מרחבי הסתברות

4. נתונה חבילת קלפים רגילה ומעורבבת המכילה גם קלף ג'וקר אחד. משכתם ארבעה קלפים בזה אחר זה (בלי להחזיר לחבילה). מה ההסתברות שבאותם ארבעה קלפים יש קלף אחד מכל סוג (לב, תלתן, עלה ויהלום)?

הקלידו בתיבת הטקסט את התשובה במספר עשרוני או באחוזים. דייקו עד לשלוש ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

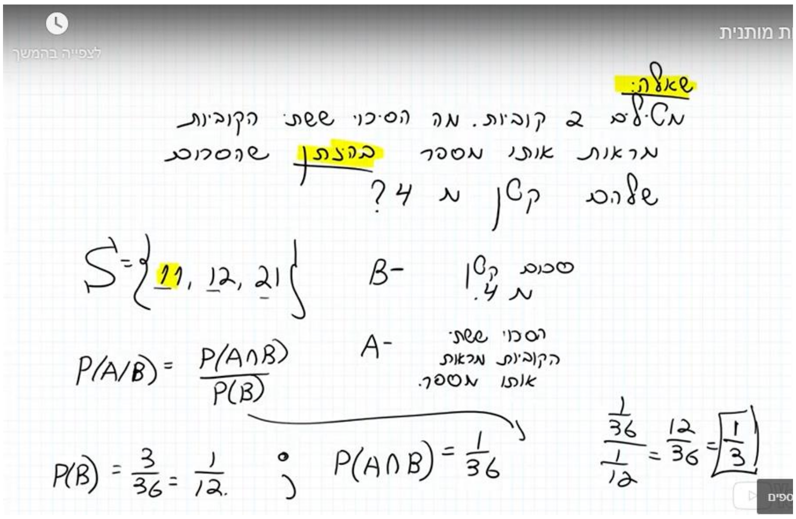
$$\frac{52}{53}*\frac{13*3}{52}*\frac{13*2}{51}*\frac{13*1}{50}$$

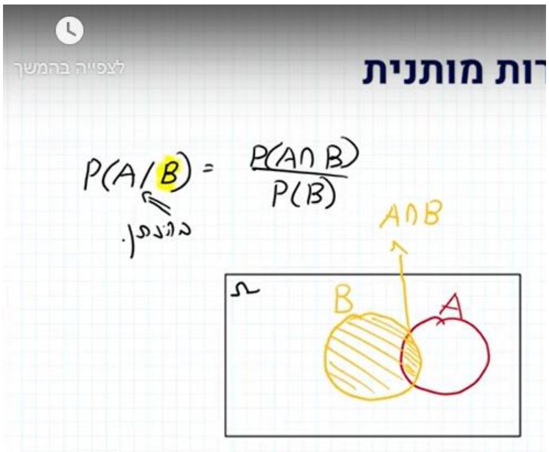
5. אתם משחקים משחק קלפים. לכל אחד מקלפי המספר (1-10) יש הערך שלו, לכל אחד מקלפי הצורה יש ערך של 10, ולג'וקר תוכלו לבחור כל ערך שתרצו. במשחק אתם מושכים שלושה קלפים מהחבילה. אתם מנצחים, אם סכום הקלפים מגיע לרף מסוים או עובר אותו. נניח שהרף הוא 4 - מה הסתברות הזכייה בסיבוב הראשון?

$$1-\left(\frac{4}{53}*\frac{3}{52}*\frac{2}{51}\right)$$

צריך שיצא 1,1,1 להפסיד : כלומר 1 אחדות יש בשליפה הראשונה, נשארו 3 אחדות ולאחר מכן נשאר 2

ההסתברות מותנית וחוק ההסתברות השלמה





1. על 6 פאות של קובייה מאוזנת נרשמו באקראי הספרות 1-6. מה ההסתברות שסכום המספרים בכל זוג פאות נגדיות שווה ל-7?

$$\frac{1}{5}*\frac{1}{3}$$

הסבר: אם בחרתי 1 יש לי נשארו לי 5 מספרים, הסיכוי שיצא בפאה הנגדית 6 כדי שיהיה 6+1=7 הוא 1/5. לאחר שבחרתי מספר לשים בפאה אחרת נניח 2 נשארו כרגע המספרים 3,4,5 ואני צריך לבחור את המספר 5 שהוא 1/3 ולכן זה

$$\frac{1}{5}*\frac{1}{3}$$

הסתברות השלמה

$$P(A)=\sum_{B} P(A/B_i)\cdot P(B_i)$$

נוסחת ההסתברות השלמה

כדי שנוסחת ההסתברות השלמה תעבוד, צריכים להתקיים התנאים האלה:

$A_1, A_2, A_3, A_4 ... A_n$ הם מאורעות זרים בעלי הסתברות חיובית.

