1. $\Leftarrow$ תהי $M = \{Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, q_{acc}, q_{rej}\}$ מ״ט בעלת סרט אינסופי חד כיווני, ותהי שפה L כך ש$L(M) = L$. נגדיר $M' = \{Q, \Sigma, \Gamma \cup \{@\}, \delta', s, q_{acc}, q_{rej}\}$ מ״ט בעלת סרט אינסופי דו כיווני ונראה כי $L(M') = L$.
נסמן את הסרט של M באופן הבא: $t_1, t_2, t_3, \dots$, ואת הסרט של M' על פיו: $\dots, t_{-3}, t_{-2}, t_{-1}, t_0, t_1, t_2, t_3, \dots$, כאשר t_0 הינו המיקום על הסרט שבהם מתחילים ראשי המכונות (היכן שרשומה האות הראשונה של הקלט ושאר הקלט על $t_1, t_2, t_3, \dots$), ועל הסרט של M' במיקום t_{-1} יהיה כתוב הסימן @ ומשמאלו $\bar{b}$ אינסופי. בנוסף, $\delta' = \delta \bigcup_{q \in Q \setminus \{q_{acc}, q_{rej}\}} \{(q, @) \to (q, @, R)\}$.
ניתן להבחין כי M' מחקה לחלוטין את M, למעט כאשר ראש המכונה נמצא בראש הסרט והפונקציה מורה $\delta(q, a) = (q', a', L)$: ראש המכונה של M יכתוב ב t_0 את a', יישאר ב t_0 והמצב הבא הינו q'. לעומת זאת, ראש המכונה של M' יכתוב ב t_0 את a', יזוז ל t_{-1} והמצב הבא הינו q', ולאחר מכן יחזור מיד ל t_0 מבלי לשנות את הסרט והמצב. פעולות אלה הינן זהות, ובסה״כ נבין כי M' זהה לחלוטין ל M ולכן $L(M') = L$.

$\Rightarrow$ תהי $M = \{Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, q_{acc}, q_{rej}\}$ מ״ט בעלת סרט אינסופי דו כיווני, ותהי שפה L כך ש$L(M) = L$. נגדיר $M' = \{Q', \Sigma, \Gamma \cup \{+, -\}, \delta', s^+, q_{acc}, q_{rej}\}$ מ״ט בעלת סרט אינסופי חד כיווני ונראה כי $L(M') = L$.
נסמן את הסרט של M באופן הבא: $\dots, t_{-3}, t_{-2}, t_{-1}, t_0, t_1, t_2, t_3, \dots$, ואת הסרט של M' על פיו: $t_{switch}, t_0, t_{-1}, t_1, t_{-2}, t_2, t_{-3}, t_3, \dots$, כאשר t_0 הינו המיקום על הסרט שבהם מתחילים ראשי המכונות (היכן שרשומה האות הראשונה של הקלט ושאר הקלט על $t_1, t_2, t_3, \dots$), ועל הסרט של M' במיקום t_{switch} יהיה כתוב הסימן +.
$Q' = \{q^+, q^- : q \in Q\}$.
בנוסף, לכל $q_i, q_j \in Q, a, a' \in \Sigma$ כך ש $\delta(q_i, a) = (q_j, a', direction)$ נגדיר את δ' באופן הבא:

$direction$	$+$	$-$
R	$\delta'(q_i^+, a) = (q_j^+, a', RR)$	$\delta'(q_i^-, a) = (q_j^-, a', LL)$
L	$\delta'(q_i^+, a) = (q_j^+, a', LL)$	$\delta'(q_i^-, a) = (q_j^-, a', RR)$
S	$\delta'(q_i^+, a) = (q_j^+, a', S)$	$\delta'(q_i^+, a) = (q_j^+, a', S)$

לכל $q \in Q$ נוסיף ל δ' את המעברים:

$$(q^+, +) \to (q^-, -, RR) \ , \ (q^-, -) \to (q^+, +, R)$$

ניתן לראות כי M' מחקה לחלוטין את M ע״י כך שהיא מחלקת את הסרט החד כיווני העומד לרשותה לסרט דו כיווני, כאשר כל תא לסירוגין מסמל כיוון אחר. בעזרת המצב המכונה יודעת ״באיזה צד״ של הסרט היא ועושה מעבר כפול על הסרט, ובעזרת התא t_{switch} המכונה ״מחליפה צד״. בסה״כ נבין כי M' זהה לחלוטין ל M ולכן $L(M') = L$.

