

Mémoire M1 maths approfondies : Etude dynamique du phénomène de synchronisation des lucioles

Aymen Brakhli, Arsène Claustre, Noam Ould Belkacem

Contents

1	Introduction	1
2	Préliminaires	5
3	Synchronisation imparfaite	9
3.1	Une luciole et un stimulus extérieur	9
3.2	Cas $N=2$	12
3.3	Cas $N=3$	14
3.4	2 lucioles + un stimulus	17
3.5	Cas N grand	19
4	Synchronisation parfaite	22
4.1	Introduction du modèle de synchronisation parfaite	22
4.2	Etudes du modèle et premiers calculs	24
4.3	Condition de synchronisation	26
4.4	Stabilité des équilibres	28
5	Conclusion	31
	Références	31

1 Introduction

Les "firefly trees" ou "arbres à lucioles" représentent un phénomène naturel éblouissant où des milliers de lucioles synchronisent leurs émissions lumineuses pour créer des spectacles lumineux impressionnants (voir Figure 1). Ces rassemblements spectaculaires ont lieu principalement sur de grands arbres dans des régions humides et boisées, typiquement dans les zones tropicales d'Asie du Sud-Est, comme en Thaïlande et en Malaisie, où ce phénomène est non seulement un attrait touristique mais aussi un sujet d'étude pour les écologistes. Ce comportement coordonné transforme les arbres en véritables phares biologiques pendant les nuits d'été.

Ce phénomène résulte d'une réaction biochimique surprenante se produisant dans le corps de ces insectes, plus précisément dans des organes appelés photocytes, situés dans leur abdomen.



Figure 1: Firefly tree

Au cœur de cette réaction se trouvent deux composants clés : la luciférine, un substrat moléculaire, et la luciférase, une enzyme catalysatrice. En présence d'oxygène, l'enzyme catalyse l'oxydation de la luciférine, entraînant une excitation des molécules. Lorsque ces molécules retournent à un état d'énergie inférieur, elles émettent de la lumière sous forme de photons.

La lumière produite, qui varie du jaune au vert, est due à l'émission de cette énergie stockée lors du retour des molécules excitées à leur état normal. Ce type de lumière, connu sous le nom de "lumière froide", est extrêmement efficace énergétiquement parlant et ne produit pas de chaleur significative, ce qui est vital pour la survie de la luciole, lui permettant d'éviter de se brûler.

Les lucioles utilisent ce mécanisme lumineux pour plusieurs fonctions essentielles, principalement pour la communication lors de la période de reproduction. Chaque espèce de luciole possède un pattern unique de clignotement qui aide les individus à se reconnaître entre eux, facilitant ainsi l'accouplement. Les mâles, par exemple, peuvent émettre des séquences de flashes pour attirer les femelles, qui répondront par un signal lumineux spécifique si elles sont prêtes à s'accoupler.

En outre, la bioluminescence sert également de mécanisme de défense. La lumière peut effectivement désorienter un prédateur ou signaler la toxicité de la luciole, ce qui augmente ses chances de survie face à une menace.

La synchronisation des lucioles, où ces créatures coordonnent leurs éclats lumineux en un spectacle éblouissant de lumière collective, représente un exemple fascinant de ce que les mathématiciens et physiciens dénomment un "problème de systèmes dynamiques". Cette discipline étudie comment les éléments individuels d'un système interagissent entre eux et évoluent au fil du temps, et la synchronisation des lucioles illustre parfaitement un cas pratique où des règles d'interaction relativement simples entre individus peuvent générer des motifs complexes et ordonnés à grande échelle.

Dans ce contexte, chaque luciole peut être considérée comme un oscillateur naturel qui émet des pulsations lumineuses à une fréquence propre. Lorsqu'elles se trouvent à proximité les unes des autres, ces lucioles perçoivent les lumières émises par leurs voisines et peuvent ajuster leur propre fréquence de clignotement en conséquence. Cette capacité d'ajustement est modélisée mathématiquement

par des oscillateurs couplés, où la phase de clignotement de chaque luciole est influencée par les phases des autres lucioles à travers des interactions directes.

Le modèle de Kuramoto, fréquemment utilisé pour analyser la synchronisation dans des groupes d'oscillateurs couplés, offre une illustration mathématique de ce processus. Il montre comment la phase de chaque oscillateur est affectée par les phases des autres, à travers une fonction de couplage qui peut être détaillée par la Phase Response Curve (PRC). Cette dernière est essentielle pour comprendre comment un oscillateur — dans notre cas, une luciole — ajuste sa phase en réponse à un stimulus externe. Par exemple, elle pourrait être décrite par les équations suivantes :

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i)$$

où θ_i est une fonction de S^1 dans \mathbb{R} qui représente la phase du i -ème oscillateur (luciole), ω_i représente sa fréquence intrinsèque, K est la constante de couplage qui quantifie l'intensité de l'interaction entre les lucioles, et N est le nombre total d'oscillateurs dans le système.

La nature de la synchronisation, qu'elle soit complète ou partielle, dépend largement de la force du couplage et de la configuration spécifique de la PRC. Ces modèles doivent également tenir compte de la stabilité de ces états synchronisés, qui indique la capacité du système à maintenir un comportement coordonné malgré les perturbations externes ou les variations des conditions initiales. Cette stabilité est cruciale pour évaluer la robustesse des motifs de synchronisation observés dans la nature.

Au-delà de l'intérêt purement biologique, comprendre la synchronisation des lucioles enrichit également les domaines de la technologie de communication et des neurosciences, où les principes de synchronisation et de PRC aident à optimiser les réseaux nécessitant une coordination précise et à explorer les processus synchrones dans le cerveau humain. Ainsi, l'étude détaillée de la synchronisation des lucioles non seulement éclaire un phénomène naturel captivant mais sert également de modèle pour des applications scientifiques et techniques diverses, illustrant comment des interactions simples peuvent créer des ordres émergents complexes.

L'étude de la synchronisation des lucioles, où ces créatures lumineuses coordonnent leurs éclats en des spectacles visuels harmonieux, peut être élégamment réalisée en utilisant le cercle trigonométrique S^1 . Cette méthode est particulièrement adaptée en raison du comportement périodique du clignotement des lucioles, avec chaque cycle lumineux correspondant à un point se déplaçant sur un cercle, où un tour complet représente la répétition du cycle de clignotement.

En cartographiant chaque cycle de clignotement sur S^1 , où chaque position sur le cercle correspond à une phase spécifique du cycle, on transforme un processus temporel en une structure spatiale facile à analyser. Cela permet d'associer directement la distance angulaire entre deux points sur le cercle à la différence de phase relative entre deux lucioles, simplifiant l'analyse des interactions dynamiques phase-dépendantes au sein du groupe.

L'utilisation de S^1 facilite également l'application de techniques mathématiques avancées comme la théorie des oscillateurs couplés et l'analyse harmonique, essentielles pour modéliser précisément les comportements de synchronisation. La courbe de réponse de phase (PRC), qui mesure comment un oscillateur ajuste

sa phase en réponse à un stimulus, s'intègre naturellement dans ce modèle, visualisée comme une fonction modifiant les points sur le cercle. Cette représentation aide à comprendre l'impact des stimuli externes sur la dynamique collective des phases.

De plus, la modélisation sur S^1 aide à examiner la stabilité des états de synchronisation grâce à l'utilisation de concepts mathématiques comme les points fixes et les bifurcations. Ces analyses révèlent comment les configurations de synchronisation changent en réponse aux perturbations ou aux variations des conditions environnementales. La visualisation des phases sur le cercle permet également de détecter des motifs complexes tels que les vagues de synchronisation ou des clusters de phases, offrant des aperçus précieux sur le comportement collectif des lucioles.

En résumé, le cercle trigonométrique S^1 offre une plateforme riche pour explorer et comprendre la synchronisation des lucioles. Cette approche ne simplifie pas seulement la visualisation et l'analyse des dynamiques complexes, mais enrichit également notre compréhension des mécanismes sous-jacents de synchronisation dans les systèmes biologiques, transformant les observations de comportements naturels en modèles mathématiques structurés et prédictifs.

Il est important de souligner que les modèles mathématiques utilisés pour étudier la synchronisation des lucioles, tels que le modèle de Kuramoto et les oscillateurs couplés, ne prétendent pas reproduire fidèlement tous les aspects de la réalité biologique. En effet, ces modèles sont des simplifications qui visent à capturer les caractéristiques essentielles des systèmes dynamiques sous-jacents plutôt qu'à détailler chaque nuance spécifique du comportement des lucioles. Cependant, malgré cette abstraction, ces modèles sont extrêmement utiles pour nous permettre de réaliser des simulations numériques. Ces simulations, bien qu'approximatives, peuvent être confrontées à des données expérimentales réelles pour tester leur validité et affiner notre compréhension des mécanismes de synchronisation. En ajustant les paramètres des modèles et en les calibrant selon les observations empiriques, nous pouvons progressivement améliorer leur précision et leur applicabilité, offrant ainsi un outil précieux pour explorer théoriquement des phénomènes complexes qui sont autrement difficiles à étudier directement dans leur contexte naturel.

Le travail présenté dans ce mémoire repose principalement sur deux publications essentielles dans le domaine de la synchronisation des lucioles. Le premier article, "Beyond a pacemaker's entrainment limit: phase walk-through" par G. Bard Ermentrout et John Rinzel, examine comment la désynchronisation se produit lorsque un système doté d'un pacemaker naturel est soumis à des stimuli externes à une fréquence qui dépasse sa capacité maximale de synchronisation. Leur modèle non linéaire simplifié a permis de décrire qualitativement les propriétés d'entraînement, la perte d'entraînement et le passage à travers les phases pour les pacemakers rythmiquement stimulés, ce qui est illustré dans le contexte du pacemaker modèle expérimental, la luciole rythmiquement clignotante.

Le second article, "An adaptive model for synchrony in the firefly *Pteroptyx malaccae*" par B. Ermentrout, propose un modèle adaptatif pour l'oscillateur neuronal qui modifie sa période de fonctionnement libre, ce qui permet une synchronisation parfaite entre les oscillateurs couplés. Ce modèle comprend des résultats analytiques et des simulations numériques qui montrent comment l'adaptation dans les modèles d'oscillateurs standards peut permettre une modification de la fréquence d'oscillation, une caractéristique cruciale pour atteindre

la synchronie parfaite observée chez certaines espèces de lucioles. Pour la partie sur la synchronisation parfaite de ce mémoire, il a été nécessaire d’ajuster ce modèle, car les calculs d’Ermentrout n’étaient pas directement exploitables. Des modifications des paramètres de la courbe de réponse de phase et des coefficients de couplage ont été apportées pour mieux refléter les interactions théoriques entre les lucioles, permettant ainsi des simulations numériques plus précises et adaptées aux modèles théoriques discutés.

Ces deux études constituent la base théorique et expérimentale sur laquelle s’appuie ce mémoire, offrant des perspectives fondamentales et des méthodes de modélisation avancées pour comprendre et simuler la synchronisation complexe observée chez les lucioles.

Nous détaillons maintenant ce qui sera étudié dans chacune des parties de ce mémoire.

Préliminaires

Cette section introduit la conceptualisation de la phase lumineuse des lucioles sur le cercle trigonométrique S^1 , permettant une analyse mathématique cohérente et périodique de leurs dynamiques de synchronisation. L’objectif est de transformer ce phénomène biologique en un problème mathématique structuré, facilitant ainsi l’étude systématique des patterns de synchronisation. Ensuite nous rappelons la définition d’un système dynamique, l’objectif étant de nous munir de certaines propriétés de stabilité qui nous seront indispensables dans l’utilisation des modèles que nous utiliserons. Cette section insiste également sur la différence entre l’étude des systèmes continus et des systèmes discrets. Enfin, il est rappelé au lecteur quelques points de vocabulaire qui faciliteront sa lecture.

