1 שאלה 1 (20 נק')

עבור א"ב Σ נגדיר סדר כלשהו על הא"ב, ונגדיר באמצעותו את הסדר הבא על Σ^*. הסדר יוגדר בדומה לסדר לקסיקוגרפי, פרט לכך שכאשר משווים שתי מילים בעלות אורך שונה, המילה הקצרה יותר תמיד תהיה קטנה יותר בסדר.[1] כעת, לכל $i \in \mathbb{N}$ נגדיר את $\#_i$ להיות המילה ה־i בסדר. לדוגמא עבור $\Sigma = \{a, b\}$ וסדר בו $a < b$ נקבל כי:

$$\#_0 = \varepsilon, \#_1 = a, \#_2 = b, \#_3 = aa, \#_4 = ab, \dots$$

תהא L שפה כלשהי מעל Σ, נגדיר את המטריצה האינסופית $M(L)$ באופן הבא:

$$M(L)[i,j] = \begin{cases} 1 & \text{if } \#_i \cdot \#_j \in L \\ 0 & \text{if } \#_i \cdot \#_j \notin L \end{cases}$$

לדוגמא, עבור השפה $L = a^*$ מעל הא"ב $\Sigma = \{a, b\}$ המטריצה תראה כך:

$$M(L) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

הוכיחו כי L רגולרית אם ורק אם קיימות במטריצה מספר סופי של שורות ייחודיות.

__טענת עזר:__ $\#_{i_2} \equiv_L \#_{i_1}$ אמ"ם $Row_{i_1} = Row_{i_2}$.

__הוכחת טענה ראשית:__

$\Leftarrow$ נניח כי L רגולרית, אז ע"פ משפט מהכיתה $Rank(L)$ סופי.

נניח בשלילה שקיים מספר אינסופי של שורות ייחודיות, משמע קיימות $Row_{i_1}, Row_{i_2}, Row_{i_3}, \dots$ כך שלכל $m, n \in \mathbb{N}$ שונים מתקיים $Row_{i_m} \neq Row_{i_n}$. ע"פ טענת העזר קיימות מספר אינסופי של מילים שאינן שקולות, משמע קיימות $\#_{i_1}, \#_{i_2}, \#_{i_3}, \dots$ כך שלכל $m, n \in \mathbb{N}$ שונים מתקיים $\#_{i_m} \not\equiv_L \#_{i_n}$, לכן קיים מספר אינסופי של מחלקות שקילות בסתירה לכך ש $Rank(L)$ סופי.

$\Rightarrow$ נניח כי קיימות במטריצה מספר סופי של שורות ייחודיות.

נניח בשלילה ש L אינה רגולרית, אז ע"פ משפט מהכיתה $Rank(L)$ אינסופי. מכל מחלקת שקילות נבחר נציג $\#_{i_1}, \#_{i_2}, \#_{i_3}, \dots$, אז קיבלנו כי קיימות מספר אינסופי של מילים שאינן שקולות $\#_{i_1}, \#_{i_2}, \#_{i_3}, \dots$ כך שלכל $m, n \in \mathbb{N}$ שונים מתקיים $\#_{i_m} \not\equiv_L \#_{i_n}$. מכאן, ע"פ טענת העזר קיימות מספר אינסופי של שורות ייחודיות $Row_{i_1}, Row_{i_2}, Row_{i_3}, \dots$ כך שלכל $m, n \in \mathbb{N}$ שונים מתקיים $Row_{i_m} \neq Row_{i_n}$, בסתירה לכך שקיימות במטריצה מספר סופי של שורות ייחודיות.

__הוכחת טענת עזר:__

$\Leftarrow$ נניח כי $\#_{i_1} \equiv_L \#_{i_2}$, משמע לכל $\#_j \in \Sigma^*$ מתקיים $\#_{i_1} \cdot \#_j \in L \Leftrightarrow \#_{i_2} \cdot \#_j \in L$, ומכאן ע"פ הגדרת $M(L)$ לכל $\#_j \in \Sigma^*$ מתקיים $M(L)[i_1, j] = \sigma \Leftrightarrow M(L)[i_2, j] = \sigma$ עבור $\sigma \in \{0,1\}$ ולכן $Row_{i_1} = Row_{i_2}$.

