לוגיקה ותורת הקבוצות

ד"ר ירדן עדי

מייל: $jardena@ariel.ac.il$

שעת קבלה יום א $17-18$,

פאל: 0546002107

שיעור 1 - $15/10/18$

תורת הקבוצות

- קבוצה היא אוסף של איברים.
- קבוצה סופית ניתן להציג על ידי רשום מפרט של אבריה למשל: $\{1,2,5\}$
- קבוצה נקבעת על פי איבריה
- אין חשיבות לסדר
- נסמן ב $\in$ כשנרצה לסמן שייכות

קבוצות מפורסמות

- המספרים הטבעיים, נסמנה ב $\mathbb{N}$
- השלמים, נסמנם ב $\mathbb{Z}$
- הרציונלים $\mathbb{Q}=\left\{\frac{n}{k}:n,k\in\mathbb{Z},k\neq0\right\}$
- הממשיים, נסמנם ב - $\mathbb{R}$

מושגים בקבוצות

- הגדרת קבוצה לפי תכונה: $A=\{X\ :\ X\in\mathbb{N},5<X\}$ האם $3\in A$? לא
- הכלה - $A\subseteq B$, קבוצה A מוכלת ב B - כלומר כל איברי A שייכים גם ל B . נאמר ש A היא תת קבוצה של B .
- חיתוך - $A\cap B=\{x:x\in A\ and\ x\in B\}$
- איחוד - $X\cup B=\{x:x\in A\ or\ x\in B\}$
- הפרש - $A\backslash B=\{x\ :x\in A\ and\}\,x\notin B$
- הפרס סימטרי - $A\triangle B=A\oplus B=(A\backslash B)\cup(B\backslash A)$
- הקבוצה האוניברסלית - הקבוצה U , שכל קבוצה שנבחר תהיה תת־קבוצה ל U
- הקבוצה המשלימה של A היא $A^c=\bar{A}=U\backslash A$
- קבוצת החזקה: $P(A)=\{X:X\subseteq A\}$ (כל התת־קבוצות המתקבלות מ A),

  לדוגמה: $\{P\{1,2\}\}=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$

- נסמן ב $|A|$ את מספר האיברים בקבוצה A .

משפט: לכל קבוצה A מתקיים ש : $|P(A)| = 2^{|A|}$

קטעים פתוחים וסגורים

- $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : \ a < x < b\}$ - קטע פתוח.
- $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x \leq b\}$ - קטע סגור.
- ניתן לשלב בין קטעים פתוחים וסגורים מימין ומשמאל, ולבחור את a, b כאינסופיים.

n-יות סדורות ומכפלה קרטזית

- זוג סדור: $< a, b >=< c, d >$ פירושו $a = c \ and \ b = d$

  לעומת זאת, $< 1, 2 > \neq < 2, 1 >$ למרות ש- $\{1, 2\} = \{2, 1\}$
- מכפלה קרטזית: $A \times B = \{< a, b >: a \in A, b \in B\}$

שיעור - 2 - 15/10/18 - המשך - קבוצות

שאלה - נתונה הקבוצה $A = \{1, 2\} \times \{א, ב\}$ האם $\{1, 2\} \in A$?

תשובה:

1. נציב בהגדרה $\langle a.b\rangle = \langle 1, 2\rangle$
2. נבדוק , מצד מתקיים ש: $1 = a \in \{1, 2\}\}$
3. אבל $2 = b \notin \{א, ב\}$
4. ולכן $< 1, 2 > \notin A$

הערות:

- נשים לב ש: $\{1, 2\} \times \{א, ב\} \neq \{א, ב\} \times \{1, 2\}$
- $< a, b, c >$ היא השלשה הסדורה ש אבריה הם a- ראשון, b- שני, c- שלישי.
- מכפלה קרטזית משולשת $A \times B \times C = \{\langle a, b, c\rangle : a \in A, b \in B, c \in C\}$

  משפט: $|A_1 \times A_2 \times ... \times A_n| = |A_1| \times |A_2| \times ...... \times |A_n|$
- סימון - חזקה: $A^n = A \times A \times A ...... \times A$
- דוגמה: $\langle 1, 2, 2\rangle \in \{1, 2\}^3 = \{1, 2\} \times \{1, 2\} \times \{1, 2\}$

יחסים

- הגדרה: יחס n- מקומי על A הוא תת קבוצה של A^n
- יחס בינארי = יחס דו-מקומי - יחס בין A ל B הוא תת-קבוצה של $A \times B$
- דוגמה: $\left\{\langle x, y\rangle \in \mathbb{N}^2, x < y\right\}$ הוא יחס דו-מקומי על $\mathbb{R}$ נקרא לו בקיצור היחס " $<$ "
- עוד דוגמה: $\left\{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2, x \backslash y\right\}$(מחלק) ולמשל $\langle 3, 6\rangle$ שייך ליחס הזה.

פונקציות

הגדרה: פונקציה היא שלשה סדורה $\langle A,B,f\rangle$ המסומנת ב $f:A\to B$ כך ש:

1. A היא קבוצה שתקרא "התחום" (הקלטים)
2. B היא קבוצה שתקרא "הטווח" (הפלטים)
3. f היא התאמה , היא מתאימה **לכל** איבר ב A , איבר **יחיד** ב B

דוגמאות:

א. $\begin{cases} f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ f(x)=x+1 \end{cases}$ למשל $f(3)=4$

ב. $\begin{cases} f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ f(x)=x^2 \end{cases}$, בפנוקציה זו לא ניתן לקבל ערך שלילי, וכן $f(2)=f(-2)=4$

ג. $\begin{cases} f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{Q} \\ f(x)=\sqrt{x} \end{cases}$ **אינה פונקציה** - כי שעבור $x=2$ מתקיים ש: $f(x)=\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$ בסתירה לכך ש f מתאימה איבר יחיד ב B

הגדרה: פונקציה n- מקומית על A היא פונקציה מ A^n ל - A

דגומאות:

- $\begin{cases} f:\mathbb{N}^3\to\mathbb{N} \\ f(x,y,z)=xy+z \end{cases}$ היא פונקציה תלת-מקומית על $\mathbb{N}$
  - $f(1,2,3)=1\cdot 2+3=5$
  - $f(\frac{1}{2},2,3)$ - לא מוגדר

הגדרה : נאמר ש $f:\ A\to B$ היא **חד-חד ערכית** (חח"ע) אם לכל $x_1,x_2\in A$ אם $f(x_1)=f(x_2)$ אז $x_1=x_2$.

דוגמה:

- $\begin{cases} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ f(x)=x^2 \end{cases}$ אינה חח"ע מכיון ש $f(2)=f(-2)=4$ והרי $2\neq -2$.
- $\begin{cases} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ f(x)=x+1 \end{cases}$ הינה חח"ע.

  הוכחה:

  יהיו $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ נניח כי $f(x_1)=f(x_2)$ אז מתקיים ש:

$$x_1+1\overset{1}{=}f(x_1)\overset{2}{=}f(x_2)\overset{1}{=}x_2+1\overset{3}{\Rightarrow}x_1+1-1=x_2+1-1\Rightarrow x_1=x_2\checkmark$$

  1. מהגדרה הפנוקציה. 2. מהנחה. 3. לא שנינו דבר..

- $\begin{cases} f:\mathbb{N}\to\mathbb{N} \\ f(x)=x^2 \end{cases}$האם חח"ע?

  כן, הוכחה:

  1. יהיו $x,y\in\mathbb{N}$
  2. נניח ש $f(x)=f(y)$

  <u>צ"ל:</u> $x=y$.

  לפי 2 מתקיים ש $x^2=y^2$ ולכן $x=\pm y$, ולפי 1 y בהכרח חיובי ולכן $x=y$. מ.ש.ל

הגדרה: נאמר ש $f:A\to B$ היא **על** אם לכל $y\in B$ קיים $x\in A$ כך ש $f(x)=y$

שיעור 3 - 22/10/18

- (חסר 10 דקות ראשונות- דוגמאות)

שאלה האם הפונקציה $\begin{Bmatrix} f: \ p(\{0,1\}) \to \{0,1,2\} \\ f(x) = |x| \end{Bmatrix}$ חח"ע ?

נתאר את הפונקציה:

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \to & 0 \\ \{0\} & \to & 1 \\ \{1) & \to & 1 \\ \{1,2\} & \to & 2 \end{array}$$

ומכאן שלא, ד"נ $f(\{0\} \to 1$ וגם $f(\{1\}) = 1$

שאלה: האם הפוקציה $\begin{Bmatrix} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(x) = x^2 \end{Bmatrix}$ על? לא. ד"נ (ניקח מספר שלילי כלשהו), יהי $y = -2$ ע"פ הגדרת הפונקציה לכל $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq y$

שאלה: האם הפוקציה $\begin{Bmatrix} f: \mathbb{R} \to [0,\infty) \\ f(x) = x^2 \end{Bmatrix}$ על? כן. הוכחה:

יהי $y \in [0.\infty)$, נגדיר $x = \sqrt{y}$ נוכיח ש $f(x) = y$:

$f(x) = x^2 = \sqrt{y}^2 = y$

הגדרה: נתונות שתי פנוקציות: $f: \ A \to B$, $g: \ B \to C$, ההרכבה של g על f , תסומן $g \circ f$ מוגדרת כ:

$$\begin{Bmatrix} g \circ f: \ A \to C \\ g \circ f: (x) = g\left(f(x)\right) \end{Bmatrix} \text{ בציור } A \to^f B \to^g C$$

דוגמה:

$\begin{Bmatrix} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(x) = x+1 \end{Bmatrix}$ ו- $\begin{Bmatrix} g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ g(x) = 2x \end{Bmatrix}$

כעת: $\begin{Bmatrix} g \circ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ g \circ f(x) = g\left(f(x)\right) = g(x+1) + 2(x+1) = 2x+2 \end{Bmatrix}$ כלומר: $\begin{Bmatrix} g \circ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ g \circ f(x) = 2x+2 \end{Bmatrix}$

למשל: $g \circ f(5) = 12$.

הערה: נשים לב ש $f \circ g$ לא מגודרת.

$\begin{Bmatrix} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(x) = x+1 \end{Bmatrix}$ ו- $\begin{Bmatrix} g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ g(x) = x-1 \end{Bmatrix}$

הגדרה: נתונות שתי פונקציות : $f: \ A \to B$, $g: \ B \to A$, נניח:

1. שלכל $x \in A$ מתקיים $g \circ f(x) = x$
2. לכל $x \in B$ מתקיים $f \circ g(x) = x$

נאמר ש g היא **ההפכית** של f, ונסמן $g = f^{-1}$. כמו כן f **הפיכה** פירושו שיש לה פונקציה הופכית.

דוגמה:

$\begin{Bmatrix} f: \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}\backslash\{2\} \\ f(x) = \frac{2x}{x-1} \end{Bmatrix}$ נרצה למצוא פנוקציה הופכית ל f .

צ"ל נסמן $y = \frac{2x}{x-1}$, נחליף תפקידים $x = \frac{2y}{y-1}$, נבודד את y , $y = \frac{x}{x-2}$,נרשום את f^{-1}: $\begin{Bmatrix} f^{-1}: \mathbb{R}\backslash\{2\} \to \mathbb{R}\backslash\{1\} \\ f^{-1}(x) = \frac{x}{x-2} \end{Bmatrix}$.

משפט: נתונה $f: \ A \to B$,f הפיכה אס"ם f חח"ע ועל.

שיעור 4 - 22/10/18

תחשיב הפסוקים

התחביר: פסוק אטומי הוא אות לטיני

הגדרת פסוק:

- פסוק אטומי הוא פסוק
- אם a,b פסוקים אז $\neg a$ משמעותו לא , $a \wedge b$ וגם, $a \to b$ אז ־ אז ־, $a \leftrightarrow b$ אם"ם.