Synchronisation Imparfaite

La partie sur la synchronisation imparfaite étudie comment les lucioles ajustent leur fréquence de clignotement en réponse à des stimuli externes et entre elles dans des groupes restreints. Les configurations avec deux ou trois lucioles sont explorées pour comprendre les interactions dynamiques et la formation de patterns de synchronisation. Des simulations numériques sont utilisées pour illustrer les conditions sous lesquelles une synchronisation imparfaite peut se produire, fournissant une validation empirique des modèles théoriques proposés.

Synchronisation Parfaite

Cette section développe un modèle pour examiner les conditions qui permettent une synchronisation parfaite, où toutes les lucioles clignotent en unisson complet. Le modèle inclut des variations adaptatives des pulsations intrinsèques des lucioles influencées par des stimuli externes, démontrant comment elles tendent à retourner à une fréquence naturelle malgré les perturbations. La fonction de réponse de phase (Phase Response Curve - PRC) est utilisée pour modéliser ces ajustements et pour prédire les états de synchronisation stable. Ce plan structure clairement les objectifs et les résultats attendus de chaque section, facilitant la navigation à travers les complexités de la recherche sur la synchronisation des lucioles.

2 Préliminaires

Pour introduire l’étude de la synchronisation des lucioles dans le cadre du cercle trigonométrique S^1 , nous considérons initialement la fonction θ qui associe à un

temps \mathbb{R} un nombre dans l'intervalle $[0, 1[$. Cette fonction représente naturellement la phase lumineuse des lucioles, augmentant de manière continue jusqu'à atteindre presque 1 avant de redémarrer à 0. Ce changement discontinu caractérisant l'émission de lumière de la luciole. Toutefois, pour faciliter une analyse mathématique périodique et cohérente des dynamiques de synchronisation, il est avantageux de transformer θ de manière à ce qu'elle opère dans l'espace S^1 , le cercle unité. Cela permet de considérer les phases lumineuses comme des points sur un cercle, où chaque cycle complet correspond à un tour complet du cercle, renforçant ainsi l'interprétation du comportement périodique des lucioles.

On suppose que θ est une fonction de \mathbb{R} dans $[0, 1[$. En multipliant θ par 2π , nous transformons son domaine de sortie pour l'étudier comme une fonction de \mathbb{R} dans $[0, 2\pi[$. On considère donc :

$$\begin{aligned}\theta : \mathbb{R} &\rightarrow [0, 2\pi[\\ t &\mapsto \theta(t)\end{aligned}$$

Soit $f : [0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ l'injection naturelle de $[0, 2\pi[$ dans $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ définie par :

$$f(x) = x + 2\pi\mathbb{Z}$$

Cette injection est surjective ainsi que continu car la topologie sur $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ est définie de manière à rendre l'application π suivante continue :

$$\begin{aligned}\pi : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \\ x &\mapsto x + 2\pi\mathbb{Z}\end{aligned}$$

Alors en posant $\tilde{\theta} = f \circ \theta$, on peut alors considérer que :

$$\tilde{\theta} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$$

Proposition 1. $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ est isomorphe à S^1 .

Preuve. On sait que $(\mathbb{R}, +)$ et $(S^1, *)$ sont des groupes. Considérons la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ définie par $g(x) = e^{ix}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction g est un morphisme de groupe car pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}g(x + y) &= e^{i(x+y)} \\ &= e^{ix} * e^{iy} \\ &= g(x) * g(y).\end{aligned}$$

Considérons le noyau de g , noté $\ker g$, défini par :

$$\ker g = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) = 1\}$$

où 1 est l'élément neutre du groupe S^1 . Nous avons alors :

$$\ker g = \{x \in \mathbb{R} \mid e^{ix} = 1\} \Leftrightarrow \ker g = 2\pi\mathbb{Z}$$

Ainsi, par le premier théorème d'isomorphisme, g induit un isomorphisme entre $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et son image, qui est S^1 . \square

On a ici utilisé le théorème suivant :

Théorème 1 (Premier théorème d'isomorphisme). *Soit $f : G \rightarrow H$ un homomorphisme de groupes. Alors l'image de f est isomorphe au quotient du groupe G par le noyau de f . Autrement dit,*

$$G / \ker(f) \cong \text{im}(f).$$

On peut alors se ramener à l'étude de θ comme une fonction

$$\theta : \mathbb{R} \rightarrow S^1$$

De plus, dans ce mémoire, nous examinerons des systèmes dynamiques, en fournissant ici quelques propriétés mathématiques qui seront utilisées par la suite.

Systèmes Dynamiques

Un système dynamique est une formalisation mathématique utilisée pour modéliser l'évolution d'un système au fil du temps. Ce modèle est essentiel pour comprendre comment les états d'un système évoluent en réponse à des variables initiales et au temps. Typiquement, un système dynamique est représenté par une équation ou un ensemble d'équations décrivant la relation entre l'état actuel et son évolution future.

Dans le cadre mathématique, un système dynamique peut être formalisé par une fonction d'évolution ϕ , qui relie chaque paire (t, x) dans $\mathbb{R} \times X$ (ou $\mathbb{Z} \times X$) à un élément $\phi(t, x)$ dans X , où X est l'espace des états. Pour les systèmes continus, cette fonction est souvent régie par des équations différentielles de la forme $\dot{x} = f(x)$, où f est une fonction dictant la vitesse de changement de l'état x . Dans les systèmes discrets, la dynamique est définie par des itérations successives d'une fonction $f : X \rightarrow X$, exprimée par l'équation $x_{n+1} = f(x_n)$, où chaque état futur dépend uniquement de l'état actuel.

Les flots dans les systèmes dynamiques, notés $\phi_t : X \rightarrow X$, décrivent l'état du système à un moment t donné, partant d'un état initial x . Ils présentent des propriétés essentielles telles que :

- **Propriété de semi-groupe** : $\phi_{t+s}(x) = \phi_t(\phi_s(x))$ pour tous $s, t \in \mathbb{R}$, démontrant que le flot à l'instant $t + s$ est la composition des flots aux instants s et t .
- **Identité au temps zéro** : $\phi_0(x) = x$, indiquant qu'à l'instant initial, l'état du système reste inchangé.

Méthodes d'Analyse de Stabilité pour Systèmes Dynamiques

La stabilité des points d'équilibre dans les systèmes dynamiques, tant continus que discrets, est un concept crucial pour comprendre le comportement à long terme des systèmes. Un point d'équilibre x^* est dit **asymptotiquement stable** si :

- **Stabilité locale** : Pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que si $\|x_0 - x^*\| < \delta$, alors pour tout $t \geq 0$ dans le cas continu, ou pour tout $n \geq 0$ dans le cas discret, $\|\phi_t(x_0) - x^*\| < \epsilon$ ou $\|f^n(x_0) - x^*\| < \epsilon$, respectivement.

- **Attractivité** : $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(x_0) = x^*$ dans le cas continu, ou $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x_0) = x^*$ dans le cas discret, pour tout x_0 suffisamment proche de x^* .

Dans le cadre des systèmes dynamiques continus, le comportement instantané du système peut être décrit par un champ de vecteurs, utilisant la notation

$$\left. \frac{d}{dt} \phi_t(x) \right|_{t=0} = X(x),$$

où $\phi_t(x)$ est le flot du système et $X(x)$ est le champ de vecteurs à l'état x . Cette équation montre que $X(x)$ à un point x est la dérivée temporelle du flot au temps $t = 0$, reflétant la tendance initiale du système à évoluer à partir de x .

La matrice Jacobienne $J_f(x)$ d'un système continu gouverné par $\dot{x} = f(x)$ (où $f(x) = X(x)$ est le champ de vecteurs) joue un rôle clé dans l'analyse de la stabilité locale des points d'équilibre. Les critères de stabilité sont définis comme suit:

- Un point d'équilibre x^* est considéré comme **asymptotiquement stable** si toutes les valeurs propres de $J_f(x^*)$ ont des parties réelles strictement négatives.
- Un point d'équilibre est **instable** si au moins une des valeurs propres de $J_f(x^*)$ a une partie réelle positive.

Après avoir défini ces critères de base, on mentionnera parfois le cas particulier des **points selles**. Un point selle est un type de point d'équilibre caractérisé par : les valeurs propres de la matrice Jacobienne $J_f(x^*)$ ont des parties réelles de signes mixtes. Cela indique que le point d'équilibre est **stable dans certaines directions** et **instable dans d'autres**.

Dans les systèmes dynamiques discrets, l'analyse de stabilité utilise également la matrice Jacobienne, mais avec une interprétation différente. La stabilité des points fixes x^* est déterminée par les valeurs propres de $J_f(x^*)$:

- Un point fixe est asymptotiquement stable si toutes les valeurs propres de $J_f(x^*)$ ont un module strictement inférieur à 1.
- Si au moins une valeur propre possède un module supérieur à 1, le point fixe est instable.

Ces concepts sont cruciaux pour comprendre la dynamique des systèmes biologiques comme la synchronisation des émissions de lumière chez les lucioles. Chaque luciole peut être considérée comme un élément d'un vaste système dynamique. La théorie des systèmes dynamiques, tant continus que discrets, permet de modéliser et de prédire comment les lucioles ajustent leurs rythmes de clignotement en réponse aux signaux des autres, conduisant à divers types de synchronisation en fonction des conditions initiales et des interactions entre individus. Cette analyse offre des perspectives profondes sur l'émergence de comportements collectifs à partir des interactions entre composants simples dans des systèmes naturels.

Notations et Précisions Terminologiques

Avant de poursuivre, il est préférable de clarifier certaines notations et termes que nous emploierons tout au long de ce mémoire.

- **Pulsations, vitesse angulaire, et vitesse intrinsèque des lucioles** : Ces termes seront utilisés de manière interchangeable pour désigner la fréquence à laquelle les lucioles émettent des pulsations lumineuses.
- **Représentation sur S^1** : Lorsque nous mentionnerons une valeur θ dans l'intervalle $[0, 2\pi[$ par exemple, il est important de noter que θ sera considéré comme un représentant dans la classe d'équivalence $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ (isomorphe à S^1). Cela signifie que θ est utilisé pour représenter un point spécifique sur le cercle unitaire, où 2π correspond à une rotation complète.

3 Synchronisation imparfaite

La partie préliminaires justifie de fixer notre étude au cadre du cercle trigonométrique. Le cycle de production de lumière d'une luciole est donc caractérisé par $\bar{\theta} \in S^1$, on note θ le représentant de $\bar{\theta}$ dans $[0, 2\pi[$.

3.1 Une luciole et un stimulus extérieur

Pour comprendre la réalité physique du phénomène de synchronisation, on part d'un modèle basique:

La luciole, lorsqu'elle n'est pas en présence d'un stimulus extérieur, émet de la lumière à intervalles de temps réguliers. Ainsi, on peut associer à la luciole une vitesse angulaire qui vérifie lorsque la luciole est isolé :

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega$$

ou ω est la pulsation constante de la luciole, c'est à dire la vitesse à laquelle elle produit de la lumière entre deux cycles.

Pour caractériser l'influence du stimulus sur la luciole on va ajouter un facteur de correction.

Idee fondatrice du modèle:

Lorsque la luciole est en retard par rapport au stimulus, on veut que la luciole produise de la lumière plus rapidement.

Lorsque la luciole est en avance par rapport au stimulus, on veut que la luciole produise de la lumière plus lentement.

