אלגוריתמי ניווט ושערוך מיקום

ד"ר רועי יוזביץ'

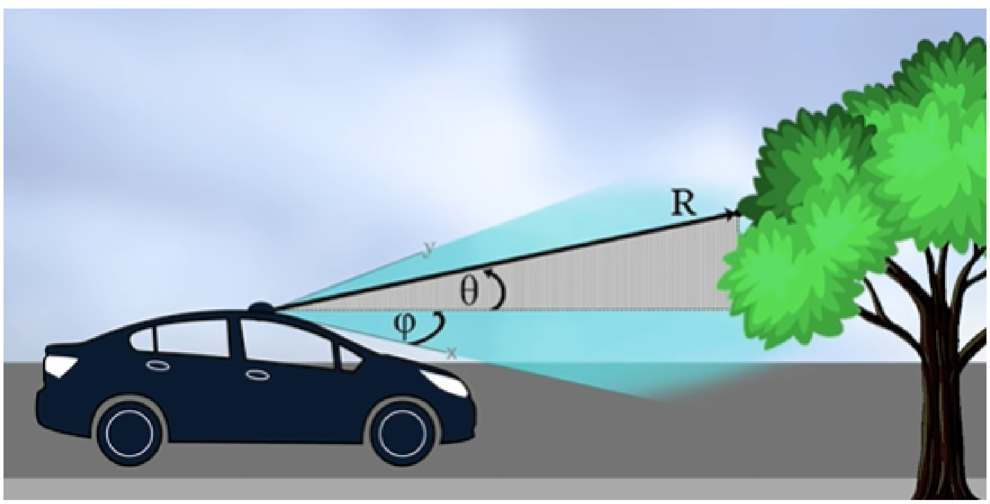
27 בפברואר 2020

הסיכום מבוסס ברובו על הקורס כפי שהועבר באתר *campos* , כמו כן נעזרתי בקורס ב *Udacity* , ובסדרת הסרטונים של Michel van Biezen (קישורים להלן).

בנוסף תודה לאיזבלה ולניסן על הסיכומים והתשובות.

הוספתי חלק מהתשובות שלי לשאלות מהאתר, יש לקחת אותן כמו את שאר הסיכום בערבון מוגבל.

להערות/תיקונים ־ נעם דומוביץ' 0508752542



קישורים

- אתר קמפוס ־ קורס אלגוריתמי ניווט: https://campus.gov.il
- https://www.youtube.com/watch?v=CaCcOwJPytQ&list=PLX2gX-ftPVXU3oUFNATxGXY9OAULiqnWT&index=1
- Udacity course: Artificial Intelligence for Robotics
  - https://classroom.udacity.com/courses/cs373
- ספר הקורס:
  - https://docs.ufpr.br/~danielsantos/ProbabilisticRobotics.pdf
- שאלות בהסתברות שהיו במבחן:
- http://allendowney.blogspot.com/2011/10/all-your-bayes-are-belong-to-us.html?m=1

תוכן עניינים

1 לוקליזיציה ומסנן היסטוגורמה

1.1 מבוא הסתברותי

לוקליזציה גלובלית - היכולת לדעת איפה אני נמצא כאשר מתחילים מחוסר ודאות מוחלט

לוקליזציה לוקאלית - היכולת לדעת איפה אני נמצא עכשיו בהנתן שידעתי את מיקומי הקודם

ספר הקורס: probabilistic robotics

1.1.1 אקסיומות ההסתברות

נניח שΩ הוא מרחב המדגם ו A, B הם שני מאורעות אז:

1. $P(A) \geq 0$

   - אם $P(A) = 0 \iff A$ לא אפשרי (7 בקוביה)

2. $P(\Omega) = 1$

3. $A \cap B = 0 \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$$P(A) = \frac{\#\text{ appreance of a}}{|\text{ sample space}|}$$

מרחב הסתברות: זו שלשה (Ω, F, P)

שאלה 4

נתונה חבילת קלפים רגילה ומעורבבת המכילה גם קלף ג'וקר אחד. משכתם ארבעה קלפים בזה אחר זה (בלי להחזיר לחבילה). מה ההסתברות שבאותם ארבעה קלפים יש קלף אחד מכל סוג (לב, תלתן, עלה ויהלום)?

- עבור הקלף הראשון ההסתברות להוציא קלף שאינו גוקר היא: $\frac{52}{53}$
- עבור הקלף השני ההסתברות להוציא קלף שאינו גוקר ואינו מהסדרה הראשונה היא: $\frac{52}{53} \cdot \frac{38}{52}$
- ...
- סה"כ:

$$\frac{52}{53} \cdot \frac{39}{52} \cdot \frac{26}{51} \cdot \frac{13}{50} = 0.0975 \checkmark$$

שאלה 5

אתם משחקים משחק קלפים.

- לכל אחד מקלפי המספר $(1 - 10)$ יש את הערך שלו
- לכל אחד מקלפי הצורה יש ערך של 10, ולג'וקר תוכלו לבחור כל ערך שתרצו.

במשחק אתם מושכים שלושה קלפים מהחבילה. אתם מנצחים, אם סכום הקלפים מגיע לרף מסוים או עובר אותו. נניח שהרף הוא 4 - מה הסתברות הזכייה בסיבוב הראשון?

נחשב דרך המשלים, כלומר מה ההסבתרות להפסיד? רק אם יצא רצף של $1,1,1$, ולכן:

$$1-\left(\frac{4}{53}\cdot\frac{3}{52}\cdot\frac{2}{51}\right)=0.999\ \checkmark$$

1.1.2 הסתברות מותנית

$$P\left(A|B\right)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

שאלה 1

על 6 פאות של קובייה מאוזנת נרשמו באקראי הספרות $1-6$, מה ההסתברות שסכום המספרים בכל זוג פאות נגדיות שווה ל 7 :

- נגדיר B - כל האפשרויות לסידור זוגות בקוביה $|B|=\binom{6}{2}=15 \Leftarrow$
- נגדיר A - האפשרות סידור של $\{\langle 1,6\rangle\ \langle 2,5\rangle\ \langle 3,4\rangle\} \Leftarrow$ 1
- נקבל ש:

$$P\left(A|B\right)=\frac{1}{15}\ \checkmark$$

1.1.3 הסתברות שלמה:

$$P\left(A\right)=\sum_{b_i\in B}P\left(A|B_i\right)P\left(B_i\right)$$

<u>דוגמה</u>

מטילים מטבע אם התוצאה יוצאת H עוצרים , אם T מטילים שוב ועוצרים . מה ההסתברות שהתוצאה <u>הסופית</u> היא T:

$$\begin{gathered}P\left(T^2\right)=P\left(T^2|H^1\right)\cdot P\left(H^1\right)+\left(T^2|T^1\right)\cdot P\left(T^1\right)\\ =0\cdot 0.5+0.5\cdot 0.5=\frac{1}{4}\end{gathered}$$

שאלה 1

שחקן זורק קוביה הוגנת פעמיים:

- יוצא 1/2 מקבל נקודה
- יוצא $\geq 3 \Leftarrow$ מקבל 5

השחקן זרק פעמיים וקיבל פחות מ10 נקודות. מה ההסתברות שקיבל 5 נקודות בזריקה

<u>פתרון שלי:</u>

- נגדיר A יצא $1,2 \Leftarrow P\left(A\right)=\frac{1}{3}$
- נגדיר B יצא $3,4,5,6 \Leftarrow P\left(B\right)=\frac{2}{3}$

- נסמן A^1 מאורע A בזריקה ראשונה וכד'
- אנחנו רוצים לחשב את

$$P\left(\text{get 5 points as second chance} \mid \text{total points is} < 10\right) = \frac{P(\text{get 5 points as second chance} \cap \text{total points is} < 10)}{P(\text{ total points is} < 10)}$$

- נשים לב ש $\text{get 5 points as second chance} \cap \text{total points is} < 10$ זה בדיוק רצף המאורעות B^2, A^1 והן מאורעות בת"ל, כלומר:

$$\frac{P(\text{get 5 points as second chance} \cap \text{total points is} < 10)}{P(\text{ total points is} < 10)} = \frac{P\left(B^2, A^1\right)}{P(\text{ total points is} < 10)} = \frac{P\left(B^2\right) \cdot P\left(A^1\right)}{P(\text{ total points is} < 10)} = \frac{\frac{2}{9}}{P(\text{ total points is} < 10)}$$

- נחשב דרך המשלים (ניתן לעשות גם הסתברות שלמה ומגיעים לאותה תוצאה) כלומר :

$$\begin{gathered} P\left(\overline{\text{ total points is} < 10}\right) = P\left(\text{ total points is} \geq 10\right) = P\left(\text{ total points is} = 10\right) \\ = P\left(B^2 \cap B^1\right) = P\left(B^2\right) P\left(B^1\right) = \left(\tfrac{2}{3}\right)^2 = \tfrac{4}{9} \\ \Rightarrow P\left(\text{ total points is} < 10\right) = 1 - \tfrac{4}{9} = \tfrac{5}{9} \end{gathered}$$

- סה"כ:

$$\frac{P(\text{get 5 points as second chance} \cap \text{total points is} < 10)}{P(\text{ total points is} < 10)} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{5}{9}} = \frac{2}{5} = 0.4\ ???$$

באתר יצאה תשובה אחרת 0.32

שאלה 2

בארנק נמצאים 8 מטבעות הוגנים ו־2 מטבעות המראים H בהסתברות $2/3$ ו־T בהסתברות $1/3$.

שולפים באקראי מטבע מהארנק ומטילים אותו.

<u>א. מה ההסתברות שיתקבל H?</u>

$$P\left(H\right) = P\left(H|\text{fair coin}\right) P\left(\text{fair coin}\right) + P\left(H|\text{specail coin}\right) P\left(\text{specail coin}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{10} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{10} = 0.533\ ???$$

<u>ב. אם ידוע שהתקבל H, מה ההסתברות שהמטבע שנבחר הוא הוגן?</u>

$$P\left(\text{fair coin}|H\right) = \frac{P(H|\text{fair coin}) \cdot P(\text{fair coin})}{P(H)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{8}{10}}{0.5332} = 0.75\ ???$$

1.2 הסתברות בייס

השערה $= H = Hypothesis$, המציאות $= E = Evidence$

$$P\left(H|E\right) = \frac{P(E|H) \cdot P(H)}{P(E)}$$

<u>הוכחה:</u>

- מהגדרה: $P\left(H|E\right)=\frac{P(H\cap E)}{P(E)}$ ואם נכפיל נקבל: $P\left(H|E\right)P\left(E\right)=P\left(H\cap E\right)$
- מתקיים ש: $P\left(H\cap E\right)=P\left(E\cap E\right)$ ולכן:$P\left(E|H\right)P\left(H\right)=P\left(E\cap H\right)$

$$P\left(H|E\right)P\left(E\right)=P\left(E|H\right)P\left(H\right)$$
$$\Updownarrow$$
$$P\left(H|E\right)=\frac{P(E|H)\cdot P(H)}{P(E)}$$

נשים לב $P\left(H|E\right)\neq P\left(H\right)$ כי אם כן היה שווה, המשמעות היתה ש$evidence$ חסר משמעות בבדיקת ה $Hypothesis$

שאלה

- בדיקה המדווחת על קיום מחילה מסוימת.
- אחוז הדיוק 99% לכל כיוון
  - מתוך 100 חולים שיבדקו , 99 ידווחו כחולים ו1 כבריא (בטעות)
  - מתוך 100בראים , 99 ידווחו כבריאים ו 1 כחולה (בטעות)
- בוחרים באקראי אדם מהאוכלוסייה לפי הבדיקה יצא חולה. מה הסיכוי שהוא באמת חולה בהנתן שהמחלה נפוצה באוכלוסיה ביחס של $\frac{1}{10,000}$

תשובה:

נסמן H = אדם חולה. E = בדיקה חיוביות

נקבל ש: $P\left(H|E\right)=\frac{P(E|H)P(H)}{P(E)}$ וכעת צריך לחשב כ"א מהערכים:

- $P\left(E|H\right)$ = ההסבתרות שהבדיקה חיוביות בהנתן שאדם חולה היא $\frac{99}{100}$ לפי נתון
- $P\left(H\right)$ = ההסתברות שאדם חולה היא $\frac{1}{10^{4}}$ מנתון
- $P\left(E\right)$ הבדיקה חיובית, הסתברות שלמה:

$$P\left(E\right)=P\left(E|\text{sick}\right)P\left(sick\right)+P\left(E|\text{healthy}\right)P\left(\text{healthy}\right)$$
$$\frac{99}{100}\frac{1}{10^{4}}+\frac{1}{99}\cdot\frac{9,999}{10,000}$$

- סה"כ:

$$\frac{P(E|H)P(H)}{P(E)}=\frac{0.99*10^{-4}}{0.99*10^{-4}+0.01(1-10^{-4})}\approx1\%$$

1.2.1 שאלה 1

במפעל פועלות שתי מכונות A,B. 10% מתוצרת המפעל מיוצרים במכונה A ו־90% במכונה B. 1% מהמוצרים המיוצרים במכונה A ו־5% מהמוצרים המיוצרים במכונה B הם פגומים.

א. נבחר מוצר אקראי. מה ההסתברות שהוא פגום?

$$P\left(\text{fail}\right)=P\left(\text{fail}|A\right)P\left(A\right)+P\left(\text{fail }|B\right)P\left(B\right)$$

$$\frac{1}{100}\cdot\frac{10}{100}+\frac{5}{100}\cdot\frac{90}{100}=\frac{46}{1000}=0.046\ ??$$

ב. אחרי ביקור של הטכנאי שמטפל במכונה B, מוצאים ש־1.9% ממוצרי המפעל הם פגומים. מה עכשיו ההסתברות שמוצר המיוצר במכונה B יהיה פגום?

נשים לב שהשתנו הנתונים אבל נוכל להשתמש באותו משוואה על מנת לחלץ את $P\left(\text{fail }|B\right)$

$$P\left(\text{fail}\right)=P\left(\text{fail}|A\right)P\left(A\right)+P\left(\text{fail }|B\right)P\left(B\right)$$

$$0.019=0.001+P\left(\text{fail }|B\right)*0.9$$

$$0.018=0.9*P\left(\text{fail }|B\right)\iff P\left(\text{fail }|B\right)=0.02\ ???$$

1.2.2 chain rule

$$P\left(H|E_1,E_2\right)=\frac{P(E_1|H,E_2)\cdot P(H,E_2)}{P(E_1,E_2)}$$

הוכחה

כלל השרשרת:
$$\begin{gathered}P\left(x,y,z\right)=P\left(x|y,z\right)P\left(y,z\right)\\ P\left(y,z\right)=P\left(y|z\right)P\left(z\right)\\ \Downarrow\\ P\left(x,y,z\right)=P\left(x|y,z\right)P\left(y|z\right)P\left(z\right)\end{gathered}$$
, נשתמש בו ונקבל:

$$P\left(H|E_1,E_2\right)=\frac{P(H,E_1,E_2)}{P(E_1,E_2)}=\frac{P(E_1,H,E_2)}{P(E_1,,E_2)}=\frac{P(E_1|H,E_2)P(H,E_2)}{P(E_1,|E_2)P(E_2)}=\frac{P(E_1|H,E_2)P(H,E_2)\cancel{P(E_2)}}{P(E_1,|E_2)\cancel{P(E_2)}}$$

1.2.3 חוק בייס נושאים מורכבים

שאלה 1

בשל עומס פניות באחת מחברות הביטוח הישיר:

- רק 60% מהפניות נענות מייד. שאר הפונים מתבקשים להשאיר את מספר הטלפון שלהם.
- ב־75% מהמקרים חוזר נציג חברת הביטוח לפונה באותו יום, ובשאר המקרים - למוחרת.
- הסיכוי שפונה ירכוש בחברה הוא:
  - 0.8 אם נענה מיד, 0.6 אם חזרו אליו באותו יום, ו־0.4 אם חזרו אליו למוחרת.

א. מה ההסתברות שאדם הפונה לחברת ביטוח ירכוש בה ביטוח?

נסמן את המאורעות:

- Buy נרכש בטוח ב
- Ans - נענה מייד, $NoAns$ - השאיר מספר
- Tod חזרו אליו באותו יום

- Tom חזרו אליו למחרת

אז:

$$P\left(Buy\right)=P\left(Buy|Ans\right)P\left(Ans\right)+P\left(Buy|NoAns,Tod\right)P\left(NoAns,Tod\right)$$
$$+P\left(Buy|NoAns,Tom\right)P\left(NoAns,Tom\right)$$

$$=0.8*0.6+0.4*0.75*0.6+0.4*0.25*0.4=0.7\ \checkmark$$

ב. ידוע כי אדם רכש ביטוח בחברה. מה ההסתברות שהשאיר את מספר הטלפון וחזרו אליו באותו יום?

$$P\left(NoAns,Tod|Buy\right)=\frac{P(Buy|NoAns,Tod)P(NoAns,Tod)}{P(Buy)}$$

$$=\frac{0.6*0.4*0.75}{0.7}=0.257\ \checkmark$$

שאלה 2

הלכת לרופא בגלל ציפורן חודרנית. הרופא בחר באקראי לבצע בדיקת דם הבודקת השפעת חזירים.

- ידוע סטטיסטית ששפעת זו פוגעת ב־1 מתוך $10,000$ אנשים באוכלוסייה.
- הבדיקה מדויקת ב־99 אחוז במובן שההסתברות ל־ False Positive היא 1%.
  - הווה אומר שההסתברות לסיווג שגוי של אדם בריא כאדם חולה היא אחוז אחד מהמקרים.
- ההסתברות ל־ False Negative היא 0:
  - אין סיכוי שהבדיקה תגיד על אדם חולה בשפעת חזירים כי הוא בריא.
- בבדיקה יצאת חיובי (יש לך שפעת).

א. מה ההסתברות שיש לך שפעת חזירים?