דוגמאות:

- A
- $A \wedge B$
- $A \to (A \vee B)$
- $A \to$ חסר משמעות

טבלאות האמת:

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \to B$	$A \leftrightarrow B$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

שאלה : מהו ערך האמת של $A \wedge B$ כאשר Aאמיתי ו Bשיקרי:

פתרון:

A	B	$A \wedge B$
1	0	0

שאלה$A \to (\neg B \to C)$:

A	B	C	$\neg B$	$(\neg B \to C)$	$A \to (\neg B \to C)$
0	0	1	1	1	0
0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	0
0	1	0	0	1	0
1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1

הגדרה:

נאמר שהפסוקים a,b שקולים, ונסמן $a \equiv b$ אם יש להם תמיד אותו ערך אמת (לא תלוי בערכי האמת של הפסוקים האטומים)

דוגמה: $a \to b \equiv \neg a \vee b$ הוכחה: טבלת האמת

רשימת שקילויות

- $\neg(\neg a) \equiv a$

חוקי דה־מורגן

- $\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$
- $\neg(a \wedge b) \equiv \neg a \wedge \neg b$

שקילויות נוספות:

- $a \wedge a \equiv a$
- $a \vee a \equiv a$

חוקי הקיבוץ

- $(a \wedge b) \wedge c \equiv a \wedge (b \wedge c)$
- $(a \vee b) \vee c \equiv a \vee (b \vee c)$

חוקי החילוף

- $a \wedge b = b \wedge a$
- $a \vee b \equiv b \vee a$

חוקי הפילוג

- $a \wedge (b \vee c) \equiv (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
- $a \vee (b \wedge c) \equiv (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

חוקי הספיגה ־ (הרב קובע)

- $a \wedge (a \wedge b) \equiv a$
- $a \vee (a \vee a) \eqcirc a$

שיעור 5 ־ 29/10/18

שקילויות הקשורות לחיצים:

$a \to b \equiv \neg a \vee b$

1. $\neg(a \to b) \equiv a \wedge \neg b$

2. $a \leftrightarrow b \equiv (a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)$

3. $a \leftrightarrow b \equiv (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a)$

הגדרה: סתירה/טאוטלוגיה היא פסוק שערך האמת שלו הוא תמיד F /T (לא תלוי בערכי האמת של הפסוקים האטומיים)
נסמן סתירה/טאוטולוגיה ב F /T .

דוגמאות:

א. $A \wedge \neg A$ סתירה.

ב. $A \vee \neg A$ טאוטולוגיה

ג. $A \rightarrow \neg A$? - הוכחה: $a \rightarrow a = \neg a \vee \neg a = \neg a$

חוקי האמת:

- $a \wedge T \equiv a$
- $a \vee \equiv T$
- $a \wedge \equiv F$
- $a \vee F \equiv a$

הצגות של פסוקים:

במספרים $\frac{4}{6}$ - לא מצומצם, $\frac{2}{3}$ - כן מצומצם, אבל $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$.

הגדרה: פסוק בצורה DF הוא פסוק שמקיים את:

1. מותר שיופיעו בו הקשרים $\neg, \wedge, \vee$ בלבד.
2. אפשר לחשב את ערך האמת שלו לפי הסדר הבא: שלילה, גמום ולבסוף אווי.

הגדרה: פסוק בצורה CF הוא פסוק שמקיים את:

1. מותר שיופיעו בו הקשרים $\neg, \wedge, \vee$ בלבד.
2. אפשר לחשב את ערך האמת שלו לפי הסדר הבא: שלילה, אווי ולבסוף גמום.

דוגמאות:

א. $A \leftrightarrow B$ אינו CF או DF

ב. $A \wedge B$ הינו CF וגם DF

ג. $A \wedge (B \vee C)$ הינו CF ולא DF

ד. $(A \wedge B) \vee C$ הינו DF ולא CF

ה. $(A \wedge B)) \vee (\neg A \wedge \neg C \ \wedge D)$ - DF

ו. $(A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$

ז. $A \wedge (A \vee (A \wedge B))$ אינו DF אינו CF .

משפט: כל פסוק ניתן להציג בצורת DF - (יש פסוק השקול לו בצורת DF)

משפט: כנ"ל ל CF

שיטות להצגת פסוק בצורת DF

1. בעזרת לוח אמת (לא נלמד)

2. בעזרת רשימת השקילויות.

שלבים לשיטת השקילויות:

1. להפטר מ ־ $(\rightarrow, \leftrightarrow)$
2. להפטר משללה לפני סוגריים
3. לסדר $\wedge, \vee$ ־ בעיקר חוקי הפלוג

הערה: שיטה ב' מתאימה גם ל CF

דוגמאות:

1. $A \rightarrow (\neg A \wedge B) \equiv \overbrace{\neg A \vee (\neg A \wedge B)}^{DF} \equiv \neg A$
2. $A \wedge (B \vee C) \equiv \overbrace{(A \wedge B)) \vee (A \wedge C))}^{DF}$
3. $\neg ((A \rightarrow B) \wedge (\neg A \rightarrow C)) \stackrel{1}{=} [\neg (A \rightarrow B)] \vee [\neg (\neg A \rightarrow C)] \equiv (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge \neg C)$

1. דה־מורגן

הצגה פסוק בעזרת $\wedge, \neg$ בלבד:

$$a \vee b = \neg [\neg (a \vee b)] \stackrel{1}{=} \neg [\neg (\neg a \wedge \neg b)]$$

באופן דומה ניתן להציג פסוק בעזרת $\neg, \vee$ בלבד.

מבנה מתמטי:

דוגמה: $(R, 0, 1+, -*)$

$(\mathbb{N}, -)$ אינו מבנה מתמטי, כי $\mathbb{N}$אינו סגור לחיסור.

הגדרה: מבנה מתמטי הוא סדרה שאברה הראשון הוא קבוצה M , שתקרא "עולם הדיון" וכל אחד מאבריה האחרים הוא מאחד הסוגים הבאים:

- קבוע אישי, כלומר אבר מעולם, M
- יחס n־ מקומי
- פונקציה n־ מקומית על M(לכל פונקציה יכול להיות nשונה). נדגיש שהמבנה חייב להיות סגור ביחס לפונקציה זו.

הערה: לעיתים מבנה מתמטי יסומן על ידי סוגריים עגולים ולעיתים במושלשות.

הגדרה: **אוצר מילים** הוא סדרה של סמנים מהסוגים הבאים: סמני קבועים אישיים, סמני יחסים n־מקומיים וסמני פונקציות n־מקומויות כך שלכל סימן ידוע מה הוא מייצג.

הגדרה: נאמר ש**מבנה <u>מפרש</u> אוצר מילים** אם:

1. כנגד כל סמן של קבוע אישי באוצר המלים, מופיע קבוע אישי במבנה.
2. כנגד כל סמן של פונקציה מופיע פונקציה.
3. כנגד כל סמן של יחס באוצר המילים מופיע יחס.

הגדרה: נתונים שני מבנים M_2 M_1 שמפרשים אותו אוצר מילים L. המבנה M_1 הוא **תת מבנה** של המבנה M_2 אם מתקיימים התנאים הבאים:

1. העולם של M_1 מוכל בעולם של M_2
2. כל קבוע אישי ב L מתפרש ב M_1, M_2 אותו דבר
3. לכל סמן יחס n־מקומי $\bar{R}$ ב - L לכל n־יה .... $a_1, a_2,$ של אברים מ M_1 מתקיים $(a_1, a_2, ..., a_n)$ שייך ל R^{M_1} אם"ם היא לשייכת ל R^{M_2}
4. לכל סמן של פונקציה n־מקומית $\bar{f}$ ב L , לכל n־יה $a_1 a_2, ..., a_n$ של אברים מ M_1 מתקיים $f^{M_1}(a_1, a_2, ..., a_n) = f^{M_2}(a_1, a_2, ..., a_n)$

הערה: יש לודא שהעולם של תת המבנה סגור לכל הפונקציות.

שיעור 6 - 29/10/18

שאלה: נתון אוצר מילים $L = \langle \bar{s}, \bar{f} \rangle$ כתבו 3 מבניים שמפרשים את L .

תשובה:־ $M = \langle \mathbb{R}, <, + \rangle$ כלומר $S^M = \left\{ \langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2, x < y \right\}, f^M = \left\{ \langle x, y, z \rangle \in \mathbb{R}^3, x + y + z \right\}$

שאלה $L = \langle \bar{c}, \bar{s_1}, \bar{s_2} \rangle$ $M = \langle N, 2, f_1^M, f_2^M \rangle$, $M_2 = \left\langle n, 0, s_1^{M_2}, s_2^{M_2} \right\rangle$ $s_1 = \{\langle 1,2,3 \rangle\}$ $s_2^M = \{<1,2,3,4,1>\}$

$s_1^{M_1} = \{\langle x, y, z \rangle$: if x=z than y=2x else y=0 $\}$

$$s_2^{M_2} = \{<1,1,1,1,2>, <1,2,3,2,1>\}$$

איזומופריזם

הגדרה: נתון אוצר מילים L ונתונים שני מבנים $M_1 M_2$ שמפרשים את L. נתונה פונקציה h מ M_1 ל M_2 . נאמר ש h איזומורפיזם אם:

1. h חח"ע ועל
2. לכל סימן של קבוע אישי $\bar{c}$ ב L , מתקיים ש: $h\left(c^{M_1}\right) = c^{M_2}$
3. לכל סימן $\bar{s}$ של יחס n מקומי ששיך לאוצר המילים L ולכל $a_1, ..., a_n$ ב M_1 מתקיים $\langle a_1, ..., a_n \rangle$ שייך ל- S^{M_1} אמ"ם $\langle h(a_1), ..., h(a_n) \rangle$ שייך ל S^{M_2}
4. לכל סימן של $\bar{f}$ של פונקציה n־מקומית ששייך לאוצר המלים Lולכל $a_1, ..., a_n$ M_1 מתקיים ש: $h(f^{M1}(a_1, ..., a_n) = f^{M_2}(h(a_1), ..., h(a_n))$

הגדרה: נאמר ש M_1, M_2 איזמורפיים אם יש איזומורפיזם ביניהם.

שיעור 7 - 5/11/18

<u>שאלה:</u> נתונים שני מבנים: $M_1 = \langle \mathbb{R}, + \rangle, M_2 = \langle \mathbb{R}^+, \cdot \rangle$. הוכח שהם איזומורפים:

<u>פתרון:</u>

$$\begin{array}{ccc} \underline{M_1} & & \underline{M_2} \\ 2,3 & \longrightarrow^{\mathbb{R}} & h(2), h(3) \\ \downarrow & & \downarrow \\ 5 & \longrightarrow^{\mathbb{R}} & h(5) = h(2) \cdot h(3) \end{array}$$

נגדיר $\left\{\begin{matrix} h: M_1 \to M_2 \\ h(x)=2^x \end{matrix}\right\}$, נוכיח h היא איזומורפיזם:

הוכחה:

חח"ע:

יהיו $x,y\in\mathbb{R}$ נניח $h(x)=h(y)$ צ"ל $x=y$:

מתקיים ש

$$h(x)=h(y)\to 2^x=2^y\to log_2 2^x = log_2 2^y \to x=y$$

על:

יהיה $y\in\mathbb{R}^+$ לכן נוכל להגדיר $x=\log_2 y$, צ"ל: $x\in\mathbb{R}$, $h(x)=y$

כעת: $2^x=2^{\log_2 y}=y$.

ומכאן שהפונקציה הפיכה.

בנסוח אחר:

$$f^{M_2}\left(h(x),h(y)\right)=h\left(f^{M_1}\left(x,y\right)\right) \iff f^{M_2}\left(2^x,2^y\right)=h\left(x+y\right) \iff 2^x 2^y = 2^{x+y}$$

איזומורפיזם דוגמאות:

$(\mathbb{Z},1,+)$ לא איזו' לא $(\mathbb{Z},0,+)$

$$\begin{array}{ccc} \underline{M_1} & & \underline{M_2} \\ 0,0 & \longrightarrow^{\mathbb{R}} & 1,1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow^{\mathbb{R}} & 1\neq 2 \end{array}$$

פורמלית: נניח בשלילה שישנו איזו'. נראה סתירה לחח"ע. אז $h(0)=1$ מהגדרת האיזו' בנוסף מהגדרת הפונקציות כאיזו' נובע שלכל x,y ב $\mathbb{Z}$

$$h(x)+h(y)=h(x+y)$$

בפרט עבור $x=0,\ y=0$ נקבל $h(0)+h(0)=h(0+0)\Leftarrow$ $\mathbf{1}=\mathbf{2}=1+1$ וזהו סתירה.