L'équation qui régit notre modèle s'écrit alors :

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega + \beta \sin(\phi) \tag{1}$$

ou $\phi = \theta_{stim} - \theta$, (ou ϕ est le représentant dans la classe d'équivalence dans S^1 et tel que $\phi \in]-\pi, \pi[$) décrit le retard de la luciole par rapport au stimulus. ou $\beta > 0$ est une constante qui caractérise l'intensité de la correction.

Cohérence du modèle:

- Si $0 < \phi < \pi$, alors $\sin(\phi) > 0$. Donc la vitesse angulaire de la luciole est corrigée par l'ajout d'un terme positif.
- Si $-\pi < \phi < 0$, $\sin(\phi) < 0$. Donc la vitesse angulaire de la luciole est corrigée par l'ajout d'un terme négatif.

On définit le cas $0 < \phi < \pi$ comme un retard de la luciole par rapport au stimulus (voir Figure 2).

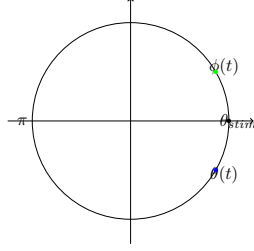


Figure 2: Cas où la luciole est en "retard"

On définit le cas $-\pi < \phi < 0$ comme une avance de la luciole par rapport au stimulus (voir Figure 3).

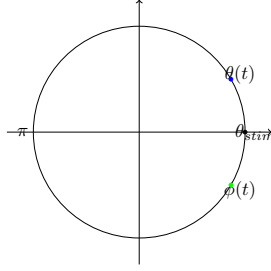


Figure 3: Cas où la luciole est en "avance"

Recherche d'équilibres: Notre modèle est décrit par l'équation :

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega + \beta \sin(\phi)$$

De $\phi = \theta_{stim} - \theta$

$$\frac{d(\theta_{stim} - \phi)}{dt} = \omega + \beta \sin(\phi)$$

D'où

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\theta_{stim}}{dt} - \omega - \beta \sin(\phi)$$

et avec $\frac{d\theta_{stim}}{dt} = \omega_{stim}$

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega_{stim} - \omega - \beta \sin(\phi) \quad (2)$$

On cherche désormais des points d'équilibre de cette équation différentielle. On cherche les points ϕ^* tels que :

$$\begin{aligned}\frac{d\phi}{dt}(\phi^*) &= 0 \\ \Leftrightarrow \omega_{stim} - \omega - \beta \sin(\phi^*) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin(\phi^*) &= \frac{\omega - \omega_{stim}}{\beta}\end{aligned}$$

1er cas : Absence d'équilibres

Si $\left| \frac{\omega_{stim} - \omega}{\beta} \right| > 1$, on a donc pas d'équilibre car $\phi \mapsto \sin(\phi)$ prends ses valeurs dans $[-1, 1]$. On a donc une absence d'équilibre et parallèlement de phase qui peut s'expliquer par le fait que les fréquences sont trop différentes et ne sont pas compensé par la facteur de correction β .

2ème cas : Conditions d'équilibres Si $\left| \frac{\omega_{stim} - \omega}{\beta} \right| < 1$, on peut se restreindre à chercher les solutions de cette equation modulo 2π .

Il existe alors $\phi^* \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ tel que $\sin(\phi^*) = \frac{\omega - \omega_{stim}}{\beta}$ et comme $\sin(\pi - \phi^*) = \sin(\phi^*)$, on a trouve deux équilibre: ϕ^* et $(\pi - \phi^*)$.

Pour comprendre la nature de ces équilibres, on va étudier la fonction $g(\phi) := \frac{d\phi}{dt}(\phi) = \omega_{stim} - \omega - \beta \sin(\phi)$. Un point d'équilibre est stable si c'est un point ou la dérivée de g est strictement négative (unique valeur propre strictement négative) et un point est instable si c'est un point ou la dérivée de g est positive (unique valeur propre positive).

$\forall \phi \in \mathbb{R} \ g'(\phi) = -\beta \cos(\phi)$. Comme $\phi^* \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\cos(\pi^*) > 0$ et $\cos(\pi - \phi^*) = -\cos(\phi^*) < 0$. On a que $g'(\phi^*) < 0$ et $g'(\pi - \phi^*) > 0$. On a donc que ϕ^* est un point stable alors que $\pi - \phi^*$ n'en est pas un.

Par exemple si on se place dans le cadre: $0 < \omega_{stim} - \omega$ ce qui se traduit par le choix arbitraire que le stimulus émet de la lumière plus rapidement que la luciole. On pourrait également étudier le portrait de phase et déterminer les équilibres stable grâce à celui-ci (voir Figure 4).

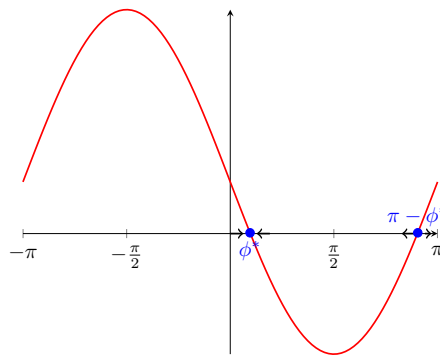


Figure 4: Portrait de phase

Cas particulier : $\left| \frac{\omega_{stim} - \omega}{\beta} \right| = 1$

Dans ce cas, $\sin(\phi^*)$ doit être égal à ± 1 , ce qui correspond aux points où la fonction sinus atteint ses valeurs maximales ou minimales. Les solutions sont

donc $\phi^* = \frac{\pi}{2}$ ou $\phi^* = -\frac{\pi}{2}$ (modulo 2π). Cependant, ces points sont des points de tangence où la courbe de la fonction $\frac{d\phi}{dt}$ touche l'axe horizontal sans le traverser, ce qui implique une transition délicate entre les régimes de comportement du système. Ces points ne sont pas typiquement considérés comme des points d'équilibre stables ou instables dans le sens classique, mais plutôt comme des points de bifurcation où le comportement du système peut changer radicalement. On ne va pas s'intéresser particulièrement à ces points dans la suite.

Ensembles de Lucioles

Pour étudier un modèle à plusieurs lucioles, on peut penser à étudier des modèles d'oscillateurs couplés. Considérons N équations couplées du type:

$$\frac{d\theta_j}{dt} = \omega_j + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N K_{jk} \sin(\theta_k - \theta_j) \quad j = 1, \dots, N$$

où θ_j est la phase de la luciole numéro j , ω_j représente la fréquence naturelle de la luciole j , et $K_{jk} > 0$ est le coefficient de couplage qui modifie la vitesse de la luciole j en réponse au stimulus émis par la luciole k . Ces coefficients de couplage peuvent être interprétés comme des ajustements de vitesse ou des forces de synchronisation, dépendant généralement de la proximité spatiale et de la phase relative entre les lucioles.

Dans la suite nous allons étudier quelques cas particulier avant de s'intéresser un cas où le nombre de lucioles est important.

3.2 Cas N=2

Exemple $N = 2$:

On a donc le système d'équations différentielles suivant

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_1}{dt} &= \omega_1 + K_{12} \sin(\theta_2 - \theta_1) \\ \frac{d\theta_2}{dt} &= \omega_2 + K_{21} \sin(\theta_1 - \theta_2) \end{aligned}$$

En effectuant le changement de coordonnées:

$$(\theta_1, \theta_2) \rightarrow (\phi, \psi) = (\theta_1 - \theta_2, \theta_2)$$

On obtient

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega_1 - \omega_2 - (K_{12} + K_{21}) \sin(\phi) \quad (3)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega_2 + K_{21} \sin(\phi) \quad (4)$$

Remarque: si $t \mapsto \phi(t)$ est solution de (3) alors

$$t \mapsto \psi(t) = \psi_0 + \omega_2 t + \int_0^t K_{21} \sin(\phi(s)) ds$$

est solution de (4).

Il suffira donc d'étudier l'équation (4). Comme dans le cas d'une "*luciole + un stimulus*", on cherche donc des points d'équilibres d'équilibre de cette équation différentielle. On cherche donc les points ϕ^* tels que:

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dt}(\phi^*) = 0 &\Leftrightarrow \omega_1 - \omega_2 - (K_{12} + K_{21}) \sin(\phi^*) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sin(\phi^*) = \frac{\omega_1 - \omega_2}{K_{12} + K_{21}} \end{aligned}$$

On a donc des solutions si et seulement si

$$\left| \frac{\omega_1 - \omega_2}{K_{12} + K_{21}} \right| \leq 1$$

On comprend avec cette condition, qu'on ne peut pas avoir d'équilibre et donc de synchronisation si les fréquences sont trop différentes et ne sont pas compenser par l'action qu'exerce les lucioles l'une en vers l'autre. Cette étude est très similaire au l'étude d'une seule luciole en présence d'un stimulus.

Dans le cas particulier ou $\left| \frac{\omega_1 - \omega_2}{K_{12} + K_{21}} \right| = 1$, il y a une unique solution $\phi^* \in \{\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}$ et on ne s'intéresse pas particulièrement à ce cas.

Si $\left| \frac{\omega_1 - \omega_2}{K_{12} + K_{21}} \right| < 1$, comme pour le cas qu'on a traité précédemment, on peut vérifier qu'il existe deux équilibres ϕ^* , $(\pi - \phi^*)$ avec $\phi^* \in]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. En étudiant également la dérivée de $\phi \rightarrow \omega_1 - \omega_2 - (K_{12} + K_{21}) \sin(\phi)$, on peut vérifier que ϕ^* est stable et $(\pi - \phi^*)$ est instable.

Afin d'analyser le comportement des oscillateurs couplés décrits par nos équations différentielles, nous avons effectué des simulations numériques. Ces simulations nous permettent d'observer directement l'évolution temporelle du décalage de phase entre les deux oscillateurs. Nous présentons ici deux graphiques illustrant cette évolution.

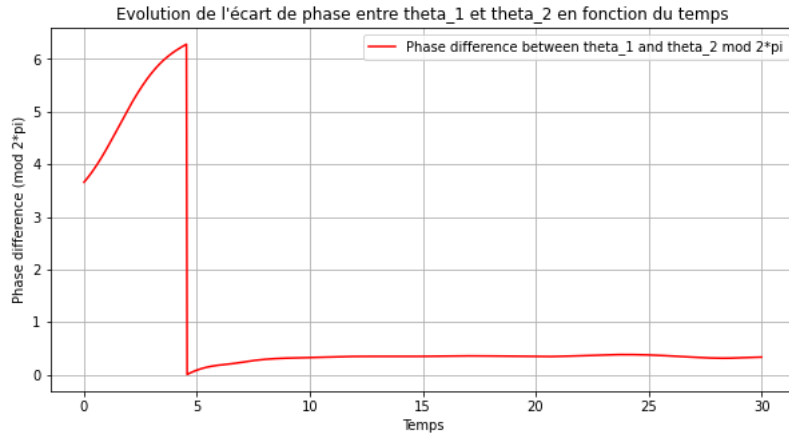


Figure 5: Evolution du décalage de phase en cas de synchronisation

Dans la Figure 5, nous sommes dans le cas où $\left| \frac{\omega_1 - \omega_2}{K_{12} + K_{21}} \right| \leq 1$, et on observe une augmentation rapide de la différence de phase qui se stabilise soudainement et reste constante à partir d'un certain temps. Cela indique une synchronisation entre les deux oscillateurs : après une période de transition, ils oscillent avec une différence de phase constante.

