פתרון מטלה 09 — חשבון אינפיניטסימלי 3, 80415

11 ביוני 2025

שאלה 1

תהיי $H \in M_{k\times k}(\mathbb{R})$ מטריצה סימטרית ונוכיח כי קיים ל־H ערך עצמי ממשי.

הוכחה: נעזר בהדרכה, ספירת היחידה נתונה על־ידי $S_1 = \left\{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x\| = 1\right\}$, נגדיר את $q(x)$ הפונקציה שלנו ואת פונקציית האילוץ לכך ש־$x \in S_1$ על־ידי

$$q(x) = \langle Hx, x\rangle, g(x) = \|x\|^2 - 1 = 0$$

ממשפט כופלי לגראנז' נקבל שאנחנו בוחנים את המערכת

$$\nabla q(x) = \lambda \nabla g(x)$$

נחשב את הגרדיאנטים, מהיות H מטריצה סימטרית נקבל מגזירת מכפלה פנימית

$$\nabla q(x) = \nabla(\langle Hx, x\rangle) = \nabla(x^T Hx) = Hx + H^T x = Hx + Hx = 2Hx$$
$$\nabla g(x) = \nabla(x^T x - 1) = 2x$$

ממשפט כופלי לגראנז' נקבל שמתקיים

$$2Hx = \lambda \cdot 2x \iff Hx = \lambda x$$

זה בידיוק הגדרה ש־x הוא וקטור עצמי של H, אז כל נקודת קיצון של $q(x)$ על ספירת היחידה היא בידיוק x שהוא וקטור עצמי של H ו־λ הוא הערך העצמי.

נשאר להראות שהערך העצמי הוא ממשי:

נשים לב ש־$q(x) = x^T Hx \in \mathbb{R}$ לכל $x \in \mathbb{R}^k$ וזו פונקציה רציפה (בגלל ש־H סימטרית ממשית) ו־$\lambda \in \mathbb{R}$, ופונקציה רציפה על מרחבת קומפקטית מקבלת מקסימום אז כל הערכים העצמיים הם ממשיים. $\square$

שאלה 2

תהיי $B \subseteq \mathbb{R}^k$ פתוחה ו־$f : B \to \mathbb{R}$ גזירה פעמיים ברציפות.

סעיף א'

נוכיח שלכל $\varepsilon > 0$ ומסילה גזירה פעמיים ברציפות $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to B$ כך ש־$\gamma(0) = a$ ו־$\gamma'(0) = v$ מתקיים

$$(f \circ \gamma)''(0) = v^t H f_a v + Df_a(\gamma''(0))$$

הוכחה: יהי $\varepsilon > 0$ ותהיי γ המסילה הנתונה, ניזכר במה שראינו במטלה 5:

1. $D(\langle f, g\rangle) = \langle Df_x, g(x)\rangle + \langle f(x), Dg_x\rangle$
2. $Df_x(v) = \langle \nabla f_x, v\rangle$

ולכן מתקיים מכלל השרשרת

$$(f \circ \gamma)'(t) = Df_{\gamma(t)} \circ \gamma'(t) \mid_{t=0} \underset{\text{נתון}}{=} Df_a \circ v = \langle \nabla f(x), v\rangle$$

נסמן $\nabla f(a) = h(a), v = g(a)$ ואז עם כל מה שראינו

$$(f \circ \gamma)''(0) = D\langle \nabla f(a), v\rangle = D\langle h, g\rangle = \langle Dh_a, g(a)\rangle + \rangle h(a), Dg_a\rangle \underset{\substack{Dg_a = (\gamma'(0)) = \gamma''(0) \\ Dh_a = D(\nabla f(a)) = Hf_a(v)}}{=} \langle Hf_a(v), v\rangle + \langle \nabla f(a), \gamma''(0)\rangle$$

וגם

$$\langle Hf_a(v), v\rangle + \langle \nabla f(a), \gamma''(0)\rangle = v^t H f_a v + Df_a(\gamma''(0))$$

$\square$

סעיף ב'

