אוטומטים מטלה 2

נעם דומוביץ - 204083893

הודיה טביביאן - 313418923

שאלה 1

הוכח: לכל $A \in V$, $w \in T^*$ מתקיים ש: $A \in \hat{\delta}(S,x) \Rightarrow S \Rightarrow^* wA$.

נוכיח באינדוקציה על אורך המילה נסמנה ב ,

בסיס: עבור $|w| = 0$ אז $\delta(S,w) = \delta(S,\varepsilon) = A$ ואכן גם $S \Rightarrow xA$ שקול ל $A \in Q$ $S \Rightarrow^0$ כי $x = \varepsilon$

צעד: נניח למילה באורך $|w| = n$ ונוכיח למילה באורך $n+1$

- תהיה $w = w's$ אז מהגדרת פונקצית המעברים ישנו מצב p כך שיתקיים ש $\hat{\delta}(w's) = \delta\left(\hat{\delta}(w',p), s\right) = q \in Q$
- מהנחת האינדקוציה $\hat{\delta}(w',p) = q' \in Q$ ולכן גם יש כלל גזירה כך ש $P \Rightarrow^n w'q'$
- מאיך שהגדרנו את G_A נובע שקיים כלל גזירה התואם ל $\delta(p,s) = q$ כך ש: $p \Rightarrow^1 sq$
- $7,2$ שהראנו בכיתה, נובע שניתן לחבר לביטוי יחיד
- ולכן: $P \Rightarrow^{i+1} w'sq = wq$

הוכיחו את טענה 2 בהוכחה - טענה 2: לכל $x \neq \varepsilon$ מתקיים ש: $S \rightarrow^* x \iff q_F \in \hat{\delta}(S,x)$

- יהיו $S = q_0$ (הגדרנו בכיתה) $x \in T^*$
- הגדרנו בכיתה את $NFA - \varepsilon$ להיות האוטומט המכריע את השפה L_3 , בנוסף הגדרנו כי יש לו מצב מקבל יחיד ע"י מסע ε , לכן קיימת $\hat{\delta}$ כך ש: $\hat{\delta}(S,x) = \hat{\delta}(q_0,x) = q_F$
- מטענה 1, נובע שקיימת סדרת גזירה כלשהי כך ש: $S \rightarrow^* x$, כנדרש
- (באותו אופן עבור הכיוון השני)

תנו דוגמה לדקדוק G המכיל כללים מהצורה $A \rightarrow a$ מהצורה $A \rightarrow aB$ ומהצורה $A \rightarrow Ba$ בלבד , כך ש $L(G)$ אינה רגולרית:

- נקח את השפה $L = \{a^n b^n | n \in \mathbb{N}\}$
- ונגדיר $G = (\{S,B\}, T = \{a,b\}, S, P)$, כאשר P :
  - $S \rightarrow aB \mid \varepsilon$
  - $B \rightarrow Sb$
- וכידוע זו שפה לא רגולרית.

שאלה 2

נגדיר את השפה $L = \left\{x \in \{(,)\}^* | \forall z \text{ prefix of x}\ , \#_{(}(z) \geq \#_{)}(z) \text{and } \#_{(}(x) = \#_{)}(x)\right\}$ שימו לב שבדיקת שייכות לשפה זו ניתנת בקלות להרחבה לבדיקת תקינות סוגריים בביטוי אריתמטי

א. בנו דקדוק חסר הקשר עבור L ,

- $S \rightarrow \varepsilon \mid\ ()S \mid S() \mid (S) \mid$

ב. הוכיחו את נכונות הבניה:

יש להראות ש $L = L(G)$

נראה ע"י הכלה דו־כיוונית

כיון ראשון: $L \subseteq L(G)$

נראה באינדוקציה על אורך המילה

עבור מילה באורך 0 אז $x = \varepsilon$ ואכן $S \to \varepsilon$ הוא כלל גזירה בP

צעד: נניח בעבור מילה באורך $i' < i$ ונוכיח בעבור מילה באורך i(זוגי)

נפצל למקרים:

- אם המילה היא מהסוג () (..........) או (.........) ()
  - אז קיבלנו מילה המחולקת לשני חלקים שקטנים ממש מ i , ומהנחת האינדוקציה קימת להם סדרת גזירה מתאימה
- אם המילה היא מהסוג ((........)) אז נבצע את כלל הגזירה $S \to (S)$ ומהנחת האינדוקציה נקבל את שאר המילה , כנדרש.

כיון שני: $L(G) \subseteq L$:

באינדוקציה על אורך הגזירה:

בסיס: עבור מילה x אז $S \to^0 x$ אז בהכרח $x = \varepsilon$ ומתקיים $S \to \varepsilon$ וזה כלל ב P

צעד: נניח לסדרת גזירה באורך i ונוכיח לסדרת גזירה באורך $i+1$

- נרשום את סדרת הגזירה $S \Rightarrow^{i+1}$ כך $S \Rightarrow^i \beta \Rightarrow \alpha$
- מהנחת האנידוקציה $S \Rightarrow^i \beta$ תצור מילה בשפה וכן מתקיים ש $\#_((z) \geq \#_)(z)$ לכל z תחילית ל x
- כעת נפצל למקרים:
- כעת אם x מתקבלת ע" גזירה $B \Rightarrow \alpha$ בשימוש בכלל $B \to B()$ אז:
  - המילה היא מהצורה ()(......)

