אוטומטים ושפות פורמליות 2

מבוסס על הרצאותיה של ד"ר ענת פסקין־צ'רניאבדקי

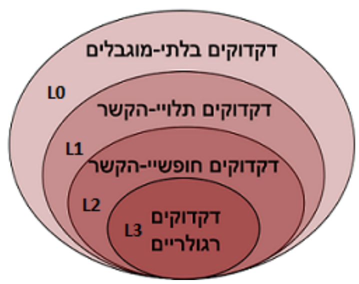
27 ביוני 2019

סיכום זה הוא ניסיון שלי לחלק את החומר לפי נושאים: הגדרות, דוגמאות, ומשפטים. בתקוה שלעוד אנשים יהיה לעזר.

לתיקונים/הערות/הארות ־ 0508752542

בהצלחה לכולנו!!

נעם דומוביץ



תוכן עניינים

1 הגדרות

1.0.1 יחס שקילות

ראשית נזכר ביחסי שקילות R : יחס $R \subseteq A \times A$

1. רפלקסיבי $R(x,x)$
2. סימטרי $R(x,y) \to R(y,x)$
3. טרנזטיבי $R(x,y) \wedge R(y,z) \to R(x,z)$

1.0.2 הגדרה 1.1 - יחס R_L :

תהי $L \subseteq \sum^*$ שפה. נגדיר יחס בינארי $R_L \subseteq \sum^* \times \sum^*$ כדלקמן: $R_L = \{(x,y) \in \sum^* | \forall z \; xz \in L \iff yz \in L\}$
במילים: זוג מילים x, y נמצא ביחס R_L אס"ם לא קיימת מילה z המפרידה בינהן במובן ש $xz \in L$ ו $yz \notin L$ או להיפך

1.0.3 יחס R_A , יחס מעדן, יחס אינווריאנטי מימין

- <u>הגדרה 2.1:</u> יהיו $A\left(\sum, ...\right)$ אס"ד, נגדיר יחס בינרי $R_A \subseteq \sum^* \times \sum^*$, $R_A = \left\{(x,y) \in {\sum^*}^2 | \hat{\delta}(q_0,x) = \hat{\delta}(q_0,y)\right\}$
- <u>הגדרה 2.2:</u> יהיו $R_1, R_2 \subseteq A \times A$ יחסי שקילות . אזי R_1 **מעדן** את R_2 לכל $x, y \in A$ $R_1(x,y) \to R_2(x,y)$ (החלוקה של R_1 עדינה יותר)
- <u>הגדרה 2.3</u> : יהי $R \subseteq \sum^* \times \sum^*$ יחס שקילות . נאמר ש R **אינוויאנטי מימין** אם לכל $x, y \in \sum^*$ מתקיים ש: $R(x,y) \Rightarrow R(xz, yz)$
- בקצרה:
  - $R_A = \left\{(x,y) \in {\sum^*}^2 | \hat{\delta}(q_0,x) = \hat{\delta}(q_0,y)\right\}$
  - $R_L = \left\{(x,y) \in {\sum^*}^2 | \forall z \; xz \in L \Leftrightarrow yz \in L\right\}$
  - $\widetilde{R}_L = \left\{(x,y) \in {\sum^*}^2 | x \in L \Leftrightarrow y \in L\right\}$
  - יחס מעדן $R_A(x,y) \Rightarrow \widetilde{R}_{L(A)}(x,y)$

1.0.4 דקדוק שכתוב

<u>הגדרה 5.1 (דקדוק שכתוב):</u> **דקדוק שכתוב** G הוא רביעיה $G = (S, V, T, P)$ כאשר :

- S - משתנה התחלתי
- V - קב' סופית של משתנים $S \in V$
- T - קב' סופית של טרמינלים (א"ב) , כך ש $T \cap V = \phi$
- P - קב' סופית של כללי גזירה מהצורה $\alpha \to \beta$
  - כאשר $\alpha \in (V \cup T)^*$,$\beta \in (V \cup T)^*$

1.0.5 גזירה וסידרת גזירה

<u>הגדרה 5.2 :</u> יהי $G = (S, V, T, P)$ דקדוק שכתוב נאמר ש φ_2 **נגזר בצעד אחד** מ φ_1 , ונסמן $\varphi_1 \underset{G}{\Rightarrow} \varphi_2$ אם $\varphi_1, \varphi_2 \in (V \cup T)^*$ וקיימות $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ כך ש:

$$\varphi_1 = \beta\alpha\gamma$$
$$\varphi_2 = \beta\delta\gamma$$
$$a \to \delta \in P$$

נסמן $\varphi_1 \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} \varphi_2$ אם ניתן להקבל φ_2 מ φ_1 **באמצעות סדרה באורך 0 או יותר של צעדי גזירה**. נסמן $\varphi_1 \overset{i}{\underset{G}{\Rightarrow}} \varphi_2$ אם ניתן לקבל את φ_2 מ φ_1 במאצעות סדרה של צעדי גזירה באורך i

<u>הגדרה 5.3 (**שפה של דקדוק**)</u>: יהי G דקדוק שכתוב נגדיר: $L(G) = \left\{ x \in T^* \mid S \overset{*}{\Rightarrow} x \right\}$

1.0.6 <u>עצי גזירה ודו משמעות</u>

נזכיר כי עץ גזירה הוא דרך קומפקטית רקורסיבית ליצג את כל סדרת הגזירה השונות מסדרה מסוימת רק בסדר פיתוח המשתנים

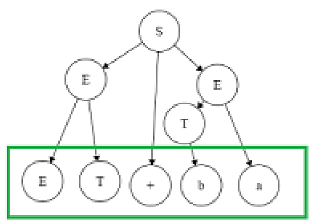
<u>הגדרה 8.2</u>: יהי G דקדוק חסר הקשר (דח"ה) אזי **עץ סדור** (הסדר בין הבנים חשוב) T הוא עץ גזירה עבור משתנה $A \in V$ ו G אם:

1. כל צומת ב T מסומן ב $l \in V \cup T \cup \{\varepsilon\}$
2. השורש מסומן ב A (בד"כ $A - S$)
3. כל צומת פנימי (לא עלה) יסומן ב $l \in V$
4. צומת המסומן בε , הוא בן יחיד של אביו
5. לכל צומת המסומן ב $A \in V$ ובניו המסומנים ב $x_1, x_2, ..., x_n$ קיים ב P כלל הגזירה $A \to x_1, x_2, ..., x_n$ (משמאל לימין) , (כאן רואים למה כלל 4 עוזר).

1.0.7 חזית

<u>הגדרה 8.3</u>:

עבור עץ גזירה T , **החזית** של עץ הגזירה היא המחרוזת המתקבלת משרשור הסימונים של העלים משמאל לימין. לדוגמה:



החזית $ET + ba$

1.0.8 דו/חד־משמעי, שמאלי ביותר

<u>הגדרה: 9.2 :</u> נאמר שדקוד חסר הקשר G הוא **דו־משמעי** אם קיימת $z \in L(G)$ שקיימים עבורה שני עצי גזירה שונים (לפחות). דח"ה שאינו דו־משמעי יקרא **חד משמעי.**

<u>הגדרה 9.3</u>: נאמר שסדרת גזירה $A \Rightarrow^* \alpha$ היא **שמאלית ביותר** אם בכל צעד מפתחים את המשתנה השמאלי ביותר בביטוי.

1.0.9 צורה נורמלית של חומסקי

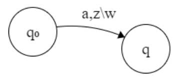
<u>הגדרה 10.2</u>: נאמר שדקדוק ח"ה G הוא **בצורה הנורמלית של חומסקי**, אם קיימים רק כללים מהצורה הבאה ב P :

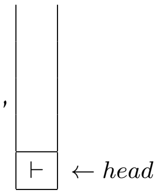
- $A \to BC$ כאשר $A, B, C \in V$
- $A \to a$ כאשר $A \in V$, $a \in T$

שימו לב, שדקודקים כאלה לא יכולים לקבל שפות המכילות את ε , זה לא יפריע לצרכים שלנו, ואפילו יפשט (לכן הורדנו את ε). באופן קצת מפתיע מסתבר שנתן לקבל כל שפה ח"ה אחרת:

1.0.10 אוטומט מחסנית

נתחיל בצורה לא פורמאלית, נציג את החומרה:



- אוטומט רגיל כפי שאנחנו רגילים עם δ - בקרה סופית
- יהיה סרט קלט (אינסופי לימין) $\boxed{x_1}\boxed{...}\boxed{x_i}\boxed{...}$ $\leftarrow head$ כאשר $head$ הוא ראש קורא (בלבד) זז רק ימינה
- ותהיה מחסנית אינסופית :  , כאשר $head$ הוא ראש קורא/ כותב.
- המחסנית פועלת צעד־צעד , ובכל צעד בוחרת את אחד הצעדים המותרים לפי δ .

נעבור להגדרה פורמלית:

<u>הגדרה 12.1</u>

אוטומט מחסנית היא שביעיה $M=\left(Q,\sum,\Gamma,\vdash,F,\delta\right)$ כאשר:

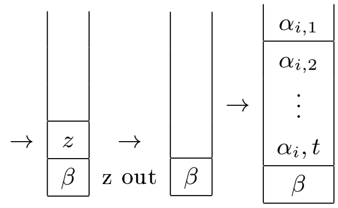
- Q - קב' סופית של מצבים
- $\sum$ - א"ב הקלט
- Γ - א"ב המחסנית
- $q_0\in Q$ מצב התחלתי יחיד
- $\vdash\in\Gamma$ - סימן תחילת המחסנית
- $F\subseteq Q$ קב' מצבים מקבילים ל
- δ : תהיה $\underbrace{Q}_{\text{currnet q}}\times\underbrace{\sum\cup\{\varepsilon\}}_{\text{current note}}\times\underbrace{\Gamma}_{\text{stuck's head}}\rightarrow P\left(\underbrace{a}_{\text{new state}}\times\underbrace{\Gamma^*}_{\text{string}}\right)$
  - Q : זהו המצב הנוכחי
  - $\sum\cup\{\varepsilon\}$: תו נוכחי
  - Γ : התו בראש המחסנית (שימו לב שδ אינה מוגדרת אם המחסנית ריקה)
  - a : מצב חדש
  - Γ^* : מחרוזת שרושמים בראש המחסנית במקום התו הנוכחי
- תמיד δ מחזירה קב' סופית

הערה: למעשה אפשר היה לשנות את ההגדרה ולאפשר לכתוב מחרוזות באורך $0,1,2$ בלבד. למשל. אז לא היינו צריכים את ההגבלה של δ מחזירה קב' סופית.

מפרשים את δ כך עבור:

$$\delta\left(q,\sigma,z\right)=\left\{\left(q_1,\alpha_1\right),....,\left(q_k,\alpha_k\right)\right\} \text{ עבור } \sigma\in\sum$$

- האוטומט בוחר בצורה א"ד $i\in[k]$ עובר למצב חדש q_i מעדכן את המחסנית כך:



הראש של סרט הקלט מתקדם באחד

- אם $\sigma = \varepsilon$ אז האוט' יפעל באותה הצורה אלא שהראש בסרט הקלט, לא מתקדם .

1.0.11 קונפיגורציה, קונפיגורציה עוקבת

הגדרה 12.2:

1. עבור אוט' מחסנית M , נאמר $(q, x\alpha)$ היא **קונפיגורציה** אם : $q \in Q$ - מצב נוכחי , $x \in Z^*$- שארית הקלט , $\alpha \in \Gamma^*$ המחסנית

2. עבור זוג קונפי' עם $a \in \sum \cup \{\varepsilon\}$, $\left\{\begin{array}{c} ID_1 = (q, ax, z\alpha) \\ ID_2 = (P, x, \beta a) \end{array}\right\}$ נאמר ש ID_2 **עוקבת ל** ID_1 (ונסמן ב $(ID_1 \vdash_M ID_2)$ אם קיים ב $\delta(q, a, z)$ הזוג (p, β)

   נגדיר $ID_1 \vdash_M^* ID_2$ אם נתן להגיע מ ID_1 ל ID_2 ב 0 או יותר צעדי חישוב

1.0.12 מצב מקבל, מצב ריקון

כעת נגדיר את השפה ש M מקבל. ישנם שני מודים (שקולים)

הגדרה 12.3: יהי M אוט' מחסנית. נגדיר:

- $L_e(M) = \{x \in \sum^* | \exists p \in Q, \ (q_0, x, \vdash) \vdash_M^* (P, \varepsilon, \varepsilon)\}$
- $L_f(M) = \left\{ x \in \sum^* | \begin{array}{l} \exists p \in Q \\ \alpha \in \Gamma^* \end{array}, \ (q_0, x, \vdash) \vdash_M^* (P, \varepsilon, \alpha) \right\}$

1.0.13 אוטומט מחסנית דטרמינסטי

הגדרה 13.2 : נאמר שאוטומט מחסנית M **אוט' מחסנית דטרמינסטי** אם"ם δ מקיימת:

1. $\forall q \in Q, \sigma \in \sum, z \in \Gamma$ מתקיים $|\delta(q, \sigma, z)| \le 1$
2. $\forall q \in Q, , z \in \Gamma$ אם $|\delta(q, \varepsilon, z)| = 1$ אז לכל $\sigma \in \sum$ מתקיים $\delta(q, \sigma, z) = \phi$

2 דוגמאות

2.0.1 דוגמה ליחס שקילות/מחלקת שקילות.

- תהא $A=\{1,2....,12\}$, נגדיר $R=\left\{(x,y)\in n^2|x=y \mod 6\right\}$
- אז ניתן לתאר היחס כגרף $G_R\left(v=A_1E=\{x,y\}\,|\,(x,y)\in R\right)$

2.0.2 דוגמה חלוקה למחלקות שקילות

1. תהי $L=\sum^*$. מהן מח' השיקלות של R_L ?
   - קיימת מחלקות שקילות אחת $A_1=[\varepsilon]=\sum^*$
   - מדוע? כל (x,y) הוא ביחס R_L כי לכל z $\underbrace{yz\in L}_{true}\iff\underbrace{zx\in L}_{true}$
   - לכן מהגדרת R_L . $(x,y)\in R_L$
2. $L_2=\phi$. מהן מח' השקילות של R_{L_2} ?
   - גם כאן קיימת מח' שקילות אחת $A_1=[\varepsilon]=\sum^*$
   - מדע? כי לכל x,y ולכל z $\underbrace{yz\in L}_{true}\iff\underbrace{zx\in L}_{true}$: סה"כ יוצא $true$ ולכן $(x,y)\in R_{L_2}$

2.0.3 $\{a^nb^n|n\in\mathbb{N}\}$ אינה רגורלית ע"פ משפט נרוד

1. $L_3=\{a^nb^n|n\in\mathbb{N}\}$. מהן מחלקות השקילות שלה?
   - אם נראה שיש לL_3 ∞ מחק' שקילות זה יוכיח ש L_3 לא רגולרית.