$\Rightarrow$ נניח כי $Row_{i_1} = Row_{i_2}$, אזי ע"פ הגדרת $M(L)$ לכל $\#_j \in \Sigma^*$ מתקיים $M(L)[i_1, j] = \sigma \Leftrightarrow M(L)[i_2, j] = \sigma$ עבור $\sigma \in \{0,1\}$, ולכן לכל $\#_j \in \Sigma^*$ מתקיים $\#_{i_1} \cdot \#_j \in L \Leftrightarrow \#_{i_2} \cdot \#_j \in L$, ומכאן ש $\#_{i_1} \equiv_L \#_{i_2}$.

2 שאלה 2 (15 נק')

תהא L שפה רגולרית כלשהי. יהיו $A = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ מחלקות השקילות תחת היחס $\sim_L$. תהא $A' \subseteq A$ קבוצה כלשהי של מחלקות שקילות מתוך A, ותהא L' השפה הבאה:

$$L' = \bigcup_{A_j \in A'} A_j$$

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

1. L' רגולרית
2. $\text{rank}(L') \leqslant \text{rank}(L) = n$
3. $\text{rank}(L') \geqslant |A'|$
4. קיימת שפה L ובחירה של מחלקות שקילות A' כך ש $\text{rank}(L') < \text{rank}(L)$.

[1] סדר זה נקרא סדר SHORTLEX והוא לרוב הסדר בו נעשה שימוש בשפות פורמליות.

1. **<u>הוכחה:</u>**

<u>טענת עזר:</u> לכל $w_1,w_2 \in \Sigma^*$, אם $w_1 \equiv_L w_2$ אז $w_1 \equiv_{L'} w_2$.

<u>הוכחת טענה ראשית:</u> נניח בשלילה ש L' אינה רגולרית, אז ע"פ משפט מהכיתה $Rank(L')$ אינסופי. אז קיימת סדרה אינסופית של מילים $w_1,w_2,w_3,\dots$ כך שלכל $m,n \in \mathbb{N}$ שונים מתקיים $w_m \not\equiv_{L'} w_n$. ע"פ טענת העזר קיימת סדרה אינסופית של מילים $w_1,w_2,w_3,\dots$ כך שלכל $m,n \in \mathbb{N}$ שונים מתקיים $w_m \not\equiv_L w_n$. אזי $Rank(L)$ אינסופי, וע"פ משפט מהכיתה L אינה רגולרית בסתירה לנתון.

<u>הוכחת טענת עזר:</u> תהיינה $w_1,w_2 \in \Sigma^*$ כך ש $w_1 \equiv_L w_2$. נניח בשלילה כי $w_1 \not\equiv_{L'} w_2$, אזי קיימת $z \in \Sigma^*$ כך שבה"כ $w_1 z \in L'$ וגם $w_2 z \notin L'$, אזי מהגדרת L' נבין כי $w_2 z \in A_j$, $w_1 z \in A_i$ כך ש $A_i \in A'$ וגם $A_j \notin A'$. לכן, $A_i \neq A_j$ ובסה"כ מהגדרת הקבוצה A ניתן להבין כי $w_1 z \not\equiv_L w_2 z$. אזי קיימת $z' \in \Sigma^*$ כך שבה"כ $w_1 z z' \in L$ וגם $w_2 z z' \notin L$, ומכאן ש zz' סיפא מפרידה בין w_1,w_2 תחת L בסתירה כך ש $w_1 \equiv_L w_2$.

2. **<u>הוכחה:</u>** נניח בשלילה כי $m = Rank(L') > Rank(L) = n$.

$m = Rank(L')$ אז קיימות $w_1,\dots,w_m \in \Sigma^*$ כך שלכל $1 \le i \neq j \le m$ מתקיים $w_i \not\equiv_{L'} w_j$. אזי ע"פ טענת העזר מהסעיף הקודם קיימות $w_1,\dots,w_m \in \Sigma^*$ כך שלכל $1 \le i \neq j \le m$ מתקיים $w_i \not\equiv_L w_j$, ומכאן ש $n = Rank(L) \ge m$ בסתירה להנחה.

3. **<u>דוגמה נגדית:</u>**

$$\Sigma = \{0\}$$

$$L = \{0^n : \text{זוגי } n\}$$

$$A = \left\{A_1 = \{0^n : \text{זוגי } n\}, A_2 = \{0^n : \text{אי זוגי } n\}\right\}$$

$$A' = A$$

$$L' = A_1 \cup A_2 = \{0\}^*$$

$$2 = |A'| > Rank(L') = Rank(\{0\}^*) = 1$$

4. **<u>הוכחה:</u>** ראה דוגמה מסעיף קודם, $2 = Rank(L) > Rank(L') = 1$.

