# הגדרות

# תוכן עניינים

3	ונות טיורינג	0.1 מכו
3	מכונת טיורינג	.1.1
3		.1.2
4	3.1 הגדרה $3.1$ :(קונפיגורציה):	.1.3
4	3.2 (צעד חישוב של מ"ט) אנדרה (צעד חישוב של מ"ט) פוני	1.4
4	$\dots \dots f_M$ שמ"ט מחשבת): מגדרה $3.3$ (הפונקציה $f_M$ שמ"ט מחשבת).	.1.5
5	0. הפונ $'$ האוניברסלית $U$ הפונ $'$ האוניברסלית 0.	1.6
5	$q_{acc}$ נאמר שמ"ט מקבלת מילה $x \in \sum^*$ אם $M$ בריצתה על $x$ עוצרת במצב $3.4$	.1.7
5	3.5 השפה של מ"ט $3.5$ השפה של מ"ט	1.8
5	RE:3.6 הגדרה 0.	1.9
5	R:3.7 הגדרה $R:3.7$	.10
5	$core{}$	11
5	coRE של $II~4.5$ הגדרה $II~4.5$	12
5	0.1 הגדרה: שפות הלכסון	13
6	5.1 השפה האוניברסלית:	.14
6	-קוציות	0.2
	$f:\sum^*  o \sum^*$ נאמר שפונקציית רידוקציה: בהנתן זוג שפות $L_1,L_2 \subseteq \sum^*$ נאמר שפונקציית רידוקציה: 0.	.2.1
6	היא פונקציית רידוקציה בין זוג השפות אם היא מקיימת:	
6	$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots L_{eq} = \left\{ \left\langle M_1 \right angle  , \left\langle M_2  ight angle    L\left(M_1 ight) = L\left(M_2 ight)  ight\}  : 7.1$ הגדרה 0.	.2.2
6	Ra	<i>ice</i> 0.3
	נאמר ש $S$ טריויאלית אםם , $S\subseteq RE$ היא תת קבוצה היא תצפות ב פפות שפות ב $RE,S$ היא היא תח	.3.1
6	$\ldots \ldots \ldots S \in \{RE, \phi\}$	
6	$L_{arepsilon}=\{\langle M angle \   { m M\ accept\ } arepsilon\}$ דוגמה 1: נגדיר $C=\{\langle M angle \   { m M\ accept\ } arepsilon\}$ דוגמה 1: נגדיר	.3.2
6	$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots $ $L'_{arepsilon} = \{\langle M \rangle     ext{M doesnt accept } arepsilon \}  otin R $	.3.3
6	$\ldots \ldots L$ " $_{arepsilon}=\{\langle M \rangle    { m M  reject  } arepsilon \}$	3.4
6	ט אי־דרמינסטיתט אי־דרמינסטית	0.4 מ״י
	מכונת טיורינג אי־דטרמינסטית תוגדר כמו מ"ט דטרמניסטית, אלא ש $\delta$ תאפשר בכל צעד בדיוק 0.	4.1
6	שתי בחירות במקום בחירה אחת. כלומר:	
		4.2
7	$\ldots$ בו $M$ עוצרת ב $q_{acc}$ (יתכנו מסלולים אחרים בהם היא עוצרת ב $q_{rej}$ או לא עוצרת $x$	
7		4.3
7	בוכיות	
_		.5.1
7	חלקית מוגדרת כך:	
-		.5.2
7	$tm(x) \leq t( x )$ ບ	

