1 משפט נרוד: תהי $L \subseteq \sum^*$, L רגולרית $\iff$ $index\left(R_L\right) < \infty$

1.1 משפטי האפיון

1.1.1 תכונות R_A: יהי A , DFA אז R_A הוא יחס המקיים את:

1. $R_A \Rightarrow \tilde{R}_{L(A)}$ (R_A מעדן את $\tilde{R}_{L(A)}$)
2. $R_A(x,y) \Rightarrow R_A(xz,yz)$ (R_A אינווריאנטי מימין)

<u>הוכחה:</u>

נזכר בהגדרות:

$$\begin{aligned} \forall x,y \in \textstyle\sum^*: \qquad & R_A(x,y) = \left\{(x,y)|\ \hat{\delta}\left(q_0,x\right) = \hat{\delta}\left(q_0,\right)\right\} \\ & \tilde{R}_{L(A)}(x,y) = \{(x,y)|\ x \in L(A) \Leftrightarrow y \in L(A)\} \\ \text{right invariant:} \quad \forall z \in \textstyle\sum^* \qquad & R_A(x,y) \Rightarrow R_A(xz,yz) \end{aligned}$$

<u>עבור 1:</u>

כעת, תהי $x \in L(A)$ אז:

$$x \in L(A) \overset{def}{\iff} \hat{\delta}\left(q_0,x\right) \in F \overset{\exists q_f \in F}{\iff} \hat{\delta}\left(q_0,x\right) = q_f \overset{R_A}{\iff} \hat{\delta}\left(q_0,y\right) = q_f \overset{\exists q_f \in F}{\iff} \hat{\delta}\left(q_0,y\right) \in F \overset{def'}{\iff} y \in L(A)$$

סה"כ:

$$\{x \in L(A) \Leftrightarrow y \in L(A)\} = \tilde{R}_{L(A)}(x,y)$$

<u>עבור 2:</u>

נניח ש $R_A\left(xz,yz\right)$, אז:

$$\hat{\delta}\left(q_0,xz\right) \overset{def'}{=} \hat{\delta}\left(\hat{\delta}\left(q_0,x\right),z\right) \overbrace{=}^{(x,y)\in R_A} \hat{\delta}\left(\hat{\delta}\left(q_0,y\right),z\right) \overset{def'}{=} \hat{\delta}\left(q_0,yz\right)$$

$\square$

1.1.2 תכונות R_L יחס שקילות המקיים:

1. $R_L(x,y) \Rightarrow R_L(xu,yu)$ (R_L אינווריאנטי מימין)
2. $R_L \Rightarrow \tilde{R}_L$ (R_L מעדן את $\tilde{R}_L$)
3. יהיה $R \subseteq {\sum^*}^2$ המקיים את $1,2$ אז: $R \Rightarrow R_L$ (R_L בעל החלוקה הגסה ביותר־ (האינדקס שלו הנמוך ביותר))

<u>הוכחה:</u>

נזכר בהגדרות:

$$\begin{aligned} \forall x,y,z,u \in \textstyle\sum^*: \qquad & R_L(x,y) = \{(x,y)|\ xz \in L \Leftrightarrow yz \in L\} \\ & \tilde{R}_L(x,y) = \{(x,y)|\ x \in L \Leftrightarrow y \in L\} \\ \text{right invariant:} \quad \forall u \in \textstyle\sum^* \qquad & R_L(x,y) \Rightarrow \tilde{R}_L(xu,yu) \end{aligned}$$

<u>עבור 1:</u> נניח ש $R_L(xu,yu)$

$$xu \in R_L \iff (xz)u \in L \overset{assoc'}{\iff} x(zu) \in L \overset{\exists z'=zu}{\iff} xz' \in L \overset{R_L}{\iff} yz' \in L \overset{\exists z'=zu}{\iff} y\left(zu\right) \in L \overset{assoc'}{\iff} (yz)u \iff \in yu \in R_L$$

