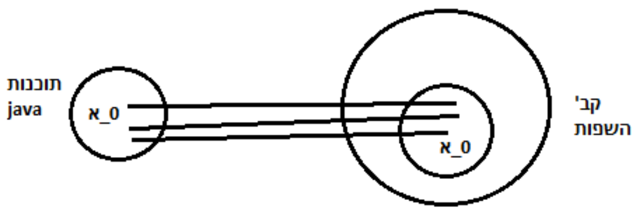
חישוביות

1 מבוא

האם קיימות בעיות (נחשוב על שפות מעל $\sum^*$) שלא ניתן לפתור ע"י מחשב?

כן. ניתן להראות "בקלות" משקולי ספירה: תוכנות נתנות לתיאור ע"י מחרוזות סופיות מעל א"ב סופי $\sum$, כלומר קב' התוכנות היא תת קב' של $\sum^*$, שהיא בת - מניה (עוצמה, $\aleph_0$ קב' השפות מעל $\sum^*$ היא בעצם $P\left(\sum^*\right)$ שעצמתה גדולה מ $\aleph_0$, ממשפט קנטור. בגלל שלכל תוכנה יש לכל היותר שפה אחת שהיא מקבלת (הערה: תוכנה כמו $while(true)$ לא מקבלת אף קלט), "רב" השפות ישארו בלי תוכנה שמחשבת אותן. זה נסיון לכל מודל חישובי "סביר" (בפרט שהתוכנות הן באורך סופי)



דוגמאות (ללא הוכחה כרגע) לשפות שלא נתנות לקבלה ע"י מחשב:

נדגיש: $\sum$ סופית ונדבר רק על שפות של מחרוזות סופיות מעל $\sum$ כמו באוט' .

1. <u>בעיית העצירה:</u> בהנתן קלט $(\langle code\rangle, \langle x\rangle)$ קלט לקוד צריך להחליט האם התוכנות המתוארות ע"י $\langle code\rangle$ עוצרת בריצתה על x או לא.

   אינטואיטבית, הבעיה היא שאם ננסה להריץ את הקוד על x פקודה-פקודה, אם הוא עוצר, גם אנחנו נעצור ונגיד "עוצר" - זה טוב. אבל אם הקוד לא עוצר אז גם ההרצה שלנו לא תעצור ואלג' שלנו לא יעצור (במקום להגיד "לא עוצר").

   זו לא הוכחה כי אולי יש אלג' יותר טוב שכן פותר את הבעיה. בהמשך נוכיח שאכן לא קיים אלג' כזה.

2. שקילות של תוכנות: בהנתן שתי תוכנות מחשב (למשל $java$) $\langle code1\rangle, \langle code2\rangle$ האם הן מחשבות את אותה השפה?

   (א) בעיית השקילות של שני אוט' מחסנית א"ד לא נתנת לחישוב במחשב

   הערה: בעית השקילות של DFA-ים היא כן ניתן לפתרון ע"י מחשב (בגדול מסתכם בהסתמכות על הגרף של אוט' מסויים שנקבע ע"י שני האוטומטים, ובדיקת $s-t$ קשירות בין q_0 ל q_f)

3. בהנתן קב' סופית של מטריצות ריבועיות מעל השלמים $\{A_1, ...A_n\}$ האם קיימת מכפלה סופית שלהם הנותנת את מטריצת האפס? כלומר מכפלה מהצורה $A_1^7 A_2^8 A_5^{14}$..... (כלומר ניתן להכפיל כל מטריצה יותר מפעם אחת)

נעבור להגדרה של המודל המדוייק שנעבוד איתו בקורס - **מכונת טיורינג.**

תיזת צרץ' טיורינג: כל מחשב "סביר" (למימוש והרצה ב"עולם הפיסקלי שלנו") לא מסוגל לפתור בעיה שמכונת טירוינג לא מסוגלת לפתור.

2 מכונת טיורינג

2.0.1 מכונת טיורינג - תאור (כמעט) פורמלי

מכונת טיוריג מוגדרת ע"י שביעיה:

- Q - קב' סופית של מצבים
- q_0 מצב התחלתי
- $\sum$ א"ב הקלט
- Γ א"ב העבודה
- $\flat$ מצבים סופיים
- F קב' של מצבים סופיים (תפקיד שונה מאוטומט מחסנית)
- δ פונקציית מעברים

$\flat$־ים (מסמן לנו בסרט האינסופי לימין את סוף הקלט)

נזכר שבאוטומט מחסנית לא היה צריך את זה כי בכל רגע דרשנו לתת את הפלט הנכון עבור הרישא שקראנו.

<u>מהלך החישוב:</u> מוגדר ע"י δ. בכל צעד מבצעים "מהלך" לפי δ . δ מוגדרת כך $\delta\left(Q\backslash F\right)\times\Gamma\rightarrow Q\times\Gamma\times\left\{ L,S,R\right\}$

- Q מצב נוכחי
- Γ - תו המוצבע ע"י הראש
- $Q\times\Gamma$ = תו שכותבים במקום המוצבע ע"י הראש $\times$ מצב חדש
- לאן הראש זז בסוף הצעד: $(Left,Stay,Right)$ - $left$ קורה בסוף הצעד.

<u>סיום החישוב:</u> אם מגיעים למצב השייך ל F החישוב מיד עוצר והפלט שלו (על הקלט $\times$ שלו) מוגדר כתוכן הסרט משמאל לראש.
אם לא עוצרים אף פעם , אז הפלט על אותו קלט לא מוגדר.

כלומר הפונקציה שמ"ט M מחשבת , $\delta_M:\sum^{*}\rightarrow\Gamma^{*}$ היא פונקציה חלקית (מותר ש δ_M לא תהיה מוגדרת על קלטים מסוימים)

<u>דוגמא 1 :</u> כיצד נפלוט ε :

$$\downarrow$$

$$*\quad..\quad..$$

נעצור כאשר הראש בתו הראשון

<u>דוגמה 2:</u> כדי לפלוט את $11\flat$ צריך לעצור בתא ה־4 ותוכן הסרט יהיה:

$$1\quad1\quad\flat\quad*\quad..$$

דוגמה: נחשב את הפונקציה המוגדרת כך: $\begin{Bmatrix}\delta:\left\{ 0,1\right\} ^{*}\rightarrow\left\{ 0,1\right\} ^{*}\\ f(x)=0x \end{Bmatrix}$

רעיון הבניה: נכתוב 0 בהתחלה ונזוז ימינה כאשר את התו שדרסנו, נזכור באמצעות מצב:

פורמלית: $M=\left(Q=\left\{ q_0,q_1,q_f\right\} ,\sum=\left\{ 0,1\right\} ,\Gamma=\left\{ 0,1,\flat\right\} ,\flat,F=\left\{ q_f\right\} ,\delta,q_0\right)$

q_0 - זוכר 0+ מצב התחלתי , q_1 זוכר 1 , q_f - מצב סופי

$Q,F\backslash\delta$	0	1	$\flat$
q_0	$(q_0,0,R)$	$(q_1,0,R)$	$(q_f,0,R)$
q_1	$(q_0,1,R)$	$(q_1,1,R)$	$(q_f,1,R)$

<u>דוגמה</u> 3: נתבונן בפונקציה $f:\sum^* \to \sum^*$ המוגדרת ע"י $f(x)=xx$ (לכל $x\in\sum^*$)

רעיון הבניה: נלך הלוך־חזור, ובכל פעם נוסיף בצד ימין (במקום ה $\flat$) הראשון את התו הבא להעתקה)

$$\begin{array}{|c|c|}\hline x & \flat \ \ \ldots \ \ \ \ \flat \\ \hline\end{array}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline x_1 \ \ x_2' \ \ \ldots \ \ \ x_n' & x_1 & \flat \ \ \ldots \\ \hline\end{array}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline x_1 \ \ x_2 \ \ x_3' \ \ \ldots \ \ \ x_n' & x_1" \ \ \ x_2" & \flat \ \ \ldots \\ \hline\end{array}$$

נשים ′־ים על האותיות להעתקה ו " על האותיות ימין בכל פעם נוריד את ה ′ מהאות שכבר מטופלת וככה נדע למצוא את האות הבאה להעתקה. (הערה: כמו תמיד זה מימוש אחד, ויתכנו שיפורים/מימושים אחרים)

נעבור למימוש הרעיון. נבנה מכונה $M=(Q,q_{0,},\sum\Gamma,F,\flat,\delta)$

כאשר $\Gamma=\sum'\cup\sum"\cup\{\flat\}$

$\sum'=\{\sigma'|\sigma\in\sum\}$ ו - $\sum"=\{\sigma"|\sigma\in\sum\}$ - נניח בה"כ ש$\sum$ לא מכילה גרסאות מהצורה a או $a"$ של תויים $a\in\sum$

כמו כן $Q=\{q_0,q_1,q_2,q_f\}\cup\{q_\sigma|\sigma'\in\sum\}$

q_0 מצב התחלתי וגם אחראי על גילוי התו הבא לכתיבה

q_f, אחראי על הליכה ימינה עד להעתקת האות הבאה להעתיק (שאותה q_0 זוכר) + תג ראשון

$F=\{q_f\}$

<u>δ:</u>

$Q,F\backslash\delta$	$a\in\sum$	$a'\in\sum$	$a"\in\sum$	$\flat$
q_0	$(q_a,a,R)^1$	(q_a,a,R)	$(q_2,a",S)^4$	$(q_f,\flat,S)$
$(b\in\sum)\ q_b$	$(q_b,a',R)^2$	(q_b,a',R)	$(q_b,a",R)$	$(q,b",L)$
q_1	$(q_0,a,R)^3$	(q_1,a',L)	$(q_1,a",L)$	dont care^6
q_2	dont care	dont care	(q_2,a,R)	$(q_f,\flat,S)$

1 - גילוי אות לכתיבה בפעם הראשונה . בפרט לא נשים עליה ′ כי היא כבר בתהליך העתקה.

2 - זו בהכרח הפעם הראשונה שמעתיקים ולכן צריך לתייג את שאר הקלט

3 - גילינו את האות הכי ימנית שכבר טופלה, נעבור ימינה כדי לאפשר לq_0 לטפל באות הבאה לטיפול

4 - מעביר שליטה למצב המנקה "ים לקראת סיום

5 - רק אם δ : $x=\varepsilon$ ואז נרצה מיד לפלוט ε

6 - צריך לכתוב משהו לנכונות סינטקטית

שקילות מודלים :

במודל של מכונת טיורינג שהגדרנו עשינו הרבה החלטות שרירותיות (כמו תמיד), שאפשר יהיה לבנות ולקבל מודל בעל אותו כח חישובי (שקול). לדוגמה: אפשרי היה לותר על ה $S(=Stay)$ ועדיין לקבל מודל שקול.

לדוגמה,

2.0.2 מכונת טיורינג רגילה שקולה ל M'_{TM} ללא S ,

הוכחה:

כיוון קל: תהי M מ"ט במודל M'_{TM}, ונבנה מ"ט שקולה במודל M_{TM} , $M'=M$, כאן M במודל החדש היא תמיד מ"ט חוקית במודל המקורי ולכן ברור ש $M'=M$ שקולה ל M

כיוון יותר מענין: תהי M מ"ט רגילה ונבנה M' שקולה במודל M'_{TM} . רעיון הבניה הוא להגדיר M' הזהה ל M , פרט לכניסות מהצורה $\delta(q,a)=(p,b,S)$. אותן נבנה לקב' שורות δ' שיראה כך:

$$\delta'(q,a)=(P_R,b,R)$$
$$\forall c\in\Gamma\ \delta'(P_R,C)=(P,c,L)$$

כלומר נזוז ימינה ואז שמאלה.

נשים לב שאם היינו הולכים קודם שמאלה ואז ימינה היינו עלולים לקבל סימולציה לא נכונה במקרה של S בקצה השמאלי של הסרט.

- בצעד הראשון M' היתה נשארת במקום לפול מהסרט
- בצעד השני היתה זזה ימינה ומוצאת את עצמה באחד ימינה מהמקום שהתכוונו

נעבור להגדרה פורמלית של מודל חישובי.

זו הגדרה כללית מאוד של מודל חישובי שמגדירה התאמה בין תוכנות במודל לפונקציות שהן מחשבות. הגדרת מודל לא מציבה כל הגבלה על צורת ההתאמה. אבל בד"כ ההתאמה תהיה באמצעות תיאור מדוייק כיצד "מריצים" את התכונה.

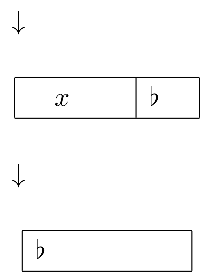
הגדרות:

מ"ט דו סרטית:

$$\delta:Q\backslash F\times\Gamma\times\Gamma\to Q\times\Gamma\times\Gamma\times\{L,R,S\}$$

- $Q\backslash F$ - מצב משותף
- Γ - תו בסרט ב I
- Γ - תו בסרט הII
- $\Gamma\times\Gamma$ - מה כותבים

- $\{L,R,S\}$ - לאן זזים
- בסקיצה - אתחול יראה כך:



- פלט: תכן הסרט ה I משמאל לראש ברגע העצירה.

<u>הגדרה 3.1 (קונפיגורציה):</u> בהנתן מ"ט M , קונפיגורציה (מצב רגעי) של M היא שלשה $C=(q,i,\alpha)$ המתארת (באופן מלא) את המצב הכולל של מכונה אחרי מספר (סופי) של צעדי ריצה:

- כאן q הוא המצב הנוכחי.
- i - התא שבו נמצא הראש הקורא/כותב.
- α - תוכן הסרט, כיוון שמדובר בריצה מס' סופי של צעדים על קלט כלשהו x מספיק לשמור רישא סופית של α כמוסכמה נשמור $\varphi = max\left(|x|,T\right)$ תוים, כאשר T הוא התו הימני ביותר שבו M ביקרה. אם, בצורה כזו מבוטח שמימין ל $\alpha\left[x\right]$ יש רק $\flat$ ים ואין צורך לשמור אתם במפורש.

<u>הגדרה 3.2 (צעד חישוב של מ"ט):</u> תהי M מ"ט ו C_1,C_2 קונפיגורציה שלה. נאמר ש C_2 עוקבת ל C_1 אם M יכולה לעבור מ C_1 ל C_2 בצעד חישוב יחיד. כלומר C_1,C_2 מהצורה:

$$C_1=\left(q,i,\alpha\right),C_2=\left(p,i',\beta\right)$$

כאשר: $\delta\left(q,\alpha\left[i\right]\right)=\left(p,b,m\right)$ וגם:

$$i'=\begin{cases} i & m=S\\ i+1 & m=R\\ max\left(i-1,1\right) & m=L \end{cases}$$

max בשביל לטפל ב'נפילה' מהסרט

β היא מחרוזת באורך $|\alpha|$ בד"כ, ומקיימת $\beta\left[i\right]=b$,$\beta\left[j\right]=\alpha\left[j\right]$, $i\neq j, j\leq|a|$.

בנוסף (לא הבד"כ) אם I' גדול מ $max\left(|x|\,,T\right)$ (התו הימני ביותר שבקרנו) - אז β יהיה באורך $|a|+1$ ו i' ו $\beta\left[i+1\right]=\flat$.

בעצם הגדרנו מחדש, בצורה מדויקת וקצרה כיצד מתבצע צעד חישוב של M , נסמן זאת כך: $C_1\vdash C_2$

<u>הערה:</u> לכל קונפ' $C=(q,i,\alpha)$ של M שבה $q\notin F$ (כלומר קונפ' שאינה סופית) יש קונפ' עוקבת אחת ויחידה.

<u>הגדרה 3.3 (הפונקציה f_M שמ"ט מחשבת):</u> תהי M מ"ט. ויהיה $x\in\sum^*$ קלט עבורה. נסמן ב $C_x=(q_0,1,x)$ את הקונפ' ההתחלתית של ריצת M על x (במקרה ו $x=\varepsilon$ אז $C_x=(q_0,1,\flat)$) מתואר ע"י סדרת הקונפיגורציות (היחידה) מהצורה:

$$C_x = C_1, C_2, ...$$

כאשר לכל $i > 1$, $C_{i+1} \vdash_M C_i$, $f_M(x)$ תוגדר כך:

$$f_M(x) = \begin{cases} a\,[1, ..., i-1] & \text{A finite sequence with configartion of: } (q, i, \alpha) \\ \perp \text{(undifined)} & \text{else (infinite)} \end{cases}$$

2.0.3 שקילות של מ"ט דו־סרטית למודל הרגיל:

<u>סקיצת הוכחה:</u>

כיון קל בהנתן מ"ט חד־סרטית M, נבנה מ"ט M' שקולה במודל הדו־סרטי. אינטואיטיבית, מ"ט חד־סרטית היא מקרה פרטי של דו־סרטית, והיינו רוצים לקחת $M' = M$.

פורמלית זה לא נכון (למשל לפונקציה δ בשני המודלים יש תחום תחום ותווך שונה, או במילים אחרות במ"ט דו־סרטית וחייבים לציין מה עושים בשני הסרטים). לכן נקח מימוש של M' שבו בסרט ה I נפעל בדיוק כמו M ובסרט ה II לא נעשה כלום.

כלומר לכל שורה $\delta\,(q, a) = (p, \flat, m)$ (ב M) נוסיף ל δ' : $\forall c \in \Gamma\ \delta'\,(q, a, c) = (p, \flat, ☺, m, s)$ ($☺, S$ לא באמת חשוב)

בהנתן מ"ט דו־סרטית M נבנה מ"ט חד סרטית M' . M' תבצע סימולציה צעד־צעד של M , כך שבסוף סימולציה של צעד מסוים הקונפי' של M' "תקביל" לקונפ' של M . נציע פתרון מסוים (כמובן שקיימים פתרונות אחרים שעובדים):

<u>רעיון הפתרון:</u> נרצה לשמור על קונפ' של ריצת M בתור קנופ' של ריצה M' שלנו. בפרט נשמור את תכן הסרטים אחד אחר השני מופרדים ב $\$$ ים (ורק את החלק הרלוונטי שאחריו בוודאות יש $\flat$ים בדומה ליצוג של צעד α בקונפ')

$$\alpha_1 \$_1 \alpha_2 \$_2$$

$\alpha_1 \alpha_2$ - תוכן הסרט הראשון/השני בהתאמה

כיצוד נשמור את מקומי הראשים? יהיה נח לסמן אתם ע"י # ליד התו בתא: לדוגמה

$$\downarrow$$

$$\boxed{a \quad b \quad c \quad \flat \quad \$_2}$$

ייצוג בתור $ab^{\#}c\flat\$_2$.

המצב q יישמור (איכשהו) חלק מהמצב שלנו. כדי לסמלץ צעד חישוב של M נבצע סריקה משמאל לימין. בדרך ימינה (עד ה # השניה) נאסוף את המידע על התווים המוצבעים ע"י הראשים. ובדרך שמאלה נעדכן את הקונפ' (את מקום הראש, את תוכן הסרט בתא המוצבע, ולבסוף את המצב)

- נתחיל מקופנ' שבה:

$$x_1^{\#}, x_2, ..., x_n, \$_1 \flat^{\#} \$_2$$

נדאג לזה , נכתוב שגרה קצרה שהמצב ההתחלתי q_0 שלנו יבצע) נעביר שליטה ל q_0 של M .

- בדרך ימינה נאסוף את התוים ב # ים :

$$q_0 \underset{\text{first I}}{\Rightarrow} q_0^a \underset{\text{first II}}{\Rightarrow} q_0^{a,b}$$

(במעבר ה I $b = \flat, a = x_1$)

- במעבר שמאלה , # ית הראשנה שנתקל בה נעבור מ $q_0^{a,b}$ ל $\tilde{p}^{a,b}$ כאשר ב M

$$\delta(q, a, b) = (p, c, d, m_1, m_2)$$

ונזיז את # בהתאם ל m_2 ונכתוב (בתא עם ה # המקורית) את d . בפעם הבאה שנתקל ב # נעדכן לפי $c_1 m_1$ ונעבור למצב p .

