

עיבוד אותות סטטיסטי

תרגיל מחשב 1

תרגיל זה עוסק בשיטות לא-פרמטריות לשערוך ספקטרום. התרגילים יעסקו בשערוך הספקטרום של שני אותות: האחד בעל קורלציה סופית (תהליך MA) והשני בעל קורלציה דועכת (תהליך AR). נבחן את טיב השערוך המסתמך על שיטות שונות.

שאלה 1

לאורך התרגיל נעסוק בתהליכים אלו,

$$x_1[n] = w_1[n] - 3w_1[n-1] - 4w_1[n-2] \quad (\text{תהליך MA}) \quad (1)$$

$$x_2[n] = 0.7x_2[n-1] + w_2[n] \quad (\text{תהליך AR}) \quad (2)$$

כאשר $w_1[n]$ ו- $w_2[n]$ שניהם רעש לבן גאוס, בעלי תוחלת 0, ושונות σ_1^2 ו- σ_2^2 , בהתאמה.

נתון שהאנרגיה של שני האותות שווה ל-1, דהיינו $E x_1^2[n] = E x_2^2[n] = 1$. מצאו את σ_1^2 ו- σ_2^2 , ולאחר מכן חשבו באופן אנליטי את הספקטרום האמיתי של כל אחד משני האותות. חשבו במטלב את ערכי הספקטרה ברזולוציה של 2049 דגימות תדר בתחום $[0: \pi]$. בשאלות הבאות ננסה לשערך ערכים אלו על ידי השיטות שלמדנו בכיתה, ונשווה לערכים המדויקים שחישבתם בשאלה זו.

שאלה 2

נחשב כעת את משערכי הפריודוגרמה והקורלוגרמה מתוך פונקציות מדגם של שני התהליכים. יתר המשערכים שלמדנו מבוססים על שני אלו. את האותות $x_1[n]$, $x_2[n]$ ניתן לייצר ב-MATLAB ע"י הפעלת הפקודה filter על האות $w[n]$ או לחילופין, ע"י מימוש ישיר של משוואת ההפרש. את $w[n]$ ניתן לייצור ע"י הפקודה randn.

בשאלה זו ארבעה סעיפים – בשלושת הסעיפים הראשונים הדרכה מפורטת לביצוע, ושאלות הבנה. בסעיף האחרון תתבקשו לסכם את עבודתכם. בעבודה שתגישו, ענו על השאלות בסעיפים א' ו-ג' על פי הסדר, ולאחר מכן צרפו את השרטוטים וקוד המטלב הדרושים בסעיף ד'.

סעיף א - ייצור האותות

- עבור $x_1[n]$ הגרילו (ייצרו) פונקצית מדגם אחת באורך 1024 דגימות. עבור $x_2[n]$ הגרילו פונקצית מדגם אחת באורך של 2048 דגימות, אך התייחסו רק ל 1024 הדגימות האחרונות שלה. הסבירו: מדוע יש לעשות כן עבור $x_2[n]$ ולא עבור $x_1[n]$?
- בצעו הגרלה נוספת עבור $x_2[n]$, אך הפעם הגרילו פונקצית מדגם אחת באורך 1024 בשימוש במשוואת ההפרש עם תנאי התחלה אקראיים מתאימים. מהם התנאים הרצויים?

סעיף ב - פיריודוגרמה

מתוך פונקציית המדגם של האות $x_1[n]$ שערכו הספקטרום של אות זה בשיטת הפיריודוגרמה על-פי השלבים הבאים,

- חשבו את ה-FFT של האות $x_1[n]$, $X_1[k]$, ברזולוציה של $M = 4096$ נקודות בתחום $[0: 2\pi]$ הגדלת הרזולוציה ניתנת להשגה (למשל) ע"י "ריפוד באפסים" בתחום הזמן. ודאו כי הנכם יודעים לאיזה תדר בדיוק מתאימה כל דגימה שקיבלתם.
- בהתבסס על $X_1[k]$, חשבו את הפיריודוגרמה בתחום $[0: \pi]$ (2049 נקודות).

