מבנים דיסקרטים למדעי המחשב - מתמטיקה בדידה

- מרצה: ד"ר מירה גונן.
- 3 מטלות 15% מהציון, אך לא חובה להגיש.
- ספרים רלוונטים:
  - מתמטיקה בדידה - נתי ליניאל, מיכל פרנס
  - הספר של הפתוחה
- להערות/הארות/תיקונים - נעם דומוביץ $ndomovich@gmail.com$

עקרונות בסיסיים במניה

- <u>עקרון החיבור:</u> תהיינה A,B קב' סופיות זרות אז: $|A\cup B|=|A|+|B|$
- <u>עקרון הכפל:</u> תהיינה A,B קב' סופיות אז: $|A\times B|=|A|\cdot|B|$
- <u>עקרון החיבור המורחב:</u> תהיינה $A_1,A_2,...,A_n$ קב' סופיות, זרים בזוגות (כלומר לכל $i\neq j$ מתקיים ש: $A_i\cap A_j=\phi$) אז:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right|=\sum_{i=1}^{n}|A_n|$$

- <u>עקרון הכפל המורחב:</u> תהיינה $A_1,A_2,...,A_n$ קב' סופיות, זרים בזוגות (כלומר לכל $i\neq j$ מתקיים ש: $A_i\cap A_j=\phi$) אז:

$$|A_1\times A_2\times...\times A_n|=\prod_{i=1}^{n}|A_n|$$

- <u>n עצרת :</u> $n(n-1)\cdot...\cdot1=n!$ כאשר $0!=1$.
- <u>שאלה:</u> כמה אפשרויות ישנן לסדר בשורה n איברים שונים:

$$\underbrace{\underline{n}\quad\underline{n-1}\quad\_\quad\_\quad\_\quad\underline{2}\quad\underline{1}}_{n}$$

  - כלומר n אפשרויות לראשון, $n-1$ לשני וכו', ויש להכפיל בינהם , שזה כמו עצרת.

- <u>שאלה:</u> כמה אפשרויות ישנן לסדר <u>במעגל</u> n איברים שונים?
  - ניתן לומר שלבחירת המושב הראשון אין משמעות -לכן כל "ההתחלות זהות" - כי אין נק' התחלה למעגל - ולכן זו אפשרות 1
  - כעת לאחר שבחרנו, ניתן "לחתוך" את המעגל, ולפתור כמו בשאלה קודמת - כמו בשורה - ולכך נותרו $n-1$
  - ובסה"כ $1\cdot(n-1)(n-2)....(1)=(n-1)!$

בעיות מניה בסיסיות

לבחירת k איברים מתוך n אברים <u>שונים</u> , ניתן להגדיר את אפשרויות הבחירה כך:

1. <u>ללא חזרות</u> - k איברים שונים - <u>עם חשיבות לסדר</u> הבחירה: $\frac{n!}{(n-k)!}$

הסבר אלגברי:

$$\underbrace{(\underline{n})\quad(\underline{n-1})\quad\_\quad\_\quad\_\quad\_\quad\overset{n-(k-1)}{\underline{n-k+1}}}_{n}$$

- לאיבר הראשון יש n אפשרויות
- לאיבר השני יש $n-1$ אפשרויות
- היחס בינהם הוא כפל, כי על כל אפשרות לבחירת האיבר הראשון, יש $n-1$ אפשרויות לאיבר השני.
- כך נמשיך עד האיבר הk, שלו יש : $n-(k-1)$
- שזה שווה ל $\frac{n!}{(n-k)!}$

הסבר קומבינטורי:

- נסתכל על בחירת k איברים שונים באופן הבא: לכל סידור מתוך $n!$ הסידורים האפשריים, נקח את הkהאיברים <u>הראשונים</u> בסדור.
- כל שינוי בסדר של $n-k$ האיברים <u>האחרונים</u> בסדור, יתן את אותה בחירה. לכן בכל בחירה ספרנו $(n-k)!$ פעמים.
- לכן התשובה היא $\frac{n!}{(n-k)!}$

2. <u>ללא חזרות, ללא חשיבות לסדר.</u> $\binom{n}{k}$

הסבר:

$$\underbrace{\underline{(n)}\quad \underline{(n-1)}\quad \_\ \_\ \_\ \_\quad \overset{n-(k-1)}{\underline{n-k+1}}}_{n}$$

- נסתכל על 1 כל סידור של k האיברים הראשוניים ספרנו $k!$ פעמים, ולכן צריך לחלק ב $k!$
- ולכן $\frac{\#(1)}{k!}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\binom{n}{k}=C_k^n$

3. <u>עם חזרות</u>, (ניתן לבחור איבר יותר מפעם אחת), <u>עם חשיבות לסדר.</u> n^k

הסבר:

$$\underbrace{\underline{(n)}\quad \underline{(n)}\quad \underline{(n)}\quad \_\ \_\ \_\quad \overset{k}{\underline{(n)}}}_{n}$$

- ישנן n אפשרוות לבחירת האיבר הראשון
- ישנן n אפשרויות לבחירת האיבר השני
- ...
- היחס ביניהם הוא כפל, כי על כל בחירת איבר למקום הראשון יש n אפשרויות לאיבר השני
- לכן n^k

4. <u>עם חזרות, ללא חשיבות לסדר.</u>

הסבר:

- נענה על כך דרך שאלה אחרת: כמה אפשרויות ישנן לחלק k כדורים זהים ל n תאים?
- דוגמה $n=5$ תאים. $k=7$ כדורים
  - אפשרות 1:

$$\lfloor 2\rfloor \quad \lfloor\,\rfloor \quad \lfloor 3\rfloor \quad \lfloor 1\rfloor \quad \lfloor 1\rfloor$$

- אפשרות 2:

$$\lfloor 3 \rfloor \quad \lfloor \rfloor \quad \lfloor 2 \rfloor \quad \lfloor 1 \rfloor \quad \lfloor 1 \rfloor$$

- נשים לב שאם החלפנו בין כדורים אין הבדל באפשרויות, ואם שנינו את <u>הכמות</u> זוהי אפשרות חדשה.

- כיצד נפתור זאת, נשתמש בטריק המחיצות, כלומר:

$$3\rfloor \quad | \quad | \quad 2 \quad \lfloor 1$$

- כעת נותרנו עם k כדורים , ו $n-1$ מחיצות, ונשאל את השאלה: <u>כמה אפשרויות יש לסדר k כדורים זהים ו $n-1$ מחיצות פנימיות זהות?</u>
  - <u>שלב א:</u> נניח כי כל האיברים (הכדורים והמחיצות) שונים זה מזה - זה כמו בשאלה 1 ולכן יש $(n+k-1)!$ אפשרויות
  - <u>שלב ב:</u> נשים לב שצריך להוריד את האפשרויות של:
    * החלפת כדורים שזה $k!$
    * ושל החלפת המחיצות $(n-1)!$,
  - כי לשניהם הסדר לא משנה.
  - ולכן: $\frac{(n+k+1)!}{k!(n-1)!} = \binom{n+k-1}{k} = D(n,k)$
- כעת נראה שזה אכן עונה על השאלה המקורית.
  - נסתכל על מס' הכדורים בתא ה i בתור מספר הפעמים שנבחר האיבר ה i .
  - (פורמלית: צריך להגדיר פונ' חח"ע ועל)

<u>לסיכום:</u>

סדר/חזרות	ללא חזרות	עם חזרות
ללא חשיבות לסדר	$\binom{n}{k}$	$\binom{n+k-1}{n-1}$
עם חשיבות לסדר	$\frac{n!}{(n-k)!}$	n^k

<u>הערות:</u>

1. $\binom{n}{k}$ מוגדר בעבור $n \geq k$ (עצרת שלילית לא מוגדרת) - בעבור 1,2 ל (3,4 אין בעיה)
2. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

הוכחה אלגברית:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{!(n-k)!k!} = \frac{n!}{!(n-k)!(n-(n+k))!} = \binom{n}{n-k}$$

הוכחה קומבינטורית:

- אגף שמאל - **בחירה** של kאיברים שונים מתוך n איברים שונים ללא חזרות וללא חשיבות לסדר הבחירה.
- אגיף ימין - נבחר $n-k$ איברים **שלא נרצה לקחת**. מס' האפשרויות לבחור אותם הוא $\binom{n}{n-k}$

3. לכן ב אפשרות 4 יתקיים ש: $\binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}$

דוגמאות

1. כמה פתרונות בטבעיים יש למשוואה $x_1 + x_2 + ... + x_n = k$, פתרון של משוואה הוא סדרה באורך n של טבעיים?
   - ננתח את השאלה: מצד אחד מותר חזרות, ומצד שני אין חשיבות לסדר
   - נטען: שזו בדיוק השאלה עם חלוקה של k כדורים זהים ל nתאים שונים , מחלקים k 1'ים ל n משתנים שונים.
     - מס' הכדורים בתא ה i הוא בדיוק ערך המשתנה x_i לכן $D(n,k)$

2. (וריאציה נוספת) כמה פתרונות בטבעיים יש למשוואה $x_1 + x_2 + ... + x_n \leq k$, פתרון של משוואה הוא סדרה באורך n של טבעיים?

   (א) <u>דרך א:</u>
   - למנות את האפשרויות הבאות:
     - $x_1 + x_2 + ... + x_n = k$
     - $x_1 + x_2 + ... + x_n = k - 1$
     - ..
     - $x_1 + x_2 + ... + x_n = 0$
   - כל אחת מהמשוואות אנחנו יודעים לפתור (שאלה קודמת) + וכל שנותר זה לחבר בין התוצאות - $\sum_{i=0}^{k} D(n,i)$
   - אבל זה **ארוך.**

   (ב) <u>דרך ב:</u>
   - נוסיף משתנה y שיהיה ההפרש בין k לבין $x_1 + x_2 + ... + x_n$, ואז נרצה למצוא את מס' הפתרונות הטבעיים של המשוואה:

$$x_1 + x_2 + ... + x_n + y = k$$

   - לכן נקבל משוואה עם $n+1$ מתשנים, ואותו הסכום - k . לכן הפתרון $D(n+1,k)$

   (ג) <u>לסיכום</u>, הראנו: $D\left(n+1,k\right) = \sum_{i=0}^{k} D(n,i)$

3. כמה אפשרויות ישנן לבחור 3 טבעים שונים בין 1 ל 1000 (כולל) כך שסכומם יתחלק ב 3 (ללא חישבות לסדר הבחירה)

   (א) <u>דרך א - לא טובה:</u>

$$\binom{1000}{2}(??)$$

   - $\binom{1000}{2}$ - בחירת 2 מספרים בין 1 ל1000 כלשהם
   - $(??)$ - נותר לברר מהי בחירת מספר שלישי כך שהסכום יתחלק ב 3
     - ניתן לראות שבבחירת מספרים שונים צריך לבחור כל פעם מספר מקבוצה אחרת, ולכן $(??)$לא עומד בפני עצמו, וצריך להכניס לחישוב את הבחירות השונות.
   - אבל מה למדנו? ששוה להסתכל על השאריות

   (א) <u>דרך ב: נפצל למקרים</u>
   - $\binom{333}{3}$ - הן האפשרויות לבחור 3 מספרים שמתחלקים ב 3
   - $\binom{334}{3}$ - הן האפשרויות לבחור 3 מספרים שמתחלקים ב 3 עם שארית 1
   - $\binom{333}{3}$ - הן האפשרויות לבחור 3 מספרים שמתחלקים ב3 עם שארית 2
     - בינהם חיבור

- 333 - הן האפשרויות לבחור מספר 1 שמתחלקים ב 3
- 334 - הן האפשרויות לבחור מספר 1 שמתחלקים ב 3 עם שארית 1
- 333 - הן האפשרויות לבחור מספר 1 שמתחלקים ב 3 עם שארית
  - בינהם כפל
- בסה"כ:

$$\binom{333}{3}+\binom{333}{3}+\binom{333}{3}+333\cdot 334\cdot 333$$

***** שיעור 2 - להשלים 11/3/19 *********

מניה בסיסית של קבוצה סופית:

דוגמאות

1. <u>כמה אפשרויות ישנן לבחור 2 תת קבוצות מתוך קבוצה בגודל n כך ש:</u>
   - תת קבוצה אחת היא בגודל K .
   - תת קבוצה שניה היא בגודל L .
   - ידוע לנו ש $K+L\leq N$
   - האיבר הגדול ביותר בקבוצה K קטן מהאיבר הקטן ביותר בקבוצה שבגודל L

   <u>פתרון:</u> (בדרך כלל שאלות ארוכות מובילות לתשובה קצרה)

- כשאנו רוצים לבחור שתי תתי־קבוצות מתוך קבוצה בגודל N , ואנחנו יודעים שבקבוצה אין חזרות (N איברים שונים) נובע שגם בתתי הקבוצות כל האיברים יהיו שונים - **בלי חזרות**
- מכיון שבקבוצה **אין חשיבות לסדר,** אז סדר הבחירה של k האיברים או l האיברים לא חשוב לנו .
- **הקבוצות זרות** מנתון שהאיבר הכי גדול ב K קטן מהאיבר הכי גדול ב L , כלומר:

$$\underbrace{\{.........\}}_{K}<\underbrace{\{.........\}}_{L}$$

- <u>ניסיון לא טוב:</u>
  - לבחור את כל האפשרויות שבהן נבחר K איברים שונים מתוך $N-L$ האיברים הקטנים ביותר. כלומר $\binom{n-l}{k}\cdot\binom{l}{l}$
  - באותו מידה ניתן לחשב את L האיברים השונים מתוך $N-K$ איברים הגדולים ביותר כלומר $\binom{n-k}{l}\cdot\binom{k}{k}$
  - הבעיה שסכום הביטויים הנ"ל לא מכסה את כל האפשרויות, <u>לכן:</u>
- על כן נבחר את האיברים לשתי הקבוצות ביחד, ואחר נחלקם ל2 קבוצות, כלומר:
  - $\binom{n}{k+l}$ בחירת האיברים ל 2 הקבוצות
  - מספר האפשרויות לסידור הוא 1 (בגלל התנאי של הזרות בשאלה).
  - נשתמש בעקרון הכפל בין מספר הקבוצות למספר האפשרויות לסידור.
  - ובסה"כ:

$$\binom{n}{k+l}\cdot 1$$

2. <u>כמה סדרות בינאריות באורך n. בהן מופעים בדיוק k 1ים לא סמוכים ישנן (ללא רצף '11') ?</u>

<u>דרך א':</u>

- נסדר את כל $n-k$ ה0ים , וכעת נתייחס לרווחים בינהם כמו לתאים ול0ים כמו מחיצות, נרצה לחשב את מספר האפשרויות לתאים עם 1 בודד או ללא 1 בכלל

- כלומר מתוך $n-k+1$ מקומות אפשריים להכנסת 1 , נבחר k מקומות ־ בחירה בלי חזרות, ובלי חשיבות לסדר
- לכן $\binom{n-k+1}{k}\cdot 1$
- כאשר הכפלנו ב 1 כי ל0סים ישנה אפשרות סידור

<u>דרך ב':</u>

- נסדר את ה 1 בשורה (אפשרות 1), ובין האחדים מימין ומשמאל יש $k+1$ תאים, ובכל תא חייב להיות לפחות 0 אחד
- היות ויש לנו $k+1$ תאים לתוכם צריך להכניס $n-k$ כדורים, כשבכול התאים מלבד שניים לפחות כדור אחד
- נכניס לכל תא שצריך כדור אחד, מה שישיאר לנו $n-k-(k-1)=n-2k+1$
- וכעת נשתמש בנוסחה $D(k+1,n-2k+1)$

<u>לסיכום:</u>

- נוודא שאכן התוצאות תקניות:

$$\binom{n-k+1}{k}\cdot 1=0 \iff k>n-k+1 \iff 2k>n+1 \iff k=\frac{n+1}{2}$$

3. <u>כמה אפשרויות ישנן לבחור k שלמים מתוך הקבוצה $\{1,2....n\}$ ככה שלא יהיה אף זוג שלימים עוקבים?</u>
   - נשים לב שה n ו ה 1 מיוחדים כי להם יש "עוקב" אחד.
   - כמו כן, זו שאלה זהה לשאלה הקודמת
   - נסתכל על הקבוצה $\{1,2...,n\}$ כל בחירה של k איברים שונים נותנת סדרה בינארית באורך n שיש בה k אחדים.
   - הסבר:
     - משום שאם בחרנו את המספר ה i במקום ה i בסדרה נכתוב 1.
     - במידה ולא בחרנו את המספר i אז במקום ה i נכתוב 0

עקרון שובך היונים

הרעיון: יש לנו מספר יונים הגדול ממספר השובכים, אז קיים לפחות שובך אחד שיש בו יותר מיונה אחת.

יש לנו פונקציה: $F:A\to B$ (A,B סופיות)

אם $|A|>|B|$ אז קיימים לפחות שני איברים ב A שיש להם את אותה התמונה.

<u>דוגמאות:</u>

1. <u>תהי A קבוצה $A=\{1,2,...,9\}$, הוכיחו שבכל תת־קבוצה של A שיש שבה 6 איברים יש שני מספרים שסכומם 9?</u>
   - נחלק את A ל 5 קבוצות: $\{0,9\},\{1,8\},\{2,7\},\{3,6\},\{4,5\}$
   - ישנם 5 זגות מספרים ב A שסכומם 9
   - נבחר 5 מספרים אם בחרנו את זוג מאותה קבוצה סיימנו
   - אחרת, נבחר איבר שישי ומעקרון שובך היונים בחרנו איבר שנכנס ל"שובך" = קבוצה , ולכן יש לנו זוג שסכומו 9

2. <u>הוכיחו שבכל קבוצה של אנשים יש לפחות 2 אנשים שמכירם בדיוק אותו מספר אנשים בקבוצה (הכרות הוא יחס סימטרי + לא מכיר את עצמו)</u>
   - נסמן ב n את מספר האנשים בקבוצה כאשר $n>1$
   - מקסימום האנשים שאדם יכול להכיר הוא $n-1$ (ללא עצמו)
   - נשים לב שלא יתכן שיש אדם שיכיר 0 אנשים וגם אדם שמכיר את כולם
   - לכן "מספר ההכרויות" הם או בקבוצה מ $0,1,...,n-2$ או בקבוצה $1,2,....,n-1$

- בשני המקרים ישנם $n-1$ "הכרויות" = שובכים
- מנתון ישנם n אנשים = יונים
- לכן ישנם 2 אנשים שנכנסים לאותו שובך = אותו מספר הכרויות

3. <u>צלף קולע 5 חיצים לעבר מטרה שצורתה משולש שווה צלעות שאורך צלעו 2 מטרים, הוכח שאם כל החיצים פוגעים במטרה אז יש בהכרח שני חצים שיפגעו במטרה במרחק של מטר 1 לכל היותר.</u>

- נחלק את המשולש לארבעה חלקים
- אם שני חצים פגעו באותו משולש "קטן" אז המרחק בינהם הוא 1
- נניח בשלילה שכל חץ פגע במשולש "קטן" אחר
- מכיוון ויש 4 משולשים ו 5 חיצים, קיבלנו סתירה, ולכן הטענה נובעת.

