<u>קורס אנליזה נומרית – עבודת בית מס׳ 2</u>

שאלה 1:

על מנת למצוא את נקודות החיתוך של הפונקציות הנתונות בשאלה, נחשב:

$$x^3 - 1 = \cos(x)$$

$$x^3 - 1 - \cos(x) = 0$$

נסמן $f(x) = x^3 - 1 - \cos(x)$.

נרצה למצוא את השורשים של f.

להלן תוכנית פייתון לפתרון הבעיה המשתמשת בשיטות החצייה ו- Regula Falsi:

1. פונקציה המממשת את שיטת החצייה:

```python
def bisection_method(f, a, b, delta):
    """
    :param f: The function for which we are looking for a root
    :param a, b: [a, b] is a bracket of f, i.e. f(a) * f(b) < 0
    :param delta: tolerance value s.t delta > 0
    :return:    z - the approximation of the root that we found,
                iteration_number - the number of iteration takes to find z
    """
    iteration_number = 0
    while True:
        iteration_number += 1
        z = (a + b) / 2
        print(f"iteration number: {iteration_number}, z: {z}")
        if f(a) * f(z) < 0:
            b = z
        else:
            a = z
        if abs(b - a) < 2 * delta:
            break
    z = (a + b) / 2
    return z, iteration_number
```

2. פונקציה המממשת את שיטת Regula Falsi:

```python
def regula_falsi_method(f, x_i, x_ii, delta):
    """
    :param f: The function for which we are looking for a root
    :param x_i, x_ii: initial guesses and [x_i, x_ii] is a bracket of f,
                        i.e. f(x_i) * f(x_ii) < 0
    :param delta: tolerance value s.t delta > 0
    :return:    z - the approximation of the root that we found,
                iteration_number - the number of iteration takes to find z
    """
    iteration_number = 0
    while True:
        iteration_number += 1
        z = x_ii - f(x_ii) * ((x_ii - x_i) / (f(x_ii) - f(x_i)))
        print(f"iteration number: {iteration_number}, z: {z}")
        if f(z) * f(x_ii) < 0:
            x_i = z
        else:
            x_ii = z
        if abs(f(z)) < delta:
            break
    z = x_ii - f(x_ii) * ((x_ii - x_i) / (f(x_ii) - f(x_i)))
    return z, iteration_number
```

3. הפונקציה הראשית:

```python
if __name__ == '__main__':
    f = lambda x: (x ** 3 - 1) - math.cos(x)
    print("-bisection method-")
    z, iteration_number = bisection_method(f, -3, 3, 0.001)
    print(f"total iterations number: {iteration_number}, final root: {z}")
    print("-regula falsi method-")
    z, iteration_number = regula_falsi_method(f, -3, 3, 0.001)
    print(f"total iterations number: {iteration_number}, final root: {z}")
```

להלן פלט התוכנית:

```
-bisection method-
iteration number: 1, z: 0.0
iteration number: 2, z: 1.5
iteration number: 3, z: 0.75
iteration number: 4, z: 1.125
iteration number: 5, z: 1.3125
iteration number: 6, z: 1.21875
iteration number: 7, z: 1.171875
iteration number: 8, z: 1.1484375
iteration number: 9, z: 1.13671875
iteration number: 10, z: 1.130859375
iteration number: 11, z: 1.1279296875
iteration number: 12, z: 1.12646484375
total iterations number: 12, final root: 1.127197265625
```

```
-regula falsi method-
iteration number: 1, z: 0.0011119448221728057
iteration number: 2, z: 0.20800314636968897
iteration number: 3, z: 0.39787860948723486
iteration number: 4, z: 0.5655480739334369
iteration number: 5, z: 0.7068746050727044
iteration number: 6, z: 0.8205078321252213
iteration number: 7, z: 0.9080501660915306
iteration number: 8, z: 0.973125442552556
iteration number: 9, z: 1.020160041713721
iteration number: 10, z: 1.0534456238687986
iteration number: 11, z: 1.076642817734211
iteration number: 12, z: 1.092634275960178
iteration number: 13, z: 1.1035748802340084
iteration number: 14, z: 1.1110207943309525
iteration number: 15, z: 1.1160701554593062
iteration number: 16, z: 1.1194859675686462
iteration number: 17, z: 1.1217928845327667
iteration number: 18, z: 1.123349148018582
iteration number: 19, z: 1.1243982204749723
iteration number: 20, z: 1.1251050358923977
iteration number: 21, z: 1.1255810907545665
iteration number: 22, z: 1.1259016492141336
iteration number: 23, z: 1.1261174681858113
iteration number: 24, z: 1.126262755033149
iteration number: 25, z: 1.1263605535380863
total iterations number: 25, final root: 1.1264263825627778
```

