

מבני נתונים – תרגיל 3

תאריך פרסום: 28.4.19

תאריך הגשה: 12.5.19

מרצה ומתרגלת אחראיות: לנה יודיצקי, עומרית פילצר

נהלי הגשת עבודה:

- את העבודה יש להגיש בזוגות.
 - את הפתרון לעבודה זו עליכם להקליד (בקובץ word או כל כתבן אחר לפי טעמכם האישי), עבודות הכתובות בכתב יד לא יתקבלו.
 - את הקובץ יש להגיש **בפורמט PDF** למערכת ההגשה (Submission System).
- שאלות לגבי העבודה יש להעלות בפורום של התרגיל או בשעות הקבלה של המרצה או המתרגלת האחראיות על העבודה.

נושא העבודה:

- עצים

שאלה 1 – משפחה מאוזנת

משפחה של עצים נקראת מאוזנת אם לכל עץ במשפחה יש גובה $O(\log n)$, כאשר n הוא מספר הקודקודים בעץ (תזכורת: גובה של עץ הוא המספר המקסימלי של קשתות במסלול מהשורש לעלה כלשהו בעץ, בפרט, הגובה של עץ המכיל קודקוד יחיד הוא 0).
לכל אחת מהתכונות הבאות, קבעו האם משפחת העצים הבינאריים המקיימת אותה היא מאוזנת. אם התשובה היא לא – תנו דוגמה נגדית. אם התשובה היא כן – הוכיחו (רמז: הוכחה באינדוקציה).
זכרו שגובה העצים במשפחה מאוזנת הוא אסימפטוטי, לכן דוגמה נגדית צריכה להיות כללית, כלומר לתאר תת קבוצה לא סופית של עצים מהמשפחה, ולא עץ יחיד.

- כל קודקוד בעץ הוא או עלה או שיש לו שני בנים.
- הגודל של כל תת-עץ הוא מהצורה $2^k - 1$ כאשר k מספר שלם כלשהו (k יכול להיות שונה לכל תת-עץ).
- העומק הממוצע של קודקוד הוא $O(\log n)$ (תזכורת: העומק של קודקוד הוא מספר הצלעות במסלול מהשורש אליו).

שאלה 2 - קטעים במישור

א. נתונה קבוצה $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ של n קטעים אופקיים על ציר ה- x : לכל קטע s_i יש נקודת התחלה r_i ונקודת סיום b_i . הראו כיצד ניתן לבנות מבנה נתונים עבור הקבוצה S , כך שבהינתן נקודת שאילתה p על ציר ה- x , המבנה יחזיר בזמן $O(\log n)$ את מספר הקטעים מ- S שמכילים את p . מהו זמן העיבוד המקדים (הזמן שלוקח לאתחל את מבנה הנתונים עם הקטעים (s_1, s_2, \dots, s_n) ?

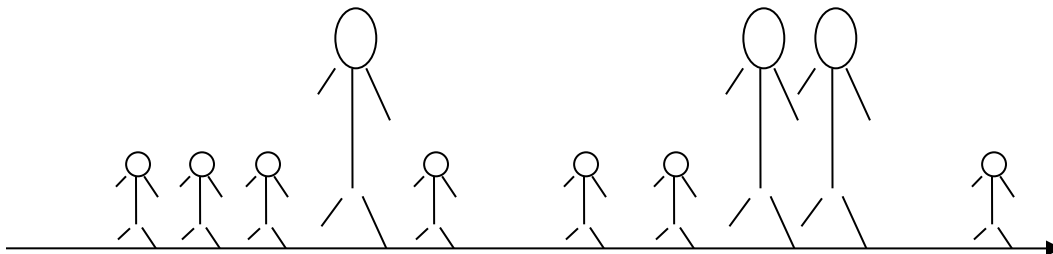
ב. נתונה קבוצה $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ של n קטעים אופקיים מקבילים לציר ה- x : לכל קטע s_i יש נקודת התחלה r_i , נקודת סיום b_i , וגובה y_i .

1. הניחו שהקטעים ב- S הוכנסו לעץ חיפוש בינארי בגובה h הממוין לפי גובה הקטעים. בהינתן טווח $[y_1, y_2]$, הראו כיצד ניתן למצוא בעץ את כל הקטעים מ- S שנמצאים מעל y_1 ומתחת ל- y_2 בזמן $O(h + k)$, כאשר k הוא מספר הקטעים שנמצאים בטווח.
2. הראו כיצד ניתן לבנות מבנה נתונים עבור הקבוצה S , כך שבהינתן קטע אנכי Q , המבנה יחזיר את מספר הקטעים מ- S שנחתכים עם Q . סיבוכיות הזיכרון הנדרשת היא $O(n \log n)$, וזמן השאילתה (הזמן למציאת מספר הקטעים שנחתכים עם Q) יהיה $O(\log n)$, כאשר c קבוע. רמז: העזרו בחלק הראשון של סעיף ב' ובמבנה של סעיף א'.

שימו לב! בכל הסעיפים של השאלה ניתן להניח שאין שתי נקודות קצה זהות ושאינן שני קטעים אופקיים באותו הגובה. בנוסף, הקבוצה S לא משתנה (כלומר אין צורך לדאוג להכנסות ומחיקות של קטעים מ- S).

