מתרגלת: יעל סבתו

להערות/הארות/תיקונים - נעם דומוביץ - $ndoomovich@gmail.com$

דיסקרטית - תרגול

תרגול 2 - 6/3/19

עקרון שובך היונים

הוכחת עקרון שובך היונים

בכל חלוקה של $n+1$ יונים ל n שובכים קיים תא שבו לפחות 2 יונים

<u>הוכחה</u>

צ"ל ש $\boldsymbol{a} \to \boldsymbol{b} \equiv \vee \neg a \vee b \equiv b \vee \neg a \equiv \neg \boldsymbol{b} \to \neg \boldsymbol{a}$

- כלומר נניח בשלילה שלא קיים תא עם 2 יונים אז בכל תא יש יונה אחת לכל היותר.
- נספור את היונים, הספירה $\geq$ מס' התאים $\cdot$ 1
- מנתון יש n שובכים לכן מס היונים $\geq n$
- בסתירה לכך שמס' היונים $= n+1$

1. <u>הוכיחו</u> : בקבוצה של 13 איש קיימים לפחות 2 שנולדו באותו <u>חודש</u>?
   - נגדיר ש13 <u>האנשים</u> יהיו <u>היונים</u>
   - נגדיר את <u>החודשים</u> כ<u>שובכים</u> - 12
   - נצמיד כל איש לחודש שבו הוא נולד (שורה זו מראה שכל איש/יונה <u>נכנסה</u> לאיזשהו שובך
   - כיוון ויש יותר אנשים מחודשים, <u>מעקרון שובך היונים</u> קיימים 2 אנשים לפחות שנולדו באותו חודש.
2. <u>הוכיחו:</u> אם שמים 91 מכתבים ב 10 תאים אז קיים תא שבו לפחות 10 מכתבים
   - נגדיר את המכתבים כ יונים - 91
   - נגדיר את התאים כשובכים - 10
   - נצמיד כל מכתב לתא שהוא נכנס - מעקרון משובך היונים המורחב - יש תא עם 10 מכתבים
3. 30 אוטובוסים בכל אוטובוס 80 מקומות 2000 איש. הוכיחו:

   (א) באחד האוטובוסים יש לפחות 14 מקומות פנויים

   (ב) אחד האוטובוסים יכיל לפחות 67 נוסעים

   פתרון:

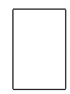
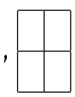
   - <u>נתחיל מב':</u> ונראה כמו בהוכחה של עקרון השובך היונים.
     - נניח בשלילה שבכל האוטובוסים יש 66 אנשים, יש 30 אוטובוסים אז יש $30 \times 66 = 1980 < 2000$, סתירה לנתון.
   - <u>נחזור לא':</u> $88 - 67 = 13$, כלומר נניח בשלילה שאין אוטובוס כזה $\Longleftrightarrow$ בכל האוטובוסים יש לפחות 67 אנשים, אז $30 \times 67 = 2010 > 2000$, סתירה לנתון
4. הוכיחו שאם בוחרים 7 מספרים <u>שונים</u> מקבוצה אז קיימים 2 (מאלה שבחרנו) שסכומם הוא 12
   - נגדיר את השובכים הבאים : $\{6\}, \{1,11\}, \{8,4\}, \{2,10\}, \{3,9\}, \{7,5\}, \{8,4\}$

- כל מספר שבחרנו (מה7) , נכיס לשובך שבו הוא מופיע ומעקרון שובך היונים. קיים שובך שבו 2 יונים.

5. יש חברה עם 15 אנשים, כאשר כמה מהם לחצו ידיים לחלק (/או כולם) משאר האנשים. הוכיחו כי יש 2 אנשים שלחצו ידיים לאותו מספר אנשים?

- נגדיר שובכים: את המספרים השונים ללחיצות הידיים לכן: $\lfloor 14\rfloor \quad \lfloor 13\rfloor \quad ... \quad \lfloor 2\rfloor \quad \lfloor 1\rfloor \quad \lfloor 0\rfloor$
- נגדיר יונים: את מספר האנשים
- הבעיה: יש 15 תאים, ו15 יונים וכרגע לא נוכל להשתמש בעקרון שובך היונים, **אבל**
- נטען שיש 14 תאים כי אם יש משהו שלחץ ידיים ל14 אנשים, אז בהכרח לכל האנשים נלחצה היד (לחיצת יד היא יחס סימטרי), ולכן לא קיים אדם עם 0 לחיצות יד - לכן יש 14 תאים
  - באותו אופן אם יש משהו לא לחץ אף יד $\Leftarrow$ לא קיים אדם שלחץ יד לכולם
- כעת, מעקרון שובך היונים (המורחב) , יש 2 אנשים שלחצו את אותו מספר לחיצות ידיים.

6. ריבוע שצלעו 2 , קלע ירה 5 כדורים בריבוע הזה. הוכיחו שיש שתי פגיעות שמרחקן לכל היותר $\sqrt{2}$?

- הריבוע נראה כך 
- נחלקו ל 4 :  , כעת כל צלע היא 1 , ומפתגורס כל אלכסון (המרחק המקסימלי) הוא $\sqrt{2}$
- לכן מעקרון שובך היונים...

7. הוכח שקיימים $a,b \in \mathbb{N}$ $a \neq b$ כך ש: $57|2^a - 2^b$

- נשתמש בלמה: בקבוצה A של $n+1$ מספרים טבעיים, קיימים 2 $a,b \in A$ כך ש: $a \equiv b(\mod n)$ (מעקרון שובך היונים)
- מתורת המספרים $a \equiv b(\mod n) \iff a-b \equiv 0(\mod n)$
- נתבונן בקבוצה: $A = \left\{2^0, 2^2, ...2^{57}\right\}$ לכן $|A| = 58$ - נגדירה כיונים
- נגדיר את השאריות מודולו 57 כשובכים,
- ניקח את שניהם וההפרש בינהם יהיה כנדרש

8. הוכיח שקיים מספר שניתן לרשום אותו רק ע"י הספרות 0,7 שמתחלק ב 359

- נרצה $|A| = 360$ נגדיר את $A = \left\{7, 77, 777, ...\underbrace{7.....7}_{360}\right\}$

משפט ארדש-סקרש

בכל סדרה של n^2+1 מספרים ממשים שונים, קיימת תת סדרה באורך $n+1$ שהיא או עולה או יורדת

נוסחת הבינום של ניוטון

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

לדוגמה $(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$ אז:

- $\binom{2}{0} \cdot a^{2-0} b^0 = 1 \cdot aa$
- $\binom{2}{1} \cdot a^{2-1} b^1 = 2 \cdot ab$

- $\binom{2}{2}\cdot a^{2-2}b^2 = 1\cdot bb$

הוכיחו את הזהות: $2^n = \sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$

הוכחה אלגברית - מהבינום של ניוטון:

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}1^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$$

תרגול 4 - 3/27/19

מולטינום

1. <u>נתונים 5 כדורים אודמים, 7 כחולים ו 20 שחורים, בכמה אפשרויות ניתן לסדרם בשורה?</u>

- תשובה - ע"פ המולטינום

$$\binom{32}{20,7,5} = \frac{32!}{20!7!5!}$$

- דרך נוספת להסתכל על זה:
- היא כאילו יש לנו שורה ארוכה של 32 כדורים, וכל פעם שמים את הכדורים במקום הפנוי:

$$\binom{32}{5}\binom{27}{7}\binom{20}{20}$$

- ומתברר, שהביטויים זהים (הראינו בשיעור)

2. <u>כמה מחרוזות ניתן להרכיב ע"י שינוי הסד של האותיות של המיליה $Mississippi$</u>

- ניתן להתייחס לזה כמו לכדורים משאלה קודמת, סה"כ יש לנו:

$$\begin{matrix} 's'-4 & 1-'m' \\ 'i'-4 & 2-'p' \end{matrix}$$

- ומהמולטינום:

$$\binom{11}{4,4,1,2}$$

3. <u>(המשך) כמה סידורים כאלה יש כך שאין 2 $'i'$ ברצף?</u>

- ראשית, נסדר את כל השאר האותיות, ע"פ המולטינום, סידור שאר האותיות: $\binom{7}{4,1,2}$
- כעת בין כל שתי אותיות = תא, ניתן להכניס i אחד או אפס , ולכן $\binom{8}{4}$
- מעיקרון הכפל: $\binom{7}{4,1,2}\cdot\binom{8}{4}$

מספרי קטלן

סדרות בינאריות באורך $2n$ המכילות n אפסים ו n אחדות, נקראות מאוזנות אם בכל רישא מספר האפסים גדול שווה ממס' האחדות.

