<u>תרגיל 1</u>

א) בנה אוטומט מעל {a,b,c} המקבל את כל המילים שבהן הסכום של מספר המופעים של אותיות שאינן c זוגי, ומספר המופעים של האות c מתחלק ב-3.

ב) בנה אוטומט המקבל את כל המילים המתחילות ב-abc או שהאות לפני האחרונה היא b.

בשני הסעיפים, יש לספק תיאור פורמלי והסבר קצר מדוע שפת האוטומט היא המבוקשת.

א. נבנה את האוטומט הדטרמיניסטי $M = \{Q, \Sigma, s, \delta, A\}$ באופן הבא:

$$Q = \{q_{0,0}, q_{1,0}, q_{0,1}, q_{1,1}, q_{0,2}, q_{1,2}\}$$

$$\Sigma = \{a, b, c\}$$

$$s = q_{0,0}$$

$$\delta(q_{i,j}, \sigma) = \begin{cases} q_{(i+1)mod2,j}\,, & \sigma \in \{a,b\} \\ q_{i,(j+1)mod2}\,, & \sigma \in \{c\} \end{cases}$$

$$A = \{q_{0,0}\}$$

<u>הסבר:</u> האוטומט הדטרמיניסטי הנ"ל צובר עבור כל מילה $w \in \{a,b,c\}^*$ את מספר המופעים שבה של אותיות שאינן c מודולו 2 ואת מספר המופעים שבה של האות c מודולו 3. האוטומט מתחיל במצב המקבל $q_{0,0}$ וכך המילה הריקה שייכת לשפת האוטומט כנדרש, וחוזר למצב הנ"ל בכל פעם שהרישא של המילה מקיימת את התנאים, ולכן כל מילה מעל הא"ב הנ"ל המקיימת את התנאים מתקבלת על ידי האוטומט. בנוסף ניתן להבין כי מילה שלא עומדת באחד מהתנאים לא מתקבלת ע"י האוטומט.

ב. נבנה את האוטומט האי דטרמיניסטי $M = \{Q, \Sigma, s, \Delta, A\}$ באופן הבא:

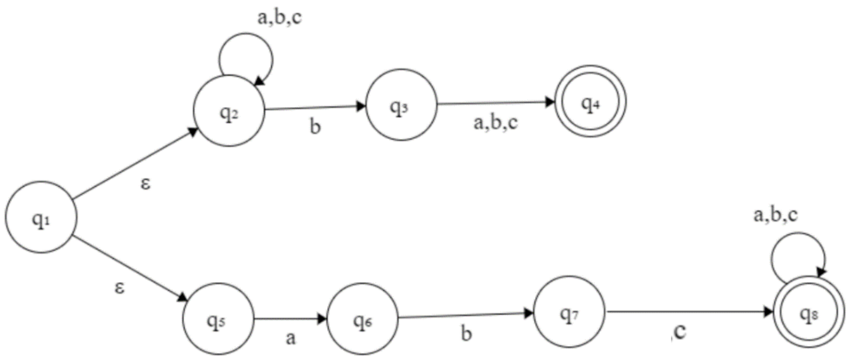
$$Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8\}$$

$$\Sigma = \{a, b, c\}$$

$$s = q_1$$

$\Delta(q, \sigma) = B$ באופן הבא:

q	σ	B
q_1	ε	$\{q_2, q_5\}$
q_1	a, b, c	ϕ
q_2	ε	ϕ
q_2	a, c	$\{q_2\}$
q_2	b	$\{q_2, q_3\}$
q_3	ε	ϕ
q_3	a, b, c	$\{q_4\}$
q_4	$ε, a, b, c$	ϕ
q_5	$ε, b, c$	ϕ
q_5	a	$\{q_6\}$
q_6	$ε, a, c$	ϕ
q_6	b	$\{q_7\}$
q_7	$ε, a, b$	ϕ
q_7	c	$\{q_8\}$
q_8	ε	ϕ
q_8	a, b, c	$\{q_8\}$



$A = \{q_4, q_8\}$

הסבר: האוטומט האי דטרמיניסטי הנ"ל הינו אוטומט של שפה שהינה איחוד של שתי שפות: שפת המילים המתחילות ב abc ושפת המילים שהאות הלפני אחרונה בהן היא b. אם מילה מתחילה ב abc ניתן לבצע מעבר ε מq_1 ל q_5 , שלאחריו נקראת הרישא abc ואז האוטומט נשאר במצב מקבל, ולכן **קיים** מסלול עבורו המילה תתקבל. אם האות הלפני אחרונה במילה הינה b ניתן לבצע מעבר ε מq_1 ל q_2, שלאחריו ניתן להישאר ב q_2 עד לאות הלפני האחרונה, ולאחר מכן ניתן לבצע מעבר ל q_3 ולאחריו לעבור למצב המקבל q_4, ולכן **קיים** מסלול המקבל את המילה הנ"ל. בנוסף, ניתן לראות כי אם מילה לא מקיימת את שני המצבים הנ"ל שום קריאה של האוטומט לא תגיע למצב מקבל, מכיוון שהאוטומט יכול לעבור ל q_4 רק אם האות הלפני האחרונה הינה b, ויכול לעבור ל q_8 רק אם הרישא של המילה הינה abc.

