קורס אנליזה נומרית – עבודת בית מס' 5

שאלה 1:

נפתור את המשוואה הדיפרנציאלית $\frac{dy}{dx} = x + y$ כאשר $y(0) = 1$ בעזרת:

1. $Forward\ Euler's\ Method$ כאשר $h = 0.1$.
2. $Runge - Kutta\ 2\ Method$ כאשר $h = 0.1, \lambda = \frac{2}{3}$.

כתבנו תוכנית פיתון המבצעת את החישוב הנ"ל ומדפיסה טבלה המציגה את התוצאות של השיטות הנומריות הללו לפתרון האמיתי כאשר $y = 2e^x - x - 1$, הערכים הם $0 \le x \le 1$ עם גודל צעד של 0.1. להלן התוכנית:

```
import numpy as np
from tabulate import tabulate

h = 0.1
lam = 2/3
x = np.linspace(0, 1, length)
f = lambda x, y : x + y
a1 = 1 - (1/(2*lam))
k1 = f
a2 = 1/(2*lam)
k2 = lambda x, y : f(x + (lam*h), y + (lam*h*k1(x, y)))

length = 11 # (1/h)+1

def em():
  Y = np.zeros(length)
  Y[0] = 1
  for i in range(1, length):
    Y[i] = Y[i-1] + h*f(Y[i-1], x[i-1])
  return Y

def rk2():
  Y = np.zeros(length)
  Y[0] = 1
  for i in range(1, length):
    Y[i] = Y[i-1] + h*(a1*k1(x[i-1], Y[i-1]) + a2*k2(x[i-1], Y[i-1]))
  return Y

def es():
  Y = np.zeros(length)
  for i in range(0, length):
    Y[i] = 2*np.exp(x[i]) - x[i] - 1
  return Y

def main():
  headers = ['x', 'EM', 'RK2', 'EXACT SOLUTION']
  V = np.c_[x, em(), rk2(), es()]
  print(f'{tabulate(V, headers, tablefmt="fancy_grid")}')

if __name__ == "__main__":
  main()
```

סעיף א'

x	EM	RK2	EXACT SOLUTION
0	1	1	1
0.1	1.1	1.11	1.11034
0.2	1.22	1.24205	1.24281
0.3	1.362	1.39847	1.39972
0.4	1.5282	1.5818	1.58365
0.5	1.72102	1.79489	1.79744
0.6	1.94312	2.04086	2.04424
0.7	2.19743	2.32315	2.32751
0.8	2.48718	2.64558	2.65108
0.9	2.8159	3.01236	3.01921
1	3.18748	3.42816	3.43656

סעיף ב'

מהנתונים המוצגים בטבלה בסעיף א' ניתן לראות שתוצאות $RK2$ הרבה יותר מדויקות וקרובות לתוצאה האמיתית מתוצאות EM באופן גורף בכל האיטרציות. אזי, מבחינת דיוק שיטת $RK2$ עדיפה וזה עולה בקנה אחד עם כך שהיא מבוססת על קירוב טיילור מסדר גבוה יותר. מנגד, שיטת EM יעילה יותר משיטת $RK2$ ועל כך נפרט בסעיף הבא.

סעיף ג'

בשיטת EM, בכל איטרציה הפונקציה f מחושבת פעם אחת. מספר האיטרציות שבוצעו הינו 10 ולכן f מחושבת 10 פעמים.

בשיטת $RK2$, בכל איטרציה הפונקציה f מחושבת פעמיים – פעם אחת ב- k_1 ופעם שנייה ב- k_2. מספר האיטרציות שבוצעו הינו 10 ולכן f מחושבת 20 פעמים.

סעיף ד'

אם נבצע את אותו החישוב של שיטת EM בשינוי $h = 0.05$ יתבצעו 20 איטרציות. כאמור, בשיטת EM בכל איטרציה הפונקציה f מחושבת פעם אחת, ולכן f תחושב 20 פעמים.

סעיף ה׳

x	EM h=0.05	RK2 h=0.1	EXACT SOLUTION
0	1	1	1
0.1	1.10488	1.11	1.11034
0.2	1.23027	1.24205	1.24281
0.3	1.37828	1.39847	1.39972
0.4	1.55122	1.5818	1.58365
0.5	1.75165	1.79489	1.79744
0.6	1.98239	2.04086	2.04424
0.7	2.24653	2.32315	2.32751
0.8	2.54752	2.64558	2.65108
0.9	2.88911	3.01236	3.01921
1	3.27549	3.42816	3.43656

בדומה לתוצאות ההשוואה בסעיף ב׳, גם כאשר הקטנו את ה- $step\ size$ של אלגוריתם EM, קיבלנו שתוצאות $RK2$ מדויקות וקרובות לתוצאה האמיתית מתוצאות EM. זאת בהתאמה לכך ששיטת $RK2$ מבוססת על פיתוח טיילור מסדר שני ולכן מדויקת יותר מ- EM אשר מבוססת על פיתוח טיילור מסדר ראשון בלבד.