עבור n ספציפי כמה סדרות מאוזנות קיימות? <u>תשובה:</u> $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$

<u>סקירה כללית של ההוכחה:</u>

- נגדיר A= כל הסדרות הבינאריות באורך $2n$ עם n אפסים ו n אחדות

- נגדיר $B \subseteq A$ = סדרות לא מאוזנות
- נגדיר $C \subseteq A$ = סדרות מאוזנות
- הקבוצות B, C זרות, ולכן $B \cup C = A$
- $|A|$ = $\binom{2n}{n}$
- צ"ל את: $|C| = |A| - |B|$
- נגדיר פונקציה $f : B \to D$, כאשר D = כל הסדרות עם $n+1$ אפסים , ו $n-1$ אחדות.
- זו פונקציה חח"ע ועל, ומתקיים ש: $|D| = |B| = \binom{2n}{n+1}$
- ולכן $|A| - |B| = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$, כנדרש.

<u>שאלות</u>

1. <u>נתאר סדרה של הכנסות והוצאות ממחסנית. של סהכ n כדורים. הערה: א"א לבצע pop על מחסנית ריקה. כמה סדרות כאלה קיימות?</u>
   - תשובה: C_n
   - הסבר: נתאים $push$ ל 0 , ו pop ל 1 .
2. <u>נתונות 2 מחסניות.</u>

   <u>למחסנית 1 , הכנסנו והוצאנו n כדורים</u>

   <u>למחסנית 2 , הכנסנו והוצאנו m כדורים, כמה אפשרויות יש לאיחוד של 2 הרשימות?</u>
   - הוצאות והכנסות לראשונה C_n
   - הוצאות והכנסות לשניה c_m
   - כעת נרצה לחשב את "הערבוב"/האיחוד בין הסדרות - נשים לב שאורך הסדרה הראשונה היא $2n$ (הוצאות+הכנסות) + והשניה $2m$, ונרצה למקם את $2n$ הבחירות האלו בסדרה הגדולה, ולכן $\binom{2n+2m}{2n}$
3. <u>נתונה מחסנית, n כדורים אדומים, m כחולים. כמה סדרות של הכנסות והוצאות קיימת?</u>
   - $\binom{n+m}{n}C_{n+m}$
4. <u>כמה ביטויי סוגריים תקינים יש המורכבים מ3 סוגי סגוריים: $n - [] , m - () , k - \{\}$</u>
   - האפשרויות לכל סדרת סגוריים c_n, c_m, c_k
   - האפשרויות לאיחוד כל שלושת הרשימות $\binom{2n+2m+2k}{2n,2m,2k}$
   - סה"כ $\binom{2n+2m+2k}{2n,2m,2k} \cdot c_n \cdot c_m \cdot c_k$

הכלה והדחה

- יהיו A, B אז: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
- יהיו A, B, B אז: $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cup B \cup C$
- רעיון ההוכחה: יהי $x \in A \cup B \cup C$, נפצל למקרים לאפשריות השייכות השונות, ונספור את כמות הפעמים.
- הכללה: $\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n}^{n} |A_i \cap A_j| + ...(-1)^{n-1}\left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right|$

1. מטילים 9 קוביות משחק שונות

(א) <u>בכמה מההטלות האפשריות ישנן בדיוק 3 קוביות שמראות את המספר 6?</u>

- לבחירת 3 קוביות כלשהם יש $\binom{9}{3}$
- האפשרות שיצא 6 היא 1
- בשאר ההטלות ישנן 5 אפשרויות (ללא 6)
- ישנן 6 קוביות כאלו לכן יש 5^6 אפשרויות (עם חזרות, עם סדר)
- בסה"כ: $\binom{9}{3}\cdot 1\cdot 5^6$

(ב) <u>בכמה הטלות יש בדיוק 3 קוביות שמראות את המספ' 1 ?</u>

- אותו דבר

(ג) <u>בכמה הטלות לא קיים מספר כך ש 3 קוביות **בדיוק** מראות אותו.</u>

- נגדיר A_i , עבור $1\le i\le 6$, A_i = כל ההטלות שבהן בדיוק 3 קוביות מראות i
- לכן $|A_i|=\binom{9}{3}\cdot 5^6$, ויש 6 כאלה
- סה"כ כל האפשריות: $|U|=6^9$
- והתשובה תהיה: $\left|U\setminus\bigcup_{i=1}^{6}A_i\right|$
- נחשב את $|A_i\cap A_j|=\binom{9}{3}\binom{6}{3}4^3$ ויש $\binom{6}{2}$ כאלה
- נחשב את $|A_i\cap A_j\cap A_k|=\binom{9}{3}\binom{6}{3}\binom{3}{3}$ ויש $\binom{6}{3}$
- סה"כ : ע"פ ההכלה והדחה:

$$6^9-\left(6\cdot\binom{9}{3}\cdot 5^6-\binom{6}{2}\binom{9}{3}\binom{6}{3}4^3+\binom{6}{3}\binom{9}{3,3,3}\right)$$

2. <u>לדני יש 8 חברים הוא מזמין בדיוק 4 חברים, בכל ערב לארוחת ערב למשך 7 ערבים. בכמה דרכים הוא יכול להזמין את חבריו כך שכל חבר יוזמן לפחות פעם 1.</u>

- נחשב את סה"כ האפשריות פחות כל האפשרויות שיש לחברים שלא הוזמנו.
- נגדיר: עבור $1\le i\le 8$ את הקבוצה A_i= { כל האפשרויות בהן החבר ה i לא הזמן כלל }
- ונרצה לחשב את $|U-\bigcup A_i|$
- $|U|=\binom{8}{4}^7$
- $|A_i|=\binom{7}{4}^8$, ויש 8 כאלו
- $|A_i\cap A_j|=\binom{6}{4}^7$, ויש $\binom{8}{2}$ כאלו
- $|A_i\cap A_j\cap A_k|=\binom{5}{4}^7$, ויש $\binom{8}{3}$
- $|A_i\cap A_j\cap A_k\cap A_l|=\binom{4}{4}^7$, ויש $\binom{8}{4}$
- חיתוך של 5 , בלתי אפשרי.
- סה"כ:

$$\binom{8}{4}^7-\left(8\cdot\binom{7}{4}^8-\binom{8}{2}\binom{6}{4}^7+\binom{8}{3}\binom{5}{4}^7-\binom{8}{4}\binom{4}{4}^7\right)$$

תרגול 5 - 4/3/19

חזרה על קטלן:

שאלה

1. מחסנית S_1 - n אבירים , מחסנית S_2 - n איברים הקטלן שלה: $\binom{2n+2m}{2n}$
2. מחסנית 1 , n כדורים כחולים, וm אדומים, הקטלן שלה: $\binom{n+m}{n}c_{n+m}$

שאלה ממבחן , תשע"ז מועד א'

א. מתוך !7 התמורות של $\{A, D, E, G, O, P, Q\}$ כמה מהן לא מכילות את הרצף $'DOG'$?

- נחשב את התכונה ההופכית - ז"א מספר התמורות שכן מכילות נפחית. יוצא $7! - 5!$

ב. כמה מהן לא מכילות את הצרף $'DOG'$ וגם לא את הרצף $'GAP'$

נשתמש בעיקרון ההכלה וההדחה, נגדיר:

- A_{GAP} = התמורות המכילות GAP
- A_{DOG} - כל התמורות המכילות DOG
- לכן $|A_{DOG}| = |A_{GAP}| = 5!$
- $|A_{DOG} \cap A_{GAP}|$ = $3!$ (יש G אחת - לכן הן חייבות להיות מחוברות לכן יש 3 איברים לסדר בשורה)
- נרצה לחשב את $U - (A_{GAP} \cup A_{DOG})$
- סה"כ: $7! - 5! - 5! + 3!$

אי סדר מלא

1. כמה תוצאות אפשריות יש למשחק 'גמד־עמק' עם n אנשים שבהן אף אדם לא קיבל את עצמו בפתק?
   - כל האפשרויות $U = n!$
   - נגדיר לכל $1 \leq i \leq n$ את הקבוצה:
     A_i = האאדם ה i קיבל את עצמו בפתק
   - נרצה לחשב את $U - \bigcup_{i=1}^{n} A_i$
   - לכל i מתקיים ש: $|A_i| = (n-1)!$ ויש $\binom{n}{1} = n$ כאלה
   - לכל $1 \leq i < j \leq n$ והעוצמה $|A_i \cap A_j| = (n-2)!$ ויש $\binom{n}{2}$
   - ..
   - חיתוך של k כאלה , עוצמתו $(n-k)!$ ויש $\binom{n}{k}$
   - סה"כ:

$$\underbrace{n!}_{k=0} - \left[\underbrace{\binom{n}{1}(n-1)!}_{k=1} - \binom{n}{2}(n-2)! + \binom{n}{3}(n-3)!.....(-1)^{k+1}\binom{n}{k}(n-k)!\right]$$

$$\underbrace{\binom{n}{0}(n-0)!}_{k=0} - \underbrace{\binom{n}{1}(n-1)!}_{k=1} + \binom{n}{2}(n-2)! - \binom{n}{3}(n-3)!.....(-1)^{k}\binom{n}{k}(n-k)!$$

$$\underbrace{\binom{n}{0}(n-0)!}_{k=0} - \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)! = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{n!}{\cancel{(n-k)!}k!}\cancel{(n-k)}!$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!} = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \cong \frac{n!}{e}$$

2. שאלה:

(א) כמה פונ' $f: A \to B$ קיימות ? (כאשר $|A| = m$, $|B| = n$, $n, m \in \mathbb{N}$)

פתרון: n^m

(ב) אם $m \geq n$, כמה מתוכן הן על?