מציאת פונקציה איזומופית בין $([0,1),<)$ ל $((4,7),>)$

נסמן:

$$\left\{\begin{matrix} h(x)=ax+b & & \\ h(0)=7 & \Rightarrow & \boldsymbol{b=7} \\ h(1)=4 & & a+b=4 \\ & & \boldsymbol{a=3} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} h[0,1)\to(4,7] \\ h(x)=-3x+7 \end{matrix}\right\}$$

נותר להוכיח שאכן איזו'

נראה שאכן פונקציה - צ"ל שלכל x בתחום $h(x)$ שייך לטווח. יהיה $x\in[0,1)$ נראה $h(x)\in(4,7]$:

$$\begin{matrix} 0\le x\le 2 & \backslash\cdot(-3) & \\ -3<-3x\le 0 & \backslash+7 & \Rightarrow h(x)\in(4,7] \\ 4<-3x+7\le 7 & & \end{matrix}$$

נראה שאכן חח"ע - צ"ל שלכל $x, y \in [1,0)$ ונניח כי $h(x) = h(y)$ צ"ל $x = y$.

$$-3x + 7 = -3y + 7$$
$$-3x = -3y$$
$$\boldsymbol{x = y}$$

נראה שאכן על - צ"ל שבעבור $y \in (4,7]$ נגדיר $x = -\frac{y-7}{3}$, צ"ל $x \in [0,1)$ וש $h(x) = y$

$y = -3x + 7$ $\quad$ $4 < y \leq 7$

טויטה: $y - 7 = -3x$ מכך ש y בתחום אז $-3 < y - 7 \leq 0$ כלומר $x \in [0,1)$, ומתקיים ש $h(x) = ... = y$.

$\frac{y-7}{-3} = x$ $\quad$ $0 \leq \frac{y-7}{-3} < 1$

דוגמה: נניח בשלילה שיש איזו' $h : \langle [0,1), < \rangle \to \langle [1,2), < \rangle$

1. יהיה $h(0) \in (1,2)$ מתקיים ש $1 < h(0) < 2$
2. נקבע $y \in (1, h(0))$ כלומר $1 < y < h(0)$
3. בפרט מתקיים ש $1 < y < 2$ כלומר $y \in (1,2)$.
4. מכיון ש h 'על' יש x כך ש $x \in [0,1)$
5. ו $h(x) = y$
6. לפי 2 ו־5 $h(x) \neq h(y)$ ו h פונקציה אז גם $x \neq y$
7. ולי 4 ו 6 $0 < x$
8. ולפי 2 ו 5 $h(x) < h(0)$
9. מכאן שלפי 7ו 8 h לא איזו' , וזו סתירה.

שמות עצם

הגדרה: שם עצם אטומי הוא סמן של קבוע אישי באוצר המילים או משתנה

הגדרת שם עצם:

1. כל שם עצם אטומי הוא שם עצם
2. אם $t_1, t_2, ..., t_n$ הם שמות עצם ו f הוא סמן של פונקציה n־מקומית, אז $f(t_1, t_2, ..., t_n)$ הוא שם עצם
3. כל דבר אחר - איננו שם עצם

הגדרה: נוסחה אטומית היא בטוי מהצורה $\bar{S}(t_1, t_2, .., t_n)$ כאשר $\bar{S}$ הוא סמן של יחס n־מקומי ו $t_1, t_2, ..., t_n$ הם שמות עצם

הגדרת נוסחא:

1. כל נוסחא אטומית היא נוסחא
2. אם A היא נוסחא, אז גם $\neg A$ היא נוסחא. אם A, B הן נוסחאות, אז גם $A \wedge B, A \vee B, A \to B, A \leftrightarrow B$
3. אם A נוסחא, אז $\exists x(A)$, $\forall x(A)$ הן נוסחאות

4. כל דבר אחר, איננו נוסחא

הערה: יש נוסחאות שאין להן ערך אמת.

הגדרה: יהי x משתנה שמופיע בנוסחא A/אם x מופיע בין סוגריים, שבדיוק לפניהם מופיע $\exists x$ או $\forall x$ אז x יקרא משתנה מכומת. אחרת x יקרא משתנה חופשי.

הגדרה: פסוק הוא נוסחא שלכל המשתנים שמופיעים בה, הם משתנים מכומתים.

- דוגמה: בפסוק $\exists x(x=y)$ x הוא משתנה מכומת , y משתנה חופשי.
- המשתנים החופשיים יוצרים בעיה בחישוב ערך האמת
- $\exists x(x=y)$ איננו פסוק כי y משתנה חופשי.
- $\forall y\left[\exists x(x=y)\right]$ הינו פסוק

הגדרה: ערך האמת של פסוק A במבנה M מוגדר כך:

1. אם הפסוק A הוא נוסחא אטומית, כלומר מהצורה $\bar{S}\left(t_1 t_2,...,t_n\right)$, אז A אמיתי אם"ם $\langle a_1,a_2,...,a_n\rangle\in S^M$, כאשר $a_1,a_2,...,a_n$ הם הפרושים ב M ל $t_1,t_2,...,t_n$ בהתאמה.
2. ערך האמת של פסוק מאחת הצורות $\neg,\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow$ יוחשב לפי ערכי האמת של הפסוקים B,C ולפי לוח המאת של הקשר המתאים.
3. אם יש נוסחא B כך ש $A=\exists x\left(B\right)$ או $A=\forall x\left(B\right)$ אז ערך האמת של A יחושב בהתאם למקרים הבאים:
   (א) אם בכל מקרה שמציבים אבר מהעולם של M במקום x הערך של הפוסקים B הוא T' אז A אמתי.
   (ב) אם בכל מקרה שמצבים אבר מהעולם של N במקום הערך של הפסוק B הוא F , אז A שקרי.
   (ג) אם מצד אחד יש אבר בעולם של M, שהצבתו ב B במקום x גורמת ל B להייות אמיתי, ומצד שני יש אבר בעולם של M, שהצבתו ב B במקום x להיות שקרי, אז...

נוסחאות שקולות במבנה:

הגדרה: תהיינה A,B נוסחאות ויהי M מבנה. A,B שקולות במבנה M פרושו שבכל מקרה יש להן אותו ערך אמת, לא תלוי באברים שנציב במקום המשתנים.

משפט: לכל נוסחא יש נוסחא שקולה ללא כמתים (אולם יתכן שייפעו בנוסחא החדשה סמנים שאינם באוצר המילים המקורי)

שיעור 8 - 12/11/18

ננפתח בשאלה ממבחן:

נתון מבנה M שנמפרש את אוצר המילים $\langle S\rangle$ כך: עולמו הוא וסימן היחס S מתפרש בו כיחס $>$.

א. עבור אילו ערכים טבעים של xהנוסחה $\forall y\exists z\left[S\left(x,y\right)\rightarrow S\left(z,x\right)\right]$ תהפוך לפסוק במתקיים

תשובה $0<x$

ב. עבור אילו ערכים טבעיים של x הנוסחה $\forall y,z\left[y\neq z\rightarrow\left(S\left(x,y\right)\vee S\left(z,x\right)\right)\right]$

תשובה: $x=0$

המשך מצגת תחשיב יחסים:

משפט: אם $M_1\cong M_2$ אז כל פסוק שנכון באחד מהם, נכון בשני.

שאלה :

נתון אוצר המלים $L = \langle f \rangle$. ידוע שהפסוק הבא מתקיים בעולם הטבעיים:

$$\forall x, y, z \left[x + (y + z) = (x + y) + z \right]$$

א. נסחו זאת באופן פורמלי:

$$\forall x, y, z \left[f\left(x, f\left(y, z\right)\right) = f\left(f\left(x, y\right), z\right) \right]$$

ב. מה ניתן להסיק מהאיזומורפיזם $h(n) = 2^n$ בין המבנה $\langle N, + \rangle$ לבין המבנה $\langle \{2^n : n \in \mathbb{N}\}, \cdot \rangle$

הגדרה: אם B היא נוסחה שהמשתנה החופשי היחיד שהמופיע בה הוא x ו a אבר במבנה M אז $B[a]$ הוא הפסוק שמתקבל מ B על ידי הצבת a במקום x .

דוגמה $B = f(x, x) = c$ והמבנה $M = \langle \mathbb{R}, 4, + \rangle$ אז $B[2]$ הוא הפסוק $f(2, 2)$ וב M $2 + 2 = 4$

משפט: $M_1 \cong M_2$ ו h איזומופריזם ביניהם, אז לכל נוסחה Bשהמשתנה היחיד החופשי שלה הוא xולכל אבר a ב M_1 , $B[a]$ מתקיים ב M_1 אס"ם $B\left[h\left(a\right)\right]$ מתקיים ב M_2

*****חסר חצי שני של השיעור*****

השלמה שלי:

תכונות של יחסים:

הגדרה: נתונה פונקציה $f : A \to B$ נגדיר מבנה $M = \langle A \cup B, f, A, B \rangle$

- פונקציה חח"ע : $\forall x, y \in A \left[(f(x) = f(y)) \to x = y \right]$
- פונקציה על: $\forall y \in B \left[\exists x \in A \left(f(x) = y \right) \right]$

הגדרה: נתון יחס S על הקבוצה A. נגדיר מבנה $M = \langle A, S \rangle$

- S יחס רפלקסיבי $\forall x \left[S\left(x, x\right) \right]$מתקיים ב M
- S יחס סימטרי $\forall x, y \left[S\left(x, y\right) \to S\left(y, x\right) \right]$ מתקיים ב M
- S יחס טרניזטיבי $\forall x, y, z \left[(S(x, y) \wedge s(y, z)) \to S(x, z) \right]$
- S יחס אנטי־סימטרי $\forall x, y \left[(S(x, y) \wedge s(y, x)) \to x = y \right]$
- S יחס סדר פרושו ש S רפלקסיבי, אנטי־סימטרי, וטרנזיטיבי
- S יחס שקילות פרוש ש S רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי

שיעור 9 ־ 19/11/10

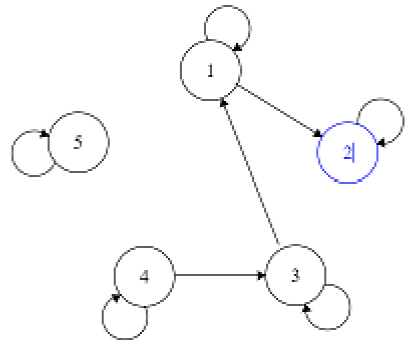
נתון סדר (חלקי) S על קבוצה A אברים $a, b \in A$ נתונים להשוואה פרושו שמתקיים $S(a, b) \wedge S\left(b, a\right)$

Sסדר קווי (לינארי) שכל שני אברים ב A נתנים להשוואה

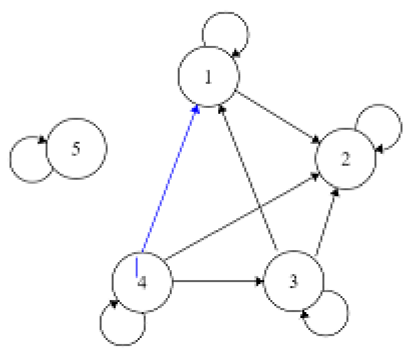
דוגמאות:

- $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $S = \{\langle 1, 1 \rangle \langle 2, 2 \rangle \langle 3, 3 \rangle \langle 4, 4 \rangle \langle 5, 5 \rangle, \langle 4, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle \langle 1, 2 \rangle\}$
  - רפלקסבי ־ כן

