מגישים: נועה ויס 324065275 noaweiss3

דן בן דוד 322578469 danbendavid1

תרגיל מעשי 2

טבלת סיבוכיות

פעולה	זמן ריצה במקרה הגרוע	זמן ריצה לשיעורין
insert(k, info)	$O(1)$	$O(1)$
findMin()	$O(1)$	$O(1)$
deleteMin()	$O(n)$	$O(\log n)$
decreaseKey(x, d)	$O(n)$	$O(1)$
delete(x)	$O(n)$	$O(\log n)$
totalLinks()	$O(1)$	$O(1)$
totalCuts()	$O(1)$	$O(1)$
meld(heap2)	$O(1)$	$O(1)$
size()	$O(1)$	$O(1)$
numTrees()	$O(1)$	$O(1)$

נשים לב שלמעשה הסיבוכיות שקיבלנו זהה לסיבוכיות של עץ פיבונאצ'י רגיל (c=2).
עבור כל הפונקציות מלבד decreaseKey(x, d), delete(x) ו-deleteMin(), לקבוע c אין שום השפעה.

בפונקציות אלו, הסיבוכיות במקרה הגרוע תלויה באורך ורוחב ה heap ולכן נשארת O(n).

בזמן הריצה לשיעורין החישוב של deleteMin() נשאר זהה משום שכפי שהראנו בסעיף ג בחלק התיאורטי, הדרגה המקסימלית בערימה עם n איברים היא עדיין O(logn).

בנוסף, חישוב הפוטנציאל ב-decreaseKey(x,d) נשאר זהה כאשר צומת שמאבדת מעל בן אחד ועדיין לא נחתכה מקבלת 2 מטבעות.

חלק תיאורטי

א. **<u>למה 1</u>:** יהי x, צומת מדרגה k בעץ פיבונאצ'י ויהיו $y_1, y_2, \dots, y_k$ הבנים של הצומת x <u>לפי הסדר שהם קושרו אליו</u>. **אז**: הדרגה של הצומת y_i היא לכל הפחות $i - c$.

<u>הוכחה</u>: יהי $1 \leq i \leq k$. הילד ה-y_i של הצומת x הפך לבן שלו כתוצאה מתהליך successive linking. Link יכול להתבצע רק בין עצים מאותה הדרגה, לכן הצומת x (שהיו לו את הבנים $y_1, \dots, y_{i-1}$) והצומת y_i היו מאותה הדרגה - $i - 1$.
מאז שהפך לבן של x, האפשרות היחידה ש-y_i שינה את דרגתו, היא אם בוצע decrease-key לאחד מבניו והוא נחתך (דרגתו לא יכולה לעלות כל עוד הוא בן של x כי link מתבצע רק בין שורשים).
הצומת y_i איבד לכל היותר c-1 בנים, אם הוא היה מאבד יותר מכך, בבן ה-c הוא כבר היה נחתך ולא היה יותר בן של x. לכן, דרגתו של y_i היא לכל הפחות $i - 1 - (c - 1)$ כלומר: $i - c$.

ב. נראה באינדוקציה שעבור נוסחת נסיגה מהצורה $a_n - a_{n-1} = a_{n-k}$, קיים *b>1* עבורו הפתרון לנוסחת הנסיגה הוא: $a_n = \Omega(b^n)$. כלומר נראה שקיים *c* עבורו: $a_n \geq c \cdot (b^n)$

בסיס: נניח שלכל $1 \leq i \leq k$ מתקיים $a_i = 1$.
אז עבור $c = \frac{1}{b^i}$ מתקיים: $a_i \geq c \cdot (b^i) = \frac{1}{b^i} b^i = 1$ $(=1)$.

צעד: נניח שקיים *b* עבורו לכל $1 \leq i \leq n-1$ מתקיים $a_i = \Omega(b^i)$ כלומר: קיים c_i עבורו: $a_i \geq c_i \cdot (b^i)$. ונראה עבור n.

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-k} \geq c_{n-1} b^{n-1} + c_{n-k} b^{n-k} = \frac{c_{n-1} \cdot b}{b} b^{n-1} + c_{n-k} b^{n-k} \geq \frac{c_{n-1}}{b} b^n$$

כלומר עבור $c = \frac{c_{n-1}}{b}$ מתקיים $a_n \geq c \cdot b^n$ ולכן: $a_n = \Omega(b^n)$.

