אלגוריתמים 2 – עבודה 2

שאלה 1

עבור מטריצה $2X2$:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{bmatrix}^{\boldsymbol{2}} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a^2 + bc} & \boldsymbol{b(a+d)} \\ \boldsymbol{c(a+d)} & \boldsymbol{bc + d^2} \end{bmatrix}$$

עבור מטריצה nXn:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix}^{\boldsymbol{2}} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^2 + BC & AB + BD \\ AC + CD & BC + D^2 \end{bmatrix}$$

לא נוכל להשתמש בגישה זו משום שכפל מטריצות אינה פעולה קומוטטיבית ולכן לא בהכרח מתקיים כי:

$AB + BD = B(A + D)$

שאלה 2

$$A(x) = 1 - 4x - 3x^2$$

$$B(x) = 2 - 5x$$

נחשב עבור $n = 8$.

$$\omega = e^{\frac{2\pi i}{8}} = e^{\frac{\pi i}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i$$

כפי שראינו בכיתה:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & i & i\omega & -1 & -\omega & -i & -i\omega \\ 1 & i & -1 & -i & 1 & i & -1 & -i \\ 1 & i\omega & -i & \omega & -1 & -i\omega & i & -\omega \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\omega & i & -i\omega & -1 & \omega & -i & i\omega \\ 1 & -i & -1 & i & 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -i\omega & -i & -\omega & -1 & i\omega & i & \omega \end{bmatrix}$$

$$DFT(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) = DFT(1, -4, -3, 0, 0, 0, 0, 0) =$$

$$\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&1&1&1\\1&\omega&i&i\omega&-1&-\omega&-i&-i\omega\\1&i&-1&-i&1&i&-1&-i\\1&i\omega&-i&\omega&-1&-i\omega&i&-\omega\\1&-1&1&-1&1&-1&1&-1\\1&-\omega&i&-i\omega&-1&\omega&-i&i\omega\\1&-i&-1&i&1&-i&-1&i\\1&-i\omega&-i&-\omega&-1&i\omega&i&\omega\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-4\\-3\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6\\(1-2\sqrt{2})+(-3-2\sqrt{2})i\\4-4i\\(1+2\sqrt{2})+(3-2\sqrt{2})i\\2\\(1+2\sqrt{2})+(-3+2\sqrt{2})i\\4+4i\\(1-2\sqrt{2})+(3+2\sqrt{2})i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A(\omega^0)\\A(\omega^1)\\A(\omega^2)\\A(\omega^3)\\A(\omega^4)\\A(\omega^5)\\A(\omega^6)\\A(\omega^7)\end{bmatrix}$$

$$DFT(b_0,b_1,b_2,b_3,b_4,b_5,b_6,b_7)=DFT(2,-5,0,0,0,0,0,0)=$$

$$\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&1&1&1\\1&\omega&i&i\omega&-1&-\omega&-i&-i\omega\\1&i&-1&-i&1&i&-1&-i\\1&i\omega&-i&\omega&-1&-i\omega&i&-\omega\\1&-1&1&-1&1&-1&1&-1\\1&-\omega&i&-i\omega&-1&\omega&-i&i\omega\\1&-i&-1&i&1&-i&-1&i\\1&-i\omega&-i&-\omega&-1&i\omega&i&\omega\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\-5\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\\left(2-\frac{5}{\sqrt{2}}\right)-\frac{5}{\sqrt{2}}i\\2-5i\\\left(2+\frac{5}{\sqrt{2}}\right)-\frac{5}{\sqrt{2}}i\\7\\\left(2+\frac{5}{\sqrt{2}}\right)+\frac{5}{\sqrt{2}}i\\2+5i\\\left(2-\frac{5}{\sqrt{2}}\right)+\frac{5}{\sqrt{2}}i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}B(\omega^0)\\B(\omega^1)\\B(\omega^2)\\B(\omega^3)\\B(\omega^4)\\B(\omega^5)\\B(\omega^6)\\B(\omega^7)\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}C(\omega^0)\\C(\omega^1)\\C(\omega^2)\\C(\omega^3)\\C(\omega^4)\\C(\omega^5)\\C(\omega^6)\\C(\omega^7)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A(\omega^0)B(\omega^0)\\A(\omega^1)B(\omega^1)\\A(\omega^2)B(\omega^2)\\A(\omega^3)B(\omega^3)\\A(\omega^4)B(\omega^4)\\A(\omega^5)B(\omega^5)\\A(\omega^6)B(\omega^6)\\A(\omega^7)B(\omega^7)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}18\\(2-14\sqrt{2})+(14+\sqrt{2})i\\-12-28i\\(2+14\sqrt{2})+(-14+\sqrt{2})i\\14\\(2+14\sqrt{2})+(14-\sqrt{2})i\\-12+28i\\(2-14\sqrt{2})+(-14-\sqrt{2})i\end{bmatrix}$$

