מתרגל: גיל לוי

לתיקונים/הערות/הארות - נעם דומוביץ - $ndomovich@gmail.com$

אוטומטים 1 - סיכום תרגולים

תרגול 1

- חזרה על ההגדרות מהשיעור.
- נשים לב שבשרשור בין שפות מתקיים ש: $|L_1 \cdot L_2| \leq |L_1| \cdot |L_2|$
- $L^0 = \{\varepsilon\}$, $L \cdot \{\varepsilon\} = L$, $L \cdot \emptyset = \emptyset$
- היפוך שפה = L^R - הפיכת כל מילה בשפה.
- איטרציה (רק על שפות) $L* = L^0 \cup L^1 \cup L^2 \cup ......$, כלומר כל האפשרויות של השפה.
  - לדוגמה:$\{0,1\}^* = \{\varepsilon, 0, 1, 00, 01, ...\}$
  - איטרציה - תמיד (למעט שפה ריקה או המכילה מילה ריקה) יוצרת שפה אינסופית.

<u>תרגילים - הוכח/ הפרך:</u>

- $(L_1 \cdot L_2)* = L_1 L_2$ - ד"נ $L_1 = \{1\}, L_2 = \{0\}$, ואז $1100 \in L_1^* L_2^*$ אבל $1100 \notin (L_1, L_2)^*$
- $(L_1 \cup L_2)^* = (L_1^* \cdot L_2^*)^*$
  - נראה הכלה דו-כיוונית
    כיוון ראשון: $(L_1 \cup L_2)^* \subseteq (L_1^* \cdot L_2^*)^*$
  - יהיה $w \in (L_1 \cup L_2)^*$ אזי: קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש $w \in (L_1 \cup L_2)^n =$
  - ע"פ הגדרת החזקה , מתקיים ש: $x_1, x_2, x_3....x_n \in (L_1 \cup L_2)$ כך ש $w = x_1, x_2, ..., x_n$
  - מהגדרת האיטרציה נחלק את w לרצפים של מילים מL_1 ומילים מ L_2לסירוגין (ע"פ ההתאמה של המילה w) -
    כיוון 2 : $(L^* \cdot L_2^*)^* \subseteq (L_1 \cup L_2)^*$
  - תהי $w \in (L_1^* \cdot L_2^*)^* \Leftarrow w = x_1, x_2....x_n \Leftarrow x_i \in L_1^* \cdot L_2^* \Leftarrow x_i \in L_1^m L_2^k$ עבור iמסוים
  - $x_i = y_1, ..., y_m z_1....z_k$ כאשר $y_j \in L_1, z_j \in L_2$
  - מכאן כל z_i, y_j המרכיבים את w הן או מ L_1 או מ L_2 ולכן $w \in (L_1 \cup L_2)^*$ מהגדרת איחוד שפות.
- <u>הגדרות:</u>
  - שרשור $x \in L_1 \cdot L_2$ אם קיימים $y \in L_1$ ת $z \in L_2$ כך ש $x = yz$
  - חזקה $x \in L^n$אם קיימות $y_1, y_2, ..., y_n \in L$ כך ש $x = y_1.....y_n$
  - איטרציה $x \in L^*$ אם קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש $x \in L^n$

תרגול 2 - 25/10/18

<u>אוטומטים:</u>

אוטומט נראה כך $A=(Q,\sum,\delta,q_0,F)$, אוטומט הוא סופי דטרמינסטי, כלומר לא יתכן כי מילה לעיתים תתקבל ולעיתים לא.
כאשר:

- Q - קבוצת המצבים
- $\sum$ - א"ב
- δ - פונקצית המעברים
- q_0 - מצב התחלתי
- F - מצבים המקבלים

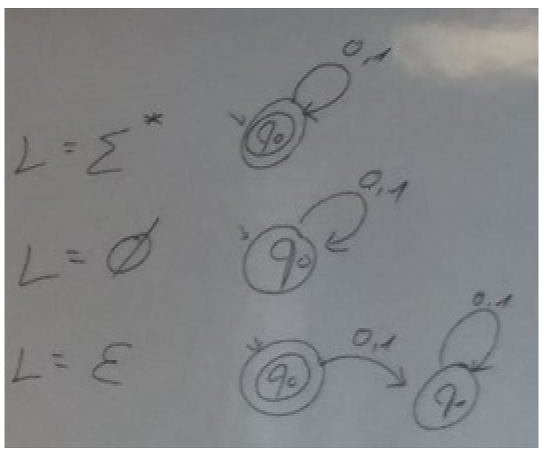
האוטומט מכיל מצבים Q קורא מילים אות אחרי אות מחליט להתקדם על פי פונקציית המעברים ועוצר בסוף הקלט באחד המצבים.

- אם עצרנו במצב מקבל מ F , אז המילב מתקבלת.
- אחרת, המילה לא מתקבלת

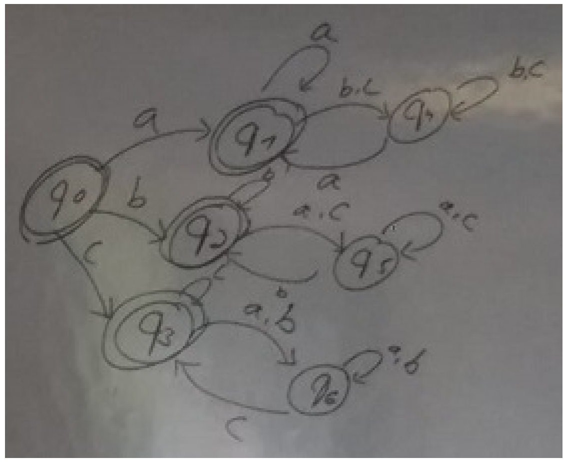
לדוגמה: ציור:

פנוקציית המעברים (ע"פ הציור) $\delta(q_0,0)=q_0$, $\delta(q_0,1)=q_1$,$\delta(q_1,0)=q_1$....

<u>דוגמאות:</u>



- בנו אוטומט $L=\{w\in\{0,1\}|\text{not contain the seq' 11 }\}$
- בנו אוטומט $L=\{w\in\{a,b,c\}|\text{w start and end with same letter }\}$



- בנו אוטומט $L = \{w \in \{0.1\}^* | \text{between any couple of 1 has 3 digit of 0}\}$

שיעור 3 - 31/11/18

- הערה: בקורס תמיד הא"ב, שפה, ומילה הינם סופיים.