4. <u>תהי X תת־קבוצה של $\{1,2,...2n\}$ בת $n+1$ איברים. הוכיחו שיש ב X 2 מספרים כך שהאחד מחלק את השני ללא שארית?</u>

- כל מספר טבעי ניתן לפרק לגורמים באופן יחיד (עד כדי סדר)
- מסקנה: כל מספר ניתן לכתוב כחזקה של $2 \times$ מספר אי זוגי , כלומר:

  $y = 2^t(3r+1)$

- מסקנה: לכל שני מספרים בחזקה 2 , אחד מהם מחלק את השני ללא שארית
- מסקנה: על כן כל שני מספרים בפרקו הנ"ל יש להם אותו כופל אי־זוגי, אחד מהם מחלק את השני ללא שארית
- נראה שבכל תת קבוצה X בגודל $n+1$ של הקבוצה $1,2,...2n$, יש שני מספרים שיש להם אותו כופל אי־זוגי בפירוק שתיארנו
- כל כופל אי־זוגי יהיה בין 1 ל 2מ לכן מספר הכופלים האי זוגיים הוא לכל היותר n . מכיוון ש $|X| > n$ בהכרח קיימים 2 מספרים איזוגיים כלומר:
  - $y_1 = 2^{t_1}(2r+1)$
  - $y_2 = 2^{t_2}(2r+1)$
- ומכאן ש (בה"כ) y_1 מחלק את y_2

משפט ארדש־סקקדש

בכל סדרה של n^2+1 מספרים ממשים שונים זה מזה, יש תת סדרה של לפחות $(n+1)$ ספרות שהיא יורדת או עולה

<u>הוכחה:</u>

- יהיה $S = n^2+1$, $\{a_1, a_2, ...a_s\}$
- לכל איבר a_i בסדרה נגדיר זוג מספרים $\{p_i, q_i\}$ באופן הבא:
  - p_i ־ האורך של תת הסדרה העולה הארוכה ביותר של $\{a_1, ...a_s\}$
  - q_i ־ האורך של תת הסדר היורדת הארוכה ביותר של $\{a_1, ..., a_s\}$שמתחילה ב a_i
- דוגמה:

6	1	3	8	5	2	7	4	10	9
a_1	a_2								a_{10}

- אם קיים i כך ש $p_i \geq n+1$ או $q_i \geq n+1$ אז סיימנו
  - אחרת ־ אז לכל i : $p_i \leq n$ וגם $q_i \leq n$ לכן $|\{p_i, q_i : 1 \leq i \leq s\}| \leq n^2$

- ל q_i ול p_i , יש n ערכים לכל היותר
- מכיון ש $S=n^2+1$, קיימים שני אינדקסים $i\neq j$ כך ש: $\{p_i,q_i\}=\{p_j,q_j\}$
- בה"כ $i<j$ לכן: $\{a_1,...a_i,...a_j,,,a_s\}$
- אם $a_i>a_j$ אז נוכל הלעריך סדרה יורדת שבמתחילה ב a_j ולקבל סדרה יורדת שמתחילה ב a_i ולכן $q_i>q_j$
- אם ש $a_i<a_j$: נוכל לקחת סדרה עולה שמתחילה ב a_j ולהעריך אותוה לסדרה עולה שמתחילה ב a_i , ולכן קילבנו ש $p_i>p_j$ וכאן יש לנו סתירה.
- לכן קיים i כך ש $p_i\geq n+1$ או $q_i\geq n+1$

שיעור 3 - 18/3/19

הוכחות קומבינטוריות

<u>הוכיחו: $\binom{2n}{2}=2\binom{n}{2}+n^2$:</u>

- <u>אגף שמאל:</u> בחירת 2 איברים שונים ללא חשיבות לסדר מתוך $2n$ איברים שונים.
- <u>אגף ימין:</u> נשים לב שיש חיבור ולכן "נחלק למקרים" - כלומר נחלק את $2n$ איברים ל 2 קבוצות בנות n איברים כל אחת, כעת:
  - $\binom{n}{2}$ - היא בחירת **זוג** איברים מקב' 1
  - $\binom{n}{2}$ - היא בחירת **זוג** איברים מקבוצה 2
  - $\binom{n}{1}\binom{n}{1}=n\cdot n=n^2$ - בחירת **זוג** ע"י נציג מכל קבוצה .
  - סה"כ: $2\binom{n}{2}+n^2$

<u>הוכיחו: $\sum_{i=2}^{n}(i-1)2^{n-1}=2^n-n-1$:</u>

- <u>אגף ימין:</u> הוא מס' הסדרות הבינאריות באורך n שיש להן לפחות 2, 1ים .
  - יש סדרה אחת ללא 1ים , ישנן n סדרות עם 1 יחיד

  <u>תאור נוסף:</u>

  - 2^n מס' תת הקבוצות של קבוצה בת n איברים
  - -1 : ללא קבוצה ריקה
  - $-n$: שאין בהן איבר יחיד
  - כלומר מס' תת הקבוצות המכילות לפחות 2 איברים.
- <u>אגף שמאל:</u>
  - נתבונן בסכום: $\sum_{i=2}^{n}(i-1)2^{n-i}=2^{n-2}+2\cdot 2^{n-3}+3\cdot 2^{n-4}+....+(n-1)\cdot 2^0$
  - נרצה להראות שגם אגף שמאל מתאר את אותו הסיפור
  - נגדיר את i להיות האינדקס של ה1 השני בסדרה (מבין ה1ים) -
    - אכן הערך המינמלי ל i הוא 2 . והמקסימלי הוא n .
    - לכל סדרה בת לפחות 2 1ים, מוגדר i אחד ויחיד (הסדרות זרות)
  - <u>מדוע?</u>
    - **לא נכון לומר:** ל - 2 סדרות שונות מתאימים iים שונים.

* **אלא:** נספור לכל $2 \le i \le n$ את כל הסדרות שיש להן אותו i , לכל $i \neq j$ יתאימו סדרות שונות כל סדרה באורך n עם 2 1ים לפחות תספור פעם אחת בדיוק
  - נראה שעבור i נתון ישנן $(n-i)\cdot 2^{n-i}$ סדרות מתאימות:
    * ב$i-1$ המקומות הראשונים בדרה יש 1 יחיד, ישנן $i-1$ אפשרויות למקום את ה 1 הזה:
    * מהמקום ה $i+1$ ועד למקום ה n כל סדרה אפשרית.
    * ישנן 2^{n-i} סדרות
    * לפי עקרון הכפל נקבל: $(i-1)2^{n-i}$
    * בדיאגרמה:

$$\underbrace{\lfloor\rfloor \quad \lfloor\rfloor \quad \lfloor\rfloor \quad \lfloor\rfloor}_{\substack{i-1 \\ \text{for } 1}} \underbrace{\lfloor 1\rfloor}_{i} \underbrace{\lfloor 1/0\rfloor \quad \lfloor 1/0\rfloor \quad \lfloor 1/0\rfloor \quad \lfloor 1/0\rfloor}_{n-i}$$

<u>בקבוצות:</u>

- נגדיר את i להיות האיבר השני הקטן ביותר בקבוצה מתוך $i-1$ איברים
- יש לבחור 1 לקב', ומתוך שאר $n-i$ האיברים יש לבחור תת קבוצה כלשהי

בינום ומקדמים בינומים

הבינום של ניוטון:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

<u>הוכחה קומבינטורית:</u>

- עבור k נתון נחשב את המקדם של a^k , והחזקה המתאימה של b .
- בהכפלה של $a+b$ n פעמים, בפתיחת סוגריים בוחרים או a או b (ולא שניהם).
  - לכן סכום החזקות של a ו b הוא n בדיוק.
  - לכן אם החזקה של a היא k אז החזקה של b היא בדיוק $n-k$,
  - לכן בסכום יופיע $a^k b^{n-k}$
- מתוך n סוגריים של $(a+b)$ בוחרים k סוגרים מהם נקח a, ומהשאר נקח b (כפי שהסברנו לעיל), זוהי בחירה ללא חזרות, וללא חשיבות לסדר. לכן הביטוי $a^k b^{n-k}$ יופיע $\binom{n}{k}$
- $0 \le k \le n$ (כש $k=0$ נקבל b^n כ $k=n$ נקבל a^n), עבור k שונים נקבל מחוברים שונים. מכאן יתקבל הסכום.

1. <u>הוכיחו $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$:</u>

<u>הוכחה ע"פ הבינום:</u> נציב בבינום $a=b=1$ אז:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 1^k \cdot 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$$

<u>הוכחה קומבינטורית (קבוצות):</u>

הסיפור: 2 האגפים הם הגודל של קב' החזקה של קב' בת n איברים.

<u>אגף ימין</u> - כל אחד מ n האיברים יכול להבחר או לא להבחר - וזה 2 אפשרויות. לפי עקרון הכפל 2^n .

<u>אגף שמאל</u> - $0 \le k \le n$ (גודל תת קב') $\binom{n}{k}$ תתי קב' בגדול k.

2. חשבו $\sum\limits_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$:

נפתח את הסיגמה:

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = 1\cdot\binom{n}{1} + 2\cdot\binom{n}{2} + ... + n\cdot\binom{n}{n}$$

על פי הבינום:

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!} = \sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{\boldsymbol{(k-1)}!(n-k)!} = \sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}$$

חישוב צדדי:

$$\binom{m}{k-1} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)} \Rightarrow \begin{aligned} n-k &= m-k+1 \\ m &= n-1 \end{aligned}$$

לכן:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\boldsymbol{n(n-1)!}}{(k-1)!(n-k)!} = \boldsymbol{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n\cdot\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}$$

$$= n\left[\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + .. + \binom{n-1}{n-1}\right] = n\cdot\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j} = n\cdot 2^{n-1}$$

זהות פסקל $\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}$

הוכחה אלגברית:

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\underbrace{\left[\frac{1}{n}(n-k) + \frac{1}{n}k\right]}_{=1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

הוכחה קומבינטורית:

אגף ימין: בחירת k איברים שונים ללא חשיבות לסדר מתוך n איברים שונים

אגף שמאל: יש סכום לכן נפצל למקרים:

נסתכל על איבר מסוים a_1 , בכל בחירה של k איברים, מתקיים ש a_1 נבחר או שלא.

- אם a_1 נבחר: אז $\binom{n-1}{k-1}$ הוא בחירת שאר $k-1$ האיברים מתוך $n-1$ שנותרו
- אם a_1 לא נבחר: אז $\binom{n-1}{k}$, הוא בחירת k מתוך $n-1$ האיברים שנותרו
- מכיון שהאפשרות הנ"ל זרות, התשובה היא $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

המשולש:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}$$

טענה: $\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1}\frac{n-k+1}{k}$

הוכחה אלגברית: לכל $0 \le k \le n$

$$\binom{n}{k-1}\cdot\frac{n-k+1}{k} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}\cdot\frac{n-k+1}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

<u>טענה:</u>

אם n **זוגי** $\binom{n}{\frac{n}{2}} > \binom{n}{\frac{n}{2}+1} > .... > \binom{n}{n} \wedge \binom{n}{0} < \binom{n}{1} < ... < \binom{n}{\frac{n}{2}}$

אם n **אי־ זוגי** $\binom{n}{\frac{n+1}{2}} > \binom{n}{\frac{n}{2}+1} > .... > \binom{n}{n} \wedge \binom{n}{0} < \binom{n}{1} < ... < \binom{n}{\frac{n-1}{2}} = \binom{n}{\frac{n+1}{2}}$

<u>הוכחה:</u>

על פי טענה קודמת:

$$\binom{n}{k} > \binom{n}{k-1} \iff \binom{n}{k-1}\cdot\frac{n-k+1}{k} > \binom{n}{k-1} \iff \frac{n-k+1}{k} > 1 \iff n-k+1 > k \iff k < \frac{n+1}{2}$$

כעת:

- אם n זוגי אז: $\frac{n+1}{2} = \underbrace{\frac{n}{2}}_{\in\mathbb{N}} + \frac{1}{2}$, והרי $k \in \mathbb{N}$ לכן: $k \le \frac{n}{2}$
- באותו אופן אם n אי זוגי

<u>דוגמה: הוכיחו $\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}$:</u>

<u>הוכחה אלגברית:</u>

$$\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{k!}{m!(k-m)!} = \frac{n!}{(n-k)!m!(k-m)!} =$$

$$\frac{n!}{m!\cancel{(n-m)!}}\cdot\frac{\cancel{(n-m)!}}{(k-m)!(n-k)!} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}$$

<u>הוכחה קומבינטורית:</u>

- <u>אגף שמאל:</u> בחירה של ועד של k אנשים, ומתוכם בחירת יושב ראש ו $m-1$ סגנים. קודם בוחרים את כל הועד ומתוך הועד הנבחר בוחרים יו"ור וסגניו
- <u>אגף ימין:</u> קודם בוחרים את היו"ר וסגניו ואח"כ בוחרים את שאר הועד מתוך מי שנשאר.

<u>הוכיחו: $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0$</u>

<u>הוכחה בעזרת הבינום:</u> נבחר את $a=-1$ ואת $b=1$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = (-1+1)^n = 0^n = 0$$

<u>הוכחה קומבינטורית:</u>

צ"ל ־ נפתח את הסיגמה:

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + ...(-1)^n\binom{n}{n} = 0 \iff \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + ... = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + ...$$

ונשים לב שצד שמאל מייצג תתי קבוצות מגודל זוגי, וצד ימין מייצג תתי־קבוצות מגודל אי־זוגי

<u>הוכחה:</u>

- נגדיר פונ', שהתחום שלה הוא קבוצת תתי הקב' בגדול זוגי, והטווח הוא קבוצת תתי הקבוצות בגדול אי־זוגי באופן הבא:

$$f : A \to B$$
$$f(C) = \begin{cases} C\setminus\{n\} & n \in C \\ C \cup \{n\} & n \neq C \end{cases}$$

  - בה"כ האיברים הם $1, ..., n$

- $f(C)$ היא תת קב' של $\{1,....,n\}$ בגדול אי־זוגי , לכן $f(C)\in B$
- כדי להראות ש f חח"ע ועל נגדיר את f^{-1}

$$f^{-1}:B\to A$$
$$f^{-1}(D)=\begin{cases}D\backslash\{n\} & n\in D\\ D\cup\{n\} & n\neq D\end{cases}$$

- נותר להראות שהרכבת הפונקציות היא פונקציית הזהות, והראנו בלוגיקה שאם קיימת פונקציה הפיכה אז היא f היא חח"ע ועל
- מכאן נקבל ש $|A|=|B|$ ולכן:
  - $|A|=\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+...$
  - $|B|=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+...$
- ומכאן שהסכומים שווים

מולטינום ומקדמים מולטינומים

<u>הגדרה: מקדם מולטינומי (הכללה של $\binom{n}{k}$) :</u> $\binom{n}{k_1,k_2,k_3,...k_m}=\frac{n!}{k_1!k_2!\cdot....k_m!}$, כאשר $k_1+k_2+...+k_m=n$
עבור $m=2$ יתקיים ש: $\binom{n}{k_1,k_2}=\frac{n!}{k_1!k_2!}=\frac{n!}{k_1!(n-k)!}$

<u>קומבינטורית:</u>

$\sum\limits_{i=1}^{m}k_i=n$ הוא מספר האפשרויות לסדר בשורה n איברים כאשר k_i איברים הם מסוג i (=סדרות באורך n מ על א"ב בגודל m , כאשר ישנם k_i איברים מהאות ה i)

המולטינום הוא למעשה הכלל של הבינום, יתקיים ש:

$$(x_1+x_2+.....x_m)^n=\sum_{S}^{n}\binom{n}{k_1,k_2,...k_m}x_1^{k_1}x_2^{k_2}...x_n^{k_n}$$

S : , $0\leq k_1,k_2,....k_n\leq n$, $k_1+k_2+...k_n=n$

שיעור 4 - 25/3/19

תזכורת בסוף שיעור שעבר הראינו את המולטינום:

- <u>המקדם המולטינומי:</u> $\binom{n}{k_1,k_2,k_3,...k_m}=\frac{n!}{k_1!k_2!\cdot....k_m!}$, כאשר $k_1+k_2+...+k_m=n$
- עבור $m=2$ יתקיים ש: $\binom{n}{k_1,k_2}=\frac{n!}{k_1!k_2!}=\frac{n!}{k_1!(n-k)!}$, כאשר $k_2=(n-k_1)$, ולכן אנחנו רואים שזו בעצם הכללה לבינום

<u>שאלה: כמה סדרות בינריות באורך n ישנן , שיש בהם k 0ים ?</u>

$$\underbrace{\underline{0}\ \_\ \_\ \_\ \underline{0}}_{n}\Rightarrow\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- <u>הסבר על פי צד שמאל:</u> בסה"כ n מקומות בוחרים k מקומות לשים 0ים (ללא חזרות, וללא חשיבות לסדר)
- <u>הסבר על פי צד ימין:</u>
  - $n!$ מבטא את האפשרויות השונות לסידור n איברים שונים.
  - אבל צריך להחסיר כמה אפשרויות זהות, שהן:

- $k!$ מבטא את האפשרויות השונות להחלפת האפסים בינהם
- $(n-k)!$ - מבטא את האפשרויות השונות להחלפת האחדות בינהם

<u>הכללת השאלה: כמה סדרות ישנן מעל $\{0,.....m-1\}$ באורך n שבהן יש:</u>
<u>k_1 - 0ים , k_2 - 1ים ... k_j $(j+1)$ים ... כך ש: $\sum\limits_{j=1}^{m} k_j = n$ (א"ב בגודל m) ?</u>

- <u>דרך א:</u> נוכל להשתמש במולטינום.
- <u>דרך ב:</u>
  - נניח ויש לנו n איברים שונים, יש $n!$ אפשרויות לסדרם בסדרה
  - אבל צרך להחסיר כמה אפשרויות זהות, שהן:
  - $k_1!$ - להחלפת 0ים
  - k_2 - להחלפת 1ים
  - ...
  - סה"כ: $\frac{n!}{k_1!k_2!\cdot....k_m!} = \binom{n}{k_1,k_2,k_3,...k_m}$
- <u>דרך ג:</u>
  - מתוך n מקומות , נבחר k_1 מקומות לשים 0ים , לכן יש $\binom{n}{k_1}$
  - מתוך $n-k_1$ מקומות, נבחר k_2 מקומות לשים 1ים , לכן יש $\binom{n-k_1}{k_2}$
  - .....
  - האיבר ה k_j , $\binom{n-k_1-,k_2-,k_3-k_{j-1}j}{k_j}$
  - סה"כ:

$$\binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}.....\binom{n-k_1-,k_2-,k_3-k_{j-1}j}{k_j} \Leftrightarrow \frac{n!}{\underbrace{k_!!}\cancel{(n-k_1)!}} \cdot \frac{\cancel{(n-k_1)!}}{\underbrace{k_2!}\cancel{(n-k_1-k_2)!}} .... \frac{\cancel{(n-k_1-,k_2-,k_3-k_{j-1}j)!}}{\underbrace{k_m!}\underbrace{(n-k_1-,k_2-,k_3-k_{m}j)!}_{=(n-n)!=1}}$$

$$= \frac{n!}{k_1!k_2!....k_m!} = \binom{n}{k_1,k_2,....,k_m}$$

נוסחת המולטינום

$$\boldsymbol{(x_1+x_2+....+x_m)^n = \sum_{\substack{\sum_{i=1}^m k_i = n \\ k_i\in[0,n],\ \forall i\in[1,m]}}^{n} \binom{n}{k_1,k_2,...,k_m} x^{k_1}\cdot x_2^{k_2}\cdot ....\cdot x_m^{k_m}}$$

<u>שאלה: מצאו את המקדם של x^{10} בבטוי $(4-7x+2x^3)^8$</u>

- נרשום את המשתנים:

$$\begin{array}{ll} x_1=-4 & n=8 \\ x_2=-7x & m=3 \\ x_3=2x^3 & \end{array}$$

- נציב במולטינום:

$$\sum_{\substack{\sum_{i=1}^3 k_i = n \\ k_i\in[0,8],\ \forall i\in[1,3]}}^{8} \binom{8}{k_1,k_2,...,k_m}(-4)^{k_1}\cdot(-7x)^{k_2}\cdot(2x^3)^{k_3}$$

$$= \sum_{\substack{\sum_{i=1}^{3} k_i = n \\ k_i \in [0,8],\ \forall i \in [1,3]}}^{8} \binom{8}{k_1,k_2,\ldots,k_m} (-4)^{k_1} \cdot (-7)^{k_2} \cdot 2^{k_2} \cdot x^{k_2+3k_3}$$

- לכן צריך ש: $\begin{matrix} k_1+k_2+k_3=8 \\ k_2+3k_3=10 \end{matrix}$, ובעבור התניות אלו נחשב את המקדם ל x^{10} , שהוא : $\binom{8}{k_1,k_2,\ldots,k_m}(-4)^{k_1} \cdot (-7)^{k_2} \cdot 2^{k_2}$
  - עבור $k_3=0$: אז $k_2=10>8=n$ ו$k_1 \in \mathbb{N}$ ולכן זו אינה אפשרות
  - עבור $k_3=1$: אז $k_2=7$ ולכן $k_1=0$ נציב בנוסחה:

    $\binom{8}{1,7,1}(-4)^0 \cdot (-7)^7 \cdot 2^1$
  - עבור $k_3=2$: אז $k_2=4$ ולכן $k_1=2$ נציב בנוסחה:

    $\binom{8}{2,4,2}(-4)^2 \cdot (-7)^4 \cdot 2^2$
  - עבור $k_3=3$: אז $k_2=1$ ולכן $k_1=4$ נציב בנוסחה:

    $\binom{8}{4,1,3}(-4)^4 \cdot (-7)^1 \cdot 2^3$
  - עבור $k_3=4$ אז $k_2=-2 \notin \mathbb{N}$ ולכן זו אינה אפשרות.
- סה"כ:

$$\binom{8}{1,7,1}(-4)^0 \cdot (-7)^7 \cdot 2^1 + \binom{8}{2,4,2}(-4)^2 \cdot (-7)^4 \cdot 2^2 + \binom{8}{4,1,3}(-4)^4 \cdot (-7)^1 \cdot 2^3$$

- נותר לוודא שאף גורם לא מתבטל, ואכן זה כך, ועל כן זהו המקדם ל x^{10}.

הוכחת נוסחת המולטינום - באינדוקציה על m

בסיס: $m=2$, זהו הבינום והוכחנו זאת.