סעיף ג - קורלוגרמה

שערכו הספקטרום של $x_1[n]$ בשיטת הקורלוגרמה ע"פ השלבים הבאים,

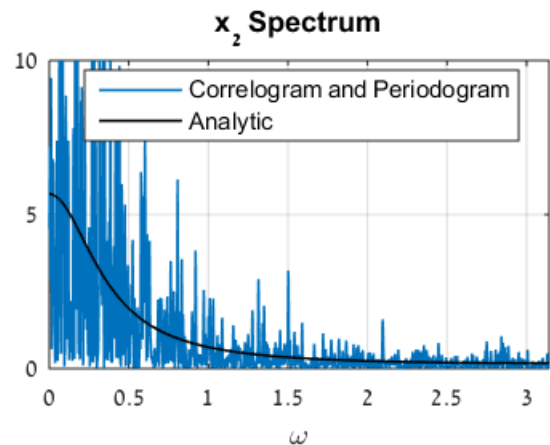
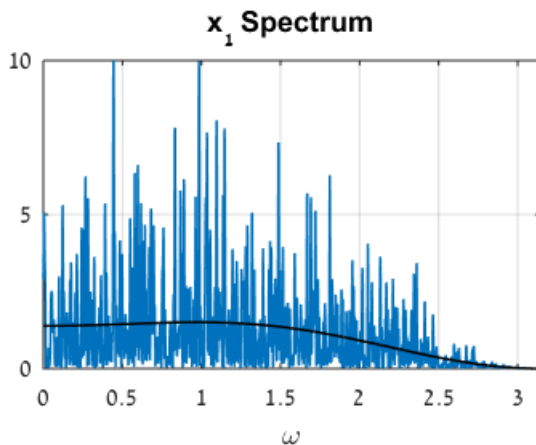
1. חשבו את משעריך הקורלציה המוטה. ניתן להעזר בפקודה `xcorr` (הקפידו על בחירת פרמטרים מתאימים). לחילופין ניתן לממש את המשעריך בחישוב ישיר. מהו האינדקס של $R[0]$ בוקטור שקיבלתם?
2. חשבו את הקורלוגרמה בתחום $[0: \pi]$ (2049 נקודות). העזרו בריפוד באפסים של משעריך הקורלציה שקיבלתם. הסבירו כיצד יש לרפד באפסים. **הערה חשובה:** שערוך הספקטרום שקיבלתם צריך להיות ממשי (עד כדי שגיאת עיגול קטנה מאוד), ודאו כי כך קיבלתם.

סעיף ד - שרטוטים

חזרו על הסעיפים הקודמים עבור $x_2[n]$, ושרטטו 2 גרפים על פי ההוראות שלהלן:

1. בגרף הראשון, השוו בין הספקטרום האמיתי של $x_1[n]$, משעריך הפיריודוגרמה ומשעריך הקורלוגרמה. כל השרטוטים צריכים להיות על גבי גרף אחד! דאגו להציג את ציר התדר בצורה מדויקת.
2. הגרף השני זהה לראשון, עבור $x_2[n]$.

על מנת לוודא שאתם בכיוון הנכון, מצורפת תוצאה לדוגמא



הנחיות לסימולציה

בחלק זה של התרגיל נבחן ונשווה את שיטות שערך הספקטרום הלא-פרמטריות שלמדנו בכיתה:

- (1) שיטת הפריודוגרמה.
- (2) שיטת Bartlett – חלוקה למקטעים.
- (3) שיטת Welch – חלוקה למקטעים עם חפיפה.
- (4) שיטת Blackman-Tukey – הפעלת חלון על משעריך הקורלציה בשיטת הקורלוגרמה.