<u>אוטומט סופי דטרמיניסטי:</u>

דוגמה לשפה:

$$L = \left\{w \in \{a, b, c\}^* \ |\text{w start with a and end with b}\right\}$$

הראנו ש:

$$ab \in L \qquad cab \notin L$$
$$a \notin L$$

שפה של אוטומט:

עבור אס"ד A' השפה של Aתסומן ב $L(A)$

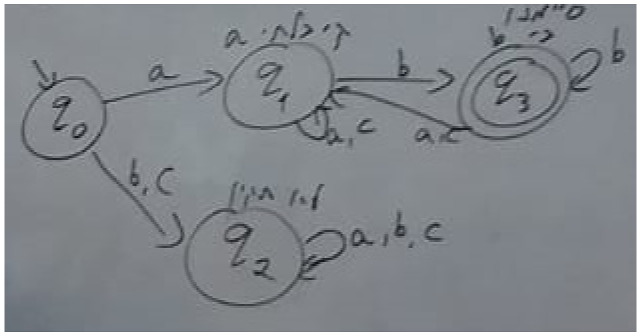
$$L(A) = \left\{w \in \sum^*\} \text{ ending and reading w in aotumat in recvie mode } \right\}$$

לדוגמא:

$$L(A) = \left\{w \in \{0,1\}^* \mid \text{w length is odd } \right\}$$

- אם קיים לשפה Lאס"ד כך ש: $L = L(A)$ אז אומרים שהאוטומט A **מקבל / מכריע** את L

דוגמה: בנו אוטומט המכריע את השפה : $L = \left\{w \in \{a, b, c\}^* \ |\text{w start with a and end with b}\right\}$

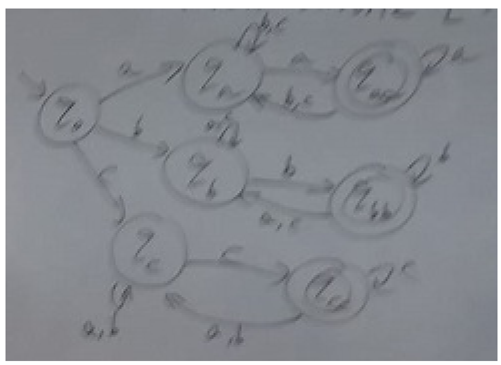


2. #- מספר האות במילה

$$L(A)=\left\{w\in\{a,b,c\}^{*}\,|\,|\#_{a}\left(w\right))-\#_{b}\left(w\right))|\leq 3\text{ all time}\right\}$$

שיעור 4 - 08/11/18

נתונה השפה הבאה $L=\left\{\sigma\times\sigma|\sigma\in\left(a,b,c\right),x\in\{a,b,c\}^{*}\right\}$, בנו אוטומט מכריע והכיחו נכונות.



צ"ל: $L(A)=L$. נוכיח באמצעות הכלה דו כיוונית :

<u>כיוון ראשון $L(A)\subseteq L$:</u>

תזכורת $\delta:Q\times\sum\to Q$, $\hat{\delta}:Q\times\sum^{*}\to Q$

- תהי $w\in L(A)$ לכן: $\hat{\delta}\left(q_{0},w\right)\in F$.
- נפצל למקרים:
  - $\hat{\delta}\left(q_{0},w\right)=q_{aa}\Leftarrow$ לפי הגדרת פונ' המעברים של האוטומט, בהכרח התו האחרון של w הוא a . בנוסף , כדי להגיע מ q_{0} ל q_{aa} בהכרח יש לעבור דרך מצב a_{a} ומכיוון שלא קיים מעבר מ $q_{a},\,q_{aa}$ למצבים אחרים, ולפיכך נובע שהתו הראשון של w העביר את האוטוטמט למצב q_{0} למצב q_{a} ולכן התו הראשון של w הוא גם כן a ולכן $w\in L$.
  - באותו אופן עבור b
  - באותו אופן עבור c

<u>כיוון שני: $L\subseteq L(A)$ (יש מילה צריך להראות שהיא מגיעה למצב מקבל)</u>

תהי $w\in L$ לכן w מתחילה ומתסיימת באותו תו.

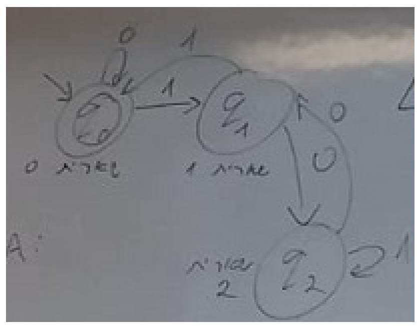
- נפצל למקרים:
  - w מתחילה ומסתיימת ב a : מכיוון ש w מתחילה ב a אז לפי פנוקציית המעברים , לאחר קריאת התו הראשון של w נגיע למצב q_a. מכיוון שלא ניתן כעת להגיע למצב אחר מq_a וq_{aa} ומכיוון ש w מסתיימת ב a וכל המעברים עבור קריאת a מגיעים לq_{aa} , נובע שקריאת w תסתיים במצב q_{aa} ולכן תתקבל.
  - באותו אופן עבור b .
  - באותו אופן עבור c .

<u>שאלה:</u> נתונה השפה הבאה:

$$L = \left\{w \in \{0,1\}^* \,|\text{w is binary number and } [\text{w}]_3 = 0\right\}$$

<u>לדוגמה:</u> $3 = 11 \in L, 0011, 0110 \in L$ וכו' ..

<u>הערה:</u> $\varepsilon \in L$:



<u>צ"ל $L(A) = L$</u>

נוכיח באינדוקציה ש: w מייצג מספר בינארי שהחלוקה שלו ב 3 נותנת שארית i על אורך המילה w $\iff$ $\hat{\delta}\left(q_0, w\right) = q_i$

<u>הערות:</u>

- הטענה פה יותר חזקה מהרגיל כיוון שבכך אנחנו מוכיחים גם מה לא מתקבל, ולא רק מה מתקבל
- בגלל שאנחנו מראים את השקילות אנחנו בפעם אחת את שני הכיוונים

<u>בסיס (נחמיר):</u>

- כאשר $|w| = 0$ שארית 0 ומתקיים ש: $\hat{\delta}\left(q_0, w\right) = q_0$
- $w = 0$, שארית 0 ומתקיים $\delta\left(q_0, w\right) = q_0$
- $w = 1$ שארית 1 ומתקיים $\hat{\delta}\left(q_0, w\right) = q_1$

<u>צעד -</u> נניח נכונות עבור כל המילים $|w| \le n$, ונוכיח בעבור מילים באורך $n + 1$.

- נסמן $w = x\sigma$ ונפצל למקרים לפי השאריות $0, 1, 2$
- (נגמר השיעור, תשלימו לבד....)

שיעור 5 - 15/11/18

שפות רגולריות

הראנו עד כה מודל חישובי - אס"ד (DFA) , נרצה לשאול מה המודל יכול לחשב ומה לא?

- שפות סופיות - כן
- שפות אינסופיות שהמשלימה שלהם סופית - כן
- חלק מהשפות האינסופית - גם כן.

<u>תרגיל:</u> $L=\{a^nb^m|n=m \mod 3\}$ האם L רגולרית או לא ?

במילים אחרות השאלה היא האם: $L\in reg=\left\{L\subseteq\sum^*|\text{exist an DFA for L}\right\}$.

<u>תשובה:</u> כן , רגולרית

<u>הוכחה:</u> נבנה אס"ד....