מסקנות:

1. שתי השיטות הצליחו להגיע לשורש מקורב בשגיאה יחסית קטנה.
2. שיטת Regula Falsi נזקקה לפי 2 איטרציות משיטת החצייה.
3. הקירובים של שיטת Regula Falsi התקדמו בקצב איטי יותר מאשר בשיטת החצייה.

שאלה 2:

נגדיר את הסדרה הבאה:

$$x_0 = \frac{1}{p}$$

$$x_n = \frac{1}{p + x_{n-1}}$$

מהגדרת S, נובע $\lim_{n\to\infty} x_n = S$.

נגדיר, $g(x) = \frac{1}{p+x}$ פונקציה רציפה.

וממשפט שהוכחנו בהרצאה, מתקיים ש- S היא נקודת שבת של g. כלומר, $g(S) = S$.
נחשב את S:

$$g(S) = \frac{1}{p+S} = S$$

$$S^2 + pS - 1 = 0$$

$$S = \frac{-p \pm \sqrt{p^2+4}}{2}$$

נתון בתרגיל ש- $p > 1$ ולכן מהגדרת S מתקיים בהכרח $S > 0$, אזי:

$$\boldsymbol{S = \frac{-p + \sqrt{p^2+4}}{2}}$$

שאלה 3:

א.

בהינתן הנקודה x_{i-1}, נחפש את x_i שהיא נקודת החיתוך עם ציר ה- x של הפרבולה העוברת דרך הנקודה $\left(x_{i-1}, f(x_{i-1})\right)$, כאשר פרבולה זו הינה קירוב מסדר שני לפונקציה f.
עפ״י פיתוח טיילור מסדר שני של f סביב הנקודה x_{i-1} נקבל:

$$y = f(x_{i-1}) + f'(x_{i-1}) * (x_i - x_{i-1}) + \frac{1}{2} f''(x_{i-1}) * (x_i - x_{i-1})^2$$

נסמן $\boldsymbol{h(x_{i-1}) = x_i - x_{i-1}}$, נציב:

$$y = f(x_{i-1}) + f'(x_{i-1}) * h(x_{i-1}) + \frac{1}{2} f''(x_{i-1}) * h(x_{i-1})^2$$

מאחר ואנו מחפשים את החיתוך עם ציר x נציב $y = 0$:

$$0 = f(x_{i-1}) + f'(x_{i-1}) * h(x_{i-1}) + \frac{1}{2} f''(x_{i-1}) * h(x_{i-1})^2$$

נכפיל את שני האגפים ב- 2 ונקבל:

$$f''(x_{i-1}) h(x_{i-1})^2 + 2f'(x_{i-1}) h(x_{i-1}) + 2f(x_{i-1}) = 0$$

נחפש עפ״י הדרישה בשאלה את השורש המקסימלי של המשוואה הריבועית הנ״ל:

$$h(x_{i-1}) = \frac{-2f'(x_{i-1}) + \sqrt{4f'(x_{i-1})^2 - 8f(x_{i-1})f''(x_{i-1})}}{2f''(x_{i-1})}$$
$$= \frac{-f'(x_{i-1}) + \sqrt{f'(x_{i-1})^2 - 2f(x_{i-1})f''(x_{i-1})}}{f''(x_{i-1})}$$

ע״פ הגדרת $h(x_{i-1})$ נקבל כי :

$$x_i - x_{i-1} = \frac{-f'(x_{i-1}) + \sqrt{f'(x_{i-1})^2 - 2f(x_{i-1})f''(x_{i-1})}}{f''(x_{i-1})}$$

נעביר אגפים ובסה״כ קיבלנו כי :

$$\boldsymbol{x_i = x_{i-1} + \frac{\sqrt{f'(x_{i-1})^2 - 2f(x_{i-1})f''(x_{i-1})} - f'(x_{i-1})}{f''(x_{i-1})} = g(x_{i-1})}$$

נשים לב שהפונקציה g שקיבלנו הינה פונקציית איטרציית נקודת שבת עבור f : לכל $f(x) = 0$ מתקיים $g(x) = x + 0 = x$. נשתמש בתכונה זו בסעיף ד׳.