- יהיה $i \in [1, n]$ נגדיר A_i = כל הפונ' בהן לאיבר b_i אין $a \in A$ כך ש $f(a) = b$
- $|A_i| = (n-1)^m$ ויש $\binom{n}{1} = n$
- לזוגות $(n-2)^m$ ויש $\binom{n}{2}$
- חיתוך k קבוצות : $(n-k)^m$ ויש $\binom{n}{k}$
- ימשך עד $k = n-1$ כי הפונ' חייבת לקבל לפחות ערך 1
- סה"כ:

$$n^m - \binom{n}{1}(n-1)^m + \binom{n}{2}(n-2)^m ... = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m$$

נוסחאות נסיגה

הגדרה רקורסיבית לקבוצות - נתונה קבוצה A

- בסיס $O \in A$
- צעד: $x \in A$

לדוגמה: $A = \{0, \pm 5, \pm 10, ...\} = \{5k | k \in \mathbb{Z}\}$

1. נגדיר : $A = \left\{(a, b) \in \mathbb{N}^2\right\}$, תן הגדרה רקוריסיבית ל A:

בסיס: $(0, 0) \in A$

צעד: $(x+1, y), (x, y+1) \in A$

נוסחאות נסיגה, דוגמאות:

1. דוגמה: $f: n \to \mathbb{R}$, $f_n\left(f_n(n-1, f(n-2)\right)$ ולמשל: $\begin{matrix} f(n) = 4(f(n-1)+2 \\ f(0) = 4 \end{matrix}$

2. דוגמה: פיבונאצי: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

3. בנו נוסחת נסיגה למס' המספרים הטבעים באורך n כך שאין בהן 2 ספרות זוגיות סמוכות וגם לא 2 ספרות אי זוגיות

$$\underbrace{\lfloor\rfloor \quad \lfloor\rfloor \quad \lfloor\rfloor \quad \lfloor\rfloor}_{n-1=a_{n-1}} \underbrace{\lfloor 5 \rfloor}_{a_n}$$

- לספרה ה a_n יש 5 אפשרויות (אם הקיצוני זוגי -החדשה תהיה אי זוגית ואם היא אי-זוגית החדשה תהיה זוגית - בכל אופן 5 אפשרויות)
- הספרה הראשונה אפשר הכל ללא 0 , לכן:
- מסקנה: $\begin{matrix} a_n = 5a_n \\ a_1 = 9 \end{matrix}$

4. (המשך) אין שתי ספרות זוגיות סמוכות (בלבד)

- נצטרך לפצל למקרים של ספרה זוגית ואי זוגית

$$\underbrace{\lfloor\rfloor\quad\lfloor\rfloor\quad\lfloor\rfloor\quad\lfloor\rfloor}_{n-2=a_{n-2}}\underbrace{\lfloor\rfloor}_{a_{n-1}}\underbrace{\lfloor\rfloor}_{a_n}$$

- ולהגדיר:

$$a_n = \underbrace{b_n}_{\text{odd digit}} + \underbrace{c_n}_{\text{even digit}}$$

- כאשר $b_n = 5a_{n-1}$
- ו־ $c_n = 25a_{n-2}$ (כי מסתכלים 2 ספרות אחורה)
- דרך נוספת להסתכל על זה:
- כדי להוסיף מס' זוגי צריך את מס' המילים באורך $n-1$ שמסתיימו בספירה אי־זוגית
- לכן $c_n = 5 \cdot b_{n-1}$
- לסיכום

$$a_n = 5a_{n-1} + 25a_{n-2}$$
$$a_1 = 9$$
$$a_2 = 5 \cdot 9 + 25 = 70$$

5. <u>מצאו נוסחה למס' המילים באורך n מעל $\{a, b, cd\}$ שלא מכילות את הרצף $'ab'$ וגם לא את $'bc'$</u>

- $a_n = a_n^1 + a_n^2 + a_n^3$
  - a_n^1 - הוספת c/d בהתחלה
  - a_n^2 - הוספת b בהתחלה
  - a_n^3 - הוספת a בהתחלה
- $2a_{n-1} = a_n^1$

$$\underbrace{\lfloor 2\times\rfloor}_{n}\underbrace{\lfloor\rfloor\quad\lfloor\rfloor\quad\lfloor\rfloor\quad\lfloor\rfloor}_{n-1=a_{n-1}}$$

- a_n^2 למעשה נרצה את: מס' המילים באורך $n-1$ <u>שלא מתחילות</u> ב c = מס' המלים <u>שמתחילות</u> ב $a_{n-1} - c$
  - לכן: $a_{n-1} - a_{n-2} = a_n^2$
- a_n^3 למעשה נרצה את: מס' המילים באורך $n-1$ <u>שלא מתחילות</u> ב b = מס' המלים <u>שמתחילות</u> ב $a_{n-1} - b$
  - לכן: $a_{n-1} - (a_{n-2} - a_{n-3}) = a_n^3$
- לסיכום: $a_n = 4a_n - 2a_{n-2} - a_{n-3}$
- בסיס:

$$a_0 = 1$$
$$a_1 = 4$$
$$a_2 = 14$$

תרגול 6 - 10/3/19

<u>נתון לוח בגודל $2 \times n$, מה מס' האפשרויות לרצף את הלוח במרצפות בגודל 2×1 ?</u>

פתרון:

- ניקח כמה דוגמאות (בסיס):
  - עבור $n = 1$, $f(1) = 1$
  - עבור $n = 2$ אז $f(2) = 2$ (2 עומדות/שכבות)

- מסקנה (צעד): $f(n)=f(n-1)+f(n-2)$

<u>מה מס' האפשרויות לסדר מחדש n בשורה כך שאף אחד לא נשאר במקומו?</u>

- נתבונן:

$$\lfloor 1\rfloor \quad \lfloor\rfloor \quad \lfloor\rfloor \qquad \lfloor i\rfloor \quad \lfloor\rfloor \quad \lfloor\rfloor$$

- האפשרויות להחלפות הן:

$$\left\lfloor\overset{\downarrow}{\text{i}}\right\rfloor \quad \lfloor\rfloor \quad \lfloor\rfloor \quad \left\lfloor\overset{\downarrow}{\text{i}}\right\rfloor \quad \left\lfloor\overset{\downarrow}{1}\right\rfloor \quad \lfloor\rfloor \quad \lfloor\rfloor$$

- לכן $f(n)=(n-1)\cdot[f(n-2)+f(n-1)]$, כאשר $f(n-2)$ מקרה בו האיש i והאיש 1 התחלפו

<u>מצאו נוסחאות נסיגה למס' המילים הבינאריות באורך n שלא מופיע בן הרצף "101"</u>

- נגדיר את :
  - c_n מילים באורך n שמתחילות ב 1
  - b_n מילים באורך n שמתחילות ב 0
  - יתקיים ש: $a_n=b_n+c_n$
- נחשב את b_n :
  - $b_n=a_{n-1}$ - כי הגבלה במקרה של 0 מוביל
- נחשב את c_n :
  - אם במילה באורך $n-1$, יש 1 בהתחלה אז:

$$\underbrace{\lfloor 1\rfloor}_{n}\underbrace{\lfloor 1\rfloor \quad \lfloor\rfloor \quad \lfloor\rfloor \quad \lfloor\rfloor}_{n-1}$$

$$\underbrace{\lfloor 1\rfloor}_{n}\underbrace{\lfloor 0\rfloor \quad \lfloor\rfloor \quad \lfloor\rfloor \quad \lfloor\rfloor}_{n-1}$$

- כלומר $c_n^1=c^{11}+c^{10}$
  - $c^{11}=a_{n-1}-\underbrace{a_{n-2}}_{=b_{n-1}}$: כלומר אנחנו רוצים להוריד מקרה של 0 במקום שלישי
  - $c^{10}=a_{n-3}$: מילים באורך $n-1$ שמתחילות ב2 אפסים
- לכן: $c_n=2\cdot a_{n-1}-a_{n-2}+a_{n-3}$