תרגיל 2

בהינתן שלושה מספרים טבעיים p,q,r בנה אוטומט המקבל את כל המילים שאורכן הוא קומבינציה ליניארית חיובית של p,q,r, כלומר אורך המילה w מקיים

$$|w| = a*p + b*q + c*r: \quad a,b,c \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad a+b+c > 0$$

יש לספק תיאור פורמלי והסבר קצר מדוע שפת האוטומט היא המבוקשת.

נבנה את האוטומט האי דטרמיניסטי $M = \{Q, \Sigma, s, \Delta, A\}$ באופן הבא:

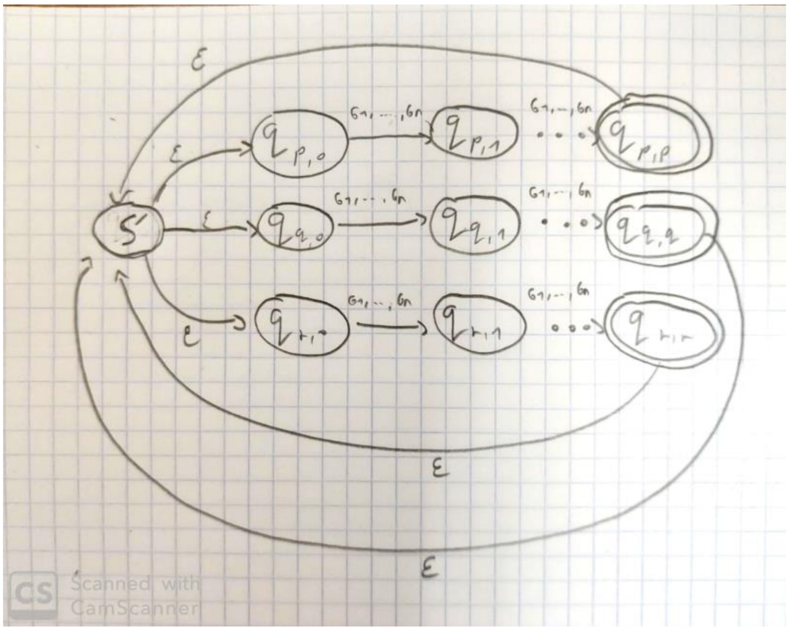
$$Q = \{s, q_{p,0}, q_{p,1}, \dots, q_{p,p}, q_{q,0}, q_{q,1}, \dots, q_{q,q}, q_{r,0}, q_{r,1}, \dots, q_{r,r}\}$$

$$\Sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$$

$$s = s'$$

$$\Delta(q,\sigma) = \begin{cases} \{q_{p,0}, q_{q,0}, q_{r,0}\} & , \quad \sigma = \varepsilon \wedge q = s' \\ \{q_{t,j+1}\} & , \quad \sigma = \sigma_1, \dots, \sigma_n \wedge q = q_{t,j} \\ \{s'\} & , \quad \sigma = \varepsilon \wedge q = q_{t,t} \\ \emptyset & , \quad else \end{cases} \quad : \quad t \in \{p,q,r\}, j \in \{0, \dots, t-1\}$$

$$A = \{q_{p,p}, q_{q,q}, q_{r,r}\}$$



הסבר: אם w מילה המקיימת $|w| = a*p + b*q + c*r$ נוכל לכתוב אותה באופן הבא : $w = w_1w_2w_3$ כך ש $|w_1| = a*p, |w_2| = b*q, |w_3| = c*r$. ע"פ בניית האוטומט, ניתן לראות כי האוטומט יכול להתקדם במסלול העליון a פעמים ולחזור ל s' כאשר נותר לקרוא w_2w_3, לאחר מכן האוטומט יכול להתקדם במסלול האמצעי b פעמים ולחזור ל s' כאשר נותר לקרוא w_3, ולבסוף להתקדם במסלול התחתון c פעמים ולסיים במצב $q_{r,r}$ שהינו מצב מקבל כאשר האוטומט סיים לקרוא את כל המילה. לכן, **קיים** מסלול המקבל את המילה הנ"ל. בנוסף, ניתן לראות כי אם מילה אינה מקיימת את התנאי אז או שהיא המילה הריקה וניתן לראות כי לא ניתן להגיע מ s' למצב מקבל מבלי לקרוא אף תו או שאורכה אינה צירוף ליניארי חיובי של p, q, r. במקרה זה, נבחין כי לאחר כל "סיום סיבוב" נקרא מהמילה p , q או r תווים, ומכיוון שמילה אינה צירוף ליניארי חיובי של מספרים אלה, בסופו של דבר תשארנה $0 < m < p, q, r$ לקרוא כאשר האוטומט במצב s' ולכן לא יוכל להגיע למצב מקבל, אז בסך הכול המילה לא תתקבל ע"י האוטומט עבור שום ריצה.