<u>דוגמאות:</u>

- $\left|P\left(\sum^*\right)\right|=\aleph_0$
- $L=\{1^p|\text{ p is primary}\}$

<u>דוגמאות לשפות לא רגולריות:</u>

- $L=\{a^nb^n|n>0\}$ הוכחה בשיעור
- $L_2=\left\{a^{n^2}|n\in\mathbb{N}\right\}$ הוכחה:
  - נניח בשלילה ש L כן רגולרית ולכן קים DFA - A המכריע את L . מס' המבצים ב A הוא n .
  - נצור קבוצת מילים בגודל n ונרצה למצוא את המילה ה $n+1$ לא חוקית שמגיע למצב כלשהו (שמעקרון שובך היונים יגיעו לאותו מצב)
  - כלומר נתבונן בקבוצה הבאה $a^{0^2},a^{1^2},....,a^{i^2},...,a^{n^2}$ - בקבוצה הזו יש $n+1$ מלים
  - לפי עקרון שובך היונים קיימות לפחות 2 מילים מתוך המלים הנ"ל שחישוב ב A עליהן יסתיים באותו מצב ב Q .
  - בה"כ: a^{i^2},a^{j^2} עם $i<j$
  - נשרשר ל 2- המלים את הסיומת a^{2i+1} נקבל ש:

$$a^{i^2}a^{2i+1}=a^{i^2+2i+1}=a^{(i+1)^2}\in L$$

$$a^{j^2}a^{2i+1}=a^{j^2+2i+1}\notin L$$

  - אבל 2 המילים החדשות מגיעות לאותו מצב ב A ולכן קיבלנו שאותו מצב מקבל וגם לא, וזו סתירה
  - $L=\{a^nb^m|n\neq m\}$ - לא רגולרית
  - $L=\left\{a^nb^b|m\leq n+10\right\}$ - לא רגולרית
  - $L=\{a^nb^n|n\neq m\}^*$ - רגולרית - כי זה בעצם כל מילה

שיעור 6 - 22/11/18

<u>סגירויות שפות רגולירות</u>

- משלים - רגולרית - ע"י החלפת מצבים מקבלים ולא מקבלים
- איחוד/חיתוך - רגולריות - הוכחה:
  - ע"י אוטומט מכפלה: בהנתן A_1 אסד ל L_1, וA_2 ל L_2 כך ש $A_1 \times A_2$
  - האוטומט מתאר את ריצת A_1 על המילה במקביל את ריצת A_2 על אותה מילה.
  - בסגירות לאיחוד, כל מצב (q,p) באוטומט המכפלה יהיה מקבל אס"ם $p \in F$ או $q \in F$
  - בסיגרות לחיתוך, כל מצב (q,p) באוטומט המכפלה יהיה מקבל אס"ם $p \in F$ וגם $q \in F$
- שרשור - הוכחה בהמשך
- הפרש $L_1 \backslash L_2 = L_1 \cap \bar{L_2}$ רגולרית
- הפרש סימטרי $L_1 \triangle L_2$ רגולרי (הגדרת הפרש סימטרי)
- איטרציה - הוכחה בהמשך
- היפוך - רגולרית

<u>הוכח/הפרך</u>

1. עבור שפה L נגדיר $Subs(L) = \left\{y \in \sum^* | \exists x, z \in \sum^* \ \ st. \ xyz \in L\right\}$ כלומר $subs(L)$ מכילה את כל תתי המילים של המילים בשפה L , אם L לא רוגלורית $Subs(L)$ בהכרח לא רגולרית?

   לא נכון, ד"נ: ניקח את השפה $L = \{a^n b^n | n \in \mathbb{N}\}$ זוהי שפה לא רגולרית (הוכחנו בשיעור), ומצד $Subs(L)$ הינו $Subs(L) = \left\{a^k b^m | k, m \in \mathbb{N}\right\}$ שהוא איחוד שפות רגולריות

2. אם השפות $L_2, ...L_4$ הן רגלריות ומתקיים : $L_1 \cap L_2 = L_4$, $L_1 \cap L_2 = L_3$ אז L_1 רגולרית

   הוכחה (משהו פה מוזר)

$$L_1 = (L_3 \backslash L_2) \cup (L_1 \cap L_2) = (L_3 \backslash L_2) \cup L_1$$

כאשר הביטוי האחרון הוא אוסף ביטויים של שפות רגולריות ומסגיריות גם L_1 רגולרית, כנדרש

אוטומט אי-דטרמינסטי

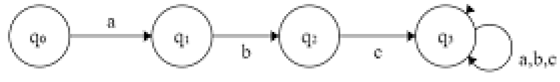
השוני הוא ש $\delta (q_0, a) = \{q_1, q_2\}$

כאשר אם יש יותר ממעבר אחד האוטומט לוקח בחשבון את כולם, אם אין מעברים בכלל האוטומט נתקע והמילה לא מתקבלת.

ואז $L(A)$ = $\{|w$ קיים מסלול חישוב של A על w המתחיל ב q_0 ומסתיים במצב מקבל $\}$

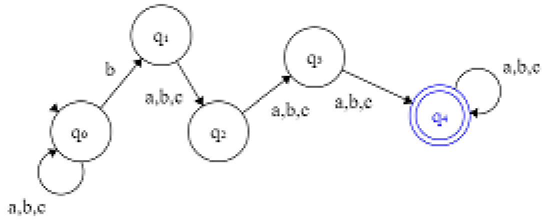
היתרון באס"ד שהוא מפשט את בניית האוטומט, דוגמה

בנו אוטומט שפת כל המלים מעל $\{a, b, c\}$ המכילות את הרצף $\{a, b, c$



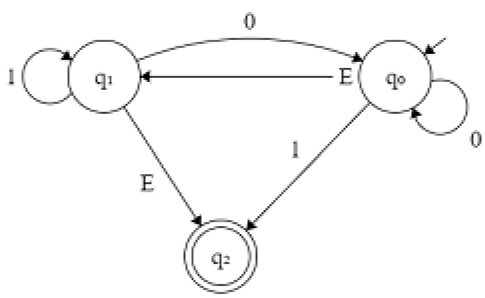
תרגיל

בנו אוטומט א"ד לשפה L כך האות הרביעית מהסוף ב w היא b כאשר $w\in\{a,b,c\}^*$



שיעור 7 - 11/18/29

- חזרה קצרה על אסל"ד עם מסעי ε



טענה $L(A)=\sum^*$

הוכחה:

נוכיח ש A מקבל כל מילה - באינדוקציה על אורך המילה כלומר לכל $w\in\sum^*$ $F\cap\delta\left(q_{1,}w\right)=\left\{q_2\right\},F\cap\delta\left(q_{0,}w\right)=\left\{q_2\right\}$

בסיס: $w=\varepsilon$אז $\delta\left(q_0,\varepsilon\right)=\left\{q_0,q_{1,q_2}\right\}$ בפרט הקבוצה מכילה את q_2 $\delta\left(q_1,\varepsilon\right)=\left\{q_1,q_2\right\}$ ובפרט הקבוצה מכילה את q_2

