עבודת בית 1: תכנון אלגוריתמים 2020

תאריך הגשה: 10.11.2019, 12:00 בצהריים ,תאים מספר 95,96 בקומת כניסה של בניין 37. כמו כן, יש להגיש עותק של העבודה במערכת ההגשה.

מתרגל אחראי: תומר סידי.

הוראות כלליות:

- כל עוד לא נאמר אחרת, כאשר הנכם מתבקשים לתאר אלגוריתם יש לספק את הבאות:
  1. תיאור מילולי של האלגוריתם.
  2. הוכחת נכונות.
  3. ניתוח זמן ריצה (**לא כולל** זמן הריצה של הקופסה השחורה).
- אלגוריתם עם זמן ריצה אקספוננציאלי לא נחשב יעיל ולכן בדרך כלל לא יתקבל.
- פתרון יש לכתוב רק בדף התשובות הנלווה לעבודה.

תזכורת:

רדוקציה הינה פתרון בעיה אחת בעזרת בעיה אחרת. באופן פורמלי (מהתרגול):

הגדרה פורמאלית ל- "רדוקציה":

תהיינה A ו-B זוג בעיות נתונות. רדוקציה מ- A לבעיה B היא זוג פונקציות f,g כך ש:

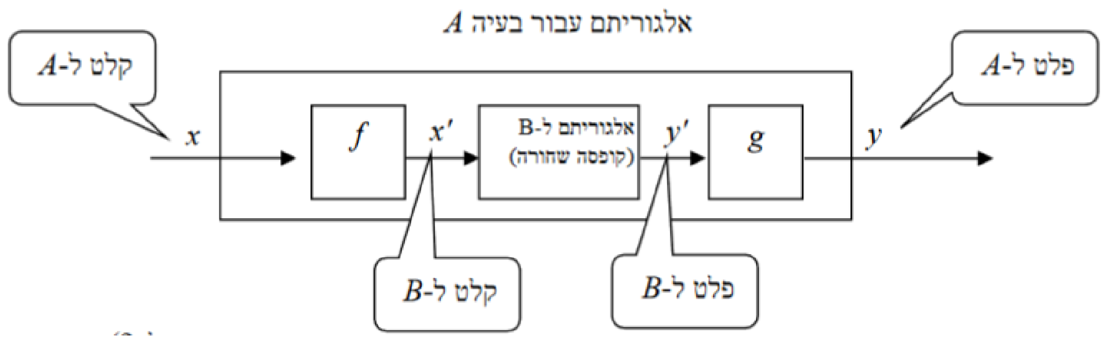
- f היא פונקצית המרת הקלט, המעבירה מופע של בעיה A למופע של בעיה B.
- g היא פונקצית המרת הפלט, המעבירה פתרון של בעיה B לפתרון של בעיה A.
- עבור מופע a לבעיה A, אם $B(f(a))$ הוא פתרון עבור המופע $f(a)$ תחת בעיה B אזי $g(B(f(a)))$ הוא פתרון למופע a תחת בעיה A. (הגדרת נכונות)

כדי להוכיח את נכונות הרדוקציה, יש להוכיח שהאלגוריתם הבא פותר את הבעיה A:

1. עבור מופע a לבעיה A, חשב את $f(a)$.
2. עבור המופע $f(a)$ לבעיה B, חשב את הפיתרון b.
3. חשב את $g(b)$ להיות הפתרון של A.

כאשר f הינה תרגום הקלט, g הינה תרגום הפלט והאלגוריתם לבעיה B הינו ה"קופסא השחורה".
לטובת העבודה, כשאנו מבקשים רדוקציה מבעיה A לבעיה B, יש לתת פתרון לבעיה A באמצעות קופסא שחורה של בעיה B.

הערה: ניתן להניח כי ממיר הפלט מכיר גם את הקלט המקורי a.