תרגיל 3

א) בהינתן שפה L נגדיר $L_{\frac{1}{2}}$ באופן הבא: $L_{\frac{1}{2}} = \{\sigma_1\sigma_3\sigma_5 \dots \sigma_{2k-1} : \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \dots \sigma_{2k} \in L\}$
הוכח כי אם L רגולרית אז גם $L_{\frac{1}{2}}$ רגולרית.

ב) בהינתן שפה L נגדיר L_2 באופן הבא: $L_2 = \{\sigma_1\sigma_1\sigma_2\sigma_2\sigma_3\sigma_3 \dots \sigma_k\sigma_k : \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \dots \sigma_k \in L\}$
הוכח כי אם L רגולרית אז גם L_2 רגולרית.

א. L רגולרית אז לפי מה שלמדנו בכיתה קיים אוטומט דטרמיניסטי $M = \{Q, \Sigma, s, \delta, A\}$ כך שמתקיים $L = L(M)$. נבנה את האוטומט האי דטרמיניסטי $M' = \{Q', \Sigma, s', \Delta, A'\}$ באופן הבא:

$$Q' = Q \times \{a_0, a_1\}$$

$$s' = < s, a_0 >$$

$$\Delta(\mathrm{q}, \sigma) = \begin{cases} \{< \delta(q_i, \sigma), a_1 >\}, & q = < q_i, a_0 > \wedge \sigma \neq \varepsilon \\ \{< \delta(q_i, \beta), a_0 > :\ \beta \in \Sigma\}, & q = < q_i, a_1 > \wedge \sigma = \varepsilon \\ \emptyset, & else \end{cases}$$

$$A' = A \times \{a_0\}$$

כעת נוכיח כי $L(M') = L_{\frac{1}{2}}$, ושוב לפי מה שראינו בכיתה נבין כי $L_{\frac{1}{2}}$ הינה שפה רגולרית.

$\boldsymbol{L(M') \supseteq L_{\frac{1}{2}}}$:

תהא $w = \sigma_1\sigma_3 \cdots \sigma_{2k-1} \in L_{\frac{1}{2}}$ אז קיימים $\sigma_2, \sigma_4, \dots, \sigma_{2k} \in \Sigma$ כך ש $w' = \sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4 \cdots \sigma_{2k} \in L$. $L = L(M)$ אז $(s, w') \mapsto_M^* (q, \varepsilon)$ עבור $q \in A$. M דטרמיניסטי אז נוכל להסתכל על הריצה שקוראת את w' באופן הבא:

$$(s = q_1, \sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4 \cdots \sigma_{2k}) \mapsto_M (q_2, \sigma_2\sigma_3\sigma_4 \cdots \sigma_{2k}) \mapsto_M (q_3, \sigma_3\sigma_4 \cdots \sigma_{2k}) \mapsto_M \dots \mapsto_M (q = q_{2k+1}, \varepsilon)$$

ע"פ בניית M' נוכל להסיק כי הריצה הבאה קיימת:

$$(< s = q_1, a_0 >, \sigma_1\sigma_3 \cdots \sigma_{2k-1}) \mapsto_{M'} (< q_2 = \delta(q_1, \sigma_1), a_1 >, \sigma_3\sigma_5 \cdots \sigma_{2k-1}) \mapsto_{M'}^{\varepsilon}$$

$$\mapsto_{M'}^{\varepsilon} (< q_3 = \delta(q_2, \sigma_2), a_0 >, \sigma_3\sigma_5 \cdots \sigma_{2k}) \mapsto_{M'} (< q_4 = \delta(q_3, \sigma_3), a_1 >, \sigma_5 \cdots \sigma_{2k}) \mapsto_{M'}^{\varepsilon}$$

$$\mapsto_{M'}^{\varepsilon} (< q_5 = \delta(q_4, \sigma_4), a_0 >, \sigma_5 \cdots \sigma_{2k}) \mapsto_{M'} \dots \mapsto_{M'} (< q_{2k} = \delta(q_{2k-1}, \sigma_{2k-1}), a_1 >, \varepsilon) \mapsto_{M'}^{\varepsilon}$$

$$\mapsto_{M'}^{\varepsilon} (< q = q_{2k+1} = \delta(q_{2k}, \sigma_{2k}), a_0 >, \varepsilon)$$

$q \in A$ אז $< q = q_{2k+1}, a_0 >\in A'$ ולכן קיבלנו כי $w = \sigma_1\sigma_3 \cdots \sigma_{2k-1} \in L(M')$ כנדרש.