שאלה 3 – גמדים וענקים

על כוכב הלכת "גוליבר" חיים להם ביחד הגמדים והענקים. הגמדים אוהבים מאוד לדבר, גמד ידבר עם כל גמד אחר שהוא רואה. לעומתם, הענקים שונאים רעש! עליכם לתחזק מבנה נתונים עבור הגמדים והענקים, שעומדים אחד לצד השני על קו ישר.



על המבנה לתמוך בפעולות הבאות:

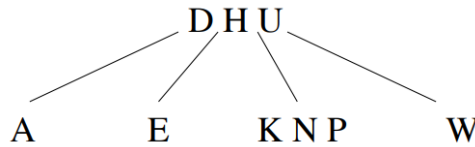
שם פעולה	תאור פעולה	זמן ריצה דרוש
Init()	אתחול מבנה נתונים ריק.	$O(1)$ במקרה הגרוע
InsertDwarf(location)	הכנסת גמד במיקום location (המיקום הוא מספר ממשי המייצג נקודה על ציר ה-X. המיקום הוא המזהה של הגמד ואינו משתנה לאורך זמן). ניתן להניח שלא קיים יצור במיקום location במבנה לפני פעולת ההכנסה.	$O(\log n)$ במקרה הגרוע
InsertGiant(location)	הכנסת ענק במיקום location. (המיקום הוא מספר ממשי המייצג נקודה על ציר ה-X. המיקום הוא המזהה של הענק ואינו משתנה לאורך זמן). ניתן להניח שלא קיים יצור במיקום location במבנה לפני פעולת ההכנסה.	$O(\log n)$ במקרה הגרוע
IsTalking(L1,L2)	החזרת תשובה לשאלה "האם הגמד במיקום L1 רואה את הגמד במיקום L2?" (ולכן גם מדבר איתו). שני גמדים רואים זה את זה אם אין ענק ביניהם. במידה ולא קיים גמד באחד המיקומים L1 או L2 יש להחזיר הודעת שגיאה.	$O(\log n)$ במקרה הגרוע
Remove(location)	מחק את היצור (גמד או ענק) שנמצא במיקום location. אם אין יצור במקום location יש להדפיס הודעת שגיאה.	$O(\log n)$ במקרה הגרוע
WhomTalking(location)	יש להדפיס את מיקומי כל הגמדים שיכולים לדבר עם הגמד הנמצא במיקום location. ניתן להניח שקיים גמד במיקום location ואין צורך לבדוק זאת.	$O(\log n+k)$ במקרה הגרוע, כאשר k מספר הגמדים שיכולים לדבר עם הגמד הנמצא במיקום location

הבהרה: n – הינו מספר היצורים במבנה ברגע נתון.

תארו בקצרה את מבנה הנתונים, ספקו אלגוריתם לכל אחת מהשיטות והוכיחו עמידה בזמני הריצה.

שאלה 4 – הכנסות ומחיקות

נתון עץ-B עם פרמטר $t = 2$:



- א. בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה סדרה של פעולות על עץ-B. בכל סעיף, התחילו מהעץ הנתון בציר, וציירו את העץ המתקבל לאחר ביצוע כל אחת מהפעולות בסדרה הנתונה בסעיף (באופן אינקרמנטלי). אין דרישה להראות שלבי ביניים בתהליך ההכנסה/מחיקה, אך אם תציירו שלבי ביניים תוכלו לקבל ניקוד חלקי על השאלה במידה ותהיה שגיאה בתוצאה הסופית.
1. הכנסת J, הכנסת M.
 2. מחיקת A, מחיקת H, מחיקת W.
- ב. ציירו עץ AVL חוקי שמכיל את הקודקודים של העץ הנתון בציר. לאחר מכן ציירו את העץ המתקבל מעץ ה-AVL שציירתם לאחר הכנסת C, ולבסוף ציירו את העץ המתקבל ממנו לאחר הכנסת L.

שאלה 5 – עץ-B משופר

- א. ידוע כי פעולות חיפוש, הכנסה, ומחיקה על B-tree מתבצעות בזמן $O(t \cdot h)$ (כאשר h הוא גובה העץ, ו-t יכול להיות גדול יותר מ-h). כיצד ניתן להקטין את זמן הריצה עבור פעולת החיפוש ל- $O(\log t \cdot h)$? זמן הריצה של פעולות הכנסה ומחיקה ישאר $O(t \cdot h)$. כתבו את הרעיון והסבירו מדוע הפתרון שלכם משיג את זמני הריצה הנדרשים.
- ב. בכיתה ראינו כיצד ע"י הוספת שדה size (גודל תת העץ) לכל קודקוד בעץ AVL, ניתן למצוא את האיבר ה-k בגודלו בעץ בזמן $O(\log(n))$. הראו כיצד ניתן לענות על אותה שאלתה בעץ-B עם פרמטר t (כלומר מציאת המפתח ה-k בגודלו בעץ), שוב ע"י הוספת שדה יחיד לכל קודקוד בעץ. ניתן להניח שכל המפתחות בעץ שונים זה מזה. מה יהיה זמן השאילתה?

עבודה נעימה!