<u>שאלה 1 (25 נקודות)</u>

<u>תיאור מילולי של האלגוריתם:</u>
יהי G=(V,E) גרף מכוון ולא ממושקל וסדרה של קודקודים שונים (s,u_1, u_2,t) השייכים ל V.
<u>שלב תרגום הקלט:</u> נבנה את הגרף G'=(V',E') באופן הבא:
לכל $v\epsilon V$ ניצור 3 קודקודים v^1, v^2, v^3 השייכים ל V', למעט u_1 u_2 עבורם ניצור אך ורק u_1^1, u_2^2 השייכים ל V'.
לכל $(x,y) \in E$ כך ש $x,y \neq u_1$ וגם $x,y \neq u_2$ ניצור 3 קשתות $(x^1,y^1),(x^2,y^2),(x^3,y^3) \in E'$.
לכל $u_2 \neq v \in V$ כך ש $(v,u_1) \in E$ ניצור קשת אחת $(v^1,u_1^1) \in E'$.
לכל $u_2 \neq v \in V$ כך ש $(u_1,v) \in E$ ניצור 2 קשתות $(u_1^1,v^1),(u_1^1,v^2) \in E'$, אם $(u_1,u_2) \in E$ אז ניצור את
הקשת $(u_1^1,v^2) \in E'$.
לכל $u_1 \neq v \in V$ כך ש $(v,u_2) \in E$ ניצור קשת אחת $(v^2,u_2^2) \in E'$.
לכל $u_1 \neq v \in V$ כך ש $(u_2,v) \in E$ ניצור 2 קשתות $(u_2^2,v^2),(u_2^2,v^3) \in E'$.
<u>שלב הפעלת הקופסה השחורה:</u> נשלח לבעיית המסלול הקצר את המופע G'=(V',E') ואת $s^1, t^3 \in V'$.
<u>שלב תרגום הפלט:</u> נחזיר את הפלט שקיבלנו בשלב הקודם.
<u>הוכחת הנכונות:</u>
<u>טענה ראשית:</u> אורך המסלול הקצר ביותר ב – G מקודקוד s לקודקוד t העובר לפי הסדר בקודקודים u_1 u_2,
פעם אחת בדיוק בכל אחד מהם, שווה לאורך במסלול הקצר ביותר מקודקוד s^1 לקודקוד t^3 ב – G'.
<u>טענת עזר:</u> קיים ב - G מסלול באורך d מקודקוד s לקודקוד t העובר לפי הסדר בקודקודים u_1 u_2, פעם
אחת בדיוק בכל אחד מהם אמ"ם קיים ב – G' מסלול באורך d מקודקוד s^1 לקודקוד t^3.
<u>הוכחת הטענה הראשית:</u> א. יהי d אורך המסלול הקצר ביותר ב – G מקודקוד s לקודקוד t העובר לפי הסדר
בקודקודים u_1 u_2, פעם אחת בדיוק בכל אחד מהם. ע"פ טענת העזר קיים מסלול ב – G' מקודקוד s^1
לקודקוד t^3 באורך d. נניח בשלילה כי קיים מסלול באורך m ב – G' מקודקוד s^1 לקודקוד t^3 כך ש $m < d$.
אז לפי טענת העזר קיים מסלול ב – G מקודקוד s לקודקוד t באורך m, בסתירה להנחה.
ב. לא קיים מסלול ב – G מקודקוד s לקודקוד t העובר לפי הסדר בקודקודים u_1 u_2, פעם אחת בדיוק בכל
אחד מהם. נניח בשלילה כי קיים מסלול ב – G' מקודקוד s^1 לקודקוד t^3 באורך d כך ש $d < \infty$, אז ע"פ
טענת העזר קיים מסלול ב – G מקודקוד s לקודקוד t העובר לפי הסדר בקודקודים u_1 u_2, פעם אחת בדיוק
בכל אחד מהם באורך d כך ש $d < \infty$, בסתירה להנחה.
■
<u>הוכחת טענת העזר:</u> ⇐יהי $P = (v_1 = s, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_k = u_1, v_{k+1}, \ldots, v_{n-1}, v_n = u_2, v_{n+1}, \ldots, v_{d-1}, v_d = t)$
מסלול ב – G מאורך d מקודקוד s לקודקוד t העובר לפי הסדר בקודקודים u_1 u_2, פעם בדיוק בכל אחד
מהם. נתבונן בסדרת הקודקודים $P' = \{s^1, v_2^1, \ldots, v_{k-1}^1, u_1^1, v_{k+1}^2, \ldots, v_{n-1}^2, u_2^2, v_{n+1}^3, \ldots, v_{d-1}^3, t^3)$ ב – G'.
ע"פ תהליך בניית G', P' הינו מסלול מאורך d מקודקוד s^1 לקודקוד t^3, אז קיים ב - G' מסלול באורך d

