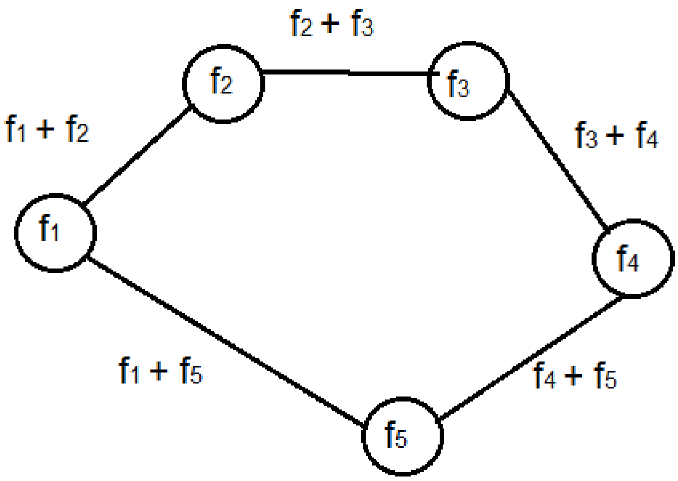
שעור 2 תורת הגרפים – המרחקים הקצרים ביותר - המשך

משקלים מוגדרים על קדקודי הגרף:



f_i – משקל של **קדקוד** i,

הגדרות:

הגדרה 1: עלות המעבר בין קדקוד a לקדקוד b היא f_a+f_b, כאשר קדקודים a ו- b מחוברים ע"י צלע.

הגדרה 2: עלות המעבר בין קדקוד i לקדקוד j היא $f_i+\ldots+f_j$, כאשר קיים מסלול כלשהו העובר דרך קדקודים i, j.

המטרה היא למצוא את המסלול הקצר (הזול) ביותר שין כל קדקודי הגרף. האלגוריתם של פלויד-וורשל מבוסס על משקלי הצלעות. יש שתי דרכים לפתור את הבעיה:
דרך אחת – להמציא אלגוריתם חדש,
דרך שנייה – להתאים את האלגוריתם הקיים לנתונים חדשים.
אנו בוחרים בדרך השנייה.

נגדיר משקל על הצלע, שמחברת קדקודים a ו- b, באופן הבא:

$$\text{weight}(a,b)= f_a+f_b \qquad (1)$$

נסמן ב- $h(i,j)$ עלות המעבר בין קדקוד i לקדקוד j לפי <u>צלעות</u>,
וב-$d(i,j)$ עלות המעבר בין קדקוד i לקדקוד j לפי <u>הקדקודים</u>. אזי

$$d(i,j)=f_i+f_{i+1}+...+f_{j-1}+f_j$$

$$h(i,j)=f_i+2(f_{i+1}+...+f_{j-1})+f_j$$

נכפיל את המשוואה הראשונה ב-2:

$$2d(i,j)=2f_i+2(f_{i+1}+...+f_{j-1})+2f_j$$

ונחסיר ממנה את המשוואה הראשונה, נקבל:

$$2d(i,j) - h(i,j) = f_i + f_j$$

או

(2) $$h(i,j) = 2d(i,j) - f_i - f_j$$

(3) $$d(i,j) = (h(i,j) + f_i + f_j)/2$$

תיאור האלגוריתם למציאת את כל המסלולים הקצרים ביותר בין קדקודי הגרף כאשר המשקלים מוגדרים על קדקודי הגרף:

קלט: מערך של משקלים המוגדרים על קדקודי הגרף ומטריצה בוליאנית המגדירה את צלעות הגרף.

פלט: מטריצה המייצגת את המרחקים הקצרים ביותר בין קדקודי הגרף.

שלבי האלגוריתם:

1. בונים מטריצה המייצגת את המשקלים על צלעות הגרף לפי נוסחה (1)

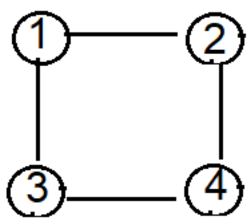
2. מפעילים עליה אלגוריתם של פלויד-וורשל, מקבלים `h[][]` - מטריצת העלויות הקטנות ביותר, כאשר המשקלים מוגדרים על צלעות הגרף.

3. ממירים ע"י נוסחה (3) את העלויות המוגדות על הצלעות לעלויות המוגדרות על הקדקודים.