3 שאלה 3 (25 נק')

הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות

1. לכל שפה רגולרית L ולכל אות $\sigma \in \Sigma$ מתקיים $rank(L) = rank(f_\sigma(L))$ כאשר $f_\sigma(L)$ מוגדרת כמו בתרגול כשפה הבאה:

$$f_\sigma(L) = \{w \in \Sigma^* : \sigma \cdot w \in L\}$$

2. לכל שפה רגולרית מתקיים $rank(L) = rank(L^R)$
3. עבור שפה רגולרית לא ריקה L נסמן ב־k את אורך המילה הקצרה ביותר ב־L. אז $rank(L) > k$
4. קיימות שתי שפות רגולריות L_1 ו־L_2 כך ש $rank(L_1 \backslash L_2) > rank(L_1) \cdot rank(L_2)$

1. **<u>דוגמה נגדית:</u>**

$\Sigma = \{0,1\}$

$L = \{0 \cdot w : w \in \Sigma^*\}$

$f_0(L) = \{w \in \Sigma^* : 0 \cdot w \in L\} = \Sigma^*$

Σ^* רגולרית וגם $\{0\}$ רגולרית, ומתכונת סגירות לשרשור של שפות רגולריות ניתן להבחין כי L שפה רגולרית. בנוסף, ניתן להבחין כי $1 \not\equiv_L 0$ מכיוון ש $0\varepsilon \in L$ וגם $1\varepsilon \notin L$ ולכן $Rank(L) \geq 2$, אולם $Rank\big(f_0(L)\big) = Rank(\Sigma^*) = 1$ (ע"פ [#]), ובסה"כ קיבלנו כי $Rank(L) \neq Rank(f_0(L))$.

2. **<u>דוגמה נגדית:</u>**

$\Sigma = \{0,1\}$

$L = \{0 \cdot w : w \in \Sigma^*\}$

$L^R = \{w \cdot 0 : w \in \Sigma^*\}$

ניתן לראות כי $Rank(L) \geq 3$ אם נבחר את הנציגים $\varepsilon, 0,1$, אזי 1 הינה סיפא מפרידה בין $\varepsilon, 0$, 1 הינה סיפא מפרידה בין 0,1 ובנוסף 0 הינה סיפא מפרידה בין $\varepsilon, 1$.

כעת ניתן לראות כי $Rank(L^R) = 2$, כך שמחלקות השקילות הינן מילים שמסתיימות ב – 0 ומילים שאינן מסתיימות ב – 0. ניתן לראות כי ε הינה סיפא מפרידה בין מילים מהמחלקה הראשונה למילים מהמחלקה השנייה. בנוסף, כל מילה אחרת שאינה ריקה אינה סיפא מפרידה בין כל שתי מילים מכל אחת מהמחלקות הנ"ל (משום שהמילה מסתיימת ב – 0 או מסתיימת ב – 1).

בסה"כ הראינו כי $Rank(L) \neq Rank(L^R)$.

3. **<u>הוכחה:</u>** תהי $w = \sigma_1 \cdots \sigma_k$ המילה הקצרה ביותר ב L. נסתכל על המילים $\varepsilon, \sigma_1, \sigma_1\sigma_2, \ldots, \sigma_1 \cdots \sigma_k$. ראשית נבחין כי לכל $1 \leq i < k$ מתקיים כי $\sigma_{i+1} \cdots \sigma_k$ הינה סיפא מפרידה בין ε לבין $\sigma_1 \cdots \sigma_1$ משום ש $\sigma_1 \cdots \sigma_i\sigma_{i+1} \cdots \sigma_k \in L$ ו $\varepsilon\sigma_{i+1} \cdots \sigma_k \notin L$ מכיוון שאורכה קטן ממש מk, אורך המילה הקצרה ביותר בשפה. בנוסף, נבחין כי לכל $1 \leq j < i < k$ מתקיים כי $\sigma_{i+1} \cdots \sigma_k$ הינה סיפא מפרידה בין $\sigma_1 \cdots \sigma_i$ לבין $\sigma_1 \cdots \sigma_j$ גם משיקולי אורך המילה. נשים לב כי גם ε הינה סיפא מפרידה בין $\sigma_1 \cdots \sigma_k$ לבין כל אחת מהמילים $\varepsilon, \sigma_1, \sigma_1\sigma_2, \ldots, \sigma_1 \cdots \sigma_{k-1}$ מאותם השיקולים. בסה"כ מצאנו $k+1$ מחלקות שקילות שונות, ולכן $Rank(L) > k$ כנדרש.

