שאלה 1 (30 נק')

קבעו האם השפות הבאות חסרות הקשר. הוכיחו את תשובתכם.
במידה והשפה חסרת הקשר, ניתן להציג דקדוק מתאים והסבר ללא הוכחה מלאה.

1. $L = \{0^{3n}1^{5n} : n \geq 0\}$ מעל $\Sigma = \{0,1\}$.
2. $L = \{x_1\#x_2 : x_1, x_2 \in \{0,1\}^* \wedge x_1 \text{ IS A SUBSTRING OF } x_2\}$ מעל $\Sigma = \{0,1,\#\}$.
3. $L = \{0^n1^{n^2} : n \geq 0\}$ מעל $\Sigma = \{0,1\}$.
4. $L = \{w : \forall s \in \text{SUFFIX}(w), |s|_0 \leq |s|_1\}$ מעל $\Sigma = \{0,1\}$.
5. $L = \{a^nb^mc^nd^m : m,n \geq 0\}$ מעל $\Sigma = \{a,b,c,d\}$.
6. $L = \{a^nb^mc^md^n : m,n \geq 0\}$ מעל $\Sigma = \{a,b,c,d\}$.

1. <u>השפה L **הינה** חסרת הקשר</u>- נגדיר את הדקדוק G: $S \longrightarrow \varepsilon \mid 000S11111$

תהי $\boldsymbol{w \in L}$. אם $w = \varepsilon$ ניתן לראות על פי כללי הגזירה כי $w \in L(G)$. אחרת, $w = 0^{3n}1^{5n}$ עבור $n > 0$ כלשהו. ניתן לראות על פי כללי הגזירה כי:

$S \longrightarrow 0^{3*1}S1^{5*1} \longrightarrow 0^{3*2}S1^{5*2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow 0^{3*n}S1^{5*n} \longrightarrow 0^{3*n}\varepsilon1^{5*n} = w$ ובסה"כ $\boldsymbol{w \in L(G)}$.

תהי $\boldsymbol{w \in L(G)}$. אם w התקבלה ע"י גזירה אחת אזי $w = \varepsilon$ ומתקיים $w \in L$. אחרת, w התקבלה לאחר $n > 1$ גזירות ולכן התקבלה ע"י שרשרת הגזירות הבאה:

$S \to 0^3S1^5 \to 0^6S1^{10} \to \cdots \to 0^{3*(n-1)}S1^{5*(n-1)} \to 0^{3*(n-1)}\varepsilon1^{5*(n-1)} = w$ ואכן $\boldsymbol{w \in L}$.

2. <u>השפה L **אינה** חסרת הקשר</u> – נניח בשלילה שהשפה הינה חסרת הקשר, ויהי k הקבוע המובטח מלמת הניפוח. נסתכל על $w = 0^k1^k\#0^k1^k$. ראשית ניתן לראות כי $w \in L$ ומתקיים $|w| \geq k$. לכן ע"פ למת הניפוח קיימות $u,v,x,y,z \in \Sigma^*$ כך ש $w = uvxyz$ ומתקיים:

א. $vy \neq \varepsilon$

ב. $|vxy| \leq k$

ג. $uv^nxy^nz \in L$ לכל $n \geq 0$.

נחלק למקרים:

I. <u>vy מכיל #</u>: ולכן uv^2xy^2z מכיל יותר מ # אחת ומתקיים $uv^2xy^2z \notin L$ בסתירה לסעיף ג' של למת הניפוח.

II. <u>vy לא מכיל #</u>:

I.II. <u>vy מכיל יותר תווים מ x_1 מאשר מ x_2</u>: ולכן uv^2xy^2z מכיל יותר תווים משמאל ל # מאשר מימין אליה ומתקיים $uv^2xy^2z \notin L$ בסתירה לסעיף ג' של למת הניפוח.

II.II. <u>vy מכיל יותר תווים מ x_2 מאשר מ x_1</u>: ולכן uv^0xy^0z מכיל יותר תווים משמאל ל # מאשר מימין אליה ומתקיים $uv^0xy^0z \notin L$ בסתירה לסעיף ג' של למת הניפוח.

I.II. <u>vy מכיל אותו מספר תווים מ x_1 ומ x_2</u>: ע"פ המבנה של w וסעיף 2 של למת הניפוח נבין כי $v = 1^j, y = 0^j$ עבור $1 \leq j \leq k/2$ ומכאן ש $uv^2xy^2z = 0^k1^{k+j}\#0^{k+j}1^k \notin L$ בסתירה לסעיף ג' של למת הניפוח.