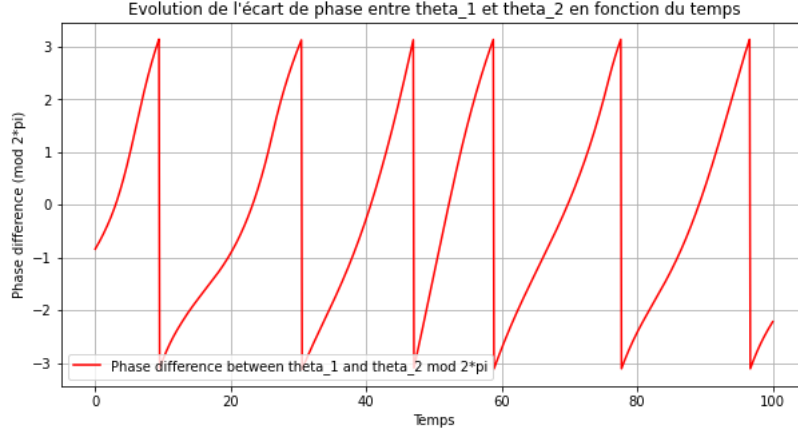


Figure 6: Evolution du décalage de phase en cas de non-synchronisation

La Figure 6 montre un comportement complètement différent. Nous sommes ici dans le cas où $\left| \frac{\omega_1 - \omega_2}{K_{12} + K_{21}} \right| > 1$. La différence de phase entre θ_1 et θ_2 varie périodiquement et passe par des discontinuités apparentes (résultant du module 2π), indiquant que les deux oscillateurs ne sont pas synchronisés. Cela se produit lorsque la condition de synchronisation n'est pas remplie, ce qui peut être dû à une trop grande différence entre les fréquences naturelles des oscillateurs ou à un couplage trop faible pour permettre une synchronisation.

3.3 Cas N=3

Exemple $N = 3$:

Considérons le système

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_1}{dt} &= \omega_1 + K_{12} \sin(\theta_2 - \theta_1) \\ \frac{d\theta_2}{dt} &= \omega_2 + K_{21} \sin(\theta_1 - \theta_2) + K_{23} \sin(\theta_3 - \theta_2) \\ \frac{d\theta_3}{dt} &= \omega_3 + K_{31} \sin(\theta_1 - \theta_3) \end{aligned}$$

Ce système représente le cas où la 1^{ère} et 3^{ème} luciole ne voit que la seconde luciole. La seconde luciole voit quant à elle les deux autres.

On effectue alors le changement de coordonnées : $(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \rightarrow (\phi, \psi, \sigma) = (\theta_1 - \theta_2, \theta_2 - \theta_3, \theta_3)$

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega_1 - \omega_2 - (K_{12} + K_{21}) \sin(\phi) + K_{23} \sin(\psi) \quad (5)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega_2 - \omega_3 - (K_{23} + K_{32}) \sin(\psi) + K_{21} \sin(\phi) \quad (6)$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = \omega_3 + K_{32} \sin(\psi) \quad (7)$$

Si $t \mapsto \phi(t)$ et $t \mapsto \psi(t)$ sont solutions de (5) et (6), alors

$$t \mapsto \sigma(t) = \sigma_0 + \omega_3 t + \int_0^t K_{32} \sin(\psi(s)) ds$$

est solution de (7). On va alors seulement étudier (5) et (6)

On cherche les équilibres (ϕ^*, ψ^*) tels que $\left(\frac{d\phi}{dt}(\phi^*), \frac{d\psi}{dt}(\psi^*)\right) = (0, 0)$

$$\begin{cases} \frac{d\phi}{dt}(\phi^*) = \omega_1 - \omega_2 + K_{23} \sin(\psi^*) - (K_{12} + K_{21}) \sin(\phi^*) = 0 & (L_1) \\ \frac{d\psi}{dt}(\psi^*) = \omega_2 - \omega_3 + K_{21} \sin(\phi^*) - (K_{23} + K_{32}) \sin(\psi^*) = 0 & (L_2) \end{cases}$$

En remplaçant L_1 par $(K_{23} + K_{32})L_1 + K_{23}L_2$, ce système devient équivalent à:

$$\begin{cases} (K_{23} + K_{32})(\omega_1 - \omega_2) + K_{23}(\omega_2 - \omega_3) - [(K_{12} + K_{21})(K_{23} + K_{32}) - K_{21}K_{23}] \sin(\phi^*) = 0 \\ \sin(\psi^*) = \frac{\omega_3 - \omega_2 + K_{21} \sin(\phi^*)}{K_{23} + K_{32}} \end{cases}$$

On trouve donc que:

$$\begin{cases} \sin(\phi^*) = R := \frac{K_{23}(\omega_1 - \omega_3) + K_{32}(\omega_1 - \omega_2)}{K_{21}K_{23} + K_{21}K_{32} + K_{21}K_{32}} \\ \sin(\psi^*) = S := \frac{\omega_3 - \omega_2}{K_{23} + K_{32}} + \frac{K_{21}K_{23}(\omega_1 - \omega_3) + K_{21}K_{32}(\omega_1 - \omega_2)}{(K_{23} + K_{32})(K_{21}K_{23} + K_{21}K_{32} + K_{21}K_{32})} \end{cases}$$

Si $|R| > 1$ ou $|S| > 1$: les fréquences sont trop différentes. Il n'existe alors pas d'équilibres, donc pas de synchronisation.

Si $|R| \leq 1$ et $|S| \leq 1$: des équilibres sont possibles.

- Si $|R| = 1$ et $|S| = 1$: un unique équilibre existe, donné par $(\pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{\pi}{2})$, qui dépend du signe de R et S .
- Si $|R| = 1$ et $|S| < 1$ (ou $|R| < 1$ et $|S| = 1$): il y a 2 équilibres.
- Étude principale: le cas $|R| < 1$, $|S| < 1$ qui est le plus intéressant. Dans ce cas, il y a 4 équilibres:

- $P_1 = (\phi^*, \psi^*)$
- $P_2 = (\pi - \phi^*, \psi^*)$
- $P_3 = (\phi^*, \pi - \psi^*)$
- $P_4 = (\pi - \phi^*, \pi - \psi^*)$

où ϕ^* et ψ^* sont choisis dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Nous allons étudier la nature de ces points d'équilibre. Pour cela, nous calculons la matrice jacobienne du champ vectoriel au niveau de ces points. Cette matrice jacobienne sera utilisée pour analyser la stabilité locale des points d'équilibre en examinant ses valeurs propres.

$$J(\phi, \psi) = \begin{pmatrix} -(K_{12} + K_{21}) \cos(\phi) & K_{23} \cos(\psi) \\ K_{21} \cos(\phi) & -(K_{23} + K_{32}) \cos(\psi) \end{pmatrix}$$

Soit τ la trace de J et Δ son déterminant.

$$\Delta = (K_{12} + K_{21})(K_{23} + K_{32}) \cos(\phi) \cos(\psi) - K_{21} K_{23} \cos(\phi) \cos(\psi)$$

$$= \cos(\phi) \cos(\psi) (K_{12} K_{32} + K_{12} K_{23} + K_{21} K_{32})$$

$$\tau = -((K_{12} + K_{21}) \cos(\phi) + (K_{23} + K_{32}) \cos(\psi))$$

Études donc les équilibres dans le cas $|R|, |S| < 1$.

Comme $J(\phi, \psi)$ est une matrice réelle de dimension 2×2 , son polynôme caractéristique est un polynôme du second degré avec des coefficients réels. Par conséquent, les valeurs propres de J sont soit toutes les deux réelles, soit un couple de nombres complexes conjugués. Nous désignerons ces valeurs propres par λ_1 et λ_2 dans la suite de notre étude. De plus, nous rappelons que le déterminant de J est égal au produit de ses valeurs propres, et que la trace de J est égale à la somme de ses valeurs propres.

Pour $P_1 = (\phi^*, \psi^*)$, comme $(\phi^*, \psi^*) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ On a $\cos(\phi^*), \cos(\psi^*) > 0$
Alors $\Delta > 0$, $\tau < 0$. Si les valeurs propres sont réelles, elles sont de même signe car $\Delta > 0$ et négative car $\tau < 0$. Si elles sont complexes conjuguées, alors elle sont de partie réelle négative car $\tau < 0$. En effet, si $\lambda_1 = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, alors $\lambda_2 = a - ib$ et donc $\tau = \lambda_1 + \lambda_2 = 2a < 0$
On a donc dans tout les cas que la partie réelle des valeurs propres est négative, c'est donc un point stable.

Pour $P_4 = (\pi - \phi^*, \pi - \psi^*)$, On a $\cos(\pi - \phi^*) = -\cos(\phi^*) < 0$, et de meme $\cos(\pi - \psi^*) < 0$. Alors $\Delta > 0$, $\tau > 0$. On a donc similairement au cas P_1 .
Si les valeurs propres sont réelles, elles sont de même signe car $\Delta > 0$ et positive car $\tau > 0$. Si elles sont complexes conjuguées, alors elle sont de partie réelle positive car $\tau > 0$. Dans tout les cas la partie réelle des valeurs propres est positive, c'est donc un point instable.

Pour $P_2 = (\pi - \phi^*, \psi^*)$ et $P_3 = (\phi^*, \pi - \psi^*)$,
on a respectivement $\cos(\pi - \phi^*) < 0$, $\cos(\psi^*) > 0$ et $\cos(\phi^*) > 0$, $\cos(\pi - \psi^*) < 0$
Donc pour P_2 et P_3 , $\Delta < 0$ ce qui implique que les valeurs propres sont réelles
et de signe opposé. Ceux sont donc des points selles.

On a donc un point stable et 3 points instables dont deux point selles.

3.4 2 lucioles + un stimulus

Etudions le cas particulier ou deux lucioles sont en présence d'un stimulus de
fréquence ω fixé. Considérons donc le système d'équations différentielles suivant:

$$\begin{cases} \frac{d\theta_1}{dt} = \omega_1 + \beta_1 \sin(\omega t - \theta_1) + K_{12} \sin(\theta_2 - \theta_1) \\ \frac{d\theta_2}{dt} = \omega_2 + \beta_2 \sin(\omega t - \theta_2) + K_{21} \sin(\theta_1 - \theta_2) \end{cases}$$

Où β_1 (resp. β_2) est le facteur d'influence du stimulus sur la première luciole
(resp. la seconde). Afin de simplifier les calculs et l'analyse, nous pouvons con-
sidérer que le stimulus a le même effet sur les deux lucioles (ce qui se traduit par
 $\beta_1 = \beta_2$) ainsi que les lucioles s'influencent mutuellement de la même manière
($K_{12} = K_{21}$). Nous considérons désormais pour la suite ce système d'équations
différentielles simplifié.

$$\begin{cases} \frac{d\theta_1}{dt} = \omega_1 + \beta \sin(\omega t - \theta_1) + K \sin(\theta_2 - \theta_1) \\ \frac{d\theta_2}{dt} = \omega_2 + \beta \sin(\omega t - \theta_2) + K \sin(\theta_1 - \theta_2) \end{cases}$$

On effectue alors le changement de coordonnées: $(\theta_1, \theta_2) \rightarrow (\omega t - \theta_1, \omega t - \theta_2) =$
 (φ_1, φ_2) .