צעד: נניח נכונות ל $k \le m$ ונוכיח ל $m+1$

$$\left(\underbrace{x_1+x_2+\ldots.+x_m}+x_{m+1}\right)^n \overset{\text{binom}}{=} \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} (x_1+x_2+\ldots+x_m)^l x_{m+1}^{n-l}$$

$$\overset{\text{indu'}}{=} \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} \left(\sum_{\substack{\sum_{i=1}^{m} k_i = l \\ k_i \in [0,l]}}^{n} \binom{l}{k_1,k_2,\ldots,k_m} \left(x^{k_1} \cdot x_2^{k_2} \cdot \ldots. \cdot x_m^{k_m}\right) \right) x_{m+1}^{n-l}$$

נשים לב שניתן להכניס $\binom{n}{l}$ כי הוא תלוי בסכום החיצוני:

$$\overset{\text{enter} \binom{n}{l}}{=} \sum_{l=0}^{n} \sum_{\substack{\sum_{i=1}^{m} k_i = l \\ k_i \in [0,l]}}^{n} \binom{n}{l} \binom{l}{k_1,k_2,\ldots,k_m} \left(x^{k_1} \cdot x_2^{k_2} \cdot \ldots. \cdot x_m^{k_m}\right) x_{m+1}^{n-l}$$

חישובי צד: נגדיר $k_{m+1}=n-l$

- ונשים לב שמתקיים:

$$\binom{n}{l}\binom{l}{k_1,k_2,\ldots,k_m} = \frac{n!}{\cancel{l!}\boldsymbol{(n-l)!}} \cdot \frac{\cancel{l!}}{k_1!\ldots k_m!} = \frac{n!}{k_1!\ldots \boldsymbol{k_{m+1}}!} = \binom{n!}{k_1!,\ldots..k_{m+1}!}$$

- מנתון ש $n \le l \le 0$ נובע ש: $0 \le n-l \le n$ ולכן $0 \le x_{m+1} \le n$
  - לכן: $\underbrace{k_1+k_2+\ldots.k_m}_{l}+\underbrace{k_{m+1}}_{n-l}=n$

כעת נוכל להציב, ולקבל:

$$= \sum_{\substack{\sum_{i=1}^{m} k_i = n \\ k_i \in [0,n],\ \forall i \in [1,m+1]}}^{n} \binom{n}{k_1, k_2, ..., k_{m+1}} x^{k_1} \cdot x_2^{k_2} \cdot .... \cdot x_{m+1}^{k_{m+1}}$$

כנדרש

מספרי קטלן

כמה אפשרויות ישנן לסדר בשורה n, 0ים ו n 1ים כך שבכל רישא , של הסדרה מס' ה 0ים $\leq$ מס' ה1 ים?

נסמן c_n ־ מס' קטלן ה nים

שקול לשאלה : מס' האפשרויות לסדר בשרוה n זוגות סוגריים כך שיתקבל ביטוי מאוזן.

לדוגמה ־ הביטוי $)()(()$ אינו תקין, והביטוי $()()()$ תקין ־ היות שבכל רישא יש יותר פותחים מסוגרים.

טענה: $c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$

<u>הוכחה קומבינטורית:</u>

- נסמן ב S את קב' כל הסידורים "החוקיים"
- נסמן ב A את קב' כל הסידורים בשורה של n , 0ים ו n 1ים
- אז $S \subseteq A$ ומתקיים ש (הסבר כמו בהוכחה של המולטינום שהראינו לעיל):

$$|A| = \frac{(2n)!}{n!(2n-n)!} = \binom{2n}{n}$$

- נסמן ב B את קב' האפשרויות ה"רעות" כלומר כל האפשרויות לסדר n 0ים ו n 1ים בשורה, כך שקיימת לפחות רישא אחת שבה מס' ה 0ים $>$ מס' ה1ים
  - לדוגמה: $100..... \in B$
- נגדיר את C להיות קב' כל הסדרות הבינאריות שיש בהן $n+1$ 0ים ו $n-1$, 1ים אז:

$$|C| = \binom{2n}{n+1}$$

- נוכיח ש $|B| = |C|$
  - נגדיר $f : B \to C$ ונוכיח ש f חח"ע ועל , $f(b) = \left(\bar{b_1}, ...\bar{b_j} b_{j+1}, ...b_{2n}\right)$
    * כאשר $b \in B$, $b = (b_1, ...b_{2n})$, עם $b_i \in \{0,1\}$
    * יהי j ,המקום הראשון ש"התקלקל" , כלומר j המקום הראשון בסדרה שעד אליו מס' ה 1ים גדולים ממס' ה0ים
  - נראה ש $f(b) \in C$:
    * נסמן ב x את מס' ה0ים בסדרה b עד המקום ה j.
    * נחשב את מס' ה 1ים בסדרה $f(b)$, מספר ה 1ים ב b עד המקום j $x + 1 = j$
    * מס' ה 0ים ב $f(b)$:

$$\underbrace{x+1}_{\text{up to j index}} + \underbrace{n-x}_{\text{the rest}} = n+1$$

    * מס' ה1 ים ב$f(b)$ (מנימוק דומה) :

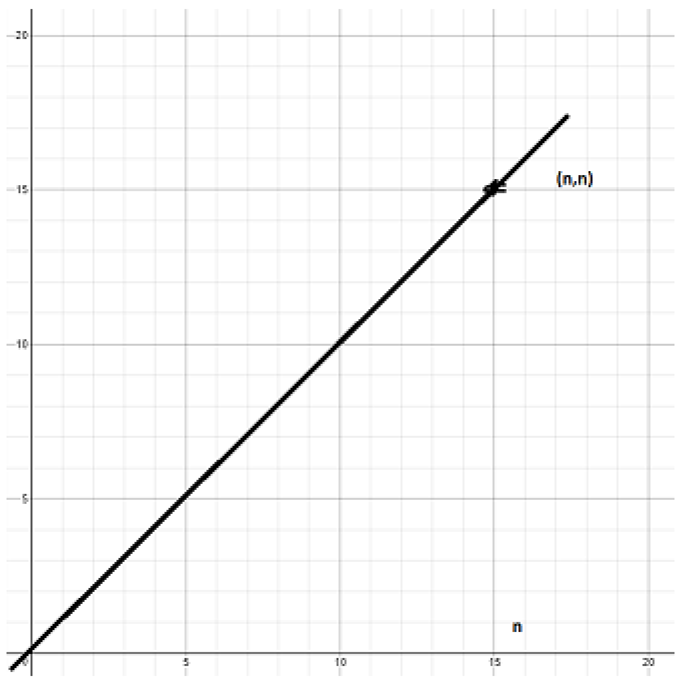
$$\underbrace{x}_{\text{up to j index}} + \underbrace{n-(x+1)}_{\text{the rest}} = n-1$$

- נגדיר פונקציה $g : C \to B$ באופן הבא: $g(c) = (\bar{c_1}, ..., \bar{c_j}, c_{j+1}, ...c_n)$
  - כאשר $c = (c_1, ..., c_{2n})$, יהי j האינדקס הקטן ביותר שעבורו מס' ה 0ים ברישא של הסדרה גדול ממס' ה 1ים
  - על ידי חישוב דומה נקבל ש $g(c) \in B$
- קל לראות ש $I = g \circ f = g \circ f$, (I = פונקציית הזהות) - נשים לב שה j שהוגדר ב 2 הפונ' הוא אותו j - לכן $|B| = |C|$

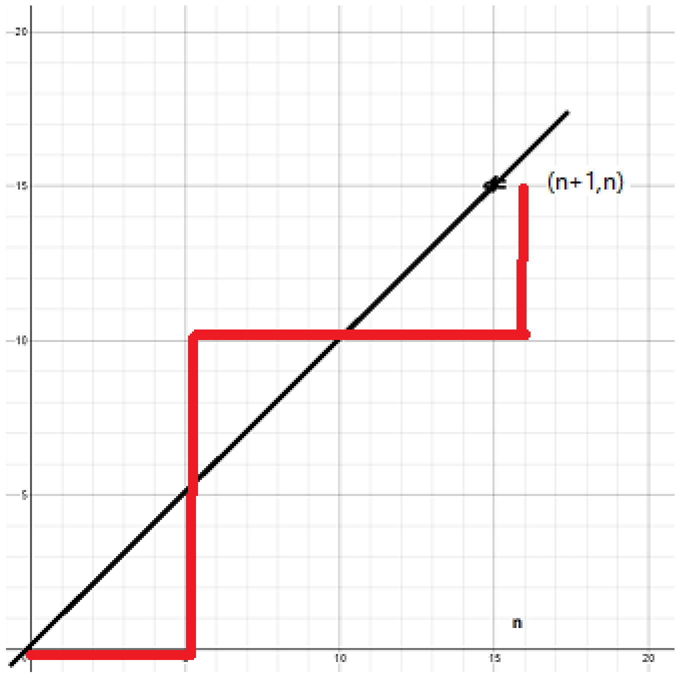
- לכן:

$$|S| = |A| - |B| = |A| - |C| = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{2n!}{n!n!} - \frac{2n!}{(n-1)!(n+1)!} = \frac{2n!}{n!n!}\left(1 - \frac{n}{(n+1)}\right) = \binom{2n}{n}\frac{1}{n+1}$$

<u>הוכחה גואמטרית:</u>



- הרעיון, שזה שקול לחישוב מספר המסלול בהן אסור לחתוך את האלכסון, כלומר תמיד אצטרך יותר צעדים ימינה, מצעדים למלעלה
- בנוסף נזיז את המסלולים 1 ימינה, ונדרוש ש:
  - שהמסלול יסיים ב $(n+1, n)$
  - כך שלא ניגע באלכסון בו $x = y$
- נחשב דרך המשלים, כלומר סך המסלולים פחות מספר המסלולים ה"רעים" (שחותכים)



- הסבר מפורט יותר מירה תעלה במצגת למודל

שיעור 5 - 1/4/19

דוגמאות לקטלן

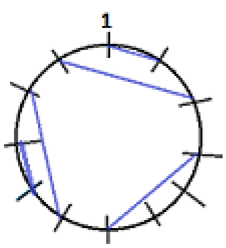
כמה אפשרויות ישנן לסדר k זוגות של סוגריים עגולים, r זוגות סגוריים מרובעים, ו n זוגות של סוגריים מסולסלים, כך שהביטוי שמתקבל לכל זוג סגוריים מהווה ביטוי מאוזן.

- c_k - סידור הסוגריים העגולים במקומות שנבחרו
- c_r - סידור הסוגריים המרובעים במקומות שנבחרו
- c_n - סידור הסוגריים המסלוסלות במקומות שנבחרות
- $\binom{2n+2k+2r}{2k}$ - בחירת המקומות בהם יהיו $2k$ סוגריים עגולים
- $\binom{2n+2r}{2r}$ - בחירת המקומות (מתוך אלו שנשארו) בהם יהיו $2r$ סוגרים מסולסלים.
- $\binom{2n}{2n}$ בחירת המקומות (מתוך אלו שנשארו) יהיו $3n$ סוגריים מסולסים.

שאלה: נתון מעגל ועליו $2n$ נקודות (ממספורות מ1 עד $2n$)

כמה אפשרויות ישנן לחלק את הנקודות לזוגות כך שהמיתרים שמתקבלים מהחביור הזוגות לא יחתכו?

לדוגמה:



- בהנתן חלוקה לזוגות לפי הנדרש בשאלה, נגדיר פונק' שנותנת לחלוקה כזו סדרה בינארות באופן הבא:
- לכל זוג (מיתר) $i-j$ כאשר $i<j$ נגדיר את המקום ה i בסדרה להיות 0, ואת המקום ה j בסדרה להיות 1
- בסדרה המתקבלת ישנם n 0ים ו n 1ים בנוסף בכל רישא של הסדרה מס' ה 0ים $\leq$ מס' ה1ים - גדול ממספר ה0ים .

בדוגמה, הסדרה תהיה:

$$\begin{array}{cccccccccccc} \lfloor 0 \rfloor & \lfloor 0 \rfloor & \lfloor 0 \rfloor & \lfloor 0 \rfloor & \lfloor 1 \rfloor & \lfloor 1 \rfloor & \lfloor 0 \rfloor & \lfloor 0 \rfloor & \lfloor 1 \rfloor & \lfloor 1 \rfloor & \lfloor 1 \rfloor & \lfloor 1 \rfloor \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{array}$$

- יהי i המקום המתאים ל j (כלומר מה שהתקבל בסדרה מהמיתר $i-j$) נקבל ש i מימין ל j בסתירה להגדרת הפונקציה.
- נוכיח שהפנו' שהגדרנו היא חח"ע ועל ע"י כך שנגדיר פונ' הפוכה מקב' הסדרות הבינאריות באורך $2n$ לזוגות של $2n$ נקודות שמתאימה לתנאי השאלה
  - נעבור על ה 1ים בסדרה. לכל 1 נמצא את ה 0 שלו
  - אם ה1 הנ"ל נמצא במקום ה j וה־0 במקום ה i נעביר מיתר בין i ל j על המעגל.
- לכן התשובה היא c_n

עקרון ההכלה וההדחה

העיקרון עבור 3 קבוצות:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

ההוכחה:

- יהי $x \in A_1 \cup A_2 \cup A_3$, נראה כמה שבכל צד x נספר פעם
- נפצל למקרים....

בהנתן n קב' סופיות $A_1, A_2, ..., A_n$ נרצה לחשב את $\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right|$ אז:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1\leq i<j\leq}^{n} |A_i \cap A_j| + ...(-1)^{j+1} \sum_{1\leq i_1<....<i_j\leq n}^{n} \left|A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_j}\right|$$

<u>הוכחה:</u>

- יהי $A_1 \cup .... \cup A_2$ נראה שספרנו את x פעם אחת בדיוק בנוסחה
- נסמן ב t את הקב' ש x איבר שלהן $1 \leq t \leq n$

$$\begin{array}{ccccccccc} t & - & \binom{t}{2} & + & \binom{t}{3} & ... & (-1)^{(j+1)}\binom{t}{j} & ... & (-1)^{t+1}\binom{t}{t} \\ j=1 & & j=2 & & j=3 & & & & j=t \end{array}$$

- נשים לב שהביטוי מתאים לבינום לכן:

$$\sum_{j=1}^{t} \binom{t}{j}(-1)^{\mathbf{j+1}} = \mathbf{-}\sum_{j=1}^{t} \binom{t}{j}(-1)^{j}(1)^{t-j} = -\left[\left(\sum_{\mathbf{j=0}}^{t} \binom{t}{j}(-1)^{j}(1)^{t-j}\right) - \mathbf{1}\right] \overset{\text{binum}}{=} (1-1+1)^{t} = 1$$

מקרה פרטי של הנוסחה:

- אם לכל j החיתוכים $|A_{i_1} \cap A_{i_2} ..... \cap A_{i_j}|$ שווים לכל $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq ..i_j \leq n$ אז לניתן לפשט את הנוסחא

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \binom{n}{j} \cdot |A_{i_1} \cap A_{i_2} ..... \cap A_{i_j}|$$

דוגמאות:

1. <u>כמה אפשרויות ישנן לסדר בשורה 3 כדורים אדומים, 3 כדורים כחולים, ו 3 כדורים שחורים, כך שאין שלשה רצופה של כדורים שהם מאותו צבע?</u>

- נחשב דרך המשלים: "אפשרויות רעות" = כל האפשרויות לסדר בשורה את הכדורים כך שקיימת שלשה רצופה אחת לפחות
- נחשב את סה"כ האפשרויות לסדיור כדורים: ע"פ המולטינום : $\binom{9}{3,3,3}$
- נגדיר:
  - A_1 - כל הסידורים בהם יש שלשה אדומה רצופה.
  - A_2 כל הסידורים בהם יש שלשה כחולה רצופה.
  - A_3 כל הסידורים בהם יש שלשה שחורה רצופה.
- ננסה חלוקה אחרת (לא טובה):
  - A_1 - כל הסידורים בהם יש שלשה אחת בדיוק באותו צבע.
  - A_2 - כל הסידורים בהם יש 2 שלשות בדיוק באותו צבע.
  - A_3 - כל הסידורים בהם יש 3 שלשות בדיוק באותו צבע.
    * זהו סידור בעייתי, כי אם הייתי יודע איך לחשב שלא יהיה רצף כלשהו, לא היתי צריך לחלק לקבוצות הללו. כלומר, קשה לחשב את עוצמת הקבוצות הללו, ולכן זה לא טוב.
    * כלל אצבע, אם הקבוצות זרות אז אולי מצאנו פתרון אלגנטי לשאלה, אבל לעקרון הכלה והדחה כנראה שזה לא יתאים.
- (נחזור לחלוקה הראשונה) - נחשב את $|A_1|$ נתייחס לשלשה האדומה כאיבר 1, וכעת מהמולטינום $|A_1| = \binom{7}{3,3,1}$
- באותו אופן $|A_2| = |A_3| = \binom{7}{3,3,1} = \frac{7!}{3!3!}$
- כעת: $|A_1 \cap A_2| = \binom{5}{3,1,1} = \frac{5!}{3!}$
- $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 3!$
- סה"כ:

$$\frac{9!}{(3!)^3} - 3\frac{7!}{(3!)^2} + \binom{3}{2}\frac{5!}{3!} - 3!$$

2. <u>כמה אפשרויות ישנן לקבל 17 עם 5 קוביות שונות (כל האפשרויות שסכום התוצאות יהיה 17)?</u>

- נגדיר לכל ערך של קוביה משתנה. לקוביה ה i נגדיר משתנה x_i <u>צ"ל:</u> $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 17$ לכל $1 \leq i \leq 5$ מתקיים ש: $1 \leq x_i \leq 6$
- נחלק "כדור" לכל אחד מהתאים ונקבל את המשוואה החדשה: $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 12$, לכן $1 \leq i \leq 5$ מתקיים ש: $y_i \leq 5$
- נחשב: סה"כ פחות ה"אפשרויות הרעות".
- סה"כ: $D(5, 12)$
- "אפשרויות הרעות" = כל האפשרויות שבהן קיים iכך ש $y_i \geq 6$.

נחשב:

- נגדיר A_i = כל ה i אפשרויות שבהן $y_i \geq 6$. $1 \leq i \leq 5$
  * נכניס לתא ה i שישה כדורים נחלק את השאר ללא מגבלות, לכן $|A_i| = D(5, 12-6) = D(5,6)$
- $|A_1 \cap A_2|$ - נכניס 6 כדורים לראשון, ו6 לשני, ולכן לא נותר כדורים לחלק = $D(5,0)$
- כל חיתוך גדול יותר יתן 0 (אפשרויות)

- סה"כ:

$$D(5,12) - 5 \cdot D(5,6) + \binom{5}{2} \cdot D(5,0) - 0 + 0 - 0$$

שיעור 6 - 8/4/19

עקרון הכלה הודחה

שאלה: תהי קבוצה A בת k איברים , B קב' n איברים. כמה פונ' ישנן מ A על B ?

עבור $n < k$ נאמר שזה 0

ועבור $n \geq k$ אמר שזה $n!(k-n)^n$

הבעיה: אנחנו לא סופרים את כל המקרים, מה קורה אם משנים את הסדר בקבוצה B ?

גם אם ננסה לתקן: ולחשב את בחירת האיברים קודם, נקבל ספירה כפולה.

לכן יש להשתמש בעקרון ההכלה והדחה, נחשב:

- n^k = סה"כ פונ' (בחירה עם חזרות ועם חשיבות לסדר)
- כעת נחשב דרך המשלים כלומר: הפונקציות על = שאינן על - סה"כ
  - צריך לחשב את הפונקציות שקיים איבר בטווח שאין לו מקור.
- כעת נגדיר A_i = פונקציה שהאיבר ה i ב B לא בתמונה שלהן (כלומר לא מגיעות מאליבר ה i ב B) $1 \leq i \leq n$
- $|A_i|$= $(n-1)^k$ - יש איבר אחד פחות בטווח
- $|A_i \cap A_j|$ = $(n-2)^k$
- $\left|\bigcap_{i=1}^{t} A_i\right| = (n-t)^k$
- כלומר התשובה:

$$n^k - \binom{n}{1}(n-1)^k + \binom{n}{2}(n-2)^k + ... + (-1)^{j+2}\binom{n}{j}(n-j)^k ... + (-1)^n\binom{n}{n}(n-n)^k = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}(n-j)^k$$

אי-סדר מלא על n איברים

מהו מס' התמורות (=מס' סידורים בשורה של איברים שונים), בהן אף איבר לא נמצא במקומו, כלומר A_1 לא במקום הראשון, A_2 לא בשני....?

