סמסטר אביב תשס"ג

אוטומטים ושפות פורמליות
חוברת תרגילי-בית

1. עבור כל אחת מהקבוצות הבאות קבע האם היא בת מניה או לא, הוכח תשובתך.

   (א) קבוצת הסדרות האינסופיות של 0-ים ו-1-ים.

   (ב) קבוצת האוטומטים הסופיים הדטרמיניסטים מעל הא"ב $\{a, b\}$.

2. הבא דוגמא לקבוצה אינסופית של שפות מעל הא"ב $\Sigma = \{\ 0, 1\ \}$ כך שמתקיימים התנאים הבאים:

   - תוצאת החיתוך של אברי כל קבוצה המכילה מספר סופי של איברים מתוך קבוצת השפות שונה מ-$\emptyset$.
   - קיימת תת קבוצה של קבוצת השפות שתוצאת החיתוך של אבריה הוא $\emptyset$.

3. יהי Σ א"ב כלשהו.

   (א) הוכח כי $(\Sigma^*)^* = \Sigma^*$.

   (ב) השתמש בטענת הסעיף הקודם על מנת להוכיח כי הקבוצה $I\!N^*$ היא בת מניה ($I\!N$ היא קבוצת המספרים הטבעיים).

4. יהיו L, L_1, L_2, L_3 שפות כלשהן מעל הא"ב $\{0, 1\}$. עליכם להוכיח או להפריך:

   (א) $(L_1 \cap L_2) \cdot L_3 = L_1 \cdot L_3 \cap L_2 \cdot L_3$

   (ב) $(L_1 \cup L_2) \setminus L_1 = L_2$

   (ג) $L_1 \cap (L_2 \setminus L_3) \subseteq (L_1 \cap L_2) \setminus (L_1 \cap L_3)$

   (ד) $(L_1 \cup L_2) \cap L_3 = L_1 \cup (L_2 \cap L_3)$

   (ה) $L^* = L^* \cdot L^*$

   (ו) $(L_1 \times L_2)^C = L_1^C \times L_2^C$

5. הוכיחו כי לכל שפה לא ריקה L מתקיים:

$$\epsilon \in L \Leftrightarrow L \subseteq L \cdot L$$

6. יהיו A_i: $i = 1, 2, ...$ קבוצות כלשהן ותהיה $I = \{1, ..., n\}$.

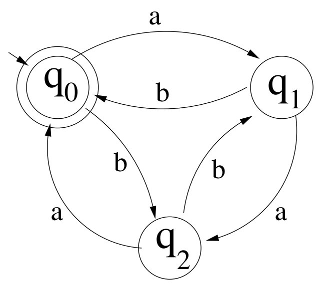
   (א) הוכח שלכל n סופי מתקיים:

$$\overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}$$

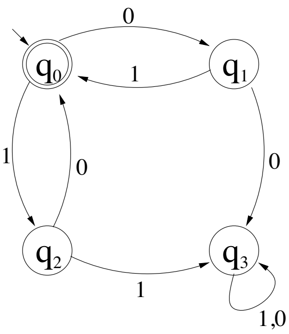
   (ב) האם השיוויון בסעיף הקודם מתקיים גם עבור קבוצות I אינסופיות? הוכח תשובתך.

7. ציינו מהן שפות האוטומטים הבאים? הסבירו את תשובתכם, אין צורך בהוכחת נכונות פורמלית.

(א)



(ב)



8. ענה על הסעיפים הבאים:

(א) בנה אוטומט דטרמיניסטי A המזהה את אוסף המילים מעל הא"ב $\{0,1\}$ שהינן ייצוג בינארי של מספר המתחלק ב-3 ללא שארית (כולל המלה הריקה).
הניחו כי אפסים מובילים הינם מותרים בייצוג הבינארי.
רמז: ניתן לבנות אוטומט בעל 3 מצבים.

(ב) תן הוכחה פורמלית לכך ש-$L(A)$ הינה השפה המבוקשת.

(ג) כיצד יש לשנות את האוטומט כדי שיקבל את השפה הנ"ל בהנחה שאפסים מובילים אינם מותרים בייצוג של מספר? (שימו לב: ϵ ו-0 הן מילים הצריכות להתקבל ע"י האוטומט הנ"ל)

9. בנו אוטומטים דטרמיניסטים עבור השפות הבאות, תנו הסבר לכל בניה, אין צורך בהוכחות נכונות פורמליות.

(א) השפה המכילה מלה בודדת $a_1a_2...a_n$.

(ב) $\{\ w \mid w \in \{a,b,c\}^*,$ w מתחילה ומסתיימת באותה אות $\}$ (ϵ אינה בשפה).

(ג) $\{ w \mid w \in \{0,1\}^*,$ בין כל שני 1-ים ב-w יש לפחות שלושה 0-ים $\}$
(מילים ללא 1-ים או עם 1 בודד נמצאות בשפה).