נסדר את הנתונים $P\left(sick\right)=10^{-4}=\frac{1}{10^4}$

- מתוך 100 בריאים $\Leftarrow$ 1 חולה, 99 בריאים
- מתוך 100 חולים $\Leftarrow$ 100 חולים, 0 בריאים
- נסמן H אדם חולה, E = יצא חיובי

$$P\left(sick|pos\right)=\frac{P(pos|sick)P(sick)}{P(pos)}=\frac{1\cdot\frac{1}{10^4}}{0.01009}=0.0099\ ??$$

$$P\left(sick|pos\right)=1$$
$$P\left(sick\right)=\frac{1}{10^4}$$
$$P\left(pos\right)=P\left(pos|sick\right)P\left(sick\right)+P\left(pos|healthy\right)P\left(healthy\right)=1*10^{-4}+0.01*\left(1-10^4\right)=0.01009$$

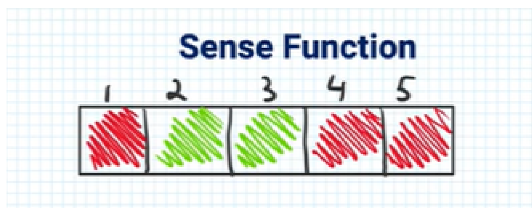
ב. נניח שחזרת מתאילנד לאחרונה ואתה יודע ש־1 מתוך 200 אנשים חזרו לאחרונה מתאילנד, חזרו עם שפעת חזירים. בהינתן אותה סיטואציה כמו בשאלה א', מה ההסתברות (המתוקנת) שיש לך שפעת חזירים?

$$P\left(sick|pos\right)=\frac{P(pos|sick)P(sick)}{P(pos)}=\frac{1\cdot\frac{1}{\mathbf{200}}}{0.01495}=0.344\ ??$$

$$P\left(sick|pos\right)=1$$
$$P\left(sick\right)=\frac{1}{\mathbf{200}}$$
$$P\left(pos\right)=P\left(pos|sick\right)P\left(sick\right)+P\left(pos|healthy\right)P\left(healthy\right)=1*\frac{1}{200}+0.01*\left(\frac{199}{200}\right)=0.01495$$

1.3 לוקליזציה

נניח והעולם שלנו מחולק ל:



- אז ההסתברות להיות בכל תא היא 0.2

0.2	0.2	0.2	0.2	0.2

- כעת נניח ולרובוט שלנו יש חיישן שמזהה ירוק ב100% וקיבלנו חיווי לירוק אז ההסתברות לכל משבצת:

0	0.5	0.5	0	0

- כעת נניח שהחיישן מזהה ירוק ב 0.6 ואדום ב0.2 נסביר:
  - ירוק 0.6 : חיווי ירוק בהנתן שאנו בירוק = 0.6 $\Leftarrow$ חיווי אדום בהנתן שאנו בירוק 0.4
  - אדום 0.2 : חיווי ירוק בהנתן שאנו באדום = 0.2 $\Leftarrow$ חיווי אדום בהנתן שאנו באדום 0.8

  שוב קיבלנו חיווי ירוק מה ההסתברות לכל תא:
  - לכאורה צריך להכפיל את ההסתברות לשהיה בתא כפול ההסתברות לכל צבע כלומר:
  - $P\left(\text{be in green }\right)*P\left(\text{get green }\right)=0.06\wedge P\left(\text{be in red }\right)*P\left(\text{get red}\right)=0.04$

0.04	0.12	0.12	0.04	0.04

  - נשים לב שסכום ההסתברויות קטן מאחד, וזה בגלל שצריך לנרמל ב $0.04+0.12+....=0.36$ ולכן:

0.11	0.33	0.33	0.11	0.11

1.3.1 חישוב על פי בייס

$$P\left(H|E\right)=\frac{P(E|H)\cdot P(H)}{P(E)}$$

בדוגמה שלנו נסמן: H = אני בתא ירוק. E = קיבלתי ירוק

- $P\left(E|H\right)$ = 0.6
- $P\left(H\right)$ = 0.4
- $P\left(E\right)$ = הסתברות שלמה:

$$\begin{aligned}P\left(E\right)&=P\left(\text{get green}|\text{on green}\right)P\left(\text{on green}\right)+P\left(\text{get green }|\text{on red}\right)P\left(\text{on red}\right)\\&=0.6*0.4+0.2*0.6=0.6*\left(0.6\right)=0.36\end{aligned}$$

סה"כ קיבלנו:

$$P\left(H|E\right)=\frac{P(E|H)\cdot P(H)}{P(E)}=\frac{0.6*0.4}{0.36}=\frac{2}{3}$$

אנחנו רוצים את ההסתברות לתא ירוק יחיד ולכן $\frac{2}{3}/2=\frac{1}{3}$

1.4 תרגיל תכנות תזוזה להשלים

1.5 פונקציית התזוזה וחוסר הוודאות

נניח שהרובוט שלנו היה בתא השני משמאל אז ההסתברות לכל משבצת :

0	1	0	0	0

ואם אנחנו יודעים שזז ב2 אז:

0	0	0	1	0

מה קורה אם זזנו ימינה שוב 2 משבצות ימינה:

- אם אנו חיים בעולם ציקלי אז: $\boxed{1\,|\,0\,|\,0\,|\,0\,|\,0}$
- אם לא, אז נתקע: $\boxed{0\,|\,0\,|\,0\,|\,0\,|\,1}$

נסבך עוד :

- $overshoot$ זזתי יותר מהצפוי
- $undershoot$ זזתי פחות מהצפוי
- כעת נניח שעבור תזוזה $x=2$ נקבל תזוזה ב 80% ועבור $undershoot/overshoot$ של 1 10% אז:

$$\boxed{1\,|\,0\,|\,0\,|\,0\,|\,0}\Rightarrow\boxed{0\,|\,0.1\,|\,0.8\,|\,0.1\,|\,0}$$

  – נשים לב שיש הבדל בין לזוז בבת אחת 2 משבצות לבין תזוזה של פעמיים משבצת אחת - הסיבה שבכל צעד אנחנו מכניסים עוד אי־ודאות למערכת

- שלב הבא: נניח ששוב זזנו 2 צעדים, מה ההסתברות להיות בתא 5 (קיצוני ימני) , נחשב את ההסתברויות להגיע לכל תא בצעד השני (למעשה הסתברות שלמה בטבלה):

תזוזה ל / התא שהייתי	תא 2	תא 3	תא 4
תא 3	$0.1 * 0.1 = 0.01$		
תא 4	$0.1 * 0.8 = 0.08$	$0.8 * 0.1 = 0.08$	
תא 5	$0.1 * 0.1 = 0.01$	$0.8 * 0.8 = 0.64$	$0.1 * 0.1 = 0.01$
תא 1		$0.8 * 0.1 = 0.08$	$0.1 * 0.8 = 0.08$
תא 2			$0.1 * 0.1 = 0.01$

- כעת (נסכום כל שורה):

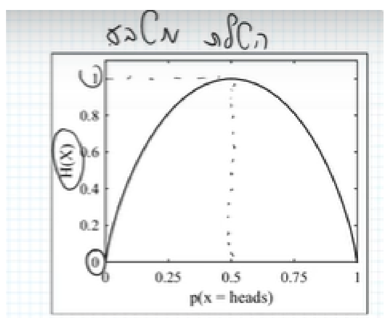
0.66	0.16	0.01	0.01	0.16

1.5.1 אנטרופיה ואינטגרציה

אנטרופיה:

$$H(x) = -\sum_{x} p(x) \cdot \log P(x)$$

האנטרופיה עונה על השאלה בהנתן משתנה אקראי עד כמה הוא אקראי. לדוגמה אם יש לנו מטבע (מזויף) בו שני הצדדים הם H אז ההסתברות ל H תהיה 1 ולT תהיה 0 ובגרף:



ודאות גבוה $\Longleftrightarrow$ אנטרופיה נמוכה

ודאות נמוכה = אי־ודאות גבוה $\Longleftrightarrow$ אנטרופיה גבוה

1.5.2 שאלות חזרה

20% מהתושבים בעיר סובלים ממחלת הצרברים. יש שתי בדיקות לאבחון מחלה זו: בדיקה X ובדיקה Y.

כאשר אתם הולכים לרופא, ב־$2/3$ מהמקרים הוא יבדוק אתכם באמצעות בדיקה X;

ב־$1/3$ מהמקרים הוא יבדוק אתכם באמצעות בדיקה Y.

- הסטטיסטיקה של בדיקה X היא כדלקמן:
  - אם אתה חולה במחלה, אזי 75% שהבדיקה תצא חיובית ו־25% שלילית.
  - אם אינך חולה במחלה, הבדיקה תצא שלילית ב־75%, וחיובית רק ב־25%.

- הסטטיסטיקה של בדיקה Y היא כדלקמן:
  - אם אתה חולה במחלה, הבדיקה תצא חיובית עם הסתברות של 100%.
  - אם אינך חולה במחלה, הבדיקה תצא חיובית עם הסתברות של 50%.

אדם נדגם באקראי מתוך האוכלוסייה בעיר ונשלח לרופא לבדיקה של מחלת הצרצרים. התוצאה היא חיובית.

<u>א. מה ההסתברות שהוא חולה במחלת הצרצרים ולמה?</u>

למעשה צריך לחשב את

$$P\left(Sick|pos,x\right)+P\left(Sick|pos,y\right)$$

נשים לב שאלו מאורעות זרים כיון ש $P\left(X|Y\right)=P\left(Y|X\right)=0$ כלומר אדם נבדק רק באחת מהבדיקות.

נשתמש בכלל השרשרת עבור כל רכיב, כלומר:

$$P\left(Sick|pos,x\right)=\frac{P\left(pos|\ Sick,x\right)P\left(Sick,X\right)}{P\left(pos,X\right)}=\frac{\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{15}}{0.35}=0.285$$

- $P\left(pos|\ Sick,x\right)=\frac{3}{4}$, נתון
- $P\left(Sick,X\right)=P\left(Sick\right)\cdot P\left(x\right)=\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{15}$, המארועות בלתי תלויים
- $P\left(pos,X\right)$ נשתמש בחוק ההסתברות השלמה:

$$P\left(pos,X|Sick\right)P\left(Sick\right)+P\left(pos,X|Healthy\right)P\left(Healthy\right)=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{5}=0.35$$

באותו אופן עבור Y :

$$P\left(Sick|pos,y\right)=\frac{P\left(pos|\ Sick,Y\right)P\left(Sick,Y\right)}{P\left(pos,Y\right)}=\frac{1\cdot\frac{1}{15}}{0.6}=0.111$$

- $P\left(pos|\ Sick,Y\right)=1$, נתון
- $P\left(Sick,Y\right)=P\left(Sick\right)\cdot P\left(Y\right)=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{15}$, המאורעות בלתי תלויים
- $P\left(pos,Y\right)$ נשתמש בחוק ההסתברות השלמה:

$$P\left(pos,Y|Sick\right)P\left(Sick\right)+P\left(pos,Y|Healthy\right)P\left(Healthy\right)=1\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}=0.6$$

סה"כ:

$$P\left(Sick|pos,x\right)+P\left(Sick|pos,y\right)=0.285+0.111=\mathbf{0.396}$$

ב. אחרי שבסעיף א' יצאה הבדיקה חיובית, נבדק אותו אדם פעם שנייה - לפי בדיקה X וגם הפעם יוצא שהוא חולה. מה ההסתברות הנוכחית שהוא חולה?

$$P\left(Sick|pos,x\right)=\frac{P\left(pos|\ Sick,x\right)P\left(Sick,X\right)}{P\left(pos,X\right)}=\frac{\frac{3}{4}\cdot 0.264}{0.35}=\mathbf{0.565}$$

- $P\left(pos|\ Sick,x\right)=\frac{3}{4}$, נתון - לאהשתנה
- $P\left(Sick,X\right)=P\left(Sick\right)\cdot P\left(x\right)=0.396\cdot\frac{2}{3}=$, כעת נתייחס ל$P\left(Sick\right)$ כהסתברות שיצאה לנו בסעיף א
- $P\left(pos,X\right)=0.35$ לא השתנה

1.6 תרגיל תכנות אנטרפיה - להשלים

1.7 תרגיל תכנות היסטורמה $2D$ - להשלים

2 מסנן קלמן חלק ראשון

2.1 סטטיסטיקה

2.1.1 עקרונות מסנן קלמן

הגדרה: מסנן קלמן זו תהליך מתמטי איטרטיבי שמשתמש בסט של משוואות ונתונים שמגיעים ברצפיות מהחיישנים כדי לשערך במהירות את הערך האמיתי של אובייקט, כאשר הערכים הנמדדים מכילים חוסר וודאות, רעש ואקראיות.

נפרש:

- תהליך מתמטי איטרטיבי - שימוש חוזר בסט משוואות זהה , עם נתונים שונים. אצלנו התפלגות שחישבנו בזמן $T-1$ הופכת לבסיס החישוב עבור זמן T
- הערך האמיתי - וקטור המצב
- מדידות המכילות חוסר וודאות - החיישנים מכילים רעש
- במהירות -

מסנן קלמן - יתרונות:

- שיערוך עקיף - של פרטמטרים מסוים (למשל מהירות ומיקום)
- היתוך חיישינים - תהליך מתמטי של חיבור מידע מחיישנים שונים

2.1.2 הגבר קלמן

הגבר קלמן נובע משני פרמטרים:

- $Eest$ - חוסר ודאות בשערוך
- $Emeas$ - חוסר ודאות במדידה

בנוסחא:

$$kg = \frac{Eest}{Eest+Emeas} \quad 0 \leq kg \leq 1$$

ננתח את הנוסחה:

- kg שואף ל1 $\Leftarrow$ $kg \approx \frac{East}{East}$
  1. יש לי מעט חוסר ודאות במדידה $\Leftarrow$ המדידה די מדויקת
  2. יש לחוסר ודאות מאוד גבוה בשערוך $\Leftarrow$ שערוך מצב לא יציב
- kg שואף ל 0 $\Leftarrow$ $East < Emeas$ (ובהפרש לא מבוטל)
  1. מדידה רועשת מאוד
  2. שערוך מצב יציב

מכאן נייצר את הנוסחה:

$$Est_t = East_{t-1} + kg\left[Meas_t - Est_{t-1}\right]$$

- אם $kg \to 0$: נקבל ש: $Est_t = East_{t-1}$
  - כלומר: השערוך מצב מדויק ועדיף להתייחס רק אליו:
- אם $kg \to$: נקבל ש:$Est_t = \cancel{East_{t-1}} + Meas_t - \cancel{Eest_{t-1}} = Meas_t$
  - כלומר: השגיאה במדידה כמעט 0 , ועדיף להתייחס רק אליה
- ברור לנו שבחיים ־ הערכים לא יהיה כאלה, והנוסחאה הזה יוצרת לנו את הממוצע המשוקלל בינהם:
  - $kg\left[Meas - East_{t-1}\right]$: ההפרש בין המדידה לשערוך. כפול הגבר קלמן

לסיכום שלוש הנוסחאות:

1. $kg = \frac{E_{est}}{E_{est}+E_{meas}}$
2. $Est_t = Est_{t-1} + kg\left[Meas_t - Est_{t-1}\right]$
3. $E_{EST_t} = [1-kg]\left(E_{EST_{t-1}}\right)$(יש טעות באתר)

2.1.3 דוגמה:

- טמפ' אמיתית 72 מעלות
- ניחוש ראשוני שלנו (Est) הוא 68
- טעות ראשונית (E_{est}) היא 2
- מדידה ראשונית $(Meas)$ היא 75
- טעות מדידה (E_{meas}) היא 4 לכל כיון

נחשב:

	$Meas$	E_{mes}	kg	E_{est}	Est
t	75	4	$\frac{\overbrace{2}^{E_{est}}}{4+2} = 0.33$	$\left[1-\underbrace{0.33}_{kg}\right](2) = 1.33$	$\underbrace{68}_{Est_{t-1}} + \underbrace{0.33}_{kg}\left(\underbrace{75}_{Meas} - \underbrace{68}_{Est_{t-1}}\right) = 70.33$

כעת נראה את התהליך האיטרטיבי:

	$Meas$	E_{mes}	Est	$E_{est_{t-1}}$	kg	E_{est_t}
$t-1$			68	2		
t	75	4	70.33		0.33	1.33
$t+1$	71	4	70.50		0.25	1.00
$t+2$	70	4	70.4		0.2	0.8
$t+3$	74	4	71		0.17	0.66

שלב t :

$$kg_t = \frac{E_{est_{t-1}}}{E_{mes}+E_{est_{t-1}}} = \frac{2}{4+2} = 0.33$$
$$Est_t = Est_{t-1} + kg\left(Mes - Est_{t-1}\right) = 68 + 0.33\left(75-68\right) = 70.33$$
$$E_{est_t} = \left[1-kg\right]\left(E_{est_{t-1}}\right) = 0.66 * 2 = 1.33$$

שלב $t+1$:

$$kg_{t+1} = \frac{1.33}{\underbrace{4}_{E_{mes_{t+1}}} + \underbrace{1.33}_{E_{est_t}}} = 0.25$$
$$Est_{t+1} = \underbrace{70.33}_{Est_t} + \underbrace{0.25}_{kg}\left(\underbrace{71}_{Mes} - \underbrace{70.33}_{Est_t}\right) = 70.5$$
$$E_{est_{t+1}} = \underbrace{0.75}_{1-kg} * \underbrace{1.33}_{E_{est_t}} = 1$$

שלב $t+2$:

$$kg_{t+2} = \frac{1}{\underbrace{4}_{E_{mes_{t+1}}} + \underbrace{1.}_{E_{est_{t+1}}}} = 0.2$$
$$Est_{t+2} = \underbrace{70.5}_{Est_{t+1}} + \underbrace{0.2}_{kg}\left(\underbrace{70}_{Mes} - \underbrace{70.5}_{Est_{t+1}}\right) = 70.4$$
$$E_{est_{t+2}} = \underbrace{0.8}_{1-kg} * \underbrace{1}_{E_{est_{t+1}}} = 0.8$$

שלב $t+3$:

$$kg_{t+3} = \frac{0.8}{\underbrace{4}_{E_{mes_{t+2}}} + \underbrace{0.8}_{E_{est_{t+2}}}} = 0.17$$
$$Est_{t+3} = \underbrace{70.4}_{Est_{t+2}} + \underbrace{0.17}_{kg}\left(\underbrace{71}_{Mes} - \underbrace{70.4}_{Est_{t+2}}\right) = 71$$
$$E_{est_{t+2}} = \underbrace{0.83}_{1-kg} * \underbrace{0.8}_{E_{est_{t+1}}} = 0.66$$

1

2.2 גאוס

2.2.1 גזירת נתונים מתוך מדגם

שאלה 4

קיים מקבץ נתונים בעל ממוצע μ וסטיית תקן μ.

א. מה יהיה הממוצע החדש, אם לכל אחת מהנקודות ב־ $DATA$ יתווסף קבוע מסוים K?

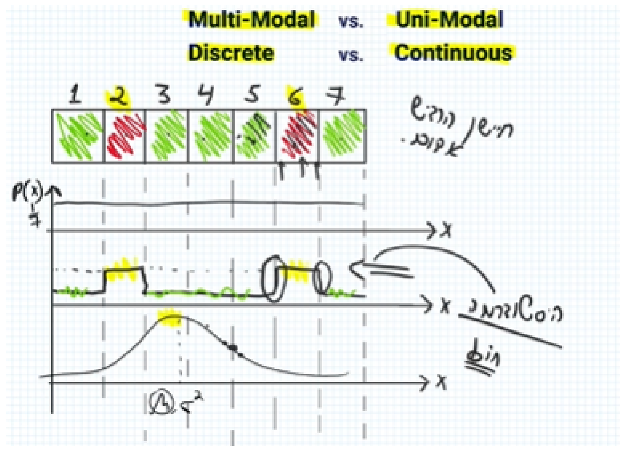
$$\mu' = \mu + K$$

ב. מה יהיו ערכי הממוצע μ וסטיית התקן σ החדשים, אם כל אחת מהנקודות תיכפל על ידי אותו קבוע K?

$$\mu' = k\mu \qquad \sigma' = k\sigma$$

חוק בנפורד - הסיפור עם המספר

2.2.2 ממוצע ואריגס, סטית תקן:



$Multi-Modal\ discrte$ -מספר ניחושים מדויקים , והניחוש הוא "בינארי" או שאני ב bin שלי או שלא, ואין לי מדד של איפה בתוך ה bin אני נמצא

$Uni-Modal\ continous$ - ניחוש אחד המשקלל את האפשרויות, והניחוש רציף , לכן אפשר להיות בכל מקום

$PDF-Probablity\ Dednsity\ Function$ - פונקציות צפיפות ההסתברות:

הגאוסי:

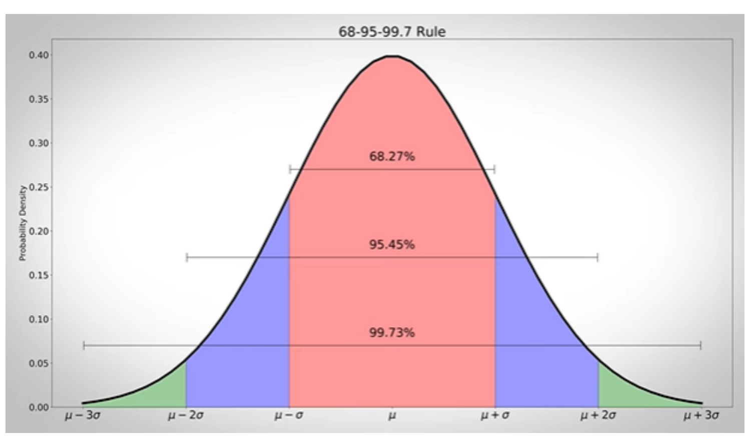
$$N\left(\mu_1, \sigma_1^2\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} e^{\frac{-(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}$$

נותן ערך בין 0 ל 1 - יש נרמול בפונקציה.

