סיכום מבנים דיסקרטים למדעי המחשב

נעם דומוביץ

25 ביוני 2019

תוכן עניינים

חלק I

אוסף שאלות ודוגמאות מהשיעורים והתרגולים

1 קומבינטוריקה

1.1 בעיות מניה

1. כמה אפשרויות ישנן לסדר במעגל n איברים שונים?

- ניתן לומר שלבחירת המושב הראשון אין משמעות -לכן כל "ההתחלות זהות" - כי אין נק' התחלה למעגל - ולכן זו אפשרות 1
- כעת לאחר שבחרנו, ניתן "לחתוך" את המעגל, ולפתור כמו בשאלה קודמת - כמו בשורה - ולכן נותרו $n-1$
- ובסה"כ $1\cdot(n-1)(n-2)....(1)=(n-1)!$

2. כמה פתרונות בטבעיים יש למשוואה $x_1+x_2+.....+x_n=k$, פתרון של משוואה הוא סדרה באורך n של טבעיים?

- ננתח את השאלה: מצד אחד מותר חזרות, ומצד שני אין חשיבות לסדר
- נטען: שזו בדיוק השאלה עם חלוקה של k כדורים זהים ל nתאים שונים , מחלקים k 1'ים ל n משתנים שונים.
  - מס' הכדורים בתא ה i הוא בדיוק ערך המשתנה x_i לכן $D(n,k)$

3. (וריאציה נוספת) כמה פתרונות בטבעיים יש למשוואה $x_1+x_2+.....+x_n\leq k$, פתרון של משוואה הוא סדרה באורך n של טבעיים?

(א) דרך א:

- למנות את האפשרויות הבאות:
  - $x_1+x_2+....+x_n=k$
  - $x_1+x_2+....+x_n=k-1$
  - ..
  - $x_1+x_2+....+x_n=0$
- כל אחת מהמשוואות אנחנו יודעים לפתור (שאלה קודמת) + וכל שנותר זה לחבר בין התוצאות - $\sum_{i=0}^{k}D(n,i)$
- אבל זה **ארוך.**

(ב) דרך ב:

- נוסיף משתנה y שיהיה ההפרש בין k לבין $x_1+x_2+...+x_n$, ואז נרצה למצוא את מס' הפתרונות הטבעיים של המשוואה:

$$x_1+x_2+....+x_n+y=k$$

- לכן נקבל משוואה עם $n+1$ מתשנים, ואותו הסכום - k . לכן הפתרון $D(n+1,k)$

(ג) לסיכום, הראנו: $D\left(n+1,k\right)=\sum_{i=0}^{k}D(n,i)$

4. כמה אפשרויות ישנן לבחור 3 טבעים שונים בין 1 ל 1000 (כולל) כך שסכומם יתחלק ב 3 (ללא חישבות לסדר הבחירה)

(א) דרך ב: נפצל למקרים

- $\binom{333}{3}$ - הן האפשרויות לבחור 3 מספרים שמתחלקים ב 3
- $\binom{334}{3}$ - הן האפשרויות לבחור 3 מספרים שמתחלקים ב 3 עם שארית 1

- $\binom{333}{3}$ - הן האפשרויות לבחור 3 מספרים שמתחלקים ב3 עם שארית 2
  - בינהם חיבור
- 333 - הן האפשרויות לבחור מספר 1 שמתחלקים ב 3
- 334 - הן האפשרויות לבחור מספר 1 שמתחלקים ב 3 עם שארית 1
- 333 - הן האפשרויות לבחור מספר 1 שמתחלקים ב 3 עם שארית
  - בינהם כפל
- בסה"כ:

$$\binom{333}{3}+\binom{333}{3}+\binom{333}{3}+333\cdot 334\cdot 333$$

5. <u>כמה אפשרויות ישנן לבחור 2 תת קבוצות מתוך קבוצה בגודל n כך ש:</u>

- תת קבוצה אחת היא בגודל K .
- תת קבוצה שניה היא בגודל L .
- ידוע לנו ש $K+L\leq N$
- האיבר הגדול ביותר בקבוצה K קטן מהאיבר הקטן ביותר בקבוצה שבגודל L

<u>פתרון:</u> (בדרך כלל שאלות ארוכות מובילות לתשובה קצרה)

- כשאנו רוצים לבחור שתי תתי־קבוצות מתוך קבוצה בגודל N , ואנחנו יודעים שבקבוצה אין חזרות (N איברים שונים) נובע שגם בתתי הקבוצות כל האיברים יהיו שונים - **בלי חזרות**
- מכיון שבקבוצה **אין חשיבות לסדר,** אז סדר הבחירה של k האיברים או l האיברים לא חשוב לנו .
- **הקבוצות זרות** מנתון שהאיבר הכי גדול ב K קטן מהאיבר הכי גדול ב L , כלומר:

$$\underbrace{\{.........\}}_{K}<\underbrace{\{.........\}}_{L}$$

- על כן נבחר את האיברים לשתי הקבוצות ביחד, ואחר נחלקם ל2 קבוצות, כלומר:
  - $\binom{n}{k+l}$ בחירת האיברים ל 2 הקבוצות
  - מספר האפשרויות לסידור הוא 1 (בגלל התנאי של הזרות בשאלה).
  - נשתמש בעקרון הכפל בין מספר הקבוצות למספר האפשרויות לסידור.
  - ובסה"כ:

$$\binom{n}{k+l}\cdot 1$$

6. <u>כמה סדרות בינאריות באורך n. בהן מופעים בדיוק k 1ים לא סמוכים ישנן (ללא רצף '11') ?</u>

<u>דרך א':</u>

- נסדר את כל $n-k$ הס0ים , וכעת נתייחס לרווחים בינהם כמו לתאים ול0ים כמו מחיצות, נרצה לחשב את מספר האפשרויות לתאים עם 1 בודד או ללא 1 בכלל
- כלומר מתוך $n-k+1$ מקומות אפשריים להכנסת 1 , נבחר k מקומות - בחירה בלי חזרות, ובלי חשיבות לסדר
- לכן $\binom{n-k+1}{k}\cdot 1$
- כאשר הכפלנו ב 1 כי ל0ים ישנה אפשרות סידור

<u>דרך ב':</u>

- נסדר את ה 1 בשורה (אפשרות 1), ובין האחדים מימין ומשמאל יש $k+1$ תאים, ובכל תא חייב להיות לפחות 0 אחד
- היות ויש לנו $k+1$ תאים לתוכם צריך להכניס $n-k$ כדורים, כשבכול התאים מלבד שניים לפחות כדור אחד

- נכניס לכל תא שצריך כדור אחד, מה שישיאר לנו $n-k-(k-1)=n-2k+1$
- וכעת נשתמש בנוסחה $D(k+1,n-2k+1)$

לסיכום:

- נוודא שאכן התוצאות תקניות:

$$\binom{n-k+1}{k}\cdot 1=0 \iff k>n-k+1 \iff 2k>n+1 \iff k=\frac{n+1}{2}$$

7. כמה אפשרויות ישנן לבחור k שלמים מתוך הקבוצה $\{1,2....n\}$ ככה שלא יהיה אף זוג שלימים עוקבים?
   - נשים לב שה n ו ה 1 מיוחדים כי להם יש "עוקב" אחד.
   - כמו כן, זו שאלה זהה לשאלה הקודמת
   - נסתכל על הקבוצה $\{1,2...,n\}$ כל בחירה של k איברים שונים נותנת סדרה בינארית באורך n שיש בה k אחדים.
   - הסבר:
     - משום שאם בחרנו את המספר ה i במקום ה i בסדרה נכתוב 1.
     - במידה ולא בחרנו את המספר i אז במקום ה i נכתוב 0

1.2 עקרון שובך היונים

1. תהי A קבוצה $A=\{1,2,...,9\}$, הוכיחו שבכל תת־קבוצה של A שיש שבה 6 איברים יש שני מספרים שסכומם 9?
   - נחלק את A ל 5 קבוצות: $\{0,9\},\{1,8\},\{2,7\},\{3,6\},\{4,5\}$
   - ישנם 5 זגות מספרים ב A שסכומם 9
   - נבחר 5 מספרים אם בחרנו את זוג מאותה קבוצה סיימנו
   - אחרת, נבחר איבר שישי ומעקרון שובך היונים בחרנו איבר שנכנס ל"שובך" = קבוצה , ולכן יש לנו זוג שסכומו 9
2. הוכיחו שבכל קבוצה של אנשים יש לפחות 2 אנשים שמכירים בדיוק אותו מספר אנשים בקבוצה (הכרות הוא יחס סימטרי + לא מכיר את עצמו)
   - נסמן ב n את מספר האנשים בקבוצה כאשר $n>1$
   - מקסימום האנשים שאדם יכול להכיר הוא $n-1$ (ללא עצמו)
   - נשים לב שלא יתכן שיש אדם שיכיר 0 אנשים וגם אדם שמכיר את כולם
   - לכן "מספר ההכרויות" הם או בקבוצה מ $0,1,...,n-2$ או בקבוצה $1,2,....,n-1$
   - בשני המקרים ישנם $n-1$ "הכרויות" = שובכים
   - מנתון ישנם n אנשים = יונים
   - לכן ישנם 2 אנשים שנכנסים לאותו שובך = אותו מספר הכרויות
3. צלף קולע 5 חיצים לעבר מטרה שצורתה משולש שווה צלעות שאורך צלעו 2 מטרים, הוכח שאם כל החיצים פוגעים במטרה אז יש בהכרח שני חצים שיפגעו במטרה במרחק של מטר 1 לכל היותר.
   - נחלק את המשולש לארבעה חלקים
   - אם שני חצים פגעו באותו משולש "קטן" אז המרחק בינהם הוא 1
   - נניח בשלילה שכל חץ פגע במשולש "קטן" אחר
   - מכיוון ויש 4 משולשים ו 5 חיצים, קיבלנו סתירה, ולכן הטענה נובעת.
4. תהי X תת־קבוצה של $\{1,2,...2n\}$ בת $n+1$ איברים. הוכיחו שיש ב X 2 מספרים כך שהאחד מחלק את השני ללא שארית?

- כל מספר טבעי ניתן לפרק לגורמים באופן יחיד (עד כדי סדר)
- מסקנה: כל מספר ניתן לכתוב כחזקה של 2 × מספר אי זוגי , כלומר:

$$y = 2^t(3r + 1)$$

- מסקנה: לכל שני מספרים בחזקה 2 , אחד מהם מחלק את השני ללא שארית
- מסקנה: על כן כל שני מספרים בפרקו הנ"ל יש להם אותו כופל אי־זוגי, אחד מהם מחלק את השני ללא שארית
- נראה שבכל תת קבוצה X בגודל $n+1$ של הקבוצה $1, 2, ...2n$, יש שני מספרים שיש להם אותו כופל אי־זוגי בפירוק שתיארנו
- כל כופל אי־זוגי יהיה בין 1 ל 2n לכן מספר הכופלים האי זוגיים הוא לכל היותר n . מכיוון ש $|X| > n$ בהכרח קיימים 2 מספרים איזוגיים כלומר:
  - $y_1 = 2^{t_1}(2r + 1)$
  - $y_2 = 2^{t_2}(2r + 1)$
- ומכאן ש (בה"כ) y_1 מחלק את y_2

5. הוכיחו : בקבוצה של 13 איש קיימים לפחות 2 שנולדו באותו חודש?

- נגדיר ש13 האנשים יהיו היונים
- נגדיר את החודשים כשובכים ־ 12
- נצמיד כל איש לחודש שבו הוא נולד (שורה זו מראה שכל איש/יונה נכנסה לאיזשהו שובך
- כיוון ויש יותר אנשים מחודשים, מעקרון שובך היונים קיימים 2 אנשים לפחות שנולדו באותו חודש.

6. הוכיחו: אם שמים 91 מכתבים ב 10 תאים אז קיים תא שבו לפחות 10 מכתבים

- נגדיר את המכתבים כ יונים ־ 91
- נגדיר את התאים כשובכים ־ 10
- נצמיד כל מכתב לתא שהוא נכנס ־ מעקרון משובך היונים המורחב ־ יש תא עם 10 מכתבים

7. 30 אוטובוסים בכל אוטובוס 80 מקומות 2000 איש. הוכיחו:

   (א) באחד האוטובוסים יש לפחות 14 מקומות פנויים

   (ב) אחד האוטובוסים יכיל לפחות 67 נוסעים

פתרון:

- נתחיל מב': ונראה כמו בהוכחה של עקרון השובך היונים.
  - נניח בשלילה שבכל האוטובוסים יש 66 אנשים, יש 30 אוטובוסים אז יש $30 \times 66 = 1980 < 2000$, סתירה לנתון.
- נחזור לא': $88 - 67 = 13$, כלומר נניח בשלילה שאין אוטובוס כזה $\Longleftrightarrow$ בכל האוטובוסים יש לפחות 67 אנשים, אז $30 \times 67 = 2010 > 2000$, סתירה לנתון

8. הוכיחו שאם בוחרים 7 מספרים שונים מקבוצה אז קיימים 2 (מאלה שבחרנו) שסכומם הוא 12

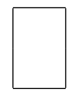
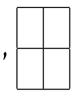
- נגדיר את השובכים הבאים : $\{6\}, \{1, 11\}, \{8, 4\}, \{2, 10\}, \{3, 9\}, \{7, 5\}, \{8, 4\}$
- כל מספר שבחרנו (מה7) , נכיס לשובך שבו הוא מופיע ומעקרון שובך היונים. קיים שובך שבו 2 יונים.

9. יש חברה עם 15 אנשים, כאשר כמה מהם לחצו ידיים לחלק (/או כולם) משאר האנשים. הוכיחו כי יש 2 אנשים שלחצו ידיים לאותו מספר אנשים?

- נגדיר שובכים: את המספרים השונים ללחיצות הידיים לכן: $\lfloor 14 \rfloor \quad \lfloor 13 \rfloor \quad ... \quad \lfloor 2 \rfloor \quad \lfloor 1 \rfloor \quad \lfloor 0 \rfloor$

- נגדיר <u>יונים:</u> את מספר האנשים
- <u>הבעיה:</u> יש 15 תאים, ו15 יונים וכרגע לא נוכל להשתמש בעקרון שובך היונים, **אבל**
- נטען שיש 14 תאים כי אם יש משהו שלחץ ידיים ל14 אנשים, אז בהכרח לכל האנשים נלחצה היד (לחיצת יד היא יחס סימטרי), ולכן לא קיים אדם עם 0 לחיצות יד - לכן יש 14 תאים
  - באותו אופן אם יש משהו לא לחץ אף יד $\Leftarrow$ לא קיים אדם שלחץ יד לכולם
- כעת, <u>מעקרון שובך היונים (המורחב)</u> , יש 2 אנשים שלחצו את אותו מספר לחיצות ידיים.

10. ריבוע שצלעו 2 , קלע ירה 5 כדורים בריבוע הזה. הוכיחו שיש שתי פגיעות שמרחקן לכל היותר $\sqrt{2}$?

- הריבוע נראה כך 
- נחלקו ל 4 :  , כעת כל צלע היא 1 , ומפתגורס כל אלכסון (המרחק המקסימלי) הוא $\sqrt{2}$
- לכן מעקרון שובך היונים...

11. הוכח שקיימים $a,b\in\mathbb{N}$ $a\neq b$ כך ש: $57|2^a-2^b$

- נשתמש ב<u>למה:</u> בקבוצה A של $n+1$ מספרים טבעיים, קיימים 2 $a,b\in A$ כך ש: $a\equiv b(\mod n)$ (מעקרון שובך היונים)
- מתורת המספרים $a\equiv b(\mod n) \iff a-b\equiv 0(\mod n)$
- נתבונן בקבוצה: $A=\left\{2^0,2^2,....2^{57}\right\}$ לכן $|A|=58$ - נגדירה <u>כיונים</u>
- נגדיר את השאריות מודולו 57 כשובכים,
- ניקח את שניהם וההפרש בינהם יהיה כנדרש

12. הוכיח שקיים מספר שניתן לרשום אותו רק ע"י הספרות 0,7 שמתחלק ב 359

- נרצה $|A|=360$ נגדיר את $A=\left\{7,77,777,....\underbrace{7.....7}_{360}\right\}$

1.3 הוכחות קומבינטוריות

1. <u>הוכיחו: $\binom{2n}{2}=2\binom{n}{2}+n^2$:</u>

- <u>אגף שמאל:</u> בחירת 2 איברים שונים ללא חשיבות לסדר מתוך $2n$ איברים שונים.
- <u>אגף ימין:</u> נשים לב שיש חיבור ולכן "נחלק למקרים" - כלומר נחלק את $2n$ איברים ל 2 קבוצות בנות n איברים כל אחת, כעת:
  - $\binom{n}{2}$ - היא בחירת **זוג** איברים מקב' 1
  - $\binom{n}{2}$ - היא בחירת **זוג** איברים מקבוצה 2
  - $\binom{n}{1}\binom{n}{1}=n\cdot n=n^2$ - בחירת **זוג** ע"י נציג מכל קבוצה .
  - סה"כ: $2\binom{n}{2}+n^2$

2. <u>הוכיחו: $\sum_{i=2}^{n}(i-1)2^{n-1}=2^n-n-1$:</u>

- <u>אגף ימין:</u> הוא מס' הסדרות הבינאריות באורך n שיש להן לפחות 2, 1ים .
  - יש סדרה אחת ללא 1ים , ישנן n סדרות עם 1 יחיד

<u>תאור נוסף:</u>

- 2^n מס' תת הקבוצות של קבוצה בת n איברים
- -1 : ללא קבוצה ריקה
- $-n$: שאין בהן איבר יחיד
- כלומר מס' תת הקבוצות המכילות לפחות 2 איברים.

