na211 – מבוא לאנליזה נומרית
Assignment 2 solution - Finding Roots of Nonlinear Equations

<u>שאלה 1:</u>

היכן נחתכים הגרפים של $y=\cos(x)$ ושל $y=x^3-1$?

כתוב תוכנית לפתרון הבעיה, בעזרת שיטת החצייה ובעזרת Regula Falsi. הצג את תוכניותיך, והשווה ביצועים (מספר איטרציות ואופן התקדמות הניחוש) תוך שימוש באותם תנאי התחלה של $x_0=-3$ ו $x_1=3$.

<u>שאלה 2:</u>

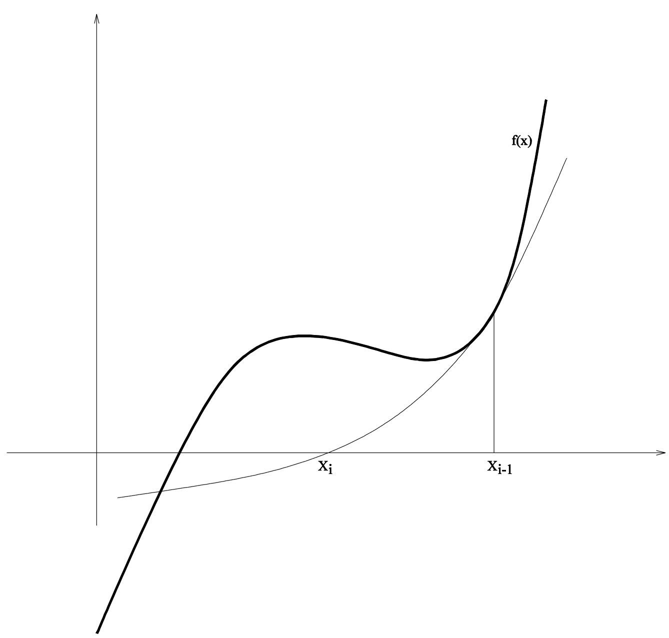
יהי $p>1$. מהו גבול הטור האינסופי

$$S=\cfrac{1}{p+\cfrac{1}{p+\cfrac{1}{p+....}}}$$

רמז: גם אם ניראה כי אין לשאלה קשר לחומר הנלמד, הרי קיים כזה קשר הדוק. למעשה, יש בידך כל הכלים לפתור את השאלה מתוך החומר שנלמד בביתה על מציאת שורשים של משוואות לא ליניאריות!

<u>שאלה 3:</u>

שיטת ניוטון למציאת שורשים של משוואה לא ליניארית נתונה $f(x)=0$ מבוססת על קרוב הפונקציה $f(x)$ מסביב לניחוש הנוכחי ע"י פונקציה ליניארית, קרי ע"י פיתוח טיילור מסדר ראשון. בשאלה זו ברצוננו לפתח איטרציה נומרית דמוית ניוטון המבוססת של קרוב פונקצית המטרה $f(x)$ ע"י פונקציה ריבועית, קרי ע"י פיתוח טיילור מסדר 2 כמתואר בתרשים הבא.



א. תכנן איטרציה כללית מהסוג

$$x_i=g(x_{i-1})=x_{i-1}+h(x_{i-1})$$

לפתרון $f(x)=0$ תוך שימוש בקרוב הנדון מסדר שני (בחר תמיד את הניחוש הגדול יותר מבין השניים האפשריים). הנח שלרשותך היכולת לחשב את ארבע הפעולות האריתמטיות ושורשים ריבועים.
(הדרכה : בחנו את פיתוח שיטת ניוטון, והרעיון דומה, אך עם פיתוח מסדר שני במקום פיתוח מסדר ראשון)

ב. תכנן איטרציה ספציפית מהסוג הנ"ל לחישוב הפונקציה $\sqrt[5]{A}$ (הערה – ככל שהביטוי שתגיעו אליו יהיה פשוט יותר, כך יקל עליכם לענות על הסעיף הבאים).

ג. חשב (בעזרת תוכנית מחשב או מחשבון) שלוש איטרציות ראשונות לחישוב $\sqrt[5]{100}$ עם ניחוש התחלתי $x_0=3$. הצג 5 ספרות עשרוניות משמעותיות בכל איטרציה והשווה לערכים המתקבלים בשיטת ניוטון המקורית.

ד. מצא והוכח את סדר ההתכנסות של שיטתך מסעיף ב'.

שאלה 4:

נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{x}$. הוכח כי שיטת ניוטון ראפסון אינה מתכנסת לשורש (0).

שאלה 5:

תהא $x=g_1(x)$ איטרצית נקודת שבת בעלת סדר התכנסות R_1.
תהא $x=g_2(x)$ איטרצית נקודת שבת בעלת סדר התכנסות R_2.
נבנה את איטרצית נקודת השבת $x=g_2(g_1(x))$ המהווה הרכבה של שתי האיטרציות הנ"ל, קרי איטרצית נקודת שבת המוגדרת על בסיס $g_3=g_1\circ g_2$ או בכיתוב ישיר, $g_3(x)=g_2(g_1(x))$. מצא והוכח את סדר ההתכנסות של $g_3(x)$.

הניסוח הבא של אותה בעיה עשוי לסייע לכם בפתרונה:

תהייה $x_0,x_1,x_2,\dots,x_n,\dots,x_\infty$ סדרת נחושים של הפעולות לסירוגין של $g_1(x)$ ו $g_2(x)$, קרי

$$x_1=g_1(x_0)$$
$$x_2=g_2(x_1)$$
$$x_3=g_1(x_2)$$
$$x_4=g_2(x_3)$$
$$\vdots$$

חשוב בעת על סדרת הניחושים הזו כאילו כל שניים עוקבים מהם מתרחשים באיטרציה אחת.
לכן, האיטרציה המורכבת דנה בסדרת המספרים $x_0,x_2,x_4,\dots,x_{2n},\dots,x_\infty$ וסדר ההתכנסות של אותה סדרה הוא אותו R אשר מביא לערך סופי וחיובי את הגבול

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|e_{2n+2}|}{|e_{2n}|^R}$$

עליך למצוא ולהוכיח את ערכו של R.