אוטומטים 2 - תרגולים גיל

תרגול 2 - 5/2/19

שאלה ממבחן 2017

א. הוכח שהשפה $L=\left\{\begin{matrix} n,\geq 5 \\ a^nb^m|n<m \\ \end{matrix}\right\}$ אינה רגולרית באמצעות משפט נרוד.

- נתבונן a^i,a^j לכל $i<j\in\mathbb{N}$, $i,j\geq 5$,
- הן ניתנות להפרדה (במחלקות שקילות שונות) עבור הסיפא b^j כי $a^ib^j\in L$ כי $i<j$
- אבל $a^jb^j\notin L$ כי $j=j$. לכן יש ל L אינסוף מחלקות שקילות, ולפי משפט נרוד : L אינה רגולרית.

ב. הוכח/הפרך: השפה $L_2=\left\{\begin{matrix} p<2\,(\mod 3) \\ a^p|p\equiv 3\,(\mod 5) \\ \end{matrix}\right\}$ מקיימת $index(L_2)>5$

אינטואיציה:

$\notin L$			$\in L$
a^0	a^6	a^{11}	a^3
a^1	a^7	a^{12}	a^{13}
a^2	a^8	a^{14}	
a^4	a^9		
a^5	a^{10}		

הוכחה:

- נתבונן במילים $a^1,....,a^5$ לכל a^i,a^j כאשר $i<j$ נוסיף את הסיפא a^{13-j} ומכאן ש:

$$a^ja^{13-j}=a^{13}\in L_2$$
$$a^ia^{13-j}=a^{13-j+1}\notin L_2$$

- כי $8\leq 13-j+i\leq 12$

ג. תהי $L_3=L_2\cdot\{b\}$ הוכיחו כי : $index(R_{L_3})>index(R_{L_2})$

- תהנה $x,y\in\sum^*$ הניתנו להפרדה ב L_{R_2} . לכן קיימת $z\in\sum^*$ כך ש $xz\in L_2$ אבל $yz\notin L_2$.
- נבחר את הסיפא $z=b$. מכאן נבחר את $zb\in\sum^*$ ונקבל ש:
  - $x\cdot zb\in L_3$
  - $yzb\notin L_3$
  - לכן x,y ניתנות להפרדה ב R_{L_3} , לכן ה$index(R_{L_3})$ לפחות כמו $index(R_{L_2})$
- כעת נראה לשתי מילים שהיו באותה מחלקה ב R_{L_2} הניתנות להפרדה ב R_{L_3}
  - ניקח את $x=a^3b$ ואת $y=3$
  - x,y הן באותו מחלקה ב R_{L_2} - המחלקה של המילים שלא בשפה
  - אבל ניתנות להפרדה ב R_{L_3} למשל ע"י ε
- לכן $index(R_{L_3})>index(R_{L_2})$, כנדרש.

דקדוקים

$G = (V, T, S, P)$

לדוגמה: $G = \left(\{S\}, \{a\}, S, \begin{Bmatrix} S \to \varepsilon \\ S \to a \end{Bmatrix} \right)$, המילים בשפה: ... $\varepsilon, a, aa,$ לכן: $L(G) = \{a^n | n \in \mathbb{N}\}$

למעשה שפת הדקדוק היא: $L(G) = \{w \in T^* | S \Rightarrow^* w\}$

משימות:

1. שפת כל המילים המכילות abc

אז : $G = (\{S, A\} \{a, b, c\}, S, , P)$

P :

- $S \to AabcA$
- $A \to \varepsilon | aA | bA | cA$

2. השפה $a^n b^n$

אז : $G = (\{S\} \{a, b\}, S, P)$

P :

- $S \to aSb$

3. השפה $a^n b^n c^n$

- $S \to \varepsilon | aA$
- $A \to bB$
- $B \to cC$
- $cC \to Cc$
- $bC \to Cb$
- $aC \to aS_2$
- $S_2 \to \varepsilon | aA_2$
- $A_2 \to bB_2$
- $B_2 b \to bB_2$
- $B_2 c \to cC$

$$S \to aA \to abB \to abcC \to abCc \to aCbc \to aS_2bc \to aaA_2bc \to aabB_2bc$$

$$\to aabbB_2c \to aabbcCcc \to .. \to aaCbbcc \to aaaS_2bbcc \to ...$$

הרעיון שנוכל לקמפל כל שפה שנרצה למשל:

$$stat \to IF | FOR | AR | ASS$$

לדוגמה:

$$ASS \to V = A'$$

$$A \to 8 + A | ; Stat$$

$$FOR \to for(INIT; COUND; STEP)$$

תרגול 4 - 30/5/19

שפות חסרות הקשר

איך שוללים ח"ה?