• אגף שמאל:

- נתבונן בסכום: $\sum_{i=2}^{n}(i-1)2^{n-i} = 2^{n-2} + 2\cdot 2^{n-3} + 3\cdot 2^{n-4} + ... + (n-1)\cdot 2^0$
- נרצה להראות שגם אגף שמאל מתאר את אותו הסיפור
- נגדיר את i להיות האינדקס של ה1 השני בסדרה (מבין ה1ים) -
  * אכן הערך המינמלי ל i הוא 2 . והמקסימלי הוא n .
  * לכל סדרה בת לפחות 2 1ים, מוגדר i אחד ויחיד (הסדרות זרות)
- מדוע?
  * **לא נכון לומר:** ל - 2 סדרות שונות מתאימים iים שונים.
  * **אלא:** נספור לכל $2 \le i \le n$ את כל הסדרות שיש להן אותו i , לכל $i \neq j$ יתאימו סדרות שונות כל סדרה באורך n עם 2 1ים לפחות תספור פעם אחת בדיוק
- נראה שעבור i נתון ישנן $(n-i)\cdot 2^{n-i}$ סדרות מתאימות:
  * ב$i-1$ המקומות הראשונים בדרה יש 1 יחיד, ישנן $i-1$ אפשרויות למקום את ה 1 הזה:
  * מהמקום ה $i+1$ ועד למקום ה n כל סדרה אפשרית.
  * ישנן 2^{n-i} סדרות
  * לפי עקרון הכפל נקבל: $(i-1)2^{n-i}$
  * בדיאגרמה:

$$\underbrace{\lfloor\ \rfloor\quad\lfloor\ \rfloor\quad\lfloor\ \rfloor\quad\lfloor\ \rfloor}_{\substack{i-1\\ \text{for } 1}}\underbrace{\lfloor 1\rfloor}_{i}\underbrace{\lfloor 1/0\rfloor\quad\lfloor 1/0\rfloor\quad\lfloor 1/0\rfloor\quad\lfloor 1/0\rfloor}_{n-i}$$

בקבוצות:

- נגדיר את i להיות האיבר השני הקטן ביותר בקבוצה מתוך $i-1$ איברים
- יש לבחור 1 לקב', ומתוך שאר $n-i$ האיברים יש לבחור תת קבוצה כלשהי

3. הוכיחו בדרך קוב' ש: $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$

• נתאר כיתה עם n בנית ו n בנות, ורוצים לבחור ועד של n אנשים.

• נשין לב שניתן לחלק את אפשרויות לבחירה הזו של $n+1$ אפשרויות לפי בנים נבחרו

• נגדר
  - k כמה בנים נבחרו
  - $n-k$ הבנות שנבחרו

• האפשרויות עבור k הן $0,1,...,n$ ועבור כל k מס' האפשרויות היא $\underbrace{\binom{n}{n-k}}_{\text{choosing } n-k \text{ girls from } n \text{ girls}}$ $\underbrace{\binom{n}{k}}_{\text{k boys from n boys.}}$

• לכן סה"כ הוא $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$

1.4 בינום ומקדמים בינומים

1. הוכיחו $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$:

הוכחה ע"פ הבינום: נציב בבינום $a=b=1$ אז:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot 1^k\cdot 1^{n-k}=(1+1)^n=2^n$$

הוכחה קומבינטורית (קבוצות):

הסיפור: 2 האגפים הם הגודל של קב' החזקה של קב' בת n איברים.

אגף ימין - כל אחד מ n האיברים יכול להבחר או לא להבחר - וזה 2 אפשרויות. לפי עקרון הכפל 2^n .

אגף שמאל - $0\le k\le n$ (גודל תת קב') $\binom{n}{k}$ תתי קב' בגדול k.

2. חשבו $\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}$:

נפתח את הסיגמה:

$$\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}=1\cdot\binom{n}{1}+2\cdot\binom{n}{2}+...+n\cdot\binom{n}{n}$$

על פי הבינום:

$$\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}=\sum_{k=1}^{n}k\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}=\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{\boldsymbol{(k-1)}!(n-k)!}=\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}$$

חישוב צדדי:

$$\binom{m}{k-1}=\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)}\Rightarrow \begin{array}{c} n-k=m-k+1 \\ m=n-1 \end{array}$$

לכן:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\boldsymbol{n(n-1)!}}{(k-1)!(n-k)!}=\boldsymbol{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}=n\cdot\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}$$

$$=n\left[\binom{n-1}{0}+\binom{n-1}{1}+..+\binom{n-1}{n-1}\right]=n\cdot\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}=n\cdot 2^{n-1}$$

3. טענה: $\binom{n}{k}=\binom{n}{k-1}\frac{n-k+1}{k}$

הוכחה אלגברית: לכל $0\le k\le n$

$$\binom{n}{k-1}\cdot\frac{n-k+1}{k}=\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}\cdot\frac{n-k+1}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\binom{n}{k}$$

דוגמה: הוכיחו $\binom{n}{k}\binom{k}{m}=\binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}$:

הוכחה אלגברית:

$$\binom{n}{k}\binom{k}{m}=\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{k!}{m!(k-m)!}=\frac{n!}{(n-k)!m!(k-m)!}=$$

$$\frac{n!}{m!\cancel{(n-m)}!}\cdot\frac{\cancel{(n-m)}!}{(k-m)!(n-k)!}=\binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}$$

הוכחה קומבינטורית:

- אגף שמאל: בחירה של ועד של k אנשים, ומתוכם בחירת יושב ראש ו $m-1$ סגנים. קודם בוחרים את כל הועד ומתוך הועד הנבחר בוחרים יו"ר וסגניו

  - אגף ימין: קודם בוחרים את היו"ר וסגניו ואח"כ בוחרים את שאר הועד מתוך מי שנשאר.

4. הוכיחו: $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0$

הוכחה בעזרת הבינום: נבחר את $a=-1$ ואת $b=1$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=(-1+1)^n=0^n=0$$

הוכחה קומבינטורית:

צ"ל - נפתח את הסיגמה:

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+.....(-1)^n\binom{n}{n}=0 \iff \binom{n}{0}+\binom{n}{2}+.....=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+....$$

ונשים לב שצד שמאל מייצג תתי קבוצות מגודל זוגי, וצד ימין מייצג תתי־קבוצות מגודל אי־זוגי

הוכחה:

- נגדיר פונ', שהתחום שלה הוא קבוצת תתי הקב' בגדול זוגי, והטווח הוא קבוצת תתי הקבוצות בגדול אי־זוגי באופן הבא:

$$f:A\to B$$
$$f(C)=\begin{cases}C\setminus\{n\} & n\in C\\ C\cup\{n\} & n\neq C\end{cases}$$

  - בה"כ האיברים הם $1,....,n$

  - $f(C)$ היא תת קב' של $\{1,....,n\}$ בגדול אי־זוגי , לכן $f(C)\in B$

  - כדי להראות ש f חח"ע ועל נגדיר את f^{-1}

$$f^{-1}:B\to A$$
$$f^{-1}(D)=\begin{cases}D\setminus\{n\} & n\in D\\ D\cup\{n\} & n\neq D\end{cases}$$

- נותר להראות שהרכבת הפונקציות היא פונקציית הזהות, והראנו בלוגיקה שאם קיימת פונקציה הפיכה אז היא f היא חח"ע ועל

  - מכאן נקבל ש $|A|=|B|$ ולכן:
    - $|A|=\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+...$
    - $|B|=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+...$

  - ומכאן שהסכומים שווים

1.5 מולטינום ומקדמים מולטינומים

1. שאלה: כמה סדרות בינריות באורך n ישנן , שיש בהם k 0ים ?

$$\underbrace{\underline{0}\ \_\ \_\ \_\ \underline{0}}_{n}\Rightarrow\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- הסבר על פי צד שמאל: בסה"כ n מקומות בוחרים k מקומות לשים 0ים (ללא חזרות, וללא חשיבות לסדר)

  - הסבר על פי צד ימין:

- $n!$ מבטא את האפשרויות השונות לסידור n איברים שונים.
- אבל צריך להחסיר כמה אפשרויות זהות, שהן:
- $k!$ מבטא את האפשרויות השונות להחלפת האפסים בינהם
- $(n-k)!$ - מבטא את האפשרויות השונות להחלפת האחדות בינהם

2. <u>הכללת השאלה: כמה סדרות ישנן מעל $\{0,.....m-1\}$ באורך n שבהן יש:</u>
<u>k_1 - 0ים , k_2 - 1ים ... k_j $(j+1)$ים ...כך ש: $\sum_{j=1}^{m} k_j = n$ (א"ב בגודל m) ?</u>

- <u>דרך א:</u> נוכל להשתמש במולטינום.
- <u>דרך ב:</u>
  - נניח ויש לנו n איברים שונים, יש $n!$ אפשרויות לסדרם בסדרה
  - אבל צריך להחסיר כמה אפשרויות זהות, שהן:
  - $k_1!$ - להחלפת 0ים
  - k_2 - להחלפת 1ים
  - ...
  - סה"כ: $\frac{n!}{k_1!k_2!\cdot....k_m!} = \binom{n}{k_1,k_2,k_3,...k_m}$
- <u>דרך ג:</u>
  - מתוך n מקומות , נבחר k_1 מקומות לשים 0ים , לכן יש $\binom{n}{k_1}$
  - מתוך $n-k_1$ מקומות, נבחר k_2 מקומות לשים 1ים , לכן יש $\binom{n-k_1}{k_2}$
  - .....
  - האיבר ה k_j , $\binom{n-k_1-,k_2-,k_3-k_{j-1}j}{k_j}$
  - סה"כ:

$$\binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}.....\binom{n-k_1-,k_2-,k_3-k_{j-1}j}{k_j} \Leftrightarrow \frac{n!}{\underbrace{k!!}\cancel{(n-k_1)!}} \cdot \frac{\cancel{(n-k_1)!}}{\underbrace{k_2!}\cancel{(n-k_1-k_2)!}} .... \frac{\cancel{(n-k_1-,k_2-,k_3-k_{j-1}j)!}}{\underbrace{k_m!}\underbrace{\cancel{(n-k_1-,k_2-,k_3-k_mj)!}}_{=(n-n)!=1}}$$

$$= \frac{n!}{k_1!k_2!....k_m!} = \binom{n}{k_1,k_2,....,k_m}$$

3. <u>מצאו את המקדם של x^{10} בבטוי $\left(4-7x+2x^3\right)^8$</u>

- נרשום את המשתנים:

$$x_1=-4 \qquad n=8$$
$$x_2=-7x \qquad m=3$$
$$x_3=2x^3$$

- נציב במולטינום:

$$\sum_{\substack{\sum_{i=1}^{3} k_i=n \\ k_i\in[0,8],\ \forall i\in[1,3]}}^{8} \binom{8}{k_1,k_2,...,k_m}(-4)^{k_1}\cdot(-7x)^{k_2}\cdot(2x^3)^{k_3}$$

$$= \sum_{\substack{\sum_{i=1}^{3} k_i=n \\ k_i\in[0,8],\ \forall i\in[1,3]}}^{8} \binom{8}{k_1,k_2,...,k_m}(-4)^{k_1}\cdot(-7)^{k_2}\cdot 2^{k_2}\cdot x^{k_2+3k_3}$$

- לכן צריך ש: $\begin{matrix} k_1+k_2+k_3=8 \\ k_2+3k_3=10 \end{matrix}$, ובעבור התניות אלו נחשב את המקדם ל x^{10} , שהוא : $\binom{8}{k_1,k_2,...,k_m}(-4)^{k_1}\cdot(-7)^{k_2}\cdot$ 2^{k_2}
  - <u>עבור $k_3=0$:</u> אז $k_2=10>8=n$ ו$k_1\in\mathbb{N}$ ולכן זו אינה אפשרות

- עבור $k_3 = 1$: אז $k_2 = 7$ ולכן $k_1 = 0$ נציב בנוסחה:
$\binom{8}{1,7,1}(-4)^0 \cdot (-7)^7 \cdot 2^1$
- עבור $k_3 = 2$: אז $k_2 = 4$ ולכן $k_1 = 2$ נציב בנוסחה:
$\binom{8}{2,4,2}(-4)^2 \cdot (-7)^4 \cdot 2^2$
- עבור $k_3 = 3$: אז $k_2 = 1$ ולכן $k_1 = 4$ נציב בנוסחה:
$\binom{8}{4,1,3}(-4)^4 \cdot (-7)^1 \cdot 2^3$
- עבור $k_3 = 4$ אז $k_2 = -2 \notin \mathbb{N}$ ולכן זו אינה אפשרות.

- סה"כ:

$$\binom{8}{1,7,1}(-4)^0 \cdot (-7)^7 \cdot 2^1 + \binom{8}{2,4,2}(-4)^2 \cdot (-7)^4 \cdot 2^2 + \binom{8}{4,1,3}(-4)^4 \cdot (-7)^1 \cdot 2^3$$

- נותר לוודא שאף גורם לא מתבטל, ואכן זה כך, ועל כן זהו המקדם ל x^{10}.

מולטינום

1. נתונים 5 כדורים אודמים, 7 כחולים ו 20 שחורים, בכמה אפשרויות ניתן לסדרם בשורה?

- תשובה - ע"פ המולטינום

$$\binom{32}{20,7,5} = \frac{32!}{20!7!5!}$$

- דרך נוספת להסתכל על זה:
- היא כאילו יש לנו שורה ארוכה של 32 כדורים, וכל פעם שמים את הכדורים במקום הפנוי:

$$\binom{32}{5}\binom{27}{7}\binom{20}{20}$$

- ומתברר, שהביטויים זהים (הראינו בשיעור)

2. כמה מחרוזות ניתן להרכיב ע"י שינוי הסד של האותיות של המילה $Mississippi$

- ניתן להתייחס לזה כמו לכדורים משאלה קודמת, סה"כ יש לנו:

$$\begin{array}{ll} 's' - 4 & 1 -' m' \\ 'i' - 4 & 2 -' p' \end{array}$$

- ומהמולטינום:

$$\binom{11}{4,4,1,2}$$

3. (המשך) כמה סידורים כאלה יש כך שאין 2 $'i'$ ברצף?

- ראשית, נסדר את כל השאר האותיות, ע"פ המולטינום, סידור שאר האותיות: $\binom{7}{4,1,2}$
- כעת בין כל שתי אותיות = תא, ניתן להכניס i אחד או אפס , ולכן $\binom{8}{4}$
- מעיקרון הכפל: $\binom{7}{4,1,2} \cdot \binom{8}{4}$

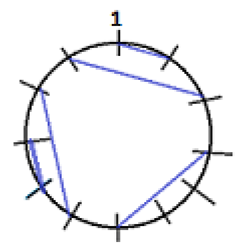
מספרי קטלן

1. <u>כמה אפשרויות ישנן לסדר k זוגות של סוגריים עגולים, r זוגות סוגריים מרובעים, ו n זוגות של סוגריים מסולסלים, כך שהביטוי שמתקבל לכל זוג סוגריים מהווה ביטוי מאוזן.</u>

- c_k - סידור הסוגריים העגולים במקומות שנבחרו
- c_r - סידור הסוגריים המרובעים במקומות שנבחרו
- c_n - סידור הסוגריים המסלוסלות במקומות שנבחרות
- $\binom{2n+2k+2r}{2k}$ - בחירת המקומות בהם יהיו $2k$ סוגריים עגולים
- $\binom{2n+2r}{2r}$ - בחירת המקומות (מתוך אלו שנשארו) בהם יהיו $2r$ סוגרים מסולסלים.
- $\binom{2n}{2n}$ בחירת המקומות (מתוך אלו שנשארו) יהיו $3n$ סוגריים מסולסים.

2. <u>נתון מעגל ועליו $2n$ נקודות (ממספורות מ1 עד $2n$), כמה אפשרויות ישנן לחלק את הנקודות לזוגות כך שהמיתרים שמתקבלים מהחבור הזוגות לא יחתכו?</u>

לדוגמה:



- בהנתן חלוקה לזוגות לפי הנדרש בשאלה, נגדיר פונק' שנותנת לחלוקה כזו סדרה בינארות באופן הבא:
- לכל זוג (מיתר) $j - i$ כאשר $j < i$ נגדיר את המקום ה i בסדרה להיות 0, ואת המקום ה j בסדרה להיות 1
- בסדרה המתקבלת ישנם n 0ים ו n 1ים בנוסף בכל רישא של הסדרה מס' ה 0ים $\le$ מס' ה1ים - גדול ממספר ה0ים .

  בדוגמה, הסדרה תהיה:

$$\begin{matrix} \lfloor 0 \rfloor & \lfloor 0 \rfloor & \lfloor 0 \rfloor & \lfloor 0 \rfloor & \lfloor 1 \rfloor & \lfloor 1 \rfloor & \lfloor 0 \rfloor & \lfloor 0 \rfloor & \lfloor 1 \rfloor & \lfloor 1 \rfloor & \lfloor 1 \rfloor & \lfloor 1 \rfloor \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{matrix}$$

- יהי i המקום המתאים ל j (כלומר מה שהתקבל בסדרה מהמיתר $j - i$) נקבל ש i מימין ל j בסתירה להגדרת הפונקציה.
- נוכיח שהפנו' שהגדרנו היא חח"ע ועל ע"י כך שנגדיר פונ' הפוכה מקב' הסדרות הבינאריות באורך $2n$ לזוגות של $2n$ נקודות שמתאימה לתנאי השאלה
  - נעבור על ה 1ים בסדרה. לכל 1 נמצא את ה 0 שלו
  - אם ה1 הנ"ל נמצא במקום ה j וה־0 במקום ה i נעביר מיתר בין i ל j על המעגל.
- לכן התשובה היא c_n

3. <u>כמה אפשרויות ישנן לסדר בשורה 3 כדורים אדומים, 3 כדורים כחולים, ו 3 כדורים שחורים, כך שאין שלשה רצופה של כדורים שהם מאותו צבע?</u>

- נחשב דרך המשלים: "אפשרויות רעות" = כל האפשרויות לסדר בשורה את הכדורים כך שקיימת שלשה רצופה אחת לפחות
- נחשב את סה"כ האפשרויות לסדיור כדורים: ע"פ המולטינום : $\binom{9}{3,3,3}$
- נגדיר:

– A_1 - כל הסידורים בהם יש שלשה אדומה רצופה.

– A_2 כל הסידורים בהם יש שלשה כחולה רצופה.

– A_3 כל הסידורים בהם יש שלשה שחורה רצופה.

- ננסה חלוקה אחרת (לא טובה):

– A_1 - כל הסידורים בהם יש שלשה אחת בדיוק באותו צבע.

– A_2 - כל הסידורים בהם יש 2 שלשות בדיוק באותו צבע.

– A_3 - כל הסידורים בהם יש 3 שלשות בדיוק באותו צבע.

* זהו סידור בעייתי, כי אם הייתי יודע איך לחשב שלא יהיה רצף כלשהו, לא היתי צריך לחלק לקבוצות הללו. כלומר, קשה לחשב את עוצמת הקבוצות הללו, ולכן זה לא טוב.