מקודקוד s^1 לקודקוד t^3.

⇒ יהי $P' = (v_1^1 = s^1, v_2^1, \dots, v_k^1, v_{k+1}^2, \dots, v_n^2, v_{n+1}^3, \dots, v_{d-1}^3, v_d^3 = t^3)$ מסלול ב – G' מאורך d מקודקוד s^1 לקודקוד t^3. נתבונן בסדרת הקודקודים $P = (v_1 = s, v_2, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n, v_{n+1}, \dots, v_{d-1}, v_d = t)$ ב – G. ע"פ תהליך בניית G', ניתן לראות כי P הינו מסלול מאורך d ב – G מקודקוד s לקודקוד t. בנוסף, ניתן להבחין כי בהכרח מתקיים כי $v_k^1 = u_1$ וגם $v_n^2 = u_2$, ומכאן ש P עובר לכל הפחות פעם אחת ב - u_1 ולאחר מכן לכל הפחות פעם אחת ב - u_2. נניח בשלילה כי P עובר יותר מפעם אחת ב - u_1, אז $P = (v_1 = s, v_2, \dots, v_{l-1}, v_l = u_1, \dots, v_j = u_1, v_{j+1}, \dots, v_{d-1}, v_d = t)$ וניתן לראות כי $R' = \left(v_1^1 = s^1, v_2^1, \dots, v_{l-1}^1, v_l^1 = u_1^1, v_{j+1}^2, \dots, v_{d-1}^3, v_d^3 = t^3\right)$ הינו מסלול ב – G' מאורך הקצר מ – d מקודקוד s^1 לקודקוד t^3, בסתירה להנחה. באופן דומה נראה כי P עובר בדיוק פעם אחת ב - u_2. אז קיים ב - G מסלול מאורך d מקודקוד s לקודקוד t העובר לפי הסדר בקודקודים u_1 u_2, פעם בדיוק בכל אחד מהם.

■

<u>ניתוח זמן ריצה:</u>

<u>שלב תרגום הקלט:</u> פונקציית תרגום הקלט עושה מספר קבוע של פעולות על קודקודי וקשתות הגרף G, ומכאן שזמן הריצה שלה הוא O(|V|+|E|).

<u>שלב תרגום הפלט:</u> O(1).

בסך הכל קיבלנו כי זמן הריצה הכולל של פונקציית תרגום הקלט ופונקציית תרגום הפלט, משמע זמן הריצה הכולל של האלגוריתם מבלי להתחשב בזמן הריצה של הקופסה השחורה הינו O(|V|+|E|).

שאלה 2 (25 נקודות)

תיאור מילולי של האלגוריתם:

יהי G=(V,E) גרף לא מכוון ו – 2 קבוצות קודקודים $U, M \subset V$ כך ש - $U \cap M = \emptyset$ וגם $U \cup M = V$.

שלב תרגום הקלט: ניצור גרף חדש G'=(V,E') באופן הבא: לכל $\{x, y\} \in E$ אם ($x \in M$ וגם $y \in U$) או אם ($x \in U$ וגם $y \in M$) אז $\{x, y\} \in E'$.

שלב הפעלת הקופסה השחורה: נשלח לבעיית VC את המופע G'=(V,E').

שלב תרגום הפלט: נחזיר את הפלט שקיבלנו בשלב הקודם.

הוכחת הנכונות:

טענה ראשית: אם $L \subset V$ הינה קבוצת כיסוי קודקודים של הגרף G'=(V,E') בגודל מינימאלי אז $L \subset V$ הינה קבוצת חלוקה בגודל מינימאלי עבור G=(V,E) ו– $U, M \subset V$.