3. <u>השפה L **אינה** חסרת הקשר</u> **-** נסתכל על הסדרה העולה של אורכי המילים בשפה:

$$(0+0),(1+1),(2+4),(3+9),\dots,(n+n^2),\left((n+1)+(n+1)^2\right),\dots$$

ניתן לראות כי סדרת הפרשי האורכים נתונה ע"י $\left((n+1)+(n+1)^2\right)-(n+n^2)=2n+2$, ומכאן שסדרת הפרשי האורכים אינה חסומה ולכן ע"פ מסקנה מלמת הניפוח שראינו בכיתה השפה אינה חסרת הקשר.

4. <u>השפה L **הינה** חסרת הקשר</u>- נגדיר את הדקדוק G: $S \longrightarrow \varepsilon \mid S1 \mid 0S1 \mid SS$

בדומה להוכחה שראינו בכיתה אודות שפת מילות הקטלן, הדקדוק הנ"ל שומר על האינווריאנטה שבכל סיפא של מילה מספר ה 1 גדול שווה למספר ה 0, ובנוסף מאפשר לגזור 1 ללא 0 מכיוון שלא קיים תנאי השוויון בין מספר ה 0 למספר ה 1.

5. <u>השפה L **אינה** חסרת הקשר</u> **-** נניח בשלילה שהשפה L חסרת הקשר, ויהי k הקבוע המובטח מלמת הניפוח. נסתכל על $w=a^kb^kc^kd^k$. ראשית ניתן לראות כי $w\in L$ ומתקיים $|w|\geq k$. לכן ע"פ למת הניפוח קיימות $u,v,x,y,z\in\Sigma^*$ כך ש $w=uvxyz$ ומתקיים:

א. $vy\neq\varepsilon$

ב. $|vxy|\leq k$

ג. $uv^nxy^nz\in L$ לכל $n\geq 0$.

מכיוון ש $|vxy|\leq k$ ניתן להבין כי $vxy=a^ib^j$ או $vxy=b^ic^j$ או $vxy=c^id^j$ עבור $i+j\leq k$.

נניח כי $vxy=a^ib^j$. מכיוון ש $vy\neq\varepsilon$ עבור $w'=uv^0xy^0z$ מתקיים $w\notin L$, שכן אם v או y מכילות לפחות a אחת אזי $|w'|_a<|w|_a=|w|_c=|w'|_c$. אחרת אם v או y מכילות לפחות b אחת אזי $|w'|_b<|w|_b=|w|_d=|w'|_d$. בסה"כ הגענו לסתירה לסעיף ג' של למת הניפוח.

אם $vxy=b^ic^j$ או $vxy=c^id^j$ נוכל להגיע לסתירה באופן דומה.

6. <u>השפה L **הינה** חסרת הקשר</u> **-** נגדיר את הדקדוק G:

$$S \longrightarrow \varepsilon \mid aSd \mid aRd \mid R$$

$$R \longrightarrow \varepsilon \mid bRc$$

תהי $\boldsymbol{w\in L}$. נחלק למקרים:

א. $w=\varepsilon$ ניתן לראות על פי כללי הגזירה כי $w\in L(G)$.

ב. $w=a^nd^n$ עבור $n>0$ אזי $S\longrightarrow aSd\longrightarrow a^2Sd^2\longrightarrow\cdots\longrightarrow a^nSd^n\longrightarrow a^n\varepsilon d^n=w$

ג. $w=b^mc^m$ עבור $m>0$ אזי $S\longrightarrow R\longrightarrow bRc\longrightarrow\cdots\longrightarrow b^mRc^m\longrightarrow b^m\varepsilon c^m=w$

ד. $w=a^nb^mc^md^n$ עבור $m,n>0$ אזי $S\longrightarrow\cdots\longrightarrow a^nSd^n\longrightarrow a^nRd^n\longrightarrow\cdots\longrightarrow a^nb^mc^md^n=w$

בסה"כ קיבלנו כי $\boldsymbol{w\in L(G)}$.

תהי $\boldsymbol{w\in L(G)}$. נחלק למקרים:

א. w התקבלה ע"י גזירה אחת אזי $w=\varepsilon$ ומתקיים $w\in L$.

