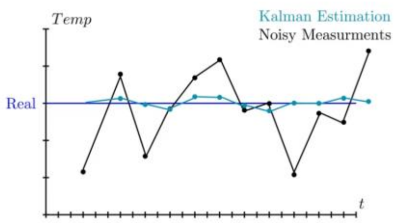
מסנן קלמן – מימד 1

Statistics

עקרונות מסנן קלמן



לא צריך לחשב את הKalman Gain כי מסנן קלמן יחשב אותו לבד.

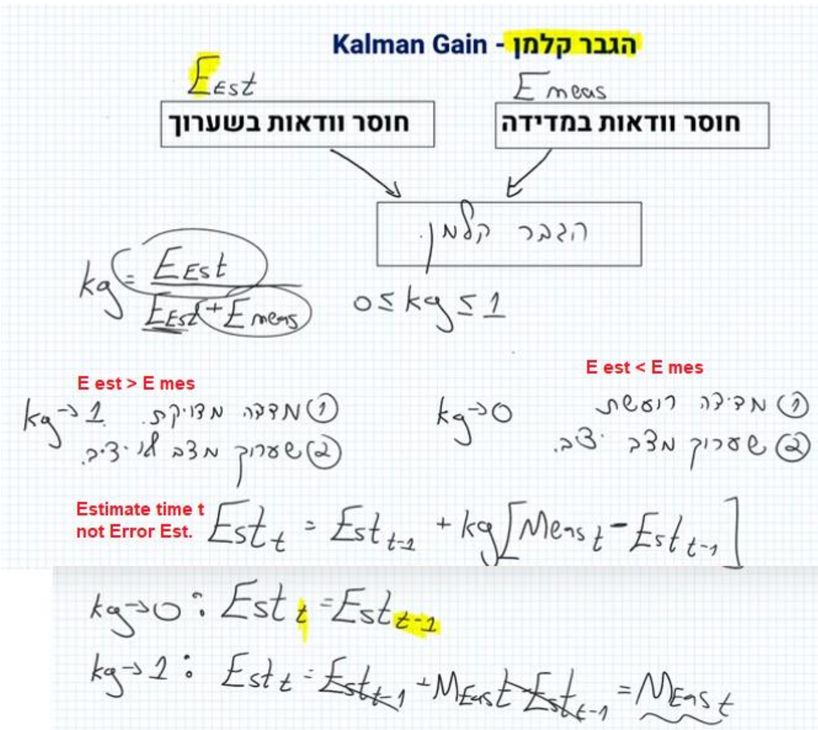
E est - שגיעה (error) של השיערוך estimate

הגבר קלמן יעלה וירד,יעלה וירד אבל הנטיה היא שבסוף הוא יהיה קטן ואז כאשר יגיע מדידה חדשה לא נתעלם ממה שעשינו עד עתה אלא נכניס אותה דרך הkg לשיערוך שלנו.בעצם נדע לחבר אותה לשיערוך הקודם

1. $KG = \dfrac{Eest}{Eest + Emeas}$ כאשר $0 \le KG \le 1$

2. $EST_t = EST_{t-1} + KG(MEAS - EST_{t-1})$

3. $Eest_t = (1 - KG)(Eest_{t-1})$



הטמפרטורה האמיתית היא 72 מעלות. הניחוש הראשוני שלנו הוא 68 מעלות, והטעות הראשונית (Eest) היא 2 מעלות. המדידה הראשונית היא 75 מעלות עם טעות של 4 מעלות לכל כיוון.

1. הכניסו את הנתונים לסט המשוואות וחשבו את ה-ESTt, KG ו- Eest בטבלה.

מלאו את הטבלה שלפניכם. דייקו עד לשתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

	MEAS	Emeas	EST	Eest	KG
t	75	4	70.33 ✓ **Answer:** 70.33 70.33	1.33 **Answer:** 1.33 1.33	0.33 ✓ **Answer:** 0.33 0.33

$E\text{-}est = 2$

$meas = 75$

$E\text{-}meas = 4$

$Estimate_{t-1} = 68$

$$Kg = \frac{E_{est}}{E_{est} + E_{meas}} = \frac{2}{2+4} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

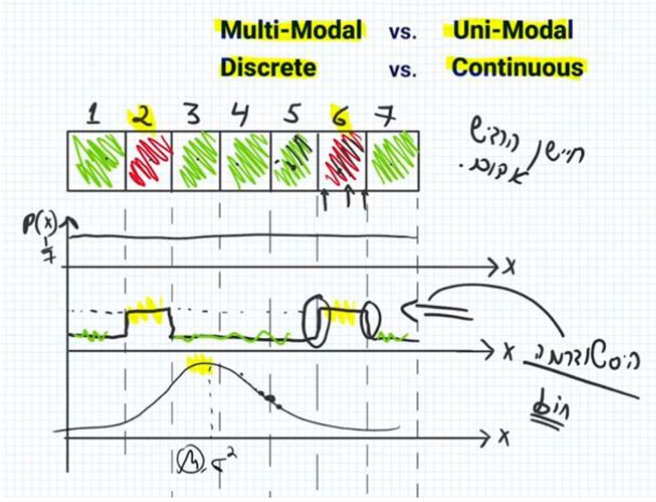
$$Est_t = Est_{t-1} + KG(Meas - Est_{t-1})$$

$$= 68 + \frac{1}{3}(75-68) = 70\frac{1}{3}$$

	MEAS	Emeas	EST	Eest	KG	Eest t-1
t-1			68 ✓ 68			2 ✓ 2
t	75	4	70.33 ✓ 70.33	1.33 ✓ 1.33	0.33 ✓ 0.33	
t+1	71	4	70.50 ✓ 70.50	1.00 ✓ 1.00	0.25 ✓ 0.25	
t+2	70	4	70.4 ✓ 70.4	0.8 ✓ 0.8	0.2 ✓ 0.2	
t+3	74	4	71 ✓ 71	0.66 ✓ 0.66	17. ✓ .17	

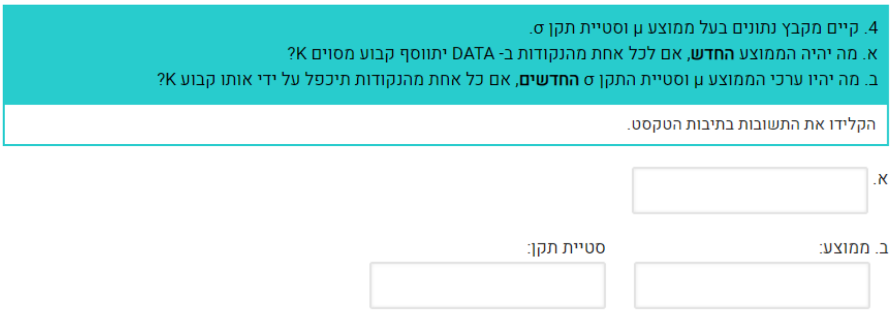
ממוצע, ואריאנס, סטיית תקן

Multi-model – כמה ניחושים



היסטורגרמה הוא: בדיד ולכן מצריך הרבה bin כדי להגיע לרצלוציה גבוה. הוא גם multi- modal ויש לו כמה ניחושים

מסנן קלמן: רציף וuni-modal מה שיש לו ההסתברות הכי גבוה הוא יבחר (ואין לו כמה התפלגויות גאוסיוניות)


4. קיים מקבץ נתונים בעל ממוצע μ וסטיית תקן σ.
א. מה יהיה הממוצע **החדש**, אם לכל אחת מהנקודות ב- DATA יתווסף קבוע מסוים K?
ב. מה יהיו ערכי הממוצע μ וסטיית התקן σ **החדשים**, אם כל אחת מהנקודות תיכפל על ידי אותו קבוע K?

הקלידו את התשובות בתיבות הטקסט.

א.