- סקיצה:

$$q : \xrightarrow{\#^a \text{data gathering } \#^b} \underset{\longleftarrow}{\# \text{ update } \#}$$

הערה: אמנם מ"ט דו־סרטית שקולה למ"ט חד־סרטית, אך המודל הדו־סרטי נותן שיפור ביעילות. לדוגמה האלג' שראינו ל $f(x) = xx$ במ"ט רגילה דרש $\Omega\left(n^2\right)$ צעדים. אפשר להראות שזה אופטימלי, ואלו במ"ט ד־סרטית אפשר לחשב את $f(x)$ ב $O(n)$ צעדים.

2.0.4 הפונקציה האוניברסלית ומ"ט אוניברסלית

בקורס הרבה פעמים נרצה להריץ מ"ט על קלט מסויים (כאשר שניהם נתונים כקלט) ולראות מה יצא.

פורמלית הפנוקציונליות שרוצים לחשב כאן היא הפונ' האוניברסלית U המוגדרת כך:

$$U(\langle M \rangle, \langle X \rangle) = \begin{cases} f_M(X) & \text{valid syntax \textbf{and} M stop on x} \\ \perp & \text{else} \end{cases}$$

M - קידוד של מ"ט , X - קידוק של קלט עבור M

מ"ט M מוגדרת נקראת מ"ט אוניברסלית אם $f_M = U$. (בפרט , על קלטים עליהם U אינה מוגדרת, נרצה ש M לא תעצור). קימות מ"ט אוניברסליות.

למה צריך קידודים של M ו x ולא M, x ישירות?

- לגבי החלק M בקלט זה ברור, כי M שביעיה ונרצה לקודד אותה איכשהו בתור מחרוזת, כי מ"ט M_u (אם נצליח לבנות כזו) מקבלת כקלט רק מחרוזות.
- אבל למה צריך לקודד את x ו$f_M(x)$? אלה כבר מחרוזות!

הבעיה היא שלכל מ"ט M בקלט יש $\sum$ משלה, ולכן $x \in \sum^*$ על פני כל הקלטים האפשרים, x שייך לקב' של מחרוזות מעל א"ב אינסופי ואילו ל M_U יש א"ב סופי. כנ"ל לגבי Γ והפלט. לכן M_u תקבל קידוד של הקלט בא"ב שלה $\left(\sum_u\right)$ ותפלוט קידוד של הפלט $\langle f_M(x) \rangle \in \Gamma_U^*$. נקבע בה"כ Γ_u קבוע

$\sum_U = \{0, 1\}$. הקידודים יהיו מספיק פשוטים כדי שהמשתמש ידע לקודד את x "ולפענח" את $\langle f_M(x) \rangle$ מהא"ב שלו לא"ב של M_u בחזרה.

נקבע את הקידוד שנעבוד איתו: (באופן מדוייק: קידוד של מכונה הוא מיפוי ממכונות למחרוזות בינאריות. כנ"ל קידוד של קלט $x\in\sum^*$ הוא מיפוי מ $\sum^*$ למחרוזות בינריות $\sum_u^*$).

הקידוד של $x\in\sum^*$ כלשהו ייקבע כך: בה"כ נתייחס לתוים של $\sum$ בתור המספרים $1,2,..\left|\sum\right|$ לדוגמה נתייחס ל $X=abk$ בתור $1,2,11$. נקודד את $x=x_1,.....,x_n$

תו - תו בפורמט "אונארי" כלומר $x_1,....,x_n$ יקודד כ

$$\overset{x_1}{1..1}0\overset{x_1}{1}0....0\overset{x_n}{1}0$$

מכונת טיורינג M תקודד קח: בשביל להקל על עצמנו נניח

$$M=\left(\underbrace{Q}_{[l]}\underbrace{\sum}_{[n]},\underbrace{\Gamma}_{[m]_{m>n}},\flat=m,q_0=1,F=\{2,3\},\delta\right)$$

נקודד את M ע"י :

$\overset{l}{1}0\overset{n}{1}0\overset{m}{1}0\left\langle\delta\right\rangle$ - קידוד של δ

נקודד את δ בגישה ה'אונארית" גם: בתור רשימת כניסות $\delta\left(q,a\right)=\left(p,b,d\right)$ יקודד בתור :

$$\overset{q}{1}0\overset{a}{1}0\overset{p}{1}0\overset{b}{1}0\overset{d}{1}00$$

$$\overset{q'}{1}0\overset{a'}{1}0\overset{p'}{1}0\overset{b'}{1}0\overset{d'}{1}0$$

$$\vdots$$

סה"כ $\left(l-2\right)\cdot m$ שורות בסדר לקס' של הכניסות, למשל $\left\langle M\right\rangle,\left\langle X\right\rangle$ יהיה שרשור של הקדודים של M ו X .

שאלה: מתי קלט $\left\langle M\right\rangle,\left\langle X\right\rangle$ לא תקין?

- למשל אם $x\in\sum^*$, כלומר יש בו תו שגודלו המספרי חורג מ l .
- דוגמה נוספת כאשר M לא חוקי למשל ב $\left\langle\delta\right\rangle$ חסרות כניסות.

כל אלה (ועוד) אפשר לבדוק ע"י M_u

כיצד נבנה M_U (אכן אפשר!) :

1. על קלט $\left\langle M\right\rangle,\left\langle X\right\rangle$, M_U תבדוק תקינות , ואם נכשל תכנס ללופ אינסופי (לא תעצור).
2. אחרת - תסמלץ את ריצת M על x צעד- צעד, כיצד?

לצורך נוחות נשתמש במ"ט דו-סרטית:

סרט 1 ישמור את הקונפ' הונכחית של x , סרט 2 ישמור את הקידוד של M ו $\langle M\rangle$.

מבנה הקנופ' יהיה דומה למה שראינו בסימולציה של מ"ט דו-סרטת לדוגמה:

$$\overset{\alpha_1}{1}\,\overset{\alpha_2}{1}....*\overset{q}{1}\#\overset{\alpha_n}{1}*$$

כוכביות לציין את מקום הראש

כדי לבצע צעד נחפש מה לעשות ע"י חיפוש של $\overset{q}{1}0\overset{\alpha_n}{1}$ בתוך $\left\langle\delta\right\rangle$ בסרט 2 .

2.0.5 מ"ט לקבלת שפות

מעכשיו והלאה נניח שהמ"ט שלנו היא בעלת שני מצבים סופיים $F=\{q_{acc,}q_{rej}\}$, ו $\sum=\{0,1\}$ אלא אם נאמר אחרת.

נוסיף למ"ט $feature$ של קבלת שפות

<u>הגדרה: 3.4</u> נאמר שמ"ט מקבלת מילה $x\in\sum^{*}$, אם M בריצתה על x עוצרת במצב q_{acc}

<u>הגדרה 3.5 (השפה של מ"ט)</u> בהנתן מ"ט M נגדיר:

$$L(M)=\left\{x\in\sum^{*}|\text{m accept x }\right\}$$

השפה של M

נאמר ש M מכריעה את $L(M)$ אם M תמיד עוצרת על כל קלט).

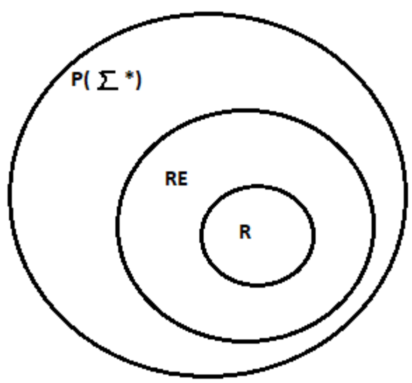
<u>הגדרה 3.6 :</u>

$$R\triangleq\left\{L\in P\left(\sum^{*}\right)|\text{exist Turing machine for L(M)=L }\right\}$$

<u>הגדרה 3.7:</u> קב' כל השפות שנתן לקבל ע"י מ"ט תקרא RE כלומר :

$$RE\triangleq\left\{L\in P\left(\sum^{*}\right)|\text{exist Turing machine M accepted L}\right\}$$

תמונת עולם



- R - שפות סופיות , שפות רגולרית , שפות ח"ה , קשירות בגרפים, פירוק מספרים
- RE - יש דברים - "רב השפות" הן כאן משיקולי עוצמה

2.1 שיעור 4 - חמישי 21/11/19

היום נחקור יותר לעומק את המחלקות R,RE נתחיל בחקר של תכונות סגור

2.1.1 טענה 4.1 : R סגורה למשלים

הוכחה:

תהי $L \in R$. נראה $\sum \in R$ מהגדרת R , קיימת מ"ט M המכריעה את L . נבנה מ"ט M' עבור $\bar{L}$ באופן הבא:

- $M'(x)$ מריצה את M על x ועונה הפוך.
  - כלומר אם M עצרה ב q_{acc} , נעצור ב q_{rej}
  - ואם עצרה ב q_{rej} נעצור ב q_{acc}.

ניתן לעשות זאת בדומה לבניה של מ"ט אוניברסלית שראינו בהרצאה הקודמת. נשים לב שכאן M היא מ"ט קבועה ושם היתה חלק מהקלט M' פשוט את $\langle M\rangle$ (חלק מ δ , בעזרת מצבים, תכתוב את $\langle M\rangle$ לסרט בנוסף ל $\langle x\rangle$ בתחילת החישוב ,ואז תוכל לרוץ בדומה למכונה האוניברסלית).

נשים לב שכאן אפשר גם (פתרון אחר) להפוך בין q_{acc} ל q_{reg} כדי לקבל M' כלומר δ' תוגדר בדיוק כמו δ פרט לכך שכניסות מהצורה $\delta\left(q,a\right)=\left(q_{acc},b,m\right)$ ימופו לכניסות מהצורה $\delta'\left(q,a\right)=\left(q_{rej},b,m\right)$ ובאופן דומה q_{rej} יוחלף ב q_{acc}. אבל בד"כ לא יהיה אפשרי לבצע שינויי פשוט ברמת δ ונסתפק בפתרונות בסגנון המכונה האוניברסלית , שנתאר במילים נשאר להראות ש M'שבנינו (בפתרון הראשון) אכן מכריע את $\bar{L}$.

נבדוק את שני המקרים:

- עבור M: $x\in\bar{L}$ דוחה את x (כי $x\notin L$) . לכן בסימולציה של M על x ע"י M' , M' תעצור, תזהה דחיה ואז תענה הפוך, כלומר q_{acc} - כנדרש
- עבור $\bar{L}$ $x\notin$ $\Leftarrow$ $x\in L$ $\Leftarrow$ M מריצה על x תקבל $\Leftarrow$ M' תסיים את הרצת הסימלוציה של M על x , תזהה קבלה ותענה הפוך, כלומר q_{rej} ,כנדרש . בפרט M' תמיד עוצרת, ולכן מכריעה את $\bar{L}$.

ההוכחה לא תעבוד כדי להוכיח סגירות של RE למשלים, והיום גם נוכיח שאינה סגורה למשלים, הבעיה היא שהיפוך בין q_{acc} ל q_{rej} ב M שמקבלת אבל לא בהכרח מכריעה את L ועבור מילים $x\notin L$ עליהן גם M' לא תעצור עליה, ולא נצליח להפוך את הסטטוס קבלה/ אי קבלה שהלן ו $L\left(M'\right)\neq L(\bar{M})$.

2.1.2 טענה 4.2: R סגורה לאיחוד.

הוכחה:

- יהיו $L_1,L_2\in R$. נרה ש $L_1\cup L_2\in R$ ע"י בניית מ"ט $M_{1,2}$ המכריעה את $L_1\cup L_2$.
- יהיו M_1,M_2 המכירעות את L_1,L_2 בהתאמה :
  1. $M_{1,2}(x)$: מריצה את M_1 על x שומרת את התוצאה במשתנה $out_1=\left\{ true_{q_{acc}},false_{q_{rej}}\right\}$
  2. $M_{1,2}(x)$: מריצה את M_2 על x שומרת את התוצאה במשתנה $out_2=\left\{ true_{q_{acc}},false_{q_{rej}}\right\}$
  3. עוצרת ב q_{acc} אם $out_1\vee out_2=T$, אחרת עוצרת ב q_{rej}
- נראה שM_{12} מכריע את $L_1\cup L_2$

– אם $x\in L_1\cup L_2$: M_1 או M_2 תעצור ותקבל (או שתיהן) $\Leftarrow$ נגיע לשלב 3 וה OR שיחושב יהיה T $\Leftarrow$ M_{12} תקבל, כנדרש $\left(x\in L\left(M_{12}\right)\right)$

– אם $x\notin L_1\cup L_2$ $\Leftarrow$ M_1 ו M_2 יעצרו ב q_{rej} $\Leftarrow$ נגיע לשלב 3 הוא OR שיחושב F $\Leftarrow$ M_{12} תדחה את x ,כנדרש

2.1.3 טענה 4.3 : RE סגורה לאיחוד

<u>הוכחה:</u>

ניסיון I : נבנה M_{12} כמו בהוכחה עבור R . הבעיה כאן היא במקרה ש $x \in L_2 \backslash L_1$. במקרה זה $x \in L_1 \cup L_2$, ולכל המכונה M_{12} צריכה לקבל את x (בפרט לעצור) ו M_{12} שבנינו תתקע בשלב 1 ולא תעצור לעולם.

נסיון II : (עובד) הרעיון הוא להריץ את M_1, M_2 (המכריעות את L_1, L_2 בתאמה ב"מקביל")

כיצד נעשה זאת? נריץ את המכונות על x לסירוגין . בצעד ראשון נריץ צעד 1 של M_1 , בצעד 2 צעד 1 של M_2 , בצעד 3, צעד שני של M_1 וכו'

<u>פורמלית:</u>

1. $M_{12}(x)$ תריץ את M_1, M_2 במקביל על x
2. אם אחת מהן עצרה ב q_{acc} , מיד נעצור ונקבל
3. אם שתיהן עצרו ב q_{rej} , נעצור ונדחה.

נשאר להוכיח את נכונות הבניה. $x \in L(M_1)$ או $x \in L(M_2)$ (מנכונות M_1, M_2)

- אם $x \in L_1 \cup L_2$ לפחות אחת מהמכונות עוצרת על x ב q_{acc} נסמן ב i את הצעד שבו היא עוצרת. מהבניה M_{12} תזהה עצירה זו בסימולציה של הצעד הנ"ל בצעד סימולציה $2i$ לכל היותר. במקרה זה היא גם תעצור ותקבל. גם אם המ"ט השניה עצרה לפני כן, זה לא ישנה את התוצאה ל q_{rej}, כי M_{12} לא עוצרת ב $q-rej$ אלא אם שתי המכונות עצרו ב q_{rej}
- אם $x \notin L_1 \cup L_2 \Leftarrow x \notin L_1 = L(M_1)$ וגם $x \notin L_2 = L(M_2) \Leftarrow$ אף אחת מהמכונות לא תעצור ב $q_{acc} \Leftarrow M_{12}$ לא תעצור ב q_{acc} (אלא תעצור ב q_{rej} אם שתיהן עוצרות או לא תעצור מש"ל

2.1.4 הגדרה: $coRE = \left\{L \subseteq \sum^* \,|\, \bar{L} \in RE\right\}$

הגדרה שקולה:

2.1.5 הגדרה II של $coRE$

נאמר $L \in P\left(\sum^*\right)$ שייכת לקבוצת המילים $CoRE$ אם קיימת מ"ט M שדוחה כל $x \in \bar{L}$, ועבור $x \in L$ מקבלת או לא עוצרת .

שימו לב ש $L(M)$ לא בכרח שווה ל L רק מוכלת ב L ,

2.1.6 טענה 4.6 : הגדרות 4.5 , 4.4 $CoRE$ שקולות

$4.5 \Rightarrow 4.4$:

תהי $L \in CoRE$ לפי הגדרה 4.4, נראה ש $L \in CoRE$ לפי הגדרה 4.5 .

- <u>בניה:</u> תהי M מ"ט המקבלת את $\bar{L}$. נבנה $\bar{M}$ מתאימה עבור L שתספק את הגדרה 4.5 . $\bar{M}(x)$ - תריץ את M על x ותענה הפוך. (אם לא עוצרת אז לא תעצור)
- <u>נכונות:</u>
  - אם $x \in L \Leftarrow x \notin \bar{L}$, ולכן M או תעצור ב q_{rej} או לא תעצור $\Leftarrow \bar{M}$ או תעצור ב q_{acc} או לא תעצור, כנדרש

– אם $x \notin L \Leftarrow x \in \bar{L}$, מהגדרת $RE \Leftarrow M$ בריצתה על x עוצרת ב q_{acc} , מהבניה $\Leftarrow$ ב q_{rej} , כנדרש.

<u>$4.4 \Leftarrow 4.5$:</u>

תהי $L \in CoRE$ לפי הגדרה 4.5 ,נראה ש $L \in CoRE$ לפי הגדרה 4.4 .

- <u>בניה:</u> תהי M מ"ט המובטחת עבור L נבנה מ"ט $\bar{M}$ המקבלת את $\bar{L}$, ונסיק ש $L \in CoRE$ לפי הגדרה 4.4 - $\bar{M}(x)$: מריצה את M על x ועונה הפוך
- <u>נכונות:</u>
  – אם $x \in L \Leftarrow M$ תעצור ב q_{acc} או לא תעצור $\Leftarrow \bar{M}$ תעצור ב q_{rej}או לא תעצור $\Leftarrow x \in\notin L\left(\bar{M}\right)$, כנדרש.
  – אם $x \notin L$, מהגדרת $4.5 \Leftarrow M$ עוצרת ב q_{rej} , מהבניה $\Leftarrow \bar{M}$ עוצרת ב $q_{acc} \Leftarrow x \in L\left(\bar{M}\right)$,כנדרש.

2.1.7 טענה: $R = RE \cap CoRE$

הוכחה: נראה הכלה דו כיוונית.

<u>כיון קל - $R \subseteq RE \cap CoRE$</u>

זה מתקיים כי מ"ט M המכריעה את L ובפרט מקבלת את L ולכן $L \in RE$ וגם מקיימת את הדרישה של הגדרה 4.5 לשייכת ל $CoRE$ (אף פעם לא טועה ומותר לה לא לעצור רק אם $x \in L$ אבל במקרה שלנו היא תמיד תעצור, בפרט עבור כל $x \in \bar{L}$

<u>כיוון מעניין $RE \cap CoRE \subseteq R$</u>

תהי $L \in RE \cap CoRE$. לכן קיימת מ"ט M_1, M_2 .בהתאמה כך ש:

1. כל M תמיד צודקת לגבי שייכות של x ל L במידה ועוצרת
2. אם $x \in L$, M_1עוצרת ב q_{acc}
3. (מהגדרה 4.5) אם $x \notin L$, M_2 עוצרת ב q_{rej}

נבנה M שמכריעה את L באופן הבא:

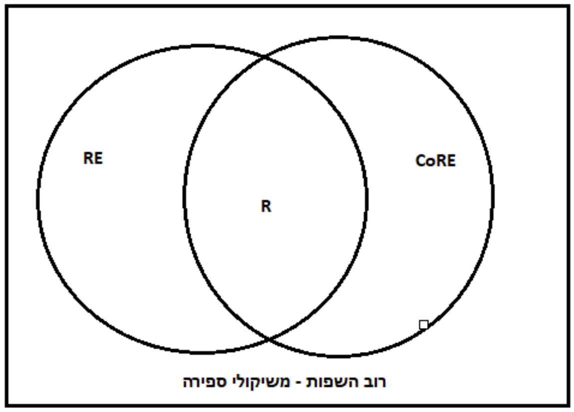
$M(x)$: מריצה את M_1 ו M_2 על x במקביל. (כמו שעשינו בהוכחה ש RE סגורות לאיחוד) ברגע שאחת מהן עצרה מיד עוצרת ועונה כמוה

נכונות הבניה:

אם $x \in L \Leftarrow$ בהכרח , M עוצרת על x ב $q_{acc} \Leftarrow$ יתכן אחד משני מקרים:

1. M_1 היא הראשונה שעצרה בצעד $\geq$ מהצעד שבו M_2 עוצרת אם בכלל) ,אז מהבניה M תעצור ב q_{acc} , כמוה . כנדרש.
2. M_2 עוצרת ראשונה . אבל מתכונה 1 , היא גם תעצור ב q_{acc} ו M תענה כמוה, כנדרש.
3. $x \notin L \Leftarrow$ באופן דומה לטיעון במקרה הקודם, מובטח ש M_2 תעצור ב q_{rej} וגם אם M_1 עוצרת לפניה, היא תעצור ב q_{rej} ו M תעצור ב q_{rej} , כנדרש.