4. **<u>הפרכה:</u>**

נוכיח את הטענה הבאה: עבור שפות L_1, L_2 רגולריות מתקיים $Rank(L_1 \backslash L_2) \leq Rank(L_1) * Rank(L_2)$. שתי השפות רגולריות אז קיימים אוטומטים דטרמיניסטיים $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, s_1, A_1), M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, s_2, A_2)$ המקבלים את L_1, L_2 בהתאמה ומקיימים $|Q_1| = Rank(L_1), |Q_2| = Rank(L_2)$. לפי מה שראינו בכיתה האוטומט $M_2' = (Q_2, \Sigma, \delta_2, s_2, Q_2 \backslash A_2)$ מקבל את השפה $\overline{L_2}$. כעת נסתכל על השפה $L_1 \backslash L_2 = L_1 \cap \bar{L}_2$. ראינו בכיתה כי אוטומט המכפלה של M_1, M_2' שמספר המצבים בו הינו $|Q_1 \times Q_2|$ מקבל את השפה $L_1 \cap \bar{L}_2$. בסה"כ קיבלנו כי:

$Rank(L_1 \backslash L_2) = Rank(L_1 \cap \bar{L}_2) \leq |Q_1 \times Q_2| = |Q_1| * |Q_2| = Rank(L_1) * Rank(L_2)$ כנדרש.

4 שאלה 4 (25 נק')

רצפי RNA הם מילים מעל הא"ב $\Sigma = \{A, U, G, C\}$ והם החומר התורשתי בנגיפים רבים, ביניהם נגיף הקורונה. חוקרים מאוניברסיטת בן גוריון הצליחו לזהות מספר שפות המגדירות רצפי RNA של נגיפי קורונה. הם רוצים לדעת מי מבין השפות האלו רגולריות, כדי שאולי יוכלו להשתמש במידע זה במאמציהם לפתח תרופה.

עבור כל אחת מהשפות הבאות, קבעו האם היא רגולרית או לא.

כאשר מראים רגולריות, אין צורך בהוכחה פורמלית, מספיקה הגדרה של האוטומט/ביטוי רגולרי והסבר קצר מדוע הוא מקבל את השפה. כאשר מראים אי־רגולריות, יש לספק הוכחה פורמלית באמצעות למת הניפוח או מחלקות שקילות.

1. $AA^*U^nA^n \cup U^*A^*$ עבור $n \in \mathbb{N}$
2. עבור מילה w ומחרוזת כלשהי $s \in \Sigma^*$ נסמן ב $|w|_s$ את מספר המופעים של s כתת־מחרוזת ב־w. למשל $|w|_{GC}$ הוא מספר המופעים של תת המחרוזת GC ב־w. נגדיר את L כשפה הבאה:

$$L = \{w : |w|_{GC} = |w|_{CG} \wedge |w|_{GU} = |w|_{GA} = |w|_{CU} = |w|_{CA} = 0\}$$

3. $L = \{w : |w| = n^2 + 2n, n \in \mathbb{N}\}$
4. $L = \{G^n \cdot U^m \cdot C^{n \cdot m}, n, m \geqslant 0\}$
5. $L = \{U^i \cdot G^j \cdot C^k : (i + j + k) \mod 3 = 0, i, j, k \geqslant 0\}$
6. $L = \{w : |w| = n + 2, n \in \mathbb{N}\}$

1. **השפה אינה רגולרית:** נתבונן בקבוצת המילים $\{AU^n : n \in \mathbb{N}\}$, קל לראות כי מדובר בקבוצה אינסופית של מילים מ Σ^*. ניקח שתי מילים מקבוצה זו AU^i , AU^j כך ש $i \neq j \in \mathbb{N}$. עבור $z = A^i$ ניתן לראות כי $AU^iz = AU^iA^i$ שייכת לשפה, אך $AU^jz = AU^jA^i$ אינה שייכת לשפה, ולכן AU^i , AU^j אינן שקולות זו לזו. בסה"כ הראנו כי דרגת השפה אינסופית, וע"פ משפט מהכיתה השפה אינה רגולרית.