* כלל אצבע, אם הקבוצות זרות אז אולי מצאנו פתרון אלגנטי לשאלה, אבל לעקרון הכלה והדחה כנראה שזה לא יתאים.

- (נחזור לחלוקה הראשונה) - נחשב את $|A_1|$ נתייחס לשלשה האדומה כאיבר 1, וכעת מהמולטינום $|A_1| = \binom{7}{3,3,1}$

- באותו אופן $|A_2| = |A_3| = \binom{7}{3,3,1} = \frac{7!}{3!3!}$

- כעת: $|A_1 \cap A_2| = \binom{5}{3,1,1} = \frac{5!}{3!}$

- $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 3!$

- סה"כ:

$$\frac{9!}{(3!)^3} - 3\frac{7!}{(3!)^2} + \binom{3}{2}\frac{5!}{3!} - 3!$$

4. כמה אפשרויות ישנן לקבל 17 עם 5 קוביות שונות (כל האפשרויות שסכום התוצאות יהיה 17)?

- נגדיר לכל ערך של קוביה משתנה. לקוביה ה i נגדיר משתנה x_i צ"ל: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 17$ לכל $1 \le i \le 5$ מתקיים ש: $1 \le x_i \le 6$

- נחלק "כדור" לכל אחד מהתאים ונקבל את המשוואה החדשה: $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 12$, לכן $1 \le i \le 5$ מתקיים ש: $y_i \le 5$

- נחשב: סה"כ פחות ה"אפשרויות הרעות".

- סה"כ: $D(5, 12)$

- "אפשרויות הרעות" = כל האפשרויות שבהן קיים iכך ש $y_i \ge 6$.

נחשב:

– נגדיר A_i = כל ה i אפשרויות שבהן $y_i \ge 6$. $1 \le i \le 5$

* נכניס לתא ה i שישה כדורים נחלק את השאר ללא מגבלות, לכן $|A_i| = D(5, 12-6) = D(5,6)$

– $|A_1 \cap A_2|$ - נכניס 6 כדורים לראשון, ו6 לשני, ולכן לא נותר כדורים לחלק = $D(5, 0)$

– כל חיתוך גדול יותר יתן 0 (אפשרויות)

- סה"כ:

$$D(5, 12) - 5 \cdot D(5, 6) + \binom{5}{2} \cdot D(5, 0) - 0 + 0 - 0$$

5. נתאר סדרה של הכנסות והוצאות ממחסנית. של סהכ n כדורים. הערה: א"א לבצע pop על מחסנית ריקה. כמה סדרות כאלה קיימות?

- תשובה: C_n

- הסבר: נתאים $push$ ל 0 , ו pop ל 1 .

6. נתונות 2 מחסניות.

למחסנית 1 , הכנסנו והוצאנו n כדורים

למחסנית 2 , הכנסנו והוצאנו m כדורים, כמה אפשרויות יש לאיחוד של 2 הרשימות?

- הוצאות והכנסות לראשונה C_n
- הוצאות והכנסות לשניה c_m
- כעת נרצה לחשב את "הערבוב"/האיחוד בין הסדרות - נשים לב שאורך הסדרה הראשונה היא $2n$ (הוצאות+הכנסות) + והשניה $2m$, ונרצה למקם את $2n$ הבחירות האלו בסדרה הגדולה, ולכן $\binom{2n+2m}{2n}$

7. נתונה מחסנית, n כדורים אדומים, m כחולים. כמה סדרות של הכנסות והוצאות קיימת?

- $\binom{n+m}{n}C_{n+m}$

8. כמה ביטויי סוגריים תקינים יש המורכבים מ3 סוגי סוגריים: $\{\} - k\,,\,() - m\,,\,[] - n$

- האפשרויות לכל סדרת סגוריים c_n, c_m, c_k
- האפשרויות לאיחוד כל שלושת הרשימות $\binom{2n+2m+2k}{2n,2m,2k}$
- סה"כ $\binom{2n+2m+2k}{2n,2m,2k}\cdot c_n\cdot c_m\cdot c_k$

1.6 עקרון הכלה הודחה

1. שאלה: תהי קבוצה A בת k איברים , B קב' n איברים. כמה פונ' ישנן מ A על B ?

עבור $n<k$ נאמר שזה 0

ועבור $n\geq k$ אמר שזה $n!(k-n)^n$

הבעיה: אנחנו לא סופרים את כל המקרים, מה קורה אם משנים את הסדר בקבוצה B ?

גם אם ננסה לתקן: ולחשב את בחירת האיברים קודם, נקבל ספירה כפולה.

לכן יש להשתמש בעקרון ההכלה והדחה, נחשב:

- n^k = סה"כ פונ' (בחירה עם חזרות ועם חשיבות לסדר)
- כעת נחשב דרך המשלים כלומר: הפונקציות על = שאינן על - סה"כ
  - צריך לחשב את הפונקציות שקיימ איבר בטווח שאין לו מקור.
- כעת נגדיר A_i = פונקציה שהאיבר ה i ב B לא בתמונה שלהן (כלומר לא מגיעות מאליבר ה i ב B) $1\leq i\leq n$
- $(n-1)^k$ =$|A_i|$ - יש איבר אחד פחות בטווח
- $(n-2)^k$ = $|A_i\cap A_j|$
- $(n-t)^k=\left|\bigcap_{i=1}^{t}A_i\right|$
- כלומר התשובה:

$$n^k-\binom{n}{1}(n-1)^k+\binom{n}{2}(n-2)^k+....+(-1)^{j+2}\binom{n}{j}(n-j)^k ...+(-1)^n\binom{n}{n}(n-n)^k=\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}(n-j)^k$$

2. מטילים 9 קוביות משחק שונות

(א) בכמה מההטלות האפשריות ישנן בדיוק 3 קוביות שמראות את המספר 6?

- לבחירת 3 קוביות כלשהם יש $\binom{9}{3}$
- האפשרות שיצא 6 היא 1

- בשאר ההטלות ישנן 5 אפשרויות (ללא 6)
- ישנן 6 קוביות כאלו לכן יש 5^6 אפשרויות (עם חזרות, עם סדר)
- בסה"כ: $\binom{9}{3}\cdot 1\cdot 5^6$

(ב) בכמה הטלות יש בדיוק 3 קוביות שמראות את המספ' 1 ?

- אותו דבר

(ג) בכמה הטלות לא קיים מספר כך ש 3 קוביות **בדיוק** מראות אותו.

- נגדיר A_i , עבור $1\le i\le 6$, A_i = כל ההטלות שבהן בדיוק 3 קוביות מראות i
- לכן $|A_i|=\binom{9}{3}\cdot 5^6$, ויש 6 כאלה
- סה"כ כל האפשריות: $|U|=6^9$
- והתשובה תהיה: $\left|U\setminus\bigcup_{i=1}^{6}A_i\right|$
- נחשב את $|A_i\cap A_j|=\binom{9}{3}\binom{6}{3}4^3$ ויש $\binom{6}{2}$ כאלה
- נחשב את $|A_i\cap A_j\cap A_k|=\binom{9}{3}\binom{6}{3}\binom{3}{3}$ ויש $\binom{6}{3}$
- סה"כ : ע"פ ההכלה והדחה:

$$6^9-\left(6\cdot\binom{9}{3}\cdot 5^6-\binom{6}{2}\binom{9}{3}\binom{6}{3}4^3+\binom{6}{3}\binom{9}{3,3,3}\right)$$

3. לדני יש 8 חברים הוא מזמין בדיוק 4 חברים, בכל ערב לארוחת ערב למשך 7 ערבים. בכמה דרכים הוא יכול להזמין את חבריו כך שכל חבר יוזמן לפחות פעם 1.

- נחשב את סה"כ האפשריות פחות כל האפשרויות שיש לחברים שלא הוזמנו.
- נגדיר: עבור $1\le i\le 8$ את הקבוצה A_i= { כל האפשרויות בהן החבר ה i לא הזמן כלל }
- ונרצה לחשב את $|U-\bigcup A_i|$
- $|U|=\binom{8}{4}^7$
- $|A_i|=\binom{7}{4}^8$, ויש 8 כאלו
- $|A_i\cap A_j|=\binom{6}{4}^7$, ויש $\binom{8}{2}$ כאלו
- $|A_i\cap A_j\cap A_k|=\binom{5}{4}^7$, ויש $\binom{8}{3}$
- $|A_i\cap A_j\cap A_k\cap A_l|=\binom{4}{4}^7$, ויש $\binom{8}{4}$
- חיתוך של 5 , בלתי אפשרי.
- סה"כ:

$$\binom{8}{4}^7-\left(8\cdot\binom{7}{4}^8-\binom{8}{2}\binom{6}{4}^7+\binom{8}{3}\binom{5}{4}^7-\binom{8}{4}\binom{4}{4}^7\right)$$

4. א. מתוך $7!$ התמורות של $\{A,D,E,G,O,P,Q\}$ כמה מהן לא מכילות את הרצף $'DOG'$?

- נחשב את התכונה ההופכית - ז"א מספר התמורות שכן מכילות נפחית. יוצא $7!-5!$

ב. כמה מהן לא מכילות את הרצף $'DOG'$ וגם לא את הרצף $'GAP'$

נשתמש בעיקרון ההכלה וההדחה, נגדיר:

- A_{GAP} = התמורות המכילות GAP
- A_{DOG} - כל התמורות המכילות DOG
- לכן $|A_{DOG}|=|A_{GAP}|=5!$
- $|A_{DOG}\cap A_{GAP}|$ = $3!$ (יש G אחת - לכן הן חייבות להיות מחוברות לכן יש 3 איברים לסדר בשורה)
- נרצה לחשב את $U-(A_{GAP}\cup A_{DOG})$
- סה"כ: $7!-5!-5!+3!$

אי־סדר מלא על n איברים

1. n ילדים הלכו לקייטנה כל אחד הגיע עם בקבוק וכובע. כמה אפשרויות ישנן לחלק בסוף היום את הבקבוקים והכובעים כך שכל ילד יקבל בקבוק אחד וכובע אחד, ובנוסף מתקיים התנאי הבא:

א. כל ילד קיבל כובע לא שלו ובקבוק לא שלו

- נשתמש בנוסחת האי־סדר שלמדנו הרגע, אך צריך לשפץ
- D_n אי־סדר מלא לבקבוקים
- D_n אי־סדר לכובעים
- $D_n \cdot D_n$ (עקרון הכפל)

ב. כל ילד קיבל לפחות חפץ אחד לא שלו

- נשים לב שיש אפשרויות בב' שהן לא סדר מלא ־ כלומר ילדה קיבלה את הכובע שלה, וילד שקיבל את הבקבוק שלו ־ ועדיין צרך לספור אפשרויות אלו
  - נשתמש במשלים : אפשרויות רעות ־ סה"כ
    - אפשרויות רעות: כל האפשוריות בהן קיים ילד שקיבל גם את הבקבוק וגם את הכובע
  - סה"כ: $(n!)^2$ ־ סידור כובעים , סידור בקבוקים ־ כפל
  - נגדיר את A_i להיות כל התמורות בהן הילד ה i קיבל את הכובע והבקבוק שלו
  - $|A_i| = ((n-1)!)^2$ ויש $\binom{n}{1}$
  - $|A_i \cap A_j| = ((n-2)!)^2$ ויש $\binom{n}{2}$
  - $\left|\bigcap_{i=1}^{j} A_i\right| = (n-j)!$ ויש $\binom{n}{j}$

$$(n!)^2 - \binom{n}{1}((n-1)!)^2 + \binom{n}{2}(n-2)! + ... + (-1)^{j+2}\binom{n}{j}((n-j)!)^2 ... + (-1)^n\binom{n}{n}((n-n)!)^2$$

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}((n-j)!)^2$$

2. כמה תוצאות אפשריות יש למשחק 'גמד־עמק' עם n אנשים שבהן אף אדם לא קיבל את עצמו בפתק?

- כל האפשרויות $U = n!$
- נגדיר לכל $1 \le i \le n$ את הקבוצה:
  A_i = האדם ה i קיבל את עצמו בפתק
- נרצה לחשב את $U - \bigcup_{i=1}^{n} A_i$
- לכל i מתקיים ש: $|A_i| = (n-1)!$ ויש $\binom{n}{1} = n$ כאלה
- לכל $1 \le i < j \le n$ והעוצמה $|A_i \cap A_j| = (n-2)!$ ויש $\binom{n}{2}$
- ..
- חיתוך של k כאלה , עוצמתו $(n-k)!$ ויש $\binom{n}{k}$
- סה"כ:

$$\underbrace{n!}_{k=0} - \left[\underbrace{\binom{n}{1}(n-1)!}_{k=1} - \binom{n}{2}(n-2)! + \binom{n}{3}(n-3)!.....(-1)^{k+1}\binom{n}{k}(n-k)!\right]$$

$$\underbrace{\binom{n}{0}(n-0)!}_{k=0} - \underbrace{\binom{n}{1}(n-1)!}_{k=1} + \binom{n}{2}(n-2)! - \binom{n}{3}(n-3)!.....(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)!$$

$$\underbrace{\binom{n}{0}(n-0)!}_{k=0} - \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)! = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n!}{\cancel{(n-k)!}k!}\cancel{(n-k)}!$$

$$= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n!}{k!} = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!} \cong \frac{n!}{e}$$

3. שאלה:

(א) כמה פונ' $f : A \to B$ קיימות ? (כאשר $|A| = m$, $|B| = n$, $n, m \in \mathbb{N}$)

פתרון: n^m

(ב) אם $m \geq n$, כמה מתוכן הן על?

- יהיה $i \in [1, n]$ נגדיר A_i = כל הפונ' בהן לאיבר b_i אין $a \in A$ כך ש $f(a) = b$
- $\binom{n}{1} = n$ ויש $|A_i| = (n-1)^m$
- לזוגות $(n-2)^m$ ויש $\binom{n}{2}$
- חיתוך k קבוצות : $(n-k)^m$ ויש $\binom{n}{k}$
- ימשך עד $k = n-1$ כי הפונ' חייבת לקבל לפחות ערך 1
- סה"כ:

$$n^m - \binom{n}{1}(n-1)^m + \binom{n}{2}(n-2)^m ... = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)^m$$

4. נתונים 5 סטודנטים , 4 פרוקיטים שונים, כל פרויקט יבוצע ע"י 2 סטודנטים

א. בכמה דרכים ניתן להגדיר צוותים לביצוע כל הפוריקטים כאשר לא כל הסטודנטים חייבם להשתתף

- עבור הפרויקט הראשון יש : $\binom{5}{2}$ אפשרויות
- יש 4 פרוקיטים, ולכן $\binom{5}{2}^4$

ב. בכמה דרכים... כאשר כל סטודנט חייב להשתתף בלפחות אחד מהפוריקטים

- נחשב: "רעים" - סה"ב, על ידי הכלה והדחה
- נגדיר A_i כאשר $1 \leq i \leq 5$ כל האפשרות כך שהסטו' ה i לא משתת, בכלל
- נציב בטבלה שלנו:

הקבוצה	גודל	כמה יש
A_i	$\binom{4}{2}^4$	$\binom{5}{1}$
$A_i \cap A_j$	$\binom{3}{2}^4$	$\binom{5}{2}$
$A_i \cap A_j \cap A_k$	$\binom{2}{2}^2$	$\binom{5}{3}$

- סה"כ $\binom{5}{2}^4 - \left(5 \cdot \binom{4}{2}^4 + \binom{5}{2}\binom{3}{2}^4 - \binom{5}{3}\binom{2}{2}^4\right)$

1.7 נוסחאות נסיגה - רקורסיות

דוגמה: סדרת פיבונאצ'י

$$f(0) = 1 \qquad f(1) = 1 \qquad f(n) = f(n-1) + f(n-2) \qquad \forall n > 2$$

אז:

$$1, 2, 3, 5, 8, ...$$

נרצה פתון ל $f(n)$ ללא תלות באיברים קודמים.