- אנטי ־סימטרי ־כן
- טרנזיבי ־ לא

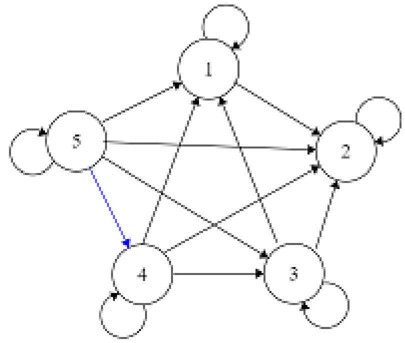


- $A = \{1,2,3,4,5\}$ $S = \{\langle 1,1\rangle\, \langle 2,2\rangle\, \langle 3,3\rangle\, \langle 4,4\rangle\, \langle 5,5\rangle\,, \langle 4,3\rangle\,, \langle 3,1\rangle\, \langle 1,2\rangle\, \langle 4,1\rangle\, \langle 3,2\rangle\, \langle 4,2\rangle\}$
  - רפלקסבי ־ כן
  - אנטי ־סימטרי ־כן
  - טרנזיבי ־ כן
  - **יחס קווי ־ לא**



נתקן:

- $A = \{1,2,3,4,5\}$ $S = \{\langle 1,1\rangle\, \langle 2,2\rangle\, \langle 3,3\rangle\, \langle 4,4\rangle\, \langle 5,5\rangle\,, \langle 4,3\rangle\,, \langle 3,1\rangle\, \langle 1,2\rangle\, \langle 4,1\rangle\, \langle 3,2\rangle\, \langle 4,2\rangle\, \langle 5,1\rangle\, \langle 5,2\rangle\, \langle 5,3\rangle\, \langle 5,4\rangle\}$
  - רפלקסבי ־ כן
  - אנטי ־סימטרי ־כן
  - טרנזיבי ־ כן
  - **קווי ־ כן**



שלמעשה ניתן לתאר את כל הגרף הזה בצורה הבאה - כיחס קווי :

$$1\to 2\to 3\to 4\to 5$$

חזרה ליחס שקילות

נלמד משפט תחילה - הכלות

הגדרה: חלוקה של קבוצה A היא קבוצה p של תת קבוצות של A כך שלכל $a\in A$ יש B יחידה ב p כך ש $a\in B$

דוגמה: $A=\mathbb{N}$, $B_0=\{7n,n\in\mathbb{N}\}$, $B_0=\{7n+1,n\in\mathbb{N}\}$......, $B_6=\{7n+6,n\in\mathbb{N}\}$ מתקיים ש $P=\{B_0,B_1,...,B_6\}$

שאלה: $A=\{1,...,10\}$ ו $P=\{\{1,2,3\},\{3,4,5\},\{6,7,8\}\{6,7,8\}\{9,10,2,3\}\}$

האם P חלוקה של A ? תשובה : לא למשל $2\in B_1\cap B_4$.

הגדרה: נתונה קבוצה P של קבוצות $\cup P$ מוגדר כך: $\cup P=\{x:\ \exists B\in P:(x\in B)\}$

הגדרה: נתונה קבוצה P של קבוצות $\cap P$ מוגדר כך: $\cap P=\{x:\ \forall B\in P:(x\in B)\}$

דוגמה:

$A=\{1,2,3\}$, $P=\{B_0,B_1,B_2\}$,

- $B_0=\{1,2\}$, $B_1=\{2,3\}$, $B_3=\{1,2,3\}$
- $\cup P=A$, $\cap P=\{2\}$

טענה: P חלוקה של A אמ"ם מתקיימות הדרישות הבאות:

1. $\cup P=A$
2. לכל שתי קבוצות שונות C,D ב P $C\cap D=\emptyset$

הגדרה: A,B זרות פרושו $A\cap B=\emptyset$

הקבוצה P זרה בזוגות פרושו שלכל C,D שונות ב P C,D זרות

משפט:

1. לכל יחס שקילות E על קבוצה A יש חלוקה יחידה P של A כך שלכל $x,y\in A$ xEy (כלומר $E(x,y)$) אם"ם יש B ב P כך ש $\{x,y\}\subseteq B$

2. לכל חלוקה P של הקבוצה A מתאים יחס שקילות יחיד E על A , כך שלכל $x,y \in A$ xEy , אם"ם יש B ב P כך ש $\{x,y\} \subseteq B$

דוגמאות:

- דוגמה: $A = \mathbb{N}$, $B_i = \{7n+i, n \in \mathbb{N}\}$, $P = \{B_0, B_1, ..., B_6\}$.
  - כלומר $E = \{\langle n,k \rangle \in \mathbb{N}^2\}$ $n-k$ של 7 . E יחס שקילות על $\mathbb{N}$. P חלוקה של $\mathbb{N}$
  - לכל n,k ב $\mathbb{N}$ $n-k$ כפולה של 7 אם"ם יש $B \in P$ כך ש $n,k \in B$
- תהיה A = {נקודות על יבשות}
  - $E = \{x,y \in A^2, S\}$ S= אפשר להגיע מ x ל y דרך היבשה.
  - P = {היבשות ואיים (אדמות מחוברות)}

הוכחות בתורת הקבוצות:

אוצר המילים הוא $\langle \in \rangle$

הגדרה: $A \subseteq B$ פרשו $\forall x \in A \, (x \in B)$

אקסיומת ההקפיות: לכל A, B $A \subseteq B$ וגם $B \subseteq A$ אז $A = B$

שאלה : הוכיחו את חוק הפילוג הבא: לכל $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

<u>הוכחה־ נראה הכלה דו־כיוונית:</u>

כיוון ראשון : $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$:

יהיה $x \in A \cup (B \cup C)$ צ"ל ש $x \in (A \cup B) \cup C$

מקרה א :

1. יהיה $x \in A$
2. מכאן ש $x \in A \cup B$
3. וגם $x \in A \cup C$
4. ומכאן ש 2,3 $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

מקרה ב:

1. יהיה $x \notin A$
2. לכן $x \in B \cap C$
3. כלומר $x \in B$ וגם $x \in C$
4. לפי 3 $x \in A \cup B$, וגם $x \in A \cup C$
5. ובסה"כ $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

כיוון שני: $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$

יהיה $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ צל ש $x \in A \cup (B \cap C)$

1. $x \in A \cup B$

2. $x \in A \cup C$

מקרה ראשון $x \in A$, ולכן $x \in A \cup (B \cap C)$

מקרה שני $x \notin A$:

3. מ1 אחנו יודעים ש $x \in A \cup B$ ומכאן ש $x \in B$
4. מ2 אנחנו יודעים ש $x \in A \cup C$ ומכאן ש $x \in C$
5. מ3,4 $x \in B \cap C$ ולכן $x \in A \cup (B \cap C)$

$\square$

הוכחות במקרים אחרים

שאלה: נניח שהפסוק $\forall x \forall y \left(S\left(x,y\right)\right)$ מתקיים במבנה M . הוכיחו ש $M \models \forall y \forall x \left(S\left(x,y\right)\right)$

יהיה $y \in M$ צ"ל $M \models \forall y \left(S\left(x,y\right)\right)$

יהיה $x \in M$ צ"ל ש $S(x,y)$

לפי הנתון $S\left(x,y\right)$ $\forall y$ בפרט $S\left(x,y\right)$

$\square$

שאלה : הוכיחו/הפרך:

אם $\exists x \forall y \left(S\left(x,y\right)\right)$ אז $M = \forall x \exists y \left(S\left(x,y\right)\right)$ נוכיח - הפוך לא נכון!

הוכחה בשיטת המשחק נבחר $y = c$

פהוך: ד"נ יחס 'גדול מ'

שאלה: נתון פסוק $a = \forall x \exists y \forall z \exists w \left(xz \neq 0 \rightarrow xyzw < 0\right)$ ומבנה $M = \langle \mathbb{R}, 0, <, \cdot \rangle$.

א. האם $M \models a$? נמקו בשיטת המשחק.

ב. נסחו הוכלחו ל $M \models a$ או $M \models \neg a$

פתרון:

א. T אסטרטגיית נצחון ל $\exists$: בחר את $y = 1$ ובחר את $w = -xz$

ב.

1. יהי $x \in \mathbb{R}$
2. נגדיר $y = 1$
3. יהי $z \in \mathbb{R}$
4. נגדיר $w = -xz$

צ"ל $xz \neq 0 \rightarrow xyzw < 0$

5. נניח ש $xz \neq 0$

צ"ל $xyzw < 0$

6. מתקיים ש: $xyzw = xzw = xz(-xz) = -(xz)^2 < 0$ ✓
7. נניח ש $xz = 0$ אז נקבל $? \to F$ שזה בסוף אמת תמיד ✓

$\square$

שקילויות בתחשיב יחסים

הגדרה: הפסוקים A, B שקולים לוגית פירושו שלכל מבנה M :

$$A \text{ מתקיים ב } M \iff B \text{ מתקיים ב } M$$

באופן אנלוגי החוקים דומים לחוקי דה־מורגן:

- $\neg [\forall x(A)] = \exists x (\neg A)$
- $\neg [\exists x(A)] = \forall x (\neg A)$

החלפת שם של משתנה מכומת ־ בנוסחה $\forall x(A)$ נתן להחליף את x ב y בהנחה ש x מופיע ב A רק כמשתנה חופשי ו y לא מופיע כלל ב A

הוצאת כמתים מחוץ לסוגריים

אם x לא מופיע בפסוק B אז $[\forall x(A)] \wedge B = \forall x (A \wedge B)$
באופן דומה אם יופיע $\exists$ במקום $\forall$. אותו דבר אם יופיע $\vee$ במקום $\wedge$

המקל והמחמיר

1. $[\forall x(A)] \wedge [\forall x(B)] = [\forall x(A \wedge B)]$
2. $[\exists x(A)] \vee [\exists x(B)] = [\exists x(A \vee B)]$

דוגמה, מתקיים ש:

$$[\forall x(S(c,x))] \wedge [\forall x(S(x,d))] = [\forall x(S(c,x)) \wedge S(x,d)]$$

שיעור 10 ־ 26/11/18

נחזור ליחס שקילות, והגדרת חלוקה.
דוגמה:

- $E = \left\{ \langle n.k \rangle \in \mathbb{Z}^2 : n - k \text{ devide with } 7 \right\}$ יחס שקילות.
- נגדיר חלוקה $P = \{A_r : r \in \{0,1,..,6\}\}$, כאשר $A_r = \{r + 7q : q \in \mathbb{Z}\}$
  P חלוקה של $\mathbb{Z}$ למשל $10 \in A_3$, <u>נוכיח ש P חלוקה של $\mathbb{Z}$:</u>
- כל A_n מוכלת ב $\mathbb{Z}$. מדוע כל $x \in \mathbb{Z}$ שייך לאחת מהקבוצות A_r ?

- לפי משפט החלוקה עם שארית, יש r, q כך ש $x = r + 7q$ $r < 7$ לכן $x \in A_r$.
- לפי היחידות של r, q יש r יחיד כך ש $x \in A_r$.

- יש קשר בין E ל P: לכל x, y ב $\mathbb{Z}$ xEy אסם יש r כך ש $x \in A_r$ וגם A_r
  - למשל $20E13$ ואכן $20, 13 \in A_6$
  - למשל $20\not{E}21$ ואכן $20 \in A_6$, $21 \in A_0$

הוכחת הדוגמה:

1. יהיו $x, y \in \mathbb{Z}$ <u>צ"ל</u> אסם יש r כך ש $x \in A_r$ וגם A_r
2. <u>כיוון ראשון</u>: נניח xEy כלומר $7\backslash(x-y)$ צ"ל שיש r כך ש $x \in A_r$וגם $y \in A_r$
3. נזכיר שלכל $x \in \mathbb{Z}$ יש r כך ש $x \in A_r$, בפרט עבור ה ־x' שלנו', יש r כך ש $x \in A_r$
4. לפי (2) $x - y = 7m$
5. $m \in \mathbb{Z}$
6. לפי (3) יש q כך ש $x = r + 7q$
7. לפי $(4), (6)$: $y = x - 7m = r + 7q - 7m = r + 7(q - m)$ $\Leftarrow$ $y \in A_r$
8. לפי $7, 3$ סיימנו.
9. <u>כיוון</u> שני: נניח שיש r כך ש $x \in A_r$ וגם $y \in A_r$ צ"ל: xEy
10. לפי (9) $0 \le r \le 6$ וישנו q_1 כך ש־ $x = r + 7q_1$
11. וישנו q_2 כך ש־ $y = r + q_2$
12. $x - y = 7q_1 - 7q_2 = 7(q_1 - q_2) \Leftarrow 7|(x-y) \Leftarrow xEy$

$\square$

לאחר הדוגמה זו, נוכיח את המשפט:

משפט:

- לכל יחס שקילות E על קבוצה A יש חלוקה יחידה P של A כך שלכל $x, y \in A$ xEy (כלומר $E(x, y)$) אם"ם יש Z ב P כך ש: $x \in Z \wedge y \in Z$

<u>הוכחה:</u>

1. יהי E יחס שיקלות.
2. נגדיר לכל $x \in A$: $[x]_E = \{y \in A \ : \ xEy\}$
3. נגדיר $P = \{[x]_E \ : \ x \in A\}$

נוכיח 1. P חלוקה של A .2 לכל $x, y \in A$ ...