נקודה נוספת - סימטרית

2.2.3 חוק $68, 95, 99.7$

עבור התפלגות גאוסית המאופיינת באמצעות וסטיית תקן:



שאלה 1

מה הסיכוי שלכם לפגוש אדם עם IQ של 150 ומעלה? זכרו: IQ מתפלג נורמלית באוכלוסייה עם ממוצע של 100 וסטיית תקן של 15.

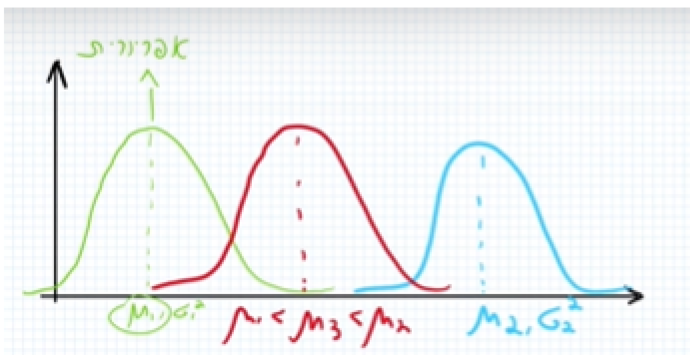
תשובה

ניתן לחשב את האינטגל או

$$\mu = 100, \sigma = 15$$
$$\Downarrow$$
$$100 + 3\sigma = 145$$

על פי החוק שהסברנו פחות מ0.15 והתשובה: 0.1

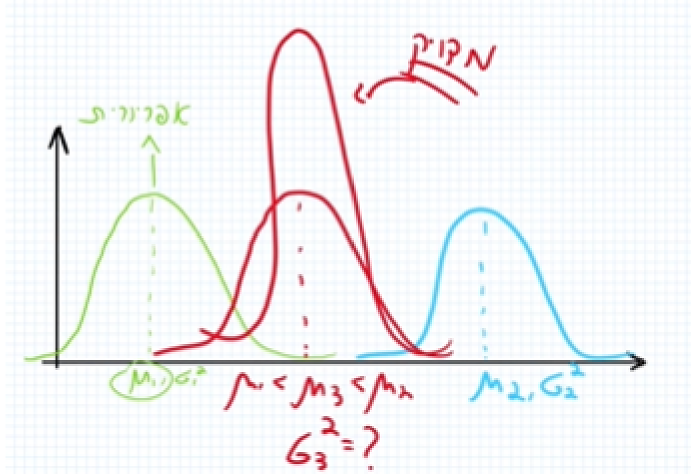
2.2.4 הכפלת גאוסיינים:



- **בירוק** - הניחוש/שיערוך שלנו למיקום הרכב
- **בכחול** - מדידת ה GPS שלנו למיקום הרכב

עולה השאלה בשקלול הגאוסיינים המבטאים את מיקום הרכב, היכן אנחנו באמת? ולכן סביר שהמיקום שלנו הוא ממוצע כלשהו בינהם וזה **באדום**

– והדבר המעניין, שהתוצאה של הכפלת גאוסיינים, נונת תוצאה כזו:



כלומר חוסר הודאות σ_3 קטן יותר מחוסר הודאות של σ_1, σ_2 ולכן הכפלת הגאוסינים נותנת תוצאה מדויקת יותר

מתמטית, עבור:

$$N\left(\mu_1, \sigma_1^2\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} e^{\frac{-(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \qquad N\left(\mu_2, \sigma_2^2\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} e^{\frac{-(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

$$N\left(\mu_1, \sigma_1^2\right) \cdot \quad N\left(\mu_2, \sigma_2^2\right)$$

נקבל:

$$N\left(\mu_3, \sigma_3^2\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_3^2}} e^{\frac{-(x-\mu_3)^2}{2\sigma_3^2}}$$

כאשר:

$$\mu_3 = \frac{\mu_1 \cdot \sigma_2^2 + \mu_2 \cdot \sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \qquad \sigma_3^2 = \frac{1}{\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}}$$

ומתקיים: $\left\{\begin{matrix} \sigma_3^2 \leq \sigma_1^2, \sigma_2^2 \\ \sigma_1 = \sigma_2 \Rightarrow \sigma_{\sigma_3}^2 = \frac{1}{2}\sigma_1^2 \end{matrix}\right\}$ וכאן רואים שחוסר הודאות קטן יותר

2.2.5 מקרי קצה

- אם $\sigma_1 \to 0$, כלומר יש לי 0 חוסר ודאות $\Leftarrow$ שאני סומך מאוד על μ_1 עד כדי שגם: $0 = \frac{1}{\underbrace{\frac{1}{\sigma_1^2}}_{\to\infty} + \frac{1}{\sigma_2^2}} = \sigma_3^2$, כלומר חוסר

ודאות μ_3 תהיה גם אפסית $\Leftarrow$ ההכפלה לא "פגעה" בידע שלי. וזה מתבטא גם ב-μ_3:

$$\mu_3 = \frac{\mu_1 \cdot \cancel{\sigma_2^2} + \overbrace{\mu_2 \cdot \sigma_1^2}^{\to 0}}{\underbrace{\sigma_1^2}_{\to 0} + \cancel{\sigma_2^2}} \to \mu_1$$

כלומר "כדאי לי" לנחש את μ_1 כי הוא ממש מדויק

- אם $\sigma_1 \to \infty$, כלומר יש לי ∞ חוסר ודאות μ_1 עד כדי שעדיף לי להתעלם ממנו:

$\sigma_2^2 \to \frac{1}{\underbrace{\frac{1}{\sigma_1^2}}_{\to 0} + \frac{1}{\sigma_2^2}} = \sigma_3^2$, כלומר נרצה התעלמות מוחלטת μ_1 כי חוסר הודאות שלי בו כ"כ גדול.

$$\mu_3 = \frac{\cancel{\mu_1 \cdot \sigma_2^2} + \mu_2 \cdot \overbrace{\cancel{\sigma_1^2}}^{\to\infty}}{\underbrace{\cancel{\sigma_1^2}}_{\to\infty} + \underbrace{\cancel{\sigma_2^2}}_{<\infty}} \to \mu_2$$

שאלה 1

נתונות שתי התפלגויות גאוסיות:

- לאחת ממוצע 10 , שונות בריבוע של 8

- לשניה ממוצע 13 ושונות בריבוע של 2

מה הממוצע והשונות החדשים של הכפלת הגאוסינים הללו?

תשובה:

$$\sigma_3^2 = \frac{1}{\frac{1}{\sigma_1^2}+\frac{1}{\sigma_2^2}} = \frac{1}{\frac{1}{8}+\frac{1}{2}} = 1.6$$

$$\mu_3 = \frac{\mu_1\cdot\sigma_2^2+\mu_2\cdot\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2} = \frac{10\cdot 2+13\cdot 8}{8+2} = \frac{20+104}{10} = 12.4$$

2.2.6 שאלה 2

נתון רובוט שנמצא בעולם חד ממדי,

- מקומו נתון על ידי PDF גאוסי: ממוצע 7 שונות בריבוע של 5
- ברגע מסוים ה GPS מדווח שהמיקום הוא 11 ולא 7
- לGPS יש חוסר דיוק מובנה המתאפיין בשונות בריבוע של 4 מטרים

מהו הניחוש הטוב ביותר למיקום הרובוט? מהי השונות החדשה?

$$\sigma_3^2 = \frac{1}{\frac{1}{5}+\frac{1}{4}} = 2.2$$

$$\mu_3 = \frac{\mu_1\cdot\sigma_2^2+\mu_2\cdot\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2} = \frac{7\cdot 4+11\cdot 5}{4+5} = 9.2$$

שאלה 3

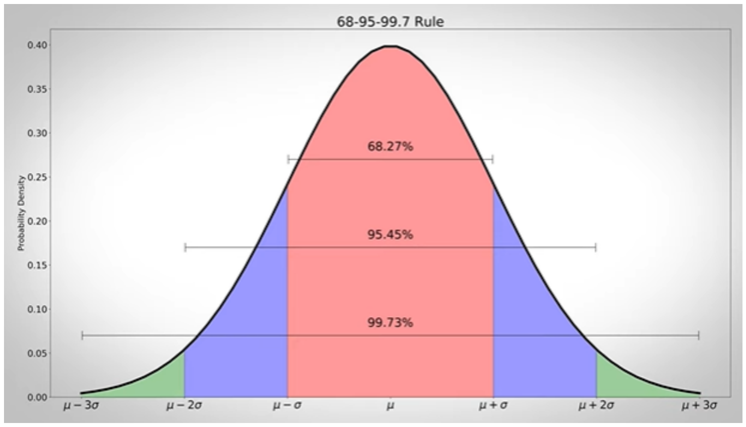
על בסיס המיקום האפריורי הראשון של הרובוט $(7,5)$ - פי כמה עלה דיוק המיקום הנוכחי של הרובוט מאשר לפני התזוזה?

$$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_3^2} = \frac{5}{2.2} = 5.27$$

2.2.7 תכנות חישוב PDF להשלים

2.2.8 הסתברות לעומת סבירות

נחזור לPDF הגאוסי:



$$N\left(\mu_1,\sigma_1^2\right)\rightarrow f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}}e^{\frac{-(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx=1$$

באותו מידה עם נניח שהגאוסין הנ"ל מתאר התפלגות ה IQ באוכלוסיה ולכן $\mu=100,\sigma=15$ אז ההסבתרות למצוא אדם עם IQ בין 85 ל 115 (בתווך של סטיית תקן אחת) היא:

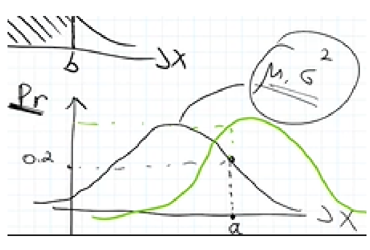
$$\int_{85}^{115} f(x)\ dx=0.69$$

לפי חוק $69,95,99$ שציינו לעיל. השאלה שעולה היא מהו הערך בנקודה $f(85)=y$ כלומר מה הy מסמל? נוסיף שאם נקח את $\int_{85}^{85} f(x)$ נקבל 0

נסביר דרך הביטוי:

$$P\left(\text{data/distribution}\right)\neq L\left(\text{distribution/data}\right)$$

- P היא שאלה על ה$data$ בהנתן שההתפלגות ידועה $\left(\mu,\sigma^2\right)$
  - נחדד על מנת לייצר את ההתפלגות אנחנו מנתחים המון $data$ וכאשר מגיע $data$ חדש אנחנו שואלים על ההסתברות $\underline{(probablity)}$ שלו ביחס ל$data$ הישן
  - וכאן נחשב באמת בעזרת האינטגל
- L היא שאלה על ההתפלגות בהנתן $data$ (אדם שהIQ שלו 85 , כמה מסתבר שההתפלגות מתסברת
  - נחדד כאן יש לנו $data$ ואנחנו שואלים מה הסבירות $\underline{(likelihood)}$ שההתפלגות נכונה
  - וכאן נחפש את ערך הy $f(x)=y$



בדוגמה : יש לנו רכב שנוסע.

- אם נשאל מה **ההסתברות** של הרכב להיות בנקודה a ? התשובה היא 0 (ביחס לאינסוף נקודות מטריות אפשריות) ואכן $\int_a^a f(x) = 0$
- אבל נניח ומדדנו וקיבלנו את a, וכעת נשאל מה הסבירות לכך מתוך μ, σ^2 הנתונים (השחור) והתשובה היא $f(x)$
  - נשים לב שאם נבחר μ', σ'^2 (הירוק) התשובה $f(x)$ היא אחרת - בירוק יותר גדול

שאלה 1

בהינתן ש־IQ מתפלג נורמלית באוכלוסייה עם ממוצע 100 וסטיית תקן של 15, מה הסיכוי $(Probability)$ שאדם אקראי אשר יידגם, יהיה בעל QI הגבוה מ־125?

$$P\left(X>125\right)=\int_{125}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot 15^2}}e^{\frac{-(x-100)^2}{2\cdot 15^2}}=0.477\ ??$$

שאלה 2

2. נניח שמצאנו אדם בעל IQ 125. מהי הסבירות $(Likelihood)$ שהוא הגיע מתוך אותה התפלגות נורמלית שתיארנו (ממוצע 100, סטיית תקן 15)?

$$L\left(125\right)=f(125)=\frac{1}{\sqrt{2\pi 15^2}}e^{\frac{-(125-100)^2}{2*15^2}}=0.00663\ ??$$

שאלה 3

מה הסבירות שהוא הגיע מהתפלגות שונה : $\mu=115, \sigma=20$

$$L\left(125\right)=f(125)=\frac{1}{\sqrt{2\pi 20^2}}e^{\frac{-(125-115)^2}{2*20^2}}=0.0176\ ??$$

2.2.9 חוק ליטלווד

- אם נס מגודר כאירוע שההסתברות להתרחשותו היא אחד למליון - אנחנו אמורים לצפות לראות "נס" בערך פעם בחודש כלומר כאשר קורות המון תופעות נצפה גם בכאלה נדירות
- רגישות הסיגמה בקצוות

2.3 מסנן קלמן - חלק ראשון

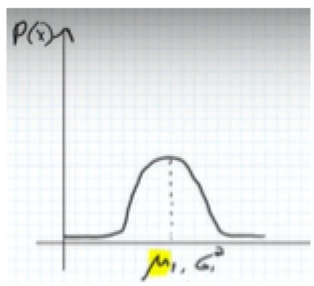
2.3.1 תזוזה אי ודאית (הכפלה)

- ניווט עיוור - ניווט על ידי מיקום קודם, ומהירות קבועה
  - ניווט עיוור - נסחף
- תנועה - תוספת של חוסר ודאות למערכת
- כעת נשאל:

1. איך מכלילים את התנועה במסגרת מסנן קלמן?
2. מה קורה במערכות סטטיות שאין בהן שינוי?

2.3.2 תנועה במסנן קלמן

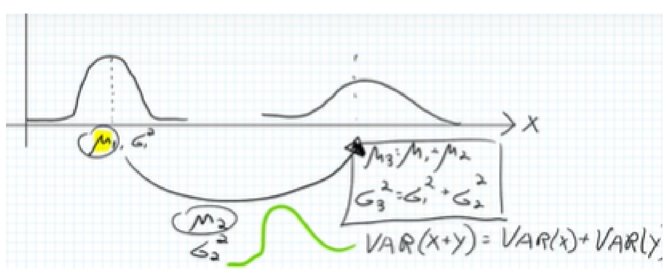
נניח ויש לנו גאוסין עם μ_1, σ_1^2 כלשהם המציינים את המיקום של הרובוט שלנו, אז:



וכעת נרצה להבין את התפלגות של מיקום הרובוט לאחר **תנועה** . צריך להבין שהתנועה בעצמה מכילה אי־ודאות כלשהי ולכן היא מתפלגת גאוסית עם μ_2, σ_2^2

ולכן צריך להבין המיקום החדש של הרובוט הוא $\begin{Bmatrix} \mu_3 = \mu_1 + \mu_2 \\ \sigma_3^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \end{Bmatrix}$

וזה מתקיים בגלל תכונות הוריאנס: $var\left(x+y\right) = var(x) + var(y$, ולכן הגרף יראה כך:



נשים לב שהעקומה נמוכה יותר בגלל שסטיית התקן גדולה יותר.

דוגמה:

רובוט מתפגש נורמלית סביב $x = 5$, וסטיית תקן של 2 מטרים

רובט זז 8 מטרים ימינה עם סטיית תקן (רעש) של 1.7

מה המיקום החדש של הרובוט? וסטיית התקן החדשה:

$$\mu_3 = \mu_1 + \mu_2 = 5 + 8 = 13$$
$$\sigma_3^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 = \sqrt{1.7^2 + 2^2} = 2.62$$

מהו הטווח ב95% מהמקרים על פי כלל $68 - 95 - 99$?

$$\mu - 2\sigma = 13 - 2 * 2.62 = 7.76$$
$$\mu + 2\sigma = 13 + 2 * 2.62 = 18.24$$

כנראה טעות באתר

2.3.3 להשלים תרגיל תכנות לסכום גאוסין להשלים

2.3.4 מדידה אי־ודאית (קונבולוציה

במודל סטטי: אי שינוי נרשום כך: $x_t = x_{t-1}$

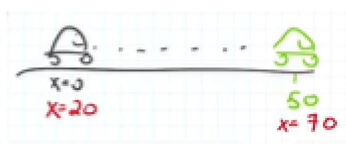
במודל דינמי: משוואות התנועה:

$$\text{זמן * מהירות = דרך} \iff s = v \cdot t$$

נשכלל:

$$x_t = x_{t-1} + \Delta t \cdot V$$

x_{t_1}נותן לנו ־עבור מהירות קבועה ־ את המיקום החדש ביחס למיקום הקודם (בציור האדום)



נשים לב שכאן $v_t = v_{t-1}$ שזו מהירות קבועה, אבל אנחנו רוצים לבנות מודל דינמי אז נרצה לסמן

$$v_t = \frac{dx_t}{dt} = \dot{x}_t$$

ולכן:

$$x_t = x_{t-1} + \Delta t \cdot \dot{x_{t-1}}$$
$$\dot{x_t} = \dot{x_{t-1}}$$

2.3.5 שאלה

נניח שאנחנו רוצים להעריך גובה של בניין בעזרת מד גובה לא מדויק. מה שאנחנו יודעים בוודאות הוא שגובה הבניין אינו משתנה עם הזמן (לפחות לא במשך המדידה...). בדוגמה שלנו:

הגובה המדויק של הבניין הוא 50 מטרים.

שגיאת המדידה של מד הגובה היא 5 מטרים (סטיית תקן).

רצף של 10 מדידות עוקבות נתן את הערכים האלה:

מס מדידה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
תוצאה (מטרים)	48.54	47.11	55.01	55.15	49.89	40.85	46.72	50.05	51.27	49.95

כפי שראינו בפרק, אנחנו מתחילים תמיד מניחוש ראשוני של המצב $(STATE)$ ושל חוסר הוודאות. במקרה שלנו, ההערכה בעין היא שגובה הבניין הוא 60 מטרים.

נניח שסטית התקן $\sigma^2 = 225 \Leftarrow \sigma = 15$

$$\begin{pmatrix} Est \\ E_{est} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 15 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Mes \\ E_{Mes} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48.54 \\ 5 \end{pmatrix}$$

<u>א. מה יהיה קבוע קלמן ושערוך הגובה החדש לאחר המדידה הראשונה?</u>

נזכר במשוואות

1. $kg = \frac{E_{est}}{E_{est}+E_{meas}}$
2. $Est_t = Est_{t-1} + kg\left[Meas_t - Est_{t-1}\right]$
3. $E_{EST_t} = [1-kg]\left(E_{EST_{t-1}}\right)$(יש טעות באתר)

$$kg = \frac{15}{15+5} = \frac{15}{20} = \mathbf{\frac{3}{4}}$$
$$Est = 60 + \frac{3}{4}(48.54 - 60) = \mathbf{51.405}$$
$$E_{est_t} = (1-0.75)(15) = 3.75$$

ב. מה יהיה חוסר הוודאות החדש ?