נוסחאות נסיגה לינאריות הומגניות

נחפש פתרון מהצורה $f(n)=x^n$

נציב את x^n בתוך נוסחת הנסיגה : $x^n=x^{n-1}+x^{n-2}$, מכיון ש $x\neq 0$ נצמצם את המשוואה ב x^{n-2} - ונקבל:

$$x^2=x+1 \Leftarrow$$ זה נקרא הפולינום האופייני של נוסחת הנסיגה

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\Rightarrow x_1=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n,x_2=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

- ע"פ משפט מלינאריות
- ממד מרחב הפתרונות הוא כדרגה (הגבוה) של הפולינום האופייני $\Leftarrow$ ישנם 2 פתרונות ב"ת.
- וכל צרוף לינארי שלהם הוא פתרון.
- לכן

$$f(n)=c_1\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+c_2\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

- כאשר c_1,c_2 הם קבועים שניתנים לחישוב מתוך תנאי ההתחלה נציב, ונחשב אותם:

$$1=f(0)=c_1\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0+c_2\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0=c_1+c_2\Rightarrow c_2=1-c_1$$

$$1=f(1)=c_1\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1+c_2\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1=c_1\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1+(1-c_2)\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1$$

$$\Rightarrow c_1\sqrt{5}=1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow \boldsymbol{c_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}}$$

$$\Rightarrow c_2=1-\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\Rightarrow \boldsymbol{c_2=-\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}}$$

- נציב חזרה:

$$\Rightarrow f(n)=\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$\Rightarrow f(n)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$$

1. <u>שאלה: כמה סדרות בינאריות באורך n ישנן שאין בהן רצף של 11 ?</u>

   פתרון בעזרת נוסחאות נסיגה: נסמן ב $f(n)$ את מס' האפשרויות העונה על השאלה:

   $$f(0)=1\qquad f(1)=2\qquad f(2)=0$$

   - אנחנו מחפשים:

   $$\underbrace{\lfloor 0\rfloor}\underbrace{\lfloor\ \rfloor\ \lfloor\ \rfloor\ \lfloor\ \rfloor\ \lfloor\ \rfloor}_{n-1}$$

   $f(n-1)$ = כל הסדרות החוקיות באורך n שמתחילות ב 0

   - או שאנחנו מחפשים:

   $$\underbrace{\lfloor 1\rfloor\ \lfloor 0\rfloor}\underbrace{\lfloor\ \rfloor\ \lfloor\ \rfloor\ \lfloor\ \rfloor\ \lfloor\ \rfloor}_{n-2}$$

$f(n-2)$ = כל הסדרות ה"חוקיות" בואדר n שמתחילות ב 1, ובמקום השני יש 0

- מכיוון שאלו כל אפשרויות , והאפשרויות זהות, נקבל כי:

$$f(n)=f(n-1)+f(n-2)$$

נוכל כעת להציב בפתרון הכללי שהראינו לעיל, רק שצריך לחשב מחדש את המקדמים c_1,c_2

ננסח את השאלה מחדש: <u>כמה סדרות של $\{0,1,2\}$ באורך n ישנן שאין בהן רצף של 11 ?</u>

$$f(0)=1 \qquad f(1)=3 \qquad f(2)=8$$

- נשים לב שהחישובים שלנו דומים, רק שצריך להתייחס ל 2 (על כל מקום של 0 יש אפשרות לשם 2 , ולכן זה מכפיל את האפשרויות)
- למשל:

$$\underbrace{\lfloor 0/2 \rfloor}\underbrace{\lfloor\rfloor \quad \lfloor\rfloor \quad \lfloor\rfloor \quad \lfloor\rfloor}_{n-1}$$

$$f(n)=2\cdot f(n-1)+2\cdot f(n-2)$$

- הפולינום האופייני: $x^2-2x-2=0$

2. ננסח את השאלה מחדש: <u>כמה סדרות של $\{0,1,2\}$ באורך n ישנן שאין בהן רצף של 11ולא 22 ?</u>

נחשב את האפשרויות:

- אפשרות ראשונה: $f(n-1)$

$$\underbrace{\lfloor 0 \rfloor}\underbrace{\lfloor\rfloor \quad \lfloor\rfloor \quad \lfloor\rfloor \quad \lfloor\rfloor}_{n-1}$$

- אפשרות שניה:

$$\underbrace{\lfloor 1 \rfloor \quad \lfloor 0/2 \rfloor}\underbrace{\lfloor\rfloor \quad \lfloor\rfloor \quad \lfloor\rfloor \quad \lfloor\rfloor}_{n-2}$$

  - זה גורר אותנו להסתכל על:

$$\underbrace{\lfloor 1 \rfloor \quad \lfloor 0/2 \rfloor \quad \lfloor 1/0 \rfloor}\underbrace{\lfloor\rfloor \quad \lfloor\rfloor \quad \lfloor\rfloor \quad \lfloor\rfloor}_{n-3}$$

  - ובעצם, לא נצליח לפתור, כי נאלץ להמשיך ככה עד הסוף. לכן נשתמש בנוסחאות נסיגה קלועות (משולבות)

- נסמן ב $b(n)$ את כל הסדרות ה"חוקיות" באורך nשמתחילות ב - 0
- נסמן ב $c(n)$ כנ"ל אבל סדרות שמחילות ב - 1
- נסמן ב $d(n)$ כנ"ל אבל סדרות שמתחילות ב - 2
- לכן: $b(n)+c(n)+d(n)=f(n)$
- נכתוב נוסחאות נסיגה ל $b(n),c(n),d(n)$ בנפרד אבל תוך שמוש של אחד בשני $b(n)=f(n-1)$

$$\underbrace{\lfloor 0 \rfloor}\underbrace{\lfloor\rfloor \quad \lfloor\rfloor \quad \lfloor\rfloor \quad \lfloor\rfloor}_{n-1}$$

- לכן:

$$c(n)=b(n-1)+d(n-1)$$

- כאשר $b(n-1)$ הן סדרות באורך $n-1$ שמתחילות ב - 0 , כנ"ל ל $d(n-1)$ עם 2

- כמו כן: $d(n) = b(n-1) + c(n-1)$
- נציב את הכל:

$$f(n) = f(n-1) = b(n-1) + d(n-1) + b(n-1) + c(n-1)$$

$$f(n) = 2 \cdot f(n-1) + f(n-2)$$

- הפולינום האופייני:

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

- תנאי ההתחלה:

$$f(0) = 1 \qquad f(1) = 3 \qquad f(2) = 7$$

3. נתון תנאי ההתחלה $f(0) = 0, f(1) = f(2) = 1$, ונוסחת הנסיגה $f(n) = 3 \cdot f(n-1) + 4 \cdot f(n-2) - 12 \cdot f(n-3)$ לכל $n \geq 3$,

<u>מצא פתרון הומגני לנוסחה</u>

- מציבים פתרון מהצורה $f(n) = x^n$ נקבל:

$$x^n = 3x^{n-1} + 4x^{n-2} - 12x^{n-3}$$

$$x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0 \qquad x = 2 \quad \text{is solu}$$

$$\begin{aligned} (x-2)\left(x^2 - x - 6\right) &= 0 \\ x_2 &= 3 \\ x_3 &= -2 \end{aligned}$$

- מכאן שהפתרון:

$$f(n) = a_1 \cdot 2^n + a_2 \cdot 3^n + a_3(-2)^n$$

- נציב בתנאי ההתחלה:

$$\begin{aligned} i) \qquad & 0 = f(0) = a_1 + a_2 + a_3 \\ ii) \qquad & 1 = f(1) = a_1 2 + a_2 3 + a_3(-2) \\ iii) \qquad & 1 = f(2) = a_1 \cdot 2^2 + a_2 \cdot 3^2 + a_3(-2)^2 \end{aligned}$$

כעת כל שנותר זה לפתור את מערכת המשוואות , ולהציב את ה a_i בפתרון שקיבלנו.

4. <u>נתון תנאי $\begin{matrix} f(0) = 0 \\ f(1) = 1 \\ f(2) = 2 \end{matrix}$ ונוסחאת נסיגה: $f(n) = 8 \cdot f(n-1) - 21 \cdot f(n-2) + 18f(n-3)$ לכל $n \geq 3$</u>

מציב פתרון : $f(n) = x^n$ נקבל:

$$x^n = 8 \cdot x^{n-1} - 21 \cdot x^{n-2} + 18x^{n-3}$$

$$x^n - 8 \cdot x^{n-1} + 21 \cdot x^{n-2} - 18x^{n-3} = 0$$

$$(x-2)^1(x-3)^2 = 0$$

נציב בנוסחה שהראינו:

$$f(n)=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=0}^{d_i-1}a_{i,j}n^jx^n=a_{1,0}n^0x_12^n+a_{2,0}n^0x_23^n+a_{2,1}n^1x_23^n$$

$$f(n)=a_{1,0}\cdot x_12^n+a_{2,0}\cdot x_23^n+a_{2,1}nx_23^n$$

נותר להציב את תנאי ההתחלה:

$$\begin{aligned} &i) && 0=f(0)=a_{10}+a_{20}\\ &ii) && 1=f(1)=a_{10}2+a_{20}3+a_{21}1\cdot 3^1\\ &iii) && 2=f(2)=a_{10}\cdot 2^2+a_{20}\cdot 3^2+a_{21}\cdot 2\cdot (3)^2 \end{aligned}$$

כעת כל שנותר זה לפתור את מערכת המשוואות , ולהציב את ה a_i בפתרון שקיבלנו.

5. <u>בנו נוסחת נסיגה למס' המספרים הטבעים באורך n כך שאין בהן 2 ספרות זוגיות סמוכות וגם לא 2 ספרות אי זוגיות</u>

$$\underbrace{\lfloor\rfloor\quad\lfloor\rfloor\quad\lfloor\rfloor\quad\lfloor\rfloor}_{n-1=a_{n-1}}\underbrace{\lfloor 5\rfloor}_{a_n}$$

- לספרה ה a_n יש 5 אפשרויות (אם הקיצוני זוגי ־החדשה תהיה אי זוגית ואם היא אי־זוגית החדשה תהיה זוגית ־ בכל אופן 5 אפשרויות)
- הספרה הראשונה אפשר הכל ללא 0 , לכן:
- מסקנה: $\begin{aligned}a_n&=5a_n\\a_1&=9\end{aligned}$

6. <u>(המשך) אין שתי ספרות זוגיות סמוכות (בלבד)</u>

- נצטרך לפצל למקרים של ספרה זוגית ואי זוגית

$$\underbrace{\lfloor\rfloor\quad\lfloor\rfloor\quad\lfloor\rfloor\quad\lfloor\rfloor}_{n-2=a_{n-2}}\underbrace{\lfloor\rfloor}_{a_{n-1}}\ \underbrace{\lfloor\rfloor}_{a_n}$$

- ולהגדיר:

$$a_n=\underbrace{b_n}_{\text{odd digit}}+\underbrace{c_n}_{\text{even digit}}$$

- כאשר $b_n=5a_{n-1}$
- ו־ $c_n=25a_{n-2}$ (כי מסתכלים 2 ספרות אחורה)
- דרך נוספת להסתכל על זה:
- כדי להוסיף מס' זוגי צריך את מס' המילים באורך $n-1$ שמסתיימו בספירה אי־זוגית
- לכן $c_n=5\cdot b_{n-1}$
- לסיכום $\begin{aligned}a_n&=5a_{n-1}+25a_{n-2}\\a_1&=9\\a_2&=5\cdot 9+25=70\end{aligned}$

7. <u>מצאו נוסחה למס' המילים באורך n מעל $\{a,b,cd\}$ שלא מכילות את הרצף $'ab'$ וגם לא את $'bc'$</u>

- $a_n=a_n^1+a_n^2+a_n^3$

- a_n^1 - הוספת c/d בהתחלה
- a_n^2 - הוספת b בהתחלה
- a_n^3 - הוספת a בהתחלה

• $2a_{n-1} = a_n^1$

$$\underbrace{\lfloor 2\times \rfloor}_{n}\underbrace{\lfloor\rfloor\quad\lfloor\rfloor\quad\lfloor\rfloor\quad\lfloor\rfloor}_{n-1=a_{n-1}}$$

• a_n^2 למעשה נרצה את: מס' המילים באורך $n-1$ שלא מתחילות ב c = מס' המילים שמתחילות ב $a_{n-1}-c$

- לכן: $a_{n-1}-a_{n-2}=a_n^2$

• a_n^3 למעשה נרצה את: מס' המילים באורך $n-1$ שלא מתחילות ב b = מס' המילים שמתחילות ב $a_{n-1}-b$

- לכן: $a_{n-1}-(a_{n-2}-a_{n-3})=a_n^3$

• לסיכום: $a_n = 4a_n - 2a_{n-2} - a_{n-3}$

• בסיס:
$$a_0 = 1$$
$$a_1 = 4$$
$$a_2 = 14$$

8. נתון לוח בגודל $2\times n$, מה מס' האפשרויות לרצף את הלוח במרצפות בגודל 2×1 ?

פתרון:

• ניקח כמה דוגמאות (בסיס):

- עבור $n=1$, $f(1)=1$
- עבור $n=2$ אז $f(2)=2$ (2 עומדות/שכבות)

• מסקנה (צעד): $f(n)=f(n-1)+f(n-2)$

9. מה מס' האפשרויות לסדר מחדש n בשורה כך שאף אחד לא נשאר במקומו?

• נתבונן:

$$\lfloor 1\rfloor\quad\lfloor\rfloor\quad\lfloor\rfloor\qquad\lfloor i\rfloor\quad\lfloor\rfloor\quad\lfloor\rfloor$$

• האפשרויות להחלפות הן:

$$\begin{bmatrix}\downarrow\\ \mathrm{i}\end{bmatrix}\quad\lfloor\rfloor\quad\lfloor\rfloor\quad\begin{bmatrix}\downarrow\\ \mathrm{i}\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}\downarrow\\ 1\end{bmatrix}\quad\lfloor\rfloor\quad\lfloor\rfloor$$

• לכן $f(n)=(n-1)\cdot[f(n-2)+f(n-1)]$, כאשר $f(n-2)$ מקרה בו האיש i והאיש 1 התחלפו

10. מצאו נוסחאות נסיגה למס' המילים הבינאריות באורך n שלא מופיע בן הרצף "101"

• נגדיר את :

- c_n מילים באורך n שמתחילות ב 1
- b_n מילים באורך n שמתחילות ב 0
- יתקיים ש: $a_n = b_n + c_n$

• נחשב את b_n :

- $b_n = a_{n-1}$ - כי הגבלה במקרה של 0 מוביל

• נחשב את c_n :

- אם במילה באורך $n-1$, יש 1 בהתחלה אז:

$$\underbrace{\lfloor 1 \rfloor}_{n} \underbrace{\lfloor 1 \rfloor \quad \lfloor\rfloor \quad \lfloor\rfloor \quad \lfloor\rfloor}_{n-1}$$

$$\underbrace{\lfloor 1 \rfloor}_{n} \underbrace{\lfloor 0 \rfloor \quad \lfloor\rfloor \quad \lfloor\rfloor \quad \lfloor\rfloor}_{n-1}$$

- כלומר $c_n^1 = c^{11} + c^{10}$
  - $c^{11} = a_{n-1} - \underbrace{a_{n-2}}_{=b_{n-1}}$: כלומר אנחנו רוצים להוריד מקרה של 0 במקום שלישי
  - $c^{10} = a_{n-3}$: מילים באורך $n-1$ שמתחילות ב2 אפסים
- לכן: $c_n = 2 \cdot a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-3}$

11. דוגמה: $f(n) = 2 \cdot f(n-1)$, תנאי התחלה: $f(1) = 3$

נחפש פתרון המצורה: $f(n) = c \cdot \lambda^n$

$$c\lambda^n = 2c\lambda^{n-1}$$

נשים לב שאנחנו מחפשים פתרון שבו $\lambda \neq 0$, (פתרון לא טרויאלי) , לכן נוכל לחלק ב$c \cdot \lambda^{n-1}$

$$c\lambda^n = 2c\lambda^{n-1} \iff \frac{c\lambda^n}{c\lambda^{n-1}} = \frac{2c\lambda^{n-1}}{c\lambda^{n-1}} \iff \lambda = 2$$

לכן הפתרון הכללי הוא $f(n) = c \cdot 2^n$ (נקרא הפולינום האופייני)

נמצא את c ע"י הצבת תנאי התחלה:

$$3 = f(1) = c \cdot 2 \iff c = \frac{3}{2}$$

הפתרון הפרטי: $f(n) = \frac{3}{2} \cdot 2^n$

בדיקה:

$$6 = 2 \cdot 3 = 2 \cdot f(1) = f(2) = \frac{3}{2} \cdot 2^2 = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6 \checkmark$$

12. נתון: $3 \cdot f(n) = 2 \cdot f(n-1) + f(n-2)$, תנאי התחלה: $f(0) = 7, f(1) = 3$

$$3 \cdot c \cdot \lambda^n = 2 \cdot c \cdot \lambda^{n-1} + c \cdot \lambda^{n-2}$$

$$3\lambda^2 = 2\lambda + 1$$

$$3\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$$

$$\lambda = 1, -\frac{1}{3}$$

קיבלנו 2 פתרונות:

$$f(n) = c_1 \cdot 1^n$$
$$f(n) = c_2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

לכן הפתרון הכללי: (הסכום של 2 הפתרונות) הוא:

$$f(n) = c_1 + c_2 \left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

נמצא פתרון פרטי:

$$f(0) = c_1 + c_2 = 7$$
$$f(1) = c_1 + c_2 \left(-\tfrac{1}{3}\right)^n = 3$$

$$\tfrac{4}{3}c_2 = 4$$
$$c_1 = 7 - 3 = 4$$

הפתרון הפרטי:

$$f(n) = 4 + 3 \cdot \left(-\tfrac{1}{3}\right)^n$$

בדיקה:

$$3 \cdot f(2) = 2 \cdot 3 + 7$$
$$f(2) = 4\tfrac{1}{3}$$

$$f(2) = 4 + 3 \cdot \left(-\tfrac{1}{3}\right)^2 = 4\tfrac{1}{3}$$

(א) נתון: $f(n) - 6 \cdot f(n-1) + 9 \cdot f(n-2) = 0$, תנאי התחלה: $f(0) = 1, f(1) = 3$

נציב λ ונחלק:

$$\lambda^2 - 6 \cdot \lambda + 9 = 0 \iff (\lambda - 3)^2$$

לכן הריבוי האלגברי הוא 2 :

במקרה כזה:

$$f^1(n) = c \cdot 3^n \qquad f^2(n) = c \cdot n \cdot 3^n \qquad f^2(n) = c \cdot n^2 \cdot 3^n$$

פתרון כללי :

$$f(n) = c_1 \cdot 3^n + c_2 \cdot n \cdot 3^n$$

פתרון פרטי:

$$f(0) = c_1 \cdot 1 + 0 = 2$$
$$f(1) = c_1 \cdot 3 + c_2 \cdot 1 \cdot 3 = 3$$

$$c_1 = 2$$
$$c_2 = -1$$

נציב:

$$f(n) = 2 \cdot 3^n - 1 \cdot n \cdot 3^n$$

בדיקה:

$$f(2) = 6 \cdot 3 - 92 = 0$$

$$f(2) = 2 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3^2 = 0$$

13. נתון: $f(n)-4\cdot f(n-1)-3\cdot f(n-2)-18\cdot f(n-3)=0$, תנאי התחלה: $f(0)=0, f(1)=2, f(2)=13$

$$x^3+4x^2-3x-18=0$$
$$x_1=2, x_{2,3}=-3$$

$$f(x)=(x-2)(x+3)^2$$

לכן הפתרון הכללי: (הסכום הפתרונות) הוא:

$$f(n)=c_1+2^n+c_2(-3)^n+c_3\cdot n\cdot(-3)^n$$

נמצא פתרון פרטי:

$$f(0)=c_1+c_2=0$$
$$f(1)=2c_1-3c_2-3c_2=2$$
$$f(2)=4c_1+9c_2+18c_3=13$$

תמשיכו לבד...