2. **השפה רגולרית:** נבנה את האוטומט הדטרמיניסטי $M = \{Q, \Sigma, s, \delta, A\}$ המקבל את השפה, ולפי מה שלמדנו בכיתה נבין כי השפה רגולרית:

$Q = \{s, q_1, q_2, q_3, q_4, g\}$

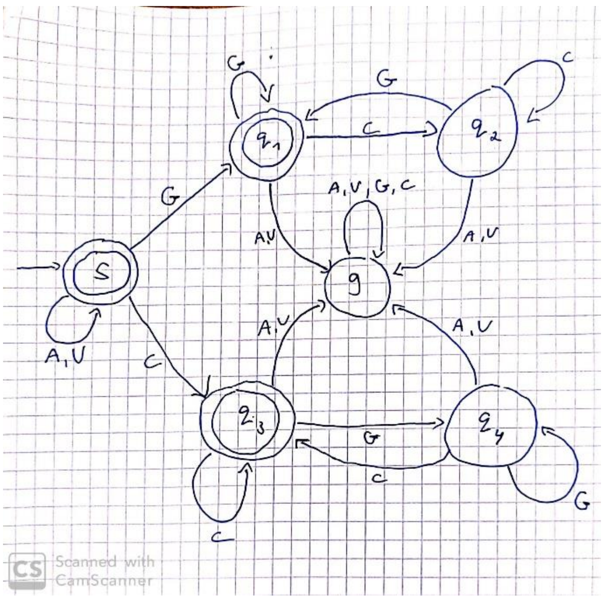
$\Sigma = \{A, U, G, C\}$

$s = s$

$A = \{s, q_1, q_3\}$

$\delta(q, \sigma) = q'$ המוגדרת באופן הבא:

q'	σ	q
s	$\sigma \in \{A, U\}$	s
q_1	G	s
q_3	C	s
q_1	G	q_1
q_2	C	q_1
g	$\sigma \in \{A, U\}$	q_1
q_1	G	q_2
q_2	C	q_2
g	$\sigma \in \{A, U\}$	q_2
q_4	G	q_3
q_3	C	q_3
g	$\sigma \in \{A, U\}$	q_3
q_4	G	q_4
q_3	C	q_4
g	$\sigma \in \{A, U\}$	q_4
g	$\sigma \in \{A, U, G, C\}$	g



ניתן לראות כי האוטומט יכול לקבל מילים שהאותיות A,U מופיעות ברישא שלהן בלבד, אחרת הוא נכנס למצב "זבל". לאחר קריאת הרישא הנ"ל אם קיימת, האוטומט עובר למצב המתאים לפי האות הראשונה שנקראה מבין G,C. נבחין כי אם האות הראשונה היא G למשל מבין השתיים, אז על מנת שהמילה תהיה בשפה האות האחרונה שתקרא היא G גם כן. שתי האפשרויות הן $|w|_{GC} = |w|_{CG}$ או $|w|_{GC} = |w|_{CG} + 1$ ע"פ אופי הקריאה של האותיות G,C לסירוגין, ולכן האוטומט יכול "לזכור" האם $|w|_{GC} = |w|_{CG}$ או לא, ומכאן האם מילה שייכת לשפה או לא. באופן דומה אם האות הראשונה מבין השתיים הינה C.

3. **השפה אינה רגולרית:** נסתכל על הסדרה העולה של אורכי המילים בשפה:

$$0,3,\dots 3,8,\dots 8,\dots,(n^2+2n),\dots,(n^2+2n),\left((n+1)^2+2(n+1)\right),\dots,\left((n+1)^2+2(n+1)\right),\dots$$

כעת נסתכל על סדרת הפרשי האורכים: $3,0\dots,0,5,0,\dots,0,\dots,0,(2n+3),0,\dots$.

ניתן לראות כי סדרה זו אינה חסומה, וע"פ מסקנה 2 מלמת הניפוח שראינו בכיתה ניתן להסיק כי השפה אינה רגולרית.

4. **השפה אינה רגולרית:** נניח בשלילה שהשפה רגולרית, לכן לפי למת הניפוח קיים קבוע N כך שלכל w בשפה, אם $|w| \geq N$ אזי קיימת חלוקה למילים $x,y,z \in \Sigma^*$ כך ש $w = xyz$ ומתקיים:

א. $y \neq \varepsilon$

ב. $|xy| \leq N$

ג. $xy^nz \in L$ לכל $n \geq 0$.

