הגדרות

תוכן עניינים

0.1 מכונות טיורינג

0.1.1 מכונת טיורינג

מגודרת ע"י שביעיה:

- Q - קב' סופית של מצבים
- q_0 מצב התחלתי
- $\sum$ א"ב הקלט
- Γ א"ב העבודה
- $\flat$ מצבים סופיים
- F קב' של מצביים סופיים (תפקיד שונה מאוטומט מחסנית
- δ פונקציית מעברים

$\flat$-ים (מסמן לנו סרט אינסופי לימין את סוף הקלט)

נזכר שבאוטומט מחסנית לא היה צריך את זה כי בכל רגע דרשנו לתת את הפלט הנכון עבור הרישא שקראנו.

<u>מהלך החישוב:</u> מוגדר ע"י δ. בכל צעד מבצעים "מהלך" לפי δ . δ מוגדרת כך $\delta\left(Q\backslash F\right)\times\Gamma\to Q\times\Gamma\times\left\{ L,S,R\right\}$

- Q מצב נוכחי
- Γ - תו המוצבע ע"י הראש
- $Q\times\Gamma$ = תו שכותבים במקום המבוצע ע"י הראש × מצב חדש
- לאן הראש זז בסוף הצעד: $\left(Left,Stay,Right\right)$ - $left$ קורה בסוף הצעד.

<u>סיום החישוב:</u> אם מגיעים למצב השייך ל F החישוב מיד עוצר והפלט שלו (על הקלט × שלו) מוגדר כתוכן הסרט משמאל לראש.
אם לא עוצרים אף פעם , אז הפלט על אותו קלט לא מוגדר.
כלומר הפונקציה שמ"ט M מחשבת , $\delta_M:\sum^{*}\to\Gamma^{*}$ היא פונקציה חלקית (מותר ש δ_M לא תהיה מגודרת על קלטים מסוימים)

<u>הגדרה:</u> **מודל חישובי** הוא מיפוי

$$\mathbb{M}:\sum^{*}\to\delta:\sum_{1}^{*}\to\sum_{2}^{*}\ \text{קב' הפונקציות (חלקיות)}$$

$$\text{בה"כ נניח תמיד ש}\ \sum=\left\{ 0,1\right\}$$

0.1.2 מ"ט דו סרטית:

$$\delta:Q\backslash F\times\Gamma\times\Gamma\to Q\times\Gamma\times\Gamma\times\left\{ L,R,S\right\}$$

- $Q\backslash F$ - מצב משותף
- Γ - תו בסרט ב I
- Γ - תו בסרט הII
- $\Gamma\times\Gamma$ - מה כותבים
- $\left\{ L,R,S\right\}$ - לאן זזים

0.1.3 הגדרה 3.1 :(קונפיגורציה):

בהנתן מ"ט M , קונפיגורציה (מצב רגעי) של M היא שלשה $C=(q,i,\alpha)$ המתארת (באופן מלא) את המצב הכולל של מכונה אחרי מספר (סופי) של צעדי ריצה:

- כאן q הוא המצב הנוכחי.
- i - התא שבו נמצא הראש הקורא/כותב.
- α - תוכן הסרט, כיוון שמדובר בריצה מס' סופי של צעדים על קלט כלשהו x מספיק לשמור רישא סופית של α

  כמוסכמה נשמור $\varphi=max\left(|x|,T\right)$ תוים, כאשר T הוא התו הימני ביותר שבו M ביקרה. אם, בצורה כזו מבוטח שמימין ל $\alpha\left[x\right]$ יש רק $\flat$ ים ואין צורך לשמור אתם במפורש.

0.1.4 הגדרה (צעד חישוב של מ"ט) 3.2:

תהי M מ"ט ו C_1,C_2 קונפיגורציה שלה. נאמר ש C_2 עוקבת ל C_1 אם M יכולה לעבור מ C_1 ל C_2 בצעד חישוב יחיד. כלומר C_1,C_2 מהצורה:

$$C_1=\left(q,i,\alpha\right),C_2=\left(p,i',\beta\right)$$

כאשר: $\delta\left(q,\alpha\left[i\right]\right)=\left(p,b,m\right)$ וגם:

$$i'=\begin{cases}i & m=S\\ i+1 & m=R\\ max\left(i-1,1\right) & m=L\end{cases}$$

max בשביל לטפל ב'נפילה' מהסרט

β היא מחרוזת באורך $|\alpha|$ בד"כ, ומקיימת $\beta\left[i\right]=b$,$\beta\left[j\right]=\alpha\left[j\right]$, $i\neq j,j\leq|a|$.