תהיי $g : B \to \mathbb{R}^n$ גזירה פעמיים ברציפות עבור $n + 1 \leq k$. נגדיר $A = g^{-1}(\{0\})$ ונסמן ב־$\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \times B \to \mathbb{R}$, הלגראנז'יאן של f ביחס ל־g.
תהיי $(\lambda, a) \in \mathbb{R}^n \times A$ נקודה קריטית של $\mathcal{L}$ כך ש־Dg_a מדרגה n.
נוכיח כי לכל $\varepsilon > 0$ ומסילה גזירה פעמיים ברציפות $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to A$ כך ש־$\gamma(0) = a$ ו־$\gamma'(0) = v$ מתקיים

$$(f \circ \gamma)''(0) = v^t H \mathcal{L}_a^\lambda v \ \left(\mathcal{L}^\lambda(x) = \mathcal{L}(\lambda, x)\right)$$

הוכחה: מהסעיף הקודם $(f \circ \gamma)''(0) = v^t H f_a v + Df_a(\gamma''(0)) = (\star)$.
מהגדרת הלגראנז'יאן $\mathcal{L}(\lambda, x) = f(x) - \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i(x)$ ובנקודה הקריטית (λ, a) מתקיים $D\mathcal{L}_a^\lambda = 0$, משמע

$$Df_a = \sum_{i=1}^n \lambda_i Dg_{i_a} \iff \nabla f(a) = -\sum_{i=1}^n \lambda_i Dg_{i_a}(\gamma''(0))$$

היות ו־$\gamma(t) \in A, A = g^{-1}(\{0\})$, לכל $i \in [n]$ מתקיים $g_i(\gamma(t)) = 0$ ומכך ש־$g \in C^2$ אז היא גזירה ברציפות פעמיים אל הפונקציה הקבועה 0 ומסעיף א'

$$(g_i \circ \gamma)''(t) = v^t H g_{i_a} v + Dg_{i_a}(\gamma''(0)) = 0 \Rightarrow Dg_{i_a}(\gamma''(0)) = -v^t H g_{i_a} v$$

ומ־$(\star)$ נקבל

$$v^t H f_a v + \sum_{i=1}^n \lambda_i Dg_{i_a}(\gamma''(0)) = v^t H f_a v - \sum_{i=1}^n \lambda_i v^t H g_{i_a} v = v^t \underbrace{\left(H f_a - \sum_{i=1}^n \lambda_i H g_{i_a}\right)}_{\mathcal{L}_a^\lambda} v = v^t H \mathcal{L}_a^\lambda v$$

ולכן $(f \circ \gamma)''(0) = v^t H \mathcal{L}_a^\lambda v$. $\square$

שאלה 3

תהיי $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ הפונקציה הנתונה על־ידי $f(x,y,z)=12x+y^2-xz$.
נמצא את הנקודות הקריטיות של f תחת האילוץ של $z=x^2+y^2$ ונסווגן.
פתרון: נגדיר $g(x,y,z):\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ על־ידי $g(x,y,z)=x^2+y^2-z$ ומתקיים $\nabla g=(2x,2y,-1)$ ולכל $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ מתקיים $\nabla g(x,y,z)\neq 0$.
הלגראנז'יאן נתון על־ידי

$$12x+y^2-xz-\lambda x^2-\lambda y^2+\lambda z$$

נמצא נקודות חשודות לקיצון של הלגראנז'יאן

$$\nabla\mathcal{L}_{(\lambda,x,y,z)}=\left(-x^2-y^2+z,12-2x\lambda-z,2y-2y\lambda,-x+\lambda\right)$$

נחפש מתי הביטוי מתאפס אבל קודם כל נשים לב שמתקיים

$$-x+\lambda=0\Rightarrow x=\lambda$$

וזה גורר

$$(1)\ 2y-2y\lambda=0\iff 2y=2y\lambda\iff y=yx$$
$$(2)\ 12-2x\lambda-z=0\iff 12-2x^2-z=0\iff z=12-2x^2$$
$$(3)\ -x^2-y^2+z=0\iff -x^2-y^2+12-2x^2=0\iff y^2=-3x^2+12$$

מ־(1) נובע $y=0$ או ש־$x=1$:

1. אם $x=1$ אז מ־(2) נובע $z=12-2=10$ ומ־(3) נובע $y^2=-3+12=9\Rightarrow y=\pm 3$ וכמובן $\lambda=1$
2. אם $y=0$ אז מ־(3) נובע $3x^2=12\Rightarrow x=\pm 2$ ולכן מ־(2) נקבל $z=12-2(\pm 2)^2=12-8=4$ וכמובן $\lambda=\pm 2$