הדרך הישירה היא להבין איך נראות מח' השקילות של R_L , ולספור אותן. מה קורה במקרה של L שלנו?

אחרי קצת ניסוי וטעיה, נקבל את החלוקה הבאה למחלקת שקילות: $\{A_{-1},A_0,A_1,A_2,....\}$, כאשר:

- $i\geq 0$, $A_i=\left\{a^{i+x}b^x|x\in\mathbb{N}\right\}$
- ו־ $A_{-1}=\sum^*\setminus\bigcup\limits_{i=0}^{\infty}A_i$ (כלומר כל שאר המחרוזות שלא ניתן להשלים למילה בשפה)

למען הסדר הטוב, נותר להוכיח שזוהי האכן החלוקה למחלקת שקילות ש R_L משרה. ידוע שלכל יחס שקילות, חלוקה זו היא היחידה המקיימת את שלושת הדרישות, מספיק להראות, שאוסף הקבוצות שהצענו אכן מהווה חלוקה כזו.

(א) נראה שזו אכן חלוקה של $\sum^*$ לקב' לא ריקות:
- כל $x\subseteq\sum^*$ אכן שייך לאחת הקב'. ישנם שני מקרים:
  i. $x=a^ib^j$ כך ש $i\geq j$ במקרה זה $x\in A_{i-j}$
  ii. $x=a^ib^j$ כך ש $i<j$ במקרה זה $x\in A_{-1}$
- כל קבוצה אינה ריקה : A_i כאשר $i\geq 0$ לא ריקה למשל $a^i\in A_i$
- A_{-1}לא ריקה למשל $b\in A_{-1}$

(ב) כל הקבוצות זרות בזוגות:
i. קל לראות, כי קבוצות שונות מייצגו הפרשים שונים בין i ל j , ו A_{-1} זה כל השאר, שזר גם להם.

(ג) כעת נוכיח שלכל $B\in A=\{A_{-1},A_0,A_1....\}$ ולכן $x,y\in B$ $R(x,y)$
- נחלק למקרים, אם:
  - $B=A_i$ עבור $i\geq j$ אז: $y=a^{i+w}b^w$, $x^{i+u}b^u$ כאשר $w,u\geq 0$
    * יהיו $z\in\sum^*$ נשים לב ש $xz\in L$ אםם $z=b^i$ וכנ"ל לגבי yz

* $\underline{\text{לכן}}$ לא קיים z שמפריד בין x ל y', כנדרש

- יהו $B = A_{-1}$ $x, y \in B$ מהגדרת B מתקיים שלכל z $xz \notin L, yz \notin L'$ (כי מילים מהצורה $a^l b^k$ כאשר $l \geq k$ לא ניתן להשלים למילה ב L - יותר מדי bים)

* לכן גם במקרה זה לא קיים z מפריד בין x ל y .

• לכן $R_L(x, y)$

(ד) <u>יהיו $B_1 \neq B_2 \in A$ נראה שלכל $x \in B_i$, $y \in B_2$, $(x, y) \in R_L$</u>

• בה"כ ישנם שני מקרים:

i. $B_1 = B_i$, $B_2 = B_j$

- נסמן $x = a^{i+u} b^u$, אשר $u \geq 0$
- $y = a^{i+w} b^w$ כאשר $w \geq 0$
- למשל עבור $z = b^i$ נקבל $xz = a^{i+2} b^{u+i} \in L$, $yz = a^{i+w} b^{j+w} \notin L$ כי $i \neq j$

ii. $B_1 = A_{-1}$, $B_2 = A_i$, עבור $i \geq 0$

- יהיו $x \in B_1$ $y \in B_2$ $a^{i+v} b^v =$, $(v \geq 0)$
- אזי $z = b^i$ מפריד בין x ל y :
- $yz \in L$ $a^{i+u}, b^{i+u} =$, $xz \notin L$ - x לא ניתן להשלמה למילה ב L

• הוכחנו ש A היא אכן חלוקה ש R_L מח' שקילות.

• הוכחנו ש A היא אכן החלוקה ש R_L משרה למחלקת שקילות. בפרט לעניין משפט נרוד

• כיוון ש $|A| = \infty$,קבלנו הוכחה נוספת לכך ש $\{a^n b^n | n \in \mathbb{N}\}$ לא רגורלית באמצעות משפט נרוד.

2.0.4 אינווריאנטי מימין

• $R_1(x, y)$ - הזוגות xy כך ש : $|x| = |y| \mod 3$. $R_2(x, y)$ $x = y$ או $x = y^R$

- מדוע R_2 לא אינ' מימין:

* יהיו $x = 1100$, $y = 0011$ (x, y) אבל עבור $z = 0$ $xz = 11000$ ו $yz = 00110$ ואכן $(xz, yz) \notin R_2$

2.0.5 $L = \left\{ b^i a^{j^2} | i, j \in \mathbb{N} \right\}$ אינה רגולרית בעזרת נרוד

דוגמה: נתבונן בשפה $L = \left\{ b^i a^{j^2} | i, j \in \mathbb{N} \right\} \cup L[a^*]$, שפה זו אינה רגולרית, אבל כן מקיימת את למת הניפוח עם $n = 1$, כלומר למת הנפוח לא תעזור להוכחת אי־רגולריות.

<u>הרעיון:</u> אם ננפח את ה b^i נקבל מילה בשפה, ואם ננפח את ה $a^j \cup a^*$, נשאר עם מילה בשפה.

עדיין ניתן להוכיח אי־רגולריות באמצעות תכונות סגור + למת הניפוח, אבל זה דורש יצירתיות. משפט נרוד מספק גישה שתמיד עובדת (לכל שפה רגולרית). נראה הוכחה באמצעות משפט נרוד.

<u>הוכחה:</u>

הרעיון - כדי לחסוך עבודה, לא ננסה להבין בדיוק החלוקה למח' שקילות ש R_L משרה אלא נוכיח תנאי מספיק לכך ש $index(R_L) > \infty$: נמצא קב' $A \subseteq \sum^*$ <u>אינסופית</u> כך שלכל $x \neq y \notin R_L$, כל מילה $x \in A$ נמצאת במחלקה משלה (כלומר $[x]$ לא מכילה מילים ב A מלבד x) ולכן $index(R_L) \geq |A| = \infty$ (ייתכן שקיימות מחלקות שקילות נוספות שלא נחתכות עם A). נותר למצוא A עבור L

• נציע למשל $A = \left\{ ba^{j^2} | j \in \mathbb{N} \right\}$

• יהיו $x, y \in A$. נסמן $x = ba^{i^2}$, $y = ba^{j^2}$, כאשר $i < j$, נראה שאכן $(x, y) \notin R_L$

• נמצא z מפריד. נקח למשל $z = a^k$ כאשר $k(i+1)^2 - i^2 = 2i + 1$ לכן $xz = ba^{(i+1)^2}$, נשאר בשפה.

• לעומת זאת $yz = ba^{j^2 + 2i + 1}$ ומתקיים:

$$j^2 < j^2 + 2i + 1 < (j+1)^2$$

- כלומר בהכרח, j^2+2i+1 אינו ריבוע שלם.
- לסיכום $xz \in L$, $yz \notin L$, כלומר מצאנו z מפריד ולכן $(x,y) \notin R_l$
- הערה: $z=a^{2j+1}$, שהיה משאיר את yz ב L לא היה עובד באופן כללי, כי i^2+2j+1 עלול להיות ריבוע שלם "רחוק" $\left(<(i+1)^2\right)$

2.0.6 דקדוק שכתוב

דוגמה: תהיה$(S,V=\{S\},T=\{a,b\},P)$, כאשר P :

1. $S \to ab$
2. $S \to aSb$
3. $aSb \to aaSbb$

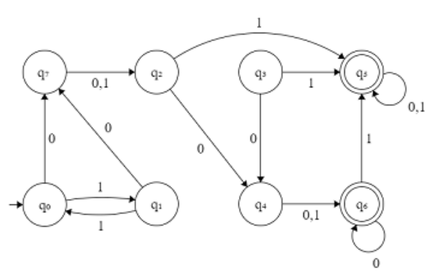
כל מילה בשפה של G תיוצר ע"י סדרת גזירה

לדוגמה $S \overset{2}{\Rightarrow} aSb \overset{3}{\Rightarrow} aaSbb \overset{1}{\Rightarrow} aaabbb$

הסבר: מחליפים תת מחרוזת מסויימת המופיעה בצד שמאל של כלל בצד ימין שלו. כאשר בביטוי האחרון אין משתנים, ולכן סיימנו - זו המילה שנוצרה

2.0.7 פעולת האלגוריתם למינימלזציה

לדוגמה הקלט הבא A:



נבנה טבלה שבה נסמן האם זוג מצבים הופרד ע"י האלגוריתם

נעדכן את (q_i,q_j) אם q_i,q_j כמופרדים בה"כ $i<j$. נסמן גם מהו ה zה המפריד.

למעשה באיטרציה ה i נסמן בדיוק את כל הזוגות שהz המפריד הקצר ביותר בינהם הוא באורך i . בפרט אם באיט' מסוימת לא נמצאו זוגות נגישים, אז נסיים . לא נוכיח אבל לא קשה להראו באינדוקציה)

הערה: בדוגמת הרצה גם נסמן מהם ה z המפרידים למרות שזה לא הכרחי לבניית A' מצומצם

- איטרציה 0 : נסמן את כל הזוגות המפורדים ע"י ε - לא קשה לראות שאלה בדיוק הזוגות (p,q) כך ש $p \in F$, $q \notin F$. נסמן זאת בטבלה

$\backslash$	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7
q_0	$-$							
q_1		$-$						
q_2			$-$					
q_3				$-$				
q_4					$-$			
q_5	ε	ε	ε	ε	ε	$-$		
q_6	ε	ε	ε	ε	ε		$-$	
q_7						ε	ε	$-$

- <u>איטרציה 1</u> : נסמן כל זוג (p,q) שעוד לא סומן כמופרד, ושקיים $a\in\sum$ כך ש $(\delta\left(p,a\right),\delta\left(q,a\right))$ סומנו כמופרדים באיט' קודמת ע"י z נסמן את az כמחרוזת המפרידה

\	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7
q_0	$-$							
q_1		$-$						
q_2	1	1	$-$					
q_3	1	1		$-$				
q_4	0	0	0	0	$-$			
q_5	ε	ε	ε	ε	ε	$-$		
q_6	ε	ε	ε	ε	ε		$-$	
q_7			1	1	0	ε	ε	$-$

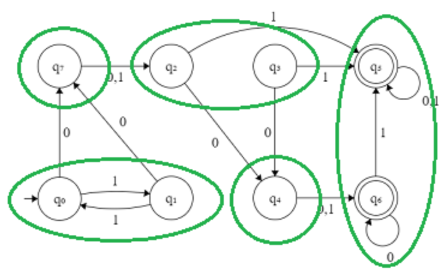
- <u>איטרציה 2</u>: נגלה ש q_7 מופרד מ q_0 ו q_1 ע"י $a=1$

- (q_2,q_1) מסומנים כמופרדים ע"י 1 . נסמן את (q_7,q_0) כמופרדים ע"י $z=11$ בדומה (q_7,q_1)

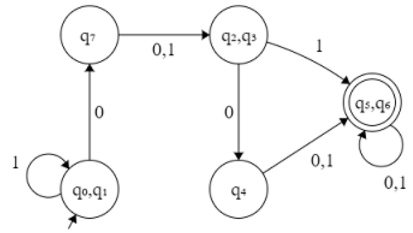
\	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7
q_0	$-$							
q_1		$-$						
q_2	1	1	$-$					
q_3	1	1		$-$				
q_4	0	0	0	0	$-$			
q_5	ε	ε	ε	ε	ε	$-$		
q_6	ε	ε	ε	ε	ε		$-$	
q_7	11	11	1	1	0	ε	ε	$-$

- <u>באיטרציה 3</u> נגלה שלא נוספים זוגות הניתנים להפרדה, נסיק שמצאנו את כל הזוגות הניתנים להפרדה (דורש הוכחה) , ועכשיו נאחד קב' מצבים מקסימלית ללא הפרדות ביניהם.

- כעת A' המצוצמם שיתקבל יראה כך:



- Q' - קב' כל רכיבי הקשירות בגרף בו נחבר בקשת כל זוג מצבים <u>שלא</u> ניתנים להפרדה.
  - סימנו בירוק את הקב' הרלוונטיות בציור. יצא לנו רכיבי קשירות שהם קליקות. זה תמיד המצב כדרוש. קלבנו Q' עם 5 מצבים
  - q'_0 הקב' המכילה את q_0 , $q'_0=\{q_0,q_1\}$
  - F' - הקב' המכילה מצב מקבל של A המוגדר היטב - $F'=\{(q_5,q_6)\}$
  - נעדכן את δ: $\delta(q',a)$ - הנקבע לפי מצב כלשהו $q\in q'$. מסתבר שזה מוגדר היטב (ניתן להוכיח)



וזה האוטומט המינימלי, כנדרש.

2.0.8 דוגמה לבניית דקדוק עבור שפה

<u>הגדרת השפה:</u> שפה של מספרים עשרוניים עם פסיקים בין שלשות של ספרות, מבנה מספר חוקי הוא כזה:

$$\underbrace{\lfloor\ \rfloor}_{\text{1-3 digits}}\ \underbrace{\lfloor\ \rfloor\ \lfloor\ \rfloor\ \lfloor\ \rfloor\ \lfloor\ \rfloor}_{\text{0 or more tripples of digits}}$$

לדוגמה:

$$\underbrace{\lfloor 23\rfloor}_{\text{1-3 digits}}\ \underbrace{\lfloor 173\rfloor\ \lfloor 485\rfloor\ \lfloor 452\rfloor\ \lfloor 976\rfloor}_{\text{0 or more tripples of digits}}$$

כמו כן, נרשה אפסים מובילים. כלומר : $\underbrace{\lfloor 00\rfloor}_{\text{1-3 digits}}\ \underbrace{\lfloor 728\rfloor\ \lfloor 193\rfloor}_{\text{0 or more tripples of digits}}$ אבל $113,7289$ לא חוקי (אך ניתן לתקן)

כעת נבנה דקדוק עבור השפה, הרעיון הוא להגדיר קונספטים ההולכים ומסתבכים. כלומר כל קונספט שנגדיר יוכל להשתמש בקונספטים יותר פשוטים.