לכן, נוכל לעדכן את מפת העולם:



2.1.8 הגדרה: שפות הלכסון

$$L_D = \{\langle M\rangle \mid \text{M accept } \langle M\rangle\}$$

2.1.9 מוסכמה לברר $Q1$

לשם פשטות, נשנה את הקידוד של מ"ט שראינו בהרצאה 3 , ונחליט שכל מחרוזת מקודדת מ"ט כלשהי:

- אם הקידוד חוקי לפי הפורמט שהגדרנו אז יקודד מ"ט כמו קודם.
- ואם לא יקודד את המכונה M_{stam}:שמיד עוצרת ומקבלת:

$$\forall a\ \delta(q_0) = (q_{acc}, q, s)\,,\ \sum = \{0,1\}\,, \Gamma = \{0,1,\flat\}$$

הקידוד ה"קנוני" שהגדרנו בהרצאה הקודמת.

2.1.10 טענה: $L_D \in RE \backslash R$

הוכחה:

שייכות ל RE - נבנה מ"ט המקבלת את L_D , (אבל לא תכריע אותה)

:$M_D(\langle M\rangle)$

תבדוק "חוקיות" של $\langle M\rangle$. אם לא חוקי מיד תעצור ותקבל (אז $\langle M\rangle$ הוא קידוד של M_{stam} וזו מקבלת הכל, בפרט את $\langle M_{stam}\rangle$)

אחרת, : תריץ את M על $\langle M\rangle$, ותענה כמוה.

נכונות: בבית

אי שייכות ל R **:** נראה ש $\bar{L}_D$ אינה ב RE ומכך נסיק בקלות ש: $L_D \in R$. כיצד נוכיח?

נוכיח באמצעות טעון לכסון.

נתבונן בטבלה הבאה:

$M\setminus\sum^*$	0 $\langle M_1\rangle$	1 $\langle M_2\rangle$	1	0 $\langle M_i\rangle$	$\dots$		$\langle M_j\rangle$	
$\langle M_1\rangle$	$\mathbf{0}$	1	1					
$\langle M_2\rangle^2$	1	$\mathbf{0}$	1	1	0	0	1	$\dots$
			$\_$					
$\langle M_i\rangle$				$\_$		0^1		
$\langle M_j\rangle$					$\_$	$\_$		

1 . כל משבצת מופיע 1 אם M_i מקבלת את $\langle M_j\rangle$ ו 0 אחרת

2. בשורה $\langle M_2\rangle$ ישנו וקטור של 0ים ו1ים כך שה1ים מופיעים במקומות המתאימים למילים ב $L(M_2)$

נתבונן בשפה $\bar{L}_D$ (מופיע מעל השורה הראשונה) - זוהי שורה אינסופית כלשהי של 0ים ו1ים. האבחנה הקריטית היא ששורה זו אינה שווה לאף אחת מהשורות בטבלה שהן רשימת כל השפות ב RE , ואז נסיק שאינה RE .

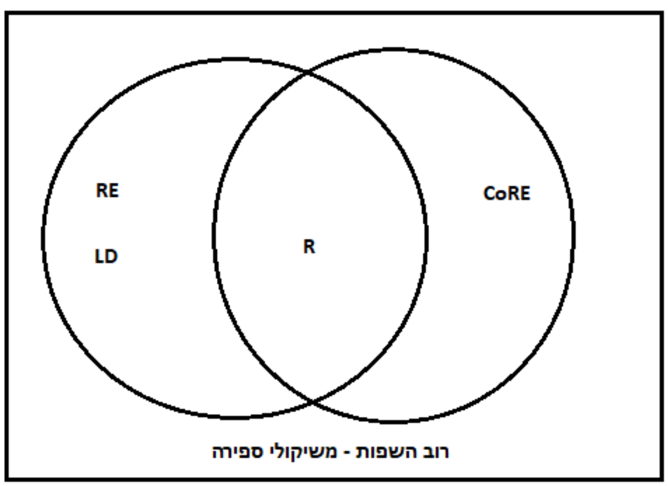
מדוע? עבור השורה של $\langle M_i\rangle$כלשהי, $\bar{L}_D$ שלנו אינה מסכימה עם M_i לגבי הקלט $\langle M_i\rangle$:

- אם M_i מקבלת את $\langle M_i\rangle$, אז $\langle M_i\rangle \in L_D$ (כתוב 1 בכניסה (i,i)) , אבל מהגדרת $\bar{L}_D$, $\langle M_i\rangle \notin \bar{L}_D$
- אם M_i לא מקבלת את $\langle M_i\rangle$, אז $\langle M_i\rangle \in L_D$ וכתוב 1 בשורה של $\bar{L}_D$ לעומת 0 ב (i,i)

$\square$

כעת נראה ש $L_D \notin R$:

נניח בשלילה שכן, אז מסגירות של R למשלים גם $\bar{L}_D$ הייתה ב R ואז היינו מקבלים $\bar{L}_D \in R \subseteq RE$, בסתירה למה שהוכחנו.



2.2 שיעור 5 - 28/11/19

2.2.1 הגדרה: 5.1 השפה האוניברסלית:

$$L_U = \{\langle M\rangle, \langle X\rangle \mid x \text{ מקבלת את } M \text{ קידוד חוקי סינטקטית וגם } \langle M\rangle, \langle X\rangle\}$$

כאשר: $\langle M\rangle$ קידוד של מ"ט, $\langle X\rangle$ קידוד של קלט עבור M

הבעיה יכולה להיות רק ב $\langle X\rangle$: בהתאמה לא"ב של M וכו' (מבחינתנו כל מחרוזת היא קידוד חוקי של מ"ט)

2.2.2 **טענה** 5.2 : $L_u \in RE \backslash R$

<u>הוכחה</u>: **נראה קודם ש** $L_u \in RE$ (סטנדרטי) . נבנה מ"ט M_u המקבלת את L_u

$M_u(y)$:

1. אם y אינה מהווה קידוד חוקי $(\langle M\rangle, \langle X\rangle)$ של זוג מכונה וקלט עבורה, נעצור ונדחה. תקינות סינטקטית כזו, אפשרית לבדיקה (למשל צריך לוודא התאמה בין $\sum$ של M של x וכו'...)

2. נריץ את M על x (בדומה למכונה האונבריסלית שבינינו בהרצאה 3 נבצע סימולציה צעד־צעד)

   אם M קיבלה, נקבל ואם דחתה, נדחה.

<u>נכונות</u>

אם $L_u \ni y = (\langle M\rangle, \langle X\rangle)$: M מקבלת את x (מהבניה) $\Leftarrow L_u$ תזהה שהקלט תקין ב 1 וב 2 הסימולציה תעצור ותזהה קבלה. מהבניה של M_U ,גם M_U תעצור ותקבל

אם $y \notin L_u$ ישנם שלושה מקרים:

1. y אינו קידוד תקין. M_U תזהה זאת בשלב 1 ותדחה $\Leftarrow y \notin L\left(M_U\right)$, כנדרש.

2. M בריצה על x (והקידוד חוקי) דוחה. במקרה זה , M_U תעצור בשלב 2 (בסימולציה), ותזהה דחיה ותדחה גם $\Leftarrow y \notin L\left(M_U\right)$,כנדרש,

3. M לא עוצרת על x (הקידוד חוקי) . M_U בסימולציה בשלב 2 לא תסיים את הסימולציה (על כל צעד של M בריצה על M_U מסמלצת את הצעד, כיוון שיש ∞ צעדים יהיו ∞ צעדי סימולציה), ולא תעצור (על y) $\Leftarrow y \notin L\left(M_U\right)$, כנדרש.

נראה ש $L_u \notin R$

איך? נשתמש בעובדה ש $L_D \notin R$ (הוכחנו בשבוע שעבר): נניח בשלילה ש $L_U \notin R$ נשתמש במכונה המובטחת M_U (שמכריעה את L_U , לפי ההנחה בשלילה) כדי לבנות מ"ט M_D שתכריע את L_D . אבל זו תהיה סתירה כי $L_D \notin R$ ולכן אין מכונה כזו.

כיצד M_D תוגדר?

$M_D\left(\langle M\rangle\right)$:

- נריץ את M_U על הקלט $x = (\langle M\rangle, \langle M\rangle)$ (האם המכונה מקבלת את הקידוד של עצמה) ונענה כמוה (אינטואיטבית , כי M_U יודעת לענות בדיוק על השאלה האם מכונה עוצרת על קלט נתון, ואותנו מעניינת התשובה לגבי המכונה M והקלט $\langle M\rangle$) .

- כיצד נעשה זאת: בדומה למימוש של המכונה האוניברסלית. בפרט, הקידוד של M_u (שמהמכונה האוניברסלית צריכה) יגיע מ δ של M_D .כלומר נרשום את $\underbrace{(\langle M\rangle, \langle M\rangle)}_{input}, \underbrace{\langle M_u\rangle}_{machine}$ בתור קלט לפרוצדורה שתריץ את המכונה האוניברסלית.

  הערה לגבי הקלט: קל לייצר (להכפיל את $\langle M\rangle$ זה אפשרי ב RAM , אפילו ראינו מימוש במ"ט בהרצאה 2)

נשאר להראות שM_Uמכריעה את L_D :

$L_D \ni \langle M\rangle \Leftarrow M$ מקבלת את $\langle M\rangle \Leftarrow$ בסימולציה של M_u על קלט $(\langle M\rangle, \langle M\rangle)$ M_u תקבל ולכן גם M_D תקבל את (את $\langle M\rangle$) $\Leftarrow \langle M\rangle \in L\left(M_D\right)$ כנדרש.

$L_D \not\ni \langle M\rangle \Leftarrow M$ אינה מקבלת את $\langle M\rangle$ (נתעלם מחוקיות קידוד) $\Leftarrow$(מההנחה ש M_U מכריעה את L_U) של M_U דוחה את $(\langle M\rangle, \langle M\rangle) \Leftarrow M_D$ דוחה את $\langle M\rangle$, ובפרט עוצרת על $\langle M\rangle$

כלומר לסיכום, M_D תמיד עוצרת עם התשובה הנכונה לגבי שייכות של $\langle M\rangle$ ל $L_D \Leftarrow M_D$ מכריעה את L_D וזו סתירה. לכן M_U שמכריעה את L_U אינה קיימת, ולכן $L_U \in R$

$\square$

רידוקציות

<u>בעיה A :</u>

על קלט $x\in\mathbb{N}^+$ יש לפלוט מחלק לא טריוויאלי $y\in\mathbb{N}^+$ $(y\neq 1,x)$ קטן ביותר של x , או לפלוט "לא קיים" אם אין כזה (x ראשוני).

<u>בעיה B :</u>

על קלט (x,k) , זו מספרים ב $\mathbb{N}^+$, כאשר $k\leq x$ נפלוט 1 אם קיים לx מחלק לא טריוויאלי $y<'k$, אחרת נפלוט 0.

בשתי הבעיות לא ידוע אלג' יעיל (כזה שרץ בזמן פולינומי בקלט). לדוגמה האלג' הנאיבי שבודק התחלקות בכל y עד לשרש רץ בזמן $\Omega\left(2^{\frac{n}{2}}\right)$. אבל כן ניתן לבנות רידוקציה יעילה מ A ל B ולהיפך.

<u>רידוקציה מ B ל A :</u>

על קלט (x,k) , האלג' M_B^A (פתור את B בעזרת A)

- קורא ל $A(x)$ ומקבל y או לא קיים,
  - אם קיבל לא קיים - יחזיר 0
  - אחרת ישווה את $\frac{x}{y}$ ל k . יחזיר 1 אס"ם $k<\frac{x}{y}$ (יוצא שזה המחלק הכי גדול הלא טריויאלי)

הרדוקציה M_B^A אכן יעילה , מבצעים קריאה אחת ל A + חלוקה של שני מספרים בני n ביטים - $O(n^2)$ פעולות על ביטים. סה"כ יעיל (פולינומי בקלט)

<u>רדוקציה מ A ל B :</u>

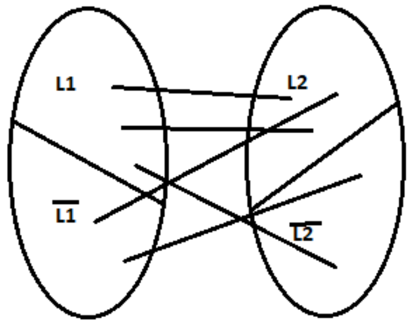
חיפוש בינארי.

1. נקרא ל $B\left(x,k=1\right)$:
   - אם החזיר 0 - נחזיר לא קיים
   - אחרת נאתחל $b=x-1$, $a=2$
2. נעבוד באיטרציות. בכל איטרציה נשאל $B\left(X,\frac{a+b}{2}\right)$
   - אם החזיר 1 , נעדכן את $\frac{a+b}{2}\leftarrow a$,
   - אחרת נעדכן את $\frac{a+b}{2}\rightarrow B$
3. נעצור כאשר $b-a\leq 3$ ואז נחפש ידנית (נבצע חלקות של x ב $a,a+1,...,b$)

ביצענו $O\left(\log x\right)=O(n)$ קריאות ל B + עוד עבודה $O\left(n^2\right)$ בחלוקות. סה"כ הרדקוציה יעילה.

2.2.3 הגדרה פונקציית רידוקציה: בהנתן זוג שפות $L_1,L_2\subseteq\sum^*$ נאמר שפונקציה $f:\sum^*\to\sum^*$ היא פונקציית רידוקציה בין זוג השפות אם היא מקיימת:

1. f מלאה
2. f ניתנת לחישוב (בפרט M_f המחשבת אותה מייד עוצרת)
3. תקפה : $f(x)\in L_2 \iff x\in L_1 \quad \forall x\in\sum^*$,



הערה: אין דרישות נוספות כגון חח"ע מ f :

אם קיימת פונקצית רדוקציה מ L_1 ל L_2 כלומר ש L_1 נתנת לרדוקציה ל L_2 , ונסמן ב $L_1 \le L_2$.

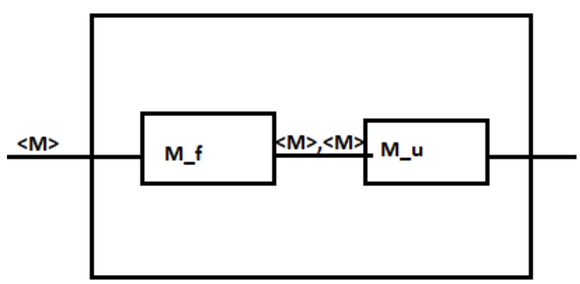
ננסח מחדש את ההוכחה של $L_U \in R$ "על סמך $L_D \in R$ " במונחי פונקציית רידוקציה . בהמשך נכליל את ההוכחה למשפט רדקוציה). בעצם, בלי לומר זאת במפורש, הראינו ש $L_D \le L_U$. מה הייתה פונקציית הרידקוציה?

$$f(\langle M \rangle) \to (\langle M \rangle, \langle M \rangle)$$

נראה שהיא אכן מקיימת את שלושת התכונות של פונק' רדוקציה מ L_D ל L_n)

1. f מלאה (כל מחרוזת נתן לפרש כקידוד של מכונה) בפרט ההגדרה של f לא דורשת אפילו את זה.
2. f נתנת לחישוב - קל לקחת מחרוזת ולשכפל אותה
3. תקפה: $\langle M \rangle \in L_D \Rightarrow \langle M \rangle$ מקבלת את $M \Rightarrow f(\langle M \rangle) = (\langle M \rangle, \langle M \rangle) \in L_U$
   ואם: $\langle M \rangle \notin L_D \Rightarrow \langle M \rangle$ לא מקבלת את $M \Rightarrow f(\langle M \rangle) = (\langle M \rangle, \langle M \rangle) \notin L_U$

מה הוכחה עשתה? בנתה M_D מתוך M_U (דמיונית שהנחנו בשלילה את קיומה) בעזרת f . כיצד? נסמן ב M_f מ"ט המחשבת את f . בנינו את M_D כ:



כיוון ש M_f , וM_u תמיד עוצרות ו M_f תקפה, התשובה של M_u לגבי שייכות $f(\langle M \rangle)$ ל L_u זהה להאם $\langle M \rangle$ שייכת ל L_D

כלומר M_D הזו מכריעה את L_D . וזו סתירה. נפרמל את הטיעון ככה שהבניה של M_D תלך לתוך ההוכחה של משפט רדקוציה שננסח. בעזרת המשפט יהיה מספיק לבנות רק את פונק' הרדוקציה הנדרשת.