$L(M') \subseteq L_{\frac{1}{2}}$:

תהא $w = \sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_n \in L(M')$ אז קיים $< q, a_0 >\in A'$ כך ש $(< s, a_0 >, w) \mapsto^*_{M'} (< q, a_0 >, \varepsilon)$.
מבניית M' ניתן להסיק כי קיימים $\sigma_1', \dots, \sigma_n' \in \Sigma$ כך שהמסלול הנ"ל נראה כך:

$$(< s = q_1, a_0 >, \sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_n) \mapsto_{M'} (< q_2 = \delta(q_1, \sigma_1), a_1 >, \sigma_2\sigma_3 \cdots \sigma_n) \mapsto^{\varepsilon}_{M'}$$

$$\mapsto^{\varepsilon}_{M'} (< q_3 = \delta(q_2, \sigma'_1), a_0 >, \sigma_2\sigma_3 \cdots \sigma_n) \mapsto_{M'} (< q_4 = \delta(q_3, \sigma_2), a_1 >, \sigma_3 \cdots \sigma_n) \mapsto^{\varepsilon}_{M'}$$

$$\mapsto^{\varepsilon}_{M'} (< q_5 = \delta(q_4, \sigma'_2), a_0 >, \sigma_3 \cdots \sigma_n) \mapsto_{M'} \dots \mapsto^{\varepsilon}_{M'} (< q_{2n-1} = \delta(q_{2n-2}, \sigma'_{n-1}), a_0 >, \sigma_n) \mapsto_{M'}$$

$$\mapsto_{M'} (< q_{2n} = \delta(q_{2n-1}, \sigma_n), a_1 >, \varepsilon) \mapsto^{\varepsilon}_{M'} (< q = q_{2n+1} = \delta(q_{2n}, \sigma'_n), a_0 >, \varepsilon)$$

מקיום המסלול הנ"ל ומכך ש M אוטומט דטרמיניסטי נוכל להבין כי המסלול הבא קיים באוטומט M:

$$(s = q_1, \sigma_1\sigma_1'\sigma_2\sigma_2' \cdots \sigma_n\sigma_n') \mapsto_M (q_2 = \delta(q_1, \sigma_1), \sigma_1'\sigma_2\sigma_2' \cdots \sigma_n\sigma_n') \mapsto_M$$

$$(q_3 = \delta(q_2, \sigma'_1), \sigma_2\sigma_2' \cdots \sigma_n\sigma_n') \mapsto_M (q_4 = \delta(q_3, \sigma_2), \sigma_2' \cdots \sigma_n\sigma_n') \mapsto_M \dots$$

$$\mapsto_M (q_{2n-1} = \delta(q_{2n-2}, \sigma'_{n-1}), \sigma_n\sigma_n') \mapsto_M (q_{2n} = \delta(q_{2n-1}, \sigma_n), \sigma_n') \mapsto_M (q = q_{2n+1} = \delta(q_{2n}, \sigma'_n), \varepsilon)$$

$< q, a_0 >\in A'$ אז $q = q_{2n+1} \in A$ ולכן קיבלנו כי $w' = \sigma_1\sigma_1'\sigma_2\sigma_2' \cdots \sigma_n\sigma_n' \in L(M) = L$ ולכן
מהגדרת $L_{\frac{1}{2}}$ קיבלנו כי $w = \sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_n \in L_{\frac{1}{2}}$ כנדרש.

ב. L רגולרית אז לפי מה שלמדנו בכיתה קיים אוטומט דטרמיניסטי $M = \{Q, \Sigma, s, \delta, A\}$ כך שמתקיים $L = L(M)$. נבנה את האוטומט האי דטרמיניסטי $M' = \{Q', \Sigma, s', \Delta, A'\}$ באופן הבא:

$$Q' = Q \times \left\{a_0, a_1^{\beta_1}, \dots, a_1^{\beta_n}\right\} : \ \Sigma = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$$

$$s' =< s, a_0 >$$

$$\Delta(\mathrm{q}, \sigma) = \begin{cases} \{< q_i, a_1^{\sigma} >\} & , \quad q =< q_i, a_0 > \wedge\, \sigma \neq \varepsilon \\ \{< \delta(q_i, \sigma), a_0 >\} & , \quad q =< q_i, a_1^{\sigma} > \wedge\, \sigma \neq \varepsilon \\ \emptyset & , \quad else \end{cases}$$

$$A' = A \times \{a_0\}$$

כעת נוכיח כי $L(M') = L_2$, ושוב לפי מה שראינו בכיתה נבין כי L_2 הינה שפה רגולרית.