(א) ראשית כל $[x]_E$ ב P הוא תת קבוצה של A לפי (2) .

נראה ש $\bigcup P = A$

i. כיוון ראשון $\bigcup P \subseteq A$: יהי $x \in \bigcup P$ <u>צ"ל</u> $x \in A$

ii. על פי הגדרה: $\bigcup P = \{x : \exists Z \in P(x \in Z\}$ כלומר קיים $Z \in P$ כך ש: $x \in Z$

iii. לפי (3) ו ג' יש x' כך ש:

iv. $x' \in A$

v. $z = [x]_E$

vi. לפי ג' ו־ ו' $x \in [x']_E$

vii. לפי (2) $[x']_E \subseteq A$ ולכן $x \in A$

(ב) כיוון שני: $A \subseteq \bigcup P$: יהי $x \in A$ צ"ל $x \in \bigcup P$ כלומר $\exists Z\,(z \in P \cap x \in Z)$

i. נגדיר $z = [x]_E$ נוכיח ש $Z \in P$ וגם ש $x \in Z$

ii. לפי (3) והגדרת Z מתקיים ש $Z \in P$

iii. לפי (2) , $Z = \{y \in A \ : \ xEy\}$ בפרט צריך להראות: $Z = \{x \in A \ : \ xEx\}$

iv. מכיוון ש E יחס שקילות (1) xEx ולכן $x \in Z$.

(ג) הראנו כי $\bigcup P = A$ נותר להראות שלכל Z_1, Z_2 שונות ב P, $P_1 \cap Z_2 = \emptyset$

i. יהיו $Z_1, Z_2 \in P$ נניח ש: $Z_1 \cap Z_2 \neq \emptyset$ צ"ל $Z_1 = Z_2$

ii. מהנחה קיים x כך ש: $x \in (Z_1 \cap Z_2)$ כלומר $x \in Z_1$ וגם $x \in Z_2$

iii. מהנחה $Z_1, Z_2 \in P$ ולכן ישנם x_1, x_2 כך ש: $x_1, x_2 \in A$ ומתקיים ש: $Z_1 = [x_1]_E$, $Z_2 = [x_2]_E$

iv. לפי $(ii), (iii)$ xEx_1 וגם xEx_2

v. מכיוון ו E יחס שקילות אז $x_1 E x_2$ ולכן:
טענה: אם $x_{1,}x_2$ ב A אם $x_1 E x_2$ אז $[x_1]_E = [x_2]_E$, יש להוכיח.

vi. מהטענה, סיימנו:

(ד) נווכיח את (2) :

(ה) כיוון ראשון: נניח xEy צ"ל יש z ב P כך ש $x \in Z$.וגם $y \in Z$

i. נגדיר $Z = [x]_E$

ii. מכיוון E רפלקסיבי xEx ולכן $x \in [x]_E$,

iii. לכן $x \in Z$ ולכן $y \in [x]_E$

iv. ובסה"כ $y \in Z$

(ו) כיוון שני: נניח שיש $Z \in P$ כך ש $x \in Z$ וגם $y \in Z$ צ"ל xEy

i. מכיון ש $Z \in P$ יש x' כך ש $Z = [x']_E$

ii. ולכן $x'Ex$ וכן $x'Ey$

iii. מטרנזיביות xEy

$\square$

שיעור 9 - 3/11/18

- טענה: $|A| \leq |B|$ אם"ם יש פונקציה חח"ע $S : A \to B$
- טענה : $|A| \leq |B|$ אם"ם יש פונקציה על $f : B \to A$
- טענה: $|A| = |B|$ אם"ם יש פונקציה חח"ע ועל $f : A \to B$

יחס השיוויון בין עוצמות הוא יחס שקילות: לדוגמה

- טרנזיטיביות: אם $|A| = |B| = |C|$ אז $|A| = |C|$

  הוכחה:

  – נניח $|A| = |B|$ וגם $|B| = |C|$ צ"ל $|A| = |C|$

– מהנחה יש פונקציה $f : A \to B$ חח"ע ועל

– מהנחה יש פונקציה $f : B \to C$ חח"ע

– אז $g \circ f :: \ A \to C$ חחע ועל ולכן $|A| = |C|$, כנדרש.

- היחס $\leq$ בין עוצמות הוא יחס סדר קווי.

הגדרה: הקבוצה A בת־ מניה פרושו ש $|A| \leq |N|$, באופן שקול קיימת פונקציה חח"ע f כך ש: $f : A \to \mathbb{N}$, באופן שקול יש פונקציה על $f : \mathbb{N} \to A$.

נסמן ב $\aleph_0$ את העוצמה של קבוצה אינסופית בת־מניה, למשל $|\mathbb{N}| = \aleph_0$

טענה: $|\mathbb{N} \cup \{-1\}| = \aleph_0$

הוכחה: נגדיר $\begin{matrix} f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{-1\} \\ f(x) = x + 1 \end{matrix}$, נוכיח שf על .

1. יהי $y \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$
2. נגדיר $x = y + 1$

הוכחת על:

1. לפי (1) . $-1 \leq y$ ולכן לפי (2) $0 \leq x$ ומכאן שלכל x , $x \in \mathbb{N}$
2. $f(x) = f(y+1) = y + 1 - 1 = y$

משפט : $\mathbb{Z}$ בת מניה

הוכחה:

נגדיר $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{x is even} \\ \frac{1}{2}(x+1) & \text{x is odd} \end{cases}$, (לפי הטיוטה: $\begin{matrix} y = ax + b \\ -1 = a + b \\ -2 = 3a + b \\ \Downarrow \\ a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2} \end{matrix}$)

נוכיח ש f על:

יהי $y \in \mathbb{Z}$, נגדיר: $x = \begin{cases} 2y & 0 \leq y \\ 2y - 1 & y < 0 \end{cases}$

נוכיח :

1. $x \in \mathbb{N}$
2. $f(x) = y$

הוכחת 1 :

נפצל למקרים:

- אם $0 \leq y$ אז לפי $x = 2y$ ואז $x \in \mathbb{N}$
- אם $y < 0$ אז $0 < -2y$ (חיובי) ולכן:

  $x = -2y - 1 > -1$ ולכן $x \geq 0$,

  בנוסף, לפי הגדרת y, x , $x \in \mathbb{Z}$ ובפרט ולכן $x \in \mathbb{N}$, כנדרש.

הוכחת 2:

נפצל למקרים:

- $0 \le y$ אז $x = 2y$ ויתקיים $f(x) = f(2y) = \frac{2y}{2} = y$
- $0 > y$ אז $x = -2y - 1$ ויתקיים $f(x) = f(-2y-1) = \frac{1}{2}(2y-1) + 1 = y$

משפט: תהי A קבוצה , ויהי S סדר קווי על A, לכל $x \in A$ נגדיר את "קבוצת הקודמים ל־x" כך ש: $A_x = \{y \in A : \ S(y,x) \wedge y \neq x\}$ **אם לכל x A_x קבוצה סופית אז A בת־מניה**

הוכחה:

נגדיר: $f : \mathbb{N} \to A$, $f(x) = |A_x| = \text{num of previous x}$, נוכיח ש f חח"ע.

יהיו $x_1, x_2 \in A$ ונניח ש $f(x_1) = f(x_2)$ צ"ל $x_1 = x_2$:

מהנחה $|A_{x_1}| = f(x_1) = f(x_2) = |A_{x_2}|$

- בה"כ $S(x_1, x_2)$:
  - נראה ש $A_{x_1} \subseteq A_{x_2}$ יהי $y \in A_{x_1}$ צ"ל $y \in A_{x_2}$
  - מהגדרת A_x : $S(y, x_1) \wedge y \neq x_1$ מטרנזטיביות $S(y, x_2)$
  - (לא יתכן $y = x_2$ לפי סעיף קודמים והאנטי־סימטריות של S $y = x_1$ לפיכך $y \neq x_2$) לכן $y \in A_{x_2}$
  - (הראנו כי $A_{x_1} \subseteq A_{x_2}$ וכי $|A_{x_1}| = |A_{x_2}|$ ולכן $A_{x_1} = A_{x_2}$, כי אם נניח בשלילה ש $x_1 \neq x_2$ $x_1 \in A_{x_2}$ אבל $x_1 \notin A_{x_1}$ כלומר $A_{x_1} \neq A_{x_2}$, וזו סתירה.)

הוכחה נוספת ל $|\mathbb{Z}| \le \aleph_0$

נגדיר יחס S על $\mathbb{Z}$ כך: $S(x,y)$ אם"ם $|x| < |y|$ או $x = -y < 0$ או ש $x = y$

נראה : 1. רפלקסיביות 2. אניטי־סימטריות. 3. טרנזיטיביות, 4. סדר קווי. 5. לכל $x \in \mathbb{Z}$ A_x סופית

1. רפלקיסביות: מתקיים $x = x$
2. אנטי־סימטריות:

   נניח ש$S(x,y)$ וגם $S(y,x)$ צ"ל $x = y$.

   - מהנחה $|x| \le |y| \le |x|$ ולכן $|x| = |y|$
   - אם $x = y$ סיימנו.
   - נניח בשלילה ש $y = -x$,
     - מכיון $S(x,y)$, אז $x < 0$
     - מכיון ש $S(y,x)$ אז $y < 0$
       - וזו סתירה, ומכאן שאנטי סימטרי
3. טרנזיביות:

   נניח ש $S(x,y)$ וגם $S(y,z)$ צ"ל $S(x,z)$

   - מכך ש $S(x,y)$ $|x| \le |y|$
   - מכך ש $S(y,z)$ $|y| \le |z|$

- ולכן $|x| \leq |z|$

(א) מקרה א': $|z| > |x|$ אז $S(x,z)$, כנדרש

(ב) מקרה ב' $\cancel{|x| < |z|}$, אז מהגדרה $|x| = |z|$ ולכן $|x| = |y| = |z|$

- אם $x < 0$: $S(x,z)$ $(z = -(-x))$
- אם $0 \leq x$ מכך ש $|x| = |y| = |z|$ נובע ש $y = x$
  - ולכן $0 \leq y$ ולכן $y = z$
  - ובסה"כ $x = z$, ולכן $S(x,z)$, כנדרש.

