ÉVALUATION D'UNE OPTION ASIATIQUE

PROJET DE 'MONTE CARLO METHODS'

NOAM OULD-BELKACEM

AYMEN BRAKHLI

M1 MATHÉMATIQUES APPROFONDIES 2023-2024

Rappelons d'abord certaines des hypothèses de l'énoncé. Soit un marché financier où $r = 0$ (r étant le taux d'intérêt). Soit S un actif risqué défini par

$$\begin{cases} S_0 = 1 \\ S_t = S_0 e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t} \end{cases}$$

où $W := (W_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien (loi normale de paramètres 0 et t) et σ la volatilité de l'actif financier S. Soit $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$ où $t_k := \frac{T}{n}k$ une subdivision de l'intervalle de temps $[0, T]$. On note

$$A_T^n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} S_{t_i}$$

On cherche à calculer $\mathbb{E}[G] := \mathbb{E}\left[(A_T^n - K)^+\right]$où K est le prix d'exercice du call asiatique. Dans la suite, on suppose que $T = 1, K = 1, \sigma = 0.25$. Par souci de simplification, nous allons modifier certaines notations. Etant donné le prix S_t , on a par hypothèse de l'énoncé que pour toute suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ strictement croissante de $\mathbb{R}_+$avec $t_0 = 0$ et $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires iid de loi normale standard, on peut définir le processus continu $W := (W_{t_n})_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} W_0 = 0 \\ W_{t_{n+1}} = W_{t_n} + \sqrt{t_{n+1} - t_n} Z_{n+1} \end{cases}$$

Or, par hypothèse, on a :

$$W_1 = \sqrt{t_1} Z_1 = \frac{1}{\sqrt{n}} Z_1$$
$$W_2 = W_1 + \sqrt{t_2 - t_1} Z_2 = \frac{1}{\sqrt{n}} (Z_1 + Z_2)$$

Par récurrence immédiate, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$W_{t_n} = \frac{1}{\sqrt{n}} (Z_1 + \cdots + Z_n) \tag{1}$$

On déduit de (1) une formule qui régit le processus des prix $S := (S_{t_n})_{n \in \mathbb{N}}$. Comme r = 0, on a que pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} S_0 = 1 \\ S_{t_i} = e^{-\frac{\sigma^2}{2n} i + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{i} Z_k} \end{cases} \tag{2}$$

1 Simulations des trajectoires de W et calcul de $\mathbb{E}[G]$ par la méthode de Monte-Carlo classique.

1.1 Simulation de W.

Le but de cette section est de simuler les trajectoires du mouvement brownien grace à la formule donnée dans l'énoncé.

On renvoie un vecteur modélisant la trajectoire du mouvement brownien de taille correspondante à celle de la grille de temps choisie (choix arbitraire de n=10).

On a alors $W = (W_0, W_{t_1}, \cdots, W_{t_n})$ où $W_0 = 0$ et $D = \left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, 1\right)$ notre grille de temps avec $t_0 = 0 < t_1 = \frac{1}{n} < t_2 = \frac{2}{n} < \cdots < 1$.

1.2 Méthode de Monte-Carlo classique

Soit $\varphi : x \longmapsto (x-1)^+$. On a ici :

$$G := (A_1^n - 1)^+ = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S_{t_i} - 1\right)^+$$

Lorsque la taille de l'échantillon est k, on cherche à estimer les réalisations suivantes :

$$A_1^n = \sum_{i=1}^{n} S_{t_i} = \sum_{i=1}^{n} e^{-\frac{\sigma^2}{2n}i + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{i} Z_k}$$

Pour ce faire, nous allons générer $(Z_1, \cdots Z_n) \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$ qui nous permettront de créer $(X_1, \cdots, X_k) \overset{iid}{\sim} A_1^n$. Après cela, nous appliquerons la formule classique de l'estimateur donné par la méthode de Monte Carlo :

$$\hat{I}_k = \frac{1}{k}\sum_{l=1}^{k} \varphi\left(X_l\right) \tag{3}$$

où k représente la taille de l'échantillon. Afin de faciliter l'implémentation, nous choisissons arbirairement de prendre k = 1000.