$L(M') \supseteq L_2$:

תהא $w = \sigma_1\sigma_1\sigma_2\sigma_2 \cdots \sigma_k\sigma_k \in L_2$ אז מהגדרת L_2 מתקיים $w' = \sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4 \cdots \sigma_k \in L$.
$L = L(M)$ אז $(s, w') \mapsto^*_M (q, \varepsilon)$ עבור $q \in A$. M דטרמיניסטי אז נוכל להסתכל על הריצה שקוראת את w' באופן הבא:

$$(s = q_1, \sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4 \cdots \sigma_k) \mapsto_M (q_2, \sigma_2\sigma_3\sigma_4 \cdots \sigma_k) \mapsto_M (q_3, \sigma_3\sigma_4 \cdots \sigma_k) \mapsto_M \dots \mapsto_M (q = q_{k+1}, \varepsilon)$$

ע"פ בניית M' נוכל להסיק כי הריצה הבאה קיימת:

$$(< s = q_1, a_0 >, \sigma_1\sigma_1\sigma_2\sigma_2 \cdots \sigma_k\sigma_k) \mapsto_{M'} \left(< q_1, a_1^{\sigma_1} >, \sigma_1\sigma_2\sigma_2 \cdots \sigma_k\sigma_k\right) \mapsto_{M'}$$

$$(q_2 = \delta(q_1, \sigma_1), a_0 >, \sigma_2\sigma_2 \cdots \sigma_k\sigma_k) \mapsto_{M'} \left(< q_2, a_1^{\sigma_2} >, \sigma_2 \cdots \sigma_k\sigma_k\right) \mapsto_{M'} \dots$$

$$\mapsto_{M'} (< q_k = \delta(q_{k-1}, \sigma_{k-1}), a_0 >, \sigma_k\sigma_k) \mapsto_{M'} \left(< q_k, a_1^{\sigma_k} >, \sigma_k\right) \mapsto_{M'} (< q = q_{k+1} = \delta(q_k, \sigma_k), a_0 >, \varepsilon)$$

$q \in A$ אז $< q = q_{k+1}, a_0 >\in A'$ ולכן קיבלנו כי $w = \sigma_1\sigma_1\sigma_2\sigma_2 \cdots \sigma_k\sigma_k \in L(M')$ כנדרש.

$L(M') \subseteq L_2$

תהא $w = \sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_n \in L(M')$ אז קיים $< q, a_0 >\in A'$ כך ש $(< s, a_0 >, w) \mapsto^*_{M'} (< q, a_0 >, \varepsilon)$.
מבניית M' ניתן להסיק כי n זוגי והמסלול הנ"ל נראה כך:

$$(< s = q_1, a_0 >, \sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_n) \mapsto_{M'} (< q_1, a_1^{\sigma_1} >, \sigma_2\sigma_3 \cdots \sigma_n) \mapsto_{M'}$$

$$\mapsto_{M'} (< q_2 = \delta(q_1, \sigma_2), a_0 >, \sigma_3\sigma_4 \cdots \sigma_n) \mapsto_{M'} (< q_2, a_1^{\sigma_3} >, \sigma_4 \cdots \sigma_n) \mapsto_{M'} \cdots$$

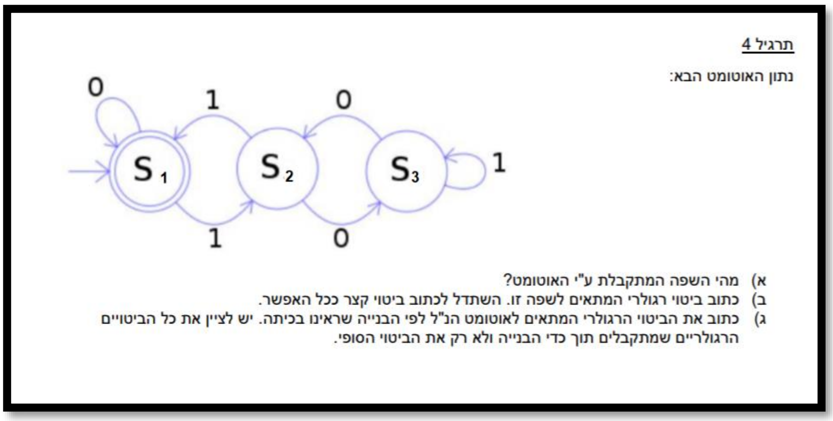
$$\mapsto_{M'} \left(< q_{\frac{n}{2}} = \delta\left(q_{\frac{n}{2}-1}, \sigma_{n-2}\right), a_0 >, \sigma_{n-1}\sigma_n\right) \mapsto_{M'} \left(< q_{\frac{n}{2}}, a_1^{\sigma_{n-1}} >, \sigma_n\right) \mapsto_{M'} \left(< q = q_{\frac{n}{2}+1} = \delta(q_{\frac{n}{2}}, \sigma_n), a_0 >, \varepsilon\right)$$