ב. ממוצע: סטיית תקן:

סעיף א'

$\mu + K$

סעיף ב'

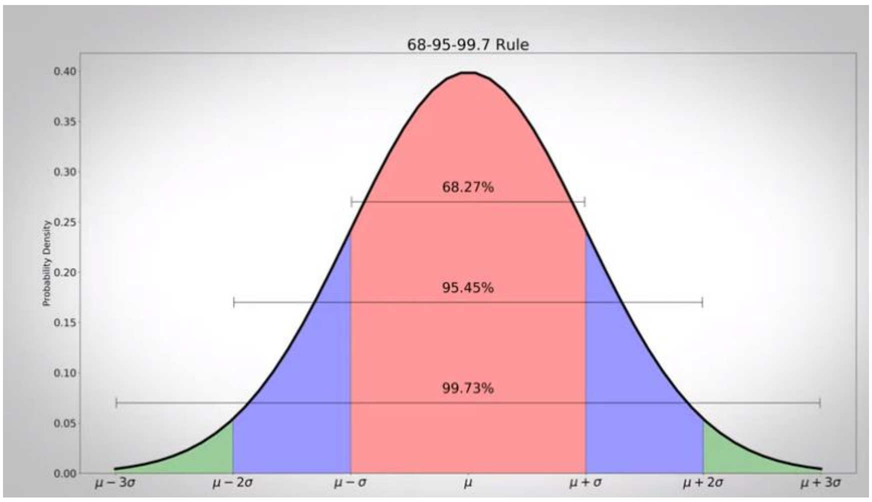
$\mu' = K\mu\,,\ \ \sigma' = K\sigma$

https://www.youtube.com/watch?v=raoTRsdAc3Y

Gauss

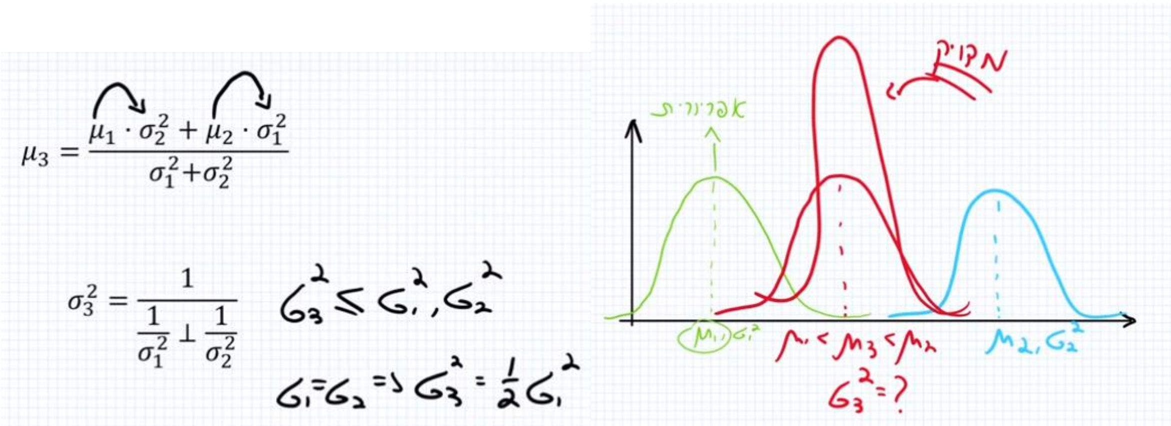
$\mu = Average$ -ניחוש הטוב ביותר

$\sigma^2 = variance$ – חוסר הוודאות ואם היא שואף 0 זה אומר שאין חוסר ודאות ושהמערכת מאוד מדיוקת



$$N(\mu_1, \sigma_1^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}$$

הכפלה של גאוסיאנים



$\sigma_3^2 < \sigma_2^2$

1. נתונות שתי התפלגויות גאוסיות: לאחת יש ממוצע 10 ושונות בריבוע של 8 ולאחרת יש ממוצע 13 ושונות בריבוע של 2.
מה הממוצע והשונות החדשים של ההכפלה בין שני הגאוסיאנים הללו?

הקלידו את התשובות בתיבות הטקסט. דייקו עד לספרה אחת אחרי הנקודה העשרונית.

הממוצע החדש:

12.4

12.4

תשובה

נכון:כל הכבוד! אלה הן התוצאות הנכונות על פי המשוואות שלמדנו.

השונות בריבוע החדשה:

1.6 ✔

$$M_1 = 10\,, \sigma_1^2 = 8 \mid M_2 = 13, \sigma_2^2 = 2$$

$$M_3 = \frac{10 * 2 + 13 * 8}{8 + 2} = 12.4$$

$$\sigma_3^2 = \frac{1}{\left(\frac{1}{8}\right) + \frac{1}{2}} = 1.6$$

2. נתון רובוט אשר נמצא בעולם חד ממדי. מיקום הרובוט ניתן על ידי PDF גאוסי עם ממוצע של 7 מטרים ושונות של 5 מטרים בריבוע. ברגע מסוים, חיישן GPS מדווח שהרובוט נמצא דווקא במיקום 11 ולא 7. לחיישן ה-GPS יש חוסר דיוק מובנה המתאפיין בשונות של 4 מטרים. בהינתן נתונים אלו, מהו הניחוש הטוב ביותר של מיקום הרובוט? ומהי השונות החדשה?

הקלידו את התשובות בתיבות הטקסט. דייקו עד לספרה אחת אחרי הנקודה העשרונית.

הממוצע החדש:

9.2

9.2

תשובה

נכון:כל הכבוד! בהתאם למשוואות שלמדנו, אלה הן התוצאות הנכונות.

השונות החדשה:

3.1

$$M_1 = 7 \, , \sigma_1^2 = 5 \, , M_2 = 11 , \sigma_2^2 = 4$$

$$\mu_3 = \frac{\mu_1 \cdot \sigma_2^2 + \mu_2 \cdot \sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

$$M_3 = \frac{7 * 4 + 11 * 5}{4 + 5} = 9.2$$

$$\sigma_3^2 = \frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right) + \frac{1}{4}} = 2.22 ????=3.1$$

3. על בסיס המיקום האפריורי הראשון של הרובוט (7,5) - פי כמה עלה דיוק המיקום הנוכחי של הרובוט מאשר לפני התזוזה?

הקלידו את התשובה בתיבת הטקסט. דייקו עד לספרה אחת אחרי הנקודה העשרונית.

$$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_3^2} = \frac{5}{3.1} = 1.6$$

1. בהינתן ש-IQ מתפלג נורמלית באוכלוסייה עם ממוצע 100 וסטיית תקן של 15, מה הסיכוי (Probability) שאדם אקראי אשר יידגם, יהיה בעל IQ הגבוה מ-125?

הקלידו את התשובה בתיבת הטקסט. דייקו עד לשלוש ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

הגש השתמשת ב-0 מתוך 2 ניסיונות

שמור

Thus:

$$P(85 \le x \le 115) = \int_{85}^{115} \frac{1}{15\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-100)^2}{2 \cdot 15^2}} dx$$

$$P(x > 140) = \int_{140}^{\infty} \frac{1}{15\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-100)^2}{2 \cdot 15^2}} dx$$

$$\approx 0.0038 = \boxed{0.38\,\%}$$

נקודה 1 אפשרית (שלא דורגה)

2. נניח שמצאנו אדם בעל IQ 125. מהי הסבירות (Likelihood) שהוא הגיע מתוך אותה התפלגות נורמלית שתיארנו (ממוצע 100, סטיית תקן 15)?

הקלידו את התשובה בתיבת הטקסט. דייקו עד לשלוש ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

הגש השתמשת ב-0 מתוך 2 ניסיונות

שמור

https://www.youtube.com/watch?v=pYxNSUDSFH4

$$likelihood = \frac{1}{15 * \sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(125-100)^2}{2*15^2}} = 0.0066$$

נקודה 1 אפשרית (שלא דורגה)

3. מה הסבירות שהוא הגיע מהתפלגות שונה? (ממוצע 115, סטיית תקן של 20)?

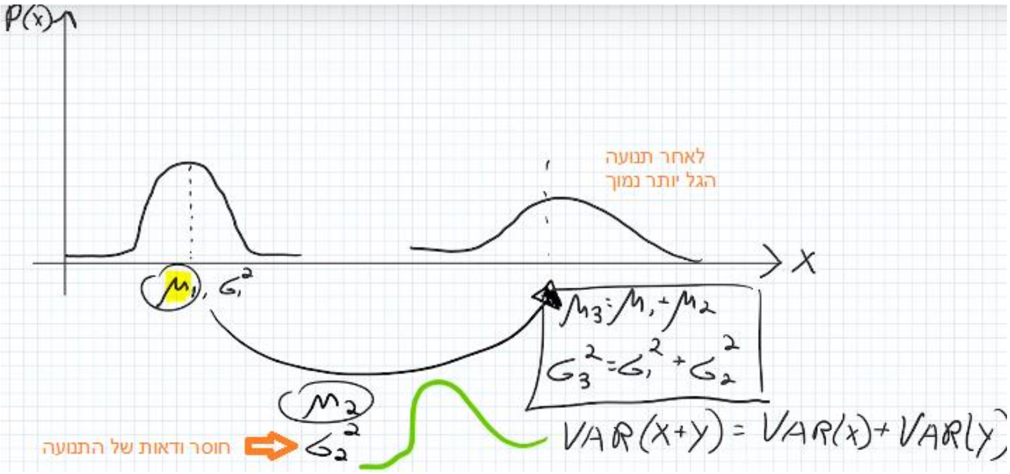
הקלידו את התשובה בתיבת הטקסט. דייקו עד לשלוש ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

מסנן קלמן בממד אחד

תזוזה אי ודאית (הכפלה)

סטיית תקן של הקבוצה (אוכלוסייה) [עריכת קוד מקור | עריכה]

סטיית התקן של הנתונים $x_1,\ldots,x_n$ היא $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$, כאשר $\bar{x}$ הוא הממוצע.