2.2.4 משפט הרדוקציה (נוסח ישיר)

יהיו $L_1, L_2 \subseteq \sum^*$ כך ש $L_1 \leq L_2$ אזי:

1. אם $L_2 \in R$ אז $L_1 \in R$
2. אם $L_2 \in RE$ אז $L_1 \in RE$
3. אם $L_2 \in CoRE$ אז $L_1 \in CoRE$

2.3 שיעור 6 - 5/12/19 - יעל סבתו

(חצי שעה ראשונה מקארין)

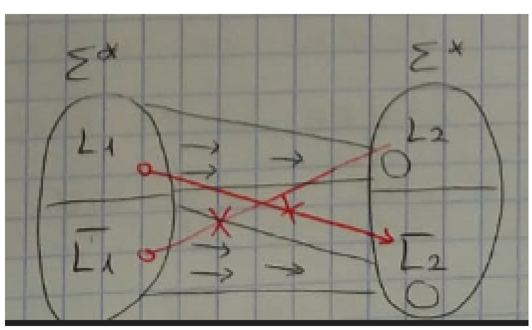
רדוקציות

תזכורות:

- מכונה M שמקבלת שפה L:
  - $\forall x \in L \ M(x) = L$
  - $\forall x \notin L \ M(x) = 0$ או $M(x) =$ לא מוגדר (לולאה)
- מכונה M שמכריעה שפה L :
  - $\forall x \in L \ M(x) = 1$
  - $\forall x \notin L \ M(x) = 0$
- R = קבוצת השפות שקיימת מ"ט **שמכריעה** את L
- RE = קבוצת השפות שקיימת מ"ט **שמקבלת** את L
- $coRE$ = (יודעת **לדחות** אבל לא יודעת לקבל) $\{L|\bar{L} \in RE\}$

הגדרה: יהיו $L_1, L_2 \in \sum^*$ נאמר ש $L_1 \leq L_2$ -במילים: L_1 נתנת **לרידוקציה** ל L_2 - אם קיימת פנו' $f : \sum^* \rightarrow \sum^*$ המקיימת:

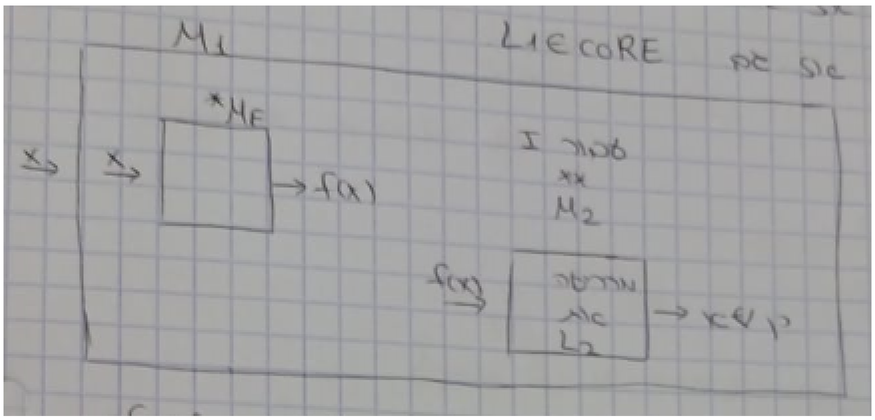
1. f מלאה
2. f ניתנת לחישוב
3. f תקפה: $\forall x \in \sum^* : x \in L_1 \iff f(x) \in L_2$



משפט הרידוקציה: אם $L_1 \leq L_2$ אז:

1. אם $L_2 \overset{*}{\in} R$ אז גם $L_1 \in R$
2. אם $L_2 \overset{**}{\in} RE$ אז גם $L_1 \in RE$
3. אם $L_2 \in CoRE$ אז גם $L_1 \in CoRE$

רעיון ההוכחה:



הערה: בזכות התקפות, התשובה לשאלה אם $x \in L_1$ זהה לתשובה לשאלה אם $f(x) \in L_2$

הוכחה - עבור 1

- נניח ש $L_1 \leq L_2$ וגם $L_2 \in R$ אז קיימת מכונה M_2המכריעה את L_2
- וכן קיימת מ"ט M_f המחשבת את פונ' הרדוקציה בין L_1 ל L_2
- נתאר מכונה מכריעה M_1 עבור L_1
- M_1 על קלט $x \in \sum^*$
  - תריץ את M_f על x ותקבל $f(x)$
  - תריץ את M_2 ותקבל על $f(x)$ ותענה כמוה
- מכיוון שפונ' הרדוקציה מלאה וניתנת לחישוב החישוב של M_1 לא יתקע בשלב 1 ,
- ומכיון שפונ' תקפה התשובה של M_2 על השייכות של $f(x)$ ל L_2 זהה לתשובה הדרושה עבור השייכות של x ל L_1

ניסוח שקול (ושימושי) למשפט הרדוקציה: אם $L_1 \leq L_2$ אז:

- אם $L_1 \notin R$ אז גם $L_2 \notin R$
- אם $L_1 \notin RE$ אז גם $L_2 \notin RE$
- אם $L_1 \notin coRE$ אז גם $L_2 \notin CooRE$

תכונות של רדוקציה

- אם $L_1 \le L_2$ אז גם $\bar{L}_1 \le \bar{L}_2$ - (תוצאה ישירה של תקפות הרידוקציה)
- היחס $\le$ הוא רפלקסיבי: לכל שפה $L \subseteq \sum^*$, $L \le L$ - הוכחה לפי פונ' הזהות.
- היחס $\le$ טרנזיטיבי: אם $L_1 \le L_2$ וגם $L_2 \le L_3$ אז: $L_1 \le L_3$ - הוכחה הרכבת פונקציות
- היחס $\le$ אנטי־סימטרי: אם $L_1 \le L_2$ אז לא בהכרח ש: $L_2 \le L_1$

<u>דוגמה 1</u> :

$L_1 = \sum^*$, $L_2 = HP$ אז $\sum^* \le HP$ כי נגדיר $f(x) = \langle M_{stam}, x\rangle$

נזכר בהגדרה: $HP = \{\langle M, x\rangle \,|\text{M stop on x }\} \in RE \backslash R$

אבל $HP \not\le \sum^*$ לא נכון!

<u>דוגמה 2:</u>

נתונה השפה: $L = \{\langle M\rangle \mid \ |L(M)| \ge 2\}$

- $L \notin R$ ← נראה ברידוקציה
- $L \in RE$ ← רמז צריך הרצה מבוקרת. (מתארים מכונה <u>מקבלת</u> שעושה הרצה מבוקרת על סדור לקסיקוגרפי של $\sum^*$)

נוכיח ש $L \notin R$ ע"י רידוקציה

בדרך כלל ניקח HP, L_U :

- $HP = \{\langle M, x\rangle \,|\text{M halts on x }\}$
- $L_U = \{\langle M, x\rangle \,|\text{M accept x }\}$

אז נראה ש: $HP \le L$ לכן נסמן: $f(\langle M, x\rangle) = \langle M'\rangle$

כך ש M' על קלט $y \in \sum^*$:

1. הרץ את M על x
2. קבל (את y)

<u>f מלאה וניתנת לחישוב</u>: כי ראינו שאפשר לקודד מ"ט למחרוזת

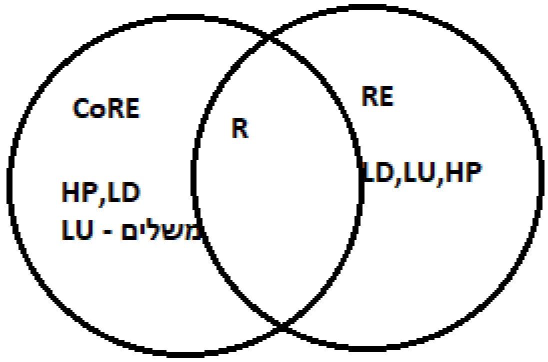
<u>f תקפה:</u>

נראה ש: $x \in L_1 \Rightarrow f(x) \in L_2$ וגם $x \notin L_1 \Rightarrow f(x) \notin L_2$:

- $\langle M, x\rangle \in HP \Rightarrow$ M עוצרת על x $\Rightarrow$ M' מקבלת כל $y \in \sum^*$ $\Rightarrow L(M') = \sum^* \Rightarrow \left|\sum^*\right| = \infty \ge 2 \Rightarrow \langle M'\rangle \in L$
- $\langle M, x\rangle \notin HP \Rightarrow$ M לא עוצרת על x $\Rightarrow$ M' תמיד תכנס ללואה $\Rightarrow L(M) = \phi \Rightarrow |\phi| = 0 < 2 \Rightarrow \langle M'\rangle \notin L$

לסיכום , הראנו $HP \le L$ כעת על פי משפט הרידוקציה מכיוון ש $HP \notin R$ גם $L \notin R$

נזכר במפת עולם:



דוגמה:

נרצה להראות דוגמה לשפה במשלים של $RE \cup CoRE$

מועמדת:

$$L_{=3} = \{\langle M\rangle \mid |L(M)| = 3\} \notin RE \cup coRE$$

בשביל להוכיח נצטרך 2 רדוקציות:

1. $HP \leq L_{=3}$ נקבל $L_{=3} \notin R$, $L_{=3} \notin coRE$
2. $\overline{HP} \leq L_{=3}$ נקבל $L_{=3} \notin RE$

<u>הוכחה 1 : $HP \leq L_{=3}$</u>

נגדיר $f(\langle M, x\rangle) = \langle M^*\rangle$, כך ש M^* על קלט $y \in \sum^*$

1. מריצה את M על x
2. אם $y \in \{0, 1, 01\}$ קבל
   אחרת - דחה.

<u>f מלאה וניתנת לחישוב</u> - כי ראינו שניתן לקודד מ"ט

<u>f תקפה:</u>

- $\langle M, x\rangle \in HP \Leftarrow M$ עוצרת על $x \Leftarrow M^*$ תקבל כל $y \in \{0, 1, 01\} \Leftarrow L(M^*) = \{0, 1, 01\} \Leftarrow |L(M^*)| = 3 \Leftarrow$ $\langle M^*\rangle \in L$
- $\langle M, x\rangle \notin HP \Leftarrow M$ לא עוצרת על $x \Leftarrow M^*$ תמיד תכנס ללואה $\Leftarrow L(M^*) = \phi \Leftarrow |L(M^*)| = 0 \neq 3 \Leftarrow \langle M^*\rangle \notin L$

<u>הוכחה 2 : $\overline{HP} \leq L_{=3}$</u>

נגדיר $f(\langle M, x\rangle) = \left\langle \widetilde{M}\right\rangle$ כך ש: $\tilde{M}$ על קלט $y \in \sum^*$

1. אם $y \in \{0, 1, 01\}$ קבל

2. הרץ את M על x, אם עצרה - קבל

<u>f מלאה וניתנת לחישוב</u> כי ראינו שניתן לקודד מ"ט

<u>f תקפה:</u>

- $\left\langle\tilde{M}\right\rangle \in L_{=3} \Leftarrow \left|L\left(\tilde{M}\right)\right| = 3 \Leftarrow$ (משלב 1)$y \in \{0,1,01\}$ תקבל רק את $\tilde{M} \Leftarrow x$ לא עוצרת על $M \Leftarrow \langle M,x\rangle \in \overline{HP}$
- $\Leftarrow L\left(\tilde{M}\right) = \sum^*$ ובשלב 2 תקבל $y \in \{0,1,01\}$ בשלב 1 תקבל את כל $\tilde{M} \Leftarrow x$ עוצרת על $M \Leftarrow \langle M,x\rangle \notin \overline{HP}$
  $\left\langle\tilde{M}\right\rangle \notin L_{=3} \Leftarrow \left|\sum^*\right| = \infty \neq 3$

<u>דוגמה נוספת להוכחה מהצורה $\overline{HP} \leq L$</u>

נתונה השפה: $L_\infty = \{\langle M\rangle \,|\, |L(M) = \infty|\} \notin RE \cup coRE$

הוכחה ע"י

1. $HP \leq L_\infty$ - בבית
2. $\overline{HP} \leq L_\infty$ - קצת טריקית

<u>$\overline{HP} \leq L_\infty$</u>

נגדיר $f(\langle M,x\rangle) = \langle M_x\rangle$, כך ש M_x על קלט $y \in \sum^*$

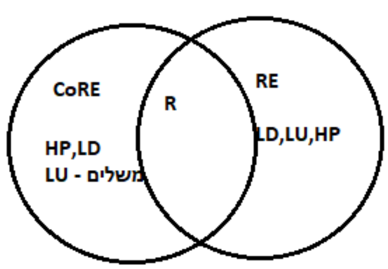
1. הרץ את M על x למשל $|y|$ צעדים
2. אם M לא עצרה - קבל
   אחרת - דחה

<u>f מלאה וניתנת לחישוב...</u>

<u>f תקפה:</u>

- $\langle M_x\rangle \in L_\infty \Leftarrow L(M_x) = \sum^* \Leftarrow x$ לא עוצרת על $M \Leftarrow \langle M,x\rangle \in \overline{HP}$
- $M \Leftarrow \langle M,x\rangle \notin \overline{HP}$ עוצרת על x , אחרי t כלשהו של צעדים, נפצל למקרים:
  - אם $|y| \geq t \Leftarrow M_x$ תדחה
  - אם $|y| < t \Leftarrow M_x$ תקבל
- בכל מקרה, $L(M_x) = \{y | y < t\}$ וזאת שפה סופית! $\Leftarrow \langle M_x\rangle \notin L_\infty$

2.4 שיעור 7



2.4.1 **הגדרה** 7.1 : $L_{eq}=\{\langle M_1\rangle,\langle M_2\rangle\,|L(M_1)=L(M_2)\}$

תזכורת: $L_\infty=\{\langle M\rangle\,|\,|L(M)|=\infty\}$

2.4.2 **טענה** 7.2 : $L_{eq}\notin RE\cup CoRE$

הוכחה: נוכיח באמצעות רדוקציה $L_\infty\le L_{eq}$, שימו לב שכיוון ש $L_\infty\notin RE\cup CoRE$ נתן להוכיח את שני הדברים "בבת אחת" ספציפית מ $L_\infty\le L_{eq}$:

1. $L_{eq}\notin RE$, כי $L_\infty\notin RE$ - משפט הרדוקציה סעיף 2
2. $L_{eq}\notin CoRE$,כי $L_\infty\notin CORE$ - הרצאה קודמת - משפט הרדוקציה סעיף 3

נבנה רדוקציה מתאימה: $f(\langle M\rangle)=(\langle M_1\rangle,\langle M_2\rangle)$

כאשר: $\langle M_2\rangle=\left\langle M_{\sum^*}\right\rangle$ מ"ט שמיד עוצרת ומקבלת כל מילה (מיד מ q_0 הולכת ל q_{acc})

$M_1(y)$: מריצה את M על $\sum^*$ בהרצה מבוקרת. אם בצעד מסויים i של ההרצה המבוקרת התקבלו כבר $|y|$ מילים, נעצור ונקבל את y .

נסביר רגע בדוגמה:

- נגיד ש M מקבלת את 11 (המילה ה 7 בסדר לקסקוגרפי), בצעד ה 328 ,
- את 0 (מילה 2 בסדר הלקס' בצעד 512),
- ועוד ∞ מילים בצעדים יותר מאוחרים.
- אז M_1 על קלט $y=10$ תקבל את y בצעד 512 (כאשר מתקבלת המילה השניה) בציור:

$string\backslash step$	1	2	...					
ε_0						X		X
								...

<u>נחזור לרידוקציה - נכונות:</u>

1. f מלאה - כל מחרוזת ניתן לפרש כקידוד של מכוה (לפי המוסכמה שלנו של M_{stam}), לכן f אכן מוגדרת על כל קלט.
2. f נתנת לחישוב: כדי לחשב את f מבצעים פעולת קומפילציה, בפרט אין צורך להריץ מכונות על קלטים כלשהם. (זה וריאנט של המכונה האוניברסלית, ו M_1 תדאג לרשום לה את $\langle M\rangle$ בתור המכונה שמריצים - את כל זה לא קשה לקודד)
3. תקפות :

- <u>עבור $\langle M\rangle\in L_\infty$:</u> M_1 תקבל כל y , כי M מקבלת ∞ מילים, ולכן בהנתן y מסוים, תקבל $|y|$ מילים תוך מס' סופי של צעדים ברצה מבוקרת
$\Leftarrow$ $L(M_1)=\sum^*$ $\Leftarrow$ $L=L(M_1)=L(M_2)=L\left(\sum^*\right)=\sum^*$, מכאן ש $f(\langle M_1\rangle)=(\langle M_1\rangle,\langle M_2\rangle)\in L_{eq}$ כנדרש.
- <u>עבור $\langle M\rangle\notin L_\infty\Leftarrow M$</u> מקבלת N (מס' סופי של מילים) $\Leftarrow M_1$ תקבל אך ורק את הyים שאורכם $\le N\Leftarrow L(M_1)$ שפה סופית $\Leftarrow L(M_1)\ne L(M_2)=\sum^*\Leftarrow(\langle M_1\rangle,\langle M_2\rangle)\notin L_{eq}$,כנדרש.

$\square$

משפט $Rice$

אינטואיטיבית, משפט $Rice$ אומר שאי אפשר לבנות $debugger$ שבהנתן קוד של תוכנה, בודק תכונה שמושית כלשהי של השפה שלה, לדוגמה:

- האם התוכנה מקבלת את "M" ?
- האם השפה של המכונה (התוכנה הזו) היא סופית? ריקה?

2.4.3 **הגדרה** 7.3 **: תכונה של שפות ב** RE, S **היא תת קבוצה** $S \subseteq RE$ **, נאמר ש** S **טריויאלית אםם** $S \in \{RE, \phi\}$

2.4.4 **משפט** $Rice$ 7.4 **: תהי** S **תכונה של שפות ב** RE **, נגדיר:** $L_S = \{\langle M \rangle \,|L(M) \in S\}$ **אז:**

$$L_S \in R \iff S \text{ טריויאלית}$$

<u>$\Leftarrow$ כיון קל:</u>

- תהי S תכונה טריוויאלית של שפות ב RE . נראה ש $L_S \in R$. ישנן שתי אפשרויות:
  1. $S = RE$ אזי: $L_S = \{\langle M \rangle \,|L(M) \in RE\}$
  אבל, מהגדרת RE , לכל N , $L(M)$ ב RE כי M היא מ"ט המקבלת את $L(M)$. מהמוסכמה שכל מחרוזת היא קידוד של מכונה כלשהי , $L_S = \sum^*$ אכן $\sum^* \in R$ (קל לבנות מ"ט שתקבל אותה).
  2. $S = \phi$ אז $L_S = \{\langle M \rangle \,|L(M) \in \phi\} = \phi$, אכן $\phi \in R$ (קל לבנות מ"ט שתכריע אותה)

<u>$\Rightarrow$ כייון שני:</u>

- תהי S לא טריוויאלית נוכיח ש $L_S \notin R$ באמצעות רדוקציה שתעבוד לא S (נחלק לשני מקרים) - "משפחה" של רדוקציות.

<u>מקרה 1:</u> נניח $\phi \notin S$. נראה $HP \leq L_S$. כיון ש $HP \notin R$, משפט הרדוקציה , $L_S \notin R$

$f(\langle M \rangle, \langle x \rangle) = \langle M_x \rangle$ כאשר:

$M_x(y)$:

1. מריצה את M על x
2. (המקרה בו עברנו את המחסום) תהי $L \in S$ קיימת כזו, כי S לא טריוויאלית, כיון ש $S \subseteq RE$ קיימת לה מ"ט M_L המקבלת אותה נריץ את M_L על y ונענה כמוה

נוכיח נכונות של f :

1. f מלאה - למעשה כמו שהגדרנו אותה אינה מלאה כי לא טיפלנו במקרה $(\langle M \rangle, \langle X \rangle)$לא תקין סינטקטית . אבל תמיד אפשר לטפל בזה ע"י בדיקת סינטס (קל לעשות), ואם לא עובר, פולטים M' קבוע שאינה ב L_s (במקרה הזה M_ϕ כלשהי שמיד דוחה הכל) בהמשך נתעלם מענניני תקינות סינטקטית
2. f ניתנת לחישוב - פעולת קומפילציה
3. תקפות:

- $(\langle M \rangle, \langle x \rangle) \in HP \Leftarrow M$ עוצרת על $x \Leftarrow$ לכל y M_x מגיעה לשלב 2 ועונה כמו $M_L \Leftarrow L(M_x) = L(M_L)$ (מבחירת $L \in S \Leftarrow L(M_x) \in S$ (הגדרת L_S)$\Leftarrow \langle M_x \rangle \in L_s$
- $(\langle M \rangle, \langle x \rangle) \notin HP \Leftarrow M$ לא עוצרת על $x \Leftarrow$ לכל קלט y , M "מתנקעת" בשלב 1 $\Leftarrow$(מהנחה) $L(M_x) = \phi \notin S$ $\Leftarrow \langle M_x \rangle \notin L_S$

כנדרש

מקרה 2: $\phi \in S$. נשים לב ש:

$$L_S = \{\langle M\rangle \,|L(M) \in S\} = \overline{L}_{\overline{s}} = \{\langle M\rangle \,|L(M) \in RE\backslash S\}$$

כי לכל $S \subseteq RE$, M מסוימת , $L(M) \in S$ או $L(M) \in RE\backslash S$

- כעת, $\phi \in S$,אז בהכרח $\phi \notin \bar{S} = RE\backslash S$.
- לכן $L_{\bar{S}}$ אינה ב R בגלל המקרה הקודם.
- בפרט $\bar{S}$ אינה טריוויאלית כי S אינה טריויאלית
- מסגירות של R למשלים, גם $L_S = \overline{L_{\bar{S}}}$ אינה ב R (אחרת גם $L_{\bar{S}}$ הייתה ב R). מש"ל.