מקיום המסלול הנ"ל ומבניית M' ניתן להבין כי $\sigma_1 = \sigma_2, \sigma_3 = \sigma_4, \ldots, \sigma_{n-1} = \sigma_n$. בנוסף, מכיוון ש M דטרמיניסטי ניתן אף להבין כי המסלול הבא קיים באוטומט M:

$$(s = q_1, \sigma_1\sigma_3 \cdots \sigma_{n-1}) \mapsto_M (q_2 = \delta(q_1, \sigma_1), \sigma_3 \cdots \sigma_{n-1}) \mapsto_M \cdots \mapsto_M \left(q = q_{\frac{n}{2}+1} = \delta\left(q_{\frac{n}{2}}, \sigma_{n-1}\right), \varepsilon\right)$$

אז $< q, a_0 >\in A'$ אז $q = q_{\frac{n}{2}+1} \in A$ ולכן קיבלנו כי $\sigma_1\sigma_3 \cdots \sigma_{n-1} \in L(M) = L$.

$\sigma_1\sigma_3 \cdots \sigma_{n-1} \in L$ ומכך ש $\sigma_1 = \sigma_2, \sigma_3 = \sigma_4, \ldots, \sigma_{n-1} = \sigma_n$, ניתן להבין מהגדרת L_2 כי $w = \sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_n \in L_2$ כנדרש.



תרגיל 4

נתון האוטומט הבא:

א) מהי השפה המתקבלת ע"י האוטומט?
ב) כתוב ביטוי רגולרי המתאים לשפה זו. השתדל לכתוב ביטוי קצר ככל האפשר.
ג) כתוב את הביטוי הרגולרי המתאים לאוטומט הנ"ל לפי הבנייה שראינו בכיתה. יש לציין את כל הביטויים הרגולריים שמתקבלים תוך כדי הבנייה ולא רק את הביטוי הסופי.

א. $L(M) = \{w : w \in \{0,1\}^* \wedge DEC(w)_{mod3} = 0\}$ כאשר $DEC: \{0,1\}^* \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ כך ש
$DEC(w = \sigma_n \cdots \sigma_1) = \begin{cases} 2^{n-1} * \sigma_n + \cdots + 2^0 * \sigma_1 , & |w| > 0 \\ 0 , & |w| = 0 \end{cases}$. במילים פשוטות, האוטומט מקבל את המילה הריקה וכל מילה בינארית שהערך הדצימלי שלה מתחלק ב 3 ללא שארית.

<u>**הסבר:**</u> ראשית ניתן להבחין כי האוטומט מתחיל במצב מקבל ולכן מקבל את המילה הריקה. כעת נסתכל על שתי המילים הבינאריות הבסיסיות '0' ו '1'. מהתבוננות באוטומט ניתן להבחין כי המילה '0' מתקבלת והמילה '1' אינה מתקבלת כנדרש.

<u>אבחנה:</u> ע"פ בנייה של מספרים בינאריים, הוספה של '0' מימין למילה מגדילה את ערכו הדצימלי פי 2, והוספה של '1' מימין למילה מגדילה את ערכו הדצימלי פי 2 ועוד 1.

נרצה להראות בעזרת האבחנה ותכונות המודולו כי האוטומט מסיים ב S_1 , S_2 , S_3 בקריאת מילים ששארית החלוקה שלהן ב 3 היא 0 , 1 , 2 בהתאמה, ומכאן ניתן להסיק את נכונות הטענה.

<u>0:</u> אם מילה מתחלקת ב 3 ללא שארית, אז בהוספת '0' מימין לה מקבלים מילה שגם מתחלקת ב 3 ללא שארית ולכן $(S_1, 0) \mapsto_M (S_1, \varepsilon)$. מנגד, בהוספת '1' מימין למילה מקבלים מילה שמתחלקת ב 3 עם שארית 1 ולכן $(S_1, 1) \mapsto_M (S_2, \varepsilon)$.

1: אם מילה מתחלקת ב 3 עם שארית 1 אז בהוספת '0' מימין לה מקבלים מילה שמתחלקת ב 3 עם שארית 2 ולכן $(S_2,0) \mapsto_M (S_3,\varepsilon)$. מנגד, בהוספת '1' מימין למילה מקבלים מילה שמתחלקת ב 3 ללא שארית ולכן $(S_2,1) \mapsto_M (S_1,\varepsilon)$.

2: אם מילה מתחלקת ב 3 עם שארית 2 אז בהוספת '0' מימין לה מקבלים מילה שמתחלקת ב 3 עם שארית 1 ולכן $(S_3,0) \mapsto_M (S_2,\varepsilon)$. מנגד, בהוספת '1' מימין למילה מקבלים מילה שמתחלקת גם היא ב 3 עם שארית 2 ולכן $(S_3,1) \mapsto_M (S_3,\varepsilon)$.