פתרון נוסחאות נסיגה

המטרה מהפונקציה $f_n(f(n-1),f(n-2),...)$ להגיע ל: $f(n)\,(\text{f of n })$

<u>דוגמה: $f(n)=2\cdot f(n-1)$, תנאי התחלה: $f(1)=3$</u>

נחפש פתרון המצורה: $f(n)=c\cdot\lambda^n$

$$c\lambda^n=2c\lambda^{n-1}$$

נשים לב שאנחנו מחפשים פתרון שבו $\lambda \neq 0$, (פתרון לא טרויאלי) , לכן נוכל לחלק ב$c \cdot \lambda^{n-1}$

$$c\lambda^n = 2c\lambda^{n-1} \iff \frac{c\lambda^n}{c\lambda^{n-1}} = \frac{2c\lambda^{n-1}}{c\lambda^{n-1}} \iff \lambda = 2$$

לכן הפתרון הכללי הוא $f(n) = c \cdot 2^n$ (נקרא הפולינום האופייני)

נמצא את c ע"י הצבת תנאי התחלה:

$$3 = f(1) = c \cdot 2 \iff c = \frac{3}{2}$$

הפתרון הפרטי: $f(n) = \frac{3}{2} \cdot 2^n$

בדיקה:

$$6 = 2 \cdot 3 = 2 \cdot f(1) = f(2) = \frac{3}{2} \cdot 2^2 = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6 \checkmark$$

<u>נתון: $3 \cdot f(n) = 2 \cdot f(n-1) + f(n-2)$, תנאי התחלה: $f(0) = 7, f(1) = 3$</u>

$$3 \cdot c \cdot \lambda^n = 2 \cdot c \cdot \lambda^{n-1} + c \cdot \lambda^{n-2}$$

$$3\lambda^2 = 2\lambda + 1$$

$$3\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$$

$$\lambda = 1, -\frac{1}{3}$$

קיבלנו 2 פתרונות:

$$f(n) = c_1 \cdot 1^n$$
$$f(n) = c_2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

לכן הפתרון הכללי: (הסכום של 2 הפתרונות) הוא:

$$f(n) = c_1 + c_2 \left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

נמצא פתרון פרטי:

$$f(0) = c_1 + c_2 = 7$$
$$f(1) = c_1 + c_2 \left(-\frac{1}{3}\right)^n = 3$$

$$\frac{4}{3}c_2 = 4$$
$$c_1 = 7 - 3 = 4$$

הפתרון הפרטי:

$$f(n) = 4 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

בדיקה:

$$3 \cdot f(2) = 2 \cdot 3 + 7$$
$$f(2) = 4\frac{1}{3}$$

$$f(2) = 4 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = 4\frac{1}{3}$$

<u>נתון: $f(n) - 6 \cdot f(n-1) + 9 \cdot f(n-2) = 0$, תנאי התחלה: $f(0) = 1, f(1) = 3$</u>

נציב λ ונחלק:

$$\lambda^2 - 6\cdot\lambda + 9 = 0 \iff (\lambda-3)^2$$

לכן הריבוי האלגברי הוא 2 :

במקרה כזה:

$$f^1(n) = c\cdot 3^n \qquad f^2(n) = c\cdot n\cdot 3^n \qquad f^2(n) = c\cdot n^2\cdot 3^n$$

פתרון כללי :

$$f(n) = c_1\cdot 3^n + c_2\cdot n\cdot 3^n$$

פתרון פרטי:

$$f(0) = c_1\cdot 1 + 0 = 2$$
$$f(1) = c_1\cdot 3 + c_2\cdot 1\cdot 3 = 3$$

$$c_1 = 2$$
$$c_2 = -1$$

נציב:

$$f(n) = 2\cdot 3^n - 1\cdot n\cdot 3^n$$

בדיקה:

$$f(2) = 6\cdot 3 - 92 = 0$$

$$f(2) = 2\cdot 3^2 - 2\cdot 3^2 = 0$$

נתון: $f(n) - 4\cdot f(n-1) - 3\cdot f(n-2) - 18\cdot f(n-3) = 0$, תנאי התחלה: $f(0)=0, f(1)=2, f(2)=13$

$$x^3 + 4x^2 - 3x - 18 = 0$$
$$x_1 = 2, x_{2,3} = -3$$

$$f(x) = (x-2)(x+3)^2$$

לכן הפתרון הכללי: (הסכום הפתרונות) הוא:

$$f(n) = c_1 + 2^n + c_2(-3)^n + c_3\cdot n\cdot(-3)^n$$

נמצא פתרון פרטי:

$$f(0) = c_1 + c_2 = 0$$
$$f(1) = 2c_1 - 3c_2 - 3c_2 = 2$$
$$f(2) = 4c_1 + 9c_2 + 18c_3 = 13$$

תמשיכו לבד...

תרגול 7 - 17/4/10

****חסר 20 דקות ראשונות - נוסחאות נסיגה עם מספר קטלן.****

סימונים אסימפטוטים

הגדרות: יהיו $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

- נאמר ש $f(n) = O\left(g(n)\right)$ אם"ם קיים $c_1 > 0$ ו n_0 כך שלכל $n \geq n_0$ מתקיים ש:

$$0 \leq f(n) \leq c_1 \cdot g(n)$$

במילים אחרות - g היא חסם עליון לקצב הגידול של g .

- נאמר ש $f(n) = \Omega\left(g(n)\right)$ אם"ם קיים $c_1 > 0$ ו n_0 כך שלכל $n \geq n_0$ מתקיים ש:

$$0 \leq c_1 \cdot g(n) \leq f(n)$$

- נאמר ש $f(n) = \Theta\left(g(n)\right)$ אם"ם קיימים $c_1, c_2 > 0$ ו n_0 כך שלכל $n \geq n_0$ מתקיים ש:

$$0 \leq c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n)$$

$$f(n) = \Theta\left(g(n)\right) \iff f(n) = O\left(g(n)\right) \wedge f(n) = \Omega\left(g(n)\right)$$

תכונות:

1. טרנזיטיביות:
   - אם $f = O(g)$ וגם $g = O(h)$ אז $f = O(n)$
   - אם $f = \Omega(g)$ וגם $g = \Omega(h)$ אז $f = \Omega(h)$
2. רפלקסיביות:
   - לכל $f = \Theta\left(f\right)$ וגם $f = O(f)$ וגם $f = \Omega(f)$
3. סימטריות: (לΘ)
   - אם $f = \Theta(g)$ אז $g = \Theta(f)$
4. אנטי סימטריות (ל O, Ω)
   - $g = O(f) \iff f = \Omega(g)$

סכום וכפל של פונקציות

למה: יהיו $a, b \in \mathbb{R}^+$ אז$max(a,b) \leq a + b < 2 \cdot max\left(a, b\right))$

דוגמה: $max(5, 10) = 10 \leq 5 + 10 \leq 20 = 2 \cdot max(5, 10)$

משפט: יהיו $f_1, f_2, g_1, g_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ ומתקיים ש: $g_1 = O(f_1)$ וגם $g_2 = O(f_2)$ אז:

1. $g_1 + g_2 = O\left(max\left(f_1, f_2\right)\right)$
2. $g_1 \cdot g_2 = O\left(f_1 \cdot, f_2\right)$

הוכחה 1:

- על פי ההנחה קיימים קבועים $c_1, n_1 > 0$ כך שלכל $n \geq n_1$ מתקיים ש: $g_1(n_1) \leq c_1 \cdot f_1(n)$
- על פי ההנחה קיימים קבועים $c_2, n_2 > 0$ כך שלכל $n \geq n_2$ מתקיים ש: $g_1(n_2) \leq c_2 \cdot f_2(n)$

- נבחר את $n_0 = max\left(n_1, n_2\right)$ ונקבל שלכל $n \geq n_0$ יתקיים ש:

$$g_1(n) + g_2(n) \leq c_1 \cdot f_1(n) + c_2 \cdot f_2(n) \leq (c_1 + c_2) \cdot Max\left(f_1(n), f_2(n)\right)$$

- נבחר את $c_0 = (c_1 + c_2)$, ונקבל את הדרוש.

<u>הוכחת 2 :</u>

- על פי ההנחה קיימים קבועים $c_1, n_1 > 0$ כך שלכל $n \geq n_1$ מתקיים ש: $g_1(n_1) \leq c_1 \cdot f_1(n)$
- על פי ההנחה קיימים קבועים $c_2, n_2 > 0$ כך שלכל $n \geq n_2$ מתקיים ש: $g_1(n_2) \leq c_2 \cdot f_2(n)$
- נבחר את $n_0 = max\left(n_1, n_2\right)$ ונקבל שלכל $n \geq n_0$ יתקיים ש:

$$g_1(n) \cdot g_2(n) \leq (c_1 \cdot f_1(n)) \cdot (c_2 \cdot f_2(n)) = (c_1 \cdot c_2) \cdot (f_1(n), f_2(n))$$

- נבחר את $c_0 = c_1 \cdot c_2$, ונקבל את הדרוש.