אז הנקודות החשודות שלנו הן (במבנה של (λ,x,y,z))

$$(1,1,\pm 3,10),\ \ (\pm 2,\pm 2,0,4)$$

ראינו ששהסיאן המוגבל מוגדר באמצעות הנגזרת השנייה של להגראנז'יאן

$$H\mathcal{L}_{(\lambda,x,y,z)}=\begin{pmatrix}0 & -Dg_a\\ -Dg_a^t & H\mathcal{L}_a^{\lambda}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z}\\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial x^2} & \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial x\partial z}\\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial y^2} & \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial y\partial z}\\ \frac{\partial g}{\partial z} & \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial z\partial x} & \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial z\partial y} & \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial z^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2x & 2y & -1\\ 2x & -2\lambda & 0 & -1\\ 2y & 0 & 2-2\lambda & 0\\ -1 & -1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

נבחן כל נקודה בנפרד ונעבוד כמו בתרגול, $n=1,H=3$ ונצטרך לבדוק את המינורים השלישי והרביעי:

$$\hat{H}=H\mathcal{L}_{(2,2,0,4)}=\begin{pmatrix}0 & 4 & 0 & -1\\ 4 & -4 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -2 & 0\\ -1 & -1 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow\det\hat{H}=-24,\widehat{H_3}=\begin{pmatrix}0 & 4 & 0\\ 4 & -4 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(\widehat{H_3}\right)=0\cdot 8\cdot(-4)\cdot(-8)=32$$

אז $\det\left(\hat{H}\right)<0,\det\left(\widehat{H_3}\right)>0$ נקבל מהאיפיון מהתרגול ש־$(2,0,4)$ נקודת מקסימום מקומי.

$$\hat{H}=H\mathcal{L}_{(-2,-2,0,4)}=\begin{pmatrix}0 & -4 & 0 & -1\\ -4 & 4 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 6 & 0\\ -1 & -1 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow\det\hat{H}=-72,\widehat{H_3}=\begin{pmatrix}0 & -4 & 0\\ -4 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(\widehat{H_3}\right)=-96$$

אז $\det\left(\hat{H}\right)<0,\det\left(\widehat{H_3}\right)<0$ נקבל מהאיפיון מהתרגול ש־$(-2,0,4)$ נקודת מינימום מקומי.

$$\hat{H} = H\mathcal{L}_{(1,1,3,10)} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 & -1 \\ 2 & -2 & 0 & -1 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det \hat{H} = 36, \widehat{H_3} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 2 & -2 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det\left(\widehat{H_3}\right) = 72$$

אז $\det\left(\widehat{H_3}\right) > 0, \det\left(\hat{H}\right) > 0$ נקבל מהאיפיון מהתרגול ש-$(1,3,10)$ נקודת אוכף.

$$\hat{H} = H\mathcal{L}_{(1,1,-3,10)} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -6 & -1 \\ 2 & -2 & 0 & -1 \\ -6 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det \hat{H} = 72, \widehat{H_3} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -6 \\ 2 & -2 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det\left(\widehat{H_3}\right) = 72$$

אז $\det\left(\widehat{H_3}\right) > 0, \det\left(\hat{H}\right) > 0$ נקבל מהאיפיון מהתרגול ש-$(1,-3,10)$ נקודת אוכף. $\square$

שאלה 4

תהיי $A \subseteq \mathbb{R}^k$ תיבה סגורה ו־$f : A \to \mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית.