ב. w התקבלה אחרי 2 גזירות אזי $w=\varepsilon$ או $w=ad$ ומתקיים $w\in L$.

ג. w התקבלה לאחר $n>2$ גזירות ולכן התקבלה ע"י שרשרת הגזירות הבאה:

$w=a^ib^jc^jd^i\longleftarrow\cdots\longleftarrow a^iRd^i\longleftarrow a^iSd^i\longleftarrow\cdots\longleftarrow S$ כך ש $i+j=n-2$.

בסה"כ קיבלנו כי $\boldsymbol{w\in L}$.

שאלה 2 (15 נק')

הוכיחו/הפריכו:

1. תהי L שפה חסרת הקשר ותהי R שפה רגולרית, אזי $L\backslash R$ הינה שפה חסרת הקשר.
2. עבור שפות L_1, L_2 מעל אותו אלפבית נגדיר:

$$\textsc{EvenConcat}(L_1, L_2) = \{w_1w_2 : w_1 \in L_1 \ \wedge \ w_2 \in L_2 \ \wedge \ |w_1| = |w_2|\}.$$

- אם L_1, L_2 רגולריות אזי $\textsc{EvenConcat}(L_1, L_2)$ רגולרית.
- אם L_1 רגולרית, L_2 חסרת הקשר אזי $\textsc{EvenConcat}(L_1, L_2)$ חסרת הקשר.

1. הוכחה: R שפה רגולרית אז מסגירות למשלים של L_{REG} נקבל $\bar{R}$ שפה רגולרית. חיתוך של שפה חסרת הקשר ושפה רגולרית הנו שפה חסרת הקשר, ולכן $L\backslash R = L \cap \bar{R}$ הינה שפה חסרת הקשר.

2.

- דוגמא נגדית: $L_1 = a^* \, , L_2 = b^*$ שפות אלה רגולריות (מתוארות ע"פ ביטוי רגולרי), אולם $EVENCONCAT(L_1, L_2) = \{a^nb^n : n \geq 0\}$ אינה שפה רגולרית כפי שראינו בכיתה.
- דוגמא נגדית: $L_1 = L(a^*) \, , L_2 = \{b^na^n : n \geq 0\}$ שפות אלה מקיימות את התנאים אולם $EVENCONCAT(L_1, L_2) = \{a^{2n}b^na^n : n \geq 0\}$ אינה חסרת הקשר:

נניח בשלילה כי $EVENCONCAT(L_1, L_2)$ הינה חסרת הקשר ויהי k הקבוע המובטח מלמת הניפוח. נסתכל על $w = a^{2k}b^ka^k$. ראשית ניתן לראות כי $w \in EVENCONCAT(L_1, L_2)$ ומתקיים $|w| \geq k$.
לכן ע"פ למת הניפוח קיימות $u, v, x, y, z \in \Sigma^*$ כך ש $w = uvxyz$ ומתקיים:

א. $vy \neq \varepsilon$

ב. $|vxy| \leq k$

ג. $uv^nxy^nz \in L$ לכל $n \geq 0$.

מכיוון ש $|vxy| \leq k$ ניתן להבין כי $vxy = a^ib^j$ או $vxy = b^ia^j$ עבור $i + j \leq k$.

נחלק למקרים:

I. $\underline{vxy = a^ib^j :}$ $uv^0xy^0z \notin L$ משום ש $vy \neq \varepsilon$, אם vy מכיל לפחות a אחת אז $uv^0xy^0z = w'a^k$ כך ש $|w'|_a < 2k$, ו אם vy מכיל לפחות b אחת אזי $uv^0xy^0z = w'a^k$ כך ש $|w'|_b < k$.

II. $\underline{vxy = b^ia^j :}$ $uv^0xy^0z \notin L$ משום ש $vy \neq \varepsilon$, אם vy מכיל לפחות a אחת אז $uv^0xy^0z = a^{2k}w'$ כך ש $|w'|_a < k$, ו אם vy מכיל לפחות b אחת אזי $uv^0xy^0z = a^{2k}w'$ כך ש $|w'|_b < k$.

שאלה 3 (10 נק')

הוכיחו כי מעל אלפבית אונרי $\Sigma = \{1\}$ שפה היא חסרת הקשר אם ורק אם היא רגולרית.