<u>דוגמה:</u> $n^3 + n^2 + \log n = O(n^3)$ לכל פנוקציה ,עבור קבוע $0 < k$ יתקיים $kf = \Theta\left(f\right)$

<u>הגדרות:</u>

- נאמר ש $f(n) = o\left(g(n)\right)$ אס"ם $\lim\limits_{n \to 0} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$ (כמו לומר $f < g$)
- נאמר ש $f(n) = \omega\left(g(n)\right)$ אס"ם $\lim\limits_{n \to 0} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$ (כמו לומר $f > g$)

<u>הוכיחו או הפריכו :</u>

1. $2n^4 + n = O\left(n^5\right)$

- ניתן לראות ש $2n^4 + n = O(n^4) = O(n^5)$, נוכיח:
- $2n^4 + n \leq 2n^4 + n^4 = 3\left(n^4\right) \leq 3n^5$ אז נבחר $c = 3$, $n_0 = 1$

2. $\left(ln\left(n^2\right)\right)^n = O\left(2^n\right)$

- ניתן לראות ש: $\left(2 \cdot \ln n\right)^n = 2^n \cdot \ln n^n = \Omega\left(2^n\right)$
- נניח בשלילה שהטענה נכונה אז קיימים $n_0, c > 0$ אז קיים $c \in \mathbb{R}$ כך ש:

$$\left(\ln n^2\right)^n \leq c \cdot 2^n \iff \frac{\left(\ln n^2\right)^n}{2^n} \leq c$$

- קיבלנו ש c גדול מפונ' עולה וזאת סתירה כי c הוא קבועה

<u>תזכורת:</u>

1. סכום של טור חשבוני : $\underbrace{a}_{a_1} + \underbrace{(a+d)}_{a_2} + (a + 2d) + ... + \underbrace{a + (n-1)\,d}_{a_n} = \frac{n}{2}\left(2a + d(n-1)\right)$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n}{2}(n+1) = \binom{n+1}{2} = \Theta\left(n^2\right)$$

2. סכום של טור גאומטרי: $1 + x + x^2 + ... + x^n$

- עבור $x \neq 1$ יתקיים ש: $\frac{x^{n+1}-1}{x-1}$
- אם $x < 1$ יתקיים ש: $\sum\limits_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$

3. הטור ההרמוני: $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \approx \log n$

<u>שאלות:</u>

1. תנו חסם O ל $\sum_{i=1}^{n} 3i + \log n$:

$$\sum_{i=1}^{n} 3i + \log i \leq \sum_{i=1}^{n} 4i = 4\sum_{i=1}^{n} i = O\left(n^2\right)$$

2. שאלה:

$$\sum_{i=0}^{n} 5^i = \frac{5^{n+1}-1}{5-1} = O\left(5^{n+1}\right)$$

<u>למה 2:</u>

$$n \cdot a_{min} \leq \sum_{i=1}^{n} a_i \leq n \cdot a_{max}$$

<u>שאלות - המשך:</u>

1. תנו חסם לביטוי $A = \sum_{i=1}^{n} (2n+i)$
   - $3n = 3n + n = a_{max}$
   - $2n + 1 = a_{min}$
   - לכן: $\Omega(n^2) = n(2n+1) \leq A \leq n \cdot 3n = O(n^2)$
2. תנו חסם לביטוי $A = \sum_{i=1}^{n} i^2$
   - $n^2 = a_{max}$
   - $i = a_{min}$ לכן $n \leq A \leq n \cdot n^2$ לכן $A = (n^3)$
   - עבור ה Ω :

$$A = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} i^2 + \sum_{i=\frac{n}{2}}^{n} i^2 \overset{\text{lemma 2}}{\geq} \left(\frac{n}{2}\right)^2 \cdot \frac{n}{2} = \Omega(n^3)$$

3. שאלה: $\sum_{k=0}^{n} \frac{n^{\log n}}{2^k}$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n^{\log n}}{2^k} = n^{\log n} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \leq 2 \cdot n^{\log n} = \Theta(n^{\log n})$$

4. מצא חסם עליון לביטוי: $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{i+j}$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{i+j} \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{i} = n\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = O\left(n \log n\right)$$

5. תשעז מועד א'

הוכיחו $\log\left(n!\right) = O\left(n \log n\right)$

$$\log\left(n!\right) = \log\left(1 \cdot 2 \cdot .... \cdot n\right) = \log(1) + \log(2) + ... + \log(n) = \sum_{i=1}^{n} \log i \leq n \log n = O\left(n \log n\right)$$

הוכיחו ש: $\log\left(n!\right) = \Omega\left(n \log n\right)$

$$\log\left(n!\right) = \log\left(1 \cdot 2 \cdot .... \cdot n\right) = \log(1) + \log(2) + ... + \log(n) = \sum_{i=1}^{n} \log i$$

$$\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} \log i + \sum_{i=\frac{n}{2}}^{n} \log i \geq \log\left(\frac{n}{2}\right) \cdot \frac{n}{2} = \frac{n}{2}\left(\log n - \log n\right) = \Omega\left(n \log n\right)$$

תרגול 8 - 5/1/19

<u>הוכיחו או הפריכו $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}^+$ - אם $f=O(g)$ אז $f+g=\Theta(g)$</u>

הטענה נכונה - הוכחה:

1. O:
   - מהנחה נובע שקיימים $c_1,n_1>0$ כך שלכל $n\ge n_0$ מתקיים ש: $f(n)\le c\cdot g(n)$ ולכן:

     $f(n)+g(n)\le c_1\cdot g(n)+g(n)=(c_1+1)\cdot g(n)$
   - ולכן אם $c=c_1+1$ יתקיים לאותו n_0 ש $f+g=O(g)$
2. Ω :
   - לכל פונקציה מתקיים ש $g=\Omega(g)$, ולכן קיימים $c_1,n_1>0$ כך שלכל $n\ge n_0$ $g(n)\ge c_1\cdot g(n)$
   - נגדיל את צד שמאל (חיובר $f(n)$) ונקבל אי־שיוויון תקין: $g(n)+f(n)\ge c_1\cdot g(n)$
   - לכן $g(n)+f(n)=\Omega(g)$

<u>אם $f=O(g)$ אז $f\cdot g=\Theta(g^2)$</u>

הוכחה

$$\begin{gathered}f(n)\le c\cdot g(n)\\ f\cdot g\le c\cdot g^2\\ \Downarrow\\ O(g^2)\end{gathered}$$

<u>אם $f=O(g)$ אז$fg=\Omega(g^2)$</u>

- הטענה לא נכונה - דוגמה נגדית: $f=1$, $g(n)=n$ מתקיים ש: $1=O(n)$ אבל לא מתקיים $1\cdot n=\Omega(n^2)$

<u>לכל f מתקיים $O(f)^{O(f)}=O(f^f)$</u>

- נחליף את $O(f)=c\cdot f$ נקבל את השאלה האם $c(f)^{c(f)}=O(f^f)$ -
- דוגמה נגדית - $f=n$ נקבל ש: $c\cdot n^{c\cdot n}=c^{cn}\cdot n^{cn}=c^{cn}(n^n)^c=\Omega(n^n)$

<u>מה היחס בין $f=2^n$ ו $g=n^{\log n}$</u>

$$\begin{gathered}n^{log(n)}\stackrel{?}{=}2^n\\ log(n)\cdot\log(n)\stackrel{?}{=}n\cdot log(2)\\ \log^2(n)\stackrel{?}{=}n\end{gathered}$$

- נזכר ש $\lim_{n\to\infty}\frac{f}{g}=\infty \iff f=\omega(g)$ וש $\lim_{n\to\infty}\frac{f}{g}=0 \iff f=o(g)$
- לכן - בעזרת לופיטל:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log^2(n)}{n}\stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{2\log(n)\cdot\frac{1}{n}}{1n}\stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot\frac{1}{n}}{1}=0$$

- מסקנה: $\log^2(n)=o(n)$

<u>מה היחס בין $f=(n!)^2$ ו $g=(n^2)$</u>

- מתקיים ש:

$$g=(n^2)! \qquad\qquad f=(n!)^2$$
$$\cancel{1\cdot 2.....n}\cdot n+1...n^2 \qquad\qquad \cancel{n!}\cdot n!$$