ב.

על מנת לחשב את הפונקציה $\sqrt[5]{A}$ באמצעות האיטרציה שבנינו, נגדיר פונקציה f שהשורש שלה שווה לה : $f(x) = x^5 - A$.

נחשב עבור f את האיטרציה שבנינו :

$$f'(x) = 5x^4$$

$$f''(x) = 20x^3$$

$$\boldsymbol{x_i} = x_{i-1} + \frac{\sqrt{(5x_{i-1}^4)^2 - 2 * \left(x_{i-1}^5 - A\right) * 20x_{i-1}^3} - 5x_{i-1}^4}{20x_{i-1}^3}$$
$$= \frac{\sqrt{40Ax_{i-1}^3 - 15x_{i-1}^8}}{20x_{i-1}^3} + \frac{3}{4}x_{i-1} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{40Ax_{i-1} - 15x_{i-1}^6} + 15x_{i-1}^3}{20x_{i-1}^2}}$$
$$= \boldsymbol{g(x_{i-1})}$$

ג.

נחשב שלוש איטרציות לחישוב $\sqrt[5]{100}$:

איטרציית ניוטון	האיטרציה שבנינו
$\boldsymbol{x_0=3}$	$\boldsymbol{x_0=3}$
$\boldsymbol{x_1}=3-\frac{3^5-100}{5*3^4}=\boldsymbol{2.64691}$	$\boldsymbol{x_1}=\frac{\sqrt{4000*3-15*3^6}+15*3^3}{20*3^2}=\boldsymbol{2.4313}$
$\boldsymbol{x_2}=2.64691-\frac{2.64691^5-100}{5*2.64691^4}=\boldsymbol{2.52497}$	$\boldsymbol{x_2}=\frac{\sqrt{4000*2.4313-15*2.4313^6}+15*2.4313^3}{20*2.4313^2}=\boldsymbol{2.51204}$
$\boldsymbol{x_3}=2.52497-\frac{2.52497^5-100}{5*2.52497^4}=\boldsymbol{2.51202}$	$\boldsymbol{x_3}=\frac{\sqrt{4000*2.51204-15*2.51204^6}+15*2.51204^3}{20*2.51204^2}=\boldsymbol{2.51188}$

מתקיים $\sqrt[5]{100}=2.51188$, ולכן ניתן לראות שהאיטרציה שבנינו מתכנסת בדיוק לערך המבוקש (בדיוק של 5 ספרות משמעותיות) ואף מתקרבת אליו מהר יותר מאירטציית ניוטון.

ד.

למדנו בכיתה כי סדר ההתכנסות של פונקציית איטרציית נקודת שבת שווה ל- q המינימלי עבורו $g^{(q)}(\sqrt[5]{A})\neq 0$. נמצא את q עבור g שלנו מסעיף ב׳.

$$g(x)=\frac{\sqrt{40Ax-15x^6}+15x^3}{20x^2}$$

נחשב את $g'(x)$:

$$g'(x)=\frac{\left(45x^2+\frac{20A-45x^5}{\sqrt{40Ax-15x^6}}\right)*20x^2-40x*(\sqrt{40Ax-15x^6}+15x^3)}{400x^4}$$

$$=\frac{20}{400}*\frac{45x^3+\frac{20Ax-45x^6}{\sqrt{40Ax-15x^6}}-2\sqrt{40Ax-15x^6}-30x^3}{x^3}$$

$$=\frac{1}{20}*\frac{15x^3\sqrt{40Ax-15x^6}+20Ax-45x^6-2(40Ax-15x^6)}{x^3\sqrt{40Ax-15x^6}}$$

$$=\frac{1}{20}\left(15+\frac{-60Ax-15x^6}{x^3\sqrt{40Ax-15x^6}}\right)=\boldsymbol{\frac{3}{4}-\frac{12A+3x^5}{4x^2\sqrt{40Ax-15x^6}}}$$

נציב $x=\sqrt[5]{A}$:

$$g'\left(\sqrt[5]{A}\right)=\frac{3}{4}-\frac{12A+3A}{4A^{\frac{2}{5}}\sqrt{40A^{\frac{6}{5}}-15A^{\frac{6}{5}}}}=\frac{3}{4}-\frac{15A}{20A}=\frac{3}{4}-\frac{3}{4}=\mathbf{0}$$