$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 ... \cup A_n = \Omega$ (או, אם תרצו, A פורס את כל מרחב המדגם).

שאלה:
מטילים מטבע. אם התוצאה יוצאת H - עוצרים.
אם התוצאה יוצאת T, מטילים שוב ועוצרים.
מה ההסתברות שהתוצאה **הסופית** יוצאת T?

יצא H בפעם הראשונה | יצא T בפעם הראשונה

$$P(T^2) = \underset{0}{P(T^2/H^1)}\cdot \underset{0.5}{P(H^1)} + \underset{0.5}{P(T^2/T^1)}\cdot \underset{0.5}{P(T^1)}$$

IIC

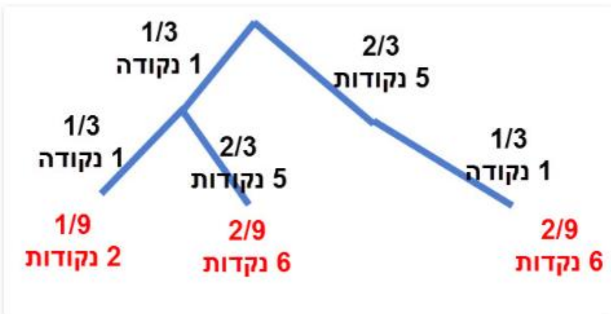
$$P(T^2) = \boxed{0.25 / \tfrac{1}{4}}$$

1. שחקן זורק קובייה הוגנת פעמיים. אם יוצא 1 או 2, השחקן מקבל נקודה אחת. אם יוצא 3 או מספר גדול יותר, השחקן מקבל 5 נקודות. השחקן זרק את הקובייה פעמיים וקיבל פחות מ-10 נקודות. מה ההסתברות שקיבל 5 נקודות בזריקה השנייה?

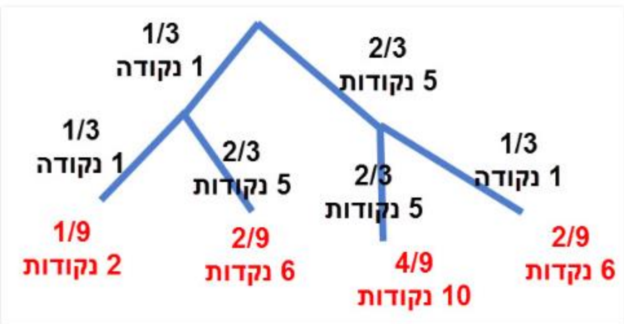
הקלידו את התשובה בתיבת הטקסט. דייקו עד לשתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

https://www.m-math.co.il/probability/conditional-probability/ תרגיל 3 – ממולץ להעזר בעץ

ידוע לנו שהשחקן קיבל פחות מ- 10 נקודות.
לכן בעולם שלנו קיימים רק הענפים הללו:



1/3 זו ההסתברות לקבל 1 נקודה (1 או 2 על הקובייה).
2/3 זו ההסתברות לקבל 5 נקודות (מספר 3 או גדול ממנו בקובייה).



$\frac{2}{9} : \frac{5}{9} = 0.4$

P (A ∩ B) = 2/9

$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

סך כל ההסתברויות בעולם שלנו הן:

$\frac{1}{9}+\frac{2}{9}+\frac{2}{9}=\frac{5}{9}$ אז P (B) = 5/9.