1. ספירה מדוייקת:
   - $L = \{a^p | \text{p is prime}\}$ - לא
   - $L = \left\{a^{n^2} | n \in \mathbb{N}\right\}$ - לא
   - $L = \left\{a^{3n} | n \in \mathbb{N}\right\}$ - כן, כי רק צריך לזכור את השארית
2. השוואה כפולה/ספירת משולשת:
   - $L = \{a^n b^n c^n | n \in \mathbb{N}\}$ - לא
3. ספירה מתחלפת:
   - $L = \{a^n b^m c^n d^m | n, m \in \mathbb{N}\}$ לא
   - $L = \{a^n b^m c^m d^n | n, m \in \mathbb{N}\}$ - כן - בחשיבה על מחסנית זה אפשרי
4. השוואה באותו הסדר (הכללה ל3)
   - $L = \left\{w \cdot w | w \in \{0,1\}^*\right\}$ - לא
   - $L = \left\{w \cdot w^R | w \in \{0,1\}^*\right\}$ - כן ח"ה

תרגילים

1. השפה: $L = \left\{a^n b^m c^k | n = 2m + k \ n, m, k \in \mathbb{N}\right\}$
   - $S \to \varepsilon | aSc \ | aaBb$
   - $B \to \varepsilon | \ aaBb$
2. השפה: $L = \left\{a^n b^m c^k | n = m \cdot k, \ \ n, m, k \in \mathbb{N}\right\}$
   - אינה חסרת הקשר - מ1 - ספירה מדויקת
   - לא מספיק לדעת מהו הערך של ה n , אלא גם מהו בדיוק m, k למשל: $8 = 1 \cdot 8 \backslash 2 \cdot 4 \backslash$
   - ההוחכה על למת הניפוח
3. השפה $L = \{a^n b^m | m \leq 2n + 17 \in \mathbb{N}\}$ - ח"ה
   - $S \to aS \mid aSb \mid aSbb \mid B$
   - $B \to \varepsilon \mid b \mid b^2 \ .....| \ b^{17}$
4. השפה $L = \left\{a^n b^k c^m | n \geq k \ m = n + 2 \ n, m, k \in \mathbb{N}\right\}$
   - יש כאן השוואה כפולה , ולכן אינה ח"ה
5. $\{a^n b^m | \ n \neq m \ n, m \in \mathbb{N}\}$ - ח"ה
   - $S \to S_S | S_c$
   - $S_s \to aS_s b | aS_s | a$
   - $S_c \to aS_c b | S_c b | b$

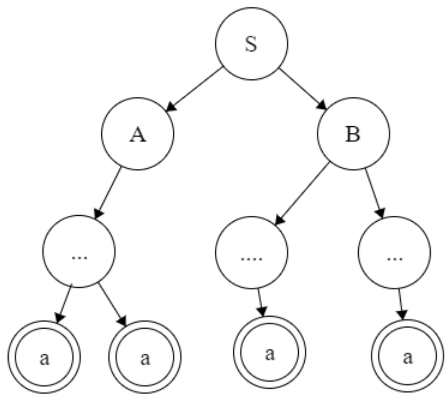
למת הניפוח

טענה: לכל שפה ח"ה יש דקדוד ח"ה שכל מתשנה בו גוזר $A \to XY$ או $A \to a$ (חומסקי)

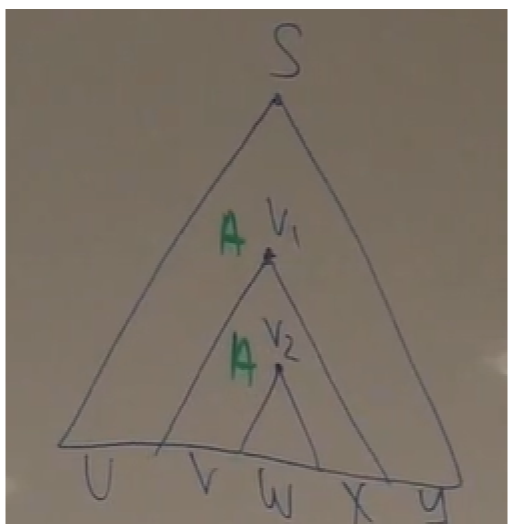
רעיון ההוכחה:

חזרה על רעיון ההוכחה:

- אם זה עץ הגזירה:



- מחישובי גבהים ושובך היונים יש משתנה שחוזרים עליו פעמים, לכן נוכל לסמן:



- ויתקיים ש: $z = uv^iwx^iy \in L$
- בנוסף מכיון שלוקחים מילה באורך מספיק לפריסת העץ אז: $|z| \geq n = 2^{|v|} + 1$ אז חייב להיות ש $|vwx| \leq n$
- וכן v או x בעץ יגזר לפחות לטרמינל אחד מהגדרה של חומסקי

תרגול 5 - 6/6/19

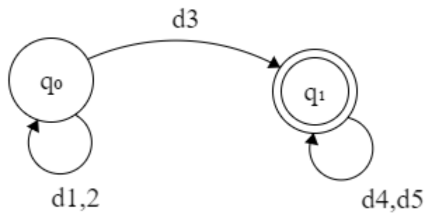
אוטמט מחסנית

באופן כללי כל אוטומט מחסנית הוא שביעיה: $(Q, \sum, \Gamma, q_0, \delta, \perp, F)$

- כל מעבר מורכב באופן הבא: (כמות סופית אך לא חסומה , מצב של תווים **במקום** ראש המחסנית) $\to$ (ראש המחסנית, תו, מצב)

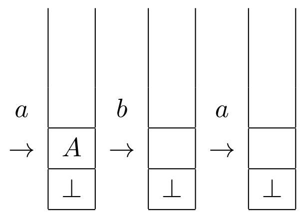
- תווי הקלט $\sum$, תווי המחסנית Γ
- $\sum = \{a, b\}$, $\Gamma = \{A, \Gamma\}$

השפה $\{a^n b^n | n \in \mathbb{N}\}$



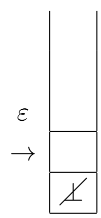
$$\begin{Bmatrix} d1: & a, \perp | \perp A \\ d2: & a, A | AA \\ d3: & \varepsilon, * | * \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} d4: & b, A | \varepsilon \\ d5: & \varepsilon, \perp | \varepsilon \end{Bmatrix}$$

- דוגמת הרצה - למילה aba:



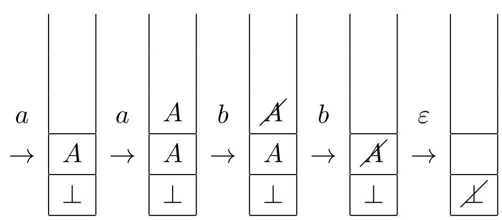
$\rightarrow$ נתקענו = אין חוק למצב זה

- המילה הריקה:

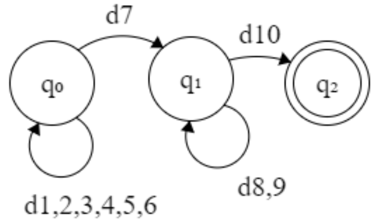


$\rightarrow$ כן, עובר ל q_1 ומוציא את הראש

- המילה $aabb$:

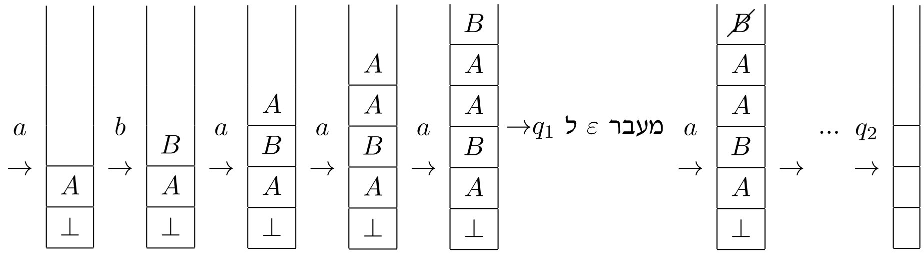


תהיה השפה $\{ww^R | w \in \{a, b\}^*\}$, נגדיר $\sum = \{a, b\}$, $\Gamma = \{\perp, A, B\}$

