שעור 1 תורת הגרפים – מושגים בסיסיים

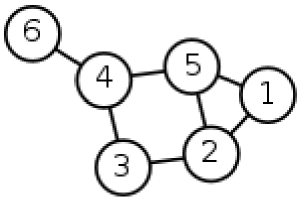
גרף (graph) – הוא זוג $G=(V,E)$ המורכב מקבוצת הקדקודים $V=(v_1,v_2,\dots,v_n)$ (*vertices*), או צמתים (*nodes*) וקבוצת הצלעות $E=(e_1,e_2,\dots,e_m)$ או הקשתות – (*edges*), כאשר כל צלע מקשרת בין שני קדקודים, כלומר היא זוג של קדקודים מ-V :

$e=\{(u,v):u,v\in V\}$.

נסמן: $n=|V|$ –מספר קדקודי הגרף, $m=|E|$ – מספר צלעות גרף

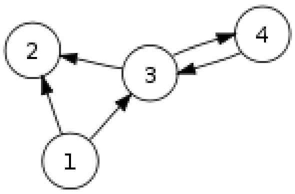
הדרגה המקסימלית של קדקוד בודד:

בגרף בלתי מכוון (undirected graph) כל צלע היא זוג **לא סדור** של קדקודים:



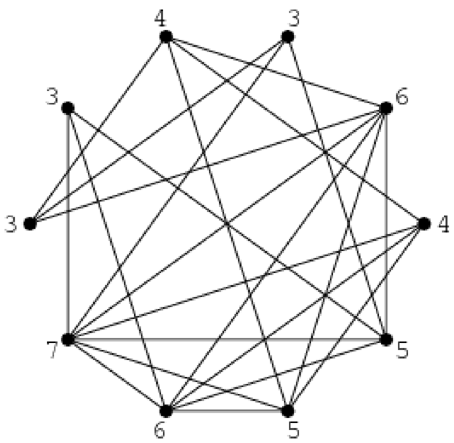
איור 1

בגרף מכוון (directed graph, digraph) כל צלע היא זוג סדור של קדקודים. כלומר ישנה משמעות לכיוונה של צלע מכוונת - היא יוצאת מקדקוד אחד ונכנסת לקדקוד אחר .



איור 2

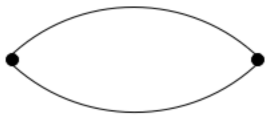
דרגה של קדקוד בגרף לא מכוון היא מספר צלעות המחוברות לקדקוד: $\deg(v)$:



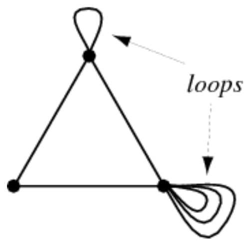
דרגה מקסימאלית של קדקוד הגרף – כאשר הקדקוד מחובר לכל הקדקודים האחרים:

$$\max_{i=1,\dots,n}\deg(v_i)=n-1$$

צלעות מקבילות: אם שני קדקודים מחוברים ע"י יותר מאשר צלע אחת אומרים כי בגרף יש צלעות מקבילות:



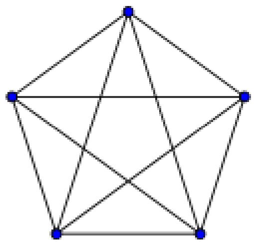
לולאה: צלע היוצאת מאותו קדקוד וחוזרת אליו.



<u>גרף פשוט</u>: גרף יקרא פשוט אם הוא חסר לולאות וחסר צלעות מקבילות (איור 1).

<u>גרף ריק</u>: גרף מכיל רק קדקודים ($m = 0$) מבודדים (חסר צלעות) נקרא גרף ריק.

<u>גרף שלם</u>: גרף פשוט בעל n קדקודים בו כל זוג קדקודים מחובר ע"י צלע נקרא גרף שלם ומסומן ע"י $\boldsymbol{K_n}$:



מספר צלעות בגרף שלם :

$$m_{max} = m(K_n) = (n-1) + (n-2)+\ldots+1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

<u>מסלול</u> סדרת קדקודים בגרף בה כל שני קדקודים סמוכים מחוברים ע"י צלע בגרף. לדוגמה, באיור 1 סדרת קדקודים 1-5-4-3 הוא מסלול, סדרה 6-5-2-3-4 אינה מסלול.

<u>מסלול פשוט</u>: מסלול שכל קדקודיו שונים.

<u>אורך המסלול</u>: אורך של מסלול הוא מספר צלעות שבו.

דוגמה: באיור 1 מסלול 1-2-3-4-6 הוא מסלול פשוט, 6-4-3-2-5-4 הוא מסלול,
3-5-2-1 אינו מסלול.