On a alors

$$
\begin{aligned}
\mathbb{V}\left[\hat{I}_k\right] &= \mathbb{V}\left[\frac{1}{k}\sum_{l=1}^{k}\varphi\left(X_l\right)\right] \\
&= \frac{1}{k^2}\mathbb{V}\left[\sum_{l=1}^{k}\varphi\left(X_l\right)\right] \\
&= \frac{1}{k^2}\sum_{l=1}^{k}\mathbb{V}\left[\varphi\left(X_l\right)\right] \text{(par indépendance des } X_l\text{)} \\
&= \frac{1}{k^2}\times k\times\mathbb{V}\left[\varphi\left(X_l\right)\right] (\mathrm{X}_l \ \text{ identiquement distribuées}) \\
&= \frac{\mathbb{V}\left[\varphi\left(A_1^n\right)\right]}{k}
\end{aligned}
$$

D'après le théorème central limite, l'intervalle de confiance asymptotique de niveau 95% pour tout estimateur est :

$$
I_C = \left[\hat{I}_n - q_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_n^2}{n}}, \hat{I}_n + q_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_n^2}{n}}\right]
$$

avec $\alpha = 5\%$ (niveau de risque usuel) et où $\hat{\sigma}_n^2$ est l'estimateur naturel de la variance de $\varphi\left(A_1^n\right)$ (pour le cas de l'estimateur de Monte-Carlo). $q_{1-\alpha}$ est ici le quantile d'ordre $1-\frac{\alpha}{2}$ d'une loi normale standard.

2 Simulation par la méthode de la variable antithétique

Nous raisonnons ici de la manière suivante : pour n, une taille de grille de temps donnée, on considère le vecteur aléatoire $(\ Z_1, \cdots, Z_n\ )$ où les $Z_i \sim \mathcal{N}(0,1)$ et pour tout $i \neq j, Z_i$ est indépendant de Z_j. Comme $Z := (Z_1, \cdots, Z_n)$ est un vecteur gaussien, on peut considérer la transformation mesurable suivante

$$
\begin{aligned}
A : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\
(x_1, \cdots x_n) &\longmapsto (-x_1, \cdots, -x_n)
\end{aligned}
$$

Démontrons ici que $(-Z_1, \cdots, -Z_n)$ et $(Z_1, \cdots, Z_n)$ ont même loi. Soit $h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable bornée.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[h\left(Z_1,\cdots,Z_n\right)\right] &= \int_{\mathbb{R}^n} h\left(z_1,\cdots,z_n\right) f_{Z_1,\cdots,z_n}\left(z_1,\cdots,z_n\right) d\left(z_1\cdots z_n\right) \\
&= \int_{\mathbb{R}}\cdots\int_{\mathbb{R}} h\left(z_1,\cdots z_n\right)\prod_{i=1}^{n} f_{Z_i}\left(z_i\right) dz_1\cdots dz_n \qquad \text{(Fubini-Tonelli + indépendance)} \\
&= \int_{\mathbb{R}}\cdots\int_{\mathbb{R}} h\left(z_1,\cdots z_n\right)\prod_{i=1}^{n} f_{-Z_i}\left(-z_i\right) dz_1\cdots dz_n \qquad \left(\text{CDV et } Z_i \overset{\text{Loi}}{=} -Z_i\right) \\
&= \int_{\mathbb{R}}\cdots\int_{\mathbb{R}} h\left(-z_1,\cdots -z_n\right)\prod_{i=1}^{n} f_{-Z_i}\left(z_i\right) dz_1\cdots dz_n \qquad \text{(par symétrie de la } \mathcal{N}(0,1)) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} h\left(-z_1,\cdots,-z_n\right) f_{-Z_1,\cdots,-Z_n}\left(z_1,\cdots,z_n\right) d\left(z_1\cdots z_n\right) \\
&= \mathbb{E}\left[h\left(-Z_1,\cdots,-Z_n\right)\right]
\end{aligned}
$$

Ainsi $(Z_1,\cdots,Z_n) \overset{Loi}{=} (-Z_1,\cdots,-Z_n)$. On génère alors $\left(Z_{\tilde{X}},\cdots,Z_n\right) \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$, qui permettra de générer $(X_1,\ldots,X_k)$ iid et $(X_1,\cdots,X_k)$ iid tels que $(X_1\cdots X_k) \overset{\text{Loi}}{=} \left(\tilde{X}_1,\cdots,\tilde{X}_k\right) \sim A_1^n$ et $(X_1\cdots X_k)$ est issu de l'échantillon $(Z_1,\cdots,Z_n)$ tandis que $\left(\tilde{X}_1,\cdots,\tilde{X}_k\right)$ est issu de l'échantillon $(-Z_1,\ldots,-Z_n)$. L'estimateur par la méthode de la variable antithétique est alors de la forme

$$
\hat{I}_k^A = \frac{1}{2k}\sum_{i=1}^{k}\varphi\left(X_k\right) + \varphi\left(\tilde{X}_k\right) \tag{4}
$$

