שאלה 1:

יהיו L_1, L_2 שפות.

i. הוכיחו כי אם מתקיים $L_1 \subseteq L_2$, אז $L_1^* \subseteq L_2^*$, ותנו דוגמה למה הגרירה ההפוכה לא בהכרח מתקיימת.

ii. מצאו שתי שפות L_1, L_2, כך שאף אחת לא מכילה את השנייה, ומתקיים $L_1^* \cup L_2^* = (L_1 \cup L_2)^*$.

i. תהא $w \in L_1^*$, אז קיים k כך ש $0 \le k < \infty$ ומתקיים $w \in L_1^k$.

אם $k = 0$, אז $w = \varepsilon$ ומתקיים ש $w \in L_2^*$ לפי הגדרה כנדרש.

אחרת , קיימים $w_1, w_2, \dots, w_k \epsilon L_1$ כך ש $w = w_1 \cdot w_2 \cdot \dots \cdot w_k$.

$L_1 \subseteq L_2$ אז $w_1, w_2, \dots, w_k \epsilon L_2$ אז $w = w_1 \cdot w_2 \cdot \dots \cdot w_k \in L_2^k$ ולכן $w \in L_2^*$ כנדרש.

*דוגמה נגדית לגרירה ההפוכה:

$L_1 = \{00\}, L_2 = \{0\}$

$L_1^* = \{\varepsilon, 00, 0000, \dots.\}, L_2^* = \{\varepsilon, 0, 00, 000, 0000, \dots.\}$

ניתן לראות כי $L_1^* \subseteq L_2^*$ אולם $L_1 \nsubseteq L_2$.

ii. נסתכל על הדוגמא מסעיף 1,

$L_1 = \{00\}, L_2 = \{0\}$ ניתן לראות כי אף שפה אינה מכילה את השנייה .

נראה כי $L_1^* \cup L_2^* = (L_1 \cup L_2)^*$.

$L_1^* = \{\varepsilon, 00, 0000, \dots.\}, L_2^* = \{\varepsilon, 0, 00, 000, 0000, \dots.\}$,

ולכן $L_1^* \cup L_2^* = \{\varepsilon, 0, 00, 000, 0000, \}$ בנוסף $L_1 \cup L_2 = \{0, 00\}$

ולכן $(L_1 \cup L_2)^* = \{\varepsilon, 0, 00, 000, 0000, \}$.

שאלה 2:

כתבו ביטוי רגולרי לשפה של המילים, מעל $\Sigma = \{0,1\}$, המכילות לפחות שני 0 ולכל היותר 1 אחד.

$$0^*(00 \cup 100 \cup 010 \cup 001)0^*$$

שאלה 3:

לכל אחד מהביטויים הרגולריים הבאים, מצאו שתי מילים בשפה המושרית על ידם, ושתי מילים שלא בשפה:

i. $0(0^*10^*)0$.

ii. $1^*(0 \cup 10)^*1^*$.

iii. $(0 \cup 1^*)0^*1^*$.

i. $010, 00100 \in L$, $\varepsilon, 1 \notin L$

ii. $\varepsilon, 11010 \in \mathrm{L}$, $0110, 01100 \notin L$

iii. $\varepsilon, 0011 \in \mathrm{L}$, $010, 1010 \notin L$

שאלה 4:

נתונים שני הביטויים הרגולריים:

$$r_1 = 0^*1 \cup 1^*0 \cup (10)^* \cup (01)^*$$
$$r_2 = 0^*1^* \cup 1^*0^* \cup 1(0 \cup 1)^*0$$

מצאו:

i. מילה השייכת לשתי השפות המושרות ע"י r_1, r_2.
ii. מילה השייכת לשפה של r_1 אבל לא שייכת לשפה של r_2.
iii. מילה השייכת לשפה של r_2 אבל לא שייכת לשפה של r_1.
iv. מילה שלא שייכת לשתי השפות המושרות ע"י r_1, r_2.

