קורס אנליזה נומרית – עבודת בית מס' 3

שאלה 1:

א. בהינתן $f(x) = \cos(2x)$, והצמתים $x_0 = -0.5, x_1 = 0, x_2 = 0.5$, נמצא את פולינום האינטרפולציה עפ"י שיטת לגרנז'.

ראשית, נחשב את הנקודות:

$$y_0 = \cos(2 * -0.5) = \cos(-1)$$
$$y_1 = \cos(2 * 0) = \cos(0) = 1$$
$$y_2 = \cos(2 * 0.5) = \cos(1)$$

כעת נשתמש בנוסחה שלמדנו בכיתה:

$$y_0 * L_0(x) = \cos(-1) * \frac{x(x-0.5)}{0.5} = 2\cos(-1)\,x^2 - \cos(-1)\,x$$
$$y_1 * L_1(x) = 1 * \frac{(x+0.5)(x-0.5)}{-0.25} = -4x^2 + 1$$
$$y_2 * L_2(x) = \cos(1) * \frac{(x+0.5)x}{0.5} = 2\cos(1)\,x^2 + \cos(1)\,x$$
$$P_2(x) = 4\cos(1)\,x^2 - 4x^2 + 1 = \boldsymbol{x^2(4\cos(1) - 4) + 1 = -1.83879x^2 + 1}$$

נחשב את ביטוי השגיאה:

$$E_2(x) = |f(x) - P_2(x)| = \left|\frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(x+0.5)x(x-0.5)\right|$$
$$= \left|\frac{8\sin(2\xi)\,(x^3 - 0.25x)}{6}\right| = \boldsymbol{\frac{4}{3}|\sin(2\xi)||x^3 - 0.25x|}$$

נמצא חסם עליון לשגיאה בקטע $(-0.5, 0.5)$:

הסופרמום של $|\sin(2\xi)|$ בקטע הנ"ל הינו בנקודה $\xi = 0.5$ וערכו $\sin(1)$.

נחשב את הסופרמום של $|x^3 - 0.25x|$:

נסמן $g(x) = x^3 - \frac{1}{4}x$, נחשב $g'(x) = 0$:

$$g'(x) = 3x^2 - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{12}}$$

x	-0.5	$<$	$-\frac{1}{\sqrt{12}}$	$<$	$\frac{1}{\sqrt{12}}$	$<$	0.5
$g'(x)$		$+$		$-$		$+$	

מצאנו שתי נקודות קיצון בתחום: $x = \pm\frac{1}{\sqrt{12}}$. נחשב את הערך המוחלט של הפונקציה בהן:

$$\left|g\left(\frac{1}{\sqrt{12}}\right)\right| = \frac{\sqrt{3}}{36}$$

$$\left|g\left(-\frac{1}{\sqrt{12}}\right)\right| = \frac{\sqrt{3}}{36}$$

מצאנו שהסופרמום של $|x^3 - 0.25x|$ בקטע הנ"ל הינו $\frac{\sqrt{3}}{36}$.

בסה"כ $\boldsymbol{E_2(x) \leq \frac{4}{3}\sin(1)\frac{\sqrt{3}}{36} = \frac{1}{9\sqrt{3}}\sin(1) = 0.05398}$.

ב. נפתח את שני האיברים הראשונים בטור טיילור עבור $f(x) = \cos(2x)$ סביב 0:

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2$$

$$\cos(2x) \approx \cos(0) - 2\sin(0)\,x - 2\cos(0)\,x^2 = 1 - 0 - 2x^2 = 1 - 2x^2$$

נסמן $\boldsymbol{P_t(x) = 1 - 2x^2}$.

נחשב את ביטוי השגיאה:

$$E_t(x) = |f(x) - P_t(x)| = |\cos(2x) - 1 + 2x^2|$$

נמצא חסם עליון לשגיאה בקטע $(-0.5, 0.5)$:

$$E_t'(x) = |-2\sin(2x) + 4x|$$

בקטע הנ"ל הפונקציה הזו הינה מונוטונית עולה, משמע השיפוע של השגיאה מונוטוני עולה ולכן ערכה המקסימלי יהיה בנקודת הקצה $x = 0.5$.