להערכת ביצועי השיטות השונות נשתמש במיצוע על פני מספר רב של ניסויים חוזרים (נהוג לכנות גישה זו כסדרת ניסויי "מונטה-קרלו"). נשתמש בסימונים ובמדידים המובאים בטבלה הבאה:

סימון	הסבר
$\hat{S}^{(m)}(e^{j\omega})$	המשעריך המתקבל בניסוי ה- m -י
M_C	מספר ניסויי ה "מונטה-קרלו".
$\bar{S}(e^{j\omega}) = 1/M_C \cdot \sum_{m=1}^{M_C} \hat{S}^{(m)}(e^{j\omega})$	ממוצע המשעריך
$B(e^{j\omega}) = \bar{S}(e^{j\omega}) - S(e^{j\omega})$	הטיה
$V(e^{j\omega}) = 1/M_C \cdot \sum_{m=1}^{M_C} \hat{S}^{(m)}(e^{j\omega}) - \bar{S}(e^{j\omega}) ^2$	שונות המשעריך
$MSE(e^{j\omega}) = V(e^{j\omega}) + B^2(e^{j\omega})$	שגיאה ריבועית ממוצעת

גדלים אלה מחושבים ע"י מיצוע על מספר גדול של פונקציות מדגם (המקרבות את ההתנהגות ה- Ensemble) ולפיכך משמשים אומדן לגודל הסטטיסטי המשוערך.

הוראות כלליות

על מנת לבחון את כל אחת מהשיטות דלעיל, הגרילו $M_C = 100$ הגרלות שונות עבור הסיגנל $x_1[n]$, כאשר בכל אחת $N = 1024$ דגימות. עבור כל הגרלה m חשבו את משעריך הספקטרום $\hat{S}^{(m)}(e^{j\omega})$ בעזרת כל אחת מן השיטות דלעיל. משעריך הספקטרום יכול את התדרים $[0:\pi]$ בעזרת $M/2 + 1 = 2049$ דגימות בתדר. לאחר שחישבתם את הספקטרום לכל ההגרלות, חשבו את ממוצע המשעריך $\bar{S}(e^{j\omega})$, ההטיה $B(e^{j\omega})$, שונות $V(e^{j\omega})$, ושגיאה ריבועית ממוצעת $MSE(e^{j\omega})$. יש לחזור על כל התהליך עבור הסיגנל $x_2[n]$.

פרטים עבור השיטות השונות

פרטים ספציפיים עבור כל אחת מן השיטות :

- i. עבור שיטת הפריודוגרמה אין צורך בפרטים מיוחדים.
- ii. עבור שיטת Bartlett בצעו שתי וריאציות,
 - a. כל אחת מן ההגרלות (1024 דגימות) מחולקת ל $K = 16$ מקטעים באורך $L = 64$
 - b. חלוקה ל $K = 64$ מקטעים באורך $L = 16$.
- iii. שיטת Welch תתבצע בשתי וריאציות,
 - a. חלוקה ל $K = 61$ מקטעים באורך $L = 64$ עם חפיפה $D = 48$.
 - b. חלוקה ל $K = 253$ מקטעים באורך $L = 16$ עם חפיפה $D = 12$.
- iv. שתי וריאציות עבור שיטת Blackman Tukey :
 - a. חשבו את הקורלציה עבור הערכים $-4 \leq \ell \leq 4$, והשתמשו בהם לשערוך הספקטרום.
 - b. חשבו את הקורלציה עבור הערכים $-2 \leq \ell \leq 2$ בלבד.

שאלה 3

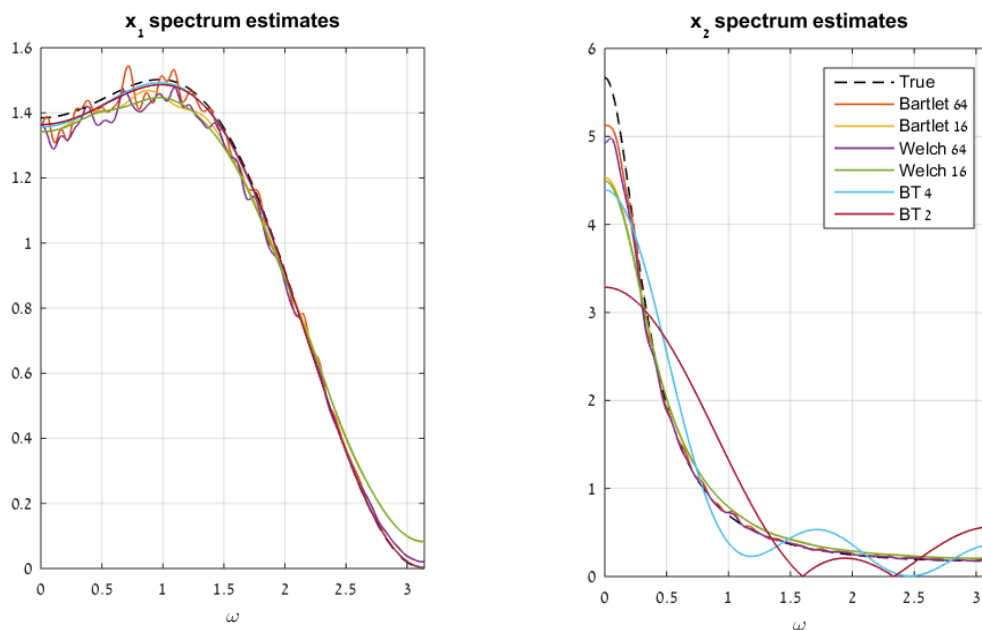
שרטטו את תוצאות הסימולציה.