ג. יהי T עץ בערימת פיבונאצ'י שהשורש שלו x הוא מדרגה k. הבן האחרון שלו y_k הוא צומת מדרגה לפחות k-c (מסעיף א') נסמן אותו כתת עץ T_1. שאר העץ (השורש x עם כל שאר הבנים שלו $(y_1, y_2, \dots, y_{k-1}$ הוא עץ עם שורש מדרגה k-1 נסמן אותו כתת העץ T_2. כמות הצמתים סך הכל בעץ T הוא סכום הצמתים של T_1 ועוד סכום הצמתים של T_2.

לכן ניתן לבטא את כמות הצמתים הכוללת בעזרת נוסחת הנסיגה: $a_k = a_{k-1} + a_{k-c}$ ומסעיף ב' ראינו שהפתרון לנוסחה זו הוא: $a_k = \Omega(b^k)$.

כלומר, קיים קבוע t עבורו: $a_k \geq t \cdot b^k$. נסמן את כמות הצמתים $a_k = n$.

מאריתמטיקה נקבל:

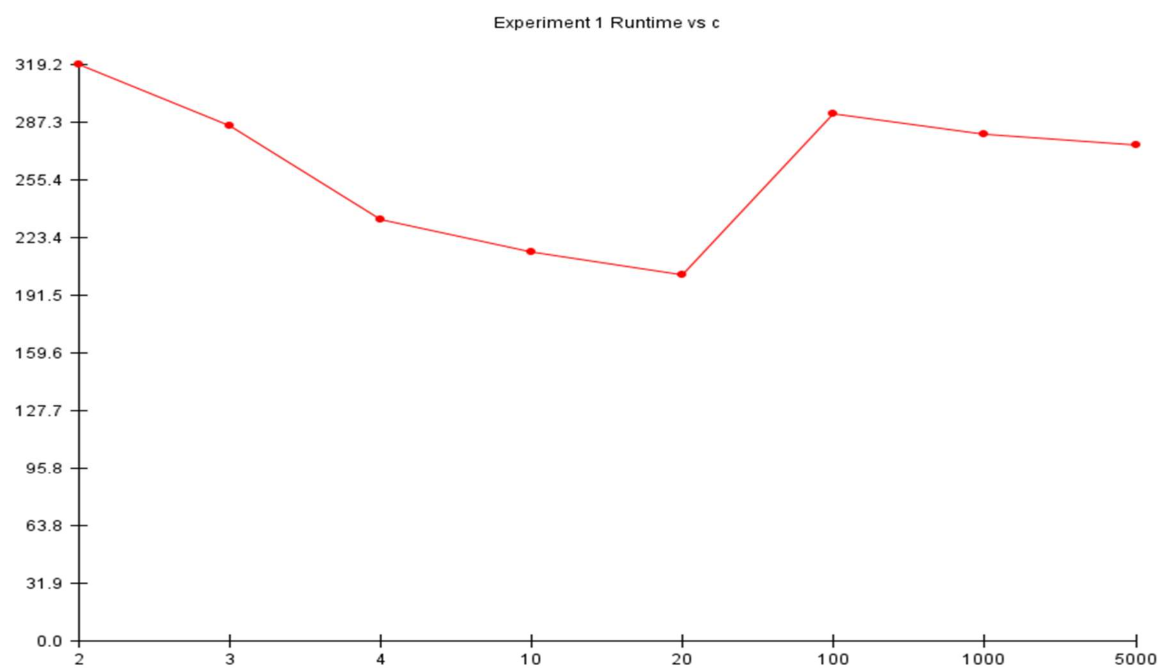
$$\log_b n \geq \log_b t \cdot b^k \rightarrow \log_b t + k \geq \log_b n \rightarrow k \geq \log_b n \rightarrow k = O(\log n)$$

כלומר הדרגה של עץ בערימה פיבונאצ'י היא $O(\log n)$.

