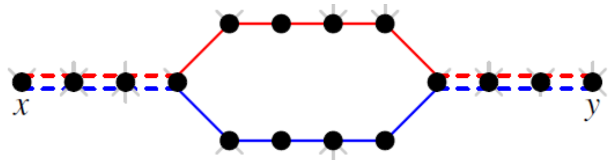
עצים

הגדרה: עץ הוא גרף קשיר לא מכוון ללא מעגלים.

טענה 1 בעץ בין שני קדקודים יש מסלול אחד בלבד.

נניח בדרך השלילה שבין שני קדקודים שונים בעץ יש שני מסלולים שונים (כחול, אדום). נמחק צלעות משותפות, נקבל מעגל – סתירה להגדרת העץ. לכן בעץ בין שני קדקודים יש מסלול אחד בלבד. מש"ל.



טענה 2. לכל עץ יש לפחות עלה אחד. הוכחה בדרך השלילה:

נניח בדרך השלילה שלעץ אין עלים, לכן דרגה של כל קדקוד $d_i \geq 2$. ניקח קדקוד כלשהו, בגלל שדרגתו גדולה או שווה 2 נעבור לקדקוד הבא, אם היינו בו סגרנו מעגל, אם לא בגלל שדרגתו גדולה או שווה 2 נעבור לקדקוד הבא. בגלל שמספר קדקודים בעץ הוא סופי, באיזה שהוא שלב נגיע לקדקוד שכבר היינו בו – סגרנו מעגל. סתירה להגדרת העץ. לכן לעץ יש לפחות עלה אחד. מש"ל.

טענה 3 (Berge) לכל עץ יש לפחות שני עלים.

ניקח P מסלול ארוך ביותר בין שני קדקודי העץ, $P = v_1, v_2, \ldots, v_k$. P הוא מסלול פשוט
ו-v_1 עלה מכוון שאם הדרגה שלו הייתה לפחות 2 הסמוך אליו, נסמן אותו ב-u, לא יכול להיות שייך ל- P (אין מעגלים).
אם u לא שייך ל-P - קבלנו מסלול $P_1 = u, v_1, v_2, \ldots, v_k$ ארוך מ-P. סתירה. לכן v_1 הוא עלה. בדומה ניתן להוכיח כי v_k גם עלה. מש"ל.

טענה 4 לכל עץ בעל n קדקודים יש בדיוק $n-1$ צלעות. **הוכחה** באינדוקציה לפי מספר קדקודי העץ.
בסיס האינדוקציה: $n=1$ אפס צלעות, $n=2$ צלע אחת.
הנחת אינדוקציה: הטענה נכונה עבור n קדקודים – יש $n-1$ צלעות.
שלב אינדוקציה: $n+1$ קדקודים. ניקח עלה ונמחק אותו יחד עם הצלע היחידה שמחוברת אליו, נקבל עץ בעל n קדקודים ו- $n-1$ צלעות (לפי הנחת אינדוקציה), לכן לעץ בעל $n+1$ קדקודים יש $n-1+1=n$ צלעות. מש"ל.

הגדרה1: קוטר (דיאמטר) העץ: אורך של מסלול ארוך ביותר. (הקצוות של הקוטר – עלים).

הגדרה2: אקסצנטריות (**eccentricity**) של קדקוד x הוא המרחק הגדול ביותר בין x לכל קדקוד אחר.
$ex(x) = \max\{distance(v,x),\ v \in V\}$.
מהגדרה זו מיד נובע כי קוטר העץ הוא האקסנטריסיתי הגדול ביותר.

הערה: לגרפים לא קשירים אקסצנטריות מוגדרת כאינסופית.

הגדרה3: רדיוס העץ הוא האקסצנטריות הקטן ביותר.
$$radius(T) = \min\{ex(v),\ v \in V\}$$

הגדרה4: קדקוד C הוא מרכז הגרף אם $ex(c)=radius(G)$

מציאת דיאמטר – מחשבים את כל המרחקים בין n^2 מרחקים בין קדקודי הגרף:
Floyd-Warshall – $O(n^3)+O(n^2)$, איבר מקסימאלי של המטריצה.

משפט 1: יהי T עץ ו- $a\in T$ – קדקוד כלשהו, ויהיה $ex(a) = \max\{dist(v,a), v\in V\}=dist(a,b)$. אזי המסלול שבין a ל-b עובר דרך מרכז העץ **c**.

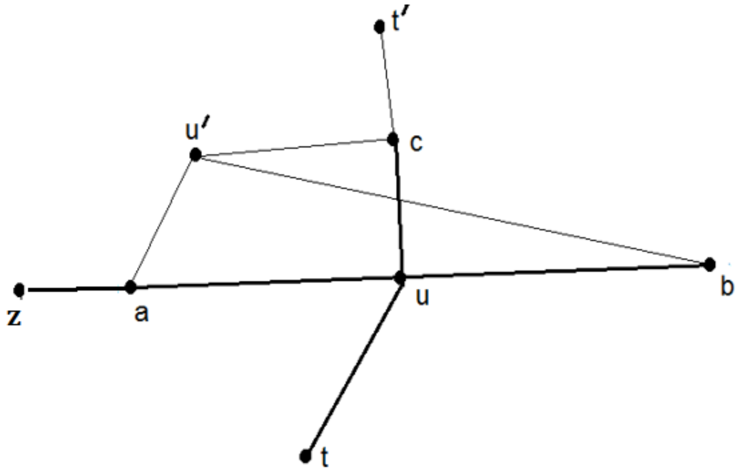
הוכחה. נניח בדרך השלילה שהמסלול בין a ל-b לא עובר דרך מרכז **c**. כוון T הוא עץ, אז קיים מסלול המחבר **c** עם a ו-b. כוון ש-T הוא עץ, יש מסלול יחיד המחבר **c** עם a ו-b. קדקוד **u** המחבר בין a ל-b חייב להיות על המסלול a-b אחרת נוצר מעגל. נחשב את האקסצנטריות של u. לשם כך נמצא קדקוד t הרחוק ביותר מ-u. כאן יש 4 מיקרים:

1) קדקוד t נמצא על הקו a-b לכוון של קדקוד b. כוון ש-b הוא עלה במקרה זה $ex(u)=dist(u,b)$.
אבל $ex(c) \geq dist(c,u) + dist(u,b)>dist(u,b)=ex(u)$ – סתירה, כי אקסצנטריות של מרכז העץ מינימאלית לפי הגדרת המרכז.

2) קדקוד t נמצא על הקו a-b לכוון של קדקוד a. במקרה זה (אם a לא עלה) זה איזה שהו עלה z. וגם כאן מגיעים לסתירה, כי $ex(c) \geq dist(c,u) + dist(u,z)>dist(u,z)=ex(u)$.

3) קדקוד t (t') נמצא על הקו c-u. במקרה זה $dist(t',u) \leq dist(u,b)$, אחרת t' היה קדקוד הרחוק ביותר מ-a (ולא קדקוד b). מצד שני לא ייתכן ש- $dist(u,b)<dist(t',u)$ כי אז $ex(u)=dist(u,b)$.
לפיכך $dist(t',u) = dist(u,b)$. סתירה להנחה שהמסלול הארוך ביותר מ-a ל-b לא עובר דרך מרכז.

4) במקרה ש- $ex(u)=dist(u,t)$, כאשר t הוא קדקוד כלשהו שלא נמצא באף מסלול של המקרים הקודמים מקבלים אותה סתירה כמו במקרים 1,2: האקסצנטריות של המרכז היא מינימאלית.
$$ex(c) \geq dist(c,u) + dist(u,t)>dist(u,t)=ex(u)$$

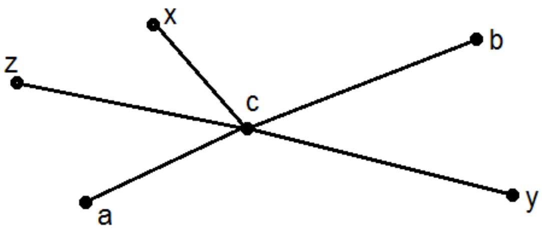


מציאת דיאמטר העץ

משפט 2. בוחרים בקדקוד $x \in T$, מוצאים y שהוא רחוק ביותר מ-x מוצאים קדקוד z הרחוק ביותר מ-y , אזי $dist(y,z) = diameter$.

הוכחה. נניח בדרך השלילה שקיים מסלול אחר בין a ל-b כך ש- $dist(a,b)>dist(x,y)$. שני המסלולים עוברים דרך מרכז העץ c. קדקוד y רחוק ביותר מ-x, לכן $dist(b,c)\le dist(y,c)$

באופן דומה $dist(c,a)\le dist(c,z)$, ובכך
$dist(b,c)+ dist(c,a)\le dist(y,c)+dist(c,z)$ או $dist(a,b)\le dist(y,z)$.
אזי $diameter(T) = dist(z,y)$



משפט 3. לכל עץ T יש מרכז אחד או שניים. (שיטת שרפת עלים).

הוכחה. המרחק המרבי, מקודקוד נתון v לכל קודקוד אחר v_i מתרחש רק כאשר v_i הוא עלה. נתבונן בעץ T בעל יותר משני קדקודים. ידוע לנו ל-T יש לפחות שני עלים.
שרפה ראשונה:
מוחקים את כל העלים מ -T, הגרף T_1 שהתקבל הוא שוב עץ. מחיקת כל העלים מ-T מפחיתה באופן אחיד את האקסצנטריות של כל קדקוד שנשאר (קדקודי עץ T_1) באחד. לפיכך המרכזים של T הם גם המרכזים של T_1.
שרפה שנייה:
נמחק כל העלים מ-T_1 – נקבל עץ T_2 בעל אותם מרכזים.
בהמשך לתהליך השרפות, נקבל קודקוד בודד, שהוא המרכז של T, או צלע אשר קודקודי הקצה שלה הם שני המרכזים של T.

מסקנה1 כאשר לעץ יש מרכז אחד - הרדיוס של העץ שווה למספר השרפות.
כאשר לעץ יש שני מרכזים - הרדיוס של העץ שווה למספר השרפות פלוס 1.

מסקנה2

$$2*radius-1\le diameter\le 2*radius$$

$$\{c_1,c_2\} \rightarrow d=2*r-1, \quad \{c\}\rightarrow d=2*r$$

הערה: בגרף שהוא לא עץ מספר מרכזים יכול להיות גדול מ-2:

בגרף זה יש 3 מרכזים המסומנים באדום, האקסצנטריות של כל אחד מהם היא 3.