14. תהי S_n קבוצת כל המחרוזות הבינאריות שלא המכילות $'aba'$, נגדיר $f(n)=|S_n|$ מצאו את $f(10)$

- בסיס:

$$f(1)=2 \qquad f(2)=2^2=4 \qquad f(3)=7=2^3-1$$

- נגדיר:

$$f(n)=\underbrace{f_a(n)}_{\text{words starts with 'a'}}+\underbrace{f_b(n)}_{\text{words starts with 'b'}}$$

- נשין לב שתמיד מותר להוסיף b בהתחלה ולכן $f_b(n)=f(n-1)$
- עבור: $f_a(n)=$ מילים באורך $n-1$ שמתחילות ב a + מילים באורך $n-1$ שמתחילות ב bb
  - מילים באורך $n-1$ שמתחילות ב bb: הן $f(n-3)$
  - מילים באורך $n-1$ שמתחילות ב a : ניקח את סה"כ המילים באורך $n-1$ ונוריד את אלה שמתחילות ב b .
    $f(n-1)-f_b(n-1)=f(n-1)-f(n-2)$
  - לכן $f_a(n)=f(n-1)-f(n-2)+f(n-3)$
- לסיכום: $f(n)=f_a(n)+f_b(n)=2f(n-1)-f(n-2)+f(n-3)$
- נמצא נוסחת נסיגה - נציב $f(n)=x^n$ נקבל ש: $x^n-2x^{n-1}-x^{n-2}+x^{n-3} \Leftarrow x^3=2x^2-x+1 \Leftarrow$ קיבלנו מספרים לא שלמים, לצורך התהליך נניח שקיבלנו שלושה פתרונות שלמים $x=a,b,c$
- נותר להציב $f(a)=a^n, f(n)=b^n, f(n)=c^n$,
- לבסוף מקבלים $\hat{f}(n)=A\cdot a^n+B\cdot b^n+C\cdot c^n$, ובהצבת $n=10$ לקבל את התשובה
- תשובה נוספת, להציב את 7 הצעדים שנותרון ולקבל $f(10)=351$

2 אסימפטוטיקה

1. דוגמה:

$$f(n)=10n^2-3n$$
$$g(n)=n^2$$

מתקיים ש:

$$1 \cdot g(n) \le f(n) \le 13 \cdot g(n)$$

לכל $n \ge 1$ ניקח את $c_1 = 1$ ואת $c_2 = 13$ ויתקיים שלכל $n \ge n_0$

$$c_1 \cdot g(n) \le f(n) \le c_2 \cdot g(n) \iff f(n) = \Theta\left(g(n)\right)$$

2. <u>האם $3n^3 = \Theta\left(n^4\right)$?</u>

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^3}{n^4} = 0 \Rightarrow 3n^3 \ne \Theta\left(n^4\right)$$

- הוכחה ללא הסתמכות על תכונות הגבול (כלומר תוך שימוש בהגדרה בלבד)
- כלומר צ"ל:
  - שלכל קבוע c_1 וקבוע n_0 כך שלכל $n \ge n_0$ יתקיים ש: $c_1 \cdot g(n) \le f(n)$
  - **או** שלא קיים קבוע c_2 וקבוע n כך שלכל $n \ge n_0$ יתקיים ש: $f(n) \le c_2 \cdot g(n)$
- אצלנו נשלול על ידי שנראה שלכל קבוע c_1 וקבוע n_0 כך שלכל $n \ge n_0$ יתקיים ש: $c_1 \cdot g(n) \not\le f(n)$ כלומר $c_1 \cdot n^4 > 3n^3$

3. $\log_2 x \ vs \ \log_3 x$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log_2 x}{\log_3 x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\log_2 x}{\log_2 x} \cdot \log_2 3 = 1.58... \Rightarrow f(n) = \Theta\left(g(n)\right)$$

- בלוג לא משנה הבסיס

4. $2^x \ vs \ 5^x$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5^x}{2^x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{5}{2}\right)^x = \infty \Rightarrow 5^x = \omega\left(2^x\right) \Leftrightarrow 2^x = o(5^x)$$

5. $(ln\ x)^{10} \ vs \ x^{\frac{1}{20}}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(ln\ x)^{10}}{x^{\frac{1}{20}}} = ...lopital... = 0 \Rightarrow (ln\ x)^{10} = o\left(x^{\frac{1}{20}}\right)$$

6. $x! \ vs \ 2^x$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x!}{x^{2^x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\boldsymbol{x}\underline{(x-1)}(x-2)...\underline{5}\cdot\boldsymbol{4}\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{\boldsymbol{2}\cdot\underline{2}\ \ ....\underbrace{\underline{2}}_{\ge 2}\cdot\underbrace{\boldsymbol{2}}_{\ge 2}\cdot\underbrace{2\cdot 2\cdot 2}_{\ge 1}} \ge \lim_{x\to\infty} 2^{x-4} = \infty \Rightarrow (x!) = \omega\left(2^x\right)$$

7. $x! \ vs \ x^x$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\boldsymbol{x}\cdot x.....\cdot x}{\boldsymbol{x}\underline{(x-1)}(x-2)...\underline{5}\cdot\boldsymbol{4}\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\cdot x.....\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}}{1\cdot 2...\cdot\frac{x}{2}\cdot\underbrace{\left(\boldsymbol{\frac{x}{2}+1}\right)\boldsymbol{\cdot ....x}}_{\ge 1}} \ge \lim_{x\to\infty} 2^{\frac{x}{2}} = \infty \Rightarrow x! = w\left(2^x\right)$$

8. <u>הוכיחו</u> יהיו $f_1, f_2, g_1, g_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ ומתקיים ש: $g_1 = O(f_1)$ וגם $g_2 = O(f_2)$ אז:

(א) $g_1 + g_2 = O\left(max\left(f_1, f_2\right)\right)$

(ב) $g_1 \cdot g_2 = O\left(f_1 \cdot, f_2\right)$

<u>הוכחה 1:</u>

- על פי ההנחה קיימים קבועים $c_1, n_1 > 0$ כך שלכל $n \ge n_1$ מתקיים ש: $g_1(n_1) \le c_1 \cdot f_1(n)$

- על פי ההנחה קיימים קבועים $c_2, n_2 > 0$ כך שלכל $n \geq n_2$ מתקיים ש: $g_1(n_2) \leq c_2 \cdot f_2(n)$
- נבחר את $n_0 = max\,(n_1, n_2)$ ונקבל שלכל $n \geq n_0$ יתקיים ש:

$$g_1(n) + g_2(n) \leq c_1 \cdot f_1(n) + c_2 \cdot f_2(n) \leq (c_1 + c_2) \cdot Max\,(f_1(n), f_2(n))$$

- נבחר את $c_0 = (c_1 + c_2)$, ונקבל את הדרוש.

<u>הוכחת 2 :</u>

- על פי ההנחה קיימים קבועים $c_1, n_1 > 0$ כך שלכל $n \geq n_1$ מתקיים ש: $g_1(n_1) \leq c_1 \cdot f_1(n)$
- על פי ההנחה קיימים קבועים $c_2, n_2 > 0$ כך שלכל $n \geq n_2$ מתקיים ש: $g_1(n_2) \leq c_2 \cdot f_2(n)$
- נבחר את $n_0 = max\,(n_1, n_2)$ ונקבל שלכל $n \geq n_0$ יתקיים ש:

$$g_1(n) \cdot g_2(n) \leq (c_1 \cdot f_1(n)) \cdot (c_2 \cdot f_2(n)) = (c_1 \cdot c_2) \cdot (f_1(n), f_2(n))$$

- נבחר את $c_0 = c_1 \cdot c_2$, ונקבל את הדרוש.

9. <u>דוגמה</u>: $n^3 + n^2 + \log n = O(n^3)$ לכל פנוקציה, עבור קבוע $0 < k$ יתקיים $kf = \Theta\,(f)$

<u>הוכיחו או הפריכו :</u>

10. <u>$2n^4 + n = O\left(n^5\right)$</u>

- ניתן לראות ש $2n^4 + n = O(n^4) = O(n^5)$, נוכיח:
- $2n^4 + n \leq 2n^4 + n^4 = 3\left(n^4\right) \leq 3n^5$ אז נבחר $c = 3$, $n_0 = 1$

11. <u>$\left(ln\left(n^2\right)\right)^n = O\left(2^n\right)$</u>

- ניתן לראות ש: $(2 \cdot \ln n)^n = 2^n \cdot \ln n^n = \Omega\left(2^n\right)$
- נניח בשלילה שהטענה נכונה אז קיימים $n_0, c > 0$ אז קיים $c \in \mathbb{R}$ כך ש:

$$\left(\ln n^2\right)^n \leq c \cdot 2^n \iff \frac{\left(\ln n^2\right)^n}{2^n} \leq c$$

- קיבלנו ש c גדול מפונ' עולה וזאת סתירה כי c הוא קבויעה

12. תנו חסם O ל $\sum\limits_{i=1}^{n} 3i + \log n$:

$$\sum_{i=1}^{n} 3i + \log i \leq \sum_{i=1}^{n} 4i = 4\sum_{i=1}^{n} i = O\left(n^2\right)$$

13. שאלה:

$$\sum_{i=0}^{n} 5^i = \frac{5^{n+1}-1}{5-1} = O\left(5^{n+1}\right)$$

14. <u>תנו חסם לביטוי $A = \sum\limits_{i=1}^{n} (2n+i)$</u>

- $3n = 3n + n = a_{max}$
- $2n + 1 = a_{min}$
- לכן: $\Omega(n^2) = n(2n+1) \leq A \leq n \cdot 3n = O(n^2)$

15. <u>תנו חסם לביטוי $A = \sum\limits_{i=1}^{n} i^2$</u>

- $n^2 = a_{max}$

- $i = a_{min}$ לכן $n \le A \le n \cdot n^2$ לכן $A = (n^3)$
- עבור ה Ω :

$$A = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} i^2 + \sum_{i=\frac{n}{2}}^{n} i^2 \overset{\text{lemma 2}}{\ge} \left(\frac{n}{2}\right)^2 \cdot \frac{n}{2} = \Omega(n^3)$$

16. שאלה: $\sum_{k=0}^{n} \frac{n^{\log n}}{2^k}$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n^{\log n}}{2^k} = n^{\log n} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \le 2 \cdot n^{\log n} = \Theta(n^{\log n})$$

17. מצא חסם עליון לביטוי: $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{i+j}$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{i+j} \le \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{i} = n \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = O\left(n \log n\right)$$

18. תשעז מועד א'

הוכיחו $\log\left(n!\right) = O\left(n \log n\right)$

$$\log\left(n!\right) = \log\left(1 \cdot 2 \cdot .... \cdot n\right) = \log(1) + \log(2) + ... + \log(n) = \sum_{i=1}^{n} \log i \le n \log n = O\left(n \log n\right)$$

הוכיחו ש: $\log\left(n!\right) = \Omega\left(n \log n\right)$

$$\log\left(n!\right) = \log\left(1 \cdot 2 \cdot .... \cdot n\right) = \log(1) + \log(2) + ... + \log(n) = \sum_{i=1}^{n} \log i$$

$$\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} \log i + \sum_{i=\frac{n}{2}}^{n} \log i \ge \log\left(\frac{n}{2}\right) \cdot \frac{n}{2} = \frac{n}{2}\left(\log n - \log n\right) = \Omega\left(n \log n\right)$$

19. הוכיחו או הפריכו $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ - אם $f = O(g)$ אז $f + g = \Theta\left(g\right)$

הטענה נכונה - הוכחה:

(א) O:

- מהנחה נובע שקיימים $c_1, n_1 > 0$ כך שלכל $n \ge n_0$ מתקיים ש: $f(n) \le c \cdot g(n)$ ולכן:
$f(n) + g(n) \le c_1 \cdot g(n) + g(n) = (c_1 + 1) \cdot g(n)$
- ולכן אם $c = c_1 + 1$ יתקיים לאותו n_0 ש $f + g = O(g)$

(ב) Ω :

- לכל פונקציה מתקיים ש $g = \Omega(g)$, ולכן קיימים $c_1, n_1 > 0$ כך שלכל $n \ge n_0$ $g(n) \ge c_1 \cdot g(n)$
- נגדיל את צד שמאל (חיובר $f(n)$) ונקבל אי־שיויון תקין: $g(n) + f(n) \ge c_1 \cdot g(n)$
- לכן $g(n) + f(n) = \Omega(g)$

20. אם $f = O(g)$ אז $f \cdot g = \Theta(g^2)$

הוכחה

$$f(n) \le c \cdot g(n)$$
$$f \cdot g \le c \cdot g^2$$
$$\Downarrow$$
$$O(g^2)$$

21. אם $f = O(g)$ אז$fg = \Omega(g^2)$

- הטענה לא נכונה ־ דוגמה נגדית: $f = 1$, $g(n) = n$ מתקיים ש: $1 = O(n)$ אבל לא מתקיים $1 \cdot n = \Omega(n^2)$

22. לכל f מתקיים $O(f)^{O(f)} = O(f^f)$

- נחליף את $O(f) = c \cdot f$ נקבל את השאלה האם $c(f)^{c(f)} = O(f^f)$ ־
- דוגמה נגדית ־ $f = n$ נקבל ש: $c \cdot n^{c \cdot n} = c^{cn} \cdot n^{cn} = c^{cn}(n^n)^c = \Omega(n^n)$

23. מה היחס בין $f = 2^n$ ו $g = n^{\log n}$

$$n^{log(n)} \stackrel{?}{=} 2^n$$
$$log(n) \cdot \log(n) \stackrel{?}{=} n \cdot log(2)$$
$$\log^2(n) \stackrel{?}{=} n$$

- נזכר ש $\lim_{n \to \infty} \frac{f}{g} = \infty \iff f = \omega(g)$ וש $\lim_{n \to \infty} \frac{f}{g} = 0 \iff f = o(g)$
- לכן ־ בעזרת לופיטל:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\log^2(n)}{n} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{n \to \infty} \frac{2\log(n) \cdot \frac{1}{n}}{1n} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{n \to \infty} \frac{2 \cdot \frac{1}{n}}{1} = 0$$

- מסקנה: $\log^2(n) = o(n)$

24. מה היחס בין $f = (n!)^2$ ו $g = (n^2)$

- מתקיים ש:

$$f = (n!)^2 \qquad g = (n^2)!$$
$$\cancel{n!} \cdot n! \qquad \cancel{1 \cdot 2 .....n} \cdot n + 1 ... n^2$$

- בימני יש לנו n גורמים שכל קטן או שווה מ n
- בשמאלי יש לנו $n^2 - n$ גורמים וכל אחד מהם גדול או שווה מ n $\left(n^2 - n \geq n\right)$
- ולכן $g = \Omega(f)$

25. יהיו $a, b, c \geq 1$ אז: $c^{\log_a n} = \Theta\left(c^{\log_b n}\right)$:

- לא נכון ־ כיוון ש:

$$c^{\log_a n} = c^{k \cdot \log_b n} = \left(c^{\log_b n}\right)^k = \begin{cases} 1 < k & \Omega(c^{\log_b n}) \\ 1 > k & O(c^{\log_b n} \end{cases}$$

26. הוכיחו או הפריכו: לכל 2 פונקציות $f, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ מתקיים ש: $f = O(g)$ או $g = O(f)$

הטענה לא נכונה ־ דוגמה נגדית

- נבחר $f(x) = sin(x) + 2$, $g = \cos(x) + 2$

27. א. הוכיחו/הפריכו תהיינה $f(n), g(n)$ פונ' מעל הטבעים אם $f(n) = O(g(n))$ אז $f(n) + g(n) = \Theta\left(g(n)\right)$

- מהנתון קיימים $c, n_0 > 0$ כך שלכל $n \geq n_0$ מתקיים ש $f(n) \leq c \cdot g(n)$

- נבחר $n = n_0$, ויתקיים ש:

$$f(n) + g(n) \le c \cdot g(n) + g(n) = (c+1)g(n)$$

- ולכן בעבור בחירת $c' = c + 1$ נקבל ש: $f(n) + g(n) = O(g(n))$
- נראה ש Ω :

$$f(n) + g(n) \overset{\in \mathbb{N}}{\ge} g(n) = \Omega\left(g(n)\right)$$

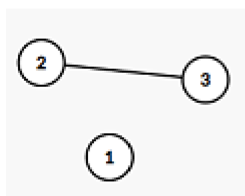
- כי כל פונקציה היא Ω של עצמה
- סה"כ: $f(n) + g(n) = \Theta(g(n))$, כנדרש

ב. תהי $f(n)$ פונקציה מעל הטבעים אם $g(n) = O\left(f(n)\right)$ אז $c \cdot g(n) = O\left(f(n)\right)$ לכל $c > 0$

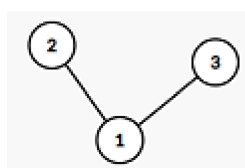
- נניח ש $g(n) = O(f(n))$ מכאן שקיימים $c_1, n > 0$ כך ש $g(n) \le c_1 f(n)$
- נכפיל ב c מהשאלה: $c \cdot g(n) = c \cdot c_1 \cdot f(n)$, ולכן אם נבחר $c' = c \cdot c_1$ נקבל את הדרוש.

3 תורת הגרפים

1. מהו הגרף המשלים של הגרף:

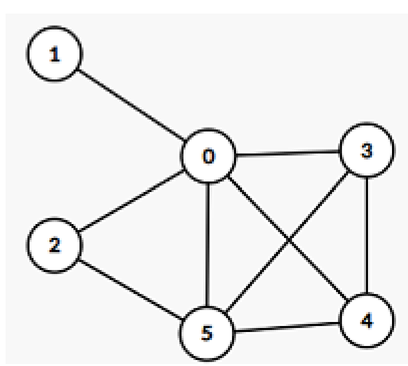


תשובה:



2. האם קיים גרף שדרגותיו $1, 2, 3, 3, 4, 5$?

תשובה: כן נצייר

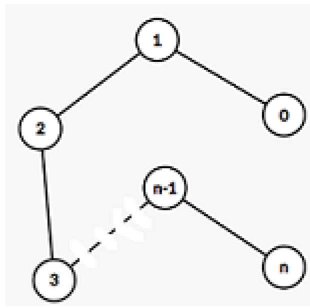


3. <u>האם קיים גרף שדרגותיו $1,2,3,3,4,6$?</u>

<u>תשובה</u>: לא, הוכחה: ממשפט סכום הדרגות חייב להיות זוגי.

4. <u>מה המרחק הגדול ביותר גרף קשיר עם n קודקודים</u>

<u>תשובה</u>: (שרוך)



5. יהי $G=(V,E)$ גרף פשוט, יש להוכיח כי לפחות אחד מהגרפים $\bar{G},G$ קשיר.