Remarque 2 : Lorsque X_i est généré à partir de $(Z_1,\cdots,Z_n)$ et $\tilde{X}_k$ à partir de $(-Z_1,\cdots,-Z_n)$, une manière de réécrire (4) est

$$
\hat{I}_k^A = \frac{1}{2k}\sum_{i=1}^{k}\left(\varphi\circ\gamma\left(Z_1,\cdots,Z_n\right)\right) + \varphi\circ\gamma\left(-Z_1,\ldots,-Z_n\right)
$$

où γ est mesurable bornée de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est telle que pour tout $1 \leq i \leq k$, $\gamma\left(Z_1,\cdots,Z_n\right) \overset{\text{Loi}}{=} X_i$

3 Simulation du prix par la méthode de la variable de contrôle

La variable que nous considérons désormais est la variable de contrôle

$$Y := \left(\left(\prod_{i=1}^{n} S_{t_i}\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right)^+$$

En utilisant l'égalité (1), on a alors que

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{n} S_{t_i} &= e^{\frac{-\sigma^2}{2n}\sum_{i=1}^{n} i + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{i} Z_l} \\
&= e^{\frac{-\sigma^2}{2}\frac{n+1}{2} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}(n-i+1)Z_i} \\
&= e^{-\sigma^2\frac{n+1}{4} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} iZ_{n+1-i}} \text{ (changement d'indice)}
\end{aligned}$$

et puisque $(Z_1, \cdots, Z_n) \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$ on a que $\sum_{i=1}^{n} iZ_i \sim \mathcal{N}\left(0, \sum_{i=1}^{n} i^2\right)$ c'est à dire $\sum_{i=1}^{n} iZ_i \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{n(n+1)(2n+1))}{6}\right)$. On a alors l'égalité en loi suivante :

$$\left(\prod_{i=1}^{n} S_{t_i}\right)^{\frac{1}{n}} \overset{Loi}{=} e^{-\sigma^2\frac{(n+1)}{4n} + \frac{\sigma}{n\sqrt{6}}\sqrt{(n+1)(2n+1)}Z} \text{ où } Z \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y] &= \mathbb{E}\left[\left(\left(\prod_{i=1}^{n} S_{t_i}\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right)^+\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(e^{-\sigma^2\frac{n+1}{4n} + \frac{\sigma}{n\sqrt{6}}\sqrt{(n+1)(2n+1)}Z} - 1\right)^+\right]
\end{aligned}$$

Or $e^{-\sigma^2\frac{(n+1)}{4n} + \frac{\sigma}{n\sqrt{6}}\sqrt{(n+1)(2n+1)}z} \geq 1 \iff z \geq \frac{\sigma\sqrt{6(n+1)}}{4\sqrt{(2n+1)}}$ pour tout $z \in \mathbb{R}$.

donc

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}\left[\left(e^{-\sigma^2\frac{(n+1)}{4n}} e^{\frac{\sigma}{n\sqrt{6}}\sqrt{(n+1)(2n+1)}Z} - 1\right)\mathbb{1}_{\left\{Z \geq \frac{\sigma\sqrt{6(n+1)}}{4\sqrt{2n+1}}\right\}}\right]$$

En développant l'indicatrice, il vient que :

$$\mathbb{E}[Y] = e^{-\sigma^2\frac{(n+1)}{4n}}\mathbb{E}\left[e^{\frac{\sigma}{n\sqrt{6}}\sqrt{(n+1)(2n+1)}}\mathbb{1}_{\left\{Z \geq \frac{\sigma\sqrt{6(n+1)}}{4\sqrt{2n+1}}\right\}}\right] - \mathbb{P}\left(Z \geq \frac{\sigma\sqrt{6(n+1)}}{4\sqrt{2n+1}}\right)$$

On note

$$\begin{aligned}
I &= \mathbb{E}\left[e^{\frac{\sigma}{n\sqrt{6}}\sqrt{(n+1)(2n+1)}}\mathbb{1}_{\left\{Z\geq\frac{\sigma\sqrt{6(n+1)}}{4\sqrt{2n+1}}\right\}}\right] \\
&= \int_{\frac{\sigma\sqrt{6(n+1)}}{4\sqrt{2n+1}}}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{\sigma}{n\sqrt{6}}\sqrt{(n+1)(2n+1)}}\times e^{-\frac{z^2}{2}}dz \\
&= \int_{\frac{\sigma\sqrt{6(n+1)}}{4\sqrt{2n+1}}}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{1}{2}\left(\frac{2z\sqrt{(n+1)(2n+1)}}{n\sqrt{6}}-z^2\right)}dz \\
&= e^{\frac{\sigma^2(n+1)(2n+1)}{12n^2}}\int_{\frac{\sigma\sqrt{6(n+1)}}{4\sqrt{2n+1}}}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(z-m)^2}{2}}dz
\end{aligned}$$