ע"פ מה שראינו בכיתה M הפיכה ומתקיים $M^{-1}=\frac{M^*}{8}$, וניתן לקבל את וקטור המקדמים ע"י הכפלה של M^{-1} בוקטור הערכים:

$$\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \end{bmatrix} = M^{-1} \begin{bmatrix} C(\omega^0) \\ C(\omega^1) \\ C(\omega^2) \\ C(\omega^3) \\ C(\omega^4) \\ C(\omega^5) \\ C(\omega^6) \\ C(\omega^7) \end{bmatrix} = \frac{M^*}{8} \begin{bmatrix} C(\omega^0) \\ C(\omega^1) \\ C(\omega^2) \\ C(\omega^3) \\ C(\omega^4) \\ C(\omega^5) \\ C(\omega^6) \\ C(\omega^7) \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i\omega & -i & -\omega & -1 & i\omega & i & \omega \\ 1 & -i & -1 & i & 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -\omega & i & -i\omega & -1 & \omega & -i & i\omega \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i\omega & -i & \omega & -1 & -i\omega & i & -\omega \\ 1 & i & -1 & -i & 1 & i & -1 & -i \\ 1 & \omega & i & i\omega & -1 & -\omega & -i & -i\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 18 \\ \left(2 - 14\sqrt{2}\right) + \left(14 + \sqrt{2}\right)i \\ -12 - 28i \\ \left(2 + 14\sqrt{2}\right) + \left(-14 + \sqrt{2}\right)i \\ 14 \\ \left(2 + 14\sqrt{2}\right) + \left(14 - \sqrt{2}\right)i \\ -12 + 28i \\ \left(2 - 14\sqrt{2}\right) + \left(-14 - \sqrt{2}\right)i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -13 \\ 14 \\ 15 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

בסה"כ קיבלנו ע"פ אלגוריתם DFT כי:

$$\boldsymbol{A(x) * B(x) = C(x) = 2 - 13x + 14x^2 + 15x^3}$$

שאלה 3 א'

נגדיר פונקצית פוטנציאל:

$$\Phi^t = \sum_{i=1}^{n} w_i^t$$

אם ביום t האלגוריתם טועה אזי מתקיים:

$$\Phi^{t+1} = \sum_{i=1}^{n} w_i^{t+1} = \sum_{i:x_i^t = O^t} w_i^t + \sum_{i:x_i^t \neq O^t} (1-\epsilon) w_i^t = \sum_{i:x_i^t = O^t} w_i^t + \sum_{i:x_i^t \neq O^t} w_i^t - \sum_{i:x_i^t \neq O^t} w_i^t \cdot \epsilon$$

$$= \Phi^t - \epsilon \sum_{i:x_i^t \neq O^t} w_i^t \leq^{(*)} \Phi^t - \frac{\epsilon}{2}\Phi^t = \left(1-\frac{\epsilon}{2}\right)\Phi^t$$

נסמן: i המומחה האופטימלי, m מספר הטעויות שהוא מבצע.

אזי $w_i^{T+1} = (1-\epsilon)^m$.