$\Rightarrow$ $L_{REG} \subseteq L_{CFG}$ ולכן מתקיים באופן טריוויאלי.

$\Leftarrow$ תהא $L \subseteq \{1\}^*$ שפה חסרת הקשר, ויהי k קבוע הניפוח המובטח. נסמן $L' = \{1^i \in L: i < k\}$.

בנוסף, ע"פ למת הניפוח ידוע כי לכל $1^i \in L$ כך ש $i \geq k$ קיימות $1^u, 1^v, 1^x, 1^y, 1^z$ כך ש $i = u + v + x + y + z$ ומתקיים:

א. $v + y > 0$

ב. $v + x + y \leq k$

ג. $1^u 1^{t*v} 1^x 1^{t*y} 1^z \in L$ לכל $t \geq 0$.

ע"פ סעיפים א' וב' $1 \leq v + y \leq k$. נסמן $L_q = \{1^i \in L : i \geq k \ \wedge \ v + y = q\}$. ניתן לראות כי $\boldsymbol{L = L' \cup \bigcup_{q=1}^{k} T_q = L' \cup \bigcup_{q=1}^{k} \{1^{i+t*q} : 1^i \in L_q \ \wedge t \geq 0\}}$.

לכל $1 \leq q \leq k$ נגדיר לכל $0 \leq r \leq q-1$ את $T_{q,r} = \{1^{i+t*q} : 1^i \in L_q \ \wedge t \geq 0 \wedge i = r(mod q)\}$.
ניתן לראות כי לכל $1 \leq q \leq k$ מתקיים $T_q = \bigcup_{r=0}^{q-1} T_{q,r}$.

יהי $i_{q,r}$ הטבעי המינימלי המקיים $i_{q,r} = r(mod q)$ וגם $1^{i_{q,r}} \in L_q$. אם לא קיים כזה הרי ש $T_{q,r} = \emptyset$ והינה רגולרית. אחרת, נרצה להראות כי $T_{q,r} = \left\{1^{i_{q,r}+t*q} : t \geq 0\right\} = 1^{i_{q,r}}(1^q)^*$.

$\supseteq$ תהי $w \in \left\{1^{i_{q,r}+t*q} : t \geq 0\right\}$. מכיוון ש $1^{i_{q,r}} \in L_q$ ניתן לראות כי $w \in T_{q,r}$ עבור $i = i_{q,r}$.

$\subseteq$ תהי $w \in T_{q,r} = \{1^{i+t*q} : 1^i \in L_q \ \wedge t \geq 0 \wedge i = r(mod q)\}$. ממינימאליות $i_{q,r}$ נקבל כי $i_{q,r} \leq i$.
לכן, $w = 1^{i+t*q} = 1^{i_{q,r}} 1^{(t+(i-i_{q,r})/q)*q} \in \left\{1^{i_{q,r}+t*q} : t \geq 0\right\}$.

בסה"כ הראינו כי לכל $1 \leq q \leq k$ ולכל $0 \leq r \leq q-1$ מתקיים $T_{q,r}$ רגולרית, ומכאן ש לכל $1 \leq q \leq k$ מתקיים כי T_q הינה איחוד סופי של שפות רגולריות ועל כן רגולרית. בנוסף, L' הינה קבוצה סופית אז רגולרית, ושוב L הינה איחוד סופי של שפות רגולריות אז רגולרית כנדרש.

שאלה 4 (25 נק')

יהי G דקדוק המוגדר כך:

- $.\Sigma = \{a,b,c\}$
- $.N = \{S,T\}$ ‏S הינו המשתנה ההתחלתי.
- $.R = \{S \to aSc \mid T,\ T \to bTc \mid \epsilon\}$

מצאו שפה L כך ש־ $L = L(G)$. הוכיחו פורמלית את תשובתכם.

$L = \{a^t b^m c^{t+m} : t,m \geq 0\}$

<u>$L(G) \subseteq L$:</u> תהי $w \in L(G)$ נוכיח באינדוקציה על מספר הגזירות n ש $w \in L$.

בסיס $n = 2$: אז $w = \varepsilon$ ומתקיים $w \in L$ עבור $t,m = 0$.

הנחת האינדוקציה: נניח שעבור $n - 1 > 1$ ולכל מילה $w \in L(G)$ המתקבלת ע"י $n - 1$ גזירות מתקיים $w \in L$.