    ואכן מהנחת האינדוקציה (.....) מתקיים שכמות הפותחים גדולה או שווה לכמות הסוגרים. בפרט אם נוסיף את הפותח הנוסף נקבל :)(.......) ורק הגדלנו את הפותחים. אם נוסיף גם את הסוגר האחרון נקבל את כל המילה, ויתקיים שכמות הסוגרים והפותחים שווה ־ מהנחת האינדוקציה + תוספת שווה של פותח וסוגר.
- אם x מתקבלת ע" גזירה $B \Rightarrow \alpha$ בשימוש בכלל $()B$ $B \to$ אז:
  - המילה מהצורה (........)() ־ באופן סימטרי.
- אם x מתקבלת ע" גזירה $B \Rightarrow \alpha$ בשימוש בכלל $B \to (B)$ אז:
  - המילה מהצורה ((.....)) אז ברור שלכל תחילית יהיה יותר פותחים מסוגרים כי מהנחת האינדוקציה למילה הפנימית כמות הפותחים גדולה יותר, והוספנו עוד אחד ־ הפותח הראשון ־ שיהיה בכל תחילית

    בנוסף, כאשר ניקח את כל המילה, נקבל את הסוגר החוסר, ונקבל שמספר הסוגרים והפותחים שווה, ולכן המילה בשפה.

שאלה 3

ראינו בכיתה דוגמה לשפה חסרת הקשר, כך שכל דקדוק חסר הקשר עבורה הוא דו־משמעי. למשל השפה $L = \{a^n b^m c^m \cup a^m b^m n^c\}$ היא שפה כזו.

הציעו דקדוק ח"ה עבור השפה, והוכיחו שהוא דו־משמעי.

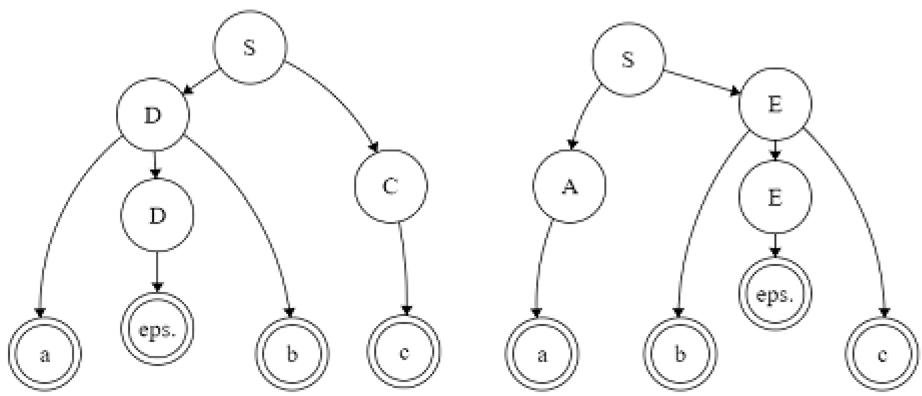
נציע את הדקדוק הבא: $G = (\{S, A, C, D, E\}, \{a, b, c\}^*, S, P)$

P:

- $S \to AD|EC$
- $D \to bDc|\varepsilon$
  - $A \to Aa|\varepsilon$
- $E \to aEb|\varepsilon$
  - $C \to cC|\varepsilon$

ונתבונן במילה $a^1b^1c^1 \in L$

נראה שני עצי גזירה, על פי הדקדוק:



<u>מדוע זה לא מוכיח שהשפה היא דו־משמעית טבועה:</u>

- על פי ההגדרה בשאלה שפה דו משמעית טבועה אם **כל** דקדוק חסר הקשר עבורה, הוא דו־משמעי
- אנו הראינו דוגמה **שקיים** דקדוק חסר הקשר, דו־משמעי
- כלומר על מנת להוכיח זאת יש להראות שלכל דקדוק שנציע קיימים שני עצים גזירה שונים זה מזה.