אם האלגוריתם טעה M פעמים אזי מתקיים:

$$(1-\epsilon)^m = w_i^{T+1} \leq \Phi^{\mathrm{T}+1} \leq \Phi^1 \cdot \left(1-\frac{\epsilon}{2}\right)^M = n \cdot \left(1-\frac{\epsilon}{2}\right)^M \leq n \cdot e^{-\frac{M\epsilon}{2}}$$

$$(1-\epsilon)^m \leq n \cdot e^{-\frac{M\epsilon}{2}}$$

$$m \cdot \ln(1-\epsilon) \leq \ln n - \frac{M\epsilon}{2}$$

$$\frac{M\epsilon}{2} \leq \ln n - m \cdot \ln(1-\epsilon)$$

$$M \leq \frac{2\ln n}{\epsilon} - 2m \cdot \frac{\ln(1-\epsilon)}{\epsilon} \leq \frac{2\ln n}{\epsilon} + 2m \cdot \frac{\epsilon+\epsilon^2}{\epsilon}$$

$$M \leq 2(1+\epsilon)m + \frac{2\ln n}{\epsilon}$$

שאלה 3 ב'

נניח בשלילה שקיים אלגוריתם דטרמיניסטי A המקיים $M < 2m$.

נניח כי $n = 2$ כך שלכל $t \geq 1$ מתקיים $x_1^t = 1, x_2^t = -1$.

נסתכל על הסדרה $O = o^1, o^2, \dots, o^T$ עבור $T \geq 1$ כלשהו.

אבחנה: מתקיים כי $|O|_1 \leq \frac{T}{2}$ או $|O|_{-1} \leq \frac{T}{2}$.

ע"פ האבחנה $m \leq \frac{T}{2}$, ומכאן ש $2m \leq T$.

בנוסף, נניח כי בידי היריב האלגוריתם A, ומאחר ו A דטרמיניסטי היריב יודע לכל $1 \leq t \leq T$ את בחירת האלגוריתם ביום t, נסמנה a^t. לכל $1 \leq t \leq T$ היריב יקבע את o^t בצורה הבאה: $o^t = \begin{cases} -1, & a^t = 1 \\ 1, & a^t = -1 \end{cases}$.

ע"פ הגדרת o^t מתקיים כי $M = T$.

בסה"כ מצאנו כי $2m \leq T = M$ בסתירה להנחה כי $M < 2m$.

שאלה 4

ראשית, עבור "יום" t, נגדיר בדומה למה שראינו בכיתה:

$$\phi^t = \sum_{i=1}^{n} w_i^t$$

$$\forall\, 1 \le i \le n:\ p_i^t = \frac{w_i^t}{\phi^t}$$

$$\forall\, 1 \le i \le n:\ m_i^t = \begin{cases} -1\,, & h^t(x_i) \neq l_i \\ 1\,, & h^t(x_i) = l_i \end{cases}$$

תיאור האלגוריתם:

$$t = 1, \qquad \forall\, 1 \le i \le n:\ w_i^t = 1, \qquad h^t = A(p_1^t, \dots, p_n^t)$$

$$while\left(\exists i:\ \sum_{j=1}^{j} m_i^j \le 0\right):$$

$$\quad \forall\, 1 \le i \le n:\ w_i^{t+1} = w_i^t * e^{-\epsilon m_i^t}\, , for\ some 0 < \epsilon < 1$$

$$\quad t = t + 1$$

$$\quad h^t = A(p_1^t, \dots, p_n^t)$$

$$T = t$$

(1)ע"פ הגדרת האלגוריתם נקבל כי:

$$\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{p_i^t m_i^t} = \sum_{t=1}^{T}\left(\sum_{i:h^t(x_i)=l_i} p_i^t m_i^t + \sum_{i:h^t(x_i)\neq l_i} p_i^t m_i^t\right)$$

$$= \sum_{t=1}^{T}\left(\sum_{i:h^t(x_i)=l_i} p_i^t - \sum_{i:h^t(x_i)\neq l_i} p_i^t\right)$$

$$= \sum_{t=1}^{T}\left(\sum_{i:h^t(x_i)=l_i} p_i^t - \left(1 - \sum_{i:h^t(x_i)=l_i} p_i^t\right)\right)$$

$$= \sum_{t=1}^{T}\left(2\sum_{i:h^t(x_i)=l_i} p_i^t - 1\right) = 2\sum_{t=1}^{T}\sum_{i:h^t(x_i)=l_i} p_i^t - T \ge 2\sum_{t=1}^{T} 0.51 - T = \boldsymbol{0.02T}$$