מדידה שניה:

$$kg = \frac{3.75}{3.75+5} = \frac{3}{7} = \mathbf{0.428}$$
$$Est = 51.405 + \frac{3}{7}(47.11 - 51.405) = \mathbf{49.564}$$
$$E_{est_t} = \left(1 - \frac{3}{7}\right)(3.75) = 2.142$$

מדידה שלישית:

$$kg = \frac{2.142}{2.142+5} = \frac{3}{10} = \mathbf{0.3}$$
$$Est = 49.564 + \frac{3}{10}(55.01 - 49.564) = \mathbf{51.1978}$$
$$E_{est_t} = \left(1 - \frac{3}{10}\right)(2.142) = 1.499$$

2.3.6 מסנן אלפא

3 מסנן קלמן חלק שני

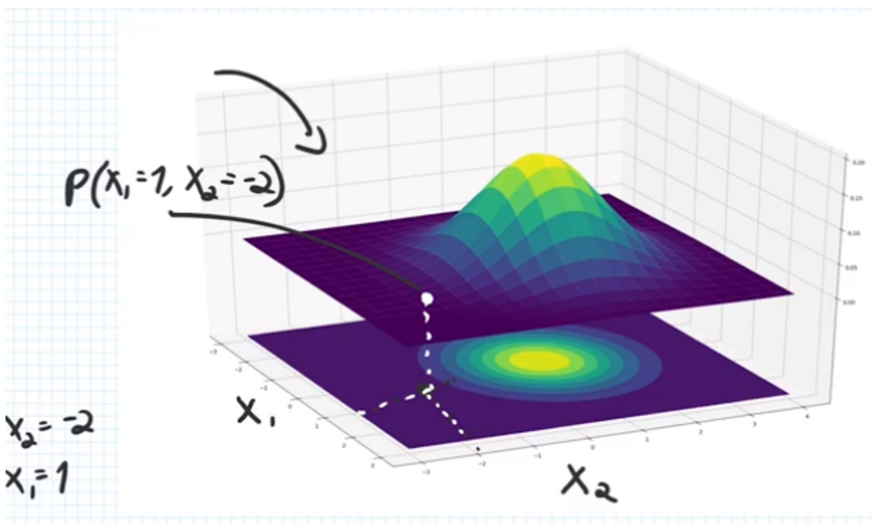
3.1 מבואות הכרחיים

3.1.1 גאוס בשני מימדים

התפלגות גאוס:

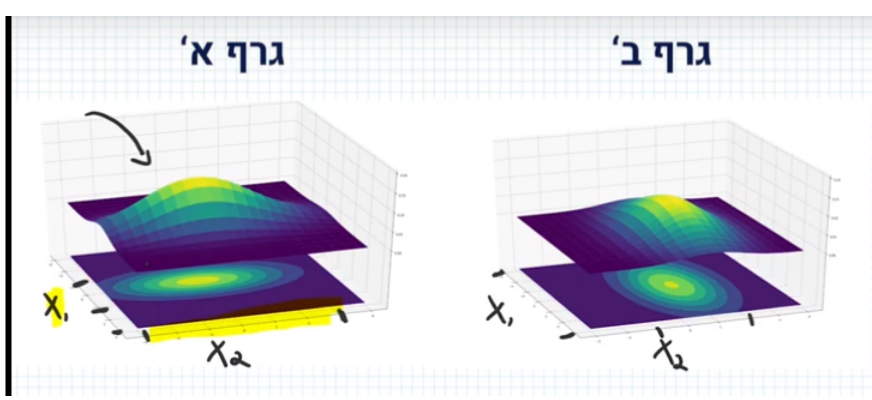
$$N\left(\mu_0,\sigma^2\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}}e^{\frac{-(x-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2}}$$

התפלגות גאוס בשני מימדים, לדוגמה:



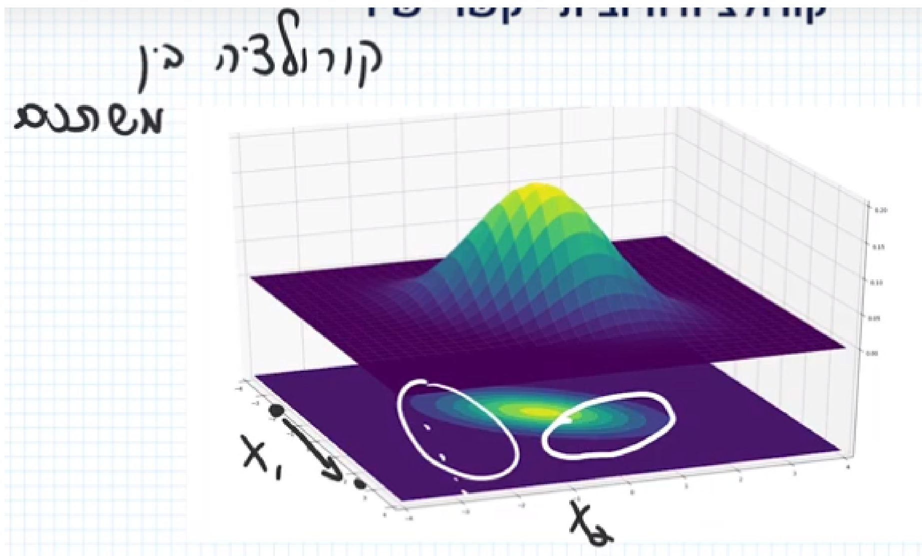
בדוגמאות הבאות ניתן לראות שאין השפעה בין x_1 ל x_2 , המשתנים בלתי תלויים:

- גרף א ־ ניתן לראות שx_1 מאוד מדויק, סטיית התקן שלו מאוד קטנה, לעומת x_2 שאצלו סטיית התקן מאוד כלומר אי הודאות שלו מאוד גבוה
- גרף ב ־ הפוך



לעומת זאת בציור הבא, כן ניתן לראות השפעה ־ ניתן לראות את הזוית שמלמד אותנו שכאשר x_1 עולה , x_2 גם עולה:

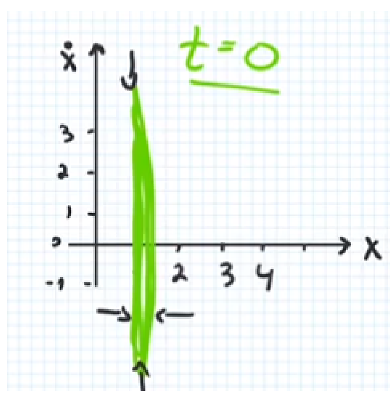
- דוגמה מהחיים ־ גובה ומשקל



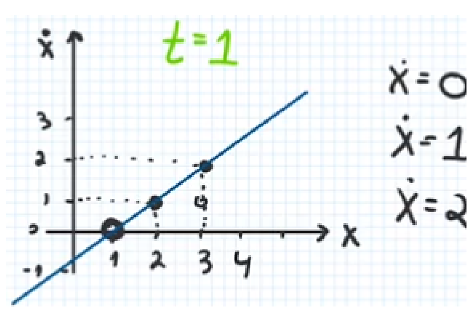
<u>אצלנו־ בעולם הניווט</u>

נסמן x ־ מיקום , v ־ מהירות, ניתן גם להגדיר זאת כנגזרת של המהירות בזמן כלומר $v(\dot{x})$, נראה שיש קשר בין המהירות למיקום, איך?

נניח שאנחנו ב $t=0$ ושאנחנו יכולים למדוד רק את המיקום ־ וגילינו ש $x=1$, ונניח שאני לא יודע מהי המהירות אז הגרף יראה כך:



עכשיו נסתכל על $t=1$, ונניח ש $\dot{x}=0$ או $\dot{x}=1$ או $\dot{x}=2$ אז:

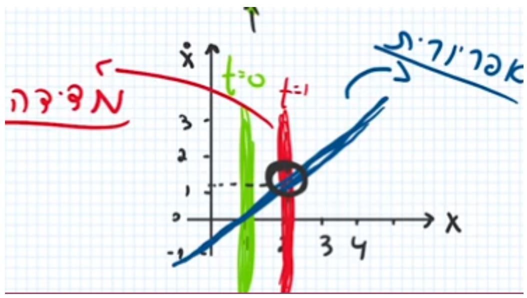


כלומר:

- אם המהירות 0 והייתי במקום 1 ,אז מקומי לא השתנה,

- אם המהירות 1, אז כעת אהיה ב $x = 2$ עם $v\left(\dot{x}\right) = 1$
- אם $v\left(\dot{x} = 2\right)$ אז $x = 3$, וכן הלאה..
- וזה בדיוק הקשר שמבטאת הנוסחא $x = \dot{x} \cdot \Delta t$

כעת נחבר - בין שני הנושאים:



והגרף הנ"ל נותן לנו את הניחוש הטוב ביותר, להיכן נהיה בצעד הבא בהסתמך על הקשר בין שני המשתנים (המיקום למהירות), נסתייע בכך כאשר החיישנים שלנו מפספסים, ונצטרך ל"נחש" היכון אנחנו נמצאים.

קורלציה בין משתנים

חישוב השונות:

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} \left(\tilde{x} - x_i\right)^2}{N}$$

$\tilde{x} =$ הממוצע

סטיית תקן:

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}$$

כלומר סטיית התקן היא שורש של **השונות** (ולכן השורש לא מבטל את החזקה)

$CoVarince$:

$$\sigma_x \sigma_y = \frac{\sum_{i=1}^{N} \left(\tilde{x} - x_i\right)\left(\tilde{y} - y_i\right)}{N}$$

דוגמה:

נתונים וקטורים המייצגים ציונים של תלמידים באנגלית ומתמטיקה כאשר תלמיד שורה 0 מייצגת את תלמיד 0 וכן הלאה

$$\underline{\text{English}} \qquad\qquad\qquad \underline{\text{Math}}$$

$$\begin{pmatrix} 60 \\ 80 \\ 50 \\ 100 \\ 95 \end{pmatrix} \Rightarrow \widetilde{En} = 77 \qquad \begin{pmatrix} 73 \\ 80 \\ 47 \\ 92 \\ 88 \end{pmatrix} \Rightarrow \widetilde{Ma} = 76$$

$$\frac{(77-60)(76-73)+(77-80)(76-80)+(77-50)(76-47)+(77-100)(76-92)+(77-95)(76-88)}{5} = \frac{51+12+783+368+216}{5} = 129.4$$

נרצה לברר האם ישנה קורלציה בין הצלחה באנגלית להצלחה במתמטיקה (או להפך) - נשים לב שאם קיבלנו <u>שאין קורלוציה המשמעות היא שלא ניתן ללמוד</u> מאחד לשני

נחשב זאת על ידי ה $CoVarince$ (קרוליציה היא לנרמל את המספר)

נבנה את המטריצת $covarince$ בעולם שלנו:

$$P = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_x\sigma_y \\ \sigma_y\sigma_x & \sigma_y^2 \end{bmatrix}$$

אצלנו נניח שיש לנו $\mu = \begin{pmatrix} \text{location=l} \\ \text{velocity=v} \end{pmatrix}$,אז:

- האלכסון מייצג את השונות של כל משתנה
- ושאר המשתנים נראה את ה $covariance$ בין המשתנים
- המטריצה תהיה ריבועית, סימטרית כלומר $A_{ij} = A_{ji}$
- נחדד: $\sqrt{\sigma_x^2} \cdot \sqrt{\sigma_y^2} \cdot \neq \sigma_x^2 \cdot \sigma_y^2 \cdot$, כלומר על מנת לחשוב קורצליה צריך ממש לחשב את ההשפעה של המשתנים אחד על השני

שאלה:

$$x_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 10 \\ 22 \\ 55 \\ 7.5 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.3 \\ 3 \\ 6 \\ 21 \\ 33 \\ 10 \end{pmatrix}$$

רשאית נחשב את הממוצע:

$$\tilde{x_1} = 14.78, \tilde{x_2} = 10.5$$

כעת נציב:

$$= \frac{(14.78-2)(10-0.2)+(14.78-3)(10-0.3)+....+(14.78-7.5)(10-10)}{7} = 188.65$$

טעות באתר

3.1.2 משוואות התנועה

- מהירות קבועה

$$V\left(t\right)=V_0$$
$$X\left(t\right)=\int_0^t V\left(t\right)\ dt=\underline{\boldsymbol{V_0\cdot t+X_0}}$$

- תאוצה קבועה

$$a\left(t\right)=a_0$$
$$V\left(t\right)=\int_0^t a(t)\ dt=a_0\cdot t+V_0$$
$$X\left(t\right)=\int_0^t V\left(t\right)\ dt=\underline{\boldsymbol{V_0\cdot t+\frac{1}{2}\cdot a_0\cdot t^2+X_0}}$$

דוגמאות:

1. רכב נוסע במהירות קבועה של 5 מטר בשנייה. נניח שהרכב התחיל את הנסיעה שלו ב $X=14$, מה יהיה המיקום שלו לאחר 11 שניות?

   נציב:

$$X(11)=5\cdot 11+14=69$$

2. רכב עומד בנקודה $X=0$ ומאיץ בתאוצה של 4.5 מטר בשנייה בריבוע. לאחר כמה זמן יגיע הרכב לנקודה $X=100$?

   נציב:

$$100=\frac{1}{2}\cdot 4.5\cdot t^2\Leftrightarrow 44.44=t^2\Leftrightarrow 6.66=t$$

3.2 קלמן בשני מימדים

3.2.1 שלב ה - Prediction

<u>חלק ראשון:</u>

לגאוס במימד אחד נזקק ל: σ^2,μ

לגאוס בכמה מימדים נזקק ל $\sum,\mu$ כאשר:

$$\mu=\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\\ \vdots\\ \\ \end{pmatrix},\sum=\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \sigma_{1,2} & \cdots & \\ \sigma_{2,1} & \sigma_2^2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ & & & \sigma_n^2\end{pmatrix}$$

$\sum$ ריבועית וסימטרית = $\sum ij=\sum ji$

μ = וקטור המצב

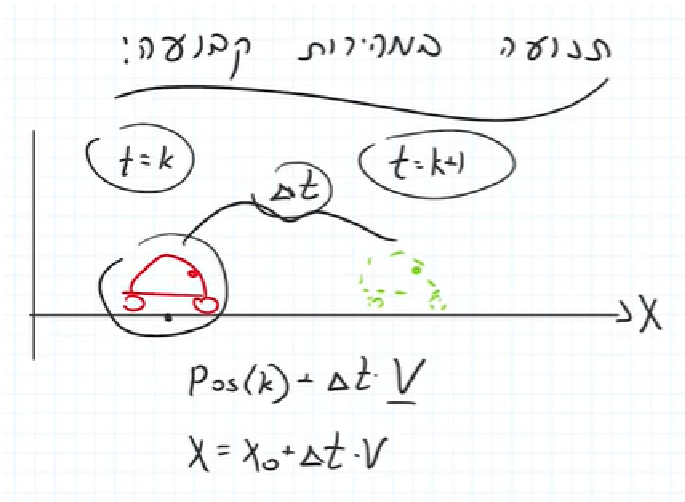
נוכל להגדיר μ את הערכים שאותם אנחנו רוצים לבדוק ולשערך למשל, נסמן $\mu=\overrightarrow{x}_k$ כאשר:

$$\overrightarrow{x}_k=\begin{pmatrix}\text{Position}\\ \text{Volocity}\end{pmatrix}$$

כעת נגדיר $P = \sum$:

$$P = \begin{pmatrix} \sigma_{pos}^2 & \sigma_{pos*vol} \\ \sigma_{vol*pos} & \sigma_{vol}^2 \end{pmatrix}$$

כעת נרצה להשתמש בכלים אלו (הגאוסין המטרציוני + משוואות התנועה על מנת לתאר תנועה במהירות קבועה:



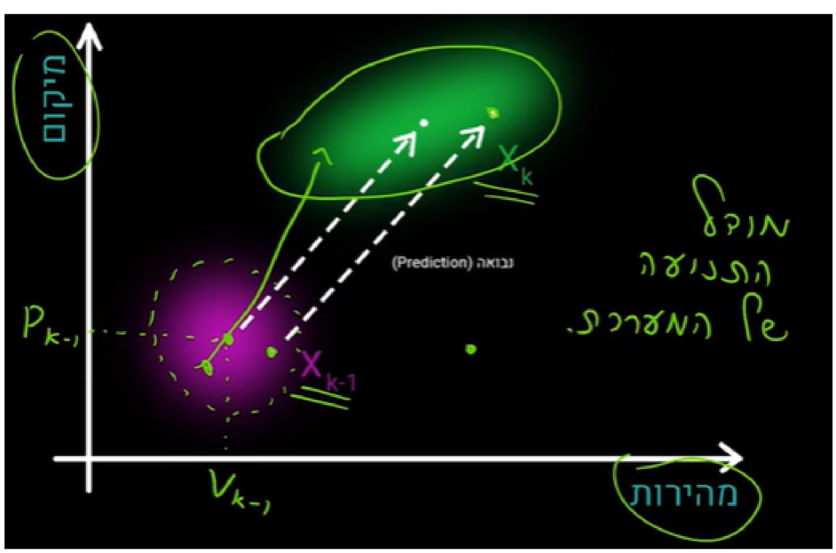
כלומר תרגמנו את התזוזה למשוואת התנועה וכעת נכיל את הכתיב המטריציוני:

$$\begin{aligned} P\,(k+1) &= P(k) + \Delta t \cdot v_k \\ V\,(k+1) &= \quad +V(k) \end{aligned} \iff \begin{pmatrix} P \\ V \end{pmatrix}_{k+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{F\ \text{(in Kalman)}} \begin{pmatrix} P \\ V \end{pmatrix}_k$$

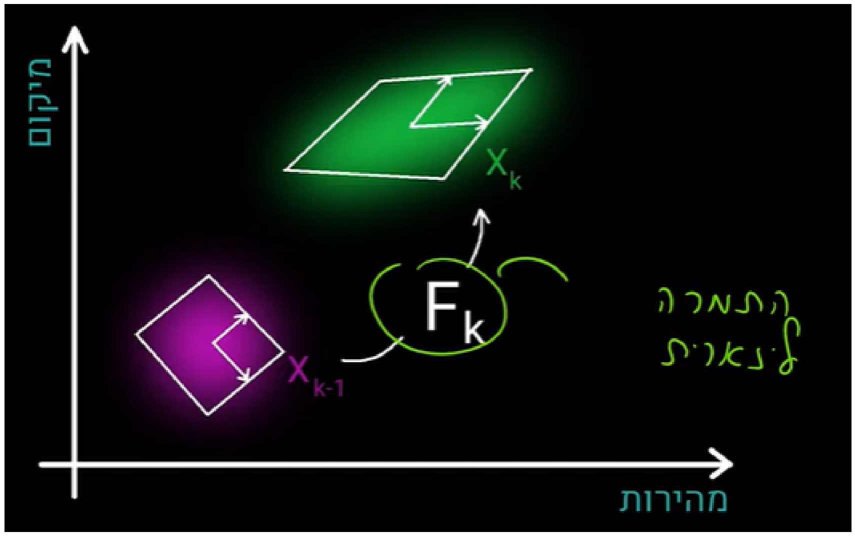
נסתכל על זה בצורה גרפית:

בגרף כל נקודה מתארת מהירות ומיקום.