או

A_5 – יצא 5 בפעם השניה

A_{10} - יצא פחות מ10 בשני ההטלות

$P(A_{10} \cap A_5)$

$$P(A_5 \cap A_{10}) = \frac{\overset{(1,2)}{2}}{6}\cdot\frac{\overset{(3,4,5,6)}{4}}{6}$$

$$P(A_{10}) = \left(\frac{2}{6}\right)^2 + \underbrace{\left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{4}{6}\right)}\cdot 2$$

$$\frac{P(A_5 \cap A_{10})}{P(A_{10})} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{5}{9}} = 0.4$$

פעמיים 1 או 2

פעם 3,4,5,6 פעם 1,2

פעם 1,2 פעם 3,4,5,6

2. בארנק נמצאים 8 מטבעות הוגנים ו-2 מטבעות המראים H בהסתברות 2/3 ו-T בהסתברות 1/3. שולפים באקראי מטבע מהארנק ומטילים אותו.

א. מה ההסתברות שיתקבל H?

ב. אם ידוע שהתקבל H, מה ההסתברות שהמטבע שנבחר הוא הוגן?

הקלידו את התשובות בתיבות הטקסט. דייקו עד לשתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

(א)

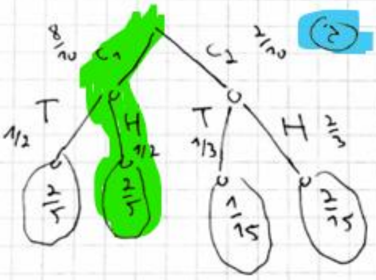
c1 - 8 coins - fair

c2 - 2 non fair

H 2/3, T 1/3

$$P(H) = \underbrace{P(H/c_1)}_{0.5}\underbrace{P(c_1)}_{\frac{8}{10}} + \underbrace{P(H/c_2)}_{\frac{2}{3}}\underbrace{P(c_2)}_{\frac{2}{10}} = \frac{2}{5} + \frac{2}{15} = \frac{8}{15}$$

(ב)



$$P(c_1/H) = \frac{P(c_1 \cap H)}{P(H)} = \frac{2/5}{\frac{8}{15}} = 0.75$$

$$P(H) = \frac{8}{15}$$ ס.א הקודם

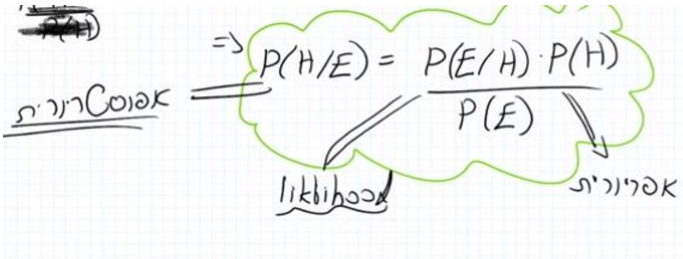
$$P(c_1 \cap H) = \frac{2}{5}$$

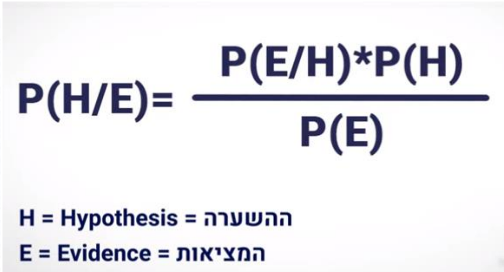
הסתברות בייס

"ההסתברות המותנית של מאורע A בהינתן מאורע B" היא הסיכוי להתרחשותו של A, בהנחה ש- B אכן התרחש. קיום ההנחה מצמצם את מרחב המדגם. מרעיון זה נובעת הנוסחה להסתברות המותנית: $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

חוק בייס מאפשר לחשב את ההסתברות המותנית **ההפוכה**: ההסתברות המותנית של B בהינתן A:

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)}.$$





כשבונים עץ הלמטה צריך לסכם ל1

קיימת בדיקה אשר בודקת קיום של מחלה מסוימת. אחוז הדיוק של הבדיקה הינו 99% לכל כיוון. במילים אחרות, מתוך 100 אנשים חולים אשר ייבדקו, הבדיקה תדווח על 99 מהם כחולים ורק על אחד כבריא (בטעות) ומתוך 100 אנשים בריאים אשר ייבדקו, הבדיקה תדווח על 99 מהם כבריאים ורק על אחד כחולה (בטעות). בוחרים באקראי אדם מהאוכלוסייה, בודקים אותו ומסתבר שהוא חולה (לפי הבדיקה). מה הסיכוי שהוא באמת חולה כאשר ידוע שהמחלה נפוצה באוכלוסייה ביחס של 1:10,000?

