תכנון אלגוריתמים תרגיל 4 – דף תשובות

אנא הגישו רק חלק זה. אל תחרגו מהמקום המוקצה לתשובה!

ציון	

שם		ת.ז	
שם		ת.ז	

שאלה 1

תיאור האלגוריתם

אתחול: $\pi(s) = null$, $\mathrm{d(s)} = 0$, ולכל $v \neq \mathrm{s}$ נאתחל $\mathrm{d(v)} = \infty, \pi(v) = null$.
צעד: עבור $i = 1$ עד $\|V\| - 1$ בצע:
לכל $\mathrm{(u,v)} \in \mathrm{E}$ בצע $\mathrm{Re\,lax\,(u,v)}$. אם באיטרציה לכל $\mathrm{(u,v)} \in \mathrm{E}$ לפני פעולת ה Relax מתקיים
$d(v) \leq d(u) + w(u,v)$ אז break.
סיום: החזרת את המרחקים ואת העץ.

הוכחת נכונות האלגוריתם

טענה ראשית: בסוף ריצת האלגוריתם לכל v מתקיים $\mathrm{d(v)} = \delta\mathrm{(s,v)}$.
הוכחת טענה ראשית: אם התבצעו $\|\mathrm{V}\| - 1$ איטרציות, אזי לפי בלמן פורד (בהנחה שלא קיימים מעגלים
שליליים, לכל v מתקיים $\mathrm{d(v)} = \delta\mathrm{(s,v)}$. אחרת, אם התבצע *break*, משמע האיטרציה לא שינתה את
$d(v)$ לכל v, ואילו היינו ממשיכים לבצע את שאר האיטרציות שנותרו, לא היה מתבצע שום שינוי מהגדרת
Relax. ושוב, מנכונות אלגוריתם בלמן פורד קיבלנו כי בסוף ריצת האלגוריתם לכל v מתקיים $\mathrm{d(v)} = \delta\mathrm{(s,v)}$.

ניתוח זמן ריצה – חסם על מס' האיטרציות

לפי טענה שהוכחה בכיתה, אם קיים מסלול קל ביותר מ s ל v שמכיל i קשתות, אזי בסוף איטרציה i מתקיים $\mathrm{d}(\mathrm{v}) = \delta(\mathrm{s},\mathrm{v})$. בנוסף, לכל v קיים מסלול בעל משקל מינימלי מ- s אליו שאורכו קטן שווה מ - $\alpha(\mathrm{G})$.

לכן, לאחר $\alpha(\mathrm{G})$ נקבל כי לכל v מתקיים $\mathrm{d}(\mathrm{v}) = \delta(\mathrm{s},\mathrm{v})$. לכך נוסיף את האיטרציה האחרונה בה לפי מה שקיבלנו לא יתבצע שום שינוי בעזרת ה – Relax ולכן נצא מהלולאה. בסך הכל קיבלנו כי מספר האיטרציות חסום ע"י $\alpha(\mathrm{G}) + 1$.

שאלה 2

סעיף א

יהיו $S_1, S_2 \in F$ ותהי f זרימה מקסימלית תחת N. ע"פ MCMF מתקיים $C(S_1, V \setminus S_1) = C(S_2, V \setminus S_2) = |f|$.
בנוסף, ע"פ טענה שהוכחנו בכיתה מתקיים כי $|f| = f(S_1, V \setminus S_1) = f(S_2, V \setminus S_2)$. מכאן נובע כי
$f(S_1, V \setminus S_1) = C(S_1, V \setminus S_1)$ ו - $f(S_2, V \setminus S_2) = C(S_2, V \setminus S_2)$, ולכן כל הצלעות החותכות את S_1 וכל הצלעות החותכות את S_2 רוויות תחת f.
תהי צלע e החותכת את $S_1 \cup S_2$ או את $S_1 \cap S_2$, אז e חותכת את S_1 או את S_2, ולכן e רוויה תחת f.
קיבלנו כי כל קשת החותכת את $S_1 \cup S_2$ או את $S_1 \cap S_2$ רוויה, ולכן
$f(S_1 \cap S_2, V \setminus S_1 \cap S_2) = C(S_1 \cap S_2, V \setminus S_1 \cap S_2)$ וגם $f(S_1 \cup S_2, V \setminus S_1 \cup S_2) = C(S_1 \cup S_2, V \setminus S_1 \cup S_2)$.
שנית, ע"פ הטענה שהוכחנו בכיתה מתקיים $|f| = f(S_1 \cup S_2, V \setminus S_1 \cup S_2) = f(S_1 \cap S_2, V \setminus S_1 \cap S_2)$, ולכן
$|f| = C(S_1 \cup S_2, V \setminus S_1 \cup S_2) = C(S_1 \cap S_2, V \setminus S_1 \cap S_2)$ ומכיוון שבכל חתך זורם f נקבל כי $S_1 \cup S_2$ וגם $S_1 \cap S_2$
הינם חתכים מינימליים (לא יתכן חתך בעל קיבול קטן יותר מכיוון שבמידה וכן לא יכולנו להזרים בו את f), אז
$S_1 \cap S_2, S_1 \cup S_2 \in F$.