4. <u>סדר קווי:</u> יהי $x, y \in \mathbb{Z}$ <u>צ"ל:</u> $S(x,y)$ או $S(y,x)$

(א) מקרה א': $|x| < |y|$ אז $S(x,y)$

(ב) מקרה ב':$|x| > |y|$ ואז $S(y,x)$

(ג) מקרה ג' $x = y$ $S(x,y)$

(ד) מקרה ד' $x = -y$: אם $x > 0$ אז $S(y,x)$ אם $x < 0$ אז $S(x,y$

5. נוכיח שלכל $x \in \mathbb{Z}$, $A_x = \{y \in A : \ S(y,x) \wedge y \neq x\}$ <u>קבוצה סופית</u>

- תחילה נראה:$A_x \subseteq \{y \in \mathbb{Z} : |y| \leq |x| \ \ and \ y \neq x\}$
  - יהי $y \in A_x$, נראה $|y| \leq x$ וגם $y \neq x$ מהגדרה A_x $S(y,x)$ וגם $y \neq x$ נותר להוכיח $|y| \leq |x|$ זה נובע מכך ש $S(y,x)$ ומהגדרת S
  - נראה שסופית

$$|\{y \in A : \ S(y,x) \wedge y \neq x\}| = |\{0, 1, -1, 2, -2, ..., x-1, -(x-1), x_?\}| \leq 2x+1$$

  - לכן A_x קבוצה סופית, ולכן $\mathbb{Z}$ בת־מניה

משפט: $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ בת־מניה

הרעיון: נצייר נחש, כלומר נגדיר $S = \left\{\langle n_1, k_1 \rangle, \langle n_2, k_2 \rangle \in \langle n, k \rangle^2\right\}$
$n_1 + k_1 < n_2 + k_2$ או $n_1 + k_2 = n_2 + k_1$ עם $n_1 < n_2$ או $n_1 = n_2 \wedge k_1 = k_2$

משפט: קבוצת המספרים בקטע $(0,1)$ כך שבכתיב עשרוני כל הספרות הן 0 או 1 איננה בת־מניה

<u>הוכחה:</u>

נסמן קבוצה זו ב A. נניח בשלילה ש $|A| \leq |N|$ אז קיימת פונקציה על $f : \mathbb{N} \to A$,

נבנה מעין מטריצה ונגדיר אתa_{ij} עם $i, j \in \mathbb{N}$ להיות הסיפרה ה j במספר ה i , כלומר:

$$\begin{gathered} f(0) = 0.\boldsymbol{a_{00}} a_{01}, a_{02}, a_{03}... \\ f(1) = 0.a_{10} \boldsymbol{a_{11}}, a_{12}, a_{13}, ... \\ f(2) = 0.a_{20} a_{21}, \boldsymbol{a_{22}}, a_{23}.... \\ \vdots \end{gathered}$$

נגדיר את המספר $y = y_0 y_1 y_2 y_3$ כאשר:
$$\begin{gathered} y_0 = 1 - a_{00} \\ y_1 = 1 - a_{11} \\ y_1 = 1 - a_{22} \\ \vdots \end{gathered}$$

נוכיח שלכל $x \in \mathbb{N}$ y $f(x) \neq y$

- הסיפרה ה xשל $f(x)$ היא a_{xx}
- הספרה ה x של y היא $1 - a_{xx}$
- לכן $f(x) \neq y$

$\square$

שיעור 9 - 10/12/18

תרגיל: חשבו את העוצמה של המספרים רציונלים בקבוצה $\{\sqrt[n]{m} | m, n \in \mathbb{N} \backslash \{0,1\}\}$

פתרון: $\aleph_0$

הוכחה:

- נוכיח כי $|A| \leq |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$ נגדיר פונקציה : $\left\{ \begin{matrix} f : N \backslash \{0,1\} \times N \backslash \{0,1\} \to A \\ f : (\langle n, m \rangle) = \sqrt[n]{m} \end{matrix} \right\}$
- כאשר $\begin{matrix} B = \{\sqrt[n]{m} .....\} \\ A = B \backslash Q \end{matrix}$

  הפונקציה על :
  - יהיה $y \in B$ אז יש n, m ב $\mathbb{N} \backslash \{0,1\}$ כך ש $y = \sqrt[n]{m}$ נגדיר $x = \langle n, m \rangle$
  - אז $x \in \mathbb{N} \backslash \{0,1\}$ אז $f(x) = y$
- לכן קיבלנו ש: $|B| \leq \left| \{\mathbb{N} \backslash \{0,1\}\}^2 \right|$ וידוע ש $|A| \leq |B|$
- וגם ידוע ש $|B| \leq \left| \{\mathbb{N} \backslash \{0,1\}\}^2 \right|$ וגם ש $|\{\mathbb{N} \backslash \{0,1\}\}| \leq |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$
- לכן ממשפט נקבל $|A| \leq \aleph_0$

  נראה שאינסופית:
  - נגדיר $C = \{\sqrt{m} : \ m \in \mathbb{N}\}$
  - לא קיים k שלם כך ש $m = k^2$ כלומר $\{\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, ...\}$
  - ז"א $C \subseteq A$ ו C אינסופית.
  - לכן $\aleph_0 \leq |A|$ ולסיכום $|A| = \aleph_0$

הוכחה 2 - מתכונת החח"ע:

- אם נגדיר $\left\{ \begin{matrix} f : A \to \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ f(x) = f(\sqrt[n]{m}) = \langle n, m \rangle \end{matrix} \right\}$ זו לא פונקציה כיוון ש: $\begin{matrix} f(\sqrt{2}) = \langle 2, 2 \rangle \\ f(\sqrt{2}) = \langle 4, 4 \rangle \end{matrix}$
- לפי משפט: $|N \times N| = |N|$ לכן ישנה פונקציה חח"ע ועל $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
- נגדיר $\left\{ \begin{matrix} f : A \to \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ f(x) = f(\sqrt[n]{m}) = \langle n, m \rangle \end{matrix} \right\}$ כאשר $\langle n, m \rangle$ מקיים $x = \sqrt[n]{m}$ ו - $g^{-1}(\langle n, m \rangle)$ הוא הכי קטן שאפשר

  נוכיח ש f חח"ע:

- יהיה $x_1, x_2 \in A$ נניח ש $f(x_1) = f(x_2)$ לפי הגדרת f מתקיים:
  - $f(x_1) = \langle n_1, m_1 \rangle \Rightarrow x_1 = \sqrt[n_1]{m_1}$
  - $f(x_2) = \langle n_2, m_2 \rangle \Rightarrow x_2 = \sqrt[n_2]{m_2}$
  - לכן $\langle n_1, m_1 \rangle = \langle n_2, m_2 \rangle$ לכן $x_1 = x_2$

משפט: אם A, B בנות מניה , אז $A \cup B$ בני מניה.

הוכחה:

מכיון ש A בת־מניה פנוקציה חח"ע $f : A \to \{evens\}$ ובאופן דומה $g : B \to \{odds\}$

- נגדיר $h : A \cup B \to \mathbb{N}$, אם $h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \\ g(x) & x \in A \backslash B \end{cases}$

  נוכיח ש f חח"ע:

  - יהיו $x_1, x_2 \in A \cup B$ נפצל למקרים:

1. $x_1, x_2 \in A$ אז: $f(x_2) = h(x_2) = h(x_1) = f(x_1)$ ומהחח"ע של f נובע $x_1 = x_2$
2. $x_1, x_2 \notin A$ ־ באופן דומה רק עם g :
3. נניח כי $x_1 \in A$ ו $x_2 \in B \backslash A$

$$h(x_1) = f(x_1) \Rightarrow h(x_1) \text{ is even}$$
$$h(x_2) = g(x_2) \Rightarrow h(x_2) \text{ is odd}$$

לכן $h(x_1) \neq h(x_2)$, כנדרש

4. דומה ל 3 .

משפט 3 : נניח שלכל n טבעי B_n בת מניה. אז $\bigcup \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ בת מניה.

הוכחת המשפט:

לפי ההנחה לכל n יש פונקציה על $f_n : \mathbb{N} \to B_n$ מכיוון ש $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$, מספיק למצוא פונקציה על מ $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ל ־ $\bigcup \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ נגדיר $\left\{ \begin{matrix} f_n : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to A \\ h(n,k) = f_n(k) \end{matrix} \right\}$

נוכיח ש h על:

- יהי $y \in A$ אז יש nכך ש B_n מכיון ש f_n על, יש k ב $\mathbb{N}$, כך ש $f_n(k) = y$
- נגדיר $x = \langle n, k \rangle$, ואז: $h(x) = h(n,k) = f_n(k) = y$

מסקנה: נגדיר לכל $n \neq 0$ טבעי $B_n = \left\{ \frac{k}{n} : k \in \mathbb{Z} \right\}$ יתקיים ש

$$Q = B_1 \cup B_2 \cup .....$$

כלומר $Q = \bigcup \{B_n : n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}\}$. לפי משפט 3, מספיק להוכיח שכל B_n הוא בת־מניה. יהי $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$
<u>צ"ל</u> B_n בת מניה.

נגדיר $\left\{\begin{matrix} f:\mathbb{Z}\to B_n \\ f(k)=\frac{k}{n}\end{matrix}\right\}$ נוכיח ש f על, יהי $y\in B_n$ אז $y=\frac{k}{n}$ נגדיר $x=k$ $x\in\mathbb{Z}$, ולכן $f(x)=y$

$$|B_n|\le|\mathbb{Z}|=\aleph_0$$

שאלה: הוכיחו כי $|0,1|=\left|\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right|$

פתרון: נגדיר $\begin{matrix} f:(0,1)\to\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \\ \boldsymbol{f(x)=\pi x-\frac{\pi}{2}}\end{matrix}$ נוכיח ש f חח"ע ועל (בבית)

טויטה:

$$\begin{aligned} y&=ax+b \\ \left(-\tfrac{\pi}{2}\right)&=a\cdot 0+b &&\Rightarrow b=-\tfrac{\pi}{2} \\ \tfrac{\pi}{2}&=a\cdot 1+b &&\Rightarrow a=\pi \end{aligned}$$

שאלה הבאה: הוכח$|(0,1)|\le|(0,2]|$

נגדיר: $\left\{\begin{matrix} f:(0,2]\to(0,1) \\ f(x)=\frac{x}{3}\end{matrix}\right\}$

באופן כללי

$$|(a,b)|=|\mathbb{R}|$$
$$|(a,b]|=|\mathbb{R}|$$
$$|[a,b]|=|\mathbb{R}|$$

חזרה - משפט: קבוצת המספרים בקטע $(0,1)$ כך שבכתיב עשרוני כל הספרות הן 0 או 1 איננה בת־מניה, הוכחה לעיל

מסקנה: $(0,1)$איננה בת מניה

מסקנה $\mathbb{R}$ איננה בת־מניה

משפט 5 : $|\mathbb{R}|=|P(\mathbb{N})|$ - ללא הוכחה

שאלה: הוכיח שאם $|A|=|B|$ אז $|P(A)|=|P(B)|$ אז יש פונקציה חח"ע ועל $f:A\to B$ נגדיר $\begin{matrix} g:P(A)\to P(B) \\ g(X)=\{f(a\}\ :\ a\in X\end{matrix}$

, נוכיח ש g חח"ע ועל.

חח"ע :

1. יהיו $X,Y\in P(A)$
2. נניח ש $g(X)=g(Y)$ צ"ל: $X=Y$

   נוכיח $X\subseteq Y$
3. יהי $a\in X$ צ"ל $a\in Y$
4. לפי 3 והגדרת g, מתקיים : $f(a)\in g(x)$
5. לפי $2,4$ $f(a)\in g(y)$
6. לפי 5 והגדרת g $f(a)\in\{f(a')\ :\ a'\in y\}$ כלומר יש a' כך ש $a'\in y$

7. $f(a)=f(a')$
8. לפי 7 והחח"ע של f נובע $a=a'$
9. לפי $6,8$ $a\in y$

$Y\subseteq X$: באופן דומה

ובסה"כ: $X=Y$

<u>על:</u>

יהי $Y\in P(B)$

1. כלומר $Y\in B$
2. נגדיר $X=\left\{f^{-1}(b)\ b\in y\right\}$ מכיון ש f חח"ע ועל אז f^{-1} מוגדרת

<u>צ"ל:</u>

א. $x\in P(A)$

ב. $g(X)=Y$

<u>הוכחת א:</u>

3. נוכיח $X\subseteq A$ יהי $a\in X$ <u>צ"ל:</u> $a\in A$
4. לפי $2,3$ יש $b\in Y$:
5. וגם $a=f^{-1}(b)$
6. לפי 5 , $a\in A$

<u>הוכחת ב :</u>

$g(X)\subseteq Y$:

7. יהי $b\in g(X)$ צ"ל: $b\in Y$
8. לפי 7 והגדרת g יש a כך ש: $a\in X$
9. ו $b=f(a)$
10. לפי $2,8$ יש b' כך ש: $b'\in Y$
11. $a=f^{-1}(x)$ כלומר $f(a)=b'$
12. לפי 9 ו 11־ $b'=f(a)=b$

$Y\subseteq g(x)$

- יהי $b\in y$ <u>צ"ל:</u> $b\in g(x)$
- $f^{-1}(b)\in X$
- נגדיר $a=f^{-1}(b)$
- ויתקיים $f(a)=b$, $a\in X$
- $b=f(a)=g(x)$

משפט קנטור: לכל A $|A| < |P(A)|$

<u>הוכחה:</u>

- תהי $\begin{matrix} f : A \to P(A) \\ f : A \to P(A) \end{matrix}$נראה ש f לא על.