i. $01 \in L(r_1), L(r_2)$

ii. $0101 \in L(r_1)\ , 0101 \notin L(r_2)$

iii. $100 \in L(r_2)\ , 100 \notin L(r_1)$

iv. $0110 \notin L(r_1), L(r_2)$

שאלה 5:

תהי $L \subseteq \Sigma^*$ שפה רגולרית, הוכיחו כי השפה L' המתקבלת מלקיחת כל המילים, עבור כל מילה בL, המתקבלות מהוספה של האות σ מספר כלשהו של פעמים בין אותיות המילה, היא שפה רגולרית.

$$L' = \bigcup_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k \in L}\ \bigcup_{n_0,n_1,\ldots,n_k \in \mathbb{N}} \sigma^{n_0}\sigma_1\sigma^{n_1}\sigma_2\sigma^{n_2}\ldots\sigma^{n_{k-1}}\sigma_k\sigma^{n_k}$$

L שפה רגולרית אז קיים r ביטוי רגולרי המגדיר אותה. נראה כי לשפה L' ישנו ביטוי רגולרי r' כך ש - $L(r') = L'$, ונסיק כי L' היא רגולרית. נוכיח זאת באינדוקציה שלמה על $|r|$.

בסיס:

$|r| = 1$ אז $r = \emptyset$ או $r = x$ כך ש - .כאן משוואה הקלד$x \in \Sigma$, לכן $L = \emptyset$ או $L = \{x\}$. אם $L = \emptyset$ אז $L' = \emptyset$ ולכן עבור $r' = r = \emptyset$ מתקיים $L(r') = L'$. אחרת, $L = \{x\}$ ולכן $L' = \bigcup_{n_0,n_1 \in \mathbb{N}} \sigma^{n_0}x\sigma^{n_1}$. נסתכל על $r' = \sigma^*x\sigma^*$. ראשית, נבחין כי מכיוון ש - $x, \sigma \in \Sigma$ הם ביטויים רגולרים, ולכן לפי ההגדרה r' הינו ביטוי רגולרי. בנוסף, נראה כי $L(r') = L'$:

$$L(r') = L(\sigma^*x\sigma^*) = L(\sigma^*)L(x)L(\sigma^*) = \big(L(\sigma)\big)^*L(x)\big(L(\sigma)\big)^* = \{\sigma\}^*\{x\}\{\sigma\}^* = \bigcup_{n_0,n_1 \in \mathbb{N}} \sigma^{n_0}x\sigma^{n_1} = L'$$

הנחת האינדוקציה:

לכל שפה L רגולרית בעלת ביטוי רגולרי r המקיים $1 \le |r| < n$ קיים ביטוי רגולרי r' כך ש - $L(r') = L'$.

<u>צעד:</u>

תהא L שפה רגולרית בעלת ביטוי רגולרי r המקיים $|r| = n$. נראה כי קיים ביטוי רגולרי r' כך ש - $L(r') = L'$. מכיוון ש - $|r| = n > 1$ אזי קיימים ביטויים רגולריים r_1, r_2 כך שאחד מהבאים מתקיים:

1. $r = (r_1) \cup (r_2)$
2. $r = (r_1) \cdot (r_2)$
3. $r = (r_1)^*$

נבחין כי r_1, r_2 ביטויים רגולריים ולכן $|r_1|, |r_2| \geq 1$, ומכאן, $|r_1|, |r_2| < n$. לפי הנחת האינדוקציה קיימים $r'_1, r_2{}'$ ביטויים רגולריים עבורם מתקיים $L(r'_1) = L'_1$, $L(r'_2) = L'_2$, עבור L_1, L_2 שפות רגולריות כלשהן המקיימות $L(r_1) = L_1$, $L(r_2) = L_2$ (מכיוון ש - r_1, r_2 ביטויים רגולריים בהכרח קיימות כאלה).