	נאמר ש $M$ (מ"ט דטר $\prime$ ) היא יעילה או פולינומית אם קיים עבורה חסם זמן ריצה $p(n)$ שהוא	0.5.3	
7	$\ldots \ldots$ פולינום (בה"כ נתן להניח ש $c,d$ * ( $p(n)=c\cdot n^d$ קבועים		
7	$\dots \dots P = \{ \ L \mid L$ הגדרה: $\{$ קיימת מ"ט דטרמיסטית יעילה המכריעה את	0.5.4	
7	$\ldots \ldots$ יימת מ"ט דטר' יעילה המחשבת את את ארך או ארר ארר א דטר' פיימת מ"ט דטר' יעילה ארר את $\{f \mid f \mid f$	0.5.5	
7	$\dots \dots M$ מ"ט א"ד נאמר ש $tm(x)$ היא פונק׳ זמן הריצה של M מ"ט א"ד נאמר ש	0.5.6	
7	$\ldots \ldots \{L \mid L$ קבוצת השפות שקיימת מ"ט א"ד יעילה המקבלת את $\{L \mid L \mid L$	0.5.7	
7	$\dots \dots R \subseteq \sum^*  imes \sum^*$ נאמר ש $R \subseteq \sum^*  imes \sum^*$ הוא יחס $R \subseteq N$ אם הוא מקיים ו	0.5.8	
8	$factory = \{(x,k)    y \neq 1 $ וכן $k \leq y < x$ המקיים $x,k \in \mathbb{N}^+\}$	0.5.9	
8	$conP = \left\{L \overline{L} \in NP ight\}$ :10.1 הגדרה	0.5.10	
8	. :הא $L_2$ ל ב $L_1$ הגדרה $10.2$ : יהיו שפות, נאמר ש $f$ היא פונקציית רידוקציה פולינומית מ	0.5.11	
8	1המחלקה $NPC$ היא קב' כל השפות $1$ המקיימות: המחלקה	0.5.12	
8	$\dots \dots $		0.6
8	$\dots\dots\dots$ : $BH-Bounded\ Halting$ הגדרה $11.4$ : השפה	0.6.1	
	היא פסוקית , $\varphi\left(x ight)=igwedge_{i=1}^{m}C_{i}$ אם: $CNF$ היא פסוקית נאמר שפסוק לוגי $arphi$ הוא בצורת	0.6.2	
8	$CNF$ בלומר מהצורה $C_i = igvee_{j=1}^{h_i} l_i$ כלומר מהצורה רה		
8	Vertex color השפה 12.1 השפה	0.6.3	
8	$\dots \dots $	0.6.4	
8	$\dots$ הגדרה $12.3$ השפה $Set\ cover$ השפה	0.6.5	

#### 0.1 מכונות טיורינג

#### 0.1.1 מכונת טיורינג

מגודרת ע"י שביעיה:

- קב' סופית של מצבים Q ullet
  - מצב התחלתי  $q_0$
  - א"ב הקלט ∑ •
  - א"ב העבודה  $\Gamma$
  - ל מצבים סופיים
- קב' של מצביים סופיים (תפקיד שונה מאוטומט מחסנית F ullet
  - פונקציית מעברים  $\delta$

ל־ים (מסמן לנו סרט אינסופי לימין את סוף הקלט)

נזכר שבאוטומט מחסנית לא היה צריך את זה כי בכל רגע דרשנו לתת את הפלט הנכון עבור הרישא שקראנו.  $\delta\left(Q\backslash F\right)\times\Gamma\to Q\times\Gamma\times\{L,S,R\}$  מהלך החישוב: מוגדר ע"י  $\delta$ . בכל צעד מבצעים "מהלך" לפי  $\delta$  מהלך החישוב: מוגדר ע"י מהלך מבצעים "מהלך" מהלך" לפי  $\delta$ 

- מצב נוכחי Q
- תו המוצבע ע"י הראש  $\Gamma$  •
- מצב חדש א מצב ע"י הראש במקום שכותבים שכותבים תו =  $Q \times \Gamma$
- . בסוף הצעד: left (Left, Stay, Right) קורה בסוף הצעד  $\bullet$

. סיום החישוב: אם מגיעים למצב השייך לF החישוב מיד עוצר והפלט שלו (על הקלט imes שלו) מוגדר כתוכן הסרט משמאל לראש. אם לא עוצרים אף פעם , אז הפלט על אותו קלט לא מוגדר.

