אוטומטים 2 - מטלה 1

נעם דומוביץ - 2040838939

הודיה טביביאן - 313418923

שאלה 1

עבור שפה $L \subseteq \sum^*$ נגדיר : $PrefixW(L) = \{w \in L|\ \exists u \in L\ s.t.\ w \neq u \text{ and w is prefix of u}\}$

הוכחה/הפרך לכל L , היחס $R_{prefixW(L)}$ מעדן את היחס $\widetilde{R}_L$

דוגמה נגדית:

- נגדיר את $L = \{a^1, a^2, ..., a^6\}$
- מתקיים ש: $PrefixW(L) = \{\{a^1, a^2, ..., a^5\}\}$
- יהיו מחלקות השקילות עבור $PrefixW(L)$:
  - $A_0 = \{\varepsilon\}, A_1 = \{a^1\}, ...A_5 = \{a^5\}, A_6 = \sum * \backslash \{\varepsilon, a^1, a^2, ..., a^5\}$
- נתבונן במילים a^1, a^6 אלו שתי מילים בשפה L אך הן שייכות למחלקות שקילות אחרות בעבור $PrefixW(L)$.

שאלה 2

תהי $L \subseteq \sum^*$ הוכח/הפרך

א. אם כל מחלקת שקילות של R_L היא שפה רגולרית, אז R_L מכילה מחלקת שקילות אינסופית

- תהי השפה $L = \left\{a^{n^2}|n \in \mathbb{N}\right\}$
- הראנו בתרגול שיש לשפה זו אינסוף מחלקות שקילות, ולכן לכל x, y ישנו z מפריד כך ש $xz \in L \Leftrightarrow yz \in L$
- ומתקיים שכל מחלקת שקילות היא סופית ורגלורית.

ב. אם L היא שפה רגולרית, אז R_L מכילה מחלקת שקילות אינסופית.

הוכחה:

- ע"פ משפט נרוד , L רגורלית $\iff index(R_L) < \infty$
- נשים לב שכל מילה בשפה היא מעל $\sum^*$, ולכן ישנה חלוקה המתייחסת למילים האינסופיות.
- נתבונן בחלוקה כלשהי של R_L אם ישנה $A \in R_L$ המייצגת מילה אינסופית בשפה סיימנו.
- אחרת (כל המחלקות למילים בשפה סופיות, ולכן) , ישנה $A' \in R_L$ מחלקת שקילות עבור כל המלים האינסופיות שלא בשפה ולכן גם כאן ישנה מחלקת שקילות אינסופית.

שאלה 3

יהי $k \in \mathbb{N}^+$. הוכח שכל DFA עבור השפה $L = \left\{w \in \{a, b, c\}^* | \text{the k'th last symbol of w is b }\right\}$ מכיל לפחות 2^k מצבים

הוכחה:

- על פי מסקנה ממשפט נרוד מספר המצבים המינמלי ל DFA הוא כמספר מחלקות השקילות של L , על כן אם נראה שמספר מחלקות השקילות הוא 2^k סיימנו.

- נשים לב שמצד אחד מילים באורך הגדול מk הן שרשור של מילה באורך k עם תחילית כלשהי , כיוון שאנו מסתכלים על k האותיות האחרונות.
- מצד שני מילים באורך הקצר מ k , היא כמו מילה באורך k שהאות הk מהסוף, לא היתה b .
- כעת נוכל להתבונן באפשרויות השונות להרכבת מילה באורך k. לכל אות יש 2 אפשרויות:
  - לבחור באות b
  - לבחור באות a או c (לא משנה לנו מה נבחר)
- כל אפשרות שכזו נגדיר כמחלקת שקילות - סה"כ יש 2^k אפשרויות (עם חזרות, עם סדר)
- נראה שכל מחלקה מגדירה מחלקת שקילות נפרדת עבור יחס R_L
  - יהיו S^1, S^2 2 מחלקות שקילות שונות זו מזו:
  - לכן קיים אינדקס i עבור S^1 כך ש i מסמל את ה b האחרון במילה
  - ולכן קיים אינדקס j עבור S^2 כך ש j מסמל את ה b האחרון במילה
  - יהיו $x \in S^1$ ו $y \in S^2$
  - כעת , נפצל למקרים:
    * אם $i \neq j$: אז בה"כ $j < i$ ובפרט אם נשרשר את a^{j-1} נקבל ש: $ya^{j-1} \in F$ אבל $xa^{j-1} \notin F$
    * אם $i = j$ אז מכך שהמחלקות שונות זו מזו, קיים אינדקס h כלשהו בה"כ $j < h$ כך שיש b באינדקס i מהסוף ו h מהסוף. ובפרט אם נבחר $z = a^{j-1}$ ונשרשר נקבל: $ya^{j-1} \in F$ אבל $xa^{j-1} \notin F$

שאלה 4

<u>תהי $L \subseteq \sum^*$ רגולרית. הוכח או הפרך: אם L רגולרית ,אז לכל $x, y \subseteq \sum^*$ קיימת קבוצה אינסופית $I \subseteq \mathbb{N}$, כך שהקבוצה $\left\{xy^i | i \in I\right\}$ מוכלת במחלקת שקילות (אחת) של R_L</u>

<u>הוכחה:</u>

- הקבוצה $\left\{xy^i | i \in I\right\}$ היא תת קבוצה של $A = \left\{xy^i | i \in \mathbb{N}\right\}$
- נניח כי קבוצה זו מתפרסת על כל מחלקות השקילות של האוטומט R_A
- ב2ג הראינו שלשפה רגולרית L קיימת מחלקת שקילות אינסופית ב R_L , נסמנה ב S_∞
- נגדיר קבוצה חדשה $S_k = S_\infty \cap \left\{xy^i | i \in \mathbb{N}\right\}$.
- בהכרח קיים חיתוך כזה והוא אינסופי.
- קיבלנו קבוצה אינסופת של iים, עבורם נגדיר את הקבוצה I , וקיבלנו את הדרוש.