Ce qui nous donne alors en posant $\Omega_1 := \omega - \omega_1$ et $\Omega_2 := \omega - \omega_2$:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi_1}{dt} = \Omega_1 - \beta \sin \varphi_1 - K \sin(\varphi_1 - \varphi_2) & (L1) \\ \frac{d\varphi_2}{dt} = \Omega_2 - \beta \sin \varphi_2 + K \sin(\varphi_1 - \varphi_2) & (L2) \end{cases}$$

On cherche alors les équilibres $(\varphi_1^*, \varphi_2^*)$ tels que $\left(\frac{d\varphi_1}{dt}(\varphi_1^*), \frac{d\varphi_2}{dt}(\varphi_2^*) \right) =$
 $(0, 0)$. En ajoutant L1 à la ligne L2, c'est équivalent à:

$$\begin{cases} \Omega_1 - \beta \sin \varphi_1^* - K \sin(\varphi_1^* - \varphi_2^*) = 0 & (A) \\ \Omega - \beta(\sin \varphi_1^* + \sin \varphi_2^*) = 0 & (B) \end{cases}$$

ou $\Omega := \Omega_1 + \Omega_2$ La seconde ligne nous donne donc la condition suivante:

$$\sin(\varphi_1^*) + \sin(\varphi_2^*) = \frac{\Omega}{\beta}$$

Une condition nécessaire pour avoir un équilibre est donc que $\left| \frac{\Omega}{\beta} \right| \leq 2$ Comme $\Omega = 2\omega - \omega_1 - \omega_2$, on peut avoir un équilibre si le facteur d'influence du stimulus β compense les différences de fréquences. On a donc nécessairement que

$$\sin(\varphi_1^*) = \frac{\Omega}{\beta} - \sin(\varphi_2^*) \quad (B)$$

Travaillons désormais avec l'équation (A),

$$\begin{aligned} (A) &\Leftrightarrow \Omega_1 - \beta \sin \varphi_1^* - K \sin(\varphi_1^* - \varphi_2^*) = 0 \\ &\Leftrightarrow \Omega_1 - \beta \sin \varphi_1^* - K [\sin \varphi_1^* \cos \varphi_2^* - \sin \varphi_2^* \cos \varphi_1^*] = 0 \end{aligned}$$

Cas 1: $\varphi_1^* \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, alors $\cos \varphi_1^* = \sqrt{1 - (\sin \varphi_1^*)^2}$ (On peut également étudier quand $\varphi_1^* \in \left[\frac{-3\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}\right]$ et les calculs sont sensiblement les mêmes bien que les conditions d'équilibre seront légèrement différentes)

Ce qui implique dans ce cas, en utilisant également la relation (B) et $\cos \varphi_1^* = \sqrt{1 - (\sin \varphi_1^*)^2}$ que:

$$\begin{aligned} (A) &\Leftrightarrow \Omega_1 - \Omega + \beta \sin \varphi_2^* - K \left[\frac{\Omega}{\beta} \cos \varphi_2^* - \sin \varphi_2^* \cos \varphi_2^* - \sin \varphi_2^* \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{\beta} - \sin \varphi_2^* \right)^2} \right] = 0 \\ &\Leftrightarrow -\Omega_2 + \beta \sin \varphi_2^* - K \frac{\Omega}{\beta} \cos \varphi_2^* + K \sin \varphi_2^* \left[\cos \varphi_2^* + \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{\beta} - \sin \varphi_2^* \right)^2} \right] = 0 \end{aligned}$$

Cas 1.1: $\varphi_2^* \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, (De même on peut également étudier quand $\varphi_2^* \in \left[\frac{-3\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}\right]$) On remplace alors $\cos \varphi_2^*$ par $\sqrt{1 - (\sin \varphi_2^*)^2}$ pour trouver que :

$$(A) \Leftrightarrow -\Omega_2 + \beta \sin(\varphi_2^*) - K \frac{\Omega}{\beta} \sqrt{1 - (\sin \varphi_2^*)^2} + K \sin \varphi_2^* \left[\sqrt{1 - (\sin \varphi_2^*)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{\beta} - \sin \varphi_2^* \right)^2} \right] = 0$$

Soit :

$$f(X) = -\Omega_2 + \beta X - K \frac{\Omega}{\beta} \sqrt{1 - X^2} + K X \left[\sqrt{1 - X^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{\beta} - X \right)^2} \right]$$

Cette fonction est bien défini pour $X \in [-1, 1]$ et $1 - \left(\frac{\Omega}{\beta} - X \right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \left| \frac{\Omega}{\beta} - X \right| \leq 1$

$$\Leftrightarrow -1 \leq \frac{\Omega}{\beta} - X \leq 1 \Leftrightarrow \frac{\Omega}{\beta} - 1 \leq X \leq \frac{\Omega}{\beta} + 1$$

f est défini sur $\left[\max \left(-1, \frac{\Omega}{\beta} - 1 \right), \min \left(1, \frac{\Omega}{\beta} + 1 \right) \right]$ (on a que $\left| \frac{\Omega}{\beta} \right| \leq 2$)

En évaluant la fonction f en $\max\left(-1, \frac{\Omega}{\beta} - 1\right)$ et $\min\left(1, \frac{\Omega}{\beta} - 1\right)$, on peut exhiber des conditions nécessaires pour que:

$$f\left(\max\left(-1, \frac{\Omega}{\beta} - 1\right)\right) < 0, \quad f\left(\min\left(1, \frac{\Omega}{\beta} - 1\right)\right) > 0$$

. Ces conditions vont une fois de plus nécessiter que les fréquences ne soit pas trop différentes par rapport au facteur β et K .

Comme la fonction f est continue, par le théorème des valeurs intermédiaires on trouve alors un $X^* \in \left[\max\left(-1, \frac{\Omega}{\beta} - 1\right), \min\left(1, \frac{\Omega}{\beta} - 1\right)\right]$ tel que $f(X^*) = 0$.

Pour ces conditions on a donc trouver $X^* = \sin \varphi_2^*$, en particulier $X^* \in [-1, 1]$ ce qui est cohérent pour espérer que $\sin \varphi_2^* = X^*$.

Comme $\sin(\varphi_1^*) = \frac{\Omega}{\beta} - \sin(\varphi_2^*)$, en vérifiant bien toutes les différentes conditions, dans certain cas on peut trouver $\varphi_1^*, \varphi_2^* \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\left(\frac{d\varphi_1}{dt}(\varphi_1^*), \frac{d\varphi_2}{dt}(\varphi_2^*)\right) = (0, 0)$.

Après avoir exhiber les différents équilibres pour des valeurs de β et K fixé il est également possible d'étudier la nature de ces équilibres en calculant les valeurs propres au point d'équilibre du champ vectoriel :

$$\tilde{J}(\varphi_1^*, \varphi_2^*) = \begin{pmatrix} -\beta \cos(\varphi_1^*) - K \cos(\varphi_1^* - \varphi_2^*) & K \cos(\varphi_1^* - \varphi_2^*) \\ K \cos(\varphi_1^* - \varphi_2^*) & -\beta \cos(\varphi_2^*) - K \cos(\varphi_1^* - \varphi_2^*) \end{pmatrix}$$

3.5 Cas N grand

Dans le cadre de notre étude sur la synchronisation des lucioles, la résolution analytique des équations différentielles régissant les dynamiques de synchronisation pour un grand nombre d'individus devient extrêmement complexe. Avec l'augmentation du nombre de lucioles, la complexité du système s'accroît exponentiellement, rendant l'étude des points d'équilibre et des dynamiques de phase par des moyens analytiques pratiquement impossible. Ainsi, pour examiner le comportement du système sous des conditions plus réalistes, nous avons eu recours à des simulations numériques.

Nous avons numériquement résolu un ensemble de N équations couplées de la forme suivante:

$$\frac{d\theta_j}{dt} = \omega_j + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N K_{jk} \sin(\theta_k - \theta_j), \quad j = 1, \dots, N$$

où θ_j représente la phase de la luciole numéro j , ω_j est la fréquence naturelle de la luciole j , et K_{jk} désigne le coefficient de couplage entre la luciole j et la luciole k .

Nous avons employé des méthodes numériques avancées pour intégrer ces systèmes d'équations, permettant d'observer les configurations de synchronisation qui se manifestent sous diverses conditions initiales et valeurs de paramètres K_{jk} . L'analyse des données simulées contribue à notre compréhension des processus par lesquels les interactions locales entre lucioles peuvent conduire à une synchronisation collective.

Le code Python ci-dessous est l'implémentation de notre modèle mathématique, qui décrit les interactions entre les lucioles en utilisant la fonction `scipy.integrate.solve_ivp`.

Ce modèle suppose $N = 20$ lucioles, chacune avec une fréquence intrinsèque aléatoirement distribuée entre ω_{\min} et ω_{\max} , et des coefficients de couplage K_{jk} également choisis aléatoirement pour refléter la variabilité naturelle des interactions.

```

1 import numpy as np
2 from scipy.integrate import solve_ivp
3 import matplotlib.pyplot as plt
4
5 # Fonction définissant les equations differentielles pour N
  oscillateurs
6 def systeme(t, thetas, omegas, K):
7     N = len(thetas) # Nombre d'oscillateurs
8     dthetas_dt = np.zeros(N)
9
10    for j in range(N):
11        somme = 0
12        for k in range(N):
13            if k != j:
14                somme += K[j][k] * np.sin(thetas[k] - thetas[j])
15            dthetas_dt[j] = omegas[j] + somme
16
17    return dthetas_dt
18
19 # Nombre de lucioles
20 N = 20
21
22 # Initialiser les listes pour omegas, K et conditions initiales
23 omegas = []
24 K = np.zeros((N, N)) # Matrice K initialisee a zero
25 conditions_initiales = []
26
27 omega_min = 0.8
28 omega_max = 1.2
29 K_min = 0.4
30 K_max=0.6
31
32 for j in range(N):
33     omegas.append(np.random.uniform(omega_min, omega_max))
34     conditions_initiales.append(np.random.uniform(0, 10*np.pi))
35     for k in range(N):
36         if k != j:
37             K[j][k] = np.random.uniform(K_min, K_max)
38
39 # Intervalle de temps
40 t_debut = 0
41 t_fin = 30
42 t_points = np.linspace(t_debut, t_fin, 300)
43
44 # Resoudre le systeme d'equations differentielles
45 solution = solve_ivp(systeme, [t_debut, t_fin],
46                        conditions_initiales, args=(omegas, K), t_eval=t_points)
47
48 # Afficher les resultats
49 plt.figure(figsize=(10, 5))
50
51 # Affichage des angles Theta
52 for j in range(N):
53     plt.plot(solution.t, solution.y[j], label=f'theta_{j+1}(t)')
54
55 plt.xlabel('Temps')
56 plt.ylabel('Theta_j, j=1,N')
```

```

56 plt.title('Evolution des angles Theta en fonction du temps')
57 plt.legend()
58 plt.grid(True)
59 plt.show()

```

Listing 1: Python example

Afin d'illustrer la synchronisation des lucioles, nous avons dû adapter nos méthodes de visualisation pour faire face aux limitations inhérentes à la représentation des décalages de phase sur le cercle trigonométrique, notamment avec un nombre élevé de lucioles. Notre algorithme de base fournit une visualisation directe de la synchronisation imparfaite, comme on peut le voir dans l'une des figures. Pour les autres, bien que basées sur les mêmes simulations numériques, le code a été légèrement modifié afin d'adapter la représentation aux objectifs spécifiques de chaque graphique.

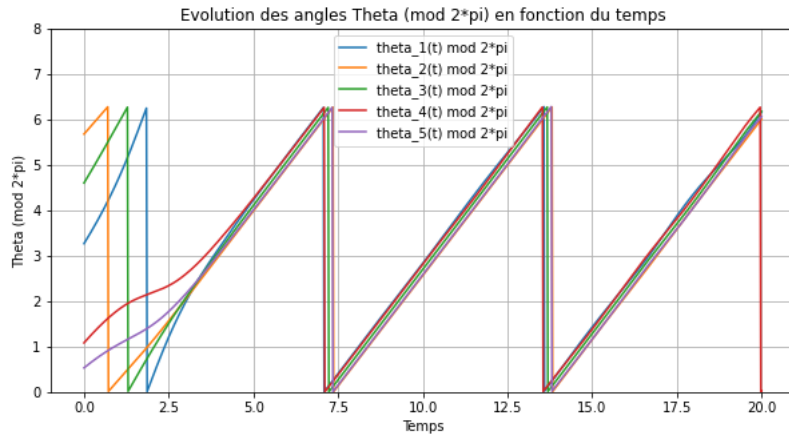


Figure 7: Simulation des cycles d'émission de lumière des lucioles, représentée modulo 2π .