שאלה 2:

שאלה 2

בהינתן המשוואה הדיפרנציאלית $y'' - \left(1 - \frac{x}{5}\right) y = x$ עם תנאי הקצה $y(1) = 2, y(3) = -1$.

נרצה לקרב את $y(x)$ ע״י $u(x) = \sum_{i=1}^{5} C_i N_i(x)$. כמו כן, $h = 0.5$.

ראשית, נשתמש בתנאי הקצה על מנת למצוא את C_1, C_5:

$$\mathbf{2} = u(x_1 = 1) = \sum_{i=1}^{5} C_i N_i(x_1 = 1) = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 + C_3 \cdot 0 + C_4 \cdot 0 + C_5 \cdot 0 = \boldsymbol{C_1}$$

$$\boldsymbol{-1} = u(x_5 = 3) = \sum_{i=1}^{5} C_i N_i(x_5 = 3) = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 + C_3 \cdot 0 + C_4 \cdot 0 + C_5 \cdot 1 = \boldsymbol{C_5}$$

כפי שראינו בכיתה, הפונקציונל המתאים לפתרון הינו :

$$I[u] = \int_1^3 \left[\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(1 - \frac{x}{5}\right)u^2 + 2xu\right]dx$$

נציב את $u, \frac{du}{dx}$ ונקבל :

$$I[u] = \int_1^3 \left[\left(\sum_{i=1}^{5} C_i N_i{}'(x)\right)^2 + \left(1 - \frac{x}{5}\right)\left(\sum_{i=1}^{5} C_i N_i(x)\right)^2 + 2x\sum_{i=1}^{5} C_i N_i(x)\right]dx$$

על מנת לקבל את המינימום של הפונקציונל, לכל $2 \le j \le 4$:

$$0 = \frac{\delta I}{\delta C_j} = \int_1^3 \left[2N_j'(x)\sum_{i=1}^{5} C_i N_i{}'(x) + 2N_j(x)\left(1 - \frac{x}{5}\right)\sum_{i=1}^{5} C_i N_i(x) + 2xN_j(x)\right]dx$$

נסדר את המשוואה ונקבל, לכל $2 \le j \le 4$:

$$\sum_{i=1}^{5} C_i \int_1^3 \left[N_j'(x)N_i'(x) + N_j(x)N_i(x)\left(1 - \frac{x}{5}\right)\right]dx = -\int_1^3 xN_j(x)\,dx$$

נסדר את הבעיה בצורה מטריציונית :

$$\begin{bmatrix} \int_1^3 \left[N_2'(x)N_1'(x) + \left(1 - \frac{x}{5}\right)N_2(x)N_1(x)\right]dx & \cdots & \int_1^3 \left[N_2'(x)N_5'(x) + \left(1 - \frac{x}{5}\right)N_2(x)N_5(x)\right]dx \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_1^3 \left[N_4'(x)N_1'(x) + \left(1 - \frac{x}{5}\right)N_4(x)N_1(x)\right]dx & \cdots & \int_1^3 \left[N_4'(x)N_5'(x) + \left(1 - \frac{x}{5}\right)N_4(x)N_5(x)\right]dx \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\int_1^3 xN_2(x)\,dx \\ -\int_1^3 xN_3(x)\,dx \\ -\int_1^3 xN_4(x)\,dx \end{bmatrix}$$

כתבנו תוכנית פיתון המבצעת את החישוב ע״פ הגדרת triangular basis functions שלמדנו בכיתה. להלן התוכנית והפלט שהתקבל :

```python
import numpy as np
import scipy.integrate as integrate

C1 = 2
C5 = -1
X = [-1 ,1, 1.5, 2, 2.5, 3]

def N(i, x):
  if (X[i-1] <= x and x <= X[i]):
    return (x - X[i-1])/0.5
  elif (X[i] <= x and x <= X[i+1]):
    return (X[i+1] - x)/0.5
  else:
    return 0

def dN(i, x):
  if (X[i-1] <= x and x <= X[i]):
    return 2
  elif (X[i] <= x and x <= X[i+1]):
    return -2
  else:
    return 0

def main():
  A = np.zeros((3, 5))
  b = np.zeros(3)

  for j in range(2, 5):
    b[j-2] = (-1)*integrate.quad(lambda x: x*N(j, x), 1, 3)[0]
    for i in range (1, 6):
      A[j-2][i-1] = integrate.quad(lambda x: dN(j, x)*dN(i, x) + (1-x/5)*N(j, x)*N(i, x), 1, 3)[0]

  for k in range(3):
    b[k] = b[k] - C1*A[k][0] - C5*A[k][4]
  A = A[:, 1:4]

  C = np.linalg.solve(A, b)

  print(f'C1 = {C1}')
  print(f'C2 = {C[0]}')
  print(f'C3 = {C[1]}')
  print(f'C4 = {C[2]}')
  print(f'C5 = {C5}')


if __name__ == "__main__":
  main()
```

```
C1 = 2
C2 = 0.5322769318405969
C3 = -0.4479799512846969
C4 = -0.9811025971525229
C5 = -1
```