סעיף א'

נוכיח שמתקיים לכל $c \in \mathbb{R}$ שהפונקציה cf אינטגרבילית ומתקיים

$$\int_A (cf)(x)dx = c\int_A f(x)dx$$

הוכחה: יהי $\varepsilon > 0$. f אינטגרבילית ולכן קיימת חלוקה P של A עבורה מתקיים $\overline{S_f}(f,P) - \underline{S_f}(f,P) < \varepsilon$.
נסמן ב־$\overline{S}_{cf}(P), \underline{S_{cf}}(P)$ את הסכום העליון והתחתון של cf המתאימים לחלוקה P.
אם $c = 0$ אז הטענה טריוויאלית כי פונקציית ה־0 אינטגרבילית, ולכן נחלק לשני מקרים $c > 0, c < 0$.
אם $c > 0$, אנחנו יודעים שלכל קבוצה חסומה B גם $c \cdot B$ חסומה ומתקיים

$$\sup(c\cdot B) = c\cdot\sup(B),\ \ \inf(c\cdot B) = c\cdot\inf(B)$$

ולכן

$$\overline{S_{cf}}(P) = c\cdot\overline{S_f}(P),\ \ \underline{S_{cf}}(P) = c\cdot\underline{S_f}(P)$$

השיוונות הללו נכונים לכל חלוקה P, אז נסמן $(\star)$

$$L_{cf} = \left\{\underline{S_{cf}}(cf,P)\mid \text{חלוקה של } A\ \ P\right\} = c\cdot\left\{\underline{S_f}(f,P)\mid \text{חלוקה של } A\ \ P\right\} = c\cdot L_f$$
$$U_{cf} = \left\{\overline{S_{cf}}(cf,P)\mid \text{חלוקה של } A\ \ P\right\} = c\cdot\left\{\overline{S_f}(f,P)\mid \text{חלוקה של } A\ \ P\right\} = c\cdot U_f$$

f אינטגרבילית ולכן מתקיים $\underline{\int}_A f = \overline{\int}_A f$, משמע מתקיים

$$\inf\left(U_f\right) = \sup\left(L_f\right) = \int_A f$$

ולכן גם

$$c\cdot\inf\left(U_f\right) = c\cdot\sup\left(L_f\right) = c\cdot\int_A f$$

אבל ראינו שמתקיים

$$c\cdot\inf\left(U_f\right) = \inf\left(c\cdot U_f\right),\ \ c\cdot\sup\left(L_f\right) = \sup\left(c\cdot L_f\right)$$

ולכן גם מתקיים

$$\inf\left(c\cdot U_f\right) = \sup\left(c\cdot L_f\right) = c\cdot\int_A f(x)dx \underset{(\star)}{\Rightarrow} \inf\left(U_{cf}\right) = \sup\left(L_{cf}\right) = c\cdot\int_A f(x)dx$$

ולכן עבור $c > 0$ אנחנו מקבלים ש־$c\cdot f$ אינטגרבילית על A ושמתקיים

$$\int_A c\cdot f(x)dx = \inf\left(c\cdot U_f\right) = \sup\left(c\cdot L_f\right) = c\cdot\int_A f(x)dx$$

נשאר להראות עבור $c < 0$. ההוכחה זהה לחלוטין, למעט הנקודות הבאות:
1. עבור קבוצה חסומה B, הקבוצה $c\cdot B$ גם חסומה ומתקיים

$$\sup(c\cdot B) = c\cdot\inf(B),\ \ \inf(c\cdot A) = c\cdot\sup(B)$$

2. החלוקה מתחלפת (אינפה לסופרמה, סופרמה לאינפמה)

$$\overline{S_{cf}}(P) = c\cdot\underline{S_f}(P),\ \ \underline{S_{cf}}(P) = c\cdot\overline{S_f}(P)$$

שאר ההוכחה זהה. $\square$

סעיף ב'

הפונקציה הקבועה 1 אינטגרבילית על A ומתקיים

$$\int_A 1dx = V(A)$$

הוכחה: פונקציה קבועה היא פונקציה רציפה ופונקציה רציפה היא אינטגרבילית ולכן $\int_A 1dx$ זה ביטוי מוגדר היטב.
אז הפונקציה הקבועה 1 אינטגרבילית, ולכן

$$\underline{\int}_A 1dx = \overline{\int}_A 1dx$$

שזה אומר

$$\sup\{\underline{S}(f,P) \mid A \text{ חלוקה של } P\} = \inf\Big\{\overline{S}(f,P) \mid A \text{ חלוקה של } P\Big\}$$

אבל אנחנו יודעים שלכל חלוקה P של A ההגדרה אומרת שמתקיים

$$\overline{S}(f,P) = \sum_{A_i \in P} M_i V(A_i) = \sum_{A_i \in P} \sup_{x \in A_i} 1V(A_i) = \sum_{A_i \in P} 1V(A_i) = V(A)$$