צעד: נניח נכונות לכל המילים באורך n ונוכיח בעבור מילים באורך $n+1$

תהא $n+1$ כאשר $|x|=n$ $\sigma\in\sum$, ונפצל למקרים:

- אם $\sigma=0$
  - אפשרות ראשונה:

$$\delta\left(q_0,w=\delta\left(q_00x\right)\right)=\delta\left(\delta\left(q_0,0\right),x\right)=\delta\left(\left\{q_0,q_1,q_2\right\},x\right)\supseteq\delta\left(q_0,x\right)$$

ומהנחת האינדוקציה $F\cap\delta\left(q_0,x\right)=\left\{q_2\right\}$ ולכן $F\cap\delta\left(q_0,w\right)=\left\{q_2\right\}$

  - אפשרות שנייה :

$$\delta\left(q_1,w\right)=\delta\left(q_10x\right)\right)=\delta\left(\delta\left(q_1,0\right),x\right)=\delta\left(\left\{q_0,q_1,q_2\right\},x\right)\supseteq\delta\left(q_0,x\right)$$

מהנחת האינדוקציה מכילה את q_2ולכן גם $\delta\left(q_1,w\right)$ מכילה את q_2

- אם $\sigma=1$ אז (א+ב):

$$\delta\left(q_0,w\right)=\delta\left(q_1,w\right)=\delta\left(q_1,1x\right)=\delta\left(\delta\left(q_1,1\right),x\right)=\delta\left(\left\{q_1,q_2\right\},x\supseteq\delta\left(q_1,x\right)\right)$$

ולפי הנחת האינדוקציה מכילה את q_2 לכן גם $\delta\left(q_1,w\right),\delta\left(q_0,w\right)$ מכילות את q_2

תרגיל:

עבור מצב q באוטומט א"ד נאמר ש q הוא מצב בור אם לכל $a\in\sum$ מתקיים $\delta\left(q,a\right)=\emptyset$. נגדיר מודל חדש הנקרא "אוטומט בור" בו כל מצב מקבל הוא מצב בור.

א. הוכיחו כי אם מרשים במודל זה בנוסף גם מסעי ε , אז הוא שקול למודל הרגיל.

נוכיח שקילות בין המודל הרגיל למודל "אוטומט בורות", תהי L שפה

1. אם קיים לה "אוטומט בורות" אז בפרט הוא מודל רגיל כי אוטומט רגיל הוא "אוטומט בורות" הוא מקרה פרטי של המודל הרגיל
2. אם קיים לה אוטומט מהמדול הרגיל אזי נבנה "אוטומט בורות" באופן הבא:
   - עבור כל מצב מקבל $q\in F$ נהפוך אותו למצב רגיל
   - נוסיף מצב מקבל יחיד q_F ועבור כל $q\in F$ נוסיף את המעבר $\delta_{new}\left(q,\varepsilon\right)=\delta_{old}\left(q,\varepsilon\right)\cup\left\{ q_F\right\}$

ב. אם לא מרשים מסעי ε , איזו תנאי צריכה לקיים שפה רגולית L שיהיה לה אוטומט מהמודל החדש?

פתרון:

תנאי $L=\left\{ \varepsilon\right\}$ או $\varepsilon\notin L$

- אם $L=\left\{ \varepsilon\right\}$ אז q_0 יהיה מצב מקבל
- אחרת, בהינתן Lכך ש $\varepsilon\notin L$ בהינתן אוטומט א"ד רגיל ל L נבננה אוטומט בורות באופן הבא: עבור כל מקבל $q_1\in F$ נבנה מצב חדש $q_1'\in F$ המהווה העתק מוחלט של q_1 כלומר כל כניסה ל $q)1$ תכנס גם ל q_1' וכל יציאה מ q_1 תהיה גם מ q_1'. לבסוף נמחק את כל היציאות מ q_1

שיעור 8 - 6/12/18

נזכר ברשימה האהובה שלנו:

סגירויות שפות רגולירות

- משלים - רגולרית - ע"י החלפת מצבים מקבלים ולא מקבלים
- איחוד/חיתוך - רגולריות - הוכחה:
  - ע"י אוטומט מכפלה: בהנתן A_1 אסד ל L_1, וA_2 ל L_2 כך ש $A_1\times A_2$
  - האוטומט מתאר את ריצת A_1 על המילה במקביל את ריצת A_2 על אותה מילה.
  - בסגירות לאיחוד, כל מצב $\left(q,p\right)$ באוטומט המכפלה יהיה מקבל אס"ם $p\in F$ או $q\in F$
  - בסיגרות לחיתוך, כל מצב $\left(q,p\right)$ באוטומט המכפלה יהיה מקבל אס"ם $p\in F$ וגם $q\in F$
- שרשור - הוכחה בהמשך
- הפרש $L_1\backslash L_2=L_1\cap\bar{L_2}$ רגולרית
- הפרש סימטרי $L_1\triangle L_2$ רגולרי (הגדרת הפרש סימטרי)
- איטרציה - הוכחה בהמשך
- היפוך - רגולרית

היום נוכיח:

סגירות להיפוך:

אם Lרגולרית אז L^R רגולרית, צ"ל להראות שבהנתן אוטומט ל L נבנה ממנו אוטומט ל L^R

- תהא L שפה רגולרית ויהא $A=(Q,\sum,q_0,\delta,F)$ האוטומט המקבל את L.
- נגדיר את האוטומט הבא: $A^R=(Q\cup\{q_s\},\sum,\delta_R,q_0)$
  - $\delta_R(q_s,\varepsilon)=F$
  - לכל $\delta(q,\sigma)=p$ נגדיר $q\in\delta_R(p,\sigma)$ (הפיכת כיוון החץ - נשים לב שהיפוך חיצים יכול להוביל לריבוי מצבים, ולכן הסימון $\in$)
- למעשה צ"ל להוכיח ש $A^R=L^R$
- נוכיח באינדוקציה על אורך המילה ש:

  נוכיח טענה חזקה יתר לכל $w\in\sum^*$

$$q\in\delta_R\left(p,w^R\right)\iff\delta(q,w)=p$$

בסיס: עבור $w=\varepsilon$ מכך ש A אס"ד מתקיים $\delta(q,\varepsilon)=q$ ובאותו אופן עבור A_R כי לא הוספנו מסעי ε פרט למסעי ε מq_s

צעד: נניח בעבור מילה באורך עד n ונוכיח מילה באורך $n+1$.