<u>עבור 2:</u> יהי $x \in \tilde{R}_L$:

$$x \in \tilde{R}_L \overset{def}{\Longleftrightarrow} x \in L \overset{z=\varepsilon}{\Longleftrightarrow} xz \in L \overset{R_L}{\Longleftrightarrow} yz \in L \overset{z=\varepsilon}{\Longleftrightarrow} y \in L \overset{def'}{\Longleftrightarrow} y \in \tilde{R}_L$$

<u>עבור 3:</u>

- מכך ש R מקיים את $1,2$:

$$R(x,y) \overset{1}{\Rightarrow} R(xu, yz) \overset{2}{\Rightarrow} \tilde{R}_L(xu, yu) \overset{def'}{=} \{xu \in L \Leftrightarrow yu \in L\} \overset{z=u}{=} \{xz \in L \Leftrightarrow yz \in L\} \overset{def'}{=} R_L(x,y)$$

1.2 תהי L המקיימת ש: $index(R_L) < \infty \Leftarrow L$ רגולרית

- נבנה אוטומט A כך ש $L(A) = L$:
  - נגדיר $A = (\sum, Q, q_0, F, \delta)$ כאשר:
  - $Q = \left\{[x] \,|x \in \sum^*\right\}$ (קבוצת מחלקות השקילות)
  - $q_0 = [\varepsilon]$
  - $F = \{[x] \,|x \in L\}$
  - $\delta([x], c) = [xc]$

1.2.1 למה 1: δ, F מוגדרים היטב:

<u>עבור δ :</u>

- מכך ש $R_L(x,y)$ מתקיים יהיו x,y כך ש: $[x] = [y]$ אז עבור $a \in \sum$:
  - $\delta([x], a) = [xa]$, $\delta([y], a) = [ya]$ ומכך ש R_L יחס אינוואינטי מימין (הוכחנו) אז גם $R_L(xa, ya)$
  - לכן $[xa] = [ya]$

<u>עבור F :</u>

- נתבונן במצב $[x_1] = [x_2]$ בפרט x_1, x_2 באותה מחל' שקילות של R_L לכן $R_L(x_1, x_2)$

1.2.2 טענה 1 : לכל $x \in \sum^*$ $\hat{\delta}(q_0, x) = [x]$,

הוכחה: באינדוקציה על אורך x

<u>בסיס:</u>

- $|x| = 0$:אז : $x = \varepsilon$ ומתקיים ש $\hat{\delta}(q_0, x) = \hat{\delta}(q_0, \varepsilon) = [\varepsilon]$

<u>צעד:</u> נניח לn $|x| = n$ ונוכיח ל1 $|xa| = n+1$

$$\hat{\delta}(q_0, xa) \overset{def}{=} \delta\left(\hat{\delta}(q_0, x)\, a\right) \overset{indu'}{=} \delta([x]\, a) \overset{def}{=} [xa]$$

1.2.3 טענה 2 : לכל $x \in \sum^*$ $x \in L \Leftrightarrow [x] \in F$

הוכחה ־גרירה דו כיוונית:

<u>כיוון ראשון ־ $[x] \in F \Leftarrow x \in L$:</u>

- תהיה $x \in L$ נתבונן אז מהגדרת $F = \{[x] \,|x \in L\}$ נובע ש $[x] \in F$

<u>כיוון שני - $[x] \in F \Rightarrow x \in L$:</u>

- תהיה $[x] \in F$, מכך ש R_L מתקיים נובע שקיים $y \in [x]$ כך ש $y \in L$
- מהגדרת R_L נובע $R_L(x,y)$, ו R_Lמעדן את K לפי משפט האיפיון של R_L לכן $R_L\left(x,y\right) \Rightarrow \left(x \in L \Leftrightarrow y \in L\right)$
- והראנו ש $y \in L$ אז $x \in L$, כנדרש.