où $m=\sigma\frac{\sqrt{(n+1)(2n+1)}}{n\sqrt{6}}$

Ainsi

$$I=e^{\frac{\sigma^2(n+1)(2n+1)}{12n^2}}\mathbb{P}\left(\tilde{Z}\geq\sigma\frac{\sqrt{6(n+1)}}{4\sqrt{2n+1}}\right)$$

où $\tilde{Z}\sim\mathcal{N}(m,1)$. On a alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y] &= e^{-\sigma^2\frac{(n+1)}{4n}}e^{\sigma^2\frac{(n+1)(2n+1)}{12n^2}}\mathbb{P}\left(\tilde{Z}\geq\sigma\frac{\sqrt{6(n+1)}}{4\sqrt{2n+1}}\right)-\mathbb{P}\left(Z\geq\frac{\sigma\sqrt{6(n+1)}}{4\sqrt{2n+1}}\right) \\
&= e^{\frac{\sigma^2\left(1-n^2\right)}{12n^2}}\mathbb{P}\left(\tilde{Z}\geq\sigma\frac{\sqrt{6(n+1)}}{4\sqrt{2n+1}}\right)-\mathbb{P}\left(Z\geq\frac{\sigma\sqrt{6(n+1)}}{4\sqrt{2n+1}}\right) \\
&= e^{\frac{\sigma^2\left(1-n^2\right)}{12n^2}}\left(1-\Phi\left(\frac{\sigma\sqrt{6(n+1)}}{4\sqrt{2n+1}}-m\right)\right)-\left(1-\Phi\left(\frac{\sigma\sqrt{6(n+1)}}{4\sqrt{2n+1}}\right)\right)
\end{aligned}$$

Puisque $\tilde{Z}\overset{Loi}{=}Z+m$, Φ représente ici la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite.

Y est alors intégrable et on peut la calculer en accédant aux valeurs de la FDR d'une loi normale standard. On fournit donc une estimation du prix en simulant $(X_1,\cdots,X_n)\overset{iid}{\sim}A_1^n$ et $(Y_1,\cdots,Y_k)\overset{iid}{\sim}Y$ et en utilisant la formule suivante :

$$\hat{I}_k^C = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \varphi\left(X_i\right) + b^*\left(Y_i - \mathbb{E}[Y]\right)$$

où b^* est tel que $\mathbb{V}\left[\varphi\left(A_1^n\right) + b^*\left(Y_i - \mathbb{E}[Y]\right)\right]$ soit minimale par rapport à celle de $\mathbb{V}\left[\varphi\left(A_1^n\right)\right]$ et

$$b^* = -\frac{\operatorname{Cov}\left(\varphi\left(A_1^n\right), Y\right)}{\mathbb{V}[Y]}$$

En utilisant les fonctions "Cov" et " $\mathbb{V}$ ", on dispose d'un estimateur convergent (p.s) vers b^* (conséquence de la loi forte des grands nombres).

Remarque 3 : On a réalisé ici une simulation de loi normales de sorte que Y et $\varphi\left(A_1^n\right)$ ne soient pas indépendantes. Si cela n'avait pas été le cas, $\rho_{\varphi\left(A_1^n\right),Y} \approx 0$ et on aurait alors un b^* numériquement très proche de 0 et la réduction de variance serait presque inexistante. Inversement, plus $\rho_{\varphi\left(A_1^n\right),Y}$ se rapproche de 1 en valeur absolue, plus la réduction de variance sera conséquente.

4 Simulation du prix par la méthode d'échantillonnage préférentiel

4.1

D'après l'énoncé, on a que

$$G = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S_{t_i} - 1\right)^+$$

et d'après (2)

$$S_{t_i} = e^{-\frac{\sigma^2}{2n}i + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{i} Z_k}$$

Soit $\overrightarrow{\mathbb{1}}_i$ tel que pour tout $1 \leq j \leq n$,

$$\overrightarrow{\mathbb{1}}_i^j = \begin{cases} 1 \text{ si } j \leq i \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$S_{t_i} = e^{-i\frac{\sigma^2}{2n} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\left\langle Z, \overrightarrow{\mathbb{1}}_i \right\rangle}$