בנוסף (לא הבד"כ) אם I' גדול מ $max\left(|x|,T\right)$ (התו הימני ביותר שבקרנו) - אז β יהיה באורך $|a|+1$ i' ו $\beta\left[i+1\right]=\flat$.

בעצם הגדרנו מחדש, בצורה מדויקת וקצרה כיצד מתבצע צעד חישוב של M , נסמן זאת כך: $C_1\vdash C_2$

הערה: לכל קונפ' $C=(q,i,\alpha)$ של M שבה $q\notin F$ (כלומר קונפ' שאינה סופית) יש קונפ' עוקבת אחת ויחידה.

0.1.5 הגדרה 3.3 (הפונקציה f_M שמ"ט מחשבת):

תהי M מ"ט. ויהיה $x\in\sum^*$ קלט עבורה. נסמן ב $C_x=(q_0,1,x)$ את הקונפ' ההתחלתית של ריצת M על x (במקרה ו $x=\varepsilon$ אז $C_x=(q_0,1,\flat)$) מתואר ע"י סדרת הקונפיגורציות (היחידה) מהצורה:

$$C_x=C_1,C_2,....$$

כאשר לכל $i>1$, $C_{i+1}\vdash_M C_i$, $f_M(x)$ תוגדר כך:

$$f_M(x)=\begin{cases}a\left[1,...,i-1\right] & \text{A finite sequence with configartion of: } (q,i,\alpha)\\ \perp\text{(undifined)} & \text{else (infinite)}\end{cases}$$

0.1.6 הפונ' האוניברסלית U

המוגדרת כך:

$$U\left(\langle M\rangle,\langle X\rangle\right)=\begin{cases}f_M(X) & \text{valid syntax \textbf{and} M stop on x}\\ \perp & \text{else}\end{cases}$$

M - קידוד של מ"ט , X - קידוק של קלט עבור M

מעכשיו והלאה נניח שהמ"ט שלנו היא בעלת שני מצבים סופיים $F=\{q_{acc,}q_{rej}\}$, ו $\sum=\{0,1\}$ אלא אם נאמר אחרת.
נוסיף למ"ט $feature$ של קבלת שפות

0.1.7 הגדרה: 3.4 נאמר שמ"ט מקבלת מילה $x\in\sum^*$, אם M בריצתה על x עוצרת במצב q_{acc}

0.1.8 הגדרה 3.5 השפה של מ"ט

בהנתן מ"ט M נגדיר:

$$L(M)=\left\{x\in\sum^*|\text{m accept x }\right\}$$

השפה של M

נאמר ש M מכריעה את $L(M)$ אם M תמיד עוצרת על כל קלט).

0.1.9 הגדרה 3.6 : RE

קב' כל השפות שנתן לקבל ע"י מ"ט תקרא RE כלומר :

$$RE\triangleq\left\{L\in P\left(\sum^*\right)|\text{exist Turing machine for L(M)=L }\right\}$$

0.1.10 הגדרה 3.7: R

$$R\triangleq\left\{L\in P\left(\sum^*\right)|\text{exist Turing machine M accepted L}\right\}$$

0.1.11 הגדרה 4.4: $coRE=\left\{L\subseteq\sum^*\,|\,\bar{L}\in RE\right\}$

0.1.12 הגדרה 4.5 II של $coRE$

נאמר $L\in P\left(\sum^*\right)$ שייכת לקבוצת המילים $CoRE$ אם קיימת מ"ט M שדוחה כל $x\in\bar{L}$, ועבור $x\in L$ מקבלת או לא עוצרת .

הגדרות לתרגיל:

- יחס דו מקומי R הוא קבוצה של זוגות סדורים
- פונקציה חלקית - מקרה פרטי של יחס דו מקומי - בו לכל x יש לכל היותר y אחד עבורו מתקיים $(x,y)\in R$
- פונקציה מלאה - מקרה פרטי של פונקציה חלקית - בו לכל x יש בדיוק y אחד עבורו מתקיים $(x,y)\in R$

0.1.13 הגדרה: שפות הלכסון

$$L_D=\{\langle M\rangle\,|\text{M accept }\langle M\rangle\}$$

0.1.14 הגדרה: 5.1 השפה האוניברסלית:

$$L_U = \{\langle M\rangle , \langle X\rangle \mid \text{קידוד חוקי סינטקטית וגם } M \text{ מקבלת את } x \ \langle M\rangle , \langle X\rangle\}$$