<u>גרף קשיר</u>: גרף פשוט בו בין כל 2 קדקודים יש לפחות מסלול אחת. גרפים באיור 1 הוק קשיר, גרף ריק אינו קשיר.

<u>גרף לא קשיר</u>: גרף פשוט בו יש לפחות 2 קדקודים שאין בניהם כל מסלול.

<u>רכיב קשירות</u>: תת-גרף קשיר של גרף לא קשיר. בגרף קשיר יש רכיב קשירות אחד בלבד.

משפט 1: בכל גרף G, בעל $n = |V|$ קדקודים $v_1, v_2, ..., v_n$ ובעל $m = |E|$ צלעות סכום דרגות של כל קדקודי הגרף שווה לפעמיים מספר צלעות:

$$\sum \deg(v_i) = \deg(v_1) + \deg(v_2) + ... + \deg(v_n) = 2 \cdot |E|$$

הוכחה: כל צלע בגרף מחוברת בדיוק לשני קדקודים שונים לכן חישבנו כל צלע בדיוק פעמיים, לכן

$$\sum_{i=1}^{n} \deg(v_i) = 2m$$

■

משפט 2: בכל גרף מספר צלעות בעלי דרגות אי-זוגיות הוא זוגי.

הוכחה: נחלק את כל קדקודי הגרף לשתי קבוצות: A היא קבוצה של קודקודים בעלי דרגות זוגיות, *B* היא קבוצה של קודקודים בעלי דרגות אי-זוגיות. סכום דרגות של קודקודים של קבוצה *A* הוא מספר זוגי.

סכום של דרגות של כל קדקודי הגרף (זוגי) = סכום דרגות של קודקודים של קבוצה *A* (זוגי) + סכום דרגות של קודקודים של קבוצה *B*. לכן סכום דרגות של קודקודים של קבוצה *B* הוא גם מספר זוגי.

■

משפט 3: בכל גרף יש שני קדקודים שונים בעלי אותה דרגה, כלומר:

$$\exists u, v \in V: \deg(u) = \deg(v)$$

הוכחה:

נשתמש בעקרון פנינים ומגירות (עקרון שובך היונים): מגירות הן דרגות ופנינים הן קדקודים.

יש לנו n-1 מגירות (מספר דרגה משתנה מ-1עד n-1) ו- n פנינים, לכן במגירה אחת יש לפחות שתי פנינים, כלומר יש לפחות שני קדקודים בעלי אותה דרגה.

■

ייצוג גרפים (graph representation)**.** ייצוג גרף ע"י **מטריצת סמיכויות** (adjacency matrix) היא שיטת ייצוג מקובלת לגרף כללי. בשיטה זו, הגרף מיוצג כמטריצה בגודל

שיטת ייצוג מקובלת לגרף כללי. בשיטה זו, הגרף מיוצג כמטריצה בגודל $n \times n$ כאשר כל צומת מיוצג על ידי שורה ועל ידי עמודה. תא (i, j) מכיל 1 (או true) אם ישנה בגרף צלע מקדקוד v_i לקדקוד v_j, ו-"0" (או false) אחרת. גרף לא מכוון מיוצג ע"י מטריצה סימטרית, גרף מכוון מיוצג ע"י מטריצה לא סימטרית.

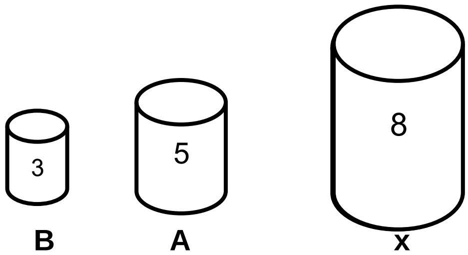
לדוגמה מטריצה הבאה מייצגת את הגרף שבאיור 1:

	1	2	3	4	5	6
1		1			1	
2	1		1		1	
3		1		1		
4			1		1	1
5	1	1		1		
6				1		

דוגמה לגרף: בעיית הבקבוקים (בעיית השוואת נוזלים)

ילד נישלח לחנות מכולת לקנות 4 ליטר שמן כשבידיו שני מיכלים, אחד בעל קיבולת של 5 ליטר והשני בעל קיבולת של 3 ליטר. בחנות המכולת נותר רק מיכל מלא אחד של 8 ליטר. האם יכול החנווני לספק לילד בדיוק 4 ליטר שמן אם לרשותו עומדים רק המיכל המלא ושני המיכלים שהביא הילד?

על המיכלים אין כל סימני מדידה וכן אין לחנווני כל מכשיר מדידה אחר.