1. קונספט של ספרה: $N_1 \to 0|1|...|9$ (קיצור כתיבה עבור כמה כללים עד צד שמאל משותף)
2. קונספט של מס' דו־ספרתי: $N_2 \to N_1N_1$
3. קונספט של מס' תלת־ספרתי: $N_3 \to N_1N_1N_1$
4. קונספט של "בלוק מוביל": $N_{1-3} \to N_1|N_2|N_3$
5. קונספט של סדרות שלשות לא ריקה: $L \to N_3|L,N_3$
6. קנוספט של מספר כללי: $N \to N_{1-3}|N_{1,3},L$ (N משתנה התחלתי)

דוגמה, כדי לגזור את הרצף: $123,456,789$

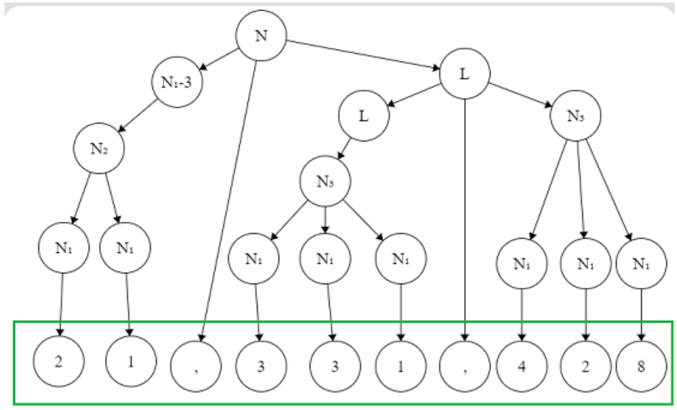
נבצע את סדרה הגזירות הבאה:

$$L \overset{5}{\Rightarrow} L,N_3 \overset{5}{\Rightarrow} L,N_3,N_3 \overset{5}{\Rightarrow} N_3,N_3,N_3 \overset{3}{\Rightarrow} ... \overset{1}{\Rightarrow} 123,456,789$$

תזכורת לסימון: $\alpha \Rightarrow^i \beta$, פרושו i הפעלות של קונספט, $\alpha \Rightarrow^* \beta$ איטרצית הפעלות

שימו לב שבדקדוק שלנו, יש בדיוק משתנה אחד מצד שמאל של כל כלל גזירה (דקדוק כזה נקרא חסר הקשר) בדקדוקים כאלה נח לפעמים לחשוב ולתאר גזירות ע"י עץ גזרה במקום סדרת גזירה. למעשה עץ גזירה מתאר הרבה סדרות גזירה שכולן שונות רק עד כדי סדר פיתוח המשתנים. (בדקדוק כללי, שבו בצד שמאל יתכנו מ חרוזות כלליות, לא ניתן תמיד לעבוד עם עץ גזירה).

לדוגמה: נגזר את $21,331,428$ (נתחיל מלמעלה למטה)



כאמור העץ מתאר הרבה סדרות גזירה השונות רק עד כדי סדר פתוח המשתנים , לדוגמה:

$$N \Rightarrow N_{1-3}, L \Rightarrow N_2, L \Rightarrow N_2, L, N_3 \Rightarrow^* 21, 331, 428$$

2.0.9 דוגמה 8.1 : דקדוק לשפה $L = \{x \in \{a,b\}^* | \#_a(x) = \#_b(x)\}$ והוכחת נכונות

ראיתם בתרגיל קנדידט לדקדוק עבור השפה מהצורה $S \to \varepsilon | aSbs | bSaS$

כאן הבניה היא מעניינת ולא טריויאלית, כי היא מתבססת על מבנה רקוריסבי של מילים ב L שאינו ברור מיידית. נדגים את רעיון הבניה דרך הוכחת הנכונות

הוכחת נכונות, (כיון מענין): $L \subseteq L(G)$, באינדוקציה על אורך המילה.

<u>בסיס:</u>

- תהי x מילה באורך $i = 0$ כלומר $x = \varepsilon$ אכן $x \in L$.
- ובאמת $S \Rightarrow \varepsilon$

<u>צעד:</u> נניח עבור כל $i' < i$ ונוכח עבור $i > 0$, למעשה $i' \geq 2$ כי הוא בהכרח זוגי)

<u>אבחנה מרכזית:</u>

כל $x \in L$ שאורכו i , נתן לפרוק מהצורה $x = aUbY$, כאשר $U \in L$ או $x = bUaY$ כאשר $U \in L$

זה יתן לנו תובנה על המבנה הקונסטרקיבי של x , שיאפשר לנו למצוא לו סדרת גזירה ב G .

נוכיח את האבחנה. נמתקד במקרה ש x מתחיל ב a (המקרה הסימטרי דומה) .

- נתבונן ברישא w <u>הקצרה ביותר</u> שאינה ε של x השייכת ל L , כלומר $\#_a(w) = \#_b(w) = t$ שאינה ε
  - קיימת כי במקרה הגרוע $w = x$
- כיצד w נראית?_ $w = \underbrace{a}_{\text{x stat with a}} \quad U \underbrace{b}_{*}$
- w * חייבת להסתיים ב b , כי זו הרישא הקצרה ביותר עם $\#_a(w) - \#_b(w) = 0$. כיון שש w מתחילה ב a כדי להגיע לראשונה ל 0 חייבים לקרוא b בצעד המגיע ל 0
- כיון ש $\#_a(w) = \#_b(w)$ נסיק ש : $\#_a(U) = \#_b(U)$, וגם $\#_a(x) = \#_b(x)$ עבור $x = aUbY$ (בנוסף)
- נסיק ש: $\#_a(Y) = \#_b(Y)$. כלומר $U, Y \in L$
- מש"ל הוכחת אבחנה.

כעת נראה כיצד האבחנה גוררת ש $L \subseteq L(G)$

יהי $x \in L$ $x \neq \varepsilon$ מהאבחנה קיים פירוק (בה"כ שמתחיל ב a) $x = aUbY$

אז מהנחת האינדוקציה נוכל לגזור מS את U, ואת Y

$$S \Rightarrow aSbS \Rightarrow^* aUbS \Rightarrow^* aUbS \Rightarrow aSbS$$

וקיבלנו סדרת גזירה חוקית של x מ S לכן $x \in L(G)$, כנדרש.

כיוון שני: $L(G) \subseteq L$. נוכיח באינדוקציה על אורך הגזירה בכיוון הזה בד"כ נח לפרק את סדרת הגזירה ולהביט בצעד האחרון.

<u>נוכיח טענה עזר (חזקה יותר) : אם $S \Rightarrow_G^* \alpha$, אז בהכרח $\alpha \in \{S, a, b\}^*$ וגם $\#_a(\alpha) = \#_b(\alpha)$,</u>

נשים לב שהטענה גוררת מיידת $L(G) \subseteq L$, כי עבור α טרמנילית α לא מכילה Sים ומתקיים ש: $\#_a(\alpha) = \#_b(\alpha)$

הוכחה - באינדוקציה על אורך הגזירה

<u>בסיס:</u> $i = 0$ מתקיים $S \Rightarrow^0 \alpha$ אז בהכרח $\alpha = \varepsilon$ ואכן $\alpha = \varepsilon S$ ומתקיים ש $\#_a(\alpha) = \#_b(\alpha)$

<u>צעד:</u> נניח עבור i ונוכיח עובר $i + 1$

- יהי $S \Rightarrow^{i+1}$ נרשום את סדרת הגזירה בתור $S \Rightarrow^i \beta \Rightarrow a$,
- מהנחת האינדוקציה $\beta \in \{S, a, b\}^*$ וכן $\#_a(\alpha) = \#_b(\alpha)$.
- כעת נפצל למקרים עבור הצעד האחרון:

1. אם מפעילים $S \to \varepsilon$ מס' ה aים וה bים נשמר
2. אחרת נפעיל מס' הaים וה bים גדל ב1 ולכן נשאר שווה

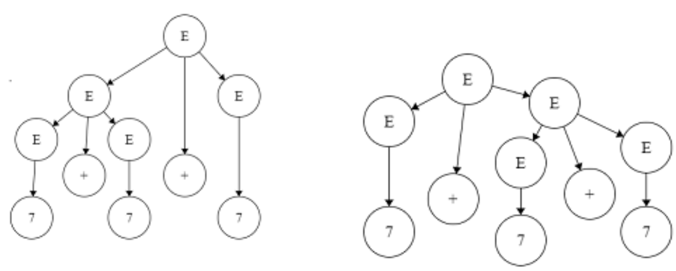
2.0.10 דוגמא לדקדוק דו־משמעי + חד משמעי + שמאלי ביותר

בהרבה מקרים היינו רוצים שלכל מילה בדקדוק יהיה עץ גזירה יחיד. מדוע? זה לא משפיע על השפה של דקדוק, אבל למשל בהקשר של שפות תכנות $interpeter$ מחשב את הערך שמחזרה תוכנה על סמך המשנה של עץ הגזירה שלו.

לדוגמה נתבונן בדקדוק $E \to E + E|7$ - זה דקדוק שמייצר סכומים של 7יות . הדקדוק הזה הוא דו משמעי במובן שקיימות מילים עם יותר מעץ גזירה אחד, לדוגמה:

עבור $7 + 7$ יש עץ אחד. ולמשל זו סדרת גזירה: $E \Rightarrow E + E \Rightarrow 7 + E \Rightarrow 7 + 7$

אבל עבור $7 + 7 + 7$ ישנם שני עצים:



כאן אם ננסה לחשב את הערך של העץ (מחשבים רקורסיבית את הערך של הבנים ואז מפעילים את הפעולה בשורש)

למשל בעץ השמאלי : $7 + 7 = 14$ ואז נקבל $14 + 7$ (באופן סימטרי לעץ הימני)

בגלל ש $+$ היא פעולה אסוציאטיבית, לא הייתנה לנו בעיה. לעומת זאת, אם היינו מחליפים את $+$ ב $-$ (לא אסוציאטיבי) הייתה לנו בעיה:

- בעץ השמאלי היינו מקבלים $(7 - 7) - 7 = -7$
- בעץ הימני היינו מקבלי $7 - (7 - 7) = 7$

במקרה כזה ה $interpeter$ צריך להתמודד בעצמו (איכשהו) . למשל עם חוקי קדימות או לקבוע אסוציאטיביות לפעולה בעצמו. לכן היינו רוצים לבנות דקדוק חד משמעי במידת האפשר. כפי שתראו במטלה, לפעמים אי אפשר.

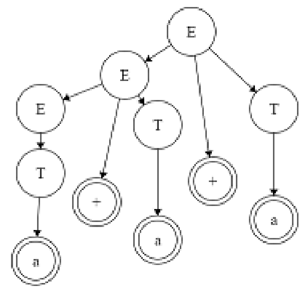
על כן נציע את הדקדוק השקול הבא (לדקדוק $E \to E + E|a$)

יהיה: $G = (E, V = \{E, T\}, T = \{a\}, P)$

כאשר: P:

- $E \to E + T|T$
- $T \to a$

לא קשה לראות ש G שקול לדקדוק המקורי ניתן להוכיח זאת ע"י ניסוח מפורש של השפה שלהם. והכחה שהשפה של כל דקדוק שווה לה. בבית תוכיחו עבור מקרה יותר מסובך שוויון של שפות $L(G), L(G)'$ מבלי לנסח במפורש את L (מעניין) כעת נוכיח רק ש G חד משמעי נתחיל מדוגמה עבו $a + a + a$ קיים עץ הגזירה:



והוא יחיד!

אינטואיטיבית, הדקדוק יהיה חד משמעי כי הכנסנו אסימטריה שבה צד ימין מאוד פשוט (בפרט לא מכיל +ים)

שמאלי ביותר

לדוגמה בדקדוק המקורי: $E \Rightarrow E + E \Rightarrow a + E \Rightarrow a + a$ היא שמאלית ביותר אבל : $E \Rightarrow E + E \Rightarrow E + a \Rightarrow a + a$ אינה שמאלית ביותר.

2.0.11 דוגמה 1: השפה $L = \{a^n b^n c^n | n \in \mathbb{N}\}$ אינה ח"ה ע"פ למת הניפוח

נוכיח ש L_1 אינה ח"ה בעזרת למת הנפוח נניח בשלילה ש L_1 ח"ה

- יהי n הקבוע המובטח בלמת הנפוח. נקח $z = a^n b^n c^n$
  - אכן $z \in L$ ומתקיים ש : $|z| = 3n \geq n$
  - יהי $z = uvwxy$ הפירוק המובטח ע"י הלמה
  - נתבונן בכל הפירוקים המקיימים את $1, 2$ ונוכיח שכל אחד מהם אינו מקיים את 3 ונגיע לסתירה. ישנם 5 מקרים:

$$\lfloor a^n \rfloor \lfloor b^n \rfloor \lfloor c^n \rfloor$$

1. : $vwx \in a^n$
2. $vwx \in b^n$
3. $vwx \in c^n$
4. $vwx \in a^n \cup b^n$
5. $vwx \in b^n \cup c^n$

  - <u>מקרה ראשון</u>: נניח שהפירוק הוא מסוג $1, 2$ או 4 בכל המקרים הללו vwx איננו נוגע ב c^n, ניקח לדוגמה $i = 2$ נקבל:

$$z^{(i)} = z^{(2)} = g \cdot c^n$$

* כאשר $g \in \{a, b\}^*$ ואורכה (מתכונה 2)

$$2n + (i-1)|vx| \geq 2n + |vx| \geq 2n + 1$$

* לכן גם אם במקרה $z^{(2)}$ מהצרוה $a^x b^y c^z$ לא יתכן ש $x = y = z$ כי $z = n$ ו y או $n < x$ (כי $x + y > 2n$)

– מקרה שני: מקרים $2,3,5$ מתקיימים. כאן הנתוח הוא סימטרי למקרה הראשון (במקום ה c^n , לא נוגע ב a^n)

אותה הוכחה בדיוק תעבוד גם כדי להראות שהשפה הבאה אינה ח"ה $L_1 = \{x \in \{a,b,c\}^* | \#_a(x) = \#_b(x) = \#_c(x)\}$ אבל אם היינו לוקחים $z = a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}} c^{\frac{n}{2}}$, אז ההוכחה המקורית ניתנת לתקון, כך שדברים יעבדו, אבל כאן לא נצליח להוכיח (ה־z הנ"ל לא מתאים). למרות ש $z \in L$, $|z| = \frac{3}{2}n \geq n$ לא נצליח להוכיח , כי דוקא קיים פירוק. נבחר את הפירוק הבא:

$$\left\lfloor a^{\frac{n}{2}} \right\rfloor \left\lfloor b^{\frac{n}{2}} \right\rfloor \left\lfloor c^{\frac{n}{2}} \right\rfloor = \underbrace{\ldots\ldots}_{u}\underbrace{aab}_{v}\ \underbrace{\ldots\ldots}_{w=b^{\frac{n}{2}}-2}\ \underbrace{bcc}_{x}\underbrace{\ldots\ldots\ldots}_{y}$$

- הפירוק מקיים את $1,2,3$:

1. $|vwx| = \frac{n}{2} + 4 \leq n$ ־ זה נכון כי בה"כ נתן להגדיל את n כרצוננו כלומר אם L מקיימת את הלמה עבור n, אז היא מקיימת אותה עבור $n' \geq n$
2. $|vx| = 6 \geq 1$
3. יהי $i \geq 0$ מתקיים $z^{(i)} = uv^iwx^iy$
   - מס' ה aים שווה ל $\frac{n}{2} = \#_a(vx)(i-1) = \frac{n}{2} + 2(i-1)$
   - מס' ה bים ב $z^{(i)}$ שווה ל $\frac{n}{2} + (i-1)\#_b(vx) = \frac{n}{2} + 2(i-1)$
   - וכנל לגבי ה cים . כלומר $z^{(i)} \in L$

   זה מראה לנו שצריך להיזהר בבחירת z.