כאשר: $\langle M\rangle$ קידוד של מ"ט, $\langle X\rangle$ קידוד של קלט עבור M

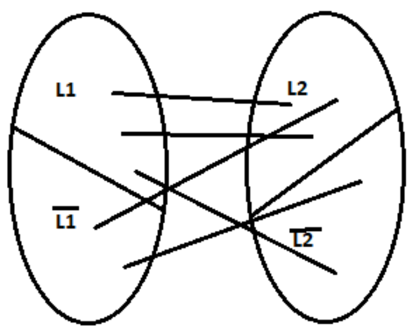
0.2 רידקוציות

0.2.1 הגדרה פונקציית רידוקציה: בהנתן זוג שפות $L_1, L_2 \subseteq \sum^*$ נאמר שפונקציה $f : \sum^* \to \sum^*$ היא פונקציית רידוקציה בין זוג השפות אם היא מקיימת:

1. f מלאה
2. f ניתנת לחישוב (בפרט M_f המחשבת אותה מייד עוצרת)
3. תקפה : $f(x) \in L_2 \iff x \in L_1 \ \ \forall x \in \sum^*$,

הגדרה: יהיו $L_1, L_2 \in \sum^*$ נאמר ש $L_1 \leq L_2$ ־ במילים: L_1 נתנת **לרידוקציה** ל L_2 ־ אם קיימת פנו' $f : \sum^* \to \sum^*$ המקיימת:

1. f מלאה
2. f ניתנת לחישוב
3. f תקפה: $\forall x \in \sum^* : x \in L_1 \iff f(x) \in L_2$



0.2.2 הגדרה 7.1 : $L_{eq} = \{\langle M_1\rangle , \langle M_2\rangle \mid L(M_1) = L(M_2)\}$

0.3 $Rice$

0.3.1 הגדרה 7.3 : תכונה של שפות ב RE, S היא תת קבוצה $S \subseteq RE$, נאמר ש S טריויאלית אסם $S \in \{RE, \phi\}$

0.3.2 דוגמה 1 : נגדיר $L_\varepsilon = \{\langle M\rangle \mid \textbf{M accept } \varepsilon\}$ **(מקבלת את ε)**

0.3.3 $L'_\varepsilon = \{\langle M\rangle \mid \textbf{M doesnt accept } \varepsilon\} \notin R$

0.3.4 $L"_\varepsilon = \{\langle M\rangle \mid \textbf{M reject } \varepsilon\}$

0.4 מ"ט אי־דרמינסטית

0.4.1 מכונת טיורינג אי־דטרמינסטית תוגדר כמו מ"ט דטרמניסטית, אלא ש δ תאפשר בכל צעד בדיוק שתי בחירות במקום בחירה אחת. כלומר:

$$\delta : (Q\backslash F) \times \Gamma \to (Q \times \Gamma \times \{L, S, R\})^2$$

מ"ט א"ד מגדירה על קלט x עץ חישוב במקום מסלול חישוב:

0.4.2 הגדרה 8.2 **: נאמר ש מ"ט א"ד** M **מקבלת מילה** x $\iff$ **קיים מסלול בעץ החישוב של** M **על** x **בו** M **עוצרת ב** q_{acc} **(יתכנו מסלולים אחרים בהם היא עוצרת ב** q_{rej} **או לא עוצרת)**

0.4.3 RE_{ND}

כקבוצת השפות שקיימת מ"ט א"ד המקבלת את L = $\{L|\text{Exist non-detemenstic turing machine accpet L}\}$

0.5 סיבוכיות

0.5.1 תהי M **מ"ט דטרמניסטית. נגדיר את פונ' זמן הריצה שלה,** tm $tm:\sum^* \to \mathbb{N}$ **- פונקציה חלקית מוגדרת כך:**

- $tm(x)$ - מס' הצעדים ש tm מבצעת בריצה על x אם עוצרת
- אחרת - לא מוגדר

0.5.2 נאמר שפונקציה מלאה $t(n):\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ **היא חסם על זמן הריצה של** M **אם לכל** $x\in\sum^*$ **מתקיים ש**$tm\left(x\right)\leq t\left(|x|\right)$

0.5.3 נאמר ש M **(מ"ט דטר') היא יעילה או פולינומית אם קיים עבורה חסם זמן ריצה** $p(n)$ **שהוא פולינום (בה"כ נתן להניח ש** $p(n)=c\cdot n^d$ **)** c,d*** קבועים**

0.5.4 הגדרה: $P=$ **{** L **|** **קיימת מ"ט דטרמיסטית יעילה המכריעה את** L **}**

0.5.5 $POLY=$**{** f **|** **קיימת מ"ט דטר' יעילה המחשבת את** f **}**

0.5.6 תהי M **מ"ט א"ד נאמר ש** $tm(x)$ **היא פונק' זמן הריצה של** M

נגדיר את הפונקציה $tm(x)$:

- אם M עוצרת על x בכל מסלול $\Leftarrow$ זה המקס' על פני כל המסלולים של מס' צעדים הריצה של M על x
- אחרת $\Leftarrow$ לא מוגדר