מקרה 1 - $r = (r_1) \cup (r_2)$:

נסמן: $r' = (r'_1) \cup (r'_2)$

הגדרת L'

$\boldsymbol{w \in L'} \Leftrightarrow$

$\exists \sigma_1,,,\sigma_k \in \Sigma, \exists n_0,,,n_k \in \mathbb{N} :\ w' = \sigma_1 \cdots \sigma_k \in L\ \wedge w = \sigma^{n_0}\sigma_1\sigma^{n_1} \cdots \sigma^{n_{k-1}}\sigma_k\sigma^{n_k} \Leftrightarrow$

הגדרות w,L'

$w' \in L(r) \Leftrightarrow\ w' \in L\big((r_1) \cup (r_2)\big)\ \Leftrightarrow\ w' \in L(r_1) \cup L(r_2) \Leftrightarrow w' \in L_1 or\ w' \in L_2 \Leftrightarrow$

$w \in L'_1\ or\ w \in L'_2 \Leftrightarrow w \in (L'_1 \cup L'_2) \Leftrightarrow w \in \big(L(r'_1) \cup L(r'_2)\big) \Leftrightarrow w \in L(r'_1 \cup r_2{}') \Leftrightarrow$

$\boldsymbol{w \in L(r')}$

הנחת האינדוקציה

מקרה 2 - $r = (r_1) \cdot (r_2)$:

נסמן: $r' = (r'_1) \cdot (r'_2)$

$\boldsymbol{w \in L'} \Leftrightarrow$

$\exists \sigma_1,,,\sigma_k \in \Sigma, \exists n_0,,,n_k \in \mathbb{N} :\ w' = \sigma_1 \cdots \sigma_k \in L\ \wedge w = \sigma^{n_0}\sigma_1\sigma^{n_1} \cdots \sigma^{n_{k-1}}\sigma_k\sigma^{n_k} \Leftrightarrow$

$w' \in L(r) \Leftrightarrow\ w' \in L\big((r_1) \cdot (r_2)\big)\ \Leftrightarrow\ w' \in L(r_1) \cdot L(r_2) \Leftrightarrow$

$w' = (\sigma_1 \cdots \sigma_m) \cdot (\sigma_{m+1} \cdots \sigma_k): (\sigma_1 \cdots \sigma_m) \in L(r_1) \wedge (\sigma_{m+1} \cdots \sigma_k) \in L(r_2) \Leftrightarrow$

$w' = (\sigma_1 \cdots \sigma_m) \cdot (\sigma_{m+1} \cdots \sigma_k): (\sigma_1 \cdots \sigma_m) \in L_1 \wedge (\sigma_{m+1} \cdots \sigma_k) \in L_2 \Leftrightarrow$

$w = (\sigma^{n_0}\sigma_1\sigma^{n_1} \cdots \sigma^{n_{m-1}}\sigma_m\sigma^0) \cdot (\sigma^{n_m}\sigma_{m+1}\sigma^{n_{m+1}} \cdots \sigma^{n_{k-1}}\sigma_k\sigma^{n_k}) \in L'_1 \cdot L'_2 \Leftrightarrow$

$w \in L(r'_1) \cdot L(r'_2) \Leftrightarrow w \in L\big((r'_1) \cdot (r'_2)\big) \Leftrightarrow$

$\boldsymbol{w \in L(r')}$

מקרה 3 - $r = (r_1)^*$:

נסמן: $r' = (r_1')^*$

$\boldsymbol{w \in L'} \Leftrightarrow$

$\exists \sigma_1,,,\sigma_k \in \Sigma, \exists n_0,,,n_k \in \mathbb{N}: \; w' = \sigma_1 \cdots \sigma_k \in L \;\wedge w = \sigma^{n_0}\sigma_1\sigma^{n_1} \cdots \sigma^{n_{k-1}}\sigma_k\sigma^{n_k} \Leftrightarrow$

$w' \in L(r) \Leftrightarrow \; w' \in L((r_1)^*) \Leftrightarrow \; w' \in \left(L(r_1)\right)^* \Leftrightarrow$

$w' = \varepsilon \; or \; w' = (\sigma_1 \cdots \sigma_{t_1}) \cdots (\sigma_{t_{m-1}+1} \cdots \sigma_{t_m}) : m > 0\,, \forall i = 1, \dots, m \; (\sigma_{t_{i-1}+1} \cdots \sigma_{t_i}) \in L(r_1) \Leftrightarrow$