בסה"כ, בעזרת מילות הבסיס והחלוקה למקרים, הראינו בעזרת הסבר אינדוקציוני כי זו אכן שפת האוטומט.

ב. $L(M) = L(r)$ עבור ביטוי רגולרי $r = (1(01^*0)^*1 \cup 0)^*$.

הסבר: ניתן לראות כי מילה מתקבלת ע"י האוטומט אם היא מורכבת ממספר בלוקים שבקריאתם האוטומט מתחיל ומסיים ב S_1. כל בלוק כזה מהצורה 0 או $1(01^*0)^*1$ והכוכב קליני החיצוני מעיד כי המילה יכולה להיות בנוייה ממספר כלשהו של בלוקים כנ"ל. את הבלוק 0 ניתן להבין ישירות מציור האוטומט. מנגד, אם הבלוק אינו מתחיל ב 0 משמע הוא מתחיל ב 1 (שבקריאתו האוטומט עובר מ S_1 ל S_2). כאמור בסיום קריאת הבלוק האוטומט חוזר ל S_1, ומכאן שהבלוק מתחיל ומסתיים ב 1. לפני החזרה ל S_1 , המילה יכלה להכיל מספר כלשהו של בלוקים המתחילים ב S_2 עוברים ל S_3 וחוזרים ל S_2. כל מעבר כזה יתחיל ב 0, יכיל מספר כלשהו של 1 (הלולאה הפנימית של S_3) ויסתיים ב 0, ומכאן שכל בלוק כנ"ל מהצורה 01^*0. כאמור, המילה יכולה להכיל מספר כלשהו של בלוקים כאלה ומכאן הכוכב קליני שעוטף את הביטוי 01^*0. לסיכום, לקחנו מילה המתקבלת ע"י האוטומט ופרקנו אותה למספר כלשהו של בלוקים (מסלולים שהאוטומט עושה) וע"י כך הסברנו בקצרה מדוע השפה הנוצרת ע"י הביטוי הרגולרי $r = (1(01^*0)^*1 \cup 0)^*$ שווה לשפת האוטומט.

ג. נבנה טבלה עבור $T(i,j,k)$ ע"פ ההגדרה הרקורסיבית שנלמדה בכיתה, ונמצא את $T(1,1,3)$:

(i,j)	$k=0$	$k=1$	$k=2$
$(1,1)$	$\varepsilon \cup 0$	$\varepsilon \cup 0 \cup (00^*0) = 0^*$	$0^* \cup 0^*1(\varepsilon \cup 10^*1)^*10^* = 0^* \cup 0^*1(10^*1)^*10^*$
$(1,2)$	1	$1 \cup 00^*1 = 0^*1$	$0^*1 \cup 0^*1(\varepsilon \cup 10^*1)^*(\varepsilon \cup 10^*1) = 0^*1(10^*1)^*$
$(1,3)$	$\emptyset$	$\emptyset \cup 00^*\emptyset = \emptyset$	$\emptyset \cup 0^*1(\varepsilon \cup 10^*1)^*0 = 0^*1(10^*1)^*0$
$(2,1)$	1	$1 \cup 10^*0 = 10^*$	$10^* \cup (\varepsilon \cup 10^*1)(\varepsilon \cup 10^*1)^*10^* = (10^*1)^*10^*$
$(2,2)$	ε	$\varepsilon \cup 10^*1$	$(\varepsilon \cup 10^*1) \cup (\varepsilon \cup 10^*1)(\varepsilon \cup 10^*1)^*(\varepsilon \cup 10^*1) = (10^*1)^*$
$(2,3)$	0	$0 \cup 10^*\emptyset = 0$	$0 \cup (\varepsilon \cup 10^*1)(\varepsilon \cup 10^*1)^*0 = (10^*1)^*0$
$(3,1)$	$\emptyset$	$\emptyset \cup \emptyset 0^*0 = \emptyset$	$\emptyset \cup 0(\varepsilon \cup 10^*1)^*10^* = 0(10^*1)^*10^*$
$(3,2)$	0	$0 \cup \emptyset 0^*1 = 0$	$0 \cup 0(\varepsilon \cup 10^*1)^*(\varepsilon \cup 10^*1) = 0(10^*1)^*$
$(3,3)$	$\varepsilon \cup 1$	$\varepsilon \cup 1 \cup \emptyset 0^*\varepsilon = \varepsilon \cup 1$	$\varepsilon \cup 1 \cup 0(\varepsilon \cup 10^*1)^*0 = \varepsilon \cup 1 \cup 0(10^*1)^*0$

$$T(1,1,3) = (0^* \cup 0^*1(10^*1)^*10^*) \cup 0^*1(10^*1)^*0(\varepsilon \cup 1 \cup 0(10^*1)^*0)^*0(10^*1)^*10^*$$