1. מיקום רובוט מתאפיין בהתפלגות נורמלית סביב X=5 מטרים עם סטיית תקן של 2 מטרים. הרובוט זז 8 מטרים ימינה. לתזוזה יש רעש גאוסי הניתן למידול כסטיית תקן של 1.7 מטרים.
א. מה המיקום החדש של הרובוט? ומה סטיית התקן החדשה שלו?
ב. לפי חוק ה-68-95-99, מה יהיה הטווח של המיקום החדש ב-95 אחוז מהמקרים?

הקלידו את התשובות בתיבות הטקסט. דייקו עד לשתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

א. ממוצע (במטרים): 13 Answer: 13 ✔
13

סטיית תקן (במטרים): 2.62 Answer: 2.62 ✔
2.62

ב. טווח מ- 7.76 Answer: 8.24 ✖
7.76

עד 18.24 Answer: 18.24 ✔
18.24

(2

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 = 2^2 + 1.7^2 = \sqrt{6.89} = 2.62 = \sigma_3$$

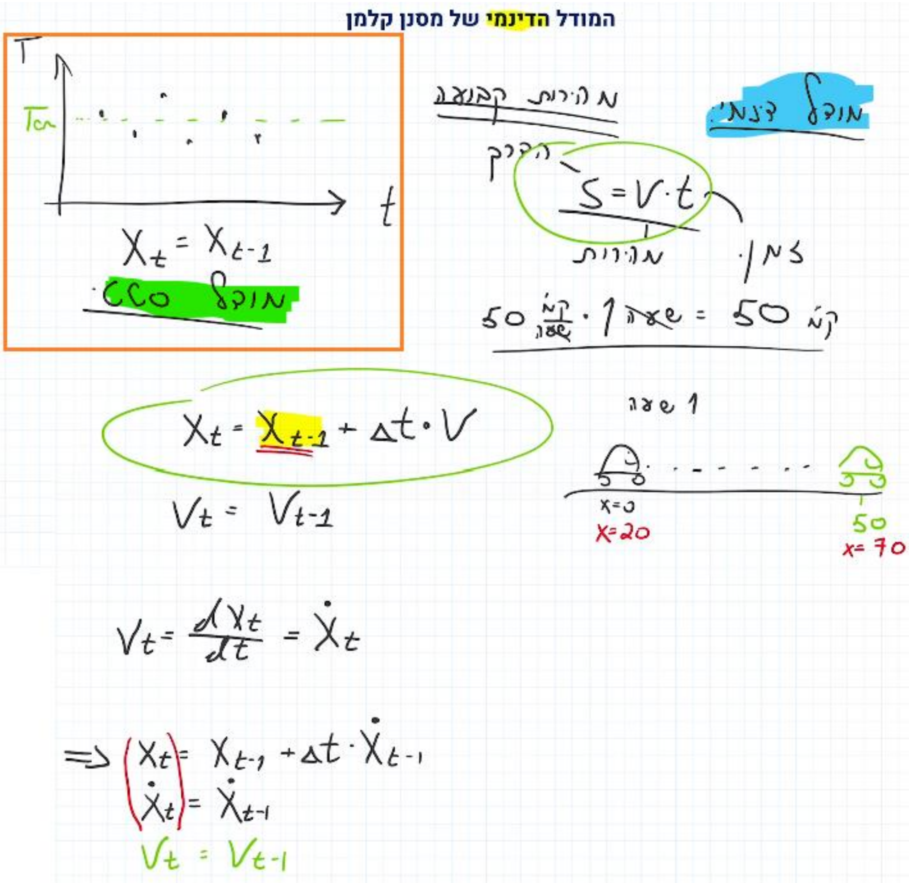
3) יש טעות באתר

$$13 - 2.62 * 2 = 7.76$$

(4

$$13 + 2.62 * 2 = 18.24$$

מדידה אי ודאית (קונבולוציה)



המודל הסטטי הוא בתוך המלבן הכתום. שאר התמונה היא מודל הדינמי

מסנן קלמן ממד אחד - מדידה אי ודאית

(3)

ערך אמיתי $[X = 50$

מדידה $\left[\begin{array}{l}\mu = 48.54 \\ \sigma^2 = 25\end{array}\right.$

שערוך $\left[\begin{array}{l}\mu = 60 \\ \sigma^2 = 225\end{array}\right.$

$$\mu_3 = \frac{(48.54 \cdot 225) + (60 \cdot 25)}{25 + 225} = 49.686$$

$$\sigma_3^2 = \frac{1}{\frac{1}{25} + \frac{1}{225}} = 22.5$$

מדידה שניה

שערוך $\left[\begin{array}{l}\mu = 49.686 \\ \sigma^2 = 22.5\end{array}\right.$

מדידה $\left[\begin{array}{l}\mu = 47.11 \\ \sigma^2 = 25\end{array}\right.$

$$\mu_4 = \frac{(49.686 \cdot 25) + (47.11 \cdot 22.5)}{22.5 + 25} = 48.465$$

$$\sigma_4 = \frac{1}{\frac{1}{22.5} + \frac{1}{25}} = 11.842$$

מדידה שלישית

שערוך $\left[\begin{array}{l}\mu = 48.465 \\ \sigma^2 = 11.842\end{array}\right.$

מדידה $\left[\begin{array}{l}\mu = 55.01 \\ \sigma^2 = 25\end{array}\right.$

$$\mu_5 = \frac{(48.465 \cdot 25) + (55.01 \cdot 11.842)}{11.842 + 25} = 50.56$$

$$\sigma = \frac{1}{\frac{1}{11.842} + \frac{1}{25}} = 8.03$$

3. רצף של 10 מדידות עוקבות נתן את הערכים האלה:

מס מדידה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
תוצאה (מטרים)	48.54	47.11	55.01	55.15	49.89	40.85	46.72	50.05	51.27	49.95

כפי שראינו בפרק, אנחנו מתחילים תמיד מניחוש ראשוני של המצב (STATE) ושל חוסר הוודאות. במקרה שלנו, ההערכה בעין היא שגובה הבניין הוא 60 מטרים.

$$\hat{x}_{0,0} = 60m$$

נניח שסטיית התקן בהערכת בני אדם היא 15 מטרים.

לכן, השונות היא 225 מטר בריבוע. $(\sigma^2 = 225)$ בכתיב משוואות קלמן:

$$p_{0,0} = 225m^2$$

א. מה יהיה קבוע קלמן ושערוך הגובה החדש לאחר המדידה הראשונה (48.54 מטרים)?
ב. מה יהיה חוסר הוודאות החדש?
ג. חזרו על סעיפים א ו-ב' לגבי המדידה השלישית.

שומר מקום

א. 51.40 Answer: 10 ✖

51.40

ב. 0.75 Answer: 10 ✖

0.75

ג. Answer: 10 ✖

מסנן אלפא

$$\hat{x}_{N,N} = \frac{1}{N}(Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_{N-1} + YN) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(Y_N)$$

כאשר:

X הוא הערך האמיתי של הטמפרטורה,

y_n המדידה ה-N מהחיישן,

$\hat{X}_{n,n}$ הוא שערוך הטמפרטורה לאחר N מדידות,

$\hat{X}_{n,n-1}$ הוא שערוך הטמפרטורה לאחר N-1 מדידות,

$\hat{X}_{n,n+1}$ השערוך לאחר N+1 מדידות.

...

$$= \hat{x}N, N-1 + \frac{1}{N}(YN - \hat{x}N, N-1) =$$

המשמעות היא שהשערוך בזמן N תלוי רק במדידת ה-N ובשערוך בזמן N-1.

The estimate of current state = Predicated value of current state + Factor * (Measurement - Predicated value of current state)

$$\hat{x}_{n,n} = \hat{x}_{n,n-1} + \alpha_n (y_n - \hat{x}_{n,n-1})$$

בדוגמה שלנו - אלפא הוא המקדם הזה.