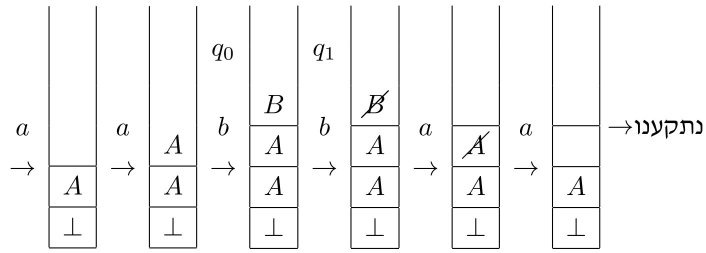


$$\begin{Bmatrix} d1: & a, \perp | \perp A \\ d2: & b, \perp | \perp A \\ d3: & a, A | AA \\ d4: & b, A | AB \\ d5: & a, B | BA \\ d6: & b, B | BB \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} d7: & \varepsilon, * | * \\ d8: & a, A | \varepsilon \\ d9: & b, b | \varepsilon \\ d10: & \varepsilon, \perp | \varepsilon \end{Bmatrix}$$

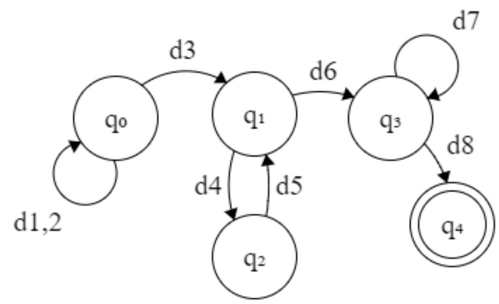
- דוגמת הרצה - למילה $\underbrace{abaab}\underbrace{baaba}$:



- דוגמת הרצה - למילה $aabba$:



תהיה השפה $\left\{a^n b^m c^k | n = 2m + k\right\}$ איך לבנות אוטומט מחסנית לשפה?



$$\begin{Bmatrix} d1: & a, \perp|\perp A \\ d2: & a, A|AA \\ d3: & \varepsilon, *|* \\ \\ d4: & b, A|\varepsilon \\ d5: & \varepsilon, A|\varepsilon \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} d6: & \varepsilon, *|* \\ d7: & c, A|\varepsilon \\ \\ d8: & \varepsilon, \perp|\varepsilon \end{Bmatrix}$$

- נשים לטריק עם q_2 על מנת לבטא הוצאה כפולה של A ביחס ל B
- טריק אחר הוא להגדיר תו חדש, למשל $'AA'$ ולהתאים את הכללים.

הגדרה: קבלה באמצעות ריקון: אוטומט המקבל כאשר המחסנית התרוקנה + סיימנו את קריאת המילה (ללא דרישה למצב מקבל)

הערה: האוטומטים שהראנו עד כה , קיבלו גם באמצעות המצבים המקבלים וגם באמצעות הריקון

כאשר בונים אוטומט צריך להגיד מאיזה סוג הוא.

הוכחה :

- תהיה L שפה רוגלרית, לכן קיים ל L אוטומט סופי דטרימנסטי :

$$A = (Q, \sum, q_0, \delta, F)$$

- נגדיר אוטומט מחסנית M_e המקבל ע"י ריקון באופן הבא:

$$M_e = \left(\left\{q_0^M\right\}, \sum, Q \cup \{\perp\}, q_0^M, \underbrace{q_0}_{\text{bottom}}, \delta \right)$$

- $\delta\left(p,\sigma\right)=q$ עבור $\delta_M\left(q_0^M,\sigma,p\right)=\left(q_0^M,q\right)$
- $\delta_M\left(a_0^M,\varepsilon,p\right)=\left(q_0^M,\varepsilon\right),p\in F$
- הרעיון המחסנית תשמור את המצבים בהתאמה למעברים של האוטומט הסופי, כלומר עם אני עומד ב q_1 וקורא a , אז למחסנית יכנס q_1 , ואני עובר למצב הבא
- נותר להוכיח הכלה דו־כיוונית...