צעד האינדוקציה: תהא $w \in L(G)$ המתקבלת ע"י n גזירות. נחלק למקרים:

א. w התקבלה כך שכלל הגזירה הראשון שהופעל היה $S \to aSc$.

ב. w התקבלה כך שכלל הגזירה הראשון שהופעל היה $S \to T$.

נבחן כל אחד מהמקרים:

א. w מהצורה $w = aw'c$ כך ש $w' \in L(G)$ התקבלה ע"י סדרה של $n - 1$ גזירות. ע"פ הנחת האינדוקציה $w' \in L$ ולכן w' מהצורה $w' = a^i b^j c^{i+j}$ עבור $i,j \geq 0$. לכן, $w = aw'c = aa^i b^j c^{i+j} c = a^{i+1} b^j c^{i+j+1}$ ומכאן ש $w \in L$ כנדרש עבור $t = i+1, m = j \geq 0$.

ב. מכיוון שכלל הגזירה הראשון שהופעל היה $S \to T$ ו w התקבלה ע"י בדיוק n גזירות ניתן להבין כי מסלול הגזירה של w הינו: $S \to T \to_{n-2} b^{n-2} T c^{n-2} \to b^{n-2} c^{n-2} = w$ ומכאן ש $w \in L$ כנדרש עבור $t = n-2, m = 0 \geq 0$.

<u>$L \subseteq L(G)$:</u> תהא $w \in L$ נוכיח באינדוקציה שלמה על $|w| = n$ כי $w \in L(G)$.

בסיס $n = 0$: אז $w = \varepsilon$ ומתקיים $w \in L(G)$ עבור $S \to T \to \varepsilon$.

$n = 1$: לא קיימות מילים באורך 1 בשפה משום שאורכי המילים ב L מאורך זוגי $(2 * (t+m))$ ולכן הטענה מתקיימת באופן ריק.

הנחת האינדוקציה: נניח שעבור כל מילה $w \in L$ כך ש $|w| = k < n$ מתקיים $w \in L(G)$.

צעד האינדוקציה: תהא $w \in L$ כך ש $|w| = n$. נחלק למקרים:

א. w מהצורה $aw'c$

ב. w מהצורה $bw'c$

נבחן כל אחד מהמקרים:

א. $|w'| < n$ וגם $w' \in L$ (הסרנו a,c ממילה בשפה ולכן היא נשארה בשפה) ולכן ע"פ הנחת האינדוקציה $w' \in L(G)$. לכן קיימת שרשרת הגזירה $S \to aSc \to aw'c = w$ ולכן $w \in L(G)$.

ב. מכיוון ש w מהצורה $bw'c$ וגם $w \in L$ ניתן להבין כי w' מהצורה $w' = b^{i-1} c^{i-1}$. בנוסף, $|w'| < n$ וגם $w' \in L$, לכן ע"פ הנחת האינדוקציה $w' \in L(G)$ ומהצורה שלה ניתן להסיק כי נגזרה באופן הבא $S \to T \to \cdots \to w'$, ובסה"כ נבין כי ניתן לגזור את w' מ T. מכאן, נסתכל על שרשרת הגזירה $S \to T \to bTc \to \cdots \to bw'c = w$ ולכן $w \in L(G)$.

שאלה 5 (20 נק')

נגדיר: מכונת טיורינג k-מוגבלת היא מכונת טיורינג בעלת סרט יחיד בה הראש הקורא/כותב לא יכול ללכת ימינה מעבר ל-k תאים לאחר האות האחרונה של הקלט. הראו שמודל זה אינו שקול למודל של מכונת טיורינג.
(הדרכה: תחילה הוכיחו כי אם M מכונת טיורינג k-מוגבלת המקבלת שפה L אזי $L \in R$. ניתן להשתמש בכך ש-$R \subsetneq RE$).

תהי M מכונת טיורינג k-מוגבלת דטרמיניסטית. ראשית נבחין כי מספר הקונפיגורציות שלה עבור קלט מאורך n חסום ע"י: $|Q| * |\Gamma|^{n+k} * (n+k) = P(n)$ = (מס' המצבים)*(מס' האפשרויות למחרוזת שכתובה על הסרט)*(מס' האפשרויות למיקום ראש המכונה).

