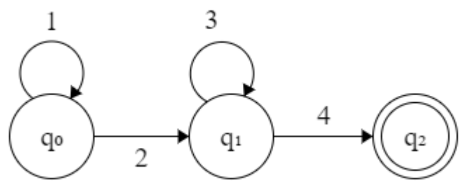
שאלה 1

תהיינה L_1 ו L_2שתי שפות רוגלריות נגדיר $L_{1,2} = \{w_1 \cdot w_2 | w_1 \in L_1 \wedge w_2 \in L_2 |w_1| = |w_2|\}$

<u>א. הוכיחו ש L_{12} שפה ח"ה עי בניית אוטומט מחסנית</u>



1. $\delta_M^{12}\left(q_0^M, \sigma, \{\varepsilon, A\}\right) = \left(q_0^M, A\right)$ עבור $\delta_1(p, \sigma) = q$, כלומר על כלל מעבר בשפה L_1 רגולרית נכנס תו כלשהו למחסנית - במקרה הזה A - ובכך בעצם נספור מהו אורך המילה.
2. $\delta_M^{12}\left(q_0^M, \varepsilon, p\right) = \left(q_1^M, q_0^1\right), p \in F_1$, כאשר מילה ב L_1 מתקבלת נעבור למצב q_1 שמבטא את q_0 של L_2
3. $\delta_M^{12}\left(q_0^M, \sigma, A\right) = \left(q_0^M, \varepsilon\right)$ עבור $\delta_2(p, \sigma) = q$, כעת על כל כלל מעבר בשפה L_2 נוציא את ה A מהמחסנית, ובכך יהיו לנו מספר הוצאות כמספר ההכנסות
4. $\delta_M^{12}\left(q_0^M, \varepsilon, A\right) = \left(q_1^M, \varepsilon\right), p \in F_2$, המילה תתקבל אס"ם מספר ההכנסות שווה למספר ההוצאות

שאלה 2

בנו אוטומט מחסנית , והסבירו כיצד מבטא את השפה

<u>א. $L_1 = \left\{w \in \{a, b\}^* | \#_a(w) = \#_b(w)\right\}$</u>

נגדיר: $M = \left(\{q_0\}, \sum = \{a, b\}, \Gamma = \{A, \perp\}, q_0, \delta, \perp, \{q_0\}\right)$

δ:

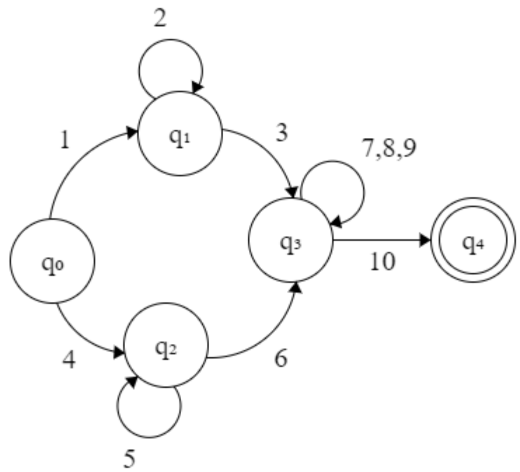
- $a, \perp | \perp A$
- $a, A | AA$
- $b, A | \varepsilon$
- $\varepsilon, \perp | \varepsilon$

הסבר: על כל a שקיבלנו נכניס למחסנית A , ועל B שקיבלנו נוציא , למעשה האוטומט יקבל כאשר המחסנית תתרוקן לגמרי

<u>ב. $L_2 = \{a^n b^m | n = m \vee n = 2m\}$</u>

נגדיר: $M = \left(\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \sum = \{a, b\}, \Gamma = \{A, W, X, \perp\}, q_0, \delta, \perp, F = \{q_4\}\right)$

כללי δ :



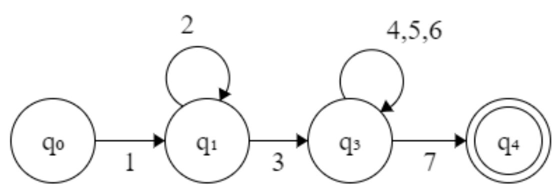
$$\left\{\begin{matrix} 1) & a,\perp|\perp A \\ 2): & a,A|AA \\ 3) & \varepsilon,*|* \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} 4) & a,\perp|\perp W \\ 5): & a,W|WW \\ 6): & \varepsilon,*|* \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} 7) & b,A|\varepsilon \\ 8) & b,W|X \\ 9) & b,X|\varepsilon \\ 10) & \varepsilon,\perp|\varepsilon \end{matrix}\right\}$$

הסבר:

- נשתמש בעובדה שהאוטומט אי־דטרמינסטי ובכך יש שני ניתבנים ניתבים של הוספות רגילות של A שאותן B יוצא באופן רגיל, ונתיב של הוספות W דבר שמכריח את האוטומט לבצע החלפה ל X ובכך מובטח שקראנו 2 b על כל a