כל נקודה בסגול מייצגת את השערוך שלי למיקום/מהירות ה $k-1$ וכעת נרצה "להעביר" כל נקודה לצעד ה k



ולמעשה מסנן קלמן יכול לקחת מודלים לנארים לתרגם למשוואות לינאריות = מטריצות ולבצע את המעבר לצעד הבא על ידי התמרה (F) ובגרף זה יראה כך:



נעזר בכלל $\left\{\begin{matrix} cov(x)=\sum \\ cov(A\cdot x)=A\cdot\sum\cdot A^T\end{matrix}\right\}$, ולכן כיון ש P היא מטריצת cov אז:

$$X_k = F\cdot X_{k-1}$$
$$P_k = F\cdot P_{k-1}\cdot F^T$$

<u>חלק שני:</u>

נרצה להתמודד עם שינויים ידועים ורעש סטוכסטי

ידועים ־ למשל תאוצה/תאוטה/סיבוב הגה ־ כל שינוי שאנחנו יודעים עליו יכול להכנס לוקטור בקרה $\vec{u}_k$ ובכך לשפר את הדיוק

$$\begin{aligned} P_k &= P_{k-1}+\Delta t\cdot V_{k-1}+\tfrac{1}{2}A_0\Delta t^2 \\ V_k &= \qquad\quad V_{k-1}+\Delta t\cdot a_0\end{aligned}$$

הוספנו גורמים לינאריים, ואת כולו נעביר לכתיב מטריציוני:

$$\begin{pmatrix}P\\V\end{pmatrix}_k=\begin{pmatrix}1&\Delta t\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P\\V\end{pmatrix}_{k-1}+\underbrace{\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\Delta t^2\\ \Delta\end{pmatrix}}_{\substack{2\times 1\\ \text{B (in Kal')}}}\underbrace{a_0}_{\substack{1\times 1\\ \vec{u}}}$$

B ־ מטריצת הבקרה, $\vec{u}$ ־ וקטור הבקרה

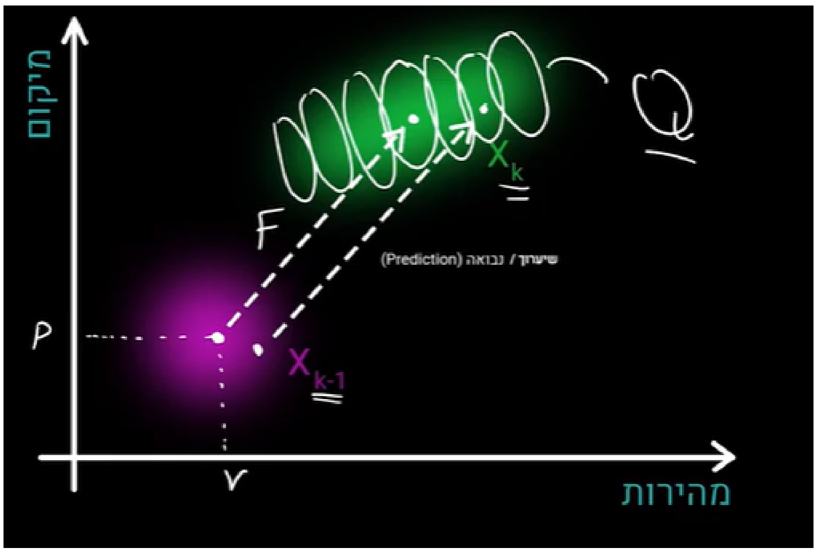
וכעת נוכל לדייק יותר את המיקום על פי המשוואות:

$$X_k = F \cdot X_{k-1} + B \cdot u$$

נשים לב שאין רעש במשוואה כי הרעש מתפלג סביב 0 , ולכן אין לו משמעות כאן, אבל:

רעש סטוכסטי:

נזכר שתארנו תזוזה בקלמן אחד: $\begin{Bmatrix} \mu_{new} = \mu_{old} + \mu_{motion} \\ \sigma^2_{new} = \sigma^2_{old} + \sigma^2_{motion} \end{Bmatrix}$ μ, σ^2_{motion} מכילים את אי־הודאות שבתנועה, בגרף:



כלומר, נקודה באזור הסגול עוברת למיקום "לא ידוע" בירוק ואנו ניתן לזה ביטוי ע"ל ידי מטריצה Q

$$\begin{Bmatrix} X_k = F \cdot X_{k-1} + B \cdot u \\ P_k = F_k P_{k-1} F_k^T + Q_k \end{Bmatrix}$$

שאלה 1

הנח מודל מהירות קבועה. איך תיראה מטריצת F כאשר וקטור המצב נראה כך $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ \dot{X} \\ \dot{Y} \end{pmatrix}$ והמערכת נדגמת כל T שניות?

נרצה ש $\begin{pmatrix} X_t + \Delta T \\ Y_t + \Delta T \\ \dot{X}_t \\ \dot{Y}_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ \dot{X} \\ \dot{Y} \end{pmatrix}^{t+1}$ ולכן:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \Delta T & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \Delta T \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ניתן לוודא: $X^{t+1} = FX^t$

שאלה 2

הנח מודל עם תאוצה קבועה בשני מימדים . והתאוצה היא חלק מווקטור המצבים. איך תיראה מטריצת F במקרה זה? כאשר וקטור המצב נראה כך $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \ddot{X} \\ \ddot{Y} \end{pmatrix}$ והמערכת נדגמת כל T שניות?

נרצה ש $\begin{pmatrix} X_t + \Delta T + \frac{1}{2}\Delta T^2 \\ Y_t + \Delta T + \frac{1}{2}\Delta T^2 \\ X_t \dot{+} \Delta T \\ \dot{Y}_t + \Delta T \\ \ddot{X} \\ \ddot{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \ddot{X} \\ \ddot{Y} \end{pmatrix}^{t+1}$ ולכן:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \Delta T & 0 & \frac{1}{2}\Delta T^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \Delta T & 0 & \frac{1}{2}\Delta T^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \Delta T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \Delta T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

שאלה 3

נתונה מערכת: התנועה היא בשני ממדים, וקיימת תאוצה בכל ציר. וקטור המצב נראה כך: $X = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ \dot{X} \\ \dot{Y} \end{pmatrix}$ ו:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \Delta T & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \Delta T \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} ax \\ ay \end{pmatrix}$$

כיצד תראה המטריצה B

נזכיר ש:

$$\begin{Bmatrix} X_k = F \cdot X_{k-1} + B \cdot u \\ P_k = F_k P_{k-1} F_k^T + Q_k \end{Bmatrix}$$

פתרון:

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\Delta T^2}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\Delta T^2}{2} \\ \Delta T & 0 \\ 0 & \Delta T \end{pmatrix}$$

הסבר:

$$\begin{pmatrix} \frac{\Delta T^2}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\Delta T^2}{2} \\ \Delta T & 0 \\ 0 & \Delta T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ax \\ ay \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax * \frac{\Delta T^2}{2} \\ ay * \frac{\Delta T^2}{2} \\ ax * \Delta T \\ ay * \Delta T \end{pmatrix}$$

והמשוואה הכוללת תהיה:

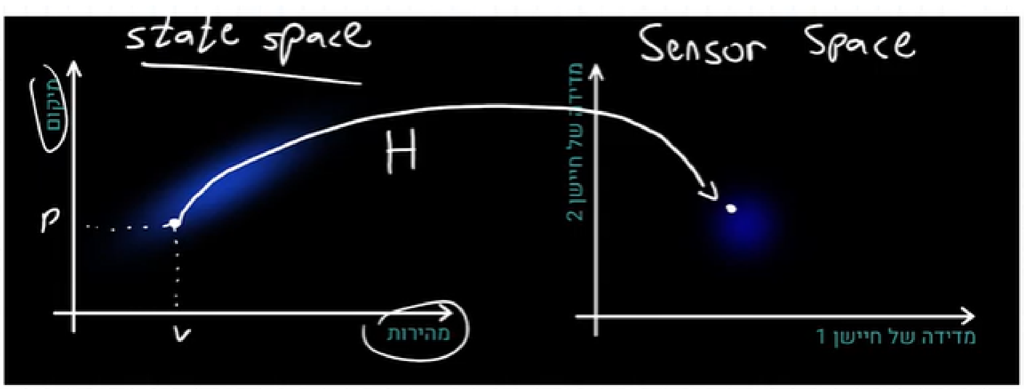
$$X^{t+1} = \begin{pmatrix} X_t + \Delta T \\ Y_t + \Delta T \\ \dot{X}_t \\ \dot{Y}_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ax * \frac{\Delta T^2}{2} \\ ay * \frac{\Delta T^2}{2} \\ ax * \Delta T \\ ay * \Delta T \end{pmatrix}$$

ובכך קיבלנו גם את ההאצה.

3.2.2 שלב ה - $Measurement$

<u>חלק ראשון:</u>

הבעיה לא תמיד החיישן מכיל את המידע שאנו צריכים ל X_k



הגרף השמאלי מתאר $X-state$, הגרף הימני מתאר $sensor-state$, ואנחנו נרצה לצור טרנספורמציה בין המצב הקיים למידע שאני מקבל, נעשה זאת על ידי מטריצה H

דוגמה:

נניח ויש לנו וקטור עם מיקום ומהירות וחיישן של מיקום אז:

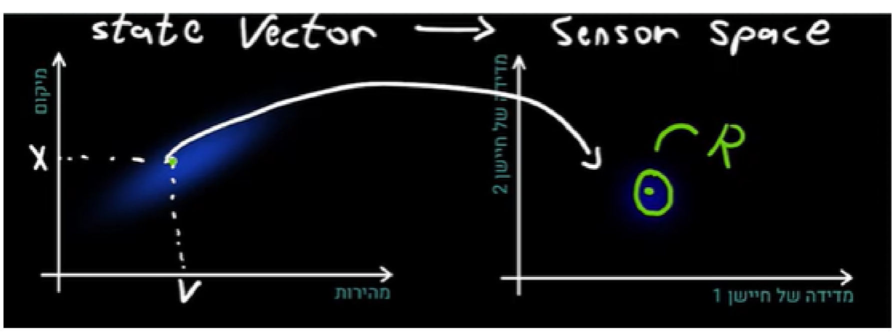
$$X=\begin{pmatrix}Pos\\Vol\end{pmatrix}\quad\underrightarrow{\quad how? \quad}\quad Pos$$
$$H=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}$$
$$HX=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Pos\\Vol\end{pmatrix}=\underbrace{(Pos)}_{\text{R (in Kal)}}$$

- נשים לב שאם יש לנו חיישן שבודק גם מיקום וגם מהירות אז $H=I=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$
- אם $H=\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}$ אז: $\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Pos\\Vol\end{pmatrix}=(Pos+Vol)_{1\times1}$ כלומר זהו חיישן שיודע לחשב את המיקום + המהירות

לסיכום:

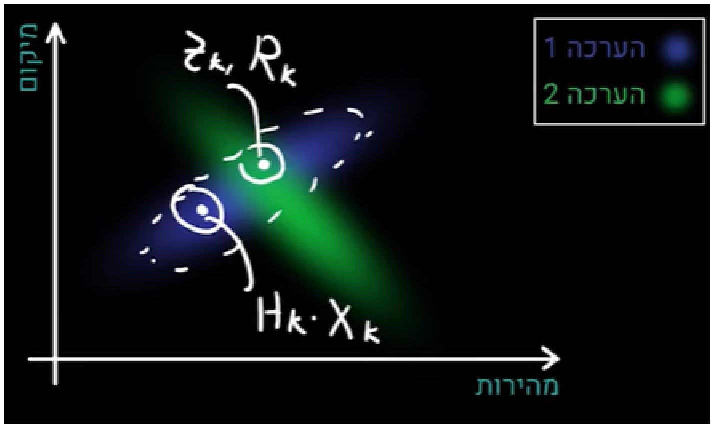
$$\mu_{expected}=H_k\cdot X_k$$
$$\sum\nolimits_{expected}=H_kPH_k^T$$

<u>חלק שני:</u>



המעבר ממרחב המצב למרחב החיישן מתבצע על ידי HX שנותנת מטריצה R

כעת, נרצה לדעת לסנכרן בין המדידה להערכה (וקטור המצב) . בציור נניח שהכחול היא ההערכה, והמדידה היא הירוק:



כיצד נעשה זאת? על ידי מסנן קלמן, רק שעכשיו נצטרך לעלות במימדים:

לפני נעשה צעד קטן של סידור, במשוואת שאנחנו מכירים:

$$\mu_3 = \boldsymbol{\mu_2} + \frac{\boldsymbol{\sigma_2^2(\mu_1-\mu_2)}}{\boldsymbol{\sigma_1^2+\sigma_2^2}} = \frac{\mu_2\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)}{\sigma_1^2+\sigma_2^2} + \frac{\sigma_2^2\mu_1-\sigma_2^2\mu_2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2} = \frac{\mu_2\sigma_1^2 \cancel{+\mu_2\sigma_2^2} + \sigma_2^2\mu_1 \cancel{-\sigma_2^2\mu_2}}{\sigma_1^2+\sigma_2^2} = \frac{\boldsymbol{\mu_1\cdot\sigma_2^2+\mu_2\cdot\sigma_1^2}}{\boldsymbol{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}$$

$$\sigma_3^2 = \boldsymbol{\sigma_2^2} - \frac{\boldsymbol{\sigma_2^2}}{\boldsymbol{\sigma_1^2+\sigma_2^2}} = \frac{\sigma_2^2\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)-\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2} = \ldots = \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2} = \frac{\frac{1}{1}}{\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}} = \frac{1}{\frac{1}{\sigma_1^2}+\frac{1}{\sigma_2^2}}$$

כלומר:

$$\left\{\begin{matrix} k = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_0^2+\sigma_1^2} \\ \\ \mu' = \mu_0 + k\left(\mu_1-\mu_0\right) \\ \sigma'^2 = \sigma_0^2 - k\sigma_0^2 \end{matrix}\right\}$$ ומכאן נוכל לעבור לשני מימדים:

$$(3)\ K = \textstyle\sum_0 \left(\sum_0 + \sum_1\right)^{-1}$$

$$(1)\ \vec{\mu}' = \vec{\mu}_0 + K\left(\vec{\mu}_1 - \vec{\mu}_0\right)$$
$$(2)\ \textstyle\sum' = \sum_0 - K\sum_0$$

לסיכום:

$$\underline{\text{Measurement}} \qquad\qquad \underline{\text{Estimation}}$$
$$\begin{pmatrix}\mu_1\\ \sum_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\vec{z}_k\\ R_k\end{pmatrix} \qquad\qquad \begin{pmatrix}\mu_0\\ \sum_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}H_kX_k\\ H_kP_kH_k^T\end{pmatrix}$$

$$(1)\ H_kx_k' = H_kx_k + K\left(\vec{z}_k - H_kx_k\right)$$
$$(2)\ H_kP_k'H_k^T = H_kP_kH_k^T - KH_kP_kH_k^T$$
$$(3)\ K = \underbrace{H_kP_kH_k^T}_{\sum_0}\left(\underbrace{H_kP_kH_k^T}_{\sum_0} + \underbrace{R_k}_{\sum_1}\right)^{1}$$

נפשט על ידי "חילוק ב H_k המופיע בשני צדי המשוואות :

$$(1)\ x'_k = x_k + K'\left(\overrightarrow{z}_k - H_k x_k\right)$$

$$(2)\ P'_k = P_k - K' H_k P_k$$

$$(3)\ K' = P_k H_k^T \left(H_k P_k H_k^T + R_k\right)^{-1}$$

שאלה 1

נניח שווקטור המצב נראה כך: $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ \dot{X} \end{pmatrix}$

ויש לי חיישן היכול למדוד את הנתון $X+Y$. איך תיראה מטריצת H ?

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ויתקיים ש:

$$\mu = HX = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ \dot{X} \end{pmatrix} = X + Y$$

שאלה 2

בהנחה שווקטור המצב מכיל מיקום ומהירות בשני צירים $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ \dot{X} \\ \dot{Y} \end{pmatrix}$

, ויש לי חיישן המספק מדידה עבור מיקום בציר X ומיקום עבור ציר Y - איך תיראה מטריצת H?

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

מטריצת רעש

3.3 אלגוריתם קלמן:

על פי הסרטונים $35 - 26$:

https://www.youtube.com/watch?v=Fuy73n6_bBc&list=PLX2gX-ftPVXU3oUFNATxGXY90AULiqnWT&index=27

$$
\begin{array}{ccccc}
\textbf{init} & & \textbf{prev st.} & & \textbf{new predicted state} \\
\begin{pmatrix} X_0 \\ P_0 \end{pmatrix}^{0} & \dashrightarrow & \begin{pmatrix} X_{k-1} \\ P_{k-1} \end{pmatrix} & \longrightarrow & \begin{pmatrix} X_k = AX_{k-1} + Bu_k + w_r \\ P_{k_p} = AP_{k-1}A^T + Q_k \end{pmatrix}^{1,2,3} \\
 & & \uparrow^{8} & & \downarrow
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccc}
\begin{pmatrix} P_k = (I - KH)\, P_k \\ X_k \end{pmatrix}^{7} & \longleftarrow & \begin{pmatrix} K = \frac{P_K H^T}{H P_{k_p} H^T + R} \\ X_k = X_{k_p} + K\,[Y - HX_k] \end{pmatrix}^{4,6} & \longleftarrow & (Y_k = CY_{k_m} + z_m)^{5} \\
\textbf{update state} & & \textbf{Adjust predicted state} & & \textbf{new observation}
\end{array}
$$

0. אתחול = הצבת הנתונים:

1. חישוב ה predicted state : עדכון המיקום X_k על פי משוואות התנועה + רעש w_k

2. אתחול מטריצת ה cov (עושים זאת פעם אחת):

3. חישוב ה predicted covarince state: עדכון ל P_{K_p} + רעש (Q)

4. חישוב ה $Kalman\ Gain$: כולל מעבר ממרחב המצב למרחב החיישן (H) + רעש (R)

5. קבלת מדידה חדשה: כולל מעבר ממרחב החיישן למרחב המצב (C) + (z)

6. חישוב מצב נוכחי (או התאמת הנתונים הקיימים) : התאמה X_k

7. עדכון מטריצת ה cov: התאמה P_k

8. "העכשווי הופך לקודם": הכנה למחזור הבא $X, P_k \Rightarrow X, P_{k-1}$ (חזור ל1)

דוגמה (שאלה באתר):

רעש בתהליך הcov		נתון			
ΔP_x	ΔP_{v_x}	$V_{0,y}$	y_0	$V_{0,x}$	x_0
$20m$	$5\frac{m}{sec}$	$120\frac{m}{sec}$	$3000m$	$280\frac{m}{sec}$	$4000m$
שערוך הטעות		**תנאים התחלתיים**			
Δx	ΔV_x	V_x	a_x	Δx	Δt
$25m$	$6\frac{m}{sec}$	$280\left(\frac{m}{sec}\right)$	$2\left(\frac{m}{sec^2}\right)$	$25m$	$1sec$

Observations:

X_0 = 4000m	V_{0X} = 280m/sec
X_1 = 4260m	V_{1X} = 282m/sec
X_2 = 4550m	V_{2X} = 285m/sec
X_3 = 4860m	V_{3X} = 286m/sec
X_4 = 5110m	V_{4X} = 290m/sec

0. אתחול = הצבת הנתונים:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ v_{0,x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4000 \\ 280 \end{pmatrix}, \Delta t = 1, \quad \underbrace{a_x = 1}_{accaleration}$$

3.3.1 .1 חישוב ה predicted state:

$$X_k = AX_{k-1} + Bu_k + w_r = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ v_{0,x} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cdot \Delta t^2 \\ \Delta t \end{bmatrix} [a_{x_0}] + 0$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 4000 \\ 280 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} [2] = \begin{bmatrix} 4000 + 280 \\ 280 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4281 \\ 282 \end{bmatrix} = X_{k_p}$$

3.3.2 .2 אתחול מטריצת ה cov (עושים זאת פעם אחת):

נעיר שהנתונים ההתחלתיים הם ניחוש סביר:

$$P_{k-1} = \begin{bmatrix} \Delta x^2 & \Delta x \Delta V_x \\ \Delta V \Delta x & \Delta V_x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20^2 & 100 \cdot 5 \\ 5 \cdot 100 & 5^2 \end{bmatrix} \Rightarrow P_{k-1} = \begin{bmatrix} 400 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix}$$

נשארנו רק עם השונות בריבוע - כי בדוגמה אין השפעה בין המיקום למהירות, ולכן נשמיט בשביל להקל על החישוב

3.3.3 .3 חישוב ה predicted covarince state

הערה: לעיל תארנו את A כF , ונניח שאין רעש לכן $Q = [0]$

$$P_{k_p} = AP_{k-1}A^T + Q_k = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 400 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \Delta t & 1 \end{bmatrix} + 0 =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 400 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 425 & 25 \\ 25 & 25 \end{bmatrix} \Rightarrow P_{k_p} = \begin{bmatrix} 425 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix}$$

3.3.4 .4 חישוב ה $Kalman\ Gain$

- נזכיר ש H מעבירה ממרחב המצב למרחב החיישן, במקרה שלנו החיישן יודע לקבל מהירות ומיקום ולכן צריך להשאר באותו מימד ולכן $H = H^T = I^2$

כמו כן, kg אנחנו מאבחנים את הרעש של המדידה לעומת הטעות בהערכה שלנו. מטריצה R היא הרעש במדידה , ועל פי הנתונים והשמטה:

$$R = \begin{bmatrix} 25^2 & 0 \\ 0 & 6^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 625 & 0 \\ 0 & 36 \end{bmatrix}$$