<u>אבחנה:</u> ע"פ עקרון שובך היונים, אם M עשתה יותר מ $P(n)$ מעברים אזי היא הייתה באותה קונפיגורציה לפחות פעמיים, ומכאן שאם M אינה עוצרת על קלט מאורך n לאחר $P(n)$ צעדים היא לא תעצור לעולם (לא יתכן שהמכונה תכריע לאחר שהייתה באותה קונפיגורציה פעמיים, משום שהייתה צריכה להגיע להכרעה לפני שהגיעה לאותה הקונפיגורציה).

נגדיר מכונת טיורינג M' אשר מחקה את M באופן הבא: עבור קלט מאורך n המכונה מחקה את M עד $P(n)$ צעדים, במידה ולא התקבלה הכרעה המכונה דוחה. תהי L שפה אשר M מקבלת, נראה כי M' מכריעה את L ומכך נסיק כי $L \in R$:

תהי $w \in L$ כך ש $n = |w|$. ע"פ האבחנה, M קיבלה את w לאחר פחות מ $P(n)$ צעדים, ומהגדרתה M' תקבל את w.

תהי $w \notin L$ כך ש $n = |w|$. נחלק למקרים:

I. M דחתה את w: ע"פ האבחנה, M דחתה את w לאחר פחות מ $P(n)$ צעדים, ומהגדרתה M' תדחה את w.

II. M לא עצרה עבור w: ע"פ הגדרתה M' דוחה מילים לאחר מספר חסום של צעדים, ולכן M' תדחה את w.

נסמן ב RE' את קבוצת השפות שמכונת טיורינג k-מוגבלת יודעת לקבל. הוכחנו כי אם M מקבלת שפה L אזי $L \in R$, ומכיוון ש $R \subset RE$ (מוכלת ממש) נקבל כי $RE' \subseteq R \subset RE$ וסה"כ ש $RE' \subset RE$, ולכן קיימת שפה L' כך שמכונת טיורינג יודעת לקבל אך מכונת טיורינג k-מוגבלת אינה יודעת לקבל.

שאלה 6 (15 נק' - בונוס)

1. יהי G דקדוק המוגדר כך:
   - $\Sigma = \{a, b\}$.
   - $N = \{S, A, B\}$. S הינו המשתנה ההתחלתי.
   - $R = \{S \to ASA \mid aB,\ A \to B \mid S,\ B \to b \mid \epsilon\}$.

   המירו את הדקדוק לצורה הנורמלית של חומסקי. כתבו כל שלב ביניים בהרצת האלגוריתם.
2. יהי G דקדוק מהצורה הנורמלית של חומסקי. הוכיחו שכל מילה $w \in L(G)$ כך ש־ $|w| = n > 0$, נגזרת על ידי בדיוק $2n-1$ צעדי גזירה.

1. <u>להיפטר מכללי גזירה עם ε:</u>

$$S \to ASA \mid AS \mid SA \mid S \mid aB \mid a$$

$$A \to B \mid S$$

$$B \to b$$

<u>להיפטר מכללי יחידה:</u>

$$S \to ASA \mid AS \mid SA \mid aB \mid a$$

$$A \to b \mid ASA \mid AS \mid SA \mid aB \mid a$$

$$B \to b$$

<u>להחליף כללי גזירה ארוכים:</u>

$$S \to AX \mid AS \mid SA \mid aB \mid a$$

$$A \to b \mid AX \mid AS \mid SA \mid aB \mid a$$

$$B \to b$$

$$X \to SA$$

<u>החלפת מעברים עם אות סופית:</u>

$$S \to AX \mid AS \mid SA \mid YB \mid a$$

$$A \to b \mid AX \mid AS \mid SA \mid YB \mid a$$

$$B \to b$$

$$X \to SA$$

$$Y \to a$$

2. תהי $w \in L(G)$ כך ש $|w| = n$. נסמן $w = \sigma_1 \cdots \sigma_n$. ע"פ צורת כללי הגזירה של הצורה הנורמלית של חומסקי, עבור $1 \le i \le n$ כל אות σ_i נגזרה ממשתנה $X_i \in N$ כלשהו, ולכן **נדרשו n גזירות** למעברים $X_i \to \sigma_i$. בנוסף, על מנת לגזור n משתנים מהמשתנה ההתחלתי S **נדרשו בדיוק $n-1$ גזירות**, משום שמכל משתנה נגזרים בדיוק 2 משתנים. בסה"כ קיבלנו כי w נגזרה ע"י בדיוק $2n-1$ צעדי גזירה.