נחשב את $g''(x)$:

$$g''(x)=\frac{1}{4}*\frac{-15x^4*x^2\sqrt{40Ax-15x^6}+(12A+3x^5)\frac{-75x^7+100A^2x}{\sqrt{40Ax-15x^6}}}{\left(x^2\sqrt{40Ax-15x^6}\right)^2}$$
$$=\frac{\mathbf{60A^2-60Ax^5}}{(\mathbf{-3x^8+8Ax^3})\sqrt{\mathbf{40Ax-15x^6}}}$$

נציב $x=\sqrt[5]{A}$ במונה: $60A^2-60A^2=0$, ובפרט,

$$g''\left(\sqrt[5]{A}\right)=\mathbf{0}$$

נחשב את $g'''(x)$:

$$g'''(x)$$
$$=\frac{-300Ax^4(-3x^8+8Ax^3)\sqrt{40Ax-15x^6}-(60A^2-60Ax^5)\frac{495x^{13}-1740Ax^8+1120A^2x^3}{\sqrt{40Ax-15x^6}}}{\left((-3x^8+8Ax^3)\sqrt{40Ax-15x^6}\right)^2}$$
$$=\frac{60Ax^2(54x^{15}-207Ax^{10}+252A^2x^5-224A^3)}{(-3x^8+8Ax^3)^2(-3x^5+8A)\sqrt{40Ax-15x^6}}$$

נציב $x=\sqrt[5]{A}$:

$$g'''\left(\sqrt[5]{A}\right)=\frac{60A^{\frac{7}{5}}(54A^3-207A^3+252A^3-224A^3)}{\left(-3A^{\frac{8}{5}}+8A^{\frac{8}{5}}\right)^2(-3A+8A)\sqrt{40A^{\frac{6}{5}}-15A^{\frac{6}{5}}}}=\frac{60A^{\frac{7}{5}}*125A^3}{25A^{\frac{21}{5}}*5A^{\frac{3}{5}}}=\frac{60A^{\frac{22}{5}}}{A^{\frac{24}{5}}}$$
$$=60A^{-\frac{2}{5}}\neq\mathbf{0}$$

קיבלנו שסדר ההתכנסות של האיטרציה שבנינו הוא 3.

שאלה 4:

נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{x}$.

ראינו בכיתה ששיטת ניוטון היא מקרה פרטי של שיטת איטרציית נקודת השבת עבור $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{\sqrt{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = x - 2x = -x$.

נמצא את האינטרוול בו g פונקצית כיווץ, כלומר בתחום בו מתקיים:

$$|g'(x)| < 1$$

אבל, $|g'(x)| = 1$ ולכן g אינה פונקציית כיווץ באף תחום ובפרט אינה מתכנסת לשורש 0.

שאלה 5:

עבור סדרת הניחושים המוגדרת בשאלה, נסמן את סדרת השגיאות שלה ב- e_n.

נסמן את קבועי ההתכנסות של $g_1(x)$ ו- $g_2(x)$ ע"י A_1 ו- A_2 בהתאמה.

מהגדרת סדרת הניחושים ומהנתונים בשאלה מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|e_{2n+1}|}{|e_{2n}|^{R_1}} = A_1$$

וכן,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|e_{2n+2}|}{|e_{2n+1}|^{R_2}} = A_2$$

כאשר $0 < A_1, A_2 < \infty$.

נשים לב שהנ"ל מתקיים מכך שתוצאת השגיאה "היוצאת" של g_1 הינה תוצאת השגיאה "הנכנסת" ל- g_2.

נרצה לקבל ביטוי מהצורה:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|e_{2n+2}|}{|e_{2n}|^{R}}$$

המייצג את סדר ההתכנסות של פונקציית ההרכבה המוגדרת בשאלה.

נשים לב שמתקיים:

$$A_1^{R_2} * A_2 = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{|e_{2n+1}|}{|e_{2n}|^{R_1}}\right)^{R_2} * \lim_{n\to\infty} \frac{|e_{2n+2}|}{|e_{2n+1}|^{R_2}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{|e_{2n+1}|^{R_2} * |e_{2n+2}|}{|e_{2n}|^{R_1 * R_2} * |e_{2n+1}|^{R_2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|e_{2n+2}|}{|e_{2n}|^{R_1 * R_2}}$$

הראנו שמתקיים $R = R_1 * R_2$.