נסתכל על המילה $w = G^N U^1 C^{N*1} = G^N U C^N$. קל לראות כי $w \in L$ וגם $|w| \geq N$. לכן, קיימת חלוקה של w לשלוש מילים $x,y,z \in \Sigma^*$ כך ש $w = xyz$ המקיימת את תנאי הלמה. מכיוון ש $|xy| \leq N$ וגם $y \neq \varepsilon$ ניתן להבין כי $y = G^k$ עבור $0 < k \leq N$. נתבונן במילה $xy^2z = G^{N+k}UC^N$. מכיוון ש $k > 0$ אזי $(N+k)*1 \neq N$ ולכן xy^2z לא שייכת לשפה, בסתירה לתנאי השלישי של הלמה.

5. **השפה רגולרית:** נבנה את האוטומט הדטרמיניסטי $M = \{Q,\Sigma,s,\delta,A\}$ המקבל את השפה, ולפי מה שלמדנו בכיתה נבין כי השפה רגולרית:

$$Q = \{s, q_{0,U}, q_{1,U}, q_{2,U}, q_{0,G}, q_{1,G}, q_{2,G}, q_{0,C}, q_{1,C}, q_{2,C}, g\}$$

$$\Sigma = \{A,U,G,C\}$$

$$s = s$$

$$A = \{s, q_{3,U}, q_{3,G}, q_{3,C}\}$$

$\delta(q,\sigma) = q'$ המוגדרת באופן הבא:

q'	σ	q
g	A	s
$q_{0,\sigma}$	$\sigma \in \{G,U,C\}$	s
g	A	$q_{i,U}$, $0 \leq i \leq 2$
$q_{(i+1)mod3,\sigma}$	$\sigma \in \{U,G,C\}$	$q_{i,U}$, $0 \leq i \leq 2$
g	$\sigma \in \{A,U\}$	$q_{i,G}$, $0 \leq i \leq 2$
$q_{(i+1)mod3,\sigma}$	$\sigma \in \{G,C\}$	$q_{i,G}$, $0 \leq i \leq 2$
g	$\sigma \in \{A,U,G\}$	$q_{i,C}$, $0 \leq i \leq 2$
$q_{(i+1)mod3,C}$	C	$q_{i,C}$, $0 \leq i \leq 2$
g	$\sigma \in \{A,U,G,C\}$	g

בקריאת $w \in \Sigma^*$ האוטומט הדטרמיניסטי הנ"ל צובר את מספר המופעים של האותיות $\{U, G, C\}$ מודולו 3, כך שהוא מוודא שסדר הקריאה הינו מספר כלשהו של אותיות U, לאחר מכן מספר כלשהו של אותיות G ולבסוף מספר כלשהו של אותיות C. במידה והאוטומט קורא A או את אחת מאותיות $\{U, G, C\}$ לא בסדר הנכון הוא נכנס למצב "זבל", אחרת מגיע למצב מקבל אם אכן מספר האותיות שנקראו בסדר תקין מתחלק ב 3 ללא שארית.

6. **השפה רגולרית:** נבנה את האוטומט הדטרמיניסטי $M = \{Q, \Sigma, s, \delta, A\}$ המקבל את השפה, ולפי מה שלמדנו בכיתה נבין כי השפה רגולרית:

$$Q = \{q_0, q_1, q_2\}$$

$$\Sigma = \{A, U, G, C\}$$

$$s = q_0$$

$$A = \{q_2\}$$

$$\delta(q_i, \sigma) = \begin{cases} q_1, & i = 0, \sigma \in \Sigma \\ q_2, & i \in \{1,2\}, \ \sigma \in \Sigma \end{cases}$$

האוטומט הדטרמיניסטי הנ"ל קורא 2 אותיות כלשהן, נכנס למצב המקבל ונשאר בו לא משנה עוד כמה ואילו אותיות נותרו לו לקרוא. במידה וקרא פחות מ 2 אותיות, האוטומט אינו מגיע למצב מקבל.

5 שאלה 5 (15 נק')

יהיו L_1, L_2 שפות רגולריות, ויהיו n_1, n_2 קבועי הניפוח המובטחים מלמת הניפוח עבור L_1 וL_2 בהתאמה. בסעיפים הבאים מוגדרת השפה L באמצעות L_1 ו־L_2. הוכיחו את הטענות הבאות עבור n, קבוע הניפוח של L.