- כעת נחשב:

$$K = \frac{P_K H^T}{HP_{k_p}H^T + R} = \frac{\begin{bmatrix} 425 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 425 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 625 & 0 \\ 0 & 36 \end{bmatrix}}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} 425 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 425 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 625 & 0 \\ 0 & 36 \end{bmatrix}} = \frac{\begin{bmatrix} 425 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1050 & 0 \\ 0 & 61 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 425 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1050 & 0 \\ 0 & 61 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 425 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix}\left(\frac{1}{1050*61-0}\begin{bmatrix} 61 & -0 \\ -0 & 1050 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0.405 & 0 \\ 0 & 0.410 \end{bmatrix}$$

נזכיר ש K גדול פרושו R קטן פרושו לא סומכים כל כך על המדידה (ולהיפך)

3.3.5 .5 קבלת מדידה חדשה

- ראשית צריך לודא שמימד הנתונים של המדידה החדשה אכן מתאים למימד של ה$state$ שלנו (X_k) , ולכן קיימת מטריצה C שבמקרה הצורך מעבירה ממימד החיישן למימד המצב אצלנו הכל באותו מימד ולכן $C = I^2$
- z_m הוא רעש ונזניח אותו כרגע
- הנתונים החדשים: $x_1 = 4260m$ $v_{x_1} = 282\frac{m}{sec}$

$$Y_k = CY_{k_m} + z_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4260 \\ 282 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4260 \\ 282 \end{bmatrix}$$

3.3.6 .6 חישוב מצב נוכחי (או התאמת הנתונים הקיימים)

- נזכיר כאשר K גדול (kg) כלומר שואף ל 1 נרצה לקחת את כל ההפרש בין המדידה למצב הנוכחי ועדכן/להוסיף למצב הנוכחי
- אם K נמוך, כלומר שואף ל 0 , פורשו שאנחנו לא סומכים על המדידה ונעדיף להסתמך על החישובים הקודמים

$$X_k = X_{k_p} + K\left[Y - HX_k\right]$$

$$\begin{bmatrix} 4281 \\ 282 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.405 & 0 \\ 0 & 0.410 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 4260 \\ 282 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4281 \\ 282 \end{bmatrix} \right) =$$

$$\begin{bmatrix} 4281 \\ 282 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.405 & 0 \\ 0 & 0.410 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} -21 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 4281 \\ 282 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8.5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4272.5 \\ 282 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X_k = \begin{bmatrix} 4272.5 \\ 282 \end{bmatrix}$$

נשים לב ש282 לא השתנה כי הוא זהה בשערוך/חיזוי $(predicted)$ ובמדידה ולכן לא השתנה. לעומת זאת במיקום ישנו הבדל בין החיזוי לבין המדידה ומכיון שעל פי ה kg אנחנו יותר סומכים על החיזוי עשינו את ההתאמה בינהם ועדכנו בהתאם

3.3.7 .7 עדכון מטריצת ה cov

$$P_k = (I - KH)\,P_{k_p} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.405 & 0 \\ 0 & 0.410 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 425 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.595 & 0 \\ 0 & 0.590 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 425 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 253 & 0 \\ 0 & 14.8 \end{bmatrix}$$

וזו הולכת להיות המטריצת cov של השלב הבא $(k+1)$

3.3.8 .8 "העכשווי הופך לקודם"

בשלב זה אין חישוב, פשוט נסמן את X_k, P_k כ: X_{k-1}, P_{k-1} על מנת שנוכל להתחיל את המחזור מהתחלה:

$$X_{k-1} = \begin{bmatrix} 4272.5 \\ 282 \end{bmatrix} \qquad P_{k-1} = \begin{bmatrix} 253 & 0 \\ 0 & 14.8 \end{bmatrix}$$

4 מסנן קלמן מורחב

4.1 סוגי חיישנים

- עבור תנועה לא לינארית, מסנן קלמן לא יביא תוצאה אופטימלית.
- מה נעשה עם חיישנים, שלא יודעים להחזיר תשובה לינארית
- כיצד נתמודד? קלמן מורחב שמשתמש בקרוב של פונקציות

4.1.1 חיישן מצלמה

לא נעסוק

- חישן ה GPS - יתרונות: זול ונפוץ, חינמי. חסרונות: שימושי רק בחוץ, ולא מספיק מדויק.
- חישן IMU מכיל: מד תאוצה, מד מהירות זוויתית, מגנטומטר משתמשים בשביל לזהות "מנח"
- חישן מצלמה

4.1.2 חיישן $LiDAR$

מזהה בעזרת קרן לייזר את העצמים

המרה לרדיאנים:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$\phi = tg^{-1}\frac{y}{x}$$
$$\phi = cos^{-1}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{r}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

1. לקריאה בודדת של חיישן לידאר קיימים הפרמטרים $(\epsilon,\alpha,r)=(5^\circ,10^\circ,4\ m)$ צאו מנקודת הנחה שהמדידות חסרות רעש וחשבו את מיקום האובייקט בקואורדינטות קרטזיות (XYZ).

הקלידו את התשובות בתיבות הטקסט. דייקו עד לשתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

https://en.wikipedia.org/wiki/Spherical_coordinate_system

המשוואות להמרה מקרו' ספריות לקרטזיות:

$$x = r\sin(\theta)\cos(\varphi)$$
$$y = r\sin(\theta)\sin(\varphi)$$
$$z = r\cos(\theta)$$

ונניח שהכוונה בשאלה

$$(e, \alpha, r) = (\theta, \varphi, r) = (5^\circ, 10^\circ, 4m)$$

אז:

$$\begin{aligned} x &= 4\sin(5)\cos(10) = 0.34 \\ y &= 4\sin(5)\sin(10) = 0.06 \\ z &= 4\cos(5) = 3.98 \end{aligned}$$

3. מה הם הדברים שצריך לקחת בחשבון כאשר מיישמים חיישן LiDAR עבור רכבים אוטונומיים?

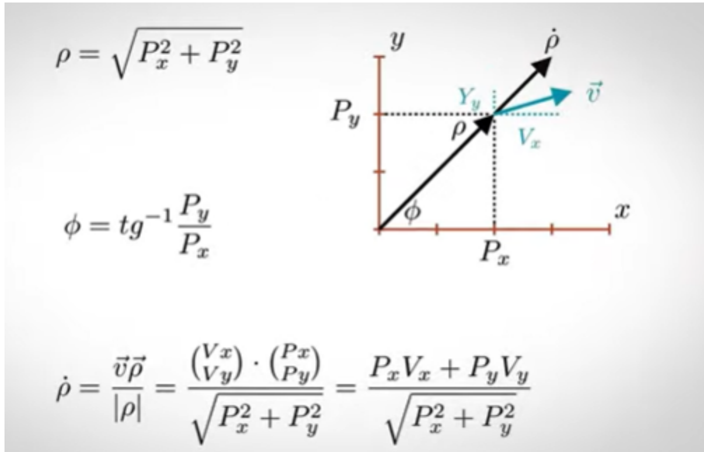
סמנו את כל התשובות הנכונות.

- [ ] חיישן ה- LiDAR צריך תמיד להיות ממוקם אופקית, שכן אפילו הטיה קטנה תגרום לשגיאות מדידה. ✔
- [x] כאשר הרכב נע במהירות, חשוב להביא בחשבון את הפרשי הזמן בין פעימות חיישן ה- LiDAR. ✔
- [ ] חשוב לזהות עצמים מבריקים ובוהקים מאוד בסביבה, אחרת מדידות חיישן ה- LiDAR של אותם אובייקטים עשויות להיות לא תקפות. ✔
- [ ] עלינו לוודא שהסביבה מוארת היטב.

4.1.3 חישן $RADAR$

- המרחק לאוביקט - ρ
- הזווית לאוביקט - ϕ
- המהירות הרידאלית $\dot{\rho}$

וקטור המצב כפי שאנחנו מכירים $\hat{x}_t = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ V_x \\ V_y \end{pmatrix}$, וקטור החיישן יראה כך: $\hat{z}_t = \begin{pmatrix} \rho \\ \phi \\ \dot{\rho} \end{pmatrix}$. איך נדע לקשר בינהם:



- $\rho = \sqrt{p_x^2 + P_y^2}$ בעזרת פיתגורס
- $\phi = tg^{-1}\frac{P_y}{P_x}$ הזווית
- $\dot{\rho} = \frac{\vec{v}\,\vec{\rho}}{|\rho|} = \frac{\begin{pmatrix}V_x\\V_y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P_x\\P_y\end{pmatrix}}{\sqrt{P_x^2+P_y^2}}$ - ההטלה הסקלרית של וקטור המהירות על פני המיקום

לכן נקבל ש:

$$\hat{z}_t = \begin{pmatrix}\rho\\ \phi\\ \dot{\rho}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sqrt{p_x^2+P_y^2}\\ tg^{-1}\frac{P_y}{P_x}\\ \frac{\begin{pmatrix}V_x\\V_y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P_x\\P_y\end{pmatrix}}{\sqrt{P_x^2+P_y^2}}\end{pmatrix}$$

נציין שמטריצת ה$var, covriance$ תהיה אם חוסר ודאות בכל אחד מהפרמטרים:

$$R = \begin{pmatrix}\sigma_\rho^2 & 0 & 0\\ 0 & \sigma_\phi^2 & 0\\ 0 & 0 & \sigma_{\dot{\rho}}^2\end{pmatrix}$$

4.1.4 **תרגיל תכנות להשלים**

4.2 ליניאריזציה

נקרב את הפונקציה על ידי פיתוח טיילור עד סדר ראשון כלומר, עבור פיתוח טיילור רגיל: $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i$

נקח רק שני האיברים הראשונים: $f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a)^1$

דוגמה: $f(x) = arctg(x)$

נציין שזהו חסרון במסנן קלמן EKF - שכאשר מתרחקים מa התוצאה לא מדויקת

4.2.1 יעקוביאן

$$x_{k+1}=Fx_k \longrightarrow x_{k+1}=f(x_k)+r$$
$$Z_k=Hx_k \longrightarrow Z_k=h(x_k)+w$$

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$$

$$h(x)=h(\mu)+\underbrace{\frac{dh(\mu)}{dx}}_{\text{jacobian matrix}}(x-\mu)$$

מטריצת יעקוביאן כללית, תראה כך:

$$\begin{bmatrix} \frac{\vartheta h_1}{\vartheta x_1} & \frac{\vartheta h_1}{\vartheta x_2} & \cdots & \frac{\vartheta h_1}{\vartheta x_n} \\ \frac{\vartheta h_2}{\vartheta x_1} & \frac{\vartheta h_2}{\vartheta x_2} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \frac{\vartheta h_n}{\vartheta x_n} & & & \frac{\vartheta h_n}{\vartheta x_n} \end{bmatrix}$$

השורה הראשונה היא גזירת h_1 לפי x_1 בעמודה הראשונה, x_2 בעמודה השניה, וכו'

ניתן גם להסתכל לפי עמודה: שבעמודה ראשונה גוזרים את הhים לפי x_1 , בעמודה השניה לפי x_2 וכד'

<u>פירוט ב khan acadmeny:</u>

https://www.khanacademy.org/math/multivariable-calculus/multivariable-derivatives/jacobian/v/the-jacobian-matrix

אצלנו:

נניח שיש לנו וקטור מצב רגיל של מיקום ומהירות, ווקטור חישן של $RADAR$ שכפי שאמרנו נראים כך:

$$x=\begin{pmatrix} P_x \\ Py \\ V_x \\ V_y \end{pmatrix}, z=\begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ \dot{\rho} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sqrt{p_x^2+P_y^2} \\ \arctan\left(\frac{P_y}{P_x}\right) \\ \frac{\begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \end{pmatrix}}{\sqrt{P_x^2+P_y^2}} \end{pmatrix}$$

הבעיה z בכלל לא לינארית, מה נעשה? נשתמש ביעקוביאן

נסמן:

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ \dot{\rho} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sqrt{p_x^2+P_y^2} \\ tg^{-1}\frac{P_y}{P_x} \\ \frac{P_x\cdot V_x+P_y\cdot V_y}{\sqrt{P_x^2+P_y^2}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}=$$

ונגזור לפי כל פרמטר :

לדוגמה השורה של ρ :

$$\frac{\vartheta\rho}{\vartheta P_x}=\frac{\vartheta}{\vartheta P_x}\sqrt{p_x^2+P_y^2}=\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{p_x^2+P_y^2}}\cdot P_x=\frac{P_x}{\sqrt{p_x^2+P_y^2}}.$$

$$\frac{\vartheta \rho}{\vartheta P_y} = \frac{\vartheta}{\vartheta P_y}\sqrt{p_x^2+P_y^2} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{p_x^2+P_y^2}}\cdot P_y = \frac{P_y}{\sqrt{p_x^2+P_y^2}}.$$

$$\frac{\vartheta \rho}{\vartheta V_x} = \frac{\vartheta}{\vartheta P_{V_x}}\sqrt{p_x^2+P_y^2} = 0 = \frac{\vartheta \rho}{\vartheta V_y}$$

דוגמה נוספת נגזור לפי φ ו P_x:

$$\frac{\vartheta \varphi}{\vartheta P_x} = \frac{\vartheta \arctan\left(\frac{P_y}{P_x}\right)}{\vartheta P_x} = \frac{1}{\left(\frac{P_y}{P_x}\right)^2+1}\cdot\frac{-P_y}{P_x^2} = \frac{-P_y}{P_x^2+P_y^2}$$

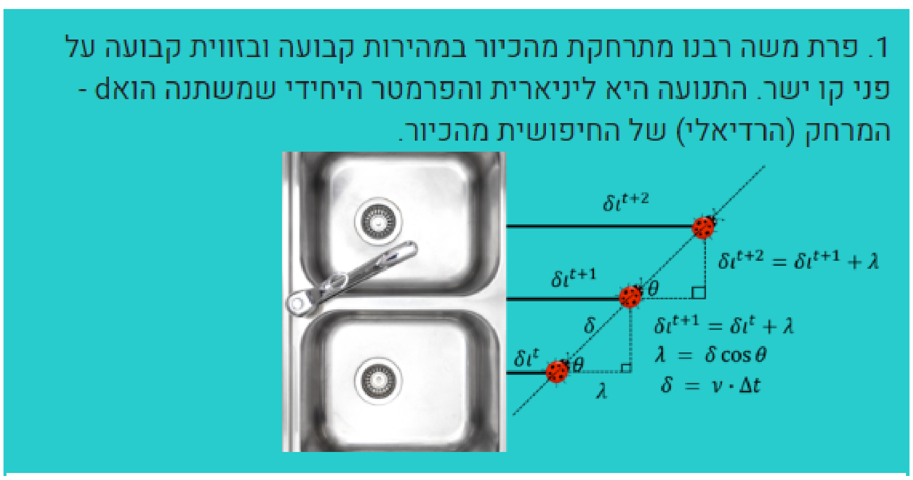
וכן הלאה, לבסוף נקבל את המטריצה:

$$\begin{bmatrix} \frac{P_x}{\sqrt{p_x^2+P_y^2}} & \frac{P_y}{\sqrt{p_x^2+P_y^2}} & 0 & 0 \\ -\frac{P_y}{\sqrt{p_x^2+P_y^2}} & \frac{P_x}{\sqrt{p_x^2+P_y^2}} & 0 & 0 \\ \frac{P_y(V_xP_y-V_yP_x)}{\left(P_x^2+P_y^2\right)^{3/2}} & \frac{P_x(V_yP_x-V_xP_y)}{\left(P_x^2+P_y^2\right)^{3/2}} & \frac{P_x}{\sqrt{P_x^2+P_y^2}} & \frac{P_y}{\sqrt{P_x^2+P_y^2}} \end{bmatrix}$$

<u>שאלה מהאתר:</u>

על פי המאמר:

`http://matematix.co.il/formulas/DerivativesFormulasSheet.pdf`



<u>מה הממדים של מטריצת יעקוביאן? 3×3 ?</u>

- הסבר:
  - וקטור המצב יראה: $x^{t+1} = \begin{bmatrix}\delta_l^t+\lambda \\ \theta \\ v\end{bmatrix}$, כלומר לחיפושית בשלב t יש נתונים על המרחק(הרידאלי), הזווית והמהירות ביחס לכיור.
  - על פי המשוואות ישנם שלושה פרמטרים: המיקום δ_l , המרחק λ , המהירות δ (Δt הוא קבוע)

<u>כיצד תראה המטריצה?</u>

כפי שהסברנו לעיל צריך לגזור לפי כל פרמטר:

$$x^{t+1} = \begin{bmatrix} \delta_l^t + \lambda \\ \theta \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_l^t + \delta \cdot \cos(\theta) \\ \theta \\ \frac{\delta}{\Delta t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_l^t + v \cdot \Delta t \cdot \cos(\theta) \\ \theta \\ \frac{\delta}{\Delta t} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\vartheta h_1}{\vartheta x_1} & \frac{\vartheta h_2}{\vartheta x_2} & \frac{\vartheta h_3}{\vartheta x_3} \\ \frac{\vartheta h_2}{\vartheta x_1} & \frac{\vartheta h_2}{\vartheta x_2} & \frac{\vartheta h_2}{\vartheta x_3} \\ \frac{\vartheta h_3}{\vartheta x_1} & \frac{\vartheta h_3}{\vartheta x_2} & \frac{\vartheta h_3}{\vartheta x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\vartheta \delta_l^t + v \cdot \Delta t \cdot \cos(\theta)}{\vartheta \delta_l^t} & \frac{\vartheta \delta_l^t + v \cdot \Delta t \cdot \cos(\theta)}{\vartheta \theta} & \frac{\vartheta \delta_l^t + v \cdot \Delta t \cdot \cos(\theta)}{\vartheta v} \\ \frac{\vartheta \theta}{\vartheta \delta_l^t} & \frac{\vartheta \theta}{\vartheta \theta} & \frac{\vartheta \theta}{\vartheta v} \\ \frac{\vartheta v}{\vartheta \delta_l^t} & \frac{\vartheta v}{\vartheta \theta} & \frac{\vartheta v}{\vartheta v} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\vartheta \delta_l^t + v \cdot \Delta t \cdot \cos(\theta)}{\vartheta \delta_l^t} = 1 + 0 = 1$$

$$\frac{\vartheta \delta_l^t + v \cdot \Delta t \cdot \cos(\theta)}{\vartheta \theta} = 0 + [(0 \cdot (cos(\theta)) + (v\Delta t \cdot (-sin(\theta)))] = v\Delta t \cdot (-sin(\theta))$$

$$\frac{\vartheta \delta_l^t + v \cdot \Delta t \cdot \cos(\theta)}{\vartheta v} = 0 + [(1 \cdot (\Delta t \cdot cos(\theta)) + (v \cdot 0)] = \Delta t \cdot cos(\theta)$$

$$\frac{\vartheta \theta}{\vartheta \theta} = \frac{\vartheta v}{\vartheta v} = 1$$

$$\frac{\vartheta v}{\vartheta \delta_l^t} = \frac{\vartheta v}{\vartheta \theta} = \frac{\vartheta \theta}{\vartheta v} = \frac{\vartheta \theta}{\vartheta \delta_l^t} = 0$$

סה"כ:

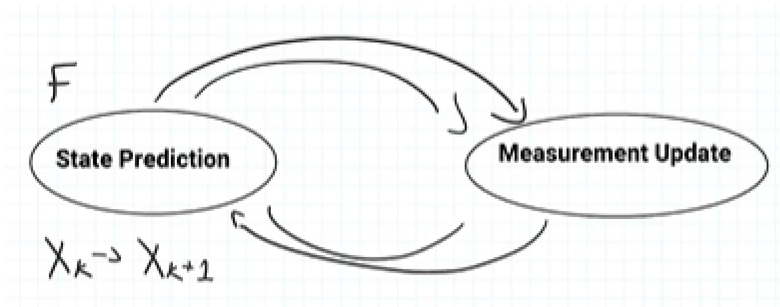
$$\begin{bmatrix} 1 & v \cdot \Delta t \cdot (-sin(\theta)) & \Delta t \cdot cos(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4.3 היתוך חיישנים

