in G \setminus \{a\}$  ו- $a$  קוטב מסדר  $n$ , אז

$$\text{res}_f(a) = \frac{((z-a)^n f(z))^{n-1}(a)}{(n-1)!}$$

**הגדה 2.3.9 (שארית באינסוף):** תהי  $f$  הולומורפית בסביבה של  $\infty$  (כלומר  $f \in \text{Hol}(\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R_0\})$ ) ונגדיר

$$\text{res}_f(\infty) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} f(z) dz \quad (R > R_0)$$

**טענה 2.3.3:** השארית של גזורה לוגריתמית היא הסדר של האפס.

בוחרה לחישוב אינטגרלים ממשיים

**למה 2.3.1:** אם  $\varphi$  פונקציה הולומורפית המקיימת  $\{Im(z) \geq 0\} \rightarrow \mathbb{C}$

$$\limsup_{R \rightarrow \infty} \max_{\{|z|=R\}} |z \cdot \varphi(z)| < \infty$$

או לכל  $\lambda > 0$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\{|z|=R, Im(z)>0\}} e^{i\lambda z} \varphi(z) dz = 0$$

## 2.4 עקרונות גיאומטריים

עקרון הארגומנט

**משפט 2.4.1** (עקרון הארגומנט): תהיי  $\bar{G} \subseteq G$  ו-  $G_1 \in G$  ו-  $f \in \text{Mer}(G)$  תחום טוב. נניח כי על  $\partial G_1$  לא אין קטבים או אפסים, אז

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G_1} \frac{f'}{f} dz = \#(Z_f \cap G_1) - \#(P_f \cap G_1)$$

כאשר  $Z_f$  האפסים של  $f$  ו-  $P_f$  הקטבים של  $f$  (כולל ריבויים).

**лемה 2.4.1** (לוגריתם רציף): יהיו  $I \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  העתקה רציפה, או קיימת העתקה  $C \setminus h : I \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  ותהי  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$  ונתנו  $\psi : I \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  כך ש-  $e^\psi = h$ . נגידר את השינוי/הגידול של הארגומנט ב-  $f$  לאורך  $\gamma$  להיות ייחידה עד כדי  $2\pi i\mathbb{Z}$ .

**הגדרה 2.4.1** (השינוי של הארגומנט): תהיי  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  ונתנו  $\psi : I \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  כך ש-  $e^\psi = f \circ \gamma$ . נגידר את השינוי/הגידול של הארגומנט ב-  $f$  לאורך  $\gamma$  להיות מהלמה של הלוגריתם הרציף ראיינו שקיים  $i\Delta_\gamma f := \Delta_\gamma \log(f) = \psi(b) - \psi(a) \in 2\pi\mathbb{Z}$

משפט רושה

**משפט 2.4.2** (משפט רושה): תהיינה  $f, g \in \text{Hol}(G)$  ותהיי  $H \subseteq G$  כך ש-  $H \subseteq \bar{G}$  ותהיי  $H$  תחום טוב. נניח שלכל  $z \in \partial H$  מקיימים  $|g(z)| \leq |f(z)|$ , אז

$$\#(Z_{f+g} \cap H) = \#(Z_f \cap H)$$

**מסקנה 2.4.1** (משפט גאוס): תהיי  $f, g \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  ונניח  $f + g = a_n z^n$  כאשר  $a_n \in \mathbb{C}$ . אז לא יש  $n$  אפסים (כולל ריבוי).

**מסקנה 2.4.2** (ריבויים בטבעת): בהתחם לתנאי משפט רושה, ובහינתן  $\{z \in \mathbb{C} \mid a < |z| < b\}$  טבעת, אז  $A = \{z \in \mathbb{C} \mid a < |z| < b\} = \#\{\text{zeroes in } a < |z| < b\} - \#\{\text{zeroes in } a < |z|\}$

**משפט 2.4.3** (העתקה מקומית): תהיי  $f \in \text{Hol}(G)$  לא קבועה, ו-  $w_0 \in G$ . הינה  $m$  סדר ההטאפסות של  $f$  בנקודה  $w_0$ . אז קיימים  $\delta > 0$  ו-  $B(w_0, \delta) = w$  בדיקות  $\varepsilon < \varepsilon_0$  בכדור ( $\varepsilon$ ) כך שלכל  $z \in B(w_0, \delta) \setminus \{w_0\}$  יש פתרונות שונים למשוואת  $f(z) = w$ .