בדומה למ"ט דטר. חסם זמן ריצה $t(n)$ מוגדר כמו קודם. נאמר כמו קודם ש M א"ד יעילה אם קיים עבורה חסן זמן ריצה שהוא פולינומי

0.5.7 NP = **{ קבוצת השפות שקיימת מ"ט א"ד יעילה המקבלת את** L **|** L**}**

0.5.8 הגדרה 9.3 **: נאמר ש** $R\subseteq\sum^*\times\sum^*$ **הוא יחס** NP **אם הוא מקיים :**

1. R חסום פולינומית. קיים פולינום $p(n)$ כך ש $(x,y)\in R \Leftarrow |y|\leq p\left(|x|\right)$
2. קיימת מ"ט (דטר') פולינומית המכריעה את השפה:

$$\widetilde{L}_R=\left\{(x,y)\in\sum^*\times\sum^*\,|\,(x,y)\in R\right\}$$

דוגמה לז : היחס $\left(x,x11x^2\right)$ או $\left(x,x11x^3\right)$ - הוא יחס חסום פולינומית עם חסם $P(n)=4n+4$ (שימו לב שהעלאה בשלישית מכפילה אורך פי 3 לא בשלישית)

דוגמה לח: היחס שראינו בסעיף הוא גם נתן לזיהוי פולינומי (x^2 או x^3 נתן לחישוב יעיל ע"י אלג' כפל ארוך של כיתה ג' - כשמתארים אלגוריתם מספיק לתאר אלג' למודל REM כי האקסטרה חישוב במעבר למ"ט הוא פולינומי).

0.5.9 $x,k \in \mathbb{N}^+\}$ **קיים מחלק** y **של** x **המקיים** $k \le y < x$ **וכן** $factory = \{(x,k)\,|y \neq 1$

0.5.10 **הגדרה** 10.1: $coNP = \left\{L|\overline{L} \in NP\right\}$

0.5.11 **הגדרה** 10.2: **יהיו** L_1, L_2 **שפות, נאמר ש**f **היא פונקציית רידוקציה פולינומית מ** L_1 **ל** L_2 **אם:**

1. $f \in Poly\,(y)$ (בפרט f מלאה)
2. תקפות: $\forall x \in \sum^* \; f(x) \in L \Leftrightarrow x \in L_1$

אם קיימת f כזו עבור L_1, L_2 אמר ש L_1 נתנת לרדוקציה פולי' ל L_2 נסמן $L_1 \le_p L_2$

0.5.12 **המחלקה** NPC **היא קב' כל השפות** L **המקיימות:**

1. $L \in NP$
2. L שלמה ב NP, כלומר $\forall L' \in NP$, $L' \le_p L$

0.6 בעיות שונות ב NPC

0.6.1 **הגדרה** 11.4 **: השפה** $BH - Bounded\ Halting$ **:**

$BH = \{\langle M\rangle, 1^p, \langle x\rangle \mid$ M מ"ט א"ד קיים ב M מסלול מקבל בריצתה על x שאורכו $l \ge\}$

0.6.2 **הגדרה** 11.6 **: נאמר שפסוק לוגי** φ **הוא בצורת** CNF **אם:** $\varphi(x) = \bigwedge_{i=1}^{m} C_i$ **, ו** C_i **היא פסוקית** CNF **כלומר מהצורה** $C_i = \bigvee_{j=1}^{h_i} l_i$

לדוגמה $P\,(x_1,...,x_5) = (\vee..\vee) \wedge (\vee..\vee) \wedge (\vee..\vee)$

השפה SAT :

$SAT = \{\ \varphi(x)\,|\varphi(\phi) = T$ כך ש ϕ , שקימת לו השמה מספקת כלומר CNF הוא פסוק $\varphi\}$

0.6.3 **הגדרה**12.1 **השפה** $Vertex\ color$

$VC = \{(\langle G\rangle, k) \mid U$ לפחות אחד הקצוות שייך ל , $e \in E$ כך שלכל קשת k בגודל $U \subseteq V$ לא מכוון וקיימת $G = (V,x)\}$

$\langle G\rangle$ הוא קידוד של גרף למשל כמטריצת שכנויות

0.6.4 **הגדרה** 12.2 **השפה** $Hitting\ set\ \ (HS)$

$HS = \{N, K, C_1, ..., C_t| \;\; \forall i\ C_i \cap U \neq \phi$ כך ש k בגודל $U \subseteq [n]$ של U וקיית תת $[n]$ מוכלת ב C_i כל $\}$

0.6.5 **הגדרה** 12.3 **השפה** $Set\ cover$