טענת עזר: $L \subset V$ הינה קבוצת כיסוי קודקודים של הגרף G'=(V,E') אמ"ם $L \subset V$ הינה קבוצת חלוקה עבור G=(V,E) ו– $U, M \subset V$.

הוכחת טענה ראשית: תהי $L \subset V$ קבוצת כיסוי קודקודים של הגרף G'=(V,E') בגודל מינימאלי. ע"פ טענת העזר, $L \subset V$ הינה קבוצת חלוקה עבור G=(V,E) ו– $U, M \subset V$. נניח בשלילה כי $L \subset V$ אינה קבוצת חלוקה מינימלית עבור G=(V,E) ו– $U, M \subset V$, אז קיימת $D \subset V$ שהינה קבוצת חלוקה מינימלית עבור G=(V,E) ו – $U, M \subset V$. אז לפי טענת העזר, D הינה קבוצת כיסוי קודקודים של הגרף G'=(V,E'), בסתירה למינימאליות $L \subset V$.

■

הוכחת טענת עזר: ⇐ תהי $L \subset V$ קבוצת כיסוי קודקודים של הגרף G'=(V,E'). נניח בשלילה כי $L \subset V$ אינה מהווה קבוצת חלוקה עבור G=(V,E) ו– $U, M \subset V$. לכן קיימים $x \in U$ ו - $y \in M$ כך ש - $\{x, y\} \in E'$ וגם $x, y \notin L$. אז קיימת קשת $\{x, y\} \in E'$ כך ש - $x \notin L$ וגם $y \notin L$ בסתירה לכך ש - $L \subset V$ קבוצת כיסוי קודקודים של הגרף G'=(V,E').

⇒ תהי $L \subset V$ הינה קבוצת חלוקה עבור G=(V,E) ו– $U, M \subset V$. נניח בשלילה כי L אינה קבוצת כיסוי קודקודים של הגרף G'=(V,E'). לכן קיימת קשת $\{x, y\} \in E'$ כך ש - $x \notin L$ וגם $y \notin L$. ע"פ בניית G' בה"כ $x \in U$ ו - $y \in M$, בסתירה לכך ש - $L \subset V$ הינה קבוצת חלוקה עבור G=(V,E) ו – $U, M \subset V$.

■

ניתוח זמן ריצה:

שלב תרגום הקלט: פונקציית תרגום הקלט עושה מספר קבוע של פעולות על קודקודי וקשתות הגרף G, ומכאן שזמן הריצה שלה הוא O(|V|+|E|).

שלב תרגום הפלט: O(1).

בסך הכל קיבלנו כי זמן הריצה הכולל של פונקציית תרגום הקלט ופונקציית תרגום הפלט, משמע זמן הריצה הכולל של האלגוריתם מבלי להתחשב בזמן הריצה של הקופסה השחורה הינו O(|V|+|E|).

שאלה 3 (25 נקודות)