סיכום

מסנן קלמן אינו מחייב אותנו לשמור בזיכרון את כל המדידות שעשינו עד כה. למעשה, הוא מאפשר לבחון את המדידה האחרונה ואת השערוך האחרון, ועל פי זה לגזור את כל המידע

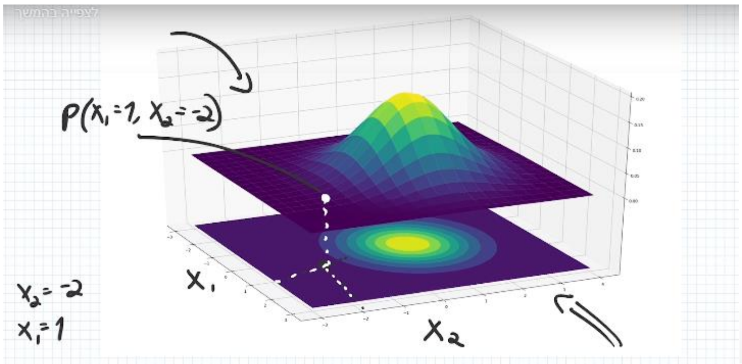
מסנן קלמן – חלק שני

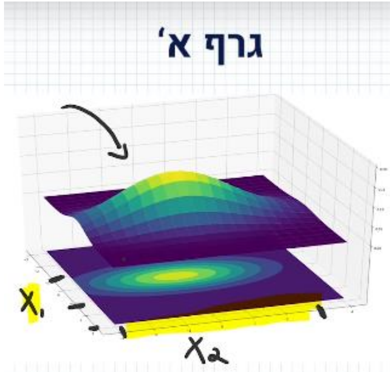
משוואות התנועה

$$a(t) = a_0$$

$$V(t) = \int_0^t a(t)dt = a_0 \cdot t + V_0$$

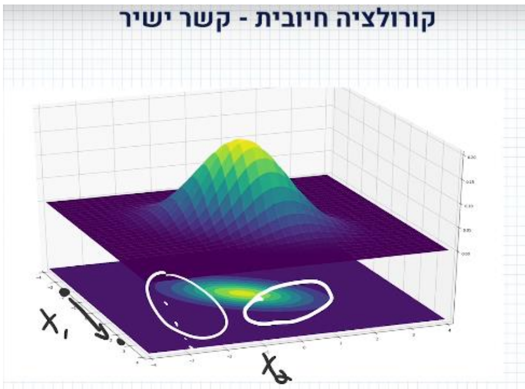
$$X(t) = \int_0^t V(t)dt = V_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a_0 \cdot t^2 + X_0$$

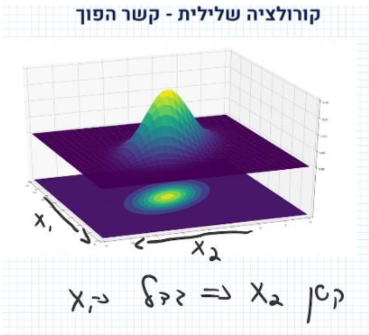




בגרף א' אין קורולציה בין x_1 ל x_2 .
אם אני יודע איפה אני ב x_1 זה לא אומר שום דבר היכן אני בx_2

לאומת זאת **בגרף הימיני** אם אני יודע שאני למעלה בx_1 זה אומר שלא יתכן שאני החלק השאמלי בx_2.
בנוסף אם יש ***קורולציה חיובית-*** אם x_1 עולה אז גם x_2 עולה



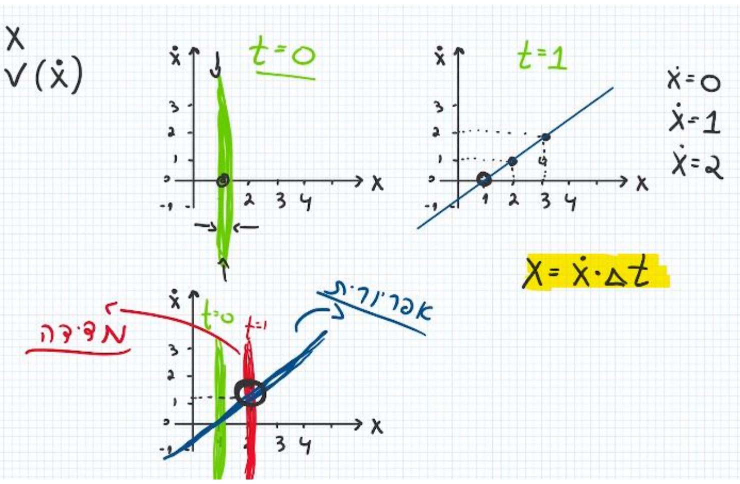


===

V = X dot or הוא הנגזרת של המיקום בזמן

X = המיקום

למרות שאני לא יכול למדוד $\dot{x}$ מכיוון שיש קורוצליה לינארית בין x dot וגם x אני יכול להסיק איפה $\dot{x}$



covariance- זה הקשר בין 2 varianceים אם
ה covariance = 0 זה אומר שאין קשר בניהם

	אנגלית	חשבון
א	60	73
ב	88	80
ג	50	47
ד	100	92
ה	95	88

$$\sigma_x\sigma_y = \frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x}-x_i)(\bar{y}-y_i)}{N}$$

מטריצת ה
variance covariance

$$P = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_x\sigma_y \\ \sigma_y\sigma_x & \sigma_y^2 \end{bmatrix}$$

כמה מימדים

$$\boxed{\mu, \sigma^2} \Longrightarrow \mu, \Sigma \qquad \mu = \begin{bmatrix} \text{מיקום} \\ \text{מהירות} \end{bmatrix} \begin{matrix} x \\ v \end{matrix}$$

מימד אחד

$$P = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_x\sigma_y \\ \sigma_y\sigma_x & \sigma_y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_x\sigma_v \\ \sigma_v\sigma_x & \sigma_v^2 \end{bmatrix}$$

א) ריבועית
ב) סימטרית

ncalculators.com/statistics/covariance-calculator.htm

ncalculators.com

HOME PRE-AL

Covariance Calculator

settings sample random add to notes

Dataset set y

0.2, 0.3, 6, 3, 21, 33, 10

comma separated input values

Number of samples = 7

Mean μ_X = 14.7857

Mean μ_Y = 10.5

Covariance σ_{XY} = 188.65

1. נתונות שתי סדרות המספרים שלהלן:
X1 = [2,3,4,10,22,55,7.5]
X2 = [0.2,0.3,6,3,21,33,10]
חשב את הקווריאנס של 2 המשתנים.

הקלידו את התשובה בתיבת הטקסט.

(המספר הוא סקלר)
Answer: 3.6 ✖ | 188.65

188.65

$$\sigma_x\sigma_y = \frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x}-x_i)(\bar{y}-y_i)}{N}$$

הרעיון של משוואות התנועה

מהירות קבועה

$$V(t) = V_0$$

$$X(t) = \int_0^t V(t)dt = V_0 \cdot t + X_0$$

תאוצה קבועה

$$a(t) = a_0$$

$$V(t) = \int_0^t a(t)dt = a_0 \cdot t + V_0$$

$$X(t) = \int_0^t V(t)dt = V_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a_0 \cdot t^2 + X_0$$

$$5 * 11 + 14 = 69$$

1. רכב נוסע במהירות קבועה של 5 מטר בשנייה. נניח שהרכב התחיל את הנסיעה שלו ב X=14, מה יהיה המיקום שלו לאחר 11 שניות?

הקלידו את התשובה בתיבת הטקסט.

מטר 69 ✔

69

$$100 = \frac{4.5}{2} * t^2 + 0$$

ה $v_0 t = 0$ כי אין מהירות התחלתי

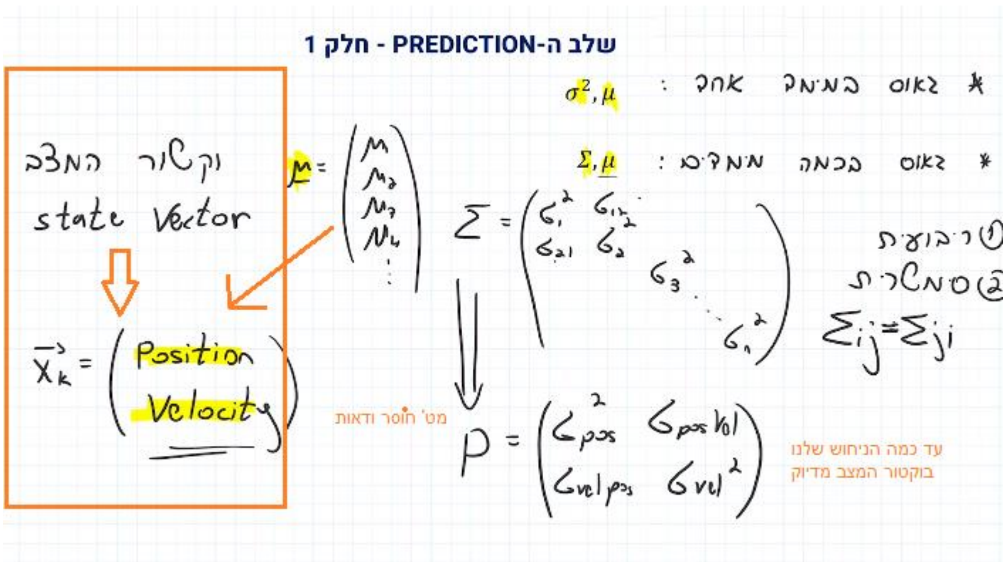
2. רכב עומד בנקודה X=0 ומאיץ בתאוצה של 4.5 מטר בשנייה בריבוע. לאחר כמה זמן יגיע הרכב לנקודה X=100?