- בימני יש לנו n גורמים שכל קטן או שווה מ n
- בשמאלי יש לנו n^2-n גורמים וכל אחד מהם גדול או שווה מ n $\left(n^2-n\geq n\right)$
- ולכן $g=\Omega(f)$

<u>יהיו $a,b,c\geq 1$ אז: $c^{\log_a n}=\Theta\left(c^{\log_b n}\right)$:</u>

- לא נכון - כיוון ש:

$$c^{\log_a n}=c^{k\cdot\log_b n}=\left(c^{\log_b n}\right)^k=\begin{cases}1<k & \Omega(c^{\log_b n})\\ 1>k & O(c^{\log_b n}\end{cases}$$

<u>הוכיחו או הפריכו: לכל 2 פונקציות $f,g:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ מתקיים ש: $f=O(g)$ או $g=O(f)$</u>

הטענה לא נכונה - דוגמה נגדית

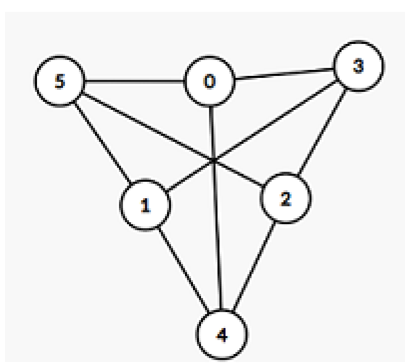
- נבחר $f(x)=sin(x)+2$, $g=\cos(x)+2$

תורת הגרפים

תזכורת - הסיפור על קניגסברג

<u>האם קיים גרף עם סדרת הדרגות הבאה?</u>

1. $3,3,3,3,3,3$
   - כן (סכום הדרגות הוא זוגי) נצייר:



2. $3,3,3,3,3$
   - הסכום אי-זוגי, ולכן לקיים גרף כזה.

<u>האם יתכן כי בגרף G עם n קודקודים בו דרגת כל קודקוד שווה 3 יהיו 100 :</u>

לא, הוכחה:

$$\sum_{v\in V} deg(v) = 3n = 2\cdot 100 \Rightarrow n = \frac{2}{3}\cdot 100 \notin \mathbb{N}$$

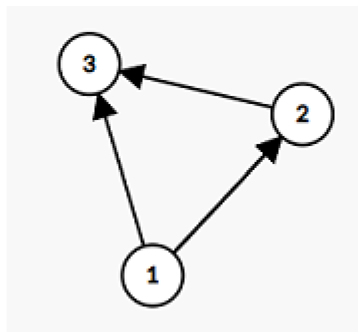
הראנו שמעקרון שובך היונים אם n אנשים שלחצו ידיים, אז קיימים 2 אנשים שלחצו ידיים לאותו מספר של אנשים

נדגים בגרפים: נרצה להראות לכל גרף עם n , קיימים 2 קודקודים בעלי אותה דרגה (לחיצת יד = צלע)

- נגדיר :
  - שובכים = דרגות אפשרויות: $n-1$
  - יונים - קודקודים : n
  - מעקרון שובך היונים...

בגרף מכוון עם n קודקודים ו $\binom{n}{2}$ צלעות האם בהכרח יש מעגל

לא, $\binom{3}{2} = 3$ צלעות, ו:



הוכיחו: אם בגרף G יש n קודקודים ו $n+4$ קשתות , וכל הדרגות הן לפחות 3 אז $n \le 8$

הוכחה:

$$3n \le \sum_{v\in V} deg(v) = 2|E| = 2(n+4)$$
$$3n \le 2n+8$$
$$n \le 8$$

כמה מעגלים באורך 4 קיימים ב k_n ?

תרגול 9 - 15/5/19

חסרה שאלה ראשונה

1. הוכיחו כי אם בגרף פשוט עם nקודקודים אין משולש אז יש בו לכל היותר $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$קשתות

   נראה באינדוקציה

   - בסיס:
     - עבור $n=1$: $\left\lfloor \frac{1}{4} \right\rfloor = 0$
     - עבור $n=2$: $\left\lfloor \frac{4}{4} \right\rfloor = 1$
     - עבור $n=3$: $\left\lfloor \frac{3^2}{4} \right\rfloor = 2$
   - צעד - נניח ל $k<n$ ונוכיח ל n
     - נבחר צלע כלשהי (u,v) - אם אין צלע, הטענה מתקיימת מיידית)
     - נשים לב שקבוצות של השכנים של u ושל v זרות, כי אחרת היה מתקבל משולש

- נגדיר G' המתקבל מG ע"י מחיקת הקודקודים u,v והצלעות המחוברות לפחות לאחד מהם
- לפי הנחת האינדוקציה בG' יש $n-2$ קודקודים ולכן יש בו $\frac{(n-2)^2}{4}$ צלעות
- נסמן : $A=\Gamma(u)$, $B=\Gamma(v)$
- נחשב את מס' הצלעות ב G :

$$|E(G)|=|E(G')|+1+A+B\leq\left\lfloor\frac{(n-2)^2}{4}\right\rfloor+1+n-2=\left\lfloor\frac{n^2-4n+4}{4}+\frac{(n-1)\cdot4}{4}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{n^2}{4}\right\rfloor$$

2. <u>הכיחו כי לכל גרף פשוט G קשיר או $\bar{G}$ קשיר (או שניהם)</u>

- נניח ש G איננו קשיר, נוראה ש $\bar{G}$ קשיר
- יהיו $u,v\in V_G$, נפצל למקרים:
  - אם ב G אין u,v אז $\bar{G}$ יש קשת (u,v) , כנדרש
  - אחרת, ב G יש קשת (u,v)
    * G איננו קשיר, לכן יש לפחות 2 רכיבי קשירות ב G
    * יהי w קודקוד ששיך לרכיב קשירות חדש ב $\bar{G}$ יהיו הצלעות (u,w) ו (v,w) ונקבל $\bar{G}$ מסלול מ u ל v
    * ולכן $P=(v,w,u)$, ומכאן שהגרף $\bar{G}$ קשיר.

עצים

הגדרה: גרף קשיר ללא מעגלים

משפט: לכל עץ עם n קודקודים יש $n-1$ צלעות

הגדרה: עץ k שלם, עץ שבו לכל אב יש k ילדים

משפט: מס' הקודקודים בעץ kשלם בגוה h : $\frac{k^h-1}{k-1}$

משפט רמזי: יהי G גרף על 6 קודקודים . הוכיחו - בG יש משולש או $\bar{G}$ יש משולש

ניסוח שקול: בכל צביעה של הצלעות של K_6 ב2 צבעים קיים משולש מונוכרומטי (=בעל צבע אחיד)

הוכחה:

- נתבונן בקודקוד כלשהו, ונסמנו ב v_1 מכך ש K_6 ייוצאו ממנו 5 צלעות
- לפי עקרון שובך היונים המרוחב , קיימות 3 צלעות באותו צבע - בה"כ הן בצבע אדום ומחבורת לקודוקדים x,y,z
- מקרה 1 : אחת מהצלעות $(x,y),(y,z),(z,x)$ אדומה $\Leftarrow$ נקבל משולש אדום
- מקרה 2 : כל הצלעות $(x,y),(y,z),(z,x)$ בצבע השני - בצבע כחול $\Leftarrow$ נקבל משולש כחול

הגדרה: גרף מישורי - גרף שניתן לציירו כך שהצעלות לא תחתוך אחת את השניה

פאה בגרף מישורי - השטח החסום ע"י הצלעות, נסמנו ב f

נוסחת אוילר : $f-m+n=2$

תנאי הכרחי למישוריות: $m\leq3(n-2)$

<u>הוכחה</u>: נראה כי $f\leq\frac{2}{3}m$

נתאר משחק:

- שלב א: כל צלע מקלבת 2 ש"ח

- שלב ב: כל צלע נותן שקל לכל פאה שהיא נוגעת בה
- $2m$ = סה"כ הכסף $\geq 3\cdot f$
- $\frac{2}{3}m \geq f$
- נציב בנוסחת אוילר:

$$f-m+n=2 \iff \frac{2}{3}m-m+n\geq 2 \iff n-2\geq \frac{1}{3}m \iff 3(n-2)\geq m$$

<u>הראו כי k_5 אינו מישורי</u>

$$m=\binom{5}{2}>3(5-2)$$

<u>הראו כי $k_{3,3}$ אינו משורי - שיעור הבא</u>

תרגול 11 - 29/5/19

** חסרה רבע שעה ראשונה ***

- המספר הכרומטי של עץ עם n קודקודים $\chi\left(T_n\right)=2$
- משפט גרף הוא דו צדדי אם"ם הוא 2 צביע
- נתון G כך שמוכל עותק של $k_m\subseteq G$ אז $\chi\left(G\right)\geq m$