נתון:

100 בריאים נבדקו: 99 בריאים, 1 חולה (טעות)

100 חולים נבדקו: 99 חולים, 1 בריא (טעות)

חולי 1:10,000

תשובה:

H - הסיכוי שהוא חולה

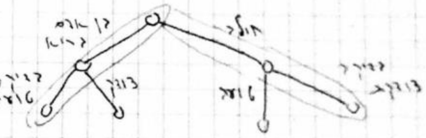
E - הבדיקה חיובית

$$P(H/E) = \frac{P(E/H) \cdot P(H)}{P(E)}$$

מה ההסתברות שאדם חולה?
$P(H) = 1/10^{-4}$ (נתון בשאלה)

בהינתן שאני יודע שהוא חולה מה הסיכוי שהבדיקה חיובית?
$P(E/H) = 0.99$ (נתון בשאלה)

$P(E)$ - מה הסיכוי שהבדיקה יצאה חיובית?



נעזר בחוק ההסתברות השלמה

$P(E) = P(E|$ האדם חולה $) \cdot P($ האדם חולה $)$; 0.99, 10^{-4}

$+ P(E|$ בריא $) \cdot P($ האדם בריא $)$; 0.01, $(1-10^{-4})$

$$P(H/E) = \frac{0.99 \cdot 10^{-4}}{0.99 \cdot 10^{-4} + 0.01 \cdot (1-10^{-4})} \approx 0.01$$

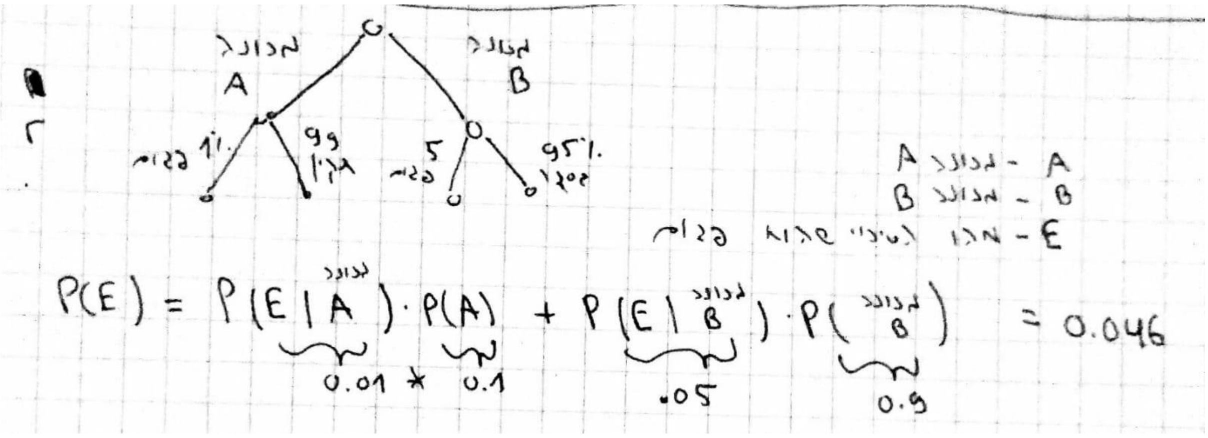
במפעל פועלות שתי מכונות A - B. ‏10% מתוצרת המפעל מיוצרים במכונה A ו-90% במכונה B. ‏1% מהמוצרים המיוצרים במכונה A ו-5% מהמוצרים המיוצרים במכונה B הם פגומים.

א. נבחר מוצר אקראי. מה ההסתברות שהוא פגום?

אחרי ביקור של הטכנאי שמטפל במכונה B, מוצאים ש-1.9% ממוצרי המפעל הם פגומים.

ב. מה עכשיו ההסתברות שמוצר המיוצר במכונה B יהיה פגום?

הקלידו את התשובות בתיבות הטקסט. דייקו עד לארבע ספרות אחרי הנקודה העשרונית.