סעיף ב - S_{min}

תיאור האלגוריתם

נאתחל $B = \{s\}$. נכניס את s למחסנית, כל עוד המחסנית לא ריקה, נשלוף ממנה קודקוד ונסתכל על כל הקשתות היוצאות ממנו. אם הקשת לא רוויה תחת f, נכניס את הקודקוד אליו היא מגיעה ל – B ולמחסנית.
נחזיר את B.

הוכחת נכונות

ראשית נראה כי $B \in F$. ע"פ תיאור האלגוריתם, כל קשת החותכת את B, רוויה תחת f, ולכן הקיבול של החתך שקיבלנו שווה לזרימה f, ובדומה לסעיף הקודם קיבלנו כי $B \in F$. נוכיח את השוויון $B = S_{min}$ ע"י הכלה דו"כ:
$\supseteq$: S_{min} מתקבל מחיתוך כל החתכים השייכים ל – F, ובפרט B, ולכן מוכל ב – B.
$\subseteq$: נוכיח באינדוקציה על השלב ה – i באלגוריתם:
i=0 : אז $B = \{s\}$ ומכיוון ש – s שייך לכל חתך, הוא שייך לחיתוך של כל החתכים המינימליים.
הנחה: נניח כי בשלב ה – i B מוכל ב - S_{min}.
צעד: נסתכל על השלב ה – i+1. אם לא התווסף ל – B שום קודקוד, סיימנו. אם התווסף ל – B קודקוד v כלשהו, נניח בשלילה כי v לא שייך ל - S_{min}. ע"פ סעיף קודם, S_{min} הינו חתך מינימלי, ולכן כל קשת שחותכת אותו רוויה תחת f. אך האלגוריתם בחר את v מכיוון שקיימת קשת מקודקוד כלשהו השייך לקבוצה B מהשלב הקודם (וגם ל S_{min} ע"פ ההנחה) שאינה רוויה תחת f, וקיבלנו כי קיימת קשת החותכת את S_{min} ואינה רוויה תחת f. סתירה.

סעיף ב - S_{max}
תיאור האלגוריתם

נאתחל את $C = V \setminus \{t\}$. נכניס את t למחסנית, כל עוד המחסנית אינה ריקה, נשלוף קודקוד v מהמחסנית. אם קיימת קשת לקודקוד v מקודקוד ב – C שאינה רוויה תחת f, נוציא את v מ – C ונכניסו למחסנית.
נחזיר את C.

הוכחת נכונות

ראשית נראה כי $C \in F$. ע"פ תיאור האלגוריתם, כל קשת החותכת את C, רוויה תחת f, ולכן הקיבול של החתך שקיבלנו שווה לזרימה f, ובדומה לסעיף הקודם קיבלנו כי $C \in F$. נוכיח את השוויון $C = S_{max}$ ע"י הכלה דו"כ:
$\subseteq$: S_{max} מתקבל מאיחוד כל החתכים השייכים ל – *F*, ובפרט *C*, ולכן מכיל את *C*.
$\supseteq$: נוכיח באינדוקציה על השלב ה – i באלגוריתם:
i=0 : $C = V \setminus \{t\}$, לכן כל חתך מוכל ב – C ובפרט S_{max}.
הנחה: נניח כי בשלב ה – i, S_{max} מוכל ב – C.
צעד: נסתכל על השלב ה – i+1. אם לא הוסר מ – C קודקוד סיימנו. אם הוסר מ – C קודקוד v נניח בשלילה כי v שייך ל S_{max}. אם הסרנו את v מ – C, אז לפי תיאור האלגוריתם קיימת קשת לא רוויה מהחתך C מהשלב הקודם (ולפי ההנחה מ - S_{max}) ל – v. וקיבלנו קשת לא רוויה החותכת את S_{max}, בסתירה להיותו חתך מינימלי ע"פ הסעיף הקודם.

סעיף ב – זמן ריצה

ניתן לראות כי אנו עוברים על כל צלע וכל קודקוד לכל היותר פעמיים במהלך ריצת האלגוריתם (לכל היותר פעם אחת למציאת S_{min} ולכל היותר פעם אחת למציאת S_{max}), ומכאן שזמן ריצת האלגוריתם הינו $O(|V| + |E|)$.

שאלה 3

תיאור האלגוריתם

נגדיר פונקציית משקל $w: E \to \{0,1\}$ באופן הבא: אם $c(u,v) = f(u,v)$ אז $w(u,v) = 1$. אחרת, $w(u,v) = 0$. נריץ דייקסטרה בגרף *G* מקודקוד *s* ע"פ פונקציית המשקל *w*. אם $d(t) \leq k$ החזר "כן", אחרת החזר "לא".

הוכחת נכונות האלגוריתם

טענה ראשית: האלגוריתם מחזיר כן אמ"ם ניתן להגדיל את הזרימה f ע"י הגדלת הקיבול של לכל היותר k צלעות ב – N.