מסקנה:

$$x \in L \overset{\text{lemma } 2}{\Leftrightarrow} [x] \in F \overset{\text{lemma } 1}{\Leftrightarrow} \hat{\delta}\left(q_0, x\right) = [x] \in F \overset{\text{DFA def'}}{\Leftrightarrow} x \in L(A)$$

$$L = L(A)$$

1.3 תהי L רגולרית $\Leftarrow index(R_L) < \infty$

- L רגולרית לכן קיים לה DFA כך ש: $L(A) = L$
- R_A מעדן את $\tilde{R}_{L(A)}$ ואינוואריאנטי מימין (למה 3.1)
- R_A מעדן את $R_{L(A)}$ (למה 3.2) אבל $R_{L(A)} = R_L$ (ראה לעיל) ,
- סה"כ R_A מעדן R_L
- מהגדרת R_A נובע ש שמחלקות השקילות שלו הן תת קבוצה הישיגה מ q_0 ולכן נוכל לסמן זאת $Q' \subseteq Q$
- היות וA הוא אוטומט סופי נקבל ש: $index\left(R_A\right) = |Q'| \leq |Q| < \infty$
- הראנו ש R_A מעדן את R_L לכן מהגדרת עידון:

$$index\left(R_L\right) \leq index\left(R_A\right) < \infty$$

1.4 מסקנות מנרוד:

- $index\left(R_L\right) =$ כמות מחלקות השקילות = כמות המחלקות שמגדיר ה z מפריד
- מספר המצבים המינימאלי באוטומט סופי דטרמינסטי המקבל את L שווה בדיוק ל $index\left(R_L\right)$

2 למת הנפוח לשפת חסרות הקשר:

תהיה L שפה חסרת הקשר אזי **קיים** $n \in \mathbb{N}$ כך **שלכל** $z \in L$ שאורכה $|z| \geq n$ **קיים** פירוק $z = uvwxy$, המקיים:

1. $|vwx| \leq n$
2. $|vx| \geq 1$
3. **לכל** $i \in \mathbb{N}$, $z^i = uv^iwx^iy \in L$

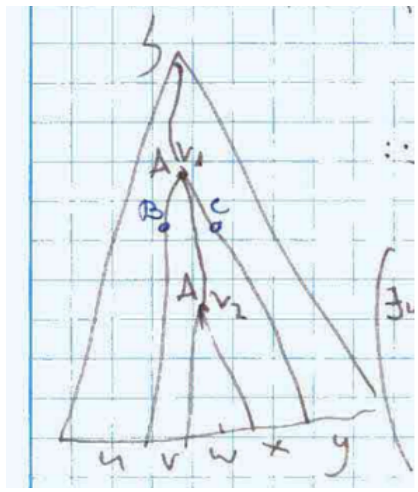
הוכחה:

- תהא L שפה ח"ה , ממשפט קיים לה דקדוק ח"ה $G = (V,T,P,S)$ מהצורה הנורמלית של חומסקי כך ש: $L(G) = L \backslash \left\{\varepsilon\right\}$, נסמן $|V| = k$, ונגדיר $n = 2^k$
- תהא $z \in L$, כך ש $|z| \geq n$, נסתכל על עץ גזירה של L לפי G

- מכיון שהדקדוק בצורה הנורמלית של חומסקי (העץ יחיד ו) לכל צומת יש 2 בנים למעט השכבה האחרונה $(A \to BC)$, ובשכבה האחרונה בן יחיד $(A \to a)$, ומתקיים ש:

$$\text{גובה העץ} = h \geq \log_2(n) + 1 = \log_2(2^k) + 1 = k + 1$$

- לכן קיים מסלול באורך $k+1$ ולפחות $k+2$ צמתים,
- נתבונן בעץ ללא שכבת העלים (כלומר לפחות $k+1$ צמתים) במסלול זה , כל צומת מיוצג על ידי משתנה השייך לקבוצה V
- מהנחה $|V| = k$ ומעקרון שובך היונים נסיק שיש משתנה שחוזר פעמיים , על כן נסמן צמתים אלו במסלול ב V_1, V_2
- ממבנה עץ הגזירה וממפשט הקובע שאם T_1 תת עץ של T_2 אז החזית של T_1 היא תת מילה בחזית של T_2 , נקבל:



$$S \Rightarrow^* uAy \Rightarrow^* uvAxy \Rightarrow^* uvwxy = z$$

(עץ הנפרש מ V_2 הוא תת עץ ל עץ הנפרש מ V_1 והוא תת עץ לעץ הנפרש מ S)

- נסכם:
  1. $S \Rightarrow^* uAy$
  2. $A \Rightarrow^* vAx$
  3. $A \Rightarrow w$

נראה שתנאי המשפט מתקיימים:

1. $|vwx| \leq n$

- vwx היא מילת החזית של תת העץ ששרשו ב V_1 , מהבניה גובהו קטן או שווה ל k (במסלול ארוך ביותר מופיעים $k+1$ צמתים - ללא העלים)
- לכן גודל החזית שלו היא לכל היותר $2^k = n$ היות וזה עץ בינארי (מחומסקי) $\Leftarrow$ גודל החזית היא $|vwx| \leq n$, כנדרש

2. $|vx| \geq 1$

- מספיק להראות ש $v \neq \varepsilon$ או $x = \varepsilon$
- <u>אם V_2 שייך לתת העץ הימני של V_1 :</u> כלומר A נגזר מ C
  - בהכרח ל V_1 יש בדיוק שני בנים המסומנים במשתנה

- בפרט v מכיל את כל החזית של תת העץ השמאלי, תת עץ זה מכיל לפחות תו אחד בחזית (בעץ עם העלים) היות ואין גזירת ε
- לכן $|v| > 0$

- אחרת, אז V_2 שייך לת העץ שמאלי של V_1 : כלומר A נגזר ב B
  - ובאופן דומה נקבל שבתת העץ הימני ישנה מילה טרמנילית כלשהי, ולכן $|x| > 0$

3. לכל $i \in \mathbb{N}$, $uv^iwx^iy \in L$

- טענת עזר: לכל $i \in \mathbb{N}$ $S \Rightarrow^* uv^iAx^iy$ - באינדוקציה
  - בסיס: $i = 0$ מבנית העץ (נסכם 1) יתקיים: $S \Rightarrow^0 S = uAy = uv^0Ax^0y$ ✓
  - צעד: נניח כי $A \Rightarrow^* uv^iAx^iy$ ונראה כי $A \Rightarrow^* v^{i+1}Ax^{i+1}$

$$S \overset{ind'}{\Rightarrow^*} uv^iAx^iy \overset{\text{sum } 2}{\Rightarrow} uv^ivAxx^iy = uv^{i+1}Ax^{i+1}y$$

- כעת אם נארוז את הכל (מבנה העץ + האינדוקציה), נקבל:

$$S \overset{ind'}{\Rightarrow^*} uv^iAx^iy \overset{\text{sum } 3}{\Rightarrow} uv^iwx^iy = z^{(i)} \in L$$

למות:

- תהי L שפה ח"ה אז $L \backslash \{\varepsilon\}$ קיים דח"ה בצורה הנורמלית של חומסקי
- אם T_1 תת עץ של T_2 אז החזית של T_1 היא תת מילה בחזית של T_2

3 $DFA \iff L_3$

3.0.1 תכונות דקדוק לינארי ימני

G - דקדוק לינארי ימני, ו $B \in V$, $B \underset{G_A}{\overset{*}{\Rightarrow}} \alpha$ עבור $\alpha \in (T \cup V)^*$ כלשהו.