<u>הוכיחו שבגרף G כך ש $\chi\left(G\right)=k$ יש לפחות $\binom{k}{2}$ צלעות</u>

טענת עזר: בכל מחלקת צבע יש קודקוד עד דרגה $k-1$

כי אחרת, היה אפשר לבטל את הצבע הזה (לכל קודקוד, עם דרגה $k-2$ או פחות, לתת את הצבע ה $k-1$ ובכך להסתפק ב $k-1$ צבעים

לכן:

$$2|E|=\sum_{v\in V}deg(v)\geq k\cdot(k-1)\Rightarrow |E|\geq\frac{k(k-1)}{2}=\binom{k}{2}$$

<u>יהיו $G_1\left(V,E_1\right)$, $G_2=\left(V,E_2\right)$ 2 גרפים 3- צבעים מעל אותה קב' קודקודים . הוכיחו ש $G=\left(V,E_1\cup E_2\right)$ הוא 9-צביע</u>

<u>פתרון:</u>

- נסמן את הצביעה הראשונה ב C_1 ואת השניה ב C_2
- נתאר צביעה חדשה של G - לכל קודקוד v נתאים צבע שהוא הזוג הסדור הבא: $C\left(v\right)=\left(C_1(v),C_2(v)\right)$
- מכיון ש c_1 ו c_2 הן צביעות תקינות נובע שגם c היא תקינה

משפט: כל גרף מישורי הוא 6 - צביע

הערה: ישנה הוכחה שלא נלמד שכל גרף מישורי הוא 4 - צביע

יהיו $G_1=\left(V_1,E_1\right)$ גרף מישורי ו$G_2=\left(V_2,E_2\right)$ גרף חסר מעגלים (עץ או יער)

נגדיר $G=\left(V,E_1\cup E_2\right)$

<u>א. הוכיחו שב G מתקיים $\sum deg(v)<8n$</u>

$$\frac{\sum deg(v)}{n} < 6$$
$$2\left|E_1\right| = \sum deg(v) = 6 - \frac{12}{n} < 6n$$

$$2|E_2| \leq 2(n-1)$$

$$\sum_G \deg(v) \leq 6n + 2n - 2 < 8n$$

ב. הוכיחו באינדוקציה ש G הוא 8 צביעה

מסקנה מא: ממוצע דרגות ב $G < 6$

לכן יש קודקוד עם דרגה 7 או פחות, נוכיח ש G הוא 8 צביע .

בסיס: $n = 1, ...8 \Leftarrow$ 8 צביעה

צעד:

- נוריד את הקודקוד בעל הדרגה 7 או פחות
- נשתמש בהנחת האינדוקציה
- נחזיר

זיווגים בגרף

הגדרה: יהי G גרף לא מכוון זיווג $M \subseteq E(G)$ הוא אוסף צלעות שלאף זוג מהן אין קודקוד משותף

אם $|M| = \frac{n}{2}$ אז M נקרא זיווג מושלם

משפט $Hall$ (החתונה) יהי G גרף דו צדדי עם $|V_1| = |V_2|$ אז יש ב G זיווג מושלם אם"ם לכל $S \subseteq V_1$ מתקיים $|S| \geq |\Gamma\left(S\right)|$

תשע"ו

א. הראו כי יש 15 זיווגים מושלמים ל k_6

ב. מצאו נוסחת (נסיגה) למס' הזיווגים

תרגול 12 - 6/5/19

המספר הכרומטי $X(G) = k$ הינו ה k המינימלי עבור הגרף הוא k צביע

1. מה המס' הכרומטי של גרף מסלול?

תשובה $X\left(P_n\right) = 2$ (צבעי הקודקודים מתחלפים לסירורגין)

2. מהו המס' הכרומט של גרף מעגל?

$$X(C_n) = \begin{cases} 2 & n - even \\ 3 & n - odd \end{cases}$$

3. מה המס' הכרומט של גרף G דו-צדדי

תשובה: $X(G) = 2$

4. מהו המס' הכרומטי של עץ T_n ?

תשובה $X(T_n) = 2$

5.מהו מס' הכורמטי של הגרף השלם K_n

תשובה $X(K_n) = n$

נתון גרף G ותנון ש $G \subseteq K_m$ אז $X(G) \geq m$

53. הוכח שבגרף G כך ש $X(G) = k$ יש לפחות $\binom{k}{2}$ צלעות

- נתבונן בגף עם k מחלקות
- טענה: בכל מח' צבע יש לפחות קודקוד 1 שמחובר לכל שאר מחלקות הצבעים = קיים קודקוד עם דרגה $k-1$ לפחות
  - נניח בשלילה שקיימת מח' צבע שלא קיים בה קודקוד עם דרגה $k-1$ (לפחות) ,
  - ז"א שכל הקודקודים במח' הזו בעלי דרגה $k-2$ או פחות
  - מכאן שניתן להליף את הצבע של קודקוד במחלקה ולהסתפק ב $k-1$ צבעים
  - בסתירה לכך ש $X(G)=k$
- מהטענה:

$$2|E| = \sum_{v\in V} \geq k(k-1) \iff |E| \geq \frac{k(k-1)}{2} = \binom{k}{2}$$

56. יההיו $G_1=(V,E_1)$ ו $G_2=(V,E_2)$ כך ש G_1 ו G_2 3 צביעים
הוכיחו כי $G=(V,E_1\cup E_2)$ הוא 9 צביע

- יהיו c_1 ו c_2 הצביעות התקינות של G_1 ו G_2 בתהאמה.
- נגדיר צביעה חדשה: $C(v)=(c_1(v),(c_2(v))$
- נשים לב שיש בדיוק $3\cdot 3=9$ אפשרויות לבחור זוג סדור

יהיו $G_1=(V_1,E_1)$ גרף מישורי ו$G_2=(V_2,E_2)$ גרף חסר מעגלים (עץ או יער)
נגדיר $G=(V,E_1\cup E_2)$
<u>א. הוכיחו שב G מתקיים $\sum deg(v)<8n$</u>
מתקיים ש:

- $|E_1|\leq 3(n-2)$
- $|E_2|\leq n-1$
- $|E_1|\cup|E_2|\leq 4n-7$
- לכן $\sum d(v)=2|E|\leq 2(4n-7)=8n-14<8n$

<u>ב. הוכיחו באינדוקציה ש G הוא 8 צביעה</u>
נחשב ממוצע הדרגות ב G : $\frac{\sum d(v)}{n}<\frac{8n}{n}$, מכאן שקיים קודקדו שדרגנות קטנה / שווה לממומצע ז"א שדרגתו 7 או פחות
נראה באינדוקציה:
בסיס: $n=1,2,..8$ ניתן לצבוע עד 8 צבעים
צעד: נניח ל $k<n$ ונוכיח ל n

- יהי G כזה על n קודקודים אז קיים בו קודקוד x עם דרגה 7 או פחות
- יהי G'הגרף המתקבל מ G ע"י הסרת x ולכ הצלעות החלות ב
- בG' יש $n-1$ לפ הנ"א G' הוא 8 צביע
- תהי c" הבציעה המתאימה נשתמש ב C' לבנות צביעה תקינה ל G, C
- נחזיר את x השכנים שלו
- קיבלנו לכל היותר 7 צבעים. ניבצע אותו בצבע השמיני

זיווגים בגרפים

יהי G גרף

זיווג $M \subseteq E(G)$ הוא אוסף צלעות שלאף אחת מהן אין קודקוד משותף (זרות בקודקודים)

נאמר ש M הוא זיווג מושלם אם כל קודקודי הגרף משתתפים בזיווג. ז"א $|M| = \frac{1}{2}n$

דוגמה k_4

61. מה מספר הזיווגים המושלמים בגרף $K_{n,n}$? תשובה $n!$

משפט: יהי G גרף דו־צדדי וגם $|V_1| = |V_2|$ אז יש ב G זיווג מושלם אס"ם לכל $S \subseteq V_{11}$ מתקיים $|S| \le |\Gamma(S)|$ (תנאי הול)

הוכיחו.