בפרט גם $\inf\Big\{\overline{S}(f,P) \mid A \text{ חלוקה של } P\Big\} = V(A)$ כי זה נכון לכל חלוקה.
עם כל מה שמצאנו לעיל אכן מתקיים $\int_A 1dx = V(A)$. $\square$

סעיף ג'

אם $|f(x)| \le M$ לכל $x \in A$ עבור $M \ge 0$ אז מתקיים

$$\int_A f(x)dx \le M \cdot V(A)$$

הוכחה: נשים לב שמשילוב שני הסעיפים הקודמים נקבל שמתקיים עבור כל פונקציה קבועה עם פרמטר $M \ge 0$ מתקיים

$$\int_A Mdx = M\int_A 1dx = M \cdot V(A), \quad \int -Mdx = -M\int_A 1dx = -M \cdot V(A)$$

מכך שמתקיים $|f(x)| \le M$ נובע שמתקיים $-M \le f(x) \le M$, בפרט אם ניקח אינטגרל על כל האגפים נקבל

$$\int_A -Mdx \le \int_A f(x)dx \le \int_A Mdx$$

משמע מתקיים

$$\int_A f(x)dx \le M \cdot V(A)$$

נסביר למה מותר לנו לקחת אינטגרל: בתרגול ראינו שאם הפונקציות f,g אינטגרבליות על A מתקיים

$$\int_A (f+g)dx = \int_A f(x)dx + \int_A g(x)dx$$

בפרט ממה שראינו בסעיף א' זה נכון גם עבור המקרה בו

$$\int_A (\alpha f + \beta g)dx = \int_A \alpha f(x)dx + \int_A \beta g(x)dx = \alpha\int_A f(x) + \beta\int_A g(x)$$

ויחד עם ההצדקה מסעיף א' ראינו שמתקיים גם שאם $f(x) \le g(x)$ אז מתקיים

$$\int_A f(x)dx \le \int_A g(x)dx$$

ולכן לקחת אינטגרל הייתה פעולה חוקית על שני האגפים וקיבלנו שאכן מתקיים $\int_A f(x)dx \le M \cdot V(A)$. $\square$

שאלה 5

תהיינה $A, B \subseteq \mathbb{R}^k$ תיבות סגורות כך שמתקיים $A^\circ \cap B^\circ = \emptyset$ ו־$A \cup B$ גם היא תיבה סגורה.
נוכיח כי אם $f : A \cup B \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית אז גם $f|_A$ ו־$f|_B$ אינטגרביליות.
הוכחה: ראשית, f אינטגרבילית על $A \cup B$ ולכן בפרט זה אומר ש־f חסומה על $A \cup B$ ובפרט זה אומר שהיא חסומה על A ועל B בנפרד.
יהי $\varepsilon > 0$, נבחר חלוקות P_A ו־P_B כך שמתקיים

$$-\varepsilon + \int_A f(x) \leq \underline{S}(f, P_A) \leq \overline{S}(f, P_A) < \int_A f dx + \varepsilon$$

$$-\varepsilon + \int_B f(x) \leq \underline{S}(f, P_B) \leq \overline{S}(f, P_B) < \int_B f dx + \varepsilon$$

כעת, קיימת חלוקה P של $A \cup B$ שמכילה את P_A ואת P_B. למה? כי לכל תיבה $C \subseteq \mathbb{R}^k$ ו־$X \subseteq C$ קבוצה סופית, קיימת חלוקה $P = P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_d$ של C שמכילה את כל X, מהגדרת החלוקה.
אז מתקיים

$$\int_A f dx + \int_B f dx - 2\varepsilon < \underline{S}(f, P_A) + \underline{S}(f, P_B) \leq \underline{S}(f, P) \leq \overline{S}(f, P) \leq \overline{S}(f, P_A) + \overline{S}(f, P_B) < \int_A f dx + \int_B f dx + 2\varepsilon$$

אז לא רק ש־$f|_A$ ו־$f|_B$ אינטגרביליות זה גם משלים את הטענה מהכיתה

$$\int_{A \cup B} f dx = \int_A f dx + \int_B f dx$$

$\square$