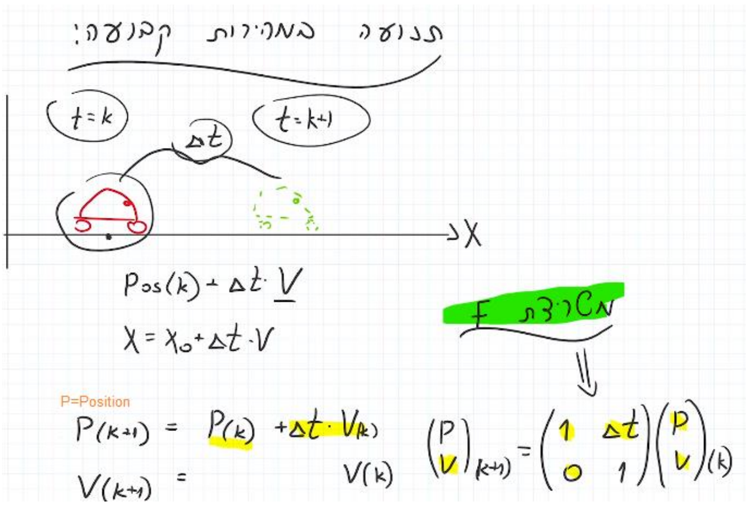
הקלידו את התשובה בתיבת הטקסט.

שניות 6.66 Answer: 6.6

6.66

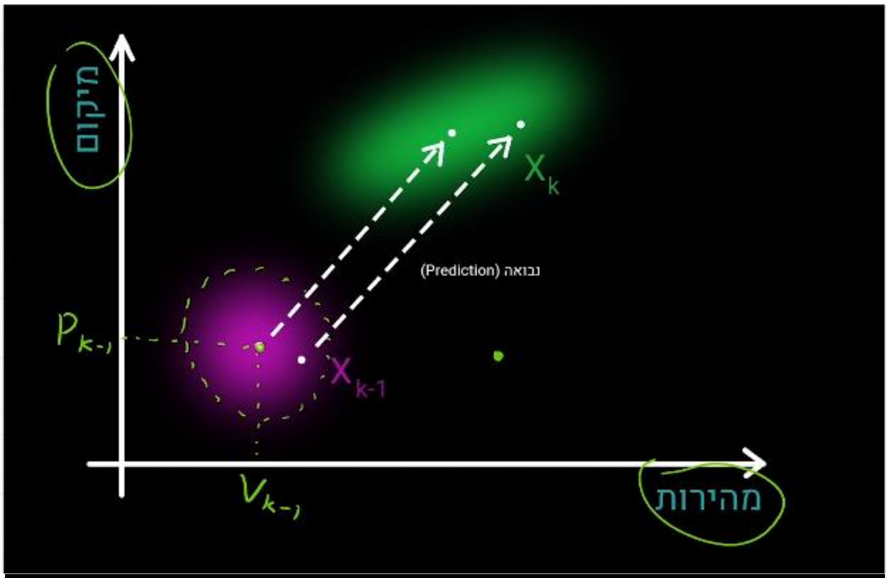
שלב ה – Prediction

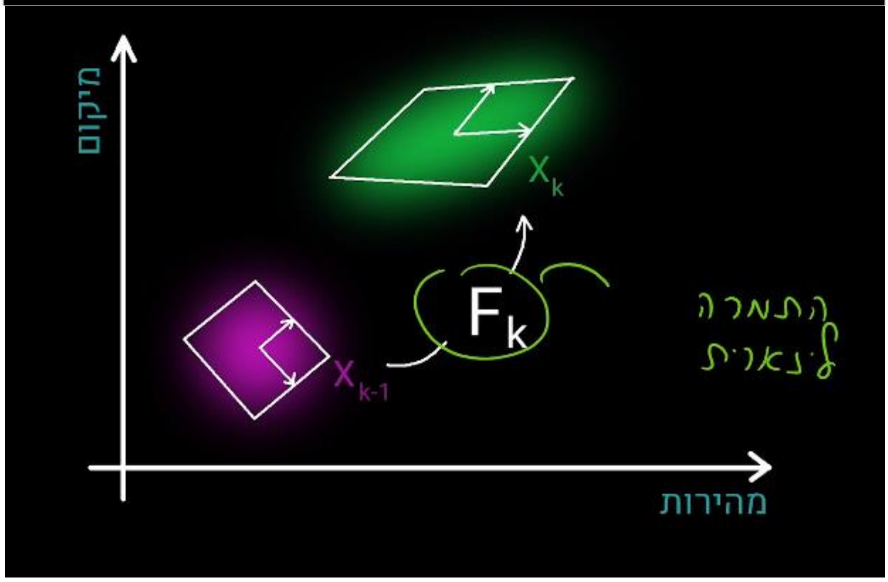




כל נקודה בסגול שהוא ב x_{k-1} אנו מעבירים אותה לx_k לשלב הניבוי

אם המודל הוא ליניארי או שבעצם ניתן לכתוב אותו בסט של משוואת אפשר לעשות מעבור במטריצה **במטריצת המעבר F**





איך נמצא את P_{k+1}, כלומר מט' חוסר הוודאות הבא?

מט' חוסר ודאות

$$P = \begin{pmatrix} \sigma_{pos}^2 & \sigma_{pos\,vel} \\ \sigma_{vel\,pos} & \sigma_{vel}^2 \end{pmatrix}$$

עד כמה הניחוש שלנו בוקטור המצב מדויק

$$X_{(k+1)} = F \cdot X_{(k)}$$

$$P_{(k+1)} = F \cdot P_k \cdot F^T$$

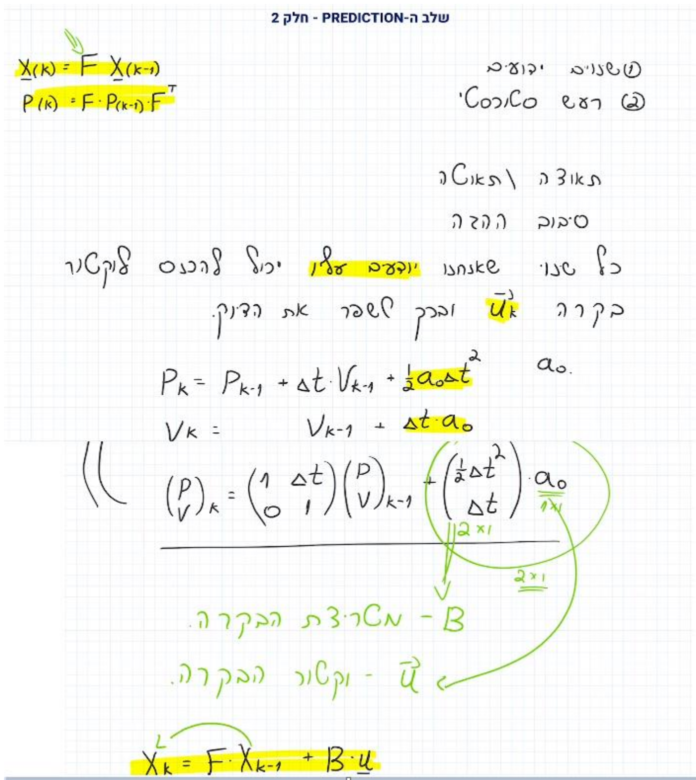
A = מטריצת F

ונשתמש בחוק של הcov(Ax)

<u>מה הקשר ב cov כאן, עדיין לא יודע?</u>

$$Cov(\underline{x}) = \Sigma$$

$$Cov(A \cdot \underline{x}) = A \cdot \Sigma \cdot A^T$$

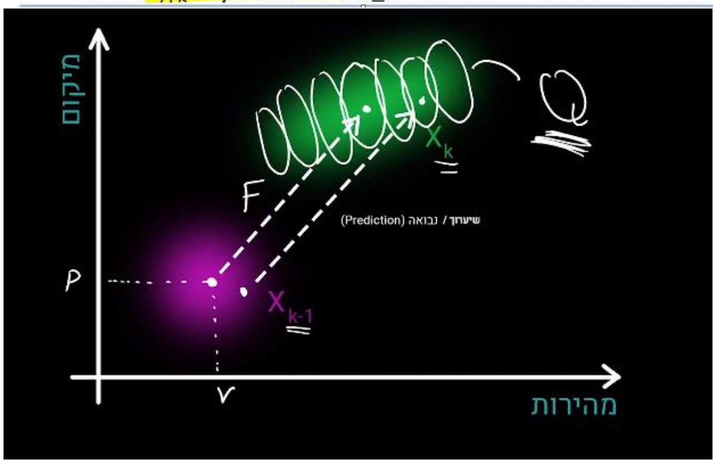


כאן יש לנו שינוים ידועים כמו תאוצה קבועה.