שאלה 5

<u>הוכח באמצעות משפט נרוד, שהשפה הבאה $L = \left\{x \in \{a, b\}^* | \#_a(x) = 2\#_b(x)\right\}$ אינה רגולרית.</u>

<u>הוכחה</u> - צריך להראות ש $index(R_L) = \infty$

הראנו בכיתה שתנאי מספיק להראות שקיימת $A \subseteq \sum^*$ אינסופית, כך שלכל $x \neq y \notin R_L$ כל מילה נמצאת במחלקת שקילות משלה.

- נגדיר את מחלקות השקילות $A = \left\{a^{2i} | i \in \mathbb{N}\right\}$, זוהי קבוצה אינסופית כי $|\mathbb{N}| = \aleph_0$
- יהיו $w_i, w_j \in A$ עם $i \neq j$, ונשרשר להן b^i נקבל ש: $a^{2i}b^i \in L$ אבל $a^{2j}b^i \notin L$
- לכן ישנן ∞ מחלקות שקילות $\Longleftarrow$ L אינה רגולרית (נרוד)

שאלה 6

תהי $L \subseteq \sum^*$. נגדיר יחס $R_{L,5} = \left\{(x,y) \subseteq \left(\sum^*\right)^2 \mid \forall z \subseteq \sum \ \ xz \in L \Leftrightarrow yz \in L \vee |z| > 5\right\}$ במילים , הוכח/הפרך

1. <u>לכל L , $R_{L,5}$ מעדן את R_L</u>

- נגדיר את $L = \left\{\varepsilon, a, a^7\right\}$
- נגדיר את מחלקות השקילות ל R_L $A_0 = \{\varepsilon\} \ A_1 = \{a\}, A_2 = \left\{a^7\right\}, A_3 = \sum^* \setminus \{A_0 \cap A_1 \cap A_2\}$
  - הסבר: נבחר את $z = a^6$ ויהיו $x = a$ ו $y = a^7$ אז $yz = a^6 a^7 = a^{13} \notin L$ ו $xz = aa^6 = a^7 \in L$, ולכן ישנו z מפריד ומכאן שהם במחלקות שקילות שונות
- נגדיר את מחלקות השקילות ל $R_{L,5}$: $A_0 = \{\varepsilon\}, A_1 = \left\{a, a^7\right\}, A_3 = \sum^* \setminus \{A_0 \cap A_1\}$
  - הסבר: נפצל למקרים
    * אם $x = y = a$ או $x = y = a^7$ אז לכל z שניקח $R(x,y)$
    * אם בהכ $x = a$ ו $y = a^7$ אז:
      · לכל z כך ש: $|z| < 5$ אז $yz \notin L \iff xz \notin L$ ולכן $R_{L,5}(x,y)$
      · אם ננסה לקחת את ה z מפריד (היחידי) ממקודם a^6 אז מהגדרת $R_{L,5}$ $|z| > 5$ ולכן $(x,y) \in R_{L,5}$

2. <u>לכל L , R_L מעדן את $R_{L,5}$</u>

- צ"ל ש $R_L(x,y) \subseteq R_{L,5}$
- יהיו $x,y \in R_L$ ויהיה z כך ש: $yz \in L \Leftrightarrow xz \in L$
- נפצל למקרים:
  - אם $|z| \leq 5$ אז $yz \in L \Leftrightarrow xz \in L$ מהנחה.
  - אם $|z| > 5$ אז לא משנה לנו קיום התנאי $yz \in L \Leftrightarrow xz \in L$
- ובסה"כ $(x,y) \in R_{L,5}$, כנדרש.

3. <u>קיים L כך ש $R_{L,5}$ מעדן את R_L ובנוסף ל R_L ישנן לפחות 4 מחלקות שקילות.</u>

- נבחר את השפה $L = \left\{a^1, a^2\right\}$
- אז מחלקות השקילות ל R_L ו ל $R_{L,5}$ (יש 4) הן:
  - $A_0 = \{\varepsilon\} \ A_1 = \{a\}, A_2 = \left\{a^2\right\}, A_3 = \sum^* \setminus \{A_0 \cap A_1 \cap A_2\}$
  - כי קיים z כך $|z| < 5$, כך ש z מפריד.
- ובפרט יתקיים ש: $R_{L,5} \subseteq R_L$
- אינטואציה - הראנו בכיתה שאם היחס מעדן אז מספר המחלקות השקילות גדול יותר כלומר אם $R_{L,5} \subseteq R_L$ אז $index(R_{L,5}) \geq index(R_L)$
  - ובסעיף ב' הראנו שלכל L יתקיים ש: $index(R_L) \geq index(R_{L,5})$
  - ובסה"כ : $index(R_L) \geq index(R_{L,5}) \geq index(R_L)$