חיישנים שונים , עובדים בצורה שונה, ובזמנים שונים. כמה נקודות

- קליברציה: כאשר מקבלים חיישנים, לא ניתן להתחיל לעבוד איתו מיידית, וצריך להתאים אותו למערכת
  - דוגמה: $encoder$ מודד מהירות זוויתית למערכת, והא צורך אתחול ל־r של הגלגל
- מיקום החיישן על הרכב: כל חיישן ממוקם במקום מעט שונים ברכב, ולכן צריך לנרמל את כל החיישנים לנקודה אחת
- קצב הרענון: כל חיישן נותן אינדקציה בזמן שונה , וצריך לצור מנגנון שיודע לעבד את המידע בזמנים השונים.
- אופן המדידה: לרוב ניקח את המדידות המעובדות כלומר את הנתונים שהחיישן מקבל מתרגומים למידע שאנחנו נוכל לעבוד איתו

מסנן ביסאני כללי:



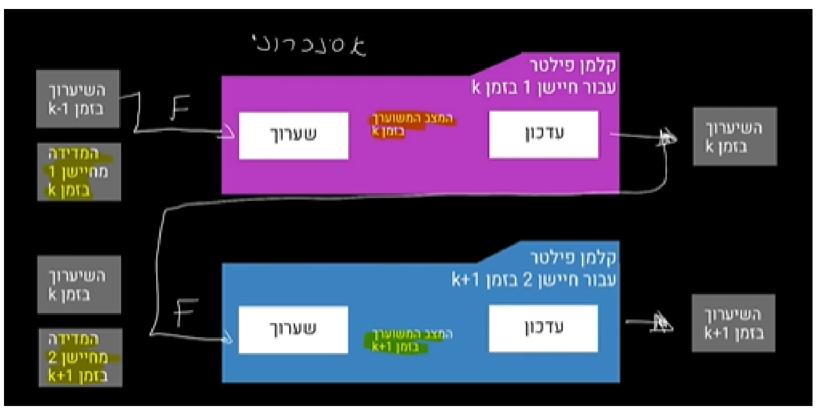
יותר מדידות $\Leftarrow$ מעלה את הדיוק את הדיוק

נזכיר ש:

$$\underline{radar} \quad \underline{lidar}$$
$$\begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ \dot{\rho} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \end{pmatrix}$$

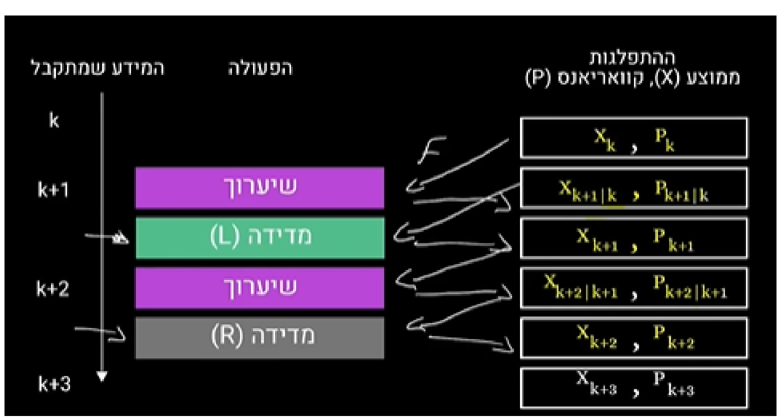
4.3.1 מצב אסכנרוני

שני החישנים לא מתואמים = מכל חיישן אני מקבל מידע בזמן אחר:



למעשה לא השנתה דבר, בכל זמן (k) אני מקבל <u>מדידה</u> ומבצע עליה את <u>השערוך</u> ע"פ האלגוריתם, ומבצע <u>עדכון</u> (יש לשים לב שהמטריצת **מעבר** מוקטור המצב לוקטור החיישן וחזרה תהיה שונה בכל מדידה)

בתרשים:



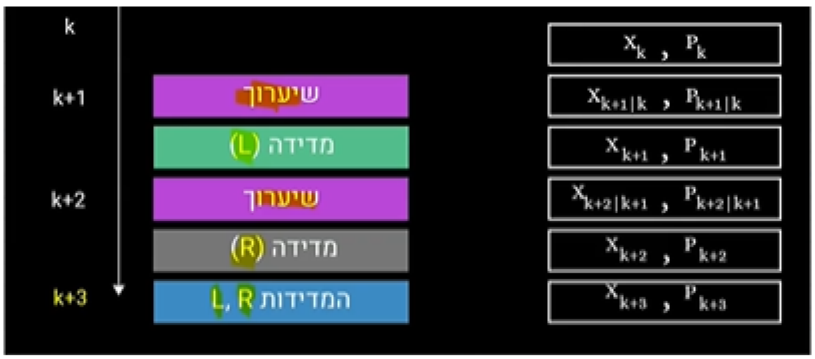
הסבר:

- נסמן את קבלת המדידה L כשלב $k+1$ אז ע"פ האלגוריתם נקח את המצב בזמן k נבצע $predict$ ע"י מטריצת F ואז באמת המידע והחיזוי שניהם בשלב $k+1$ ונוכל לבצע $update$
- באותו אופן עבור R

4.3.2 מצב סנכרוני

במצב אסנכרוני, ביצענו לכל חיישן

Prediction→measurment update

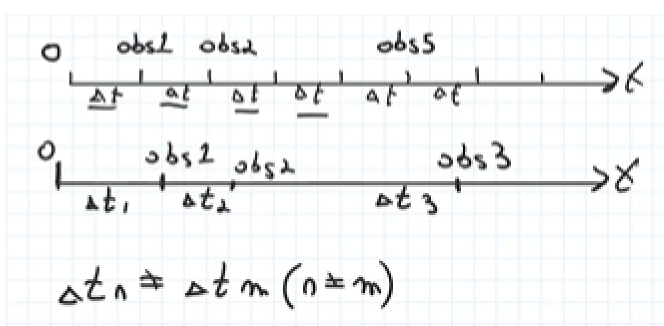


נזכיר ש$Prediction$ הוא הכפלה שלנו ב F כלומר $X_{k+3/k+2} = F \cdot X_{k+2}$ ואין צורך לבצע אותו "פעמיים" בזמן $k+3$, ולכן נוכל לבצע (הסדר בין L, R שרירותי)

Prediction→L update → R update

4.3.3 מדידה בזמנים שונים

בחיים האמיתיים , לא נקבל את המדידות בהפרשי זמנים קבועים



ולכן צריך לדעת לעדכן את Δt בכל שלב

$$X=\begin{pmatrix}P_x\\P_y\\V_x\\V_y\end{pmatrix},F=\begin{pmatrix}1&0&\Delta t&0\\0&1&0&\Delta t\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

4.3.4 מטריצת Q :

על פי משוואות התנועה יצרנו את המודל:

$$\begin{pmatrix}P_x'\\P_y'\\V_x'\\V_y'\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&\Delta t&0\\0&1&0&\Delta t\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}}_{F}\begin{pmatrix}P_x\\P_y\\V_x\\V_y\end{pmatrix}+\underbrace{\begin{pmatrix}a_x\frac{\Delta t^2}{2}\\a_y\frac{\Delta t^2}{2}\\a_x\Delta t\\a_y\Delta t\end{pmatrix}}_{U}$$

על פי ההנחה שבF יש מהירות קבועה, U אם תאוצה קבועה.

מה נעשה כאשר אין לנו תאוצה ונצטרך לשערך את התאוצה?

נסתכל על U כעל "רעש סטוכסטי" , כיון שזהו רעש נוכל להסתכל עליו כל $\nu\sim N\left(0,Q\right)$ כלומר התפלגות נורמלית עם מומצע 0 ומטריצת Q cov

והוקטור הנ"ל מכיל: את השונות של התאוצות a_x,a_y כלומר: $\begin{matrix}\nu\sim N\left(0,\sigma_{ax}^2\right)\\\nu\sim N\left(0,\sigma_{ay}^2\right)\end{matrix}$ כעת נחזור לוקטור U , ניתן לשכתב אותו כך:

$$\begin{pmatrix}a_x\frac{\Delta t^2}{2}\\a_y\frac{\Delta t^2}{2}\\a_x\Delta t\\a_y\Delta t\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}\frac{\Delta t^2}{2}&0\\0&\frac{\Delta t^2}{2}\\\Delta t&0\\0&\Delta t\end{pmatrix}}_{\text{Deterministic}(G)}\underbrace{\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}}_{\text{Random}(a)}=Ga$$

כעת צריך לחשב את מטריצת ה cov , Q :

$$Q=\left[\nu\cdot\nu^T\right]=E\left[Ga\cdot(Ga)^T\right]=G\cdot E\left[aa^T\right]\cdot G^T$$

4.3.5 שגיאת ה $RMSE$

RMSE = Root Mean Squared Error

$$\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^{Est}-x_i^{True}\right)^2}$$

אצלנו זה בוקטורים

שאלה

נני שוטקור המצב המשעורך הוא $X=\begin{pmatrix}P_x\\P_y\\V_x\\V_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\12\\2\\5\end{pmatrix}$

והמצב האמיתי: $X_{true}=\begin{pmatrix}9\\10\\2\\0\end{pmatrix}$, <u>חשבו את $RMSE$</u>

$$\sqrt{\tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^{Est}-x_i^{True}\right)^2}=\sqrt{\tfrac{1}{1}\textstyle\sum_{i=1}^{1}\left(\begin{pmatrix}8\\12\\2\\5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}9\\10\\2\\0\end{pmatrix}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(\begin{pmatrix}8\\12\\2\\5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}9\\10\\2\\0\end{pmatrix}\right)^2}=\sqrt{\left(\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\\5\end{pmatrix}\right)^2}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\5\end{pmatrix}\ ??$$

5 מסנן חלקיקים

5.1 חלקיקים, משוקלות ודגימה מחדש

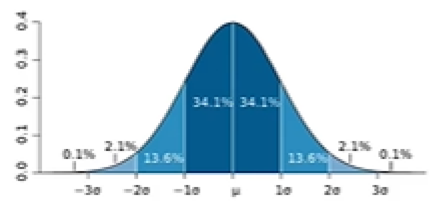
שיערוך מונטה קרלו - הגעה לפתרון נכון דרך ניחוש מספר תשובות באופן אקראי ובדיקת ההתאמה של כל אחת מהן חזרה:

	מרחב המצב	פונקציית האמונה	יעילות
מסנן היסטוגרמה	בדיד	Mutli-modal	אקספ'
מסנן קלמן	רציף	Uni-modal	ריבועית
מסנן קלמן מורחב	רציף	Uni-modal	ריבועית
מסנן חלקיקים	רציף	Mutli-modal	??

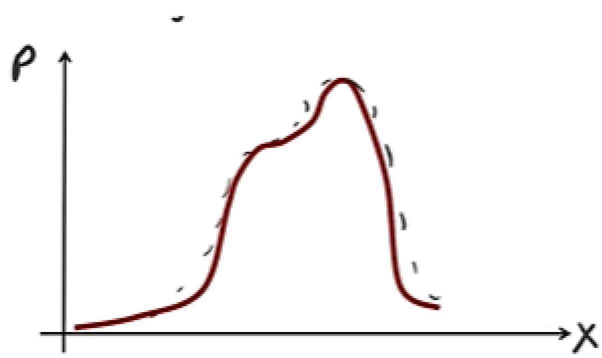
5.1.1 התפלגויות לא פרמטריות

כפי שהזכרנו מספר פעמים ההתפלגות הגאוסית נראית כך:

$$p(x) = \det(2\pi\Sigma)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu)\right)$$

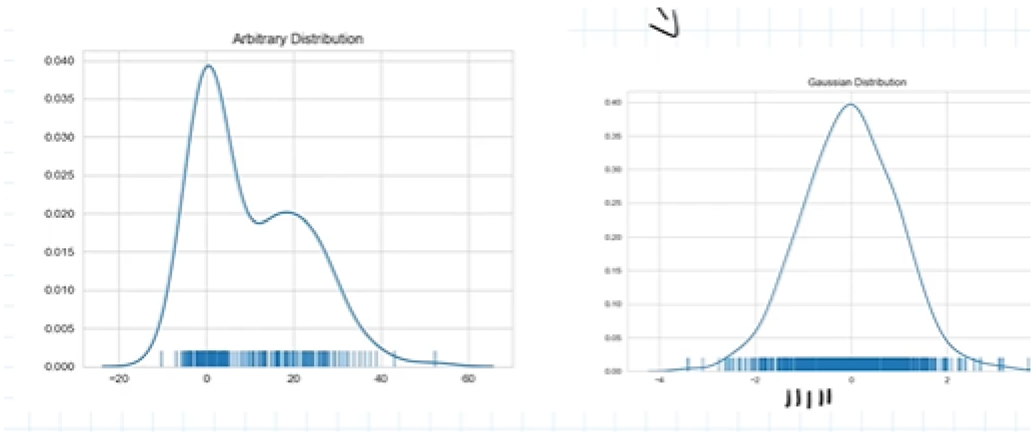


מה נעשה כאשר ההתפלגות נראית כך:



אפשרות ראשונה לתאר זאת בעזרת פנוקציה שעונה בדיוק על ההתפלגות הזו - הבעיה מורכב מאוד במיוחד כשעולים במימדים

אפשרות שניה על בסיס נקודות/חלקיקים - sample/parcticle, לדוגמה:



תאור של שתי ההתפלגויות באמצעות הנקודות (=לא פרמטרי)

מתמטית

$$X = \{x^j, w^j\}$$

x^j - ההיפותזה/השערה של המיקום שלי, לדוגמה אני נמצא ב $x = 3,5$

w^j - חשיבות הנקודה, וככל שהערך יותר גבוה כך ה"נקודה" גדולה יותר

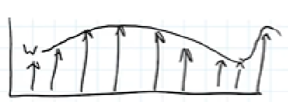
ולכן ההסתברות למאורע תראה כך:

$$P(x) = \sum_{j=1}^{J} w^j \cdot \delta_{x^j}(x)$$

כאשר δ מוגדרת כך:

$$\delta_{x^j}(x) = \begin{cases} \infty & x^j = x \\ 0 & else \end{cases}$$

ובכך נקבל התפלגות כזו:



שאלה 1

נניח שיש לנו N חלקיקים ואנחנו מנסים לאתר מיקום באחד מתוך 4 חדרים:

A	B
C	D

מה ההסתברות שאף חלקיק לא ימצא בחדר B:

- עבור $N=1$:
  - יש 4 חדרים (התפלגות אחידה)
  - ההסתברות לדגום חלקיק בחדר היא : $\frac{1}{4}$ $\Leftarrow$ לדגום רק בחדרים A או C או D היא: $\frac{3}{4}=0.75$
- עבור $N=4$:
  - החלקיקים בת"ל, ולכן 0.75^4
- עבור $N=10$:
  - באותו אופן: 0.75^{10}

שאלה 2

P1	P2	
P3	P4	P5

ההסתברות "להרגיש" כתום בשורה העליונה הינה 0.7 (0.3 להרגיש ירוק)

ההסתברות "להרגיש" ירוק בשורה התחתונה הינה 0.6 (0.4 להרגיש כתום)

בהנחה שהרובוט "הרגיש" כתום

1. מה ההסתברות המנורמלת של חלקיק $p2$? 2. מה ההסתברות המנורמלת של חלקיק $p4$?

$$
\begin{array}{llll}
p_1 & 0.7*0.2 & & \\
p_2 & 0.7*0.2 & \Rightarrow & \frac{0.14}{0.52}=0.26 \\
p_3 & 0.4*0.2 & & \\
p_4 & 0.4*0.2 & \Rightarrow & \frac{0.08}{0.52}=0.153 \\
p_5 & 0.4*0.2 & & \\
\hline
sum & 0.52 & &
\end{array}
$$

<u>חזור על הסעיפים כאשר הרובוט הרגיש "ירוק"</u>

p_1	$0.3 * 0.2$		
p_2	$0.3 * 0.2$	$\Rightarrow$	$\frac{0.0.6}{0.48} = 0.125$
p_3	$0.6 * 0.2$		
p_4	$0.6 * 0.2$	$\Rightarrow$	$\frac{0.12}{0.48} = 0.25$
p_5	$0.6 * 0.2$		
sum	0.48		

5.1.2 בעיית הרובוט הנחטף

אם ישנה התכנסות של כל החלקיקים סביב המיקום של הרובוט, נתקל בבעיה שאם הרובוט "נחטף" למיקום חדש, לא נצליח להתאושש. כיצד זה יכול לקרות?

כאשר יש לנו מספר קטן של חלקיקים - ואז המעט חלקיקים לא יקבלו מגוון ערכים ויכולים להתכנס למיקום אחד

פתרון?

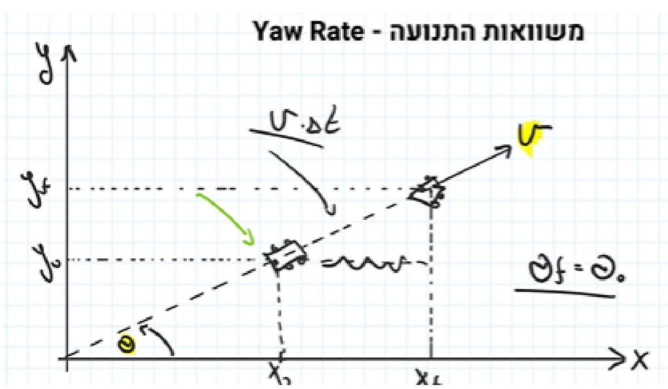
- הרבה חלקיקים
- בכל שלב אחרי ה $resample$ ניקח $5\% - 10\%$ חלקיקים וניתן להם ערכים רנדומלים

5.2 נושאים מתקדמים

5.2.1 משוואות התנועה המוכללות

אם $\theta = 0$ אז:

כלומר אין שינוי בזווית התנועה:



$$x_f = x_i + v \cdot \Delta t \times \cos(\theta_0)$$
$$y_f = y_i + v \cdot \Delta t \times sin(\theta_0)$$

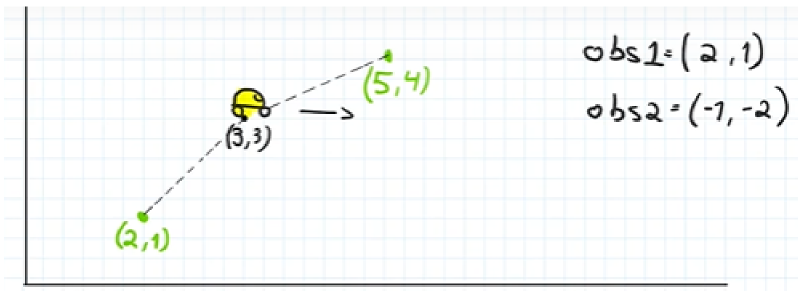
הבעיה: לא נוכל לתאר תזוזה במעגל, ולכן:

אם $\theta \neq 0$ אז:

$$x_f = x_i + \frac{v}{\dot{\theta}}\left(\sin\left(\theta_0 + \Delta t \times \dot{\theta}\right) - \sin\left(\theta_0\right)\right)$$
$$y_f = y_i + \frac{v}{\dot{\theta}}\left(\cos\left(\theta_0\right) - \cos\left(\theta_0 + \Delta t \times \dot{\theta}\right)\right)$$
$$\theta_f = \theta_0 + \Delta t \times \dot{\theta}$$

5.2.2 התמרות הומגניות

הבעיה:



הרובוט מקבל את הקרוד' $obs1, obs2$ של ה $landmark$ **ביחס לרובוט**, ואנחנו רוצים לדעת את המיקום של הם **במפה**

: rotation matrix

$$\begin{bmatrix} x_m \\ y_m \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & x_p \\ \sin\theta & \cos\theta & x_p \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ 1 \end{bmatrix}$$

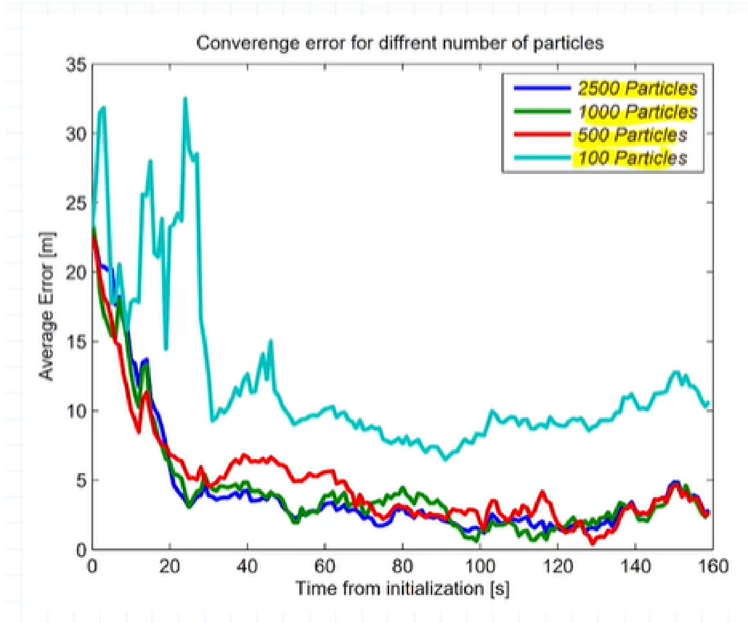
הסבר:

- x_p, y_p הקור' של החלקיק
- x_c, y_c הקור' של ה $landmark$
- x_m, y_m הקור' של ה $landmark$ במפה
- הזווית θ - מאפשר לנו לחשב גם כאשר הרובוט בזווית ביחס ל$landmark$

לסיכום המטריצה מתרגמת את כל הנתונים למפה כך שהרובוט יעמוד ב $0, 0$

5.2.3 פונקצית משקל מתקדמת

נשאלת השאלה כמה חלקיקים לקחת?