<u>הוכחה:</u>

- אם G קשיר סיימנו, לכן נניח ש G אינו קשיר, ונראה ש $\bar{G}$ קשיר.
- יהיו $u,v\in\bar{G}$, אם יש מסלול $(u,v)\in\bar{E}$ סיימנו.
- לכן נניח ש $(u,v)\in E$
- מהנחה G אינו קשיר ולכן קיים קודקוד כלשהו, נסמנו ב w כך שאין מסלול בינו לבין u ו v
- מהגדרת הגרף המשלים נובע ש $(v,w)\in\bar{E}$ וגם $(u,w)\in\bar{E}$
- ולכן יש גם מסלול $(u,v)\in\bar{E}$, ולכן הגרף קשיר
  - הערה: למעשה הוכחנו שהמרחק המקסימלי ב $\bar{G}$ הוא 2.

6. <u>תרגיל: האם גרף ה n קוביה הוא גרף־צדדי?</u>

עבור ריבוע (2 ־ קוביה): כן, ניתן לחלק את קב' הקודקודים ל 2 קבוצות זרות, כן ש $V_1\cup V_2$ והתנאי בגדרה מתקיים

עבור n כללי ־ הוכחה:

- תהי V_1 קב' הקודקודים בהם מס' זוגי של 0ים
- ותהי V_2 קב' הקודקודים בהם מס' אי־זוגי 0ים
- מתקיים ש $V_1\cup V_2=V$ וגם $V_1\cap V_2=\phi$
- נראה שלא יתכן שיש צלע בין קודקודים ב V_1 ולא בין צלע בין קודקודים ב V_2
- לפי הגדרת הn־קוביה , 2 קודקודים מחוברים בצלע אס"ם הם נבדלים בביט אחד בדיוק.
- לכן ל 2 קודקודים כאלה יש זוגיות שונות של מס' ה 0ים
- לכן 2 קודקודים כנ"ל שייכם לצדדים שונים , כלומר אחד מהם ב V_1 והשני ב V_2

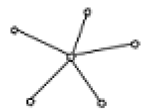
7. <u>מהו מספר המימלי של צלעות בגרף לא מכוון בן n קודקודים , כך שהמרחק בין כל זוג קודקודים קטן או שווה לל2 ?</u>

צ"ל: שהמספר הוא $n-1$

(א) יש להראות שלא ניתן בפחות צלעות

(ב) שכן ניתן ב $n-1$

- הוכחת א: מתקיים כי הוכחנו שבגרף קשיר ישנן לפחות $n-1$ צלעות, והגרף בשאלה בהכרח קשיר כי המרחקים חסומים ע"י 2 (בגרף לא קשיר קיימים לפחות זוג קודקודים שאין בינהם מסלול ולכן המרחק בינהם הוא ∞)
- הוכחת ב: להראות שקיים, ניקח כוכב:



8. <u>כמו ב1 עם מרחק קטן או שווה ל 1</u>

- מהדרישה נובע שכל זוג קודקודים מחובר בצלע, לכן בהכרח גרף שמקיים את הדרישה הוא k_n
- הראנו בשיעור שעבר שבגרף זה יש $\binom{n}{2}$ צלעות.

9. <u>הוכיחו כי בכל עץ $(|V|>2)$, יש לפחות 2 עלים</u>

- יהי v קודקוד.
- נתחיל מ v ונטייל על העץ כל שבכל שלב נעבור לקודקוד שכן מבלי לחזור על קודקוד פעמיים
- G גרף סופי, ולכן התהליך יסתיים לכל היותר לאחר $|V|$ שלבים
- כיון שבגרף אין מעגלים בסוף התליך נגיע לקודקוד בדרגה 1
- נניח בשלילה שהגענו לקודקוד שדרגתו ≤ 2 , וביקרנו את כל השכנים, אז מכאן שסגרנו מעגל, בסתירה לכך ש G הוא עץ
- לסיכום נבחר קודקוד v , נגיע ממנו לעלה u , וכעת נתחיל את הטיול מחדש , על פי מה שהראנו בודאות נגיע לעלה חדש w , וקיבלנו שני עלים כנדרש.

10. <u>נתון גרף פשוט לא מכוון $G=(V,E)$ כך שעבור כל צלע $e\in E$ הגרף $G\backslash\{e\}=(V,E\backslash\{e\})$ הוא עץ . הוכיחו שכל קודקוד ב G הוא בדרגה 2</u>

- יהי $v\in V$, קודקוד בG כך ש $deg(v)>1$, (נניח בשלילה שאין, אז השמטת צלע שכזו תגרור גרף לא קשיר)
- תהי $e=\{u,v\}$ צלע ב G . על פי הנתון אם נשמיט את e מ G נקבל עץ
- משאלה קודמת, ידוע שבעץ יש לפחות 2 עלים.
- עלים אלו חייבים להיות u,v כי השמטת הצלע e לא פוגעת בדרגות שאר הקודקודים.
- לכן $d(u)=d(v)=2$, כיון שאחרי השמטת הקשת דרגתם 1 , כנדרש.

11. <u>נתונים שני יערות $G_1=(V,E_1)$, $G_2=(V,E_2)$. הוכיחו כי אם $|E_2|<|E_1|$ אז קיימת צלע $e\in E_2\backslash E_1$ כך שהגרף $G'=(V,E_1\cup\{e\})$ עדיין יער</u>

- נניח בשלילה שלכל $e\in E_2\backslash E_1$, אם נוסיף אותה ל G_1 נסגור מעגל
- כל צלעות E_2 הם מרכיבי קשירות של E_1 כלומר אין צלעות ב E_2 מרכיבי קשירות שונים של G_1
- כמות הצלעות ב E_1 גדולה או שווה לכמות הצלעות ב $|E_2|$ כלומר $|E_2|\geq|E_1|$ סתירה לכך ש $|E_2|<|E_1|$
- הסבר: ברכיב קשירות בגדול k , ב E_1 יש $k-1$, לכן מספר הצלעות של E_2 מרכיב קשירות זה $\geq k-1$

12. <u>האם גרף הn קוביה הוא מישורי</u>

- $n=1$ ✓
- $n=2$ - ריבוע ✓
- $n=3$ קוביה ✓
- $n\geq 4$ אינו מישורי, ניתן להוכיח ע"י שימוש במסקנה $m\leq 2(n-2)$ כי ב n קוביה אין משולשים, כי הוא דו -צדדי לכן:
  - $m=n\cdot 2^{n-1}$
  - לכן צריך להתקיים $n\cdot 2^{n-1}\leq 2(2^n-2)$ לכן עבור $n\geq 4$ גרף ה n קוביה אינו מישורי

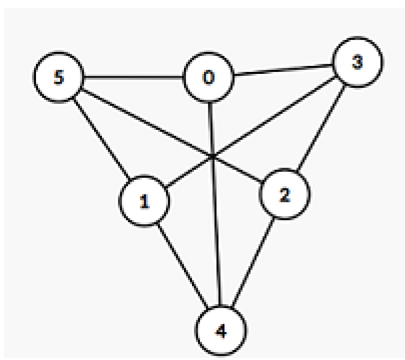
13. כמה זיווגים מושלמים יש ב $k_{3,3}$?

- נניח והגרף מחולק לקודקודים $1,3,5$ ו $2,4,6$
- אז ל 1 : יש 3 אפשרויות לשידוך
- ל3: יש 2 אפשרויות לשידוך
- ל5 יש אפשרות אחת
- מעקרון הכפל $3!$ זיווגים מושלמים.

14. האם קיים גרף עם סדרת הדרגות הבאה?

(א) $3,3,3,3,3,3$

- כן (סכום הדרגות הוא זוגי) נצייר:



(ב) $3,3,3,3,3$

- הסכום אי־זוגי, ולכן לקיים גרף כזה.

15. האם יתכן כי בגרף G עם n קודקודים בו דרגת כל קודקוד שווה 3 יהיו 100 :

לא, הוכחה:

$$\sum_{v\in V} deg(v)=3n=2\cdot 100\Rightarrow n=\frac{2}{3}\cdot 100\notin\mathbb{N}$$

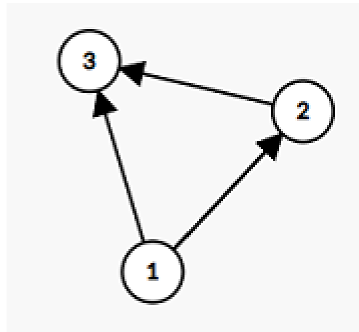
הראנו שמעקרון שובך היונים אם n אנשים שלחצו ידיים, אז קיימים 2 אנשים שלחצו ידיים לאותו מספר של אנשים

נדגים בגרפים: נרצה להראות לכל גרף עם n , קיימים 2 קודקודים בעלי אותה דרגה (לחיצת יד = צלע)

- נגדיר :
  - שובכים = דרגות אפשרויות: $n-1$
  - יונים - קודקודים : n
  - מעקרון שובך היונים...

16. <u>בגרף מכוון עם n קודקודים ו $\binom{n}{2}$ צלעות האם בהכרח יש מעגל</u>

לא, $\binom{3}{2} = 3$ צלעות, ו:



17. <u>הוכיחו: אם בגרף G יש n קודקודים ו $n+4$ קשתות , וכל הדרגות הן לפחות 3 אז $n \le 8$</u>

הוכחה:

$$3n \le \sum_{v\in V} deg(v) = 2|E| = 2(n+4)$$
$$3n \le 2n+8$$
$$n \le 8$$

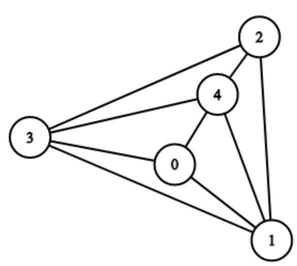
18. מועד א' תשעח ־ שאלה 1

<u>א. נתון גרף מישור פשוט G שבו קיים מסלול אוילר באורך 9 .</u>

נתון גם כי קיימים 2 קודקודים u,v שאין צלע בינהם, וכן שאם נוסיף את הצלע $\{u,v\}$ הגרף שיקתבל לא מישורי האם קיים כזה בעל 5 קודקדים?

פתרון

- מהנתון יש 9 צלעות
- אם נסיר צלע מ K_5 נקבל גרף מישורי



- G מישורי (כי ציירנו אותו במישור) ב G ישנם בדיוק 2 קודקודים (במקרה הזה 0 ו 2) מדרגה אי־זוגית והוא קשיר ולכן יש בו מסלול אוילר.
- u,v אינם מחוברים בצלע, ואם נוסיף את הצלע $\{u,v\}$ נקבל את K_5 שהוכחנו בכיתה שהוא לא מישורי

19. <u>הוכיחו כי אם בגרף פשוט עם nקודקודים אין משולש אז יש בו לכל היותר $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$קשתות</u>

נראה באינדוקציה

- בסיס:
  - עבור $n = 1$: $\left\lfloor \frac{1}{4} \right\rfloor = 0$
  - עבור $n = 2$: $\left\lfloor \frac{4}{4} \right\rfloor = 1$
  - עבור $n = 3$: $\left\lfloor \frac{3^2}{4} \right\rfloor = 2$
- צעד - נניח ל $k < n$ ונוכיח ל n
  - נבחר צלע כלשהי (u, v) - אם אין צלע, הטענה מתקיימת מיידית)
  - נשים לב שקבוצות של השכנים של u ושל v זרות, כי אחרת היה מתקבל משולש
  - נגדיר G' המתקבל מG ע"י מחיקת הקודקודים u, v והצלעות המחוברות לפחות לאחד מהם
  - לפי הנחת האינדוקציה בG' יש $n-2$ קודקודים ולכן יש בו $\frac{(n-2)^2}{4}$ צלעות
  - נסמן : $A = \Gamma(u)$, $B = \Gamma(v)$
  - נחשב את מס' הצלעות ב G :

$$|E(G)| = |E(G')| + 1 + A + B \leq \left\lfloor \frac{(n-2)^2}{4} \right\rfloor + 1 + n - 2 = \left\lfloor \frac{n^2-4n+4}{4} + \frac{(n-1)\cdot 4}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$$

20. הכיחו כי לכל גרף פשוט G קשיר או $\bar{G}$ קשיר (או שניהם)

- נניח ש G איננו קשיר, נוראה ש $\bar{G}$ קשיר
- יהיו $u, v \in V_G$, נפצל למקרים:
  - אם ב G אין u, v אז $\bar{G}$ יש קשת (u, v) , כנדרש
  - אחרת, ב G יש קשת (u, v)
    * G איננו קשיר, לכן יש לפחות 2 רכיבי קשירות ב G
    * יהי w קודקוד ששיך לרכיב קשירות חדש ב $\bar{G}$ יהיו הצלעות (u, w) ו (v, w) ונקבל $\bar{G}$ מסלול מ u ל v
    * ולכן $P = (v, w, u)$, ומכאן שהגרף $\bar{G}$ קשיר.

21. הוכיחו אתמשפט רמזי: יהי G גרף על 6 קודקודים . הוכיחו - בG יש משולש או $\bar{G}$ יש משולש

ניסוח שקול: בכל צביעה של הצלעות של K_6 ב2 צבעים קיים משולש מונוכרומטי (=בעל צבע אחיד)

הוכחה:

- נתבנון בקודקוד כלשהו, ונסמנו ב v_1 מכך ש K_6 ייוצאו ממנו 5 צלעות
- לפי עקרון שובך היונים המרוחב , קיימות 3 צלעות באותו צבע - בה"כ הן בצבע אדום ומחבורות לקודוקדים x, y, z
- מקרה 1 : אחת מהצלעות $(x, y), (y, z), (z, x)$ אדומה $\Leftarrow$ נקבל משולש אדום
- מקרה 2 : כל הצלעות $(x, y), (y, z), (z, x)$ בצבע השני - בצבע כחול $\Leftarrow$ נקבל משולש כחול

22. הראו כי k_5 אינו מישורי

$$m = \binom{5}{2} > 3(5-2).$$

- המספר הכרומטי של עץ עם n קודקודים $\chi(T_n) = 2$
- משפט גרף הוא דו צדדי אם"ם הוא 2 צביע
  - נתון G כך שמוכל עותק של G $k_m \subseteq G$ אז $\chi(G) \geq m$

23. הוכיחו שבגרף G כך ש $\chi(G) = k$ יש לפחות $\binom{k}{2}$ צלעות

טענת עזר: בכל מחלקת צבע יש קודקוד עד דרגה $k-1$

כי אחרת, היה אפשר לבטל את הצבע הזה (לכל קודקוד, עם דרגה $k-2$ או פחות, לתת את הצבע ה $k-1$ ובכך להסתפק ב $k-1$ צבעים

לכן:

$$2|E| = \sum_{v\in V} deg(v) \geq k \cdot (k-1) \Rightarrow |E| \geq \frac{k(k-1)}{2} = \binom{k}{2}$$

24. יהיו $G_1\left(V,E_1\right)$, $G_2=\left(V,E_2\right)$ 2 גרפים 3- צבעים מעל אותה קב' קודקודים . הוכיחו ש $G=\left(V,E_1\cup E_2\right)$ הוא 9-צביע

פתרון:

- נסמן את הצביעה הראשונה ב C_1 ואת השניה ב C_2
- נתאר צביעה חדשה של G - לכל קודקוד v נתאים צבע שהוא הזוג הסדור הבא: $C\left(v\right)=\left(C_1(v),C_2(v)\right)$
- מכיון ש c_1 ו c_2 הן צביעות תקינות נובע שגם c היא תקינה

25. א. הוכיחו שב G מתקיים $\sum deg(v) < 8n$

$$\frac{\sum deg(v)}{n} < 6$$

$$2\left|E_1\right| = \sum deg(v) = 6 - \frac{12}{n} < 6n$$

$$2|E_2| \leq 2(n-1)$$

$$\sum_G \deg(v) \leq 6n + 2n - 2 < 8n$$

ב. הוכיחו באינדוקציה ש G הוא 8 צביעה

מסקנה מא: ממוצע דרגות ב G < 6

לכן יש קודקוד עם דרגה 7 או פחות, נוכיח ש G הוא 8 צביע .

בסיס: $n=1,....8$ ⇐ 8 צביעה

צעד:

- נוריד את הקודקוד בעל הדרגה 7 או פחות
- נשתמש בהנחת האינדוקציה
- נחזיר

26. . מה המס' הכרומטי של גרף מסלול?

תשובה $X\left(P_n\right)=2$ (צבעי הקודקודים מתחלפים לסירורגין)

27. מהו המס' הכרומט של גרף מעגל?

$$X(C_n) = \begin{cases} 2 & n-even \\ 3 & n-odd \end{cases}$$

28. 3. מה המס' הכרומט של גרף G דו-צדדי

תשובה: $X(G)=2$

29. מהו המס' הכרומטי של עץ T_n ?

תשובה $X(T_n)=2$

30. מהו מס' הכורמטי של הגרף השלם K_n

תשובה $X(K_n)=n$

31. מה מספר הזיווגים המושלמים בגרף $K_{n,n}$? תשובה $n!$

32. <u>האם קיים גרף דו־צדדי בעל מס' זוגי של קודקודים שיש בו מעגל אוילר ואין בו זיווג מושלם</u>

- נבחר גרף דו־צדדי שגדול קבוצות הקודקדים לא שווה, ונדאג שדרגת כל קודקוד תהיה זוגית

שיעור 13 ־ השלמה ־ 10/6/19

2 . יהי G הגרף הבא:

הקודקודים של G הם תת קב' בגודל 3 בדיוק של $\{1, 2, ..., 8\}$(לדוגמה $\{1, 2, 7\}$ קבוצה ב G). בין 2 קודקודים A, B יש צלע אם"ם החיתוך של A ו B הוא ϕ , <u>הוכיחו/הפריכו:</u>

<u>א. G קשיר</u>

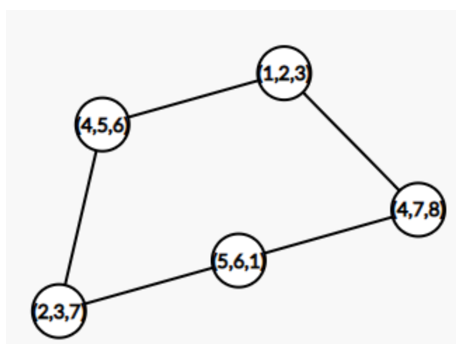
צ"ל שבין כל 2 קודקודים A, B יש מסלול, נסמן: $\begin{array}{c} A = \{a, b, c\} \\ B = \{d, e, f\} \end{array}$:

- אפשרות 1 : $A \cap B = \phi$ לכן יש צלע $A - B$ (= מסלול באורך 1)
- אפשרות 2 : $B = \{a, d, e\}$ אז קיימים 3 איברים שלא נמצאים ב $A \cup B$ ואתם ניקח את C להיות $C = \{f, g, h\}$ נקבל מסלול $A - C - B$.
- אפשרות 3 : $B = \{a, b, d\}$ והשאר כמו ואפשרות 3 כי $|A \cup B| \leq 5$

לכן בין כל 2 קודקודים קיים מסלול באורך 2 לכל היותר, כנדרש.