(מותר ש  $\delta_M$  לא תהיה מגודרת על קלטים מסוימים) היא פונקציה הא היא  $\delta_M:\sum^* o\Gamma^*$  , מחשבת M מחשבת כלומר הפונקציה א

הגדרה: מודל חישובי הוא מיפוי

$$\mathbb{M}: \sum^* o \delta: \sum_1^* o \sum_2^*$$
 (חלקיות) קב' הפונקציות בה"כ נניח תמיד ש $\sum = \{0,1\}$ 

#### :0.1.2 מ"ט דו סרטית

$$\delta: Q \backslash F \times \Gamma \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \Gamma \times \{L, R, S\}$$

- מצב משותף  $Q \backslash F$ 
  - I תו בסרט ב  $\Gamma$
- IIתו בסרט ה  $\Gamma$
- מה כותבים  $\Gamma \times \Gamma$
- לאן זזים  $\{L,R,S\}$  •

#### 0.1.3 הגדרה 3.1 (קונפיגורציה):

בהנתן מ"ט M , קונפיגורציה (מצב רגעי) של M היא שלשה M היא שלשה (באופן מלא) את המצב הכולל של מכונה אחרי מספר (סופי) של צעדי ריצה:

- . כאן q הוא המצב הנוכחי.
- בותא שבו מצא הראש הקורא/כותב. i
- lpha תוכן הסרט, כיוון שמדובר בריצה מס' סופי של צעדים על קלט כלשהו x מספיק לשמור רישא סופית של lpha פמוסכמה נשמור  $arphi=max\left(|x|,T\right)$  תוים, כאשר  $\gamma=max\left(|x|,T\right)$  הוא התו הימני ביותר שבו  $\alpha$  יש רק  $\gamma=max$  (אורך לשמור אתם במפורש.

#### :3.2 (צעד חישוב של מ"ט) 0.1.4

תהי M מ"ט ו $C_1,C_2$  ל בצעד חישוב יחיד. כלומר עוקבת ל  $C_1$  אם M יכולה לעבור מ $C_2$  ל בצעד חישוב יחיד. כלומר מהצורה:

$$C_1 = (q, i, \alpha), C_2 = (p, i', \beta)$$

:כאשר $\delta\left(q,\alpha\left[i
ight]
ight)=\left(p,b,m
ight)$  וגם

$$i' = \begin{cases} i & m = S \\ i+1 & m = R \\ max(i-1,1) & m = L \end{cases}$$

בשביל לטפל ב'נפילה' מהסרט max

 $i \neq j, j \leq |a|$  ,  $\beta\left[j\right] = \alpha\left[j\right]$  ,  $\beta\left[i\right] = b$  היא מחרוזת באורך ומקיימת  $\beta$ 

 $C_1 \vdash C_2$  נסמן זאת כך: , M נסמן מתבצע צעד מתבצע וקצרה פיצד מדויקת מדויקת מדויקת מדרנו מחדש, בצורה הצערה פיצד מתבצע אינה אחת ויחידה מדויקת שבת אחת ויחידה מערה: לכל קונפ'  $C=(q,i,\alpha)$  שבה  $q \notin F$  שבה שבה לכל קונפ' עוקבת אחת ויחידה.

# (הפונקציה $f_M$ שמ"ט מחשבת): 3.3 הגדרה 3.3

על x=arepsilon (במקרה אז M על M מ"ט. ויהיה  $x\in\sum^*$  קלט עבורה. נסמן ב $C_x=(q_0,1,x)$  את הקונפי ההתחלתית של ריצת  $X=(q_0,1,x)$  מתואר ע"י סדרת הקונפיגורציות (היחידה) מהצורה:

$$C_x = C_1, C_2, ....$$

:כאשר לכל  $f_M(x)$  ,  $C_{i+1} \vdash_M C_i$  , i>1 מוגדר כך

$$f_M(x) = \begin{cases} a [1, ..., i-1] & \text{A finite sequence with configation of: } (q, i, \alpha) \\ \bot \text{ (undifined)} & \text{else (infinite)} \end{cases}$$

#### U הפונ' האוניברסלית 0.1.6

:המוגדרת כך

$$U\left(\left\langle M\right\rangle ,\left\langle X\right\rangle 
ight) = egin{cases} f_{M}(X) & ext{valid syntax } \mathbf{and} \ ext{M stop on x} \\ \bot & ext{else} \end{cases}$$

M קידוק של קלט עבור - X , מ"ט של קלט  $^{-}$ 

. אלא אם אם אם אלגו היא אם אלגו היא אחרת. אחרת. או הלאה הא $\sum=\{0,1\}$ ו ,  $F=\{q_{acc,q_{rej}}\}$  סופיים מעכשיו האלגו בעלת שלנו היא בעלת שני מצבים סופיים האחרת. נוסיף למ"ט feature של קבלת שפות