(ד) $\{ w \mid w \in \{0,1,2\}^*,$ w מסתיימת ב-00 $\}$

(ה) $\{ w \mid w \in \{0,1,2\}^*, |w| \geq 4,$ האות ה-4 מהסוף ב-w היא 2 $\}$

(ו) $\{ w \mid w \in \{0,1\}^*,$
קיימים ב-w שני אפסים המופרדים ע"י $3 * i$ אחדים, $i \geq 0$ כלשהו $\}$

10. בתרגול ראינו בניה של אוטומט A_{ab} המקבל את השפה:

$$L_{ab} = \{ w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ מכילה את המחרוזת } ab \}$$

יש לבנות אוטומט A_{abba} המקבל את השפה:

$$L_{abba} = \{ w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ מכילה את המחרוזת } ab \text{ או את המחרוזת } ba \}$$

(א) בנו אוטומט דטרמיניסטי A_{abba} תוך שימוש באוטומט A_{ab} ובשיטה של <u>מכפלת אוטומטים</u> כפי שהוצגה בהרצאה.

(ב) בנו אוטומט נוסף המקבל את השפה A_{abba} כך שמספר מצביו יהיה קטן ככל האפשר.

יש <u>להסביר</u> את הבניות.

11. בהנתן אוטומט דטרמיניסטי A, נגדיר עבור כל זוג מצביו p, q:

$$L(A,p,q) = \{ w \mid \delta(p,w) = q \}$$

<u>הוכח או הפרך</u>:

(א) אם $u \in L(A,p,q)$ וגם $v \in L(A,q,r)$, אזי $uv \in L(A,p,r)$.

(ב) אם $x \in L(A,p,p)$ אזי לכל $y,z \in \Sigma^*$ ולכל מספר טבעי i מתקיים:

$$yxz \in L(A) \Rightarrow yx^iz \in L(A)$$

12. יהי n מספר סופי ו-$L_1, L_2, ..., L_n$ שפות רגולריות.

(א) <u>הוכיחו</u> כי השפה $L = L_1 \cap L_2 \cap ... \cap L_n$ הינה שפה רגולרית.

(ב) <u>הוכיחו</u> כי חיתוך קבוצה אינסופית של שפות רגולריות עשוי להיות שפה לא רגולרית.

(ג) הביאו דוגמא לקבוצה אינסופית של שפות רגולריות שחיתוכן הינו שפה רגולרית.

(ד) <u>הוכיחו</u> כי איחוד קבוצה אינסופית של שפות רגולריות עשוי להיות שפה לא רגולרית.

(ה) הביאו דוגמא לקבוצה אינסופית של שפות רגולריות שאיחודן הינו שפה רגולרית.

13. השפה $\{ a^n b^n \mid n > 0 \}$ איננה שפה רגולרית, משום שלא קיים אוטומט סופי שמקבל שפה זו. נגדיר מודל של אוטומט דטרמיניסטי הזהה למודל שהוגדר בכתה, פרט לכך שמוגדרים אינסוף מצבים באוטומט.
הגדירו באופן מפורט ופורמלי אוטומט A מהמודל החדש בעל מצב מקבל יחיד שעבורו $L(A) = \{ a^n b^n \mid n > 0 \}$ (מהי קבוצת המצבים? כיצד מוגדרת פונקציית המעברים?...)

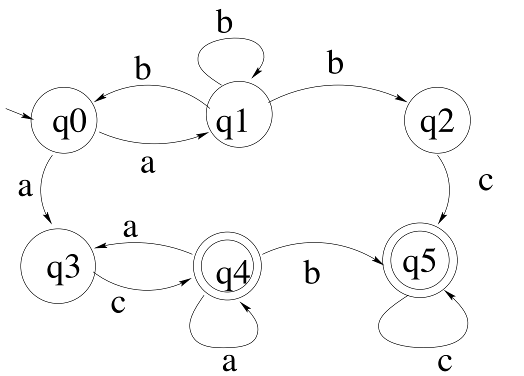
14. הוכיחו כי פעולות החיסור של שפות משמרת רגולריות, כלומר אם L_1 ו-L_2 הינן שפות רגולריות, אזי השפה $L_1 \backslash L_2$ הינה רגולרית. יש להוכיח ב-2 דרכים:

   (א) בעזרת תכונות סגור של שפות רגולריות אשר נלמדו בכתה.

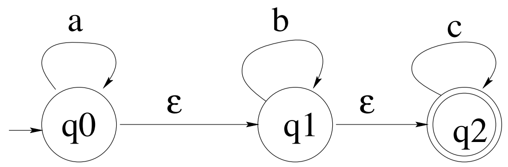
   (ב) ע"י בניה של אוטומט החיסור (הסבירו את הבניה אין צורך בהוכחת נכונות פורמלית).

15. נתון אוטומט A_1 לעל הא"ב Σ_1 ואוטומט A_2 מעל הא"ב Σ_2. תארו בניה של אוטומט דטרמיניסטי המקבל את השפה $L(A_1) \cup L(A_2)$. שימו לב כי אוטומט האיחוד צריך להיות אוטומט דטרמיניסטי המוגדר היטב מעל הא"ב $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$.