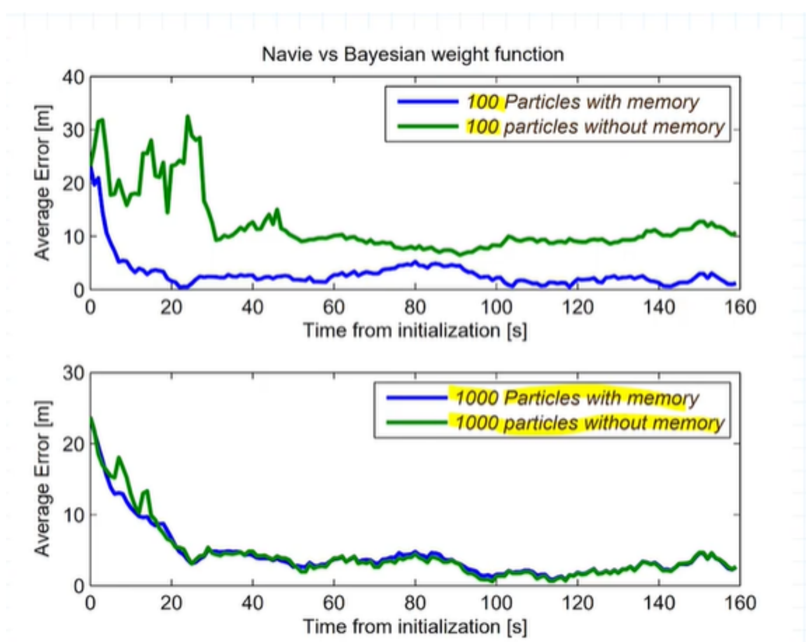
ניתן לראות שעבור 100 חלקיקים אנחנו רחוקים מלהתכנס, ועבור 2500 אין כבר שינוי גדול, ולכן באופן פשוט אפשר לקחת כ1000 חלקיקים

נשדרג:

נגדיר את פונקציית המשקל:

$$w\left(x_t^{|k|}\right) = k \cdot w\left(x_t^{|k|}\right) + (1-k) \cdot w\left(x_{t-1}^{|k|}\right)$$

כלומר בחישוב המשקל הנוכחי נכניס גם את המשקל של השלב הקודם - הסיבה שזו משפר את התוצאה כי ישנם חלקיקים שבשלב k נכניס לאזור "לא מוגדר" למשל קיר/יצא מהטווח ובכך נגרמת אי־רציפות שמשפיע על התוצאות וגורמת ל"טעויות", נראה את השיפור בגרפים:



5.2.4 חישוב שגיאה במסנן חלקיקים

נרצה להבין עד כמה המסנן שלנו מתקרב/מתרחק מהערך האמיתי אותו נגדיר כ (נציין שבעולם האמיתי לא תמיד יהיה לנו את הערך האמיתי ־אבל אצלנו כן):

$$ground\_truth = (x, y, \theta)$$

אפשרות ראשונה:

$$error = \frac{\sum_{i=1}^{M} w_i \sqrt{(P_i - g)^2}}{\sum_{i=1}^{M} w_i} = \frac{\sum_{i=1}^{M} w_i \left|(P_i - g)^2\right|}{\sum_{i=1}^{M} w_i}$$

w_i משקל, P_i חלקיק.

אפשרות שניה:

$$error = |P_{Best} - g|$$

נזכיר שלבסוף ה$error$ הוא וקטור , כלומר:

$$error = \begin{pmatrix} P_x - g_x \\ P_y - g_y \\ P_\theta - g_\theta \end{pmatrix}$$

6 נספח

6.1 מבוא הסתברותי

- נניח שΩ הוא מרחב המדגם ו A, B הם שני מאורעות אז:
  1. $P(A) \geq 0$
  2. $P(\Omega) = 1$
  3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) \Leftarrow A \cap B = 0$

מרחב הסתברות: זו שלשה (Ω, F, P)

- הסתברות מותנית

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- הסתברות שלמה:

$$P(A) = \sum_{b_i \in B} P(A|B_i) P(B_i)$$

- הסתברות בייס

השערה $= H = Hypothesis$, המציאות $= E = Evidence$

$$P(H|E) = \frac{P(E|H) \cdot P(H)}{P(E)}$$

- chain rule

$$P(H|E_1, E_2) = \frac{P(E_1|H, E_2) \cdot P(H, E_2)}{P(E_1, E_2)}$$

6.2 לוקליזציה

	מרחב המצב	פונקציית האמונה	יעילות
מסנן היסטוגרמה	בדיד	Mutli-modal	אקספ'
מסנן קלמן	רציף	Uni-modal	ריבועית
מסנן קלמן מורחב	רציף	Uni-modal	ריבועית
מסנן חלקיקים	רציף	Mutli-modal	??

- אנטרופיה:

$$H\left(x\right)=-\sum_{x}p\left(x\right)\cdot\log P\left(x\right)$$

6.3 מסנן קלמן חלק ראשון

- הגבר קלמן

1. $kg=\frac{E_{est}}{E_{est}+E_{meas}}$
2. $Est_{t}=Est_{t-1}+kg\left[Meas_{t}-Est_{t-1}\right]$
3. $E_{EST_{t}}=\left[1-kg\right]\left(E_{EST_{t-1}}\right)$

6.3.1 גאוס

- $Multi-Modal\ discrte$ - מספר ניחושים מדויקים , והניחוש הוא "בינארי" או שאני ב bin שלי או שלא, ואין לי מדד של איפה בתוך ה bin אני נמצא
- $Uni-Modal\ continous$ - ניחוש אחד המשקלל את האפשרויות, והניחוש רציף , לכן אפשר להיות בכל מקום

6.3.2 גזירת נתונים מתוך מדגם

- קיים מקבץ נתונים בעל ממוצע μ וסטיית תקן μ. נתונה $DATA$ וK שהוספנו לכל נקודה:

$$\mu'=\mu+K$$

- ערכי הממוצע μ וסטיית התקן σ החדשים, אם כל אחת מהנקודות תיכפל על ידי אותו קבוע K?

$$\mu'=k\mu\qquad\sigma'=k\sigma$$

6.3.3 ממוצע ואריאנס, סטית תקן:

- $PDF - Probablity\, Dednsity\, Function$ - פונקציות צפיפות ההסתברות:

הגאוסי:

$$N\left(\mu_1,\sigma_1^2\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}}e^{\frac{-(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}$$

נותן ערך בין 0 ל 1 - יש נרמול בפונקציה.

- חוק $68,95,99.7$
- הכפלת גאוסיינים:

$$\mu_3=\frac{\mu_1\cdot\sigma_2^2+\mu_2\cdot\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\qquad\qquad\sigma_3^2=\frac{1}{\frac{1}{\sigma_1^2}+\frac{1}{\sigma_2^2}}$$

ומתקיים: $\left\{\begin{array}{c}\sigma_3^2\leq\sigma_1^2,\sigma_2^2\\ \sigma_1=\sigma_2\Rightarrow\sigma_{\sigma_3}^2=\frac{1}{2}\sigma_1^2\end{array}\right\}$ וכאן רואים שחוסר הודאות קטן יותר

- P היא שאלה על ה$data$ בהנתן שההתפלגות ידועה $\left(\mu,\sigma^2\right)$ - וכאן נחשב באמת בעזרת האינטגל
- L היא שאלה על ההתפלגות בהנתן $data$ וכאן נחפש את ערך הy $f(x)=y$

$$P\left(\text{data/distribution}\right)\neq L\left(\text{distribution/data}\right)$$

6.4 מסנן קלמן - חלק ראשון

6.4.1 מדידה אי-ודאית (קונבולוציה)

- במודל סטטי: אי שינוי נרשום כך: $x_t=x_{t-1}$
- במודל דינמי: משוואות התנועה:

$$x_t=x_{t-1}+\Delta t\cdot\dot{x_{t-1}}$$
$$\dot{x_t}=\dot{x_{t-1}}$$

6.5 מסנן קלמן חלק שני

- חישוב השונות - הממוצע $=\tilde{x}$:

$$\sigma_x^2=\frac{\sum_{i=1}^{N}\left(\tilde{x}-x_i\right)^2}{N}$$

- סטיית תקן:

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}$$

– נחדד: $\sqrt{\sigma_x^2} \cdot \sqrt{\sigma_y^2} \cdot \neq \sigma_x^2 \cdot \sigma_y^2 \cdot$, כלומר על מנת לחשוב קורצליה צריך ממש לחשב את ההשפעה של המשתנים אחד על השני

- $CoVarince$:

$$\sigma_x \sigma_y = \frac{\sum_{i=1}^{N} \left(\tilde{x} - x_i\right) \left(\tilde{y} - y_i\right)}{N}$$

- דוגמ מטריצת $covarince$ בעולם שלנו:

$$P = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_x \sigma_y \\ \sigma_y \sigma_x & \sigma_y^2 \end{bmatrix}$$

6.5.1 משוואות התנועה

- מהירות קבועה

$$\begin{gathered} V\left(t\right) = V_0 \\ X\left(t\right) = \int_0^t V\left(t\right)\ dt = \underline{\boldsymbol{V_0 \cdot t + X_0}} \end{gathered}$$

- תאוצה קבועה

$$\begin{gathered} a\left(t\right) = a_0 \\ V\left(t\right) = \int_0^t a(t)\ dt = a_0 \cdot t + V_0 \\ X\left(t\right) = \int_0^t V\left(t\right)\ dt = \underline{\boldsymbol{V_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a_0 \cdot t^2 + X_0}} \end{gathered}$$

6.6 קלמן בשני מימדים

6.6.1 שלב ה - Prediction

$$\begin{Bmatrix} X_k = F \cdot X_{k-1} + B \cdot u \\ P_k = F_k P_{k-1} F_k^T + Q_k \end{Bmatrix}$$

6.6.2 שלב ה - $Measurement$

$$\mu_{expected} = H_k \cdot X_k$$
$$\sum\nolimits_{expected} = H_k P H_k^T$$

6.6.3 אלגוריתם קלמן:

$$\begin{array}{ccccc}
\textbf{init} & & \textbf{prev st.} & & \textbf{new predicted state} \\
\begin{pmatrix} X_0 \\ P_0 \end{pmatrix}^0 \dashrightarrow & & \begin{pmatrix} X_{k-1} \\ P_{k-1} \end{pmatrix} \longrightarrow & & \begin{pmatrix} X_k = AX_{k-1} + Bu_k + w_r \\ P_{k_p} = AP_{k-1}A^T + Q_k \end{pmatrix}^{1,2,3} \\
& & \uparrow^8 & & \downarrow \\
& \begin{pmatrix} P_k = (I - KH) P_k \\ X_k \end{pmatrix}^7 \longleftarrow & & \begin{pmatrix} K = \frac{P_K H^T}{H P_{k_p} H^T + R} \\ X_k = X_{k_p} + K[Y - HX_k] \end{pmatrix}^{4,6} & \longleftarrow (Y_k = CY_{k_m} + z_m)^5 \\
& \textbf{update state} & & \textbf{Adjust predicted state} & \textbf{new observation}
\end{array}$$

0. אתחול = הצבת הנתונים:
1. חישוב ה predicted state : עדכון המיקום X_k על פי משוואות התנועה + רעש w_k
2. אתחול מטריצת ה cov (עושים זאת פעם אחת):
3. חישוב ה predicted covarince state: עדכון ל P_{K_p} + רעש (Q)
4. חישוב ה $Kalman\ Gain$: כולל מעבר ממרחב המצב למרחב החיישן (H) + רעש (R)
5. קבלת מדידה חדשה: כולל מעבר ממרחב החיישן למרחב המצב (C) + (z)
6. חישוב מצב נוכחי (או התאמת הנתונים הקיימים) : התאמת X_k
7. עדכון מטריצת ה cov: התאמת P_k
8. "העכשווי הופך לקודם": הכנה למחזור הבא $X, P_k \Rightarrow X, P_{k-1}$ (חזור ל1)

6.7 מסנן קלמן מורחב

6.8 סוגי חיישנים

6.8.1 חיישן $LiDAR$

- מזהה בעזרת קרן לייזר את העצמים , המרה לרדיאנים:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$\phi = tg^{-1}\frac{y}{x}$$
$$\phi = cos^{-1}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{r}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

6.8.2 חישן $RADAR$

- המרחק לאוביקט - ρ , הזווית לאוביקט - ϕ, המהירות הרידאלית $\dot{\rho}$

וקטור המצב כפי שאנחנו מכירים $\hat{x}_t = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ V_x \\ V_y \end{pmatrix}$, וקטור החיישן יראה כך: $\hat{z}_t = \begin{pmatrix} \rho \\ \phi \\ \dot{\rho} \end{pmatrix}$. איך נדע לקשר בינהם:

$$\hat{z}_t = \begin{pmatrix} \rho \\ \phi \\ \dot{\rho} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{p_x^2 + P_y^2} \\ tg^{-1} \frac{P_y}{P_x} \\ \frac{\begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \end{pmatrix}}{\sqrt{P_x^2 + P_y^2}} \end{pmatrix}$$

- נציין שמטריצת ה$var, covriance$ תהיה אם חוסר ודאות בכל אחד מהפרמטרים:

$$R = \begin{pmatrix} \sigma_\rho^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\phi^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\dot{\rho}}^2 \end{pmatrix}$$

6.8.3 ליניאריזציה

- טיילור:: $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i$
- נקח רק שני האיברים הראשונים: $f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a)^1$

6.8.4 יעקוביאן

$$x_{k+1} = Fx_k \longrightarrow x_{k+1} = f(x_k) + r$$
$$Z_k = Hx_k \longrightarrow Z_k = h(x_k) + w$$

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

$$h(x) = h(\mu) + \underbrace{\frac{dh(\mu)}{dx}}_{\text{jacobian matrix}} (x-\mu)$$

מטריצת יעקוביאן כללית, תראה כך:

$$\begin{bmatrix} \frac{\vartheta h_1}{\vartheta x_1} & \frac{\vartheta h_1}{\vartheta x_2} & \cdots & \frac{\vartheta h_1}{\vartheta x_n} \\ \frac{\vartheta h_2}{\vartheta x_1} & \frac{\vartheta h_2}{\vartheta x_2} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \frac{\vartheta h_n}{\vartheta x_n} & & & \frac{\vartheta h_n}{\vartheta x_n} \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\rho\\ \varphi\\ \dot{\rho}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{p_x^2+P_y^2}\\ tg^{-1}\frac{P_y}{P_x}\\ \frac{P_x\cdot V_x+P_y\cdot V_y}{\sqrt{P_x^2+P_y^2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}h_1\\ h_2\\ h_3\end{pmatrix}$$

ונגזור לפי כל פרמטר :

$$\begin{bmatrix}\frac{P_x}{\sqrt{p_x^2+P_y^2}} & \frac{P_y}{\sqrt{p_x^2+P_y^2}} & 0 & 0\\ -\frac{P_y}{\sqrt{p_x^2+P_y^2}} & \frac{P_x}{\sqrt{p_x^2+P_y^2}} & 0 & 0\\ \frac{P_y(V_xP_y-V_yP_x)}{\left(P_x^2+P_y^2\right)^{3/2}} & \frac{P_x(V_yP_x-V_xP_y)}{\left(P_x^2+P_y^2\right)^{3/2}} & \frac{P_x}{\sqrt{P_x^2+P_y^2}} & \frac{P_y}{\sqrt{P_x^2+P_y^2}}\end{bmatrix}$$

6.8.5 היתוך חיישנים

- מצב אסכנרוני ־לכל חיישן:

$$\text{Prediction}\rightarrow\text{measurment update}$$

- מצב סנכרוני

$$\text{Prediction}\rightarrow\text{L update}\rightarrow\text{R update}$$

- שגיאת ה $RMSE$

$$\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^{Est}-x_i^{True}\right)^2}$$

6.9 מסנן חלקיקים

6.9.1 התפלגויות לא פרמטריות

- ולכן ההסתברות למאורע תראה כך:

$$P\left(x\right)=\sum_{j=1}^{J}w^j\cdot\delta_{x^j}\left(x\right)$$

  – כאשר δ מוגדרת כך:

$$\delta_{x^j}\left(x\right)=\begin{cases}\infty & x^j=x\\ 0 & else\end{cases}$$

- משוואות התנועה המוכללות
  - אם $\theta = 0$ אז:

$$x_f = x_i + v \cdot \Delta t \times \cos(\theta_0)$$
$$y_f = y_i + v \cdot \Delta t \times sin(\theta_0)$$

  - אם $\theta \neq 0$ אז:

$$x_f = x_i + \tfrac{v}{\dot{\theta}} \left(\sin\left(\theta_0 + \Delta t \times \dot{\theta}\right) - \sin(\theta_0)\right)$$
$$y_f = y_i + \tfrac{v}{\dot{\theta}} \left(\cos(\theta_0) - \cos\left(\theta_0 + \Delta t \times \dot{\theta}\right)\right)$$
$$\theta_f = \theta_0 + \Delta t \times \dot{\theta}$$

- התמרות הומגניות rotation matrix :

$$\begin{bmatrix} x_m \\ y_m \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & x_p \\ \sin\theta & \cos\theta & x_p \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ 1 \end{bmatrix}$$

- פונקצית משקל מתקדמת

$$w\left(x_t^{|k|}\right) = k \cdot w\left(x_t^{|k|}\right) + (1-k) \cdot w\left(x_{t-1}^{|k|}\right)$$

- חישוב שגיאה במסנן חלקיקים $ground\_truth = (x, y, \theta)$
  - אפשרות ראשונה:

$$error = \frac{\sum_{i=1}^{M} w_i \sqrt{(P_i - g)^2}}{\sum_{i=1}^{M} w_i} = \frac{\sum_{i=1}^{M} w_i \left|(P_i - g)^2\right|}{\sum_{i=1}^{M} w_i}$$

w_i משקל, P_i חלקיק.

  - אפשרות שניה:

$$error = |P_{Best} - g|$$