2.0.12 דוגמה 2 : $L_2 = \left\{ a^{n^2} | n \in \mathbb{N} \right\}$, אינה ח"ה ע"פ למת הניפוח

נוכיח ש L_2 אינה ח"ה בעזרת למת הנפוח. נניח בשלילה ש L_2 ח"ה ויהי n הקבוע המובטח ע"י הלמה. יהי $z = a^{n^2}$ אכן $z \in L$ ומתקיים ש : $|z| = n^2 \geq n$ יהי $z = uvwxy$ הפירוק המובטח ע"י הלמה. נסמן

$$u = a^{k_1}, v = a^{k_2}, w = a^{k_3}, x = a^{k_4}, y = a^{n^2 - \sum_{i=1}^{4} k_i}$$

נבחר $i = 2$ יתקיים ש:

$$z^{(2)} = a^{n^2 + (2-1)|vx|} a^{n^2 + k_2 + k_4}$$

מצד אחד:

$$|z^{(i)}| = n^2 + \overbrace{k_2 + k_4}^{|vx|} \leq n^2 + \overbrace{k_2 + k_3 + k_4}^{|vwx|} \leq= n^2 + 2n + 1 = n^2 + n$$

מצד שני:

$$n^2 + k_2 + k_k = |z^{(2)}| > n^2 + 1$$

כי $|vx| \geq 1$ מתכונה 2

קיבלנו ש $z^{(2)}$ נמצא ממש בין שני קבועים n^2 , $(n+1)^2$ ולכן בעצמו אינו ריבוע שלם.

הערה 1: הדוגמה מראה לנו שבחירת i לפעמים לא טרויאלית (הסתמכנו חזק על ערך i הספציפי, שהיה מספיק קטן. גם $i = 0,3$ היה עובד, ערכים אחרים לא בהכרח).

הערה 2: נשים לב ש**במקרה של שפות אונאריות, אם שפה מקיימת את למת הנפוח לשפות חסרות הקשר אז היא גם מקיימת את למת הנפוח לשפות רגולריות**. בעצם (שקול לוגית) אם למת הנפוח עובדת כדי להוכיח ששפה אונארית נתונה אינה ח"ה , אפשר להוכיח עם הלמה לשפות רגורלית שהיא קצת יותר פשוטה זה נכון כי $\{a\}^*$ היא קומטטיבית לשרשור מחרוזות ־ פירוק $uvwxy$ ניתן להחליף בפירוק $\underbrace{\varepsilon}_{u'}\underbrace{(vx)}_{v'}\underbrace{wuy}_{w'}$

דוגמה 3 : שפה $L_3 = \{ww|w \in \{a,b\}^*\}$ אינה ח"ה ע"פ למת הניפוח

נוכיח ש L_3 אינה חסרת הקשר באמצעות למת הנפוח . נניח בשלילה שכן, ויהי n המובטח מהלמה :

<u>ניסיון 1:</u>

נקח את $z = a^n b a^n b$. זה לא עובד כי כאן דוקא קיים פירוק מתאים . $y = a^{n-1}, u = a^{n-1} = v = a, w = b, x = a$ (לבדוק בבית שהפירוק עובד)

<u>ניסיון 2:</u>

נקח $z = a^n b^n a^n b^n$ יהי $z = uvwxy$ הפירוק המובטח מהלמה. ישנם שלושה מקרים:

$$\lfloor a^n \rfloor \lfloor b^n \rfloor \lfloor a^n \rfloor \lfloor b^n \rfloor$$

1. $vwx \in a^n b^n$
2. $vwx \in a^n b^n$
3. $vwx \in b^n a^n$

אלה המקרים האפשרים כי $|vwx| \le n$ מתכונה 1

<u>מקרה 1 :</u>

נבחר $i = 2$

$$4n + 1 \overset{2}{\le} \left|z^{(2)}\right| = 4n + |vx| \overset{1}{\le} 5n$$

האבחנה העיקרית היא שלכל צורת מיקום של ה vwx , המילה $z^{(2)}$ מסתיימת ב $b^n a^n b^n$: זה קורה גם אם v או x יפלו בין a^n ל b^n הראשונים.

לדוגמה $a^n b^n$ $\quad \underbrace{a^n b^n}_{\underbrace{ab}_{v}\,\underbrace{bbb,,}_{wx}}$ ונניח ש $\Leftarrow$ $z^{(2)} = a^n babb^{n+|x|} a^n b^n$

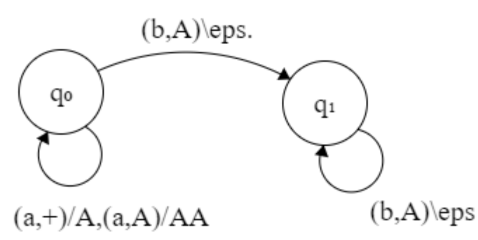
לכן החצי השני של $z^{(i)}$ בהכרח מתחיל ב b (מהצורה $a^n b^n$ $b^{\frac{|vx|}{2}}$) אבל המילה מתחילה בהכרח ב a (לא משנה מה המקום של vwx לכן שני החצאים לא שווים

<u>מקרה 3</u> : סימטרי

<u>מקרה 2:</u> בשיעור הבא

2.0.13 אוטומט מחסנית ל $\{a^n b^n | n \in \mathbb{N}\}$

<u>דוגמה 13.1:</u> נראה בניה מלאה של אוט' מחסנית עבור השפה $L = \{a^n b^n | n \ge 1\}$, כפי שהסברנו את רעיון הבניה בשעור הקודם, האוטומט ייקבל באמצעות ריקון כלומר $L = L_e(M)$



- נגדיר מצב q_0 - מצב הכנסת aים
- נגדיר מצב q_1 - מצב התאמה
- כל מה שלא מפיע בגרף למשל $\delta(q_1, a, A)$ מניחים ש δ מחזירה ϕ (בכל ייצוג - קצור כתיבה)

לא נוכיח נכונות (למרות שלא קשה) נראה דוגמת הרצה: הרצה על $x = aabb$,

$$(q_0, aabb, \vdash) \vdash_M (q_0, abb, A) \vdash_M (q_0, bb, AA) \vdash_M (q_0, b, A) \vdash_M (q_1, \varepsilon, \varepsilon)$$

x התקבלה$\Leftarrow$ קונפיגורציה מתקבלת$\Leftarrow$

נראה שאכן המילים הבאות לא מתקבלות

- ε - אין מסע ε והמחסנית לא ריקה
- $aabb|b$ המחסנית תתרקון עד | ותתקע
- $aab|a$ נתקע ב | , המחסנית לא ריקה עדיין ולא נוכל להמשיך לקרוא את המילה

2.0.14 אוטומט מחסנית ל $L = \{wcw^R | w \in \{a,b\}^*\}$

דוגמה נוספת: עבור $L = \{wcw^R | w \in \{a,b\}^*\}$ ניתן לבנות אוט' מחסנית באופן דומה: נקבל ע"י ריקון. עד שנראה c נכניס את התוים למחסנית, ואחרי c נוציא ונבדוק התאמה.($\delta(q_0, c, z) = \{(q_1, z)\}$)

2.0.15 שפה בה אוטומט דטרמינסטי לא מספיק

כמו שראיתם בתרגול אוט' , מחסנית דטר' לא תמיד מספיק. לדוגמה עבור $L = \{ww^R | w \in \{a,b\}^*\}$ חייבים אוט' אי-דטרמינסטי. הבעיה היא שלא ברור מתי המילה מסתימת (במהלך הקריאה של המילה) . למעשה נרצה לקבל כל רישא של מה שכתוב בסרט הקלט השייכת ל L במסלול כלשהו. לדוגמה $\underbrace{abba\,\underbrace{abba}}$ נרצה לדעת לקבל את שני החלקים. ביתר פירוט, בהגדרת δ , בכל צעד ב q_0 נגדיר $\delta(q_0, \sigma, \sigma) = \{(q_0, \sigma), (q_1, \varepsilon)\}$ נפרש את σ בתור אות ראשונה במחסנית השניה.

2.0.16 אוטומט עם מצבים מקבלים

עד כה ראינו דוגמאות בהן יותר נח לעבוד במוד ריקון. נראה דוגמה שבה יותר נח לעבוד עם מצבים מקבלים.

<u>דוגמה 13.3</u>

השפה $L_3 = \left\{ wcw' \middle| \begin{matrix} w \in \{a,b\}^* \\ w' \neq w^R \end{matrix} \right\}$, גם כאן נשתמש במחסנית כדי להתאים את w שלפני c ל w' שאחרי c , דוקא אם וכאשר אי התאמה נחליט שהמילה וכל ההמשכים שלה יתקבלו. ישנם גם מספר מקרי קצה לטפל בהם.

- $M = (Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \sum = \{a,b,c\}, \Gamma = \{a, b, \vdash\}, \delta, q_0, \vdash, F = \{q_2, q_3\})$

  δ :

  - העתקת אות ראשונה , $\sigma = \{a,b\}$, $\delta(q_0, \sigma, \vdash) = \{(q_0, \sigma \vdash)\}$, נשאיר יהיה שימושי בהמשך בחלק מהמקרים.
  - מוד העתקה - המשך (לא אות ראשונה) : $\delta(q_0, \sigma_1, \sigma_2) = \{(q_0, \sigma_1, \sigma_2)\}$ עבור $\sigma_1, \sigma_2 \in \{a,b\}$
  - מעבר למצב השוואה : $\delta(q_0, c, \sigma) = \{(q_1, \sigma)\}$ עבור $\sigma \in \{a,b\}$
  - המשך מצב השוואה : $\delta(q_1, \sigma, \sigma) = \{(q_1, \varepsilon)\}$ $\sigma \in \{a,b\}$
  - בשיוויון מופר $\delta(q_1, \sigma_1, \sigma_2) = \{q_2, \sigma_2\}$ $\sigma_1 \in \sum, \sigma_2 \in \{a,b\}, \sigma_1 \neq \sigma_2$ לא משנה כל עוד לא נכתוב ε , נרצה שמעכשיו תמיד נקבל (בפרט נוכל להמשיך לקרוא את המילה)
  - המשך במצב מקבל: $\delta(q_2, \sigma, Z) = \{(q_2, Z)\}$ $\forall \sigma \in \sum \cup \{\varepsilon\}, z \in \Gamma$, ה Z כדי לא לרוקן.

- <u>מקרי קצה:</u>

  - קלט $wcw^R x$ עבור $x \neq \varepsilon$ אז: $\delta(q_1, \vdash) = \{(q_2, \vdash)\}$ $\sigma \in \{a,b\}$
  - קלט $xwcw^R$ עבור $x \neq \varepsilon$ $\delta(q_1, \varepsilon, \sigma) = \{(q_3, \sigma)\}$ $\sigma \in \{a,b\}$ מ q_3 לא יהיה המשך.

3 משפטים

3.1 למת הניפוח לשפות רגולריות

התכונה היא כזו (לכל L רגולרית) קיים n כך שלכל $z \in L$ שאורכה $\leq n$ קיים פירוק $z = xyw$ כך ש:

1. $|xy| \leq n$
2. $|y| \geq 1$
3. לכל $i \geq 0$ $xy^i w \in L$

3.2 חלוקה למחלקות שקילות

כל יחס שקילות מגדיר חלוקה של A לקב' לא ריקות הנקראות מחלקות שקילות. נסמן את החלוקה .... $A_1, A_2,$ המקיימות:

1. לכל A_i ולכל $x, y \in A_i$, $R(x, y)$
2. לכל $A_i \neq A_j$ ו $x \in A_i$ $y \in A_j$, $(x, y) \notin R$

<u>הוכחה:</u>

- תהיה $A = \{x_1, x_2, ...\}$
- ויהיו מחלקות השקילות ..... , $A_1 = [x_1]\,, A_2 = [x_2]$
- נרצה להראות שהקבוצות A_1, A_2 לא ריקות ומהוות חלוקה של A (כלומר זרות אחת לשניה)
  - חלוקה על כל A + לא ריקות - נובע מהרפלקסיביות
  - זרות:
  - יהיו A_i, A_j אם הן זרות סיימנו.
  - על כן נניח בשלילה ש $A_i \neq A_j$ ואינן זרות.
  - בה"כ יהיה $x_k \in A_i \wedge x_k \notin A_j$
  - מטרנזיטביות $A_k \in A_j$ וזו סתירה.

3.3 משפט 1.2 - משפט נרוד:

תהי $L \subseteq \sum^*$ שפה. אז: L רגולרית $\Longleftrightarrow$ יש ל R_L מספר סופי של מחלקות שקילות (בפרט R_L הוא יחס שקילות)

<u>נעבור לאינטואציה של הוכחת משפט נרוד:</u> נתבונן בשפה שהיא אכן רגולרית L אז יש לה אס"ד $A = (\sum, Q, ...)$
נניח בה"כ של A אין מצבים שאינם ישיגים מ q_0
נתבונן בחלוקה הבאה של $\sum^*$ ש A מגדיר:

$$\sum^* = \bigcup_{i=0}^{m} A_i$$

כאשר $Q = \{q_0, q_1, ..., q_m\}$, כאשר $A_i = \left\{x \in \sum^* |\hat{\delta}(q_0, x) = q_i\right\}$
במילים - A_i היא קב' כל המחרוזות המובילות (את A) מ q_0 ל q_i.
קל לראות שה A_i לא ריקים (בגלל שכל q_i ישיג)
נשים לב שהחלוקה הזו מקיימת את התכונות הבאות:

1. לכל A_i בחלוקה ו $x,y \in A_i$: $y \in L \iff x \in L$ (נקבע ע"י השאלה האם $q_i \in F$)
2. לכל A_i ו $x,y \in A_i$ ו $z \in \sum^*$ מתקיים ש: $yz \in L \iff xz \in L$ כי $\hat{\delta}\left(q_0, xz\right) = \hat{\delta}\left(q_0, yz\right) = \hat{\delta}\left(q_i, z\right)$ אותו המצב קובע שייכות ל L .