שימו לב, נדרשתם לנתח 7 משערכי ספקטרום (4 שיטות, לשלוש מהן שתי וריאציות), עבור 2 סיגנלים שונים. תקבלו 14 תוצאות שונות עבור $\bar{S}(e^{j\omega})$, וכן ליתר המדדים.

בעבודה שתגישו ציירו שרטוט אחד עבור הממוצע $\bar{S}(e^{j\omega})$ הנוגע לסיגנל $x_1[n]$ ובו הערכים של כל המשערכים, בצירוף הספקטרום המדויק (חיבתם בשאלה 1) – סך הכל 8 וקטורי נתונים על גבי שרטוט אחד. השרטוט השני יציג את $B(e^{j\omega})$ מכל שיטות השערוך עבור $x_1[n]$ (אין צורך להציג את השגיאה של האנליטית, היא 0). אם כן, 4 גרפים לכל סיגנל, עבור $\bar{S}(e^{j\omega})$, $B(e^{j\omega})$, $V(e^{j\omega})$ ו $MSE(e^{j\omega})$. סך הכל, הציגו 8 שרטוטים ובכל אחד מהם 8 (או 7) וקטורים.

כמו בשאלה 2, הציגו את התוצאה עבור התדרים $[0:\pi]$, והקפידו שציר התדר יהיה מדויק וברור. שימו לב, שרטוט נהיר של התוצאות מועיל הן בהעברת תוצאות העבודה שלכם, והן להבנה שלכם. אנא הקפידו לסכם את התוצאות כאמור. לאחר שרטוט הגרפים כאמור, נתחו את התוצאות וכיצד הן מתאימות לתיאוריה שלמדנו בקורס.

על מנת לוודא שאתם בכיוון הנכון, מצורפים גרפים עבור $\bar{S}(e^{j\omega})$, כאשר הציר האנכי לוגריתמי :



שאלה 4

קעת נסכם את תוצאות הנסויים על ידי השוואה בין ביצועי השיטות השונות עבור כל אחד מהתהליכים. הגדלים הבאים מתמצים את הביצועים ע"י מספר בודד, במקום ע"י פונקציה בתדר.

גודל	תיאור
$\langle B^2 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} B^2(\omega) d\omega \approx \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} B^2(2\pi jm/M)$	הטיה ריבועית ממוצעת כוללת
$\langle V \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} V(\omega) d\omega \approx \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} V(2\pi jm/M)$	שונות ממוצעת כוללת
$\langle MSE \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} MSE(\omega) d\omega \approx \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} MSE(2\pi jm/M)$	שגיאה ריבועית ממוצעת כוללת

שימו לב כי המיצוע כאן אינו מיצוע סטטיסטי, אלא מיצוע על פני תדרים שונים.

א. דרגו את ביצועי השיטות (עבור כל תהליך בנפרד) לפי כל אחד מהמדדים שהוגדרו.

ב. השוו את יחסי השונות (כמותית) ואת יחסי ההטיות (איכותית) לתאוריה שנלמדה בכיתה. הסבר איכותית את ההבדלים בתוצאות המדדים עבור שני התהליכים.