□

דוגמאות שימוש:

דוגמה 1 : נגדיר $L_\varepsilon = \{\langle M\rangle \,|\text{M accept } \varepsilon\}$ (מקבלת את ε) , נראה ש $L_\varepsilon \in RE\backslash E$

הוכחה:

- כדי להראות שייכות ל RE , נתן לבנות מ"ט M_ε המקבלת את L_ε שעל קלט $\langle M\rangle$ מריצה את M על ε ועונה כמוה (בפרט אם M לא עוצרת, גם היא לא תעצור).
- כדי להראות $L_\varepsilon \notin R$ נשתמש במשפט $Rice$.
- נגדיר תכונה לא טריויאלית של שפות S כך ש $L_\varepsilon = L_S$ במקרה זה: $S = \{L \in RE|\varepsilon \in L\}$. כדי להשמתש ב $Rice$ צריך להראות ש S לא טריויאלית
  - $S \neq RE$: $\phi \in RE\backslash S$ לדוגמה
  - $S \neq \phi$, למשל : $\sum^*, \{\varepsilon\}, \{\varepsilon, 01101\} \in S$
- לכן מ $Rice$ נסיק ש $L_\varepsilon \notin R$

דוגמה 2 :

נגדיר $L'_\varepsilon = \{\langle M\rangle \,|\text{M doesnt accept } \varepsilon\}$ (לא מקבלת את ε)

האם ניתן להשתמש ב$Rice$ כדי להוכיח שאינה ב R (למעשה היא השפה המשלימה של L_ε ולכן אינה ב R מסגירות למשלים - אבל כאן מעניין אותנו ספציפית $Rice$). אפשר . נגדיר

$$S = \{L \in RE|\varepsilon \notin L\}$$

גם כאן S לא טריוויאלית. (אפשר להפוך סימנים בין הדוגמאות ל L_ε)

דוגמה 3 :

$$L"_\varepsilon = \{\langle M\rangle \,|\text{M reject } \varepsilon\}$$

האם ניתן להשתמש כאן ב $Rice$ כדי להראות ש $L_\varepsilon \notin R$ (זה לכשעצמו נכון נכון)? כאן זה לא אפשרי, כלומר לא קיימת S מתאימה כך ש $L"_\varepsilon = L_S$. אינטואיטיבית $L"_\varepsilon$ בודקת תכונה של M שאינה רק תכונה של $L(M)$. אפשר להראות זה במפורש: נראה זוג מכונות $\langle M_1\rangle, \langle M_2\rangle$ שאחת ב $L"_\varepsilon$ והשניה לא, אבל $L(M_1) = L(M_2)$

$M_1(y)$: מיד עוצרת ודוחה:$L(M_1) = \phi$ וגם $\langle M\rangle \in L_\varepsilon$ (דוחה את ε)

$M_2(y)$: למשל תמיד נכנסת ללואה על q_0 . $L(M_2) = \phi$ כאן $\langle M_1\rangle \notin L"_\varepsilon$ (לא דוחה את ε)

נשים לב ש L'_ε שראינו היא אינה ב RE . $Rice$ נתן לנו חלק מהאבחנה - מוכיח ש L'_ε . כדי להראות ש $L'_\varepsilon \notin RE$, נתן להסתמך על כך ש $L_\varepsilon \notin RE$ (דוקא אבחנה "חיובית")

וכיון ש $L_\varepsilon = \overline{L'_\varepsilon}$, נסיק מידית שלא יתכן $L'_\varepsilon \in RE$, אחרת היה $L'_\varepsilon \in RE \cup CoRE = R$ בסתירה ל $L_\varepsilon \notin RE$ ל $\overline{L_\varepsilon} \in R$ (סגירות R למשלים)

נראה שיטה נוספת להראות ש $L'_\varepsilon \notin RE$.

2.4.5 משפט 7.5 ל RE $Rice$: **תהי S תכונה לא טריוויאלית של שפות ב RE אז אם $\phi \in S$ אז $L_s \notin RE$**

הערה: זה אפיון מלא כמו במקרה של R . ידוע אפיון, אבל לא לא נלמד אותו בקורס.

הוכחה:

- נראה ש $\overline{HP} \le L_S$, ונסיק ש $L_S \notin RE$,כי $\overline{HP} \notin RE$, ברידוקציה
- $f(\langle M\rangle, \langle X\rangle) = \langle M_x\rangle$ כאשר $M_x(y)$:

1. מריצה את M על x
2. תהי $L \in RE \backslash S$ קיימת כזו כי S לא טריוויאלית. תהי M_L מכונה שמקבלת את L. M_xתריץ את M_L על y ותענה כמוה.

<u>נכונות הרדקוציה:</u>

- f מלאה ונתנת לחישוב - פעולת קומפילציה
- תקפות:

– $\underline{(\langle M\rangle, \langle x\rangle) \in \overline{HP}}\Leftarrow$ M לא עוצרת על x $\Leftarrow$ M_x תתקע בשלב 1 (לכל y) $\Leftarrow$(מהנחה) $L(M_x) = \phi \in S$ $\Leftarrow$ $\langle M_x\rangle \in L_S$, כנדרש.

– $(\langle M\rangle, \langle x\rangle) \notin \overline{HP}$ $\Leftarrow$ M עוצרת על $x$$\Leftarrow$ M_x תגיע ל 2 (לכל y) ואז תענה כמו M_2 (בחירת L)$\Leftarrow$ $L(M_x) + L \notin S$ $\Leftarrow$ $\langle M_x\rangle \notin L_S$, כנדרש.

מש"ל

הערה: התנאי במשפט אכן מספיק אבל לא הכרחי. לדוגמה $L_{\sum^*} = \left\{\langle M\rangle | L(M) = \sum^*\right\}$ ($S = \left\{\sum^*\right\}$) היא מהצורה L_S ,אבל S אינה מקיימת ש $\phi \in S$, ועדיין $L_{\sum^*} \notin RE$

2.5 הרצאה 8 ־ 19/12/12 יום חמישי

$Rice$ ־ המשך

בשעור הקודם נסחנו את משפט $Rice$ ל Re , R והוכחנו את שניהם. המשפט עבור R נתן אפיון מלא ל $L_s \in R$ עבור Re המשפט סיפק תנאי מספיק אבל לא הכרחי לאי שייכות ל RE .

מדוע התנאי לא הכרחי (אם $S \in \phi$ ת $L_s \notin RE$)

למשל $L_{\sum^*} \notin RE$, וכי מהצורה $L_{\sum^*} = L_s$,אבל $\phi \notin S$.

מהי S המתאימה כאן? $S = \left\{\sum^*\right\}$, לא מכילה את ϕ .

בשעור הקדם ראינו הוכחה לכך ש $L'_\varepsilon = \{\langle M\rangle \text{ M not accept } \varepsilon\}$ ־ היא ב RE , ע"י שימוש ב $Rice$ ל R + אבחנה ש $\overline{L_\varepsilon}$ ב RE . $Rice$ עבור RE מאפשר להוכיח זאת ישרות .

- $L'_\varepsilon = \{\langle M\rangle | \varepsilon \notin L(M)\}$ כלומר $L'_\varepsilon = L_S$ כאשר $S = \{L \in RE | \varepsilon \notin L\}$. בפרט $\phi \notin S$. S לא טריואילי:
  - $S \neq RE$: למשל $\{\varepsilon\}, \left\{0, \varepsilon, 1^{100}\right\} \in RE \backslash S$
  - $S \neq \phi$: למשל $\phi, \{1, 100\} \in S \cap RE$

נראה מספר דוגמאות ש $Rice$ לא שמושי:

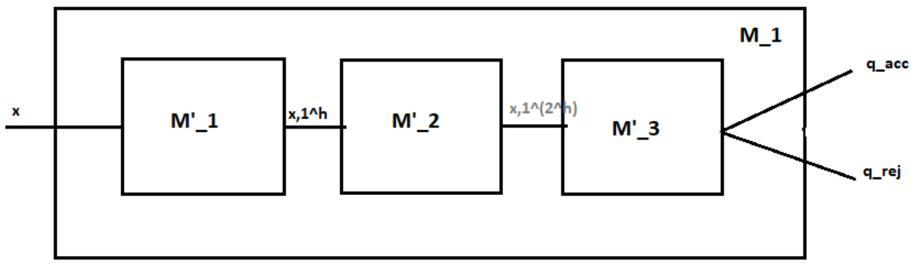
- $L_u = \{\langle M\rangle, \langle X\rangle \text{ M accept x}\}$ ־ לא ניתן להשתמש ב $Rice$ כדי להראות אי שייכות ל R , כי זו שפה של קדודי נכונות + דקדוק קלט ובכלל לא קדודי מכונות.
- $L = \{\langle M_1\rangle \langle M_2\rangle \neq L(M_1) \neq L(M_2)\}$ גם כאן $Rice$ לא מתאים, כי מדובר בזוג קידודים של מכונה.
- דוגמה מעניינת : נזכיר $L_D = \{\langle M\rangle | \text{M accept } \langle M\rangle\}$, ידוע ש $L_D \notin R$ (מלכסון ־ שפה השונה שראינו שאינה ב R) .האם אפשר להשתמש ב $Rice$ כדי להראת ש $L_D \notin R$?

  לא, כי L_D מגדרה תכונה של מכונות שהיא מעבר לשפה שלהן. כיצד נראה זאת?

  נראה זוג מכונות $\langle M_1\rangle, \langle M_2\rangle$ כך ש $L(M_1) = L(M_2)$ אבל $\langle M_1\rangle \in L_D$ ו $\langle M_2\rangle \notin L_D$ זה יוכיח לנו שאכן L_D מגדירה תכונה של שפה של מכונה.

  רעיון הבניה:

  1. נדאג ש:
     - $L(M_1) = L(M_2) = L$
     - $\langle M_1\rangle \notin L$ ($\langle M_1\rangle \in L_D$)
     - $\langle M_2\rangle \notin L$ (M_2 לא מקבלת את $\langle M_2\rangle \Leftarrow \langle M_2\rangle \notin L_D$)
  2. למעשה נדאג ש L תהיה שפה של מ"ט בעלת $K \geq$ מצבים עבור K מספר כלשהו (די גדול)
     - נניח שהצלחנו לבנות M_1 , כך ש $L(M_1) \in L$ ו $\langle M_1\rangle \in L$ (תכיף נראה איך). אז נוכל לבנות M_2 מתאימה באופן הבא:
     - נוסיף ל M_2 $K+2$ מצבים שאינם ישיגים מ q_0 אז מס' המצבים של M_2יהיה $K <$ אבל השפה שלה היא כמו השפה של M_1 בפרט $\langle M_2\rangle \notin L$
     - נשאר למצוא K מתאים ולבנות M_1 מתאימה. כיצד נבנהM_1 כזו?
     - הקשוי הוא לדאוג ש M_1 עצמה היו לכל היותר K מצבים. נציע בניה ל M_1 : M_1 תורכב מ 3 מכונות, כך:



- M'_1 : בכמה מצבים ניתן עשות את M'_1 ? ב $h+2$ מצבים: h מצבים כתיבת $1\cdot h$ ים , 2 להגיע לסוף x ולרשום "1"
- M'_2 : דורש מס' קבוע מסוים a_2 של מצבים (a_2 לא תלוי ב h) המכונה מקבלת $x,1^y$ ומחזירה $x,1^{2^y}$
- M'_3 : על קלט $x,1^z$ מקבלת אם"ם x הוא קידוד $\langle M\rangle$ של מ"ט M בעלת $\le z$ מצבים. ניתן לממש ב a_3 מצבים, גם a_3 לא תלוי ב h
- מה מספר המצבים של M_1 (כפונקציה של h) ?

$$h+2+a_2+a_3$$

מהי $L(M_1)$? $\left\{\langle M\rangle \,|\text{M has} \le 2^h \text{ states }\right\}$

כדי ש $\langle M_1\rangle$תהיה ב $L(M_1)$, נקבע את h להיות מספיק גדול כך ש: $h+2+a_2+a_3$ (כי 2^h גדל הרבה יותר מהר מ h) לדוגמה אם: $a_2=a_3=200$,

נדאג ש: $402 \le 2^h-h \Leftarrow h=9$ (או יותר) כבר עובד ואז $k=2^9=512$, מש"ל

מכונת טיורינג אי־דטרמיניסטית

2.5.1 מכונת טיורינג אי־דטרמינסטית תוגדר כמו מ"ט דטרמניסטית, אלא ש δ תאפשר בכל צעד בדיוק שתי בחירות במקום בחירה אחת. כלומר:

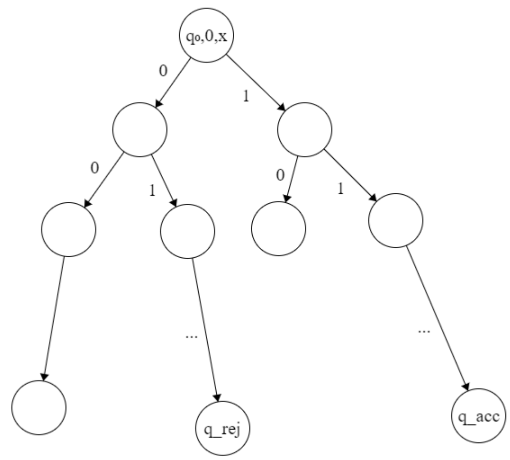
$$\delta:(Q\backslash F)\times\Gamma\to\left(Q\times\Gamma\times\{L,S,R\}\right)^2$$

מ"ט א"ד מגדירה על קלט x עץ חישוב במקום מסלול חישוב:

כיצד נגדיר את $L(M)$ למ"ט א"ד ?

2.5.2 הגדרה 8.2 : נאמר ש מ"ט א"ד M מקבלת מילה x $\iff$ קיים מסלול בעץ החישוב של M על x בו M עוצרת ב q_{acc} (יתכנו מסלולים אחרים בהם היא עוצרת ב q_{rej} או לא עוצרת)

כמו קודם , נגדיר $L(M)=\left\{x\in\sum^* \,|\text{M accept x }\right\}$



<u>הערות:</u>

1. החישוב של M על x תמיד מתנהל לפי סדרת בחירות כלשהן בδ (שמותרות) המגדירה מסלול חישוב בעץ. בפרט , בכלל לא מובטח שנגיע למסלול מקבל דוקא: לכן להריץ מ"ט א"ד לא ייתן לנו בהכרח את התשובה הנכונה.

   בפרט הריצה יכול לא לעצור אפילו עבור $x \in L$, אם היינו מממשים בחירה δ ע"י הטלות מטבע, עבור $x \in L$ מובטח רק שההסתברות לקבל היא לא 0

2. המודל כאן קצת שונה מהגישה באוטומטים ששם δ יכלה לפלוט קב' סופית כלשהי של מהלכים, בפרט ϕ כאן הקבוצה היא בדיוק בגודל 2 . זה בלי הגבלת הכלליות.

נגדיר את RE_{ND} - כקבוצת השפות שקיימת מ"ט א"ד המקבלת את L = $\{L|\text{Exist non-detemenstic turing machine accpet L}\}$

נראה שאי־דטרמינזם בעצם לא מוסיף כח בהקשר של חשוביות

2.5.3 $RE = RE_{ND}$

הוכחה (סקיצה) - הכלה דו־כיוונית

<u>כיון קל - $RE \subseteq RE_{ND}$:</u>

- תהי M דטרמינסטית, נבנה M' א"ד המקבלת את אותה שפה ע"י "שכפול של δ
- כלומר , לכל $\delta(q,a) = (p,b,m)$ נגדיר $\delta'(q,a) = ((p,b,m),(q,b,m))$
- לא קשה להראות ש $L(M') = L(M)$ (עץ החישוב של δ יורכב משכפולים של מסלול החישוב של M)
- אופציה אחרת: $\delta'(q,a) = \left((p,b,m),\left(q_{a_j},b,m\right)\right)$ - שומרים על המסלול המקורי, ומוסיף הרבה מסלולים שנתקעים

<u>כיון שני - $RE_{ND} \subseteq RE$:</u>

<u>נסיון I :</u> תהי M מ"ט א"ד .נבנה M' דטר' שקולה באופן הבא: $M'(x)$ תבצע DFS על עץ החישוב של M על x (תפתח את עץ־הקונפיגרוציות) אם זיהתה 'קבל' תקבל מייד.

זה לא עובד, כי ייתכן שנתקע במסלול אינסופי לפני שנגיע ל q_{acc} .

<u>נסיון II:</u> נסרוק את עץ החישוב של M על x ב BFS . בצעד ה i נפתח את רישות המסלולים עד אורך i . אם נזהה קבלה, נקבל.

המשפט שהוכחנו יכול להקל על הוכחות ששפה מסוימת L כן ב RE ולהחליף הרצה מבוקרת. לדוגמה: נתבונן ב L מהצורה:

$L = \{ M \mid\mid |x_1| < |x_2| < |x_3|$ קיימת 3 מילים x_1, x_2, x_3 ש M מקבלת את x_1, x_2 ודוחה את x_2 וגם $\}$

$L \in RE$ נתן להוכיח זאת ע"י בניית מ"ט שמבצעת הרצה מבוקרת, אבל גם להוכיח ע"י בניית מ"ט א"ד מתאימה.

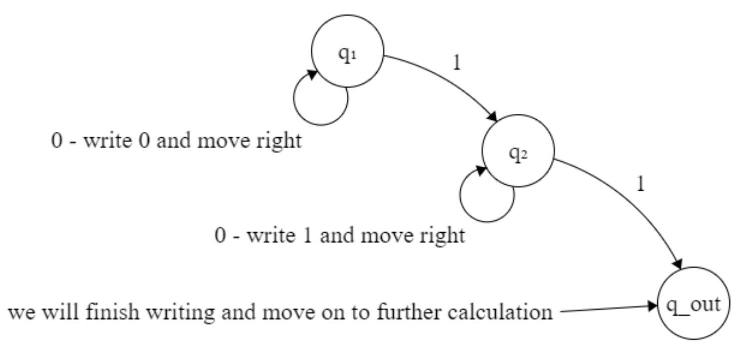
$M_L(\langle M \rangle)$:

1. תנחש מילים x_1, x_2, x_3
2. אם $|x_1| < |x_2| < |x_3|$ תריץ את M על $x_1, x_2, x3$ סדרתית.
   - אם M קבלת את x_1, x_3 ודחתה את x_2 נקבל
   - (אחרת, או נתקע אם M נתקעת על אחד הקלטים).