הוכיחו לכל שפה רגולרית קיים אוטומט מחסנית המקבל את השפה באמצעות ריקון מחסנית, ויש לו מצב מאחד

בלבד.

תרגול 6 - 13/6/19

שאלה 1

א. הוכח/הפרך : עבור $\sum=\{a\}$ אם שפה $L\in\sum^*$ מקיימת את למת הניפוח לשפות חסרת הקשר, אז היא מקיימת גםאת למת הניפוח לשפות רגולריות. להזכירכם בקצרה ,בלמת הניפוח לשפות רגולריות, מדובר בפירוקים $z=uvw$ כאשר $\forall i\ uv^iw\in L$, $|uv|\leq|v|\geq1$, $|v|\geq1$

הוכחה:

- תהי L שפה המקיימת את למהת ניפוח לשח"ה, מעל $\sum=\{a\}$
- נזכר: נתון שקיים $n_{cf}\in\mathbb{N}$ כך שלכל $z\in L$ $|z|\geq n_{cf}$ קיים פירוק $z=uvwxy$ $|vx|\geq1$, $|vwx|\leq1$, $uv^iwx^iy\in L$
- צ"ל: יש n_r לכל $z\in L$ $|z\geq n_r$ קיים פירוק $z'=u_rv_rw\prime_r$, $|v_r|\geq1$, $|u_rv_r|\leq n_r$, $u_rv_r^iw\prime_r\in L$
- יהיה ה n_{cf} המובטח מלמת הניפוח לשפ"ה, נבחר את $n_r=n_{cf}$
- תהי $z\in L$ כך ש: $|z|\geq n_r=n_{cf}$, לפי הלמה לח"ה, קיים פירוק $z=u_{cf}v_{cf}w_{cf}x_{cf}y_{cf}$ המקיים ש:
  - $|v_{cf}x_{cf}|\geq1$
  - , $|v_{cf}w_{cf}x_{cf}|\leq n_{cf}$
  - , ו $u_{cf}v_{cf}^iw_{cf}x_{cf}^iy_{cf}$ לכן $i\in\mathbb{N}$
- מכיון ש $\sum=\{a\}$ מכאן ש: $u_{cf}=a^{|u_{cf}|}....y=a^{|y_{cf}|}$. נבחר:
  - $u_r=w_{cf}$
  - $v_r=v_{cf}\cdot x_{cf}$
  - $w_r=u_{cf}\cdot y_{cf}$
- כעת: $z=u_rv_rw_r$, מכייון שכל המילים מכילות רק a , ולכן סדר השרשור לא חשוב.
- $|v_r|=|v_{cf}\cdot x_{cf}\geq1|$ מנתון
- $|u_rv_r|=|v_{cf}w_{cf}x_{cf}|\leq n_r$ נתון
- $u_rv_r^iw_r=w_{cf}\left(v_{cf}x_{cf}\right)^iu_{cf}y_{cf}=u_{cf}v_{cf}^iw_{cf}x_{cf}^iy_{cf}\in L$
- ולכן מקיית את למת הניפוח לשפות רוגלריות, כנדרש

ב. הוכח או הפרך : לכל א"ב סופים $\sum$, אם שפה מקיימת את למת הניפוח לשפות ח"ה , אז היא מקיימת את למת הניפוח לשפות רגולריות.

לא נכון - ד"נ:

- $\sum = \{a,b\}$, נבחר את $L = \{a^n b^n | n \in \mathbb{N}\}$, L מקיימת את למת הניפוח לשפות ח"ה.
- הוכחה: נבחר $n = 2$ תהי $z \in L$ $|z| \geq 2$ מכאן ש: $z = a^k b^k$ $(k \geq 1)$, נבחר $u = a^{k-1}$ נקבל:

$$z = \underbrace{aa}_{u}\underbrace{a}_{v}\underbrace{\varepsilon}_{w}\underbrace{b}_{x}\underbrace{bb}_{y}$$

- ומתקיים: $|vx| = 2 \geq 1$, $|vwx| = 2 \leq 2$
- ומתקיים ש: $uv^iwx^iy = a^{k-1}a^i\varepsilon b^i b^{k-1} = a^{k-1+i}b^{k-1+i} \in L$
- L לא מקיימת את הלמה לשפות רגולריות - אוטומטים 1

ג. הוכח כי קיימת סדרה אינסופית של שפות (כולן שונות) $L_1, L_2, ...$ כך ש $L_1 \subset L_2 \subset L_3...$ בנוסף, כל שפה L_i בסדרה עבור i אי-זוגי היא חסרת הקשר, וכל L_i עבור i זוגי אינה חסרת הקשר. בסעיף זה אין צורך לתת הוכחה מלאה לאי רגולריות של שפה.