תיאור מילולי של האלגוריתם:
יהיו n מספרים רציונליים $x_1,\dots,x_n$ שונים זה מזה.
שלב תרגום הקלט: נמיין את $x_1,\dots,x_n$ ונסמנם $y_1,\dots,y_n$.
נבנה את הגרף המכוון G=(V,E) באופן הבא:
עבור כל מספר y_i ניצור קודקוד v_i, ובנוסף ניצור קודקוד v_{n+1}. לכל $v_i \in V$ עבור $1 \le i \le n$ נוסיף קשת
$(v_i, v_j) \in E$, לכל $i < j \le n+1$.
בנוסף נגדיר פונקציית משקל $w: V \times V \to \mathbb{R}$ באופן הבא:
$w(<v_i, v_j>) = \sum_{t=i}^{j-1} \lvert c_i - y_t \rvert$, עבור c = החציון* של $y_i,\dots,y_{j-1}$.
שלב הפעלת הקופסה השחורה: נשלח עבור בעיית המסלול הקל ביותר באורך k את המופע G=(V,E),
$w: V \times V \to \mathbb{R}$ וזוג הקודקודים v_1, v_{n+1}.
שלב תרגום הפלט: נסמן $p = v_{l_1}, v_{l_2},\dots,v_{l_k}, v_{l_{k+1}}$ את הפלט שקיבלנו מהקופסה השחורה.
נחזיר את $\#c_1,\dots,\#c_k$ **.
*עבור מספר של מספרים רציונליים שונים הממוינים נחשב את החציון באופן הבא: אם מדובר במספר אי זוגי
של מספרים החציון הינו המספר האמצעי, אם מדובר במספר זוגי של מספרים אז החציון הינו הממוצע בין
שני המספרים האמצעיים.
**עבור סדרת קודקודים $v_{l_1}, v_{l_2},\dots,v_{l_t}$ בגרף G נגדיר את $\#c_j$ עבור $1 \le j < t$
כחציון של $y_{l_j}, y_{l_j+1},\dots,y_{l_{j+1}-2}, y_{l_{j+1}-1}$.
הוכחת הנכונות:
טענה ראשית: $p = v_{l_1}, v_{l_2},\dots,v_{l_k}, v_{l_{k+1}}$ הינו מסלול קל ביותר באורך בדיוק k מקודקוד v_1 לקודקוד v_{n+1}
אמ"ם $M = \{\#c_1,\dots,\#c_k\}$ הינה קבוצת k מרכזים בעלת עלות מינימלית.
טענת עזר 1: עבור $p = v_{l_1}, v_{l_2},\dots,v_{l_k}, v_{l_{k+1}}$ ו - $M = \{\#c_1,\dots,\#c_k\}$ מתקיים כי W(p)=cost(M)
(W(p)=סכום משקל כל הקשתות במסלול p ע"פ פונקציית w).
טענת עזר 2: אם M הינה קבוצת k מרכזים אז קיים מסלול p מאורך בדיוק k מקודקוד v_1 לקודקוד v_{n+1}
כך ש – $W(p) \le cost(M)$.
הוכחת טענה ראשית: ⇐ יהיו $p = v_{l_1}, v_{l_2},\dots,v_{l_k}, v_{l_{k+1}}$ מסלול קל ביותר מאורך בדיוק k מקודקוד v_1
לקודקוד v_{n+1} ו - $M = \{\#c_1,\dots,\#c_k\}$. ראשית נשים לב כי M הינה קבוצה בעלת k מספרים רציונליים ולכן
M הינה קבוצת k מרכזים. ע"פ טענת עזר 1 נקבל כי W(p)=cost(M). נניח בשלילה כי קיימת 'M קבוצת k
מרכזים כך ש cost(M')<cost(M). ע"פ טענת עזר 2 קיים מסלול 'p מאורך בדיוק k מקודקוד v_1 לקודקוד
v_{n+1} כך ש - $W(p') \le cost(M')$ אז קיבלנו כי $W(p') \le cost(M') < cost(M) = W(p)$ בסתירה
למינימליות משקל p.