2. א. נגדיר מ"ט 4-סרטית המקבלת כקלט מספר בכתיב אונרי ופועלת באופן הבא:

הקלט מופיע על סרט A, המכונה כותבת 1 על הסרטים B ו C ונכנסת ללואה הבאה:

- אם סרט A שווה לסרט B המכונה מקבלת
- אם סרט A קטן מסרט B המכונה דוחה
- מחברת את הסרטים B ו C וכותבת על סרט D את תוצאת החיבור
- מעתיקה את סרט C לסרט B
- מעתיקה את סרט D לסרט C
- מוחקת את סרט D

ב. נגדיר מ"ט מונה בעלת 2 סרטי עבודה A ו B וסרט הדפסה C:

אתחול: רושמת 1 בקצה השמאלי של הסרטים A ו B ונכנסת ללולאה הבאה:

a. אם סרט B קטן מסרט A תדפיס B, לאחריו +, לאחריו A ולאחריו #, אחרת קפוץ ל c.
b. תגדיל את B וחזור ל a.
c. תדפיס B, לאחריו +, לאחריו A ולאחריו #.
d. תקטין את B.
e. אם סרט B אינו ריק תדפיס A, לאחריו +, לאחריו B ולאחריו #, אחרת קפוץ ל g.
f. תקטין את B וחזור ל e.
g. רשום 1 בקצה השמאלי של B.
h. תגדיל את A וחזור ל a.

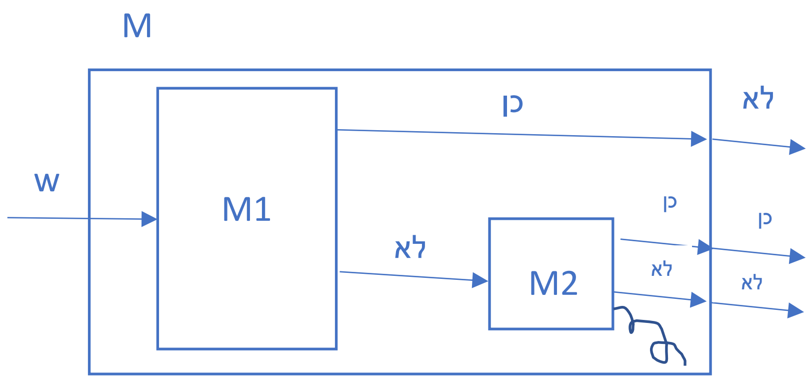
3. א. **לא נכון -** $L_1 = \Sigma^*, L_2 = L_{acc}, L_1\backslash L_2 = \overline{L_{acc}}$

Σ^* ניתנת להכרעה (מ״ט אשר מתעלמת מהקלט ומחזירה ״כן״), L_{acc} ניתנת לקבלה כפי שנראה בכיתה אולם $\overline{L_{acc}}$ אינה ניתנת לקבלה כפי שנראה בכיתה גם כן.

ב. **נכון** – L_1 ניתנת להכרעה אז קיימת מ״ט M_1 המכריעה את L_1,
L_2 ניתנת לקבלה אז קיימת מ״ט M_2 המקבלת את L_2.

נגדיר מ״ט M אשר בהינתן קלט w מסמלצת את M_1 על w:

- אם M_1 אומרת ״כן״ אזי M תחזיר ״לא״.
- אם M_1 אומרת ״לא״ אזי M תסמלץ את M_2 על w ועונה כמותה



כעת נוכיח כי $w \in L(M) \Leftrightarrow w \in L_2/L_1$:

$\Rightarrow$ תהי $w \in L_2/L_1$ אזי $w \in L_2$ וגם $w \notin L_1$.