- בה"כ נסדר את המספרים הטבעיים בין 1 ל n

  למשל, נקח את $n=3$ אז נחפש סידור מהסוג: 312 ולא 321
- נשתמש בהכלה והדחה, ושוב נחפש את : "תמורות רעות" - סה"כ
  - תמורות "רעות" = כל התמורות בהן i נמצא במקום ה i .
- סה"כ האפשרויות לסידור: $n!$

- נגדיר A_i - התמורות בהן i נמצא במקום ה i , עבור $1 \le i \le n$
- $|A_i|$= $(n-1)!$ - יש איבר אחד פחות בטווח, ויש $\binom{n}{1}$ כאלה
- $|A_i \cap A_j|$ = $(n-2)!$ ויש $\binom{n}{2}$
- $\left|\bigcap\limits_{i=1}^{t} A_i\right| = (n-t)!$ ויש $\binom{n}{t}$
- ...

$$n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! + ... + (-1)^{j+2}\binom{n}{j}(n-j)!... + (-1)^n\binom{n}{n}(n-n)!$$

$$= \sum_{j=1}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}(n-j)! = \sum_{j=1}^{n}(-1)^j\frac{n!}{j!\cancel{(n-j)!}}\cancel{(n-j)!} = n!\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^j}{j!} \xrightarrow[n\to\infty]{} n!\frac{1}{e} = D_n$$

דוגמה: n ילדים הלכו לקייטנה כל אחד הגיע עם בקבוק וכובע. כמה אפשרויות ישנן לחלק בסוף היום את הבקבוקים והכובעים כך שכל ילד יקבל בקבוק אחד וכובע אחד, ובנוסף מתקיים התנאי הבא:

<u>א. כל ילד קיבל כובע לא שלו ובקבוק לא שלו</u>

- נשתמש בנוסחת האי־סדר שלמדנו הרגע, אך צריך לשפץ
- D_n אי־סדר מלא לבקבוקים
- D_n אי־סדר לכובעים
- $D_n \cdot D_n$ (עקרון הכפל)

<u>ב. כל ילד קיבל לפחות חפץ אחד לא שלו</u>

- נשים לב שיש אפשרויות בב' שהן לא סדר מלא - כלומר ילדה קיבלה את הכובע שלה, וילד שקיבל את הבקבוק שלו - ועדיין צרך לספור אפשרויות אלו
- נשתמש במשלים : אפשרויות רעות - סה"כ
  - אפשרויות רעות: כל האפשוריות בהן קיים ילד שקיבל גם את הבקבוק וגם את הכובע
- סה"כ: $(n!)^2$ - סידור כובעים , סידור בקבוקים - כפל
- נגדיר את A_i להיות כל התמורות בהן הילד ה i קיבל את הכובע והבקבוק שלו
- $|A_i|$ = $((n-1)!)^2$ ויש $\binom{n}{1}$
- $|A_i \cap A_j|$ = $((n-2)!)^2$ ויש $\binom{n}{2}$
- $\left|\bigcap\limits_{i=1}^{j} A_i\right| = (n-j)!$ ויש $\binom{n}{j}$

$$(n!)^2 - \binom{n}{1}((n-1)!)^2 + \binom{n}{2}(n-2)! + ... + (-1)^{j+2}\binom{n}{j}((n-j)!)^2 ... + (-1)^n\binom{n}{n}((n-n)!)^2$$

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}((n-j)!)^2$$

נוסחאות נסיגה - רקורסיות

דוגמה: סדרת פיבונאצ'י

$$f(0)=1 \qquad f(1)=1 \qquad f(n)=f(n-1)+f(n-2) \qquad \forall n>2$$

אז:

$$1,2,3,5,8,...$$

נרצה פתון ל $f(n)$ ללא תלות באיברים קודמים.

נוסחאות נסיגה לינאריות הומגניות

נחפש פתרון מהצורה $f(n)=x^n$

נציב את x^n בתוך נוסחת הנסיגה : $x^n=x^{n-1}+x^{n-2}$, מכיון ש $x\neq 0$ נצמצם את המשוואה ב x^{n-2} - ונקבל:

$x^2=x+1\Leftarrow$ זה נקרא הפולינום האופייני של נוסחת הנסיגה

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\Rightarrow x_1=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n, x_2=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

- ע"פ משפט מלינאריות
- ממד מרחב הפתרונות הוא כדרגה (הגבוה) של הפולינום האופייני $\Leftarrow$ ישנם 2 פתרונות ב"ת.
- וכל צרוף לינארי שלהם הוא פתרון.
- לכן

$$f(n)=c_1\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+c_2\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

- כאשר c_1,c_2 הם קבועים שניתנים לחישוב מתוך תנאי ההתחלה נציב, ונחשב אותם:

$$1=f(0)=c_1\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0+c_2\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0=c_1+c_2\Rightarrow c_2=1-c_1$$

$$1=f(1)=c_1\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1+c_2\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1=c_1\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1+(1-c_2)\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1$$

$$\Rightarrow c_1\sqrt{5}=1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow \boldsymbol{c_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}}$$

$$\Rightarrow c_2=1-\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\Rightarrow \boldsymbol{c_2=-\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}}$$

- נציב חזרה:

$$\Rightarrow f(n)=\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$\Rightarrow f(n)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$$

<u>שאלה: כמה סדרות בינאריות באורך n ישנן שאין בהן רצף של 11 ?</u>

פתרון בעזרת נוסחאות נסיגה: נסמן ב $f(n)$ את מס' האפשרויות העונה על השאלה:

$$f(0)=1 \qquad f(1)=2 \qquad f(2)=0$$

- אנחנו מחפשים:

$$\underbrace{\lfloor 0 \rfloor}\underbrace{\lfloor\rfloor \quad \lfloor\rfloor \quad \lfloor\rfloor \quad \lfloor\rfloor}_{n-1}$$

$f(n-1)$ = כל הסדרות החוקיות באורך n שמתחילות ב 0

- או שאנחנו מחפשים:

$$\underbrace{\lfloor 1 \rfloor \quad \lfloor 0 \rfloor}\underbrace{\lfloor\rfloor \quad \lfloor\rfloor \quad \lfloor\rfloor \quad \lfloor\rfloor}_{n-2}$$

$f(n-2)$ = כל הסדרות ה"חוקיות" בואדך n שמתחילות ב 1, ובמקום השני יש 0

- מכיוון שאלו כל אפשרויות , והאפשרויות זהות, נקבל כי:

$$f(n)=f(n-1)+f(n-2)$$

נוכל כעת להציב בפתרון הכללי שהראינו לעיל, רק שצריך לחשב מחדש את המקדמים c_1, c_2

נגסח את השאלה מחדש: <u>כמה סדרות של $\{0,1,2\}$ באורך n ישנן שאין בהן רצף של 11 ?</u>

$$f(0)=1 \qquad f(1)=3 \qquad f(2)=8$$

- נשים לב שהחישובים שלנו דומים, רק שצריך להתייחס ל 2 (על כל מקום של 0 יש אפשרות לשם 2 , ולכן זה מכפיל את האפשרויות)
- למשל:

$$\underbrace{\lfloor 0/2 \rfloor}\underbrace{\lfloor\rfloor \quad \lfloor\rfloor \quad \lfloor\rfloor \quad \lfloor\rfloor}_{n-1}$$

$$f(n)=2\cdot f(n-1)+2\cdot f(n-2)$$

- הפולינום האופייני: $x^2-2x-2=0$

ננסח את השאלה מחדש: <u>כמה סדרות של $\{0,1,2\}$ באורך n ישנן שאין בהן רצף של 11ולא 22 ?</u>

נחשב את האפשרויות:

- אפשרות ראשונה: $f(n-1)$

$$\underbrace{\lfloor 0 \rfloor}\underbrace{\lfloor\rfloor \quad \lfloor\rfloor \quad \lfloor\rfloor \quad \lfloor\rfloor}_{n-1}$$

- אפשרות שניה:

$$\underbrace{\lfloor 1 \rfloor \quad \lfloor 0/2 \rfloor}\underbrace{\lfloor\rfloor \quad \lfloor\rfloor \quad \lfloor\rfloor \quad \lfloor\rfloor}_{n-2}$$

  – זה גורר אותנו להסתכל על:

$$\underbrace{\lfloor 1 \rfloor \quad \lfloor 0/2 \rfloor \quad \lfloor 1/0 \rfloor}\underbrace{\lfloor\,\rfloor \quad \lfloor\,\rfloor \quad \lfloor\,\rfloor \quad \lfloor\,\rfloor}_{n-3}$$

– ובעצם, לא נצליח לפתור, כי נאלץ להמשיך ככה עד הסוף. לכן נשתמש בנוסחאות נסיגה קלועות (משולבות)

- נסמן ב $b(n)$ את כל הסדרות ה"חוקיות" באורך nשמתחילות ב ־ 0
- נסמן ב $c(n)$ כנ"ל אבל סדרות שמחילות ב ־ 1
- נסמן ב $d(n)$ כנ"ל אבל סדרות שמתחילות ב ־ 2
- לכן: $b(n)+c(n)+d(n)=f(n)$
- נכתוב נוסחאות נסיגה ל $b(n),c(n),d(n)$ בנפרד אבל תוך שמוש של אחד בשני $b(n)=f(n-1)$

$$\underbrace{\lfloor 0 \rfloor}\underbrace{\lfloor\,\rfloor \quad \lfloor\,\rfloor \quad \lfloor\,\rfloor \quad \lfloor\,\rfloor}_{n-1}$$

- לכן:

$$c(n)=b(n-1)+d(n-1)$$

- כאשר $b(n-1)$ הן סדרות באורך $n-1$ שמתחילות ב ־ 0 , כנ"ל ל $d(n-1)$ עם 2
- כמו כן: $d(n)=b(n-1)+c(n-1)$
- נציב את הכל:

$$f(n)=f(n-1)=b(n-1)+d(n-1)+b(n-1)+c(n-1)$$

$$f(n)=2\cdot f(n-1)+f(n-2)$$

- הפולינום האופייני:

$$x^2-2x-1=0$$

- תנאי ההתחלה:

$$f(0)=1 \qquad f(1)=3 \qquad f(2)=7$$

<u>הפתרון הכללי לנוסחאות הומגוניות:</u>

עבור $1\le r\le n$

$$f(n)=a_1\cdot f(n-1)+a_2\cdot f(n-2)+....+a_r\cdot f(n-r)$$

נציב פתרון מהצורה $f(n)=x^n$ בנוסחת הנסיגה נקבל:

$$x^n=a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+a_rx^{n-r}$$

נצמצם ב x^{n-r} $(x\neq 0)$:

$$x^r-a_1x^{r-1}-.....-a_r=0$$

פותרים את הפולינום ־ לינארית ־ במקרה בו מקבלים r פתרונות <u>שונים</u> לפולינום $x_1,...,x_r$ הפתרון הכללי יהיה: צירוף לינארי של הפתרונות, ולכן:

$$f(n)=c_1x^n+c_2x_2^n+...+c_rx_rx^r$$

כדי לקבל פתרון יחיד, נשתמש ב r תנאי ההתחלה $f(0),f(1),...,f(r-1)$ כדי לקבוע את c_i , עבור $i\in[1,r]$

שיעור 7 - 15/4/19

נוסחאות נסיגה:

דוגמה: נתון תנאי ההתחלה $f(0)=0, f(1)=f(2)=1$,

ונוסחת הנסיגה $f(n)=3\cdot f(n-1)+4\cdot f(n-2)-12\cdot f(n-3)$ לכל $n\geq 3$,

<u>מצא פתרון הומגני לנוסחה</u>

פתרון:

- מציבים פתרון מהצורה $f(n)=x^n$ נקבל:

$$x^n=3x^{n-1}+4x^{n-2}-12x^{n-3}$$

$$x^3-3x^2-4x+12=0 \qquad x=2 \quad \text{is solu}$$

$$\begin{aligned}(x-2)\left(x^2-x-6\right)&=0\\ x_2&=3\\ x_3&=-2\end{aligned}$$

- מכאן שהפתרון:

$$f(n)=a_1\cdot 2^n+a_2\cdot 3^n+a_3(-2)^n$$

- נציב בתנאי ההתחלה:

$$\begin{aligned}&i) \qquad 0=f(0)=a_1+a_2+a_3\\ &ii) \qquad 1=f(1)=a_12+a_23+a_3(-2)\\ &iii) \quad 1=f(2)=a_1\cdot 2^2+a_2\cdot 3^2+a_3(-2)^2\end{aligned}$$

כעת כל שנותר זה לפתור את מערכת המשוואות , ולהציב את ה a_i בפתרון שקיבלנו.

<u>מקרה בו לא בהכרח לפולינום האופייני ישנם שורשים שונים:</u>

נניח שקיבלנו פולינום אופייני ממעלה r אז:

$$x^r-a_1x^{r-1}-...-a_r=0$$

ישנם k שורשים כאשר $1\leq k\leq r$ עבור $x_1,...,x_k$ כאשר השורש x_1 מופיע בריבוי d_i

- דוגמה $\begin{matrix}x_1=2\\ x_2=4\end{matrix}$ אז $\left((x-2)^3(x-4)\right)$ כלומר הריבוי של $x_1=2$ הוא 3 ושל $x_2=4$ הוא 1

לכן נציב $x_1^n, nx_1^n, n^2x_1^n, ..., n^{d_i-1}x_1^n$, הם d_i פתרונות ב"ת. סה"כ:

$$f(n)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=0}^{d_i-1}a_{i,j}n^jx^n$$

כאשר $a_{i,j}$ הם קבועים שנקבעים ע"פ תנאי ההתחלה

שאלה: נתון תנאי $\begin{matrix}f(0)=0\\ f(1)=1\\ f(2)=2\end{matrix}$ ונוסחאת נסיגה: $f(n)=8\cdot f(n-1)-21\cdot f(n-2)+18f(n-3)$ לכל $n\geq 3$

מציב פתרון : $f(n)=x^n$ נקבל:

$$x^n = 8 \cdot x^{n-1} - 21 \cdot x^{n-2} + 18x^{n-3}$$

$$x^n - 8 \cdot x^{n-1} + 21 \cdot x^{n-2} - 18x^{n-3} = 0$$

$$(x-2)^1(x-3)^2 = 0$$

נציב בנוסחה שהראינו:

$$f(n) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=0}^{d_i-1} a_{i,j}n^jx^n = a_{1,0}n^0x_12^n + a_{2,0}n^0x_23^n + a_{2,1}n^1x_23^n$$

$$f(n) = a_{1,0} \cdot x_12^n + a_{2,0} \cdot x_23^n + a_{2,1}nx_23^n$$

נותר להציב את תנאי ההתחלה:

$$\begin{array}{lr} i) & 0 = f(0) = a_{10} + a_{20} \\ ii) & 1 = f(1) = a_{10}2 + a_{20}3 + a_{21}1 \cdot 3^1 \\ iii) & 2 = f(2) = a_{10} \cdot 2^2 + a_{20} \cdot 3^2 + a_{21} \cdot 2 \cdot (3)^2 \end{array}$$

כעת כל שנותר זה לפתור את מערכת המשוואות , ולהציב את ה a_i בפתרון שקיבלנו.

אי־סדר מלא

סימנו ב D_N את מספר התמורות על n איברים שהן אי־סדר מלא. נכתוב נוסחת נסיגה ל D_n :

$$\underbrace{\left\lfloor \overset{i}{\cancel{1}} \right\rfloor}\underbrace{\lfloor\,\rfloor \quad \lfloor\,\rfloor \quad \lfloor\,\rfloor \quad \lfloor\,\rfloor}_{n-1}$$

יהיה האיבר הראשון בתמורה כך ש: $i \neq 1$ (לבחירת i ישנן $n-1$ אפשרויות), כעת ננסה להבין מה יכול לקרות,

<u>מקרה ראשון</u> ש i ו 1 התחלפו כלומר:

$$\underbrace{\lfloor i \rfloor}\underbrace{\lfloor\,\rfloor \quad \lfloor\,\rfloor \quad .. \quad \lfloor 1 \rfloor \quad ... \quad \lfloor\,\rfloor \quad \lfloor\,\rfloor}_{n-1}$$

נשאר לסדר את $2,3,...,i-1,i+1,...n$, ולכאורה צריך בשבילם אי־סדר מלא והם : D_{n-2} (אי סדר מלא $n-2$ איברים שנותרו)

<u>מקרה שני:</u> ש i ו 1 לא התחלפו כלומר:

$$\underbrace{\lfloor i \rfloor}\underbrace{\lfloor\,\rfloor \quad \lfloor\,\rfloor \quad .. \quad \lfloor \cancel{1} \rfloor \quad ... \quad \lfloor\,\rfloor \quad \lfloor\,\rfloor}_{n-1}$$

כעת נרצה לספור את התמורות בהן:

- 2 לא במקום ה 2
- 3 לא במקום ה 3
- ..
- n לא במקום ה n
- 1 לא מבקום ה i

זו בדיוק הדרישה של אי־סדר מלא על $n-1$ איברים, ולכן D_{n-1}

- נשים לב שהמקרים זרים, בראשון יש 1 במקום ה i, ובשני לא.
- בנוסף, יש $n-1$ אפשרויות (ללא 1) לבחירת i

סה"כ:

$$D_n = (n-1)\left(D_{n-2} + D_{n-1}\right)$$

תנאי התחלה

$$D_1 = 0 \qquad D_2 = 1$$

מספרי קטלן

תזכורת: יש n סוגריים פותחים ו n סוגריים סוגרים ($2n$ מקומות) כמה דרכים יש לסדרם ולקבל ביטוי מתמטי תקין

$$\lfloor (\rfloor \lfloor \ldots \rfloor \lfloor \ldots \rfloor \lfloor) \rfloor \lfloor \rfloor \lfloor \rfloor$$

- הסדרה בהכרח מתחילה בפותח
- נסמן ב $P(n)$ את מס' האפשרויות לסדר n זוגות סוגריים כך שיתקבל ביטוי מאוזן, ובנוסף בכל רישא יש ביטוי לא מאוזן
- דוגמה:

$$()(())$$

אז $n=3$ עם קטלן ✓

כאן יש רישא שמהווה ביטוי מאוזן. לעומת זאת $((()))$

- כלומר יש לנו קטלן + דרישה נוספת שטוענת שלא תהיה רישא שהיא ביטוי קטלן תקין בפני עצמו.
- כלומר

$$\underbrace{\lfloor \rfloor \lfloor \ldots \rfloor \lfloor \ldots \rfloor \lfloor \rfloor}_{2k} \underbrace{\lfloor \rfloor \lfloor \rfloor}_{2n-2k}$$

$$P(k)c(n-k)$$

- עבור k קבוע, אם נקח סדרה ב $P(k)$. נוכל להשלים אותה בסדרת קטלן כלשהי ב $c(n-k)$ לפי עקרון כפל נקבל שמס' הסדרות הוא $P(k)c(n-k)$
- הראנו שחשוב התנאי הנוסף של $P(k)$ = קטלן תקין עד k, כי אחרת נספור פעמיים מקרים כמו: $()()()$ ($n=3$ נספר גם עם $k=1$ וגם עם $k=2$)
- בכל סדרת קטלן חוקית נסתכל על הרישא הקצרה ביותר שמהווה סדרה מאוזנת. הריש"א הנל שייכת ל $P(k)$ (עבור k מתאים שנקבע באופן יחיד) ושאר הסדרה היא בהכרח סדרת קטלן באורך $2(n-k)$,
  - ערכי k האפשריים הם מ 1 ועד n , האפשרויות שונות עבור kים שונים.
  - לכן נקבל ש $c(n) = \sum\limits_{k=1}^{n} P(k)c(n-k)$

- לסיכום, זוהי נוסחת נסיגה תקינה כי : המקרים זרים, יש ערכים תקינים לk ובכך גם לא פספסנו מקרים. כעת צריך "להפטר" מה $P(k)$

<u>טענה: $P(k)=c(k-1)$</u>

הוכחה - הכלה דו כיוונית

<u>כיוון ראשון - $P(k)\subseteq c(k-1)$</u>

- תהי x סדרה ב $P(k)$. כלומר x סדרת קטלן מאוזנת מנימלית, באורך $2k$ x מתחילה ב (ומסתיימת ב) - אין רישא של x שמהווה בעצמה סדרת קטלן.

- y היא סדרת קטלן כלשהי באורך $2(k-1)$
  - נניח בשלילה <u>ש y אינה סדרת קטלן</u>.
  - לכן קיים <u>מקום i ב y</u> שבו מס' הסגוריים הסוגרים גדול ממס' הסוגריים הפותחים.
  - נניח בה"כ שה i הוא המקום הראשון שבו יש יותר סוגריים סוגרים מפותחים.
  - לכן <u>באותו מקום ב x</u> יש מס' שווה של סוגרים ופותחים - בסתירה למינמליות ב x
  - לכן y סדרת קטלן

- לכן y שייכת ל $c(k-1)$

<u>כיוון שני - $c(k-1)\subseteq P(k)$</u>

- תהי y סדרת סדרת קטלן ב $c(k-1)$ נתאים לה סדרת קטלן ב $P(k)$ ע"י הוספה של פותח וסוגר באופן הבא: $x=(y)$

- x אכן ב $P(k)$
  - נניח בשלילה ש x לא שייכת ל $P(k)$
  - x בהכרח סדרת קטלן, לכן x אינה מאוזנת מנימלית
  - לכן קיימת ל x רישא מאוזנת, כלומר .. $x=(...)(...)$
  - יהי i המקום הראשון בו יש ל x רישא מאוזנת באותו מקום ב y .
  - לכן ישנם יותר סוגרים מפותחים, בסתירה לכך שy סדרת קטלן.

- לכן $c(n)=\sum\limits_{k=1}^{n}c(k-1)\cdot c(n-k)$

- תנאי התחלה: $c(1)=1$, $c(0)=1$

אסימפטוטיקה

הגדרות:

- נאמר ש $f(n)=O\left(g(n)\right)$ אם"ם קיים $c_1>0$ ו n_0 כך שלכל $n\geq n_0$ מתקיים ש:

$$0\leq f(n)\leq c_1\cdot g(n)$$

- נאמר ש $f(n)=\Omega\left(g(n)\right)$ אם"ם קיים $c_1>0$ ו n_0 כך שלכל $n\geq n_0$ מתקיים ש:

$$0\leq c_1\cdot g(n)\leq f(n)$$

- נאמר ש $f(n)=\Theta\left(g(n)\right)$ אם"ם קיימים $c_1,c_2>0$ ו n_0 כך שלכל $n\geq n_0$ מתקיים ש:

$$0 \le c_1 \cdot g(n) \le f(n) \le c_2 \cdot g(n)$$

למעשה:

$$f(n) = \Theta\left(g(n)\right) \iff f(n) = O\left(g(n)\right) \wedge f(n) = \Omega\left(g(n)\right)$$

1. דוגמה:

$$f(n) = 10n^2 - 3n$$
$$g(n) = n^2$$

מתקיים ש:

$$1 \cdot g(n) \le f(n) \le 13 \cdot g(n)$$

לכל $n \ge 1$ ניקח את $c_1 = 1$ ואת $c_2 = 13$ ויתקיים שלכל $n \ge n_0$

$$c_1 \cdot g(n) \le f(n) \le c_2 \cdot g(n) \iff f(n) = \Theta\left(g(n)\right)$$

2. האם $3n^3 = \Theta\left(n^4\right)$?