⇐ יהיו $M=\{\#c_1,\dots,\#c_k\}$ קבוצת k מרכזים בעלת עלות מינימלית ו - $p=\mathrm{v}_{l_1},\mathrm{v}_{l_2},\dots,\mathrm{v}_{l_k},\mathrm{v}_{l_{k+1}}$.
ראשית ניתן להבחין כי p הינו מסלול באורך בדיוק k מקודקוד v_1 לקודקוד v_{n+1}. ע"פ טענת עזר 1 נקבל כי
W(p)=cost(M). נניח בשלילה כי קיים מסלול p' מאורך בדיוק k מקודקוד v_1 לקודקוד v_{n+1} כך ש-
W(p')<W(p). ע"פ טענת עזר 1 נקבל בנוסף כי קיימת קבוצת k מרכזים 'M המקיימת cost(M')=W(p').
בסה"כ קיבלנו כי Cost(M')=W(p')<W(p)=cost(M) בסתירה למינימליות עלותה של M.
■
<u>הוכחת טענת עזר 1:</u> יהי $p=\mathrm{v}_{l_1},\mathrm{v}_{l_2},\dots,\mathrm{v}_{l_k},\mathrm{v}_{l_{k+1}}$ מסלול באורך בדיוק k מקודקוד v_1 לקודקוד v_{n+1}. אז:
$W(p)=w\left(<\mathrm{v}_{l_1},\mathrm{v}_{l_2}>\right)+w\left(<\mathrm{v}_{l_2}\mathrm{v}_{l_3}>\right)+\cdots+w\left(<\mathrm{v}_{l_k},\mathrm{v}_{l_{k+1}}>\right)=$
$=\sum_{t=l_1}^{l_2-1}\lvert c_{l_1}-y_t\rvert+\sum_{t=l_2}^{l_3-1}\lvert c_{l_2}-y_t\rvert+\cdots+\sum_{t=l_k}^{l_{k+1}-1}\lvert c_{l_k}-y_t\rvert=$
$\min_{d\in R}\sum_{t=l_1}^{l_2-1}\lvert d-y_t\rvert+\min_{d\in R}\sum_{t=l_2}^{l_3-1}\lvert d-y_t\rvert+..+\min_{d\in R}\sum_{t=l_k}^{l_{k+1}-1}\lvert d-y_t\rvert=cost(M)$
■
<u>הוכחת טענת עזר 2:</u> תהי $M=\{m_1,\dots,m_k\}$ קבוצת k מרכזים. אם $\mathrm{m_j}\in\mathrm{M}$ הינו מרכז שעלותו נמדדת לפי
מרחקו מהמספרים $y_p,y_{p+1},\dots,y_{p+q}$ (נבחין כי עלותו נמדדת בהכרח ביחס לרצף נקודות שלם) אז נסתכל
על הקשת $(\mathrm{v_p},\mathrm{v_{p+q+1}})$, וע"פ קשתות אלה נבנה את מסלול p. ולכן:
$cost(M)=\sum_{j=1}^{k}cost\left(\{\mathrm{m_j}\}\right)\geq\sum_{j=1}^{k}\min_{d\in R}\sum_{t=p}^{p+q}\lvert d-y_t\rvert=\sum_{j=1}^{k}\sum_{t=p}^{p+q}\lvert c_p-y_t\rvert=\sum_{j=1}^{k}w(<\mathrm{v_p},\mathrm{v_{p+q+1}}>)=W(p)$
■
<u>ניתוח זמן ריצה:</u>
<u>שלב תרגום הקלט:</u> נמיין את n מרכז הקלט בזמן ריצה של O(nlogn).
נבנה את קשתות גרף G בזמן ריצה של $\mathrm{O}(\mathrm{n}^2)$ (סדרה חשבונית).
הפעלת פונקציית המשקל עבור כל קשת תהיה בזמן ריצה של O(n), ישנן $\mathrm{O}(\mathrm{n}^2)$ קשתות ועל כן זמן הריצה
של מישקול הגרף הינו $\mathrm{O}(\mathrm{n}^3)$.
<u>שלב תרגום הפלט:</u> עבור כל אחד מ – k קודקודי p נבצע פעולה בזמן של O(n) ולכן זמן הריצה הכולל הינו
O(kn).
בסה"כ קיבלנו כי זמן הריצה הכולל של האלגוריתם הינו $\mathrm{O}(\mathrm{n}^3)$.

<u>שאלה 4 (25 נקודות)</u>

סעיף א

נסמן $(v_1, \dots, v_n)$ קודקודי הגרף G. לכל v_i כך ש - $1 \le i \le n$ נבצע את הבדיקה הבאה:
לכל v_j כך ש - $1 \le j \le n, j \neq i$ אם $\{v_i, v_j\} \in E$ נבצע את הבדיקה הבאה (אחרת נמשיך):
לכל v_k כך ש - $1 \le k \le n, k \neq i, j$ אם $\{v_j, v_k\} \in E$ נבצע את הבדיקה הבאה (אחרת נמשיך):
אם $\{v_k, v_i\} \in E$ נחזיר "כן" (אחרת נמשיך).
נחזיר "לא".
ניתן לראות כי עבור כל קודקוד אנו עושים בדיקה על שאר n-1 הקודקודים, ועל כל אחד מהם בדיקה
על שאר n-2 הקודקודים ולכן זמן הריצה של האלגוריתם הינו $O(\|V\|^3)$.