בסה"כ $\boldsymbol{E_t(x) \leq cos(1) - 1 + 0.5 = cos(1) - 0.5 = 0.04030}$.

נחשב פולינום אינטרפולציה מדרגה 2 לפי צמתי צ'בישב עפ"י שיטת לגרנז':

ראשית, נמצא את צמתי צ'בישב לפי הנוסחה $c_i = -\cos\left(\frac{2i+1}{2N}\pi\right)$ כאשר $N = 3$:

$$c_0 = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right), c_1 = -\cos\left(\frac{3\pi}{6}\right), c_2 = -\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$$

נבצע כיול של הצמתים לתחום המבוקש $(-0.5, 0.5)$ לפי הנוסחה:

$$x_i = \frac{1}{2}[(b-a)c_i + a + b] = \frac{1}{2}c_i$$

$$x_0 = -\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{4}}, x_1 = -\frac{1}{2}\cos\left(\frac{3\pi}{6}\right) = \boldsymbol{0}, x_2 = -\frac{1}{2}\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{4}}$$

נחשב את ערכי הפונקציה בנקודות אלה:

$$y_0 = \cos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$y_1 = \cos(2 * 0) = 1$$

$$y_2 = \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

כעת נשתמש בנוסחה שלמדנו בכיתה :

$$y_0 * L_0(x) = \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) * \frac{x\left(x - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)}{-\frac{\sqrt{3}}{4}\left(-\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)} = \mathbf{\frac{8}{3}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}x\right)}$$

$$y_1 * L_1(x) = \frac{\left(x + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)\left(x - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{4} * -\frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{\boldsymbol{x^2 - \frac{3}{16}}}{\boldsymbol{-\frac{3}{16}}} = \boldsymbol{-\frac{16}{3}x^2 + 1}$$

$$y_2 * L_2(x) = \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) * \frac{\left(x + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)x}{\left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)\frac{\sqrt{3}}{4}} = \mathbf{\frac{8}{3}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}x\right)}$$

$$P_2(x) = x^2\left(\frac{16}{3}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{16}{3}\right) + 1 = \boldsymbol{-1.87808x^2 + 1}$$

נחשב את ביטוי השגיאה :

$$E_2(x) = |f(x) - P_2(x)| = \left|\frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}\left(x + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)x\left(x - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)\right|$$

$$= \left|\frac{8\sin(2\xi)\left(x^3 - \frac{3}{16}x\right)}{6}\right| = \frac{4}{3}|\sin(2\xi)|\left|\left(x^3 - \frac{3}{16}x\right)\right|$$

נמצא חסם עליון לשגיאה בקטע $(-0.5, 0.5)$:

הסופרמום של $|\sin(2\xi)|$ בקטע הנ״ל הינו בנקודה $\xi = 0.5$ וערכו $\sin(1)$.

נחשב את הסופרמום של $\left|x^3 - \frac{3}{16}x\right|$:

נסמן $g(x) = x^3 - \frac{3}{16}x$, נחשב $g'(x) = 0$:

$$g'(x) = 3x^2 - \frac{3}{16} = 0 \Longrightarrow x = \pm\frac{1}{4}$$

x	-0.5	$<$	$-\frac{1}{4}$	$<$	$\frac{1}{4}$	$<$	0.5
$g'(x)$		$+$		$-$		$+$	

מצאנו שתי נקודות קיצון בתחום: $x = \pm\frac{1}{4}$. נחשב את הערך המוחלט של הפונקציה בהן:

$$\left|g\left(\frac{1}{4}\right)\right| = \frac{1}{32}$$

$$\left|g\left(-\frac{1}{4}\right)\right| = \frac{1}{32}$$

מצאנו שהסופרמום של $\left|x^3 - \frac{3}{16}x\right|$ בקטע הנ"ל הינו $\frac{1}{32}$.

בסה"כ $\boldsymbol{E_2(x) \leq \frac{4}{3}\sin(1)\frac{1}{32} = \frac{1}{24}\sin(1) = 0.03506}$.