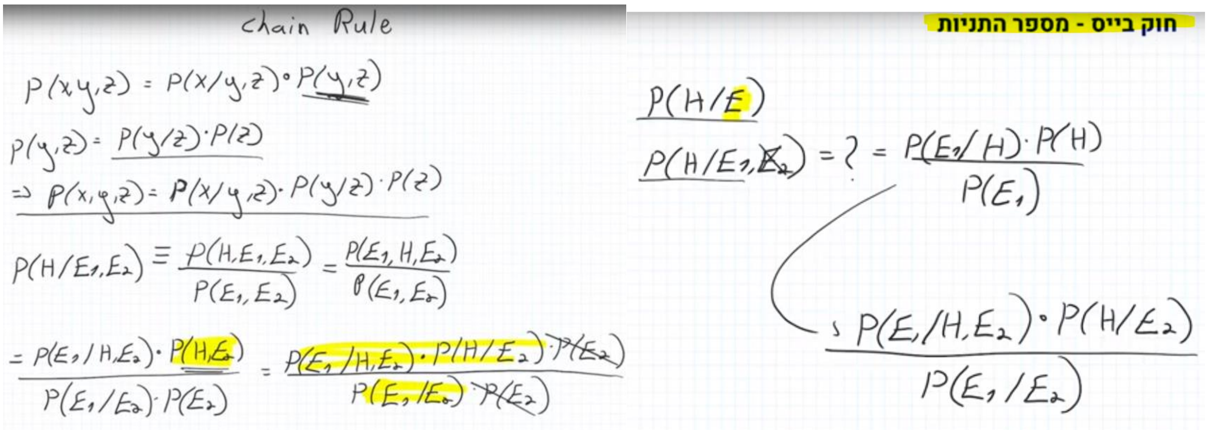
<u>**סעיף ב**</u>

$$let\ p(E) = 0.019\ be\ all\ damaged\ products$$

P(E) הסתברות השלמה כמו לעיל רק נציב את $p(E) = 0.019 = P(E|A) * P(A) + P(E|B) * P(B)$

כי B נעלם לנו $0.019 = 0.01 * 0.1 + 0.9 * x \rightarrow x = 0.02$

חוק בייס - נושאים מורכבים



השמאלי זה מספר התניות ע"פ פיתוח כלל השרשרת (פחות חושב) הימני אותו דבר אבל אינואטיבי

$$P(A,B|C)=\frac{P(C|A,B)\,P(A,B)}{P(C)}=0.257$$

0.6

0.7

$(0.4)(0.75)$

1. בשל עומס פניות באחת מחברות הביטוח הישיר רק 60% מהפניות נענות מייד. שאר הפונים מתבקשים להשאיר את מספר הטלפון שלהם. ב-75% מהמקרים חוזר נציג חברת הביטוח לפונה באותו יום, ובשאר המקרים – למוחרת. הסיכוי שפונה ירכוש בחברה הוא: 0.8 אם נענה מיד, 0.6 אם חזרו אליו באותו יום, ו-0.4 אם חזרו אליו למוחרת.
א. מה ההסתברות שאדם הפונה לחברת ביטוח ירכוש בה ביטוח?
ב. ידוע כי אדם רכש ביטוח בחברה. מה ההסתברות שהשאיר את מספר הטלפון וחזרו אליו באותו יום?

הקלידו את התשובות בתיבות הטקסט. דייקו עד לשלוש ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

א. 700.

.700

ב. 0.257

0.257

3. הלכת לרופא בגלל ציפורן חודרנית. הרופא בחר **באקראי** לבצע בדיקת דם הבודקת השפעת חזירים. ידוע סטטיסטית ששפעת זו פוגעת ב-1 מתוך 10,000 אנשים באוכלוסייה. הבדיקה מדויקת ב-99 אחוז במובן שההסתברות ל- False Positive היא 1%. הווה אומר שההסתברות לסיווג שגוי של אדם בריא כאדם חולה היא אחוז אחד מהמקרים. ההסתברות ל- False Negative היא 0: אין סיכוי שהבדיקה תגיד על אדם חולה בשפעת חזירים כי הוא בריא. בבדיקה יצאת חיובי (יש לך שפעת).
א. מה ההסתברות שיש לך שפעת חזירים?
ב. נניח שחזרת מתאילנד לאחרונה ואתה יודע ש-1 מתוך 200 אנשים חזרו לאחרונה מתאילנד, חזרו עם שפעת חזירים. בהינתן אותה סיטואציה כמו בשאלה א', מה ההסתברות (המתוקנת) שיש לך שפעת חזירים?

הקלידו את התשובות בתיבות הטקסט. דייקו עד לשתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.