- $L_1 = \{a^n b^n | n \in \mathbb{N}\}$
- $L_2 = \{a^n b^m\} \cup \left\{ a^n b^n c^n | \begin{matrix} n \in \mathbb{N} \\ n \geq 1 \end{matrix} \right\}$
  - L_2 אינה ח"ה כי האיחוד הוא זר = תמיד נצטרך "לטפל" ב c , והחלק השני אינו ח"ה
  - $L_1 \subset L_2$
- $L_3 = \left\{a^n b^m c^k | n, m, k \in \mathbb{N}\right\}$
- $L_4 = \left\{a^n b^m c^k | n, m, k \in \mathbb{N}\right\} \cup \left\{ a^n b^n c^n a^n | \begin{matrix} n \in \mathbb{N} \\ n \geq 1 \end{matrix} \right\}$
- $L_5 = \{a^{n_1} b^{n_2} c^{n_3} d^{n_4} | n_{1,2,3,4} \in \mathbb{N}\}$

שאלה 2

לכל אחת מהשפות הבאותת הוכח שהוא ח"ה או הוכח שיאנה ח"ה

א. השפה $L_2 = \left\{a^n c^m b^l d^h | n \leq 3m, l \leq 2h + 5\right\}$

- כן , ח"ה. נציג דקדוק לשפה
- יהיה $G = (\{S, X, Y, B\}, T = \{a, b, c, d\}, S, P)$, כאשר P:
  - $S \to XY$
  - $S \to X \to \varepsilon | Xc | aXc | aaXc | aaXc$
  - $Y \to B | Yd | bYd | bbYd$
  - $B \to \varepsilon | b | bb ... | bbbbb$

ב. השפה $L_1 = \left\{wcw | w \in \{a, b\}^*\right\}$

- לא, ח"ה. נשלול על ידי למת הניפוח
- הוכחה: נניח בשלילה שכן, ויהיה $n \in \mathbb{N}$ המובטח מהלמה נבחר $z = a^n b^n c a^n b^n$, מתקיים ש $z \in L$ ו ש $|z| \geq n$
- יהיה $z = uvwxy$ המקיים $|vx| \leq 1$ ו $|vwx| \leq n$
- נבחר $i = 0$ ונקבל שבהכרח:

- כמות ה a בתחילת המילה אל תהיה שווה לכמות ה a שאחרי ה c
- או באותו אופן עבור כמות ה b

שאלה 3

א. הוכח באמצעות משפט נרוד שהשפה בסעיף 2. ב אינה רגולרית

- נתבונן ב a^ic לכל $i \in \mathbb{N}$
- נוכיח שלכל $j \leq i$ a^ic ו a^jc במחלקות שונות, (ואז נקבל ∞ מחלקות שקילות)
- עבור $j > i$ נבחר את השפה $z = a^i$ ומכאן ש: $a^ica^i \in L$ ומצד שני $a^jca^i \notin L$
- ומכאן שיש אינסוף מחלקות שקילות ולכן L אינה רגולרית לפי משפט נרוד.

ב. הוכח/הפרך: תהי $L \in \sum^*$ אז קבוצת מחלקות השקילות של R_L וקבוצת מחלקות השיקלות של $R_{\bar{L}}$ שוות

- הרעיון: מחלקות השקילות לוקחות את כל המילים ומחלקות אותם למילים שכן בשפה ולכאלה שלא בשפה , השפה המשלימה פשוט הופכת בינהם