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^3}{n^4} = 0 \Rightarrow 3n^3 \ne \Theta\left(n^4\right)$$

- הוכחה ללא הסתמכות על תכונות הגבול (כלומר תוך שימוש בהגדרה בלבד)
- כלומר צ"ל:
  - שלכל קבוע c_1 וקבוע n_0 כך שלכל $n \ge n_0$ יתקיים ש: $c_1 \cdot g(n) \le f(n)$
  - **או** שלא קיים קבוע c_2 וקבוע n כך שלכל $n \ge n_0$ יתקיים ש: $f(n) \le c_2 \cdot g(n)$
- אצלנו נשלול על ידי שנראה שלכל קבוע c_1 וקבוע n_0 כך שלכל $n \ge n_0$ יתקיים ש: $c_1 \cdot g(n) \not\le f(n)$ כלומר $c_1 \cdot n^4 > 3n^3$

שיעור 8 - 29/4/19

תזכורת:

- $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \Rightarrow f(n) = o\left(g(n)\right)$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty \Rightarrow f(n) = O\left(g(n)\right)$
- $0 < \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty \Rightarrow f(n) = \Theta\left(g(n)\right)$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} > 0 \Rightarrow f(n) = \Omega\left(g(n)\right)$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \Rightarrow f(n) = \omega\left(g(n)\right)$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = undefined \Rightarrow can't\ say$

<u>טענה: $f(n) = \Theta\left(g(n)\right) \iff g(n) = O\left(f(n)\right) \wedge f(n) = O\left(g(n)\right)$</u>

הוכחה:

1. אם $f(n) = \Theta\left(g(n)\right)$ ודאי שמתקיים $g(n) = O\left(f(n)\right)$, $f(n) = O\left(g(n)\right)$
2. נניח ש $f(n) = O\left(g(n)\right)$, $g(n) = O\left(f(n)\right)$

- לכן קיימים c_1, n_1 כך שלכל $n \geq n_1$ מתקיים ש: $0 \leq f(n) \leq c_1 g(n)$
- וקיימים c_2, n_2 כך שלכל $n \geq n_2$ מתקיים ש: $0 \leq g(n) \leq c_2 \cdot f(n)$
- ניקח את $n_0 = Max\left\{n_1, n_2\right\}$, ונקבל שלכל $n \geq n_0$ מתקיים ש: $\frac{1}{c_2} g(n) \leq f(n) \leq c_1 g(n)$
- ולכן לפי הגדרה $f(n) = \Theta\left(g(n)\right)$

דוגמאות:

- $\log_2 x \ vs \ \log_3 x$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log_2 x}{\log_3 x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\log_2 x}{\log_2 x} \cdot \log_2 3 = 1.58... \Rightarrow f(n) = \Theta\left(g(n)\right)$$

  - בלוג לא משנה הבסיס

- $2^x \ vs \ 5^x$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5^x}{2^x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{5}{2}\right)^x = \infty \Rightarrow 5^x = \omega\left(2^x\right) \Leftrightarrow 2^x = o(5^x)$$

- $(ln\ x)^{10} \ vs \ x^{\frac{1}{20}}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(ln\ x)^{10}}{x^{\frac{1}{20}}} = ...lopital... = 0 \Rightarrow (ln\ x)^{10} = o\left(x^{\frac{1}{20}}\right)$$

- $x! \ vs \ 2^x$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x!}{x^{2^x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\boldsymbol{x}\underline{(x-1)}(x-2)...\underline{5}\cdot\boldsymbol{4}\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{\boldsymbol{2}\cdot\underline{2} \quad .... \underbrace{\underline{2}}_{\geq 2} \cdot \underbrace{\boldsymbol{2}}_{\geq 2} \cdot \underbrace{2\cdot 2\cdot 2}_{\geq 1}} \geq \lim_{x\to\infty} 2^{x-4} = \infty \Rightarrow (x!) = \omega\left(2^x\right)$$

- $x! \ vs \ x^x$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\boldsymbol{x}\cdot x\cdot....\cdot x}{\boldsymbol{x}\underline{(x-1)}(x-2)...\underline{5}\cdot\boldsymbol{4}\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\boldsymbol{x}\cdot x\cdot....\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}}{1\cdot 2...\cdot\frac{x}{2}\cdot \underbrace{\left(\boldsymbol{\frac{x}{2}+1}\right)\boldsymbol{\cdot ....x}}_{\geq 1}} \geq \lim_{x\to\infty} 2^{\frac{x}{2}} = \infty \Rightarrow x! = w\left(2^x\right)$$

תורת הגרפים

<u>הגדרות:</u>

תהי V קבוצה סופית לא ריקה, ותהי E קבוצה של זוגות איברים שונים מתוך V

- הזוג $G = (V, E)$ נקרא **גרף לא מכוון** אם E קבוצה של זוגות **לא סדורים**.
- הזוג $G = (V, E)$ נקרא **מכוון** אם E קבוצה של זוגות **סדורים**.
- איברי הקבוצה V נקראת **קודקודים**
- איברי הקבוצה E נקראים **צלעות** (בגרף לא מכוון) או **קשתות** (בגרף מכוון), ותסומן:
  - **צלע** בגרף לא מכוון בין הקודקודים u, v תסומן $\{u, v\}$
  - **קשת** בגרף מכוון מ u ל v נסמן (u, v)
- **לולאה** היא צלע מקודקוד לעצמו $\{u, u\}$

סוגי גרפים:

- **גרף פשוט** ־ גרף ללא לולאות, שבין כל שני קודקודים יש לכל היותר צלע אחת.

- **מולטי גרף** ־ הוא גרף לא מכוון שבו יתכנו כמה צלעות בין אותו זוג קודקודים

- **פסאודו גרף** ־ הוא מולטי גרף שאפשר שיהיו לולאות

- יהי $G=(V,E)$ גרף לא מכוון נאמר ששני קודקודים הם **שכנים** אם קיימת צלע בין u ל v, כלומר $\{u,v\}\in E$, ונסמן את קבוצת כל השכנים של קודקוד u : $\mathit{\Gamma}(u)=\{v|\,\{u,v\}\in E\}$

  - כנ"ל לגרף מכוון (אם יש קשת...)

- יהי $G=(V,E)$ גרף לא מכוון, תהי S תת קבוצה של V אז:

$$\Gamma(S)=\{v|\exists u\in S,\{u,v\}\in E\}$$

היא קבוצת כל השכנים של הקודקודים בקבוצה S

- דרגה של קודקוד

  - בגרף לא מכוון: יהי $G=(V,E)$ גרף לא מכוון. **הדרגה** של קודקוד $u\in V$ היא מספר הצלעות השונות שמכילות את u ונסמן $degree(u)$

  - בגרף מכוון: יהי $G=(V,E)$.

    * **דרגת הכניסה** של קודקוד $u\in V$ היא מספר הצלעות השונות בין קודקודים ב V ל u ונסמן $indegree(u)$
    * **דרגת היציאה** של קודקוד $u\in V$, היא מספר הצלעות השונות בין u לקודקודים ב V ונסמן $outdegree(u)$
    * **הדרגה** של קודקוד $u\in V$ היא דרגת היציאה של u + דרגת הכנינה של u , סימון: $degree(u)$

משפט: יהי $G=(V,E)$ גרף לא מכוון אז: $\sum\limits_{v\in V}deg(v)=2\cdot|E|$

הוכחה:

- ספירת כל הדרגות שקולה לספירת צלע פעמיים

- הסבר: כל צלע מחברת בין שני קודקודים, לכן היא נספרת פעם עבור קודקוד אחד, ופעם שניה עבור הקודקוד השני (המחובר אליו)

מסקנה: יהי $G=(V,E)$ גרף לא מכוון אז יש בגרף מספר זוגי של קודקודים בעלי דרגה איזוגית

הוכחה:

- נניח בשלילה שיש בגרף מספר אי זוגי של קודקודים בעלי דרגה אי־זוגית

- לכן: $odd\ num=\sum\limits_{v\in V}deg(v)=2|E|$, על פי המשפט הקודם

- וזו סתירה.

הגדרות ־ המשך

- יהי $G=(V,E)$ גרף לא מכוון. נאמר שסדרה של קודקודים $(v_1,....,v_m)$ כך שלכל $i\in[1,m-1]$ מתקיים $\{v_i,v_{i+1}\}\in E$ היא **מסלול** (או **מסילה**)

- אם כל הקודקודים במסלול שונים זה מזה אז המסלול נקרא **מסלול פשוט**

- אם $v_1=v_m$ אז המסלול נקרא **מעגל**

- **אורך** המסלול $(v_1, ..., v_m)$ שווה $m-1$ (מספר הצלעות)
- יהיו u,v שני קודקודים אז **המרחק** בין u ל v הוא אורך המסלול <u>הקצר</u> ביותר בין u ל v
  - נסמן $d_G(u,v)$ כמרחק בין u ל v , אם אין מסלול נסמן: $d_G(u,v) = \infty$
- המרחק <u>הגדול</u> ביותר בין שני קודקודים בגרף נקרא **קוטר.**

טענה: יהי $G=(V,E)$ גרף לא מכוון ויהיו u,v,w קודקודים בגרף אז פונקציית המרחק בין קודקודים מקיימת:

1. $d_G(u,v) \geq 0$ ו $d_G(u,v) = 0$ אם"ם $u = v$
2. $d_G(u,v) = d_G(v,u)$
3. $d_G(u,v) + d_G(v,w) \geq d_G(u,w)$

<u>הוכחה:</u>

1. על פי הגדרה אורכו של מסלול הוא 0 אם"ם הוא מכיל קודקוד אחד
2. הגרף לא מכוון, ולכן נובע מיידית מהגדרת צלע
3. נפצל למקרים:

- אם לא קיים מסלול בין u ל v או בין v ל w אז הצד השמאלי הוא ∞ וסיימנו
- אם קיימים מסלולים, אז מצאנו מסלול בין u ל w , מסלול זה לכל הפחות יהיה המסלול הקצר ביותר.

הגדרות - המשך

- נאמר שגרף לא מכוון הוא **קשיר** אם קיים מסלול בין כל שני קודקודים בגרף
- נאמר שגרף מכוון **קשיר חזק** אם לכל שני קודקודים בגרף u,v קיים מסלול בין u ל v וגם בין v ל u
- יהיה G גרף לא מכוון. קודקודים u,v בגרף נקראים שקולים אם יש מסלול מ u ל v
  - הערה: כל קודקוד שקול לעצמו.
  - יחס השקילות משרה חלקות של קודקודי הגרף למחלקות שקילות, נקרה להם **רכיבי קשירות**
- עבור G גרף מכוון, הקודקודים יקראו שקולים אם יש מסלול מ u ל v וגם מ v ל u .

  יהי $G=(V,E)$ גרף
- ויהיה $x \in V$ קודקוד כלשהו. אז הגרף $\boldsymbol{G \setminus \{x\}}$ הוא הגרף שמתקבל מ G על ידי השמטת הקודקוד x וכל הצלעות (קשתות) שמכילות את x
- ותהי $S \subseteq V$ קבוצת קודקודים כלשהי. אז הגרף $\boldsymbol{G \setminus S}$ הוא הגרף שמתקבל מ G על ידי השמטת הקודקודים ב S וכל הצלעות שמכילות את הקודקודים ב S.
- ותהי $\{x,y\} \in E$ צלע כלשהי. אז הגרף $\boldsymbol{G \setminus \{x,y\}}$ הוא הגרף שמתקבל מ G על ידי המשטת הצלע $\{x,y\}$
- נאמר ש $G'=(V',E')$ הוא **תת הגרף** של G אם: $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$ וכן שעבור כל צלע $\{x,y\} \in E$ מתקיים $x,y \in V'$.
  - אם מתקיים ש: $V' = V$ אז G' יקרא **תת גרף פורש** של G
  - אם מתקיים ש: $E' = E \cap V' \subseteq V'$ אז G' יקרא **תת גרף מושרה** של G

הערה: בגרף קשיר יש רכיב קשירות אחד, בגרף עם n קודקודים ובלי צלעות יש n רכיבי קשירות.

טענה: בגרף קשיר לא מכוון עם n קודקודים יש לפחות $n-1$ צלעות

מירה: הוכחת הטענה הבאה, תוכיח את הטענה הזו

טענה: מספר רכיבי הקשירות בגרף גדול או שווה למספר הקודקודים בגרף פחות מספר הצלעות

נוכיח באינדוקציה על מספר הצלעות

<u>בסיס:</u>

- גרף עם n קודקודים ו0 קשתות יש n רכיבי קשירות, מכיון שכל קודקוד הוא רכיב קשירות
- ואכן מתקיים ש: מספר רכיבי הקשירות$= n \geq n-0$

<u>צעד:</u> נניח שבכל גרף עם n קודקודים ולכל היותר m צלעות אי־השיוויון מתקיים. ונוכיח ל $m+1$ כלומר נניח שלגרף

- יהי $G=(V,E)$ גרף עם n קודקודים ועם $m+1$ ותהי $\{x,y\}$ צלע ב G .
- לפי הנחת האינדוקציה בגרף $G\backslash\{x,y\}$ יש לפחות $n-m$ רכיבי קשירות.
- כעת נוסיף חזרה את הצלע $\{x,y\}$ ונפצל למקרים:
  - אם הקודקודים x,y שייכים לאותו רכיב קשירות בגרף $G\backslash\{x,y\}$
    - אז מספר רכיבי הקשירות ב G שווה לספר רכיבי הקשירות ב $G\backslash\{x,y\}$ וברור ש:

מספר רכיבי הקשירות של G = (מספר רכיבי הקשירות של $G\backslash\{x\}$)$\geq n-m > n-(m+1)$

  - אם x,y שייכי לשני רכיבי קשירות שונים
    - אז הצלע $\{x,y\}$ מחברת בין שני רכיבי קשירות
    - לכן מספר רכיבי הקשירות ב G קטן באחד ממספר רכיבי הקשירות ב $G\backslash\{x,y\}$
    - לכן (מהנחת האינדוקציה)

מספר רכיבי הקשירות של G = (מספר רכיבי הקשירות של $G\backslash\{x\}$) $-1 \overset{indu}{\geq} (n-m)-1 = n-(m+1)$

- בסה"כ:

$$\text{מספר רכיבי הקשירות} \geq n-(m+1)$$

מסקנה: בגרף קשיר עם n קודקודים יש לפחות $n-1$ צלעות

- מטענה קודמת יש רכיב קשירות אחד , ולכן $1 \geq n-m$ כלומר $m \geq n-1$

<u>שאלה מהקהל:</u> מה מקסימום הצלעות שיכול להיות?

<u>תשובה קומיבנטורית:</u> בגרף כזה תהיה צלע בין כל זוג קודקודים שונים, זוהי בחירה ללא חזרות וללא חשיבות לסדר ולכן: $\binom{n}{2}$

<u>דרך גרפים:</u>

- הראנו ש $\sum\limits_{v\in V} deg(v) = 2m$
- מספר הצלעות המקסימלית , הוא כאשר כל קודקוד מחובר לכל האחרים, ולכן $\deg(v) = n-1$
- לכן: $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{\sum\limits_{v\in V} deg(v)}{2}$

טענה: בגרף פשוט בעל $n \geq 3$ קודקוים ו $m \geq n$ יש מעגל

הוכחה באינדוקציה:

בסיס: $n = 3$. הגרף הפשוט היחיד עם שלושה קודקודים ולפחות 3 קשתות הוא משולש, ומהגדרה יש בו מעגל

צעד - נניח שבכל גרף עם $n - 1 \geq 3$ הטענה מתקיימת, ונוכיח ל $n \geq 3$

נפצל למקרים:

- אם יש ב G קודקוד כלשוה x שדרגתו 1 , נתבונן ב $G\backslash\{x\}$
  - בגרף זה יש $n - 1$ קודקודים ו $m - 1 \geq n - 1$ צלעות,
  - ומהנחת האינדקציה יש בו מעגל, $G\backslash\{x\}$ הוא תת גרף ל G , ולכן גם G יש מעגל
- אחרת, אז דרגת כל הקודקודים ב G היא לפחות 2.
  - יהיה x קודקוד כלשהו ב G , נצור מסלול מ x
  - נטייל על צלעות בגרף באפן כלשהו, כך שלא נחזור על צלע שממנה באה.
  - מכיון שדרגת כל קודקוד היא לפחות 2, לא נתקע באף קודקוד
  - כיון שהגרף סופי בשלב כלשהו נחזור לקודקוד שהיינו בו, ונקבל מעגל.
- בכל מקרה ב G יש מעגל, כנדרש.

שיעור 9 - 6/5/19

טענה: יהי $G = (V, E)$ גרף קשיר ולא מכוון, ותהי $e = \{x, y\}$ צלע. אז:

הגרף $G\backslash\{e\}$ קשיר $\iff$ הצלע שייכת למעגל פשוט כלשהו ב G

הוכחה:

כיוון ראשון: e שייכת למעגל פשוט ב $G \Rightarrow G\backslash\{e\}$קשיר

- נניח כי $G\backslash\{e\}$ קשיר.
- לכן יש מסלול P מ x ל y בגרף $G\backslash\{e\}$.
- אם נוסיף את הצלע e למסלול P, נקבל מעגל פשוט בגרף G הכולל את e

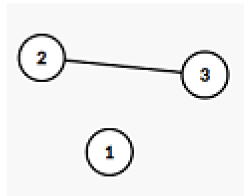
כיוון שני: e שייכת למעגל פשוט ב $G \Leftarrow G\backslash\{e\}$ קשיר

- נניח ש C מעגל פשוט בגרף G , הכולל את הצלע e , ויהיו שני קודקודים $u, v \in G\backslash\{e\}$, נראה שיש בינהם מסלול.
- מנתון ש G קשיר נובע שיש מסלול כלשהו בין u ל v , נסמנו ב Q
- אם Q מסלול בגרף $G\backslash e$,סיימנו.
- אחרת, מכך ש $e \in Q$, נובע ש $Q = \{u...., x, ...e, ..., y...v\}$.
- יהי $C\backslash\{e\}$ המסלול המתקבל מהמעגל C לאחר השמטת e ,
- לכן $\{u, ...x, C\backslash\{e\}, y....v\}$ הוא מסלול ב $G\backslash\{e\}$
- לכן קיבלנו מסלול מ u ל v כדרוש.

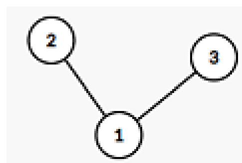
הגדרה

יהי $G = (V,E)$ גרף פשוט, הגרף המשלים $\bar{G} = \left(V, \bar{E}\right)$ הינו גרף על אותה קבוצת קודקודים על עם קבוצת קשתות $\bar{E}$ המקיימת:
$(u,v) \in \bar{E} \Leftrightarrow (u,v) \notin E$

שאלה: מהו הגרף המשלים של הגרף:

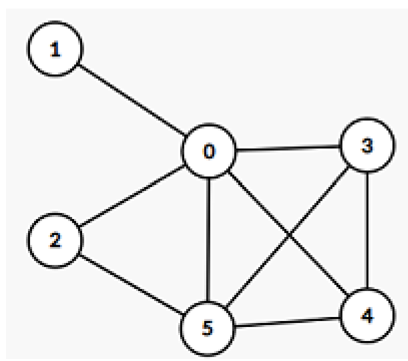


תשובה:



שאלה: האם קיים גרף שדרגותיו $1, 2, 3, 3, 4, 5$?

תשובה: כן נצייר

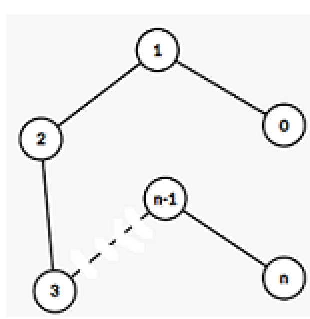


שאלה: האם קיים גרף שדרגותיו $1, 2, 3, 3, 4, 6$?

תשובה: לא, הוכחה: ממשפט סכום הדרגות חייב להיות זוגי.

שאלה: מה המרחק הגדול ביותר גרף קשיר עם n קודקודים

תשובה: (שרוך)



הערה:

בכל גרף על $n \geq 3$ שבו $m \geq n$ יש מעגל לכן כל מסלול שיכלול לפחות n צלעות יכלול בתוכו מעגל, כלומר אינו מסלול פשוט, ולכן אורך מסלול הקצר ביותר (=מרחק) $\leq n-1$

<u>שאלה:</u> יהי $G=(V,E)$ גרף פשוט, יש להוכיח כי לפחות אחד מהגרפים $G,\bar{G}$ קשיר.

