

Assignment 3 – Interpolation and Least Squares Approximation

הנחיות: אם לא מצוין אחרת, יש להציג ולהסביר את צעדי החישוב שביצעתם ולהגיש בקובץ pdf. בכל שאלה בה אתם נדרשים לספק קוד מטלב יש לצרף לכל שאלה **בצורה מסודרת** הדפסה של הקוד (הפונקציות) ושל שורות הפקודה הרלוונטיות בהן השתמשתם על מנת להריצו. יש לדאוג כי הקוד מוצג בצורה קומפקטית וקריאה ולא מתפרש על פני מספר רב של עמודים. **עבודות אשר יוגשו בצורה מרושלת או שלא יהיו קריאות לא ייבדקו והניקוד עליהן יהיה בהתאם.**

שאלה מספר 1

תהי הפונקציה $f(x) = \cos(2x)$ באינטרוול $[-0.5, 0.5]$.

(א) מהו פולינום האינטרפולציה המתלכד עם $f(x)$ בנקודות $x_0 = -0.5$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0.5$.

תן את ביטוי השגיאה עבור פולינום זה ומצא חסם עליון לשגיאה.

(ב) פתח שני האיברים הראשונים בטור טיילור עבור הפונקציה $f(x) = \cos(2x)$ סביב 0. תן חסם לשגיאה של הפולינום שקיבלת בתחום. האם חסם השגיאה המתקבל ע"י פולינום ממעלה 2 לפי מרווחי צ'בישב גדול או קטן מהחסם שקיבלת?

(ג) תאר את התנהגות השגיאה כאשר אנו מגדילים את מספר הנקודות בהן מתלכד פולינום האינטרפולציה עם $f(x)$. השאף מספר זה לאינסוף ומצא האם השגיאה גדלה או קטנה.

שאלה מספר 2

בשאלה זו נרצה למצוא התאמה בין דגימות של פונקציה דו-מימדית (שייתכן ואינה ידועה) $f(x, y)$ מעל \mathbb{R}^2 , לפונקציה הליניארית הדו-מימדית (המישור) $g(x, y) = Ax + By + C$.

א. נסח את המשוואות הנורמאליות.

ב. מצא את המישור הטוב ביותר עבור סדרת

$$f(0,0) = -2.078$$

$$f(0,1) = 1.1424$$

$$f(1,0) = 3.0574$$

$$f(1,1) = 5.8197$$

הנקודות:

שאלה מספר 3

מצאו את הפתרון הכי טוב במובן של מינימום סכום ריבועי השגיאה עבור המערכת $Ax = b$ כאשר

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

כלומר, עליכם למצוא וקטור עמודה x , באורך 2, אשר מביא למינימום את הנורמה האוקלידית בריבוע של הוקטור

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

שימו לב, עליכם לפתור את הבעיה בעזרת המשוואות הנורמליות.

שאלה מספר 4

בצע least square curve fitting של המודל $f(x) = axe^{-bx}$ לנקודות הבאות

Point number - i	1	2	3	4	5	6	7
x_i	0.25	0.5	1	2	3	4	5
y_i	0.9	1.2	0.5	0.15	0.033	0.005	0.0001

- א. הסבר כיצד הנך הופך את הבעיה ל Linear least square וכתוב תוכנית Matlab המבצעת את החישוב ומציגה את התוצאות גם מספרית וגם בגרף הכולל את נקודות הקלט והמודל המחושב.
- ב. שנה את y_7 ל 0.001 חזור על התהליך והשווה לגרף מ'א'. בברור השינוי המזערי בערך הפונקציה ב x_7 אשר בקושי שינה את שגיאת הריבועים השפיע באופן דרמטי על ה fit בקטע $[0,1]$. כיצד הינך מיישב זאת עם העובדה ששיטת הריבועים המינימאליים אינה אמורה להיות רגישה לרעשים?

שימו לב בבקשה: בשאלה 5 ניתן כמובן לפתור על ידי חישוב נגזרות והשוואתן לאפס. פתרון המשוואות שתתקבלנה ייתן את הביטויים הנדרשים. עם זאת, זה לא הדרך המומלצת לעשות זאת. במקום דרך זאת, הדרך הקצרה ביותר, וגם הפחות מועדת לטעויות חישוב במהלך הפיתוח, היא להשתמש מיידיית בפתרון המשוואות הנורמליות (שהן עצמן, בתורן, הן תוצאה של השוואת הגרדיינט לאפס). כלומר, זהו כיצד ניתן לכתוב את פונקציית המטרה כנורמה בריבוע של וקטור השגיאה של מודל לינארי (לינארי בפרמטרים), וזה מיידיית ייתן לכם את הביטויים אותם יש להציב במשוואות הנורמליות.

שאלה מספר 5

Part a is unrelated to parts b and c. Part b is based on part c.

Part a:

Given N triplets of real numbers, $(x_i, y_i, z_i)_{i=1}^N$, find the real numbers a and b that minimize the value of the following cost function:

$$f(a, b) = \sum_{i=1}^N (z_i - (ax_i + by_i))^2 \quad f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

Hint: your solution should be based on a linear system of 2 equations with 2 unknowns.

Part b:

Given N real numbers, $(x_i)_{i=1}^N$, and N positive real numbers, $(w_i)_{i=1}^N$, find the real number θ that minimizes the value of the following cost function:

$$f(\theta) = \sum_{i=1}^N w_i \cdot (x_i - \theta)^2 \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Hint: your solution should be based on a single linear equation with one unknown.

Part c:

Please explain the meaning of the result from part b when all the w_i 's happen to be equal to each other: $w_i = w$ for every i (for some $w > 0$).