טענת עזר: $d(v) \le k'$ אמ"ם קיים מסלול מ – s ל – v ב – G בעל לכל היותר k' קשתות רוויות תחת f.

הוכחת טענה ראשית: ⇐ נניח כי האלגוריתם מחזיר "כן". אזי מהגדרת האלגוריתם $d(t) \le k$, ולכן ע"פ טענת העזר קיים מסלול מ – s ל – t ב – G בעל לכל היותר k קשתות רווית תחת f. נוכל להגדיל את קיבולן של k או פחות הקשתות הנ"ל בלפחות 1 כל אחת (מכיוון שבכל קשת שאינה רוויה במסלול ניתן להזרים לפחות עוד 1), ובכך להגדיל את הזרימה במסלול הנ"ל בלפחות 1 ובסה"כ להגדיל את f.

⇒ נניח כי האלגוריתם מחזיר "לא". אזי מהגדרת האלגוריתם $d(t) > k$, ולכן ע"פ טענת העזר כל מסלול מ - s ל – t ב – G בעל יותר מ – k קשתות רוויות תחת f. מכאן ניתן להסיק כי על כל בחירה של עד k קשתות ב – G הגדלת הקיבול שלהן יותיר לפחות צלע אחת רוויה בכל מסלול מ – s ל – t, ולכן לא ניתן להגדיל את הזרימה f ע"י הגדלת הקיבול של לכל היותר k צלעות ב – N.

הוכחת טענת עזר: ⇐ נניח כי $d(v) \le k'$. אזי קיים מסלול מ – s ל – v ב – G בעל משקל לכל היותר k' תחת w. ע"פ בניית w, ניתן לראות כי קיימות לכל היותר k' קשתות רוויות תחת f במסלול זה.

⇒ נניח כי קיים מסלול מ – s ל – v ב – G בעל לכל היותר k' קשתות רוויות תחת f. אזי מבניית w קיים מסלול מ – s ל -v ב – G בעל משקל לכל היותר k', ומנכונות אלגוריתם דייקסטרה נקבל כי $d(v) \le k'$.

ניתוח זמן ריצה

הגדרת פונקציית המשקל תעשה בזמן של $O(|E|)$. מכיוון שבזרימה קיימות יותר צלעות מקודקודים, זמן הריצה של דייקסטרה הינו $O(|E|\log|V|)$, ובסך הכל זמן ריצת האלגוריתם הינו $O(|E|\log|V|)$.

שאלה 4

נסמן ב – P את המסלול הקצר ביותר מ – s ל – v ב - $N_{f'}$, נשים לב כי אורכו של P הינו $\delta_{f'}(s,v)$.

<u>מקרה 1:</u> P נמצא ב - N_f

ע"פ הנתון, כל מסלול מ – s ל – v ברשת השכבות L_f, משמע כל מסלול קצר ביותר מ – s ל – v ב - N_f, רווי,
ולכן P אינו מסלול קצר ביותר מ – s ל – v ב - N_f. ומכיוון שאורכו של P הינו $\delta_{f'}(s,v)$, נקבל כי
$\delta_{f'}(s,v) > \delta_f(s,v)$.

<u>מקרה 2:</u> P לא נמצא ב - N_f

כלומר קיימת קשת $(u,v) \in P$ שלא מופיעה ב - N_f. נסמן את קודקודי המסלול $P = (s = v_0, v_1, .., v_{\delta_{f'}(s,v)} = v)$.
תהי (v_i, v_{i+1}) קשת כלשהי במסלול P.
- אם (v_i, v_{i+1}) מופיעה ב - N_f אז $\delta_f(s, v_{i+1}) \le \delta_f(s, v_i) + 1$.
- אם (v_i, v_{i+1}) לא מופיעה ב - N_f אז (v_{i+1}, v_i) כן מופיעה ב - N_f והזרמנו עליה זרימה, אזי היא מופיעה
במסלול קצר ביותר מ – s ל – v ב - N_f וממשפט הרישא נובע כי $\delta_f(s, v_{i+1}) + 1 = \delta_f(s, v_i)$.

נסתכל על הסדרה הבאה $\delta_f(s, s = v_0), \delta_f(s, v_1), \dots, \delta_f\left(s, v_{\delta_f'(s,v)} = v\right)$. בסדרה זו בין כל 2 איברים עוקבים
גדלים בלכל היותר 1, ומכיוון שאנו במקרה בו קיימת קשת $(u,v) \in P$ שלא מופיעה ב - N_f, אז קיים מקום בו
קטנים ב – 1. מכיוון שהסדרה מתחילה ב – 0 ונגמרת ב - $\delta_f(s,v)$, מספר האיברים בה הוא לפחות
$\delta_f(s,v) + 3$ ולכן אורכו של P הוא לפחות $\delta_f(s,v) + 2$, ושוב קיבלנו כי $\delta_{f'}(s,v) > \delta_f(s,v)$.