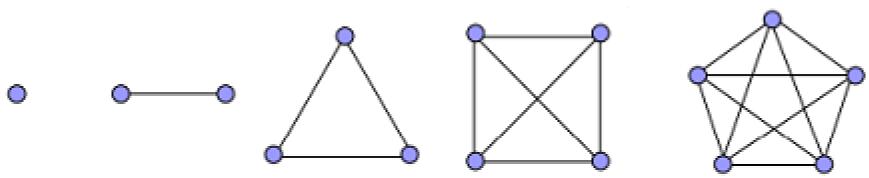
<u>הוכחה:</u>

- אם G קשיר סיימנו, לכן נניח ש G אינו קשיר, ונראה ש $\bar{G}$ קשיר.
- יהיו $u,v \in \bar{G}$, אם יש מסלול $(u,v) \in \bar{E}$ סיימנו.
- לכן נניח ש $(u,v) \in E$
- מהנחה G אינו קשיר ולכן קיים קודקוד כלשהו, נסמנו ב w כך שאין מסלול בינו לבין u ו v
- מהגדרת הגרף המשלים נובע ש $(v,w) \in \bar{E}$ וגם $(u,w) \in \bar{E}$
- ולכן יש גם מסלול $(u,v) \in \bar{E}$, ולכן הגרף קשיר
  - הערה: למעשה הוכחנו שהמרחק המקסימלי ב $\bar{G}$ הוא 2.

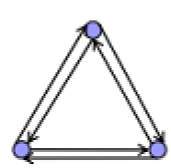
משפחות של גרפים

- הגרף הריק
- הגרף השלם
- קבוצה בלתי תלויה
- גרף המעגל
- גרף המסלול
- קוביות

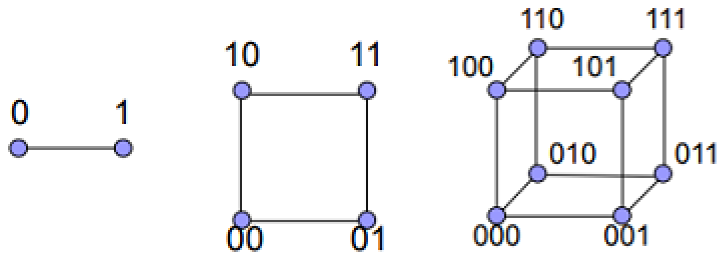
גרף שלם - גרף עם קשת בין כל 2 צמתים. לא מכוון - מסומן ב K_n



מכוון:



<u>n - קוביה</u> - הצמתים מייצגים מחרוזות בינאריות באורך n , שני צמתים מחוברים אם הם נבדלים בביט 1 בדיוק



- <u>דרגת קודקוד:</u> n (מימד הקוביה)
- <u>סך קודקודים:</u> 2^n
- <u>סך צלעות:</u> $\frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{n}\deg(v_i)=\frac{2^n\cdot n}{2}=n\cdot\left(2^{n-1}\right)$

הגדרה: גרף $G=(V,E)$ יקרא d **רגולרי** אם הדרגות של כל הקודקודים שלו שווות ל d .

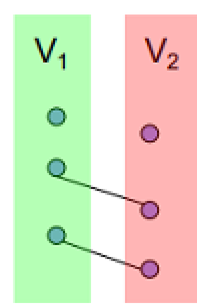
לדוגמה:

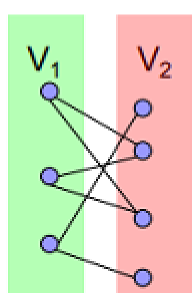
- גרף שלם
- גרף ריק

<u>הגדרה:</u> גרף $G=(V,E)$ יקרא **דו־צדדי** אם ניתן לחלק את קודקודי הגרף לשתי קבוצות זרות V_1,V_2 כך שכל צלע בגרף מכילה קודקוד מ V_1 וקודקוד מ V_2

בשביל לסמן ש $G=(V,E)$ הוא צדדי, נכתוב: $G=(V_1,V_2,E)$

דוגמאות:





<u>תרגיל: האם גרף ה n קוביה הוא גרף־צדדי?</u>

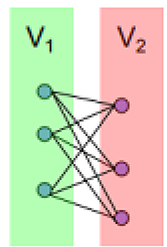
עבור ריבוע (2 ־ קוביה): כן, ניתן לחלק את קב' הקודקודים ל 2 קבוצות זרות, כך ש $V_1\cup V_2$ והתנאי בגדרה מתקיים

עבור n כללי ־ הוכחה:

- תהי V_1 קב' הקודקודים בהם מס' זוגי של 0ים
- ותהי V_2 קב' הקודקודים בהם מס' אי־זוגי 0ים
- מתקיים ש $V_1\cup V_2=V$ וגם $V_1\cap V_2=\phi$
- נראה שלא יתכן שיש צלע בין קודקודים ב V_1 ולא בין צלע בין קודקודים ב V_2
- לפי הגדרת הn־קוביה , 2 קודקודים מחוברים בצלע אם"ם הם נבדלים בביט אחד בדיוק.

- לכן ל 2 קודקודים כאלה יש זוגיות שונות של מס' ה 0סים
- לכן 2 קודקודים כנ"ל שייכם לצדדים שונים , כלומר אחד מהם ב V_1 והשני ב V_2

הגדרה: גרף $G=(V_1,V_2,E)$ יקרא **דו־צדדי שלם** אם קיימות בו כל הצלעות האפשרויות שמכילות קודקוד מV_1 וקודקוד מ V_2.
נסמן ע"י $K_{s,t}$ כאשר $|V_1|=s,|V_2|=t$
בגרף דו צדדי שלם $G=(V_1,V_2,E)$ מספר הצלעות הוא $|V_1|\cdot|V_2|$
דוגמה:



משפט:

גרף $G=(V,E)$ **הוא דו־צדדי** $\Longleftrightarrow$ **כל המעגלים בו (גם לא פשוטים) בעלי אורך זוגי**

הוכחה

<u>כיוון ראשון ־ נניח G דו"צ, נוכיח שאורך המעגלים זוגי</u>

- נתון ש G דו־צדדי, לכן ניתן לחלק את קודקודי הגרף לשתי קבוצות זרות V_1,V_2 כך שכל צלע בגרף מעילה קודקוד מ V_1 וקודקוד מ V_2
- נבחר מעגל כלשהו בגרף, נניח ש u קודקוד כלשהו במעגל, בה"כ $u\in V_1$ נטייל על המעגל, כלומר נעבור בצלע ב V_1 ל V_2
- מכיון ש G גרף דו"צ, כל צלע מעבירה אותנו לקבוצה אחרת בגרף
- לכן ע"מ להיות חזרה ב $u\in V_1$, חובה עלינו "לחזור" ל V_1 , ולכן מספר המעברים זוגי

<u>כיון שני ־ נניח שאורך המעגלים זוגי נוכיח ש G דו"צ</u>

- נניח ש G קשיר, אחרת נפעיל את ההוכחה על כל רכיב קשירות בנפרד.
- נבחר קודקוד כלשהו, $u\in V_1$ ונגדיר:
  - $V_1=\{x\in V|\text{distance between u and x is even}\}$
  - $V_2=\{x\in V|\text{distance between u and x is odd}\}$
- נניח בשלילה שיש בגרף צלע ששני קודקודיה ב V_1 (בה"כ) , נסמנה ב $\{x,y\}$
  - לפי הגדרת V_1 קיים מעגל בגרף שמתחיל ב u מגיע דרך מסלול באורך <u>זוגי</u> ל x
  - אחר כך ממשיך ל y ע"י מסלול של צלע <u>יחידה</u>
  - מy חוזר ל u דרך מסלול באורך <u>זוגי</u>
- סה"כ קיבלנו מסלול באורך <u>אי־זוגי</u>
- וזוהי סתירה כי קיבלנו מעגל באורך אי זוגי בסתירה להנחה שאין מעגלים באורך אי־זוגי

שיעור 10 - 13/5/19

עצים

הגדרות:

- גרף לא מכוון שאינו מכיל מעגלים נקרא יער
- יער קשיר נקרא עץ
- עץ הכולל n קודקודים יוסמן ע"י T_n
- קודקוד בעץ שדרגות 1 נקרא עלה

משפט כל עץ עם לפחות 2 קודקודים מכיל עלה

הוכחה:

- נצא מקודקוד כלשהו בעץ ונלך לאורך מסלול היוצא ממנו מבלי לחזור בצלע שבא עברתי.
- מספר הקודקודים בעץ סופי, ואיננו מבקרים בקודקוד פעמיים - כי העץ חסר מעגלים.
- לכן בהכרח נגיע לקודקוד שממנו איננו יכולים להתקדם יותר, היות ונכנסו אליו דרגתו לפחות 1 , מכך שאי אפשר להתקדם נובע שדרגתו בדיוק 1 , ומכאן שזהו העלה , כנדרש

משפט: מספר הצלעות בעץ בעל $n \geq 1$ קודקודים הוא $m = n - 1$

<u>הוכחה- בכיתה</u>

- הוכחנו שהגרף קשיר על n קודקודים ישנן לפחות $n - 1$ צלעות.
- הוכחנו שבגרף על n קודקודים שבו $m \geq n$ צלעות יש מעגל
- בעץ אין מעגלים, ולכן ישנן $n - 1$ צלעות בדיוק

<u>הוכחה - מהמצגת -</u> באינדוקציה על n :

<u>בסיס</u>: $n = 1 \Leftarrow$ אין צלעות $\Leftarrow m = 0$

<u>צעד</u>: נניח נכונות ל $k < n$ ונוכיח ל n

- T_n הוא עץ, וממשפט קודם יש בו עלה , נסמנו ב x
- נוריד את x ואת הצלע המחוברת אליו, וקיבלנו עץ עם $n - 1$ קודקודים
- לפי הנחת האינדוקציה מספר הצלעות יהיה $m' = n - 1 - 1 = n - 2$
- כעת נחזיר את הקודקוד x ואת הצלע שלו, ונקבל שב T_n יש בסה"כ: $m = n - 2 + 1 = n - 1$ צלעות, כנדרש.

טענה: גרף לא מכוון G הוא עץ $\iff$ G קשיר מינמלי $\iff$ G חסר מעגלים

- G קשיר מנימלי - הסבר: קשיר + הורדת צלע כלשהי תפגע בקשירותו
- G חסר מעגלים מקסימלי - הסבר:: כל צלע שנוסיף תסגור מעגל

הוכחה:

1. G גרף לא מכוון הוא עץ $\iff$ G קשיר מינמלי:

נניח ש G עץ, G ודאי קשיר, צ"ל להראות שהוא קשיר מינמלי

- נניח בשלילה שאינו קשיר מינימלי, לכן קיימת צלע $e=\{x,y\}$ שאם נוריד אותה מ G הגרף עדיין יהיה קשיר (כלומר הגרף $G\backslash\{e\}$ קשיר)
- בגרף $G\backslash\{e\}$ יש מסלול מ x ל y שכומבן לא כולל את e
- מכאן שאם נוסיף את e נקבל מעגל, בסתירה לכך G הוא עץ, ומהגדרה חסר מעגלים.

נניח ש G קשיר מינמלי צ"ל שהוא עץ, מנתון G קשיר נותר להראות שהוא חסר מעגלים

- נניח בשלילה ש G היה מכיל מעגל, אז אם נסיר צלע ששיכת למעגל, נקבל גרף שהוא עדיין קשיר (הוכחנו בשיעור שעבר)
- סתירה לכך שG קשיר

2. G גרף לא מכוון הוא עץ $\iff$ G חסר מעגלים מקסימלי

ניתן להוכיח מנימוקים דומים

מסקנה: גרף לא מכוון קשיר עם n קודקודים ו $n-1$ צלעות הוא עץ

הוכחה:

- נניח בשלילה שיש בגרף מעגל, לכן ניתן להסיר צלע מהגרף ולהשאר עם גרף קשיר שבו $n-2$ צלעות
- זו סתירה לכך לכך שהוכחנו שבכל גרף קשיר על n קודקודים ישנם לפחות $n-1$ צלעות
- לכן הגרף הוא חסר מעגלים, ומכיון שהוא גם קשיר אז הוא עץ, כנדרש.

הגדרה: עץ פורש הוא תת גרף פורש שהוא עץ.

משפט: גרף לא מכוון G הוא קשיר אס"ם יש ל G עץ פורש

הוכחה:

כיוון ראשון: G קשיר$\Rightarrow$$G$עץ פורש

- אם ל G יש עץ פורש, אז בפרט הוא קשיר, ותוספות צלעות לא פוגעת בקשירות

כיוון שני: G קשיר$\Leftarrow$ G עץ פורש

- נניח ש G קשיר. נסתכל בתת גרף פורש קשיר H של G שיש לו את <u>מספר הצלעות הקטן ביותר</u>
  - ידוע שקיים אחד כזה, כי G תמיד תת גרף לעצמו)
- יש להראות ש H עץ פורש של G
- יהי k מספר הצלעות של H . בהכרח $k\geq n-1$, אחרת H לא קשיר
  - אם $k=n-1$ אז בהכרח H פורש
  - נניח בשלילה ש $k\geq n$ אז H מכיל מעגל, ולכן יש צלע e במעגל הזה ב H שאפשר להשמיט, וגם תת הגרף $H\backslash\{e\}$ קשיר . זו סתירה למנימליות של H

תרגילים

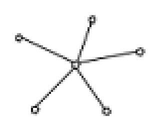
1. מהו מספר המימלי של צלעות בגרף לא מכוון בן n קודקודים , כך שהמרחק בין כל זוג קודקודים קטן או שווה ל2 ?

צ"ל: שהמספר הוא $n-1$

(א) יש להראות שלא ניתן בפחות צלעות

(ב) שכן ניתן ב $n-1$

- הוכחת א: מתקיים כי הוכחנו שבגרף קשיר ישנן לפחות $n-1$ צלעות, והגרף בשאלה בהכרח קשיר כי המרחקים חסומים ע"י 2 (בגרף לא קשיר קיימים לפחות זוג קודקודים שאין בינהם מסלול ולכן המרחק בינהם הוא ∞)
- הוכחת ב: להראות שקיים, ניקח כוכב:



2. כמו ב1 עם מרחק קטן או שווה ל 1

- מהדרישה נובע שכל זוג קודקודים מחובר בצלע, לכן בהכרח גרף שמקיים את הדרישה הוא k_n
- הראנו בשיעור שעבר שבגרף זה יש $\binom{n}{2}$ צלעות.

3. הוכיחו כי בכל עץ $(|V|>2)$, יש לפחות 2 עלים

- יהי v קודקוד.
- נתחיל מ v ונטייל על העץ כל שבכל שלב נעבור לקודקוד שכן מבלי לחזור על קודקוד פעמיים
- G גרף סופי, ולכן התהליך יסתיים לכל היותר לאחר $|V|$ שלבים
- כיון שבגרף אין מעגלים בסוף התליך נגיע לקודקוד בדרגה 1
- נניח בשלילה שהגענו לקודקוד שדרגתו ≤ 2 , וביקרנו את כל השכנים, אז מכאן שסגרנו מעגל, בסתירה לכך ש G הוא עץ
- לסיכום נבחר קודקוד v , נגיע ממנו לעלה u , וכעת נתחיל את הטיול מחדש , על פי מה שהראנו בודאות נגיע לעלה חדש w , וקיבלנו שני עלים כנדרש.

4. נתון גרף פשוט לא מכוון $G=(V,E)$ כך שעבור כל צלע $e\in E$ הגרף $G\backslash\{e\}=(V,E\backslash\{e\})$ הוא עץ . הוכיחו שכל קודקוד ב G הוא בדרגה 2

- יהי $v\in V$, קודקוד בG כך ש $deg(v)>1$, (נניח בשלילה שאין, אז השמטת צלע שכזו תגרור גרף לא קשיר)
- תהי $e=\{u,v\}$ צלע ב G . על פי הנתון אם נשמיט את e מ G נקבל עץ
- משאלה קודמת, ידוע שבעץ יש לפחות 2 עלים.
- עלים אלו חייבים להיות u,v כי השמטת הצלע e לא פוגעת בדרגות שאר הקודקודים.
- לכן $d(u)=d(v)=2$, כיון שאחרי השמטת הקשת דרגתם 1 , כנדרש.

5. נתונים שני יערות $G_1=(V,E_1)$, $G_2=(V,E_2)$. הוכיחו כי אם $|E_1|<|E_2|$ אז קיימת צלע $e\in E_2\backslash E_1$ כך שהגרף $G'=(V,E_1\cup\{e\})$ עדיין יער

- נניח בשלילה שלכל $e\in E_2\backslash E_1$, אם נוסיף אותה ל G_1 נסגור מעגל

- כל צלעות E_2 הם מרכיבי קשירות של E_1 כלומר אין צלעות ב E_2 מרכיבי קשירות שונים של G_1
- כמות הצלעות ב E_1 גדולה או שווה לכמות הצלעות ב $|E_2|$ כלומר $|E_2| \geq |E_1|$ סתירה לכך ש $|E_2| < |E_1|$
- הסבר: ברכיב קשירות בגדול k , ב E_1 יש $k-1$, לכן מספר הצלעות של E_2 מרכיב קשירות זה $\leq k-1$

הגדרות:

- אמר שגרף לא מכוון G הוא **מישורי** אס"ם ניתן לייצג אותו במישור מבלי שאף שתי צלעות תחתכנה
- בהינתן יצוג משורי של גרף מישורי שכל אזור שחסום על ידי צלעות הגרף נקרא **פאה**. האזור שאינה חסום נקרא ה**פאה החיצונית**
- נסמן קודקודים ב n , צלעות ב m ופאות ביצוג מישורי של הגרף ב f

משפט (נוסחת אוילר) : יהה G גרף מישורי קשיר, אז $n+f-m=2$

הוכחה - באינדוקציה, על מספר הצלעות

<u>בסיס:</u>

- $m=n-1$ (בגלל שהגרף קשיר)
- גרף קשיר עם $n-1$ צלעות הוא עץ, לכן $f=1$ כיון שישנה רק פאה אחת - החיצונית.

סה"כ:

$$n+f-m=n+1-(n-1)=2 \checkmark$$

צעד: הנוסחה מתקיימת לכל $m-1 \geq n-1$ ונוכיח לגרף עם m צלעות

- יהי G גרף קשיר מישורי עם n קודקודים, m צלעות
- מספר הצלעות ב G הוא $m \geq n$ לכן יש ב G מעגל
- G הוא גרף מישורי לכן יש לו ייצוג מישורי, נמחק מהייצוג המישורי צלע שנמצאת על מעגל (דוקא מהמעגל בשביל לא לאבד את הקשירות) ב G .
- הייצוג שנותר הוא ייצוג מישורי (מחיקת צלע לא חותכת צלע אחרת),
  לכן לG': יש f' פאות, ו- $m'=m-1$ צלעות (כי מחקנו אחת), $n'=n$ קודקודים לכן לפי הנחת האינדוקציה $n'+f'-m'=2$
- כאשר נחזיר את הצלע נשאר עם הייצוג המקורי המישורי של G , מספר הפאות גדל ב 1 - כי פאה אחת נחתכה ל2 על ידי הוספת הצלע לכן (מהנחת האינדוקציה):

$$n+f-m=n'+(f'+1)-(m'+1)=n'+f'-m'=2$$

משפט: יהי G גרף מישורי קשיר עם $n \geq 3$ קודקודים ו m צלעות. אזי $m \leq 3\,(n-2)$

אינטואיציה: בגרף מישורי יש יחסית מספר קטן של צלעות - כדי להמנע מחיתוכים - ולכן הגיוני שחסום מלמעלה

הוכחה

אם $n=3$:

- אז מכך שהגדרנו זאת כגרף פשוט, המקסימום האפשרי זה גרף שלם k_3 = משולש,
  ומתקיים ש: $m=3 \leq 3(3-2)$.