1. למלא את המיכל B של 5 ליטרים מהמיכל של 8: המצב ב-(A,B) הוא (5,0).
2. למלא את B מ-A המצב הוא (2,3).
3. נרוקן את B ל-X, המצב הוא (2,0).
4. נעביר את תכולת A ל-B, המצב הוא (0,2) .
5. נמלא את A מ-X, המצב הוא (5,2).
6. נמלא את B מ-A, המצב הוא (4,3). סיימנו, כוון שקבלנו במיכל A 4 ליטר.

בצורה כללית: נתונים שני מיכלים מים: מיכלים A בעל קיבול של m ליטר, מיכלים B של n ליטר ומיכל גדול בעל קיבולת m+n ליטר. מקבלים גרף מכוון שהקדקוד שלו הוא המצב של המיכלים: (a, b) והצלע מחברת קדקוד (a_1,b_1) עם קדקוד (a_2,b_2) אם אפשר מיד לעבור ממצב (a_1,b_1) למצב (a_2,b_2). בדוגמה שלנו ניתן מיד לעבור ממצב (5,0) ל-(2,3), ולא ניתן מיד לעבור מ-(5,0) ל-(4,3). עלינו לבנות גרף המיוצג ע"מטריצה שמכילה את כל המעברים המידיים. ניתן להניח מבלי לאבד בכלליות כי $n < m$.

<u>אלגוריתם</u>: כאשר במיכל A יש a ‏($0 \le a \le m$) ליטר, ובמיכל B יש b ‏($0 \le b \le n$) ליטר נסמן את המצב ב- (a,b). המעברים האפשריים ממצב (a,b) למצבים אחרים הם:

(m, b) ,(0, b) ,(a, n) , (a, 0)

$$if\ (a+b \le m) \rightarrow (0, a+b)\ \ else\ (b-(m-a), m)$$

או $(\min(m, a+b), \max(0, a+b-m))$.

$$if\ (a+b \le n) \rightarrow (0, a+b)\ else\ (a-(n-b), n)$$

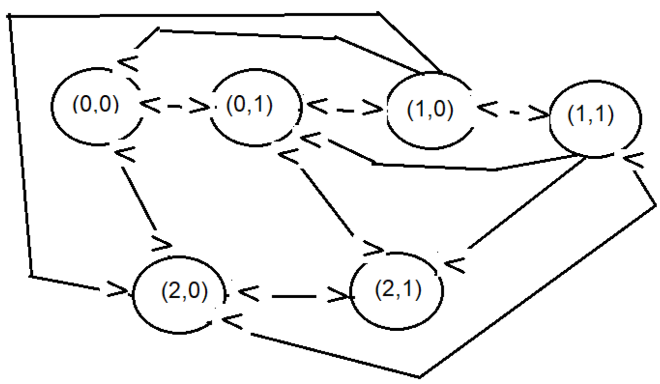
או $(\max(0, a+b-n), \min(n, a+b))$

גודל מטריצה שמייצגת את המצבים הוא $(m+1)*(n+1)$

<u>דוגמה</u>: כאשר $m=2$, ו- $n=1$ המטריצה נראה כך:

	00	01	10	11	20	21
00	x	t	f	f	t	f
01	t	x	t	f	f	t
10	t	t	x	t	t	f
11	f	t	t	x	t	t
20	t	f	f	t	x	t
21	f	t	f	f	t	x

הגרף שהתקבל בדוגמה זו הוא גרף קשיר, מכל מצב יש מסלול מעבר למצב אחר.



<u>מילוי מטריצה:</u>

1) חישוב אינדקס. כאשר בבקבוק A יש `i` ליטר, ובבקבוק `B` יש `j` ליטר, המיקום (אינדקס) של מצב `(i,j)` מחושב ע"י נוסחה: `index = (n+1)*i + j`
בדוגמה הנ"ל המצב `(2,0)` נמצא במקום `2*2+0=4` (הספירה מתחילה מאפס).

בעיה הפוכה: נתון `index`, צריך לחשב כמה ליטרים (`i`) יש בבקבוק A וכמה ליטרים (`j`) יש בבקבוק B:
`i=index/(n+1)`, `j=index%(n+1);`.

תזכורת מאלגברה ליניארית:

נתונה מטריצה q שורות, p עמודות :

a_{00}	a_{01}	a_{02}
a_{10}	a_{11}	a_{12}
a_{20}	a_{21}	a_{22}

פורסים מטריצה בשורה אחת:

$$a_{00}\ a_{01}\ a_{02}\ a_{10}\ a_{11}\ a_{12}\ a_{20}\ a_{21}\ a_{22}$$

מיקום של איבר a_{ij} בשורת פריסה מחושב לפי הנוסחה: `index(a_ij) = p*i + j`

אם נתונים p, q ו- `index`, אז `j=index%p;`, `i=index/p`.