$w' = \varepsilon \; or \; w' = (\sigma_1 \cdots \sigma_{t_1}) \cdots (\sigma_{t_{m-1}+1} \cdots \sigma_{t_m=k}) : m > 0\,, \forall i = 1, \dots, m \; (\sigma_{t_{i-1}+1} \cdots \sigma_{t_i}) \in L_1 \Leftrightarrow$

$w = \varepsilon \in L_1' \; or \; w = \left(\sigma^{n_0}\sigma_1\sigma^{n_1} \cdots \sigma^{n_{t_1-1}}\sigma_{t_1}\sigma^0\right) \cdots \left(\sigma^{n_{t_{m-1}}}\sigma_{t_{m-1}+1}\sigma^{n_{t_{m-1}+1}} \cdots \sigma^{n_{t_m-1}}\sigma_{t_m=k}\sigma^k\right) \in L_1' \Leftrightarrow$

$w \in L(r_1') \Leftrightarrow w \in \left(L(r_1')\right)^1 \Leftrightarrow w \in \left(L(r_1')\right)^* \Leftrightarrow w \in L((r_1')^*) \Leftrightarrow$

$\boldsymbol{w \in L(r')}$

בסה"כ הראינו כי לכל שפה רגולרית L מתקיים L' שפה רגולרית.

<u>שאלה 6:</u>
מה היא עוצמת קבוצת כל השפות המקיימות $L = L^*$ (מעל הא"ב האונרי $\Sigma = \{1\}$)?

רמז: בהינתן שני מספרים p, q הזרים זה לזה, קיים מספר $n(p,q)$ כך שכל מספר הגדול ממנו ניתן לבטא כקומבינציה לינארית של p, q עם מקדמים אי-שליליים (כלומר $rp + sq$ עבור $r, s \geq 0$).
נשים לב גם לכך שאם נתונה קבוצה של מספרים שאף זוג ביניהם אינו זר זה לזה, אפשר להגיע למקרה הקודם על ידי שימוש בגורם המשותף הגדול ביותר.

נסמן:

$$A = \{L \subseteq \{1\}^* \mid L = L^*\}$$

$$B = \{L \subseteq \{1\}^* \mid L = L^* \wedge \exists \, w_1, w_2 \in L : \gcd(|w_1|, |w_2|) = 1\}$$

$$C = \{L \subseteq \{1\}^* \mid L = L^* \wedge \forall \, w_1, w_2 \in L : \gcd(|w_1|, |w_2|) > 1\}$$

ראשית נבחין כי $A = B \cup C$.

<u>טענה ראשית:</u> $|A| = \aleph_0$

<u>טענת עזר 1:</u> $|B| = \aleph_0$

<u>טענת עזר 2:</u> $|C| = \aleph_0$

<u>הוכחת טענה ראשית:</u>

ע"פ טענות העזר 1,2 נקבל: $|A| = |B \cup C| \leq |B| + |C| = \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$. בנוסף, ניתן לראות כי A הינה קבוצה אינסופית מכיוון שהיא מכילה את קבוצת השפות האינסופית הבאה:

$$\{L_1 = \{\varepsilon, 1, 11, 111, \dots\}, L_2 = \{\varepsilon, 11, 1111, 111111, \dots\}, L_3 = \{\varepsilon, 111, 111111, 111111111, \dots\}, \dots\}$$

ומכיוון ש $\aleph_0$ הינה העוצמה האינסופית הקטנה ביותר קיבלנו כי $|A| = \aleph_0$.

הוכחת טענת עזר 1:

עבור $p,q \in \mathbb{N}$ כך ש - $\gcd(p,q) = 1$ נסמן:

$B_{p,q} = \{L \subseteq \{1\}^* \mid L = L^* \wedge\ w_1, w_2 \in L : |w_1| = p, |w_2| = q\}$.

אבחנה: $B = \bigcup_{p,q\in\mathbb{N}:\gcd(p,q)=1} B_{p,q}$.