במילים אחרות, החלוקה שהגדרנו מגדירה יחס שקילות R_L המקיים את התכונות 1.2 , הרעיון הוא להגדיר יחס שתלוי רק ב L, לא דורש קיום A , כי נרצה שיהיה מגודר בין אם L רגולרית ובין אם לא, ושדורש רק את קיום תכונות 1.2 . בצורה מופרשת נגדיר את $R_L = \left\{(x,y) \in \sum^* | \forall z \; xz \in L \iff yz \in L\right\}$

- בכיוון אחד, נוכיח ש R_A תמיד מעדן את R_L , כיוון של R_A יש מס' סופי של מחלקות שקילות נסיק שגם ל R_L יהיה מס' סופי (כגודל Q) נסיק שגם ל R_L יהיה מס' סופי של מח' שקילות.
- בכיוון השני, (יותר עדין) כלומר לא ברור מראש שאם ל R_L יש מס' סופי של מח' שיקלות גם יש אוטומט סופי עבור L , למזלנו זה נכון ואכן נצליח לבנות אוטומט כזה.

הוכחת נרוד

3.3.1 למה המגדירה תכונות של R_A

למה 3.1 : יהי A DFA . אזי R_A הוא יחס המקיים את:

1. R_A **מעדן את** $\widetilde{R}_{L(A)}$
2. R_A **הוא אינווריאנטי מימין.**

הוכחה:

בשעור הקודם הוכחנו ש R_A הוא יחס שקילות נוכיח את 1 :

- נקח, $(x,y) \in R_A$ כלשהם. אז מתקיים ש:
  - $x \in L(A) \Leftrightarrow \hat{\delta}(q_0, x) \in F = q \in F$
  - וגם $y \in L(A) = \hat{\delta}(q_0, y) \in F$
- אבל בגלל ש $(x,y) \in R_A$, מתקיים ש: $\hat{\delta}(q_0, x) = \hat{\delta}(q_0, y)$
- כלומר השייכות של x ו y ל L נקבעת ע"י האם $q \in F$ (אותו ל q לשניהם) , לכן או ששניהם ב L או ששניהם לא ב L
- לכן $\widetilde{R}_{L(A)}(x,y)$

נוכיח את 2 :

- יהיו $(x,y) \in R_A$ ו $z \in \sum^*$ צ"ל: $(xz, yz) \in R_A$
- ואכן $\hat{\delta}\left(q_0, xz\right) = \hat{\delta}\left(\hat{\delta}\left(q_0, x\right), z\right) \overbrace{=}^{(x,y) \in R_A} \hat{\delta}\left(\hat{\delta}\left(q_0, y\right), z\right) = \hat{\delta}\left(q_0, yz\right)$
- לכן: $(xz, yz) \in R_A$

3.3.2 משפט האפיון של R_L

למה 3.2 : R_L הוא יחס שקילות המקיים :

1. R_L **איוונריאנטי מימין**
2. R_L **מעדן את** $\widetilde{R_L}$

3. **כל יחס שיקלות** $R \subseteq \sum^* \times \sum^*$ **המקיים את** $1,2$ **מעדן את** R_L

במילים, R_L **משרה את החלוקה הכי גסה על פני כל היחסים המקיימים את** $1,2$ **בו־זמנית (בפרט קיימת חלוקה כזו)**

הוכחה:

1. הוכחת 1: יהיו $(x,y) \in R_L$ ו $z \in \sum^*$ כלשהם נוכיח ש $(xz,yz) \in R_L$, כלומר צ"ל (הגדרת R_L) שלכל $u \in \sum^*$ מתקיים $xzu \in L \Leftrightarrow yzu \in L$
   - נקבע $u \in \sum^*$ כלשהו. מתקיים ש: $x(zu) \in L \Leftrightarrow y(zu) \in L$
   - כיון ש $(x,y) \in R_L$. מאסוציאטיביות של שרשור מחרוזות נובע ש: $(xz)\,u \in L \Leftrightarrow (yz)\,u \in L$
   - כיון ש y היא מחרוזת כלשהי נסיק ש $(xz,yz) \in R_L$
2. נוכיח ש R_L מעדן את $\widetilde{R_L}$. נקבע $(x,y) \in R_L$ כלשהם ונוכיח ש $(x,y) \in \widetilde{R_L}$.
   - מהגדרת R_L מתקיים : $\forall z\ xz \in L \Leftrightarrow yz \in L$
   - נבחר $z = \varepsilon$ ונקבל $x \in L \Leftrightarrow y \in L$ כלומר $(x,y) \in \widetilde{R_L}$, מהגדרת $\widetilde{R_L}$
3. יהי $(x,y) \in R$.צ"ל ש: $(x,y) \in R_L$
   - נקבע $u \in \sum^*$ כלשהו ש $xu \in L \Leftrightarrow yu \in L$
   - כיצד נוכיח זאת? נשים לב ש $(xu,yu) \in R$, כיוון ש R אינווריאנטי (נקבע $z = u$ בהגדרת אינ' מימין).
   - בנוסף, כיון ש R מעדן את $\widetilde{R_L}$ נקבל $\widetilde{R_L}(xu,yu) \Leftarrow$(מהגדרת $\widetilde{R_L}$) $xu \in L \Leftrightarrow yu \in L$

3.3.3 למה 3.3 ־ כיוון ראשון: תהי L רגולרית $\Leftarrow$ $index(R_L) < \infty$ (מס' מחלקות השקילות

הוכחה:

- יהי A אס"ד כך ש $L(A) = L$ (קיים כזה כי L רגולרית)
- מלמה 3.1, R_A מעדן את $\widetilde{R}_{L(A)}$ ואינוויראנטי מימין
- מלמה 3.2 , R_A מעדן את $R_{L(A)}$ אבל $R_{L(A)} = R_L$ (מבחירת A) , לכומר R_A מעדן את R_L
- בנוסף, מחלקות השקילות של R_A מתאימות לתת קבוצה $Q' \subseteq Q$ הישיגים מ q_0
- כלומר $index(R_A) = |Q'| \le |Q| < \infty$
- אבל מכייון ש R_A מעדן את R_L מתקיים ש: $\infty > index(R_A) \ge index(R_L)$, כנדרש.

3.3.4 למה 3.4 ־ כיוון שני: תהי $L \subseteq \sum^*$, כך ש $\infty > index(R_L)\Leftarrow$ L רגולרית

הוכחה

- נבנה אוטומט A כך ש $L(A) = L$, נסמנו ב $A = (\sum, Q, q_0, F, \delta)$, נראה שמוגדר היטב:
  - נגדיר $Q = \left\{[x]\,|x \in \sum^*\right\}$ (קבוצת מחלקות השקילות)
    * נשים לב ש Q סופית (למרות ש $\sum^*$ אינסופית) , כי ב Q, כפי שהגדרנו אותה יש הרבה כפילויות.
  - נגדיר $q_0 = [\varepsilon]$
  - נגדיר $F = \{[x]\,|x \in L\}$. נראה ש F אכן מוגדרת היטב:
    * נתבונן במצב $[x_1] = [x_2]$ בפרט x_1, x_2 באותה מחל' שקילות של R_L לכן $R_L(x_1,x_2)$
    * כיווון ש R_L מעדן את $\widetilde{R}_L$ מתקיים $x_2 \in L \Leftrightarrow x_1 \in L$ כלומר $[x_2] \in F \Leftrightarrow [x_1] \in F$

– נגדיר δ : בעבור $\forall a\in\sum,\forall x\in\sum^*$ מתקיים $\delta\left([x],a\right)=[xa]$, נראה ש δ מוגדרת היטב:

* יהיו x,y כך ש: $[x]=[y]$ אז :
  · $\delta\left([x],a\right)=[xa]$
  · $\delta\left([y],a\right)=[ya]$
* כיון ש $R_L(x,y)$ ו R_L אינוו' מימין גם $R_L(xa,ya)\Leftarrow[xa]=[ya]$.

- בשיעור הבא נראה שהאוטומט אכן מקבל את L

נותר להוכיח את למה 3.4 . הראינו שלשם כך מספיק להוכח את 2 הטענות הבאות:

טענה 1: לכל $x\in\sum^*$ **,** $\hat{\delta}=(q_0,x)=[x]$ <u>הוכחת טענה 1: נוכיח באינדוקציה על $|x|$</u>

- <u>בסיס:</u> $|x|=0$ אז $\delta\left(q_0,x\right)=\delta\left(q_0,\varepsilon\right)\overset{def'}{=}q_0\overset{A}{=}[\varepsilon]$
- <u>צעד:</u> נניח נכונות עבור אורך $i\geq0$ ונוכיח נכונות עבור $i+1$.

  תהי x מחרוזות באורך $i+1$. נסמן $x=ua$, כאשר $a\in\sum$ מתקיים. אז:

$$\hat{\delta}\left(q_0,x\right)=\hat{\delta}\left(q_0,ua\right)\overset{\text{def'}\delta}{=}\delta\left(\hat{\delta}\left(q_0,u\right)a\right)\overset{\overset{\text{indu'}}{assum}}{=}\delta\left([u],a\right)\overset{\text{A def}}{=}[ua]$$

טענה 2 : לכל $x\in\sum^*$ $[x]\in F$ $\Leftrightarrow x\in L$ <u>הוכחת טענה 2 : יהי $x\in\sum^*$. נראה ש $[x]\in F$ אם"ם $x\in L$</u>

- נזכר שעבור $[y]\in Q$, או ש:

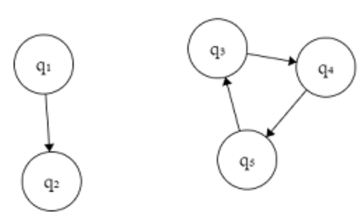
1. $[y]\in F$, ואז לכל $x\in L$,$x\in[y]$
2. $[y]\notin F$, ואז לכל $x\notin L$,$x\in[y]$

- הראינו ש $F=\{[x]\,|x\in L\}$ מוגדרת היטב. ולכן , בגלל ש $x\in[x]$(מהגדרה), אז $[x]\in F$ אם"ם $x\in L$ כנדרש.

בכך הוכחנו את למה 3.4 ואת משפט נרוד - מש"ל.

3.4 אלגוריתם למינימלזציה של DFA

בגדול, האלג' הלך למצוא מחרוזות "המפרידות" בין זוגות מצבים. לבסוף יתקבל גרף של רכיבי קשירות. כך שבכל רכיב כל זוג מצבים אינם מופרדים לדוגמה : $A=\{\sum,Q=\{q_1,....,q_5\}\}$, יתכן שנקבל:



יש קשת אם לא קיים z שמפרדי בין q_1 ל q_2 . כלומר לכל $\left(\hat{\delta}\left(q_0,x\right)=q_1\right)$ ו $\delta\left(q_0,\hat{y)}\right)=q_2\Leftarrow$ לא קיים z המפריד בין x ל y

תאור האלג' $Moore_{56}(A)$:

1. נוריד מצבים לא ישיגים.
2. נאתחל קבוצת זוגות מופרדים:
   - לכל $q \in F$, $p \in Q \backslash F$ נסמן ש $\{p,q\}$ מופרד ע"י ε (בטבלה)
3. נעבוד באיטרציות.

(א) נעבור על כל הזוגות $\{p,q\}$. שלא סומנו שמפורדים באיטרציות קודמות. לכל זוג כזה $\{p,q\}$ נבדוק האם קיימת איזו $a \in \sum$ שמפרידה בינהם. כך ש $\{\delta\left(p,a\right), \delta\left(q,a\right)\}$ מוסמנים כמופרדים (מאיט' קודמת) ע"י z . אם כן נסמן את (p,q) כמופרידם ע"י az

(ב) אם אף זוג חדש לא סומן כמופרד עבור ל 4 , אחרת חזור ל3

4. נבנה A' כך: תהי $Q_1, ..., Q_m$ חלוקה הכי גסה של Q לקב' ללא הפרדות בפנים. לדוגמה באיור לעיל $Q_1 = \{q_{1,}q_2\}$ ו $Q_2 = \{q_{3,}q_4, q_5\}$

(א) נגדיר $Q' = \{Q_1, ..., Q_M\}$

(ב) הקב' שמכילה את q_0 ־ q'_0

(ג) כל הקב' שמכילות מצב $q \in F$ (ורק הן) ־ F'

(ד) $\delta' - \delta'\left(Q_i, a\right) = Q_j$, עבור $q_j \in Q_i$ כלשהו (אפשר להוכיח שזה מגודר היטב)

3.5 ההירכיה של חומסקי

חומסקי $('56)$ התבונן בסדרת משפחות של דקדוקים הולכות וקטנות המעניינות כל אחת בפני עצמה מבחינת קב' השפות שהיא תופסת. בנוסף באופן מענין לכל אחת קיים מודל חישובי של אוטומט (לאו דוקא DFA) פשוט לתיאור לשקול.

$$L_3 \subseteq L_2 \subseteq L_1 \subseteq L_0$$

- <u>טיפוס 0 (L_0) :</u> דקדוק שכתוב כללי, ללא הגבלות. מסתבר שמודל זה שקול למודל של מכונת טיורינג (מחשב) בפרט, שפות $PRIMES$ שייכות למחלקה זו (קצת מפתיע). במכונות טיורינג, אי־דטרימינזם לא מגדיל את הכח של מודל החישוב. כלומר, קב' המכונות טיורינג האי־דטרמינסטיות מאפשרת לקבל אותה קבוצת שפות כמו הדטרמינסטיות
- <u>טיפוס 1 $(L_!)$:</u> קב' כל דקדוקי השכתוב ללא כללים מקצרי אורך , כלומר מותרים רק כללים מהצורה כאשר $|a| \leq |\beta|$ לדוגמה :
  - $aSb \to aaSbb$ מותר
  - $aSb \to aS$ אסור.

שימו לב שדקדוק, L_1 כזה לא יכול לגזור את המילה ε (הוכחה פשוטה באינדוקציה) לכן מוספים גם את הכלל $S \to \varepsilon$ (S משתנה התחלתי) לקב' הכללים המותרים במקור חומסקי הגדיר את הקב' כדי לטפל בשפות טבעיות. מסתבר (ההפתעה!) ש L_1 שקולה למודל החישוב של מכונות טיורינג (מחשבים) עם זיכרון לינארי. כלומר המכונה משתמשת ב $O(|x|)$ זכרון כאשר x הוא הקלט.