$w \notin L_1$ אזי M_1 מחזירה עבור w ״לא״, $w \in L_2$ אזי M_2 מחזירה עבור w ״כן״, וע״פ תיאור M היא תחזיר עבור w ״כן״ ומתקיים $w \in L(M)$ כנדרש.

$\Leftarrow$ תהי $w \in L(M)$ אזי ע״פ תיאור M מתקיים כי M_1 מחזירה ״לא״ עבור w וגם M_2 מחזירה ״כן״ עבור w.

M_1 מחזירה ״לא״ עבור w אזי $w \notin L_1$, M_2 מחזירה ״כן״ עבור w אזי $w \in L_2$, ובסה״כ $w \in L_2/L_1$ כנדרש.

ג. **נכון** – $\overline{L_1}$ ניתנת לקבלה אז קיימת מ״ט M_1 המקבלת את $\overline{L_1}$, $\overline{L_2}$ ניתנת לקבלה אז קיימת מ״ט M_2 המקבלת את $\overline{L_2}$.

נגדיר מ״ט M אשר בהינתן קלט w מריצה את M_1 ו M_2 במקביל על w.

- אם M_1 עצרה וקיבלה M תעצור ותקבל.
- אם M_2 עצרה וקיבלה M תעצור ותקבל.
- אם M_1 ו M_2 עצרו ודחו M תעצור ותדחה.

נשים לב כי: $\overline{L_1} \cup \overline{L_2} = \overline{L_1 \cap L_2}$.

כעת נוכיח את הטענה הבאה: $w \in L(M) \Leftrightarrow w \in \overline{L_1} \cup \overline{L_2}$:

$\Leftarrow$ תהי $w \in \overline{L_1} \cup \overline{L_2}$ אזי $w \in \overline{L_2}$ או $w \in \overline{L_1}$.

$w \in \overline{L_2}$ או $w \in \overline{L_1}$ אזי M_1 עצרה וקיבלה את w או M_2 עצרה וקיבלה w ולכן ע״פ תיאור M היא תחזיר עבור w ״כן״ ומתקיים $w \in L(M)$ כנדרש.

$\Rightarrow$ תהי $w \in L(M)$ אזי ע״פ תיאור M, M_1 עצרה וקיבלה את w או M_2 עצרה וקיבלה w. ולכן $w \in \overline{L_2}$ או $w \in \overline{L_1}$, כלומר $w \in \overline{L_1} \cup \overline{L_2} = \overline{L_1 \cap L_2}$.

4. א. נגדיר פונקציה $f: \Sigma^* \to \Sigma^*$ באופן הבא: $f(< M >, < w' >) =< M_{w'} >$, כאשר $M_{w'}$ הינה מ״ט אשר בהינתן קלט מתעלמת ממנו ומסמלצת את ריצת M על w'.

(1) f ניתנת לחישוב מכיוון שקיימת מ״ט אשר בהינתן קלט $< M >, < w' >$ יכולה לכתוב את הפקודות הבאות עבור המכונה החדשה $M_{w'}$:
- מחקי את הסרט וכתבי עליו w'.
- הדפיסי את הקידוד של המכונה M.
- הריצי את M על המילה w' והחזירי כמוה

(2) אם $< M >, < w' > \in L_{halt}$ אזי M עוצרת על w.
לכן, $f(< M >, < w' >) =< M_{w'} >$ עוצרת על כל קלט, ובפרט על w, ולכן $f(< M >, < w' >) \in L_{halt}^{w}$.
אם $< M >, < w' > \notin L_{halt}$ אזי M לא עוצרת על w.
לכן, $f(< M >, < w' >) =< M_{w'} >$ לא עוצרת על כל קלט, ובפרט על w, ולכן $f(< M >, < w' >) \in L_{halt}^{w}$.

ב. נוכיח כי $L_{acc} \leq L$ ומכאן נסיק כי $\overline{L_{acc}} \leq \bar{L}$, ומכיוון ש $\overline{L_{acc}} \notin RE$ ע״פ משפט הרדוקציה נקבל כי $\bar{L} \notin RE$ ומכאן נבין כי $L \notin co-RE$.