שגיאה זו הינה הקטנה ביותר מבין השגיאות שקיבלנו בשאר החישובים, בהתאמה לתכונת צמתי צ'בישב.

ג. ביטוי השגיאה הכללי עבור $f(x) = \cos(2x)$ בקטע $(-0.5, 0.5)$ הינו:

$$E_n(x) = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\right| = \left|\frac{2^n h(2\xi)\cdot p(x)}{(n+1)!}\right|$$

כאשר $h(2\xi)$ הינה פונקציה חסומה (סינוס או קוסינוס),

ו- $p(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$ אשר בקטע הנ"ל כל מכפלה הינה לכל היותר 1,

כלומר $p(x) \leq 1^{n+1}$.

ולכן ע"פ חשבון גבולות נקבל כי:

$$\lim_{n\to\infty} E_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{2^n h(2\xi)\cdot p(x)}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{(n+1)!} = 0$$

קיבלנו שככל שמספר נקודות הדגימה n גדל השגיאה קטנה.

שאלה 2:

א. נגדיר את ביטוי השגיאה לפי נורמה 2, כאשר נסמן את מספר נקודות הדגימה (x_i, y_i) ב- n.

$$E_2(A,B,C) = \sum_{i=1}^{n}\big(f(x_i, y_i) - (Ax_i + By_i + C)\big)^2$$

המשוואות הנורמליות הן:

$$\frac{\partial E_2(A,B,C)}{\partial A} = 2\sum_{i=1}^{n} -x_i\big(f(x_i,y_i) - (Ax_i + By_i + C)\big) = 0$$

$$\frac{\partial E_2(A,B,C)}{\partial B} = 2\sum_{i=1}^{n} -y_i\big(f(x_i,y_i) - (Ax_i + By_i + C)\big) = 0$$

$$\frac{\partial E_2(A,B,C)}{\partial C} = -2\sum_{i=1}^{n} \big(f(x_i,y_i) - (Ax_i + By_i + C)\big) = 0$$

ב. נרצה למצוא את A, B, C האופטימליים עבור הנקודות הנתונות בעבודה.

נכתוב את המשוואות הנורמליות בכתיב שיתאים לחישוב מטריציוני :

$$\sum_{i=1}^{4} f(x_i,y_i)x_i = A\sum_{i=1}^{4} x_i^2 + B\sum_{i=1}^{4} x_i y_i + C\sum_{i=1}^{4} x_i$$

$$\sum_{i=1}^{4} f(x_i,y_i)y_i = A\sum_{i=1}^{4} x_i y_i + B\sum_{i=1}^{4} y_i^2 + C\sum_{i=1}^{4} y_i$$

$$\sum_{i=1}^{4} f(x_i,y_i) = A\sum_{i=1}^{4} x_i + B\sum_{i=1}^{4} y_i + C\sum_{i=1}^{4} 1$$

נציב את הנתונים מהשאלה :

$$8.8771 = 2A + B + 2C$$

$$6.9621 = A + 2B + 2C$$

$$7.9415 = 2A + 2B + 4C$$

נכתוב בכתיב מטריציוני :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.8771 \\ 6.9621 \\ 7.9415 \end{bmatrix}$$

נפתור :

$$\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8.8771 \\ 6.9621 \\ 7.9415 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.90635 \\ 2.99135 \\ -1.963475 \end{bmatrix}$$

בסה״כ משוואת המישור האופטימלי שקיבלנו הינו :

$$\boldsymbol{g(x,y) = 4.90635x + 2.99135y - 1.963475}$$

שאלה 3:

נשתמש במשוואה הנורמלית של המקרה הדיסקרטי הכללי שלמדנו בכיתה עם נורמה 2 המשיגה את הפתרון האופטימלי:

$$x = (A^T A)^{-1} A^T b$$

נציב את הנתונים ונחשב:

$$x = \left(\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{48} \begin{pmatrix} 14 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{48} \begin{pmatrix} 16 & 20 & -4 \\ 0 & -12 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{48} \begin{pmatrix} 96 \\ 48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

קיבלנו $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

שאלה 4:

א. נרצה להעביר את הפונקציה $y = axe^{-bx}$ לפונקציה לינארית מהצורה $Y = mX + n$.
נבצע את הפעולות הבאות:

$$y = axe^{-bx} \quad \backslash ln$$

$$lny = lna + lnx - bx \quad \backslash \text{העברת אגפים}$$

$$ln\frac{y}{x} = -bx + lna$$

נגדיר חילוף משתנים באופן הבא:

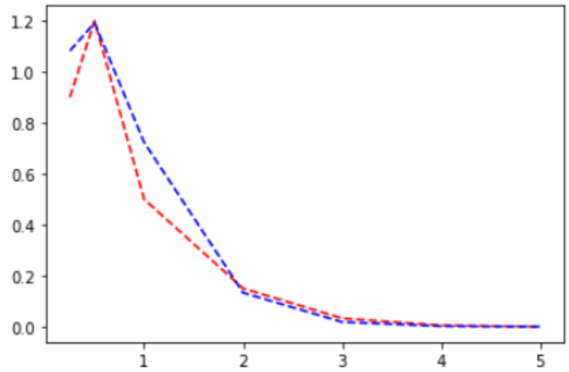
$$\begin{cases} ln\frac{y}{x} \leftrightarrow Y \\ -b \leftrightarrow m \\ x \leftrightarrow X \\ lna \leftrightarrow n \end{cases}$$

להלן תוכנית פייתון המבצעת את החישוב הנדרש :

ראשית מוצאת את סט הנקודות במרחב החדש $(x_i, y_i) \rightarrow \left(x_i, ln\frac{y_i}{x_i}\right) = (X_i, Y_i)$. לאחר מכן, מוצאת את פולינום האינטרפולציה האופטימלי. ולבסוף מחזירה את הערכים למישור הבעיה המקורי.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

x = np.array([0.25, 0.5, 1, 2, 3, 4, 5])
y = np.array([0.9, 1.2, 0.5, 0.15, 0.033, 0.005, 0.0001])

X = x
Y = np.log(y/x)
Z = np.polyfit(X, Y, 1)

b = -Z[0]
a = np.exp(Z[1])

f = (a)*(x)*(np.exp(-b*x))

print("a : {} b : {}".format(a, b))
plt.plot(x, y, 'r--', x, f, 'b--')
plt.show()
```

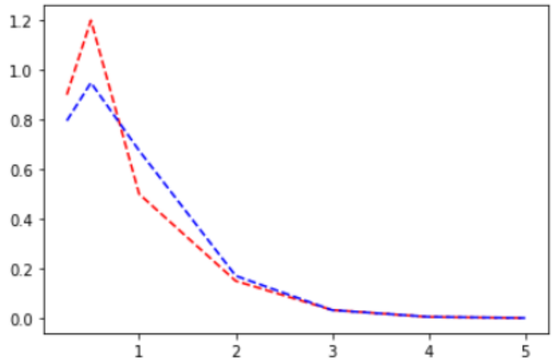
```
a : 7.860245795553887 b : 2.3856499634926815
```



אדום : אוסף הנקודות המקוריות.
כחול : פולינום האינטרפולציה שקיבלנו.

ב. שינינו $y_7 = 0.001$ והרצנו את אותה התוכנית הנ"ל. להלן התוצאות שהתקבלו :