תהי $|w|=n+1$

$$\delta(q,w)=q\overset{1}{\iff}\delta(q,x\sigma)=p\overset{2}{\iff}\delta(\delta(q,x),\sigma)=p\overset{3}{\iff}\delta(r,\sigma)=p$$

$$\overset{4}{\iff}r\in\delta_R(p,\sigma)\wedge q\in\delta_R\left(r,x^R\right)\overset{2}{\iff}q\in\delta_R\left(\delta_R(p,\sigma),x^R\right)\overset{1}{\iff}q\in\delta_R\left(p,\sigma x^R\right)$$

1. הגדרת המילה. 2. הגדרת פונקצית מעברים מורחבת. 3. סימון $\delta(q,x)=r$. 4. הנחת האינדוקצה + הגדרת δ_R

תרגיל - הוכח / הפרך:

א. תהיינה L_1,L_2 שפות לא רגולריות כך ש $L_1\subseteq L_2$, ותהי L שפה המקיימת $L_1\subseteq L\subseteq L_2$ אז L בהכרח לא רגולרית.

פתרון:

לא נכון - ד"נ: ניקח את $L_1=\{a^nb^n\}$ $L=\{a^nb^m|n,m\in\mathbb{N}\}$, $L_2=\{a^nb^m|n,m\in\mathbb{N}\}\cup\{c^nd^n|n\in\mathbb{N}\}$
$L_1\subseteq L\subseteq L_2$

- L_1 לא רגורלית
- L_2 נניח בשלילה שכן אז $L_2\backslash L$ גם רגולרית מסגירות להפרש, מכאן ש $\{c^nd^n|n\in\mathbb{N}\}$ רגולרית בסתירה למשפט שהוכחנו בכיתה.

ב. תהי L שפה רגולרית אז $extend(L)=\left\{v\in\sum^{*}|\exists y\in L,w\in\sum^{*}\ \ s.t.\ v=uw\right\}$ גם היא בהכרח רגולרית

<u>פתרון:</u>

הטענה נכונה.

נשים לב ש $extend(L)=L\cdot\sum^{*}$ כאשר L שפה רגולרית מנתון, ו $\sum^{*}$רגולרית מהכיתה, ומסגירות לשרשור $extend(L)$ רגולרית גם כן.

שיעור 9 - 13/12/18

למת הניפוח

כאשר נרצה להוכיח ששפה היא רגולרית על בסיס שפות כלשהם, לרוב נשתמש בתוכנות הסגירות למינהן, אך אם נרצה להראות ששפה אינה רגולרית לרוב נשתמש בלמת הניפוח

הלמה:

אם L רגולרית אז: קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש : לכל $z\in L$ המקיימת $|z|\geq n$ קיים פירוק $z=uvw$ המקיים את :

1. $|uv|\leq n$
2. $1\leq|v|$
3. $uv^{i}w\in L$ לכל $0\leq i$

<u>תרגיל :</u>

1. הוכיחו שכל שפה סופית מקיימת את למת הניפוח:

נבחר n = גודל המילה המקיסמלית + 1 , וזוהי מילה שלא נמצאת בשפה, ולכן לא מתקיים לכל $z\in L$, ולכן הטענה מתקיימת באופן ריק.

2. הוכיחו ש $L=\left\{w\in\{a,b,c\}^{*}\,|\text{w contain 'abc'}\ \right\}$, מקיימת את הלמה:
   - נבחר את $n=4$, תהי $z\in L$ כש $|z|\geq n$
   - מכך ש $z\in L$ נובע ש z מכילה את הרצף abc , נפצל למקרים:
     - אם $abc\cdot\sigma\cdot x$ אז נבחר את $u=abc$, $v=\sigma$, $w=x$, ואכן:
       (א) $|uv|=4\leq4$
       (ב) $|v|=1\geq1$
       (ג) יהא $i\in\mathbb{N}$ אז $z'=abc\cdot\sigma\cdot x\in L$ כי z' מכילה abc
     - אם $\sigma\cdot x\cdot abc\cdot y$, $u=\varepsilon$, $v=\sigma$, $w=x\cdot abc\cdot y,$ ואכן
       (א) $|uv|=1\leq4$
       (ב) $|v|=1\geq1$
       (ג) יהא $i\in\mathbb{N}$ אז $z'=\sigma\cdot x\cdot abc\cdot y\in L$ כי z' מכילה abc

איך מוכיחים ששפה לא רגולרית באמצעות למה הניפוח?

<u>דוגמה:</u>

ניקח את $L=\{a^{n}b^{m}|n<m\}$, נוכיח ש L אינה רגולרית

- נניח בשלילה ש L רגולרית, ולכן מקיימת את למת הניפוח.

- כלומר נרצה להראות שלילת המשפט מתקיימת:

לכל $n \in \mathbb{N}$ כך ש : **קיימת** $z \in L$ כך ש: $|z| \geq n$ **לכל** פירוק $z = uvw$ המקיים את :

1. $|uv| \leq n$
2. $1 \leq |v|$
3. $uv^iw \in L$ **קיים** $0 \leq i$

- נבחר את $z = a^nb^{n+1}$ כי $n < n+1$ ואז $|z| = 2n+1 \geq 1$ יהא $z = u \cdot v \cdot w$ פירקו כלשהו המקיים :

1. $|uv| \leq n$
2. $|v| \geq 1$

- לפי $1,2$ נובע ש $v = a^k$ $(n \geq k \geq 1)$, נבחר $i = 2$ ונקבל ש :

$$z' = a^{n+k} + b^{n+1} \Rightarrow z' \notin L$$

כי $n+1 \leq n+k$, וזו סתירה

דוגמה 2 : $L = \{a^nb^n | n \in \mathbb{N}\}$ נוכיח ש L אינה רגולרית:

- נניח ש L רגולרית ולכן מקיימת את למת היפוח .
- יהא n הקבוע המובטח מהלמה, ונבחר : $z = a^nb^{4n} \in L$, $|z| = 5n \geq n$
- יהא $z = uvw$ פירוק כלשהו המקיים

1. $|uv| \leq n$
2. $|v| \geq 1|$

- לפי $1,2$נובע ש $v = a^k$ $(1 \leq k \leq n)$
  - נבחר $i = 0$ ונקבל :

$$z' = a^{n-k}b^{4n} \notin L$$

כי $4(n-k) \neq 4n$

שיעור 10 - 20/12/18

למת הניפוח:

שאלה: $L = \{a^p | \text{p is prime }\}$ האם רגולרית?

פתרון: L לא רגולרית, הוכחה:

- נניח בשלילה ש L רגולרית ולכן מקיימת את למת הניפוח
- ולכן יהא $n \in \mathbb{N}$ הקבוע המובטח מהלמה,
- נבחר $z = a^p \in L$, כאשר p הוא הראשוני הרשון הגדון מ n - ניתן לבחור אחד שכזה, כי ישנם ∞ ראשוניים (אוקלידס) ולכן $|z| = p \geq n$
- יהא פירוק $z = uvw$, פירוק כלשהו המקיים א ת:

1. $|uv| \leq n$
2. $|v| \geq 1$

- לפי $1,2$ נבחר $i = p+1$ ונקבל : $z' = a^{p+p|v|} = a^{p(1+|v|)} \notin L$
  - כי $p(1+|v|)$ פריק, מכך ש $|v|+1 \geq 2$ וכן $p \geq 2$, וזו סתירה.