כאן אי־דטרמינזם אולי עוד לא ידוע אוטומט א"ד עם זכרון לינארי יותר חזקה ממ"ט דטרמינסטים עם זכרון לינארי (שאלה פתוחה די קשה)

- <u>טיפוס 2 (L_2) ־ דקדוקים חסרי הקשר:</u> כלומר מרשים רק כללים מהצורה $A \to \alpha$ כאשר A הוא משתנה כדי לשמור על $L_2 \subseteq L_1$, מרשים לגזור ε רק מ S .

שקול לאוטומט מחסית א"ד. כאן ידוע שאי־דטרמינזם עוזר נתמקד רב הקורס בחקר L_2 (למעשה הדרישה לגבי ε לא משפיעה על הכח היא נוסף רק בשביל $L_2 \subseteq L_1$

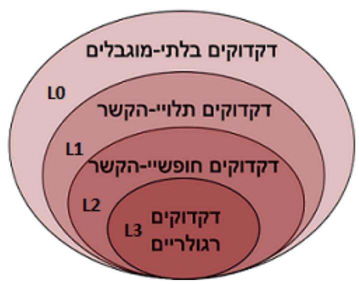
- <u>טיפוס 3 (L_3)- דקודים לינארים ימיניים (שמאליים)</u>. מאפשרים רק כללים המצורה
  - $A \to aB$
  - $A \to a$
  - $S \to \varepsilon$

מסתבר שקב' זו שקולה ל DFA (תופס בדיוק את השפות הרגולריות)

הערה: באותה מידה יכולנו להגדיר (שמאלי) :

  - $A \to Ba$
  - $A \to a$
  - $S \to \varepsilon$

<u>אבל אסור לערבב בינהם</u>



ההיררכה של חומוסקי

ידוע גם שהכח של L_i ים הולך וקטן ככל ש i עולה כלומר נסמן $L\left(L_i\right) = \left\{L \subseteq \sum^* \left|G \in L_1, L(G) = L\right.\right\}$ מתקיים ש:

$$L(L_3) \nsubseteq L\left(L_2\right) \nsubseteq L\left(L_1\right) \nsubseteq L\left(L_0\right)$$

כי ניתן להראות שיש שפה בהפרש.

3.6 $DFA \iff L_3$

נוכיח בשני הכוונים באמצעות בניה של דקדוק $/DFA$ שקול

<u>$DFA \Rightarrow L_3$</u>

- יהיה $A = (Q, q_0, F, \sum, \delta)$ ונבנה עבורו דקדוק לינארי ימני שקול. כיצד נעשה זאת? הרעיון הוא לבנות דקדוק שתהליך הגזירה שלו של x יסמלץ את תהליך הריצה של A על x (יעקוב אחריו צעד־צעד)
- נדייק: נבנה דקדוק G_A כך ש $V = Q$ ויתקיים שלכל $x \in \sum^*$, $\forall p, q \in Q$ אז:

$$\hat{\delta}(p, x) = q \iff P \Rightarrow^*_{GA} xq$$

3.6.1 למה 7.1 : תהי L שפה רגולרית. אזי קיים עבור L דקדוק לינארי ימני.

הוכחה:

אינטואיציה:

ההוכחה תהיה קונסטרוקטיבית. נתחיל מ $A\ DFA$ עבור L , ונבנה G_A השקול ל A .

נתחיל מהמקרה ש $\varepsilon \notin L$.כלומר הבניה של G_A תעבוד לכל L אבל הנכונות תתקיים רק עבור Lים שאין מכילים את ε . אמרנו שרעיון הבניה הוא ש G_A יסמלץ את פעולת A צעד־צעד .

נדייק:

נרצה שתתקיים האיווריאנטה הבאה ־ שלכל $w \notin \sum^*$, $pq, \in Q$ אז :

$$p \underset{G_A}{\overset{*}{\Rightarrow}} wq \iff \hat{\delta}\left(q,w\right) = q$$

אינטואיטיבית, זה מבטא את תכונת הסימולציה שרצינו. כלומר רק שהשפות בסוף יצאו שוות, אלא שההתנהגות של G_A לאורך כל תהליך הגזירה היא "מראה" של תהליך הריצה של A (על כל x)

בסוף נצטרך לדאוג גם לקבל של מילים. בפרט, כבר ברור שנרצה לקבוע $V = Q$ (או לפחות $Q \subseteq V$)

פורמלית:

- נציע את הדקדוק הבא: $G_A = (V = Q, S = q_0, T = \sum, P)$
  - P ־ נגדיר שלכל שורה $\delta\left(q,a\right) = p$ נוסיף את הכלל $q \to ap$ ל P בשביל לטפל בכלל $pT \cup v \underset{G_A}{\overset{*}{\Rightarrow}} wa$
  - בנוסף אם $p \in F$, נוסיף גם את הכלל $q \to a$ ל P . בשביל לקבל את המילים הנכונות
- נוכיח את נכונות הבניה. ראשית, נשים לב ש G_A אכן לינארי ימני.

כעת נוכיח ש $L\left(G_A\right) = L(A) \backslash \left\{\varepsilon\right\}$ (בהמשך נראה גם כיצד לטפל בε) ־ בפרט נקבל נכונות עבור Lים שאינן מכילות את ε .

3.6.2 תכונות דקדוק לינארי ימני

<u>למה 7.2 (על דקדוקים לנאריים ימניים)</u> ־ G דקדוק לינארי ימני, ו $B \in V$, $B \underset{G_A}{\overset{*}{\Rightarrow}} \alpha$ עבור $\alpha \in \left(T \cup V\right)^*$ כלשהו.

אזי α מקיימת $\alpha \in T^*$ או $\alpha = wD$ עבור $w \in T^*$ ו $D \in V$.

<u>הוכחה:</u> נוכיח באינדוקציה על אורך הגזירה

- <u>בסיס:</u> $i = 0$ כלומר $A \Rightarrow^0 \alpha$.
  - אז בהכרח $\alpha = B$ ואכן $\alpha = wB$ עבור $w = \varepsilon \in T^*$ ו $B \in V$
- <u>צעד:</u> נניח עבור i וניכחו עבור $i+1$.
  - יהי $B \Rightarrow^{i+1} \alpha$. נתבונן בסדרת גזירה (באורך $i+1$) מתאימה כלשהי $B \Rightarrow^i \beta \Rightarrow \alpha$
  - מהנחת האינדוקציה, β היא מהצורה $\beta \in T^*$ או $\beta = wC$ עבור $w \in T^*$ ו $C \in V$ (כי $B \Rightarrow^i \beta$)
  - נתבונן ב$\beta \in T^*$. לא יתכן כי גזרנו מβ את α (חייבת להכיל משתנה). לכן β מהצורה השניה . נסמן $\beta = wC$.
  - כייון ש $\beta \Rightarrow \alpha$, בהכרח הופעל כלל שבצד שמאל שלו יש C (בגזירה $\beta \Rightarrow \alpha$) , כי C הוא המשתנה היחיד ב β
  - כעת ישנן מס' אפשרויות:
    1. הופעל $C \to a$ כלשהו. במקרה זה $\alpha = wa \in T^*$,כנדרש
    2. $C = S$, והופעל $S \to \varepsilon$ במקרה זה $\alpha = w\varepsilon = w \in T^*$, כנדרש.
    3. הופעל כלל המצרוה $C \to aD$ כאשר $a \in T$ ו $D \in V$. נקבל $\alpha = waD$ כי $wa \in T^*$ ו $D \in V$, כנדרש. מש"ל

נחזור להוכחת הנכונות שלנו. לשם כך ננסח את האינוריאנטה שהייתה לנו בראש בזמן הבניה, ונוכיח ש G_A שבנינו אכן מקיים אותה

3.6.3 פונקציית מעברים מורחבת שקולה לסדרת גזירה

למה 7.3 : לכל $w \in \sum^*$, $p, q \in Q$ מתקיים ש:

$$p \Rightarrow^*_{GA} wq \iff \hat{\delta}(p,w) = q$$

כיוון ראשון: $p \Rightarrow^*_{GA} wq \Rightarrow \hat{\delta}(p,w) = q$ - ההוכחה באינדוקציה על אורך הגזירה

- בסיס $i = 0$. נניח ש $p \Rightarrow^0 wq$. אז בהכרח $w = \varepsilon$ ו $q = p$, כלומר $p \Rightarrow^0 p$. אכן $\hat{\delta}(p,\varepsilon) = p$ בכל DFA (לא דוקא A שלנו)
- צעד: נניח עבור i ונוכיח עבור $i+1$
  - נניח ש $P \Rightarrow^{i+1}_{GA} wq$ בסדרת גזירה כלשהי מתאימה: $P \Rightarrow^i_{GA} \beta \Rightarrow wq$
  - בדומה הוכחת 7.2 כיוון ש G_A דקדוק לנארי ימני, β היא מהצורה $\underbrace{u}_{\in T^*}\underbrace{C}_{\in V}$
  - ממבנה wq , בהכרח מתקיים שבצעד $B \Rightarrow wq$ השתמשנו בכלל גזירה $C \to aq$ עבור $a \in T$ כלשהו, וכן $w = ua$
  - כיון ש $p \Rightarrow^i uC$ אז : $\hat{\delta}(q,u) = C$ (1) מהנחת האינדוקציה
  - בנוסף , כיון ש $c \to aq$ שייך ל P , קיים המעבר $(2)\delta(C,a) = q$, מהבניה (אחרת הכלל לא היה מצטרף ל p)
  - כעת מ $(2)+(1)$ נקבל:

$$\hat{\delta}\left(q, \underbrace{w}_{=ua}\right) = \delta\left(\hat{\delta}(q,u), a\right) \overset{(1)}{=} \delta(c,a) \overset{(2)}{=} q$$

כיוון שני : בבית (מטלה 2) ,

מש"ל.

3.6.4 נכונות הבניה - הכלה דו כיוונית

כיוון אחד: $L(A)\backslash\{\varepsilon\} \subseteq L(G_A)$.

- תהי $\varepsilon \neq w \in L(A)\backslash\{\varepsilon\}$.
- נסמן $w = ua$ כיון ש $w \in L(A)$ מתקיים $\hat{\delta}(q_0,w) = q \in F$. ונרשום $\hat{\delta}(q_0,ua) = \delta\left(\hat{\delta}\left(\underbrace{q_0,u}_{=h}\right), a\right)$
- מטענה 7.3 מתקיים ש : $q_0 \Rightarrow^* uh$ כי $\hat{\delta}(q_0,u) = h$
- כיון ש $\delta(h,a) = p \in F$ קיים ב P הכלל $h \to a$
- לכן קיימת ב G_A סדרת הגזירה : $q_0 \Rightarrow^* uh \Rightarrow ua = w$, כלומר $w \in L(G_A)$, כנדרש

כייון שני: נראה $L(G_A) \subseteq L(A)\backslash\{\varepsilon\}$.

- תהי $w \in L(G_A)$.
- בהכרח $w \neq \varepsilon$ - כיון שאין כללים ב G_A הגוזרים ε , קל להראות באינדוקציה שכל מילה הנגזרת ב G_A שונה מ ε (באורך 1 לפחות)
- נסמן $w = \underbrace{U}_{\in T^*}\underbrace{a}_{\in T}$, נתבונן בסדרת גזירה של w מ q_0 (קיימת כזו כי $w \in L(G_A)$): $q_0 \Rightarrow^i_{GA} \beta \Rightarrow w = Ua$
- מלמה 7.2 , β היא בהכרח מהצורה $\beta = \underbrace{x}_{\in T^*}\underbrace{l}_{\in V}$. ממנבה w הכרח מתקיים $x = U$ ומבעבר $\beta \Rightarrow w$ הפעלנו את הכלל $l \to a$

- כיוון ש $\beta = ul$ $q_0 \Rightarrow^*_{GA}$ מטענה 7.3 מתקיים ש: $\hat{\delta}(q_0, u) = l$ (1)
- כיוון שקים ב P הכלל $l \to a$ אז הכרח קיים המעבר $\delta(l, a) = \widetilde{q} \in F$ (2)
- בדומה לקודם (מהגדרת $\hat{\delta}$) , נסיק ש: $\hat{\delta}(q_0, w) = \hat{\delta}(q_0, ua) = \widetilde{q} \in F \Rightarrow w \in L(A)$, כנדרש.

מש"ל

3.6.5 רעיון ההוכחה למקרה ש $\varepsilon \in L$

מה קורה אם $\varepsilon \in L$? מסתבר שנתן לתקן בצורה פשוטה את הבניה הקודמת.

עבור L רגולרית המכילה ε נשנה את הבניה כך: נבנה G_A^- מ $DFA\ A$ עבור L , בדיוק כמו בבניה הקודמת. ונתאים ל L דקדוק G_A המתקבל מ G_A^- באמצעות הוספת הכלל $S \to \varepsilon$ בלבד.

הוכחת נכונות: תקראו במודל. נראה מעט אינטואיציה:

- הכיוון הקל: $L(A) \subseteq L(G_A)$
  - כי $L(A) \backslash \{\varepsilon\} \subseteq L\left(G_A^-\right) \subseteq L\left(G_A\right)$ (רק הוספנו כללים) ו $\varepsilon \in L\left(G_A\right)$ בגלל $S \to \varepsilon$
- הכיוון המעניין $L\left(G_A\right) \subseteq L(A)$
  - מספיק להראו שלא נוספו "בטעות" מילים ל $L\left(G_A\right)$ ביחס ל $L\left(G_A^-\right)$ שאינן ε
  - נראה זאת באופן הבא: נראה שאם סדרת גזירה w $q_0 \Rightarrow^*_{GA}$ משתמשת איפשהו ב ε $S \to$. אז קימת סדרת גזירה חלופית שאינה משתמשת בכלל, ולכן $w \in L\left(G_A^-\right)$

בזאת סיימנו כיון אחד של השקילות.

3.6.6 <u>כיוון שני של השקילות:</u> נראה שאם קיים ל L דקדוק לי' ימני G, אז L רגולרית.