אין כאן הוספת רעש כי הרעש מתפלג לסביב ה0. הרעש יבוא לידי ביטוי במט' P

a_0 הוא וקטור הבקרה . הווקטור של $t^2 and\ t$ הוא מט' הבקרה B

רעש סטוכסטי – רעשים של יודעים מה הם אבל משפיעים עלינו



כל נקודה לא עוברת ישירות מהסגול אלא היא זזה בעיגול מסביב בעקבות חוסר ודאות

Q – מוסיפה חוסר ודאות בתזוזה (כמו ראינו במסנן קלמן במימד 1)

במה שונה Q מאשר P שהיא $F * P_k * F^T$?
התשובה היא שP זה חוסר ודאות בוקטור המצב וכאן אנו מוסיפים Q שהוא חוסר ודאות בתזוזה

משוואות הסופיות שלנו:

$$\text{I}\quad \hat{\mathbf{x}}_k = \mathbf{F}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{B}_k \vec{\mathbf{u}_k}$$
$$\text{II}\quad \mathbf{P}_k = \mathbf{F}_k \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{F}_k^T + \mathbf{Q}_k$$

I In other words, the **new best estimate** is a **prediction** made from **previous best estimate,** plus a **correction** for **known external influences**.

II And the **new uncertainty** is **predicted** from the **old uncertainty**, with some **additional uncertainty from the environment.**

$$\begin{pmatrix} x+\Delta t * \dot{x} \\ y+\Delta t * \dot{y} \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \Delta T & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \Delta T \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ \dot{X} \\ \dot{Y} \end{pmatrix}$$

1. הנח מודל מהירות קבועה. איך תיראה מטריצת F כאשר וקטור המצב נראה כך והמערכת נדגמת כל T שניות?

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ \dot{X} \\ \dot{Y} \end{pmatrix}$$

מה הם הערכים של X, Y, Z במטריצה?

$$\begin{pmatrix} 1 & \boxed{X} & \Delta T & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \boxed{Z} \\ 0 & 0 & \boxed{Y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

סמנו את התשובה הנכונה.

- X=0, Y=1, Z=0
- X=0, Y=ΔT, Z=0
- X=ΔT, Y=1, Z=1
- ✔ X=0, Y=1, Z=ΔT

2. הנח מודל עם תאוצה קבועה בשני ממדים, והתאוצה היא חלק מווקטור המצבים. איך תיראה מטריצת F במקרה זה?

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \ddot{X} \\ \ddot{Y} \end{pmatrix}$$

מה הם הערכים של X, Y, Z, W במטריצה?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \Delta T & 0 & \frac{1}{2}\Delta T^2 & 0 \\ 0 & \boxed{X} & 0 & \Delta T & 0 & \frac{1}{2}\Delta T^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \Delta T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{Y} & 0 & \boxed{W} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{Z} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

סמנו את התשובה הנכונה.

- X=0, Y=1, Z=0, W=ΔT
- ✔ X=1, Y=1, Z=0, W=ΔT

3. נניח שהתאוצה חיצונית לווקטור המצב והיא פועלת רק בציר X.

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ \dot{X} \\ \dot{Y} \end{pmatrix}$$

$$X_t = X_{t-1} + \Delta T * \dot{X}_{t-1} + \frac{1}{2} ax^2$$
$$Y_t = Y_{t-1} + \Delta T * \dot{Y}_{t-1}$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \Delta T & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \Delta T \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U = ax$$

נתונה מערכת: התנועה היא בשני ממדים, וקיימת תאוצה בכל ציר.
וקטור המצב נראה כך:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ \dot{X} \\ \dot{Y} \end{pmatrix}$$

וקטור U נראה כך:

$$\begin{pmatrix} ax \\ ay \end{pmatrix}$$

ב. מה הם הערכים של X, Y, Z במטריצה?

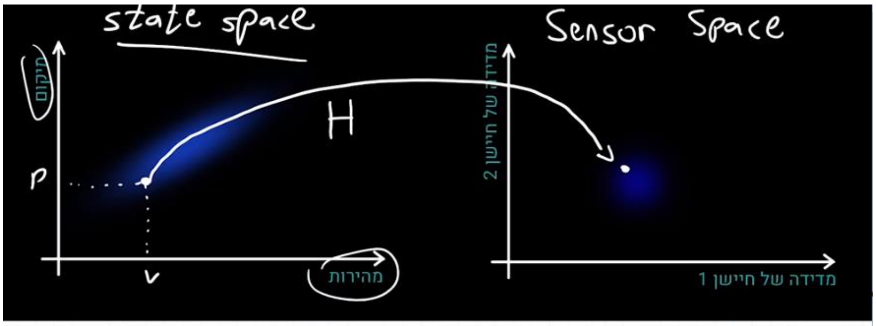
$$\begin{pmatrix} \frac{\Delta T^2}{2} & 0 \\ \boxed{X} & \frac{\Delta T^2}{2} \\ \boxed{Z} & 0 \\ 0 & \boxed{Y} \end{pmatrix}$$

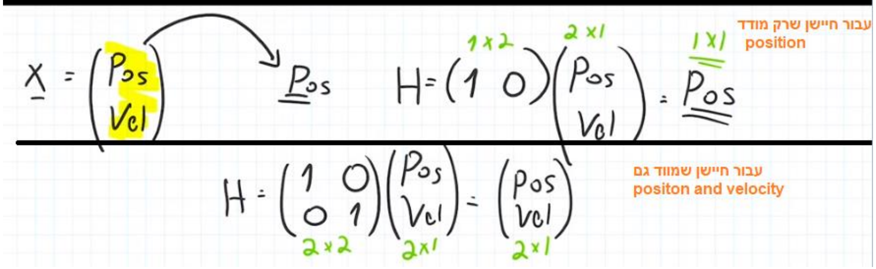
סמנו את התשובה הנכונה.

- ✔ X=0, Y=ΔT, Z=ΔT

שלב ה – *Measurement*

לא תמיד יש בחיישן שלי את כל הנתונים שיש בוקטור המצב – state vector

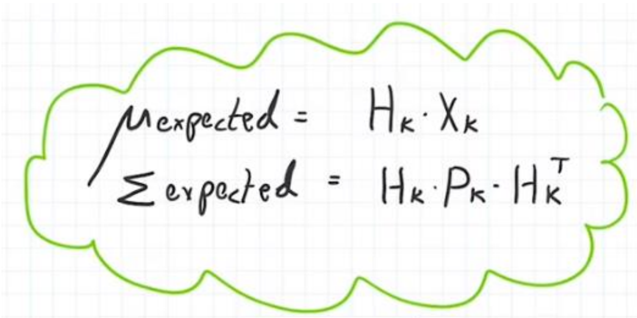




ההתמרה ***H*** מעביר מ *state space* למרחב החיישן (*sensor space*). כמובן שהוא צריך להיות ליניארי.

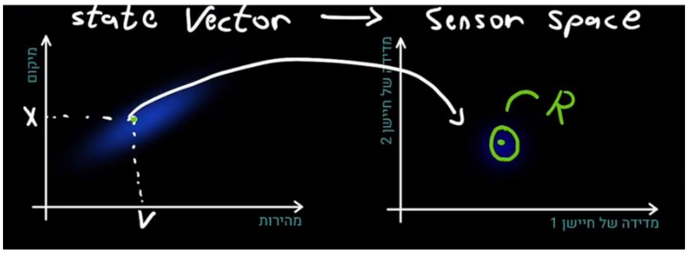
H הוא בעצם מטריצה

X_k and P_k – מגיעים מהשלב הקודם



$$\hat{\mathbf{x}}_k = \mathbf{F}_k\hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{B}_k\vec{\mathbf{u}_k}$$
$$\mathbf{P}_k = \mathbf{F}_k\mathbf{P}_{k-1}\mathbf{F}_k^T + \mathbf{Q}_k$$