<u>שאלה:$L = \{a^n b^m | n \neq m\}$ האם רגולרית?</u>

<u>פתרון:</u> L אינה רגולרית. <u>הוכחה:</u>

- נניח בשלילה ש L רגולרית ולכן מקיימת את למת הניפוח
- ולכן יהא $n \in \mathbb{N}$ הקבוע המובטח מהלמה.
- נבחר $z = a^n b^{n!+n} \in L$, $|z| =\geq n$
- יהא פירוק $z = uvw$, פירוק כלשהו המקיים א ת:

1. $|uv| \leq n$
2. $|v| \geq 1$

- לפי $1,2$ נבחר $i = \frac{n!}{|v|} + 1$ ונקבל : $z' = a^{n + \left(\frac{n!}{|v|}+1-1\right)|v|} b^{n!+n} = a^{n+n!} b^{n!+n} \notin L$ סתירה

<u>שאלה: האם השפה הבאה רגולרית ? הוכיחו $L = \left\{xy | x,y \in \{a,b,c\}^*,\ |x| = |y|\right\}$</u>

כן. הינה רגולרית. <u>הוכחה:</u>

$$L = \left\{xy | x,y \in \{a,b,c\}^*,\ |x| = |y|\right\} = \left\{w | w \in \{a,b,c\}^*,\ |w| \text{ is even}\right\}$$

ולזה בנינו אוטומט בתרגולים קודמים.

<u>שאלה: האם השפה הבאה רגולרית ? הוכיחו $L = \left\{w \in \{a,b,c\}^*,\ \#_a(w) \neq \#_b(w)\right\}^2 = L'$</u>

$$L = \left\{w \in \{a,b,c\}^*,\ \#_a(w) \neq \#_b(w)\right\}^2 = \left\{\sum^* \setminus \{\varepsilon, a, b\}\right\}$$

<u>הוכחת השוויון:</u>

נראה צד אחד: $\left\{\sum^* \setminus \{\varepsilon, a, b\}\right\} \subseteq L$

תהא w מילה השונה מ$\{\varepsilon,a,b\}$, ולכן $|w| \geq 2$ - נתבונן על 2 התווים האחרונים של w , לכומר $w = x \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2$ כאשר $|x| \geq 0$, נפצל למקרים:

- אם $x \cdot \sigma_1$ כמות ה aשונה מכמות ה b אז $x \cdot \sigma_1 \in L'$, ו $\sigma_1 \in L'$ ולכן $w \in L$
- אם ב $x \cdot \sigma_1$ כמות ה a שווה לכמות ה b
  - אם $\sigma_1 = \sigma_2$ נפרק $x \in L'$, $\sigma_1\sigma_2 \in L'$
  - אם $x \cdot \sigma_1$ מכילה כמות זהה של a,b ו $\sigma_1 \neq \sigma_2$
    - * אם $x = \varepsilon$ נפרק $\sigma_1 \in L'$, $\sigma_2 \in L'$
    - * אחרת, נתבונן ב $w = \underbrace{y \cdot \sigma}_{x} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2$, $y \in L'$, וכאן זו מילה באורך 3 ולכן $\sigma\sigma_1\sigma_2 \in L'$ ולא ניתן שתהיה כמות זהה.

<u>שאלה: האם השפה הבאה רגולרית ? הוכיחו $L = \{(01)^n 0 (10)^n | n \in \mathbb{N}\}$</u>

<u>תשובה:</u> כן. <u>הוכחה:</u>

$$\{(01)^n 0 (10)^n | n \in \mathbb{N}\} = \left\{0(10)^{2n} | n \in \mathbb{N}\right\}$$

ולזה ניתן לבנות DFA

ביטויים רגולרים

ביטוי המורכב מ:

1. אותיות הא"ב $\sum$ או ε
2. פעולות: $\cdot$(שרשור), + (איחוד), * (איטרציה)
3. סוגריים

נסמן $L[r] = \sum^*$

דוגמאות:

- $\sum = \{a, b\}$ למשל $aabb \in L$
  $r_1 = (a+b)^*$
- $r_2 = a^* + b^*$
- $r_3 = a^* b^*$

איך הופכים ביטוי לשפה?

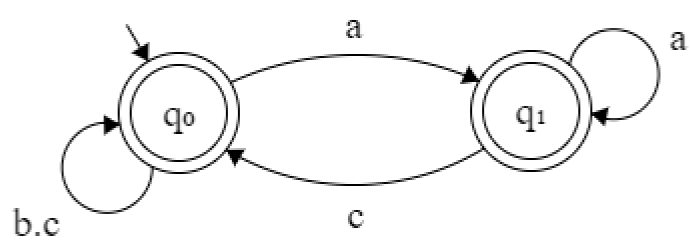
- $L[\sigma] = \{\sigma\}$
- $L[(r_1 + r_2)] = L[r_1] \cup L[r_2]$
- $L[(r_1 \cdot r_2)] = L[r_1] \cdot L[r_2]$
- $L[(r_1^*)] = (L[r_1])^*$

דוגמה

$$L[r_1] = L\left[(a+b)^*\right] = (L[(a+b)])^* = (L[a] \cup L[b])^* = (\{a\} \cup \{b\})^* = \{a, b\}^*$$

בניית ביטוי רגולרי עבור שפות

- $L_1 = \left\{w \in \{a,b,c\}^* \mid |w| \text{ even}\right\}$ אז $r_1 = ((a+b+c)(a+b+c))^*$
- $L_1 = \left\{w \in \{a,b\}^* \mid \ [|w|]_3 = 1\right\}$ $R_2 = (a+b)[(a+b)(a+b)(a+b)]^*$
- $L_1 = \left\{w \in \{a,b,c\}^* | abc \in w\right\}$ $r_3 = (a+b+c)^* \cdot a \cdot b \cdot c \cdot (a+b+c)^*$
- $L_1 = \left\{w \in \{a,b,c\}^* | ab \notin w\right\}$ $r_4 = \left((b+c)^* \cdot (\varepsilon + a \cdot a^* \cdot c)\right)^* \cdot a^*$



נבנה דרך האוטומט את הביטוי הרגולרי ע"פ: שתי אותיות על קשת = $+$, מעבר = $\cdot$, מעגל = $*$