ג. $L_3 = \{a^n b^m | n \le m \le 2n\}$

נגדיר: $M = (\{q_0, q_1, q_3, q_4\}, \sum = \{a, b\}, \Gamma = \{A, X, \perp\}, q_0, \delta, \perp, \{q_4\})$



$$\left\{\begin{matrix} 1) & a,\perp|\perp A \\ 2): & a,A|AA \\ 3) & \varepsilon,*|* \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} 4) & b,A|\varepsilon \\ 5) & b,A|X \\ 6) & b,X|\varepsilon \\ 7) & \varepsilon,\perp|\varepsilon \end{matrix}\right\}$$

הסבר:

- באופן דומה לסעיף הקודם, רק שכאן את ה Aים נוסיף באופן רגיל, וגם b יכול לצאת באופן רגיל, אך יש גם אפשרות להוצאה כפולה (דבר המבטא קריאה של שתי b)

שאלה 3

א. טכניון 74 , ב - הוכיחו בעזרות למת הניפוח שהשפה אינה ח"ה - $L_2 = \{ww^Rw | w \in \{0,1\}^*\}$

- נניח בשלילה שח"ה, יהיה n הקבוע המובטח מלמת הנפוח, ניקחאת $z = 0^n110^n0^n1$. $z \in L$ עבור $w = 0^n1$ ומתקיים $|z| = 3n + 3 \ge n$. יהא $z = uvwxy$ פירוק כלשהו המקיים $|vwx| \le n$, $|vx| \ge 1$.

- נבחר $i=0$ ונקבל , ונשקול את המקרים:

  היות ו $|vwx| \le n$

1. vx מכיל רק 0 אז נקבל שכמות ה 0 אחת או שניים שונה מכמות ה a ברצף השלישי ולכן לא תיתכן מילה כזו ב L_1 כי אם יש צרף של 0 הוא מופיע בדיוק 3 פעמים באותה הכמות במילה:
   למשל:

   $0^{n-|vx|}110^n0^n \notin L$, וכן לשאר המקרים בהם vx מכיל רק 0ים

2. vx מכיל 1 (לפחות אחת) , אז נקבל מילה עם פחות מ3 פעמים b אבל יותר מפעם כי ($|vwx| \le n$) ולכן לא יתכן שלא ישארו 1) ולכן לא תתיכן מילה כזו ב L_1 כי כל תו שמופיע חוזר על עצמו לפחות 3 פעמים. למשל:

   $0\left(0^{n-1}1\right)^0 10^n0^n = 010^n0^n \notin L$, וכן לשאר המקרים בהם vx מכיל רק 1 כלשהו

ב. <u>הוכיחו שהשפה אינה חסרת הקשר : $L_2 = \left\{c^iu | i \ge 20, u \in \{a,b,c\}^*, \#_a(u) = \#_b(u) = \#_c(u)\right\}$</u>

- נניח שחסרת הקשר, ויהיה n המובטח מהלמה
- ניקח את $z = c^{30}c^nb^na^n$ יהיא פירוק כלשהו $z = uvwxy$ כך ש: $|vwx| \le n$ וגם $|vx| \ge 1$
- נבחר $j=0$:

1. אם $|vxx|$ מכיל רק b,a אז : $z' = c^{20}c^nb^{n-|vxx|}a^n \notin L$ כנ"ל ל a
2. אם $|vwx|$ מכיל שילוב של c,b או b,a אז : $z' = c^{30}c^nbb..\underbrace{b^{n-?}a^{n-?}}..aa \notin L$ כנ"ל ל a
3. אם $|vwx|$ מכיל רק c אז צריך לציין ש::
   (א) $c^{20}c^{n-|vwx|}b^na^n \notin L$ כי כמות ה cים לא שווה ל a וה b
   (ב) או ש $c^{20-|vwx|}c^nb^na^n \notin L$ (דבר שיכול להתקיים רק אם $n \ge i$) כי כמות ה $20 > i$
   ולא ניתן להעביר מצד אחד לשני
   (ג) אם $|vwx|$ נופל בין שניהם אז מאותם נימוקים
   הערה: למעשה הכל אותו מקרה, כי לצורך הסברה חילקתי

ג. <u>עבור הסעיף הקודם, תנו דוגמה לבחירה של z בשפה שאורכו לפחות n עבורו ההוכחה לא תעבוד. הסבירו בדיוק</u> ההוכחה

- נבחר $n=100$, אז לכל מילה $z \in L$ באורך $|z| \ge 100$, נוכל לבחור את הפירוק :
- $\underbrace{c^{20}}_{u}\underbrace{c^{20}}_{vwx}\underbrace{c^{\frac{|z|-20}{3}}b^{\frac{|z|-20}{3}}a^{\frac{|z|-20}{3}}}_{y}$ כאשר x או v אחד מהם שווה לפחות c אחת, והשאר לא משנה
- ואז $|vwx| \le n$ וגם $|vx| \ge 1$ ולכל i שנבחר המילה עדיין בשפה, כי תמיד הוכל לשרשר להתחלה, ולקבל ש $|c^i| \ge 20$