1. נגדיר $Y = \{a \in A \ a \notin f(a)\}$

נוכיח שאם יש x כך ש $f(x) = Y$ אז $x \notin Y \iff x \in Y$ (סתירה)

2. נניח $f(x) = Y$
3. נניח $x \in (\notin)Y$ צ"ל $x \notin (\in)Y$
4. לפי 1,3 אז: $x \notin f(x)$
5. לפי $2, 4$ אז: $x \notin (\in)Y$

דוגמה:

$$\begin{array}{ccc} \underline{A} & & \underline{P(A)} \\ ??? & \longrightarrow & \emptyset \\ 1 & \longrightarrow & \{1\} \\ 2 & \longrightarrow & \{2\} \\ & & A \end{array}$$

שיעור 10 - $17/12/18$

תורות ומודלים:

הגדרה: תורה היא קבוצה של פסוקים. תורה באוצר המילים L **פרושו תורה שכל פסוק בה הינו באוצר המילים.**

דוגמאות

- $T = \{a, b, c\}$ כאשר $\begin{matrix} a = \forall x \left(s\left(x, x\right)\right) \\ b = \forall x, y \left(s(x, y \to s(y, x)\right) \\ c = \forall (x, y, z \left[S(x, y) \wedge S(y, z) \to S(x, z)\right] \end{matrix}$

1. T היא התורה יחס שקילות
2. $T = \{a, b^*, c\}$ כאשר a, c כמו קודם $Tb^* = \forall (x, y, z \left[S(x, y) \wedge S(y, x) \to x = y\right]$ - היא תורת הסדר החלקי.
3. $T = \{\forall x \left(s(x), \neg S(x)\right)\}$ - אינו יחס

הגדרה: תהי T **תורה ב** L **יהי** M **מבנה שמפרש את** L **.** M **<u>מודל</u> ל** T **פרושו ש** M **מבנה שמקיים את כל הפסוקים ב** T **בסימון** $M \models T$ **.**

<u>מודלים לתורות שלעיל:</u>

1. מודל לתורה של יחס שקילות הוא יחס שקילות .

למשל $\langle \mathbb{N}, =_5 \rangle$, כאשר $a =_5 b$ פרושו $a - b$ כפולה של 5 , הוא מודל לתורה של יחס שקילות.

2. $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle$ הוא מודל לתורת הסדר החלקי

3. אין מודל לתורה Tשבחלק ג'

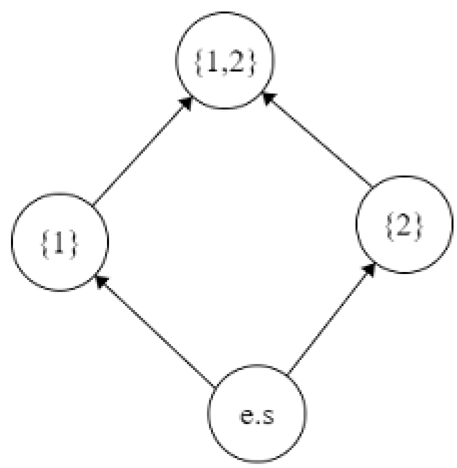
הגדרה: תורה עקבית היא תורה שיש לה מודל

ב א,ב ראינו תורות עקביות. בג' התורה לא עקבית.

הערה: אם $T \subseteq T^+$ אז כל מודל של T^+ הוא מודל של T , במילים אחרות, ל T^+ יש פחות מודלים

<u>דוגמאות:</u>

- T היא תורת הסדר החלקי $T^+ = T \cup \{\delta\}$ כאשר $\delta = \forall x, y \left[S(x, y \vee s(y, x)\right]$
- T^+ היא תורת הסדר הקוי, כל מודל של T^+ הוא מודל של T ,
- אבל לא להפך, למשל: $\langle P\{1,2\}, \subseteq \rangle$ הוא מודל של T ולא של T^+
- נתבונן בדיאגרמת הסה:



- ל$T \not\models M$ כי עבור $x = \{1\}$ ו $y = \{2\}$ לא מתקיים $\{1\} \subseteq \{2\} \vee \{2\} \subseteq \{1\}$

הגדרה: נתון מבנה M באוצר המילים L , ונתון אוצר מילים $L^- \subseteq L$, הצמצום של M ל L^- שנסמנו ב $M \lceil L^-$, הוא המבנה שעולמו כמו של M , הוא מפרש את L^- בלבד, והפירושים שלו זהים לאלו של M .

M **הוא העשרה של** $M \lceil L^-$

דוגמא - נתון $L = \left\langle \bar{f}, \bar{s}, \bar{c} \right\rangle$, $M = \langle \mathbb{R}, +, <, e \rangle$, M מפרש את L .

- נתון $\bar{L} = \langle \bar{c} \rangle$ <u>אז</u> $M \lceil L^- = \langle \mathbb{R}, e \rangle$
- נתון $L^+ = L \cup \{c_n : n \in \mathbb{N}\}$,

נגדיר M שעולמו הוא $\mathbb{R}$, ומפרשו את f^{M^+} כ - $+$ ואת s^{M^+} הוא $<$, $c^{M^+} = e$ ולכל $n \in \mathbb{N}$, $c_n = e$

<u>אז</u> M^+ הוא העשרה של M ושל $M \lceil L^-$

משפט: נניח $L^- \subseteq L$, M מבנה שמפרש את L , $M^- = M\lceil L^-$ אז:

1. לכל פסוק α ב L^- מתקיים ש:$M \models \alpha \Leftrightarrow M^- \models \alpha$
2. לכל תורה T ב L^- מתקיים ש $M \models T \Leftrightarrow M^- \models T$

שאלה: נתונים פסוקים

$$\alpha = \exists x, y, z \left[s(x,y) \wedge s(y,z)\right]$$
$$\beta = \exists x \forall y \left(s(y,x)\right)$$
$$\gamma = \forall x \left[s\left(c,x\right)\right]$$
$$\delta = \forall x \left[s\left(x,g(x)\right)\right]$$

נתונים אוצרות של מילים $L_1 = \langle s \rangle$, $L_2 = \langle c,s,g \rangle$ נתון מבנה $M = \left\langle \mathbb{N}, 0, \leq, g^M \right\rangle$ כאשר $g^M(x) = x+1$, מלאו את הטבלה הבאה.

	M	$M\lceil L_1$
α	T	T
β	F	F
γ	T	$-$
δ	T	$-$

נגדיר $T = \{\alpha, \beta\}$ האם $M \models T$? תשובה: לא, כי M לא מקיים את βבסימון $M \not\models \beta$

האם $M\lceil L_1 \models T$? תשובה: לא, אותו נימוק.

הגדרה: נתון מבנה M שמפרש את L התורה של M בסימון $Th\left(M\right)$, היא קבוצת הפסוקים ב L ש M מקיים.

דוגמה:$M = \langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ $Th(M)$ היא ∞ית, למשל $\forall x \left[S(x,x)\right]$ שייך ל T .

לכל n הפסוק $\alpha_n = \exists x_1, x_2, ..., x_n \left(S(x_1,x_2) \wedge ..... \wedge s(x_{n-1},x_n)\right)$ שייך ל T

<u>שאלה :</u> האם יש תורה T באוצר המלים פרוש כך שאם M מבנה שיש בו עולם בלבד אז $M \models T$ אם"ם M ∞ית

<u>תשובה:</u> כן,

<u>הוכחה:</u>

- נגדיר $\alpha_2 = \exists x_2, x_1 \left(x_1 \neq x_2\right)$
- $\alpha_3 = \exists x_1, x_2, x_3 \left(x_1 \neq x_2, x_2 \neq x_3, x_1 \neq x_3\right)$
- $\alpha_4 = \exists x_1, .., x_4 \left(\bigwedge_{1 \leq i \leq j \leq 4} x_i \neq x_j \right)$,
- באופן כללי$\alpha_n = \exists x_1, .., x_n \left(\bigwedge_{1 \leq i \leq j \leq n} x_i \neq x_j \right)$
- נגידר $T = \{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, ...\}$ $M \models T$ אם"ם ב M יש ∞ אברים.

<u>שאלה:</u> האם יש אוצר מילים L ותורה T כך שלכל מבנה Mשמפרש את L מתקיים $M \models T$ אם"ם M סופי

משפט הקומפקטיות:

תהי T תורה אם לכל תת קבוצה סופית של T יש מודל אז T עיקבית

תשובה:

- נניח בשלילה שיש תורה T כזאת. נגדיר $\alpha_n=\left\{\exists x_1,....x_n\left(\bigwedge\limits_{1\le i\le j\le n}x_i\neq x_j\right)\right\}$, כלומר ב a_n יש לפחות n איברים.
- נגדיר $T^+=T\cup\{a_n:n\in\mathbb{N}\backslash\{0,1\}\}$, מספיק להראות ש T^+ עיקבית כלומר שיש מודל ל T^+ כי אז הוא יהיה מודל ל T והוא אינסופי בסתירה להנחת השלילה.
- לפי משפט הקומפקטיות מספיק להוכיח שלכל $T^-\subseteq T^+$ סופית, יש מודל .
- תהי T^- תת־קבוצה סופית של T^+ , צ"ל ל T^- עקבית,
- מכיוון ש T^- סופית, אז $T^-\cap\{a_n:n\in\mathbb{N}\backslash\{0,1\}\}$ לכן יש $n^*\in\mathbb{N}$, כך ש: $(**)$ $T^-\cap\{a_n:n\in N\backslash\{0,1\}\}$ מוכלת ב $\{a_n\in\mathbb{N},2\le n\le n^*\}$
- נגידר מבנה M^- : העולם של M^- הוא $\langle[n^*]\rangle$, ונוסיף פרושים כלשהם לסמנים ב L .
- לפי הנחת השלילה מכיוון ש M^- סופי, מתקיים $M^-\models T$ $(*)$, נוכיח ש $M^-\models T^-$:
  - יהי $\alpha\in T^-$ צ"ל $M^-\models\alpha$, נפצל למקרים:
    1. אם $\alpha\in T$: לפי $(*)$, $M^-\models a$
    2. אם $\alpha\notin T$ אז יש n טבעי כך ש $\alpha=\alpha_n$ אז לפי $(**)$ $n<n^*$
       {תזכורת: α_n = "יש לפחות n אברים שונים"}
       לפי הגדרת M^- , $M^-\models\alpha_n$ ו־ $M^-\models\alpha$

$\square$

שאלה: $L=\langle s,g_1,g_2\rangle$, $M=\langle\mathbb{N},\le,+,\cdot\rangle$, $T=Th(M)$
האם יש ל T מודל שעוצמתו לפחות $|\mathbb{R}|$?
תשובה: כן.