On définit aussi

$$G = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} e^{-\frac{\sigma^2}{2n} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \left\langle Z, \vec{\mathbb{1}}_i \right\rangle} - 1 \right)^+$$

puis

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} e^{-\frac{\sigma^2}{2n} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \langle x, \vec{i} \rangle} - 1 \right)^+ \end{aligned}$$

On note

$$\begin{aligned} \theta : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} e^{-\frac{\sigma^2}{2n} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \langle x, \vec{i} \rangle} - 1 \end{aligned}$$

Comme pour tout $1 \leq i \leq n$,

$$\begin{aligned} \beta_i : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto e^{-\frac{\sigma^2}{2n} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \left\langle x, \vec{\mathbb{1}}_i \right\rangle} \end{aligned}$$

est continue (comme composée de fonctions continues, exponentielle et produit scalaire), elle est mesurable donc θ est mesurable comme somme finie de fonctions mesurables. On a alors notre candidat g, une fonction mesurable telle que :

$$\mathbb{E}[g(Z)] = \mathbb{E}[G]$$

où Z est un vecteur gaussien.

4.2

Soit $\mu \in \mathbb{R}^n et Z \sim \mathcal{N}(0, I_n)$ d'où $Z + \mu \sim \mathcal{N}(\mu, I_n)$. On a que

$$\mathbb{E}\left[g(Z+\mu) e^{-\langle \mu, Z \rangle} e^{-\frac{\langle \mu, \mu \rangle}{2}} \right] = e^{-\frac{\langle \mu, \mu \rangle}{2}} \mathbb{E}\left[g(Z+\mu) e^{-\langle \mu, Z \rangle} \right]$$

Or $Z + \mu \sim \mathcal{N}(\mu, I_n)$ et

$$\mathbb{E}[g(Z+\mu)] e^{-\langle \mu, Z \rangle} = \int_{\mathbb{R}^n} g(z+\mu) e^{-\langle \mu, z \rangle} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{-\|z\|^2}{2}} dz$$

En effectuant la transformation $y = z + \mu$, on peut poser

$$\begin{aligned}\beta : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ z &\longmapsto z+\mu\end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned}&\beta^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ &z \longmapsto z-\mu\end{aligned}$$

$J_{\beta^{-1}} = J_\beta = I_n$ (J désigne la jacobienne).

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[g(Z+\mu)e^{-\langle\mu,Z\rangle}\right] &= \int_{\mathbb{R}^n} g(y)e^{-\langle\mu,y-\mu\rangle}\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}e^{\frac{-\|y-\mu\|^2}{2}}dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(y)e^{\|\mu\|^2}e^{-\langle\mu,y\rangle}\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}e^{\frac{-\|y\|^2-\|\mu\|^2+2\langle\mu,y\rangle}{2}}dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(y)\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}e^{\frac{\|\mu\|^2}{2}}e^{-\frac{\|y\|^2}{2}}dy \\ &= e^{\frac{\|\mu\|^2}{2}}\int_{\mathbb{R}^n} g(y)\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{\|y\|^2}{2}}dy \\ &= e^{\frac{\|\mu\|^2}{2}}\mathbb{E}[g(Z)]\end{aligned}$$

Finalement

$$e^{\frac{-\|\mu\|^2}{2}}\mathbb{E}\left[g(Z+\mu)e^{-\langle\mu,Z\rangle}\right] = \mathbb{E}[g(Z)]$$

4.3

En reprenant les notations de l'énoncé, on simule par récurrence les vecteurs $(z_1,\cdots,z_n)$ et $(S_1(y),\cdots,S_n(y))$ pour $y \neq 0$ fixé, on définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $y \neq 0$,

$$f_n(y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S_i(y) - 1 - y \tag{5}$$

Pour tout entier n, f_n est continue sur $\mathbb{R}^*$ donc par théorème des valeurs intermédiaires, on a la garantie de l'existence d'une racine. Dès que l'on trouve l'intervalle dans lequel appartient la racine, on appliquera l'algorithme de dichotomie afin de générer une suite qui converge vers cette racine.

```
Algorithme 1 : Dichotomie
    Entrées : a,b,epsilon
    Sorties : un couple (a,b)
    initialisation ;
    tant que $b-a>e p s i l o n$ faire
        $\mathrm{x}=(\mathrm{a}+\mathrm{b}) / 2$;
        si $f(a) f(x) \leq 0$ alors
            $\mathrm{b}=\mathrm{x}$;
        sinon
            $a=x ;$
        fin
    fin
```

BILAN : Plusieurs méthodes de reduction de variance auront été testées. On peut établir un classement en terme de performance : Méthode de stratification, Contrôle de variables, Echantillonnage préférentiel, Variable Antithétique, méthode de Monte Carlo classique.