כעת נבהיר מהו הניחוש וכיצד ממשים אותו. נוכיח ראשית נכונות:

- אם $\langle M \rangle \in L$: קיימים x_1, x_2, x_3 מתאימים $\Leftarrow$ קיים ניחוש שמנחש את x_1, x_2, x_3 $\Leftarrow$ במסלול שבו מנחשים אותו M בהכרח תקבל $\Leftarrow$ קיים מסלול מקבל $\Leftarrow$ $\langle M \rangle \in L(M)$, כנדרש.
- אם $\langle M \rangle \notin L$: לא קיימים x_1, x_2, x_3 כנדרש $\Leftarrow$ לכל ניחוש x_1, x_2, x_3 לא נקבל (נדחה או נתקע)

כיצד נממש את תהליך הניחוש? (זה תמיד יעבוד), ננחש מחרוזת ש $0,1$ ים ובסוף נפרסר אותה בתור $x_1 \underbrace{,} x_2 \underbrace{,} x_3$ (אם יתאפשר , ויצאה לנו מחרוזת חוקית, אחרת מיד נדחה). בכל צעד נרצה להוסיף ביט $0/1$ או לעצור (סיימנו לכתוב את המחרוזות) , כלומר יש 3 אפשרויות אבל δ מרשה רק 2 . נממש ע"י שני מצבים (שגרת ניחוש):



חלק 2 - סבוכיות

2.5.4 תהי M מ"ט דטרמניסטית. נגדיר את פונ' זמן הריצה שלה, tm $tm : \sum^* \to \mathbb{N}$ - פונקציה חלקית מוגדרת כך:

- $tm(x)$ - מס' הצעדים ש tm מבצעת בריצה על x אם עוצרת
- אחרת - לא מוגדר

2.5.5 נאמר שפונקציה מלאה $t(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ היא חסם על זמן הריצה של M אם לכל $x \in \sum^*$ מתקיים ש$tm(x) \leq t(|x|)$

2.5.6 נאמר ש M (מ"ט דטר') היא יעילה או פולינומית אם קיים עבורה חסם זמן ריצה $p(n)$ שהוא פולינום (בה"כ נתן להניח ש $p(n) = c \cdot n^d$) c, d* קבועים

כלומר החלטנו להגדיר שמכונה היא יעילה אם היא רצה בזמן פולינומית, האם ההגדרה הזו מתאימה למציאות?

- כן במובן של אלג'בעולם האמיתי , שנחשב ליעיל רץ בזמן פולונימי. בכיון השני לא בהכרח. למשל סבוכיות $2^{2^{2^{30}}} \cdot n^{100}$ לא שמושי אפילו לקלטים באורך 1 לעומת זאת $\left\lceil \frac{2^n}{2^{2^{2^{100}}}} \right\rceil$ או $n^{\log\log\log\log(n)}$ - לא יעיל מבחינת ההגדרה, אבל שניהם פרקטיים.

2.5.7 הגדרה: $P=\{\,L\mid$ **קיימת מ"ט דטרמיסטית יעילה המכריעה את** $L\,\}$

$POLY=\{\,f\mid$ קיימת מ"ט דטר' יעילה המחשבת את $f\,\}$

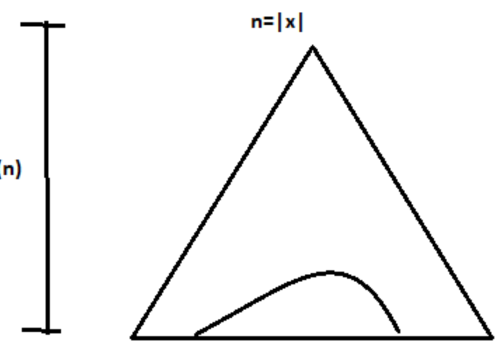
כעת נגדיר מ"ט א"ד יעילות

2.5.8 תהי M מ"ט א"ד נאמר ש $tm(x)$ היא פונק' זמן הריצה של M

נגדיר את הפונקציה $tm(x)$:

- אם M עוצרת על x בכל מסלול $\Leftarrow$ זה המקס' על פני כל המסלולים של מס' צעדים הריצה של M על x
- אחרת $\Leftarrow$ לא מוגדר

בדומה למ"ט דטר' חסם זמן ריצה $t(n)$ מוגדר כמו קודם. נאמר כמו קודם ש M א"ד יעילה אם קיים עבורה חסן זמן ריצה שהוא פולינומי



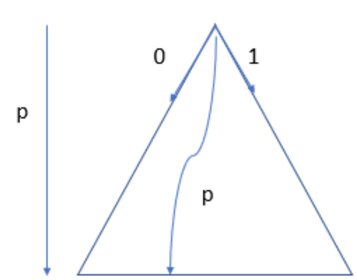
נגדיר את מחלק השפות שקיימות להן מ"ט א"ד יעילה

2.5.9 NP **=** $\{$ **קבוצת השפות שקיימת מ"ט א"ד יעילה המקבלת את** $L\mid L\}$

2.6 שיעור 9 - 26/12/19

2.6.1 9.1 **: אכן** $P\subseteq NP$ **, כיצד נוכיח?**

בהנתן שפה L עם מ"ט M_L פולינומית המכריע אותה, נבנה מ"ט א" M' פולינומית המקבלת את אותה השפה: אפשר למשל "להכפיל" את δ . כלומר לכל כניסה $\delta\left(q,a\right)=\left(p,b,m\right)$ נגדיר $\delta'\left(q,a\right)=\left(\left(p,b,m\right),\left(p,b,m\right)\right)$

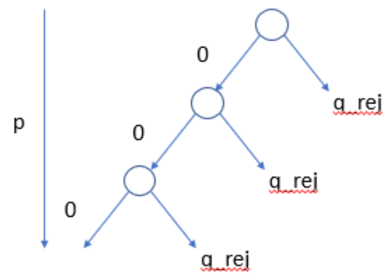


נקבל שנכונות:

- עבור $x \in L$, M' תקבל בכל המסלולים (בפרט קיום מסלול מקבל)
- עבור $x \notin L$, M' תדחה בכל המסלולים, כנדרש.

בנוסף M' אכן יעילה עם חסם זמן ריצה זהה לזה של M

אלנטרנטיבית, אפשר היה גם להגדיר $\delta(q,a) = (p,b,m),(q_{rej},b,s)$

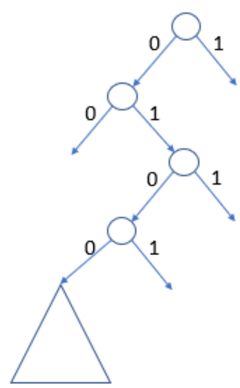


2.6.2 **טענה:** 9.2 - $NP \subseteq R$

הוכחה: תהי $L \in NP$. תהי M_L מ"ט א"ד פולינומית המקבלת אותה. נבנה מ"ט דטר' M המכריעה את L .

נסרוק את עץ החישוב של M_L על x - למשל ב DFS (BFS) , אם מצאנו מסלל מקבל אז נקבל, אחרת נדחה. , מדוע זה עובד?

כל מסלול ב M_L הוא סופי אפילו (חסום ב $p(|x|)$ עבור פולינום p מסוים), לכן אין סכנה להתקע.



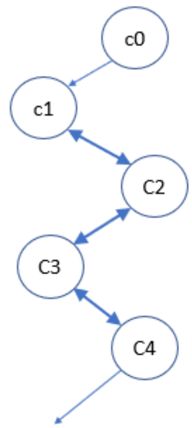
נפרט לגבי מימוש הסריקה: נשמור את רישת המסלול שאיתו עובדת כרגע:

בכל צעד נבחר האם מוסיפים 0 או 1 למסלול ולפי אלג' הסריקה של DFS על כל צעד מחשבים את הקונפיגוצריה הנוכחית (העוקבת של הקונפ' הנוכחית ששמרנו קודם).

כיצד נעדכן קונפ' ?

בדומה למ"ט אוניברסלית - לפי δ כדי לחזור אחורה נחזור לקונפ' האחרונה ששמרנו במסלול (עד כה).

כדי לחזור אחורה נחזור לקונפ' , נמחק את C_4 רק כאשר נחזור ל C_3



הדגמה חזרה אחורה.

הערה: הסימולציה הזו אינה לוקחת זמן פולינומי באופן כללי, כי אנחנו עוברים על כל עץ החישוב של M_2 על x ,במקרה הגרוע, ויש לו (במקרה הגרוע) $2^{P(n)}$ עלים. האלג' שבנינו רץ בזמן אקספוננציאלי.

2.6.3 הגדרה 9.3 : נאמר ש $R \subseteq \sum^* \times \sum^*$ הוא יחס NP אם הוא מקיים :

1. R חסום פולינומית. קיים פולינום $p(n)$ כך ש $(x,y) \in R \Leftarrow |y| \leq p(|x|)$
2. קיימת מ"ט (דטר') פולינומית המכריעה את השפה:

$$\widetilde{L}_R = \left\{(x,y) \in \sum^* \times \sum^* \mid (x,y) \in R\right\}$$

דוגמה ל1 : היחס $\left(x, x11x^2\right)$ או $\left(x, x11x^3\right)$ - הוא יחס חסום פולינומית עם חסם $P(n) = 4n+4$ (שימו לב שהעלאה בשלישית מכפילה אורך פי 3 לא בשלישית)

דוגמה ל2: היחס שראינו בסעיף הוא גם נתן לזיהוי פולינומי (x^2 או x^3 נתן לחישוב יעיל ע"י אלג' כפל ארוך של כיתה ג' - כשמתארים אלגוריתם מספיק לתאר אלג' למודל REM כי האקסטרה חישוב במעבר למ"ט הוא פולינומי).

עבור יחס NP , R נגדיר את השפה L_R :

$$L_R = \left\{x \in \sum^* \mid \exists y \; R(x,y) = T\right\}$$

נגדיר :

$$NP = \{L \mid \text{קיים יחס } NP \text{ - } R, \text{ כך ש } L = L_R\}$$

מה האינטואיציה בהגדרה ? השפה L היא "קצת קלה" במובן שקיים רמז קצר לשייכות לL שגם ניתן לבדוק ביעילות. ואם $x \notin L$ אז אף רמז לא ישכנע את הבודק.

למשל העיסוק במתמטיקה הוא "שפה ב NP " במובן מסוים. נפרמל:

השפה :

$$nice-true-theorems = \{x \mid \left|x^5\right| \geq \text{ משפט במתמטיקה שהוא נכון וקיימת לו הוכחה באורך } \}$$

x^5 שרירותי - בגדול נרצה הוכחות קצרות אחרת אף אחד לא יכול /ירצה לוודא אותן (כולל מחשב)

אז מהו יחס NP המתאים לשפה $nice-true-theorems$?

$$R\left(x,y\right)$$

כאשר x - משפט. y - הוכחה באורך $\left|x^5\right|$ למשפט - (כאן $p(n)=n^5$)

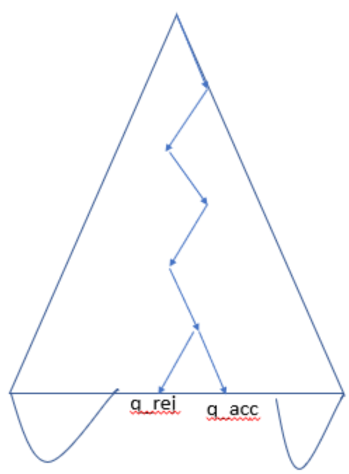
נוכיח שקילות של שתי הגדרות ל NP .

2.6.4 משפט 9.4 : הגדרות 9.3 ו 8.9 לNP שקילות

הוכחה: נראה הכלה דו־כיוונית (של המחלקות הרלוונטיות

כיון 1 : תהי $L\in NP$ לפי הגדרה 8.9

- תהיה M מ"ט א"ד המקבלת את L בזמן החסום ע"י פולינום pm . נבנה יחס־NP R כך ש $L=L_R$
- $R(x,y)$ (אם $(x,y)\in R$ נקרא ל y "עד" (לשייכות x ל L_R)) y: הוא מסלול בעץ החישוב של M על xהמסתיים ב q_{acc} לדוגמה $y=1101101$ - מגדיר רצף בחירות של δ - מתוך 0 או 1) עד לשייכות x לשפה עבור הדוגמה להלן, אבל 110110 או 1101100



- ראשית נבדוק שאכן $L=L_R$:
  - $x\in L$: M מקבלת את x $\Leftarrow$ קיים מסלול y ב M המקבל את x $\Leftarrow$ (מהגדרת y - y המתאים למלסלול זה) קיים y כך ש $R\left(x,y\right)$
  - $x\notin L$: לא קיים מסלטל מקבל ב M $\Leftarrow$ כל y יקיים $R\left(x,y\right)\notin$ $(x,y)\notin R$
- נשאר לוודא ש R הוא אכן יחס NP :

1. חסום פולינומית: מהגדרת R , $(x,y)\in R$ $\Leftarrow$ $|y|\le p\left(|x|\right)$, החסם על זמן הריצה של M בכל מסלול
2. נתן לזיהי פולינומי בהנתן (x,y) , נסמלץ את ריצת M על x על המסלול המוגדר ע"י y .

- נפרט קצת מדוע החישוב אכן פולינומי - נקבל אם"ם המסלול y מסתיים ב q_{cc} :

- הסימולציה מתבצעת בדומה למ"ט אוניברסלית. בכל מקרה, אורך המסלול שבודקים הוא $\min\left(\left(\left|y\right|,p\left(\left|x\right|\right)\right)\right) \leq \left|y\right|+p\left(\left|x\right|\right)$
- במהלך ההרצה נשמור קונ' הנוכחית ונעדכן בכל פעם (תוכן סרט + מקום ומצב) , זמן החישוב:

$$\underbrace{\#\text{Calculation steps}}_{\leq|y|+p(|x|)} \times \underbrace{\text{Next configuration's calculation time}}_{O(|x|+p(|x|)+y)*}$$

$*$ הסבר: בערך לינארי אורך הקונפ' , אורכה $O(..)$ כי בכל צעד חישוב הסרט גדל ב1 לכל היותר

- כלומר סה"כ מספר צעדים פולינומי בקלט $|(x,y)|$.

כיון שני: תהי L שפה ב NP לפי הגדרה 9.3 נראה $L\in NP$ לפי הגדרה 8.9

- יהי R יחס NP מתאים עבור L, ויהי $P\left(x\right))$ החסם מ1 ו $q(n)$ חסם זמן ריצה הריצה של אלג' המזהה את $\tilde{L}_R$ (מהגדרה $1,2$ שניהם פולינומים).
- נבנה מ"ט א"ד פולינומית עבור L :

בניה:

- $M(x)$: בגדול M תנחש את y , ותבדוק אם אכן $R(x,y)=True$
- נפרט:

1. M תחשב את $P\left(|x|\right)$
2. תהליך הניחוש: תקצה קטע : $\underbrace{*\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_*}_{p(|x|)}$

תעבור לתחילתו ותנחש מחרוזת של 0ים ו1ים שמסתיימת לכל היותר לפני ה $*$ השניה. (כלומר כל עוד לא הגענו ל $*$ "ננחש" ביט חדש b ונשרשר אותו, או שנעצור כאן. בכל מקרה כשעוצרים y הוא:

$$\underbrace{*\_\_\_\_\_\_\_\_|\downarrow....*}_{y}$$

3. תבדוק האם $R\left(x,y\right)=T$, ותקבל אם כן, אחרת תדחה.

נכונות:

1. יורכב משלושה שלבים:

(א) נמיר מ $|x|$ בעצם נתון באונארי, לבינארי. יקח בערך $O\left(|x|\log|x|\right)$ פעולות. (מעדכנים מונה באורך $\log|x|$) , נסמן את המונה ב Cnt .

(ב) חשוב הפולינום $p\left(Cnt\right)=Cnt^d\cdot c$ - פולינומי באורך המונה השוטף שהוא $d\left(\log|x|\right)$ בכל רגע עושים $d-1$ הכפלות כופל בקבוע. סה"כ $poly\left(\log|x|\right)$

(ג) חלק מ2 - נקצה את השטח $*\_\_\_\_\_\_\_\_*$ שלמעשה דורש תרגום מבינארי חזרה לאונארי של $Cnt=p\left(|x|\right)$ בערך $p\left(|x|\right)\cdot poly\left(\log|x|\right)$. פעולות (ונוריד 1 מהמונה על כל תא שנקצה עד שנגיע ל 0)

2. הסברנו
3. לוקח זמן :

עבור הy שחישבנו:

$$q\left(|x|+\underbrace{|y|}_{\leq p(|x|)}\right)\approx O\left(q\left(\underbrace{p\,|x|}_{\text{A polynomal too}}\right)\right)$$

הסכום עדיין פולינומי

<u>נשאר להראות נכונות:</u>

- $x\in L$ קיים y כך ש $R\left(x,y\right) \Leftarrow$ כיון ש M מ אפשרת לנחש כל y שארוכו $\geq P\left(|x|\right)$, בפרט יהיה קיים מסלול (אפילו הרבה־ בכלל השלבים הדטרמינסטים בחישוב אם נממש על ידי הכפלה) שבו M תנחש את ה y המתאים (אורכו $\geq p\left(|x|\right)$) כי $p\left(n\right)$ חסם הנובע מכך שR חסום פולינומית שקבענו) $\Leftarrow$ מקבלת את $x \Leftarrow x\in L\left(M\right)$
- $x\in L \Leftarrow$ לא קיים y מתאים $\Leftarrow$ (בניית M) M תדחה בכל המסלולים

$\square$

<u>דוגמאות לשפות ב NP</u>

דוגמה :

$$factory=\{(x,k)\,|y\neq 1 \text{ וכן } k\leq y<x \text{ המקיים } x \text{ של } y \text{ קיים מחלק } x,k\in\mathbb{N}^{+}\}$$

נראה ש $factory\in NP$. שימו לב ש $factoring$ הוא לא בדיוק המשלים של $Prime=\{x|\text{ x is prime }\}$

2.7 שיעור 10

$$factory=\{(x,k)\,|y\neq 1 \text{ וכן } k\leq y<x \text{ המקיים } x \text{ של } y \text{ קיים מחלק } x,k\in\mathbb{N}^{+}\}$$

נראה ש$factory\in NP$

הוכחה:

נוכיח באמצעות בניית מ"ט א"ד יעילה.

בניה:

<u>$M_{factoring}(n,k)$:</u>

1. ננחש מספר y (באורך $\geq \log_2 n$ ביטים, עם אפסים מובילים). המספר הוא פשוט מחרוזת באורך n שבהמשך נפרסר כמספר.
2. נבדוק שאכן $y|n$ וכן $1<k\leq y<n$(*). אם כן, נקבל אחרת נדחה.

נוכיח נכונות וסיבוכיות של הבניה:

<u>נכונות:</u>

- עבור $(n,k)\in factoirng \Leftarrow$ קיים y המקיים את $(*)$.מהבניה, כל yשאורכו כאורך n (כלומר בפרט מכסה את כל המספרים $\geq n$ אבל רק אותם) $\Leftarrow$ קיים מסלול שבו מנחשים y מתאים והבדיקה שלו עובדרת $\Leftarrow (n,k)\in L\left(M_{factoring}\right)$, כנדרש.
- עבור $(n,k)\notin factoring \Leftarrow$ לא קיים y המקיים את $(*) \Leftarrow$ בכל מסלול y יתגלה ב2 כלא מקיים את $(*) \Leftarrow M_{factoing} \Leftarrow$ תדחה בכל המסלולים $\Leftarrow (n,k)\notin L\left(M_{factring}\right)$, כנדרש.

יעילות:

- נראה פולינום $p(n)$ כך שזמן הריצה בכל מסלול חסום ע"י $p(n)$:
  - ראשית, $|y| = |n| \leq |k|$ (x הקלט)
  - הבדיקה ב2 דורשת פעולת חילוק על מס' באורך $\underbrace{O(\log n)}_{|x|}$ ביטים גם פולינומי ב$|x|$ לפי פעולת חילוק שלמדנו בכיתה ג'
  - בערך $O(m^2)$ פעולות על ביטים , עבור חלוקה של שני מס' באורך m ביטים .

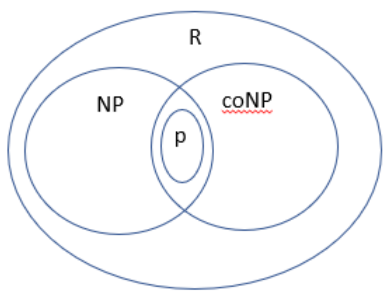
אפשר לשים לב, שבהגדרת NP ישנה אסימטריה :

- אם הקלט $L \notin x$, אכן מסלול דוחה .
- ואם $x \in L$ אז נדרש רק קיום של מסלול מקבל אבל הרבה מסלולים אחרים יכולים לדחות.