ניסויים

<u>ניסוי ראשון</u>

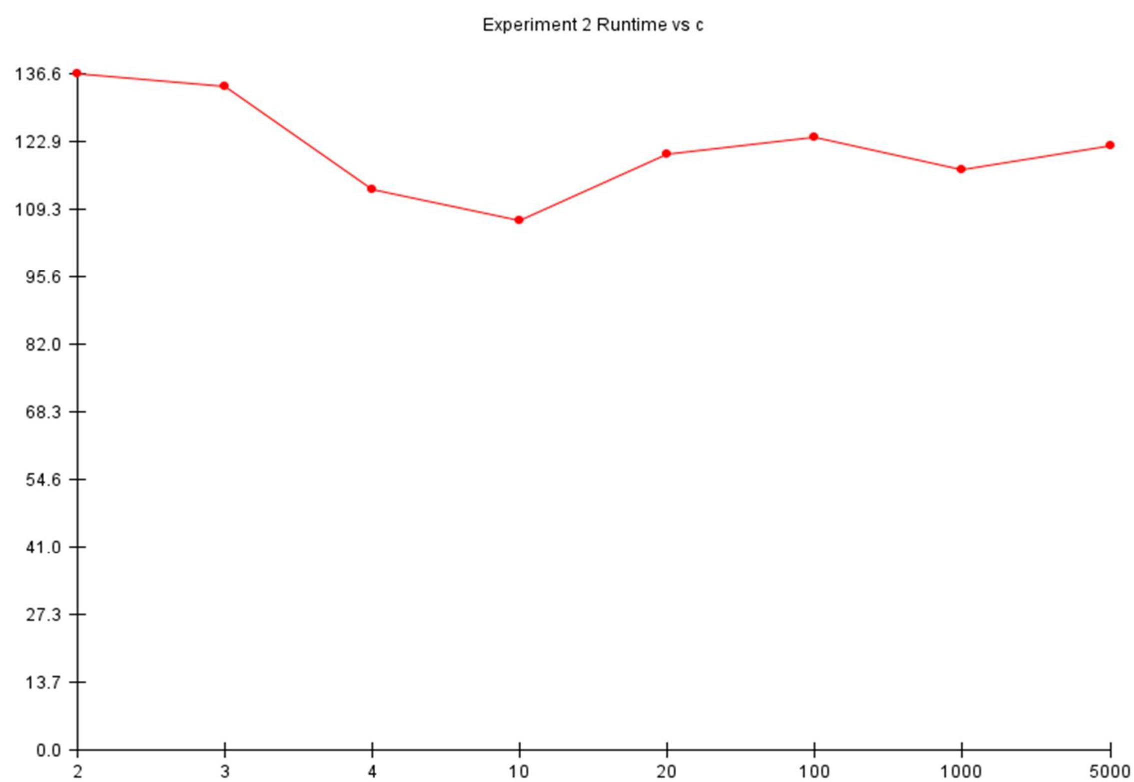
c	זמן ריצה (ms)	גודל הערמה בסיום	מספר חיבורים	מספר חיתוכים	מספר עצים בסיום
2	319	46	748898	748855	3
3	285	46	553359	553316	3
4	233	46	500843	500800	2
10	215	46	465089	465045	2
20	203	46	464642	464598	2
100	292	46	464642	464599	2
1000	280	46	464642	464599	2
5000	274	46	464642	464598	2



נבחין כי כמו שציפינו, כמות החיתוכים והחיבורים קטנה כאשר הגדלנו את הערך של c. זאת מפני שככל שc גדול יותר נצטרך לנתק צומת רק לאחר יותר מחיקות של ילדים. כמו כן, זמן הריצה לא היה שונה משמעותית בין הערכים השונים כמו שציפינו (ההשפעה של c היא בקבוע וגודל העץ זהה בין הניסויים).

ניסוי שני

c	זמן ריצה (*ms*)	גודל הערמה בסיום	מספר חיבורים	מספר חיתוכים	מספר עצים בסיום
2	136	464644	929271	464635	8
3	134	464644	929270	464634	8
4	113	*464644*	929270	464634	8
10	107	*464644*	929268	464632	8
20	120	*464644*	929228	464594	10
100	123	464644	929228	464594	10
1000	117	*464644*	929228	464595	10
5000	122	464644	929228	464595	11



לעומת הניסוי הקודם, הפעם לא ראינו שינוי גדול בכמות החיבורים והחיתוכים, מפני שהעץ מספיק גדול כדי שיהיה בהם צורך בכל מקרה (גם עבור ערכי *c* גדולים). ובדומה לניסוי הקודם גם כאן ראינו שזמני הריצה דומים ביחס לערכי *c* השונים.