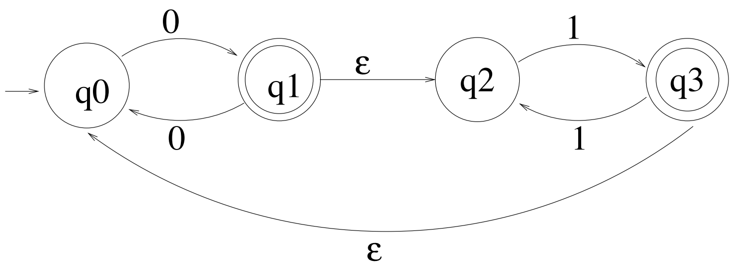
16. היפכו את האוטומט הבא לאוטומט דטרמיניסטי מעל הא"ב $\Sigma = \{a, b, c\}$.
הערה: אין צורך להקצות 2^6 מצבים.



17. היפכו את האוטומט הבא לאוטומט אי-דטרמיניסטי ללא מסעי-ϵ תוך שימוש באלג' שהוצג בכתה.



18. איזה שפה מזהה האוטומט הבא?



בכתה הוצגו <u>שלושה מודלים של אוטומט סופי</u>: אוטומט דטרמיניסטי, אוטומט אי-דטרמיניסטי ללא מסעי-ϵ ואוטומט אי-דטרמיניסטי עם מסעי-ϵ. כפי שהוכח בכתה, שלושת המודלים הללו שקולים. בשתי השאלות הבאות נעסוק במודלים אלו.

19. נגדיר מודל אי-דטרמיניסטי (עם מסעי-ϵ) שבו קיימת קבוצת מצבים התחלתיים: $A = (Q, \Sigma, Q_0, \delta, F)$ מלה שייכת ל-$L(A)$ אם"ם קיים עבורה מסלול חישוב שתחילתו במצב של Q_0 וסופו במצב מקבל. <u>הוכח</u> כי מודל זה שקול לכל אחד מהמודלים שנלמדו בכתה.

20. נגדיר מודל אי-דטרמיניסטי (עם מסעי-ϵ) שבו קיים מצב מקבל יחיד: $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, q_f)$ מלה שייכת ל-$L(A)$ אם"ם קיים עבורה מסלול חישוב שתחילתו ב-q_0 וסופו ב-q_f. <u>הוכח</u> כי מודל זה שקול לכל אחד מהמודלים שנלמדו בכתה.

21. מצב q באוטומט נקרא מצב בור אם לכל $a \in \Sigma$ מתקיים $\delta(q, a) = \emptyset$. <u>אוטומט בורות</u> הוא אוטומט אשר כל מצביו המקבלים הינם בורות. תהא L שפה רגולרית כשלהי.

(א) <u>הוכיחו</u> כי בהכרח קיים אוטומט בורות מהמודל האי-דטרמיניסטי עם מסעי-ϵ שמקבל את השפה L.

(ב) איזה תנאי (מספיק והכרחי) צריכה L לקיים על-מנת שניתן יהיה לבנות עבורה אוטומט בורות מהמודל האי-דטרמיניסטי ללא מסעי-ϵ? <u>הוכיחו</u> שכאשר מתקיים תנאי זה, אכן ניתן לבנות אוטומט כנדרש.

22. <u>הוכח או הפרך</u>:

(א) לכל אוטומט דטרמיניסטי A, אם $\epsilon \in L(A)$ אז $q_0 \in F$.

(ב) לכל אוטומט אי-דטרמיניסטי עם מסעי-ϵ A, אם $\epsilon \in L(A)$ אז $q_0 \in F$.

(ג) לכל אוטומט דטרמיניסטי A, אם $q_0 \in F$ אזי $\epsilon \in L(A)$.

(ד) לכל אוטומט אי-דטרמיניסטי עם מסעי-ϵ A, אם $q_0 \in F$ אזי $\epsilon \in L(A)$.

23. בנה אוטומט אי-דטרמיניסטי עם לכל היותר 4 מצבים המזהה את השפה הבאה מעל $\Sigma = \{1, 2, 3, 4\}$.

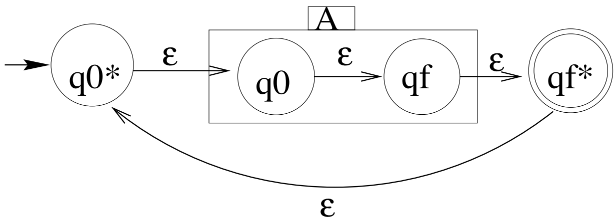
$L = \{$ כל המילים בהן האות i אינה מופיעה לפני האות j לכל $i > j$ $\}$

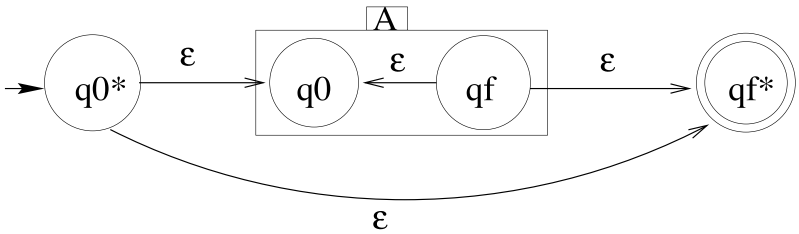
(שימו לב כי לא בהכרח מופיעות כל האותיות במלה השייכת לשפה)

24. בהנתן אוטומט A המזהה את השפה L בעל מצב התחלתי q_0 ומצב מקבל יחיד q_f, מוצעות להלן שתי שיטות לבנית אוטומט A^* המזהה את L^*. עבור כל אחת מהשיטות:

(א) יש להגדיר באופן פורמלי את A^* על סמך A.