- $q_{acc}$  במצב אוצרת על x בריצתה על המ"ט מקבלת מילה מילה מילה מילה אם נאמר נאמר 3.4 נאמר ממב ממב 3.4
  - 0.1.8 הגדרה 3.5 השפה של מ"ט

:בהנתן מ"ט M נגדיר

$$L(M) = \{x \in \sum^* | \text{m accept } x \}$$

M השפה של

. על כל עוצרת עוצרת אם M אם L(M) אם מכריעה את מכריעה אוא מכריעה אם נאמר אם אם מ

RE: 3.6 הגדרה 0.1.9

: כלומר RE קב' כל השפות שנתן לקבל ע"י מ"ט תקרא

$$RE \triangleq \{L \in P(\sum^*) | \text{exist Turing machine for L(M)=L } \}$$

R :3.7 הגדרה 0.1.10

 $R \triangleq \left\{ L \in P\left(\sum^{*}\right) | \text{exist Turing machine M accepted L} \right\}$ 

$$coRE = \left\{L \subseteq \sum^* | ar{L} \in RE 
ight\}$$
 :4.4 הגדרה 0.1.11

coRE של II~4.5 הגדרה 0.1.12

. אט או או מייכת או מקבלת או אייכת  $x\in L$  שייכת או שדוחה אם שהיימת מ"ט אם אם אס אס מקבלת שייכת ענאמר ועבור  $L\in P\left(\sum^*\right)$ 

הגדרות לתרגיל:

- יחס דו מקומי R הוא קבוצה של זוגות סדורים •
- $(x,y)\in R$  מתקיים מקרה עבורו אחד לכל היותר יש לכל מקומי בו מקומי מקומים מקומים מונקציה חלקית מתקיים
  - $(x,y)\in R$  אחד עבורו מתקיים אחד עם פונקציה מלאה מקרה פרטי של פונקציה חלקית בו לכל x

# 0.1.13 הגדרה: שפות הלכסון

$$L_D = \{ \langle M \rangle | \text{M accept } \langle M \rangle \}$$

#### הגדרה: 5.1 השפה האוניברסלית:

$$L_{U}=\left\{ \left\langle M\right\rangle ,\left\langle X\right\rangle \mid x$$
 את מקבלת וגם  $M$ סינטקטית סינטקטית קידוד  $\left\langle M\right\rangle ,\left\langle X\right\rangle \right\}$ 

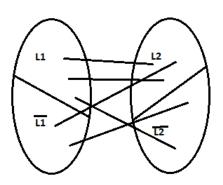
M כאשר:  $\langle M \rangle$  קידוד של מ"ט, כאשר: עבור א קידוד של מ"ט, כאשר:

### 0.2 רידקוציות

- הגדרה פונקציית רידוקציה: בהנתן זוג שפות  $L_1,L_2\subseteq \sum^*$  נאמר שפונקציה היא פונקציית רידוקציה: בהנתן הגדרה פונקציית הדוקציה בין זוג שפות  $L_1,L_2\subseteq \sum^*$  השפות אם היא מקיימת:
  - מלאה f .1
  - (בפרט אותה אותה המחשבת  $M_f$  (בפרט לייתנת לחישוב לייתנת בפרט f .2
    - ,  $\forall x \in \sum^* \ x \in L_1 \iff f(x) \in L_2$  . .3

: המקיימת  $f:\sum^* o \sum^*$  אם קיימת פנו' במילים:  $L_1$  במילים: במילים: במילים: במילים: במילים: רוב במילים: במילים: במילים: במילים: במילים: רוב במילים: במילים: במילים: רוב במילים: במילים: במילים: רוב במילים: רוב

- מלאה f .1
- ניתנת לחישוב f .2
- $\forall x \in \sum^* : x \in L_1 \iff f(x) \in L_2$  .3