<u>הוכחה:</u>

נוכיח באמצעות בניה. נתחיל מ G ונבנה אוטומט סופי (א"ד עם מסעי ε) ל L . גם כאן הרעיון הוא לבצע סימולציה צעד־ צעד של תהליך הגזירה של G באוטומט A_G שנבנה (על אותה מילה)

<u>נדייק:</u> נרצה שיתקיים שלכל $x \in T^*$, $A \in V$ אז: $S \Rightarrow^* xA \iff A \in \hat{\delta}(S, x)$

כמו קודם, נצטרך גם כאן לטפל בנוסף בקבלת מילים ע"י A

נבנה את A_G כך: $A_G = \left(Q = V \cup \{q_f\}, q_0 = S, \sum = T, F = \{q_f\}, \delta\right)$

- כאשר δ תוגדר כך: לכל כלל מהצורה $A \to aB$ נוסיף את B ל $\hat{\delta}(A, a)$
- לכל כלל מהצורה $A|rig$ש נוסיף את q_f ל $\delta(A, a)$
- אם קיים הכלל $S \to \varepsilon$ וניסף את q_f ל $\delta(q_0, \varepsilon)$

<u>הוכחת נכונות:</u>

ראשית נוכיח את השמורה שהתכוונו שתתקיים כלומר:

- טענה 1: לכל $x \in T^*$, $A \in V$ מתקיים ש: $S \Rightarrow^* xA \iff A \in \hat{\delta}(S, x)$ מכאן נקבל בקלות את טענה 2 (בבית)
- טענה 2: לכל $x \neq \varepsilon$ $S \to^* x$ $\iff q_F \in \hat{\delta}(S, x)$
- טענה 3 : $S \Rightarrow^* \varepsilon \iff q_F \in \hat{\delta}(S, \varepsilon)$

טענה 3 היא מיידית, והנכונות $L(A_G)=L(G)$ נובעת ישירות מ $2+3$

<u>הוכחת שקילות בין L_3 ל DFA</u>

הוכחנו את הכוון של בניית דקדוק לינארי ימני שקול ל DFA נתון. כלומר הראנו ש:

$$\text{קב' השפות הרגולרית} \subseteq L\left(L_3\right)$$

התחלנו להראות ש :

$$L(L_3) \subseteq \text{קב' השפות הרגולרית}$$

גם כאן ההוכחה הינה קונסטרוקטיבית. בהנתן דקדוק $G\in L_3$ בנינו $\varepsilon-DFA$ שקול באופן הבא:

$A=\left(Q=V\cup\left\{q_F\right\},F=\left\{q_F\right\},q_0=s,\sum=T,\delta\right)$ כאשר δמוגדרת:

- לכל כלל גזירה $b\rightarrow aA\in P$, הוספנו $A_G\in\delta\left(B,a\right)$
- לכל כלל גזירה $A\rightarrow a\in P$ הוספנו $q_F\in\delta\left(A,a\right)$
- אם $S\rightarrow\varepsilon\in P$ הוספנו $q_F\in\delta\left(S,\varepsilon\right)$

נסחנו שלוש טענות, טענות $2,3$ דברו ישירות על השפות של A_G,G. טענה 1 היא טענה חזקה יותר שמנסחת אינווריאנטה ש A מקיים. קל להראות את טענה 2 מתוך 1 , ואנו נוכיח את 1 :

3.6.7 <u>טענה 1:</u> לכל $x\in T^*$ **,** $A\in V$ **מתקיים ש:** $S\Rightarrow^* xA \iff A\in\hat{\delta}\left(S,x\right)$

הוכחה

<u>כיון ראשון: $S\Rightarrow_G^* xA \Rightarrow A\in\widehat{\delta}_{Ac}\left(S,x\right)$ - באינדוקציה על $|x|$</u>

<u>בסיס:</u>

- $i=0$ מתקיים $A\in\hat{\delta}\left(S,x\right)$ ו$x=\varepsilon$
- אבל מהבניה כיון ש $A\neq q_f$ בהכרח $A=S$. ואכן : $S\Rightarrow^0 \varepsilon A=S$ (בכל דקדוק)

<u>צעד:</u> נניח עבור i ונוכיח עבור $i+1$

- מתקיים $A\in\hat{\delta}\left(S,x\right)$, ו $|x|=i+1$
- נסמן $x=ua$ $\left(a\in\sum\right)$.
- מהגדרת δ מתקיים:
  1. קיים $B\in V$ כך ש : $B\in\hat{\delta}\left(S,u\right)$
  2. $\delta\left(B,a\right)\in A$
- מ 1 + הנחת האינדוקציה מתקיים ש: $(|u|<|x|)$ $S\Rightarrow_G^* uB$ *
- בנוסף , מהבניה, כיון שקיים המעבר $A\in\delta\left(B,a\right)$ בהכרח קיים ב P הכלל $B\rightarrow aA$ **
- לכן מ $(*,**)$, קיימת ב G סדרת הגזירה:

$$S\Rightarrow_G^* uB\Rightarrow \underbrace{ua}_{x}A$$

– כנדרש.

כיוון שני: $S\Rightarrow_G^* xA \Leftarrow A\in\widehat{\delta}_{Ac}\left(S,x\right)$ בבית

3.6.8 טענה 2: לכל $x \neq \varepsilon$ x $S \to^* x$ $\iff$ $q_F \in \hat{\delta}(S, x)$

הוכחה (בבית)

סה"כ נקבל ש $L(G) = L$

לא קשה לראות (לא נוכיח) את הקשר הבא בין עצי גזירה לסדרות גזירה:

3.7 שקילות עצי גזירה וסדרות גזירה

משפט 9.1 : יהי G דח"ה ו $A \in V$, אז לכל $\alpha \in (V \cup T)^*$ מתקיים:

$A \Rightarrow_G^* \alpha$ $\iff$ **קיים עץ גזירה T (עבור G) עם שורש המסומן ב A וחזית α**

(לא נוכיח)

3.8 G חד משמעי

משפט 9.4 : יהי G דח"ה , אזי:

1. **לכל עץ גזירה T ב G , קיימת סדרת גזירה שמאלית ביותר אחת ויחידה (פתוח של העץ ב DFS)**
2. **לכל זוג עצי גזירה T_1, T_2 ב G עם חזית (זהה) α , מתאימות סדרות גזירה שמאליות ביותר שונות (הקשר בין העץ לסדרה הוא חח"ע)**

כעת נוכיח ש G חד משמעי. לשם כך נוכיח שלכל $w \in L(G)$ קיימת סדרת גזירה שמאלית ביותר אחת ויחידה. ככה , מ9.4.2 נסיק שלכל $w \in L(G)$ קיים עץ גזירה יחיד (כי אחרת היו 2 סדרות גזירה שמאליות ביותר עבור $w \in L(G)$ כלשהי). הרווחנו כאן פשטות כי לעץ יש מבנה "מתפצל" שפחות נח לעבוד איתו מאשר עם סדרות גיזרה.

הוכחה: נוכיח באינדוקציה על אורך המילה

בסיס: $i = 1$ (זה אורך מינמלי של מילה בשפה) רק $w = a$ היא באורך i ושייכת ל $L(G)$

לא קשה לראות שקיימות ל w סדרת גזירה טרויאלית ביותר אחת בלבד: $E \Rightarrow T \Rightarrow \alpha$

צעד: יהיה $i \geq 2$ נניח לכל $i' < i$ ונוכיח עבור i

- תהי $w \in L(G)$ מילה באורך i בהכרח בכל סדר תגזירה (ש.ב) של w מתחיל בצעד $E \Rightarrow E + T$ (כי $w \neq \alpha$) ולפחות באורך 2 .
- מכאן נסיק ש w נתונה לפירוק מהצורה $w = y + z$ עבור $y, z \in L(G)$. מדוע?
  - כי בסדרת גזירה (כלשהי) של w נקבל: $E \Rightarrow E + T \Rightarrow y + z$
  - y : נגזר מ E ולכן שייך ל $L(G)$
  - z : נגזר מ T אבל ב G קיים הכלל $E \to T$ ולכן $E \Rightarrow T \Rightarrow^* z$ כלומר גם $z \in L(G)$
- יתכן שישנם מספר פירוקים כנ"ל, למשל :
  - $w = y + z$ $y, z \in L(G)$
  - $w = y' + z'$ $y', z' \in L(G)$
- נתבונן בפירוק שבו z הוא הקצר ביותר האפשרי מבן כל הפירוקים הנ"ל : $w = y + z$. נבדוק כיצד המרכיבים השונים של $y + z$ נגזרים בגזירה שמאלית ביותר כלשהי של w :

$$E \Rightarrow E + T$$

- בביטוי $y + z$: ה + נגזר מהחלק $E+$, כי T לא מאפשר לגזור +ים. כעת יש שתי אפשרויות:

1. ה + נגזר מ+ בα
2. ה + נגזר מהמשך גזירה של E α . נתבונן סדרת בהמשך הגזירה במקרה כזה:

$$E \Rightarrow \underbrace{E + T}_{y+}\underbrace{+T}_{z}$$

* זה לא יתכן כי אז z מכיל לפחות 2 תוים . אם לעומת זאת היינו גוזרים את z כבר מ T α , היינו מקבלים פירוק $w = y' + z'$ שבו z' יותר קצר מ z שלנו. בסתירה לכך ש z הכי קצר (הארכנו על מנת להקל על ההכללה)

3.9 משפט 10.1 - למת הנפוח לשפת חסרות הקשר:

תהיה L שפה חסרת הקשר אזי **קיים** $n \in \mathbb{N}$ כך **שלכל** $z \in L$ שאורכה $|z| \geq n$ **קיים** פירוק $z = uvwxy$, המקיים:

1. $|vwx| \leq n$
2. $|vx| \geq 1$
3. **לכל** $i \in \mathbb{N}$, $z^i = uv^iwx^iy \in L$

עומק הכמתים : $\exists n \forall z \exists (\text{divided}) \forall \text{i P}(.....)$

<u>הכנות להוכחה:</u>

ראשית נגדיר צורה פשוטה של דקדוקים חסרי הקשר:

3.9.1 <u>למה 10.3:</u> תהי L שפה ח"ה אז ל $L \backslash \{\varepsilon\}$ קיים דח"ה בצורה הנורמלית של חומסקי

<u>הערה:</u> נניח ויש לנו את הכלל $A \to X_1X_2, ...X_t$ עבור $t \geq 3$ אז לפי ההגדרה הנ"ל, נבנה מעין עץ:

$$\begin{gathered} A \to B_1B_2 \\ B_1 \to X_1, ...X_{\lfloor \frac{t}{2} \rfloor} \\ B_2 \to X_{\lfloor \frac{t}{2} \rfloor + 1}....X_t \\ \vdots \end{gathered}$$

סקיצת הוכחה: נקח דח"ה כלשהו G עבור $L' = L \backslash \{\varepsilon\}$ ונבנה (בשלבים) דח"ה בצורת חומסקי שקול.

1. <u>צעד ראשון:</u>

- נפטר מכללים מהצורה $A \to X_1, X_2, ...X_t$ $(*)$ כאשר $t > 1$ וגם קיים $i \leq t$ כך ש $x_i \in T$ ($\forall j, x_j \in T \cup V$)
- בדקדוק החדש G' נוסיף לכל $a \in T$ משתנה חדש y_a בכל כלל מהצורה $(*)$ נחליף כל מופע של טרמינל G במופע של המשתנה y_a

2. <u>צעד שני:</u>

- סילוק כללים עם הרבה משתנים בצד ימין . נתחיל מ G', כל כלל מהצורה $A \to X_1, X_2, ...X_t$ כאשר $X_i \in V$ $\forall i$ ו $t \geq 3$ נחליף בדקדוק החדש $G"$ בסדרכת הכללים הבאה:
  - $A \to X_1B_1$
  - $B_1 \to X_2B_2$

- $B_i \to X_{i+1}, B_{i+2}$
- $B_{t-2} \to X_{t-1}X_t$
- כאשר ה B_i ים הם משתנים חדשים (יחודיים לכלל הזה)

3. <u>צעד שלישי</u>

- נסלק את ε מהשפה של L , וכן נסלק כללי ε נרצה שהשפה של הדקודק החדש $G^{(3)}$ תהיה $L\setminus\{\varepsilon\}$

<u>נסיון 1 :</u>

- נוריד את הכלל $G \to \varepsilon$ אכן עכשיו בשפה $L(G^{(3)})$ אין את ε הבעיה היא שיתכן שהורדנו מילים מיותרות. למשל אם בדיקדוק המקורי G" היה
- $\left\{\begin{matrix} S \to \varepsilon|A \\ A \to BS \\ B \to b \end{matrix}\right\}$ לדוגמה המילה b ב G' ע"י: $S \Rightarrow A \Rightarrow BS \Rightarrow bS \Rightarrow b$
- כעת בגלל שהורדנו את $S \to \varepsilon$, b לא תהיה ב $L\left(G^{(3)}\right)$ מה נעשה?

<u>נסיון 2:</u>

- נבנה אלגוריתם הפועל בשני שלבים:

(א) נמצא את קבוצת כל המשתנים האפיסים ב G". (הגדרה) נאמר שהמשתנה A הוא אפיס בדקדוק G אם $A \Rightarrow_G^* \varepsilon$ נסמן ב Z את הקבוצה הנ"ל

(ב) נבנה את הקבוצה $P^{(3)}$ ל $G^{(3)}$ באופן הבא:
לכל כלל גזירה מהצורה $A \to X_1X_2,..X_t$ כאשר $A \in V$, $X_i \in V \cup T$ $2 \geq t \geq 0$

(ג) נכניס ל $P^{(3)}$ את הכללים הבאים:

i. $A \to y_1, ...y_t$ כך ש $y_1, ...y_t \neq \varepsilon$
כאשר אם X_i הוא משתנה אפיס (יכול להיות בכלל טרמינל)

ii. אז y_i הוא או X_i או ε

iii. אחרת y_i הוא x_i

כלומר כל כלל ב G" מייצר לכל היותר שלושה כללים. למשל אם BC ב Z אז:

$A \to BC$ יוחלף ב $\begin{matrix} A \to B \\ A \to C \\ A \to BC \end{matrix}$ לא קשה להראות ש $L(G^{(3)}$ שווה ל $L(G")\setminus\{\varepsilon\}$

למשל בדוגמה שראינו , המילה b תשאר בשפה בגלל שהכלל $A \to BS$ מייצר (לפחות) את הכללים $\begin{matrix} A \to B \\ A \to BS \end{matrix}$ (S אפיס) ואכן b תגזר ע"י הסדרה:

$$S \Rightarrow A \Rightarrow B \Rightarrow b$$

(ד) נשאר להוריד כללי יחידה כלומר כללים מהצורה $A \to B$. ניתן לעשות זאת באמצעות אלג' מסוים שרץ על גרף מסויים שמוגדר ע"י P (של G^n) - לא נראה עכשיו, נעלה לאתר.

נשאר להראות כיצד מוצאים את Z.

נפתור את הבעיה - של מציאת משתנים האפיסים בדיקדוק - באמצעות רדוקציה לבעיה אחרת בפישוט דקדוקים.

מהי רידוקציה? שמוש באלג' אחר בקופסא שחורה של קלטים שאנחנו נבחר באלגוריתם שלנו לבעיה שלנו

- <u>הבעיה האחרת (מציאת משתנים טרמינלים):</u> בהנתן דח"ה G , קב' המשתנים הטרמנילים היא קב' כל המשתנים $A \in V$ כך ש$A \Rightarrow_G^* w \in T^*$
  - המטרה היא למצוא את קבוצת הטרמינלים.

* שימוש מרכזי בבעיה בדח"ה כללי, נתן להוריד את המשתנים הלא טרמנלים מבלי לפגוע בשפה.