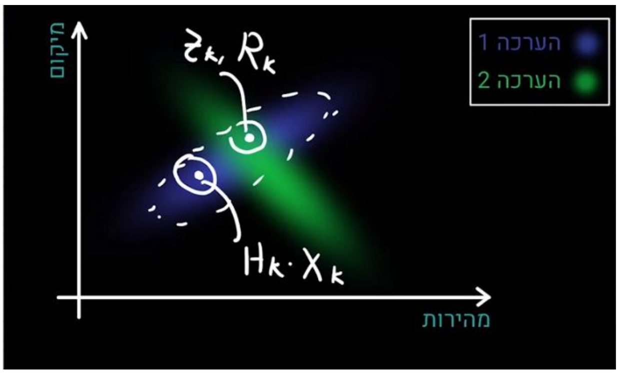
מטריצת ***R*** – הרעש של החיישן



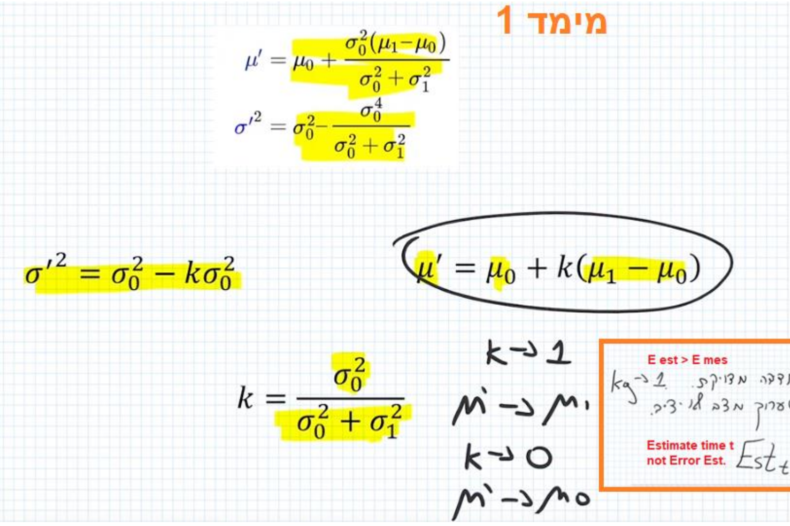
הנקודה שמאלית בעיגול הוא מווקטור המצב למרחב החיישן- זה בעצם *איפה אני חשבתי שאני אמור להיות*

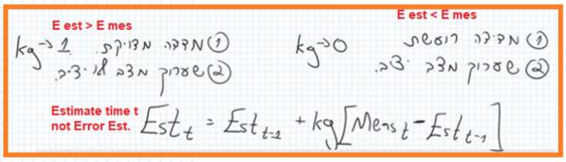
הנקודה הימנית בעיגול הוא מדידה במרחב החיישן כאשר Z_k הוא המדידה, וR_k הוא הרעש. זה בעצם *איפה אני אמור להיות*

See Math Above



הKalmain Gain במימד 1

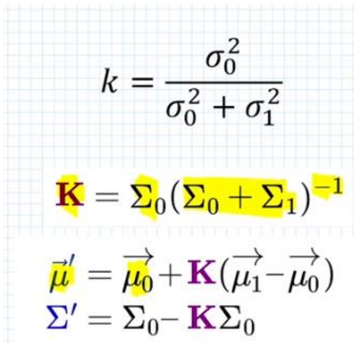




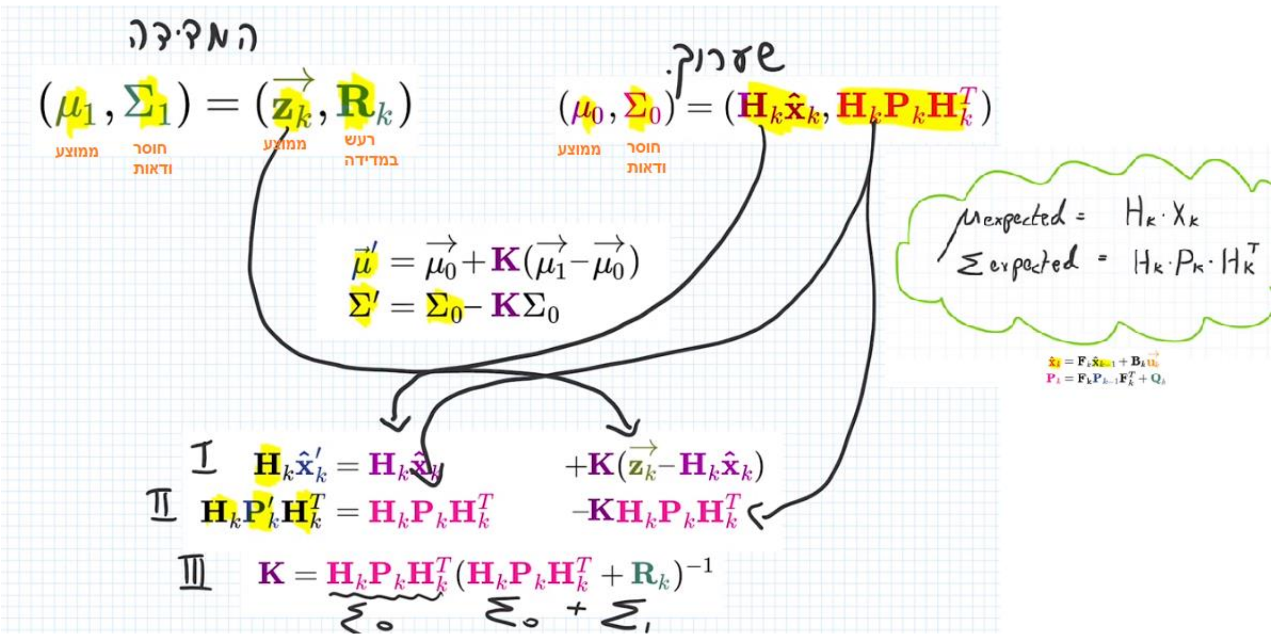
הKalman Gain ב2 מימדים

הΣ (חוסר ודאות) כאן הוא בעצם σ^2 כמו במימד 1 רק כאן הוא ווקטור

הK (Kalman gain) הוא גם כמו k במימד 1, רק כאן הוא וקטור

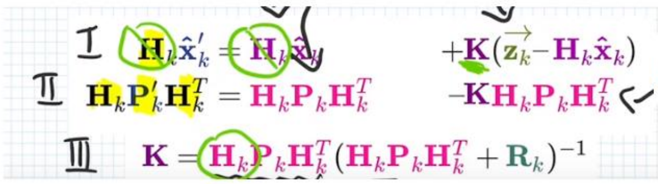


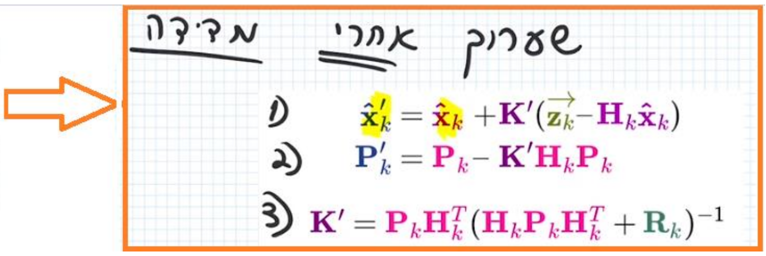
נעביר למרחב החיישן



נחזיר למרחב המצב

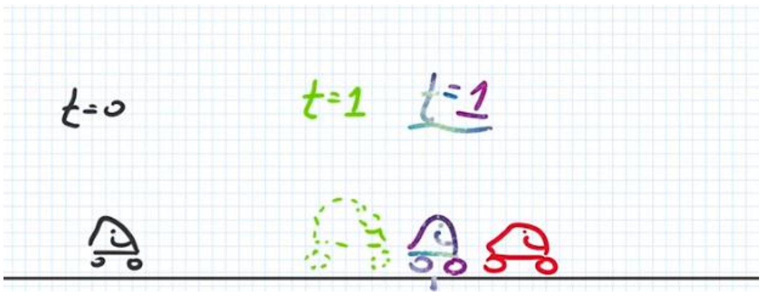
נצמצם את H_k בנוסחא הקודם ונקבל





כי בעצם אנו רוצים לדעת מה קורה אצלנו לא מעניין מה קורה במרחב החיישן.

משמעות המשוואות האלו



הירוק הוא ה*prediction* שלי

האדום הוא המדידה שלי

הרכב סגלגל – הוא כנראה היכן אני באמת נמצא (כפל גאוסיאנית בין הירוק והאדום). זה השערוך החדש שבו נשתמש בשערוך הבא

שאלות

1. נניח שווקטור המצב נראה כך:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ \dot{X} \end{pmatrix}$$

ויש לי חיישן היכול למדוד את הנתון X+Y.
איך תיראה מטריצת H?

$$H = (X \quad Y \quad Z)$$

סמנו את התשובה הנכונה.

- X=0, Y=1, Z=ΔT
- X=0, Y=1, Z=0
- ✔ X=1, Y=1, Z=0

$$(X + Y) = (1 \quad 1 \quad 0)\begin{pmatrix} X \\ Y \\ \dot{X} \end{pmatrix}$$

2. בהנחה שווקטור המצב מכיל מיקום ומהירות בשני צירים, ויש לי חיישן המספק מדידה עבור מיקום בציר X ומיקום עבור ציר Y - איך תיראה מטריצת H?

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ \dot{X} \\ \dot{Y} \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} X & 0 & Z & 0 \\ 0 & Y & 0 & W \end{pmatrix}$$

סמנו את התשובה הנכונה.