אם $n>3$:

- נסמן ב t_F את מספר הצלעות הגובלות בפאה F , $t_F \geq 3$
- מכיון שכל צלע גובל לכל יותר ב 2 פאות (אם זה עץ יש פחות), כל צלע נספרת לכל היותר פעמיים בסכום $\sum\limits_F t_F$ ולכן :
$2m \geq \sum\limits_F t_F$
- כיון ש $t_F \geq 3$ נקבל ש: $\sum\limits_F t_F \geq 3f$
- לכן $f \leq \frac{2}{3}m$ נציב בנוסחת אוילר, ונקבל:

$$2 = n - m + f \leq n - m + \tfrac{2}{3}m \iff m \leq 3\,(n-2)$$

- <u>האם המשפט ההפוך נכון?</u>
  - לא, הראנו בכיתה דוגמה נגדית (K_5 שמחובר ל'שרוך' בשביל להתאים למספר הצלעות והקודקודים)
- <u>יהי G גרף מישורי קשיר חסר משלושים עם $n \geq 3$ קודקודים ו m צלעות אז $m \leq 2(n-2)$</u>
  - אם $n = 3$ אז מכך שהוא חסר משלושים מקתיים ש: $m \leq 2 \leq 3(3-2)$ ✓
  - אם $n > 3$ אז מנתון שחסר משולשים $t_F \geq 4$, (בדומה להוכחה הקודמת יתקיים ש:) לכן $\frac{m}{2} \geq f \iff 2m \geq 4f$
  - נציב באוילר:

$$2 = n - m + f \leq n - m + \tfrac{m}{2} \iff m \leq 2\,(n-2)$$

- <u>האם גרף הn קוביה הוא מישורי</u>
  - $n = 1$ ✓
  - $n = 2$ - ריבוע ✓
  - $n = 3$ קוביה ✓
  - $n \geq 4$ אינו מישורי, ניתן להוכיח ע"י שימוש במסקנה $m \leq 2(n-2)$ כי ב n קוביה אין משולשים, כי הוא דו -צדדי לכן:
    - $m = n \cdot 2^{n-1}$
    - לכן צריך להתקיים $n \cdot 2^{n-1} \leq 2(2^n - 2)$ לכן עבור $n \geq 4$ גרף ה n קוביה אינו מישורי
- <u>מה קורה אם הגרף לא קשיר ?</u>
  - נחדד: האם בגרף מישורי לא קשיר עדיין מתקיים $m \leq 3(n-2)$?
    הוכחה:
  - יהי G גרף מישורי לא קשיר $|V| = n$, $|E| = m$
  - נסתכל על שני רכיבי קישרות של G , נוסיף צלע שתחבר בין שני רכיבי הקשירות. צלע זו בהכרח לא חותכת שום צלע אחרת.
  - אם קיבלנו גרף קשיר, סיימנו.
  - אחרת, נמשיך לחבר את רכיבי הקשירות באותו אופן.
  - כיון שמספר הקודקודים הוא סופי יתקבל בשלב כלשהו G' גרף קשיר,
  - נסמן את מספר צלעותיו ב m' ואת קודקודיו ב $n' = n$ (לא נגענו בקודקודים)
  - ע"פ המסקנה מאוילר:

$$m < m' \leq 3(n'-2) = 3(n-2)$$

  - למעשה הוכחנו: שהמסקנה נכונה ויש א"ש <u>חזק</u>.

משפט: הגרף המלא עם 5 קודקודים, וK_5 אינו מישורי

הוכחה:

- מספר הצלעות בגרף מלא בעל $n=5$ קודקודים הוא $m=\binom{5}{2}=10$
- נניח בשלילה שהגרף מישורי אז ממשפט קודם יתקיים:

$3(5-2)=9\geq 10$ - וזו סתירה

שיעור 11 - 27/5/19

הגרף הדו־צדדי המלא על שתי קבוצות של 3 קודקודים $k_{3,3}$ אינו מישורי

הוכחה:

- הערה: מבדיקה במסקנה לאוילר, לא ניתן לדעת. לכן:
- נניח בשלילה שהגרף מישורי
- מספר הקודקודים בגרף $n=3+3=6$
- ממשפט בשיעור שעבר מספר הצלעות $m=3\cdot 3=9$
- מנוסחת אוילר $f=2-n+m=2-6+9=5$
- הראנו במשפט קודם ש $18=2m\geq\sum\limits_F t_F$, כאשר t_F מסמל את מספר הצלעות הגובלות בפאה F .
- נזכר ש $f=5$, ולכן ממוצע הצלעות בפאה הוא $\frac{18}{5}=3.6$, לכן בהכרח קיימת פאה F שמספר צלעותיה קטן מהממוצע, לכן יש פאה בה יש לכל היותר 3 צלעות, מכיון שפאה חייבת לפחות 3 אז נובע שיש פאה בדיוק עם 3
- מכאן ש $K_{3,3}$ יש משולש וזו סתירה, כי הוכחנו שכל מעגל בגרף דו צדדי הוא זוגי.

הוכחה נוספת:

- $k_{3,3}$ הוא גרף חסר משולשים קשיר, אם הוא היה מישורי היה צריך להתקיים $2(6-2)=8\geq 9$
- וזו סתירה, לכן $k_{3,3}$ לא מישורי, כנדרש.

בכל גרף גרף מישורי $G=(V,E)$ יש קודקוד בעל דרגה לכל יותר 5 :

הוכחה:

- הדרגה הממוצעת של קודקודי הגרף היא $\frac{1}{|V|}\sum\limits_{v\in V}deg(v)$
- נזכר ש: $\sum\limits_{v\in V}deg(v)=2|E|$ לכן: $\frac{1}{|V|}\sum\limits_{v\in V}deg(v)=\frac{2|E|}{|V|}$
- מהמסקנה לאוילר אנחנו יודעים ש: $|E|\leq 3\left(|V|-2\right)$ לכן:

$$\frac{1}{|V|}\sum_{v\in V}deg(v)=\frac{2|E|}{|V|}\leq\frac{2\cdot 3\cdot(|V|-2)}{|V|}=6-\frac{12}{|V|}<6$$

- משובך היונים כיון שהדרגה הממוצע קטנה מ 6 יש קודקוד בעל דרגה קטנה ממש מ 6

הגדרות:

- **עידון** של צלע $\{u,v\}$ הוא החלפתה במסלול $u-x,v$ באורך 2 , כאשר x צומת חדש שמוספיפ לגרף

- G' הוא **העדנה (הומיאומורף)** של G אם ניתן לקבל את G' מ G על ידי סדרה של עידון צלעות, כאשר מותר גם לעדן צלעות חדשות.

טענות (לא נוכיח)

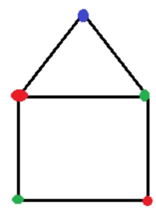
- גרף הוא מישורי $\Longleftrightarrow$ כל העדה שלו היא גרף מישורי
- משפט $Kuratowski$: גרף הוא מישורי $\Longleftrightarrow$ הוא לא מכיל כתת־גרף העדה של K_5 הוא של $K_{3,3}$

צביעה של גרפים

יהי $G=(V,E)$ גרף לא מכוון. צביעת G ב k צבעים $1\le k\le|V|$ היא פונקציה $f:V\to\{1,...,k\}$ כך שלכל $\{u,v\}\in E$ מתקיים $f(u)\neq f(v)$ גרף שיש שלו צביעה ב k צבעים נקרא k **צביע**

דוגמה ־ האם אפשר לצבוע את הגרף הבא ב 3 צבעים?

כן, נצייר:



משפט כל גרף משורי הוא 6 צביע

הוכחה ־ באינדוקציה:

<u>בסיס:</u> $n<7$ הגרף צביע

<u>צעד:</u> נניח ל גרף עם $t<n$ קודקודים ונוכיח ל n קודקודים

- על פי משפט בגרף מישורי יש קודקוד כלשהו ־ נסמנו ב x ־ בעל דרגה קטנה ממש מ 6
- נתבונן בגרף $G\backslash\{x\}$. הסרת קודקוד וצלעותיו לא יכולות לפגוע במישרויות, ומהנחת האינדוקציה נקבל ש G הוא 6 צביע.
- נצבע את כל הקודקוד ב G לפי הצביעה של $G\backslash\{x\}$ ואת x בצבע שונה משכניו ־ יש כזה כי יש 6 צבעים ול x יש פחות מ 6 שכנים.

טענה: גרף דו צדדי $\Longleftrightarrow$ 2 צביע

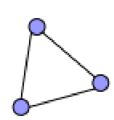
השאלה: בהנתן גרף לא מכוון G ומס' טבעי k , האם ניתן לצבוע את G ב k צבעים? לא ידועה, כל גרף צריך לבדוק באופן פרטני.
שאלה נוספת: בהנתן גרף מהו ה k המינמלי לצביעת הגרף (המספר הכרומטי)?

הגדרות:

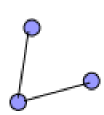
- יהי $G=(V,E)$ גרף לא מכוון. **מסלול אוילר** הוא מסלול לא בהכרח פשוט שעובר בכל צלע בגרף בדיוק פעם אחת
- **מעגל אוילר** הוא מעגל לא בהכרח פשוט שעובר בכל צלע בגרף בדיוק פעם אחת.

דוגמה:

מעגל אוילר:



מסלול אוילר:



משפט: היה $G=(V,E)$ גרף קשיר לא מכוון. ב G יש מעגל אוילר $\iff$ כל הדרגות של הקודקודים בגרף זוגיות

<u>כיון ראשון: בG יש מעגל אוילר $\Leftarrow$ כל הדרגות זוגיות</u>

- יהי $u \in V$ קודקוד כלשהו במעגל.
- כל מעבר של המעגל דרך הקודקוד u הוא דרך שתי צלעות שונות זו מזו, ומהצלעות של המעברים האחרים.
  - לכן דרגתו של הקודקוד u זוגית.
- אם u הוא הקודקוד הראשון במעגל אז סופרים 1 ביציאה הראשונה ממנו, 2 בכל פעם שעוברים דרכו, ולבסוף כשחוזרים אליו בסיום.
- בכל מקרה קיבלנו שהדרגה של u זוגית, כנרש.

טענת עזר:

יהי $G=(V,E)$ גרף קשיר לא מכוון שהדרגות של הקודקודים בו זוגיות גדולות מ 0 אז כל קודקוד ב G שייך למעגל כלשהו

הוכחה:

- נצא מקודקוד u ונמשיך להתקדם מקודקוד לקודקוד בלי לעבור באותה צלע פעמיים.
- מכיון שמספר הצלעות סופי, לאחר מספר שלבים סופי לא נוכל להמשיך.
- הקודקוד בו נעצור הוא u
- אחרת לקודקוד האחרון דרגה אי־זוגית מכיון שכל מעבר בו תורם 2 צלעות וכשעצרנו הוספנו צלע אחת (לכניסה), ואלו כל הצלעות, וזוהי סתירה.

<u>כיון שני ־ כל הדרגות זוגיות $\Leftarrow$ יש מעגל אוילר</u>

- יהי $u_1 \in V$ קודקוד כלשהו
- לפי טענת העזר הוא חלק ממעגל $c_1=(u_1,.....u_k,u_1)$ אם המעגל עובר דרך כל הצלעות סיימנו.
- אחרת, אז c_1 לא מכסה את כל הצלעות.
- נמחק את כל הצלעות המשתתפות ב c_1 ונסמן את הגרף החדש ב G_1
- נשים לב שכל הדרגות ב G_1 גם זוגיות ־ כיון שהורדנו מספר זוגי של דרגות
- בהכרח קיים קודקוד u_i במעגל שדרגתו שונה מאפס (אחרת c_1 כיסה את כל הגרף כפי שציינו)
- כיון ש G המקורי קשיר, קיים קודקוד x לא ב c_1 שמחובר על ידי צלע לקודקוד y ב c_1 ל y יש דרגה חיובית ב c_1 כי הצלע $\{x,y\}$ לא נמצאת ב c_1
- לכן נסמן $c_2=(u_i,v_2,...v_k,u_i)$ מעגל המתחיל ב u_i
- כעת נגדיר מעגל שלישי: $c_3=(u_1,....u_i,v_2,....v_k,u_i,...u_k,u_1)$ (הרכבת המעגלים)
- אם קיבלנו מעגל של כל הקודקודים, סיימנו, אחרת נמשיך בתהליך עד שנכסה את כל הצלעות
- כיון שיש מספר סופי של צלעות, בשלב כלשהו יגמר התהליך, ונקבל מעגל אוילר כנדרש.

משפט: יהי $G=(V,E)$ גרף קשיר לא מכוון. ב G יש מסלול אוילר $\Longleftrightarrow$ כל הדרגות של הקודקודים בגרף זוגיות או שיש בדיוק שני קודקודים בעלי דרה אי־זוגית.

הוכחה:

כיוון ראשון ־ מסלול אוילר $\Leftarrow$ כל הדרגות זוגיות או שיש בדיוק 2 קודקודים בעלי דרגה אי־זוגית:

- כמו ההוכחה בבטענה קודמת ללא הדרישה על זוגיות של הקודקוד הראשון והאחרון במסלול שהן אי־זוגיות (רק כניסה/יציאה בהתאמה)

כיון שני: כל הדרגות זוגיות/יש בדיוק 2 קודקודים בעלי דרגה אי־זוגית $\Leftarrow$ מסלול אוילר

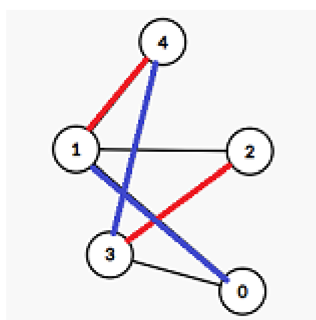
- אם כל הדרגות זוגית אז לפי משפט קודם יש מעגל אוילר, וסיימנו
- לכן נניח שיש קודקודים a,b שדרגם אי־זוגית.
- נוסיף קודקוד חדש z וצלעות $\{z,b\}$, $\{a,z\}$. קיבלנו גרף חדש קשיר שכל דרגותיו זוגיות
- ממשפט קודם יש בו מעגל אוילר שמתחיל ומסתיים ב a
- כעת נשמט מהמעגל את z וצלעותיו, ונקבל מסלול אוילר שמתחיל ב a ונגמר ב b , כנדרש.

אוילר לגרף מכוונים : יהי $G=(V,E)$ קשיר חזק מכוון. ב G יש מעגל אוילר $\Longleftrightarrow$ דרגת הכניסה של כל קודקוד בגרף שווה לדרגה היציאה שלו

זיווגים בגרפים

הגדרות:

- זיווג בגרף דו צדדי ־ קבוצה של צלעות בגרף דו צדדי כך שאין אף זוג צלעות עם קודקודים משותפים נקרא **זיווג**.



- הזיווג יהיה **מושלם** אם כל הקודקודים בגרף משתתפים בזיווג, כלומר ניתן לבחור חלק מהצלעות בגרף כך שאין קודקודים משותפים בין הצלעות ובכל קודקוד חלה צלע אותה בחרנו

בזיווג מושלם עוצמת קבוצות הקודקודים משני צידי הגרף זהה (שובך היונים)

כמה זיווגים מושלמים יש ב $k_{3,3}$?

- נניח והגרף מחולק לקודקודים $1,3,5$ ו $2,4,6$
- אז ל 1 : יש 3 אפשרויות לשידוך
- ל3: יש 2 אפשרויות לשידוך
- ל5 יש אפשרות אחת

- מעקרון הכפל $3!$ זיווגים מושלמים.

באופן כללי ל $k_{n,n}$ ישנם $n!$

זיווגים כלשהם (בדו־צדדי) זוהי קבוצת החזקה ולכן: 2^n

- זיווג בגרף כלשהו - יהי $G=(V,E)$ לא מכוון. **זיווג ב** G הוא אוסף של M של צלעות שלאף שתיים אין קודקוד משותף. הזיווג M נקרא **מושלם** אם כל קודקודי הגרף משתתפים בזיווג .

- אם $\{u,v\}\in M$ נאמר שהקודקודים u,v מזווגים ע"י הזיווג M

שיעור 12 - 3/6/19

משפט החתונה של $Hall$

בגרף דו־צדדי $G=(V_1,V_2,E)$ **,** $|V_1|=|V_2|$

יש זיווג מושלם $\iff$ **לכל קבוצות** S **החלקית ל** V_1 **מתקיים** $|\Gamma(S)|\geq|S|$

הוכחה:

כיוון ראשון - זיווג מושלם $\Leftarrow$ לכל $S\subseteq V_1$ מתקיים $|\Gamma(S)|\geq|S|$

- נניח שיש ב G זיווג מושלם, ותהיה S קבוצה חלקית כלשהי ל V_1

- לכל קודקוד בקבוצה S יש בן זוג בזיווג, ומעקרון שובך היונים $|\Gamma(S)|\geq|S|$

כיוון שני - לכל $S\subseteq V_1$ מתקיים $|\Gamma(S)|\geq|S|$ $\Leftarrow$ יש זיווג מושלם

נראה באינדוקציה

בסיס:

- עבור $|V_1|=|V_2|=n=1$ $\Leftarrow$ ישנם שני קודקודים וצלע אחת בינהם בכל הגרף $\Leftarrow$ זיווג מושלם

צעד: נניח עבור $|V_1|=|V_2|=n-1$ ונוכיח בעבור n

נפצל למקרים:

1. אם לכל $S\subset V_1$ מתקיים ש: $|\Gamma(S)|>|S| \iff |\Gamma(S)|\geq|S|+1$:

- יהיה $x\in V_1$. מההנחה יש ל x לפחות 2 שכנים, נבחר אחד מהם נסמנו ב y
- נכלול את הצלע $\{x,y\}$ (קיימת כי הם שכנים) בזיווג M המבוקש, ונסיר את שניהם + הצלע מהגרף
- נסתכל על הגרף $G'=G\backslash\{x,y\}$, נסמן ע"י $\Gamma'(S)$ את קבוצת השכנים של S בגרף G' .
- (קל לראות ש) לכל תת קבוצה S ב $V_1\backslash\{x\}$ מתקיים $|\Gamma'(S)|\geq|S|$ - כי הורדנו קודקוד אחד ושכן אחד, הסבר:

$$|\Gamma'(S)|=|\Gamma(S)|-1\overset{1}{\geq}|S|+1-1=|S|$$

- לכן אנחנו עומדים בתנאי הנחת האינדוקציה, ולכן ב G' יש זיווג מושלם, נחזיר את $\{x,y\}$ לגרף ונקבל ב G זיווג מושלם , כנדרש.

2. אם קיימת $S\subseteq V_1$ (חלקית ממש) שעבורה: $|\Gamma(S)|=|S|$:

- נתבונן בגרף הדו צדדי $G_S=(S,\Gamma(S),E_s)$ כאשר E_s היא קבוצת כל הצלעות בין קודקודים מ S ל $\Gamma(S)$
- בG_s מתקיימים התנאי של משפט $Hall$: לכל תת קב' $H\subseteq S$ מתקיים $|\Gamma_S(H)|\geq|H|$ לכל x בגרף G_s , כל שכן של x ב G_s הוא שכן של x ב G ולהיפך

- לכן $|\Gamma_S(H)|=|\Gamma(H)|$ לכן $|H| \geq |\Gamma(H)| = |\Gamma_2(H)|$(כי תנאי משפט הול מתקיימים ב G
- לכן תנאי משפט הול מתקיימים ב G_S
- בG_S גם יש פחות קודקודים מאשר בגרף המקורי כי $|S|<|V_1|$. לכן מהנחת האינדוקציה קיים זיווג מושלם M_s ב G_s
- נסיר מהגרף את G את קבוצת הקודקודים S ו $\Gamma(S)$ ואת כל הצלעות ביניהם.
- נסמן את הגרף החדש: $G" = (V_1, \backslash S, V_2 \backslash \Gamma(S), E")$
- תהי H תת קבוצה כלשהי של קודקודים ב $V_1 \backslash S$. נסמן ע"י $\Gamma"(H)$ את קבוצת השנים של H בגרף $G"$
- אז מתקיים בהכרח $|\Gamma"(H)| \geq |H|$:
  - נניח בשלילה שלא, לכן $|\Gamma"(H)| < |H|$ אז בגרף G מתקיים (הכלה והדחה):

$$|\Gamma(H \cup S)| \overset{1}{=} |\Gamma(H)| + |\Gamma(S)| - |\Gamma(H \cap S)| \overset{2}{=} |\Gamma"(H)| + |\Gamma(S)| \overset{3}{<} |H| + |S| = |H \cup S|$$

1. הכלה והדחה. 2. $\Gamma(H) \backslash \Gamma(H \cap S) = \Gamma"(H)$ מתהליך המחיקה שביצענו לעיל 3. מההנחה בשלילה

- וזו סתירה לכך שבגרף G לכל קבוצת חלקית T של V_1 של קודקודים מתקיים $|\Gamma(T)| \geq |T|$
- לכן גם הגרף $G"$ מתקיים את תנאי המשפט, לכן לפי הנחת האינדוקציה יש בגרף $G"$ זיווג מושלם $M"$, נוסיף לזה את הזיווג M_S ונקבל זיווג מושלם בגרף המקורי G .

מסקנה: ממשפט החתונה של $Hall$ - אם G גרף דו צדדי d- רגולרי אז קיים בו זיווג מושלם.

הוכחה:

- נקח תת קבוצה S של קודקודים מאחד הצדדים. אז לכל קודקוד כזה יש d צלעות כי הגרף הוא d רגולרי.
- כמות הצלעות בתת הקבוצה הזו היא $d \cdot |S|$
- עכשיו ניקח את קבוצת כל השכנים S , $\Gamma(S)$. גם לכל קודקוד ב $\Gamma(S)$ יש d צלעות כי הגרף d-רגולרי אז ל $d \cdot \Gamma(S)$ צלעות
- נסמן ב E_s את קבוצת הצלעות של S , וכן ב $E_{\Gamma(S)}$ את קבוצת הצלעות של $\Gamma(S)$. E_s חלקית ל $E_{\Gamma(S)}$ כי כל צלע שחלה בקודקוד ב S חלה גם בקודקוד שהוא שכן של הקודקוד מ S - כי הגרף לא מכוון ויש צלע בין הקודקודים האלה
- לכן נקבל כי $d \cdot |\Gamma(S)| = \left|E_{\Gamma(S)}\right| \geq |E_s| = d \cdot |S|$
- ולפי משפט החתונה של $Hall$, קיים בגרף זיווג מושלם.