(ב) יש לקבוע האם $L(A^*) = L^*$, ולהוכיח זאת.





25. כיתבו ביטויים רגולריים עבור השפות הבאות מעל הא"ב $\{a, b, c\}$, ותנו הסברים.

(א) $L_1 = \{\ w \mid$ לא קיימים שני a-ים רצופים ב-w $\}$

(ב) $L_2 = \{\ w \mid$ אחרי כל b ב-w יופיע c לבסוף $\}$

(ג) $L_3 = \{\ w \mid$ w מכילה a אחד, שני b-ים ומספר כלשהו של c-ים $\}$

26. כתוב והסבר ביטויים רגולריים עבור השפות הבאות:

(א) $L_1 = \{\ w \in \{0,1\}^* \mid$ $|w|$ מתחלק ב-3 $\}$

(ב) $L_2 = \{\ w \in \{0,1\}^* \mid$ ב-w מספר זוגי של 1-ים $\}$

(ג) $L_3 = \{\ w \in \{0,1,2\}^* \mid$ ב-w אין שני 1-ים רצופים $\}$

(ד) $L_4 = \{\ w \in \{0,1,2\}^* \mid\ |w| \geq 4,$ האות הרביעית מהסוף ב-w היא 2 $\}$

27. יהיו r ו-s ביטויים רגולריים כלשהם. הוכח או הפרך:

(א) $(r+s)^* = (r^*s)^* + (rs^*)^*$

(ב) $(rs+r)^* = r(sr+r)^*$

(ג) $(rs)^*r = r(sr)^*$

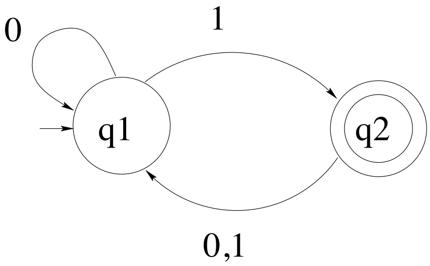
(ד) $(r^*s^*)^* = (r+s)^*$

(ה) $(r^*)^* = r^*$

(ו) $(r+\epsilon)^* = r^*$

28. יהיו s,t ו-r שלשה ביטויים רגולריים כלשהם. הוכח באופן פורמלי כי: $L[r(s+t)] = L[rs+rt]$.

29. בנה ביטוי רגולרי שקול לאוטומט הבא, ע"פ האלגוריתם שהוצג בכתה.



30. בנה אוטומט עבור הביטוי הרגולרי $((101) + (00))^*(1100)^*$ ע"פ האלגוריתם שהוצג בכתה.

31. מהי תוצאת החלוקה מימין במקרים הבאים? הוכיחו זאת.

(א) a^*ba^*/ba^*b

(ב) $\{\ a^ib^j \mid i \geq j > 0\ \}/\{\ a^ib^i \mid i > 0\ \}$

(ג) $\{\ a^ib^i \mid i > 0\ \}/\{\ a^ib^j \mid i \geq j > 0\ \}$

32. תהא L שפה כלשהי. נגדיר את השפה $Init(L)$ באופן הבא:

$Init(L) = \{\ w \in L \mid$ L-ב w הינה (גם) רישא ממש של מלה כלשהי ב-L $\}$

(א) מהי $Init(L)$ אם $L = \{\ a^ib^j \mid i \geq j > 0\ \}$?

(ב) הוכיחו בעזרת תכונות סגור שאם L הינה שפה רגולרית כלשהי אזי גם $Init(L)$ הינה רגולרית.

33. תהי L השפה הבאה:

$$L = \{\ 0^k1^n0^n \mid k,n > 0\ \} \cup \{\ 1^i0^j \mid i,j \geq 0\ \}$$

הוכח כי L מקיימת את למת הניפוח לשפות רגולריות.

34. לכל אחת מהשפות הבאות הוכח או הפרך את היותן רגולריות.
הוכחה - ע"י בניית אוטומט (אין צורך בהוכחה פורמלית) או הוכחה שמדובר בשפה סופית.
הפרכה - בעזרת למת הניפוח.

(א) $\{\ a^{n!} \mid n > 0\ \}$

(ב) $\{\ a^nb^m \mid n+m = 2\ mod\ 3\ \}$

(ג) $\{\ ab^nc^ma^k \mid n > 0,\ m > 0,\ k > min(n,m)\ \}$

(ד) $\{\ a^nb^kc^m \mid k > 0,\ m > k,\ m^2 < n < 10 \cdot k\ \}$

35. הוכיחו בעזרת למת הניפוח כי השפות הבאות אינן רגולריות.

(א) $\{\ a^ib^j \mid i \geq j > 0\ \}$

(ב) $\{ a^i b^i \mid i > 0 \}$

(ג) $\{ a^i b^j \mid j \geq i > 0 \}$

(ד) $\{ w = w_0 w_1 w_2 ... w_n \mid w_{2i+1} = a^{2i+1}, w_{2i} = b^{2i}, n \geq 0 \} =$
$\{ a, abb, abbaaa, ...\}$

36. ענו על הסעיפים הבאים:

(א) <u>הוכיחו</u> בעזרת למת הניפוח כי השפה הבאה אינה רגולרית.

$$\{ b^j a^{k^2} \mid k \geq 0, j > 0 \}$$

(ב) <u>הוכיחו</u> כי השפה $a^* \cup \{ b^j a^{k^2} \mid k \geq 0, j \geq 0 \}$ מקיימת את תכונת הניפוח.

