

עבודה 1 – שפות, ביטויים ושפות רגולריות

שאלה 1:

יהיו L_1, L_2 שפות.

- i. הוכיחו כי אם מתקיים $L_1 \subseteq L_2$, אז $L_1^* \subseteq L_2^*$, ותנו דוגמה למה הגרירה ההפוכה לא בהכרח מתקיימת.
ii. מצאו שתי שפות L_1, L_2 , כך שאף אחת לא מכילה את השנייה, ומתקיים $L_1^* \cup L_2^* = (L_1 \cup L_2)^*$.

שאלה 2:

כתבו ביטוי רגולרי לשפה של המילים, מעל $\Sigma = \{0,1\}$, המכילות לפחות שני 0 ולכל היותר 1 אחד.

שאלה 3:

לכל אחד מהביטויים הרגולריים הבאים, מצאו שתי מילים בשפה המושרית על ידם, ושתי מילים שלא בשפה:

- i. $0(0^*10^*)0$
ii. $1^*(0 \cup 10)^*1^*$
iii. $(0 \cup 1^*)0^*1^*$

שאלה 4:

נתונים שני הביטויים הרגולריים:

$$r_1 = 0^*1 \cup 1^*0 \cup (10)^* \cup (01)^* \\ r_2 = 0^*1^* \cup 1^*0^* \cup 1(0 \cup 1)^*0$$

מצאו:

- i. מילה השייכת לשתי השפות המושרות ע"י r_1, r_2 .
ii. מילה השייכת לשפה של r_1 אבל לא שייכת לשפה של r_2 .
iii. מילה השייכת לשפה של r_2 אבל לא שייכת לשפה של r_1 .
iv. מילה שלא שייכת לשתי השפות המושרות ע"י r_1, r_2 .

שאלה 5:

תהי $L \subseteq \Sigma^*$ שפה רגולרית, הוכיחו כי השפה L' המתקבלת מלקיחת כל המילים, עבור כל מילה ב- L , המתקבלות מהוספה של האות σ מספר כלשהו של פעמים בין אותיות המילה, היא שפה רגולרית.

$$L' = \bigcup_{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_k \in L} \bigcup_{n_0, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}} \sigma^{n_0} \sigma_1 \sigma^{n_1} \sigma_2 \sigma^{n_2} \dots \sigma^{n_{k-1}} \sigma_k \sigma^{n_k}$$

שאלה 6:

מה היא עוצמת קבוצת כל השפות המקיימות $L = L^*$ (מעל הא"ב האונרי $\Sigma = \{1\}$)?

רמז: בהינתן שני מספרים p, q הזרים זה לזה, קיים מספר $n(p, q)$ כך שכל מספר הגדול ממנו ניתן לבטא כקומבינציה לינארית של p, q עם מקדמים אי-שליליים (כלומר $rp + sq$ עבור $r, s \geq 0$).
נשים לב גם לכך שאם נתונה קבוצה של מספרים שאף זוג ביניהם אינו זר זה לזה, אפשר להגיע למקרה הקודם על ידי שימוש בגורם המשותף הגדול ביותר.