במילים אחרות, (לפי ההגדרה האלטרנטיבית) מובטח עד קצר לשייכות לשפה שנתן לבדוק ביעילות, אבל לאי שייכות אין (באופן כללי) עד כזה.

נגדיר את המחלקה "המקבילה" שבה יש עד $x \in \overline{L}$ שנתן לבדוק ביעילות ולא דוקא ל $x \in L$

2.7.1 הגדרה 10.1: $coNP = \left\{L|\overline{L} \in NP\right\}$



האם $NP = coNP$ היא גם שאלה פתוחה גדולה. (כלומר האם NPסגורה למשלים). למה היפוך מצבים לא עובד?

תהי M מ"ט א"ד יעילה עובר L . מהי $L\left(\overline{M}\right)$ (הופכים בין q_{acc} ל q_{rej})?

$$\{x \in L | x \text{ קיים מסלול הדוחה את } M\text{ב}\} * \cup \overline{L}$$

- ב$\overline{L}$ בוודאי יתקבל (בכל המסלולים , אפילו)
- ב$(*)$ - בהרבה מקרים, למשל במ"ט שלנו עבור $factoring$ זו כל L (יכנסו לנו עוד דברים)

לא קשה לראות ש $P \subseteq NP \cap coNP$

- תהי $L \in P$, אזי $\overline{L} \in P$ (P סגורה למשלים), נראה:
  1. $L \in NP$ ע"י בניית יחס NP מתאים.
     - למשל היחס הוא $\{(x,1)\,|x \in L\}$
     - חסום פול' - כי:

(א) $|y|=1$ אם $(x,y)\in R$

(ב) ניתן לזיהוי פולינומי ע"י בדיקת:

i. $y=1$

ii. $x\in L$ (אפשרי כי $L\in P$)

2. $\overline{L}\in NP$ ע"י בניית יחס NP מתאים ל $\overline{L}$

– באופן דומה נגדיר $R=\left\{(x,1)\,|x\in\overline{L}\right\}$ ....

לא ידוע האם $P=coNP\cap NP$ (מאמינים שלא) . למה לא קל לבנות מ"ט יעילה לשפה $L\in coNP\cap Np$ כלשהי?

ידוע שיש עד לשייכות ל L , ועד לאי שייכות אבל עדיין לא ברור שנתן למצוא את העד ביעילות.

ישנן שפות מעניינות שהן כן ב $coNP\cap NP$ ולא ידוע שהן ב P - למשל $factoring$. נראה שאכן $factoring\in NP\cap coNP$

$factoring\in NP$ הראנו, נותר להראות שייכות ל$coNP$.

<u>הוכחה:</u>

- נבנה יחס NP עבור $\overline{factoring}$, כיצד יראה עד y' לטענה $(n,k)\notin factroing$
  - $y'=(p_1,e_1),...,(p_1,e_k)$ (הפירוק של n לגורמים ראשונים), כאשר $p_1<p_2<...<p_t$ ראשוניים
  - מתקיים ש: $n=\prod\limits_{i=1}^{t}p_i^{e_i}$
- $R((n,k),y')$ - צ"ל ש R אכן יחס NP עבור $\overline{factroing}$ (ענת בלבלה את הסדר בסה"כ צ"ל אלגוריתם + נכונות +יעילות):

1. אכן $\overline{factroing}=\{x|\exists yR(x,y)\}$, כי בדקנו בעזרת (y') האם המחלק הכי גדול של n k קטן/שווה או לא (ב $\overline{factoring}$ לא)
2. R חסום פול': (כי t קטן)
3. נתן להזיהוי פולי' -הסברנו תוך כדי

- האלגוריתם:

1. יבדוק שאכן $p_1<...<p_t$, וכולם ראשוניים. זה יעיל בדיקת ראשונית היא ב P (נמצא אלג' AKS רק ב 2002 שלוקח לפחות $\Omega\left(n^6\right)$ זמן)
2. בנוסף יבדוק שאכן, $n=\prod\limits_{i=1}^{t}p_i^{e_i}$ זה יעיל כי $\sum e_i$ בפירוק אמיתי היא לכל היותר $\log_2 n=O(|x|)$ ו נבצע לכל היותר מס' כזה של כפליל על מס' באורך $O(|x|)$ (ה p_i- ים)
3. לבסוף נבדוק האם $y=\frac{n}{p_1}$ (המחלק הכי גדול p_1) מקיים $y|n$ ו $1<k\leq y<n$ אם אכן לא מתקיים, מחזיר "כן" אחרת מחזיר "לא"

NP היא מחלקה של שפות (מהגדרה 2) שיש הוכחה קצרה לשייכות לשפה. כלומר יש מע' הוכחה:

$$\overbrace{P_{rovier}(x)}^{\text{omnipotent}}\underset{\longrightarrow}{\text{y}}\overbrace{V_{erifier}(x)}^{\text{efficient}}$$

בודק האם $R(x,y)$

המע' מקיימת:

1. (חשוב) V יעיל
2. שלמות: לכל $x \in L$ קיימת הוכחה y שתשכנע את V
3. נאותות: לכל $x \notin L$ לא קיימת הוכחה y שתשכנע את V

מסתבר שעבור $coNP$ גם נתן לבנות מע' הוכחה עם V יעיל, שלמות ונאותות אם נרשה יותר אינטראקציה בין הצדדים (יותר מהודעה אחת והסתברות טעות קטנה בכל כוון)

כלומר לדוגמה:

- שלמות: $\forall x \in L$, V מקבל בהסתברות ≥ 0.99 כאשר מתקשר עם המוכיח.
- נאותות: $\forall x \notin L$, V דוחה בהסתברות ≥ 0.99 לכל מכויח שהוא P^{+}

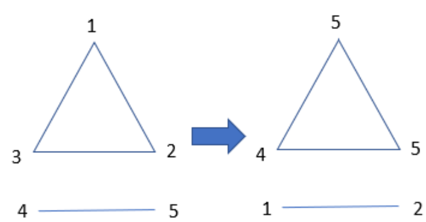
נראה דוגמה: נגדיר

$$GI = \{(G_1, G_2)\,|G_i\text{undirected graph,}G_2\text{isomorphic to }G_2\}$$

תזכורת: G_2 איזומורפי ל G_1אם קיימת פרמוטציה π על V_1 כך ש:

$$G_2 = (V_1, E_1) = \{(\pi(u), \pi(v))\,|\,\{u, v\} \in E_1\}$$

לדוגמה:



שאלת חימום

האם $GI \in NP$? כן. העד המתאים הוא פרמוטציה π

$\Leftarrow$ $\overline{GI} \in coNP$. נבנה מע' הוכחה "מורחבת" עבור $\overline{GI}$ (למרות שלא ידוע ש $\overline{GI} \in NP$)

1. בודק ש $|V_1| = |V_2|$, אחרת מיד דוחה.
2. חוזר 7 פעמים מגריל באקראי ביט $b \leftarrow \{1,2\}$, מגריל פרמוטציה אקראית על V_1, π מחשב $G' = \pi(G_2)$

$$P \xleftarrow{G' = \pi(G_2)} V$$
$$\xrightarrow{\text{guess b' for b}}$$

אם P תמיד צדק, נקבל. אחרת נדחה.

- לא קשה לראות ש V יעיל:
- <u>שלמות:</u> אם G_1, G_2 לא איזו' , אז בכל איט' G' איז' f G_b אבל לא ל G_{3-b} וכך P, ע"י בדיקת איזו' ידע תמיד להגיד נכון מהו $b \Leftarrow v$ יקבל בהסת' 1 .
- <u>נאותות:</u> אם G_1 איז' ל G_2 , אז G' היא תמיד גרף אקראי האיזומורפי לשניהם. כלומר G' לא מכיל שום מידע לגבי b (מתפלג באופן בלתי תלוי ב b) לכן ההסת' של p לנחש את b בכל איט' היא $\frac{1}{2}$. ההסתרות לא לעטת בכל האיט' היא $\left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{1}{128} < 0.01$, זו ש V יקבל למרות ש $G_1 \cong G_2$

NP - שלמות

מסתבר שקיים ב NP "גרעין קשה" של שפות כך שכל שפה L ב"גרעין" מקיימת ש $P = NP \Leftrightarrow L \in P$. כלומר מספיק להבין האם P השפה שייכת ל P עבור שפה כלשהי בגרעין, ולהסיק ממנה לגבי כל המחלקה. (זה פשוט מסוים של הבעיה). כדי להגדיר את הגרעין נזדקק למושג של רידוקציה פולינומית:

2.7.2 הגדרה 10.2: **יהיו** L_1, L_2 **שפות, נאמר ש**f **היא פונקציית רידוקציה פולינומית מ** L_1 **ל** L_2 **אם:**

1. $f \in Poly\left(y\right)$ (בפרט f מלאה)
2. תקפות: $\forall x \in \sum^* \ f(x) \in L \Leftrightarrow x \in L_1$

אם קיימת f כזו עבור L_1, L_2 אמר ש L_1 נתנת לרדוקציה פולי' ל L_2 נסמן $L_1 \leq_p L_2$

2.7.3 משפט הרדוקציה 10.3 **יהיו** $L_1 \leq_p L_2$ **. אזי** $L_1 \in P \Leftarrow L_2 \in P$

כעת נגדיר את הגרעין הקשה, שהוא קב' השפות השלמות ב NP תחת רדוקציות פולינומית.

2.7.4 המחלקה NPC **היא קב' כל השפות** L **המקיימות:**

1. $L \in NP$
2. L שלמה ב NP, כלומר $L' \leq_p L$, $\forall L' \in NP$

2.8 הרצאה 11

2.8.1 אבחנה היחס $\leq_P$ **(יחס בינארי המוגדר על קב' השפות** $P\left(\sum^*\right)$ **מקיים:**

1. רפלקסיבי : לכל $L \in P\left(\sum^*\right)$ מתקיים $L \leq_P L$ - ע"י פונ' הזהות $f(x) = x$ שהיא כמובן ב $POLY$
2. לא סימטרי:
   (א) נקח: $L_2 = HP, L_1 = \sum^*$:
   - אז $L_1 \leq_p L_2$ (נמפה הכל למילה קבוע ב HP)
   - בכיון השני $HP \nleq_p \sum^*$ כי אפילו $HP \nleq \sum^*$ - (בגלל תקפות - "אין לאן" למות מילים ב HP)

   (ב) נשים לב שכל $L \in RE$ (ובפרט כל $L \in NP$, כי $NP \leq RE$) מקיימת: $L \leq_P L_u$.
   מדוע? עבור L נתונה תהי M_L מ"ט המקבלת את L . אזי $f\left(x\right) = \left(\left\langle M_L\right\rangle, \left\langle x\right\rangle\right)$ היא פונק' רידוקציה מתאימה שבפרט נתנת לחישוב בזמן פולינומי
   - בכיון השני, אם נבחר $L \in R$ כלשהי, $L_u \leq_P L$ (אחרת נקבל סתירה למשפט הרדוקציה, כי ידוע ש $L_u \notin R$)
3. טרנזיטבית:

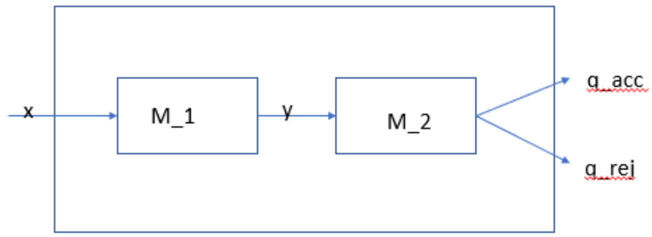
- אכן ,אם $L_1 \leq_p L_2$, וגם $L_2 \leq_p L_3$ אז $L_1 \leq_p L_3$: נרכיב את פונק' הרדוקציה בין 1 ל 2 לזו בין 2 ל 3 .בפרט הפונצקיה החדשה נתנת לחישוב (בזמן) פולינומי (החסם הוא הרכבה של החסמים הפולי' לשתי פונק' שהוא גם פולינום)

המשפט המרכזי בהקשר של NPC הוא משפט הרדוקציה לפונ' רדקוציה פונילנומיות. נזכיר:

משפט הרדוקציה 10.3: **יהיו** $L_1, L_2 \subseteq \sum^*$ **כך ש** $L_1 \leq_p L_2$ **. אזי** $L_1 \in P \Leftarrow L_2 \in P$

הוכחה(דוגמה להוכה של מפשט הרדקוציה המקורי):

נבנה מ"ט פול' יעילה עבור L_1 :



M_1 מ"ט יעילה (דטר) עבור f $(f \in POLY)$

<u>נתוח הבניה:</u>

- נכונות:
  - תקפות f: $x \in L_1 \underbrace{\Leftrightarrow}_{f} f(x) \in L_2 \underbrace{\Leftrightarrow}_{M_1}$ M_1 מקבלת את x
- יעילות: יהיו p_1, p_f פולינומים החוסמים את זמן הריצה של M_2, M_f בהתאמה.
  - אז M_1 רצה בזמן $\underbrace{p_f(|x|)}_{\text{f(x) - calculation time}} + \underbrace{p_2(p_f(|x|))}_{\text{because: } |y| \leq p_f(|x|)} \geq$

נוכיח שאכן מספיק להכריע את הסטטוס של בעיה כלשהי ב NPC (מבחינת שייכות ל P) כדי להכריע האם $P = NP$

2.8.2 משפט 11.2 : תהי $L \in NPC$ אז $L \in P \Leftrightarrow P = NP$

הוכחה

כיון 1 :

- נניח $L \in P$ מהגדרת NPC (חלק 2)
- לכל $L' \in NP$ $L' \leq_p L$
- עכשיו ממשפט הרידוקציה $L' \in P \Leftarrow NP = P$ (כי L' שפה כלשהי ב NP)

כיון 2 :

- נניח ש $P = NP$, אז מהגדרת NPC (חלק 1) $L \in NP = P$ -

כיצד נוכיח שהבעיה היא NPC ?

1. ישירות (נראה עכשיו)
2. ע"י רידקוציה מבעיה שכבר ידועה ב NPC

2.8.3 **טענה** 11.3 **: תהי** $L \in NPC$ **ותהי** $L' \in NP$. **אזי אם** $L \leq_p L'$ **אז** $L' \in NPC$

הוכחה ־נראה ש L'מקיימת את שתי הדרישות

1. $L' \in NP$ (נתון)
2. $L' \in NPH$.כלומר, מקיימת $L \leq_p L'$, וגם לכל $L" \in NP$

$L" \leq_p L$ (כי $l \in NPC$ ובפרט $L \in NPH$) כעת מטרנזיטביות של $\leq_p$, $L" \leq_p L'$ כלומר $L' \in NPH$ (כי $L"$ שפה כלשהי ב NP)

2.8.4 **הגדרה** 11.4 **: השפה** $BH - Bounded\ Halting$:

$$BH = \{\langle M\rangle, 1^p, \langle x\rangle \mid l \geq \text{ מ"ט א"ד קיים ב } M \text{ מסלול מקבל בריצתה על } x \text{ שאורכו } M\}$$

2.8.5 **משפט** 11.5 **:** $BH \in NPC$

הוכחה:

רעיון ההוכחה (לפחות לחלק של NPH) דומה לשלמות של L_u ב RE שראינו . בפרט לא מאוד מפתיע שהבעיה ב NPC (נובע כמעט מיידית מהגדרת NP)

פורמלית:

יש להראות ע"פ הגדרת NPC :

1. <u>$BH \in NP$</u>

נבנה א"ד פולינומית מתאימה:

$M_{BH}\left(\langle M\rangle, 1^P, \langle x\rangle\right)$:

1. תנחש מסלול חשוב בעץ של M על x שאורכו $\leq l$ (ראינו איך עושים זאת)

   כלומר המחרוזת y שמנחשים היא מהצורה $y = y_1, y_2, ...y_t$, כאשר y_i מגדיר אם בוחרים אפשרות 0 או 1 ב δ בצעד i
2. מריצה את M על x במסלול המוגדר ע"י y אם המסלול מסתיים בדיוק כך שy מסתיים, ומסתיים ב q_{acc} נקבל ,אחרת נדחה

נכונות הבניה:

<u>נכונות :</u>

$\left(\langle M\rangle, 1^P, \langle x\rangle\right) \in BH \iff$ ב M קיים מסלול y באורך $t \leq l$ המקבת את $x \iff$ (מהבניה) M_{BH} תנחש מסלול y מקבל כזה $\iff \left(\langle M\rangle, 1^P, \langle x\rangle\right) \in L\left(M_{BH}\right)$

<u>יעילות:</u>

- שלב 1 : ניחוש y : $O(l)$ צעדים
- שלב 2 (הרצה) : המכונה האוניברסלית שבנינו על קבלט $\langle M\rangle, \langle x'\rangle$ אכן רצה בזמן פולינומי ב $|M|$ ומספר צעדי הסימולציה ו $|x|$. (שמירה ועדכן קונפיגרוציה נוכחית.

  כאן מס' צעדי הסימולציה , היא $\leq l \Leftarrow$ פולינומי בקלט שאורכו $|\langle x\rangle| + l + |\langle M\rangle|$

2. $BH \in NPH$

תהי $L \in NP$ נגדיר רדקוציה פול'י מ L ל BH :

$f(x)$ פולטת: $\left(\langle M_L \rangle, 1^{P_L(|x|)}, \langle x \rangle\right)$, כאשר M_L מ"ט א"ד פולינומית (קיימת כי $L \in NP$), ו $P_L(|x|)$ חסם המובטח עבור M_L

נראה ש f אכן פונק' רידקוציה פלונומית תקפה מ L ל BH :

2. <u>תקפות</u> - ישירות מהגדרת NP וחסם זמן ריצה עבור מכונה א"ד פולינומית:

$$x \in L \iff \text{קיים ב } M_L \text{ מסלול המקבל את } x \overset{1}{\iff} \left(\langle M_L \rangle, 1^{P_L(|x|)}, \langle x \rangle\right)$$

1. כיון ש P_L חסם על אורך כל מסלול, מסלול מקבל, אם , קיים אורכו $\leq P_L(x)$

1. <u>$\delta \in POLY$:</u> נבנה מ"ט פול' עבור M_f, f

: $M_f(x)$

1. כתיבת $\langle M_L \rangle$ - זמן קבוע $O(1)$. לא תלוי ב $|x|$.
2. חישוב זמן כתיבת x , לנארי ב $|x|$ (מקודדים אות־אות)
3. חישוב $P_L(|x|)$:
   (א) נחשב את x בבינארי, בעצם נמיר את x מאונארי לבינארי , דורש בערך $O(n \log n)$ זמן
   (ב) נחשב את הפולינום $P_L(b)$ - דורש מס' קבוע של כפלים על מספרים בגודל $O(\log |x|)$.
   - לדוגמה אם $p = 17 \cdot n^4$: נבצע שלושה כפלים כדי לחשב n^4 נצבור בכל פעם את המכפלה עד כדי n, n^2, n^3 ואז נכפול ב 17 $\Leftarrow$ זמן $poly(\log |x|)$ - נשתמש באלג' בית לכפל. תהי c התוצאה
   (ג) נמיר את c חזרה לאונארי = זמן $O(c \log c)$ שזה פולינומי ב $|x|$ בערך $P_L |x|$.

סה"כ פולנומי ב $|x|$

הערה: למה חשוב ב BH לייצג את החסם l על מס' הצעדים באונארי? למה לא בבינארי?

אם l היה נתון בבינארי אז M_{BH} שבינינו לא היתה בהכרח יעילה. למה?