תרגול השלמה - 26/6/19

תשע"ח סמסטר ב' מועד א

סגירויות

ח"ה = רגורלית $\cap$ ח"ה

ח"ה = רגולרית $\setminus$ ח"ה

ח"ה = ח"ה $\cup$ ח"ה

ח"ה = ח"ה $\cdot$ ח"ה

שאלה 1

1. תנו דוגמה לדקדוק ח"ה חד משמעי לשפה בת 3 מילים
   - נגדיר $L = \{a, b, c\}$, לכן $G = (V = \{S\}, T = \{a, b, c\}, S, P)$
   - P: $P = \{S \to a|b|c\}$
2. תנו דוגמא לדקדוק ח"ה רב משמעי לשפה בת 3 מילים
   - $\{aba, abb, bab\}$ לכן $G = (V, T = \{abc\}, S, P)$
   - P : $S \to A|B$, $A \to aba|abb|bab$, $B \to aba|abb|bab$
3. אם L אינה ח"ה אז $L \cup \{x\}$ אינה כאשר x מילה בודדת
   - נניח בשלילה ש $L' = L \cup \{x\}$ח"ה
   - אם $x \in L$ אז $L' = L$ - וזו סתירה
   - אם $x \notin L$ אז $L = L' \setminus \{x\} = L' \cap \{\bar{x}\}$,
- $\{x\}$ סופית ולכן רגולרית ומכאן ש $\{\bar{x}\}$ רגולרית לפי סגירויות, שהרי שפה ח"ה חיתוך רגורלית = שפה ח"ה
- ומכאן , L ח"ה לפי הנתון, $\{\bar{x}\}$ רגולרית ולכן L ח"ה סתירה

4. הוכח: שקיימת סדרה של שפות $L_1,....L_{10}$ כולן שונות, מעל $\sum=\{a\}$, כך ש $L_1 \subseteq L_2 \subseteq ... \subseteq L_{10}$ עבור i אי־זוגי אינה ח"ה , L_i עבור i זוגי כן ח"ה

- $L_1 = \left\{a^{32p} | \text{p is prime} > 2\right\}$
- $L_2 = \left\{a^{32n} | \text{n is odd}\right\} \cup L_1$
- $L_3 = \left\{a^{16p} | \text{p is prime}\right\} \cup L_2$
- $L_4 = \left\{a^{16n} | n \in \mathbb{N}\right\} \cup L_3$
- $L_5 = \left\{a^{8p} | \text{p is prime}\right\} \cup L_4$
- $L_6 = \left\{a^{8n} | n \in \mathbb{N}\right\} \cup L_5$
- $L_7 = \left\{a^{4p} | \text{p is prime}\right\} \cup L_6$
- $L_8 = \left\{a^{4n} | n \in \mathbb{N}\right\}$
- $L_9 = \left\{a^{2p} |\right\} \cup L_8$
- $L_{10} = \left\{a^{n} | n \in \mathbb{N}\right\}$

שאלה 2

1. $L_1 = \left\{a^i b^i c^i d^i | \in \mathbb{N}\right\}$

- לא ח"ה .נניח שכן, ולכן L_1 מקיימת את למת הניפוח לשפות ח"ה . יהיה $n \in \mathbb{N}$. הקובע המבוטח מהלמה.
- נבחר $z = a^n b^n c^n d^n$, מתקיים ש: $|z| = 4n \geq n$, $z \in L_1$
- יהי $z = uvwxy$, פירוק כלשהו המקיים: $|vx| \geq 1$, $|nwx| \leq n$
- נבחר $i = 0$ ונתבונן בכל המקרים:

(א) vwx כלול בתוך תו אחד ,אז מכך $|vx| \geq 1$ אתו $z' = wv^0wx^0y$ יהי פחות מ n בעוד ששאתר התווים בדיוק n פעמים. $z' \in L$

(ב) vwx כולל בתוכו 2 תויים (לא להיות יותר מ 2 תווים סמוכים כי $|vwx| \leq n$, אותם 2 תווים ב $z' = uv^0wx^0y$ יהיו פחות מ $cgus$ששני התווים האחרים יהיו n ולכן $z' \notin L$