שאלה 3:

<u>סעיף א'</u>

להלן התוצאות הסופיות:

x	$f(x)$	$f'(x)$
-3.0	9.3678	-5.87679
-2.8	8.2332	-5.46908
-2.6	7.1803	-5.05987
-2.4	6.2093	-4.65008
-2.2	5.3203	-4.23995
-2.0	4.5134	-3.82908

להלן החישוב:

כיוון שהפונקציה f אינה נתונה לנו אין לנו חופש לבחור נקודות כרצוננו ולכן נשתמש בנקודות הנתונות לנו בטבלה.

עבור $x = -3.0$ נשתמש בנוסחת $five - point\ endpoint$ עם $h = 0.2$:

$$f'(-3.0) \approx \frac{1}{2.4}[-25f(-3.0) + 48f(-2.8) - 36f(-2.6) + 16f(-2.4) - 3f(-2.2)] = -5.87679$$

עבור $x = -2.8$ נשתמש בנוסחת $five - point\ endpoint$ עם $h = 0.2$:

$$f'(-2.8) \approx \frac{1}{2.4}[-25f(-2.8) + 48f(-2.6) - 36f(-2.4) + 16f(-2.2) - 3f(-2.0)] = -5.46908$$

עבור $x = -2.6$ נשתמש בנוסחת $five - point\ midpoint$ עם $h = 0.2$:

$$f'(-2.6) \approx \frac{1}{2.4}[f(-3.0) - 8f(-2.8) + 8f(-2.4) - f(-2.2)] = -5.05987$$

עבור $x = -2.4$ נשתמש בנוסחת $five - point\ midpoint$ עם $h = 0.2$:

$$f'(-2.4) \approx \frac{1}{2.4}[f(-2.8) - 8f(-2.6) + 8f(-2.2) - f(-2.0)] = -4.65008$$

עבור $x = -2.2$ נשתמש בנוסחת $five - point\ endpoint$ עם $h = -0.2$:

$$f'(-2.2) \approx -\frac{1}{2.4}[-25f(-2.2) + 48f(-2.4) - 36f(-2.6) + 16f(-2.8) - 3f(-3.0)] = -4.23995$$

עבור $x = -2.0$ נשתמש בנוסחת $five - point\ endpoint$ עם $h = -0.2$:

$$f'(-2.0) \approx -\frac{1}{2.4}[-25f(-2.0) + 48f(-2.2) - 36f(-2.4) + 16f(-2.6) - 3f(-2.8)] = -3.82908$$

<u>סעיף ב׳</u>

בהינתן $f(x) = e^{x/3} + x^2$, נמצא חסם לשגיאה עבור כל אחד מהחישובים לעיל.

ראשית, נציין את השגיאות המופיעות בנוסחאות :

1. עבור נוסחת $five - point\ midpoint$ השגיאה הינה : $\frac{h^4}{30}f^{(5)}(\xi)$ כאשר $x_0 - 2h \leq \xi \leq x_0 + 2h$.
2. עבור נוסחת $five - point\ endpoint$ השגיאה הינה : $\frac{h^4}{5}f^{(5)}(\xi)$ כאשר $x_0 \leq \xi \leq x_0 + 4h$.

שנית, מתקיים :

$$f^{(5)}(x) = \frac{1}{243}e^{x/3}$$

כעת נשתמש בשגיאה המתאימה לכל אחד מהחישובים שבוצעו בסעיף א׳.

עבור $x = -3.0$:

$$\frac{h^4}{5}f^{(5)}(\xi) = \frac{1}{3125} * \frac{1}{243}e^{\frac{\xi}{3}} = \frac{1}{759375}e^{\frac{\xi}{3}} \leq \frac{1}{759375}e^{\frac{-2.2}{3}} = \mathbf{6.32501 * 10^7}$$

עבור $x = -2.8$:

$$\frac{h^4}{5}f^{(5)}(\xi) = \frac{1}{759375}e^{\frac{\xi}{3}} \leq \frac{1}{759375}e^{\frac{-2.0}{3}} = \mathbf{6.76105 * 10^7}$$

עבור $x = -2.6$:

$$\frac{h^4}{30}f^{(5)}(\xi) = \frac{1}{18750} * \frac{1}{243}e^{\frac{\xi}{3}} = \frac{1}{4556250}e^{\frac{\xi}{3}} \leq \frac{1}{4556250}e^{\frac{-2.2}{3}} = \mathbf{1.05417 * 10^7}$$