```
a : 5.333011437442819 b : 2.067053283958914
```



השינוי המזערי השפיע באופן דרמטי על ה fit בקטע $[0,1]$ משום שהמרנו את המודל בעזרת טרנספורמציה לא ליניארית, לכן גם אם במודל המקורי ההשפעה זניחה, במרחב הבעיה החדש היא עלולה להיות דרמטית.

שאלה 5:

א. נרצה למצוא את a, b המביאים למינימום את הפונקציה הבאה:

$$f(a,b) = \sum_{i=1}^{N} \left(z_i - \left(ax_i + by_i\right)\right)^2$$

נמיר את הייצוג לכתיב מטריציוני שקול כפי שלמדנו בכיתה:

$$\sum_{i=1}^{N} (z_i - (ax_i + by_i))^2 = \left\| \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_N & y_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_N \end{pmatrix} \right\|^2$$

נשתמש במשוואה הנורמלית של המקרה הדיסקרטי הכללי שלמדנו בכיתה עם נורמה 2 המשיגה את הפתרון האופטימלי:

$$\begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{a}} \\ \hat{\boldsymbol{b}} \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} & \boldsymbol{y_1} \\ \boldsymbol{x_2} & \boldsymbol{y_2} \\ \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{x_N} & \boldsymbol{y_N} \end{pmatrix}^{\boldsymbol{T}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} & \boldsymbol{y_1} \\ \boldsymbol{x_2} & \boldsymbol{y_2} \\ \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{x_N} & \boldsymbol{y_N} \end{pmatrix} \right)^{\boldsymbol{-1}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} & \boldsymbol{y_1} \\ \boldsymbol{x_2} & \boldsymbol{y_2} \\ \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{x_N} & \boldsymbol{y_N} \end{pmatrix}^{\boldsymbol{T}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{z_1} \\ \boldsymbol{z_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{z_N} \end{pmatrix}$$

ב. נרצה למצוא את Θ המביא למינימום את הפונקציה הבאה:

$$f(\Theta) = \sum_{i=1}^{N} w_i (x_i - \Theta)^2$$

נשים לב שמתקיים:

$$\sum_{i=1}^{N} w_i (x_i - \Theta)^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(\sqrt{w_i} x_i - \sqrt{w_i}\Theta\right)^2$$

כעת נמיר את הייצוג של הביטוי החדש שקיבלנו לכתיב מטריציוני שקול כפי שלמדנו בכיתה:

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\sqrt{w_i} x_i - \sqrt{w_i}\Theta\right)^2 = \left\| \begin{pmatrix} \sqrt{w_1} \\ \sqrt{w_2} \\ \vdots \\ \sqrt{w_N} \end{pmatrix} \Theta - \begin{pmatrix} \sqrt{w_1} x_1 \\ \sqrt{w_2} x_2 \\ \vdots \\ \sqrt{w_N} x_N \end{pmatrix} \right\|^2$$

נשתמש במשוואה הנורמלית של המקרה הדיסקרטי הכללי שלמדנו בכיתה עם נורמה 2 המשיגה את הפתרון האופטימלי:

$$\widehat{\boldsymbol{\Theta}}=\left(\begin{pmatrix}\sqrt{w_1}\\\sqrt{w_2}\\\vdots\\\sqrt{w_N}\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}\sqrt{w_1}\\\sqrt{w_2}\\\vdots\\\sqrt{w_N}\end{pmatrix}\right)^{-1}\begin{pmatrix}\sqrt{w_1}\\\sqrt{w_2}\\\vdots\\\sqrt{w_N}\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}\sqrt{w_1}x_1\\\sqrt{w_2}x_2\\\vdots\\\sqrt{w_N}x_N\end{pmatrix}$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{N}w_i\right)^{-1}\left(\sum_{j=1}^{N}w_jx_j\right)=\frac{\boldsymbol{\sum_{j=1}^{N}w_jx_j}}{\boldsymbol{\sum_{i=1}^{N}w_i}}$$

ג. נציב בביטוי שקיבלנו בסעיף ב׳ $w_i = w$ לכל i :

$$\widehat{\Theta}=\frac{\sum_{j=1}^{N}w_jx_j}{\sum_{i=1}^{N}w_i}=\frac{\sum_{j=1}^{N}wx_j}{\sum_{i=1}^{N}w}=\frac{w\sum_{j=1}^{N}x_j}{Nw}=\frac{\boldsymbol{\sum_{j=1}^{N}x_j}}{\boldsymbol{N}}$$

ניתן לשים לב שבביטוי בסעיף ב׳ קיבלנו ממוצע משוקלל של ערכי ה- x, כאשר ערכי ה- w היוו המשקל, הפקטור שקיבל כל x. וכעת, קיבלנו ממוצע פשוט של ערכי ה- x, כלומר לכולם השפעה שווה על ערך התוצאה.