אינדקס ליפוף

**הגדרה 2.4.2** (אינדקס ליפוף): תהיי  $I \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ :  $\gamma$  עקומה סגורה, נגידר את אינדקס הליפוף של  $\gamma$  להיות

$$\text{ind}_\gamma(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{\zeta - z} d\zeta$$

:**משפט 2.4.4**

הפונקציה  $\text{ind}_\gamma(\cdot) : \mathbb{C} \setminus \gamma \rightarrow \mathbb{Z}$  היא רציפה .1

$\text{ind}_\gamma(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} \text{ind}_\gamma(z) = 0$  .2

אם  $\Omega_j \subseteq \mathbb{C} \setminus \gamma$  נאشر  $\Omega_j$  המרכיבי קשיירות של  $\gamma$  ב-  $\mathbb{C}$  אז  $\text{ind}_\gamma(\Omega_j) = 0$  והוא אינדקס קשיירות הלא חסום .3

**הגדרה 2.4.3** (מעגל מוככל): תהיי  $\gamma$  עקומה גזירה ברציפות למקוטעין. נאמר ש-  $\gamma$  היא מעגל מוככל אם היא פשוטה וסגורה.

**משפט 2.4.5** (משפט קושי גרסה מוככלת): אם  $G \subseteq \mathbb{C}$  תחום ו-  $f \in \text{Hol}(G)$  ממעגל מוככל המקיימים  $\text{ind}_\gamma(z) = 0$  לכל  $z \notin \bar{G}$  אז  $\int_\gamma f(z) dz = 0$

$$\int_\gamma f(z) dz = 0$$

מסקנה 2.4.3: לכל  $\gamma$  ו-  $z \in G \setminus \gamma$   $f \in \text{Hol}(G)$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} dz = \text{ind}_{\gamma}(z) \cdot f(z)$$

הлемה של שורץ

лемה 2.4.2 (הлемה של שורץ): תהיו  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  פונקציה לא קבוצה הולומורפית המקיימת  $f(0) = 0$ , אז

$$|f(z)| < |z| . 1$$

$$|f'(0)| \leq 1 . 2$$

אם קיים  $z_0 \neq 0$  כך ש-  $f(z) = \lambda \cdot z$  או  $|f'(0)| = 1$  או  $|f(z_0)| = |z_0|$  הוא סיבוב 3.

: (Aut( $\mathbb{D}$ )) 2.4.4 הגדרה

$$\text{Aut}(\mathbb{D}) := \{f \in \text{Hol}(\mathbb{D}), \mathbb{D} \text{ היא חד-חד ערכית ועל } f\}$$

משפט 2.4.6:  $a \in \mathbb{D}, |\lambda| = 1$  עבור  $f \in \text{Aut}(\mathbb{D}) \iff f(z) = \lambda \cdot \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$

משפט 2.4.7 (משפט שורץ-פיק): תהיו  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  לא קבוצה הולומורפית 1. כל  $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$  מקיימים

$$\left| \frac{f(z_2) - f(z_1)}{1 - f(z_2)\overline{f(z_1)}} \right| \leq \left| \frac{z_2 - z_1}{1 - z_2\overline{z_1}} \right|$$

2. כל  $z \in \mathbb{D}$  מקיים

$$|f'(z)| \leq \frac{1 - |f(z)|^2}{1 - |z|^2}$$

3. אם באחת הנקודות יש שוויון באחד משני המקרים הקודמים,  $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$

משפט העתקה של רימן

הגדרה 2.4.5 (תחום פשוט קשר): תחום  $G \subset \mathbb{C}$  נקרא פשוט קשר אם המשלים של  $G$  ב-  $\mathbb{C} \setminus \{ \infty \}$  הוא קשור.

משפט 2.4.8: הבאים שקולים

1.  $G$  פשוט קשר

2. האינטגרל של כל פונקציה הולומורפית ב-  $G$  לאורך מסילה סגורה וחילקה לנקוטין הוא אפס

3. כל פונקציה הולומורפית ב-  $G$  היא נגזרת של פונקציה הולומורפית

4. כל פונקציה הולומורפית ב-  $G$  שלא מתאפשרה היא בעלת לוגריתם

5. כל פונקציה הולומורפית ב-  $G$  שלא מתאפשרה היא בעלת שורש

6. לכל מסילה סגורה, חילקה לנקוטין ב-  $G$ , אינדקס הליפוף של כל נקודה שאינה ב-  $G$  הוא אפס

משפט 2.4.9 (משפט העתקה של רימן): יהיו  $G \subset \mathbb{C}$  תחום פשוט קשר כך ש-  $\mathbb{C} \setminus G \neq \emptyset$  ו-  $a \in G$ . אז קיימת העתקה קונפורמית (פונקציה הולומורפית, חד-חד ערכית ועל שההופכיה שלה היא הולומורפית, נקרא *biholomorphic*) יהideal  $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow G$  ייחידה  $\varphi(0) = a$  והמקיימת  $\varphi'(0) > 0$ .