עבור $x = -2.4$:

$$\frac{h^4}{30}f^{(5)}(\xi) = \frac{1}{18750} * \frac{1}{243}e^{\frac{\xi}{3}} = \frac{1}{4556250}e^{\frac{\xi}{3}} \leq \frac{1}{4556250}e^{\frac{-2.0}{3}} = \mathbf{1.12684 * 10^7}$$

עבור $x = -2.2$:

$$\frac{h^4}{5}f^{(5)}(\xi) = \frac{1}{3125} * \frac{1}{243}e^{\frac{\xi}{3}} = \frac{1}{759375}e^{\frac{\xi}{3}} \leq \frac{1}{759375}e^{\frac{-3.0}{3}} = \mathbf{4.8445 * 10^7}$$

עבור $x = -2.0$:

$$\frac{h^4}{5}f^{(5)}(\xi) = \frac{1}{3125} * \frac{1}{243}e^{\frac{\xi}{3}} = \frac{1}{759375}e^{\frac{\xi}{3}} \leq \frac{1}{759375}e^{\frac{-2.8}{3}} = \mathbf{5.17848 * 10^7}$$

שאלה 4:

<u>סעיף א'</u>

נעריך את האינטגרל $\int_{-2}^{2} x^3 e^x dx$ כאשר $n = 4$ בעזרת השיטות הבאות :

- שיטת $Composite\ Trapezoidal$:

נציב את הפרמטרים המתאימים בנוסחה שלמדנו ונקבל :

$$\int_{-2}^{2} x^3 e^x dx \approx \frac{1}{2} * 1 \left[(-2)^3 e^{-2} + 2\sum_{j=1}^{3} x_j^3 e^{x_j} + 2^3 e^2 \right]$$

נחשב :

$$2\sum_{j=1}^{3} x_j^3 e^{x_j} = 2(-e^{-1} + 0 + e) = 2(e - \frac{1}{e})$$

נציב :

$$\int_{-2}^{2} x^3 e^x dx \approx -4e^{-2} + e - \frac{1}{e} + 4e^2 = \mathbf{31.36528}$$

- שיטת $Composite\ Simpson$:

נציב את הפרמטרים המתאימים בנוסחה שלמדנו ונקבל :

$$\int_{-2}^{2} x^3 e^x dx \approx \frac{1}{3} * 1 \left[(-2)^3 e^{-2} + 2 * 0 + 4\sum_{j=1}^{2} x_{2j-1}^3 e^{x_{2j-1}} + 2^3 e^2 \right]$$

נחשב :

$$4\sum_{j=1}^{2} x_{2j-1}^3 e^{x_{2j-1}} = 4(-e^{-1}+e)$$

נציב:

$$\int_{-2}^{2} x^3 e^x dx \approx -\frac{8}{3}e^{-2} - \frac{4}{3e} + \frac{4}{3}e + \frac{8}{3}e^2 = \mathbf{22.47712}$$

<u>סעיף ב׳</u>

נמצא את n, h הדרושים כדי לקרב את ערך האינטגרל $\int_0^2 \frac{1}{x+4} dx$ בשגיאה קטנה מ- 10^{-5}.

נבצע את החישוב עבור שיטת $Composite\ Trapezoidal$:

ביטוי השגיאה עבור קטע יחיד הינו:

$$|E_i| = \frac{1}{12} h^3 \left(\frac{1}{\xi+4}\right)^{(2)}$$

כאשר $\xi \in [0,2]$.

נזכור שמתקיים:

$$h = \frac{2}{n}$$

נחשב:

$$\left(\frac{1}{\xi+4}\right)^{(2)} = \frac{2}{(\xi+4)^3}$$

נציב:

$$|E_i| = \frac{1}{12} * \frac{8}{n^3} * \frac{2}{(\xi+4)^3} = \frac{4}{3n^3(\xi+4)^3}$$

ביטוי השגיאה הכולל, כלומר עבור n קטעים, הינו:

$$|E_{total}| = n * |E_i| = \frac{4}{3n^2(\xi+4)^3}$$

ביטוי זה מקבל את ערכו המקסימלי בטווח כאשר $\xi = 0$, ולכן:

$$|E_{total}| < \frac{1}{48n^2}$$

נרצה:

$$\frac{1}{48n^2} < 10^{-5}$$

$$n^2 > \frac{1}{48 * 10^{-5}} = \frac{6250}{3}$$

$$n > \sqrt{\frac{6250}{3}} = 45.64354$$

קיבלנו: $\boldsymbol{n \geq 46}$, ובהתאמה מהגדרת h: $\boldsymbol{h \leq \frac{1}{23}}$.