אזי α מקיימת $\alpha \in T^*$ או $\alpha = wD$ עבור $w \in T^*$ ו $D \in V$.

הוכחה: נוכיח באינדוקציה על אורך הגזירה

- בסיס: $i = 0$ כלומר $A \Rightarrow^0 \alpha$.
  - אז בהכרח $\alpha = B$ ואכן $\alpha = wB$ עבור $w = \varepsilon \in T^*$ ו $B \in V$
- צעד: נניח עבור i ונוכיח עבור $i + 1$.
  - יהי $B \Rightarrow^{i+1} \alpha$. נתבונן בסדרת גזירה (באורך $i + 1$) מתאימה כלשהי $B \Rightarrow^i \beta \Rightarrow \alpha$
  - מהנחת האינדוקציה, β היא מהצורה $\beta \in T^*$ או $\beta = wC$ עבור $w \in T^*$ ו $C \in V$ (כי $B \Rightarrow^i \beta$)
  - נתבונן ב$\beta \in T^*$. לא יתכן כי גזרנו מβ את α (חייבת להכיל משתנה). לכן β מהצורה השניה . נסמן $\beta = wC$.
  - כייון ש $\alpha \Rightarrow \beta$, בהכרח הופעל כלל שבצד שמאל שלו יש C (בגזירה $\beta \Rightarrow \alpha$) , כי C הוא המשתנה היחיד ב β
  - כעת ישנן מס' אפשרויות:
    1. הופעל $C \to a$ כלשהו. במקרה זה $\alpha = wa \in T^*$,כנדרש
    2. $C = S$, והופעל $S \to \varepsilon$ במקרה זה $\alpha = w\varepsilon = w \in T^*$, כנדרש.
    3. הופעל כלל מהצורה $C \to aD$ כאשר $a \in T$ ו $D \in V$. נקבל $\alpha = waD$ כי $wa \in T^*$ ו $D \in V$, כנדרש. מש"ל

3.1 תהי L שפה רגולרית. $\Leftarrow L\in L_3$, כלומר (1) קיים עבור L דקדוק לינארי ימני G (2) כך ש $L=L(G)$

יהיה A DFA עבור L , ונבנה G_A השקול ל A .

- $A=(Q,\sum,q_0,\delta,F)$
- נציע את הדקדוק הבא: $G_A=(V=Q,S=q_0,T=\sum,P)$
  - P - נגדיר שלכל שורה $\delta\left(q,a\right)=p$ נוסיף את הכלל $q\rightarrow ap$ ל P
  - בנוסף אם $p\in F$, נוסיף גם את הכלל $q\rightarrow a$ ל P . בשביל לקבל את המילים הנכונות
  - נניח כי $\varepsilon\notin L$ כלומר $q_0\notin F$

3.1.1 <u>הוכחת (1)</u>: בהנתן A ו G_A לכל $w\in\sum^*$, $p,q\in Q$ מתקיים ש:

$$p\Rightarrow_{G(A)}^{*}wq\iff\hat{\delta}\left(p,w\right)=q$$

<u>כיוון ראשון: $p\Rightarrow_{G(A)}^{*}wq\Rightarrow\hat{\delta}\left(p,w\right)=q$ - ההוכחה באינדוקציה על אורך הגזירה</u>