(ג) <u>הוכיחו</u> כי אף על כן השפה $a^* \cup \{ b^j a^{k^2} \mid k \geq 0, j \geq 0 \}$ איננה רגולרית.

37. כידוע השפה $L = \{ w \in \{0,1\}^* \mid$ 3-מתחלק ב $\#_1(w) \}$ הינה רגולרית. הראו מפורשות שהשפה מקיימת את תכונות הניפוח, כלומר קיים n (מהו?) כל שלכל מלה בשפה שארכה לפחות n קיים פירוק...

38. נגדיר פעולת היפוך reverse עבור מילים ועבור שפות באופן הבא:
לכל מילה $w = a_1 a_2 ... a_n$ היפוכה הוא $w^R = a_n ... a_2 a_1$.
לכל שפה L, היפוכה הוא $L^R = \{ w^R \mid w \in L \}$.

<u>הוכיחו</u> כי השפות הרגולריות סגורות תחת פעולת ההיפוך, כלומר: אם L היא שפה רגולרית אזי גם L^R היא שפה רגולרית.
<u>הדרכה</u>: תאר בניה של אוטומט המקבל את L^R על סמך האוטומט המקבל את L.

39. נגדיר הומומורפיזם $h : \{a, b\} \to 0^*$ באופן הבא: $h(a) = 00,\ h(b) = 000$.
נגדיר שפה $L = \{ 0^k \mid$ אי זוגי $k > 0 \}$ מהי השפה $h^{-1}(L)$? <u>הוכיחו</u>.
<u>תזכורת</u>: $h^{-1}(L) = \{ w \in \{a, b\}^* \mid h(w) \in L \}$

40. <u>הוכח או הפרך</u>: לכל שפה רגולרית L ולכל הומומורפיזם h מתקיים: $h^{-1}(h(L)) = L$.

41. <u>הוכיחו</u> באמצעות תכונות סגור שהשפות הבאות אינן רגולריות:

(א) $L_1 = \{ a^m b^n a^{m+n} \mid n, m > 0 \}$

(ב) $L_2 = \{ (01)^n (10)^n \mid n > 0 \}$.

(ג) $L_3 = \{ a^n b a^n \mid n \geq 0 \}$

42. תהא L שפה רגולרית. <u>הוכיחו</u> באמצעות תכונות סגור שגם השפות הבאות הינן רגולריות.

(א) $L_1 = \{ a_1 a_2 ... a_n \mid \exists b_1 b_2 ... b_{2n} \in L,\ \forall i\ a_i \in \{ b_{2i-1}, b_{2i} \} \}$

(ב) $Init(L) = \{ w \in L \mid$ L-רישא ממש של מילה ב (גם) הינה $w \}$

43. נגדיר:

$$MAX(L) = \{\ w \in L \mid wx \in L\text{-לא קיים } x \in \Sigma^+ \text{ כך ש}\ \}$$

הוכח או הפרך תוך שימוש בתכונות סגור כי אם L הינה רגולרית אזי גם $MAX(L)$ הינה רגולרית.

44. בהנתן שתי שפות L_1 ו-L_2 נגדיר L_1/L_2 באופן הבא:

$$L_1/L_2 = \{\ x \mid \exists y \in L_2,\ xy \in L_1\ \}$$

הוכחו בעזרת תכונות סגור שאם L_1 ו-L_2 רגולריות אזי L_1/L_2 רגולרית.

45. נגדיר:

$$CYCLE(L) = \{\ x_2x_1 \mid x_1, x_2 \in \Sigma^*,\ x_1 \cdot x_2 \in L\ \}$$

הוכח או הפרך: אם L הינה רגולרית אזי גם $CYCLE(L)$ הינה רגולרית.

46. שאלות הכרעה:

(א) בהנתן אוטומט דטרמיניסטי A המזהה את השפה L, ובהנתן מלה w, תארו אלגוריתם המכריע ביעילות בשאלה:
" האם w שייכת לשפה $Init(L)$?" כאשר:

$$Init(L) = \{\ w \in L \mid L\text{-הינה (גם) רישא ממש של מלה כלשהי ב } w\ \}$$

(ב) בהנתן אוטומטים דטרמיניסטים עבור השפות A_1 ו-A_2 המזהים את L_1 ו-L_2 בהתאמה, תארו אלגוריתמים המכריעים בשאלות:
"האם השפות L_1 ו-L_2 הינן זרות?"
"האם $L_1 \subseteq L_2$?"

47. עבור כל אחת מהשפות הבאות מעל $\Sigma = \{a, b\}$, הגדירו באופן פורמלי את מחלקות השקילות של היחס R_L. הוכיחו שאלו אכן מחלקות השקילות וקיבעו האם השפה רגולרית.