(2)ע"פ משפט MW מהכיתה לכל $1 \le i \le n$:

$$\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{n} p_i^t m_i^t \le \sum_{t=1}^{T} m_i^t + \epsilon T + \frac{\ln n}{\epsilon}$$

ע"פ (1) ו(2) לכל $1 \le i \le n$:

$$0.02T \le \sum_{t=1}^{T} m_i^t + \epsilon T + \frac{lnn}{\epsilon}$$

אי השוויון הנ"ל נכון עבור כל i, ובפרט עבור המומחה הטוב ביותר עבור מתקיים: $\sum_{t=1}^{T} m_i^t = 1$ (המומחה האחרון שעבורו התקיים $\sum_{t=1}^{T} m_i^t > 0$).

מכאן ש:

$$0.02T \le 1 + \epsilon T + \frac{lnn}{\epsilon}$$

מכאן שעבור $\epsilon < 0.02$ נקבל כי $T = O(logn)$ כנדרש.

<u>שאלה 5</u>

תיאור האלגוריתם:

1. נגדיר פולינום $P(x)=\sum_{i=0}^{n} p_i x^i$ כך ש $p_i=\begin{cases}1\ , & i\in A\\ 0\ , & i\notin A\end{cases}$.
2. נחשב בעזרת אלגוריתם DFT את וקטור המקדמים של הפולינום $P^2(x)$. נסמנו $\mathrm{v}\in\mathbb{R}^{2\mathrm{n}}$.
3. נחשב ונחזיר את $\sum_{i\in A} f(i)$ כאשר $f\colon A\to\mathbb{R}$ המוגדרת באופן הבא $f(i)=\frac{v(2i)-1}{2}$.

הוכחת נכונות:

<u>טענה ראשית:</u>

לכל $A\subseteq\{1,\dots,n\}$ האלגוריתם מחזיר את מספר ה 3-term arithmetic progressions ב A.

<u>טענת עזר:</u>

לכל $b\in A$ מתקיים $f(b)=|\{(a,c)\in A\times A : a<b<c\ \wedge a+c=2b\}|$.

<u>הוכחת טענה ראשית:</u>

יהי $A\subseteq\{1,\dots,n\}$. ע"פ טענת העזר לכל $b\in A$ מתקיים $f(b)$ = מספר ה 3-term arithmetic progressions ב A בהם b הינו האיבר האמצעי מבין שלושת איברי הביטוי. מכאן שהאלגוריתם מחשב את $\sum_{i\in A} f(i)$ = מספר ה 3-term arithmetic progressions ב A.

<u>הוכחת טענת עזר:</u>

יהי $b\in A$. ע"פ הגדרת האלגוריתם מתקיים כי $f(b)=\frac{v(2b)-1}{2}$, כאשר $v(2b)=\sum_{1\le a,c\le n} p_a p_c$.

מכאן שע"פ הגדרת $p_1,\dots,p_n$ מתקיים כי $v(2b)=|\{(a,c)\in A\times A : a+c=2b\}|$.

נמשיך ונראה כי $v(2b)-1=|\{(a,c)\in A\times A : a,c\neq b\ \wedge a+c=2b\}|$.

לכן, $f(b)=\frac{v(2b)-1}{2}=|\{(a,c)\in A\times A : a<b<c\ \wedge a+c=2b\}|$.

ניתוח זמן ריצה:

1. $O(n)$
2. $O(nlogn)$
3. $O(n)$

סה"כ $O(nlogn)$