משפט 2.4.10 (משפט מונטל): כל משפהה מקומית חסומה של פונקציות הולומורפיות  $\mathcal{F}$  המוגדרת על תחום  $G$  מדוירה משפהה נורמות, ככלומר לכל  $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$  יש תת-סדרה מתכנסה.

משפט 2.4.11 (משפט הורוויץ): תהיו  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  סדרת פונקציות הולומורפיות המתכנסת במידה שווה מקומית בתחום  $G$  לפונקציה  $f$  שאינה קבועה אפס.

אם ל-  $f$  יש אפס מסדר  $m$  בנקודה  $z_0$  או  $z_0 > 0$  מספיק קטן ולכל  $n$  מספיק גדול, לפונקציה  $f_n$  יש בידוק  $m$  אפסים בדיסק ( $\varepsilon$  כולל ריבוי). בנוסף, האפסים הללו מתכנסים לנקודה  $z_0$  כאשר  $n \rightarrow \infty$ .

### 3 דברים שימושים בפתרונותות תרגילים

#### 3.1 למצוא כמה פתרונות (כולל ריבועים)

שאלות קלאסיות לשימוש משפט רושה (אני להיז) ומשפט רושה בטבעת (אני להיז)

**דוגמה 3.1.1:** נמצא כמה פתרונות (כולל ריבועים) יש למשוואות בתחוםים הנתונים.

1.  $\mathbb{D}$  בדיק היחידה  $z^7 - 5z^4 + z^2 - 2 = 0$
2.  $\{z \mid 1 < |z| < 2\}$  בטבעת  $z^4 + 3z = 1$
3.  $n \in \mathbb{N} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid Re(z) < 1\}$  בחצי מישור  $e^z = 3z^n$

פתרון:

$$1. \text{ נגדיר } f(z) = z^4 + z^2 - 2 \text{ כאשר } |z| = 1 \text{ ו- } g(z) = -5z^4 + z^2 - 2 \text{ מתקיים}$$

$$|g(z)| = |-5z^4| = 5 \quad |f(z)| = |z^4 + z^2 - 2| = 0$$

או מתקיים  $|f(z)| \leq |g(z)|$  ול- $g$  יש אפס אחד בראשית בריבוי 4 ולכון משפט רושה קיבל שיש למשוואת 4 פתרונות.

2. מהמסקנה אודות ריבועים בטבעת, נחלק לשתי בדיקות

$$\#\{\text{zeroes in } 1 < |z| < 2\} = \#\{\text{zeroes in } |z| < 2\} - \#\{\text{zeroes in } 1 < |z|\}$$

$$1. \text{ על } 2 = |z|, \text{ נכתב } f(z) = z^4 + (3z - 1) \text{ כאשר } f(z) = 3z - 1 \text{ ו- } g(z) = z^4 \text{ ומתקיים}$$

$$|g(z)| = |z|^4 = 16 \quad |f(z)| = |3z - 1| = 5$$

כלומר  $|f(z)| < |g(z)|$  ולכון תנאי משפט רושה מתקיימים ולכון  $1 < |z| < 2$  יש את אותה כמות אפסים כמו לו- $g$  ול- $f$  יש אפס אחד בראשית, אבל עט הכלפיות יש לו ארבע.

$$2. \text{ על } 1 = |z| \text{ נכתב } f(z) = 3z + (z^4 - 1) \text{ כאשר } f(z) = z^4 - 1 \text{ ו- } g(z) = 3z \text{ ומתקיים}$$

$$|g(z)| = |3z| = 3 \quad |f(z)| = |z^4 - 1| = 0$$

כלומר  $|f(z)| < |g(z)|$  ולכון תנאי משפט רושה מתקיימים ולכון  $1 < |z| < 2$  יש את אותה כמות אפסים כמו לו- $g$  ול- $f$  יש אפס אחד בראשית עם ריבוי אחד.