2. $L_2 = \{a, b, c, d\}^* \backslash L_1$

- כן ח"ה, נשים לב :
- $L_2 = \bigcup\limits_{1 \leq j \leq j \leq 4} \left\{ a^{n_1} b^{n_2} c^{n_3} d^{n_4} | \begin{matrix} n_i \neq n_j \\ n_{1...4} \in \mathbb{N} \end{matrix} \right\} \cup \left\{ w \in \{a, b, cd\}^* \mid \text{w form is not: } a^{n_1} b^{n_2} c^{n_3} d^{n_4} \right\}$
- ומתקיים ש: $\overline{\{a^{n_1} b^{n_2} c^{n_3} d^{n_4} | n_{1,...,4} \in \mathbb{N}\}} = \left\{ w \in \{a, b, cd\}^* \mid \text{w form is not: } a^{n_1} b^{n_2} c^{n_3} d^{n_4} \right\}$ וזו שפה רגורלית
- L' רגולרית כי הביטי הרגולרי המתאים ל $\bar{L}'$, $a^* b^* c^* d^*$, ולכן מסגירות למשלים של שפות רגולריות, גם L' רגולרית
- לכל $1 \leq i \leq j \leq 4$, השפה $L_{i,j}$ ח"ה עבור $i = 1$, $j = 2$:נקבל
- $L_{1,2} = \left\{ a^{n_1} b^{n_2} | \begin{matrix} n_1 \neq n_2 \\ n_1, n_2 \in \mathbb{N} \end{matrix} \right\} \cdot \left\{ a^{n_3} b^{n_4} | \begin{matrix} n_3 \neq n_4 \\ n_3, n_4 \in \mathbb{N} \end{matrix} \right\}$ באותו אופן עבור כל $i < j$, לכן מסגירות לאיחדו של שפות ח"ה L_3 היא ח"ה.

3. השפה $L_3 = \left\{a^i b^j | j \in \{i, 2i, 3i\}\right\}$

- $L_3 = \left\{a^i b^i | i \in \mathbb{N}\right\} \cup \left\{a^i b^{2i} | i \in \mathbb{N}\right\} \cup \left\{a^i b^{3i} | i \in \mathbb{N}\right\}$ מאיחוד לשפות ח"ה L_3 ח"ה

שאלה 3

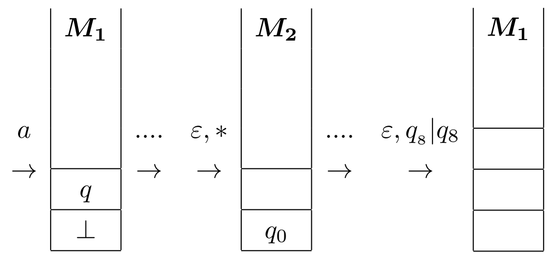
1. הוכח באמצעות משפט נרוד שהשפה $L=\left\{a^nb^nc^{2n}|n\in\mathbb{N}\right\}$ אינה רגולרית

- נתבונן באוסף המילים a^ib^i לכל $i\in\mathbb{N}$ ונראה שלכל 2 $i\neq j$, מהילים a^ib^i , a^jb^j נמצאות במחלקות שקילות שונות ביחס R_L
- לכל $i\neq j$ נחבר את הסיפא : $j=c^{2i}$, ומתקיים ש$a^ib^ic^{2i}\in L$, אבל $a^jb^jc^{2i}\notin L$, ולכן שתי המלים במחלקות שונות.
- מכאן , שיש אינסוף מחלקות שקילות ולפי משפט נרוד, L אינה רגולרית.

2. הוכח שלכל L_1,L_2 ח"ה גם השפה : $L_3=\{uvx|ux\in L_1,v\in L_2\}$ היא גם ח"ה:

- תהיינה L_1,L_2 ח"ה . ולכן קיימים M_1,M_2 אוט' מחסנית לכל אחת מהשפות . ניצור 2 העתקים ל M_1 : M_1,M_1' . נתחיל מ M_1 כמו שהוא מגודר . ונוסיף מכל מצב q מעבר ε למצב ההתחלתי של M_2 ודוחף למחסנית את q ואת $\perp$. ומכל מצב מקבל ב M_2 נעביר מעבר ε כאשר ראש המחסנית הוא q שיוציא את q ויעבור למצב q באוטומט M_1' , ומשם ימשך כרגילו כמו שהיא באוטומט M_1

  אילוסטרציה:



3. הראה שקיימת שפה L סופית $L\subseteq\{a,b\}^*$ כך ש: $|L|$ $index(R_L)$

- דוגמה $L=\phi$, $R_L=\left\{\sum^*\right\}$, $|L|=0$, $index(R_L)=1$, $1>0$