נבנה: ביטוי המגיע ל q_1 + ביטוי המגיע ל q_0= r_4

$q_1 = q_0 \cdot a \cdot a^*$, $q_0 = \left((b+c)^* + (b+c)^* aa^*c\right)^*$

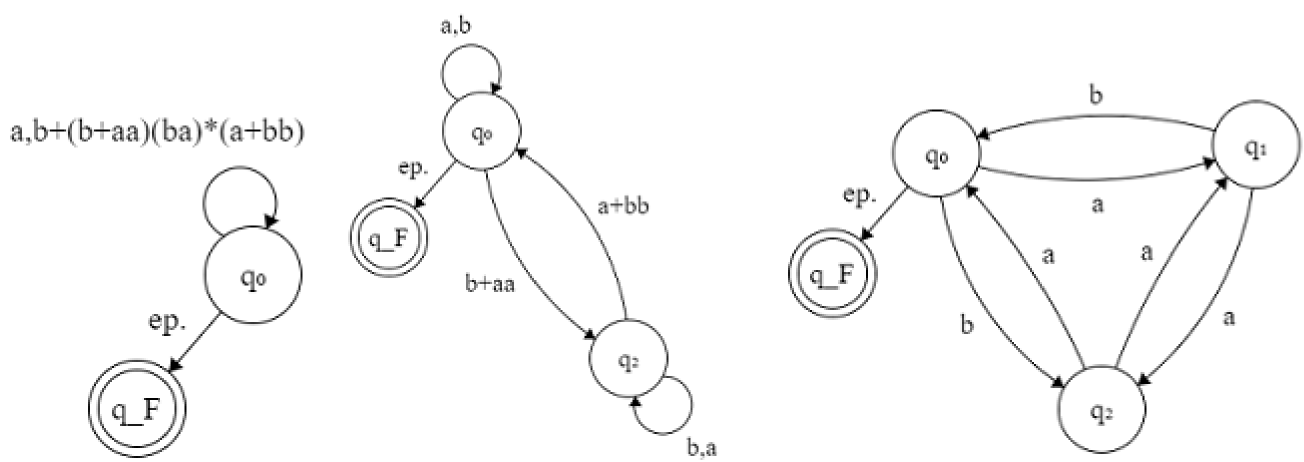
אלגוריתם לבניית ביטוי רגולרי לשפה כללית:

1. לבנות לשפה אוטומט א"ד כמה שיותר מינימאלי לאוטומט יהיה מצב מקבל יחיד שאינו ההתחלתי.
2. המטרה: למחוק מהאוטומט את כל המצבים חוץ מההתחלתי והמקבל

- **איך מוחקים מצב?**
- נאחד חצים עם אותיות נפרדות לביטוי רגיל של $+$

דוגמה: $L_1 = \left\{w \in \{a,b,c\}^* \mid \text{num of a and b equale mod 3}\right\}$ בנה ביטוי רגולרי המתאר את השפה.

- כעת נבנה ע"פ האלגוריתם:



- ולסיום:

$$r_4 = \left(ab + (b+aa)(ba)^*(a+bb)\right)^*$$

תרגול 12 - 03/01/19

נפתור שאלות ממבחנים:

1. יהיה $\sum = \{0,1\}$ האם השפה $L_1 = \left\{ww^R \mid w \in \sum^*\right\}$ רגולרית?

פתרון: לא . הוכחה: (שלילת למת הניפוח)

- נניח ש L_1 רגולרית והי $n \in \mathbb{N}$ הקבוע מהלמה . נבחר: $z = 0^n1^n1^n0^n$ עבור $w = 0^n1^n$
- $|z| = 4n \geq n$ ויהי $z = uvw$ פירוק כלשהו המקיים ש:
  - $|v| \geq 1$
  - $|uv| \leq n$

- נבחר $i=0$ ונקבל $z'=uv^0w=0^{n-|v|}1^n1^n0^n\notin L_1$
- כי כמות ה 0ים בתחילת z' שונה מכמות ה 0ים בסיום z' כי $|v|\geq 1$

2. $L_2=\left\{b^nc^{2n}|2n^2-20n+100\leq 20-4n\right\}$ רגולרית?

- נבדוק את התנאי

$$\begin{gathered}2n^2-20n+100\leq 20-4n\\ \Downarrow\\ n^2-8n+40\leq 0\\ \triangle<0\\ \Downarrow\\ \text{no solutions}\end{gathered}$$

- לכן $L_2=\left\{b^nc^{2n}|2n^2-20n+100\leq 20-4n\right\}=\phi$ והראנו בכיתה שזו שפה רגולרית, כנדרש.

3. $L_3=\left\{a^nb^mc^kd^l|\begin{array}{r}1<n<3\\ m=3n\\ \left[k\right]_3=1\\ \left[l\right]_2=0\end{array}\right\}$ רגולרית?

- מתקיים ש:

$$L_3=\left\{a^2b^4\right\}\cdot\left\{c^k|\left[k\right]_3=1\right\}\cdot\left\{d^l|\left[l\right]_2=0\right\}$$

- $r_1=aabbbb$
- $r_2=c\left(ccc\right)^*$
- $r_3=\left(bb\right)^*$
- רגולרית*רגולרית*רגולרית= L_3 , ומסגירויות של שפות רוגלורית גם L_3 רגולרית, כנדרש

4. תהיינה L_1,L_2 $Shuffle\left(L_1,L_2\right)=\left\{u_1v_1u_2v_2,...,u_nv_n|n\geq 1,u_i\in L_1,v_i\in L_2\right\}$

הוכח/הפרך:

(א) אם L_1,L_2 רגורלית אתז $shuffle$ רגולרית

(ב) אם $Shuffle(L_1,b_1)$ אז L_1,L_2 רגולרית

פתרון:

(א) כן. הוכחה:

- נניח ש L_1,L_2 רגולרית , לכן קיים לכל אחת מהן ב"ר. r_1,r_2 בהתאמה
- כעת נבנה ה"ר לשפה $Shuffle\left(L_1,L_2\right)$: $r_1r_2\left(r_1r_2\right)^*$

(ב) לא. ד"נ: (הרעיון אחת רגולרית השניה לא, והרגולרית "בולעת" את הלא)

- נגדיר $L_1=\left\{a^p|\text{p is prime }\right\}$ - לא רגולרית, $L_2=\left\{a^n|n\in\mathbb{N}\right\}$ - רגולרית
- לכן $Shuffle\left(L_1,L_2\right)=\left\{a^n|\begin{array}{l}n\in\mathbb{N}\\ n\geq 2\end{array}\right\}$ רגולרית
- לכן קיבלנו $Shuffle$ רגולרית, ו L_1 לא.

5. <u>הוכיח את הגירסה הבאה של למת הניפוח:</u> תהי L שפה רגולרית אזי קיים $n \in \mathbb{N}$ כך שלכל מילה z ב L שאורכה לפחות n קיים פירוק מהצורה $z = uvw$ כאשר:

(א) $|uv| \leq n$

(ב) $|v| \geq 1, |u| \geq 2$

(ג) לכל $i \in \mathbb{N}$ $u \cdot v^i \cdot w \in L$

<u>הוכחה:</u>

- תהי L שפה רגולרית לכן קיים ל L אס"ד עם $k = |Q||$ מצבים.
- נבחר: $n = k + 2$.
- תהיי $z \in L$ מלה כך ש: $|Z| \geq k + 2$, נגדיר את היירשו תהבאות של $z = \sigma_1\sigma_2, \sigma_3....\sigma_{k+2}x$ כאשר $\sigma_i \in \sum$ לכל $1 \leq i \leq k + 2$, $x \in \sum^*$
  - $z_2 = \sigma_1\sigma_2$
  - $z_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$
  - $z_4 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4$
  - ....
  - $z_{k+2} = \sigma_1\sigma_2.....\sigma_{k+2}$
- כעת, ישנן $k + 1$ ריישות וכל קריאה של אחת מהן החל מ q_0 תסתיים במצב כלשהו באוטומט.
- ישנן $k + 1$ ריישות , k מצבים באוטומט ולכן לפי עיקרון שובך היונים קיימים $2 \leq i < j \leq k + 2$ כך ש: $\delta(q_0, z_0) = \delta(q_0, z_j)$
- נגדיר את הפירוק הבא: $\left\{\begin{matrix} u = z_i \\ v = \sigma_{i+1}, \sigma_{i+2}, ...\sigma_j \\ w = \sigma_{j+1}, ...\sigma_{k+2}x, \end{matrix}\right\}$, נוכיח שהתאים מתקיימים:

  (א) $|uv| = j \leq k + 2 = n$

  (ב) $|v| = j - 1 \geq 1$, $|u| = |2_i| = i \geq 2$

  (ג) נוכיח באינדוקציה על i:

  <u>בסיס</u> עבור $i = 0$:

  - נקבל את המילה uw : $\delta(q_0, uw) = \delta(\delta(q_0, u), w) = \delta(\delta(q_0, z_i), w) = \delta(\delta(q_0, z_j), w) = \delta(\delta(q_0, uv), w) = \delta(q_0, uvw) = \delta(q_0, z) \in F$
  - כי $z \in L$

  <u>צעד:</u> $\delta\left(q_0, uv^iw\right) = \delta\left(\delta(q_0, uv)\, v^{i-1}w\right) = \delta\left(\delta(q_0, u)\, v^{i-1}w\right) = \delta\left(\delta\left(q_0, uv^{i-1}w\right)\right) \in F$

תרגול 13 - 10/01/19

מבחן תשע"ח מועד א

שאלה 1

האם השפות הבאות רגולריות:

1. $\underline{L_1 = \left\{x \in \{0, 1\} * | x = x^R\right\}}$

   תשובה: לא רגולרית. <u>הוכחה:</u>

- נניח שכן. ויהי $n \in \mathbb{N}$ הקבוע המובטח מהלמה.
- נגדיר $z = 0^n 1^n 0^n \in L_1$ כי $z^R = z$ ו $|z| = 3n \geq n$
- יהי $z = uvw$ פירוק המקיים 1. $uv| \leq n$ ו $|v| \geq 1$
- לפי 1 נובע ש $v = 0^k$ $(1 \leq k \leq n)$
- נבחר $i = 0$ ונקבל ש $z' = 0^{n-k}1^n0^n$ והרי $z \notin L_1$ כי $z' \neq 0^n1^n0^{n-k} = z^R$ סתירה

2. <u>$L_2 = \{(01)^n |n \ mod \ 4 = 0\}$</u>

- נבנה ב"ר :
  - $r_2 = (01010101) *$

3. <u>$L_3 = (a^{j!}|j > 0)$</u> - לא רגולרי <u>הוכחה</u>:

- נניח שכן. ויהיה $n \in \mathbb{N}$ הקבוע המובטח מהלמה.
- נגדיר $z = a^{n!} \in L_1$ כי $z^R = z$ ו $|z| = n! \geq n$
- יהי $z = uvw$ פירוק המקיים 1. $|uv| \leq n$ ו $|v| \geq 1$
- נובע ש ש $v = a^k$ $(1 \leq k \leq n)$
- נבחר $i = 2$ נקבל:
- $z' = a^{n!+k} \notin L_3$ כי :

$$n! \overset{k \geq 1}{<} n! + k \leq n! + n \overset{n \geq 2}{\leq} n! \cdot n \leq n! \, (n+1) = n!$$

- כלומר $n! + k$ אינו עצרת שלמה, ולכן המילה אינה בשפה

שאלה 2

<u>הוכח/הפרך</u>

1. <u>תהי L שפה רגולרית, אז $extend(L) = \{w \in m\{0,1\} * |\exists x \in L, y \in \{0,1\} * \ \ s.t. \ w = xy\}$ גם רגולרית?</u>

- פתרון: נשים לב ש: $extend(L) = L \cdot \sum^*$, זהו שרשור של שפות רגולריות, ומסגירות גם $extend(L)$ רגולרית, כנדרש

2. תהי L שפה כך ש $extend(L)$ רגולרית, אז L רגולרית. לא נכון:

3. נגדיר $L = \{a^n b^n | n \in \mathbb{N}\}$, $extend(L) = L \cdot \sum^*$ כי $\varepsilon \in L$ אז $extend(L)$ רגולרית , אבל L לא רגורלית

שאלה 3

<u>הוכח/הפרך</u>

1. <u>תהיינה L_1 שפה רגולרית כך ש $L_1 \cap L_2$ רגולרית</u>

   פתרון: דוגמה נגדרית

- $L_1 = \phi$, $L_2 = \{0^n a^n | n \in \mathbb{N}\}$
- אז $L_1 \cup L_2 = \phi$ רגולרית L_1 רגולרית ו L_2 לא רגולרית

2. <u>תהיינה L_1, L_2 שפות לא רגולרית מעל $\sum$, כך ש $L_1 \subseteq L \subseteq L_2$ אז L לא רגולרית</u>

   <u>פתרון - ד"נ:</u>

- $L_1 = \{a^n b^n | n \in \mathbb{N}\}$ לא רגולרית מהכיתה
- $L = \{a^n b^m | n, m \in \mathbb{N}\}$ רגולרית מהכיתה
- $L_2 = \{a^n b^m | n, m \in \mathbb{N}\} \cup \{a^n c^n | n \in \mathbb{N}^+\}$
- כעת מתקיים ש : $L_1 \subseteq L \subseteq L_2$
  - נותר להוכיח ש L_2 רגולרית
  - נניח שכן , אז: $L_2 \backslash L = \{a^n b^n | n \in \mathbb{N}\}$ כי החיתוך ריק.
  - L_2 רגולרית מהנחה ו L רגולרית , ומסגירות נקבל שגם $\{a^n b^n | n \in \mathbb{N}\}$ רגולרית - סתירה.

שאלה 4

כתבו ביטוי רגולרי עבור השפות הבאות.

1. <u>כל המילים מעל $\{a, b\}$ שלא מכילות רצף של $'aa'$</u>

$$r_1 = \underbrace{(b^*ab)^*}_{prefix}\underbrace{b^*(a+\varepsilon)}_{suffix}$$

2. <u>כל המילים מעל $\{0, 1\}$ שיש בהן 4 אותיות לכל היותר</u>

$$r_2 = (\varepsilon + 0 + 1 + 00 + 01 + ... + ... + 1010 + ... + 1111)$$

3. <u>כל המילים מעל $\{0, 1\}$ שלא מכילות 101 כתת מילה</u>

$$r_3 = (0 + 11^*00)^* \left(\varepsilon + 11^* \left(\varepsilon + 0\right)\right)$$