- $L_{ea}=\left\{ \left\langle M_{1}
  ight
  angle ,\left\langle M_{2}
  ight
  angle \left|L\left(M_{1}
  ight)=L\left(M_{2}
  ight)
  ight\} :7.1$  הגדרה 0.2.2
  - Rice 0.3
- $S \in \{RE, \phi\}$  היא תם S טריויאלית שS טריויאלית המדרה היא תת קבוצה היא תת קבוצה היא תת שפות בRE, S היא תח
  - ( arepsilon את מקבלת (מקבלת מקבלת בוגמה 1: נגדיר ( $L_arepsilon=\{\langle M \rangle\,|{f M}\,\,\,{
    m accept}\,\,\,arepsilon\}$ 
    - $L_{arepsilon}' = \{\langle M \rangle \, | \mathbf{M} \, \, \mathbf{doesnt} \, \, \mathbf{accept} \, \, arepsilon \} 
      otin R$  0.3.3
      - L" $_{\varepsilon} = \{\langle M \rangle | \mathbf{M} \ \mathbf{reject} \ \varepsilon \}$  0.3.4

# 0.4 מ"ט אי־דרמינסטית

מכונת טיורינג אי־דטרמינסטית תוגדר כמו מ"ט דטרמניסטית, אלא ש  $\delta$  תאפשר בכל צעד בדיוק שתי בחירות במקום בחירה אחת. כלומר:

$$\delta: (Q \backslash F) \times \Gamma \to (Q \times \Gamma \times \{L, S, R\})^2$$

מ"ט א"ד מגדירה על קלט x עץ חישוב במקום מסלול חישוב:

יתכנו  $q_{acc}$  איד M עוצרת בx על איד M קים מסלול בעץ החישוב של איד M עוצרת בx מסלולים אחרים בהם היא עוצרת ב $q_{rej}$  או לא עוצרת)

 $RE_{ND}$  0.4.3

 $\{L| ext{Exist non-determenstic turing machine accept L}\}$  = בקבוצת השפות שקיימת מ"ט א"ד המקבלת את

### 0.5 סיבוכיות

- מ"ט דטרמניסטית. נגדיר את פונ' זמן הריצה שלה,  $m:\sum^* o\mathbb{N}$   $tm:\sum^*$  פונקציה חלקית מוגדרת כך: 0.5.1
  - עוצרת אם על x אם בריצה שtm מבצעת הצעדים סס' מס' tm(x)
    - אחרת ־ לא מוגדר
- $tm\left(x
  ight) \leq t\left(|x|
  ight)$  מתקיים ש $x \in \sum^*$  אם לכל M אם אם על זמן הריצה חסם על היא היא מלאה מלאה מלאה  $t(n): \mathbb{N} o \mathbb{N}$
- עבורה (בה"כ נתן פולינום (בה"כ נתן להניח ש פולינום (בה"כ נתן להניח ש סיים עבורה (בה"כ נתן להניח ש סיים עבורה (בה"כ נתן להניח ש סיים עבורה (בה"כ נתן להניח ש סיים לא יעילה או פולינום (בה"כ נתן להניח ש סיים עבורה (בה"כ נתן להניח ש סיים לא יעילה או פולינום (בה"כ נתן להניח ש סיים לא יעילה או פולינום (בה"כ נתן להניח ש סיים עבורה (בה"כ נתן להניח ש סיים לא יעילה או פולינום (בה"כ נתן להניח ש סיים לא יעילה של הניח של ה
  - $P = \{\; L \mid L \;$  את מ"ט דטרמיסטית יעילה המכריעה מ"ט הגדרה:  $\}$  סיימת מ"ט דטרמיסטית הגדרה:
    - $POLY = \{ \ f \mid f \$ את מ"ט דטר' יעילה המחשבת את  $\}$  0.5.5
    - M מ"ט א"ד נאמר שtm(x) היא פונק' זמן הריצה של 0.5.6

tm(x) נגדיר את הפונקציה

- x אם M עוצרת על x בכל מסלול x זה המקס' על פני כל המסלולים של מס' צעדים הריצה של x
  - אחרת  $\Rightarrow$  לא מוגדר •

בדומה למ"ט דטר. חסם זמן ריצה t(n) מוגדר כמו קודם. נאמר כמו קודם ש M א"ד יעילה אם קיים עבורה חסן זמן ריצה שהוא פולינומי