- <u>אלג' למציאת המשתנים הטרמנלים בדח"ה:</u>

$Term(G)$ - (תיעוד) האלג' יעבדו בצורה הרקורסיבית הבאה:

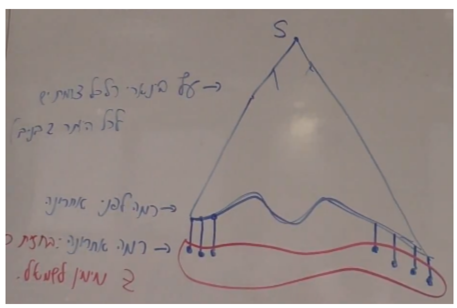
1. נאתחל $\begin{matrix} T \rightarrow good \\ To - check = V \end{matrix}$
2. כל $To - Check \neq \phi$ נעבור על כל המשתנים $A \in To - Check$
   (א) לכל משתנה A כזה עבורו קיים כלל גזירה $A \rightarrow \alpha$ כאשר $a \in Good^*$ נוסיף את A ל $Good$
   (ב) אם לא מצאנו משתנים שנוספו ל $Good$, עבור ל3 אחרת , הורד את כל המשתנים שמצאנו מ $To - Check$
3. החזר את $Good \backslash T$

לא קשה להראות נכונות של האלג' , נעלה לאתר

3.9.2 הוכחת למת הנפוח:

- תהי L שפה חסרת הקשר ויהי G דח"ה בצורה הנורמלית של חומסקי (להלן ד"ח) עבור $L \backslash \{\varepsilon\}$.

<u>אבחנה:</u> נתחיל מאבחנה כללית לגבי עצי גזירה של מילים בשפה $L(G)$:
עבור כל $z \in L(G)$ קיים עץ גזירה מהצורה :



- זהו **עץ בינארי** (לכל היותר 2 בנים) - בגלל חומסקי (הגדרה 10.2)
- ברמה ה**לפני אחרונה** - לכל צומת יש בדיוק בן אחד והוא טרמינל
- ברמה ה**אחרונה** (האדום) - החזית - כתוב z משמאל לימין . כל צומת בחזית הוא בן יחיד של אביו ומסומן בתו $z_i \in T$ כלשהו (לא ε) - בגלל חומסקי
  - באופן כללי: אם גזרנו $A \rightarrow a$ אז מימין יש טרמינל + כמה דברים
  - אצלנו: אם גזרנו אז (ברמה האחרונה) בהכרח יש מימין רק טרמינל בודד.

<u>הערה:</u> בהסתכלות קדימה העדר כללים הגוזרים את ε יאפשר לטעון שגודל הרמה הלפני אחרונה זהה ל $|z|$.

נקבע עץ T עבור $z \in L$ נתונה. ונסמן ב T' את העץ שבו קצצנו את העלה.

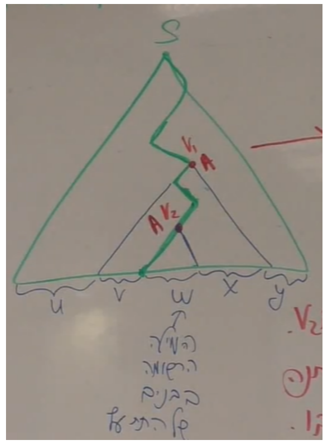
- מה ניתן להגיד על הגובה של T'?
  - מההערה, נשים לב שגודל החזית שווה ל $|z|$ כיוון ש T' עץ בינארי אז גובהו h מקיים $h \geq \log_2 |z|$,
  - כי אחרת , גם אם העץ מלא, לא נגיע ל $|z|$ עלים
- נסמן ב k את מספר המשתנים ב G נקח $n = 2^k$, תהי $z \in L$ שאורכה $n \leq$

- בעץ גזירה מתאים, T מתקיים שהגובה של T' (ללא העלים) מקיים :

$$h\left(T'\right) \geq \log_2\left(|z|\right) \geq \log_2 \underbrace{(n)}_{=2^k} = k$$

- הגובה נמדד בקשתות $\Leftarrow$ <u>מס' המשתנים</u> המופיעים במסלול ארוך ביותר ב T' משרש לעלה הוא לפחות $k+1$

נתבונן במסלול ארוך ביותר כזה ב T': נתחיל לטייל מהעלה של המסלול כלפי מעלה, ונעצור בדיוק ברגע שנתקל לראשונה בצומת המסומן במשתנה שכבר נתקלנו בו , כיוון שיש רק k משתנים שונים בדקדוק, נכסה לכל היותר $k+1$ צמתים (שובך היונים), החזרה בהכרח תתרחש כי $h(T) \geq k+1$

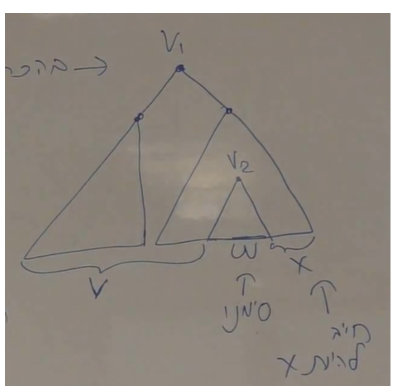


נסמן את הקודקוד האחרון בטיול ב v_1 ואת הקודקד המסומן במשתנה עליו חזרנו ב v_2 . נסמן ב A את המשתנה ששניהם מוסמנים בו.

נותר להוכיח ש n , והפירוק $z-uvwxy$ כפי שסימנו מקיימים את תנאי הלמה:

1. **נראה ש** $|vwx| \leq n$ **:**
   - $|vxw|$ הוא כגודל החזית של העץ המושרש בv_1 - נסמן ב T_1'.
   - מהבניה של T_1' גובהו $\leq k$ (במסלול ארוך ביותר בעץ מופיעים $\leq k+1$ צמתים).
   - לכן, גודל החזית שלו, היא לכל היותר $n = 2^k$ כי העץ הוא בינארי
   - וגדול החזית היא כאמור $|vwx| \leq n$, כנדרש
2. **נראה ש:** $|vx| \geq 1$ **.** לשם כך מספיק להראות ש $v \neq \varepsilon$ או $x \neq \varepsilon$.
   - נתבונן בעץ T_1' , ישנם שני מקרים:

   (א) <u>v_2 שייך לתת העץ הימני של v_1</u>



- בהכרח ל v_1 יש בדיוק שני בנים המסומנים במשתנה (חומסקי)
- בפרט v מכיל את כל החזית של תת העץ השמאלי. תת עץ זה מכיל לפחות תו אחד בחזית (העץ הלא מקוצץ) , כי אין כללי גזירת ε
- נסיק ש $|v| \geq 1$, כנדרש (שימו לב שיתכן ש $x = \varepsilon$ אם v_2הוא בן ימני של v_1

(ב) <u>v_2 שייך לת העץ השמאלי של v_1</u> ,

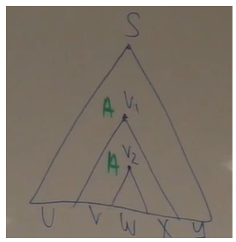
- נקבל באופן דומה ש $x \neq \varepsilon$

3. **נראה שלכל** $i \geq 0$ $z^{(i)} = uv^iwx^iy \in L_1$

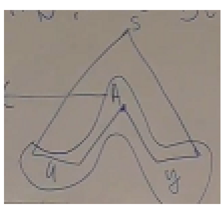
- נעשה זאת על ידי 3 טענות.

<u>טענה 1 : $S \Rightarrow_G^* uAy$</u>

- מהתבוננות בעץ T :



- ממבנה העץ מתקיים : $S \Rightarrow^* u \underbrace{A}_{\text{A of } v_1} y \Rightarrow^* uvwxy$

- אם לא נמשיך לגזור את A, נקבל סדרת גזירה חלקית $S \Rightarrow^* uAy$ מקבילה ל  במקרה והשארנו רק את השרש של T_1, כנדרש.

<u>טענה 2: $A \Rightarrow_G^* vAx$</u>

- נתבונן ב T_1 , נצייר:

- ולא נפתח את A של v_2

<u>טענה 3 : $A \Rightarrow_G^* w$</u>

- w היא החזית של T_2

טענת עזר: לכל $i \geq 0$ מתקיים ש: $S \Rightarrow^* uv^iwx^iy$ (זו טענה יותר יותר מ $z^{(i)} \in L$, כרגיל חזקנו בשביל האינדוקציה)

הוכחה באינדוקציה על i :

<u>בסיס:</u>

- מטענה 1 מתקיים $S \Rightarrow_G^* uv^0Ax^0y = uAy$

<u>צעד: נניח עבור $i-1$ ונוכי עבור i $(i>1)$ מתקיים:</u>

$$S \overset{\text{ind'}}{\Rightarrow} uv^{i-}Ax^{i-1}y \overset{\text{lemma 2}}{\Rightarrow} uv^{-1}vAxx^{-1}y = uv^iAx^iy.$$

מש"ל.

הוכחנו טענת העזר הבאה: $S \Rightarrow^* uv^iAx^iy$ לכל $i \geq 0$ והיו 3 טענות נוספות כעת נוכל להוכח $S \Rightarrow z^{(i)}$ לכל i נובע $i \geq 0$

- נזכיר $z^{(i)} = uv^iwx^iy$ מתקיים $S \Rightarrow^* uv^iAx^iy \Rightarrow^* uv^iw^iy = z^{(i)}$ כאשר הגזירה הראשונה נובעת מטענת העזר , והגזירה השניה מטענה 3: $A \Rightarrow^* w$

3.10 משפט 13.4 : שני מודי הקבלה של אוט' מחסנית שקולים

הוכחה:

נוכיח בכיוון אחד, מקבל $\Leftarrow$ ריקון

- תהי L שפה המקיימת $L_F(M) = L$. נתונה M' המקבלת את L ע"י ריקון $L_e(M^*) = L$
- הרעיון הוא ש M' רתוף ממש כמו M עד להגעה למצב מקבל כלומר δ' תוגדר כמו δ כד כדי השינויים הבאים:

1. אם M מגיעה למצב מקבל M' תעבור למצב מיוחד של ריקון שמטרתו לרוקן את המחסנית (ל $\delta'(q,\cdot,Z)$ <u>נוסיף</u> מעבר $\delta\left(\underset{\in F}{q},\varepsilon,Z\right)$ ל (q_e,ε) - מעין בור ל q_e)
2. צריך לטפל במילים שמובילות לקונפ' מהצורה $\left(\underset{\in F}{q},\varepsilon,\varepsilon\right)$ ב M
מבחינת M המילה לא התקבלה ומבחינת M' כן. פתרון משתמש ב "תחתית כפולה, . בצעד הראשון M' תבצע $\delta\left(q_0',\varepsilon,\vdash\right) = \{(q_0,\vdash\vdash')\}$ כעת במצב שתיארנו במחסנית ישאר $\vdash'$ והשליטה תעבור ל M' שתדאג לא לקבל. (למשל $\delta'\left(\underset{\in F}{q},\sigma,\vdash'\right) = \phi$)

כיון שני דומה (נסו לחשוב היכן כאן צרת תחתית כפולה)

3.11 שקילות בין אוט' מחסנית לדח"ה

<u>משפט 13.5 אוט' מחסנית שקול לדקדוק חסר הקשר</u>

הוכחה (סקיצה): נוכיח את שני הכיוונים באמצעות בניות מפורשות

<u>כיוון אחד:</u>

יהי G דח"ה ,נבנה אוט' M עבור $L(G)$ המקבל ע"י ריקון. הרעיון הכללי הוא ש M יסמלץ בהתליך הריצה שלו תהליך גזירה מתאים של x ב G. ספציפית, נרצה שתתקים הטענה הבאה:

טענה: לכל $x \in T^*$ ו $\alpha \in (V \cup T)^*$ שאינה מתחילה בטרמינל, $S \Rightarrow^* x\alpha$ בגזירה שמאלית ביותר (=התאמה בין קונפ' נוכחית לתבנית פסוקית נוכחית) $(q_0,x,S) \vdash_M^* (q_0,\varepsilon,\alpha) \iff$

הערה: $L(G) = L_e(M)$ נובע ישירות מהטענ אם נקחת $\alpha = \varepsilon$ (x הקלט)

הבניה: $M = \{Q = \{q_0,\} T, V \cup T, \delta, q_0, S = \vdash, \phi\}$,

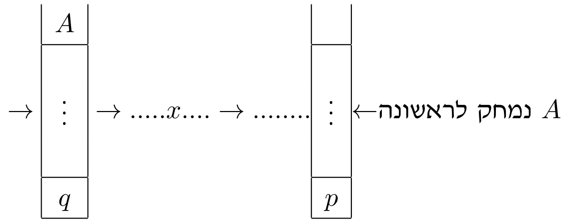
δ תוגדר כך:

- $\delta(q_0,\varepsilon,A) = \{(q_0,\alpha_i) \,|A \to \alpha_i \in p\}$ לכל $A \in V$
- $\forall\sigma \in \sum \ \delta(q_0,\sigma,\sigma) = \{q_0,\varepsilon\}$

כיוון שני: תהי $L = L_e(M)$ נבנה G כך ש $L = L(G)$ כמו קודם הרעיון הכללי הוא שסדרות גזירה יתאמו למסלול חישוב של M <u>בכל רישא</u> של החישוב. ההתאמה באה לידי ביטוי בטענה הבאה:

3.12 **טענה: לכל** $x \in \sum^*$ $A \in \Gamma$ **,** $p,q \in Q$ **מתקיים ש:** $(q,x,A) \vdash_M^+ (p,\varepsilon,\varepsilon) \iff [p,A,q] \Rightarrow^+ x$

כלומר $[q,A,p]^+ \Rightarrow x$ אסם קריאת x במצב q גורמת למחיקה של A מראש המסחינת ומעבר ל p



הבניה $G = (V = Q \times \Gamma, \times Q \cup \{S\}, \sum, P, S)$

כללי P מגודרים כך:

- לכל $q \in Q$ $S \to [q_0, \vdash, q]$
- לכל מעבר $(q_1, B_1 B_2, ...B_n) \in \delta(q,a,A)$ עבור $n > 0$, $a \in \sum \cup \{\varepsilon\}$ ולכל בחירת $q_2, ..., q_{n+1}$ נוסיף ל P כלל:
  - $[q, A, q_{n+1}] \to a\,[a_1, b_1, q_2]\,[q_2, B_2, q_2] .... [q_n, B_n q_{n+1}]$
- לכל מעבר $(q_1, \varepsilon) \in \delta(q,a,A)$ $q \in \sum \cup \{\varepsilon\}$
- יש ב P את הכלל $[q, A, q_2] \to A$ בסיס יגרום להחלפת משתנה במחרוזת