יהי G גרף דו־צדדי dרגולרי אז יש ב G זיווג מושלם

- אבחנה ראשונה: $|V_1| = |V_2|$
  - נספור את מס' הצלעות ב2 דרכים $d \cdot |V_1|, d \cdot |V_2|$
  - מכאן ש $d \cdot |V_1| = d \cdot |V_2|$ לכן $|V_1| = |V_2|$
- נניח בשלילה שאין זיווג מושלם סה"כ מתנאי הול נובע ש $S \subseteq V_1$ כך ש: $|S| > |\Gamma(S)|$
- נספור את מס' הצלעות היוצאות מ S :
  - מצד אחד זה בדיוק $d \cdot |S|$
  - מצד שני זה לכל היותר $d \cdot |\Gamma(S)|$
  - קיבלנו $d \cdot |S| \le d \cdot |\Gamma(S)|$
- היו ו $d \in \mathbb{N}$ מתקיים ש $d|S| \le |\Gamma(S)|$ בסתירה להנחה

תשע"ח מועד ב'

1. א. האם קיים גרף דו־צדדי בעל מס' זוגי של קודקודים שיש בו מעגל אוילר ואין בו זיווג מושלם

- נבחר גרף דו־צדדי שגדול קבוצות הקודקדים לא שווה, ונדאג שדרגת כל קודקוד תהיה זוגית

ב. יהי G גרף מישורי על n קודקודים $n > 10$ הוכיחו שהגרף המשלים של G אינו מישורי.

בגלל ש G מישורי $E(G) \le 3(n-2)$

נניח בשלילה ש $\bar{G}$ אינו משורי ונציב.......

עשינו + מטלה

תרגול 13 - 12/6/19

שאלה 3

*** חסר רבע שעה ראשונה ***

נתונים 5 סטודנטים , 4 פרוקיטים שונים, כל פרויקט יבוצע ע"י 2 סטודנטים

<u>א. בכמה דרכים ניתן להגדיר צוותים לביצוע כל הפוריקטים כאשר לא כל הסטודנטים חייבם להשתתף</u>

- עבור הפרויקט הראשון יש : $\binom{5}{2}$ אפשרויות
- יש 4 פרוקיטים, ולכן $\binom{5}{2}^4$

<u>ב. בכמה דרכים... כאשר כל סטודנט חייב להשתתף בלפחות אחד מהפוריקטים</u>

- נחשב: "רעים" - סה"ב, על ידי הכלה והדחה
- נגדיר A_i כאשר $1 \le i \le 5$ כל האפשרות כך שהסטו' ה i לא משתת, בככלל
- נציב בטבלה שלנו:

כמה יש	גודל	הקבוצה
$\binom{5}{1}$	$\binom{4}{2}^4$	A_i
$\binom{5}{2}$	$\binom{3}{2}^4$	$A_i \cap A_j$
$\binom{5}{3}$	$\binom{2}{2}^2$	$A_i \cap A_j \cap A_k$

- סה"כ $\binom{5}{2}^4 - \left(5 \cdot \binom{4}{2}^4 + \binom{5}{2}\binom{3}{2}^4 - \binom{5}{3}\binom{2}{2}^4\right)$

הוכיחו בדרך קוב' ש: $\binom{2n}{n} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$

- נתאר כיתה עם n בנית ו n בנות, ורוצים לבחור ועד של n אנשים.
- נשין לב שניתן לחלק את אפשרויות לבחירה הזו של $n+1$ אפשרויות לפי בנים נבחרו
- נגדר
  - k כמה בנים נבחרו
  - $n-k$ הבנות שנבחרו
- האפשרויות עבור k הן $0,1,...,n$ ועבור כל k מס' האפשרויות היא $\underbrace{\binom{n}{n-k}}_{\text{choosing } n-k \text{ girls from } n \text{ girls}} \underbrace{\binom{n}{k}}_{\text{k boys from n boys.}}$
- לכן סה"כ הוא $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$

<u>שאלה 5</u>

<u>א. הוכיחו/הפריכו תהיינה $f(n), g(n)$ פונ' מעל הטבעים אם $f(n) = O(g(n))$ אז $f(n) + g(n) = \Theta\left(g(n)\right)$</u>

- מהנתון קיימים $c, n_0 > 0$ כך שלכל $n_0 \le n$ מתקיים ש $f(n) \le c \cdot g(n)$
- נבחר $n = n_0$, ויתקיים ש:

$$f(n) + g(n) \le c \cdot g(n) + g(n) = (c+1)g(n)$$

- ולכן בעבור בחירת $c' = c + 1$ נקבל ש: $f(n) + g(n) = O(g(n))$
- נראה ש Ω :

$$f(n) + g(n) \overset{\in \mathbb{N}}{\ge} g(n) = \Omega\left(g(n)\right)$$

- כי כל פונקציה היא Ω של עצמה
- סה"כ: $f(n) + g(n) = \Theta(g(n))$, כנדרש

<u>ב. תהי $f(n)$ פונקציה מעל הטבעים אם $g(n) = O\left(f(n)\right)$ אז $c \cdot g(n) = O\left(f(n)\right)$ לכל $c > 0$</u>

- נניח ש $g(n) = O(f(n))$ מכאן שקיימים $c_1, n > 0$ כך ש $g(n) \le c_1 f(n)$

- נכפיל ב c מהשאלה: $c\cdot g(n)=c\cdot c_1\cdot f(n)$, ולכן אם נבחר $c'=c\cdot c_1$ נקבל את הדרוש.

2017 מועד ב'

1. תהי S_n קבוצת כל המחרוזות הבינאריות שלא המכילות $'aba'$, נגדיר $f(n)=|S_n|$ מצאו את $f(10)$

- בסיס:

$$f(1)=2 \qquad f(2)=2^2=4 \qquad f(3)=7=2^3-1$$

- נגדיר:

$$f(n)=\underbrace{f_a(n)}_{\text{words starts with 'a'}}+\underbrace{f_b(n)}_{\text{words starts with 'b'}}$$

- נשין לב שתמיד מותר להוסיף b בהתחלה ולכן $f_b(n)=f(n-1)$
- עבור: $f_a(n)=$ מילים באורך $n-1$ שמתחילות ב a + מילים באורך $n-1$ שמתחילות ב bb
  - מילים באורך $n-1$ שמתחילות ב bb: הן $f(n-3)$
  - מילים באורך $n-1$ שמתחילות ב a : ניקח את סה"כ המילים באורך $n-1$ ונוריד את אלה שמתחילות ב b . $f(n-1)-f_b(n-1)=f(n-1)-f(n-2)$
  - לכן $f_a(n)=f(n-1)-f(n-2)+f(n-3)$
- לסיכום: $f(n)=f_a(n)+f_b(n)=2f(n-1)-f(n-2)+f(n-3)$
- נמצא נוסחת נסיגה - נציב $f(n)=x^n$ נקבל ש: $x^n-2x^{n-1}-x^{n-2}+x^{n-3}\Leftarrow x^3=2x^2-x+1\Leftarrow$ קיבלנו מספרים לא שלמים, לצורך התהליך נניח שקיבלנו שלושה פתרונות שלמים $x=a,b,c$
- נותר להציב $f(a)=a^n,f(n)=b^n,f(n)=c^n$,
- לבסוף מקבלים $\hat{f}(n)=A\cdot a^n+B\cdot b^n+C\cdot c^n$, ובהצבת $n=10$ לקבל את התשובה
- תשובה נוספת, להציב את 7 הצעדים שנותרון ולקבל $f(10)=351$

שאלה 2

נגדיר $S=\{1,2,...,9\}$, $A=\{(X,Y)\,|X\subseteq S,Y\subseteq S\}$

א. חשבו את $|A|$

נשים לב ש: $A=P(S)\times P(S)$ (קבוצת חזקה) לכן $|A|=\left(2^9\right)^2$

ב. $B_1=\{(X,Y)\in A|X\neq Y\}$ חשבו את $|B_1|$

צריך לחשב: $|A|-$הזוגות הזהים, וזה : $|B_1|=2^{18}-2^9$

דרך אחרת ל X יש 2^9 אפשרויות, ל Y יש 2^9 אפשרויות פחות האפשרות של X מעקרון הכפל נקבל: $2^9\left(2^9-1\right)$

ג. $B_2=\{(X,Y)\in A|X\cap Y=\phi\}$ חשבו את $|B_2|$

נפצל למקרים, לפי הגודל של $|X|$

- הגודל האפשרי $0\le|X|\le 9$
- נניח ש $|X|=0$: הזוג $(\phi,\_)$ ולכן יש $\binom{9}{0}\times 2^9=1\times 2^9$
- נניח ש $|X|=1$: הזוג $(X,P\left(S\backslash X\right))$ ולכן יש $\binom{9}{1}\times 2^8=9\times 2^8$
- נניח ש $|X|=2$: הזוג $(X,P\left(S\backslash X\right))$ ולכן יש $\binom{9}{2}2^7$

- ...
- סה"כ: $\sum_{k=0}^{9}\binom{9}{k}2^{9-k}$

ד. $B_3=\{(X,Y)\in A|3\in X\cup Y\}$ חשבו את $|B_3|$

נתעלם מ 3 לכ יש $\left(2^8\right)^2$ אפשרויות ואז נוסיף אותו ל X או Y או לשניהם (3 אפשרויות) - ונותר על האפשרות שהוא לא באף אחד מהם