נגדיר פונקציה $f: \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ באופן הבא : $f(<M>,<w>) =<M'>$, כאשר M' היא מ״ט אשר בהינתן קלט x, מריצה את M על w למשך $86 \cdot |x|$ צעדים. אם M קיבלה, M' מקבלת ואחרת, דוחה.

(1) f ניתנת לחישוב מכיוון שקיימת מ״ט אשר בהינתן קלט $<M>,<w>$ יכולה לכתוב את הפקודות הבאות עבור המכונה החדשה M':
- מחקי את הסרט וכתבי עליו w.
- הדפיסי את הקידוד של המכונה M.
- הריצי את M על המילה w במשך $86 \cdot |x|$ והחזירי כמוה אם התקבלה הכרעה, אחרת תדחי.

(2) אם $<M>,<w> \notin L_{acc}$ אזי $w \notin L(M)$. לפיכך, לכל x, M אינה מקבלת את w לאחר $86 \cdot |x|$ צעדים ולכן M' תדחה כל קלט x תוך $86 \cdot |x|$ צעדים, אזי לא קיים קלט x כך ש M' מקבלת את x תוך $86 \cdot |x|$ צעדים, ולכן $f(<M>,<w>) \notin L$.
אם $<M>,<w> \in L_{acc}$ אזי $w \in L(M)$. נניח ש w מתקבלת ע״י M תוך k צעדים. k סופי ולכן קיים קלט x כך ש $k \leq 86 \cdot |x|$ אותו M' תקבל, ומכאן שקיים קלט x כך ש M' מקבלת את x תוך $86 \cdot |x|$ צעדים, ולכן $f(<M>,<w>) \in L$.

ג. נוכיח כי $L \notin RE$ וגם $\bar{L} \in RE$ ומכך נסיק כי $L \in co-RE \backslash RE$.

<u>$L \notin RE$</u>

נוכיח כי $L_{empty} \leq L$ ומכיוון ש $L_{empty} \notin RE$ נסיק כי $L \notin RE$.

נגדיר פונקציה $f: \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ באופן הבא : $f(<M>) =<M, q_{acc}>$.

(1) f ניתנת לחישוב מכיוון שקיימת מ״ט אשר בהינתן קלט $<M>$ יכולה למצוא ולסמן את q_{acc}.

(2) אם $<M> \in L_{empty}$ אזי $L(M) = \emptyset$, ומכאן שלכל קלט x מתקיים M אינה מגיעה ל q_{acc} ומכאן ש $<M, q_{acc}> \in L$.
אם $<M> \notin L_{empty}$ אזי $L(M) \neq \emptyset$, ומכאן שקיים קלט x עבורוM מגיעה ל q_{acc} ומכאן ש $<M, q_{acc}> \notin L$.

$\underline{\bar{L} \in RE}$

נגדיר M' מ״ט אשר מקבלת את $\bar{L}$:

בהינתן $< M , q >$, M' תסרוק את קידוד M ותוסיף מצב חדש q'. בכל פעם שתפגוש קידוד של q תחליפו בקידוד של q_{acc}, ובנוסף בכל פעם שתפגוש קידוד של q_{acc} או q_{rej} תחליפו בקידוד של q'. לאחר מכן, M' תסמלץ את ריצת M (המעודכנת) עבור כל קלט אפשרי בשפה לפי סדר לקסיקוגרפי. אם M תחזיר ״כן״ אזי M' תחזיר ״כן״ (או שתתקע).

אם $< M, q >\in \bar{L}$ אזי קיים קלט w אשר בחישובו M מגיעה ל q. ע״פ תיאורה, M' תגיע לחישוב w לאחר מספר סופי של צעדים, ומכיוון ש M הגיעה במקור ל q ובריצה זו ל q_{acc}, M' תחזיר ״כן״.

אם $< M, q >\notin \bar{L}$ אזי לא קיים קלט w אשר בחישובו M מגיעה ל q. ע״פ תיאורה, M' לא תגיע למצב מקבל או דוחה לעולם, ולכן תתקע.

בסה״כ הראינו כי $\bar{L} \in RE$, וגם $L \notin RE$ ומכאן ש $L \in co - RE\backslash RE$ כנדרש.