- X=0, Y=1, Z=1, W=1
- ✔ X=1, Y=1, Z=0, W=0

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ \dot{X} \\ \dot{Y} \end{pmatrix}$$

1. נתונים הפרמטרים האלה:

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} PositionX \\ PositionY \\ VelocityX \end{pmatrix}$$

נתונים:

V0X = 280 m/sec X0 = 4000m
Voy = 120 m/sec Yo =3000m

Observations:
1. Xo = 4000m, Vox =280 m/sec
2. X1 = 4260m V1x = 282 m/sec
3. X2 = 4550m V2x = 285m/sec

Accelerations:
Ax = 2 m/s*s delta t = 1 sec
Vx = 280 m/s delta X = 25 m

Procees Error:
Delta P = 20m
deltaPvx = 5 m/s

Observation Error:
Delta x == 25 m
Delta vx = 6 m/s

א. וקטור המצב בנקודה 0 נראה כך: $\begin{pmatrix} X_0 \\ Vx_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4000 \\ 280 \end{pmatrix}$. חשבו את וקטור המצב לאחר שלב ה-Prediction.
ב. חשבו את מטריצת קלמן.
ג. חשבו את המיקום המשוערך לפי המדידה.
ד. חשבו את המיקום הסופי ואת מטריצת P הסופית.
ה. חזרו על סעיפים 1-4 עבור t=2.

נתונים

וקטור המצב המוגדר $X = \begin{pmatrix} PosX \\ PosY \\ VelX \end{pmatrix}$

א וקטור המצב ההתחלתי: $\begin{pmatrix} PosX \\ VelX \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4000 \\ 280 \end{pmatrix}$

וקטור המצב לאחר שלב ה- Prediction:

$$X = F \cdot X + u = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{F} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 4000 \\ 280 \end{pmatrix}}_{X_{t-1}} + \overbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\Delta t^2 \\ \Delta t \end{pmatrix}}_{B_{t-1}} \cdot (2)}^{u} = \begin{pmatrix} 4281 \\ 282 \end{pmatrix}$$

$\Delta t = 1$
(תאוצה של Ax)

ב $$P = F \cdot P_{t-1} \cdot F^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}}_{P_{t-1}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

* אין Q כי לא נתון שום שינויים סטוכסטיים במערכת

ג
- $$y = z - Hx \rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 4260 \\ 282 \end{pmatrix}}_{\text{המדידה } X_t} - \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{H} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 4281 \\ 282 \end{pmatrix}}_{\text{X שקיבלנו}} = \begin{pmatrix} -21 \\ 0 \end{pmatrix}$$
- $$S = H P_{t-1} H^T + R \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 25 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 & 5 \\ 5 & 11 \end{pmatrix}$$

R: הרעש של המדידות (observation error)

S.inverse

- $$K = P_{t-1} \cdot H^T \cdot S^{-1} = \begin{pmatrix} 25 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{11}{525} & -\frac{1}{105} \\ -\frac{1}{105} & \frac{2}{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{21} & \frac{5}{21} \\ \frac{2}{35} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$$
- $$X = X_{t-1} + K \cdot y = \begin{pmatrix} 4281 \\ 282 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{10}{21} & \frac{5}{21} \\ \frac{2}{35} & \frac{3}{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -21 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4271 \\ \frac{1404}{5} \end{pmatrix}$$

$$P = (I - K \cdot H) \cdot P_{t-1} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{10}{21} & \frac{5}{21} \\ \frac{2}{35} & \frac{3}{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 25 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{250}{21} & \frac{10}{7} \\ \frac{10}{7} & \frac{18}{7} \end{pmatrix}$$

המיקום המשוערך לאחר המדידה יהיה:

$$X = F \cdot X + u = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4271 \\ \frac{1404}{5} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{22764}{5} \\ \frac{1414}{5} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4552.8 \\ 282.8 \end{pmatrix}$$

* כמו שרואים, אחרי השערוך הערכים של X דומים מאוד למדידה הבאה (מדידה 3 ← $V_{2x} = 285$, $X_2 = 4550$

ד מטריצת P הסופית תהיה:

$$P = F \cdot P \cdot F^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 25 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 & 10 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}$$

* השונות המשותפת של המהירות והמיקום גדלה ל-10
* סטיית התקן של המיקום גדלה ל-40 בעוד סטיית התקן של המהירות נשארה 5

https://www.youtube.com/watch?v=fwM66qohrJ8

① THE PREDICTED STATE

$$X_{k_p} = A X_{k-1} + B u_k + w_k$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_0 \\ v_{0x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\Delta t^2 \\ \Delta t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{x_0} \end{bmatrix} + 0$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4000 \\ 280 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4280 \\ 280 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$X_{k_p} = \begin{bmatrix} 4281 \\ 282 \end{bmatrix}$$

GIVEN: $v_{0x} = 280\,m/sec$, $X_0 = 4000\,m$; $v_{0y} = 120\,m/sec$, $y_0 = 3000\,m$

OBSERVATIONS

$X_0 = 4000\,m$ $\quad v_{0x} = 280\,m/sec$
$X_1 = 4260\,m$ $\quad v_{1x} = 282\,m/sec$
$X_2 = 4550\,m$ $\quad v_{2x} = 285\,m/sec$
$X_3 = 4860\,m$ $\quad v_{3x} = 286\,m/sec$
$X_4 = 5110\,m$ $\quad v_{4x} = 290\,m/sec$

INITIAL CONDITIONS

$a_x = 2\,m/sec^2$ $\quad \Delta t = 1\,sec$
$v_x = 280\,m/sec$ $\quad \Delta X = 25\,m$

PROCESS ERRORS IN PROCESS COVARIANCE MATRIX

$\Delta P_x = 20\,m$
$\Delta P_{v_x} = 5\,m/sec$

OBSERVATION ERRORS

$\Delta X = 25\,m$
$\Delta v_x = 6\,m/sec$

$\Delta x = 20\,m$
$\Delta v_x = 5\,m/sec$

$$P_{k-1} = \begin{bmatrix} \Delta x^2 & \Delta x \Delta v \\ \Delta x \Delta v & \Delta v_x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 & 100 \\ 100 & 25 \end{bmatrix}$$

$$P_{k-1} = \begin{bmatrix} 400 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix}$$

$$P_{k_p} = A P_{k-1} A^T + Q_k$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 400 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \Delta t & 1 \end{bmatrix} + 0$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 400 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 400 & 25 \\ 0 & 25 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 425 & 25 \\ 25 & 25 \end{bmatrix}$$

$$K = \frac{P_{k_p} H^T}{H P_{k_p} H^T + R}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} 425 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 425 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 625 & 0 \\ 0 & 36 \end{bmatrix}}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} 425 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 425 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 625 & 0 \\ 0 & 36 \end{bmatrix}} = \frac{\begin{bmatrix} 425 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1050 & 0 \\ 0 & 61 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0.405 & 0 \\ 0 & 0.410 \end{bmatrix}$$

$$P_k = (I - KH) P_{k_p}$$

$$K = \begin{bmatrix} 0.405 & 0 \\ 0 & 0.410 \end{bmatrix} \qquad P_{k_p} = \begin{bmatrix} 425 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix}$$

$$P_k = \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.405 & 0 \\ 0 & 0.410 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix} 425 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix}$$

$$P_k = \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.405 & 0 \\ 0 & 0.410 \end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix} 425 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix}$$

$$P_k = \begin{bmatrix} 0.595 & 0 \\ 0 & 0.590 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 425 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix}$$

$$P_k = \begin{bmatrix} 253 & 0 \\ 0 & 14.8 \end{bmatrix}$$

$$X_k = X_{k_p} + K\left[Y_k - H X_{k_p}\right] \qquad K = \begin{bmatrix} 0.405 & 0 \\ 0 & 0.410 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4281 \\ 282 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.405 & 0 \\ 0 & 0.410 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 4260 \\ 282 \end{bmatrix} - \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{2\times 2}\underbrace{\begin{bmatrix} 4281 \\ 282 \end{bmatrix}}_{2\times 1}\right)$$

$$X_{k_p} = \begin{bmatrix} 4281 \\ 282 \end{bmatrix} \qquad Y_k = \begin{bmatrix} 4260 \\ 282 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4281 \\ 282 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.405 & 0 \\ 0 & 0.410 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -21 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4281 \\ 282 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8.5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$X_k = \begin{bmatrix} 4272.5 \\ 282 \end{bmatrix}$$

יישום וסיכום

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\ Y\\ Velx\\ Vely\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}X & 2V_x & 3Y & -5V_y\end{pmatrix}$$

3. נניח שיש לי חיישן מוזר אשר מודד את הפרמטר הזה: X+2Vx+3Y-5Vy.
א. מה הם הממדים של מטריצת H?

סמנו את התשובה הנכונה.

- 4X2
- 2X4
- 4X1
- 1X4 ✖

ב. איך תיראה מטריצת H שלו?

הקלידו את התשובה בתיבת הטקסט. הספרה השמאלית מייצגת את השורה במטריצה, והספרה השמאלית – את העמודה שבה.

ב. (5- ✖ , 2 ✔ , 3 ✔ , 1 ✔)

-5 , 2 , 3 , 1