La Figure 7 résulte d'une légère modification du code pour afficher les phases des lucioles modulo 2π . Ce graphique facilite la visualisation des cycles d'émission de lumière, permettant d'observer les tendances synchrones même dans le contexte d'une synchronisation imparfaite. Pour obtenir un affichage similaire il est nécessaire de changer la ligne 52 du code par `plt.plot(solution.t, np.mod(solution.y[j], 2*np.pi), label=f'theta_{j+1}(t) mod 2*pi')` ainsi que de remplacer la valeur de `t_fin` par 20 à la ligne 41.

La Figure 8 est le résultat direct de notre algorithme de simulation sans modifications supplémentaires. Elle présente une visualisation non modulée des phases des lucioles sur un intervalle temporel prolongé, montrant la synchronisation imparfaite sous forme de pentes parallèles.

Enfin, la Figure 9 utilise un code légèrement ajusté pour mieux illustrer les périodes de synchronisation imparfaite à une échelle réduite (`t_fin` par 3 à la ligne 41). Bien que le processus de simulation sous-jacent reste le même, cette représentation met l'accent sur les instants où les lucioles ajustent parfaitement leur rythme d'émission.

Ces graphiques démontrent de manière efficace les nuances de la synchronisation au sein d'une population de lucioles. Ils reflètent les différentes manières

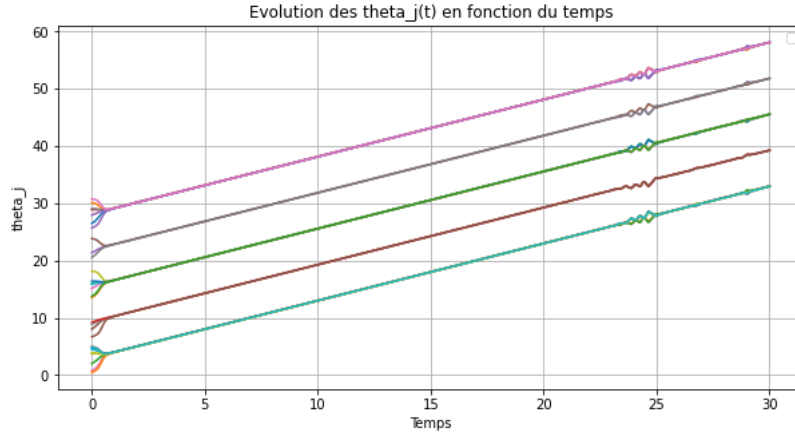


Figure 8: Évolution directe des phases des lucioles obtenue par notre algorithme.

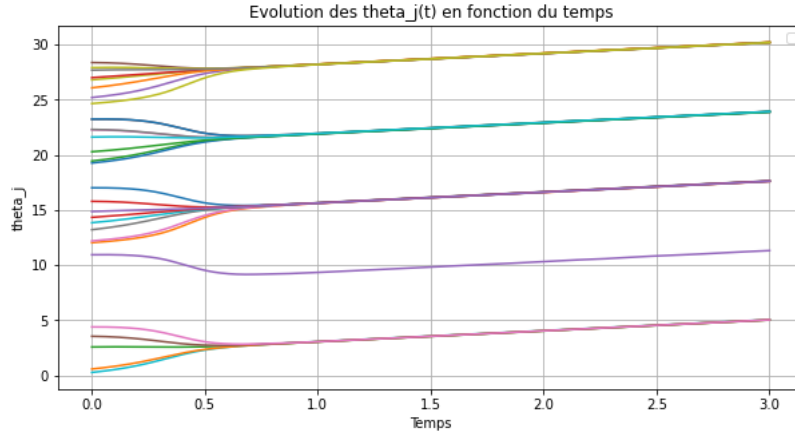


Figure 9: Détail de la synchronisation des phases des lucioles sur une échelle réduite, avec une légère modification du code.

dont les phases peuvent converger, et soulignent l'intérêt d'adapter les techniques de visualisation pour capturer la complexité des dynamiques collectives.

4 Synchronisation parfaite

4.1 Introduction du modèle de synchronisation parfaite

Nous avons vu dans la partie précédente que selon certaines conditions, les lucioles ou les lucioles en présence de stimulus peuvent se synchroniser de façon imparfaite. Autrement dit, les temps qui séparent les émissions de lumière des lucioles et du stimulus vont se stabiliser vers des temps d'équilibre.

À ce stade, nous ne pouvons pas affirmer si oui ou non les lucioles et les stimulus clignotent "en même temps". Le cas échéant on parlera de synchronisation

parfaite.

L'objet de cette partie est donc d'étudier un nouveau modèle dans lequel on pourra exhiber des conditions de synchronisation parfaite.

Dans ce modèle révisé, nous prenons en compte que les pulsations intrinsèques des lucioles ne sont pas statiques mais varient au fil du temps. Cela simule la capacité des lucioles à ajuster leur rythme d'émission lumineuse. Cependant, en isolation, chaque luciole oscille à une fréquence naturelle constante ω_{nat} . Nous supposons également que la luciole ne peut varier sa fréquence intrinsèque au-delà de limites définies, délimitées par deux fréquences critiques constantes ω_{min} et ω_{max} , satisfaisant $\omega_{min} \leq \omega(t) \leq \omega_{max}$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.

Le modèle pour une luciole isolée est simple :

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega$$

Pour incorporer l'influence d'un stimulus ou d'une autre luciole, une correction à ω est ajoutée. Ce mécanisme est décrit par l'équation suivante :

$$\frac{d\omega}{dt} = (\varepsilon(\omega_{nat} - \omega) + G(\omega, \theta))P\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

Avec P une fonction de dirac 1 – *périodique*, et $\varepsilon > 0$.

Ici, $P\left(\frac{t}{\tau}\right)$ agit comme une série de pics delta espacés de manière périodique chaque τ unités de temps (avec τ la période du stimulus), simulant l'impact d'un stimulus périodique externe. Chaque impulsion de Dirac déclenche une réponse instantanée du système, ce qui permet de modéliser des ajustements précis et ponctuels de la pulsation ω en fonction du stimulus reçu à ces instants spécifiques. De plus, on observe que la luciole a une tendance à retourner à sa pulsation naturelle ce qui se traduit par la présence d'un paramètre ε qui rend compte de la "vitesse" à laquelle la luciole essaye de retourner à sa pulsation naturelle.

Ce modèle s'appuie toujours sur la notion de *phase response curve* (PRC). Pour adhérer aux principes physiques observés, la fonction G doit remplir les conditions suivantes :

- lorsque la luciole est en retard par rapport au stimulus, on veut que la luciole produise de la lumière plus rapidement.
- lorsque la luciole est en avance par rapport au stimulus, on veut que la luciole produise de la lumière plus lentement.

Par conséquent, nous supposons que G prend la forme spécifique :

$$g^+(\theta)(\omega_{min} - \omega) + g^-(\theta)(\omega_{max} - \omega)$$

avec $g^\pm(\theta)$ étant des fonctions périodiques qui, pour θ dans l'intervalle de $[0, 2\pi]$, satisfont :

$$\begin{aligned} g^+(0) &= 0; & g^+(\theta) &> 0, & 0 < \theta < \pi; & g^+(\theta) &= 0, & \pi < \theta < 2\pi; \\ g^-(0) &= 0; & g^-(\theta) &> 0, & \pi < \theta < 2\pi; & g^-(\theta) &= 0, & 0 < \theta < \pi. \end{aligned}$$

Un exemple de fonction g^+ et g^- qui peut être considéré est :

$$g^+(\theta) = \max(\sin(\theta), 0) \quad \text{et} \quad g^-(\theta) = -\min(\sin(\theta), 0),$$

4.2 Etudes du modèle et premiers calculs

Nous introduisons les notations

$$\theta_n = \theta((n\tau)^+) = \lim_{t \downarrow n\tau} \theta(t)$$

et

$$\omega_n = \omega((n\tau)^+) = \lim_{t \downarrow n\tau} \omega(t),$$

où τ est la période du stimulus. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, θ_n et ω_n correspondent respectivement à la phase et à la fréquence de la luciole immédiatement après la n -ième émission lumineuse du stimulus.

Nous pouvons alors écrire :

$$\begin{aligned} \theta_{n+1} - \theta_n &= \theta((n+1)\tau^+) - \theta(n\tau^+) \\ &= \int_{n\tau^+}^{(n+1)\tau^+} \frac{d\theta}{ds}(s) ds \\ &= \int_{n\tau}^{(n+1)\tau} \omega(s) ds \\ &= \int_{n\tau}^{(n+1)\tau} \omega_n ds \\ &= \omega_n \tau \end{aligned}$$

L'égalité $\omega(t) = \omega_n$ pour tout $t \in [n\tau, (n+1)\tau)$ s'explique par le comportement de la fonction ω qui est régi par une équation différentielle incluant une impulsion de Dirac périodique. Entre les instants d'activation du stimulus, ω reste constant en raison de l'absence de nouvelles impulsions delta, jusqu'à ce que le prochain stimulus périodique se produise.

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous obtenons l'équation de récurrence pour θ_n :

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \omega_n \tau. \tag{8}$$

D'un autre côté, on a:

$$\begin{aligned} \omega_{n+1} - \omega_n &= \omega((n+1)\tau^+) - \omega(n\tau^+) \\ &= \int_{n\tau^+}^{(n+1)\tau^+} [\varepsilon(\omega_{\text{nat}} - \omega(s)) + g^+(\theta(s))(\omega_{\text{min}} - \omega(s)) + g^-(\theta(s))(\omega_{\text{max}} - \omega(s))] P\left(\frac{s}{\tau}\right) ds. \end{aligned}$$

Avec le changement de variable $u = s - n\tau$, et en exploitant la périodicité de la fonction delta de Dirac P , on obtient :

$$\begin{aligned}
&= \int_{0^+}^{\tau^+} [\varepsilon(\omega_{\text{nat}} - \omega(n\tau + u))g^+(\theta(n\tau + u))(\omega_{\min} - \omega(n\tau + u))] P\left(\frac{n\tau + u}{\tau}\right) du \\
&\quad + \int_{0^+}^{\tau^+} [g^-(\theta(n\tau + u))(\omega_{\max} - \omega(n\tau + u))] P\left(\frac{n\tau + u}{\tau}\right) du \\
&= \int_{\tau^-}^{\tau^+} [\varepsilon(\omega_{\text{nat}} - \omega(n\tau + s))g^+(\theta(n\tau + s))(\omega_{\min} - \omega(n\tau + s))] P\left(\frac{u}{\tau}\right) du \\
&\quad + \int_{\tau^-}^{\tau^+} [g^-(\theta(n\tau + u))(\omega_{\max} - \omega(n\tau + u))] P\left(\frac{u}{\tau}\right) du \\
&= \int_{\tau^-}^{\tau^+} [\varepsilon(\omega_{\text{nat}} - \omega(n\tau + s))g^+(\theta(n\tau + s))(\omega_{\min} - \omega(n\tau + s))] \delta_\tau(u) du \\
&\quad + \int_{\tau^-}^{\tau^+} [g^-(\theta(n\tau + u))(\omega_{\max} - \omega(n\tau + u))] \delta_\tau(u) du \\
&= \varepsilon(\omega_{\text{nat}} - \omega_n) + g^+(\theta_n + \tau\omega_n)(\omega_{\min} - \omega_n) + g^-(\theta_n + \tau\omega_n)(\omega_{\max} - \omega_n)
\end{aligned}$$

Cela découle du fait que $P(u/\tau)$ agit comme une série d'impulsions et, entre ces impulsions, ω reste constant. De plus, comme θ évolue linéairement entre les impulsions en raison de $\frac{d\theta}{dt} = \omega$ (où ω est constant entre les impulsions), nous pouvons écrire $\theta(n\tau + t) = \theta_n + \omega_n t$ pour tout t dans l'intervalle $[0, \tau]$.