<u>ב. G גרף דו־צדדי</u>

נצייר



קיבלנו מעגל באורך 5 , שהוא אי־זוגי ולכן הגרף אינו דו"צ (הוכחנו בכיתה שגרף הוא דו"צ אם"ם אין מעגלים באורך אי־זוגי)

שאלה

<u>א. האם בהורדת 2 צלעות מ k_6 יכול להתקבל גרף מישורי?</u>

- לא ־ אם נסיר 2 צלעות שיש להן קודקוד משותף שאר הקודקודים מהווים k_5 שהוא לא מישורי
- לא ־ אם נסיר 2 צלעות שאין להם קודקוד משותף, הגרף שמתקבל מכיל את $k_{3,3}$ שוהכחנו בכיתה שהוא לא מישורי

  פורמלית:

  - תהיינה $\{x, y\}$ $\{z, t\}$ הצלעות שנוסרו נקח $\begin{array}{c} v_1 = \{x, y, a\} \\ v_2 = \{z, t, b\} \end{array}$, נשים לב שכל הצלעות בין v_1 ל v_2 קיימות ברף לכן הגרף שהקתבל אכן מכיל את $k_{3,3}$

<u>דרך נוספת:</u>

- ב k_6 בהסרת 2 צלעות נקבל 13 צלעות ו $\cancel{13 \leq 3(6-2)}$ בסתירה לכך שוהכחנו בכיתה שבגרף מישורי $m \leq 3(n-2)$

<u>ב. האם בהורדת 3 צלעות מ k_6 יכול להתקבל גרף מישורי</u>

- נצייר

שאלה 3

חמישה סטונדטים התבקשו להשתתף ב 4 פורייקטים שונים, כאשר כל פרוקייט בוצע ע"י 2 סטודנטים.

א. בכמה דרכים ניתן להגדיר צוותים לביצוע כל הפורייקטים כאשר לא כל הסטודנטים חייבים להשתתף

- אפשרות לבחור סטודנטים לפרויקט 1 : $\binom{5}{2}$
- עבור 4 , מעקרון הכפל: $\binom{5}{2}\binom{5}{2}\binom{5}{2}\binom{5}{2}$

ב. בכמה דרכים ניתן להגדיר צוותים לביצוע כל הפרוייקטים כאשר כל סטודנט חייב להשתתף בלפחות אחד מהפרוייקט

- נחשב : (כל האפשרות בהין קיים סטודנט שלא השתתף בשום פרוייקט)- (סך האפשרויות)
- נגדיר $1 \leq i \leq 5$, A_i = כל האפשוריות בהן ה i לא השתתף
- סך הכל = א'
- הקב' סימטריות
  - $|A_1| = \binom{4}{2}^4$
  - $|A_1 \cap A_2| = \binom{3}{2}$
  - $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \binom{2}{2}^4$
  - $|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5| = 0$
- סה"כ:

$$\binom{5}{2}^4 - \left(\binom{5}{1}\binom{4}{2}^4 - \binom{5}{2}\binom{3}{2}^4 + \binom{5}{3} \cdot 1\right)$$

תשעו מועד ב'

3 . יהי $f(n)$ מס' הגרפים השונים $G = (V, E)$ כאשר $V = \{1, 2, ..., n\}$ שבהם כל רכיב קשירות הוא מסלול באורך 1 או 2

א. הראו כי $f(5) = 30$

- ראשית נשים לב, שמקרה זה רכיבי הקשירות חייבם להתחלק ל3,2 אחרת נקבל סתירה לאורכי המסלול
- נשאר לחשב את מס' האשפרויות לחלק 5 קודקודים ל2 רכיבי קשירות כאלה, לכן $\binom{5}{2}$ - סימטרי לבחירת $\binom{5}{3}$
- כעת צריך להתייחס לסידור הפנימי
  - ברכיב עם שני הקודקודים, יש סידור יחיד
  - ברכיב עם שלושה קודקודים: כמו ברכיב הקודקודים יש סימטריה בין הקצוות, ולכן יש 3 אפשרויות שונות לבחירת הקודקוד האמצעי
- סה"כ:

$$\binom{5}{3} \cdot 3 = 30$$

- ב. מצאו נוסחת נסיגה ותנאי להתחלה ל $f(n)$

חלק II

משפטים והגדרות

4 עקרונות בסיסיים במניה

- עקרון החיבור: תהיינה A, B קב' סופיות זרות אז: $|A \cup B| = |A| + |B|$
- עקרון הכפל: תהיינה A, B קב' סופיות אז: $|A \times B| = |A| \cdot |B|$
- עקרון החיבור המורחב: תהיינה $A_1, A_2, ..., A_n$ קב' סופיות, זרות בזוגות (כלומר לכל $i \neq j$ מתקיים ש: $A_i \cap A_j = \phi$) אז:

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \sum_{i=1}^{n} |A_n|$$

- עקרון הכפל המורחב: תהיינה $A_1, A_2, ..., A_n$ קב' סופיות, זרום בזוגות (כלומר לכל $i \neq j$ מתקיים ש: $A_i \cap A_j = \phi$) אז:

$$|A_1 \times A_2 \times ... \times A_n| = \prod_{i=1}^{n} |A_n|$$

- n עצרת : $n! = n(n-1) \cdot ... \cdot 1$. כאשר $0! = 1$

4.1 בעיות מניה בסיסיות

לבחירת k איברים מתוך n אברים שונים , ניתן להגדיר את אפשרויות הבחירה כך:

1. ללא חזרות - k איברים שונים - עם חשיבות לסדר הבחירה: $\frac{n!}{(n-k)!}$
2. ללא חזרות, ללא חשיבות לסדר. $\binom{n}{k}$
3. עם חזרות, (ניתן לבחור איבר יותר מפעם אחת), עם חשיבות לסדר. n^k
4. עם חזרות, ללא חשיבות לסדר.

לסיכום:

סדר/חזרות	ללא חזרות	עם חזרות
ללא חשיבות לסדר	$\binom{n}{k}$	$\binom{n+k-1}{n-1}$
עם חשיבות לסדר	$\frac{n!}{(n-k)!}$	n^k

הערות:

1. $\binom{n}{k}$ מוגדר בעבור $n \geq k$ (עצרת שלילית לא מוגדרת) - בעבור 1,2 ל (3,4 אין בעיה)
2. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

4.1.1 עקרון שובך היונים

הרעיון: יש לנו מספר יונים הגדול ממספר השובכים, אז קיים לפחות שובך אחד שיש בו יותר מיונה אחת.

יש לנו פונקציה: $F : A \to B$ (A, B סופיות)

אם $|A| > |B|$ אז קיימים לפחות שני איברים ב A שיש להם את אותה התמונה.

4.1.2 משפט ארדש־סקקדש

בכל סדרה של n^2+1 מספרים ממשים שונים זה מזה, יש תת סדרה של לפחות $(n+1)$ ספרות שהיא יורדת או עולה

5 הוכחות קומבינטוריות

5.1 בינום ומקדמים בינומים

5.1.1 הבינום של ניוטון:

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}$$

5.1.2 זהות פסקל $\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}=\binom{n}{k}$

טענה: $\binom{n}{k}=\binom{n}{k-1}\frac{n-k+1}{k}$

טענה:

אם n זוגי $\binom{n}{\frac{n}{2}}>\binom{n}{\frac{n}{2}+1}>....>\binom{n}{n}\wedge\binom{n}{0}<\binom{n}{1}<...<\binom{n}{\frac{n}{2}}$

אם n אי־ זוגי $\binom{n}{\frac{n+1}{2}}>\binom{n}{\frac{n}{2}+1}>....>\binom{n}{n}\wedge\binom{n}{0}<\binom{n}{1}<...<\binom{n}{\frac{n-1}{2}}=\binom{n}{\frac{n+1}{2}}$

5.2 מולטינום ומקדמים מולטינומים

הגדרה: מקדם מולטינומי (הכללה של $\binom{n}{k}$) : $\binom{n}{k_1,k_2,k_3,...k_m}=\frac{n!}{k_1!k_2!\cdot....k_m!}$, כאשר $k_1+k_2+...+k_m=n$

עבור $m=2$ יתקיים ש: $\binom{n}{k_1,k_2}=\frac{n!}{k_1!k_2!}=\frac{n!}{k_1!(n-k)!}$

5.2.1 נוסחת המולטינום

$$\boldsymbol{(x_1+x_2+....+x_m)^n=\sum_{\substack{\sum_{i=1}^{m}k_i=n\\ k_i\in[0,n],\ \forall i\in[1,m]}}^{n}\binom{n}{k_1,k_2,...,k_m}x^{k_1}\cdot x_2^{k_2}\cdot....\cdot x_m^{k_m}}$$

6 מספרי קטלן

כמה אפשרויות ישנן לסדר בשורה n, 0ים ו n 1ים כך שבכל רישא , של הסדרה מס' ה 0ים $\leq$ מס' ה1 ים?

נסמן c_n - מס' קטלן ה nים

שקול לשאלה : מס' האפשרויות לסדר בשרוה n זוגות סוגריים כך שיתקבל ביטוי מאוזן.

טענה: $c_n=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$

6.1 עקרון ההכלה וההדחה

העיקרון עבור 3 קבוצות:

$$|A_1\cup A_2\cup A_3|=|A_1|+|A_2|+|A_3|-|A_1\cap A_2|-|A_2\cap A_3|-|A_1\cap A_3|+|A_1\cap A_2\cap A_3|$$

בהנתן n קב' סופיות $A_1,A_2,....,A_n$ נרצה לחשב את $\left|\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right|$אז:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right|=\sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{1\leq i<j\leq}^{n}|A_i\cap A_j|+....(-1)^{j+1}\sum_{1\leq i_1<....<i_j\leq n}^{n}\left|A_{i_1}\cap...\cap A_{i_j}\right|$$

מקרה פרטי של הנוסחה:

- אם לכל j החיתוכים $|A_{i_1} \cap A_{i_2} ..... \cap A_{i_j}|$ שווים לכל $1 \le i_1 \le i_2 \le ..i_j \le n$ אז לניתן לפשט את הנוסחא

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \binom{n}{j} \cdot |A_{i_1} \cap A_{i_2} ..... \cap A_{i_j}|$$

6.2 אי־סדר מלא על n איברים

מהו מס' התמורות (=מס' סידורים בשורה של איברים שונים), בהן אף איבר לא נמצא במקומו, כלומר A_1 לא במקום הראשון, A_2 לא בשני....?

$$n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! + ... + (-1)^{j+2}\binom{n}{j}(n-j)!... + (-1)^n \binom{n}{n}(n-n)!$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \binom{n}{j}(n-j)! = \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \cancel{\frac{n!}{j!(n-j)!}(n-j)!} = n! \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^j}{j!} \xrightarrow[n\to\infty]{} n!\frac{1}{e} = D_n$$

6.3 נוסחאות נסיגה ־ רקורסיות

דוגמה: סדרת פיבונאצ'י

$$f(0) = 1 \qquad f(1) = 1 \qquad f(n) = f(n-1) + f(n-2) \qquad \forall n > 2$$

אז:

$$1, 2, 3, 5, 8, ...$$

נרצה פתון ל $f(n)$ ללא תלות באיברים קודמים.

$$\Rightarrow f(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \right]$$

6.3.1 נוסחאות נסיגה לינאריות הומגניות

<u>הפתרון הכללי לנוסחאות הומגוניות:</u>

1. עבור $1 \le r \le n$

$$f(n) = a_1 \cdot f(n-1) + a_2 \cdot f(n-2) + ... + a_r \cdot f(n-r)$$

2. נציב פתרון מהצורה $f(n) = x^n$ בנוסחת הנסיגה נקבל:

$$x^n = a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + ... + a_r x^{n-r}$$

3. נצמצם ב x^{n-r} $(x \ne 0)$:

$$x^r - a_1 x^{r-1} - ..... - a_r = 0$$

4. פותרים את הפולינום ־ לינארית ־ במקרה בו מקבלים r פתרונות <u>שונים</u> לפולינום $x_1, ..., x_r$ הפתרון הכללי יהיה, צירוף לינארי של הפתרונות, ולכן:

$$f(n) = c_1 x^n + c_2 x_2^n + ... + c_r x_r x^r$$

5. כדי לקבל פתרון יחיד, נשתמש ב r תנאי ההתחלה $f(0), f(1), ..., f(r-1)$ כדי לקבוע את c_i , עבור $i \in [1, r]$

6.3.2 אי־סדר מלא

סימנו ב D_N את מספר התמרות על n איברים שהן אי־סדר מלא. נכתוב נוסחת נסיגה ל D_n :

$$\underbrace{\left[\overset{i}{\cancel{1}}\right]}\underbrace{\sqcup\quad\sqcup\quad\sqcup\quad\sqcup}_{n-1}$$

סה"כ:

$$D_n=(n-1)\left(D_{n-2}+D_{n-1}\right)$$

תנאי התחלה

$$D_1=0 \qquad D_2=1$$

7 אסימפטוטיקה

<u>הגדרות:</u>

- נאמר ש $f(n)=O\left(g(n)\right)$ אם"ם קיים $c_1>0$ ו n_0 כך שלכל $n\geq n_0$ מתקיים ש:

$$0\leq f(n)\leq c_1\cdot g(n)$$

- נאמר ש $f(n)=\Omega\left(g(n)\right)$ אם"ם קיים $c_1>0$ ו n_0 כך שלכל $n\geq n_0$ מתקיים ש:

$$0\leq c_1\cdot g(n)\leq f(n)$$

- נאמר ש $f(n)=\Theta\left(g(n)\right)$ אם"ם קיימים $c_1,c_2>0$ ו n_0 כך שלכל $n\geq n_0$ מתקיים ש:

$$0\leq c_1\cdot g(n)\leq f(n)\leq c_2\cdot g(n)$$

תזכורת:

- $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=0\Rightarrow f(n)=o\left(g(n)\right)$
- $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}<\infty\Rightarrow f(n)=O\left(g(n)\right)$
- $0<\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}<\infty\Rightarrow f(n)=\Theta\left(g(n)\right)$
- $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}>0\Rightarrow f(n)=\Omega\left(g(n)\right)$
- $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=0\Rightarrow f(n)=\omega\left(g(n)\right)$
- $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=undefined\Rightarrow can't\ say$

<u>טענה: $f(n)=\Theta\left(g(n)\right)\iff g(n)=O\left(f(n)\right)\wedge f(n)=O\left(g(n)\right)$</u>

<u>תכונות:</u>

1. <u>טרנזיטיביות:</u>
   - אם $f=O(g)$ וגם $g=O(h)$ אז $f=O(n)$
   - אם $f=\Omega(g)$ וגם $g=\Omega(h)$ אז $f=\Omega(h)$

2. רפלקסיביות:

- לכל $f = \Theta\left(f\right)$ וגם $f = O(f)$ וגם $f = \Omega(f)$

3. סימטריות: (לΘ)

- אם $f = \Theta(g)$ אז $g = \Theta(f)$

4. אנטי סימטריות (ל O, Ω)

- $g = O(f) \iff f = \Omega(g)$

תזכורת:

1. סכום של טור חשבוני : $\underbrace{a}_{a_1} + \underbrace{(a+d)}_{a_2} + (a+2d) + ... + \underbrace{a + (n-1)\, d}_{a_n} = \frac{n}{2}\left(2a + d(n-1)\right)$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n}{2}(n+1) = \binom{n+1}{2} = \Theta\left(n^2\right)$$

2. סכום של טור גאומטרי: $1 + x + x^2 + ... + x^n$
   - עבור $x \neq 1$ יתקיים ש: $\frac{x^{n+1}-1}{x-1}$
   - אם $x < 1$ יתקיים ש: $\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$
3. הטור ההרמוני: $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \approx \log n$

למה 2:

$$n \cdot a_{min} \leq \sum_{i=1}^{n} a_i \leq n \cdot a_{max}$$

8 תורת הגרפים

8.1 הגדרות:

תהי V קבוצה סופית לא ריקה, ותהי E קבוצה של זוגות איברים שונים מתוך V

- הזוג $G = (V, E)$ נקרא **גרף לא מכוון** אם E קבוצה של זוגות **לא סדורים**.
- הזוג $G = (V, E)$ נקרא **מכוון** אם E קבוצה של זוגות **סדורים**.
- איברי הקבוצה V נקראת **קודקודים**
- איברי הקבוצה E נקראים **צלעות** (בגרף לא מכוון) או **קשתות** (בגרף מכוון), ותסומן:
  - **צלע** בגרף לא מכוון בין הקודקודים u, v תסומן $\{u, v\}$
  - **קשת** בגרף מכוון מ u ל v נסמן (u, v)
- **לולאה** היא צלע מקודקוד לעצמו $\{u, u\}$

סוגי גרפים:

- **גרף פשוט** - גרף ללא לולאות, שבין כל שני קודקודים יש לכל היותר צלע אחת.
- **מולטי גרף** - הוא גרף לא מכוון שבו יתכנו כמה צלעות בין אותו זוג קודקודים

- **פסאודו גרף** - הוא מולטי גרף שאפשר שיהיו לולאות
- יהי $G=(V,E)$ גרף לא מכוון נאמר ששני קודקודים הם **שכנים** אם קיימת צלע בין u ל v, כלומר $\{u,v\}\in E$, ונסמן את קבוצת כל השכנים של קודקוד u : $\Gamma(u)=\{v|\{u,v\}\in E\}$
  - כנ"ל לגרף מכוון (אם יש קשת...)
- יהי $G=(V,E)$ גרף לא מכוון, תהי S תת קבוצה של V אז:

$$\Gamma(S)=\{v|\exists u\in S,\{u,v\}\in E\}$$

היא קבוצת כל השכנים של הקודקודים בקבוצה S

- דרגה של קודקוד
  - <u>בגרף לא מכוון</u>: יהי $G=(V,E)$ גרף לא מכוון. **הדרגה** של קודקוד $u\in V$ היא מספר הצלעות השונות שמכילות את u ונסמן $degree(u)$
  - <u>בגרף מכוון</u>: יהי $G=(V,E)$.
    * **דרגת הכניסה** של קודקוד $u\in V$ היא מספר הצלעות השונות בין קודקודים ב V ל u ונסמן $indegree(u)$
    * **דרגת היציאה** של קודקוד $u\in V$, היא מספר הצלעות השונות בין u לקודקודים ב V ונסמן $outdegree(u)$
    * **הדרגה** של קודקוד $u\in V$ היא דרגת היציאה של u + דרגת הכנינה של u , סימון: $degree(u)$
- יהי $G=(V,E)$ גרף לא מכוון. נאמר שסדרה של קודקודים $(v_1,....,v_m)$ כך שלכל $i\in[1,m-1]$ מתקיים $\{v_i,v_{i+1}\}\in E$ היא **מסלול** (או **מסילה**)
- אם כל הקודקודים במסלול שונים זה מזה אז המסלול נקרא **מסלול פשוט**
- אם $v_1=v_m$ אז המסלול נקרא **מעגל**
- **אורך** המסלול $(v_1,...,v_m)$ שווה $m-1$ (מספר הצלעות)
- יהיו u,v שני קודקודים אז **המרחק** בין u ל v הוא אורך המסלול <u>הקצר</u> ביותר בין u ל v
  - נסמן $d_G(u,v)$ כמרחק בין u ל v , אם אין מסלול נסמן: $d_G(u,v)=\infty$
- המרחק <u>הגדול</u> ביותר בין שני קודקודים בגרף נקרא **קוטר.**
- נאמר שגרף לא מכוון הוא **קשיר** אם קיים מסלול בין כל שני קודקודים בגרף
- נאמר שגרף מכון **קשיר חזק** אם לכל שני קודקודים בגרף u,v קיים מסלול בין u ל v וגם בין v ל u
- יהיה G גרף לא מכוון. קודקודים u,v בגרף נקראים שקולים אם יש מסלול מ u ל v
  - הערה: כל קודקוד שקול לעצמו.
  - יחס השקילות משרה חלקות של קודקודי הגרף למחלקות שקילות, נקרה להם **רכיבי קשירות**
- עבור G גרף מכוון, הקודקודים יקראו שקולים אם יש מסלול מ u ל v וגם מ v ל u .