- נגדיר $L^+=L\cup\langle c_i\in\mathbb{R}\rangle$, ו - $T^+=T\cup(c_i\neq c_j:\ i\neq j\ i,j\in\mathbb{R})$
- תהי T^- סופית של T^+ צ"ל עקבית
- אם T^+ עקבית , אז יש מודל ל M^+ ל T^+ כך ש: $T^+\models M^+$ ומתקיים ש : $|R|\le|M^+|$
  - מדוע? כי אם נגדיר $\begin{array}{c}f:\mathbb{R}\to M^+\\ f(i)=c_i^{M^+}\end{array}$ נקבל פונקציה חח"ע.
  - הוכחה:
    * יהיו $i_1,i_2\in\mathbb{R}$, אם $i_1\neq i_2$ אז $c_{i_1}\neq c_{i_2}$ הוא פסוק ב T^+ .
    * $M^+\models T^+$ לכן $M^+\models c_{i_1}\neq c_{i_2}$
    * $c_{i_1}^{M^+}\neq c_{i_2}^{M^+}$ לפיכך $i_1=i_2$
- נוכיח ש T^+ עקבית. תהי T^- תת־תורה סופית של T^+ צ"ל T^- עקבית
- מספר ה c_i־ים שמופעים בפסוקים שב T^- הוא סופי. נרשום אותם: $c_{i_1},c_{i_2},c_{i_3},.....,c_{i_{n^*}}$
  נגדיר מודל M^+ שהוא העשרה של M כך:

$$M^+ \text{ מפרש את } L^+ \quad \begin{matrix} c_{i_1}^{M^+=1} \\ c_{i_2}^{M^+=2} \\ \vdots \\ c_{i_{n^*}}^{M^+=n^*} \end{matrix}$$

- נוכיח ש $M^+ \models T^-$, יהי $\alpha \in T^-$ צ"ל $M^+ \models \alpha$
- <u>מקרה א:</u> מכיון ש M^+ העשרה של M וידוע $M \models T$, $M^+ \models \alpha$
- <u>מקרה ב':</u> $a \notin T$ הוא פסוק מהצורה $c_{i_k} \neq c_{i_m}$ ו $i_k \neq i_m$ ו $1 \leq i_k \leq i_m \leq n^*$ α מתפרש ב M^+ כך: $k \neq m$
- לכן $M^+ \models T^-$ ולכן T^- עקבית ולכן לפי משפט הקומפקטיות T^+ עקבית

שיעור 11 - 24/12/18

<u>שאלה:</u> נתון מבנה $M = \langle \mathbb{N}, <, +, \cdot, 1 \rangle$, $T_0 = Th(M)$

א. האם יש מודל לתורה $T \cup \{\exists x \forall y \ S(x,y) \vee x = y\}$

<u>תשובה:</u>כן. $M \models T$ הפסוק מתקיים ב N , כי אפשר להציב $x = 0$

ב. האם יש מודל לתורה $T_0 = T \cup \{\exists \forall y \, (S(y,x) \ \wedge x = y)\} = \alpha$

<u>תשובה:</u> לא, נניח בשלילה שיש מודל כזה, M'.

- אז מהנחה בשלילה נובע ש $M \models \neg \alpha$
- לכן $(\neg \alpha) \in T_0$
- לכן $M' \models \neg \alpha$
- לכן $M' \models \alpha$, וזו סתירה

ג. נסמן $\bar{h} = \underbrace{1 + 1 + ... + 1}_{\textbf{n times}}$**, פורמלית (תוך הבחנה בין אוצר מילים למבנה** $\bar{n} = f\left(f(c,c), c...\right)$**, האם יש מודל לתורה**
$T = T_0 \cup \{\bar{n} < d \ : \ n \in \mathbb{N}\}$

<u>פתרון שנכשל:</u>

- נגדיר מבנה M' שהוא העשרה של M ואוצר המליים שלו כולל פרוש ל d , נניח שיש $M' \not\models n \bar{<} d$
- $d^{M'}$ הוא אבר ב $\mathbb{N}$, נסמנו ב $m = d^{M'}$
- כעת, נראה ש $M' \models \bar{m} < d$, הפסוק הנ"ל $\bar{m} < d$מתפרש ב M כ $\bar{m} = m < m = d^{M'}$

<u>פתרון:</u>

- לפי משפט הקומפקטיותת מספיק שכל תת־קבוצה סופית של T היא עיקבית.
- תהי $T^- \subseteq T$ סופית , $T^- \cap \{\bar{n} < d : n \in \mathbb{N}\}$, לכן יש n^* כך שלכל $\alpha \in T^-$
- אם α הוא מהצורה $\bar{n} < d$ אז $n < n^*$.

- נגדיר מבנה M^- שהוא העשרה של M , $M^- = \langle \mathbb{N}, <, +, \cdot, 1, n^* \rangle$
- נוכיח ש $M^- \models T^-$ - מכאן נסיק ש T^- עקבית, ולכן T עקבית
- יהי $\alpha \in T^-$ צ"ל: $M^- \models \alpha$
- אם $\alpha \in T_0$:
  - ולכן $M \models T_0$, M^- העשרה של M
  - ולכן $M^- \models T_0 \Leftarrow M^- \models \alpha$
- אחרת, $\alpha \notin T_0$ אז יש $n \in \mathbb{N}$ כ ך ש $\alpha = \bar{n} < d$
- מתפרש ב M^- , כך: $n < n^*$
- אכן בחרנו את n^* , כך ש $n < n^*$, כנדרש

ד. האם יש מודל ל T_0 שעוצמתו לפחות $|\mathbb{R}|$?

<u>תשובה:</u> כן <u>הוכחה:</u>

- נגדיר L^+ כך ש : $<, +, \cdot, 1$ יופיעו ב L^+ , ובנוסף קבוע אישי C_α , כנגיד כל α ממשי
- נגדיר $T^+ = T_0 \cup \left\{ c_a \neq c_b : \begin{matrix} a, b \in \mathbb{R} \\ a \neq b \end{matrix} \right\}$
- מספיק להוכיח ש T^+ עקבית
- אז: $\{c_a : \ \text{c}_a \text{ in } T^- \ \}$ סופית,
- נרשום את כולם כך: $c_{a_0}, c_{a_1}, c_{a_2}, ..., c_{a_n}$
- נגדיר העשרה M^- ל M , כך ש M^-מפרש את L^+ , באופן הבא:

$$c_a^{M^-} = \begin{cases} i & a = a_i, 0 \leq i \leq n \\ 4 & else \end{cases}$$

  - דוגמה (לרעיון של ההגדרה, ולא להוכחה) נני שמתשמשים ב T^- רק ב $c_{\frac{1}{2}}, c_3, \sqrt{2}$, אז : $\begin{Bmatrix} c_{a_0} = c_{\frac{1}{2}}, \\ a_0 = \frac{1}{2} \quad a_1 = 3 \quad a_2 = \sqrt{2} \end{Bmatrix}$

- נוכיח ש $M^- \models T^-$, יהי $\alpha \in T^-$ צ"ל: $M^- \models T^-$
- אם $\alpha \in T_0$, וידוע ש $M \models T_0$,ולכן $M \models \alpha$, ולכן העשרה של M ולכן $M^- \models \alpha$
- אחרת $\alpha \notin T_0$, לכן α הוא מהצורה $c_a \neq c_b$,כאשר a, b ממשים שונים,
- מכאן שישנו $1 \leq i, j \leq n$ כך ש שבעבורים $a = a_i$, $b = a_j$.
- והרי הפסוק $c_a \neq c_b$ מתפרש כ $i \neq j$ ואכן $i \neq j$, כנדרש.
- מכיון שכל $T^- \subseteq T^+$ סופית היא עקבית, לפי משפט הקומפקטיות, T^+ עקבית.
- נוכיח שעוצמת מודל M^+ של T^+ , היא לפחות $|R|$:

– נגדיר $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to M^+ \\ f(a)=C_a^{M^+} \end{array}$, צ"ל: f חח"ע.

- יהיו $a,b\in\mathbb{R}$, נניח $f(a)=f(b)$ נראה ש $a=b$
- מתקיים ש: $C_a^{M^+}=f(a)=f(b)=C_b^{M^+}$,
- נניח בשלילה ש $a\neq b$ אז: $(C_a\neq C_b)\in T^+$ ולכן $M^+\models C_a\neq C_b$
- כלומר $C_a^{M^+}\neq C_b^{M^+}$, וזו סתירה.

שאלה: האם יש תורה T יש לה מודל שעוצמתו $\aleph_0$,אבל אין לה מודל שעומצתו לפחות $|\mathbb{R}|$?
התשובה: לא. הוכחה:

- נניח בשלילה ש T תורה כזאת
- נגדיר L^+ כך: L^+ מופיעים כל הסימנים שב T , ובנוסף קבוע אישי c_a כנגד כל $a\in\mathbb{R}$
- נגדיר $T^+=T_0\cup\left\{c_a\neq c_b : \begin{array}{c} a,b\in\mathbb{R} \\ a\neq b \end{array}\right\}$
- מספיק להוכיח ש T^+ עקבית (מדוע? משפט הקומפקטיות + הגדרת הפונקציה החח"ע ממקודם)
- תהי $T^-\subseteq T^+$, ההמשך כמו בשאלה קודמת.

שיעור 12 - 31/12/18

5) נסמן $A=\{a\in P(R):|a|<10\}$. למשל, הקבוצה $\{1,2,6\}$ היא ב-A. אוצר המילים L כולל סמן של יחס דו-מקומי, S וכן סמן של קבוע אישי c_a כנגד כל a ב-A.

נתון מבנה M שמפרש את L כך: עולמו של M הוא A. היחס S מתפרש ב-M כ-$\subseteq$ למשל $S^M(\{1,2\},\{1,2,3\})$. הקבוע c_a מתפרש ב-M כ-a. למשל, $c_{\{1,2\}}^M=\{1,2\}$. תהי T התורה של M, כלומר קבוצת כל הפסוקים באוצר המילים L שמתקיימים ב-M. נסמן ב-$T_S=T|<S>$ את הצמצום של התורה T לאוצר המילים <S>, כלומר T_S היא קבוצת הפסוקים באוצר המילים <S> ש-M מקיים. נגדיר אוצר מילים $L^+=L\cup<d>$ ותורה $T^+=T\cup\{S(c_a,d):a\in A\}$.

א. מדוע $<P(R),\subseteq>$ איננו מודל של T_S?

עבור יחס S על קבוצה A , נאמר ש S סדר טוב בכל תת קבוצה B לא ריקה של A . יש אבר מזערי מבחינת S , כלומר יש $a\in B$ כך שלכל $x\in B$ מתקיים $S(a,x)$. באופן שקול, אין סדרה יורדת ∞ית הוכיחו שאין תורה T כמו ש $M\models T$ אם"ם S^M סדר טוב כאשר M מפרש את S .

- פתרון נניח בשלילה ש T כזאת.
- נסמן $L=\langle S\rangle$

- נגדיר $L^{+}=L\cup\langle c_0,c_1,...\rangle$
- נגדיר $T^{+}=T\cup\left\{S\left(c_{n_1,c_n}\right)\wedge c_{n+1}\neq c_n:n\in\mathbb{N}\right\}$
- נוכיח ש T^{+} עקבית , תהי $T^{-}\subseteq T^{+}$ סופית. <u>צ"ל:</u> T^{-} עקבית
- מכיון ש T^{-} סופית, יש $n*$ טבעי כך שלכל $\alpha\in T^{-}$ אם α הוא $S\left(c_{n+1},c_n\right)\wedge c_{n+1}\neq c_n$ אז $n<n*$
- נגדיר M^{-} כך : $M^{-}=\left\langle\mathbb{N},S^{M^{-}},\leq,\left\{c_n:n\in\mathbb{N}\right\}\right\rangle$ כאשר $c_n=\begin{cases}n*-n & n\leq n*\\ 2 & n*<n\end{cases}$
- נוכיח ש $M^{-}\models T^{-}$, יהי $\alpha\in T^{-}$ <u>צ"ל:</u> $M^{-}\models\alpha$
  - <u>מקרה א:</u> $a\in T$. S^{M} סדר טוב, לכן $M^{-}\models T$ ובפרט $M^{-}\models\alpha$
  - <u>מקרה ב:</u> $a\notin T$:
    * אז יש n כך ש α הוא הפסוק $S\left(c_{n+1},c_n\right)\wedge c_{n+1}\neq c_n$ לכן $n<n*$.
    * אז: $c_{n+1}^{M^{-}}=n^{*}-(n+1)$, $c_n^{M^{-}}=n^{*}-n$ כעת
    $$n*-(n+1)\leq n*-n$$
    $$n*-(n+1)<n*-n$$
    ואכן זה מתקיים.
    * הוכחנו ש T^{-} עקבית , ולפי משפט הקומפקטיות T^{+} .
    * לכן יש מודל M^{+} ל T^{+} , $M^{+}\models T^{+}$, ולכן $S^{M^{+}}$ סדר טוב.
    * מצד שני: $c_0^{M^{+}},c_1^{M^{+}},c_2^{M^{+}},...$