שאלה 4

<u>בהנתן שני דקדוקים ח"ה G_1, G_2 בנו דקדוק ח"ה עבור:</u>

- נסמן $G_1 = (V_1, T, S_1, P_1)$, $G_2 = (V_2, T, S_2, P_2)$

<u>א. $L(G_1) \cup L(G_2)$</u>

- נגדיר: $G = (V = V_1 \cup V_2 \cup S, T, S, P)$
- $P = P_1 \cup P_2 \cup S \to S_1 \cup S \to S_2$

<u>ב. $L(G_1)^R$</u>

- $G = (V = V_1, T, S = S_1, P)$
- עבור P נסביר במילים :
  - כל כלל לינארי ימני נהפוך את הסדר כך שיהפוך ללינארי שמאלי
  - כל כלל לינארי שמאלי נהוך את הסדר כך שיהפוך ללינארי ימני

– כלל סימטריים נהפוך את שני הצדדים שמסביב למשתנה

ג. $\underline{L(G_1)^*}$

- $G = (V = V_1, T, S = S_1, P = P_1 \cup S \to \varepsilon | S_1 S_1)$

ד. $\underline{L(G_1) \cdot L(G_2)}$

- $G = (V = V_1 \cup V_2 \cup S, T, S, P = P_1 \cup P_2 \cup S \to S_1 S_2)$

שאלה 5

שאלה 56 סעיפים א,ב,ג,ד,ז אין צורך להוכיח נכונות יש לתת הסבר קצר על רעיון הבניה

<u>כתבו דקדוקים חסר הקשר עבור השפות</u>

א. $\underline{L_1 = \left\{ w\#w^R\# \; | w \in \sum^*, \# \in \sum \right\}}$

- $G = (V = V_1 \cup V_R \cup S, T \cup \#, S, P = P_1 \cup P_2 \cup S \to S_1 S_R)$
- S_1 ייצג את המשתנה ההתחלת עבור $L(G)$ (רגיל) , S_2 ייצג את המשתנה ההתחלתי עבור $L(G)^R$
- $L(G)$ יבנה את המילה שבשפה, על פי מה שהראנו בשאלה 4 סעיף $L(G)^R$ יבנה את המילה ההפוכה.
- נגדיר משתנה התחלתי חדש S ואת הכלל: $S \to S_1\#S_R\#$, ונקבל את הדרוש.

ב. $\underline{L_2 = \left\{ a^i b^j | j = 4 \cdot i + 2 \right\}}$

- $G = (\{S\}, T, S, P)$
- כאשר P : $S \to bb | aSbbbb$
- נציב את j נקבל ש $L_2 = \left\{ a^i b^{4i} bb \right\}$, ולכן בעבור הצעד הסופי נוסיף רק שנים, ובשאר הצעדים נוסיף 4 bים על כל a בודדד

ג. $\underline{L_3 = \left\{ a^i b^j c^k d^l \; | k > l > 0, \; i > j \geq 0 \right\}}$

- על פי הנתונים צריך להתקיים :

$$\begin{array}{ll} k \geq 2 & i \geq 1 \\ l \geq 1 & j \geq 0 \end{array}$$

- לכן:
- $G = (\{S, A, B, C, D\}, T, S, P)$
- P :
  - $S \to aWccUd$
  - $W \to aWb \; | aW \; | ab \; | \varepsilon$
  - $U \to cUd \; | cU \; | cd \; | \varepsilon$
- כלומר שמנו בהתחלה את האותיות שחייבות להיות, בשלב הבא ניתן להוסיף a ו b ביחד או רק a על מנת לשמור על כך שיש יותר aים , באופן דומה ל c ו d .

ד. $\underline{L_4 = \left\{ 0^i 1^j 2^k | \; i \neq j \; or \; j \neq k \right\}}$

- $S \to S_1|S_2|S_3|S_4$

1) $S_1 \to 0T_1|0T_1R_1|\varepsilon|R_1 \quad T_1 \to 0T_11|0T_1|\varepsilon \quad R_1 \to 2R_1|\varepsilon$

2) $S_2 \to T_21|\ T_21R_2|\varepsilon|R_2 \quad T_2 \to 0T_21|T_21|\varepsilon \quad R_2 \to 2R_2|\varepsilon$

3) $S_3 \to R_31T_3|\ 1T_3|\varepsilon|R_3 \quad T_3 \to 1T_32|1T_3|\varepsilon \quad R_3 \to 0R_2|\varepsilon$

4) $S_4 \to T_42|\ R_4T_42|\varepsilon|R_4 \quad T_4 \to 1T_42|T_42|\varepsilon \quad R_4 \to 0R_4|\varepsilon$

- הסבר בשורה 1 - דאגנו שמספר ה0ים יהיה גדול ממספר ה1ים
- בשורה 2 - כמות ה1ים גדולה מכמות ה0ים
- בשורה 3 - כמות ה 1ים גדולה מכמות ה2ים
- בשורה 4 - כמות ה2ים גדולה מכמות ה1 ים

ז. <u>$L_7 = \{a^ib^jc^k|j \geq i+k\}$</u>

- $S \to AC$
- $A \to aAb|ab|B$
- $B \to Bb|\varepsilon$
- $C \to bCc|bc|B$
  - כמות ה bים צריכה להיות גדולה או שווה מכמות ה aים + ה cים
  - המשתנה A מייצג את החלק a^ib^i במילה
  - המשתנה C מייצ את החלק b^kc^k במילה
  - ובנוסף יש מתשנה B שנותן לנו להוסיף bים כרצוננו.