  יהי $G=(V,E)$ גרף
- ויהיה $x\in V$ קודקוד כלשהו. אז הגרף $\boldsymbol{G\setminus\{x\}}$ הוא הגרף שמתקבל מ G על ידי השמטת הקודקוד x וכל הצלעות (קשתות) שמכילות את x
- ותהי $S\subseteq V$ קבוצת קודקודים כלשהי. אז הגרף $\boldsymbol{G\setminus S}$ הוא הגרף שמתקבל מ G על ידי השמטת הקודקודים ב S וכל הצלעות שמכילות את הקודקודים ב S.

- ותהי $\{x,y\} \in E$ צלע כלשהי. אז הגרף $\boldsymbol{G \backslash \{x,y\}}$ הוא הגרף שמתקבל מ G על ידי המשטת הצלע $\{x,y\}$
- נאמר ש $G' = (V', E')$ הוא **תת הגרף** של G אם: $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$ וכן שעבור כל צלע $\{x,y\} \in E$ מתקיים $x,y \in V'$.
  - אם מתקיים ש: $V' = V$ אז G' יקרא **תת גרף פורש** של G
  - אם מתקיים ש: $E' = E \cap V' \subseteq V'$ אז G' יקרא **תת גרף מושרה** של G

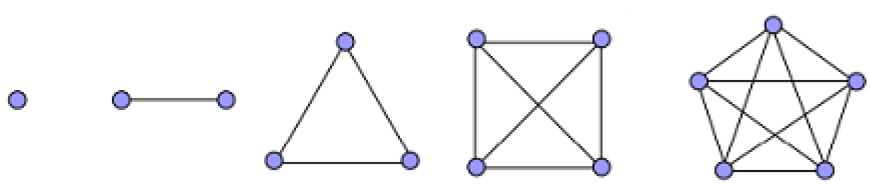
הערה: בגרף קשיר יש רכיב קשירות אחד, בגרף עם n קודקודים ובלי צלעות יש n רכיבי קשירות.

- יהי $G = (V, E)$ גרף פשוט, הגרף **המשלים** $\bar{G} = \left(V, \bar{E}\right)$ הינו גרף על אותה קבוצת קודקודים על עם קבוצת קשתות $\bar{E}$ המקיימת: $(u,v) \in \bar{E} \Leftrightarrow (u,v) \notin E$

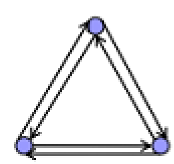
משפחות של גרפים

- הגרף הריק
- הגרף השלם
- קבוצה בלתי תלויה
- גרף המעגל
- גרף המסלול
- קוביות

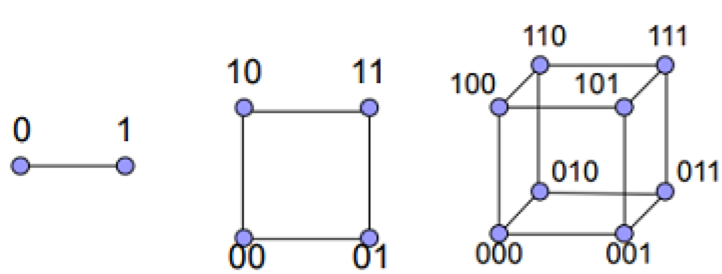
- גרף **שלם** - גרף עם קשת בין כל 2 צמתים. לא מכוון - מסומן ב K_n



מכוון:



- n **- קוביה** - הצמתים מייצגים מחרוזות בינאריות באורך n , שני צמתים מחוברים אם הם נבדלים בביט 1 בדיוק



- דרגת קודקוד: n (מימד הקוביה)
- סך קודקודים: 2^n
- סך צלעות: $\frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{n}\deg(v_i)=\frac{2^n\cdot n}{2}=n\cdot\left(2^{n-1}\right)$

- גרף $G=(V,E)$ יקרא d **רגולרי** אם הדרגות של כל הקודקודים שלו שוות ל d . (לדוגמה: גרף שלם, ריק)
- גרף $G=(V,E)$ יקרא **דו־צדדי** אם ניתן לחלק את קודקודי הגרף לשתי קבוצות זרות V_1,V_2 כך שכל צלע בגרף מכילה קודקוד מ V_1 וקודקוד מ V_2

  בשביל לסמן ש $G=(V,E)$ הוא צדדי, נכתוב: $G=(V_1,V_2,E)$

- גרף $G=(V_1,V_2,E)$ יקרא **דו־צדדי שלם** אם קיימות בו כל הצלעות האפשרויות שמכילות קודקוד מV_1 וקודקוד מ V_2. נסמן ע"י $K_{s,t}$ כאשר $|V_1|=s,|V_2|=t$

  בגרף דו צדדי שלם $G=(V_1,V_2,E)$ מספר הצלעות הוא $|V_1|\cdot|V_2|$

- **עצים**:
  - גרף לא מכוון שאינו מכיל מעגלים נקרא **יער**
  - יער **קשיר** נקרא עץ
  - עץ הכולל n קודקודים יוסמן ע"י T_n
  - קודקוד בעץ שדרגות 1 נקרא **עלה**
  - הגדרה: **עץ פורש** הוא תת גרף פורש שהוא עץ.

- נאמר שגרף לא מכוון G הוא **מישורי** אם"ם ניתן לייצג אותו במישור מבלי שאף שתי צלעות תחתכנה
- בהינתן יצוג משורי של גרף מישורי שכל אזור שחסום על ידי צלעות הגרף נקרא **פאה**. האזור שאינה חסום נקרא ה**פאה החיצונית**

  נסמן קודקודים ב n , צלעות ב m ופאות ביצוג מישורי של הגרף ב f

- **עידון** של צלע $\{u,v\}$ הוא החלפתה במסלול $u-x,v$ באורך 2 , כאשר x צומת חדש שמוספים לגרף
- G' הוא **העדנה (הומיאומורף)** של G אם ניתן לקבל את G' מ G על ידי סדרה של עידון צלעות, כאשר מותר גם לעדן צלעות חדשות.

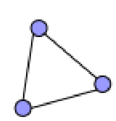
צביעה של גרפים

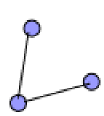
- יהי $G=(V,E)$ גרף לא מכוון. צביעת G ב k צבעים $1\le k\le|V|$ היא פונקציה $f:V\to\{1,...,k\}$ כך שלכל $\{u,v\}\in E$ מתקיים $f(u)\neq f(v)$ גרף שיש שלו צביעה ב k צבעים נקרא k **צביע**

אוילר:

- יהי $G=(V,E)$ גרף לא מכוון. **מסלול אוילר** הוא מסלול לא בהכרח פשוט שעובר בכל צלע בגרף בדיוק פעם אחת
- **מעגל אוילר** הוא מעגל לא בהכרח פשוט שעובר בכל צלע בגרף בדיוק פעם אחת.

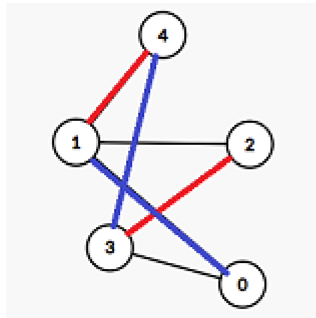
דוגמה:

מעגל אוילר: 

מסלול אוילר: 

זיווגים בגרפים

- **זיווג בגרף דו צדדי** - קבוצה של צלעות בגרף דו צדדי כך שאין אף זוג צלעות עם קודקודים משותפים נקרא **זיווג**.



- הזיווג יהיה **מושלם** אם כל הקודקודים בגרף משתתפים בזיווג, כלומר ניתן לבחור חלק מהצלעות בגרף כך שאין קודקודים משותפים בין הצלעות ובכל קודקוד חלה צלע אותה בחרנו

  בזיווג מושלם עוצמת קבוצות הקודקודים משני צידי הגרף זהה (שובך היונים)

  <u>נזכר שהגדרנו זיווג גם על גרף כללי</u>

- יהי M זיווג בגרף $G = (V, E)$, ויהי P מסלול פשוט. P הוא הוא **מסלול מתחלף** אם הצלעות במסלול נמצאות לסירוגין בזיווג M . כלומר כל צלע במסלול היא בזיווג/לא בזיווג והצלע הבאה אחריה היא לא בזיווג/בזיווג בהתאמה.

- יהי M זיווג בגרף $G = (V, E)$, והיה P מסלול פשוט. P **הוא מסלול הרחבה ל** M אם מתקיימים התנאים הבאים:

  1. הקודקודים הראשון והאחרון ב P אינם מכוסים על ידי אף צלע בזיווג M
  2. P הוא מסלול מתחלף , לכומר הצלע הראשונה והאחרונה אין ביזווג וכל היתר לסירוגין

<u>הערות:</u>

- מ2, נובע ש M אינו זיווג מקסימום - ואם נבחר את הזיווג המשלים שכולל את הצלע הראשונה והאחרונה והוא בהכרח גדול יותר
- מסלול הרחבה אינו חייב לכלול את כל הצלעות של הזיווג והוא עדיין יהיה מסלול הרחבה (הראשון והאחרון לא מכוסים + מסלול מתחלף)

8.2 טענות

1. **משפט: יהי** $G = (V, E)$ **גרף לא מכוון אז:** $\sum_{v \in V} deg(v) = 2 \cdot |E|$
2. **מסקנה: יהי** $G = (V, E)$ **גרף לא מכוון אז יש בגרף מספר זוגי של קודקודים בעלי דרגה איזוגית**
3. **טענה: יהי** $G = (V, E)$ **גרף לא מכוון ויהיו** u, v, w **קודקודים בגרף אז פונקציית המרחק בין קודקודים מקיימת:**

   (א) $d_G(u, v) \geq 0$ ו $d_G(u, v) = 0$ **אם"ם** $u = v$

   (ב) $d_G(u, v) = d_G(v, u)$

   (ג) $d_G(u, v) + d_G(v, w) \geq d_G(u, w)$

4. **טענה: מספר רכיבי הקשירות בגרף גדול או שווה למספר הקודקודים בגרף פחות מספר הצלעות**
5. **מסקנה: בגרף קשיר עם** n **קודקודים יש לפחות** $n - 1$ **צלעות**

- **מטענה קודמת יש רכיב קשירות אחד , ולכן** $n-m\geq 1$ **כלומר** $m\geq n-1$

6. <u>שאלה מהקהל:</u> מה מקסימום הצלעות שיכול להיות? $\binom{n}{2}$

7. **טענה: בגרף פשוט בעל** $n\geq 3$ **קודקוים ו** $m\geq n$ **יש מעגל**

8. **טענה: יהי** $G=(V,E)$ **גרף קשיר ולא מכוון, ותהי** $e=\{x,y\}$ **צלע. אז:**

הגרף $G\backslash\{e\}$ **קשיר** $\iff$ **הצלע שייכת למעגל פשוט כלשהו ב** G

9. יהי $G=(V,E)$ גרף פשוט, יש להוכיח כי לפחות אחד מהגרפים $\bar{G},G$ קשיר.

10. **גרף** $G=(V,E)$ **הוא דו־צדדי** $\iff$ **כל המעגלים בו (גם לא פשוטים) בעלי אורך זוגי**

עצים

1. כל עץ עם לפחות 2 קודקודים מכיל עלה
2. מספר הצלעות בעץ בעל $n\geq 1$ קודקודים הוא $m=n-1$
3. טענה: גרף לא מכוון G הוא עץ $\iff$ G קשיר מינמלי $\iff$ G חסר מעגלים
   - G קשיר מנימלי ־ הסבר: קשיר + הורדת צלע כלשהי תפגע בקשירותו
   - G חסר מעגלים מקסימלי ־ הסבר:: כל צלע שנוסיף תסגור מעגל
4. מסקנה: גרף לא מכוון קשיר עם n קודקודים ו $n-1$ צלעות הוא עץ
5. משפט: גרף לא מכוון G הוא קשיר אם"ם יש ל G עץ פורש
6. <u>הוכיחו כי בכל עץ $(|V|>2)$, יש לפחות 2 עלים</u>

אוילר

1. משפט (נוסחת אוילר) : יהה G גרף מישורי קשיר, אז $n+f-m=2$
2. משפט: יהי G גרף מישורי קשיר עם $n\geq 3$ קודקודים ו m צלעות. אזי $m\leq 3\,(n-2)$
   - <u>האם המשפט ההפוך נכון?</u>
     - לא, הראנו בכיתה דוגמה נגדית (K_5 שמחובר ל'שרוך' בשביל להתאים למספר הצלעות והקודקודים)
3. <u>יהי G גרף מישורי קשיר חסר משלושים עם $n\geq 3$ קודקודים ו m צלעות אז $m\leq 2(n-2)$</u>
4. <u>האם גרף הn קוביה הוא מישורי</u>
   - $n=1$ ✓
   - $n=2$ ־ ריבוע ✓
   - $n=3$ קוביה ✓
   - $n\geq 4$ אינו מישורי, ניתן להוכיח ע"י שימוש במסקנה $m\leq 2(n-2)$ כי ב n קוביה אין משולשים, כי הוא דו ־צדדי לכן:
     - $m=n\cdot 2^{n-1}$
     - לכן צריך להתקיים $n\cdot 2^{n-1}\leq 2(2^n-2)$ לכן עבור $n\geq 4$ גרף ה n קוביה אינו מישורי
5. <u>מה קורה אם הגרף לא קשיר ?</u>

- נחדד: האם בגרף מישורי לא קשיר עדיין מתקיים $m \le 3(n-2)$?
- ע"פ המסקנה מאוילר:

$$m < m' \le 3(n'-2) = 3(n-2)$$

- למעשה הוכחנו: שהמסקנה נכונה ויש א"ש חזק.

6. משפט: הגרף המלא עם 5 קודקודים, וK_5 אינו מישורי
7. הגרף הדו־צדדי המלא על שתי קבוצות של 3 קודקודים $k_{3,3}$ אינו מישורי
8. בכל גרף גרף מישורי $G=(V,E)$ יש קודקוד בעל דרגה לכל יותר 5 :
9. טענות (לא נוכיח)

- גרף הוא מישורי $\Longleftrightarrow$ כל העדה שלו היא גרף מישורי
- משפט $Kuratowski$: גרף הוא מישורי $\Longleftrightarrow$ הוא לא מכיל כתת־גרף העדה של K_5 הוא של $K_{3,3}$

דוגמה ־ האם אפשר לצבוע את הגרף הבא ב 3 צבעים?

צביעה

1. משפט כל גרף משורי הוא 6 צביע
2. טענה: גרף דו צדדי $\Longleftrightarrow$ 2 צביע
3. משפט: היה $G=(V,E)$ גרף קשיר לא מכוון. ב G יש מעגל אוילר $\Longleftrightarrow$ כל הדרגות של הקודקודים בגרף זוגיות
4. **יהי $G=(V,E)$ גרף קשיר לא מכוון שהדרגות של הקודקודים בו זוגיות גדולות מ 0 אז כל קודקוד ב G שייך למעגל כלשהו**
5. משפט: יהי $G=(V,E)$ גרף קשיר לא מכוון. ב G יש מסלול אוילר $\Longleftrightarrow$ כל הדרגות של הקודקודים בגרף זוגיות או שיש בדיוק שני קודקודים בעלי דרה אי־זוגית.
6. אוילר לגרף מכוונים : יהי $G=(V,E)$ קשיר חזק מכוון. ב G יש מעגל אוילר $\Longleftrightarrow$ דרגת הכניסה של כל קודקוד בגרף שווה לדרגה היציאה שלו

זיווגים

1. משפט החתונה של $Hall$ **בגרף דו־צדדי** $G=(V_1,V_2,E)$ **,** $|V_1|=|V_2|$

יש זיווג מושלם $\Longleftrightarrow$ **לכל קבוצות S החלקית ל V_1 מתקיים** $|\Gamma(S)| \ge |S|$

- מסקנה: ממשפט החתונה של $Hall$ ־ אם G גרף דו צדדי d־ רגולרי אז קיים בו זיווג מושלם.

2. **משפט** $Berge$ **: בגרף** $G=(V,E)$ **בעל זיווג** M

קיים זיווג אחר N , כך שעוצמתו של N גדולה מעוצמתו של M $\Longleftrightarrow$ **קיים מסלול הרחבה ל M**