

עבודה 6 – סיבוכיות

מתרגלת אחראית: עירית שלי

שאלה 1

הגדרה: המחלקה $CO - NP$ מוגדרת כך: $CO - NP = \{L \subseteq \Sigma^* \mid \bar{L} \in NP\}$. כלומר אוסף השפות שהשפה המשלימה שלהן (ביחס ל- Σ^*) ב- NP .

סעיף א.

הראו כי $P \subseteq CO - NP$.

סעיף ב.

הראו כי אם $P \neq NP$ אזי $P \neq CO - NP$.

סעיף ג.

הראו כי אם $CO - NP \neq NP$ אזי $SAT \notin CO - NP$.

שאלה 2

לכל k טבעי, נגדיר את השפה:

$$k - Clique = \{G: G \text{ is an undirected graph that contains a clique of size } k\}$$

סעיף א.

תארו אלגוריתם פולינומי עבור השפה $11 - Clique$ הרץ בזמן $O(|V|^{11})$. הסבירו בקצרה מדוע הוא רץ בזמן הנדרש. אין צורך להוכיח נכונות.

סעיף ב.

הראו רדוקציה $4 - Clique \leq_p 8 - Clique$ שמקבלת גרף G עם n קודקודים ומחזירה גרף $f(G)$ עם $O(n^2)$ קודקודים, בזמן ריצה שאינו עולה על $O(n^4)$. יש להוכיח את נכונות הרדוקציה ולנתח בקצרה את זמן הריצה שלה.

סעיף ג.

הראו כי לכל k , מתקיים $k - Clique \in P$ (במידה והחלטתם להראות אלגוריתם, אין צורך בהוכחת נכונות).

שאלה 3

הגדרה: שפת ה-Binary-Inequality (BI) היא אוסף כל מערכות האי-שוויונים כך שקיימת הצבה **בינארית** (0 או 1) למשתנים במערכת כך שכל אי-שוויון במערכת יתקיים.

דוגמא: עבור המערכת:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + 8x_4 \geq 7 \\ 4x_1 - 8x_3 \geq 4 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 2 \end{cases}$$

ההצבה הבאה תספק את המערכת: $x_1 = 1; x_2 = 0; x_3 = 0; x_4 = 1$

תזכורת:

- קבוצה בלתי תלויה בגרף לא מכון היא קבוצה $I \subseteq V$ כך שלכל $u, v \subseteq I$ מתקיים $(u, v) \notin E$.
- בעיית IS מוגדרת כך:
 $IS = \{(G, k) \mid k \leq \text{גודל בלתי תלויה בגודל } G\}$

סעיף א.

הראו כי $BI \in NP$.

סעיף ב.

הוכיחו כי השפה BI היא NP -שלמה.

שאלה 4

יהי $G = (V, E)$ גרף לא מכון עם n קודקודים.
הגדרה: קבוצה $D \subseteq V$ נקראת **קבוצה שלטת** ב- G אם לכל $v \notin D$ קיים קודקוד $u \in D$ כך ש- $(u, v) \in E$.

נגדיר את השפה הבאה:

$$DomSet = \{(G, k) \mid k \geq \text{גודל שלטת בגודל } G\}$$

תזכורת:

- קבוצה $C \subseteq V$ תיקרא "כיסוי קודקודים" (Vertex Cover) של צלעות הגרף אם לכל $(u, v) \in E$ מתקיים $u \in C$ או $v \in C$.
- בעיית VC מוגדרת כך:
 $VC = \{(G, k) \mid k \geq \text{כיסוי קודקודים בגודל } G\}$

הערה: אנו מניחים כל הגרפים קשירים.

הוכיחו כי בעיית $DomSet$ היא NP -שלמה ע"י תיאור הרדוקציה הבאה: $VC \leq_p DomSet$.

בהצלחה!