(א) $L_1 = \{\ w \mid ab$ ומסתיימת במחרוזת ab מתחילה במחרוזת $w\ \}$

(ב) $L_2 = \{\ w \mid\ |\#_a(w) - \#_b(w)| \leq 19\ \}$

48. עבור כל אחת מהשפות הבאות מעל $\Sigma = \{0, 1\}$, תן תאור של מחלקות השקילות של R_L וקבע את $Rank(R_L)$.

(א) $L_1 = (01 + 101)^*$

(ב) $L_2 = \{\ w \mid \#_0(w) \geq \#_1(w)\ \}$

(ג) $L_3 = \{\ w \mid$ מכילה 1 אחד בדיוק $w\ \}$

49. הוכיחו בעזרת משפט נרוד כי השפות הבאות אינן רגולריות:

(א) $L_{prime} = \{\ a^p \mid$ הוא מספר ראשוני $p\ \}$

(ב) $L = \{\ a^m b^n a^{n+m} \mid n,m > 0\ \}$

50. עבור האוטומט הדטרמיניסטי A נגדיר יחס E_k מעל קבוצת המצבים Q.
$(p,q) \in E_k$ אם"ם:
לכל מלה z שאורכה $\leq k$ מתקיים $\delta(p,z) \in F \iff \delta(q,z) \in F$ (כלומר לא קיים זנב מפריד שאורכו $\leq k$).

(א) הוכיחו שהיחס E_k הוא יחס שקילות.

(ב) מהן מחלקות השקילות של היחס E_0.

(ג) הוכיחו שהיחס E_k מעדן את היחס E_{k-1} כלומר:
$(p,q) \in E_k \Leftarrow (p,q) \in E_{k-1}$.

(ד) הוכיחו ש-$(p,q) \in E_k$ אם"ם
$(p,q) \in E_{k-1}$ ולכל $a \in \Sigma$ מתקיים $(\delta(q,a), \delta(p,a)) \in E_{k-1}$

51. יהי $\Sigma = \{a,b\}$. תן דוגמא ליחס R מעל Σ^* שהוא:

(א) אינווריאנטי מימין אך לא משמאל.

(ב) אינווריאנטי מימין ומשמאל.

(ג) לא אינווריאנטי לא מימין ולא משמאל.

52. <u>הוכח או הפרך</u>:

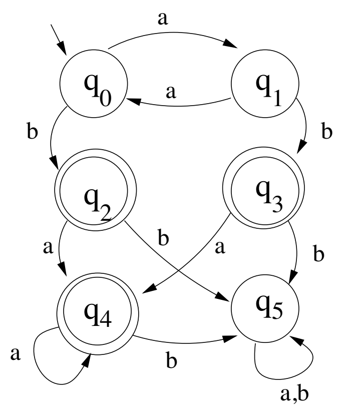
(א) $Rank(R_L) = Rank(R_{L^C})$

(ב) $Rank(R_{L_1 \cap L_2}) \leq Rank(R_{L_1}) \cdot Rank(R_{L_2})$

(ג) $Rank(R_{L_1 \cup L_2}) \leq Rank(R_{L_1}) + Rank(R_{L_2})$

(ד) $Rank(R_L) = Rank(R_{L^*})$

53. הפעילו את האלגוריתם לצמצום אוטומטים, שנלמד בכתה, על האוטומט הבא.



54. נגדיר יחס $\overset{L}{\sim}$, $w \overset{L}{\sim} w'$ אם"ם $w, w' \in L$ או $w, w' \notin L$.
יהי $\Sigma = \{0,1\}$, <u>הוכח</u> כי לכל שפה סופית L מעל Σ כך ש-$L \neq \emptyset$ ו-$L \neq \{\epsilon\}$
היחס $\overset{L}{\sim}$ אינו אינווריאנטי מימין.

55. עבור הדקדוק G שלהלן מהו $L(G)$? תנו הגדרה פורמלית והסבירו את התשובה.

$G = (\{S,T\},\{a,b\},P,S)$
P:
$S \rightarrow Ta$
$T \rightarrow bbTa \mid bbT \mid bb$

56. כתבו דקדוקים חסרי הקשר עבור השפות:

(א) $L_1 = \{\ w\#w^R\# \mid w \in \Sigma^*,\ \# \notin \Sigma\}$
(ב) $L_2 = \{\ a^ib^j \mid j = 4\cdot i + 2\ \}$
(ג) $L_3 = \{\ a^ib^jc^kd^l \mid k > l > 0,\ i > j \geq 0\ \}$
(ד) $L_4 = \{\ 0^i1^j2^k \mid i \neq j\ or\ j \neq k\ \}$
(ה) $L_5 = \{\ (ab)^nc^{3n} \mid n \geq 0\ \}$
(ו) $L_6 = \{\ w \mid w \in \{a,b\}^*,\ \#_a(w) = \#_b(w)\}$
(ז) $L_7 = \{\ a^ib^jc^k \mid j \geq i + k\ \}$

57. בהנתן שני דקדוקים ח"ה G_1 ו-G_2 תארו בניה של דקדוקים ח"ה הגוזרים את השפות הבאות:

(א) $L(G_1)\cdot L(G_2)$
(ב) $L(G_1)^*$
(ג) $L(G_1)^R$
(ד) $L(G_1) \cup L(G_2)$

58. יהא $G = (V,T,P,S)$ דקדוק ח"ה ללא כללי יחידה (כללים מהצורה $A \rightarrow B$ כאשר $A,B \in V$) וללא כללי-ϵ (מהצורה $A \rightarrow \epsilon$). הוכיחו כי קיים דקדוק G_1 ששקול לדקדוק G וכל הכללים ב-G_1 הם מהצורה:
$A \rightarrow a$ כאשר $a \in T,\ A \in V$.
או מהצורה:
$A \rightarrow A_1A_2...A_m$ כאשר $A, A_i \in V$ וכן $m \geq 2$.