בסק-הכל קיבלנו  $3 - 4 = -1$  כלומר 3 פתרונות למשוואת הנתונה.

$$3. \text{ נגדיר } F(z) = 3z^n - e^z \text{ ונתקל קודם כל על דיסק היחידה, על } |z| = 1 \text{ מתקיים}$$

$$|f(z)| = |e^z| = e < 3 \quad |g(z)| = |3z^n| = 3^n = 3$$

ושוב מתנאי משפט רושה מתקיים  $|f(z)| < |g(z)|$  ולכון יש להם את אותה כמות אפסים, ול- $g$  יש ריבוי אחד בראשית עם ריבוי  $n$ . נבחן מה קורה אם  $1 \geq |z| \geq 1$ , אז  $Re(z) < 1$ .

$$|f(z)| = |3z^n| \geq 3 \quad |g(z)| = |e^z| = e^{Re(z)} < e < 3$$

כלומר

$$|3z^n| > |e^z| \implies 3z^n - e^z \neq 0$$

כלומר אין התאפסויות בתחום זהה בכלל.

לסיכום יש לנו  $n$  אפסים, קרי  $n$  פתרונות.

□

## 3.2 טורי לורן

### פיתוחים שימושיים

$$|w| < 1, \frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n \quad .1$$

$$\frac{1}{1+w} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n w^n \quad .2$$

$$\frac{1}{(1-w)^k} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k-1} w^n \quad .3$$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad .4$$

$$|w| < 1, (1+w) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{w^n}{n} \quad .5$$

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad .6$$

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad .7$$

$$|w| < 1, (1+w)^k \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} w^n \quad .8$$

### How To Guide

זכור שטורן לורן הוא חமדן/זילן, ולכן מתכנס בכל טבעת שבו הוא רק יכול. אז בגודל זה בכל תחום שבו הוא מוגדר היטב (כלומר, הנקודות הסינגולריות שלו הן הנקודות קפיצות). את הנקודות הסינגולריות נקבע לפי המאפיינים (אני לחיין).

לפעמים נרצה לעבור בשיטה של מרימים ("שיטת מקדים לא נקבעים") עם הפונקציות הרצינגליות, לדוגמה

$$\begin{aligned} \frac{z^2}{(z-2)(z-4)} &= \frac{z^2}{z^2 - 6z + 8} = \frac{z^2 - 6z + 8 + 6z - 8}{z^2 - 6z + 8} = 1 + \frac{-6z + 8}{z^2 - 6z + 8} \\ \Rightarrow \frac{-6z + 8}{z^2 - 6z + 8} &= \frac{A}{z-2} + \frac{B}{z-4} = \frac{A(z-4) + B(z-2)}{z^2 - 6z + 8} = \frac{z(A+B) - 2(B+2A)}{z^2 - 6z + 8} \\ &\left\{ \begin{array}{l} A+B=6 \\ -2B-4A=-8 \end{array} \right. \end{aligned}$$

פותרים את המערכת המשוואות, מקבלים פונקציה ומפתחים בהתאם: משתמשים בהגבולות כדי לחסום ולהגיע לטרורים ידועים. תמיד נרצה להגיע לאחד מהטררים שרשום לעיל כי הם הכיוון.

### 3.3 כשתה מבולבל – הרם קושי אל-על

יש לנו 3 מסקנות חזקות מאוד ממשפט קושי

1. **משפט 3.3.1** (נוסחת אינטגרל קושי): יהיו  $G \subset \mathbb{C}$  תחום טוב,  $\gamma = \partial G$  ותהיה  $f \in \text{Hol}(G) \cap C(\overline{G})$ .

$$\int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw = \begin{cases} 2\pi i f(z) & z \in G \\ 0 & z \notin \overline{G} \end{cases}$$

כאשר האינטגרל הצד שמאל נקרא אינטגרל קושי.

2. **משפט 3.3.2** (נוסחת אינטגרל קושי לנגורת): תהיה  $\gamma$  איחוד סופי של מסילות  $C^1$  ותהיה  $\varphi \in C(\gamma)$ . נגדיר

$$F(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(w)}{w-z} dw$$

ואז  $F \in \text{Hol}(\mathbb{C} \setminus \gamma)$

$$F^n(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(w)}{(w-z)^{n+1}} dw$$

3. **משפט 3.3.3** (אי-שוויון קושי): תהיה  $f \in \text{Hol}(B(z_0, R))$  או לכל  $n \in \mathbb{N}$

$$|f^n(z)| = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\{|w-z|=\rho\}} \frac{|f(w)|}{|w-z|^{n+1}} dw \leq \left| \frac{n!}{2\pi} \right| \frac{\max_{|w-z|=R} |f|}{R^{n+1}} \cdot L(\{|z-w|=R\}) = \frac{n!}{R^n} \max_{|w-z|} |f|$$

המ כולם עוזרים לנו לקבל מידע על הפונקציות גם כשהאנחנו לא יודעים עליהם כלום.

### 3.4 תוכיחי קיום/אי קיום