- $\{L \mid L$  את המקבלת את ייט א"ד יעילה המקבלת את  $\}$  = NP 0.5.7
- : אם הוא מקיים אחס NP הוא יחס  $R\subseteq\sum^* imes\sum^*$  נאמר ש:9.3 הגדרה 0.5.8
- $|y| \leq p\left(|x|
  ight) \Leftarrow (x,y) \in R$  סך כך ש פולינום פולינומית. קיים פולינום R .1
  - 2. קיימת מ"ט (דטר') פולינומית המכריעה את השפה:

$$\widetilde{L}_R = \left\{ (x, y) \in \sum^* \times \sum^* | (x, y) \in R \right\}$$

דוגמה לו : היחס P(n)=4n+4 שימו לב שהעלאה בשלישית החסום פולינומית החסום ל $(x,x11x^3)$  או היחס  $(x,x11x^3)$  או היחס לב שהעלאה בשלישית) מכפילה אורך פי 3 לא בשלישית

דוגמה ל2: היחס שראינו בסעיף הוא גם נתן לזיהוי פולינומי (  $x^2$  או  $x^3$  נתן לחישוב יעיל ע"י אלג' כפל ארוך של כיתה ג'  $\tau$  כשמתארים אלגוריתם מספיק לתאר אלג' למודל t כי האקסטרה חישוב במעבר למ"ט הוא פולינומי).

 $factory = \{(x,k) | y \neq 1 ext{ וכן } k \leq y < x$  המקיים  $x,k \in \mathbb{N}^+\}$  0.5.9

 $coNP = \left\{L|\overline{L} \in NP
ight\}$  :10.1 הגדרה 0.5.10

אם:  $L_1$  אם:  $L_1$  אם: הגדרה 10.2 הגדרה בולינומית שפות, נאמר שf שפות, נאמר ש $L_1,L_2$  יהיו

- (בפרט f מלאה)  $f \in Poly\left(y\right)$  .1
- $\forall x \in \sum^* f(x) \in L \Leftrightarrow x \in L_1$  .2.

 $L_1 \leq_p L_2$  נסמן  $L_2$  ל נחמת לרדוקציה נתנת אמר ש לה אמר ש לבור אמר אמר עבור  $L_1, L_2$  אם קיימת ל

### ימות: L המחלקה NPC היא קב' כל השפות 0.5.12

- $L \in NP$  .1
- $L' \leq_p L$  ,  $\forall L' \in NP$  כלומר, NP שלמה בL .2

### NPC בעיות שונות ב 0.6

 $:BH-Bounded\ Halting$  העדרה :11.4 השפה הגדרה 0.6.1

 $BH = \{\langle M \rangle, 1^p, \langle x \rangle \mid l \geq M$  מיט א"ד קיים ב M מסלול מקבל בריצתה על M

כלומר מהצורה CNF נאמר שפסוק לוגי  $\varphi$  הוא בצורת CNF אם: CNF אם: CNF נאמר שפסוק לוגי CNF נאמר פסוקית יוא בצורת CNF הגדרה  $C_i = \bigvee_{i=1}^{h_i} l_i$ 

$$P(x_1,...,x_5) = (\lor..\lor) \land (\lor..\lor) \land (\lor..\lor)$$
 לדוגמה

:SAT השפה

 $SAT = \{ \ arphi \left( x 
ight) | arphi \left( \phi 
ight) = T$  עקימת לו השמה מספקת כלומר לו הע $\varphi \}$ 

 $Vertex\ color$  השפה 12.1ה הגדרה 0.6.3

 $VC = \{(\langle G \rangle\,, k) \mid U$  לא מכוון וקיימת אחד הקצוות עלכל קשת לכל קשת בגודל ע $U \subseteq V$  לא מכוון וקיימת  $G = (V, x)\}$ 

הוא קידוד של גרף למשל כמטריצת שכנויות  $\langle G \rangle$ 

(HS) Hitting set השפה 12.2 הגדרה 0.6.4

 $HS=\{N,K,C_1,...,C_t|\ \, orall i\ \, C_i\cap U
eq\phi$  כך ש0 כך ע0 בגודל ע0 בוסלת ב0 וקיית תת 0 של של ע0 בגודל בודל א כך ע

 $Set\ cover$  השפה 12.3 הגדרה 0.6.5