59. הפעילו את שיטת הפישוט על הדקדוק הבא:

$S \rightarrow ab \mid BBa$
$A \rightarrow CB \mid C$
$B \rightarrow CCa \mid A \mid ab$
$C \rightarrow Ba \mid A \mid \epsilon$

60. דקדוק G נקרא סמי-רגולרי אם כל הכללים בו הם מהצורה:

$A \rightarrow wB$
$A \rightarrow w$
$S \rightarrow \epsilon$
$A, B \in V, w \in T^+$

<u>הוכח</u>: לכל דקדוק סמי-רגולרי קיים דקדוק לינארי ימני השקול לו.

61. בשאלה זו נחקור את סדר ביצוע הפעולות השונות בתהליך הפישוט של דקדוק. ניתן להניח (על-סמך ההוכחות שניתנו בהרצאה) שכל אחד מהאלג' שנלמדו (לסילוק משתנים מיותרים, לסילוק חוקי-ϵ ולסילוק חוקי יחידה) הם נכונים ומ-שמרים את שפת הדקדוק. יהי G דקדוק ח"ה, נניח לצורך פשטות ש-$\epsilon \notin L(G)$.

(א) <u>הוכיחו</u> כי ביצוע חמשת שלבי הפישוט כפי שהוצגו בתרגול מבטיח שה-דקדוק G' המתקבל מקיים $L(G') = L(G)$.

(ב) <u>הוכיחו</u> כי ביצוע חמשת שלבי הפישוט כפי שהוצגו בתרגול מבטיח שה-דקדוק G' המתקבל הינו פשוט - ללא משתנים מיותרים, חוקי יחידה וחוקי-ϵ.

(ג) הראו כי הורדת שלב 5 מתהליך הפישוט עלולה לגרום לכך שהדקדוק הנוצר אינו פשוט.

(ד) הראו כי החלפת הסדר ביו שלבים 2 ו-4 בתהליך הפישוט עלולה לגרום לכך שהדקדוק הנוצר אינו פשוט.

(ה) האם יש חשיבות לסדר שבו מסולקים המשתנים המיותרים? האם בהכרח יש לסלק קודם את אלו שאינם ניתנים לגזירה טרמינלית ורק אח"כ את אלו שאינם ניתנים להשגה מ-S? <u>הוכיחו</u> תשובתכם.

62. יהי G דקדוק ח"ה שבו $\epsilon \notin L(G)$, <u>הוכיחו</u> כי קיים דקדוק חסר הקשר G', $G' = (V', T', P', S')$ שמקיים $L(G') = L(G)$ שכל החוקים ב-G' הם מהצורה:

$$A \to BC \;\; ; \;\; A, B, C \in V'$$

או מהצורה:

$$A \to a \;\; ; \;\; A \in V',\ a \in T'$$

הדרכה: העזרו בידע לגבי פישוט דקדוקים.

הערה: צורה זו של דקדוק נקראת <u>הצורה הנורמלית של חומסקי</u>.

63. יהי G דקדוק ח"ה שבו $\epsilon \notin L(G)$ האם בהכרח קיים דקדוק חסר הקשר G', $G' = (V', T', P', S')$ שמקיים $L(G') = L(G)$ שכל החוקים ב-G' הם מהצורה:

$$A \to BCD \;\; ; \;\; A, B, C, D \in V'$$

או מהצורה:

$$A \to a \;\; ; \;\; A \in V',\ a \in T'$$

64. יהי G דקדוק ח"ה שבו $\epsilon \notin L(G)$ האם בהכרח קיים דקדוק חסר הקשר G', $G' = (V', T', P', S')$ שמקיים $L(G') = L(G)$ שכל החוקים ב-G' הם מהצורה:

$$A \to BCD \;\; ; \;\; A, B, C, D \in V'$$

או מהצורה:

$$A \to a \;\; ; \;\; A \in V',\ a \in T'$$

או מהצורה:

$$A \to \epsilon \;\; ; \;\; A \in V'$$

65. עבור הדקדוק הבא, בצעו סילוק רקורסיה שמאלית (ביטול חוקים מהצורה $A \to A\alpha$) תוך שמירה על השפה.

$S \to Aa \mid a$

$A \to Ab \mid b \mid BBAa \mid BAa \mid Aa \mid BBa \mid Ba \mid a \mid aab$

$B \to BBAa \mid BAa \mid Aa \mid BBa \mid Ba \mid a \mid aab$

66. נתון הדקדוק G הבא:

$S \to aS \mid aSbS \mid \epsilon$

הוכח כי:

$$L(G) = \{\ w \mid \text{לכל רישא } x \text{ של } w \text{ מתקיים } \#_a(x) \geq \#_b(x)\ \}$$

67. נתון הדקדוק הלינארי ימני G הבא:

$S \to aA \mid bB \mid \epsilon$
$A \to aB \mid bS$
$B \to aS \mid bA$

(א) בנה אוטומט סופי המתאים ל-$L(G)$ ע"פ האלגוריתם שניתן בכתה.
(ב) מהי $L(G)$?