סעיף ב

יהיו $v_i, v_j \in V$.
$\Leftarrow$ נניח כי יש מסלול באורך 2 בדיוק בין v_i ל - v_j ב - G_A. אז קיים $k \neq i, j$ כך ש - $A_{i,k} = A_{k,j} = 1$. אז קיים
K כך ש - $A_{i,k} \wedge A_{k,j}$. אז לפי ההגדרה שניתנה לכפל מטריצה $C_{i,j} = 1$. אז קיימת קשת בין v_i ל - v_j ב - G_c.
$\Rightarrow$ נניח כי יש קשת בין v_i ל - v_j ב - G_c. אז לפי ההגדרה שניתנה לכפל מטריצה $C_{i,j} = 1$. אז קיים k כך ש -
$A_{i,k} \wedge A_{k,j}$. אז קיים $k \neq i, j$ כך ש - $A_{i,k} = A_{k,j} = 1$. אז יש מסלול באורך 2 בדיוק בין v_i ל - v_j ב - G_A.
■

סעיף ג

<u>תיאור מילולי של האלגוריתם:</u>
יהי G=(V,E) גרף פשוט ולא מכוון בעל n קודקודים.
<u>שלב תרגום הקלט:</u> נבנה מטריצת שכנויות A מסדר nXn עבור הגרף G באופן הבא: לכל $1 \leq i, j \leq n$, אם
$\{v_i, v_j\} \in E$ אז $A_{i,j} = A_{j,i} = 1$. אחרת, $A_{i,j} = A_{j,i} = 0$.
<u>שלב הפעלת הקופסה השחורה:</u> נשלח לבעיית כפל מטריצות את המופע: A,A (שתי מטריצות בוליאניות
מסדר nXn).
<u>שלב תרגום הפלט:</u> עבור כל $1 \leq i, j \leq n$ נבצע את הבדיקה הבאה:
אם $C_{i,j} = 1$ וגם $A_{i,j} = 1$ נחזיר "כן" (אחרת נמשיך).
אחרת, נחזיר "לא".

<u>הוכחת נכונות:</u>

<u>טענה ראשית:</u> אם קיימים i,j ‏(i ≠ j) כך ש - $C_{i,j} = 1$ וגם $A_{i,j} = 1$ אז קיים משולש בגרף – G.

<u>הוכחת טענה ראשית:</u> יהיו i,j ‏(i ≠ j) כך ש - $C_{i,j} = 1$ וגם $A_{i,j} = 1$. $C_{i,j} = 1$ אז לפי הטענה שהוכחנו בסעיף ב' יש מסלול באורך בדיוק 2 בין v_i ל - v_j ב – G.

$A_{i,j} = 1$ אז קיימת קשת בין v_i ל - v_j ב – G.

אז יש מסלול באורך בדיוק 2 בין v_i ל - v_j ב – G וגם קיימת קשת בין v_i ל - v_j ב – G, אז קיים משולש בגרף – G.

■

<u>ניתוח זמן ריצה:</u>

<u>שלב תרגום הקלט:</u> עבור כל קודקוד אנו מבצעים בדיקה על כל שאר הקודקודים ולכן זמן הריצה הוא $O(n^2)$.

<u>שלב הפעלת הקופסה השחורה:</u> $O(n^{\omega})$.

<u>שלב תרגום הפלט:</u> אנו מבצעים בדיקה בזמן קבוע על כל אחד מ - n^2 התאים של C לכל היותר ולכן זמן הריצה הוא $O(n^2)$.

בסך הכל קיבלנו כי זמן הריצה של האלגוריתם כולו הינו $O(n^2 + n^{\omega})$.

בהצלחה!