הגדרות:

- נזכר שהגדרנו זיווג גם על גרף כללי
- יהי M זיווג בגרף $G=(V,E)$, ויהי P מסלול פשוט. P הוא הוא **מסלול מתחלף** אם הצלעות במסלול נמצאות לסירוגין בזיווג M . כלומר כל צלע במסלול היא בזיווג/לא בזיווג והצלע הבאה אחירה היא לא בזיווג/בזיווג בהתאמה.
- יהי M זיווג בגרף $G=(V,E)$, והיה P מסלול פשוט. P **הוא מסלול הרחבה ל** M אם מתקיימים התנאים הבאים:
  1. הקודקודים הראשון והאחרון ב P אינם מכוסים על ידי אף צלע בזיווג M
  2. P הוא מסלול מתחלף , לכומר הצלע הראשונה והאחרונה אין ביזווג וכל היתר לסירוגין

<u>הערות:</u>

- מ 2, 1 נובע ש M אינו זיווג מקסימום - ואם נבחר את הזיווג המשלים שכולל את הצלע הראשונה והאחרונה והוא בהכרח גדול יותר

– מסלול הרחבה אינו חייב לכלול את כל הצלעות של הזיווג והוא עדיין יהיה מסלול הרחבה (הראשון והאחרון לא מכוסים + מסלול מתחלף)

משפט $Berge$ **: בגרף** $G = (V, E)$ **בעל זיווג** M

קיים זיווג אחר N **, כך שעוצמתו של** N **גדולה מעוצמתו של** M $\iff$ **קיים מסלול הרחבה ל** M

הוכחה:

כיון ראשון - קיים מסלול הרחבה ל M $\Leftarrow$ קיים זיווג N כך ש: $|N| > |M|$

- אם קיים מסלול הרחבה אז מהגדרת הרחבה.1 נובע שהקודקודים הראשון והאחרון אינם מכוסים, ולכן נוכל לבחור את הזיווג המשלים שיכלול אותם

כיון שני - קיים זיווג N כך ש: $|N| > |M|$ $\Leftarrow$ קיים מסלול הרחבה ל M

- יהי M זיווג שאינו זיווג מקסימום , ו N זיווג שעוצמתו גדולה יותר מזו של M
- נתבונן בגרף H ש V קבוצת הצמתים שלו, וקבוצת הצלעות שלו היא הצלעות ב M ו בN .
  – צלעות שמופיעות בחיתוך , תכופלנה = תהפוכנה ל 2 צלעות מקבילות
- מכיון שקבוצת הצלעות של H היא איחוד של שני זיווגים, דרגת כל צומת בו היא לכל היותר 2
  – כיוון שדרגת קודקוד בזיווג כלשהו היא לכל היותר 1 , ולכן איחוד של שני זיווגים עלול לצור קודקוד עם דרגה 2

נרצה להראות שכל רכיב קשירות של H הוא מעגל או מסלול פשוט (אולי באורך 0)

- יהי $H' = (V', E')$ תת הגרף של H המושרה ע"י רכיב קשירות V' (לקחנו רכיב קשירות)
- אם H' מכיל זוג צלעות מקבילות, אז ודאי ש H הוא בהכרח מעגל באורך 2 המורכב מצלעות אלה
  – אם היתה מחוברת צלע נוספת אז היה קודקוד עם דרגה 3 (וזו סתירה), ולכן המעגל מכסה את כל רכיב הקשירות.
- אחרת, נוכל להניח ש H' גרף פשוט.
- יהי P המסלול הפשוט (סגור או לא) <u>הארוך ביותר</u> ב H' . אז בהכרח מתקיים כי $H' = P$
  – אחרת, (אינו הכי ארוך) מכיון ש H' קשיר, יש ב H' צלע e שאינה ב P אבל היא סמוכה לאישהו קודקוד של P (מהקשירות של הרכיב).
  – הצלע e אינה יכולה להיות סמוכה לקוקוד שדרגתו ב P היא 2 , כי אז הדרגה של צומת זה ב H' היא לפחות 3. מכאן נובע כי עם הוספת e ל P נקבל <u>מסלול ארוך יותר מ P</u> , בסתירה למקסימליות P
- <u>ברכיבים שהם מעגלים</u>, כל שתי צלעות סמוכות חייבות להיות האחת מ M והשניה מ N , לכן ברכיבים כאלה יש מספר זהה של צלעות מ M ו מN
- <u>ברכיבים שהם מסלולים</u>, כל 2 צלעות סמוכות חייבות להיות אחת מ M והשניה מ N
- לכן יתכן שההפרש בין מספר הצלעות מ M ומ N הוא $0, 1, -1$.
- מכיון שעוצמת N גדולה יותר מזו של M , אז H <u>חייב להכיל לפחות מסלול אחד</u> שבו יש יותר צלעות של N מאשר של M
- מסלול כזה הוא מסלול הרחבה ביחס ל M - הצלעות בו מתחלפות מבין M ל N , ו 2- הצלעות החיצוניות שייכות ל N

*** סוף החומר ***

חזרה:

מועד א' תשעח

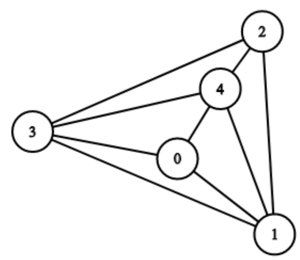
שאלה 1

א. נתון גרף מישור פשוט G שבו קיים מסלול אוילר באורך 9 .

נתון גם כי קיימים 2 קודקודים u,v שאין צלע בינהם, וכן שאם נוסיף את הצלע $\{u,v\}$ הגרף שיקתבל לא מישורי האם קיים כזה בעל 5 קודקדים?

פתרון

- מהנתון יש 9 צלעות
- אם נסיר צלע מ K_5 נקבל גרף מישורי



- G מישורי (כי ציירנו אותו במישור) ב G ישנם בדיוק 2 קודקודים (במקרה הזה 0 ו 2) מדרגה אי־זוגית והוא קשיר ולכן יש בו מסלול אוילר.
- u,v אינם מחוברים בצלע, ואם נוסיף את הצלע $\{u,v\}$ נקבל את K_5 שהוכחנו בכיתה שהוא לא מישורי

שיעור 13 - השלמה - 10/6/19 - חלקי

2 . יהי G הגרף הבא:

הקודקודים של G הם תת קב' בגודל 3 בדיוק של $\{1,2,....,8\}$(לדוגמה $\{1,2,7\}$ קבוצה ב G). בין 2 קודקודים A,B יש צלע אס"ם החיתוך של A ו B הוא ϕ , <u>הוכיחו/הפריכו:</u>

<u>א. G קשיר</u>

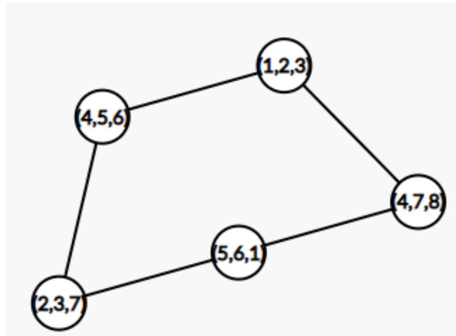
צ"ל שבין כל 2 קודקודים A,B יש מסלול, נסמן: $\begin{matrix} A=\{a,b,c\} \\ B=\{d,e,f\} \end{matrix}$:

- אפשרות 1 : $A\cap B=\phi$ לכן יש צלע $A-B$ (= מסלול באורך 1)
- אפשרות 2 : $B=\{a,d,e\}$ אז קיימים 3 איברים שלא נמצאים ב $A\cup B$ ואתם ניקח את C להיות $C=\{f,g,h\}$ נקבל מסלול $A-C-B$.
- אפשרות 3 : $B=\{a,b,d\}$ והשאר כמו ואפשרות 3 כי $|A\cup B|\leq 5$

לכן בין כל 2 קודקודים קיים מסלול באורך 2 לכל היותר, כנדרש.

<u>ב. G גרף דו־צדדי</u>

נצייר



קיבלנו מעגל באורך 5 , שהוא אי־זוגי ולכן הגרף אינו דו"צ (הוכחנו בכיתה שגרף הוא דו"צ אם"ם אין מעגלים באורך אי־זוגי)

שאלה

א. האם בהורדת 2 צלעות מ k_6 יכול להתקבל גרף מישורי?

- לא ־ אם נסיר 2 צלעות שיש להן קודקוד משותף שאר הקודקודים מהווים k_5 שהוא לא מישורי
- לא ־ אם נסיר 2 צלעות שאין להם קודקוד משותף, הגרף שמתקבל מכיל את $k_{3,3}$ שוהכחנו בכיתה שהוא לא מישורי

  פורמלית:

  – תהיינה $\{x,y\}$ $\{z,t\}$ הצלעות שנוסרו נקח $\begin{matrix} v_1 = \{x,y,a\} \\ v_2 = \{z,t,b\} \end{matrix}$, נשים לב שכל הצלעות בין v_1 ל v_2 קיימות ברף לכן הגרף שהקתבל אכן מכיל את $k_{3,3}$

  דרך נוספת:

- ב k_6 בהסרת 2 צלעות נקבל 13 צלעות ו $\cancel{13 \le 3(6-2)}$ בסתירה לכך שוהכחנו בכיתה שבגרף מישורי $m \le 3(n-2)$

ב. האם בהורדת 3 צלעות מ k_6 יכול להתקבל גרף מישורי

- נצייר

שאלה 3

חמישה סטונדטים התבקשו להשתתף ב 4 פורייקטים שונים, כאשר כל פרוקייט בוצע ע"י 2 סטודנטים.

א. בכמה דרכים ניתן להגדיר צוותים לביצוע כל הפורייקטים כאשר לא כל הסטודנטים חייבים להשתתף

- אפשרות לבחור סטודנטים לפרויקט 1 : $\binom{5}{2}$
- עבור 4 , מעקרון הכפל: $\binom{5}{2}\binom{5}{2}\binom{5}{2}\binom{5}{2}$

ב. בכמה דרכים ניתן להגדיר צוותים לביצוע כל הפרוייקטים כאשר כל סטודנט חייב להשתתף בלפחות אחד מהפרוייקט

- נחשב : (כל האפשרות בהין קיים סטודנט שלא השתתף בשום פרוייקט)־ (סך האפשרויות)
- נגדיר $1 \le i \le 5$, A_i = כל האפשוריות בהן ה i לא השתתף
- סך הכל = א'
- הקב' סימטריות
  - $|A_1| = \binom{4}{2}^4$
  - $|A_1 \cap A_2| = \binom{3}{2}$
  - $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \binom{2}{2}^4$

- $|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5| = 0$

- סה"כ:

$$\binom{5}{2}^4 - \left(\binom{5}{1}\binom{4}{2}^4 - \binom{5}{2}\binom{3}{2}^4 + \binom{5}{3} \cdot 1\right)$$

תשעו מועד ב'

3 . יהי $f(n)$ מס' הגרפים השונים $G = (V, E)$ כאשר $V = \{1, 2, ..., n\}$ שבהם כל רכיב קשירות הוא מסלול באורך 1 או 2

א. הראו כי $f(5) = 30$

- ראשית נשים לב, שמקרה זה רכיבי הקשירות חייבם להתחלק ל3,2 אחרת נקבל סתירה לאורכי המסלול
- נשאר לחשב את מס' האשפרויות לחלק 5 קודקודים ל2 רכיבי קשירות כאלה, לכן $\binom{5}{2}$ - סימטרי לבחירת $\binom{5}{3}$
- כעת צריך להתייחס לסידור הפנימי
  - ברכיב עם שני הקודקודים, יש סידור יחיד
  - ברכיב עם שלושה קודקודים: כמו ברכיב הקודקודים יש סימטריה בין הקצוות, ולכן יש 3 אפשרויות שונות לבחירת הקודקוד האמצעי
- סה"כ:

$$\binom{5}{3} \cdot 3 = 30$$

ב. מצאו נוסחת נסיגה ותנאי להתחלה ל $f(n)$

שיעור 13 - השלמה מתם - חלקי

שאלה 2

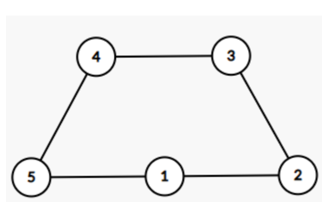
הוכח/הפרך

א. אם גרף הוא דו-צדדי אז אין בגרף תת-גרף שלם בגודל 3

- נזכר במשפט: גרף הוא דו"צ אס"ם אם כל המעגלים בו באורך זוגי
- מסקנה מיידית : גרף אינו דו"צ אס"ם קיים מעגל באורך אי-זוגי
- נניח בשלילה שקיים תת גרף שלם בגודל 3 = k_3 (משולש)
- אז יש לנו מעגל באורך 3, כלומר אורך אי-זוגי . בסתירה לנתון שהגרף דו"צ

ב. אם אין בגרף תת-גרף שלם מגדול 3 אז הגרף הוא דו"צ

ד"נ :



- בגרף זו יש מעגל באורך 5 , כלומר אורך אי-זוגי, ומכאן שאינו דו"צ על פי המשפט שהזכרנו בא'

הערה לא קשורה:

מסקנה מאוילר $n \leq 3(n-2)$ המסקנה הנ"ל נכונה גם לגרף מישורי קשיר:

דרך 1: נטפל בכל רכיב קשירות לבד.

- נניח שישנם k רכיבי קישרות בגרף ,ברכיב ה i יש n_i קודקודים ו m_i צלעות.
- כל רכיב קשירות של גרף מישורי הוא גרף מישורי קשיר.
- לכן לפי המסקנה עבור גרפים מישורים קשירים נקבל

$$m = \underbrace{\sum_{i=1}^{k} m_i}_{\text{all edges}} \leq \sum_{i=1}^{k} 3(n_i - 2) = 3 \underbrace{\sum_{i=1}^{k} n_i}_{\text{all vertex}} - 3 \cdot 2 \cdot k = 3n - 6k$$

דרך 2 : נישם לב שניתן להוסיף צלעות בין רכיבי קשירות (כלומר צלעות שמחברות קודקודים שנמצאים בריכבי קישרות שונים). אחר מס' סופי של צעדים ($k-1$, כאשר k הוא מס' רכיבי הקשירות), נקבל גרף מישורי קשיר

$$m \leq m' \leq 3(n'-2) = 3(n-2)$$

$n' = n$ מספר הקודקודים לא השתנה

שאלה 3

יהי $k > 0$ מספר טבעי כלשהו. נתונים $10k$ כדורים שונים.

א. בכמה דרכים ניתן לחלק אותם ל k תאים שונים

- עבור הכדור הראשון יש k אפשרויות
- עבור הכדור השני יש גם k אפשרויות
- היות וכל הכדורים שונים, ובכל צעד ניתן לבחור k תאים נמשיך כך לכל $10k$ הכדורים
- סה"כ k^{10k} (שקול לבחירה עם חזרות וחשיבות לסדר)

הערה: כיון שכל הכדורים שונים ניתן להמיר את השאלה לפונקציות כאשר:

$$\begin{array}{ccc}
\text{10k balls} & & \text{k cells} \\
1 & \longrightarrow & a \\
2 & \longrightarrow & b \\
 & & \vdots \\
\vdots & & \\
 & & k \\
 & \nearrow & \\
10k & &
\end{array}$$

ב. בכמה דרכים ניתן לחלק אותם ל k תאים שונים כך שבכל תא יהיו 10 כדורים בדיוק

דרך א:

- נסדר את כל הכדורים בשורה - הכדורים שונים לכן יש לכך $(10k)!$ אפשרויות
- בכל סידור אפשרי 10 נקח את 10 הכדורים הראשוני בסידור לקבוצה אחת, שתכנס לתא הראשון, 10 הבאים לתא השני וכך הלאה, ישנם k קבוצות של 10 כדורים, נשים לב שבכל תא, אין חשיבות לסדר, ולכן צריך לחלק בסידור הפנימי לכל תא , שזה $10!$

- לכן:

$$\frac{(10k)!}{\underbrace{10!\cdot 10!....10!}_{k}}=\frac{(10k)!}{(10!)^k}$$

<u>דרך ב:</u>

- עבור התא הראשון יש $\binom{10k}{10}$ אפשרויות
- עבור התא השני יש $\binom{10k-10}{10}$ אפשרויות
- ....
- סה"כ:

$$\frac{10k!}{10!\cancel{(10k-10)!}}\cdot\frac{\cancel{(10k-10)!}}{10!\cancel{(10k-20)!}}\cdot\ldots\cdot\frac{\cancel{10!}}{10!\cdot 0!}=\frac{(10k)!}{(10!)^k}$$

<u>ג. בכמה דרכים ניתן לחלק אותם ל k תאים זהים כך שבכל תא יהיו 10 כדורים בדיוק?</u>

- (תאים זהים = עד כה התאים היו "ממוספרים" ולכן היתה חשיבות לסדר, כעת נעלם המספור)
- אם ניקח את סעיף ב', ונחלק בסידור הפנימי בין הקבוצות , נקבל את הדרוש: $\frac{(10k)!/(10!)^k}{k!}$

<u>ד. (תוספת) תאים זהים וכדורים שונים אבל אין מגבלה של 10 כדורים בדיוק או (ניסוח שונה) כמה חלוקות שונות של $10k$ איברים שונים ל k קבוצות</u>

- כמו א', רק שצריך לחלק בסידור הפנימי בין התאים (שכעת הם זהים): $\frac{(k)^{10k}}{k!}$

שאלה 4

<u>הוכיחו את הזהות הבאה בשתי דרכים - אלגברית וקומבינטורית:</u>

$$\binom{k}{1}\binom{n}{k}=\binom{n}{1}\binom{n-1}{k-1}$$

אלגברית:

$$\binom{k}{1}\binom{n}{k}=\cancel{k}\cdot\frac{n!}{\underbrace{\cancel{k}!}_{(k-1)!}(n-k)!}=\frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}=n\binom{n-1}{k-1}=\binom{n}{1}\binom{n-1}{k-1}$$

קומבינטורית - נרצה לבחור ועד של $k-1$ אנשי ויו"ר

- אגף שמאל: בוחרים קודם את הועד כולל יו"ר ואז מתוך אלו שנבחרו בוחרים את היו"ר
- אגף ימין: בוחרים קודים את היו"ר ומתוך אלו שנשארו את הועד

<u>ב. כמה תמורות π של הקבוצה $\{1,2,...,\}$ ישנן כך ש $\pi(1)\neq 2$</u>

תזכורת: תמורה היא פונקציה חח"ע ועל מהקבוצה לעצמה

<u>דרך 1 :</u>

$$\underbrace{(n-1)}_{\text{Permutation for 1}}\quad\underbrace{(n-1)!}_{\text{Permutation for the remaining numbers}}$$

<u>דרך 2:</u> דרך המשלים

$$\underbrace{(n!)}_{\text{all Permutation}}-\underbrace{1\cdot(n-1)!}_{\text{Permutation after }\pi(1)=2}=n(n-1)!-(n-1)!=(n-1)!(n-1)$$

שאלה 5

הוכיחו/הפריכו:

א. יהיו a,b,c קבועים גדולים מ 1 . אז מתקיים $c^{\log_a n} = \Theta\left(c^{\log_b n}\right)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c^{\log_a n}}{c^{\log_b n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{c^{\frac{\log_c n}{\log_c a}}}{c^{\frac{\log_c n}{\log_c b}}} = \lim_{n\to\infty} c^{\frac{\log_c n}{\log_c a} - \frac{\log_c n}{\log_c b}}$$

$$\text{if a<b}\Rightarrow$$

$$\log a < \log b$$

$$= \lim_{n\to\infty} c^{\log_c n\left(\frac{1}{\log_c a} - \frac{1}{\log_c b}\right)} \overset{x = \frac{1}{\log_c a} - \frac{1}{\log_c b} > 0}{=} \lim_{n\to\infty} n^x = \infty$$

ובפרט $c^{\log_a n} \neq \Theta\left(c^{\log_b n}\right)$

ב. קיימת פונקציה חיובית $f(n)$ כלומר לכל $f(n) > 0$ כך שמתקיים $f(n) \neq \Theta\left(f(n+3)\right)$

דרך 1 :

$$f(n) = n^n \Rightarrow f(n+3) = (n+3)^{(n+3)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+3)^{n+3}} = 0 \Rightarrow f(n) \neq \Theta\left(f(n+3)\right)$$

דרך 2:

$$f(n) = 2^{n^2} \Rightarrow f(n+3) = (2)^{(n+3)^2} = 2^{n^2+9+6n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n^2}}{2^{n^2+9+6n}} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{2^{n^2}}{2^{n^2}}}_{=1} \frac{1}{2^{9+6n}} = 0 \Rightarrow f(n) \neq \Theta\left(f(n+3)\right)$$

דרך לא טובה:

$$f(n) = \sin n + 2 \Rightarrow \sin(n+3) + 2$$
$$f(n) = \sin n + 2 \leq 100\left(\sin(n+3) + 2\right)$$
$$f(n+3) \leq 100\left(\sin n + 2\right)$$
$$\Rightarrow f(n) = \Theta\left(f\left(n+3\right)\right)$$