- <u>בסיס</u> $i=0$. נניח ש $p\Rightarrow^{0}wq$. אז בהכרח $w=\varepsilon$ ו $q=p$, כלומר $p\Rightarrow^{0}p$. אכן $\hat{\delta}\left(p,\varepsilon\right)=p$ בכל DFA (לא דוקא A שלנו)
- <u>צעד</u>: נניח עבור i ונוכיח עבור $i+1$
  - נניח ש $P\Rightarrow_{GA}^{i+1}wq$ בסדרת גזירה כלשהי מתאימה: $P\Rightarrow_{GA}^{i}\beta\Rightarrow wq$
  - בדומה להוכחת הלמה (תכונות דקדוק לינארי ימני) כיוון ש G_A דקדוק לנארי ימני, β היא מהצורה $\underbrace{u}_{\in T^*}\underbrace{C}_{\in V}$
  - ממבנה wq , בהכרח מתקיים שבצעד $B\Rightarrow wq$ השתמשנו בכלל גזירה $C\rightarrow aq$ עבור $a\in T$ כלשהו, וכן $w=ua$
  - כיון ש $p\Rightarrow^{i}uC$ אז : $\hat{\delta}\left(q,u\right)=C$ (1) מהנחת האינדוקציה
  - בנוסף , כיון ש $c\rightarrow aq$ שייך ל P , קיים המעבר $\delta\left(C,a\right)=q$$(2)$, <u>מהבניה</u> (אחרת הכלל לא היה מצטרף ל p)
  - כעת מ $(1)+(2)$ נקבל:

$$\hat{\delta}\left(q,\underset{=ua}{w}\right)=\delta\left(\hat{\delta}\left(q,u\right),a\right)\overset{(1)}{=}\delta\left(c,a\right)\overset{(2)}{=}q$$

<u>כיוון שני (שלי מהתרגילי בית): לכל $A\in V$, $w\in T^*$ מתקיים ש: $A\in\hat{\delta}\left(S,x\right)\Rightarrow S\Rightarrow^{*}wA$.</u>

נוכיח באינדוקציה על אורך המילה נסמנה ב w

- <u>בסיס:</u> עבור $|w|=0$ אז $\delta(S,w)=\delta\left(S,\varepsilon\right)=A$ ואכן גם $S\Rightarrow xA$ שקול ל $S\Rightarrow^{0}A\in Q$ כי $x=\varepsilon$
- <u>צעד:</u> נניח למילה באורך $|w|=n$ ונוכיח למילה באורך $n+1$
  - תהיה $w=w's$ אז מהגדרת פונקצית המעברים ישנו מצב p כך שיתקיים ש $\hat{\delta}\left(w's\right)=\delta\left(\hat{\delta}\left(w',p\right),s\right)=q\in Q$
  - מהנחת האינדקוציה $\hat{\delta}\left(w',p\right)=q'\in Q$ ולכן גם יש כלל גזירה כך ש $P\Rightarrow^{n}w'q'$
  - מאיך שהגדרנו את G_A נובע שקיים כלל גזירה התואם ל $\delta\left(p,s\right)=q$ כך ש: $p\Rightarrow^{1}sq$
  - $3.0.1$ שהראנו בכיתה, נובע שניתן לחבר לביטוי יחיד
  - ולכן: $P\Rightarrow^{i+1}w'sq=wq$

3.1.2 הוכחת (2): $L(A)=L(G)$

כיוון אחד: $L(A)\backslash\{\varepsilon\}\subseteq L(G_A)$.

- תהי $\varepsilon\neq w\in L(A)\backslash\{\varepsilon\}$.
- נסמן $w=ua$ כיון ש $w\in L(A)$ מתקיים $\hat{\delta}\left(q_0,w\right)=q\in F$. ונרשום $\hat{\delta}\left(q_0,ua\right)=\delta\left(\hat{\delta}\left(\underbrace{q_0,u}_{=h}\right),a\right)$
- מטענה 3.1.1 מתקיים ש : $q_0\Rightarrow^* uh$ כי $\hat{\delta}\left(q_0,u\right)=h$
- כיון ש $\delta\left(h,a\right)=p\in F$ קיים ב P הכלל $h\rightarrow a$
- לכן קיימת ב G_A סדרת הגזירה : $q_0\Rightarrow^* uh\Rightarrow ua=w$, כלומר $w\in L\left(G_A\right)$, כנדרש

כייון שני: נראה $L\left(G_A\right)\subseteq L(A)\backslash\{\varepsilon\}$.