דוגמא:

נתונה מטריצה בוליאנית המייצגת את הגרף ומערך המייצג את משקלי הקדקודים:

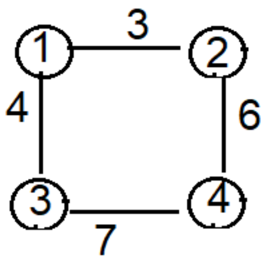
f	t	t	f
t	f	f	t
t	f	f	t
f	t	t	f



$f_1=1,\ f_2=2,\ f_3=3,\ f_4=4$

נעבור למשקלי הצלעות:

0	3	4	∞
3	0	∞	6
4	∞	0	7
∞	6	7	0



ונפעיל אלגוריתם של Floyd-Warshall על מטריצת משקלי הצלעות::

0	3	4	9
3	0	7	6
4	7	0	7
9	6	7	0

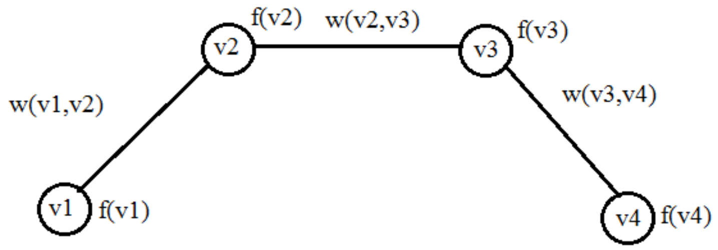
ונחזור לעלויות לפי הקדקודים:

0	3	4	7
3	0	6	6
4	6	0	7
7	6	7	0

משקלים מוגדרים על הצלעות ועל הקדקודים של הגרף:

נתון גרף $G = (V,E)$ לא מכוון, קשיר וממושקל (שבו לכל **קודקוד** ולכל **צלע** יש משקל).
נסמן את עלות המעבר דרך קדקוד v_i ב- $f(v_i)$ (משקל של v_i) ונסמן ב– $w(v_{i-1},v_i)$ את משקל
הצלע $\{v_{i-1},v_i\}$. נגדיר עלות המעבר מקדקוד v_i לקדקוד v_{i+1j}:
עלות $= f(v_i) + w(v_i , v_{i+1j}) + f(v_{i+1})$
בדוגמה זו עלות המעבר בין v_1 לבין v_4 שווה

$$d(v_1,v_4) = f(v_1)+w(v_1,v_2)+f(v_2)+w(v_2,v_3)+f(v_3)+w(v_3,v_4)+f(v_4)$$



יש לבנות את האלגוריתם המחזיר את המטריצה של המרחקים בין כל קודקוד לכל קודקוד ב-G.

כדי לחשב את מטריצת המסלולים הקצרים ביותר בגרף, נגדיר עלות הצלע (a,b) באופן הבא:

$$p(a,b) = f(a)+2w(a,b)+f(b)$$

אז עלות המעבר בין קדקוד i לבין j לפי **<u>הצלעות</u>** היא:

$$\begin{aligned} h(i,j) &= f(i)+2w(i,i+1)+f(i+1) + \\ &\quad f(i+1)+2w(i+1,i+2)+f(i+2)+. \ . \ . \\ &\quad f(j-2)+2w(j-2,j-1)+f(j-1)+ \\ &\quad f(j-1)+2w(j-1,j)+f(j) = \\ &\quad f(i) + 2f(i+1)+2w(i,i+1)+. \ . \ .+2f(j-1)+2w(j-1,j) + f(j)= \\ &\quad f(i) + 2[f(i+1)+w(i,i+1)+. \ . \ .+f(j-1)+w(j-1,j)] + f(j) \end{aligned}$$

עלות המעבר בין קדקוד i לבין j לפי **<u>קדקודים וצלעות</u>** היא:

$$d(i,j) = f(i)+w(i,i+1)+f(i+1)+. \ . \ .+f(j-1)+w(j-1,j)+f(j)$$

נכפיל את המשוואה האחרונה ב-2:

$$\begin{aligned} 2d(i,j) &= 2f(i)+2w(i,i+1)+2f(i+1)+. \ . \ .+2f(j-1)+2w(j-1,j)+2f(j)= \\ &\quad 2f(i)+2[w(i,i+1)+f(i+1)+. \ . \ .+f(j-1)+w(j-1,j)] + 2f(j) \end{aligned}$$

אזי

$$2d(i,j)-h(i,j)= f(i)+f(j)$$

ובסוף:

$$\mathbf{d(i,j) = [h(i,j)+f(i)+f(j)]/2}$$