1. אם $L = L_1 \cup L_2$ אז $n \leqslant \max(n_1, n_2)$. כמו־כן, קיימות שפות L_1, L_2 כך ש$n < max(n_1, n_2)$.
2. אם $L = L_1 \cap L_2$ אז קיימות שפות L_1, L_2 כך ש$n < min(n_1, n_2)$.
3. אם $L = L_1 \cdot L_2$ אז $n \leqslant n_1 + n_2$. כמו־כן, קיימות שפות L_1, L_2 כך ש$n < n_1 + n_2$.

1. **__טענת עזר:__** עבור $i \in \{1,2\}$ אם $n > n_i$ וגם עבור $w \in L_i$ לא קיימת חלוקה של w המקיימת את תנאי למת הניפוח עבור L אזי לא קיימת חלוקה של w המקיימת את תנאי למת הניפוח עבור L_i.

__הוכחת הטענה הראשית:__ נניח בשלילה כי $n > \max\{n_1, n_2\}$, אזי $n > n_1$ וגם $n > n_2$. מכיוון ש n הינו קבוע הניפוח המינימלי עבור L, קיימת $w \in L$ כך ש $|w| = n - 1$ עבורה לא קיימת חלוקה המקיימת את תנאי למת הניפוח עבור L (אחרת יכולנו לבחור קבוע ניפוח קטן יותר שהינו $n - 1$). אם $n > n_1$ וגם $n > n_2$, וגם $|w| = n - 1$ אזי $|w| \geq n_1$ וגם $|w| \geq n_2$. נניח כי $w \in L_1$, אזי $|w| \geq n_1$ וגם ע"פ טענת העזר לא קיימת חלוקה של w המקיימת את תנאי למת הניפוח עבור L_1 בסתירה לכך ש n_1 הינו קבוע הניפוח של L_1. במידה ו $w \in L_2$, נקבל סתירה באופן סימטרי.

__הוכחת טענת העזר:__ נניח בשלילה שקיימת חלוקה של w המקיימת את תנאי למת הניפוח עבור L_i. אזי ניתן לחלק את $w = xyz$ כך ש:

א. $y \neq \varepsilon$

ב. $|xy| \leq n_i$

ג. $xy^kz \in L_i$ לכל $k \geq 0$

$n_i < n$ אזי $|xy| \leq n_i < n$ וגם $L = L_1 \cup L_2$ אזי $xy^kz \in L$,לכל $k \geq 0$. מכאן שקיימת חלוקה של $w = xyz$ כך ש:

א. $y \neq \varepsilon$

ב. $|xy| \le n$

ג. $xy^kz \in L$ לכל $k \ge 0$

בסתירה לכך ש לא קיימת חלוקה של w המקיימת את תנאי למת הניפוח עבור L.

<u>דוגמה לשפות L_1, L_2 רגולריות כך ש $n < \max\{n_1, n_2\}$:</u>

נסתכל על $L_1 = \{0,01,011,0111, \ldots\} \subseteq \{0,1\}^*$ ועל $L_2 = \overline{L_1}$. ראשית נבחין כי L_1 הינה רגולרית המתקבלת ע"י הביטוי הרגולרי 01^*, ומתכונת סגירות למשלים נקבל כי L_2 הינה רגולרית גם כן. מכיוון שבתנאי למת הניפוח מתקיים $y \ne \varepsilon$ אזי $n_1 \ge 1$. בנוסף, נבחין כי 0 הינה מילה ב L_1 מאורך 1, ולכן אם $n_1 = 1$ אזי המילה 0 אמורה לקיים את תנאי למת הניפוח. $y \ne \varepsilon$ אזי החלוקה היחידה האפשרית של w הינה $x = \varepsilon, y = 0, z = \varepsilon$. עבור $k = 0$ נקבל כי $xy^kz = \varepsilon 0^0 \varepsilon = \varepsilon \notin L_1$, ולכן $n_1 > 1$. נסתכל על $L_1 \cup L_2 = \Sigma^*$. ניתן לראות כי כל מילה $w \in \Sigma^*$ שאורכה לפחות 1 ניתן לחלק לחלוקה המקיימת את תנאי למת הניפוח (מכיוון ש Σ^* מכילה כל מילה מעל הא"ב כולל המילה הריקה) ולכן $n = 1$. בסה"כ הראינו כי $n = 1 < n_1 \le \max\{n_1, n_2\}$ כנדרש.