- תהי $w\in L\left(G_A\right)$.
- בהכרח $w\neq\varepsilon$ - כיון שאין כללים ב G_A הגוזרים ε , קל להראות באינדוקציה שכל מילה הנגזרת ב G_A שונה מ ε (באורך 1 לפחות)
- נסמן $w=\underbrace{U}_{\in T^*}\underbrace{a}_{\in T}$, נתבונן בסדרת גזירה של w מ q_0 (קיימת כזו כי $w\in L\left(G_A\right)$): $q_0\Rightarrow^i_{GA}\beta\Rightarrow w=Ua$
- מלמה 3.0.1 , β היא בהכרח מהצורה $\beta=\underbrace{x}_{\in T^*}\underbrace{l}_{\in V}$. ממנה w הכרח מתקיים $x=U$ ובמעבר $\beta\Rightarrow w$ הפעלנו את הכלל $l\rightarrow a$
- כיוון ש $q_0\Rightarrow^*_{GA}\beta=ul$ מטענה 3.1.1 מתקיים ש: $\hat{\delta}\left(q_0,u\right)=l$ (1)
- כיון שקיים ב P הכלל $l\rightarrow a$ אז הכרח קיים המעבר $\delta\left(l,a\right)=\widetilde{q}\in F$ (2)
- בדומה לקודם (מהגדרת $\hat{\delta}$) , נסיק ש: $\hat{\delta}\left(q_0,w\right)=\hat{\delta}\left(q_0,ua\right)=\widetilde{q}\in F\Rightarrow w\in L(A)$, כנדרש.

מש"ל

3.2 כיוון שני של השקילות: נראה שאם קיים ל L דקדוק לי' ימני G, אז L רגולרית.

טענה 3 היא מיידית, והנכונות $L(A_G)=L(G)$ נובעת ישירות מ $2+3$

גם כאן ההוכחה הינה קונסטרוקטיבית. בהנתן דקדוק $G\in L_3$ נבנה $\varepsilon-DFA$ שקול באופן הבא:
$A_G=\left(Q=V\cup\{q_F\},F=\{q_F\},q_0=s,\sum=T,\delta\right)$ כאשר δמוגדרת:

- לכל כלל גזירה $b\rightarrow aA\in P$, הוספנו $A_G\in\delta\left(B,a\right)$
- לכל כלל גזירה $A\rightarrow a\in P$ הוספנו $q_F\in\delta\left(A,a\right)$
- אם $S\rightarrow\varepsilon\in P$ הוספנו $q_F\in\delta\left(S,\varepsilon\right)$

הוכחת נכונות:

ראשית נוכיח את השמורה שהתכוונו שתתקיים כלומר:

- טענה 2: לכל $\varepsilon\neq x$ x $S\rightarrow^* x \iff q_F\in\hat{\delta}\left(S,x\right)$

נסחנו שלוש טענות, טענות $2,3$ דברו ישירות על השפות של A_G,G. טענה 1 היא טענה חזקה יותר שמנסחת אינווריאנטה ש A מקיים. קל להראות את טענה 2 מתוך 1 , ואנו נוכיח את 1 :

3.2.1 **<u>טענה 1:</u> לכל $x \in T^*$, $A \in V$ מתקיים ש:** $S \Rightarrow^* xA \iff A \in \hat{\delta}(S,x)$

הוכחה

<u>כיון ראשון: $S \Rightarrow_G^* xA \Leftarrow A \in \widehat{\delta}_{Ac}(S,x)$ - באינדוקציה על $|x|$</u>

<u>בסיס:</u>

- $i = 0$ מתקיים $A \in \hat{\delta}(S,x)$ ו$x = \varepsilon$
- אבל מהבניה כיון ש $A \neq q_f$ בהכרח $A = S$. ואכן : $S \Rightarrow^0 \varepsilon A = S$ (בכל דקדוק)