M_{BH} מבצעת לפחות l צעדים באחד המסלולים (שבו מנחשים y באורך l) , בייצוג בינארי הקלט היה נראה כך $\langle \langle M \rangle, l, \langle x \rangle \rangle$ כאשר אם l בבינארי , הוא דורש $O(\log l)$ ביטים, זמן הריצה שלנו היה במקרה הגרוע אקספו' בקלט (לא מובטח ש $\langle M \rangle, \langle x \rangle$ מספיק ארוכים יחסית ל l)

בשיעורים הבאים נגדיר כמה שפות מתחומים שונים שהן יותר "טבעיות" מ BH נוראה שכל אחת היא NPC ע"י שרשרת הרדוקציות הבאה:

$$BH \to SAT \to 3SAT \to VC \to \begin{array}{c} HS \\ SC \\ O1P \\ Subset\ sum \end{array}$$

SAT :

תזכורת של אלגברה בוליאנית

פסוק לוגי : $p(x_1,...,x_n)$ מוגדר מעל משתנים בוליאנים $X=(x_1,...,x_n)$ השפה למשתנים ($\phi(X)$ היא פונק' שממפה x_i לערך T או F . פסוקים רקורסיבית:

<u>בסיס:</u>

$\varphi(X)=x_i$ או $\varphi(X)=\overline{x_i}$ נקרא ליטרל, לדוגמה: $\varphi(x_1,x_2,x_3)=\overline{x_3}$

<u>"הרכבה" :</u>

- בהנתן $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ ניתן להגדיר $\varphi(x)=\varphi_1(x)\wedge\varphi_2(x)$
- בהנתן $\varphi_1(x),\varphi_2(x)$ ניתן להגדיר $\varphi(x)=\varphi_1(x)\vee\varphi_2(x)$

הצבה של השמה לפסוק $\varphi(x)$:

- אם $\varphi(x)=l_i$ (ליטרל)
  - אם $l_i=x_i$ אז $\varphi(x)=T$ אםם $\phi(x_i)=T$
  - אם $l_i=\overline{x_i}$ אז $\varphi(x)=T$ אםם $\phi(x_i)=F$
- אם $\varphi(x)=\varphi_1(x)\wedge\varphi_2(x)$
  - אז $\varphi(\phi)=T$ אםם $\varphi_1(\phi)=T$ וגם $\varphi_2(\phi)=T$
- אם $\varphi(x)=\varphi_1(x)\vee\varphi_2(x)$
  - אז $\varphi(\phi)=T$ אםם $\varphi_1(\phi)=T$ או $\varphi_2(\phi)=T$

2.8.6 הגדרה 11.6 **: נאמר שפסוק לוגי** φ **הוא בצורת** CNF **אם:** $\varphi(x)=\bigwedge_{i=1}^{m}C_i$ **, ו** C_i **היא פסוקית** CNF **כלומר מהצורה** $C_i=\bigvee_{j=1}^{h_i}l_i$

לדוגמה $P(x_1,...,x_5)=(\vee..\vee)\wedge(\vee..\vee)\wedge(\vee..\vee)$

השפה SAT :

$$SAT=\{\ \varphi(x)\,|\varphi(\phi)=T \text{ כך ש } ,\ \phi \text{ הוא פסוק } CNF \text{ שקיימת לו השמה מספקת כלומר } \varphi\}$$

לדוגמה: עבור הפסוק מהדוגמה, ההשמה:

$$\phi(x_5)=T\qquad\phi(x_1)=T\qquad\phi(x_2)=T\qquad\phi(x_4)=T\qquad\phi(x_3)=F$$

היא השמה מספקת לכן $\varphi(x)$ הנ"ל בSAT

נגדיר $K-cnf$ כפסוק CNF שבכל פסוקית יש בדיוק k ליטרלים :

$$3SAT=\{\varphi(x)\,|\ \varphi(x) \text{ הוא פסוק } 3-cnf \text{ ספיק}\}$$

2.9 הרצאה 12 - 16/01/20

תוכנית עבודה (חלקית) :

$$BH \to SAT \to 3SAT \to VC \to \begin{array}{c} HS \\ SC \\ O1P \\ Subset\ sum \end{array}$$

נוכיח שהשפה הבאות הן NPC

תזכורת: משפט: בהנחה ש $P \neq NP$, כל שפה $L \in NPC$ אינה בP (מדד קושי מסוים)

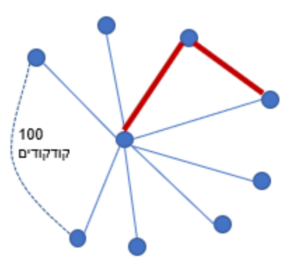
נתחיל מהגדרת השפות

2.9.1 הגדרה 12.1 השפה $Vertex\ color$

$VC = \{(\langle G\rangle, k) \mid$ לא מכוון וקיימת $G=(V,x)$ $U \subseteq V$ בגודל k כך שלכל קשת $e \in E$, לפחות אחד הקצוות שייך ל U $\}$

$\langle G\rangle$ הוא קידוד של גרף למשל כמטריצת שכנויות

- לדוגמה הגרף המלא על n קודקודים פורש כיסוי בצמתים בגודל $n-1$ $n-2$ לא יספיקו , כי הקשת $e=\{v,u\}$ כך ש v,u לא בכיסוי לא מכוסה
- בגרף כוכב הבא (תוספת של קשת), עם 100 קודקודים - מספיקות 2 קשתות



2.9.2 הגדרה 12.2 השפה $Hitting\ set$ (HS)

$HS = \{N, K, C_1, ..., C_t|$ $\forall i\ C_i \cap U \neq \phi$ כל C_i מוכלת ב $[n]$ וקיית תת U של $[n]$ $U \subseteq [n]$ בגודל k כך ש $\}$

2.9.3 הגדרה 12.3 השפה $Set\ cover$

$SC = \{N, K, C_1, ..., C_t|$ $\bigcup_{i\in I} C_i = [n]$ קיימת $I \subseteq [t]$ בגודל k כך ש $\}$

דוגמה :

$$n=10 \qquad k=3 \qquad c_1=\{1,5,4,3\}$$
$$c_2=\{2,8\} \qquad c_2=\{7,5,6\} \qquad c_4=\{10\} \qquad c_5=\{9,8\}$$

כאן אי אפשר כי חייבים לקחת יותר מ3 קבוצות

הערה: האלג' הנאיבי ל SC בודק כל תת קב' $I\subseteq[t]$, בגודל k ומקבל אם מצא SC יש $\binom{t}{k}$ קב' כאלה לבדוק לדוגמה עבור $t=n^3$ $k=\frac{n}{2}$ זה לא פולינומי בקלט

כאמור נראה ש $HS\in NPC, SC$ ע"י רידוקציה מ VC

2.9.4 משפט 12.4 $VC\in NPC$

<u>הוכחה</u>

1. $VC\in NPC$ .1 מ"ט א"ד פולינומית עבור VC - $M_{VC}\left(\langle G\rangle,k\right)$ תנחש קב' $U\subseteq V$ בגודל k , ותבדוק שהיא מהווה VC (כל הקשתות מכוסות על ידה)

   לא קשה לראות שהמכונה אכן פולינומית (בפרט $|U|$ שמנחשים היא באורך $k\log n$ ביטים , לדוגמה והבדיקה גם ניתנת לבצוע בזמן פולינומי בגרף)

2. $VC\in NPC$ .2 - אחר ההפסקה

2.9.5 משפט 12.5 $HS\in NPC$

<u>הוכחה:</u>

1. $HS\in NP$ .1 : מ"ט א"ד פולי' מתאימה תחשב U ותבדוק שאכן $\forall i\ U\cup C_i\neq\phi$

2. $HS\in NPH$ .2 : נראה ע"י רדוקציה מ VC ממשפט 12.4 , נקבל ש $HS\in NPH$ (כי $VC\in NPH$)

   רעיון הרדוקציה:

   כאן , נשים לב ש VC הוא מקרה פרטי של HS : קיים מיפוי מאוד פשוט מקבל עבור VC לקלט עבור HS :

   $f\left(\langle G\rangle,x\right)$: מזהה בין $V=\{v_1,...,v_n\}$ ל $[n]$ (למשל נזהה בין v_i למספר i)

   $k=k'$

   נזהה בין E לבין הקב' $C_1,...,C_t$ כל $e_i=\{v_{i1},v_{i2}\}$ תמופה ל $C_i=\{i1,i2\}$

   נפלוט :

$$\left(n,k,C_1,...,C_{t=|E|}\right)\ \text{שקבלנו}$$

נכונות הרידוקציה f :

<u>f פולינומית:</u> עוברים על הגרף, סופרים קודקודים ומעתיקים את מס' הקדקדים שיצא , את k ,ו את הקשתות (תוך כדי מיפוי למספרים התאימים) - זה פולינומי (ב $|\langle G\rangle,k|$)

<u>תקפות f:</u>

הרעיון כאן הוא (תמיד) להראות כיצד עד עבור x , מתרגם לעד עבור $f(x)$ ולהיפך (נרחיב עוד מעט)

כיון $\Leftarrow$:

יהיה $\left(\langle G\rangle,k\right)\in VC$ $\Leftarrow$ קיימת $\{V_{i1},...,v_{ik}\}$ המהווה VC עבור G $\Leftarrow$ קיימת $\{i1,....,ik\}$ המכסה את כל הקב' C_i ,שכן אם U הוא VC אז מתקיים בעצם $\forall e\in E\ e\cap U\neq\phi$, ולכן לכל C_i שהתקבל מe_i כלשהו $C_i\cap U'=\phi$ $\Leftarrow$ $f\left(\langle G\rangle,k\right)\in HS$

כיוון$\Rightarrow$:

בשונה מהחלק הראשון בקורס לא נוכיח: שאם $x \notin L_1$ אז $f(x) \notin L_2$, אלא נוכיח טענה שקולה שלפיה אם $f(x) \in L_2$ אז $x \in L_1$

במקרה שלנו:

נניח ש $f(\langle G \rangle, k) \in HS$ ⇐ קיימת קב' $U \in [n]$, $U = \{i_1, i_2, ..., i_k\}$ כך ש $\forall i \; U' \cap C_i \neq \phi$ ⇐ (בניה בפרט $k = k'$) קיים VC $U = \{v_{i1}, ..., v_{ik}\}$ עבור G ⇐ $(\langle G \rangle, k) \in VC$ כנדרש.

הערה: הכיון ההפוך $HS \leq_P VC$ יותר מסובך, כי VC הוא מקרה פרטי, רידוקציה אפשרית:

$$HS \leq_P SAT_P \leq_p 3SAT \leq_p VC$$

2.9.6 משפט 12.6 $SC \in NPC$

<u>הוכחה:</u>

1. $SC \in NP$. ננחש $i \subseteq [t]$ בודק k , ובודקים האם $\bigcup\limits_{i \in I} C_i = [n]$
2. $SC \in NPH$: נראה $VC \leq_p SC$, ונסיק $SC \in NPH$ על סמך משפט 12.4

<u>רעין הבניה</u>

העבודה שמחפשים k קב' רומזת שנרצה $k = k'$ ונרצה אישהו לזהות בין הקודקדים לבין הקבוצות $C_1, ...C_t$ ובין E ל $[n]$

כיצד נזהה בין הצמתים לקבוצות? לכל קדקוד v נתאים לו את קב' הקשתות $E_v = \{e | v \in e\}$, כלומר הקשתות היוצאות מv . נסכם:

$$f(\langle G \rangle, k') = \left(n = |E|, k = k', C_1, ..., C_{t=|V|}\right) \text{ כאשר } C_i = E_{v_i}$$

נכונות הרדוקציה f:

<u>פולינומית</u> : סופרים קשתות, ואז עוברים על הצמתים ולכל צומת מחשבים את E_v

<u>תקפות:</u>

$\Leftarrow$

נניח $(\langle G \rangle, k') \in VC$ ⇐ קיים VC $U = \{V_{i1}, ..., V_{ik'}\}$ ⇐ קיים SC $I = \{i1, ..., ik\}$ כאשר $k = k'$ (מהבניה) כך ש

$$\bigcup_{i \in I} C_i \overset{*}{=} \bigcup_{i \in I} E_{v_i} \overset{vc}{=\!=}\!\!\to [|E|] \text{ מתרגם חזרה ל}$$

$*$ עד כדי מספור שמות

$\Rightarrow$

נניח $f(\langle G \rangle, k') \in SC$ ⇐ קיימת קב' $\{i_1, ..., i_k\} = I \subseteq [n]$ כך ש $\bigcup\limits_{i \in I} C_i = [n]$ ⇐ (מהבניה) קיימת קב' קדקודים $U = \{v_{i1}, ..., v_{ik'=k}\}$ המהווה VC עבור E (כי מבחירת I , היא מכסה את כל הקשתות , כי כל C_{i_j} היא למעשה $E_{v_{i_j}}$ -קב' הקשתות היצאות מ V_{i_j} מש"ל

2.9.7 משפט 12.7 $3SAT\in NPC$

הוכחה:

1. $3SAT\in NP$, ננחש השמה ϕ ונבדוק שהיא מספקת ונקבל את $\varphi\left(x\right)$ אם"ם ϕ אכן מספקת
2. נראה על ידי $SAT\leq_{p}3SAT$ - נראה בשבוע הבא, נקבל ש $3SAT\in NPH$

הערה: זה שימושי לפשט את SAT ל $3SAT$ (כשפה NPC) כדי להקל על רדוקציות לפשות חדשות בגלל המבנה היותר פשוט של $3SAT$

רעיון הרידוקציה:

עבור קלט $\varphi\left(x_{1},..,x_{n}\right)$ לרדוקציה $\varphi\left(x\right)=\bigwedge_{i=1}^{m}C_{i}$ נפלוט $\varphi'\left(x,y\right)$ מהצורה $\varphi\left(x,y\right)=\bigwedge_{i=1}^{m}C'_{j}$ כאשר C'_{i} יהיה פסוק $3CNF$.
שימו לב שלמרות ש C'_{i} הוא לא בהכרח פסוקית בודדת ל $\bigwedge_{i=1}^{m}C'_{i}$ יהיה מבנה של $3CNF$

לדוגמה, נגדיר ש:

$$C'_{1}=\left(x_{1}\vee\overline{x_{3}}\vee y_{1}\right)\wedge\left(x_{17}\vee\overline{y_{1}}\vee\overline{x_{3}}\right)$$
$$C'_{2}=\left(x_{2}\vee x_{3}\vee x_{7}\right)\wedge\left(x_{1}\vee x_{1}\vee\overline{x_{8}}\right)$$
$$than:$$
$$C'_{1'}\wedge C'_{2}=\left(x_{1}\vee\overline{x_{3}}\vee y_{1}\right)\wedge...\wedge\left(x_{1}\vee\overline{x_{3}}\vee y_{1}\right)$$

כיצד נבצע את ההתאמה בין C_{i} ל C'_{i} נחלק למקרים:

1. $C_{i}=l_{1}\vee l_{2}\vee l_{3}$ $\Leftarrow$ 3 ליטרלים ניקח $C'_{1}=C_{i}$
2. $C_{i}=l_{1}\vee l_{2}$ $\Leftarrow$ 2 ליטרלים , ניקח $C'_{i}=\left(l_{1}\vee l_{2}\vee l_{2}\right)$
3. $C_{i}=l_{i}$ $\Leftarrow$ 1 ליטרלים , נכפיל כמו ב2
4. $C_{i}=\bigvee_{j=1}^{t}l_{i,j}$ כאשר $t\geq u$. נתאים

$$C'_{i}=\left(l_{i_{1}}\vee l_{i_{2}}\vee y_{i_{1}}\right)\wedge\left(\overline{y_{i_{1}}}\vee l_{i_{2}}\vee y_{i_{2}}\right)\wedge\left(\overline{y_{i_{2}}}\vee l_{i_{4}}\vee y_{i_{3}}\right)\wedge....\wedge\wedge\left(\overline{y_{i_{t-3}}}\vee l_{i_{t-1}}\vee y_{i_{t}}\right)$$

בראשון והאחרון יש שתי משתנים מקוריים ומשתנה 1 חדש

באמצעים יש את המשתנה שהוספנו בשלילה , ומשתנה חדש נוסף

לדוגמה:

$$C_{14}=x_{1}\vee\overline{x_{14}}\vee x_{12}\vee\overline{x_{3}\vee}x_{2}$$

הופך ל:

$$C'_{14}=\left(x_{1}\vee\overline{x_{14}}\vee y_{14,1}\right)\wedge\left(\overline{y_{14,1}}\vee x_{12}\vee y_{14,2}\right)\wedge\left(\overline{y_{14,2}}\vee\overline{x_{3}}\vee x_{2}\right)$$

נשים לב ש C'_{i} לא שקול לוגית ל C_{i} (אפילו סט המשתנים עליו הם מוגדרים שונה - אם נסתכל על C_{i} כמוגדר מעל $\left(x,y\right)$ עדיין לא תהיה שקילות לוגית)

נתוח $f\left(\varphi\left(X\right)\right)$ **:**

פולינומית

כל פסוקית הופכת לפסוקית שאורכו פי 3 מהפסוקית המקורית (מבחינת מס' ליטרלים) וגם קל לחשב את C_i' . בערך לינארי ב$|\varphi(x))|$על מכונת RAM (כולל הקצאת ה $y_{i,j}$ ים)

תקפות

$\Leftarrow$

נניח ש $\varphi(x_1,..,x_n) \in SAT$ ותהי $\phi(x)$ השמה מספקת עבור φ , נבנה השמה $\phi'(x,y)$ המספקת את φ'

- נגדיר $\phi'(x) = \phi(x)$ ונקוה שנצליח להשלים השמה ל yים שסה"כ ϕ' תספק את φ' (אכן נצליח)
- לכל C_i' , נשלים את ההשמה לϕ' ל $y_{i,j}$ כך ש C_i' תסתפק. אם נצליח, אז גם $\varphi = \bigwedge C_i'$ יסתק ע"י ϕ' . נחלק למקרים:

1. C_i' לא מכיל $y_{i'j}$ים במקרה זה היא שווה ל C_i . כיון ש $\phi'(x) = \phi(x)$, ו ϕ מספקת את φ' אז ϕ מספקת גם את C_i כי $(\varphi = \bigwedge C_i)$ ולכן גם את C_i'
2. אם $C_{i'}$ מכיל $y_{i,j}$ ים : נשים לב שקיים ליטרל $l_{i,j} = x_{r_i}$ המסתפק ע"י ϕ בגלל השמה של ל x , כי ϕ מספקת כל פסוקית C_i , וכדי שC_i תסתפק לפחות ליטרל אחד שלה צריך להסתפק. נחלק למקרים:

(א) $l_{i,j}$ אינו שייך לפסוקיות ה"קצה" ב C_i' כלומר

$$C_i' = \ldots \left(\overline{y_{i,j-3}} \vee l_{ij-1} \vee \underbrace{y_{i,j-2}}_{T}\right) \wedge \left(\underbrace{\overline{y_{i,j-2}}}_{F} \vee \underbrace{l_{ij}}_{T} \vee \underbrace{y_{i,j-1}}_{F}\right) \wedge \left(\underbrace{\overline{y_{i,j-1}}}_{T} \vee l_{ij+1} \vee y_{i,j}\right)$$

$l_{i,j}$ הוא T (כי ההשמה מספקת) נקבע $y_{i,j-1} = \overline{y_{i,j-2}} = F$, ואז ה"גל" יתפשט

כלומר ה"גל של Tים יתפשט שמאלה וימינה ואפשר לקבוע את $y_{i,j}$ ים כך שכל הפסוקיות ב C_i' יסתפקו.

$\Rightarrow$ נניח ש $\varphi'(x,y) \in SAT$ ונוכיח ש $\varphi(x) \in SAT$ - שיעור הבא