Nous obtenons donc l'équation suivante pour la fréquence :

$$\omega_{n+1} = \omega_n + \varepsilon(\omega_{\text{nat}} - \omega_n) + g^+(\theta_n + \tau\omega_n)(\omega_{\min} - \omega_n) + g^-(\theta_n + \tau\omega_n)(\omega_{\max} - \omega_n) \quad (9)$$

Cette équation montre clairement que la fréquence est ralentie (resp. accélérée) si la luciole est en avance (resp. "retard") par rapport au stimulus. Cela est indiqué lorsque $0 < \theta_n + \tau\omega_n < \pi$ (resp. $\pi < \theta_n + \tau\omega_n < 2\pi$).

Comme mentionné précédemment, sans la présence de forçage ($g^+ = g^- = 0$), la fréquence tend naturellement vers la fréquence intrinsèque, ω_{nat} . Dans ce cas, l'équation de récurrence se simplifie à :

$$\omega_{n+1} = \omega_n + \varepsilon(\omega_{\text{nat}} - \omega_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Une récurrence simple permet de démontrer que :

$$\omega_n = (1 - \varepsilon)^n \omega_0 + \left[\varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} (1 - \varepsilon)^i \right] \omega_{\text{nat}},$$

où ω_0 est la fréquence initiale.

En développant la somme géométrique et en simplifiant, nous obtenons :

$$\omega_n = \omega_{\text{nat}} + (\omega_0 - \omega_{\text{nat}})(1 - \varepsilon)^n.$$

À mesure que n augmente, $(1 - \varepsilon)^n$ tend vers zéro et donc ω_n converge vers ω_{nat} , ce qui démontre que la fréquence se stabilise sur sa valeur naturelle au fil du temps.

4.3 Condition de synchronisation

Dans la suite de cette étude on va se placer dans le cadre ou

$$0 < \omega_{min} < \omega_{stim} < \omega_{max} \text{ et } \omega_{max} < 2\omega_{stim}$$

Cette condition est essentielle pour espérer une synchronisation, car la fréquence du stimulus doit être atteignable par la luciole. La seconde condition nous permet d'éviter des cas de synchronisation où la luciole émettrait de la lumière à une fréquence deux fois, trois fois, ou plus grande que le stimulus, ce qui n'est pas physiquement pertinent dans notre contexte.

Lemme 1. *Dans les conditions $0 < \omega_{min} < \omega_{stim} < \omega_{max} < 2\omega_{stim}$. Si on observe un phénomène de synchronisation de phase, alors $\omega_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \omega_{stim}$ et $\theta_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \theta^*$ où θ^* vérifie l'équation :*

$$\epsilon(\omega_{nat} - \omega_{stim}) + g^+(\theta^*)(\omega_{min} - \omega_{stim}) + g^-(\theta^*)(\omega_{max} - \omega_{stim}) = 0$$

Preuve. De l'équation :

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \omega_n \tau. \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

On a un phénomène de synchronisation de phase si et seulement si $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\theta_{n+1} - \theta_n) \equiv 0 [2\pi]$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \omega_n \tau \equiv 0 [2\pi]$.

On en déduit $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $\omega_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} k \frac{2\pi}{\tau}$.

En utilisant que $\omega_{stim} = \frac{2\pi}{\tau}$ car τ est la période du stimulus,

Comme

$$0 < \omega_{min} \leq \omega(t) \leq \omega_{max} < 2 * \frac{2\pi}{\tau} \text{ et } \forall t \in \mathbb{R}^+$$

$$\text{On a donc pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad \omega_{min} \leq \omega_n \leq \omega_{max} < 2 * \frac{2\pi}{\tau}$$

En faisant tendre n vers l'infini on trouve alors que:

$$0 < \omega_{min} \leq k \frac{2\pi}{\tau} \leq \omega_{max} < 2 * \frac{2\pi}{\tau}$$

$\Rightarrow k = 1$. Donc $\omega_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{2\pi}{\tau} = \omega_{stim}$ et $\theta_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \theta^*$ pour un certain $\theta^* \in [0, 2\pi[$ toujours en travaillant modulo 2π .

En utilisant l'équation :

$$\omega_{n+1} = \omega_n + \epsilon(\omega_{nat} - \omega_n) + g^+(\theta_n + \tau\omega_n)(\omega_{min} - \omega_n) + g^-(\theta_n + \tau\omega_n)(\omega_{max} - \omega_n)$$

On obtient en faisant tendre n vers l'infini et en utilisant la continuité des fonctions g^+ et g^- que:

$$\omega_{stim} = \omega_{stim} + \epsilon(\omega_{nat} - \omega_{stim}) + g^+(\theta^* + \tau\frac{2\pi}{\tau})(\omega_{min} - \omega_{stim}) + g^-(\theta^* + \tau\frac{2\pi}{\tau})(\omega_{max} - \omega_{stim})$$

$$\Leftrightarrow 0 = \epsilon(\omega_{nat} - \omega_{stim}) + g^+(\theta^*)(\omega_{min} - \omega_{stim}) + g^-(\theta^*)(\omega_{max} - \omega_{stim})$$

Ou on a utilisé a la dernière équivalence le fait que les fonctions g^+ et g^- sont 2π -périodiques donc $g^+(\theta^* + 2\pi) = g^+(\theta^*)$ et $g^-(\theta^* + 2\pi) = g^-(\theta^*)$.

Ainsi, nous devons avoir $\omega_n \rightarrow \omega_{stim}$ et $\theta_n \rightarrow \theta^*$, où θ^* satisfait :

$$\epsilon(\omega_{nat} - \omega_{stim}) + g^+(\theta^*)(\omega_{min} - \omega_{stim}) + g^-(\theta^*)(\omega_{max} - \omega_{stim}) = 0.$$

□

Nous définissons $\forall n \in \mathbb{N}$

$$f_1(\theta_n, \omega_n) = \theta_n + \omega_n \tau$$

$$f_2(\theta_n, \omega_n) = \omega_n + \varepsilon(\omega_{nat} - \omega_n) + g^+(\theta_n + \tau \omega_n)(\omega_{min} - \omega_n) + g^-(\theta_n + \tau \omega_n)(\omega_{max} - \omega_n)$$

On a donc que $\begin{pmatrix} \theta_{n+1} \\ \omega_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(\theta_n, \omega_n) \\ f_2(\theta_n, \omega_n) \end{pmatrix}$ qui décrit donc un système dynamique discret.

On note par la suite $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$

Le phénomène de synchronisation est caractérisé par un point d'équilibre de l'équation de récurrence, c'est donc un point (θ^*, ω^*) tel que:

$$f(\theta^*, \omega^*) = \begin{pmatrix} \theta^* \\ \omega^* \end{pmatrix} \Leftrightarrow f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} (\theta_{n+1}, \omega_{n+1})\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} \theta_{n+1} \\ \omega_{n+1} \end{pmatrix}$$

En travaillant modulo 2π pour f_1 .

Les calculs précédent nous permette de conclure que nécessairement:

$$\begin{aligned} \omega^* &= \omega_{stim} \\ \varepsilon(\omega_{nat} - \omega_{stim}) + g^+(\theta^*)(\omega_{min} - \omega_{stim}) + g^-(\theta^*)(\omega_{max} - \omega_{stim}) &= 0 \end{aligned}$$

Supposons que $\omega_{nat} > \omega_{stim}$, La condition de synchronisation pour θ^* est :

$$\begin{aligned} \varepsilon(\omega_{nat} - \omega_{stim}) + g^+(\theta^*)(\omega_{min} - \omega_{stim}) + g^-(\theta^*)(\omega_{max} - \omega_{stim}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \varepsilon(\omega_{nat} - \omega_{stim}) &= g^+(\theta^*)(\omega_{stim} - \omega_{min}) - g^-(\theta^*)(\omega_{max} - \omega_{stim}) \end{aligned}$$

Comme $\varepsilon(\omega_{nat} - \omega_{stim}) > 0$, si $\theta^* \in [\pi, 2\pi[$, alors $g^+(\theta^*)(\omega_{stim} - \omega_{min}) = 0$ et $-g^-(\theta^*)(\omega_{max} - \omega_{stim}) \leq 0$, ce qui est impossible. Ainsi cela impose que $\theta^* \in [0, \pi[$.

Le terme $g^-(\theta^*)(\omega_{max} - \omega_{stim})$ est donc nul, **on obtient alors l'équation suivante pour θ^* :**

$$g^+(\theta^*) = \frac{\varepsilon(\omega_{nat} - \omega_{stim})}{(\omega_{stim} - \omega_{min})} \quad (10)$$

On rappelle ici qu'avec ce modèle, on cherche à montrer une synchronisation parfaite, c'est à dire que le décalage de phase entre la luciole et le stimulus devient nul, on cherche donc à montrer que $\theta^* = 0$. Ici si $\omega_{stim} - \omega_{min} \gg \varepsilon$, (ce qui traduit le fait que la fréquence du stimulus n'est pas à limite de la fréquence minimale de la luciole). On obtient que $g^+(\theta^*)$ est proche de zéro. Or g^+ est tel que:

$$g^+(0) = 0; \quad g^+(\theta) > 0, \quad 0 < \theta < \pi; \quad g^+(\theta) = 0, \quad \pi < \theta < 2\pi$$

Si par exemple $g^+(\theta) = \max(\sin(\theta), 0)$, on constate qu'il y a deux équilibres différents dans ce cas, un qui est très proche de zéro (qui nous intéresse) et un qui ne l'est pas (voir Figure 10).

La partie suivante va se consacrer à l'étude de stabilité de nos équilibres, on aimerait montrer que l'équilibre tel que θ^* est proche de zéro est un point stable tandis que l'autre équilibre n'en est pas un pour pouvoir tirer des conclusions intéressantes sur notre modèle.

Le cas $\omega_{nat} < \omega_{stim}$ se traite de la même manière et ne sera pas détailler ici.

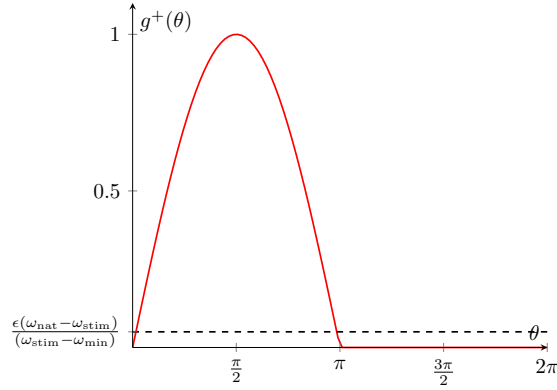


Figure 10: Tracé de la fonction g^+

4.4 Stabilité des équilibres

Dans cette section, on va étudier la stabilité des équilibres identifiées, on se placera encore dans le cadre $\omega_{nat} > \omega_{stim}$.

On aura besoin du lemme suivant:

Lemme 2. Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$, soit λ_1, λ_2 les valeurs propres de A .

$$2 > 1 + \det(A) > |\text{Tr}(A)| \quad (E) \Leftrightarrow |\lambda_1|, |\lambda_2| < 1$$

.

Preuve. \Rightarrow Considérons le polynôme caractéristique de A , comme ce polynôme est à coefficients réels, ses racines sont soit réelles, soit complexes et conjuguées. Notons λ_1, λ_2 les valeurs propres de A .