<u>צעד:</u> נניח עבור i ונוכיח עבור $i+1$

- מתקיים $A \in \hat{\delta}(S,x)$, ו $|x| = i+1$
- נסמן $x = ua$ $(a \in \sum)$.
- מהגדרת δ מתקיים:

1. קיים $B \in V$ כך ש : $B \in \hat{\delta}(S,u)$
2. $\delta(B,a) \in A$

- מ 1 + הנחת האינדוקציה מתקיים ש: $(|u| < |x|)$ $S \Rightarrow_G^* uB$ *
- בנוסף , מהבניה, כיון שקיים המעבר $A \in \delta(B,a)$ בהכרח קיים ב P הכלל $B \rightarrow aA$ **
- לכן מ $(*,**)$, קיימת ב G סדרת הגזירה:

$$S \Rightarrow_G^* uB \Rightarrow \underbrace{ua}_{x} A$$

- כנדרש.

כיוון שני: $S \Rightarrow_G^* xA \Rightarrow A \in \widehat{\delta}_{Ac}(S,x)$ בבית

3.2.2 **<u>טענה 2:</u> לכל $x \neq \varepsilon$** $S \rightarrow^* x \iff q_F \in \hat{\delta}(S,x)$

הוכחה - בבית- ניסיון שלי:

- יהיו $S = q_0$ (הגדרנו בכיתה) $x \in T^*$
- הגדרנו בכיתה את $NFA - \varepsilon$ להיות האוטומט המכריע את השפה L_3 , בנוסף הגדרנו כי יש לו מצב מקבל יחיד ע"י מסע ε , לכן קיימת $\hat{\delta}$ כך ש: $\hat{\delta}(S,x) = \hat{\delta}(q_0,x) = q_F$
- מטענה 1, נובע שקיימת סדרת גזירה כלשהי כך ש: $S \rightarrow^* x$, כנדרש
- (באותו אופן עבור הכיוון השני)

3.2.3 **טענה 3 :** $S \Rightarrow^* \varepsilon \iff q_F \in \hat{\delta}(S,\varepsilon)$

טענה 3 היא מיידית, והנכונות $L(A_G) = L(G)$ נובעת ישירות מ $2+3$

סה"כ נקבל ש $L(G) = L$

□

נספח

3.2.4 רעיון ההוכחה למקרה ש $\varepsilon \in L$ (בכיוון הראשון)

מה קורה אם $\varepsilon \in L$? מסתבר שנתן לתקן בצורה פשוטה את הבניה הקודמת.

עבור L רגולרית המכילה ε נשנה את הבניה כך: נבנה G_A^- מ $DFA\ A$ עבור L , בדיוק כמו בבניה הקודמת. ונתאים ל L דקדוק G_A המתקבל מ G_A^- באמצעות הוספת הכלל $S \to \varepsilon$ בלבד.

הוכחת נכונות: תקראו במודל. נראה מעט אינטואיציה:

- הכיוון הקל: $L(A) \subseteq L(G_A)$
  - כי $L(A)\backslash\{\varepsilon\} \subseteq L\left(G_A^-\right) \subseteq L\left(G_A\right)$ (רק הוספנו כללים) ו $\varepsilon \in L\left(G_A\right)$ בגלל $S \to \varepsilon$
- הכיוון המענין $L\left(G_A\right) \subseteq L(A)$
  - מספיק להראו שלא נוספו "בטעות" מילים ל $L\left(G_A\right)$ ביחס ל $L\left(G_A^-\right)$ שאינן ε
  - נראה זאת באופן הבא: נראה שאם סדרת גזירה w $q_0 \Rightarrow_{GA}^*$ משתמשת איפשהו ב $S \to \varepsilon$. אז קימת סדרת גזירה חלופית שאינה משתמשת בכלל, ולכן $w \in L\left(G_A^-\right)$

בזאת סיימנו כיון אחד של השקילות.