Notas de robótica

Luis Castillo

2020-05-25

Se puede expresar la cinemática directa de un robot usando el producto de exponenciales (forma espacial):

$$T(\theta) = e^{[\mathcal{S}_1]\theta_1} \dots e^{[\mathcal{S}_n]\theta_n} M$$

Donde $\mathcal{S}_i = (\omega_i, v_i)$ el eje *screw* asociado con un movimiento positivo sobre la articulación i expresado en coordenadas del marco fijo $\{s\}$, θ_i es la variable de la i-ésima articulación, y $M \in SE(3)$ denota la posición y orientación del marco del efector final $\{b\}$ cuando el robot está en su posición inicial. Con esta formulación no es necesario definir marcos individuales para cada eslabón; solo es necesario definir M y los ejes *screw* $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_n$.

Para un marco de referencia dado, un eje *screw* $\mathcal{S}$ se escribe como

$$\mathcal{S} = \begin{bmatrix} \omega \\ v \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6$$

donde (i) $||\omega|| = 1$ o (ii) $\omega = 0$ y $||v|| = 1$.

Como el eje *screw* es solo un twist normalizado, entonces existe una representación matricial de 4×4, $[\mathcal{S}]$ de $\mathcal{S} = (\omega, v)$

$$[\mathcal{S}] = \begin{bmatrix} [\omega] & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in se(3), \quad [\omega] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \in se(3)$$

También, un eje de *screw* representado como $\mathcal{S}_a$ en el marco $\{a\}$ está relacionado con la representación $\mathcal{S}_b$ en el marco $\{b\}$ por

$$\mathcal{S}_a = [\mathrm{Ad}_{T_{ab}}]\mathcal{S}_b, \quad \mathcal{S}_b = [\mathrm{Ad}_{T_{ba}}]\mathcal{S}_a$$

La formula de producto de exponenciales también se puede expresar con respecto al efector final, esta es conocida como la forma del cuerpo:

$$T(\theta) = M e^{[\mathcal{B}_1]\theta_1} \dots e^{[\mathcal{B}_n]\theta_n}$$

Donde $\mathcal{B}_\rangle = [\mathrm{Ad}_{M^{-1}}]\mathcal{S}_i$, $i = 1, \dots, n$; $\mathcal{B}_i = (\omega_i, v_i)$ es el eje *screw* correspondiente a la i-ésima articulación expresada en $\{b\}$, con el robot en su posición inicial.

Y $[\mathrm{Ad}_T]$ es la representación adjunta, dada $T = (R, p) \in SE(3)$

$$[\mathrm{Ad}_T] = \begin{bmatrix} R & 0 \\ [p]R & R \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6\times 6}$$

Nótese que $[p]$ es la representación matricial *skew-symmetric* de un vector p:

$$[p] = \begin{bmatrix} 0 & -p_3 & p_2 \\ p_3 & 0 & -p_1 \\ -p_2 & p_1 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz exponencial $e^{[\mathcal{S}]\theta}$ tiene una expresión cerrada. Si $||\omega|| = 1$ entonces, para cualquier distancia $\theta \in \mathbb{R}$ recorrida a lo largo del eje,

$$e^{[\mathcal{S}]\theta} = \begin{bmatrix} e^{[\omega]\theta} & (I\theta + (1-\cos\theta)[\omega] + (\theta - \sin\theta)[\omega]^2)v \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Y si $\omega = 0$ y $||v|| = 1$, entonces

$$e^{[\mathcal{S}]\theta} = \begin{bmatrix} I & v\theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$