68. יהי G דקדוק לינארי ימני ו-M אוטומט סופי המתאים ל-G. הוכח:

(א) לכל $w \neq \epsilon \quad : \quad S \to wA \iff A \in \delta(S, w)$
(ב) לכל $w \neq \epsilon \quad : \quad S \to w \iff q_f \in \delta(S, w)$
(ג) $S \to \epsilon \iff q_f \in \delta(S, \epsilon)$

69. תהי L שפה ח"ה כלשהי. יהי M אוטומט מחסנית המקבל את L ע"י ריקון. בנה אוטומט מחסנית M' המקבל את L ע"י מצבים סופיים. הסבר את הבניה.

70. תהי L שפה רגולרית ויהי A אוטומט דטרמיניסטי המקבל את L. הציגו באופן פורמלי בניה של אוטומט מחסנית בעל מצב יחיד המקבל את L ע"י ריקון מחסנית. הסבירו את הבניה.

71. דקדוק נקרא לינארי שמאלי אס"ם כל כלל הגזירה שלו הוא מהצורה:
$A, B \in V,\ a \in T \quad A \to a,$ או $A \to Ba$ וכן מותר $S \to \epsilon$.
הוכח כי כל שפה רגולרית מתקבלת ע"י דקדוק לינארי שמאלי.

72. תהיינה L_1 ו-L_2 שתי שפות רגולריות. נגדיר

$$L_{12} = \{\ w_1 \cdot w_2 \mid w_1 \in L_1\ \wedge\ w_2 \in L_2\ \wedge\ |w_1| = |w_2|\ \}$$

(א) הוכיחו ש-L_{12} שפה ח"ה ע"י בניה של אוטומט מחסנית.
(ב) הוכיחו ש-L_{12} שפה ח"ה ע"י בניה של דקדוק ח"ה מתאים.

73. לכל אחת מהשפות הבאות יש לבנות אוטומט מחסנית באופן פורמלי ולהסביר היטב את הבניה:

(א) $L_1 = \{\ w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\ \}$
(ב) $L_2 = \{\ a^n b^m \mid n = m\ \vee\ n = 2 \cdot m\ \}$
(ג) $L_3 = \{\ a^n b^m \mid n \leq m \leq 2 \cdot n\ \}$

74. הוכיחו בעזרת למת הניפוח שהשפות הבאות אינן ח"ה:

(א) $L_1 = \{\ a^p \mid p \text{ הוא מספר ראשוני}\ \}$

(ב) $L_2 = \{ \ ww^R w \mid w \in \{0,1\}^* \ \}$

75. בנו אוטומט מחסנית המקבל את השפה של הדקדוק הבא:

$S \rightarrow aAA$
$A \rightarrow aS \mid bS \mid a$

76. הוכח כי אם L שפה ח"ה אזי קיים עבורה אוטומט מחסנית M, המקבל ע"י מצב סופי, כך של-M יש לכל היותר 2 מצבים ו-M אינו מבצע צעדי ϵ.

77. שפה L מקיימת את תכונת הרישא אם לא קיימת מלה ב-L שהיא רישא ממש של מלה אחרת ב-L.

(א) הוכח כי אם L מתקבלת ע"י אוטומט מחסנית דטרמיניסטי המקבל ע"י ריקון אז L מקיימת את תכונת הרישא.

(ב) האם כל שפה, המקיימת את תכונת הרישא, מתקבלת ע"י אוטומט דטרמיניסטי המקבל ע"י ריקון?

78. ענו על הסעיפים הבאים:

(א) הוכיחו כי המשלים של השפה $\{ \ a^n b^n c^n \mid n > 0 \ \}$ מעל א"ב $\{a,b,c\}$ היא שפה ח"ה.
הדרכה: כיתבו את שפת המשלים כאיחוד של שפות ח"ה.

(ב) הוכיחו כי משפחת השפות חסרות ההקשר אינה סגורה תחת חיתוך.

79. נגדיר:

$$MAX(L) = \{ \ w \in L \mid \text{לא קיים } x \in \Sigma^+ \text{ כך ש-} wx \in L \ \}$$

הוכח או הפרך תוך שימוש בתכונות סגור כי אם L הינה ח"ה אזי גם $MAX(L)$ הינה ח"ה.

80. הפעל את אלג' CYK על הדקדוק הבא על מנת להכריע בשאלות:

(א) האם המלה $babb$ שייכת לשפת הדקדוק?

(ב) האם המלה $bbaa$ שייכת לשפת הדקדוק?

$S \rightarrow BC \mid BS \mid a$
$A \rightarrow AA \mid SS \mid b$
$B \rightarrow AB \mid DD \mid a$
$C \rightarrow DA \mid a \mid b$
$D \rightarrow AA \mid DD \mid BS$

81. העבר את הדקדוק הבא לצורה הנורמלית של גרייבך ע"פ האלג' שניתן בכתה.

$S \rightarrow AB$
$A \rightarrow BS \mid b$
$B \rightarrow SA \mid a$