2. **<u>דוגמה לשפות L_1, L_2 רגולריות כך ש $n < \min\{n_1, n_2\}$:</u>**

נסתכל על $L_1 = \{0,00\}, L_2 = \{0,000\}$, שפות סופיות ומכאן רגולריות. כפי שראינו בכיתה, קבוע הניפוח המינימלי עבור שפה סופית הינו אורך המילה הארוכה ביותר בשפה פלוס 1, וכך למת הניפוח מתקיימת באופן ריק. לכן $n_1 = 3, n_2 = 4$ ומכיוון ש $L_1 \cap L_2 = \{0\}$ נקבל כי $n = 2$ ומתקיים כי $n = 2 < \min\{n_1, n_2\} = 3$ כנדרש.

3.**<u>הוכחת טענה ראשית:</u>** נניח בשלילה כי $n > n_1 + n_2$ אזי בדומה לסעיף הראשון קיימת $w \in L$ כך ש $|w| = n - 1$ עבורה לא קיימת חלוקה המקיימת את תנאי למת הניפוח עבור L. מכיוון ש $n > n_1 + n_2$ וגם $|w| = n - 1$ נקבל כי $|w| \ge n_1 + n_2$. מכאן, $w \in L = L_1L_2$ אזי קיימות $w_1 \in L_1, w_2 \in L_2$ כך ש $w = w_1w_2$. נמשיך ונאמר כי $|w_1| \ge n_1$ או $|w_2| \ge n_2$ אחרת $|w| = |w_1w_2| = |w_1| + |w_2| < n_1 + n_2$.

I. אם $|w_1| \ge n_1$ אזי קיימת חלוקה של $w_1 = x_1y_1z_1$ כך שמתקיימים תנאי למת הניפוח:

א. $y_1 \ne \varepsilon$

ב. $|x_1y_1| \le n_1$

ג. $x_1y_1^kz_1 \in L_1$ לכל $k \ge 0$

מכאן, נסתכל על החלוקה של $w = x_1y_1z_1w_2$. נבחין כי $|x_1y_1| \le n_1 < n_1 + n_2 < n$. בנוסף, מכיוון ש $x_1y_1^kz_1 \in L_1$ לכל $k \ge 0$ וגם $L = L_1L_2$, אזי $x_1y_1^kz_1w_2 \in L$ לכל $k \ge 0$. בסה"כ קיבלנו חלוקה של $w = x_1y_1(z_1w_2)$ המקיימת את תנאי למת הניפוח, בסתירה לכך שעבור w לא קיימת חלוקה המקיימת את תנאי למת הניפוח עבור L.

II. אם $|w_2| \ge n_2$ אזי קיימת חלוקה של $w_2 = x_2y_2z_2$ כך שמתקיימים תנאי למת הניפוח:

א. $y_2 \ne \varepsilon$

ב. $|x_2y_2| \le n_2$

ג. $x_2y_2^kz_2 \in L_2$ לכל $k \ge 0$

מכאן, נסתכל על החלוקה של $w = w_1x_2y_2z_2$. נבחין כי $|w_1x_2y_2| \le |w_1x_2y_2z_2| = |w| = n - 1 < n$. בנוסף, מכיוון ש $x_2y_2^kz_2 \in L_2$ לכל $k \ge 0$ וגם $L = L_1L_2$, אזי $w_1x_2y_2^kz_2 \in L$ לכל $k \ge 0$. בסה"כ קיבלנו חלוקה של $w = (w_1x_2)y_2z_2$ המקיימת את תנאי למת הניפוח, בסתירה לכך שעבור w לא קיימת חלוקה המקיימת את תנאי למת הניפוח עבור L.

<u>דוגמה לשפות L_1, L_2 רגולריות כך ש $n < n_1 + n_2$:</u>

נסתכל על $L_1 = \{0\}\,, L_2 = \{\varepsilon\}$, שפות סופיות ומכאן רגולריות. כפי שראינו בכיתה, קבוע הניפוח המינימלי עבור שפה סופית הינו אורך המילה הארוכה ביותר בשפה פלוס 1, וכך למת הניפוח מתקיימת באופן ריק. לכן $n_1 = 2, n_2 = 1$ ומכיוון ש $L_1L_2 = \{0\}$ נקבל כי $n = 2$ ומתקיים כי $n = 2 < n_1 + n_2 = 3$ כנדרש.