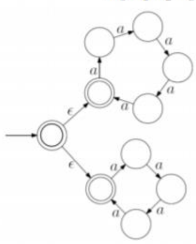
תרגיל 5

נגדיר מודל "שפת-N" באופן הבא: בהינתן אוטומט אי-דטרמיניסטי $M = \langle Q,\Sigma,s,\Delta,A\rangle$ נגדיר את שפת-N של האוטומט באופן הבא:

$$w \in L_N \Leftrightarrow \left|\left\{q \in A : (s,w) \overset{*}{\mapsto} (q,\epsilon)\right\}\right| = N$$

(כלומר, מילה שייכת לשפת האוטומט אם מספר המצבים המקבלים אליהם ניתן להגיע הוא N.)

א) עבור האוטומט הבא, כתוב מהן השפות הבאות של האוטומט: L_0, L_1, L_2, L_3, L_4.



ב) הוכח כי לכל אוטומט אי-דטרמיניסטי M מתקיים $L_N(M) \in \mathcal{L}_{DFA}$.

א. $L_0 = \{w \in \{a\}^* : |w|_{a mod 5} \neq 0 \wedge |w|_{a mod 4} \neq 0\}$

$L_1 = \{w \in \{a\}^* : |w|_{a mod 5} = 0\}\Delta\{w : |w|_{a mod 4} = 0\}$

$L_2 = \{w \in \{a\}^* : |w|_{a mod 20} = 0 \wedge |w| > 0\}$

$L_4 = \emptyset$, $L_3 = \{\varepsilon\}$

ב. יהי $M = \{Q, \Sigma, s, \Delta, A\}$ אוטומט אי דטרמיניסטי. נבנה אוטומט דטרמיניסטי $M' = \{Q', \Sigma, s', \delta, A'\}$ באופן הבא:

$Q' = P(Q)$

$s' = E(s)$

$\delta(B, \sigma) = \bigcup_{q \in B} \bigcup_{q' \in \Delta(q,\sigma)} E(q')$

$A' = \{B \in P(Q) : |A \cap B| = N\}$

למה שהוכחה בכיתה:

לכל $w \in \Sigma^*$, $B \in P(Q)$ מתקיים : $(s', w) \mapsto^*_{M'} (B, \varepsilon) \Rightarrow B = \{q \in Q : (s, w) \mapsto^*_M (q, \varepsilon)\}$

*נוכל להשתמש בלמה זו משום שהינה מתבססת על פונקציית המעברים של M', ומאחר שפונקציית המעברים זהה בבנייה שלנו, אז הלמה תקפה גם עבורה הבנייה הנ"ל.

נוכיח כי $L_N(M) = L(M')$:

$\boldsymbol{L_N(M) \subseteq L(M')}$**:**

תהי $w \in L_N(M)$ אזי $N = |\{q \in A : (s, w) \mapsto^*_M (q, \varepsilon)\}|$.

M' הינו אוטומט דטרמיניסטי אז קיים ויחיד $B_w \in Q'$ שעבורו מתקיים $(s', w) \mapsto^*_{M'} (B_w, \varepsilon)$.

מהלמה נקבל כי $B_w = \{q \in Q : (s, w) \mapsto^*_M (q, \varepsilon)\}$.

מכיוון שמספר המצבים המקבלים את w באוטומט M הינו N ובנוסף B_w הינה קבוצת כל המצבים שניתן להגיע אליהם באוטומט M ע"י קריאת המילה w מהמצב ההתחלתי, נקבל כי $N = |A \cap B_w|$. מכן ניתן להבין כי $B_w \in A'$ ולכן $w \in L(M')$ כנדרש.

$\boldsymbol{L_N(M) \supseteq L(M')}$**:**

תהי $w \in L(M')$, כלומר קיים ויחיד $B_w \in A'$ שעבורו מתקיים $(s', w) \mapsto^*_{M'} (B_w, \varepsilon)$.

$B_w \in A'$ אזי $N = |A \cap B_w|$. בנוסף, ע"פ הלמה נקבל כי $B_w = \{q \in Q : (s, w) \mapsto^*_M (q, \varepsilon)\}$.

מכיוון שקיבלנו כי גודל החיתוך בין קבוצת כל המצבים שניתן להגיע אליהם באוטומט M ע"י קריאת המילה w מהמצב ההתחלתי לבין קבוצת כל המצבים המקבלים של אוטומט M הינו N ניתן להבין כי $N = |\{q \in A : (s, w) \mapsto^*_M (q, \varepsilon)\}|$, כלומר $w \in L_N(M)$ כנדרש.