נראה כי לכל $p,q \in \mathbb{N}$ כך ש - $\gcd(p,q) = 1$ מתקיים $|B_{p,q}|$ סופית:

יהיו $p,q \in \mathbb{N}$ כך ש - $\gcd(p,q) = 1$ ותהי $L \in B_{p,q}$ כך ש - $w_1, w_2 \in L : |w_1| = p, |w_2| = q$.
ע"פ הרמז, לכל $w \in \{1\}^*$ כך ש- $|w| > n(p,q)$ קיימים $r,s \geq 0$ כך ש - $w = w_1^r \cdot w_2^s$, אז $w \in L^*$.
$L = L^*$, ולכן $w \in L$. מכאן ניתן להבין כי L שפה המכילה את ε, w_1, w_2 וכל מילה $w \in \{1\}^*$
המקיימת $|w| > n(p,q)$. בסה"כ ניתן להבין כי $|B_{p,q}| \leq 2^{n(p,q)-2}$ (מכיוון שעבור כל שפה בקבוצה
הנ"ל יש לכל היותר $2^{n(p,q)-2}$ מילים "שעלינו לבחור" האם הן שייכות לשפה או לא).

בסה"כ, $|B| = |\bigcup_{p,q\in\mathbb{N}:\gcd(p,q)=1} B_{p,q}|$ שהינה איחוד בן מנייה של קבוצות סופיות ולכן $|B| = \aleph_0$.

הוכחת טענת עזר 2:

עבור $L \in C$ נסמן $\forall\, w_1, w_2 \in L$, $g(L) = \gcd(|w_1|, |w_2|)$.

בנוסף, לכל $n \in \mathbb{N}$ נסמן $C_n = \{L \in C : g(L) = n\}$.

אבחנה: $C = \bigcup_{n=2}^{\infty} C_n$

נראה כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $|C_n|$ סופי.

יהי $n \in \mathbb{N}$ ותהי $L \in C_n$. נסמן $L' = \{w' \in \{1\}^* : w \in L \wedge |w'| = \frac{|w|}{n}\}$. נבחין כי קיימים $p,q \in \mathbb{N}$
כך ש - $\gcd(p,q) = 1$ וגם $w_1, w_2 \in L' : |w_1| = p, |w_2| = q$.

טענת עזר 3: $L' = (L')^*$

בדומה לטענת עזר 1 וע"פ טענת עזר 3, מספר הקבוצות L' הינו סופי, ומכיוון שהן נבנות לפי L
(לקחנו כל שפה L שקיימת ו"חילקנו" את איבריה ב – gcd של איברי הקבוצה), קיבלנו כי מספר
הקבוצות L הינו סופי, ולכן $|C_n|$ סופי.

ע"פ האבחנה $|C| = |\bigcup_{n=2}^{\infty} C_n|$, שהינה איחוד בן מנייה של קבוצות סופיות ולכן $|C| = \aleph_0$.

הוכחת טענת עזר 3:

$L' \subseteq (L')^*$: טריויאלי

$(L')^* \subseteq L'$: תהי $w \in (L')^*$. אם $w = \varepsilon$, אז $w \in L^*$. $L = L^*$, ולכן $w \in L$ ולפי הגדרה $w \in L'$
כנדרש.

אחרת, קיים $k \in \{1,2,3,\dots\}$ כך ש - $w = w_1 \cdots w_k$, ולכל $i \in \{1,\dots,k\}$ מתקיים $w_i \in L'$. לכן, לכל
$i \in \{1,\dots,k\}$ מתקיים לפי הגדרה $w_i^n \in L$. ידוע כי - $L = L^*$ ולכן $w_1^n \cdots w_k^n \in L$. המילים עליהן אנו
מדברים הינן אונריות ולכן $w_1^n \cdots w_k^n = (w_1 \cdots w_k)^n$, ומכאן ש - $(w_1 \cdots w_k)^n \in L$ ולפי הגדרה
קיבלנו כי $w = w_1 \cdots w_k \in L'$ כנדרש.