Comme $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2$ et $\text{Tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2$, alors $(E) \Leftrightarrow$

$$2 > 1 + \lambda_1 \lambda_2 > |\lambda_1 + \lambda_2|$$

qui implique que $|\lambda_1|, |\lambda_2| < 1$.

En effet:

Cas 1: $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} \in \mathbb{C}$. Il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_2 = a + ib$ et $\lambda_1 = a - ib$.

Alors (E) devient:

$$2 > 1 + a^2 + b^2 > 2|a|$$

ce qui implique que $a^2 + b^2 < 1$. D'où $|\lambda_1| = |\lambda_2| = \sqrt{a^2 + b^2} < 1$.

Cas 2: $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Supposons par l'absurde que $|\lambda_1| \geq 1$, alors $\lambda_1 > 1$ ou $\lambda_1 < -1$ ou $\lambda_1 = 1$ ou $\lambda_1 = -1$

Si $\lambda_1 > 1$, alors (E) implique :

$$2 > 1 + \lambda_1 \lambda_2 > |\lambda_1 + \lambda_2|$$

$$\Rightarrow 1 + \lambda_1 \lambda_2 > \lambda_1 + \lambda_2$$

$$\Rightarrow \lambda_2(\lambda_1 - 1) > \lambda_1 - 1$$

$$\Rightarrow \lambda_2 > 1$$

car $\lambda_1 - 1 > 0$

On a donc $\lambda_1, \lambda_2 > 1$ donc $2 > |tr(A)| = |\lambda_1 + \lambda_2| = \lambda_1 + \lambda_2 > 2$ ce qui est impossible

Si $\lambda_1 < -1$, alors (E) implique :

$$\begin{aligned} 2 &> 1 + \lambda_1 \lambda_2 > |\lambda_1 + \lambda_2| \\ \Rightarrow 1 + \lambda_1 \lambda_2 &> -(\lambda_1 + \lambda_2) \\ \Rightarrow \lambda_2(\lambda_1 + 1) &> -(\lambda_1 + 1) \\ \Rightarrow \lambda_2 &< -1 \end{aligned}$$

car $\lambda_1 + 1 < 0$

On a donc $\lambda_1, \lambda_2 < -1$ donc $2 > |tr(A)| = |\lambda_1 + \lambda_2| = -(\lambda_1 + \lambda_2) > 2$ ce qui est impossible

Si $\lambda_1 = 1$, alors (E) implique :

$$1 + \lambda_2 > |1 + \lambda_2|$$

Ce qui est impossible.

Si $\lambda_1 = -1$, alors (E) implique :

$$1 - \lambda_2 > |-1 + \lambda_2|$$

Ce qui est aussi impossible.

Nous aboutissons donc à une contradiction, donc $|\lambda_1| < 1$ et par symétrie $|\lambda_2| < 1$.

Donc $|\lambda_1|, |\lambda_2| < 1$.

\Leftrightarrow Supposons que $|\lambda_1|, |\lambda_2| < 1$, alors évidemment $2 > 1 + \det(A)$.

Supposons par l'absurde que $1 + \det(A) \leq |tr(A)|$. Or dans ce cas on peut vérifier que λ_1 ou λ_2 est supérieur ou égal à 1, ou inférieur ou égal à -1 et aboutir à une contradiction.

On a donc bien

$$2 > 1 + \det(A) > |Tr(A)| \quad (E) \Leftrightarrow |\lambda_1|, |\lambda_2| < 1$$

□

On rappelle que $\forall n \in \mathbb{N}$

$$f_1(\theta_n, \omega_n) = \theta_n + \omega_n \tau$$

$$f_2(\theta_n, \omega_n) = \omega_n + \varepsilon(\omega_{nat} - \omega_n) + g^+(\theta_n + \tau\omega_n)(\omega_{min} - \omega_n) + g^-(\theta_n + \tau\omega_n)(\omega_{max} - \omega_n)$$

$$\text{et que l'on a } \begin{pmatrix} \theta_{n+1} \\ \omega_{n+1} \end{pmatrix} = f(\theta_n, \omega_n) \text{ ou } f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

Calculons le jacobien de notre fonction f . On a:

$$J_f(\theta_n, \omega_n) = \begin{pmatrix} 1 & \tau & 1 - \varepsilon + \tau(g^+)'(\theta_n + \tau\omega_n)(\omega_{min} - \omega_n) - g^+(\theta_n + \tau\omega_n) + \tau(g^-)'(\theta_n + \tau\omega_n)(\omega_{max} - \omega_n) - g^-(\theta_n + \tau\omega_n) \\ (g^+)'(\theta_n + \tau\omega_n)(\omega_{min} - \omega_n) + (g^-)'(\theta_n + \tau\omega_n)(\omega_{max} - \omega_n) & \end{pmatrix}$$

A l'équilibre (θ^*, ω^*) , on trouve:

$$J_f(\theta^*, \omega^*) = \begin{pmatrix} 1 & \tau \\ (g^+)'(\theta^*)(\omega_{min} - \omega_{stim}) & 1 - \varepsilon + \tau(g^+)'(\theta^*)(\omega_{min} - \omega_{stim}) \\ & -g^+(\theta^*) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \tau \\ (g^+)'(\theta^*)(\omega_{min} - \omega_{stim}) & 1 + \tau(g^+)'(\theta^*)(\omega_{min} - \omega_{stim}) \\ & -\varepsilon \frac{\omega_{nat} - \omega_{min}}{\omega_{stim} - \omega_{min}} \end{pmatrix}$$

Comme on est dans le cadre d'un système dynamique discret, on rappelle qu'un point d'équilibre est asymptotiquement stable si et seulement si, les valeurs propres de la matrice jacobienne f , évalué au point d'équilibre, sont de module inférieur à 1.

On comprend par le lemme énoncé qu'un point d'équilibre est asymptotiquement stable si et seulement si $2 > 1 + DET^* > |TR^*|$ où:

$$TR^* = Tr(J_f(\theta^*, \omega^*)) \text{ et } DET^* = Det(J_f(\theta^*, \omega^*)).$$

Comme

$$TR^* = 2 - \varepsilon \frac{\omega_{nat} - \omega_{min}}{\omega_{stim} - \omega_{min}} + \tau(g^+)'(\theta^*)(\omega_{min} - \omega_{stim})$$

$$DET^* = 1 - \varepsilon \frac{\omega_{nat} - \omega_{min}}{\omega_{stim} - \omega_{min}}$$

Un point d'équilibre est donc asymptotiquement stable si et seulement si

$$\begin{aligned} 2 &> 1 + DET^* > |TR^*| \\ &\Leftrightarrow \\ 2 &> 2 - \varepsilon \frac{\omega_{nat} - \omega_{stim}}{\omega_{stim} - \omega_{min}} > \left| 2 - \varepsilon \frac{\omega_{nat} - \omega_{stim}}{\omega_{stim} - \omega_{min}} + \tau(g^+)'(\theta^*)(\omega_{min} - \omega_{stim}) \right| \\ &\Leftrightarrow \\ 2 - \varepsilon \frac{\omega_{nat} - \omega_{stim}}{\omega_{stim} - \omega_{min}} &> \left| 2 - \varepsilon \frac{\omega_{nat} - \omega_{stim}}{\omega_{stim} - \omega_{min}} + \tau(g^+)'(\theta^*)(\omega_{min} - \omega_{stim}) \right| \\ &\Leftrightarrow \\ 2 - \varepsilon \frac{\omega_{nat} - \omega_{stim}}{\omega_{stim} - \omega_{min}} &> 2 - \varepsilon \frac{\omega_{nat} - \omega_{stim}}{\omega_{stim} - \omega_{min}} + \tau(g^+)'(\theta^*)(\omega_{min} - \omega_{stim}) \\ 2 - \varepsilon \frac{\omega_{nat} - \omega_{stim}}{\omega_{stim} - \omega_{min}} &> - \left(2 - \varepsilon \frac{\omega_{nat} - \omega_{stim}}{\omega_{stim} - \omega_{min}} \right) + \tau(g^+)'(\theta^*)(\omega_{stim} - \omega_{min}) \\ &\Leftrightarrow \\ \tau(g^+)'(\theta^*)(\omega_{min} - \omega_{stim}) &< 0 \\ 2 \left(2 - \varepsilon \frac{\omega_{nat} - \omega_{stim}}{\omega_{stim} - \omega_{min}} \right) &> \tau(g^+)'(\theta^*)(\omega_{stim} - \omega_{min}) \\ &\Leftrightarrow \\ (g^+)'(\theta^*) &> 0, \end{aligned}$$

$$(g^+)'(\theta^*) < \frac{1}{\tau(\omega_{stim} - \omega_{min})} + 2 \left(2 - \varepsilon \frac{\omega_{nat} - \omega_{stim}}{\omega_{stim} - \omega_{min}} \right)$$

Où on utilisé pour la dernière équivalence que $(\omega_{stim} - \omega_{min}) > 0$

On comprend donc que la dérivée de g^+ doit être positive et ne doit pas être trop grande. Comme g^+ vérifie:

$g^+(0) = 0$; $g^+(\theta) > 0$, $0 < \theta < \pi$; $g^+(\theta) = 0$, $\pi < \theta < 2\pi$. En se rapportant à la Figure 10. On peut conclure que le seul équilibre dans ce cas est le point θ^* vérifiant $g^+(\theta^*) = \frac{\varepsilon(\omega_{nat} - \omega_{stim})}{(\omega_{stim} - \omega_{min})}$ est celui qui est très proche de zéro étant donné que l'autre équilibre est un point où la fonction g^+ décroît.

5 Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons exploré avec une rigueur mathématique le phénomène de synchronisation des lucioles, en portant une attention particulière à la synchronisation à la fois parfaite et imparfaite.

Notre étude a révélé que, pour une synchronisation imparfaite efficace, il est crucial que les fréquences des lucioles ne diffèrent pas de manière significative, ou que les lucioles disposent d'une forte capacité d'adaptation.

Concernant la synchronisation parfaite, nos résultats indiquent que la fréquence d'un stimulus extérieur doit se situer à l'intérieur de l'intervalle critique des fréquences de la luciole, évitant ainsi les valeurs marginales susceptibles de perturber la synchronisation parfaite. Cette condition est essentielle pour que les lucioles puissent clignoter en unisson total, démontrant une synchronisation parfaite, où chaque individu du groupe clignote en harmonie avec les autres.

Ces modèles théoriques doivent maintenant être confrontés à l'épreuve de la réalité : des expérimentations en conditions naturelles sont nécessaires pour valider nos prédictions. En mesurant les paramètres d'influence avec précision, nous pourrions affiner notre compréhension des interactions complexes au sein des systèmes biologiques.

Une voie prometteuse pour les recherches futures consisterait à élaborer un modèle de synchronisation parfaite intégrant plusieurs lucioles, qui prenne en compte les contraintes réalistes de perception et d'interaction dans un espace tridimensionnel, tel qu'un arbre. Ce modèle devra refléter la manière dont les lucioles interagissent principalement avec leurs voisins immédiates, formant ainsi un réseau qui pourrait générer un ordre synchronisé à l'échelle de l'ensemble du groupe. Ce type d'approche permettrait d'aborder des questions complexes telles que la manière dont la structure spatiale et la mobilité des lucioles influencent le modèle global de synchronisation.

References

- [1] G. B. Ermentrout and J. Rinzel, "Beyond a pacemaker's entrainment limit: phase walk-through." *Journal of Comparative Physiology*, vol. 246, 1984.
- [2] G. B. Ermentrout, "An adaptive model for synchrony in the firefly *Pterop-tyx malaccas*," *Journal of Mathematical Biology*, vol. 29, pp. 571–585, 1991.